Epsilon – Revista de Educación Matemática 2025, nº 121, 21-35
Sección: Aportes desde la investigación en Educación Matemática

Aportes al desarrollo del pensamiento algebraico en los primeros cursos desde tesis doctorales

María D. Torres
Universidad de Granada, *mtorresg@ugr.es*

Eder Pinto
Universidad de O`Higgins, *eder.pinto@uoh.cl*

Cristina Ayala-Altamirano
Universidad de Málaga, *cristina.ayala@uma.es*

Lourdes Anglada
Universidad de Granada, *lourdesanglada@eummia.es*

Resumen: *Este trabajo recoge aspectos teóricos y el diseño de tareas para abordar el pensamiento algebraico desde un enfoque funcional. Presentamos un conjunto de aportes para la docencia desde cuatro tesis doctorales desarrolladas bajo tres proyectos de investigación sobre pensamiento algebraico: EDU2013-41632-P, EDU2016-75771-P y PID2020-113601GB-I00, centrados en educación primaria e infantil.*
Abordamos la generalización y la representación de las estructuras dadas en las relaciones funcionales, mostrando ejemplos de tareas con las que profundizar en el desarrollo del pensamiento funcional desde infantil. El objetivo es que los estudiantes desarrollen habilidades que les permitan pensar algebraicamente y reflexionen sobre las relaciones entre variables en los niveles educativos más básicos.

Palabras clave: *generalización, pensamiento algebraico, representación, tareas con funciones.*

Contributions to the development of algebraic thinking in early grades from doctoral theses

Abstract: *This paper covers theoretical aspects and task design for approaching algebraic thinking from a functional perspective. We present a set of contributions to teaching from four doctoral theses developed under three research projects on algebraic thinking: EDU2013-41632-P, EDU2016-75771-P, and PID2020-113601GB-I00, focused on primary and early childhood education.*
We address the generalization and representation of structures given in functional relationships, showing examples of tasks with which to deepen the development of functional thinking from early childhood. The goal is for students to develop skills that enable them to think algebraically and reflect on the relationships between variables at the most basic educational levels.

Key words: *algebraic thinking, generalization, representation, tasks with functions.*

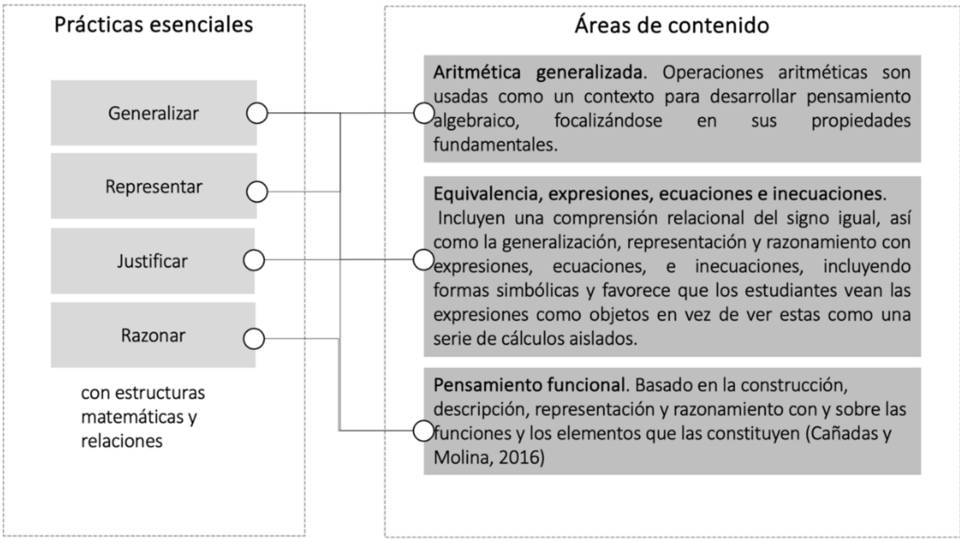
Cómo citar: Torres, M. D., Pinto, E., Ayala-Altamirano, C. y Anglada, L. (2025). Aportes al desarrollo del pensamiento algebraico en los primeros cursos desde tesis doctorales. *Epsilon, 121, 21-35.*

1. POSTURA ADOPTADA

El marco de las tesis doctorales defendidas a lo largo de tres proyectos de investigación desde 2013, ha asumido la postura de que el pensamiento algebraico puede emerger sin necesidad de recurrir a símbolos alfanuméricos, siempre que el estudiante interactúe con estructuras matemáticas y relaciones (Kaput, 2008), o que sea capaz de razonar sobre lo indeterminado, operando con sumas, restas, multiplicaciones o divisiones cuando intervienen elementos desconocidos, tratándolos como si fueran conocidos (Radford, 2003, 2006).

Sobre el trabajo de Kaput (2008), Blanton et al. (2011, 2018) amplían la noción de sistema simbólico e incorporan diversas representaciones (pictóricas, manipulativas, numéricas, entre otras) como herramientas clave para el desarrollo del pensamiento algebraico. Más específicamente, estas autoras organizan el pensamiento algebraico a través de cuatro *prácticas esenciales* que desarrollarse en todas las *áreas del contenido*, tal como lo mostramos en la figura 1.

Figura 1
Prácticas esenciales y áreas de contenido del pensamiento algebraico.



