Epsilon – *Revista de Educación Matemática* *2025, nº 121, 83-101*
Sección: *Experiencias de aula*

Una experiencia para desarrollar el razonamiento algebraico en el aula de sexto de primaria

María Jesús Segura Carrión
mjseguracarrion@correo.ugr.es

María Burgos
mariaburgos@ugr.es

Resumen: *La importancia de desarrollar el razonamiento algebraico en la etapa de educación primaria cuenta con el respaldo tanto del currículo como de la investigación en educación matemática. En el momento en que actualmente nos encontramos, en el que el sentido algebraico comienza a encontrar su hueco en las aulas de matemáticas, interesa conocer cómo razonan algebraicamente los/las estudiantes que acaban la educación primaria cuando aún no han podido recibir la formación reglada suficiente en este sentido. Por este motivo, describimos el diseño y resultados de una implementación con estudiantado de sexto curso de primaria en la que se abordan los diferentes enfoques del algebra temprana. Los resultados muestran que los/las estudiantes resolvieron con éxito las tareas y que pudieron razonar en términos proto-algebraicos para justificar y formular identidades algebraicas o para obtener la regla general en patrones geométricos. En el caso de tareas de modelización por medio de ecuaciones, en cambio, predominaron las estrategias pre-algebraicas.*

Palabras clave: *Razonamiento algebraico elemental, Educación Primaria, Modelización, Identidades algebraicas, Patrones geométricos.*

An experience to develop algebraic reasoning in the sixth grade classroom

Abstract: *The importance of developing algebraic reasoning at the primary education level is supported by both the curriculum and research in mathematics education. At this moment in time, when algebraic thinking is beginning to find its place in mathematics classrooms, it is important to understand how students completing primary education reason algebraically, even though they have not yet received sufficient formal instruction in this area. For this reason, we describe the design and results of an implementation with sixth-grade primary students that addresses various approaches to early algebra. The results show that students successfully solved the tasks and were able to reason in proto-algebraic terms to justify and formulate algebraic identities or to derive general rules in geometric patterns. In contrast, in modeling tasks using equations, pre-algebraic strategies were more prevalent.*

Key words: *Algebraic reasoning, Primary Education, Early Algebra, Modelling, Algebraic identities, Geometric patterns.*

1. INTRODUCCIÓN

El interés por el desarrollo del razonamiento algebraico desde las primeras edades cuenta hoy día con un sólido consenso en la comunidad de investigadores en educación matemática (Kieran, 2022). Las nuevas propuestas curriculares incorporan contenidos algebraicos desde los primeros niveles de enseñanza con la intención de enriquecer la actividad matemática escolar y facilitar el

Cómo citar: Segura Carrión, M. J. y Burgos, M. (2025). Una experiencia para desarrollar el razonamiento algebraico en el aula de sexto de primaria. *Epsilon, 121, 83-101.*

tránsito de la aritmética al álgebra (ACARA, 2014; CCSSI, 2023). Para atender a esta demanda, la normativa curricular española actual integra desde la Educación Primaria el sentido algebraico como el sistema de los saberes relacionados con el reconocimiento de regularidades y patrones, la identificación y expresión de relaciones entre variables y la modelización de situaciones (MEFP, 2022). Como "lenguaje en el que se comunican las matemáticas" (p. 24486), constituye el vehículo para desarrollar en el estudiantado una adecuada competencia matemática (Alsina, 2022; Burgos, 2023), siendo esencial en el desarrollo de competencias específicas como el razonamiento, la prueba, la representación y la comunicación (MEFP, 2022).

Para Malara y Navarra (2018), el pensamiento algebraico en las primeras edades (al que se refieren como pensamiento pre-algebraico) ocurre "en todas las actividades destinadas a desarrollar en los alumnos una actitud para buscar regularidades, relaciones y propiedades, y para expresarlas primero en lenguaje natural y luego algebraico" (p. 54). Involucra el desarrollo de la aritmética relacional, la construcción progresiva del lenguaje algebraico y al desarrollo de hábitos mentales que permitan a los alumnos utilizar el lenguaje algebraico como herramienta para pensar.

El razonamiento algebraico temprano, entendido como aquel que "llevan a cabo los niños de 5 a 12 años mientras construyen significado para los objetos y formas de pensar que encontrarán posteriormente en el estudio del álgebra en la escuela secundaria" (Kieran, 2022, p. 1131), puede ser desarrollado en el aula de primaria desde diferentes enfoques (Blanton et al., 2018): a) aritmética generalizada, b) equivalencia, expresiones, ecuaciones e inecuaciones y c) estudio de las funciones. En la aritmética generalizada, las operaciones aritméticas ofrecen el contexto para generalizar, representar, justificar y razonar con las primeras estructuras y relaciones matemáticas. Se acepta que desarrollar una comprensión profunda de las operaciones, sus propiedades y relaciones es imprescindible para el estudio del álgebra en etapas superiores (Schifter y Russell, 2022). Con el estudio de las expresiones, ecuaciones e inecuaciones se pretende desarrollar una comprensión relacional del signo igual, que permita al estudiante identificar y establecer equivalencias entre distintas expresiones de manera general, acercándose a la idea de incógnita (Blanton et al., 2018). La finalidad del tercer enfoque es la de construir, describir, representar y razonar con y sobre las funciones y los elementos que las constituyen (Pittalis et al, 2020). Incluye la generalización de las relaciones entre cantidades que varían en forma conjunta, la expresión de estas relaciones y el uso de dichas expresiones para analizar el comportamiento de una función (Carraher y Schliemann, 2019). Supone razonar sobre las relaciones funcionales, de covariación o de correspondencia entre las variables involucradas en los problemas Además de las relaciones de correspondencia y covariación, otros autores consideran también los patrones recursivos, especialmente los de tipo geométrico, como forma de introducir las funciones en el ámbito escolar (Wilkie et al., 2016).

En este trabajo mostramos el diseño y resultados de una implementación con un grupo de estudiantes de sexto curso de primaria, que persigue desarrollar el razonamiento algebraico por medio de la modelización, la validación, justificación y creación de identidades algebraicas y la generalización en patrones geométricos. Analizamos tanto el éxito alcanzado por el estudiantado, como el nivel de razonamiento algebraico logrado en las diferentes tareas propuestas.

2. FUNDAMENTACIÓN

El modelo de los niveles de razonamiento algebraico elemental (RAE) desarrollado en el Enfoque Ontosemiótico (Godino et al., 2014) considera la actividad matemática como algebraica en términos la presencia de objetos y procesos de naturaleza algebraica. Así, se consideran objetos algebraicos: relaciones binarias y sus propiedades; operaciones y sus propiedades; funciones, sus operaciones y propiedades; estructuras, sus tipos y propiedades. Estos objetos intervienen y emergen de las prácticas por medio de procesos de generalización, unitarización, representación y cálculo analítico. En este modelo, la generalización se interpreta en términos de la identificación de objetos intensivos (generales, clases de objetos particulares) involucrados en las prácticas (Godino et al., 2014). El objeto intensivo no aparece hasta el momento en que el sujeto muestra el criterio o regla que se aplica para delimitar los elementos constituyentes del conjunto. Además de la generalización que da lugar al conjunto, puede ocurrir un proceso de unitarización, por el que el conjunto pasa a ser algo nuevo, diferente de los elementos que lo constituyen, una entidad unitaria (objeto considerado globalmente como un todo) que puede ser representada y participar en otras prácticas, para dar lugar a nuevos objetos intensivos. Para ello, la nueva entidad unitaria tiene que ser materializada mediante un gesto, icono, nombre o símbolo. Así, tiene lugar un proceso de representación que acompaña a la generalización y unitarización. Por último, los símbolos se desprenden de los referentes a los cuales representan para convertirse en nuevos objetos sobre los cuales se opera de manera sintáctica o formal (Godino et al., 2014).

