Épsilon - *Revista de Educación Matemática* *2018, nº 98, 67-85*

RINCÓN "SAPERE AUDE"… ¿resolviendo problemas?

Sixto Romero
Escuela Técnica Superior de Ingeniería
Universidad de Huelva
sixto@uhu.es

INTRODUCCIÓN

En el numero anterior incluíamos en la introducción que seguiría, en esta sección de la revista Épsilon, un parágrafo, una breve reseña histórica sobre Historia de las Matemáticas: ***Matemáticas: ¿dónde comenzó todo?***

Las matemáticas son la ciencia de la descripción, la demostración y el cálculo, según el matemático Ronald Brown.

Iremos ofreciendo una breve cronología (no demasiado exhaustiva) de las matemáticas que pretende esbozar los principales avances en matemáticas en el "edificio" del tiempo.

¿Dónde y cuándo comenzó la historia de las matemáticas?

¿Los egipcios serían los primeros en utilizar las matemáticas? En Mesopotamia, las primeras excavaciones en el siglo XIX han desenterrado las tablillas sumerias de arcilla golpeados con cuneiforme que data de la primera dinastía de Babilonia (Figura 1).

Estos objetos: atestiguan la capacidad de resolver ecuaciones de segundo grado, contienen descripciones de intercambio comercial, hablan de bolsas de grano,…etc.

Es con filósofos griegos conocidos, como Pitágoras, Tales y Platón, que la aritmética, también llamada ciencia de los números, ha sido teorizada y puesta en práctica.

En ese momento, las matemáticas comenzaron a viajar por todo el mundo hasta Alejandría y su famosa escuela.

Diofanto de Alejandría, se cree que nació alrededor del 200/214 d.C. y fallecido alrededor del 284/298 d.C. (¡No se sabe con exactitud cuándo vivió Diofanto!), marca el comienzo de la aproximación algebraica. Hay varias fuentes contradictorias que nos hablan sobre la vida de Diofanto. De la vida de Diofanto, conocemos su duración: 84 años, según se deduce de un epigrama recogido por Metrodoro de Bizancio hacia el año 500 en

Fig.1 Tablillas Sumerias con escritura cuneiforme
http://losdivulgadores.com/blog/2011/07/23/los-anunnaki-los-sumerios-y-el-planeta-nibiru/
https://alamosdeviento.files.wordpress.com/2015/10/tablilla-sumeria-con-escritura-cuneiforme.jpg

la Antología Palatina. El texto ejemplifica un ejercicio aritmético en el que la incógnita resulta ser la edad del matemático. Gracias al epitafio mencionado tenemos una clave para descifrar la cantidad exacta de años que esta singular persona vivió. El epitafio ha sido traducido a una gran cantidad de idiomas y en el español ha tomado diversas adaptaciones pero en su naturaleza siempre se pueden identificar ecuaciones de primer grado para resolver un problema.

Epitafio de la tumba de Diofanto (en una de sus varias versiones):

> *"Esta tumba contiene a Diofanto. ¡Oh gran maravilla! Y la tumba dice con arte, la medida de su vida. Dios hizo que fuera niño una sexta parte de su vida. Añadiendo un doceavo, las mejillas tuvieron la primera barba. Le encendió el fuego nupcial después del séptimo, y en el quinto año después de la boda le concedió un hijo. Pero. ¡Ay! niño tardío y desgraciado, en la mitad de la vida de su padre, lo arrebató la helada tumba. Después de consolar su pena en cuatro años con esta ciencia del cálculo, llegó al término de su vida".* Las expresiones algebraicas quedarían de la siguiente manera: (Figura 2)

A pesar de lo anterior, hay pocas referencias escritas acerca de Diofanto, por tanto, no estamos muy seguros respecto a la época en que vivió. En el ensayo *Sobre los números poligonales* menciona a Hipsicles de Alejandría, quien fue probablemente el autor del libro XIV de los Elementos de Euclides y que vivió en el siglo II antes de nuestra era. Por otra parte, Teón de Alejandría (ca. 335-405 d C.) nombra a Diofanto en su Comentario al Almagesto. Entre ambas fechas límite, varios estudiosos discrepan a la hora de situar históricamente a Diofanto, aunque probablemente vivió en el siglo II d C., según afirma Paul Tannery. Sabemos por el diccionario lexicográfico de Suidas que Hipatia, la hija de Teón, redactó un Gran Comentario de la Aritmética (ahora perdido), siendo además la autora de la primera copia de los seis libros griegos que conservamos. Originalmente,

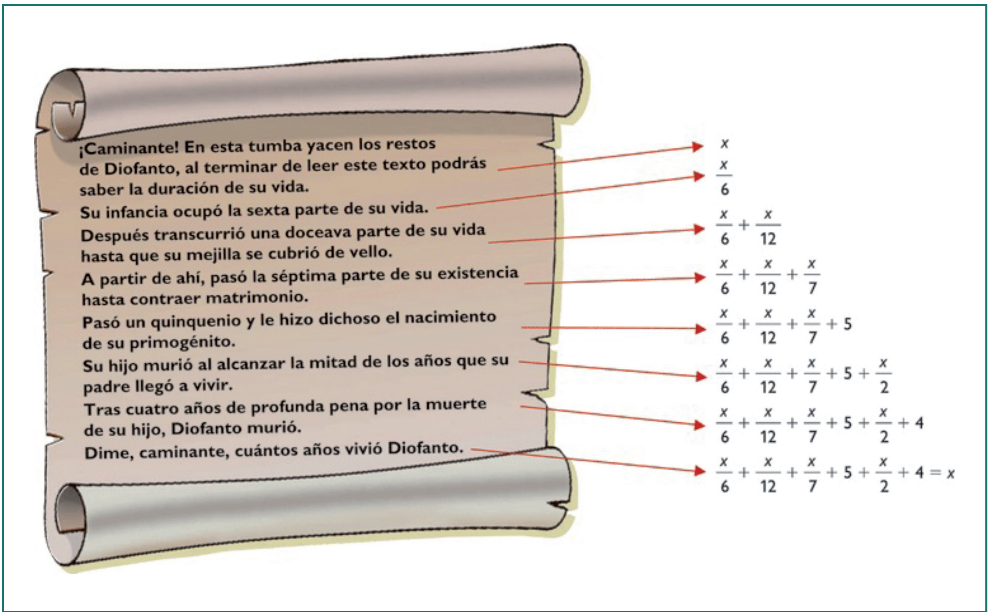

Fig. 2. Epitafio de Diofanto
http://www.ingenierogeek.com/2013/08/edad-diofanto-tiempo-vida-ecuacion-solucion.html

