

Pensamiento algebraico: Propuestas desde la investigación para el aula

María C. Cañadas

Universidad de Granada, mconsu@ugr.es

Marta Molina

Universidad de Salamanca, martamolina@usal.es

Resumen: *El pensamiento algebraico debe formar parte de la enseñanza de las matemáticas en la educación primaria al ser un sentido incluido en el currículo español desde 2022. También se identifican elementos en el currículo de educación infantil que hacen recomendable su tratamiento en dicha etapa. En este trabajo describimos el contexto investigador en el que se han desarrollado tres proyectos de investigación I+D sobre esta temática durante la última década y presentamos ejemplos de tareas y posibles adaptaciones que han sido puestas en práctica en aulas de primaria. Desde diferentes enfoques del álgebra escolar (patrones, funciones, aritmética generalizada y ecuaciones-inecuaciones) y a través de prácticas algebraicas (generalización, representación, razonamiento y justificación), estas tareas permiten abordar el pensamiento algebraico en ambas etapas.*

Palabras clave: *desigualdades, ecuaciones, funciones, igualdades, inecuaciones, patrones, pensamiento algebraico.*

Algebraic thinking: Proposals from research to the classroom

Abstract: *Algebraic thinking should form part of the teaching of mathematics in primary education as it is a sense included in the Spanish curriculum since 2022. Elements have also been identified in the early childhood education curriculum that make its treatment at this stage recommendable. In this paper we describe the research context in which three R&D research projects on this topic have been developed over the last decade and we present examples of tasks and possible adaptations that have been applied in elementary classrooms. From different approaches to school algebra (patterns, functions, generalised arithmetic and equations-equations) and through algebraic practices (generalisation, representation, reasoning and justification), these tasks allow algebraic thinking to be addressed at both stages.*

Key words: *algebraic thinking, equalities, equations, functions, inequalities, inequations, patterns.*

1. INTRODUCCIÓN

El pensamiento algebraico relativo a las etapas de infantil y primaria es un tema de interés en la investigación nacional e internacional desde antes de que fuera incorporado en las directrices curriculares de dichas etapas. En este marco el pensamiento algebraico se entiende como un modo de abordar las situaciones cuantitativas que pone el foco en los aspectos estructurales y relacionales (Kieran, 1996) y en la expresión de la generalidad (Mason et al., 1985) con representaciones no necesariamente simbólicas.

A nivel nacional la investigación sobre el pensamiento algebraico se inicia con trabajos que atienden a las nociones de patrones y generalización en la etapa de educación secundaria. Uno de los estudios de referencia fue la tesis doctoral de Encarnación Castro (1995) en la que exploró los patrones en el contexto de secuencias lineales y cuadráticas representadas con puntos. Dando continuidad a esta línea de investigación, una década después las autoras de este artículo iniciamos nuestra actividad investigadora estudiando, desde diferentes perspectivas, el desarrollo del pensamiento algebraico.

En la tesis doctoral de Cañadas (2007), el interés está en el proceso de generalización de estudiantado de educación secundaria en tareas que involucraban patrones y funciones. Tras este trabajo, se identificó que el álgebra se introducía de forma abrupta y limitada en ese nivel educativo en España y se redirigió la línea de trabajo hacia la educación primaria. Molina (2007), en cambio, indaga en su tesis doctoral en el pensamiento algebraico de escolares de educación primaria, por medio del significado que otorgan al signo igual y el pensamiento que evidencian al resolver igualdades numéricas. Con este trabajo se inicia a nivel nacional una línea de investigación que en otros países ya venía explorándose.

Los intereses surgidos a partir de los trabajos mencionados hasta el momento y el creciente interés en el pensamiento algebraico como línea de investigación a nivel internacional motivaron la formación de un equipo de investigación centrado en el este tipo de pensamiento en educación infantil y educación primaria. Como se puede ver en <https://www.pensamientoalgebraico.es>, el núcleo principal de investigadores y docentes de este pertenecemos a instituciones españolas, pero también contamos con colaboradores a nivel internacional. Hasta el momento, este equipo ha venido trabajando en esta temática en el contexto de tres proyectos de investigación I+D. El foco principal de nuestro trabajo ha sido analizar la viabilidad de introducir el pensamiento algebraico desde la educación infantil y primaria y describir las formas en las que se puede promover en estos niveles educativos.