Recientemente, Burgos et al., (2024) han ampliado el modelo de niveles de RAE propuesto por Godino et al. (2014), estableciendo subniveles que facilitan una visión más microscópica de las estructuras implicadas. Para ello consideran diferentes grados de sofisticación en rasgos esenciales del razonamiento algebraico como son la generalización, el razonamiento estructural, funcional y la analiticidad (Figura 1).

Figura 1

Estratos de generalización y de razonamiento funcional (Adaptado de Burgos et al., 2024).

Se consideran dos ideas claves como criterio operativo para distinguir la generalización aritmética de la generalización algebraica o proto-algebraica: la deducción y la analiticidad. Para que la generalización sea algebraica, debe haber una deducción de una expresión que permita calcular el valor de cualquier término en una secuencia. Además, se requiere que el reconocimiento de la característica común como algo plausible, sea utilizada de manera analítica para derivar una fórmula que necesariamente proporcione el valor de cualquier término. Así distinguen tres formas de generalización: *pre-algebraica*, cuando no hay deducción ni tratamiento analítico, la abducción genera un procedimiento, pero no una expresión directa de la generalidad; *proto-algebraica*, cuando lo que se deduce, lo común, se expresa a través de instancias particulares de la variable y se observan rasgos analíticos incipientes (proto-analiticidad); *algebraica*, cuando la fórmula generada es usada de manera analítica para deducir formas canónicas de expresión.

Es posible de forma similar establecer estratos de razonamiento estructural, entendido este como razonar con y sobre estructuras (Burgos et al., 2024). El razonamiento *pseudo-estructural* supone un uso de los números que excede de lo meramente aritmético, en el que las relaciones numéricas tienen la intención de expresar generalidad. El razonamiento estructural es incipiente si las propiedades de operaciones y relaciones se aplican localmente, mientras que se considera parcial cuando las propiedades de operaciones y relaciones se aplican de manera general pero no aparecen correlacionadas. En el razonamiento estructural completo las propiedades de las operaciones y relaciones binarias se aplican de forma general y correlacionada.

Se considera *razonamiento funcional proto-algebraico* aquel en el que la relación funcional se reconoce de manera general pero no se identifica la estructura de la función ni se transforma la expresión de la relación (Figura 1). En el *razonamiento recursivo general*, se explicita un patrón recursivo como regla general entre valores sucesivos arbitrarios sin referencia a casos particulares (Blanton et al., 2015). El *razonamiento funcional (general) incipiente*, lleva a reconocer la relación general (covariación o correspondencia) de forma cualitativa o a través de un conjunto de casos, pero sin llegar a dar una expresión de la transformación entre las cantidades específicas. En el *razonamiento funcional parcial*, se identifica la relación funcional y se expresa la transformación entre las cantidades específicas, pero no se articulan dominio, imagen y regla de correspondencia. No hay un cálculo sintáctico implicado en el tratamiento de la regla. Finalmente, el razonamiento funcional algebraico, implica la consideración de la función como estructura.

3. METODOLOGÍA

La metodología seguida se inscribe en el enfoque de las investigaciones de diseño instruccional (Kelly et al., 2014), pues focaliza la atención en el aprendizaje en contexto. Se persigue comprender y mejorar las posibilidades de fomentar el razonamiento algebraico de estudiantado de primaria a través de tareas específicas, de modo que la investigación y el diseño del entorno de aprendizaje son interdependientes.

3.1. Contexto y Participantes

En la experiencia participó un grupo de 22 estudiantes de sexto curso de educación primaria (11-12 años) de un centro público de educación infantil y primaria de un municipio de la provincia de Granada. La selección de la muestra fue intencional atendiendo a la disponibilidad e interés del centro educativo, el tutor y los escolares por formar parte de la experiencia formativa. El grupo había estudiado previamente números naturales y sus propiedades, números enteros, su representación y relación de orden y, por último, potencias, múltiplos y divisores, criterios de divisibilidad. Con respeto al nivel académico promedio del grupo, aproximadamente el 20% del alumnado presenta dificultades del aprendizaje en matemáticas. A pesar de ello, se muestran motivados y muestran un elevado interés en el desarrollo de las tareas.

3.2. Diseño e Implementación

En la experiencia se diseñaron cinco sesiones de trabajo, de 55 minutos de duración cada una. Al comienzo de cada sesión, la primera autora del trabajo, que ejercía también de profesora en prácticas, introducía las actividades que se iban a abordar y permitía al alumnado consultar las dudas de comprensión surgidas. A continuación, entregaba una ficha de trabajo a cada estudiante con los enunciados de las tareas. Disponían de 40 minutos para responder de manera individual a los problemas sobre su hoja de trabajo y después se procedía a la puesta en común de las soluciones. Los/las estudiantes decidían voluntariamente su participación (siendo en todas las sesiones muy activa), siendo la profesora quien moderaba su participación, motivando la negociación de diferentes estrategias posibles y la validación de las soluciones.

En las dos primeras sesiones de trabajo, las situaciones pretendían trabajar la aritmética generalizada: propiedades y relaciones entre números en problemas verbales (sesión 1) y relaciones (igualdad, desigualdad) numéricas que implicaban las propiedades elementales de la suma y la resta (sesión 2). En este trabajo mostramos los resultados derivados de las sesiones 3, 4 y 5, destinadas respectivamente a la modelización, las identidades algebraicas y el estudio de patrones. A continuación, describimos las tareas planteadas en cada una de estas sesiones.

3.2.1. Sesión 3. Modelización

En la sesión 3 se planteó la siguiente situación:

1. *Ana lanzó 10 veces a canasta. Cada vez que acertó anotó 3 puntos y cada vez que perdió fueron 2 puntos. Si al final tuvo 15 puntos, ¿Cuántas veces falló? Explica como lo has averiguado.*
2. *Luis también quiso jugar. Encestó 6 y fallo 2 tiros. Al final obtuvo 16 puntos. Cada vez que acertó le puntuaron igual que a Ana, pero cree que le restaron más cuando falló.*
   a) *¿Estás de acuerdo con Luis? Explica por qué.*
   b) *¿Cuánto le penalizó cada fallo? Explica como lo has averiguado.*

El problema, de creación propia, implica la modelización mediante ecuaciones con coeficientes enteros y soluciones naturales. Tanto en esta sesión como en la siguiente, aparecen implicados números enteros, a petición del tutor del grupo, pues acababan de estudiar dicho tema. Con la tarea se pretende descubrir y caracterizar las estrategias de los/las estudiantes, así como si pueden trascender del ensayo-error, para identificar y aplicar relaciones de tipo aritmético para resolver el problema. Al comienzo se observó cierta confusión con el enunciado que llevaba a los/las estudiantes a pensar que Luis había lanzado 10 veces a canasta igual que Ana. La profesora aclaró esta duda inicial.