esta obra se componía de trece libros, según explica Diofanto en la introducción del Libro I. Pero no estamos muy seguros de ello. Su principal obra es la *Arithmetica*, Este libro, que constaba de trece libros de los que sólo se han hallado seis, fue publicado por Guilielmus Xylander en 1575 a partir de unos manuscritos de la universidad de Wittenberg, añadiendo el editor un manuscrito sobre números poligonales, fragmento de otro tratado del mismo autor. Los libros que faltan parece que se perdieron tempranamente ya que no hay razones para suponer que los traductores y comentaristas árabes dispusieran de otros manuscritos además de los que aún se conservan.

La *Arithmetica* no es una exposición sistemática de operaciones o funciones algebraicas o de la solución de ecuaciones algebraicas, sino una colección de 150 problemas concebidos en términos de ejemplos numéricos específicos (no es un texto de álgebra, sino una colección de problemas de álgebra aplicada).Su trabajo se aleja de la tradición euclidiana del álgebra geométrica y se aproxima más al álgebra babilónica numérica, aunque se diferencia de esta última por buscar soluciones exactas, positivas y racionales a ecuaciones determinadas (con una única solución) e indeterminadas, y también se diferencia por ser sus números totalmente abstractos y no referirse a medidas concretas, como dimensiones de campos o unidades monetarias, lo cual era característico de la tradición matemática del cercano Oriente.

En esta obra realiza sus estudios de ecuaciones con variables que tienen un valor racional (ecuaciones diofánticas), aunque no es una obra de carácter teórico sino una colección de problemas, adecuados para soluciones enteras. Importante fue también su contribución en el campo de la notación; si bien los símbolos empleados por Diofanto no son como los concebimos actualmente, introdujo importantes novedades como el empleo de un símbolo único para la variable desconocida (στ) y para la sustracción, aunque conservó las abreviaturas para las potencias de la incógnita (δς para el cuadrado, δδς para el duplo del cuadrado, χς para el cubo, δχς para la quinta potencia, etc.). En su época el concepto de números poligonales se extendió a los números espaciales, representados por familias de ortoedros, números piramidales.

En 1621, vio la luz una edición comentada de Bachet de Méziriac, edición reimpresa con posterioridad en 1670 por el hijo de Pierre de Fermat incluyendo los comentarios que el célebre matemático francés había realizado en los márgenes de un ejemplar de la edición de Bachet que poseía.

Los *Elementos* es considerado uno de los libros de texto más divulgado en la historia y el segundo en número de ediciones publicadas después de la Biblia (más de 1000). Durante varios siglos, el quadrivium estaba incluido en el temario de los estudiantes universitarios, y se exigía el conocimiento de este texto. Aún hoy se utiliza por algunos educadores como introducción básica de la geometría.

En estos trece volúmenes Euclides recopila gran parte del saber matemático de su época, representados en el sistema axiomático conocido como Postulados de Euclides, los cuales de una forma sencilla y lógica dan lugar a la Geometría euclidiana.

La matemática elemental nació con Euclides, Arquímedes de Siracusa y/o Apolonio de Perge. Euclides es el autor del famoso libro Los ***Elementos de Euclides*** es un tratado matemático y geométrico que se compone de trece libros, escrito por el matemático y geómetra griego Euclides cerca del 300 a. C. en Alejandría. Aunque la obra era conocida en Bizancio, era desconocida en Europa Occidental hasta alrededores de 1120, cuando el monje inglés Adelardo de Bath la tradujo al latín a partir de una traducción Árabe. En 1482, Erhard Ratdolt realizó en Venecia la primera impresión latina de la obra.

¡Hasta aquí, en esta edición!

SAPERE AUDE, GEOMETRÍA

1. Ejercicios de aquí y allá (solución a la Propuesta del número anterior 97)

Considerando las diferencias existentes entre los niveles educativos a los que nos dirigimos, se cumple en esta ocasión con la propuesta de un material atractivo que dará cuenta de teoremas y propiedades olvidadas y en la mayoría de los casos no contempladas en el curriculum.

En estas joyitas que presento se pone en evidencia, de nuevo la necesidad de reflexionar sobre las razones de por qué no se enseña la geometría elemental clásica dónde estén presentes, por ejemplo, los Elementos de Euclides. Reclamo la necesidad imperiosa de enseñar a nuestros alumnos una geometría creativa. Una vez más, traigo lo que indiqué en el número ant*erior:* "*…una razón para insistir en la enseñanza de la Geometría podemos encontrarla en nuestro entorno inmediato, basta con mirarlo y descubrir que en él se encuentran muchas relaciones y conceptos geométricos: la Geometría modela el espacio que percibimos: construcción y demostración teórica de esta parte de las Matemáticas...*" .

