

Introducción a los espacios métricos: aprendizaje colaborativo en la formación de profesores de Matemática

Laura Beatriz Wagner

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Universidad Nacional de La Pampa,
lalywagner@gmail.com

Marisa Elisabet Reid

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Universidad Nacional de La Pampa,
mareid@exactas.unlpam.edu.ar

Resumen: *La formación docente en Matemática debe combinar un sólido dominio del contenido con habilidades pedagógicas flexibles. En respuesta a la evolución tecnológica, se requiere adaptar los enfoques educativos. Se describe una experiencia educativa innovadora en la asignatura Espacios Métricos de la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales de la Universidad Nacional de La Pampa en donde mediante situaciones cotidianas y herramientas tecnológicas, se promueve la colaboración y se ofrece una aplicación práctica de conceptos abstractos. Esta metodología destaca la importancia de integrar teoría y práctica, subrayando la relevancia de una formación docente que responda a las necesidades del entorno educativo actual.*

Palabras clave: *enseñanza, aprendizaje, distancia, tecnología, trabajo colaborativo, formación de profesores.*

Introduction to metric spaces: collaborative learning in Mathematics teacher training

Abstract: *Teacher training in Mathematics must combine solid mastery of content with flexible pedagogical skills. In response to technological evolution, educational approaches need to be adapted. An innovative educational experience is described in the subject Metric Spaces of the Faculty of Exact and Natural Sciences of the National University of La Pampa. Through everyday situations and technological tools, collaboration is promoted and a practical application of abstract concepts is offered. This methodology highlights the importance of integrating theory and practice, underlining the relevance of teacher training that responds to the needs of the current educational environment*

Keywords: *teaching, learning, distance, technology, collaborative work, teacher training.*

1. INTRODUCCIÓN

La formación docente en el área de Matemática ha sido objeto de numerosos debates a lo largo del tiempo. En este sentido, Pochulu y Rodríguez (2022) plantean la cuestión de si es suficiente que un profesor tenga conocimientos sólidos en matemática para enseñar eficazmente esta disciplina. En su artículo, los autores exploran la complejidad de esta pregunta y proponen

Cómo citar: Wagner, L. B. y Reid, M. E. (2025). Introducción a los espacios métricos: aprendizaje colaborativo en la formación de profesores de Matemática. *Epsilon*, 120, 57-69.

reflexiones sobre el conocimiento pedagógico necesario para que un docente logre que sus estudiantes aprendan matemática. Si consideramos todas las perspectivas relacionadas con las funciones y los roles que los docentes de Matemática deben asumir tanto en el presente como en el futuro, nos encontramos con una amplia gama de responsabilidades y tareas.

Asimismo, se busca que los profesores de Matemática sean capaces de estimular y motivar a sus estudiantes para que reflexionen sobre los conceptos matemáticos. También se les exige comprender aspectos sociales y emocionales de sus alumnos, así como ser competentes en la creación de entornos de aprendizaje ricos en contenido matemático. Deben ser capaces de diseñar modelos de enseñanza que se ajusten a las cambiantes condiciones de aprendizaje que se presentan en las clases de Matemática y preparar a sus estudiantes tanto para su futura inserción en el mundo laboral como para continuar sus estudios superiores.

La noción de distancia como una temática de la matemática se encuentra presente en distintas asignaturas del ámbito educativo, así como en las concepciones tanto de profesores como de alumnos. Sin embargo, es relevante considerar cómo esta noción es abordada en el nivel secundario. ¿Cómo se relaciona este conocimiento, destinado a ser enseñado en una o varias materias, con el conocimiento experto en la materia? ¿Qué ajustes y adaptaciones se realizan en estos conocimientos para que sean considerados adecuados para la enseñanza?

Estas y otras cuestiones son tratadas de manera general por Chevallard en la teoría de la transposición didáctica (Chevallard, 1997), la cual distingue específicamente entre el conocimiento experto (saber sabio), el conocimiento destinado a ser enseñado (saber a enseñar) y el conocimiento efectivamente enseñado (saber enseñado), como componentes clave en el proceso de transposición didáctica de un determinado saber.

El docente debe idear, proponer y organizar situaciones matemáticas que permitan a los estudiantes experimentar, desencadenando la aparición de genuinos problemas matemáticos donde el conocimiento en cuestión se presente como la solución óptima. Es crucial que este conocimiento sea accesible para que los alumnos lo construyan por sí mismos.

2. MARCO TEÓRICO

Basándonos en análisis reflexivos respaldados por la literatura (Bastán et al., 2006; Narli, 2010), inferimos que varios programas del espacio curricular Espacios Métricos ofrecidos en la formación de profesores de Matemática exhiben una estructura matemática estandarizada. Este enfoque se caracteriza por centrarse primordialmente en definiciones, demostraciones lógico-deductivas, procedimientos algorítmicos, entre otros aspectos, lo que dificulta la adquisición de un conocimiento con significado que permita discernir su aplicación en diversos contextos. Esta situación puede dar lugar a una subestimación de la relevancia de la asignatura en la formación inicial del futuro docente.

