

Razonamiento algebraico y proporcional en contexto probabilístico: Una experiencia con futuros profesores de secundaria

Veronica Albanese

Universidad de Granada, vealbanese@go.ugr.es

María Burgos

Universidad de Granada, mariaburgos@ugr.es

Nicolás Tizón-Escamilla

Universidad de Granada, tizon@ugr.es

Resumen: *El estudio explora la capacidad de futuros docentes de matemáticas de educación secundaria para resolver problemas que implican razonamiento proporcional en un contexto probabilístico y para analizar la presencia de objetos característicos del álgebra y proporcionalidad en resoluciones propias y de estudiantes. Los resultados muestran que los futuros docentes resuelven los problemas propuestos con distintos niveles de razonamiento algebraico y analizan adecuadamente la presencia de elementos del álgebra y la proporcionalidad en sus resoluciones. Tienen más dificultades para analizar resoluciones de estudiantes, especialmente si son incorrectas y tomar decisiones para gestionar el error. Se concluye la necesidad de fortalecer la formación en el análisis de la actividad matemática presente en sus propias prácticas y en las de sus estudiantes.*

Palabras clave: *razonamiento algebraico, razonamiento proporcional, probabilidad, formación de profesores, educación secundaria.*

Algebraic and Proportional Reasoning in Probability Tasks: An Experience with Prospective Secondary Teachers

Abstract: *The study explores the ability of prospective secondary mathematics teachers to solve problems involving proportional reasoning in a probabilistic context, as well as to analyze the presence of algebraic and proportionality-related objects in their own solutions and those of students. The results show that the prospective teachers solve the proposed problems with varying levels of algebraic reasoning and adequately identify the presence of algebraic and proportionality elements in their own work. They experience greater difficulty when analyzing students' solutions, especially when these are incorrect, and when making decisions to address errors. The study concludes that there is a need to strengthen teacher education in the analysis of the mathematical activity present in their own practices and in those of their students.*

Keywords: *algebraic reasoning, proportional reasoning, probability, teacher training, secondary education.*

1. INTRODUCCIÓN

Históricamente el álgebra ha desempeñado un papel crucial en las matemáticas escolares. Dominar el álgebra no sólo es imprescindible en cursos superiores de matemáticas en la enseñanza secundaria, sino que su presencia es innegable en carreras de Ciencias, Tecnología, Ingeniería y Matemáticas (STEM, por sus siglas en inglés) (Levin y Walkoe, 2022). Desde hace varias décadas se ha ampliado la forma de concebir el razonamiento algebraico para incluir procesos como los de generalización, formalización o modelización, y diversificar las formas de pensar algebraicamente para incluir el pensamiento analítico, estructural, funcional o relacional (Kieran, 2022). Enriquecer la concepción del razonamiento algebraico en este sentido, garantiza una visión integrada y longitudinal del álgebra escolar, pero también la consideración trasversal del algebraico como razonamiento que puede ponerse de manifiesto en tareas relacionadas con la aritmética, la medida, la geometría o la probabilidad.

La relación entre el grado de conocimiento del profesor de matemáticas y el desarrollo del razonamiento algebraico en sus estudiantes justifica el interés por determinar el tipo de conocimiento didáctico-matemático que debe tener el futuro profesorado (Ferreira et al., 2022). Esto supone la necesidad de diseñar e implementar experiencias formativas que permitan caracterizar y promover el desarrollo de conocimientos y competencias en el profesorado en cuanto al razonamiento algebraico. En particular, estas acciones deben contemplar el análisis del carácter algebraico de las prácticas matemáticas que se ponen en juego en la solución de tareas en diferentes contextos, la interpretación del carácter algebraico de las soluciones propuestas por escolares a dichas tareas, y finalmente, la identificación y gestión de dificultades en relación con la actividad algebraica desarrollada (Burgos, 2023).

En esta investigación centramos la atención en tareas que permiten conectar el razonamiento algebraico, proporcional y probabilístico en la formación de profesores. Por un lado, el razonamiento proporcional es considerado como precursor del razonamiento algebraico en los estudiantes, en tanto implica “razonar algebraicamente sobre dos cantidades generalizadas que están relacionadas de tal manera que la relación de una cantidad con respecto a la otra es invariante” (Blanton et al., 2015, p. 43). Por otro lado, el razonamiento proporcional forma parte del análisis del espacio muestral, la cuantificación proporcional de las probabilidades y la comprensión y uso de las correlaciones, aspectos centrales del razonamiento probabilístico (Batanero et al., 2021).

Múltiples estudios indican que muchos de los errores conceptuales y procedimentales en el ámbito de la probabilidad pueden deberse a un razonamiento proporcional insuficiente (Begolli et al., 2021). Por este motivo, recientemente, Burgos y colaboradores han evaluado específicamente los conocimientos y competencias de futuros docentes de Educación Primaria para interpretar las respuestas de estudiantes en tareas de comparación de probabilidades (Burgos, López-Martín et al., 2022) y de juego equitativo (Burgos, 2023), analizando cómo identifican el razonamiento proporcional, o su ausencia, en las prácticas matemáticas de los escolares. Los resultados ponen de manifiesto las dificultades de futuros docentes para justificar con base en elementos matemáticos por qué consideran correcta la respuesta de un alumno, lo que los lleva a sustentar su valoración en la proximidad con una solución experta o esperada, y sin cuestionar los argumentos que permiten asegurar la validez de la respuesta de un estudiante.

En este trabajo mostramos los resultados de una experiencia llevada a cabo con un grupo de futuros profesores de educación secundaria. Por un lado, se les solicitaba proponer soluciones a problemas que articulaban razonamiento proporcional y probabilístico y analizar qué aspectos

propios del álgebra y la proporcionalidad estaban presentes en ellas. Por otro lado, debían analizar el grado de corrección y la presencia de razonamiento algebraico y proporcional en resoluciones de estudiantes de educación secundaria ante un problema de creación de espacio muestral. Las preguntas de investigación que nos planteamos son las siguientes:

- ¿Qué aspectos característicos de los razonamientos algebraico y proporcional identifica el futuro profesorado de matemáticas en el análisis de sus propias resoluciones a problemas en un contexto probabilístico?
- ¿Qué elementos propios del álgebra y la proporcionalidad reconoce el futuro profesorado de matemáticas al analizar resoluciones de estudiantes de educación secundaria?
- ¿Cómo identifica el futuro profesorado de matemáticas los errores presentes en las resoluciones de estudiantes de educación secundaria a un problema que articula proporcionalidad y probabilidad?
- ¿Cómo gestiona los errores o qué modificaciones del problema original proponen para contribuir a la superación de dichos errores?

2. FUNDAMENTACIÓN TEÓRICA

2.1. Razonamiento algebraico elemental desde la perspectiva del Enfoque Ontosemiótico

Asumir una perspectiva antropológica de las matemáticas, supone concebir la matemática como actividad humana (Godino, 2024). En el Enfoque Ontosemiótico (EOS) se asume además una visión pragmática de los objetos matemáticos, que lleva a relacionar el significado con las prácticas de resolución de problemas y los contextos de uso en los que estos toman parte. Así, en las prácticas matemáticas, entendidas como acciones realizadas por un sujeto para resolver un problema, validar su solución o comunicarla a otros, participan y emergen distintos tipos de objetos matemáticos, clasificados según su naturaleza y función en: situaciones-problema, lenguajes, conceptos, proposiciones, procedimientos o argumentos. Estos objetos no aparecen de manera aislada, sino que están interconectados formando configuraciones ontosemióticas de prácticas, objetos y procesos. Así, las situaciones-problemas son el origen de la actividad matemática; el lenguaje constituye el elemento ostensivo del trabajo matemático, y los argumentos fundamentan los procedimientos y las proposiciones que relacionan los conceptos matemáticos entre sí.