3.2.2. Sesión 4. Identidades algebraicas

En esta sesión se plantearon las siguientes dos actividades:

Actividad 1. A continuación aparecen unas igualdades. Tienes que averiguar para qué valores del número desconocido (representado con una letra) es verdad cada igualdad. Justifica siempre tu respuesta:

1. $-3 + a = a - 3$
2. $-6 + b = -2$
3. $-2 + c - 3 = -5 + c$
4. $-2 + d = d + 2$

Actividad 2. Inventa tú ahora igualdades como las anteriores, donde aparezcan números enteros (-2, -3,…-525, 4, 6, …323) y letras que representen a números desconocidos:

1. *Igualdad 1: que siempre sea verdad. ¿Por qué es siempre verdad?*
2. *Igualdad 2: que siempre sea falsa. ¿Por qué es siempre falsa?*
3. *Igualdad 3: que sea verdad sólo a veces. ¿Por qué es verdad sólo a veces?*

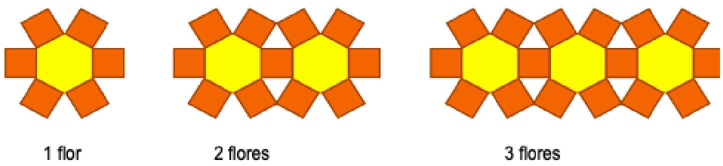
En la primera actividad se debía decidir y justificar la validez de identidades algebraicas que involucran las propiedades conmutativa, asociativa y compatibilidad de la igualdad con la suma. Mientras que las identidades 1) y 2) son siempre verdades, la segunda lo es sólo para un valor de la incógnita, y la última no es válida en ningún caso.

En la segunda actividad, se trataba de crear tres identidades: siempre verdadera, siempre falsa o sólo válida para determinados valores del símbolo literal, justificando el rango de validez. Los/las estudiantes no mostraron dificultad para comprender la tarea, a pesar de no estar familiarizados con los símbolos literales, quizá porque durante la sesión 1, habían trabajado con símbolos (no literales) para identificar cuando dos operaciones eran las mismas cuando los sumandos tenían cifras enmascaradas por medio de formas geométricas.

3.2.3. Sesión 5. Patrones geométricos

En la sesión 5, se propuso la siguiente tarea, adaptada de Wilkie (2016), con la intención de potencial y evaluar el razonamiento funcional por medio de patrones de crecimiento:

Julio hizo una cadena de margaritas con los bloques del patrón:



a) *¿Cuántos hexágonos y cuadrados necesitará Julio para hacer una cadena de margaritas con 7 flores? Explica tu respuesta.*
b) *¿Cuántos hexágonos y cuadrados necesitará Julio para hacer una cadena de margaritas con 20 flores? Explica tu respuesta.*
c) *Para cualquier número de margaritas que te den, ¿cómo calculas el número total de bloques que necesitará Julio para su cadena? Explica tu respuesta.*
d) *¿Es posible hacer una cadena de margaritas que utilice exactamente 100 cuadrados? Explica tu respuesta.*

Los apartados a) y b) persiguen extender el patrón de crecimiento identificando su estructura (generalización cercana y lejana), c) busca que los/las estudiantes describan la relación entre el número de hexágonos y cuadrados de la cadena de flores y su posición en la secuencia, para derivar la regla general; el apartado d) profundiza en el análisis del patrón por medio de la relación inversa. Aunque los/las estudiantes no mostraron dificultad inicial para comprender los diferentes apartados de la tarea, la profesora insistió en que se detuvieran en apreciar que compartían las flores en la cadena.

4. RESULTADOS

En esta sección, presentamos los resultados obtenidos a partir del análisis de las respuestas escritas del estudiantado a las tareas propuestas en cada una de las sesiones de trabajo.

4.1. Modelización

En la tabla 1 resumimos los tipos de estrategia empleados por el alumnado para resolver la tarea, mostrando el nivel de RAE asociado y el grado de corrección (C respuesta correcta, I respuesta incorrecta). A continuación, ejemplificamos estas estrategias y describimos los principales errores encontrados.

Tabla 1

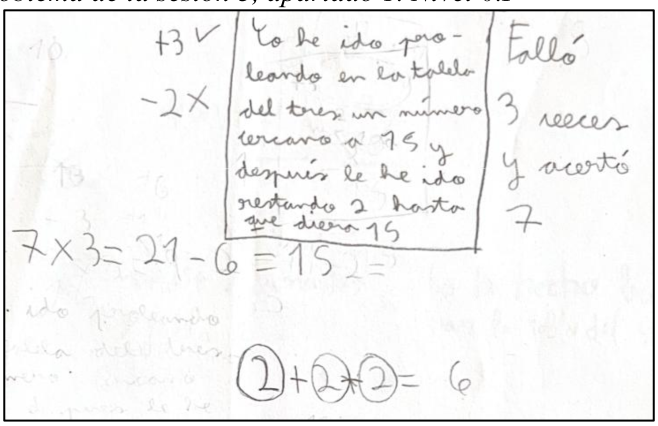
Tipos de estrategia, grado de corrección y nivel de RAE implicado en la resolución de la tarea.

Tipo de estrategia	Nivel de RAE	Apartado 1)		Apartado 2)	
		C	I	C	I
Estrategia no explícita	No aplica	2	1		
Ensayo-error	0.I.	10	0		
Determina puntación total restada para obtener valor del fallo	0.I.	2	2	15	7
Búsqueda de relaciones con soporte diagramático	0.II.	4			
No responde			1		
Total		18	4	15	7

Como muestra la Tabla 1, para resolver la tarea de modelización emplearon en todo caso un razonamiento pre-algebraico, llegando a la solución correcta en la mayoría de los casos, usando estrategias de ensayo-error (Figura 2) o bien razonando en base a las relaciones y propiedades de los números y operaciones empleadas, algo característico de una actividad aritmética sofisticada (Figura 3).

Figura 2

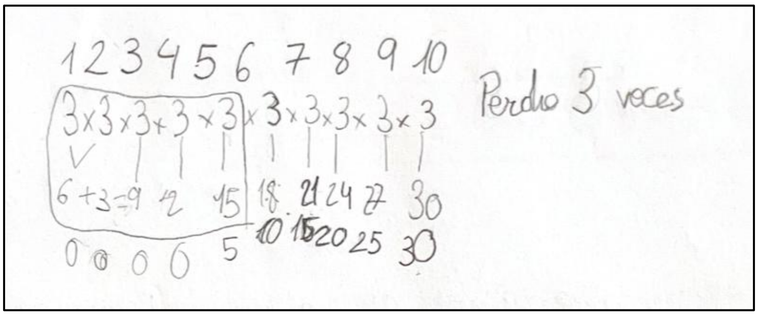
Solución de E11 al Problema de la sesión 3, apartado 1. Nivel 0.I



E11, reconoce que sigue una estrategia de ensayo-error para resolver el primer apartado del problema ("he ido probando en la tabla del tres un número cercano a 15 y después le he ido restando 2 hasta que me diera 15*"*). Opera con intensivos de primer grado, es decir con números naturales, tratando al signo igual solo en el sentido operacional, por lo que su nivel de RAE es 0.I según Burgos et al. (2024). En cambio, E5 (Figura 3) hace un uso pseudo-estructural de las relaciones numéricas que le lleva a determinar las combinaciones de aciertos y fallos posibles, empleando además una estructura diagramática como medio para organizarlas. La actividad desarrollada corresponde en tal caso a un nivel 0.II según Burgos et al. (2024).

Figura 3

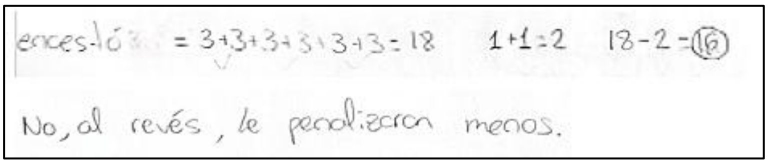
Solución de E5 al Problema de la sesión 3, apartado 1. Nivel 0.II



En la segunda parte del problema, los/las estudiantes recurrieron a estrategias aritméticas (nivel 0.I de RAE, operaciones elementales con números naturales y uso del signo igual sólo en sentido operacional). De forma mayoritaria, respondieron como E13 cuya solución se muestra en la Figura 4.