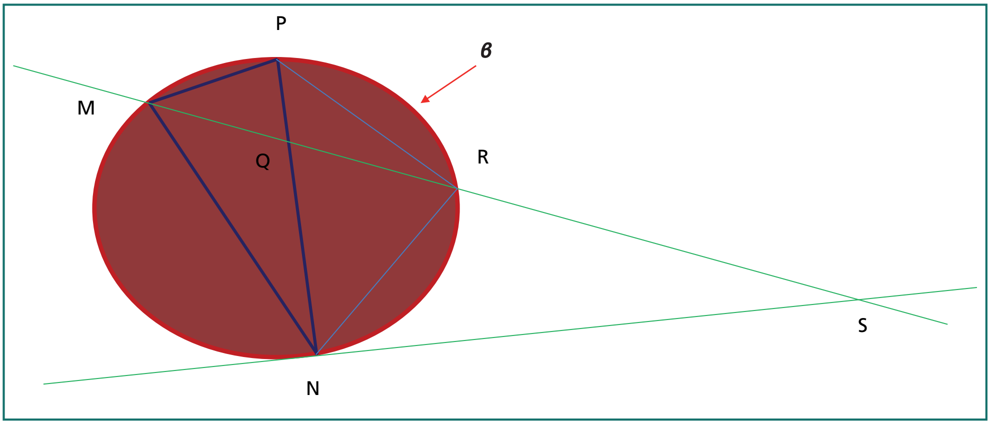

Fig.3. Joyita Geométrica (a).

En esta ocasión, trabajaremos la potencia de un punto, en las vertientes de punto interior, exterior y tangente a una circunferencia. Además, el teorema del coseno, denominado también como ley de cosenos, es una generalización del teorema de Pitágoras en los triángulos rectángulos en trigonometría que relaciona un lado de un triángulo cualquiera con los otros dos y con el coseno del ángulo formado por estos dos lados. *Los Elementos* de Euclides contienen ya una aproximación geométrica de la generalización del teorema de Pitágoras: las proposiciones 12 y 13 del libro II, tratan separadamente el caso de un triángulo obtusángulo y el de un triángulo acutángulo. La formulación de la época podemos considerarla en desuso ya que la ausencia de funciones trigonométricas y del álgebra obligó a razonar en términos de diferencias de áreas.

Propuesta 1: dos joyitas geométricas

JOYITA: a) *Sea MNP un triángulo acutángulo. La bisectriz del ángulo en M corta al lado NP en Q y el círculo β circunscrito al triángulo MNP en R. La tangente a β en N corta a MQ en S. Demostrar que si $MQ^2=2\ PQ^2$, entonces R es la mitad de MS (Figura 3).*

SOLUCIÓN

PASO 1

Por el teorema del ángulo inscrito $\widehat{PMR} = \widehat{PNR}$. Además, utilizando siempre este teorema y el del ángulo tangencial, $\widehat{RMN} = \widehat{RPN} = \widehat{RNS}$.

Puesto que MQ es la bisectriz de $\widehat{PMN}$, los cinco ángulos son iguales y NR es la bisectriz del ángulo $\widehat{SNQ}$.

PASO 2

Aplicando el teorema de la bisectriz al triángulo SNQ, obtenemos

$$\frac{QR}{NQ} = \frac{RS}{NS} \text{ y por lo tanto } \frac{(QR)^2}{(NQ)^2} = \frac{(RS)^2}{(NS)^2}$$

Teniendo en cuenta el teorema sobre la potencia de un punto (En geometría elemental, la expresión **potencia de un punto** se refiere a un resultado que relaciona las longitudes de segmentos de rectas que pasan por dicho punto y cortan a una circunferencia fija) que afirma: " *Si dos rectas que pasan por un punto, en nuestro caso, S (exterior a la circunferencia **β**) y Q (interior a β) cortan a **β** en los puntos, respectivamente, (N,R, M), y (M,P, R, N) , entonces:*

$$MS.RS = (NS)^2 \underline{\qquad\qquad\qquad} QM.\ QR = QP.QN"$$

PASO 3

De aquí se deduce que la potencia del punto S con relación a la circunferencia ***β*** nos da como se cita ut-supra

$$(NS)^2 = MS.\ RS$$
$$\frac{(QR)^2}{(NQ)^2} = \frac{(RS)^2}{(NS)^2} = \frac{(RS).\ (RS)}{(MS).\ (MS)} = \frac{RS}{MS}$$

Análogamente, la potencia del punto interior Q con relación a la circunferencia ***β*** nos da $MQ.QR = NQ.PQ$,

$$\text{y por lo tanto } \frac{(QR)^2}{(NO)^2} = \frac{(PQ)^2}{(MO)^2} = \frac{1}{2}$$

De aquí sigue que como $\frac{(QR)^2}{(NO)^2} = \frac{RS}{MS}$

Se tiene que $\frac{RS}{MS} = \frac{1}{2}$, y por ende R es el punto medio del segmento MS csqd.

JOYITA: b) *Sea **MNP** un triángulo equil*átero ***de altura 1 unidad de longitud**. El círculo* β *de radio 1 y de centro situado en el mismo lado de **MN** que **P** es tangente a **MN** en un punto situado entre **M** y **N**. Mostrar que la longitud de arco de círculo situado en el interior del triángulo **MNP** es independiente del punto de tangente.*