Un componente clave de las cuatro prácticas esenciales es que todas giran en torno al trabajo con *estructuras matemáticas y relaciones*. En el contexto del *early algebra* es central la noción de estructura, ya que esta permite establecer conexiones y relaciones entre conceptos y procesos matemáticos y, como consecuencia, permite analizar cómo los estudiantes interpretan una regularidad y, potencialmente, la generalizan (Warren et al., 2013).

Específicamente, las cuatro tesis que presentamos aquí se han concentrado en una de las aproximaciones al pensamiento algebraico: el pensamiento funcional.

2. PENSAMIENTO FUNCIONAL

El pensamiento funcional, como área de contenido —y foco de las tesis doctorales que presentaremos—, reconoce a la función como un concepto matemático central. En el contexto del *early algebra*, las funciones cumplen un rol fundamental por dos razones principales: (a) permiten introducir a los estudiantes en el pensamiento algebraico al explorar la noción de "variable" como una relación de cambio entre cantidades (Blanton et al., 2011); y (b) ofrecen una nueva mirada sobre las operaciones aritméticas básicas, que pueden interpretarse como funciones al implicar relaciones sistemáticas entre cantidades (Carraher y Schliemann, 2007).

Consideramos que el pensamiento funcional se centra en la generalización y expresión de la relación entre cantidades que varían de forma conjunta (Blanton et al., 2011). Específicamente, la función, la relación entre cantidades y la variación conjunta entre las cantidades involucradas constituyen los elementos centrales para desarrollar el pensamiento algebraico en los primeros cursos (Cañadas y Molina, 2016, p. 210). Aquí, el interés está puesto en funciones lineales, específicamente del tipo $y = mx + b$, donde m y b son constantes, y las variables x e y son números naturales. Este tipo de función se considera adecuado para la edad y el tipo de trabajo que se espera de los estudiantes de infantil y primaria en el enfoque funcional del álgebra temprana (Carraher y Schliemann, 2007).

3. APORTES DE LAS TESIS DOCTORALES

A continuación, presentamos algunos aportes a la docencia desde el estudio del pensamiento funcional desarrollado en unas tesis doctorales centradas en educación primaria e infantil.

3.1. Generalización de estudiantes de educación primaria en un contexto funcional

Existe un consenso amplio en torno a la relevancia de la generalización como un aspecto central del pensamiento algebraico (por ejemplo, Mason et al., 1992; Pólya, 1966). Promover que estudiantes de los primeros cursos de la educación primaria generalicen favorece que estos: (a) aparten información irrelevante; (b) adapten, ajusten y reorganicen un conjunto de experiencias previas; (c) pongan atención a ideas, capacidades y propiedades involucradas en diferentes situaciones; y (d) mejoren su comprensión y herramientas para resolver problemas (Carraher y Schliemann, 2015; English y Warren, 1998).

Si bien se han desarrollado diversas propuestas orientadas a fomentar que los estudiantes generalicen al abordar distintos contenidos matemáticos, aún persisten vacíos en la comprensión de cómo se desarrolla este proceso en la educación primaria. Por otra parte, la enseñanza y el aprendizaje del álgebra escolar se han centrado en cómo los estudiantes de educación secundaria (aproximadamente entre 12 y 16 años) interactúan con contenidos algebraicos. En este contexto, dirigir la atención hacia los procesos de generalización que desarrollan niños y niñas de entre 6 y 12 años al enfrentarse a contenidos algebraicos constituye un foco de interés específico que requiere especial atención y que abordamos aquí.

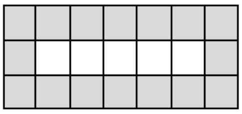
En el marco de la tesis doctoral[1] de Eder Pinto, dirigida por María C. Cañadas, asumimos un marco referencial para describir cómo estudiantes de entre 8 y 12 años interactúan con *estructuras matemáticas y relaciones* al resolver problemas que implican cantidades que covarían. En las tareas que abordan el constructo de pensamiento funcional, las funciones se presentan mediante problemas contextualizados. El problema de las baldosas es un ejemplo de este tipo de tareas (ver figura 2).

---

[1] Titulada: "Generalización de estudiantes de 3º a 6º de Educación Primaria en un contexto funcional del álgebra escolar" y realizada dentro de los proyectos de investigación del Plan Nacional I+D con referencias EDU2013-41632-P y EDU2016-75771-P, financiados por la Agencia Estatal de Investigación (AEI) de España y el Fondo Europeo de Desarrollo Regional (FEDER).

Figura 2
Problema de las baldosas.

Un colegio quiere reformar el suelo de todos sus pasillos porque está ya muy estropeado. El equipo directivo decide enlosar los pasillos con baldosas blancas y con baldosas grises. Todas las baldosas son cuadradas y tienen el mismo tamaño. Las baldosas se van a colocar en cada pasillo de la manera que ves en la siguiente imagen.



El colegio contrata a una empresa para que reforme los pasillos de las tres plantas del colegio. Te pedimos que ayudes a los albañiles a contestar algunas preguntas que necesitan responder para hacer este trabajo.

1. ¿Cuántas baldosas grises necesitan para el suelo de un pasillo en el que colocan 5 baldosas blancas?

2. Unos pasillos son más largos que otros. Por eso, los albañiles necesitan diferente número de baldosas para cada pasillo. ¿Cuántas baldosas grises necesitan para el suelo de un pasillo en el que colocan 8 baldosas blancas?

3. ¿Cuántas baldosas grises necesitan para el suelo de un pasillo en el que colocan 10 baldosas blancas?

4. ¿Cuántas baldosas grises necesitan para el suelo de un pasillo en el que colocan 100 baldosas blancas?