Desde el EOS se entiende el *Razonamiento Algebraico Elemental* (RAE) como el sistema de prácticas operativas y discursivas requeridas en la resolución de tareas matemáticas abordables desde la Educación Primaria, en las que están presentes objetos y procesos algebraicos (Burgos et al., 2024; Godino et al., 2015). Se consideran objetos algebraicos: a) *relaciones binarias* (de equivalencia o de orden) y sus respectivas propiedades (reflexiva, transitiva y simétrica o antisimétrica); b) *operaciones y sus propiedades*, realizadas sobre los elementos de conjuntos de objetos diversos; c) *funciones, sus componentes* (variables, representaciones analítica, tabular o gráfica), *tipos, operaciones y propiedades*; d) *estructuras, sus tipos y propiedades*. El carácter algebraico de una práctica matemática está esencialmente ligado a una serie de procesos como son el reconocimiento por el sujeto que la realiza de la regla que conforma el objeto intensivo (generalización, inferencia de la generalidad), la consideración de la generalidad como una nueva entidad unitaria (unitarización) y su materialización mediante cualquier registro semiótico (representación) para su posterior tratamiento analítico (transformación). Bajo el marco del EOS

(Godino, 2024), Godino et al. (2015) propusieron un modelo basado en niveles de RAE con el que se pretende analizar el carácter más o menos algebraico de las prácticas que se ponen en juego al resolver tareas matemáticas. Así, los criterios para delimitar los distintos niveles están basados en el tipo de objetos y procesos matemáticos implicados en la actividad matemática: tipos de representaciones usadas, procesos de generalización implicados y cálculo analítico. Estos criterios se describen a continuación:

- *Nivel 0.* Se opera con objetos intensivos de primer grado de generalidad (número naturales), usando lenguajes natural, numérico, icónico, gestual.
- *Nivel 1.* Se usan objetos intensivos de segundo grado de generalidad (clases de números naturales, números racionales), propiedades de la estructura algebraica de los números naturales y la igualdad como equivalencia.
- *Nivel 2.* Se usan representaciones simbólico-literales para referir a los objetos intensivos reconocidos que permanecen ligados a la información espacio-contextual; se resuelven ecuaciones de la forma $Ax + B = C$. En tareas funcionales se reconoce la generalidad, pero no se opera con las variables para obtener formas canónicas de expresión.
- *Nivel 3.* Los símbolos se usan de manera analítica, sin referir a la información contextual. Se realizan operaciones con indeterminadas o variables; se resuelven ecuaciones de la forma $Ax + B = Cx + D$.
- *Nivel 4.* Primer encuentro con parámetros como registro numérico y coeficientes variables que implica discriminación del dominio y rango de la función paramétrica, esto es, la función que asigna a cada valor del parámetro una función o ecuación específica.
- *Nivel 5.* Intervienen familias de ecuaciones y de funciones. Se realizan cálculos o tratamientos conjuntos con parámetros y variables.
- *Nivel 6.* Introducción de algunas estructuras algebraicas y estudio del álgebra de funciones.

Esta manera de concebir el razonamiento algebraico elemental logra, por un lado, distinguir la actividad aritmética (nivel 0) de la algebraica (nivel 3 y superiores) distinguiendo niveles de razonamiento proto-algebraico (niveles 1 y 2) en los que los estudiantes pueden “pensar algebraicamente”, es decir, generalizar o tratar cantidades indeterminadas de manera analítica sin que esto implique un tratamiento en lenguaje alfanumérico. Por otro, permite dar continuidad y articular el álgebra con el resto de los contenidos matemáticos: aritmética, geometría, medida y estocástica. En efecto, siempre que se reconozca la presencia de objetos intensivos en una práctica matemática, en alguno de sus niveles de generalidad o intensidad, es posible atribuirles un cierto grado de algebrización, tanto si el intensivo (la generalidad) se expresa de manera simbólica como si no.

2.2. Modelo de conocimiento del profesor de matemáticas

En esta investigación adoptamos el modelo de Conocimientos y Competencias Didáctico-Matemáticas del (CCDM) profesor (Godino et al., 2017) desarrollado dentro del EOS (Godino, 2024). En este modelo, el conocimiento del profesor en la dimensión matemática le permite resolver las tareas matemáticas propias del nivel educativo en el que enseñará (conocimiento matemático común) y vincular el contenido matemático de dicho nivel con aquellos que se estudiarán en niveles superiores (conocimiento matemático ampliado). La dimensión didáctica del modelo CCDM propone seis subcategorías del conocimiento del profesor: epistémica (significados del contenido institucional), ecológica (alineación de tareas según el currículo

institucional), cognitiva (conocimiento especializado sobre las formas de razonar de los estudiantes, los conflictos y errores que emergen al resolver problemas específicos), afectiva (creencias, afectos y disposiciones hacia las matemáticas manifestadas por los estudiantes), interaccional (identificación y respuesta a los conflictos e interacciones de los estudiantes), y mediacional (elección de los recursos más adecuados para la enseñanza).

La competencia del profesor se entiende como la capacidad para abordar los problemas didácticos inherentes a los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, en particular, para proporcionar respuestas adecuadas a situaciones reales en el aula, como crear situaciones que promuevan un aprendizaje significativo, evaluar las respuestas de los estudiantes y tomar decisiones consecuentes. De manera específica, ante una tarea matemática determinada, el profesor debe ser capaz de resolver la tarea, utilizando distintas estrategias y diversas justificaciones, y reconocer la diversidad de significados que se ponen en juego (faceta epistémica) y las potenciales dificultades que sus estudiantes podrían encontrar (faceta cognitiva). También debe ser competente para modificar la tarea con la intención de involucrar determinados elementos matemáticos, atender a ciertas expectativas de aprendizaje o generar ciertas interacciones (facetas mediacional e interaccional).

El objetivo de este trabajo de investigación es explorar las competencias de análisis epistémico y cognitivo de profesores de matemáticas en formación para reconocer el carácter algebraico en las prácticas institucionales o personales desarrolladas para resolver problemas, centrando la atención en el contexto probabilístico. La *competencia de análisis epistémico* supone la capacidad del profesor para identificar los objetos y procesos implicados en las prácticas matemáticas necesarias para la resolución de las situaciones-problemas, en particular del nivel de RAE (esto es, el grado de generalidad y formalización implicado), con la intención de anticipar conflictos potenciales de aprendizaje.

La *competencia de análisis cognitivo* implica: a) descomponer las resoluciones de los estudiantes identificando la intencionalidad de las prácticas elementales, b) reconocer los objetos matemáticos que intervienen en esas prácticas y su grado de generalidad, c) interpretar y valorar las estrategias de solución de los estudiantes a un problema en base a los elementos matemáticos reconocidos. Esta competencia de análisis cognitivo se relaciona con la “mirada profesional del pensamiento matemático de los estudiantes” (Fernández et al., 2023) que supone discernir los elementos relevantes en las estrategias empleadas por los estudiantes al resolver los problemas de matemáticas, de los que no lo son y desarrollar un discurso profesional para expresar con sentido lo que ha identificado como relevante desde el punto de vista matemático.

El análisis de respuestas dadas por alumnos a las mismas tareas que previamente han resuelto los profesores les ofrece la posibilidad de reflexionar sobre la presencia de objetos algebraicos en las producciones de alumnos y confrontar las soluciones esperadas (las desarrolladas por ellos mismos como expertos, análisis epistémico) con las soluciones que los propios alumnos pueden llevar a cabo (análisis cognitivo). Este análisis debe servir para adaptar y mejorar el diseño de las tareas a las necesidades de los estudiantes.

3. METODOLOGÍA

La investigación adopta un enfoque descriptivo-cualitativo y de tipo exploratorio, pues la muestra utilizada es no aleatoria (selección intencionada atendiendo a la disponibilidad de los/las docentes en formación) y moderada en tamaño (McMillan y Schumacher, 2005). Atendiendo al problema de investigación, la metodología seguida es la ingeniería didáctica, entendida en el sentido

generalizado propuesto desde el EOS (Godino, 2024) que persigue que el diseño instruccional y la investigación sean interdependientes. Se distinguen cuatro fases en la investigación.

- *Estudio preliminar.* Supone la adaptación del contenido matemático y didáctico-matemático para su enseñanza y aprendizaje en el contexto de la formación de profesores. Incluye la revisión de los conocimientos didáctico-matemáticos sobre el propio contenido (razonamiento algebraico y proporcional, y su conexión con el probabilístico), y de las necesidades y carencias de docentes en formación al respecto.
- *Diseño del experimento.* Supone la selección de tareas, secuenciación y análisis *a priori* de las mismas atendiendo a los comportamientos esperados de los docentes en formación.
- *Implementación.* Observación de las interacciones entre personas y recursos y evaluación de los aprendizajes logrados.
- *Evaluación o análisis retrospectivo,* derivado del contraste entre lo previsto en el diseño y lo observado en la implementación con los docentes en formación.