Una noción teórica relevante que permite identificar fenómenos que influyen en el proceso de aprendizaje de los estudiantes, que se refiere al contenido de la enseñanza, al funcionamiento intrínseco de los sistemas didácticos y al propio sistema de enseñanza en su conjunto, es la noción de transposición didáctica propuesta por Chevallard (1997):

Un contenido de saber que ha sido designado como saber a enseñar, sufre a partir de entonces un conjunto de transformaciones adaptativas que van a hacerlo apto para ocupar un lugar entre los objetos de enseñanza. El “trabajo” que transforma un objeto de saber a enseñar en un objeto de enseñanza, es denominado la transposición didáctica. (p.45)

En otras palabras, la transposición didáctica implica una serie de adaptaciones que un concepto matemático específico atraviesa, desde su estado como conocimiento científico (avalado por publicaciones científicas y reconocido por la comunidad académica) hasta su estado como conocimiento escolar (presente en los programas y libros de texto), y finalmente como conocimiento enseñado cuando llega al estudiante.

El aprendizaje de la matemática no se restringe a saber definiciones, teoremas y reconocer la ocasión de aplicarlos, sino que implica una participación activa por parte del estudiante en la actividad. Por lo tanto, el profesor debe proporcionar los medios para que los estudiantes creen una narrativa personal para cada concepto que se enseña. Esto implica recontextualizarlo y repersonalizarlo para luego a través de la institucionalización de dicho conocimiento, intentar redcontextualizarlo de la narrativa personal en la que se presentó y relacionarlo con el conocimiento propio de la comunidad científica.

Los contenidos académicos necesitan pasar por un proceso de descontextualización, es decir, convertirse del "saber sabio" o académico (*savoir savant*) a un conocimiento escolar recontextualizado (*savoir enseigné*), que es precisamente lo que Chevallard identifica como "transposición didáctica".

Es necesario admitir que la transformación del conocimiento disciplinar en formas y procesos comprensibles para los estudiantes constituye uno de los desafíos primordiales en la enseñanza.

Bastán et. al (2007) en el estudio titulado "La topología en la formación de profesores de Matemática", analizan la Transposición Didáctica de los conceptos involucrados en la asignatura "Introducción a la Topología" para profesores de Matemática de la Universidad Nacional de Río Cuarto (Argentina) en el marco de la teoría Antropológica de lo Didáctico desarrollada en el ámbito de la didáctica de la Matemática por el investigador francés Yves Chevallard.

La teoría de las situaciones didácticas se fundamenta en la premisa de que los conocimientos matemáticos no surgen de manera espontánea, y busca establecer las condiciones para su generación. Esta teoría promueve una visión colaborativa del proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, que presenta características constructivistas. En este enfoque, la comunidad educativa interactúa en la resolución de tareas matemáticas, lo que resulta en la producción de conocimientos matemáticos en el aula.

Brousseau (2014) postula que el sujeto produce conocimiento como resultado de la adaptación a un "medio" resistente con el que interactúa:

El alumno aprende adaptándose a un medio que es factor de contradicciones, dificultades, desequilibrios, un poco como lo hace la sociedad humana. Ese saber fruto de la adaptación del alumno, se manifiesta por las respuestas nuevas que son la prueba del aprendizaje. (p.11)