5. Los albañiles de una empresa siempre colocan primero las baldosas blancas y después las baldosas grises. ¿Cómo puedes saber cuántas baldosas grises si ya han colocado las baldosas blancas?

6. En uno de los pasillos, por error los albañiles han colocado las baldosas grises antes que las blancas. Han colocado 20 baldosas grises, ¿cuántas baldosas blancas necesitan? ¿Cómo lo sabes?

7. En otro pasillo los albañiles también han colocado las baldosas grises antes que las blancas. Han colocado 56 baldosas grises, ¿cuántas baldosas blancas necesitan? ¿Cómo lo sabes?

El problema de las baldosas involucra la función $g = 2w + 6$, con números naturales como dominio y codominio. En este problema intervienen dos variables: el número de baldosas blancas (w) y el número de baldosas grises (g). Por ejemplo, si queremos saber cuántas baldosas grises se pueden colocar alrededor de un número dado de baldosas blancas, g se expresa en función de w. En este caso, w es la variable independiente y g la dependiente.

Cuando los estudiantes trabajan con una tarea de pensamiento funcional, tienen distintas formas de interpretar y construir cómo se relacionan las variables dependiente e independiente:

- *Recurrencia*, que describe la atención a la variación dentro de una misma cantidad (por ejemplo, en el problema de las baldosas: "el número de baldosas grises aumenta de 2 en 2");
- *Correspondencia*, que se refiere a los pares $(a, f(a))$ (por ejemplo, "el doble del número de baldosas blancas más seis"); y
- *Covariación*, que analiza cómo varían conjuntamente dos cantidades y cómo el cambio en una (por ejemplo, de a_n a a_{n+1}) produce un cambio en la otra (de $f(a_n)$ a $f(a_{n+1})$), como en "cuando el número de baldosas blancas aumenta en uno, el número de baldosas grises aumenta en dos".

En nuestro trabajo nos centramos en la correspondencia y la covariación, ya que ambas implican a las dos variables (a diferencia de la recurrencia, que explica la variación entre distintos valores de la variable dependiente). Es a través de estas relaciones funcionales, que pueden ser percibidas y expresadas a través de diferentes representaciones matemáticas por las cuales identificamos en las respuestas de los estudiantes (orales y escritas) evidencias de generalización al representar, justificar y razonar cómo una cantidad varía con respecto a otra en general. En Pinto y Cañadas (2021) y Pinto et al. (2022) nos centramos en abordar evidencias de relaciones funcionales de estudiantes de 3.º y 5.º de primaria al abordar las tareas de funciones.

3.2. Representación de cantidades indeterminadas por estudiantes de primaria en contextos funcionales

En la tesis doctoral de Cristina Ayala-Altamirano[2], dirigida por Marta Molina, se propone describir y analizar cómo estudiantes de tercero y cuarto de primaria representan cantidades indeterminadas y justifican relaciones funcionales, y cómo estos procesos se ven influenciados por las características de las tareas propuestas. En términos curriculares, la investigación se alinea con la tendencia internacional que impulsa la introducción temprana del pensamiento algebraico sin esperar a la educación secundaria. La tesis evidencia que los estudiantes de educación primaria son capaces de pensar de manera general, además de representar y justificar relaciones funcionales, siempre que se le propongan tareas adecuadas a su nivel de desarrollo y experiencias cercanas.

Al hablar de álgebra la primera idea que se viene a la mente es la de realizar cálculos, pero con letras. Aunque en esta tesis se amplía esta visión y no se trata con letras sino con cantidades indeterminadas que pueden ser representadas de múltiples formas, el primer acercamiento a la problemática de estudio fue comprender las concepciones que los estudiantes tienen sobre las letras como representación de cantidades indeterminadas. En el primer estudio que compone la tesis (Ayala-Altamirano y Molina, 2020) se muestra que los estudiantes pueden atribuir a las letras un significado dinámico, asociado a la variabilidad, incluso si inicialmente se apoyan en referentes familiares como el alfabeto o la aritmética. Estos hallazgos contradicen interpretaciones simplistas que asocian el uso de números o referencias al alfabeto con una comprensión estática o errónea del álgebra. Por el contrario, la investigación demuestra que detrás de estas representaciones hay razonamientos coherentes, que merecen ser comprendidos y valorizados como parte del proceso de aprendizaje.

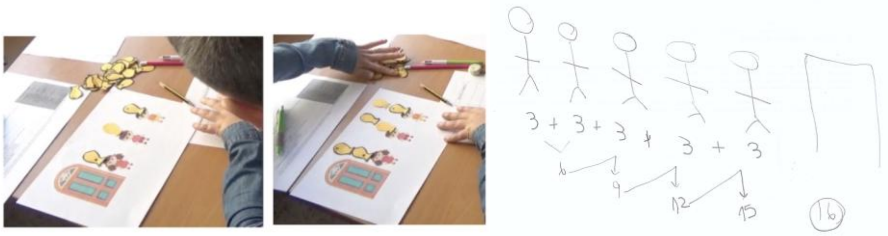
La autora adopta una perspectiva multimodal y semiótica que reconoce la legitimidad de diversas formas de representación: lenguaje natural, gestos, dibujos, ejemplos numéricos y representaciones gráficas. Esta amplitud permite valorar las expresiones personales de los estudiantes, muchas veces descartadas por no ajustarse a la convención matemática. Desde esta perspectiva, en los siguientes estudios que forman parte de la tesis (Ayala-Altamirano y Molina, 2021a, 2021b; Ayala-Altamirano et al., 2022) se desprenden orientaciones pedagógicas concretas. Primero, es importante comprender que para representar de forma general una relación funcional (por ejemplo, $2x + 3$ o el doble de un número más tres), es necesario ser parte de un proceso de generalización. Por ejemplo, una tarea inicial puede consistir en presentar una situación en la que sea necesario razonar sobre la relación en casos numéricos cercanos, casos