3.1. Contexto

Participaron en la investigación 15 futuros profesores de matemáticas (indicados a continuación como FPM1, FPM2,... FPM15) que cursaban el Máster en Profesorado de Enseñanza Secundaria Obligatoria y Bachillerato con especialidad de Matemáticas en una universidad española. Respecto a la formación académica, dos de ellas eran graduadas en matemáticas; siete, en ingeniería; tres, en arquitectura; una, en farmacia, y uno, en economía. Al comienzo de la intervención, los FPM recibieron formación didáctico-matemática sobre aspectos epistémicos (conceptos, propiedades y procedimientos en proporcionalidad, algebra y probabilidad), cognitivos (aprendizaje de la probabilidad, análisis de errores y dificultades) e instruccionales (diseño y secuenciación de tareas, materiales y recursos para la enseñanza de la probabilidad). En este trabajo, analizamos la actividad realizada por estos FPM a lo largo de tres sesiones centradas en el análisis epistémico y cognitivo del razonamiento proporcional y algebraico en el contexto probabilístico, y que formaba parte de la calificación final de la asignatura. Todos los FPM dieron su consentimiento informado por escrito para participar en la investigación de manera voluntaria.

3.2. Diseño e implementación

La experiencia formativa se desarrolló a lo largo de tres sesiones de dos horas y media de duración cada una. A continuación, se describe cada una de las sesiones.

Sesión 1. *Introducción al razonamiento algebraico y su conexión con el razonamiento proporcional.* De manera previa a la sesión presencial, con la intención de identificar sus concepciones previas sobre el razonamiento algebraico y proporcional, los FPM respondieron a través de la plataforma Moodle institucional de la universidad a las cuestiones:

- a) *¿Qué consideras que es el razonamiento algebraico y en qué actividades crees que aparece involucrado?*
- b) *¿En qué crees que consiste el razonamiento proporcional y en qué situaciones-problema puede ser necesario?*

También, como trabajo previo, se solicitó a los FPM que leyeran los trabajos de Burgos y Godino (2020) y Burgos, Batanero et al. (2022), y durante la sesión, se discutió sobre las aportaciones de estos documentos respecto al razonamiento algebraico y proporcional y su presencia en el contexto probabilístico, resolviendo las dudas surgidas en el proceso de lectura/estudio.

Sesión 2. Razonamiento algebraico y proporcional. Análisis epistémico. Esta sesión tuvo como objetivo desarrollar la capacidad de los FPM para resolver problemas involucrando diferentes niveles de RAE y analizar qué objetos propios de los razonamientos algebraicos y proporcional están presentes en sus propias resoluciones. Para ello se plantearon a los participantes los dos problemas incluidos en la Figura 1, y se les solicitó dar respuesta a las siguientes tareas:

- a) Resuelve los problemas utilizando en cada resolución un nivel de algebrización distinto.
- b) Indica de manera justificada (en base a los objetos y procesos algebraicos) el nivel de algebrización implicado en cada resolución.
- c) Indica en qué resoluciones interviene el razonamiento proporcional y en qué forma.

Figura 1.

Problemas de juego equitativo y comparación de razones unitarias propuestos en la Sesión 2.

Problema 1. Laura y Daniel juegan a lanzar a la vez dos dados de 6 caras numeradas del 1 al 6 y a sumar sus resultados. Cada vez que gane Laura recibirá un paquete de chicles de su sabor preferido, ¡fresa! Y cada vez que gane Daniel recibirá un paquete de chicles de menta (¡odia la fresa!). En el paquete de chicles de fresa vienen 5 chicles y en el paquete de chicles de menta vienen 7, así que los niños dudan del juego... De todos los resultados posibles en el lanzamiento de los dados, ¿cuándo debería ganar Laura y cuándo debería ganar Daniel para que el juego fuera equitativo? Explica tu respuesta.

Problema 2. Una caja con 16 bombones cuesta 4,8€ y la caja con 12 bombones cuesta 4,2€. ¿Qué caja de bombones es más rentable?

El problema 1 planteado implica una situación proporcionalidad inversa en el contexto de la equitatividad de juegos de azar, con ganancias distintas para cada jugador. Es un problema distinto a los habituales en juego equitativo, en el que la equitatividad no se logra con la asignación del premio, sino con la determinación de los casos favorables a cada jugador para que el juego sea justo. El problema 2 implica la comparación de razones unitarias en un contexto aritmético. Este segundo problema se introduce en la sesión con el objetivo de valorar la capacidad de los FPM para resolver problemas con distintos niveles de RAE y analizar la actividad algebraica en cada caso.

Sesión 3. Del análisis cognitivo al instruccional. El objetivo de esta sesión consistía en que los FPM interpretaran, analizaran y valoraran las respuestas de estudiantes de educación secundaria a un problema dado, para posteriormente tomar decisiones sobre cómo ayudarles a superar las dificultades manifestadas. Así, se les planteó, en primer lugar, que resolvieran el problema incluido en la Figura 2.

Figura 2.

Problema sobre creación de espacio muestral propuesto en la Sesión 3.

Problema. Disponemos de dos cajas, la caja A y la caja B, que contienen ambas bolas blancas y bolas negras. En la caja A por cada bola blanca hay tres bolas negras. En la caja B hay 20 bolas (entre negras y blancas). ¿Cuántas bolas hay de cada color en la caja B si es igual de probable sacar una bola blanca que en la caja A? Explica tu respuesta.

En esta tarea, empleada también en el contexto de formación de docentes de primaria en Burgos et al. (2025) y López-Martín et al. (2025), se debía determinar la composición de una urna (con número de casos posibles conocido) para que la probabilidad de éxito fuera la misma que en otra donde no se conocía la composición, pero sí la razón entre casos favorables y desfavorables.

Esta situación conecta dos componentes esenciales del razonamiento probabilístico: la identificación de la naturaleza proporcional del cálculo de probabilidades y la comprensión del espacio muestral.

A continuación, se facilitaron las respuestas dadas por varios estudiantes de educación secundaria al problema (Figura 3) y se formularon las siguientes preguntas a los FPM:

- a) ¿Crees que son correctas las respuestas (procedimiento y argumento) dadas por los alumnos? Justifica tu valoración identificando en las resoluciones que consideras incorrectas las posibles estrategias o intuiciones que han llevado al estudiante a dar una respuesta errónea.
- b) ¿En qué respuestas crees que aparece involucrado el razonamiento proporcional?
- c) ¿En cuáles consideras que es mayor el nivel de algebrización de la actividad desarrollada?
- d) ¿Qué estrategias metodológicas emplearías con cada estudiante para ayudarle a comprender y corregir su error?
- e) ¿Cómo modificarías el enunciado para obtener un nuevo problema con el que el estudiante pudiera superar la dificultad encontrada?

Figura 3.

Respuestas de estudiantes al problema de la Sesión 3.

Respuesta de Alba

5)

Bolas blancas	1	2	3	4	5
Bolas negras	3	6	9	12	15
Total	4	8	12	16	20

Por cada 1 blanca hay 3 bolas negras.
 $P(\text{sacar una bola blanca en la caja B}) = \frac{5}{20} = \frac{1}{4}$
 $P(\text{sacar una bola blanca en la caja A}) = \frac{1}{4}$

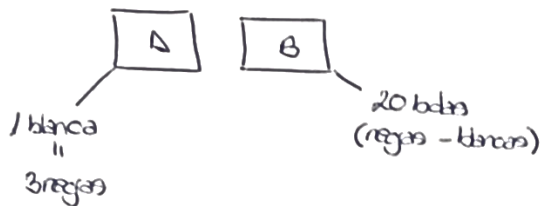
En la caja B hay 20 bolas, 5 blancas y 15 negras, ya que si hay la misma probabilidad en la caja A que en la B de sacar una bola blanca, debe mantenerse la proporción de que por cada bola blanca hay 3 negras, sino la probabilidades serían distintas al ocurrir sucesos distintos en el experimento aleatorio. Conociendo que por una blanca hay 3 negras, he realizado una tabla de proporcionalidad hasta obtener las 20 bolas.