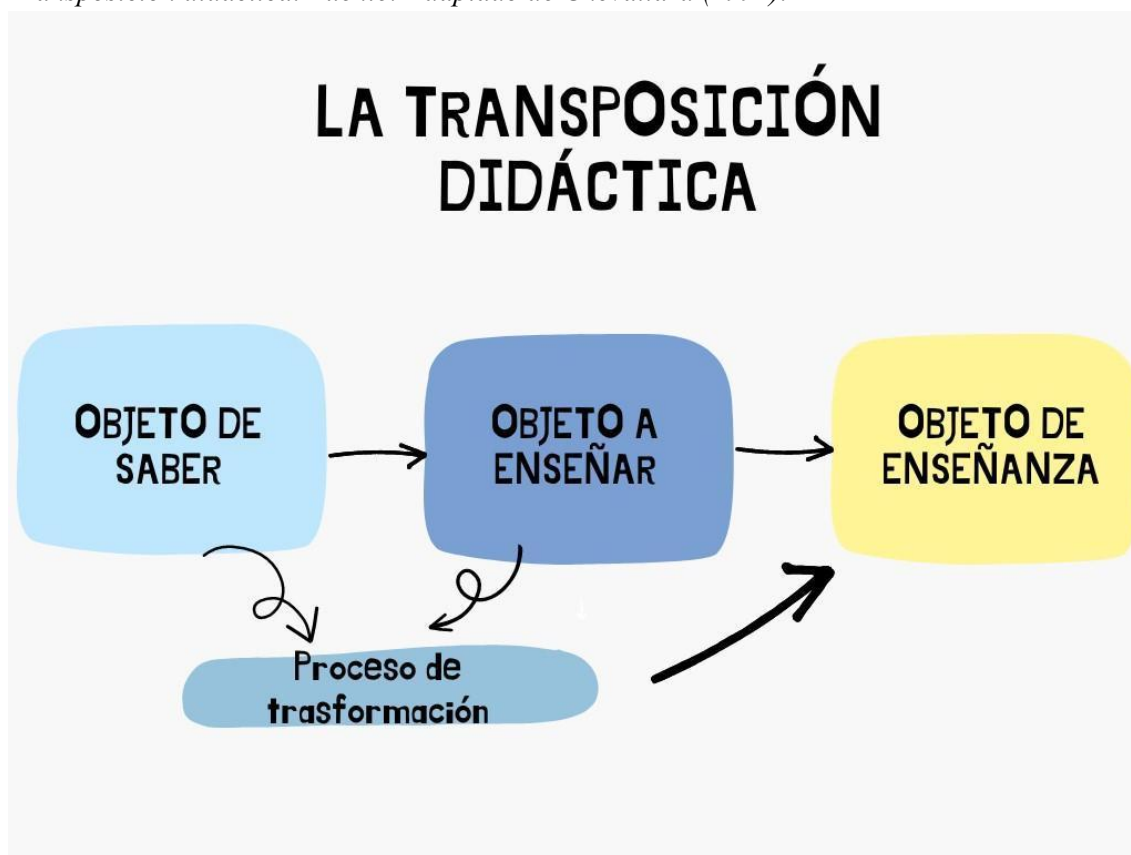
La Teoría de Situaciones de Brousseau demanda al docente una elección de problemas tales que lleven al estudiante a involucrarse activamente en su resolución, llevándolo a actuar, expresarse y reflexionar. Desde el momento en que el estudiante asume el problema hasta que produce una respuesta, el profesor se abstiene de intervenir como proveedor de conocimientos preestablecidos. El estudiante reconoce que el problema fue seleccionado para facilitar la adquisición de un nuevo conocimiento, pero también entiende que este conocimiento surge de manera lógica dentro del contexto de la situación planteada y puede construirlo sin necesidad de razones pedagógicas explícitas. Es fundamental que no solo pueda, sino que también deba,

porque solo habrá dominado verdaderamente este conocimiento cuando pueda aplicarlo por sí mismo en situaciones fuera del contexto de enseñanza y sin guía externa.

El proceso de transformación que sufre el saber hasta constituirse en saber aprendido se modeliza a través de lo que se conoce como proceso de Transposición Didáctica. Este proceso, que se ilustra en la Figura 1, comienza con el saber sabio y culmina en el saber aprendido, pasando por el saber a enseñar y el saber enseñado. En cada etapa, se llevan a cabo sucesivas adaptaciones de las estructuras matemáticas, las cuales están condicionadas por las restricciones implícitas impuestas por las instituciones educativas.

Figura 1

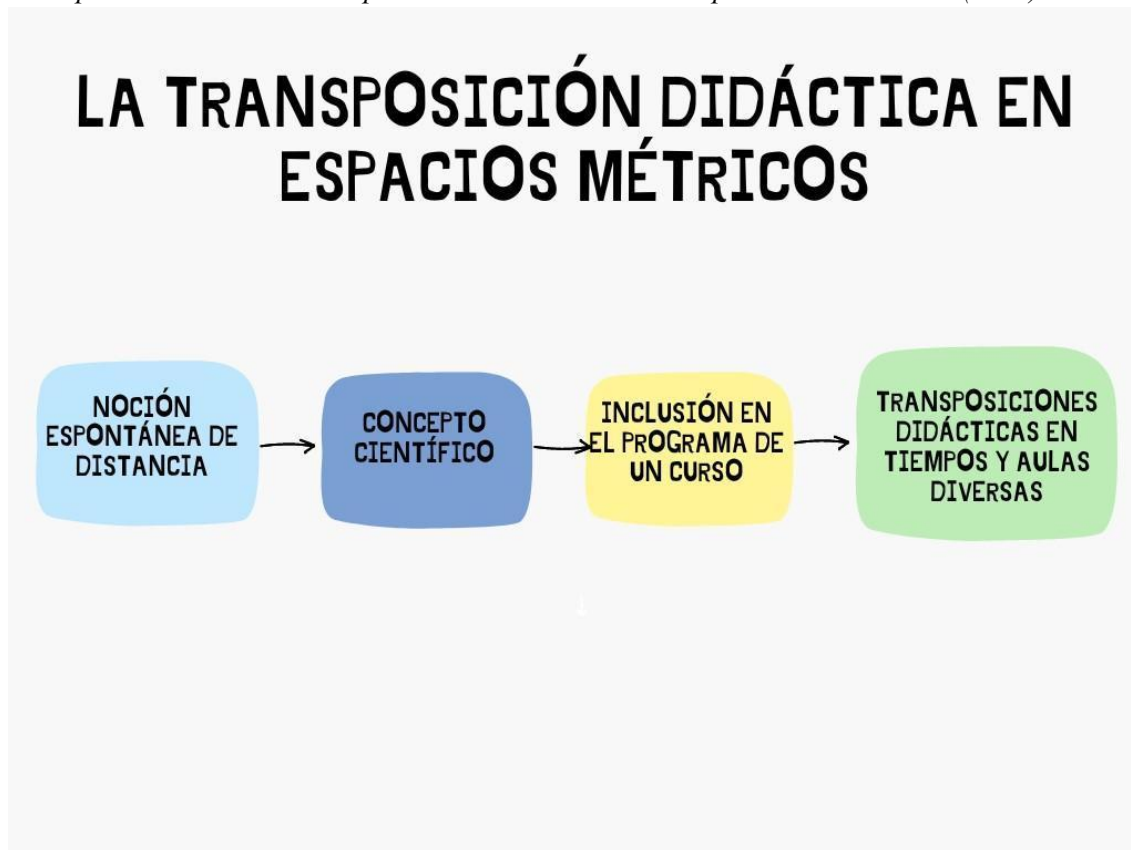
Transposición didáctica. Fuente: Adaptado de Chevallard (1991).