Como aporte de estos proyectos, los cuales describimos de forma sintética en el siguiente apartado, mostramos algunas tareas que ejemplifican posibles formas de abordar en las aulas los diferentes enfoques del álgebra escolar en los que hemos indagado.

2. UNA DÉCADA DE INVESTIGACIÓN A TRAVÉS DE PROYECTOS DE INVESTIGACIÓN

El primer proyecto (2014-2017, con referencia EDU2013-41632-P) se tituló “Pensamiento funcional en estudiantes de educación primaria como aproximación al pensamiento algebraico”. Como su título adelanta, estaba centrado en uno de los enfoques que se proponen para introducir el pensamiento algebraico en educación primaria: el pensamiento funcional. La función es el contenido matemático fundamental de este enfoque, entendiendo que se puede introducir empleando los números naturales y a través de diferentes representaciones. Con este proyecto contribuimos a la caracterización del pensamiento funcional de estudiantes de educación primaria en el contexto español, mostrando evidencias de su uso por dicho alumnado, y diseñamos tareas que pueden ser de utilidad para la práctica docente.

El segundo proyecto fue continuación del anterior (2017-2021, EDU2016-75771-P) y se tituló “Pensamiento funcional en educación primaria: relaciones funcionales, representaciones y generalización”. En él profundizamos en aspectos clave identificados durante el proyecto previo como relaciones funcionales, representaciones y generalización. Durante este proyecto incorporamos al marco conceptual otros elementos de relevancia para incidir en el trabajo en el

aula: errores y dificultades, acciones para ayudar a los alumnos a superar estas dificultades y prácticas que contribuyen a promover el pensamiento algebraico en las aulas (generalización, representación, argumentación y justificación). Este proyecto permitió avanzar en la descripción del pensamiento funcional del estudiantado de educación primaria y desarrollar materiales, tareas y estrategias que favorezcan el desarrollo de pensamiento funcional y la superación de los obstáculos que lo limitan.

El tercer proyecto, actualmente en desarrollo (2021-2025, PID2020-113601GB-I00) —titulado “Pensamiento algebraico en educación infantil y educación primaria”— es el más ambicioso porque trabajamos con estudiantes tanto de infantil como de primaria y ampliamos nuestro foco de estudio. Al foco de los dos proyectos previos —el pensamiento funcional—, añadimos otros enfoques del álgebra escolar: patrones, aritmética generalizada, ecuaciones e inecuaciones. Así indagamos de forma más integral en el desarrollo del pensamiento algebraico por el estudiantado. Además, generamos materiales, tareas y estrategias para favorecer dicho desarrollo y contribuir a eliminar los obstáculos que lo limitan.

Los tres proyectos se han desarrollado gracias a la colaboración con diferentes centros educativos de Educación Primaria en diferentes ciudades españolas. Los centros han sido privados, concertados y públicos y en zonas de diferentes características socioeconómicas. Los investigadores-docentes de los proyectos entramos a las aulas a trabajar con grupos-clase regulares completos, desarrollando un mínimo de 4 sesiones por curso (desde los 3 años hasta 6.º de primaria). En la mayor parte de los cursos, entrevistamos posteriormente a 6-8 alumnos por grupo. Como resultado, hasta el momento nuestro trabajo ha tenido un impacto directo en más de 1.000 estudiantes.

3. ALGUNAS TAREAS PARA FOMENTAR EL PENSAMIENTO ALGEBRAICO EN EL AULA

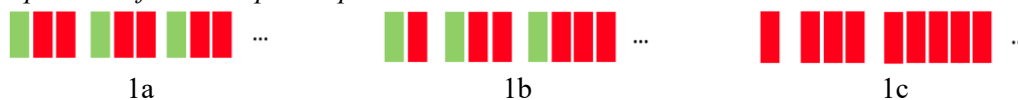
Para las aulas en las que implementamos las sesiones, diseñamos o adaptamos diferentes tareas y materiales dirigidos a fomentar el pensamiento algebraico. En la medida de lo posible, usamos las mismas tareas o con algunas adaptaciones en diferentes cursos. En este apartado proponemos ejemplos de tareas para cada uno de los enfoques del álgebra escolar mencionados anteriormente. En cada tarea, detallamos el curso o cursos en los que se han trabajado, los elementos teóricos que se abordan, así como algunas sugerencias para su adaptación y puesta en práctica en el aula que emergen de nuestra experiencia.