Respuesta de Carlos

En la caja A hay una probabilidad de sacar una bola blanca de $\frac{1}{4}$, ya que hay una blanca por cada 3 negras (1+3=4). Si en la caja B hay 20 bolas entre blancas y negras, y hay la misma probabilidad que en la caja A de sacar una bola blanca, en la caja B habría 6 blancas y 14 negras.

$$\frac{1}{4} = \frac{1}{20} = \frac{5 \cdot 1}{20} = \frac{5}{20}$$

Respuesta de Darío



Caja A — $P(\text{Blanca}) = \frac{1}{3} = 0,3$

Caja B — $P(\text{Blanca}) = \frac{x}{20}$

$0,3 = \frac{x}{20}$

$0,3 \times 20 = x$

$x = 6$

$P(B) = \frac{6}{20} = 0,3$

x = casos posibles

$$\begin{array}{r} \times 20 \\ 0,3 \\ \hline 60 \\ + 00 \\ \hline 06,0 \end{array}$$

20 bolas
- 6 casos posibles (blancas)
14 bolas negras.

* La posibilidad de sacar bola blanca en la caja A es de 0,3 ; y en la caja B es exactamente la misma. Por tanto hacemos la probabilidad de sacar bola blanca ; que es los casos favorables 'x' (desconocemos) entre los casos posibles que son 20 (porque hay ese número de bolas). Al despejar la ecuación nos damos cuenta de que hay 6 casos favorables de sacar blanco. Por tanto al restar 6 a 20 bolas ; nos dan 14 negras.

6 bolas blancas
14 bolas negras } Caja B

La respuesta de Alba es correcta y el nivel de RAE es 1. Intervienen proporciones y la relación queda sistematizada a través de la tabla de proporcionalidad, que permite a Alba establecer composiciones de cajas equivalentes a la caja A, hasta determinar aquella que respeta la condición del número de bolas totales de la caja B. El razonamiento proporcional aparece a través del reconocimiento de la razón y la relación entre probabilidad y proporción entre bolas blancas y negras.

La respuesta de Carlos es incorrecta y su nivel de RAE es 1 visto que intervienen números racionales (fracciones y suma de fracciones). Carlos identifica la probabilidad de sacar una bola blanca en A como 1/4. Reconoce también que 20 son los casos posibles en la caja B pero su error consiste en operar con las fracciones 1/4 y 1/20 (sin justificar qué interpreta por la fracción 1/20 ni por qué las suma), para determinar el número de casos favorables. De hecho, en el resultado considera que el numerador debe ser el número de bolas blancas en B si el total es 20 (denominador). El razonamiento proporcional se observa a través de la transformación de la razón

entre casos favorables y casos desfavorables en la fracción de casos favorables sobre casos posibles que da la probabilidad.

La respuesta de Darío es incorrecta y su nivel de RAE es 2 porque plantea y resuelve una ecuación del tipo $Ax = B$. Su error consiste en considerar la razón de una bola blanca por cada 3 bolas negras como la probabilidad de sacar una bola blanca en A, cuando se trata de la razón entre casos favorables y desfavorables (en lugar de posibles), por lo que hay confusión entre casos posibles y casos desfavorables en la caja A. El razonamiento proporcional aparece en el planteamiento de la ecuación proporcional que deriva de la naturaleza proporcional del cálculo de probabilidades.

3.3 Análisis de datos

Se llevó a cabo un análisis de contenido (Cohen et al., 2018) de las producciones escritas de los participantes.

En el análisis de las concepciones previas respecto al razonamiento proporcional y algebraico, se consideraron los objetos y procesos matemáticos con los que vinculan la presencia de tales razonamientos, así como los tipos de situaciones-problemas en los que consideraron que aparecen.

En el análisis de las respuestas escritas de los FPM a las tareas propuestas en la sesión 2 (análisis epistémico), se consideraron los siguientes aspectos:

- Grado de corrección de las resoluciones propuestas.
- Tipo de estrategias empleadas y nivel de RAE implicado en las mismas. La asignación de nivel se realizó atendiendo a las características que los definen en el modelo de Godino et al. (2015).
- Grado de corrección del nivel de RAE asignado por los participantes a sus propias prácticas matemáticas. Se analizó la justificación de los participantes para asignar el nivel de razonamiento algebraico y a qué objetos y procesos algebraicos hicieron referencia, así como su pertinencia con relación al análisis experto previo.
- Elementos del razonamiento proporcional identificado en sus prácticas.

En el análisis de la valoración de los FPM de las soluciones de estudiantes propuestas en la sesión 3 (análisis cognitivo), se consideraron los siguientes aspectos:

- Grado de corrección de valoración de la respuesta del estudiante y su justificación.
- Identificación de la presencia de razonamiento proporcional y objetos matemáticos relacionados con este.
- Identificación del nivel de RAE, atendiendo a las características que los definen en el modelo de Godino et al. (2015) y de objetos matemáticos relacionados con el razonamiento algebraico.

En el análisis de las respuestas incorrectas (Carlos y Darío), también se tuvieron en cuenta:

- Identificación de los errores.
- Estrategias para gestionar la superación del error.
- Elementos de variación del enunciado.

Excepto en el caso de los niveles de RAE y los objetos y procesos algebraicos, determinados *a priori* por el marco teórico, las demás categorías son emergentes y no excluyentes, es decir, surgen del análisis cíclico de los datos y es posible encontrar diferentes categorías para cada aspecto en la misma respuesta de un FPM (porque identificara varios errores, propusiera más de una forma de atender al error o variara de diferente modo el enunciado del problema de partida).

4. RESULTADOS

A continuación, se presentan los resultados obtenidos del análisis de las respuestas de los FPM.

4.1. Sesión 1. Concepciones previas

Cuatro FPM asociaron explícitamente el razonamiento algebraico con el empleo de un determinado lenguaje simbólico. Entre los conceptos matemáticos identificados por los FPM con relación al razonamiento algebraicos se encuentran: variable o incógnita (dos), expresiones algebraicas o polinomios (tres), (in)ecuaciones (siete), sistemas (uno), funciones (dos). Por ejemplo:

“El razonamiento algebraico consiste sustancialmente en transmitir argumentos matemáticos a través de un lenguaje especial, de forma rigurosa, mediante variables algebraicas y operaciones definidas entre ellas. Para ello, se utiliza una “sintaxis” particular, caracterizada por una tendencia lógica y abstracta. En esta sintaxis se emplean variables algebraicas (letras o símbolos) que determinan el objeto matemático. La combinación de estas, a través de operaciones determinadas con antelación, conforman las llamadas expresiones algebraicas.” FPM1.

“El razonamiento algebraico consiste en identificar en qué situaciones emplear álgebra. Como son las funciones y representación gráfica de las mismas, ecuaciones, inecuaciones” FPM6.

Otros FPM asociaron el razonamiento algebraico a estructuras superiores como la teoría de conjuntos (dos) y los subespacios vectoriales (uno). Además, dos FPM no aportaron ideas concretas sobre el razonamiento algebraico.

Con respecto a la identificación de situaciones-problema donde se involucre el razonamiento algebraico, solo respondieron cinco de los FPM, indicándose en dos casos la modelización de situaciones reales/cotidianas; en un caso, problemas de geometría; en otro caso, solo problemas de economía, y en un último caso, diferentes situaciones (economía, informática, ingeniería, estadística).

Por otro lado, los FPM reconocieron el razonamiento proporcional asociado a conceptos tales como razón, proporción o proporcionalidad (cinco), y relaciones entre cantidades (cinco); y procedimientos tales como el empleo de la regla de tres (dos). Ejemplificativo resulta la respuesta de FPM14, quien señaló que “el razonamiento proporcional implica la comprensión y aplicación de las proporciones y las relaciones proporcionales entre cantidades”. Cabe destacar la presencia, en la categoría de relaciones entre cantidades, de una sola respuesta en la que se mencionó explícitamente la naturaleza lineal de la relación (“dependencia lineal de un parámetro respecto a otro”, FPM13) y solo dos respuestas en las que se contempla explícitamente la relación inversa de proporcionalidad.

Ocho de los FPM aportaron información respecto a las situaciones problemas donde aparece razonamiento proporcional, indicando: geometría, escalas, semejanzas (seis); economía, finanza, intereses (tres); porcentajes (dos); estadística y probabilidad (uno); y cocina (uno).