Para ejemplificar el concepto, Chevallard presenta un esquema de transposición didáctica, aplicado al concepto distancia (Figura 2). Este esquema se desarrolla desde la noción de distancia (entre dos puntos) que se usa cotidianamente, su introducción como parte del saber matemático formalizado en 1906 por Maurice Fréchet, su inclusión en los programas escolares desde el nivel primario y su puesta en práctica en los diferentes momentos de enseñanza. A lo largo de los años, la forma en que se enseña esta noción varía, lo que indica que sigue el proceso de transposición didáctica, es decir, la adaptación y evolución continua de cómo se aborda y se enseña el concepto.

Figura 2

Transposición didáctica en Espacios Métricos. Fuente: Adaptado de Chevallard (1991)



En los materiales curriculares destinados al segundo ciclo de la educación primaria en la Provincia de La Pampa (Argentina), se introduce la noción de distancia dentro del eje temático de Geometría y Medida. Esto se lleva a cabo a través del reconocimiento y la utilización de relaciones espaciales y de sistemas de referencia en diversas situaciones problemáticas.

3. EXPERIENCIA

Esta experiencia se llevó a cabo durante el segundo cuatrimestre de 2023, en el curso de Espacios Métricos para futuros docentes de Matemática. La asignatura corresponde al Campo de Formación Disciplinar Específica dentro del plan de estudios del Profesorado en Matemática, y a la formación general básica en el plan de la Licenciatura en Matemática, dictadas en la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales de la Universidad Nacional de La Pampa.

La problemática a partir de la cual surgen los espacios métricos está centrada en la necesidad de definir una distancia o métrica en espacios diferentes a los euclidianos. Frechet se planteó abstraer de la métrica euclídea las mínimas propiedades que debe verificar una métrica y que pudieran ser extendidas a un espacio cualquiera.

En general, se reconoce un desfase entre la formación docente recibida y la manera en que se considera deseable que los docentes principiantes aborden los contenidos en sus aulas de enseñanza media.

Con el objetivo de abordar esta discrepancia, en la asignatura Espacios Métricos se propuso una dinámica innovadora que implica la resolución de diversas situaciones problemáticas

relacionadas con espacios métricos, haciendo uso de distintas distancias. Se optó por emplear recursos que faciliten a los estudiantes la construcción de su propia red conceptual. Este enfoque fomenta un proceso de metacognición interno, permitiéndoles moldear conceptos abstractos y comprender cómo aplicarlos en su futura práctica profesional.

Los diversos enfoques teóricos en educación matemática promueven distintas formas de enseñanza y configuración de las clases. Sin embargo, existe un consenso actual en la importancia de estimular la resolución de problemas como un medio para generar conocimiento.

Nos enfocamos en identificar usos y significados en prácticas contextuales, que permitan un análisis en términos de la construcción social del conocimiento matemático. Consideramos este enfoque de gran interés y con potencial productivo. Para ello, hemos dirigido nuestra atención al concepto de espacio métrico, el cual está estrechamente relacionado con las ideas de distancia, conceptos presentes tanto en las matemáticas puras como en las matemáticas escolares, así como en el pensamiento matemático inherente a la actividad humana en general.

La enseñanza de conceptos matemáticos abstractos, como los espacios métricos, puede ser un desafío para muchos estudiantes. Algunos conceptos a menudo parecen alejados de la realidad y pueden resultar difíciles de comprender y aplicar en la resolución de situaciones problemáticas. Sin embargo, la incorporación de metodologías innovadoras en la enseñanza puede hacer que estos temas sean más accesibles y significativos para los estudiantes. En este artículo, exploramos una experiencia educativa innovadora en la introducción a los espacios métricos, que combina la colaboración online a través de documentos compartidos de Google y la resolución de problemas en contextos del mundo real.