3.1. Patrones

El trabajo con patrones se aborda desde las aulas de educación infantil continuándose en la etapa de educación primaria. Se suele comenzar por los patrones cualitativos para después pasar a los cuantitativos (Moreno et al., 2023). La figura 1 ilustra diferentes tipos de patrones a considerar en esta transición. Anglada et al. (2023) describen en detalle algunas tareas que permiten promover el pensamiento algebraico en educación infantil a través de los patrones.

Figura 1

Ejemplos de diferentes tipos de patrones.



Dentro de los patrones cualitativos, los que más suelen promover los textos escolares son los repetitivos. En la figura 1a mostramos uno de ellos. En ese caso se trata de un atributo cualitativo (color), con dos valores (rojo y verde). Si incluimos más valores para ese atributo (rojo, verde y azul, por ejemplo) o más atributos (forma además del color, por ejemplo), podríamos conseguir patrones de mayor complejidad. En la figura 1a, se observa que el núcleo está constituido por tres elementos (rectángulo verde-rectángulo rojo-rectángulo rojo). Cuanta mayor extensión tenga el núcleo, mayor dificultad tiene la tarea.

A continuación de los patrones cualitativos y antes de los cuantitativos, se propone incluir los patrones de desarrollo. En la figura 1b presentamos un patrón de desarrollo donde se combina lo cualitativo y lo cuantitativo. En este caso, el color permite identificar dónde está el cambio de un término cuantitativo a otro (1-2-3...): aumentan las piezas rojas de un término a otro.

En la figura 1c se observa un patrón cuantitativo. En este caso, se corresponde con la serie de los números impares. Los niños más pequeños (educación infantil), quienes aún no conocen la paridad, lo pueden “ver” de modo recursivo porque cada término se obtiene añadiendo dos piezas al anterior.

En los patrones presentados en la figura 1 se puede requerir continuar los patrones hacia la derecha. Otras posibles tareas son averiguar términos que falten a la izquierda o cumplimentar espacios vacíos entre dos términos no consecutivos del patrón.

En la identificación de cierto tipo de patrones, especialmente aquellos que admiten representaciones estructuradas diferentes de la numérica, puede jugar un rol importante la visualización. En la figura 2 mostramos un ejemplo, que se conoce como “la T crece”, en el que los elementos de la secuencia numérica 4-7-10... se representan formando una T de diferentes tamaños.

Figura 2

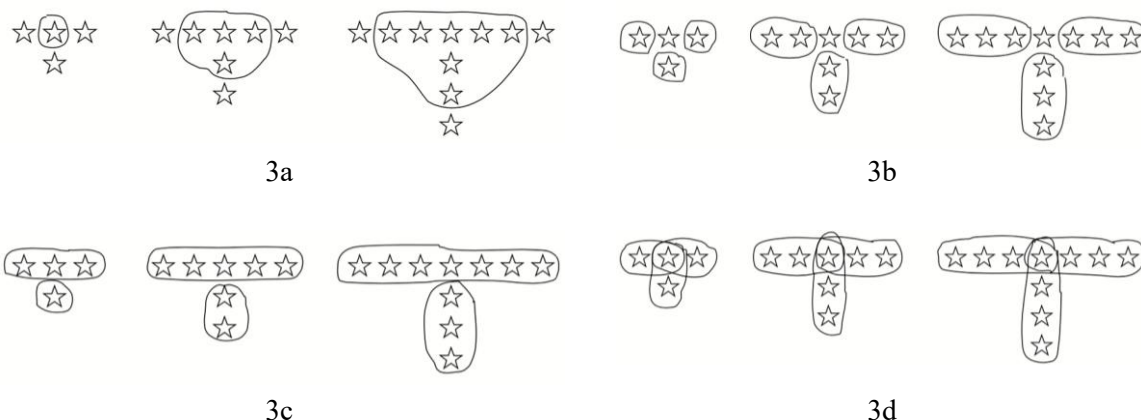
La “T” crece.



A partir de la formulación de diferentes preguntas sobre la percepción del patrón, el estudiantado puede reconocer y generalizar diferentes estructuras. En la figura 3 se muestran algunos ejemplos.

Figura 3

Diferentes formas de ver el patrón “La T crece” (tomado de Lee y Freiman, 2006).