SOLUCIÓN

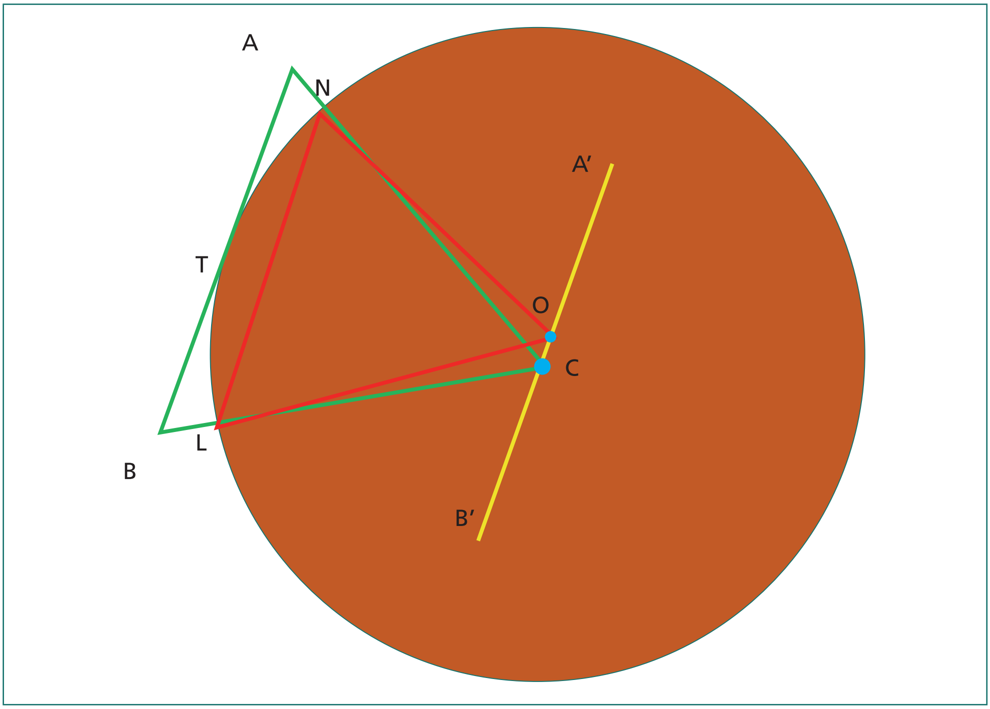

Fig. 4. Joyita Geométrica (b).

PASO 1

Un círculo de radio 1 unidad, teniendo su centro en el semiplano de frontera el lado *AB* conteniendo al punto C, es tangente en T al lado *AB*. Se deduce que le centro O de este círculo está situado sobre la paralela ***t*** a *AB* pasando por C.

Es más, si notamos respectivamente por A' y B' las proyecciones ortogonales de A y B sobre ***t*** , el centro O pertenece al segmento *A'B'*. Notemos que C es entonces la mitad del segmento *A'B'*. El círculo de centro O, radio 1 corta a *BC* en L y a *AC* en N.

PASO 2

Consideremos los triángulos *LCO y NCO.*

Supongamos, sin pérdida de generalidad ninguna que O está situado sobre *CA'*, entonces el ángulo $\widehat{\mathrm{LCO}}$ = 120º y el ángulo $\widehat{\mathrm{NCO}}$ = 60º.

a) Aplicando el teorema del coseno en el triángulo LCO se tiene:

$$OL^2 = OC^2 + CL^2 - 2\ OC.CL.cos(120^o)$$

$$1 = OC^2 + CL^2 + 2.\ OC.CL.(1/2), \text{ por lo tanto}$$

$$\mathbf{1= OC2 + CL2 + OC.OL} \qquad \mathbf{(Ec.\ i)}$$

b) Aplicando análogamente el teorema del coseno en el triángulo NCO, obtenemos:

$$ON^2 = OC^2 + CN^2 + 2.\ OC.CN.\ cos(60^o)$$

$$\mathbf{1= OC2 + CN2 - OC.CN} \qquad \mathbf{(Ec.\ ii)}$$

Se deduce que

$$\mathbf{OC^2 + CL^2 + OC.OL = OC^2 + CN^2 - OC.CN}, \text{ de dónde}$$

$$\mathbf{CL^2 + OC.OL = CN^2 - OC.CN} \Rightarrow \text{OC. [CL+CN] = CN}^2 - \text{CL}^2\text{= (CN+CL).(CN+CL)}$$

PASO 3

Dado que CL + CN ≠ 0, se tiene que OC=CN=CL
Sumando miembro a miembro las ***(Ec i)*** y ***(Ec ii)***, obtenemos

$$2 = 2.\ OC^2 + CL^2 + CN^2 + OC.[CL-CN]$$
$$2 = 2.\ OC^2 + CL^2 + CN^2 - OC^2$$
$$2 = OC^2 + CL^2 + CN^2$$
$$2 = [CN- CL]^2 + CL^2 + CN^2$$
$$2 = 2.\ CN^2 + 2.CL^2 - 2\ CN.CL$$
$$1 = CN^2 + CL^2 - CN.CL$$

O en el triángulo CLN se tiene que:

$$LN^2 = CL^2 + CN^2 - 2CL.CN\ cos(60^o)$$

De aquí llegamos a que $LN = 1$, y esto prueba que le triángulo oln es equilátero. Por lo tanto, el arco *LN* del círculo de radio 1 tangente a al lado *AB* tiene por longitud π/3. Los casos particulares para los que O esté en C, A' o B'son triviales.

SAPERE AUDE, TEORÍA DE NÚMEROS

Propuesta 2: dos joyitas numéricas

La Teoría de números, rama de las matemáticas relacionadas con las propiedades de los enteros positivos, a veces llamado *aritmética superior*, se encuentra entre las actividades matemáticas más antiguas y naturales y siempre ha fascinado tanto a los aficionados como a los matemáticos profesionales. En contraste con otras ramas de las matemáticas, muchos de los problemas y teoremas de la teoría de los números pueden ser entendidos por legos, aunque las soluciones a los problemas y las pruebas de los teoremas a menudo requieren un fondo matemático sofisticado.

Para Pitágoras no solamente "el número gobierna el tono musical" sino que va más allá y piensa que el número es la clave de toda la naturaleza y del cosmos, pensamiento recogido en el aforismo "el número es la esencia de todas las cosas". El concepto matemático que estaba detrás de esta idea de que todo se puede medir, que las magnitudes son conmensurables, es el de los "números racionales", es decir, que cualquier magnitud –número- se podía expresar como la razón, o cociente, entre dos números naturales. O como lo expresaríamos hoy en día, solamente existirían los números racionales, aquellos que se pueden expresar como "p/q**.**

Una crisis profunda del pensamiento pitagórico la marcó la existencia de los números inconmensurables. Este hecho se escondía detrás del teorema de Pitágoras, puesto que si se considera un triángulo rectángulo cuyos catetos valgan 1, la hipotenusa h (que por el teorema es tal que $h^2 = 2$) no es racional. Aunque autores como los filósofos griegos neoplatónicos Proclo (410-485) o Jámblico (aprox. 245-330) atribuyen al propio Pitágoras el descubrimiento de los inconmensurables, se suele conceder su autoría a Hipasos de Metaponto (siglo V a.c.), hacia el año 480 a.c., de quien se dice que murió asesinado por los pitagóricos por difundir ese resultado fuera de la hermandad.