Para el desarrollo de la experiencia, se contempló la utilización de las prestaciones ofrecidas por el paquete de herramientas y servicios de *Google Workspace for Education*. En particular, en esta práctica innovadora se hace uso de *Google Drive* como una plataforma de colaboración online donde es posible tener en una carpeta compartida todos los archivos comunes a la actividad. *Google Drive* brinda diferentes instrumentos de trabajo como *Google Docs*, *Google Sheets*, *Google Slides*, entre otros. Para la experiencia propuesta en el contexto de Espacios Métricos se decidió implementar *Google Docs* como espacio de trabajo colaborativo. Esta herramienta permite a los estudiantes trabajar simultáneamente en las tareas que se realizan para la resolución de la actividad propuesta, las cuales pueden ser monitoreadas en todo momento tanto por los integrantes del grupo como por el cuerpo docente. Además, este espacio de trabajo online brinda diferentes recursos para la elaboración del trabajo, como la posibilidad de dejar comentarios con retroalimentación, el modo “Sugerencias” de escritura y la asignación de tarea a participantes específicos.

La experiencia que se presenta se realizó en las primeras tres semanas del curso Espacios Métricos, en el segundo cuatrimestre del año 2023. El equipo docente estuvo conformado por su responsable y una docente auxiliar. Se inscribieron a la cursada 19 estudiantes correspondientes a la carrera Profesorado en Matemática.

Los espacios métricos constituyen una rama de la topología que se centra en la noción de distancia, un concepto que para muchos estudiantes puede parecer abstracto y teórico. Por este motivo, las docentes de la asignatura decidieron abordar la materia de una manera más concreta y aplicable. Para lograrlo, se optó por utilizar la resolución de situaciones problemáticas cotidianas como estrategia pedagógica. El desarrollo de la actividad se estructuró en diferentes etapas:

1. Formación de los grupos de trabajo
2. Presentación de la situación problemática a trabajar

3. Trabajo colaborativo en Google Drive
4. Exposición y discusión
5. Evaluación

3.1. Formación de los grupos de trabajo

El primer paso en el proceso de la experiencia fue organizar los grupos de trabajo. El cuerpo docente evaluó las aptitudes de cada estudiante, tales como habilidades de oratoria, capacidad para entender conceptos abstractos, liderazgo, fluidez en la escritura y experiencia previa en la asignatura, entre otras. Este análisis se llevó a cabo gracias al conocimiento previo que las docentes de Espacios Métricos tenían de cada estudiante, obtenido a través de otras asignaturas.

La conformación de los grupos se comunicó a través de la plataforma virtual *Moodle*, con el objetivo de garantizar que las personas que no podían asistir a las clases presenciales estuvieran debidamente informadas. Se les brindó una semana para reportar cualquier problema con su asignación de grupo. En esta etapa hubo una baja de dos estudiantes, uno por motivos personales y otro por no cumplir con los requisitos necesarios para cursar la asignatura. En base a esta información, se reorganizaron dos de los grupos, de esta manera se contó con seis grupos de tres personas cada uno y uno de dos (los grupos se formaron con estudiantes tanto de licenciatura como de profesorado en Matemática).

A pesar de que algunos estudiantes pueden no ser partidarios del trabajo en grupo, las docentes de Espacios Métricos consideran que esta metodología es fundamental para la adquisición conjunta de conocimientos. El trabajo grupal facilita el intercambio de opiniones y, a partir de ello, se potencia la posible comprensión de los conceptos. Además, el trabajo en grupo facilita la corrección de errores en la comprensión, ya que los conocimientos y perspectivas de los demás integrantes pueden servir como guía para identificar y resolver malentendidos o confusiones. Esto promueve un ambiente colaborativo donde se promueve el aprendizaje colectivo y posibilita el fortalecimiento de la comprensión de los conceptos abordados.

3.2. Presentación de la situación problemática a trabajar

Una vez conformados y confirmados los grupos de trabajo se procedió a otorgarles permisos de edición en cada uno de los *Google Docs* que contenían las situaciones problemáticas. Para facilitar el acceso a estos documentos, se incluyó en el aula virtual *Moodle* de la actividad curricular una presentación en la plataforma *Genial.ly* con enlaces directos a cada documento. Esta presentación tiene un aspecto similar al inicio de la plataforma de *streaming Netflix*¹ la cual se presenta en la Figura 3 (los nombres de los integrantes de los grupos se eliminaron por razones de confidencialidad).

¹ El uso de la marca de streaming es sin fines de lucro y sólo se utilizó con el objetivo de generar un impacto e interés en los estudiantes.

Figura 3

Portada de la actividad creada en Genial.ly por la cátedra de Espacios Métricos de FCEyN de la UNLPam



Cada grupo, al acceder a su espacio en la plataforma tenía disponible una nueva diapositiva que incluía una imagen representativa de una distancia extraída del buscador de *Google*, un breve resumen de la situación problemática y un enlace que los redireccionaba al correspondiente archivo compartido en *Google Drive*. En la Figura 4 se muestran algunas de las diapositivas de la actividad.