[2] Titulada: "Concepción y representación de cantidades indeterminadas por estudiantes de primaria en contextos funcionales" y realizada dentro de los proyectos de investigación del Plan Nacional I+D con referencias EDU2013-41632-P y EDU2016-75771-P, financiados por la Agencia Estatal de Investigación (AEI) de España y el Fondo Europeo de Desarrollo Regional (FEDER).

numéricos lejanos y en casos indeterminados. Por ejemplo, “En el cumpleaños de Isabel le regalarán la misma cantidad de globos a cada invitado y colocarán un globo en la puerta para avisar que es la casa del cumpleaños. Para que encuentren una regularidad en primera instancia se razona con casos particulares cercanos, que permitan incluso el uso de material manipulativo para observar cuál es la relación entre variables o a través de otros medios de representación (Ver figura 3).

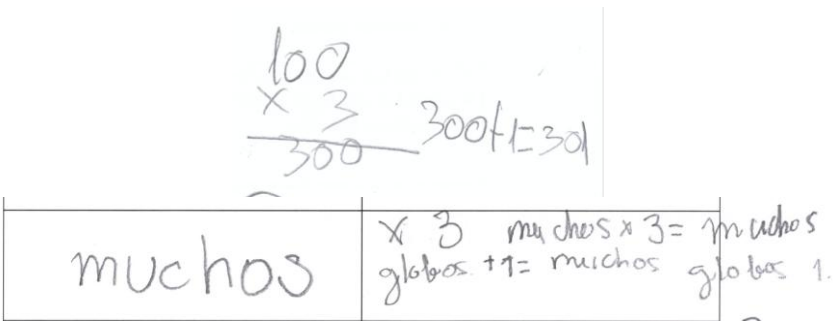
Figura 3
Problema de los globos.

Cuando hay 3 invitados, se necesitan 10 globos.
Cuando hay 6 invitados, se necesitan 19 globos.
Cuando hay 2 invitados, se necesitan 7 globos.
Cuando hay 5 invitados, ¿cuántos globos necesita?



Luego se pregunta por casos lejanos y por cantidades indeterminadas, como: ¿y cuando hay 100 invitados cuántos globos se necesitan? Si invita a “muchos” invitados, ¿cuántos globos necesita? (Ver figura 4).

Figura 4
Expresión de la relación funcional en casos lejanos e indeterminados.



El uso de la palabra muchos, —o cualquier palabra que se asocie a una indeterminación o caso desconocido, tal como: algunos, unos, una cantidad que no conocemos— permite introducir la idea de cantidad indeterminada sin recurrir inmediatamente a letras. Posteriormente, puede invitarse a los estudiantes a pensar “cómo podrías saber el número de globos si no sabes cuántos invitados hay” y fomentar que expresen esta idea en sus propias palabras, con dibujos o esquemas, antes de introducir representaciones convencionales como $3 \times n + 1$. Los resultados de los estudios muestran que los estudiantes generalizan y se refieren a cantidades indeterminadas con distintos grados de sofisticación, dependiendo de la forma como representen estas cantidades. Este elemento es importante, porque valida las ideas informales o incipientes de los estudiantes.

Otro aspecto relevante de la tesis es la descripción del impacto de la interacción social y la comunicación oral en la construcción del conocimiento. Se constata que las justificaciones orales permiten a los estudiantes explicitar sus ideas con mayor claridad que las justificaciones escritas, y que los intercambios con los pares amplían su repertorio de estrategias. Además, se demuestra que el tipo de justificación solicitada (de elaboración o de validación) influye en los elementos de la función a los que los estudiantes prestan atención, lo que tiene importantes implicancias para el diseño de tareas en el aula. Esta evidencia sugiere que las tareas deberían incorporar momentos estructurados para la discusión en grupo, por ejemplo, mediante preguntas como: ¿cómo llegaste a la respuesta? ¿Qué estrategias seguiste para encontrar la relación? ¿Estás de acuerdo con lo que dijo tu compañero? ¿Por qué sí o por qué no? ¿Estás de acuerdo con la siguiente afirmación?

En la tesis se considera la importancia de la justificación al momento de referirse a cantidades indeterminadas, la tesis evidencia que tareas que proponen sentencias de verdadero o falso resultan especialmente potentes para desencadenar discusiones sobre la validez de generalizaciones. Por ejemplo, ante la afirmación "Si hay x invitados, entonces hay $x + 1$ globos", se puede invitar a los estudiantes a decidir si la afirmación es siempre verdadera, a justificar su respuesta con ejemplos o a corregir la afirmación planteando la relación correctamente.

Finalmente, en la elección del tipo de función a tratar, en Ramírez et. al., (2022) se muestra que los problemas que involucran relaciones aditivas simples del tipo $y = x + b$ son más asequibles para los estudiantes, seguidos de las relaciones multiplicativas sin constante ($y = ax$), siendo las más complejas aquellas que combinan multiplicación y suma ($y = ax + b$). Este hallazgo puede orientar la secuenciación de la enseñanza, comenzando por situaciones fácilmente visualizables (por ejemplo, "Cada niño tiene dos globos") y avanzando progresivamente hacia estructuras más complejas.