4.2. Sesión 2. Resolución y análisis epistémico en tareas que implican razonamiento proporcional

En la sesión 2, 12 FPM resolvieron correctamente el problema 1 (incluido en la Figura 1). Con relación a las resoluciones incorrectas, en una de ellas se asignó a todos los jugadores la misma probabilidad de ganar, mientras que, en las otras, si bien se identificó la razón que debían cumplir

las probabilidades de los jugadores, no se llegó a indicar los resultados de las tiradas de dados asignados a cada jugador, tratándose por tanto de resoluciones incompletas.

Para resolver el problema 1, seis FPM plantearon un sistema de ecuaciones con dos incógnitas (véase un ejemplo en la Figura 4) y tres FPM plantearon una ecuación con una incógnita del tipo $5x = 7(1 - x)$, como FPM2, siendo x la probabilidad de ganar de Laura. Como consecuencia, un total de 9 resoluciones presentaron un nivel 3 de RAE. Este nivel fue identificado correctamente por cinco de los FPM, mientras que tres le asignaron un nivel 2 y una no contestó. Entre los objetos matemáticos mencionados que justificaron el nivel de RAE indicado, se indicaron ecuaciones, sistemas de ecuaciones e incógnitas/variables. Por ejemplo, FPM8 indica “en el problema 1, se ha utilizado un sistema de 2 ecuaciones y con 2 incógnitas, con un nivel algebraico”.

Figura 4.

Resolución de FPM1 al problema 1 sesión 2. Nivel 3 de RAE.

Llamo "a" al número de casos favorables de ganancia de Laura y "b" al de Daniel.
Para que sea un juego equitativo debe cumplirse lo siguiente:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{a}{36} \cdot 7 = \frac{b}{36} \cdot 5 \\ a + b = 36 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} a = 15 \\ b = 21 \end{array}$$

Por lo tanto, de las 36 posibles cases, Laura debería ganar en 15 de ellas y Daniel en 21 de ellas para que el juego fuera equitativo.

Los otros seis estudiantes utilizaron relaciones y propiedades de las fracciones (números racionales, intensivos de grado 2) para determinar la probabilidad de ganar de cada jugador (un ejemplo se muestra en la Figura 5) o plantearon una ecuación de proporcionalidad del tipo $\frac{5}{12} = \frac{x}{36}$, como FPM14, resolviendo el problema con un nivel 2 de RAE. Este nivel fue reconocido correctamente por cuatro de los FPM, mientras que dos no contestaron. En las justificaciones del nivel de RAE, solo un FPM indicó el planteamiento y resolución de una ecuación “en la que la incógnita está despejada en un miembro de la ecuación” (FPM13), mientras que en otros tres casos indicaron objetos relacionados con la proporcionalidad -proporción, razón-, las fracciones y la probabilidad, como FPM6 que indica “ha sido necesario el razonamiento proporcional, regla de Laplace, propiedades de fracciones”.

Figura 5.

Resolución de FPM7 al problema 1 sesión 2. Nivel 2 de RAE.

Para que sea equitativo el número de chicles que ganan cada uno:

- Lana tendría que ganar 7 veces (35 chicles)
- Daniel tendría que ganar 5 veces (35 chicles).

Esto sería lo correcto si inventar cosas favorables fueran 12, pero como tenemos 36 cosas favorables la relación sería:

- Lana tendría que ganar 21 veces $\rightarrow \frac{21}{36}$
- Daniel tendría que ganar 15 veces $\rightarrow \frac{15}{36}$

Por otro lado, todos los FPM resolvieron correctamente el problema 2. La estrategia usada de manera mayoritaria en la resolución fue la de reducción a la unidad y en algunos casos la regla de tres (estableciendo ecuaciones proporcionales o haciendo uso de equivalencia de fracciones) (Figura 6), tratándose de resoluciones de nivel 1 y 2 de RAE, respectivamente. Como excepción, FPM13 encontró el mínimo común múltiplo entre el número de bombones de las cajas para comparar sus precios.

El nivel de RAE de las cuatro resoluciones de nivel 2 fue indicado genéricamente como proto-algebraico (sin especificar nivel 1 o 2) por tres FPM, mientras uno lo identificó incorrectamente como aritmético. El nivel proto-algebraico se asoció con objetos matemáticos relacionados con la proporcionalidad o procedimientos de reducción a la unidad y empleo de la regla de tres (“he hecho reducción a la unidad, pero usado para ello la regla de tres”, FPM3), si bien hay quienes lo justificaron con “no usar símbolos”, como FPM10.

El nivel de RAE de las once resoluciones de nivel 1 fue identificado correctamente por ocho FPM que apoyaron sus justificaciones con la presencia de “propiedades y cálculos con fracciones y la igualdad como equivalencia” tal como señaló FPM1, mientras dos lo reconocieron incorrectamente como aritmético basando su justificación en “se han empleado solo operaciones aritméticas”, como indicó FPM6. Finalmente, tres FPM no respondieron al nivel de RAE de sus resoluciones.

Figura 6.

Resolución de FPM1 al problema 2 sesión 2. Nivel 2 de RAE.

Problema 2

16 bombones — 4,8€	$x = \frac{1 \text{ bombón} \cdot 4,8€}{16 \text{ bombones}} = \frac{2,4}{8} = \frac{1,2}{4} = 0,3€/\text{bombón}$
1 bombón — x	
12 bombones — 4,2€	$x = \frac{1 \text{ bombón} \cdot 4,2€}{12 \text{ bombones}} = \frac{2,1}{6} = 0,35€/\text{bombón}$
1 bombón — x	

Cabe destacar que, de los 12 FPM que resolvieron correctamente ambos problemas, 11 de ellos utilizaron en las dos resoluciones niveles diferentes de RAE, como se demandó en la tarea, resultando siempre la resolución del problema 1 aquella con el nivel mayor de algebrización. Solo FPM7 desarrolló resoluciones con el mismo nivel de RAE (nivel 2) en ambos problemas.

Con relación al análisis de los objetos propios de la proporcionalidad, en el problema 1, nueve FPM identificaron correctamente la presencia de razonamiento proporcional en sus propias resoluciones, uno indicó incorrectamente que no había, y cinco no contestaron. En las justificaciones de ocho que lo reconocieron se encontraron referencias a (esta vez de manera excluyente): esperanza (tres), razón (uno), equidad (uno), relación entre premios y probabilidades (dos), cálculo de la probabilidad (uno). Por ejemplo, FPM3 indicó: “Sí, hay razonamiento proporcional en el planteamiento de la ecuación con la que hay que comparar los caramelos por la probabilidad de ambos para mantener la proporcionalidad”.

Por último, en el problema 2, los 12 FPM que contestaron, señalaron correctamente la presencia de razonamiento proporcional en sus propias resoluciones. Los 12 justificaron esta presencia indicando conceptos de razón y proporción, mientras que siete de ellos identificaron explícitamente la razón (a veces erróneamente indicada como proporción) entre precio de una caja de bombones y número de bombones. Por ejemplo, FPM9 indica “aparece razonamiento proporcional: se calcula proporción en función del precio por bombón”.

4.3. Sesión 3. Análisis cognitivo en la creación de urnas equivalentes

Todos los FPM resolvieron correctamente la tarea propuesta en la sesión 3 (Figura 2). Entre las resoluciones, dos FPM utilizaron estrategias aritméticas (nivel 0 de RAE), nueve emplearon fracciones (intensivos de grado 2, nivel 1 de RAE), tres plantean y resolvieron la ecuación proporcional (nivel 2 de RAE), y uno formuló la relación funcional entre bolas blancas y negras (nivel 3 de RAE).

A continuación, se muestran los resultados del análisis de las valoraciones realizadas por los FPM de las tres respuestas de estudiantes de educación secundaria proporcionadas (Figura 3).

4.3.1 Respuesta de Alba

Todos los FPM apreciaron que el resultado y la resolución de Alba eran correctos, así como que incorporaba elementos propios del razonamiento proporcional. Entre estos elementos, se mencionaron de manera no excluyente: la construcción de la tabla de proporcionalidad (siete casos), una referencia más o menos explícita a la identificación de la razón –aclarando que, por cada blanca, tres negras o $1/3$ – (cuatro casos), y el empleo de fracciones equivalentes (dos casos). Por ejemplo, FPM13 indicó que Alba “usa las proporciones ya que genera una tabla con fracciones equivalentes hasta llegar a un total de 20 bolas”. Cabe destacar que tres FPM no argumentaron la presencia del razonamiento proporcional.