Figura 4

Previsualización de los problemas de la actividad creados en Genial.ly por la cátedra de Espacios Métricos de FCEyN de la UNLPam



En primer lugar, se propuso al estudiantado la lectura de los enunciados para corroborar la comprensión de la situación planteada. Cada uno de los casos representa una situación problemática del mundo real que requería el uso de distintas métricas para su resolución. Algunas de estas situaciones se presentan en la Tabla 1:

Tabla 1

Situaciones problemáticas propuestas para la actividad por la cátedra de Espacios Métricos de la FCEyN de la UNLPam

Grupo	Situación Problemática
1	<p>En una ciudad hay dos edificios, con un departamento por piso, que se encuentran en la misma vereda y entre ellos hay una casa. El encargado del primer edificio se planteó un día ¿Cuál será la distancia que tengo que recorrer para trasladarme de un departamento A a un departamento B con las siguientes reglas:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. Los departamentos A y B están en el mismo edificio o en edificios distintos. 2. Sólo puedo trasladarme de un departamento a otro en ascensor y/o caminando por la vereda.
2	<p>En Santa Rosa, Elizabeth quiere ir caminando desde Jackson Hamburguesas & Ahumados hasta la Farmacia España con la condición de que sólo puede doblar una vez.</p>
3	<p>Mariano se encuentra en una isla. Si él quiere visitar a un amigo en su misma isla la distancia que debe recorrer es la distancia euclidiana entre las coordenadas geográficas entre Mariano y su amigo. Sin embargo, si desea visitar a su novia que vive en la otra isla, la distancia se calcula de la siguiente manera: se debe recorrer a pie la distancia desde donde se encuentra hasta la costa de su isla donde se encuentra el puerto, luego tomar un bote que siempre recorre la misma distancia k hasta el puerto ubicado en la costa de la otra isla y finalmente recorrer caminando.</p>

En cada situación problemática se requerían diversos planteamientos para abordar el problema que los estudiantes debían resolver, utilizando los conceptos impartidos en la asignatura. Los diferentes ítems propuestos incluían:

- Demostrar que la distancia planteada en el problema cumple con los axiomas de una métrica.
- Planificar rutas óptimas, es decir, encontrar la distancia más corta entre varios puntos.
- Aplicar los conceptos de distancia entre conjuntos, entre un punto y un conjunto, y el diámetro de un conjunto.

Además, se trata la noción de bola en la métrica utilizada para profundizar en el entendimiento de las propiedades y aplicaciones de los espacios métricos.

Los estudiantes debían identificar en la situación problemática qué concepto aplicar, ya que éste no se mencionaba explícitamente en el enunciado. Por ejemplo, en el problema del grupo 3, los ítems dados eran:

1. Presentar una función que describa la situación planteada, es decir, el recorrido que debe seguir Mariano para llegar a cualquier punto, ya sea en su misma isla o en la otra.
2. Demostrar que esta función es una métrica.
3. Representar gráficamente la situación modelada por la función de distancia utilizando GeoGebra o dibujándola a mano.
4. Supongan que la isla donde vive Mariano es cuadrada con vértices en $(0,0)$, $(0,2)$, $(2,0)$ y $(2,2)$ y el puerto se encuentra en $(2,1)$. Y por otro lado, la novia de Mariano vive en otra isla en forma de rombo con vértices en $(5,4)$, $(3,3)$, $(5,2)$ y $(6,3)$ cuyo puerto se

encuentra en el vértice inferior. Utilizar alguno de los conceptos de distancia en un espacio métrico para expresar las siguientes situaciones:

- a. Determinar la menor distancia entre un punto (la casa de Mariano) y cualquier punto de la otra isla.
 - b. ¿Cuál es la distancia mínima que una persona puede recorrer desde la mitad izquierda de la isla donde vive Mariano hasta la mitad derecha de la isla donde vive su novia? ¿Qué concepto de un espacio métrico podría usar para expresar esta situación?
 - c. Un volcán en el punto $(0,0)$ de la isla de Marino hace erupción, por lo general la lava tiene un radio de alcance de 4 unidades. Según su métrica, ¿Cómo afectaría a ambas islas?
5. ¿Cuál es la distancia máxima que se puede recorrer de una isla a la otra?

De esta manera, los estudiantes tenían la posibilidad de mostrar que la comprensión de los conceptos se había adquirido no sólo de forma abstracta, sino también para su aplicación a situaciones de la realidad.

3.3. Trabajos grupales en *Google Drive*

Una vez que los estudiantes tuvieron acceso a sus respectivos *Google Docs* con el problema asignado, comenzó el desarrollo de la actividad. El trabajo se llevó a cabo íntegramente fuera del horario de clase. El beneficio de utilizar una herramienta colaborativa se vio reflejado en la interacción asíncrona de cada estudiante con el problema en horarios diversos, es decir, cada participante contribuía con su análisis y propuestas en distintos momentos según su disponibilidad diaria.

Dentro de cada grupo la dinámica de interacción entre los estudiantes fue diferente. Algunos grupos se comunicaban a través de comentarios, reservando la escritura en el documento compartido para cuando llegaban a un consenso sobre lo que debían incluir. Otros preferían redactar individualmente su solución y luego colaborar en la revisión y modificación del trabajo. Por último, otros grupos desarrollaron el trabajo combinando ambas modalidades, alternando entre la escritura directa en el documento, el intercambio de comentarios y la redacción en modo sugerencias de las ideas para el desarrollo de cada ítem.