En síntesis, es importante destacar que la tesis apoya una visión del álgebra como una forma de pensar y comunicar, no solo como un sistema de símbolos. Esta perspectiva invita a los docentes a reconocer, valorar y potenciar las formas personales de expresión matemática de sus estudiantes, brindándoles oportunidades para avanzar hacia formas más sofisticadas mediante tareas ricas, variadas y socialmente compartidas. Es así como el álgebra no es solo simbolismo algebraico, sino son prácticas que se complementan unas con otras, a saber: generalizar, representar, justificar y razonar.

3.3. Estructuras de estudiantes de educación primaria en un enfoque funcional

En el ámbito del pensamiento funcional se habla de estructuras para referirse a la expresión de las regularidades presentes entre las variables de las funciones involucradas (Torres et al., 2024). En la tesis de doctoral de María D. Torres[3], dirigida por María C. Cañadas y Antonio Moreno, exploramos cómo estudiantes de segundo de primaria identifican las estructuras sin atender a la posición ni el crecimiento, como sucede en el estudio de los patrones, sino atendiendo a la relación de covariación y a la generalización de esas estructuras. En este sentido podemos establecer dos relaciones en las funciones de dos variables: formas directa e inversa de la función.

[3] Titulada: "Generalización, estructuras y representaciones de estudiantes de segundo de educación primaria desde un enfoque funcional del early algebra" y realizada dentro del proyecto de investigación del Plan Nacional I+D con referencias EDU2016-75771-P, financiado por la Agencia Estatal de Investigación (AEI) de España y el Fondo Europeo de Desarrollo Regional (FEDER).

Cuando hablamos de una función y = f(x), en general, se está haciendo referencia a su forma directa, pues es la manera usual en la que se representa la regularidad entre las dos variables en un contexto concreto. Esa función tiene una función inversa y = g(x), tal que g(f(x)) = f(g(x)) = x. En este estudio fijamos, de partida, una función dada $y = x + 2$ que decidimos que es la que se refiere a la forma directa por considerarla más sencilla (Torres et al, 2021a). Se afirma que, para los casos por los que preguntamos a los estudiantes, para uno o más valores de x, estaremos indagando sobre la capacidad del sujeto para identificar o generalizar la forma directa de esa función. Sin embargo, cuando se intercambian los roles de las dos variables en ese mismo contexto, entonces se está indagando sobre la capacidad del sujeto para identificar o generalizar sobre la forma inversa de esa función. La forma directa está determinada por la forma en la que se presentan los datos iniciales.

En la siguiente figura 5 mostramos una tarea en la que abordamos la estructura de ambas formas de la función usando la representación tabular como herramienta (Torres et al., 2021b).

Figura 5

Tarea para el trabajo de ambas formas de la función.

Un tren va recogiendo a los amigos de Elsa para que vayan a su cumpleaños. En cada parada de tren se montan el mismo número de personas. Queremos saber cuántas personas tendrá el tren cuando haya pasado por muchas paradas. ¿Cómo puedes saber cuántas personas lleva el tren si en cada parada suben 2 personas?

Para abordar la tarea podemos llevar a cabo un protocolo de preguntas en el aula partiendo de casos particulares para avanzar hacia la generalización de la estructura (ver figura 6).

Figura 6

Protocolo de trabajo para la forma directa.

FORMA DIRECTA

1º Casos particulares

1. Casos particulares dados
   Cuando el tren para 1 vez se suben 2 personas

   Cuándo el tren para 3 veces ¿cuántas personas se suben?

   Cuando el tren para 10 veces ¿cuántas personas se suben?

2. Casos particulares propuestos por el estudiante.

   Dime un número de paradas que pueda hacer el tren (_). Si para esas veces ¿Cuántas personas pueden subirse?

3. Casos particulares con cantidades cada vez mayores

   Si el tren para 1000 veces ¿cuántas personas podrán subirse?

   Si el tren para un millón de veces ¿cuántas personas podrán subirse?

2º Generalización

4. Expresar la generalización

   ¿Cómo le explicarías a un amigo cuántas personas llevará el tren cuando pasa por infinitas paradas?

   ¿Cómo le explicarías a un amigo cuántas personas llevará el tren cuando pasa por muchas paradas?

Para trabajar progresivamente la forma inversa podemos aplicar un representación tabular con diferentes valores como lo de la figura 7.

Figura 7

Representación tabular con diferentes casos particulares.

Número de paradas	Número de personas
	4
	2
3	
7	
	6
	12
10	
	20
	300
	4 millones
	Z

Las preguntas que podemos usar para trabajar la forma inversa de una función de forma análoga a lo anterior pueden verse en la figura 8.

Figura 8

Protocolo de trabajo para la forma inversa.

FORMA INVERSA

1º Casos particulares

1. Casos particulares dados
    - Cuando el tren lleva 4 personas ¿Cuántas veces ha parado?
    - Cuando el tren lleva 12 personas ¿Cuántas veces ha parado?
    - Cuando el tren lleva 300 personas ¿Cuántas veces ha parado?

2º Generalización

2.Expresar la generalización

¿Cómo le explicarías a un amigo que ha de hacer para conocerlas personas que van en el tren cuando ha parado por muchas paradas?