Por ejemplo, en la primera fila de la figura 3a, la parte que se observa constante es la estrella de cada uno de los extremos (3) y la parte central es la que va aumentando añadiéndose una estrella a cada una de las partes (1 en la primera imagen, $1 + 1 \cdot 3$ en la segunda, $1 + 2 \cdot 3$ en la tercera, ... $1 + (n - 1) \cdot 3$ en la posición n). En cambio, en la figura 3b, la constante es la estrella central. En la primera imagen de esa figura, añadimos una estrella a cada una de las tres partes, en la segunda, dos estrellas a cada parte, en la tercera 3 estrellas a cada parte... en la que ocupa la posición n añadiríamos n estrellas a cada parte.

Para fomentar el carácter algebraico de las tareas presentadas, sugerimos hacer a los alumnos preguntas explícitas para que expresen la regularidad que observan, que razonen porqué su respuesta es adecuada y que lo justifiquen a sus compañeros. De esta forma, estaríamos abordando la generalización, la representación, el razonamiento y la justificación como prácticas algebraicas.

En tareas de este tipo, identificamos una sutil diferencia entre patrones y funciones. En nuestra línea de investigación, hablamos de patrones cuando el trabajo se realiza únicamente sobre un conjunto de valores o una única variable. Para el ejemplo de figura 3, trabajamos con patrones si atendemos a la cantidad de estrellas en cada caso. En cambio, si fuera relevante considerar la posición que ocupa el dibujo dentro de la serie de estrellas, tendríamos dos conjuntos de valores que covarían —dos variables: número de estrellas y número de posición que ocupa el dibujo— y estaríamos abordando las funciones.

3.2. Funciones

El concepto de función refiere a relaciones entre cantidades que varían de forma conjunta, tales como la que se muestra en la figura 4 entre el número de mesas y el número de cajas.

Figura 4

Situación de fiesta de cumpleaños para trabajar funciones.

Isabel está preparando su fiesta de cumpleaños. Comienza organizando las mesas y las cajas de sorpresas para sus invitados. Ella junta las mesas formando una fila y coloca las cajas en los lados tales como se muestra en la imagen.



La imagen presenta el caso correspondiente a 3 mesas, actuando como *ejemplo genérico* (Balacheff, 2002), que permite ilustrar una relación ampliable a otros casos similares y promover la generalización. Preguntas relativas al número de cajas sorpresa que se necesitan para cantidades concretas de mesas (ej., 3, 4, 10) guían a los estudiantes a explorar dicha relación. Si los casos que se plantean son consecutivos, los estudiantes pueden plantear la estrategia recursiva “sumar 2” para ir obteniendo el número de cajas necesarias. En este caso el comportamiento de la función se describe en términos de *covariación* (Smith, 2008): cómo los cambios en la variable independiente (número de mesas) producen cambios en la variable dependiente (número de cajas de sorpresas).

Por otro lado, si las cantidades de mesas propuestas no son consecutivas y van haciéndose más grandes, la atención de los estudiantes se dirige a la relación de *correspondencia* entre las cajas y las mesas (“el doble”). La generalización y expresión de la relación conducirá a poder analizar y comparar *representaciones equivalentes* de la relación que expliciten diferentes estructuras, por ejemplo, sumar dos veces la misma cantidad o multiplicarla por dos.

Además, al preguntar por cuántas mesas hay si tenemos un número concreto de cajas de sorpresas, por ejemplo 8, podemos trabajar la *relación inversa* (“la mitad”). En este caso, a diferencia de la relación directa, el número de valores posibles de la variable independiente (“número de cajas de sorpresa”) no son todos los números naturales, solo los números pares. Emergen así nociones como el *dominio* y *codominio* de la función.

Trabajar este tipo de situaciones en el aula de primaria implica generalizar dichas relaciones cuantitativas, expresarlas y estudiar su comportamiento (Blanton y Kaput, 2011), siendo accesibles para todos los cursos de esta etapa. El tamaño de los casos particulares y la sofisticación de las representaciones y razonamientos esperables será diferente según la edad de los escolares.

En este caso la situación se ha descrito por medio de una representación pictórica. En Ayala-Altamirano y Molina (2021) se muestra cómo se trabajó esta tarea en un aula de 4.º de primaria integrándose tablas y afirmaciones verdaderas y falsas sobre dicha relación que contribuyeron a promover la justificación del razonamiento seguido por los estudiantes. En Anglada et al. (2023) se ejemplifica otra tarea típica de este enfoque, la máquina de funciones, en la que la función se presenta por medio de una tabla que incluye varios casos particulares. Cañadas et al. (2024) describen la construcción de un gráfico cartesiano que realizan estudiantes de 3.º y 4.º de primaria en el contexto de máquinas de funciones y algunas de las dificultades observadas y que habría que tener en cuenta al introducir este tipo de representación en el contexto funcional.