El rol de las docentes fue supervisar en todo momento que existiera actividad en cada trabajo y verificar que todos los estudiantes del grupo participaran en el desarrollo del mismo. Una de las actividades esenciales de las docentes de la cátedra fue leer el desarrollo de cada ítem para dejar sugerencias o comentarios que ayudaran a los estudiantes a comprender distintos errores que estaban cometiendo al resolver los ítems u orientarlos para encaminar el desarrollo de los diferentes incisos.

Los conceptos relacionados con métrica fueron expuestos por las docentes en las clases de modo tradicional siguiendo un material elaborado por la cátedra. Además los estudiantes contaban con videos explicativos sobre la definición de espacio métrico, con ejemplos de diferentes métricas, para ayudarlos a afianzar los conceptos dados en clase y de esta manera aplicarlos a la tarea encomendada.

3.4. Exposición y Discusión

Cada grupo tuvo la oportunidad de exponer sus análisis y soluciones respecto a la situación problemática ante el resto de la clase. Los estudiantes pudieron plantear preguntas, expresar opiniones y ofrecer sugerencias, lo que promovió un diálogo activo y constructivo. Este intercambio de ideas y perspectivas permitió no solo presentar diferentes enfoques para abordar el problema, sino también enriqueció el entendimiento colectivo sobre el tema.

En esta etapa, surgieron interrogantes relevantes relacionadas con la selección adecuada de conjuntos para garantizar que la función definida cumpliera con los axiomas de una métrica, al tiempo que resultara coherente y significativa dentro del contexto de la situación problemática planteada.

Además, esta fase brindó la posibilidad de identificar posibles áreas de mejora o puntos de vista alternativos, fomentando así el pensamiento crítico y la reflexión sobre el proceso de resolución de problemas en el contexto de los espacios métricos.

3.5. Evaluación

La fase de evaluación se realiza mediante el uso de una rúbrica que considera tanto la resolución del problema como la presentación, siguiendo directrices específicas que aseguran la participación equitativa de todos los miembros del equipo. En la Figura 5 se presenta un ejemplar de la rúbrica utilizada.

La evaluación fue llevada a cabo por las docentes, quienes proporcionaron retroalimentación sobre el trabajo en equipo y las contribuciones individuales, reflejadas en la calificación de cada estudiante.

El proceso de evaluación comprendió dos etapas: primero, se evaluó el desarrollo del trabajo en *Google Drive* por parte de las docentes, y luego se realizó una exposición oral donde todos los integrantes del equipo debieron participar activamente, explicando y defendiendo el trabajo realizado en un tiempo máximo de 20 minutos. Esta presentación podían hacerla utilizando diversas herramientas como *Power Point*, *Canva*, *Genial.ly*, *Impress de LibreOffice* o *Google Slides*.

Figura 5

Rúbrica de calificación para la actividad de la asignatura Espacios Métricos de la FCEyN - UNLPam

		Excelente (10 puntos)	Muy bueno (8 puntos)	Suficiente (6 puntos)	Insuficiente (4 puntos)
C A T E G O R Í A	Presentación de la resolución	Está bien organizado y no presenta errores de ortografía. Se observa vinculación en forma pertinente y significativa con los contenidos estudiados. Refleja reflexión y/o análisis personal.	Está bien organizado y no presenta errores de ortografía. Se observa vinculación en forma pertinente y significativa con algunos de los contenidos estudiados. Refleja reflexión y/o análisis personal.	Cumple con el formato de presentación dado aunque presenta errores de ortografía. Se observa vinculación con los contenidos estudiados pero con escasa reflexión personal.	Incompleto, no cumple con todo lo solicitado
	Trabajo grupal	Esta bien organizado y no presenta errores de ortografía. Se observa vinculación en forma pertinente y significativa con los contenidos estudiados. Refleja reflexión y/o análisis personal.	Algunos integrantes del grupo han sido muy responsables y comprometidos. Se evidencian algunos intercambios y resoluciones grupales.	Predominó la responsabilidad entre los miembros del grupo, sin embargo, se evidencian resoluciones individuales.	Escasa responsabilidad entre los miembros del grupo.
	Trabajo individual	Todos los integrantes del grupo han sido muy responsables y comprometidos. Predominó la cooperación y colaboración dentro del grupo.	El estudiante participa en varios momentos en la resolución de la actividad propuesta pero en algunos de ellos sus aportes tiene errores menores.	El estudiante participa de la resolución de la actividad pero sus aportes no son significativos.	El estudiante nunca participó en la resolución del problema propuesto.
	Conceptos matemáticos	El estudiante participa en varios momentos en la resolución de la actividad propuesta.	Demuestra una comprensión sustancial de los conceptos matemáticos empleados.	Demuestra una mínima comprensión de los conceptos matemáticos empleados.	Demuestra una comprensión muy limitada de los conceptos matemáticos empleados.
	Conceptos y argumentación	Todos los razonamientos y argumentos matemáticos son correctos.	Muchos razonamientos y argumentos matemáticos son correctos (80% o más)	Algunos razonamientos y argumentos matemáticos son correctos (60% o más)	Menos del 60% de los razonamientos y argumentos matemáticos son correctos.
Lenguaje específico y notación	La terminología matemática es correcta y la notación se utiliza siempre, por lo que es fácil de entender el desarrollo de la resolución.	La terminología matemática es correcta y la notación suele utilizarse, por lo que es bastante fácil de entender el desarrollo de la resolución.	La terminología matemática presenta escasos errores y la notación suele utilizarse, pero a veces no es fácil entender el desarrollo de la resolución.	Hay escaso uso o uso inadecuado de la terminología matemática y la notación correcta lo que dificulta ampliamente entender el desarrollo de la resolución.	