En nuestra investigación utilizamos el potencial del objeto matemático, la función, de forma que los estudiantes desarrollen habilidades que les permitan pensar algebraicamente y reflexionen sobre las relaciones entre variables en este nivel educativo. El trabajo realizado sobre los distintos papeles jugados por las mismas variables de una estructura expresada de manera directa o inversa puede ayudar a profundizar en el desarrollo de la búsqueda de covariaciones entre variables que les será beneficioso en niveles posteriores.

3.4. Relaciones funcionales, representaciones y generalización en educación infantil

La posibilidad de potenciar el desarrollo del pensamiento funcional, en niños y niñas desde educación infantil es un aspecto que cada vez genera mayor interés para la investigación en Educación Matemática (Narváez et al., 2025). Un creciente cuerpo de investigación ha descrito las formas en que estos niños pueden participar en este tipo de pensamiento, incluyendo cómo estos generalizan, representan, justifican y razonan con la estructura y las relaciones entre cantidades que covarían (p. ej., Anglada et al., 2024; Blanton y Kaput, 2004; Brizuela et al., 2021; Warren et al., 2013). Estos estudios, se han centrado fundamentalmente en las relaciones funcionales, las generalizaciones de estas relaciones y sus representaciones.

La tesis doctoral desarrollada por Lourdes Anglada[4], bajo la dirección de María C. Cañadas, ha abordado la representación tabular y el diseño de tareas de generalización en el último curso de educación infantil (5-6 años). La atención específica al diseño de tareas nos ayuda a reflexionar a nivel teórico sobre los tipos específicos de tareas que propician ciertas ideas en los niños y niñas. A la vez, a nivel de la práctica esto nos ayuda a construir futuros ambientes educativos al tener en cuenta las maneras específicas en las cuales interactúan los tipos de tareas y los aprendizajes que se observan a medida que los niños interactúan con ellas.

Particularmente en educación infantil, a la hora de diseñar tareas sobre pensamiento funcional debemos tener en cuenta varios aspectos:

1. Usar materiales concretos que permitan trabajar con experiencias perceptivo-motrices, (Blanton y Kaput, 2004; Warren et al., 2013). La selección de estos materiales es esencial en el diseño de tareas. Los materiales manipulativos adecuados son aquellos que ayudan a los estudiantes a construir, fortalecer y conectar varias representaciones de ideas matemáticas” (Sarama y Clements, 2009).
2. Emplear problemas contextualizados, pues son considerados una herramienta importante para indagar en este tipo de pensamiento, al favorecer que los niños comprendan la relación entre cantidades que covarían a partir de un contexto determinado (Smith, 2008).
3. Fomentar que los estudiantes utilicen distintas representaciones, pasar por distintas representaciones al resolver una tarea algebraica genera un pensamiento más flexible en los estudiantes También es importante desarrollar la capacidad de traducir o establecer relaciones entre distintos modos de representación (Brizuela y Earnest, 2008; NCTM, 2000). Una dificultad a la hora de investigar a estas edades es que su capacidad de expresión es limitada, muchas veces, los problemas de los niños no son de captación, sino de expresión (Cooper y Warren, 2011). Es por esto tener en cuenta la posibilidad de usar distintas representaciones y establecer relaciones entre ellas permite arrojar luz sobre el pensamiento de los niños.
4. Plantear preguntas que ayuden a los niños a conceptualizar las cantidades involucradas y la variación de cada cantidad, de modo que coordinen la variación de las dos cantidades y luego desarrollen su comprensión y capacidad para expresar esta relación (Pittalis et al., 2020). Estas deben ser preguntas abiertas, que desafíen el pensamiento de los niños y que permitan promover y movilizar la comprensión de la estructura como

---

[4] Titulada: “Pensamiento funcional con estudiantes de último curso de educación infantil: relaciones funcionales, representaciones y generalización” y realizada dentro de los proyectos de investigación del Plan Nacional I+D con referencias EDU2016-75771-P y PID2020-113601GB-I00, financiados por la Agencia Estatal de Investigación (AEI) de España y el Fondo Europeo de Desarrollo Regional (FEDER).

una regla replicable, evitando las preguntas del docente que se responden con un "sí" o un "no" (Blanton, 2008).

A continuación presentamos una de las tareas diseñadas que se implementó en una clase de 13 niños y niñas del último curso de educación infantil (5-6 años) en las que se tuvieron en cuenta cada una de las recomendaciones anteriores.

Presentamos la tarea en clase de forma oral. Utilizamos una gallina y huevos de juguete, y un espejo. La historia contaba que una gallina a la que se le ocurrió la idea de colocar un espejo junto a los huevos que ponía para engañar al resto de gallinas y ser así la que más huevos ponía (ver figura 9). Lo anterior se ajusta a las condiciones 1 y 2 expuestas anteriormente.

Figura 9
Materiales usados en la tarea.

Respecto a la condición 4, mientras escenificábamos la historia, realizamos preguntas que orientamos para que fueran un ente facilitador del diálogo y de la justificación por parte de los niños y niñas. Algunas de las preguntas realizadas fueron: "¿Cómo pensaste que era [un número cualquiera]?", "¿Cómo lo has hecho?", "¿Por qué?". Al principio, las preguntas se referían a qué había ocurrido al poner el espejo y a predecir lo que ocurriría cuando la gallina pusiera el espejo. A continuación realizamos preguntas que implicaban la función inversa, preguntábamos cuantos huevos debería poner la gallina para ver en el espejo un número determinado. Las respuestas se iban comprobando con el material de manera que los propios niños podían validar sus respuestas. Estas preguntas se realizaron para un número de huevos entre 1 y 10. Después, realizamos preguntas con cantidades mayores, ya sin apoyarnos en el material. Por último, realizamos preguntas con cantidades indeterminadas, por ejemplo:" ¿Cuántos huevos veremos en el espejo si la gallina puso muchos?" y preguntamos en general qué es lo que ocurría cuando la gallina ponía los huevos delante del espejo. Estas preguntas incitaban a expresar la generalización.