Figura 4

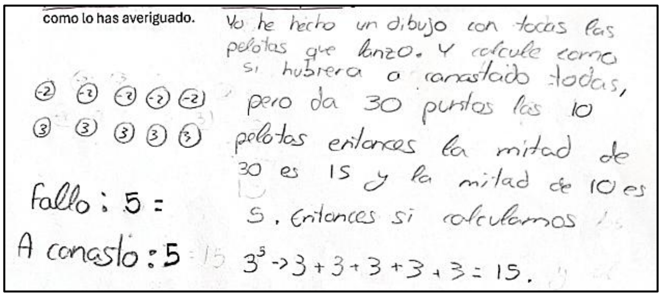
Solución de E13 al Problema de la sesión 3, apartado 2. Nivel 0.I



Como E13, hubo estudiantes que determinaron cuántos puntos sumaron en aciertos (empleando en ese caso la suma repetida 3+3+3+3+3+3=18) y después valoraron cuántos puntos se le restaron para lograr la puntuación final de 16. Esto permite a E13 determinar que en cada tiro fallado le quitaron a Luis un punto, observando que "le penalizaron menos".

Figura 5

Solución de E7 al problema de la sesión 3, apartado 1.

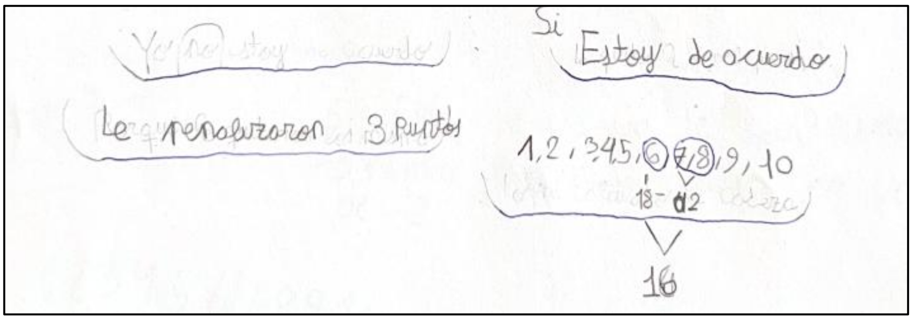


Los errores asociados a esta tarea se basan en establecer una cierta proporcionalidad entre el número de aciertos y el número de fallos. Algunos estudiantes afirman como E7 (Figura 5) que

“30 puntos son las 10 canasta, entonces la mitad de 30 es 15, entonces la mitad de 10 es 5”, sin reconocer el ajuste de la penalización al no encestar. En la respuesta de E7 se observa un uso incorrecto de la notación como potencia (3^5 para indicar la suma de 3 cinco veces, 3×5).

Figura 6

Respuesta de E1 al problema de la sesión 3, apartado 2.



Por otro lado, en el apartado 2, las respuestas erróneas muestran una incongruencia entre la práctica operativa (donde identifican una diferencia de dos puntos negativa) y la práctica discursiva, que los lleva, como a E1 en la Figura 6, a indicar que le penalizaron tres puntos.

4.2. Identidades Algebraicas

En la Tabla 2 se resumen los tipos de estrategia, el nivel de RAE asociado y la corrección de las respuestas del estudiantado a la Actividad 1 de esta sesión, en la que se debía decidir y justificar la validez de identidades algebraicas.

Tabla 2

Tipos de estrategia, grado de corrección y nivel de RAE. Actividad 1. Identidades algebraicas.

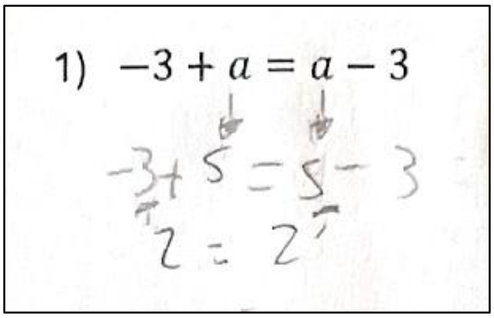
Tipo de estrategia	Nivel de RAE	$-3+a=a-3$		$-6+b=-2$		$-2+c-3=-5+c$		$-2+d=d+2$	
		C	I	C	I	C	I	C	I
Verificación sobre un único caso particular.	0.I	8				15		1	4
Uso de casos particulares para comprobar la veracidad								8	
Diferencia las constantes según signo	0.II								5
Uso de ejemplo genérico	1.I	13				5	1		
Reconoce propiedad y valida en casos particulares								2	
Obtiene el único valor posible (resuelve la ecuación aritmética)	2.I			21					
No responde									1
Total		21		21		20	1	11	10

Como podemos observar todo el estudiantado identifica de manera correcta la validez de la identidad $-3+a=a-3$, la mayoría lo hace para $-2+c-3=-5+c$ y la mitad reconoce que

$-2 + d = d + 2$ es siempre falsa. Es frecuente que recurran a un único caso particular para comprobar la validez, en el caso de las identidades $-3 + a = a - 3$, y $-2 + c - 3 = -5 + c$, si bien no añaden mayor justificación. La actividad en este caso se considera aritmética (pre-algebraica de nivel 0.I de RAE). Por ejemplo, como muestra la Figura 7, E12 asigna un valor numérico al símbolo literal y aprecia que el resultado de operar a izquierda y derecha del signo igual es el mismo, por lo que considera cierta la identidad. En estos casos, los ejemplos se usan sin seguir ningún criterio particular (empirismo ingenuo, Beltrán-Meneu et al., 2024).

Figura 7

Respuesta de E12 a la Actividad 1.1).



Con relación a la identidad $-2 + d = d + 2$, ocho estudiantes recurrieron a más de un ejemplo, explicando de manera oral a la profesora, en la puesta en común "hemos ido probando hasta que hemos visto que no se podía hacer", haciendo referencia al uso de varios casos particulares para reconocer la falsedad de la expresión. Así parece que encontrar un valor para el que una identidad es válida les es suficiente para considerar su validez general, pero cuando la identidad no se cumple sobre un valor, necesitan recurrir a otros casos, para adquirir certeza. La particularización produce ejemplos, pero no hay sentido del contraejemplo. En cualquier caso, aunque reconocen que justificar la validez de las identidades supone comprobar que lo que aparece a ambos lados del signo es igual es lo mismo, el símbolo literal tiene un carácter de sustitución específica.

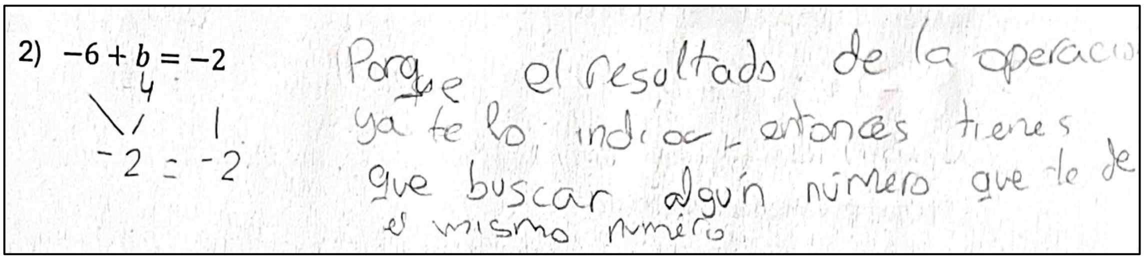
Por otro lado, otros estudiantes se basaron en la diferencia del signo de la constante que se suma al símbolo literal para apreciar que el valor de la izquierda no puede ser el mismo que el de la derecha. Por ejemplo, E12 afirma "nunca va a dar un valor porque uno es un número positivo y otro negativo". En este caso, se observa un tratamiento pre-estructural de la identidad, si bien no llegan a describir las expresiones en su totalidad (números, operaciones, relación), recurriendo a algunos casos particulares para apoyar esta afirmación. En este caso, se considera por tanto que la actividad es de nivel 0.II de RAE.