4. ANÁLISIS DE LA EXPERIENCIA

Esta experiencia innovadora en la enseñanza de espacios métricos aporta varios beneficios:

- Aplicación en el mundo real: Los estudiantes ven cómo los conceptos abstractos se aplican a situaciones reales, lo cual se manifestó como un aumento de su comprensión y motivación.
- Colaboración activa: La colaboración en grupos y la presentación de soluciones promovieron la comunicación y el trabajo en equipo entre los estudiantes, lo cual puede contribuir a mejorar su capacidad para resolver problemas de manera colaborativa en el futuro.
- Creatividad en la resolución de problemas: El alumnado tiene la oportunidad de explorar diferentes enfoques para resolver situaciones problemáticas, fomentando la creatividad y el pensamiento crítico.
- Uso de tecnología educativa: El uso de herramientas como *Google Drive* mejora la accesibilidad y la facilidad de colaboración online, preparando a los estudiantes para utilizar la tecnología en su futura práctica docente. La integración de herramientas como *GeoGebra* proporciona una dimensión adicional al proceso de aprendizaje al permitir una visualización dinámica y manipulación de conceptos matemáticos complejos. Esto no solo facilita la comprensión de los conceptos abstractos, sino que también fomenta una exploración más profunda y activa de los espacios métricos, preparando a los estudiantes para enfrentar desafíos matemáticos más avanzados y desarrollar una comprensión más sólida de los fundamentos matemáticos.

5. CONCLUSIONES

Es fundamental enfatizar la importancia de que los futuros profesores de Matemática cuenten con un sólido dominio del contenido y habilidades pedagógicas flexibles para afrontar sus responsabilidades como educadores. Además de comprender la disciplina en profundidad, es crucial que posean conocimientos didácticos relacionados con la enseñanza de la matemática y sean capaces de estimular la reflexión y motivación de sus estudiantes.

La teoría de la transposición didáctica de Chevallard ofrece un marco conceptual útil para comprender cómo los conocimientos expertos se transforman en conocimientos enseñados en el contexto escolar, lo que implica adaptaciones y ajustes para garantizar su comprensión y aplicación por parte de los estudiantes. La experiencia innovadora presentada en este trabajo, que combina la resolución de problemas en contextos del mundo real con el uso de herramientas tecnológicas como *Google Drive* y *GeoGebra*, demuestra ser efectiva para aumentar la comprensión y motivación de los estudiantes en la enseñanza de espacios métricos. Este enfoque promueve un aprendizaje activo y significativo al tiempo que desarrolla habilidades colaborativas y de pensamiento crítico, aspectos fundamentales para la formación de profesores de Matemática.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Ascheri, M. E., y Reid, M. E. (2016). *Espacios métricos*. Editorial de la Universidad Nacional de La Pampa. <https://repo.unlpam.edu.ar/handle/unlpam/97>

- Bastán, M., Cuenya, H., y Fioriti, G. (2007). La Topología en la formación de profesores de matemática. En L. Ruiz-Higueras, A. Estepa y F. J. García (Eds.), *Sociedad, escuela y matemáticas. Aportaciones de la Teoría Antropológica de lo Didáctico* (pp. 279-300). Universidad de Jaén.
- Bastán, M., Cuenya, H., y Fioritti, G. (2006). Un análisis histórico-epistemológico de la Topología y su vinculación con el saber enseñado en la formación de profesores de matemática. *Revista de Educación Matemática*, 21, 1–15. <https://doi.org/10.33044/revem.10474>
- Brousseau G. (2014). *Fundamentos y métodos de la Didáctica de la Matemática* (V. Fregona Trad.) Serie B. Trabajos de Matemática, FAMAF, UNC (trabajo original publicado en 1998).
- Chevallard, Y. (1997). *La transposición didáctica. Del saber sabio al saber enseñado* (3ra ed.). AIQUE Grupo Editor.
- Díaz Moreno, J. M. (1997). *Introducción a la topología de los espacios métricos*. Servicio de Publicaciones de la Universidad de Cádiz. <https://rodin.uca.es/handle/10498/27675>
- Lages Lima, E. (2020). *Espaços métricos* (6ta ed.). IMPA.
- Narli, S. (2010). Do students really understand Topology in the lesson? A Case Study. *International Journal of Behavioral, Cognitive, Educational and Psychological Sciences*, 2, 121–124.
- Pochulu, M. y Rodríguez, M. (Comps.) (2022). *Educación Matemática: Aportes a la formación docente desde distintos enfoques teóricos*. Ediciones UNGS. <https://ediciones.ungs.edu.ar/wp-content/uploads/2022/08/9789876301169-completo.pdf>