En todas estas diferentes formulaciones de tareas de funciones, al igual que se ha indicado para el caso de los patrones, se pueden poner en juego las diferentes prácticas algebraicas incorporando la demanda en las tareas de identificar y expresar regularidades que observen ya

sea dentro de una de las variables o entre las dos variables, así como representar y justificar las respuestas y razonamientos.

3.3. Aritmética generalizada

Durante muchos años, la aritmética generalizada se consideraba como la única vía de acceso al álgebra escolar. En la actualidad sigue siendo uno de los enfoques más relevantes, entendiéndose como la parte del álgebra que atiende a las operaciones aritméticas y sus propiedades. El foco está en que el alumnado perciba regularidades en las operaciones aritméticas que puedan ser generalizadas más allá de números específicos (Stephens et al., 2017). Mason et al. (2009) contribuyen a caracterizar este enfoque a través del término pensamiento estructural que refiere a “la conciencia del uso de las propiedades” (p. 10).

En Ramírez et al. (2024) se muestran algunos ejemplos de tareas para trabajar propiedades aritméticas con niños de educación infantil y primer curso de educación primaria, así como algunas estrategias que emplean. En particular este enfoque puede trabajarse a través de sentencias numéricas pidiendo la justificación de la veracidad o falsedad de estas sin la necesidad de recurrir a cálculos aritméticos. Por ejemplo, conocimiento de la propiedad conmutativa de la adición llevaría a reconocer que la expresión $14 + 5 = 5 + 12$ es falsa, pues no están los mismos sumandos en ambos lados del signo igual. En cambio, $14 + 5 = 5 + 14$ es verdadera. No se persigue que realicen las operaciones aritméticas involucradas e indiquen que sus valores numéricos son iguales. La intención es que perciban que a ambos lados de la igualdad están los mismos términos y que, por tanto, se mantiene la relación de igualdad. Antes de la realización de estas tareas, se propone trabajar la descomposición de los números con los que los niños están familiarizados. Por ejemplo, $4 = 2 + 2$, $4 = 3 + 1$, $4 = 2 + 1 + 1$, etc.

Estas propiedades se pueden trabajar desde educación infantil, donde se sugiere apoyarse en materiales manipulativos o representaciones pictóricas. En la figura 5 mostramos cómo se podría visualizar $3 + 4 = 4 + 3$ con las regletas de color. Se observa que la longitud de unir las dos regletas en distinto orden es la misma.

Figura 5

Representación con regletas de color de la relación numérica $3 + 4 = 4 + 3$.



Otras propiedades como la asociativa, o el elemento neutro para la suma o la diferencia se suelen trabajar a través de expresiones como las siguientes: $257 - 24 = 257 - 30 - 4$ y $7 = 0 + 7$. Sugerimos aquí proponer expresiones variadas en cuanto al número de términos que componen cada miembro de la igualdad y la ubicación de las operaciones para ayudar al desarrollo de una comprensión relacional del signo igual (Molina y Ambrose, 2008).

Por tanto, este tipo de tareas sobre propiedades y operaciones aritméticas se podrían trabajar en el aula a través de diferentes representaciones. Incluso si los estudiantes no conocen dichas propiedades aritméticas, pueden generalizarlas a partir de casos particulares representados de forma concreta, pictórica o simbólica. Sugerimos que se dé a los escolares la oportunidad de razonar sus respuestas y de justificarlas.

En algunos textos escolares, como el fragmento que mostramos en la figura 6, encontramos tareas donde se abordan propiedades aritméticas. Sin embargo, en este ejemplo al demandar el

valor numérico de las expresiones, no se favorece el razonamiento basado en las propiedades aritméticas, sino que se refuerza la tendencia al cálculo predominante en las aulas.

Figura 6

Ejemplos extraídos de libro de texto 5.º de primaria de SM (2023).

Resuelve en tu cuaderno e indica la propiedad que has utilizado en cada caso.