Es posible reconocer cierto razonamiento proto-algebraico en la respuesta de trece estudiantes, quienes justifican la veracidad de la identidad $-3 + a = a - 3$ en base a una propiedad, si bien dan un valor particular al símbolo literal para adquirir certeza. En este caso, el caso particular actúa como ejemplo genérico, no por su valor sino por su estructura. Por ejemplo, E17 afirma "$-3 + 5 = 5 - 3$ porque el orden de los factores no altera al producto". E17 enuncia una propiedad general en lenguaje natural, lo que corresponde al nivel 1.I de RAE según Burgos et al. (2024), si bien confunde la expresión con relación al producto y no la suma.

En el caso del apartado dos, responden de manera similar a E6 (Figura 8) encontrando el único valor del símbolo literal para el que es verdadera la igualdad, lo que supone un nivel proto-algebraico 2.I. Se observa cómo E6 aprecia la necesidad de invertir las operaciones para obtener el resultado, lo que supone la resolución de la ecuación aritmética implicada (Burgos et al., 2024).

Figura 8

Respuesta de E6 a la Actividad 1. 2).

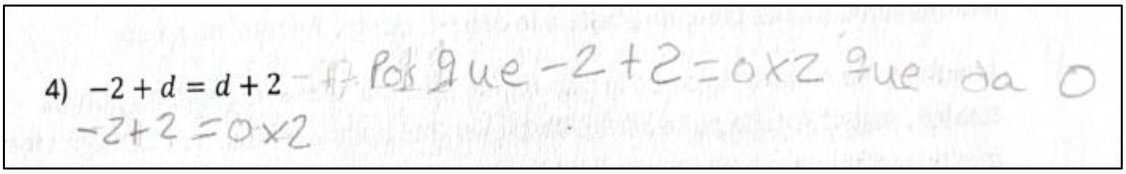


En el caso de la identidad algebraica $-2 + c - 3 = -5 + c$, la mayoría del estudiantado recurre a casos particulares para decidir la validez de la identidad (ejemplo empírico, nivel 0.I de RAE). Por el contrario, aquellos que reconocen las propiedades conmutativa y asociativa de en la suma de números enteros, se apoyan en un ejemplo genérico (valor estructural más que operacional) para justificar la validez de la identidad. Por ejemplo, E17 justifica "Porque -2 y -3 da -5 y en el otro lado pone -5, -2+5-3 = -5+5." Aunque E17 no reconoce el carácter unitario de la identidad, razona en base a las propiedades asociativa y conmutativa para identificar la igualdad de las expresiones $(-2 + a - 3)$ y $(-5 + a)$ al "otro lado", mostrando un razonamiento estructural parcial.

Es en la última identidad donde se aprecian los errores más significativos. Por un lado, al operar con los casos particulares, transformando la operación suma de la derecha en una de multiplicación, y por otro, al ignorar el valor del signo como determinante para decidir la validez. En el primer caso, los/las estudiantes seleccionan de manera intencionada (experimento crucial, Beltrán-Meneu et al., 2024) como E8 en la Figura 9, el valor de $d = 2$.

Figura 9

Solución errónea de E8 a la Actividad 1.4)



En el segundo caso, cinco estudiantes justifican la veracidad de forma similar a E2 apreciando que "dan los mismos resultados salvo que uno es negativo y otro positivo".

El estudiantado creó expresiones algebraicas, en su mayoría correctas como respuesta a los diferentes apartados de la actividad 2 planteada en esta sesión. Usualmente se usaron uno o varios símbolos literales a uno o ambos lados del signo igual, salvo en tres ocasiones en las que crearon identidades aritméticas ciertas y otras dos, en las que formularon identidades aritméticas falsas. Sin embargo, como muestra la Tabla 3, no siempre justificaron con éxito la validez de dichas identidades.

Tabla 3

Justificación, corrección y nivel de RAE implicado en las respuestas a la Actividad 2.

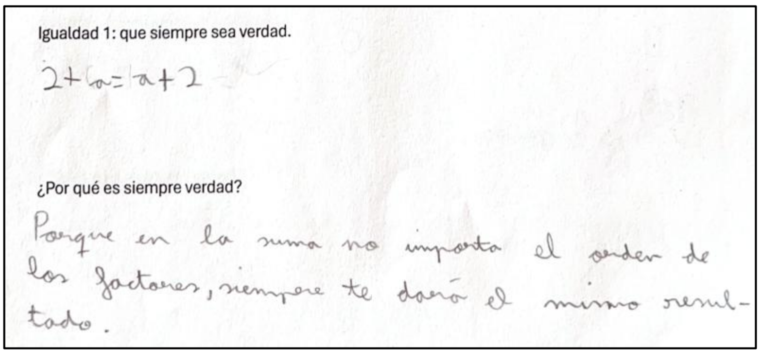
Justificación. Atribución de significado al símbolo literal	Nivel de RAE	Identidad 1 Siempre cierta		Identidad 2 Siempre falsa		Identidad 3 Cierta a veces	
		C	I	C	I	C	I
Caso particular	0.I	3		2			
Ejemplo genérico	0.II		1				
Símbolo literal como receptor/Propiedad general	1.II	1		4	3	1	
Símbolo literal como incógnita o variable. Reconoce dependencia respecto del símbolo literal	2.I	11	4	7	2	17	1
No justifica				2			1
No contesta			1		1		1
Total		15	6	15	6	18	3

En la Tabla 3 se muestran las estrategias empleadas para justificar la validez de las identidades y cuál es el papel atribuido a los símbolos literales cuando los emplean. Cuando los/las estudiantes emplean sólo valores concretos para producir identidades aritméticas siempre verdaderas (o siempre falsas), su justificación se basa únicamente en que el resultado de operar a izquierda o derecha es igual (o distinto). En este caso, la actividad se considera de nivel 0.I, pues sólo se opera con números particulares y el signo igual no adquiere significado relacional.

La mayoría de los/las estudiantes desarrollaron un razonamiento proto-algebraico de nivel 2.I, dado que a través de sus justificaciones atribuyen al símbolo literal el carácter de número generalizado en las identidades 1 (siempre verdaderas) e identidades 2 (siempre falsas). En aquellos casos en los que la actividad es proto-algebraica de nivel 1.II, general identidades algebraicas en las que los símbolos literales se interpretan como receptores de valores numéricos concretos y como tales se les asignan (Figura 12). La mayoría de las identidades siempre verdaderas, se construyeron a partir de las propiedades asociativa y conmutativa de la suma (ver Figura 10). Los/las estudiantes recurrieron a estas propiedades para justificarlas (aunque en algunos casos se refieran a "factores" y "producto" en la conmutatividad de la suma), exhibiendo un razonamiento estructural completo (correlación entre propiedades y relación de igualdad con números naturales). Lo indeterminado se expresa explícitamente en términos genéricos del lenguaje natural (generalización proto-algebraica).