En esta tarea hemos puesto especial interés en las representaciones utilizadas y la relación entre ellas (condición 3), en particular, la representación verbal y la tabular. Nos centramos en observar las formas en que los niños construyen tablas de funciones para representar la relación entre dos cantidades covariantes. Su construcción implica identificar las variables y la relación que se establece entre ellas (Martí et al., 2010), entre otras nociones.

La investigadora dibujó los ejes de una tabla en la pizarra y puso el primer par de valores: "si la gallina pone un huevo, al ponerlo delante del espejo veremos dos". A continuación los niños salieron por turnos a la pizarra añadiendo pares de valores de la función. Tuvimos presente proponerles valores no consecutivos para evitar la recursividad. Además, formulamos preguntas que ponían la atención en las relaciones por filas de la tabla (López y Brizuela, 2024). Cada vez que un niño escribía una pareja de valores, le preguntábamos qué quería decir con lo que había escrito. Se abría una discusión en clase y se confirmaba si todos los niños lo consideraban correcto o no. En caso de discrepancia lo comprobaban con el material. Una vez realizada la tabla procedimos a leerla entre todos. En la figura 10 podemos ver a la izquierda la tabla construida por los niños y niñas y a su izquierda la realizada por la investigadora con parejas de valores propuestas por los niños.

Figura 10

Tabla construida por los niños en la pizarra.

4. REFLEXIONES FINALES

En las tesis doctorales presentadas hemos usado el potencial del objeto matemático, la función, buscando que los estudiantes desarrollen habilidades que les permitan pensar algebraicamente y reflexionen sobre las relaciones entre variables en los niveles educativos más básicos.

Las tareas y contextos implicados en cada uno de los estudios de las tesis sobre el pensamiento funcional alientan a los estudiantes a descubrir relaciones entre variables, a explorar estructuras matemáticas más que a centrarse en cálculos aislados. Hacer uso de este tipo de tareas para atender a la generalización y su forma de representarse plantea un acercamiento a la enseñanza del pensamiento funcional.

El trabajo realizado sobre los distintos papeles jugados por las mismas variables de una relación funcional expresada de manera directa o inversa puede ayudar a profundizar en el desarrollo de la búsqueda de covariaciones entre variables que les será beneficioso en niveles posteriores. Así mismo, el trabajo concreto con la representación tabular pueden ayudar a los profesores a diseñar actividades en el aula que apoyen su uso fomentando habilidades comunicativas, razonamiento y la justificación. Dado que el currículo actual de la escuela primaria y secundaria exige el dominio de esta y otras herramientas de representación similares para representar gráficamente la información, de ahí el interés de observar su uso por parte de estos jóvenes estudiantes.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Anglada, L., Cañadas, M. C. y Brizuela, B. M. (2025). Generalization among 5-Year-olds in a functional context with programmable robot. *International Journal of Science and Mathematics Education,* 1-22. https://doi.org/10.1007/s10763- 024-10495-x

Ayala-Altamirano, C. y Molina, M. (2020). Meanings attributed to letters in functional contexts by primary school students. *International Journal of Science and Mathematics Education, 18*(7), 1271-1291. https://doi.org/10.1007/s10763-019-10012-5

Ayala-Altamirano, C. y Molina, M. (2021a). El proceso de generalización y la generalización en acto. Un estudio de casos. *PNA, 15*(3), 211-241. https://doi.org/10.30827/pna.v15i3.18109

Ayala-Altamirano, C. y Molina, M. (2021b). Fourth-graders' justifications in early algebra tasks involving a functional relationship. *Educational Studies in Mathematics*, *107*(2), 359-382. https://doi.org/10.1007/s10649-021-10036-1

Ayala-Altamirano, C., Molina, M. y Ambrose, R. (2022). Fourth graders expression of the general case. *ZDM – Mathematics Education, 54*(6)*,* 1377-1392. https://doi.org/10.1007/s11858-022-01398-8

Blanton, M. L. (2008). *Algebra and the elementary classroom: Transforming thinking, transforming practice.* Heinemann Educational Books.

Blanton, M. L. y Kaput, J. (2004). Elementary grades students' capacity for functional thinking. En M. Johnsen y A. Berit (Eds.), *Proceedings of the 28th International Group of the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 135-142). Bergen University College

Blanton, M. L., Brizuela, B. M., Stephens, A., Knuth, E., Isler, I., Gardiner, A. M., Stroud, R., Fonger, N. L. y Stylianou, D. (2018). Implementing a Framework for Early Algebra. *Teaching and Learning Algebraic Thinking with 5-to-12-Year-Olds, ICME-13*, 27-49. https://doi.org/https://doi.org/10.1007/978-3-319-68351-5_2

Blanton, M. L., Levi, L., Crites, T. y Dougherty, B. J. (2011). *Developing essential understanding of algebraic thinking. Grades 3-5*.

Brizuela B. M., Blanton M. L. y Kim Y. (2021). A kindergarten student's use and understanding of tables while working with function problems. En A. G. Spinillo, S. L. Lautert y R. E. Borba (Eds.), *Mathematical reasoning of children and adults*. Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-69657-3_8

Brizuela, B. M. y Earnest, D. (2008). Multiple notational systems and algebraic understandings: The case of the "best deal" problem. En J. J. Kaput, D. W. Carraher y M. L. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 273-301). Lawrence Erlbaum Associates.