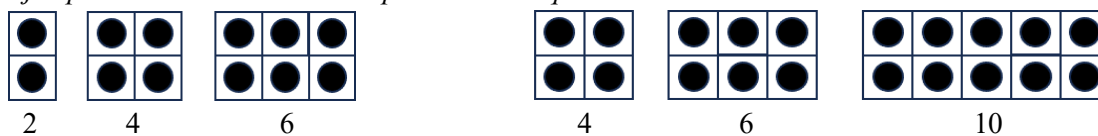
- a. $475 + \bullet\bullet\bullet = 58 + \bullet\bullet\bullet = \bullet\bullet\bullet$
 - b. $(\bullet\bullet\bullet + 2121) + 343 = 5238 + (\bullet\bullet\bullet + \bullet\bullet\bullet) = \bullet\bullet\bullet$
 - c. $4302 + 852 = \bullet\bullet\bullet + \bullet\bullet\bullet = \bullet\bullet\bullet$
- ¿Puedo aplicar la propiedad asociativa con dos sumandos? ¿Por qué?

Además de las propiedades aritméticas elementales, se pueden incluir otras relaciones numéricas tales como averiguar la paridad de la suma de números pares o qué números naturales pueden ser expresados como suma de dos o más números consecutivos” (ej., $7 = 3 + 4$; $10 = 1 + 2 + 3 + 4$). Es importante que, más allá de los resultados aritméticos que se obtengan, el foco esté en las relaciones entre los números o entre ambos lados de la igualdad.

Ambas situaciones se pueden razonar y justificar desde propiedades aritméticas. Sin embargo, los niños suelen buscar la relación general comenzando desde los casos particulares y formulando una conjetura que refutan o no según los casos particulares con los que prueban. Con ejemplos de este tipo, usar representaciones visuales puede facilitar identificar la relación general (Cañadas et al., 2007). La figura 7 ilustra la representación de números pares y de sus sumas con las plaquetas de Herbinier Lebert o su versión más actual, el Numicon. Es posible que, si ya conocen que 4 y 6 son números pares, lo resuelvan aritméticamente, pero esta representación facilita observar que el resultado es par a partir de conocer que los pares en las plaquetas o el Numicon son aquellas piezas que no tienen ningún elemento sin emparejar.

Figura 7

Ejemplos de sumas de números pares con Plaquetas de Herbinier Lebert.



3.4. Igualdades y ecuaciones. Desigualdades e inecuaciones

El concepto de ecuación e inecuación ha sido tradicionalmente trabajado en contextos simbólicos siendo relegado a los niveles de educación secundaria. Sin embargo, el uso de otras representaciones como la verbal, pictórica o manipulativa permite su abordaje desde los primeros cursos escolares. Para que haya presente una ecuación o inecuación, se necesita una situación que exprese relaciones cuantitativas entre varias cantidades, alguna o algunas de las cuales no se conocen. La diferencia entre un concepto u otro radica en si se describe una relación de igualdad o desigualdad entre las cantidades.

La figura 8 muestra un ejemplo de tarea que hemos trabajado con alumnado de segundo ciclo de primaria. En este caso la situación se presenta al estudiante por medio del uso de

representaciones verbales y pictóricas. La disposición particular de las botellas en la imagen busca que emerjan en el aula representaciones diferentes pero equivalentes de dichas cantidades (ej., $14, 6 + 8, 3 \cdot 2 + 8$). De nuevo, como en casos previos, el contraste de las mismas en el aula permitirá razonar con diferentes estructuras cuestionando y argumentando sobre su equivalencia.

Figura 8

Ejemplo de historia con números y símbolos algebraicos (Pacheco-Cáceres et al, en prensa).



En esta situación podemos pedir a los estudiantes que representen la historia con una balanza (manipulativa o pictórica) o con números y símbolos, provocando el uso de los símbolos “mayor que” o “menor que”. En el caso de las situaciones de igualdad, en cambio, se requeriría el uso del signo igual como expresión de una equivalencia (no como un comando para dar una respuesta que es un significado a veces promovido desde la aritmética) (Molina y Ambrose, 2008).

Otras opciones de la tarea surgen al plantear el interrogante de cuántas botellas puede tener Pedro. Surge así la necesidad de razonar con cantidades desconocidas como si fueran conocidas, un componente del pensamiento algebraico conocido como pensamiento analítico (Kieran, 2022). En el caso de las ecuaciones, la solución suele ser única mientras que en este caso podemos hablar de un conjunto solución. En consecuencia, las prácticas de representar y razonar son claves en la resolución de estas tareas.