Figura 10

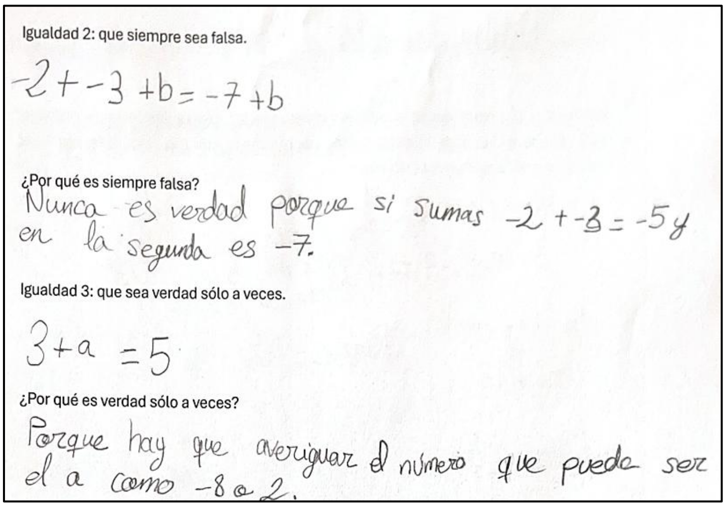
Identidad siempre verdadera (E11)



Es frecuente que el estudiantado genere identidades con estructura similar a las de la actividad previa, pero no siempre para crear identidades con el mismo rango de validez. Por ejemplo, como muestra la Figura 11, E5 recurre a las propiedades asociativa y compatibilidad de la igualdad con la suma (equilibrio, Wilkie y Hopkins, 2024) para en este caso general una identidad siempre falsa. También es frecuente, que reconozcan que la identidad 3 es cierta para determinado(s) valor(es), pero que no lo obtengan ("depende del valor que le pongas puede ser o no", E6) o consideren algunos que no son válidos, porque ignoran los signos, como ocurre con E5.

Figura 11

Identidad siempre falsa, identidad cierta solo a veces (E5)

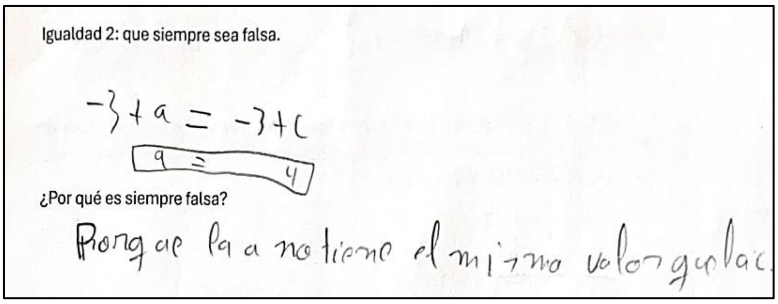


En la justificación de la falsedad de la identidad 2, se observan además dos argumentos frecuentes: aquellos que consideran como E18 que "da igual el valor que le des, no se puede hacer", indicando la irresolubilidad de la ecuación que plantean, o aquellos que indican como E7 que $7 + 3 + a = 1 + a$ es siempre falsa "porque si a la a le asignas un número luego no lo puedes cambiar". Parece reconocer que el símbolo literal está en lugar de un número, que debe ser el mismo a la izquierda y derecha del signo igual, de manera que no puede cierta la igualdad si se suma a constantes distintas.

Se observa también que cuando usan dos símbolos literales no identifican la dependencia que establece la relación. Por ejemplo, E10 (Figura 12), asume en el caso de la identidad 2, que a y c son números diferentes y, por lo tanto, nunca va a ser una igualdad verdadera. En este caso, los símbolos literales actúan como receptores de números concretos, por lo que la actividad se considera de nivel 1.II de acuerdo con Burgos et al. (2024).

Figura 12

Identidad siempre falsa, dos símbolos literales (E10).



Con respecto a los errores, muestran confusión en la justificación a través de las propiedades de las operaciones, no reconocen la relación entre las variables (Figura 12) o no consideran resoluble la ecuación, asumiendo una identidad que es cierta solo en un valor, por ejemplo, la que propone E17, $-8+c=525+1$, como identidad siempre falsa "porque no se puede resolver".

4.3. Patrones Geométricos

La tabla 4 recoge los diferentes tipos de estrategias, empleadas por los/las estudiantes para determinar el número de cuadrados en una cadena de 7 margaritas (generalización cercana), de 20 margaritas (generalización lejana) y para una cadena con un número cualquiera de margaritas (regla general). Todos determinaron correctamente el número de hexágonos, por lo que centramos la atención en esta parte. Se incluye además el grado de corrección de las respuestas (C: correcta, I: incorrecta).

Tabla 4

Estrategias y grado de corrección. Problema de las margaritas (apartados a, b, c)

Estrategia para determinar el número de cuadrados para el número dado (n) de flores	Generalización cercana ($n=7$)		Generalización lejana ($n=20$)		Regla general	
	C	I	C	I	C	I
No explícita		1				3
Conteo/soporte icónico	3			3		
Recursiva; descompone patrón	4			2		2
$n\times 5+1$			1		1	
$(n-1)\times 5+6$	1		2		3	
$n\times 6$	2	2		1		1
$n\times 6-(n-1)$	8		9		9	
$n\times 6-n+1$	1		1		1	
$(n-1)\times 6$						
No contesta				3		3
Total	19	3	13	9	14	8

De los 22 estudiantes que resolvieron el problema, once justificaron su estrategia, tanto en la generalización cercana como en la lejana, haciendo referencia a las características propias de patrón: los pétalos (cuadrados) que comparten o que todos tienen 5 pétalos salvo el último que tiene 6. Los demás no justificaron cómo habían llegado a obtener el número de cuadrados. Como podemos observar en las tablas 4 y 5 los/las estudiantes emplearon diversas estrategias de resolución, siendo también diverso el nivel de RAE logrado.

Tabla 5

Nivel de RAE logrado en la tarea Cadena de margaritas.

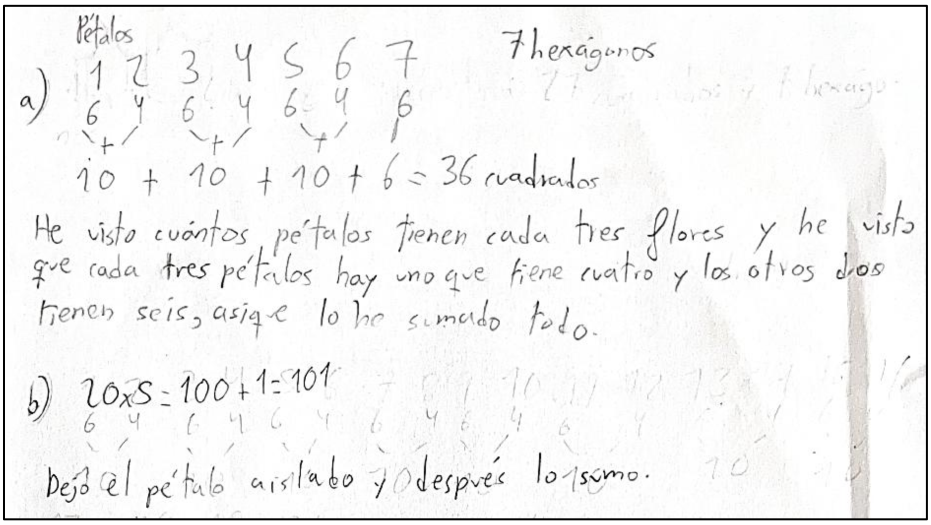
Nivel de RAE	Generalización o razonamiento funcional	Generalización cercana	Generalización lejana	Regla general	Total
0.I	Generalización aritmética	7	4	1	12
0.II	Generalización aritmética sofisticada. Razonamiento funcional particular	2	1		3
1.I	Generalización factual	10	12	6	28
2.I	Generalización contextual	2	2	6	10

2.II	Razonamiento funcional incipiente Razonamiento funcional parcial			3	3
	Sin estrategia explícita	1		3	4
	No contesta		3	2	5

Aquellos que usaron una estrategia de conteo, usualmente con soporte icónico, para determinar el número de cuadrados necesarios en una cadena de 7 flores (nivel 0.I de RAE) y que emplearon esta misma estrategia en el apartado b) lo hicieron de manera incorrecta en este último caso.