Cañadas, M. C. y Molina, M. (2016). Una aproximación al marco conceptual y principales antecedentes del pensamiento funcional en primeras edades. En E. Castro, E. Castro, J. L. Lupiáñez, J. F. Ruiz y M. Torralbo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática. Homenaje a Luis Rico* (pp. 209-218). Comares. https://doi.org/ISBN 978-0-88385-901-8

Carraher, D. W. y Schliemann, A. D. (2015). Powerful ideas in elementary school mathematics. *Handbook of International Research in Mathematics Education: Third Edition*, *2*, 191-218. https://doi.org/10.4324/9780203448946

Cooper, T. J. y Warren, E. (2011). Years 2 to 6 students' ability to generalise: Models, representations and theory for teaching and learning. En J. Cai (Ed.), *Early algebraization. Advances in mathematics education* (pp. 187-214). Springer.

English, L. D. y Warren, E. A. (1998). Introducing the variable through pattern exploration. *The*

Mathematics Teacher, *19*(2), 166-170.

Kaput, J. J. (2008). What is algebra? What is the algebraic reasoning? En J. J. Kaput, D. W. Carraher y M. L. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 5-17). Lawrence Erlbaum Associates.

López, M. y Brizuela, B. M. (2024). Las tablas como herramientas algebraicas. *Uno. Revista de Didáctica de las Matemáticas 106,* 23-28.

Martí, E., Pérez, E. y de la Cerda, C. (2010). Alfabetización gráfica. La apropiación de las tablas como instrumentos cognitivos. *Contextos, 9*(10), 65-78.

Mason, J., Burton, L. y Stacey, K. (1992). *Pensar matemáticamente*. Ministerio de Educación y Ciencia / Labor.

National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Autor.

Narváez, R., Adamuz-Povedano, N. y Cañadas, M. C. (2025). Análisis bibliométrico sobre pensamiento algebraico en educación infantil y primaria en Scopus. *Avances De Investigación En Educación Matemática,* (27), 43-65. https://doi.org/10.35763/aiem27.5825

Pinto, E. y Cañadas, M. C. (2021). Generalizations of third and fifth graders within a functional approach to early algebra. *Mathematics Education Research Journal*, *33*, 113-134.

Pinto, E., Cañadas, M. C. y Moreno, A. (2022). Functional Relationships Evidenced and Representations Used by Third Graders Within a Functional Approach to Early Algebra. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *20*(6), 1183-1202. https://doi.org/10.1007/s10763-021-10183-0

Pólya, G. (1966). *Matemáticas y razonamiento plausible*. Tecnos.

Pang, J. y Sunwoo, J. (2022). Design of a pattern and correspondence unit to foster functional thinking in an elementary mathematics textbook. *ZDM–Mathematics Education, 54*(6), 1315-1331. https://doi.org/10.1007/s11858-022-01411-0

Pittalis, M., Pitta-Pantazi, D. y Christou, C. (2020). Young students' functional thinking modes: The relation between recursive patterning, covariational thinking, and correspondence relations. *Journal for Research in Mathematics Education, 51*(5), 631-674. https://doi.org/10.5951/jresematheduc-2020-0164

Radford, L. (2003). Gestures, speech, and the sprouting of signs: A semiotic-cultural approach to students' types of generalization. *Mathematical Thinking and Learning, 5*(1), 37-70. https://doi.org/10.1207/S15327833MTL0501_02

Radford, L. (2006). Algebraic thinking and the generalization of patterns: A semiotic perspective. En J. Alatorre, M. Sáiz y A. Méndez (Eds.), *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, North American Chapter* (Vol. 1, pp. 2-21). Universidad Pedagógica Nacional.

Ramírez, R., Brizuela, B. M. y Ayala-Altamirano, C. (2022). Word problems associated with the use of functional strategies among grade 4 students. *Mathematics Education Research Journal, 34*(1), 317-341. https://doi.org/10.1007/s13394-020-00346-7

Sarama, J. y Clements, D. H. (2009). "Concrete" computer manipulatives in mathematics education. *Child Development Perspectives, 3*(3), 145-150.

Smith, E. (2008). Representational thinking as a framework for introducing functions in the elementary curriculum. En J. J. Kaput, D. W. Carraher y M. L. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (133-163). Routledge.

Torres, M. D., Cañadas, M.C., Moreno, A., y Gómez, P. (2021a). Structures in direct and inverse forms of a function evidenced by 7–8-year-old students. *Uniciencia, 35*(2), 1-16. https://doi.org/10.15359/ru.35-2.16

Torres, M. D., Brizuela, B. M., Cañadas, M. C. y Moreno, A. (2021b). Introducing tables to second grade elementary students in an algebraic thinking context. *Mathematics, 10*(1), 56. https://doi.org/10.3390/math10010056

Torres, M. D., Cañadas, M. C. y Moreno, A. (2024). Structure recognition and generalization by second-graders in direct and inverse forms of a linear function. *Mathematical Thinking and Learning*, *27*(3), 323-341. https://doi.org/10.1080/10986065.2024.2324492

Warren, E., Miller, J. y Cooper, T. J. (2013). Exploring young students' functional thinking. *PNA, 7*(2), 75-84. https://doi.org/10.30827/pna.v7i2.6131