Respecto al reconocimiento del nivel de RAE de la respuesta de Alba, tres FPM indicaron incorrectamente un nivel 0 o aritmético y no describieron objetos algebraicos involucrados. La mayoría de los FPM indicó un nivel proto-algebraico (11 en total, de los cuales dos especificaron un nivel 2, cinco señalaron correctamente un nivel 1, y los restantes cuatro dejaron indicado proto-algebraico sin especificar nivel). Solo un FPM no contestó sobre el nivel de RAE. Los objetos matemáticos relacionados con el razonamiento algebraico indicados por los nueve FPM que respondieron fueron: la tabla de proporcionalidad (un caso), la referencia a proporciones o razones

(cuatro casos), el concepto de fracción (dos casos), las propiedades de las operaciones y la igualdad como equivalencia (tres casos). Un ejemplo de esto último fue la justificación de FPM11: “Nivel 1: propiedades e las operaciones y concepto de equivalencia”.

4.3.2 Respuesta de Carlos

Aunque todos los FPM reconocieron que la respuesta de Carlos era incorrecta, tuvieron dificultades para interpretar o explicar la naturaleza del error. Solo cinco FPM mencionaron que la probabilidad de bolas blancas en la caja A había sido identificada correctamente. Varios notaron que el error se situaba en la suma, tres de ellos indicando explícitamente que se trataba de un error relacionado con la aplicación incorrecta de la proporcionalidad en sentido aditivo (FPM7 “creo que realiza la suma para que tengan la misma probabilidad sumándolos”; FPM8 “ha cometido el error de confundir la misma probabilidad con la suma $\frac{1}{4} + \frac{1}{20}$ ”), y tres señalando simplemente que allí no se debía sumar. Seis FPM no indicaron el error o hicieron referencia a generalidades del tipo que el procedimiento es incorrecto sin proporcionar más detalles.

Con relación a las propuestas para gestionar el error de Carlos, los participantes sólo lograron proponer estrategias muy genéricas. Tres FPM hicieron referencia al empleo de material manipulativo para simular la situación; cinco mencionaron una genérica explicación de conceptos de probabilidad o proporcionalidad sin más detalles; dos mencionaron que le explicarían el error, y dos propusieron mostrar la resolución correcta. Las propuestas de modificación de enunciado incluyeron: modificar la expresión “igual de probable” por “la misma probabilidad” (en dos casos); preguntar solo por las bolas negras (dos casos); modificar la proporción de bolas en A: una blanca por cada negra (un caso); o concretar el número de bolas en A (cuatro casos).

Respecto al nivel de RAE, ocho FPM indicaron incorrectamente que la respuesta de Carlos es aritmética o de nivel 0; tres indicaron correctamente un nivel de RAE proto-algebraico (dos de ellos especificando nivel 1) y cuatro no contestaron.

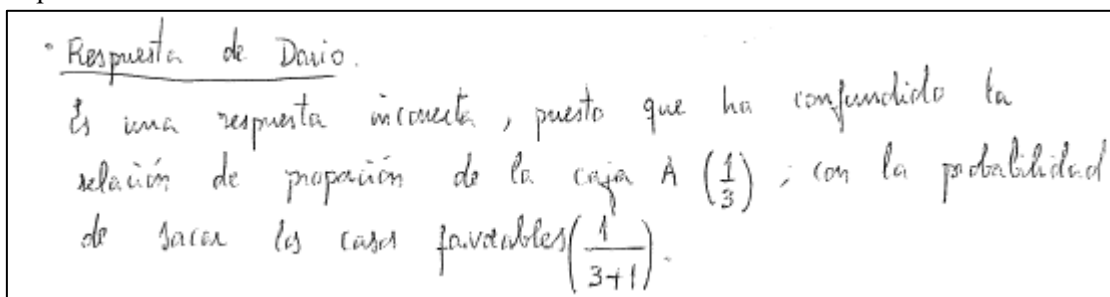
Finalmente, cuatro fueron los FPM detectaron la presencia de razonamiento proporcional en la respuesta de Carlos. Solo en dos de los casos hicieron referencia al cálculo de la probabilidad en A, siete indicaron que no se aplicó razonamiento proporcional o se aplicó mal y cuatro no contestaron.

4.3.3 Respuesta de Darío

Todos los FPM reconocieron que la respuesta de Darío era incorrecta y que el error se situaba en el cálculo de las probabilidades de sacar una bola blanca en la caja A. Mientras que seis FPM detallaron que el error dependía de haber empleado la razón/proporción entre bolas blancas y negras como la probabilidad (ver Figura 7, FPM8), tres de los cuales señalando que el error consistía en indicar que la probabilidad era 1/3 en lugar de 1/4, en cuatro de los casos notaron que el error estaba ligado a dificultades con el muestreo o con la identificación de casos posibles.

Figura 7

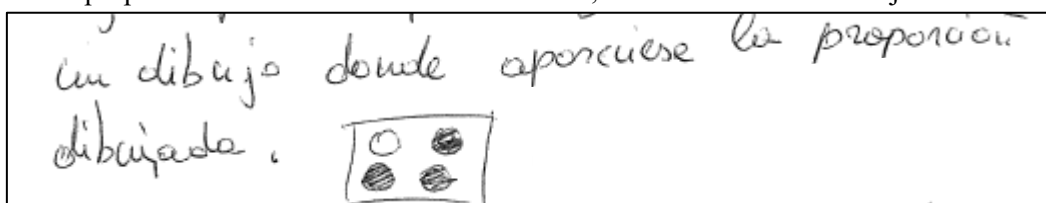
Explicación de FPM8 al error de Darío



Respecto a las estrategias a las que recurrieron los FPM para ayudar Darío a comprender su error, cinco FPM indicaron que le explicarían de nuevo conceptos relacionados con la probabilidad, mientras que otros cinco utilizarían algún recurso material o gráfico (ver ejemplo en Figura 8) para visualizar el total de bolas en la caja A (proponiendo que sean cuatro). Un FPM explicaría directamente el error a Darío y otro volvería a leer el enunciado con él. Finalmente, tres no propusieron estrategias para enfrentarse al error.

Figura 8

FPM5 propone concretar el número de bolas en A, en este caso con un dibujo.



De los 13 FPM que propusieron modificaciones al enunciado de la tarea, 11 hicieron referencia a concretar el número de bolas de la caja A, explicitando en la mayoría de los casos (nueve) que sean 4, y dos propusieron modificar la relación de bolas blancas y negras a 1/2.

Con relación al nivel de RAE de la respuesta de Darío, 11 FPM indicaron que esta presentaba un nivel proto-algebraico (cinco indicaron correctamente el nivel 2, dos señalaron un nivel 1 y cuatro no especificaron el nivel concreto), uno indicó nivel aritmético y uno un nivel algebraico. A pesar de detectar adecuadamente el nivel de RAE, solo cinco FPM justificaron su asignación haciendo referencia a objetos matemáticos como ecuaciones (dos), la presencia de una variable o incógnita (dos), y el empleo de una regla de tres (dos).

Respecto al empleo del razonamiento proporcional, la mayoría (diez) indicaron que sí hay, dos aclararon que no se aplicaba o se aplicaba incorrectamente, y tres de ellos no contestaron.

En la respuesta de Darío, una correcta identificación del error situado en la interpretación de la razón 1/3, así como dirigir la atención hacia los elementos propios razonamiento proporcional presentes en la resolución, produjo propuestas de gestión del error generalmente adecuadas, que insistían en la composición del espacio muestral en la caja A.

4.4. Síntesis

Atendiendo a los resultados presentados en los apartados previos, finalizamos esta sección respondiendo a las preguntas de investigación:

- *¿Qué aspectos característicos de los razonamientos algebraico y proporcional identifica el futuro profesorado de matemáticas en el análisis de sus propias resoluciones a problemas en un contexto probabilístico?*

Los futuros profesores identifican objetos propios del razonamiento algebraico como son las ecuaciones, sistemas de ecuaciones o variables, que aparecen cuando justifican el nivel de razonamiento algebraico de la solución. De igual manera, identifican objetos relacionados con la proporcionalidad, esencialmente los procedimientos de reducción a la unidad o la regla de tres, o las propiedades y operaciones con fracciones que vinculan a un nivel proto-algebraico. En el contexto probabilístico, se vincula a términos como la esperanza, razón o cálculo de la probabilidad.