En una nota (atribuida a Proclo) a "*Los Elementos*" de Euclides se dice…

> "Es fama que el primero en dar al dominio público la teoría de los irracionales pereciera en un naufragio, y ello porque lo inexpresable e inimaginable debería siempre haber permanecido oculto. En consecuencia, el culpable, que fortuitamente tocó y reveló este aspecto de las cosas vivientes, fue trasladado a su lugar de origen, donde es flagelado a perpetuidad por las olas".

Sin embargo, Pitágoras creía en la definición absoluta de los números y esto le obligaba a no creer en la existencia de los números irracionales. Por esta razón estando ya desde el principio, en contra de esa demostración, sus compañeros pitagóricos sentenciaron a Hípaso a la pena capital, ahogándole en el mar. El matemático griego Teeteto (417 a.C.-369 a.C.) proponía el problema de encontrar el lado de un cuadrado, cuya área sea el doble de área de un cuadrado de lado {\displaystyle m}"l". Cuya solución conlleva la aparición de la raíz cuadrada de dos.

Hasta mediados del siglo XX, la teoría de números se consideraba la rama más pura de las matemáticas, sin aplicaciones directas al mundo real. La llegada de los ordenadores y de las nuevas tecnologías revelaron que la teoría de los números podría proporcionar respuestas inesperadas a muchos problemas del mundo real. Al mismo tiempo, las mejoras en la tecnología informática permitieron a los investigadores en teoría de números, realizar avances notables al *factorizar grandes números*, *determinar números primos*, *probar conjeturas* y *resolver problemas numéricos* que antes se consideraban inalcanzables.

La moderna teoría de números es una disciplina amplia que se clasifica en subtítulos tales como *teoría elemental, teoría algebraica, teoría analítica, teoría geométrica y teoría probabilística.* Estas categorías reflejan los métodos utilizados para abordar los problemas relacionados con los enteros.

Dos ejercicios, joyitas, con diferentes grados de dificultad presentamos en este Sapere Aude.

JOYITA: a) *Trabajemos con el número irracional raíz de dos. Consideremos unos cálculos algebraicos elementales donde interviene el número irracional* $\sqrt{2}$:

$$(\sqrt{2}-1)^1 = -1+\sqrt{2}$$
$$(\sqrt{2}-1)^2 = (\sqrt{2}-1).(\sqrt{2}-1) = 2-2\sqrt{2}+1 = 3-2\sqrt{2}$$

- ***a.1.*** *¿Cuál es el valor de las siguientes potencias,* $(\sqrt{2}-1)^3$, $(\sqrt{2}-1)^4$, $(\sqrt{2}-1)^5$,,,?
- ***a.2.*** *Después de algunos cálculos, ¿sabríais obtener, como generalización, una expresión para* $(\sqrt{2}-1)^n$*?*
- ***a.3.*** *Se podría pensar en una expresión de la forma* $(\sqrt{2}-1)^n = A_n - B_n\sqrt{2}$. *¿Cómo podemos escribir* A_n *y* B_n*?*

SOLUCIÓN

PASO 1

- ***a.1.*** Calculemos las potencias que se solicitan $(\sqrt{2}-1)^3$, $(\sqrt{2}-1)^4$, $(\sqrt{2}-1)^5$,,,?

Sabemos que

$$(\sqrt{2}-1)^1 = -1+\sqrt{2}$$

$$(\sqrt{2}-1)^2 = (\sqrt{2}-1).\ (\sqrt{2}-1) = 2-2\sqrt{2}+1 = 3-2\sqrt{2}$$

Entonces

$$(\sqrt{2}-1)^3 = (\sqrt{2}-1)^2(\sqrt{2}-1) = -7+5\sqrt{2}$$

$$(\sqrt{2}-1)^4 = (\sqrt{2}-1)^3(\sqrt{2}-1) = (-7+5\sqrt{2})(\sqrt{2}-1) = 17-12\sqrt{2}$$

$$(\sqrt{2}-1)^5 = (\sqrt{2}-1)^4(\sqrt{2}-1) = (17-12\sqrt{2})(\sqrt{2}-1) = -41+29\sqrt{2}$$

…………………………….

- ***a.2.*** Después de estos cálculos observamos que todas las potencias quedaran de la forma

$$(\sqrt{2}-1)^n = A_n - B_n\sqrt{2}$$

PASO 2

Estudiemos esta expresión última

El mayor número entero estrictamente inferior a $\sqrt{2}$ es 1, y esto hace que la expresión $\sqrt{2}-1$ sea un número estrictamente inferior a 1. Se puede escribir por lo tanto, sin temor a equivocarnos que:

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{2}-1)^n = 0.$$

Y consecuentemente

$$\lim_{n\to\infty}(A_n - B_n\sqrt{2}) = 0.$$

Por ejemplo, tomando la línea de más arriba $-41+29\sqrt{2}\approx 0$ que corresponde al exponente n=5 de dónde $\sqrt{2}\approx\frac{41}{29}\approx 1{,}41379310344828$…….

El valor aproximado de $\sqrt{2}$ es tanto mejor con el aumento de ***n***, es decir cuándo ***n*** es grande.

A partir de la expresión $(\sqrt{2}-1)^n = A_n - B_n\sqrt{2})$ se puede calcular fácilmente el término siguiente.