Ante estas situaciones, el estudiantado es capaz de identificar y emplear la cantidad desconocida, pero tiende a dar uno de los posibles valores en las situaciones de desigualdad posiblemente por su limitada experiencia con relaciones de desigualdad. En contextos que involucran cantidades desconocidas la desigualdad tiene un significado restrictivo, es decir, implica buscar todas las posibles soluciones que hacen verdadera la inecuación. La expresión matemática que describe el conjunto de soluciones por comprensión indicando la relación numérica que restringe el valor de la cantidad desconocida (números menores que $x < 12$) suele dejar implícitas todas esas posibles soluciones a diferencia de la expresión por extensión en la que se indican todos los valores posibles (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 y 11). Con guía por parte del docente, los estudiantes llegan a identificar todos los valores posibles por comprensión y por extensión.

También se observa la necesidad de intervención del docente para reconocer expresiones alternativas al valor numérico como representaciones de las cantidades de Miguel y Ana (Pacheco-Cáceres et al, en prensa). Al representar los problemas de ecuaciones e inecuaciones con expresiones equivalentes, los elementos visuales son un recurso importante para aceptar estas equivalencias, permitiendo al estudiantado mirar el problema y tener un argumento fiable

y simple para dialogar sobre la posibilidad de expresar de múltiples formas una misma situación.

Este enfoque del álgebra puede abordarse también proponiendo a los estudiantes la invención de historias a partir de algún tipo de representación de una relación de igualdad o desigualdad (ej., por medio de una balanza). Esta demanda y la posterior discusión en el aula sobre la correspondencia entre las historias y las representaciones conduce a interpretar y relacionar cantidades desconocidas con contextos cotidiano y se identifica como una estrategia efectiva para favorecer la transición desde el pensamiento aritmético hacia el algebraico (Ayala-Altamirano et al., 2025).

4. REFLEXIONES FINALES

El objetivo principal de este trabajo es ejemplificar formas de abordar en las aulas de primaria el desarrollo del pensamiento algebraico que han sido implementadas en el marco de varios proyectos de investigación que ilustran una línea de trabajo ya consolidada.

Las tareas ejemplo seleccionadas se han estructurado en función del enfoque del álgebra escolar al que corresponden. Estos enfoques no son exhaustivos ni pretenden serlo. Permiten llamar la atención sobre diferentes formas de abordar el pensamiento algebraico en las aulas que conducen al trabajo con nociones algebraicas diferentes. En particular, la aritmética generalizada es uno de los enfoques que se han considerado desde el principio, pero no es el único. Los patrones, habitualmente se trabajan en educación infantil, pero durante años desaparecieron de la educación primaria. Las funciones y las ecuaciones-inecuaciones se trabajan tradicionalmente en educación secundaria. Mostramos algunos ejemplos de cómo abordar su introducción desde antes.

Un elemento transversal a los enfoques son las cuatro prácticas que caracterizan la actividad algebraica: generalizar, representar, justificar y razonar (relaciones y estructuras matemáticas) (Blanton y Kaput, 2011). Estas prácticas son útiles para abordar elementos algebraicos en la educación primaria y en la educación infantil. La generalización es el componente principal que diferencia el pensamiento aritmético del algebraico (Kieran, 1996). En lo relativo a las representaciones, existen una variedad de ellas como se ha puesto de manifiesto en las distintas tareas presentadas. No hay que usarlas todas en todos los enfoques, pero sí es importante identificar aquellas que facilitan la percepción de la estructura y, por tanto, la generalización. Por otra parte, justificar y razonar son prácticas que enriquecen las tareas algebraicas al provocar el uso de las estructuras y relaciones generalizadas como objeto de pensamiento y permitir la progresión en la forma de expresión de estas.

En ocasiones, los docentes pueden usar tareas ya diseñadas para un fin. En otras, sabemos que adaptan las ya existentes para fines concretos. Esperamos haber ofrecido ideas para ser críticos con las tareas disponibles en diferentes fuentes de información, de manera que fomenten lo algebraico de forma eficaz y eficiente. Este aporte es especialmente necesario dada la reciente incorporación en el currículo del sentido algebraico y la escasa formación que tienen los docentes en ejercicio al respecto, pues la gran mayoría se formaron en un momento en el que los planes de estudio de magisterio no incluían el pensamiento algebraico.