- *¿Qué elementos propios del álgebra y la proporcionalidad identifica el futuro profesorado de matemáticas al analizar resoluciones de estudiantes de educación secundaria?*

En el análisis de las respuestas de estudiantes, consideran el concepto de fracción o proporción, así como la tabla de proporcionalidad como elemento característico del razonamiento proporcional en el caso de Alba, si bien no siempre le atribuyen un carácter proto-algebraico. En el caso de las respuestas de Carlos o Darío, se vincula al cálculo de probabilidades. En estos casos, muestran más dificultades para reconocer objetos algebraicos, aunque asignen adecuadamente el nivel de RAE.

- *¿Cómo identifica el futuro profesorado de matemáticas los errores presentes en las resoluciones de estudiantes de educación secundaria a un problema que articula proporcionalidad y probabilidad?*

Aunque reconocen que la respuesta de Carlos es incorrecta, no determinan claramente cuál es la naturaleza del error. En el caso de Darío, identifican el error en el cálculo de probabilidades, mencionando en algunos casos la dificultad para diferenciar casos posibles de favorables al establecer la razón.

- *¿Cómo gestiona los errores o qué modificaciones del problema original proponen para contribuir a la superación de dichos errores?*

Las estrategias que proponen para gestionar los errores, tanto en el caso de Carlos como en el de Darío son muy genéricas (volver a leer, explicar conceptos, utilizar material o representaciones icónicas). Sin embargo, se aprecia especialmente en el caso de Darío, que cuando se identifican las carencias en el razonamiento proporcional las estrategias que proponen son más adecuadas. Las propuestas de modificación al enunciado del problema para contribuir a superar los errores se centran en el uso del lenguaje, preguntar sólo por casos favorables, facilitar más información (cantidades absolutas y no razones) o simplificar las razones.

5. DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

La resolución flexible de las tareas matemáticas, el reconocimiento de las prácticas matemáticas que se ponen en juego, así como la identificación de los objetos y procesos algebraicos implicados en estas, son competencias esenciales cuando se trata de fomentar el razonamiento algebraico en los escolares (Burgos, 2023). El estudio simultáneo de las dificultades asociadas a las estrategias empleadas, según los niveles de generalidad o formalización, motiva la reflexión sobre la eficacia de determinados métodos de solución, centrando la atención en la relación entre la estrategia y la pertinencia de su uso en relación con el grado de sofisticación conceptos, propiedades, procedimientos y argumentos requeridos.

En este trabajo se ha presentado un estudio diseñado e implementado con la intención de explorar cómo un grupo de futuros profesores de matemáticas de educación secundaria: (i) resuelve problemas que implican el razonamiento proporcional en un contexto probabilístico, (ii) identifica la presencia de objetos propios del álgebra y la proporcionalidad en sus propias resoluciones, (iii) analiza el grado de corrección y el tipo de objetos algebraicos y proporcionales presentes en las resoluciones de estudiantes de educación secundaria, y (iv) propone modificaciones para contribuir a la superación de los errores encontrados. Este estudio nos permite detectar y profundizar en las posibles limitaciones que futuros docentes de secundaria puedan presentar en sus conocimientos matemáticos y competencias de análisis tanto en la faceta epistémica como en la cognitiva.

En lo que respecta a la dimensión epistémica, la mayoría de los futuros profesores resolvieron con éxito los dos problemas propuestos con resoluciones de distinto nivel de RAE, mostrando un conocimiento adecuado de la proporcionalidad. Este hecho concuerda con investigaciones previas con futuros profesores de secundaria (Burgos et al., 2018), y señala una importante diferencia con aquellas llevadas a cabo con futuros docentes de primaria, quienes encuentran mayores dificultades para resolver problemas de proporcionalidad en contextos tanto aritméticos (Buforn et al., 2017; Weiland et al., 2019) como probabilísticos (Ortiz et al., 2006; Vásquez y Alsina, 2015; Burgos, López-Martín et al., 2022). Entre las estrategias empleadas, predominaron aquellas de nivel algebraico en el contexto probabilístico, lo que contrasta con resultados previos en contexto aritmético (Burgos et al., 2018).

Más de la mitad de los FPM identificaron objetos propios del razonamiento algebraico en sus prácticas y le asignan correctamente su nivel de RAE, resultado similar al obtenido por Burgos y Godino (2022a) con futuros docentes de primaria al resolver tareas de proporcionalidad, y mejorando notablemente lo observado en Burgos y Godino (2018) con profesorado de secundaria en formación inicial en una investigación centrada en tareas de proporcionalidad inversa. Mayores limitaciones, sin embargo, se observaron en el análisis epistémico relacionado con la proporcionalidad. Si bien los FPM fueron capaces de detectar objetos propios del razonamiento algebraico, se trataron en su mayoría de conceptos, siendo pocos los procedimientos y nulas las proposiciones o argumentos identificados, hecho en línea con los resultados observados por Burgos et al. (2018).

Con relación al ámbito cognitivo, las competencias didáctico-matemáticas de los FPM resultaron más incipientes, dada la complejidad encontrada en el análisis de las respuestas de los estudiantes, especialmente en los casos de respuestas incorrectas. A pesar de que los futuros docentes valoraron adecuadamente el grado de corrección de las respuestas proporcionadas, su análisis de los objetos tanto de carácter proporcional como algebraico presentes fue más limitado que el llevado a cabo en sus propias resoluciones. En general, la identificación del nivel correcto de RAE resultó ser más compleja para los FPM al analizar las respuestas de los estudiantes en comparación con el análisis de sus propias resoluciones. No pareció haber una relación entre la identificación de niveles superiores de RAE y el reconocimiento de la presencia de razonamiento proporcional. Estas consideraciones también se reflejaron en las justificaciones de la presencia de objetos matemáticos relacionados con el razonamiento algebraico, que resultaron en general menos ricas cuando se analizaron las respuestas de los estudiantes, especialmente si estas eran incorrectas, en comparación con el análisis de sus propias resoluciones.

Por un lado, cuando las respuestas de los estudiantes resultaban incorrectas, la asignación del nivel de RAE no fue apropiada en más de la mitad de los casos, y aun siendo correcta, fueron pocos los que justificaron de forma apropiada la presencia de objetos algebraicos que motivaran

su asignación. Por otro lado, los FPM no justificaron adecuadamente o, directamente, no identificaron la presencia de razonamiento proporcional en las respuestas incorrectas de los estudiantes. Estas importantes limitaciones también se habían encontrado previamente en futuros docentes de educación primaria, tanto en el ámbito algebraico Burgos y Godino (2022b) como proporcional (Burgos, López-Martín et al., 2022).

Las dificultades de los FPM para interpretar las prácticas matemáticas (operacionales y discursivas) de los estudiantes al resolver la tarea, particularmente cuando no es explícita su relación con el carácter proporcional de la probabilidad, se reflejan posteriormente en la manera en que los participantes propusieron estrategias para gestionar los errores. Así, por ejemplo, las dificultades encontradas por los FPM para interpretar la respuesta incorrecta de Carlos implicaron propuestas de estrategias de gestión del error muy genéricas. Esto coincide con los resultados encontrados en trabajos previos con futuros docentes de primaria, a quienes se les propuso la tarea incluida en la Figura 3, con respuestas de estudiantes, para que interpretaran su conocimiento y errores (Burgos et al, 2025) y tomaran decisiones de acción para ayudarles a superar las limitaciones (López-Martín et al., 2025). Sin embargo, a diferencia de los resultados de estos estudios, cuando los FPM interpretaban correctamente el error del estudiante y lo relacionaba con la proporcionalidad, las estrategias de gestión del error resultaban más apropiadas y específicas para la dificultad particular del estudiante, incluyendo representaciones icónicas y propuestas de modificaciones del enunciado inicial del problema.