PASO 3

$$(\sqrt{2}-1)^n = A_n - B_n\sqrt{2}$$

$$(\sqrt{2}-1)^{n+1} = (\sqrt{2}-1)^n(\sqrt{2}-1) = (A_n - B_n\sqrt{2})(\sqrt{2}-1)$$

$$= A_n\sqrt{2} - A_n - 2B_n + B_n\sqrt{2}) = \underbrace{(-A_n - 2B_n)}_{A_{n\ 1}} - \underbrace{(-A_n - B_n)}_{B_{n\ 1}}\sqrt{2}$$

De dónde

$$(\sqrt{2}-1)^{n+1} = \underbrace{(-A_n - 2B_n)}_{A_{n\ 1}} - \underbrace{(-A_n - B_n)}_{B_{n\ 1}}\sqrt{2}$$

PASO 4

Así podemos considerar las tres sucesiones siguientes:

$$A_n := \begin{cases} A_1 = -1 \\ A_{n+1} = -A_n - 2B_n \end{cases} \quad ; \quad B_n := \begin{cases} B_1 = -1 \\ B_{n+1} = -A_n - B_n \end{cases} \quad ; \quad R_n := \frac{A_n}{B_n}$$

PASO 5

A partir de este resutado podemos calcular los términos consecutivos con un programa adecuado, por ejemplo MATLAB, SCILAB, MAPLE.

Fig. 5. Tabla Número

n	An	Bn	Rn
1	-1	-1	1
2	3	2	1,5
3	-7	-5	1,4
4	17	12	1,4166666666667
5	-41	-29	1,4137931034483
6	99	70	1,4142857142857
7	-239	-169	1,414201183432
8	577	408	1,4142156862745
9	-1393	-985	1,4142131979696
10	3363	2378	1,4142136248949
…	…	…	…
…	…	…	…
…	…	…	…
…	…	…	…
20	22619537	15994428	1,4142135623731

Obsérvese que verdaderamente para R_n: $= \dfrac{A_n}{B_n}$

su límite: $\lim\limits_{n \to \infty} R_n = \sqrt{2}$

JOYITA: b) *La sucesión de números denominada sucesión de Padovan (en honor a Richard Padovan, arquitecto y matemático nacido en 1935) es la sucesión recurrente definida así:*

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{u_{n-1}}{u_n}+\frac{u_{n-2}}{u_n}$$

La sucesión puede ser anodina, ***1,1,1,2,2,3,4,5,7,9,12, 16,…***

pero si nos fijamos en el cociente $p_n=\frac{u_{n+1}}{u_n}$ *y calculamos el valor hacia el que tiende en el límite cuando n tiende a infinito, nos encontraremos el número denominado* ***número de plata*** *en similitud con el* ***número de oro*** *o número plástico en el sentido de la belleza arquitectónica.*

- ***b.1.*** *Calcular el valor del límite:* $\Psi = \lim_{n\to\infty}\frac{P_{n+1}}{P_n}$
- ***b.2.*** *La idea de dibujar una sucesión de triángulos equiláteros en los que la longitud de los lados sean los números de la sucesión de Padovan nos lleva a conseguir una bella figura denominada* ***Espiral de triángulos de Padovan****.* ¿Sabrías dibujarla?.*Utilizar cualquier programa para obtener el dibujo.*

SOLUCIÓN

- ***b.1.*** Calculemos $\Psi = \lim_{n\to\infty}\frac{P_{n+1}}{P_n}$

PASO 1

Para poder tener una idea inicial de cómo va a converger la sucesión p_n calculemos los primeros 20 términos en la siguiente tabla, utilizando una Excel-2016:

Fig. 6. Tabla Sucesión de Padovan

SUCESIÓN DE PADOVAN		
n	**u(n)**	**p(n)**
1	1	1
2	1	1
3	1	2
4	2	1
5	2	1,5
6	3	1,333333333
7	4	1,25
8	5	1,4
9	7	1,285714286
10	9	1,333333333
11	12	1,333333333

SUCESIÓN DE PADOVAN		
n	**u(n)**	**p(n)**
12	16	1,3125
13	21	1,333333333
14	28	1,321428571
15	37	1,324324324
16	49	1,326530612
17	65	1,323076923
18	86	1,325581395
…	…	…
80	696081	1,32471779572

Se constata rápidamente que no es necesario avanzar mucho en la sucesión para afirmar que los resultados de la segunda columna crecen indefinidamente,

$$\lim_{n\to\infty} u_n = +\infty$$

y que los resultados de la tercera columna, la sucesión de los $\boldsymbol{p_n}$, se van acercando a $\lim_{n\to\infty} p_n = 1{,}3247179572$ a partir del lugar 80.

PASO 2

Abordemos el ejercicio desde el punto de vista del análisis.
Partamos de la igualdad $u_{n+1} = u_{n-1} + u_{n-2}$ dividiendo los dos términos por u_n ϕ, escribamos esta nueva expresión así

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{\frac{u_n}{u_{n-1}}} + \frac{u_{n-2}}{u_n}$$

Que a su vez se puede escribir

$$\Psi$$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{\frac{u_n}{u_{n-1}}} + \frac{1}{\frac{u_{n-1}}{u_{n-2}}} \cdot \frac{1}{\frac{u_n}{u_{n-1}}}$$

Suponiendo que existe el límite de este cociente, llamémosle Ψ

$\Psi = \lim_{n \to \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n}$, el límite entre ***(término siguiente)/(término)***. Suponiendo que exista y tomando límites en la igualdad anterior obtenida ut-supra, Ψ deberá verificar la igualdad

$$\Psi = \frac{1}{\Psi} + \frac{1}{\Psi} \cdot \frac{1}{\Psi}$$

De dónde

$$\psi^3 = 1+\psi \Rightarrow \psi = \sqrt[3]{1+\psi} = \sqrt[3]{1+\sqrt[3]{1+\psi}} = \sqrt[3]{1+\sqrt[3]{1+\sqrt[3]{1+\psi}}} =$$

$$= \sqrt[3]{1+\sqrt[3]{1+\sqrt[3]{1+\psi}}} = \sqrt[3]{1+\sqrt[3]{1+\sqrt[3]{1+\sqrt[3]{1+\ldots\ldots\ldots}}}}$$

PASO 3

Esta ecuación de grado 3 en Ψ admite una solución real, que se puede calcular, por ejemplo, utilizando la fórmula de Cardano.