AGRADECIMIENTOS

Proyecto PID2020-113601GB-I00 financiado por MCIN/AEI/10.13039/501100011033 y proyecto PID2024-157106NB-I00.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Anglada, M. L., Fuentes, S. y Cañadas, M. C. (2023). Desarrollo del sentido algebraico en Educación Infantil a través de tareas con patrones. *Epsilon*, 113, 9-19.
- Ayala-Altamirano, C. y Molina, M. (2021). Fourth-graders' justifications in early algebra tasks involving a functional relationship. *Educational Studies in Mathematics*, 107(2), 359-382 <https://doi.org/10.1007/s10649-021-10036-1>
- Ayala-Altamirano, C., Pinto, E., Molina, M. y Cañadas, M. C. (2025). La invención de sentencias e historias matemáticas como medio para evidenciar el desarrollo del pensamiento algebraico. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, 28,77-96. <https://doi.org/10.35763/aiem28.7544>
- Balacheff, N. (2000). *Procesos de prueba en los alumnos de matemáticas*. Una Empresa Docente.
- Blanton, M. L. y Kaput, J. J. (2011). Functional thinking as a route into algebra in the elementary grades. En J. Cai y E. Knuth (Eds.), *Early algebraization, advances in mathematics education: A global dialogue from multiple perspective* (pp. 5-23). Springer. <https://doi.org/10.1007/978-3-642-17735-4>
- Cañadas, M. C. (2007). *Descripción y caracterización del razonamiento inductivo utilizado por estudiantes de educación secundaria al resolver tareas relacionadas con sucesiones lineales y cuadráticas 2007*. Tesis doctoral. Universidad de Granada.
- Cañadas, M. C., Deulofeu, J., Figueiras, L., Reid, D. y Yevdokimov, O. (2007). The conjecturing process: Perspectives in theory and implications in practice. *Journal of Teaching and Learning*, 5(1), 55-72.
- Cañadas, M. C., Moreno, A. y Torres, M. D. (2024). First encounter with constructing graphs in the functional thinking approach to school algebra in 3rd and 4th grades. *ZDM-Mathematics Education*, 56, 1059-1078. <https://doi.org/10.1007/s11858-024-01627-2>
- Castro, E. (1994). Exploraciones de patrones numéricos mediante configuraciones puntuales. Estudio con escolares de primer ciclo de secundaria (12-14 años). Tesis doctoral. Universidad de Granada.
- Kieran, C. (1996). The changing face of school algebra. En C. Alsina, J. Álvarez, B. Hodgson, C. Laborde y A. Pérez (Eds.), *Proceedings of 8th International Congress on Mathematical Education: Selected lectures* (pp. 271-290). SAEM Thales.
- Kieran, C. (2022). The multi-dimensionality of early algebraic thinking: Background, overarching dimensions, and new directions. *ZDM-Mathematics Education*, 54(6), 1131-1150.
- Lee, L. y Freiman, V. (2006). Developing algebraic thinking through pattern exploration. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 11(9), 428-433.
- Mason, J., Graham, A., Pimm, D. y Gowar, N. (1985). *Routes to roots of algebra*. London, United Kingdom: The Open University.

- Mason, J., Stephens, M. y Watson, A. (2009). Appreciating mathematical structure for all. *Mathematics Education Research Journal*, 21(2), 10-32. <https://doi.org/10.1007/BF03217543>
- Molina, M. (2007). *Desarrollo de pensamiento relacional y comprensión del signo igual por alumnos de tercero de educación primaria*. Tesis doctoral. Universidad de Granada.
- Molina, M. y Ambrose, R. (2008). From an operational to a relational conception of the equal sign: Third graders' developing algebraic thinking. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, 30(1), 61-80.
- Moreno, A., Cañadas, M. C., Anglada, L., Ayala-Altamirano, C., Fuentes, S., Narváez, R., Pérez-Martos, M. C., Reyes-Escobar, M. y Torres, M. D. (2023). Atribuciones del sentido algebraico en educación primaria. *UNO. Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 100, 21-29.
- Pacheco-Cáceres, E., Pérez-Martos, M. C. y Ayala-Altamirano, C. (en prensa). Introduciendo ecuaciones e inecuaciones a través de problemas aritméticos con apoyo visual. *Aula 31*.
- Ramírez, R., Brizuela, B. y Blanton, M. L. (2024). Kindergarten and first-Grade students' understandings of arithmetic properties across different kinds of problems. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education*, 24, 176-195.
- Smith, E. (2008). Representational thinking as a framework for introducing functions in the elementary curriculum. En J. Kaput, W. Carraher y M. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (133-160). Routledge.