Figura 13

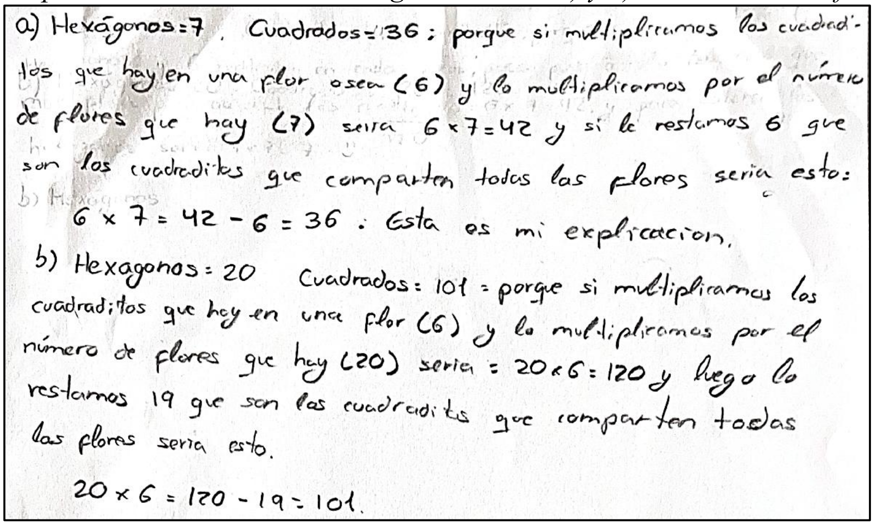
Respuesta de E12. Cadena de margaritas, apartados a) (Nivel de RAE 0.II) y b) (nivel de RAE 1.I)


Pétalos
a) 1 2 3 4 5 6 7 7 hexágonos
6 4 6 4 6 4 6
10 + 10 + 10 + 6 = 36 cuadrados
He visto cuántos pétalos tienen cada tres flores y he visto que cada tres pétalos hay uno que tiene cuatro y los otros dos tienen seis, asique lo he sumado todo.
b) 20x5 = 100 + 1 = 101
Dejó el pétalo aislado y después lo sumo.

Parte del estudiantado utilizó estrategias de naturaleza aritmética-sofisticada (nivel 0.II de RAE) para resolver los primeros ítems. Por ejemplo, para responder al apartado a), E12, descompone el patrón observando que entre cada dos flores a las que se contaran cuatro pétalos (cuadrados) la del medio tendría cuatro. Se observa una mirada pseudo-estructural, la relación funcional se construye como un conjunto de relaciones particulares entre valores específicos correspondientes. Después cambia su estrategia en el apartado b), abstrayendo del proceso anterior, la cantidad fija de pétalos en cada flor (independientemente de su posición) y añadiendo “el pétalo aislado” para determinar la regla de formación (nivel 1.I de RAE).

Figura 14

Respuesta de E7. Cadena de margaritas, items a) y b). Generalización factual. Nivel 1.I RAE.



a) Hexágonos=7 , Cuadrados=36; porque si multiplicamos los cuadraditos que hay en una flor osea (6) y lo multiplicamos por el número de flores que hay (7) seria 6×7=42 y si le restamos 6 que son los cuadraditos que comparten todas las flores seria esto:
6 × 7 = 42 − 6 = 36 . Esta es mi explicacion.

b) Hexagonos: 20 Cuadrados: 101 = porque si multiplicamos los cuadraditos que hay en una flor (6) y lo multiplicamos por el número de flores que hay (20) seria = 20×6=120 y luego lo restamos 19 que son los cuadraditos que comparten todas las flores seria esto.
20 × 6 = 120 − 19 = 101.

Quienes usaron la estrategia $(n \times 6) - (n - 1)$ en el apartado a) la mantuvieron en b) y c). En este caso, los/las estudiantes muestran como E7 en la Figura 14, una generalización de tipo factual. Lo indeterminado no llega a enunciarse de forma explícita, sino que se expresa a través de acciones concretas. Lo que se generaliza es el esquema operacional, potencialmente reiterativo, que permite determinar el número de cuadrados.

En otros casos, como el de E9, muestran una generalización de tipo contextual (nivel 2.I de RAE) cuando indican “multiplicando los hexágonos por los cuadrados menos los que comparten”. La regla general que permite determinar el número de cuadrados necesario para construir una cadena con un número dado de flores (igual al de hexágonos) se expresa en términos genéricos, vinculada al contexto, pero no en el plano de lo numérico. Aquellos estudiantes que no detectaron las características del patrón generalizan multiplicando por seis, como E20 “multiplicando los cuadrados”. Solo tres estudiantes no respondieron al apartado c).

Las respuestas más frecuentes al apartado c), muestran una generalización de tipo contextual, y un razonamiento funcional incipiente. Se describe la relación general entre el número de flores (posición en el patrón) y el número de cuadrados, pero no se identifican las cantidades específicas que se comparan por lo que no llega darse la transformación entre ellas. Por ejemplo, E7 indica en c) “multiplicamos los cuadraditos que hay en una flor por el número de flores que hay y luego le restamos los cuadraditos que comparten”.

En otros casos, los/las estudiantes responden en c) como E22, “el número de hexágonos se multiplica por seis y se le resta el número de hexágonos menos uno” $(n \times 6 - (n - 1))$. La estudiante expresa la transformación entre las cantidades específicas, si bien no articula dominio, imagen y regla de correspondencia, por lo que se considera un razonamiento funcional parcial (Burgos et al., 2024).

Por último, en el apartado d) se espera que el estudiantado haga uso de la relación funcional dada en c) para determinar si es posible construir una cadena de flores para un número de cuadrados dado. Se persigue avanzar en la unitarización de la relación funcional y su tratamiento inverso (Burgos, 2023). Dos estudiantes responden “no” sin mostrar una estrategia explícita. Tres estudiantes se apoyaron en los resultados obtenidos en b), como E12 “No, en el b se necesitan 101, de hecho”. Algunos estudiantes que en los apartados anteriores recurrieron a la regla $(n \times 6) - (n - 1)$, afirman que se puede realizar, ya que “5 es múltiplo de 100”. Por otro lado, aquellos estudiantes que usaron la relación $n \times 6$, identificaron que no se puede ya que "6 no es múltiplo de 100", basándose en la estructura multiplicativa de los números naturales. Finalmente, ocho estudiantes no resolvieron esta tarea.

5. CONCLUSIONES

En este trabajo hemos descrito el diseño y resultados de una implementación con un grupo de estudiantes de sexto curso de primaria que se enfrentaban por primera vez a tareas de naturaleza algebraica que implicaban la modelización, la justificación y creación de identidades algebraicas y la generalización en patrones geométricos.