NOTA: Fórmula de Cardano. Dado la ecuación de grado tres:

$x^3 + ax^2 + bx + c = 0$. Hacemos el cambio $x = y - \frac{a}{3}$ de dónde la ecuación quedaría así $y^3 + \frac{3b - a^2}{3} y + \frac{2a^3 - 9ab + 27c}{27} = 0$, que podemos escribir en forma reducida cuya solución es

$$y = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

En el caso que nos ocupa ***a* = 0, *b* = -1**, y ***c* = -1**.

Por ello

$$p = \frac{3(-1) - 0^2}{3} = \frac{-3}{3} = -1; q = \frac{2.0^3 - 9.0.(-1) + 27(-1)}{27} = -1$$

$$\psi = \sqrt[3]{\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{27}}} = \sqrt[3]{\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{23}{4.27}}} + \sqrt[3]{\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{23}{4.27}}} =$$

$$= \sqrt[3]{\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{23}{2^2 27}}} + \sqrt[3]{\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{23}{2^2.27}}} = \sqrt[3]{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{23}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{23}{27}}} =$$

$$= 1{,}3247179572\ldots$$

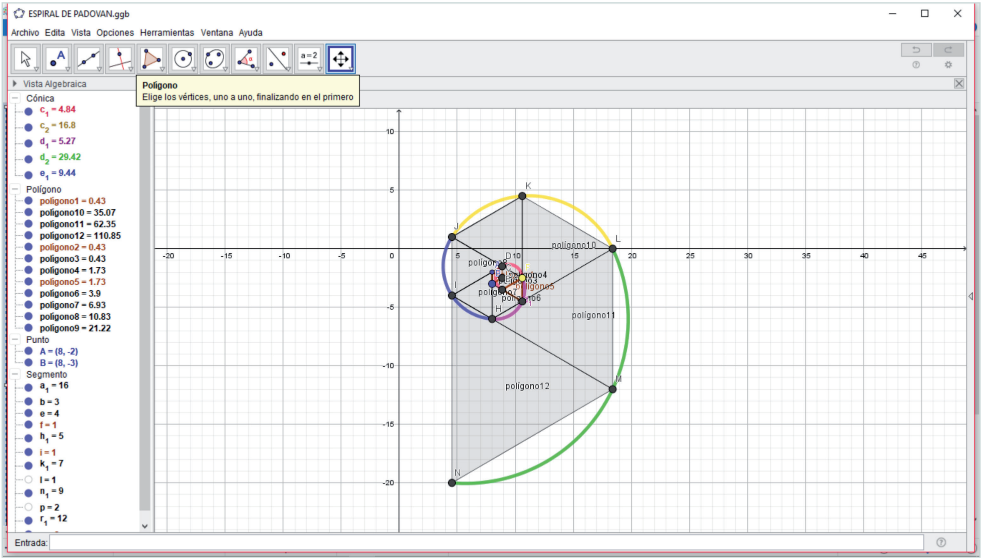

Fig. 7. Espiral de Padovan

Es decir, $\Psi = 1{,}3247179572...$

NOTA: La ecuación $\Psi^3 - \Psi - 1 = 0$ se puede escribir

$$\psi^3 = 1+\psi \Rightarrow \psi = \sqrt[3]{1+\psi} = \sqrt[3]{1+\sqrt[3]{1+\psi}} = \sqrt[3]{1+\sqrt[3]{1+\sqrt[3]{1+\psi}}} =$$

$$= \sqrt[3]{1+\sqrt[3]{1+\sqrt[3]{1+\psi}}} = \sqrt[3]{1+\sqrt[3]{1+\sqrt[3]{1+\sqrt[3]{1+.........}}}}$$

$$\psi = \sqrt[3]{1+\sqrt[3]{1+\sqrt[3]{1+\sqrt[3]{1+.........}}}}$$

Este número Ψ se denomina ***número de plata*** por su similitud con el ***número aúreo***, ϕ, y también se le suele llamar nombre de plástico, en el sentido de la belleza arquitectónica.

- ***b.2.*** Para obtener la **Espiral de triángulos de Padovan**, hemos utilizado Geogebra (Figura 7).

Como es necesario utilizar los tres primeros términos de la sucesión, dibujemos los tres triángulos primeros en el sentido de las agujas del reloj. Y después el resto.

SAPERE AUDE, EJERCICIOS DE AQUÍ Y ALLÁ, PROPUESTAS

En esta ocasión voy a proponer dos ejercicios de características muy diversas. El primero de geometría clásica en la misma línea que he ido proponiendo en números anteriores. Y en el segundo propongo lo que se podría llamar ***Geometría para reír y para llorar***, utilizando los "smileys". Un *smiley* (del inglés *to smile*, 'sonreír') es una representación esquemática de una cara sonriente. La mayoría de las veces es de color amarillo, con dos puntos negros como ojos y medio círculo mostrando una expresión de completa y plena felicidad (Figura 8).

Fig. 8. Smiley sonriente.
https://es.wikipedia.org/wiki/Smiley#/media/File:Smiley.svg

A veces se usa «smiley» como sinónimo de emoticono, si bien no lo es, ya que no todos los emoticonos son *smiley.*

Propuesta 1: dos joyitas geométricas

a) Sea PQRST un pentágono convexo tal que los lados cumplen que PQ = PR, PS = PT y los ángulos RPS = PQT + PTQ. Si el punto M es la mitad de QT, probar que el lado RS = 2 PM (Figura 9).

b) Con un poco e imaginación, para conseguir un smiley, utilizaremos puntos, círculos, segmentos, cónicas,… . ¡Ánimo!