La competencia de análisis, tanto a nivel epistémico como cognitivo, es una capacidad clave del docente de matemáticas, pues implica la identificación de los contenidos matemáticos presentes en una práctica dada, la detección de errores y dificultades presentes en la misma y la modificación de tareas para atender los errores detectados (Godino et al., 2017). Este trabajo muestra la existencia de importantes deficiencias con relación a la adquisición y desarrollo de esta competencia por parte de futuros profesores de matemáticas, poniendo de manifiesto la necesidad de incluir en los procesos de instrucción, tanto a nivel inicial como en programas de formación continua, oportunidades para que los docentes analicen la actividad matemática presente en sus propias prácticas y, en especial, en las prácticas de sus estudiantes.

AGRADECIMIENTOS

Investigación realizada como parte del proyecto de investigación PID2022-139748NB-100 financiado por MCIN/AEI/10.13039/501100011033/ y por FEDER, UE.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Batanero, C., Álvarez-Arroyo, R. Hernández-Solís, L. A. y Gea, M. M. (2021). El inicio del razonamiento probabilístico en la educación infantil. *PNA*, 15(4), 267-288. <https://doi.org/10.30827/pna.v15i4.22349>
- Begolli, K.N., Dai, T., McGinn, K.M. y Booth, J.L. (2021). Could probability be out of proportion? Self-explanation and example-based practice help students with lower proportional reasoning skills learn probability. *Instructional Science*, 49, 441-473. <https://doi.org/10.1007/s11251-021-09550-9>

- Blanton, M., Brizuela, B. M., Murphy, A., Sawrey, K. y Newman-Owens, A. (2015). A learning trajectory in 6-year-olds' thinking about generalizing functional relationship. *Journal for Research in Mathematics Education*, 46(5), 511-559. <https://doi.org/10.5951/jresmetheduc.46.5.0511>
- Buform, À., Fernández, C. y Llinares, S. (2017). Conocimiento del razonamiento proporcional de los estudiantes para maestro y cómo reconocen características de la comprensión de los estudiantes. En J. M. Muñoz-Escolano, A. Arnal Bailera, P. Beltrán-Pellicer, M. L. Callejo y J. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXI* (pp. 167-176). SEIEM.
- Burgos, M. (2023). *Razonamiento algebraico elemental. Implicaciones en la formación de profesores*. Universidad de Almería.
- Burgos, M., Beltrán-Pellicer, P., Giacomone, B. y Godino, J. D. (2018). Conocimientos y competencias de futuros profesores de matemáticas en tareas de proporcionalidad. *Educação e Pesquisa*, 44, e182013. <https://doi.org/10.1590/S1678-4634201844182013>
- Burgos, M., Batanero, C. y Godino, J. D. (2022). Algebraization levels in the study of probability. *Mathematics*, 2022, 10, 91. <https://doi.org/10.3390/math10010091>
- Burgos, M. y Godino, J. (2018). Recognizing algebrization levels in an inverse proportionality task by prospective secondary school mathematics teachers. En L. Gómez Chova, A. López Martínez e I. Candel Torres (Eds.), *EDULEARN18 Proceedings* (pp. 2483-2491). IATED.
- Burgos, M. y Godino, J. D. (2020). Modelo ontosemiótico de referencia de la proporcionalidad. Implicaciones para la planificación curricular en primaria y secundaria. *AIEM - Avances de Investigación En Educación Matemática.*, 18, 1–20. <https://doi.org/https://doi.org/10.35763/aiem.v0i18.255>
- Burgos, M. y Godino J. D. (2022a). Assessing the Epistemic Analysis Competence of Prospective Primary School Teachers on Proportionality Tasks. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 20, 367–389. <https://doi.org/10.1007/s13138-021-00193-4>
- Burgos, M. y Godino, J. D. (2022b). Prospective Primary School Teachers' Competence for the Cognitive Analysis of Students' Solutions to Proportionality Tasks. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 43, 347–376. <https://doi.org/10.1007/s13138-021-00193-4>
- Burgos, M., López-Martín, M. M., Aguayo, C.G. y Albanese, V. (2022). Análisis cognitivo de tareas de comparación de probabilidades por futuros profesores de educación primaria. *Uniciencia*, 36, 1-24. <http://dx.doi.org/10.15359/ru.36-1.38>
- Burgos, M., López-Martín, M. M., Albanese, V. y Aguayo-Arriagada, C. G. (2023). Analysis of primary school students' answers to fair game tasks: An experience with preservice teachers. *BEIO, Boletín de Estadística e Investigación Operativa*, 39(3), 48–69. https://www.seio.es/wp-content/uploads/2023/12/2023_3_Historia.pdf
- Burgos, M., López-Martín, M. M., Tizón-Escamilla, N., Aguayo-Arriagada, C. G. (2025). Razonamiento proporcional y algebraico de estudiantes cuando resuelven una tarea probabilística. *PNA*, 19(2), 131-158. <https://doi.org/10.30827/pna.v19i2.29887>
- Burgos, M., Tizón-Escamilla, N. y Godino, J. D. (2024). Expanded model for elementary algebraic reasoning levels. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, 20(7), em2475. <https://doi.org/10.29333/ejmste/14753>
- Cohen, L., Manion, L., y Morrison, K. (2018). *Research methods in education (8th edition)*. Routledge. <https://doi.org/10.4324/9781315456539>
- Fernández, C; Ivars, P. y Llinares, S. (2023). El desarrollo de la competencia mirar

- profesionalmente el pensamiento matemático de los estudiantes durante los períodos de práctica. *Revista Interuniversitaria de Formación del Profesorado*, 98 (37.2), 127-146. <https://doi.org/10.47553/rifop.v98i37.2.99296>
- Ferreira, M. C. N., Ponte, J. P. y Ribeiro, A. J. (2022). Towards and approach to teachers' professional development: How to work with algebraic thinking in the early years. *PNA*, 16(2), 167-190. <https://doi.org/10.30827/pna.v16i2.22234>
- Godino, J. D. (2024). *Enfoque ontosemiótico en educación matemática. Fundamentos, herramientas y aplicaciones*. McGraw Hill–Aula Magna.
- Godino, J. D., Batanero, C., Font, V. y Giacomone, B. (2017). Enfoque Ontosemiótico de los Conocimientos y Competencias del Profesor de Matemáticas. *Bolema*, 31(57), 90-113. <https://doi.org/10.1590/1980-4415v31n57a05>
- Godino, J. D., Neto, T., Wilhelmi, M. R., Aké, L., Etchegaray, S. y Lasa, A. (2015). Niveles de algebrización de las prácticas matemáticas escolares. Articulación de las perspectivas ontosemiótica y antropológica. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, 8, 117-142. <https://doi.org/10.35763/aiem.v1i8.105>
- Kieran, C. (2022) The multi-dimensionality of early algebraic thinking: background, overarching dimensions, and new directions. *ZDM Mathematics Education*, 54, 1131-1150. <https://doi.org/10.1007/s11858-022-01435-6>
- Levin, M. y Walkoe, J. (2022). Seeds of algebraic thinking: a Knowledge in Pieces perspective on the development of algebraic thinking. *ZDM Mathematics Education*, 54, 1303–1314. <https://doi.org/10.1007/s11858-022-01374-2>
- López-Martín, M. M., Burgos, M. y Albanese, V. (2025) Preservice teachers interpreting and acting on students' responses to a probability problem. *Statistics Education Research Journal*, 24(2), 1-26. <https://doi.org/10.52041/serj.v24i2.819>
- McMillan, J.H. y Schumacher, S. (2005). *Investigación educativa*. Pearson Educación.
- Ortiz, J. J., Mohamed, N., Batanero, C., Serrano, L. y Rodríguez, J. D. (2006). Comparación de probabilidades en maestros en formación. En Bolea, M. P., Moreno, M. y González, M. J. (Eds.), *Investigación en educación matemática: actas del X Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (pp. 267-276). Instituto de Estudios Altoaragoneses.
- Vásquez, C. y Alsina, A. (2015). El conocimiento del profesorado para enseñar probabilidad: Un análisis global desde el modelo del Conocimiento Didáctico-Matemático. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, 7, 27-48. <https://doi.org/10.35763/aiem.v1i7.104>
- Weiland, T., Orrill, C., Brown, R. y Nagar, G. G. (2019). Mathematics teachers' ability to identify situations appropriate for proportional reasoning. *Research in Mathematics Education*, 21(3), 233–250. <https://doi.org/10.1080/14794802.2019.1579668>