Los/las estudiantes tuvieron éxito en la resolución de la tarea de modelización, empleando de manera general un razonamiento pre-algebraico (esencialmente de nivel 0.I de RAE). También identificaron de manera adecuada la validez de las identidades algebraicas, con mayor dificultad en el caso de la expresión $-2 + d = d + 2$, recurriendo en este caso a niveles de razonamiento proto-algebraico propios del uso de ejemplos genéricos, el razonamiento estructural incipiente y la resolución de ecuaciones de tipo aritmético. Cuando crean identidades algebraicas (siempre ciertas, ciertas a veces o siempre falsas), lograr usar el símbolo literal como incógnita o variable, considerando la dependencia de la validez de la expresión respecto del símbolo literal (nivel 2.I de RAE). Estos resultados están en línea con los de Pinto et al. (2023) quienes observaron la capacidad de justificar, si bien lo hicieron oralmente, la veracidad de igualdades numéricas y algebraicas, basándose en relaciones entre sumandos y propiedades de las operaciones, reconociendo el significado relacional del signo igual.

Finalmente, con relación a la tarea de patrones geométricos, los resultados muestran la amplia diversidad de estrategias usadas por los/las estudiantes. Por un lado, las estrategias vinculadas a un nivel 0.I de RAE, son insuficientes para responder con éxito a las tareas que demandan generalización lejana o el establecimiento de la regla general. Los/las estudiantes que desarrollan prácticas con un nivel RAE superior, logran identificar las características propias del patrón, siendo la estrategia $n \times 6 - (n - 1)$ la más utilizada, aunque no en todos los casos mostraron un razonamiento estructural completo ni lograron derivar una expresión canónica equivalente. Se observaron dificultades para responder a la última pregunta, lo que pone de manifiesto que los/las estudiantes aún no articulan dominio, imagen y regla de correspondencia, por lo que el razonamiento funcional solo llega a ser parcial y en escasas ocasiones.

El estudiantado, aún sin haber trabajado en el aula de clase el sentido algebraico, exhibe cierto razonamiento analítico incipiente, ya que se refiere a símbolos literales como cantidades desconocidas (variables) y considera la posibilidad de operar con estas como si las conocieran. Apreciamos como Coles y Ahn (2022), que cuando los/las estudiantes escriben sobre lo que hacen o notan, muestran mayor evidencia de tratar las relaciones de manera analítica. Así, consideramos necesario promover la justificación en el aula, para potenciar rasgos del sentido algebraico, como son también la modelización o el pensamiento funcional (Ayala-Altamirano y Molina, 2021).

AGRADECIMIENTOS

Investigación realizada como parte del proyecto de investigación PID2022-139748NB-100 financiado por MCIN/AEI/10.13039/501100011033/ y por FEDER, UE

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Alsina, À. (2022). *Itinerarios didácticos para la enseñanza de las matemáticas: 3-6 años*. Gráo.

Australian Curriculum, Assessment and Reporting Authority [ACARA] (2014). *Foundation to year 10 curriculum: Number sense and algebra* (ACMSPO24).

Ayala-Altamirano, C. y Molina, M. (2021). Fourth-graders' justifications in early algebra tasks involving a functional relationship. *Educational Studies in Mathematics, 107*, 359–382. https://doi.org/10.1007/s10649-021-10036-1

Beltrán-Meneu, M. J., Ramírez-Uclés, R., Ribera-Puchades, J. M, Gutiérrez, A. y Jaime, A. (2024). A Case Study of Proving by Students with Different Levels of Mathematical Giftedness. *Mathematics Teaching Research Journal*, *16*(2), 119–145.

Blanton, M. L., Brizuela, B. M., Stephens, A., Knuth, E., Isler, I., Gardiner, A. M., Stroud, R., Fonger, N. L. y Stylianou, D. (2018). Implementing a framework for early algebra. En C. Kieran (Ed.), *Teaching and learning algebraic thinking with 5- to 12-year-olds: The global evolution of an emerging field of research and practice* (pp. 27-49). Springer

Blanton, M., Brizuela, B. M., Murphy, A., Sawrey, K. y Newman-Owens, A. (2015). A learning trajectory in 6-year-olds´s thinking about generalizing functional relationships. *Journal for Research in Mathematics Education*, *46*(5), 511-559.

Burgos, M. (2023). *Razonamiento algebraico elemental. Implicaciones en la formación de profesores.* Editorial Universidad de Almería.

Burgos, M., Tizón-Escamilla, N., y Godino, J. D. (2024). Expanded model for elementary algebraic reasoning levels. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education, 20*(7), em2475. https://doi.org/10.29333/ejmste/14753

Carraher, D. W. y Schliemann, A. D (2019). Early algebraic thinking and the US mathematics standards for grades K to 5, *Infancia y Aprendizaje*, *42*(3), 479-522.

Coles, A. y Ahn, A. (2022) Developing algebraic activity through conjecturing about relationships. *ZDM Mathematics Education*, *54,* 1229–1241. https://doi.org/10.1007/s11858-022-01420-z

Common Core State Standards Initiative [CCSSI] (2023). *Common Core State Standards for Mathematics.* https://corestandards.org/wp-content/uploads/2023/09/Math_Standards1.pdf

Godino, J. D., Aké, L., Gonzato, M. y Wilhelmi, M. R. (2014). Niveles de algebrización de la actividad matemática escolar. Implicaciones para la formación de maestros. *Enseñanza de las Ciencia*s, *32*(1), 199-219.

Kelly, A. E., Lesh, R. A. y Baek, J. Y. (2014). *Handbook of design research methods in education: Innovations in science, technology, engineering, and mathematics learning and teaching*. Routledge.

Kieran, C. (2022) The multi-dimensionality of early algebraic thinking: background, overarching dimensions, and new directions. *ZDM Mathematics Education, 54,* 1131-1150. https://doi.org/10.1007/s11858-022-01435-6.

Malara, N. A., y Navarra, G. (2018). New words and concepts for early algebra teaching: Sharing with teachers epistemological issues in early algebra to develop students' early algebraic thinking. *Teaching and learning algebraic thinking with 5-to 12-year-olds: The global evolution of an emerging field of research and practice*, 51-77.

Ministerio de Educación y Formación Profesional (MEFP). Real Decreto 157/2022, de 1 de marzo, por el que establecen la ordenación y las enseñanzas mínimas de la Educación Primaria. *Boletín Oficial del Estado*, *52* (I), 24386 – 24504.

Pinto, E., Ayala-Altamirano, C., Molina, M. y Cañadas, M. C. (2023). Desarrollo del pensamiento algebraico a través de la justificación en educación primaria. *Enseñanza de las Ciencias, 41*(1), 149-173.https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.5835

Pittalis, M., Pitta-Pantazi, D. y Christou, C. (2020). Young students' functional thinking modes: The relation between recursive patterning, covariational thinking, and correspondence relations. *Journal for Research in Mathematics Education, 51*(5), 631-674. https://doi.org/10.5951/jresematheduc-2020-0164

Schifter, D. y Russell, S.J. (2022) The centrality of student-generated representation in investigating generalizations about the operations. *ZDM Mathematics Education, 54*, 1289–1302. https://doi.org/10.1007/s11858-022-01379-x

Wilkie, K. J. (2016). Learning to teach upper primary school algebra: changes to teachers' mathematical knowledge for teaching functional thinking. *Mathematics Education Research Journal, 28*, 245-275.

Wilkie, K. y Hopkins, S. (2024). Primary students' relational thinking and computation strategies with concrete-to-symbolic representations of subtraction as difference. *Journal of Mathematical Behavior, 73*, 101121.