Construir un smiley con tres círculos (la cabeza y los dos ojos), cuatro puntos (las dos pupilas y los dos orificios de la nariz), dos segmentos (la nariz), y un arco de parábola (para la boca) (Figura 10).

Propuesta 2: dos joyitas numéricas

Presento dos ejercicios de diferente corte y con un cierto grado de dificultad.

Por un lado, el primero representa una curiosidad, como puede comprobar el lector. Una resolución de ecuaciones ciclométricas (funciones trigonométricas inversas) hacen intervenir cocientes de números que forman la sucesión de Fibonacci.

Y en el segundo se plantea la resolución de la suma de factoriales de números positivos. El factorial de un entero positivo ***n***, se define como el producto de todos los números enteros positivos desde 1 (es decir, los números naturales) hasta *n*. Por ejemplo:

1! =1___2!=1.2=2___ 3!=1.2.3=6___4!=1.2.3.4=24___5!=1.2.3.4.5=120……….

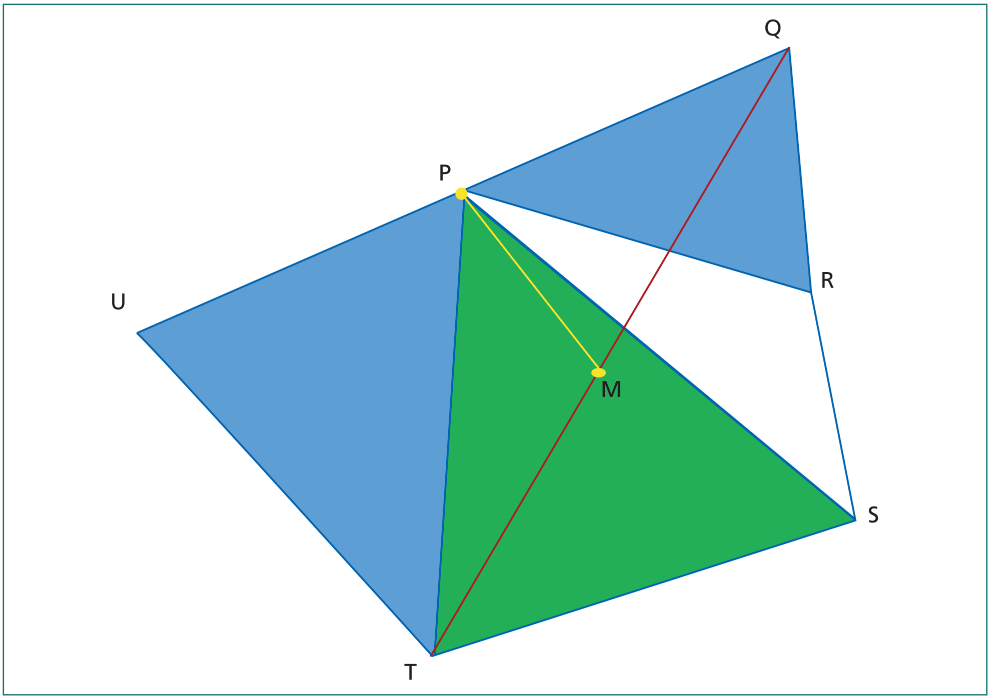

Fig. 9. Pentágono Convexo.

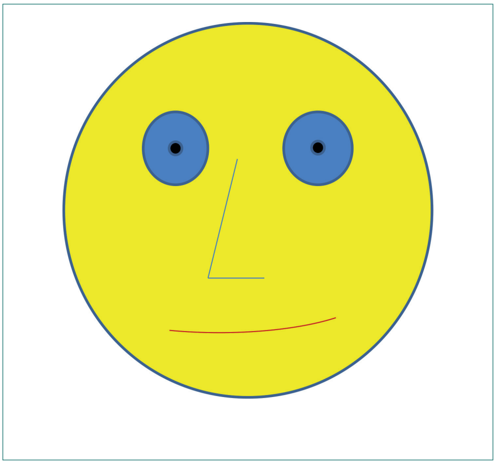

Fig. 10. Smiley para construir.

La operación de factorial de un número aparece en muchas áreas de las matemáticas, particularmente en combinatoria y análisis matemático. Estructuralmente, ***el factorial de n*** representa el número de formas distintas de ordenar n objetos distintos (elementos sin repetición). Este hecho ha sido conocido desde hace varios siglos, en el siglo XII por los estudiosos hindúes.

La definición de la función factorial también se puede extender a números no naturales manteniendo sus propiedades fundamentales, pero se requieren matemáticas avanzadas, particularmente del análisis matemático.

La notación matemática actual ***n!*** fue usada por primera vez en 1808 por Christian Kramp (1760–1826), un matemático francés que trabajó en especial sobre los factoriales toda su vida.

a) Demostrar sin ayuda de ninguna calculadora que

$$arctg\,\frac{144}{233} + arctg\,\frac{89}{377} = \frac{\pi}{4}$$

b) *En este segundo ejercicio, sin necesidad de utilizar calculadora y sin desarrollar, de forma razonada resolver las cuestiones siguientes:*

b.1. *¿En qué cifra termina **1!+2!+3!+4!+5!** ?*

b.2. *¿Y **1!+2!+3!+4!+5!+…..+10!** ?*

b.3 *¿Y **1!+2!+3!+4!+5!+6!+………..100!** ?*

b.4. *Tal vez asuste un poco la pregunta. ¿y **1!+2!+3!+……………+1000!** ?*

b.5. *¿Podemos sacar una conclusión para la suma*

$$\sum_{i=1}^{n} i!$$

siendo ***n*** cualquier número positivo?

NOTA: Las respuestas pueden enviarla a la dirección electrónica:
sapereaudethales@ gmail.com