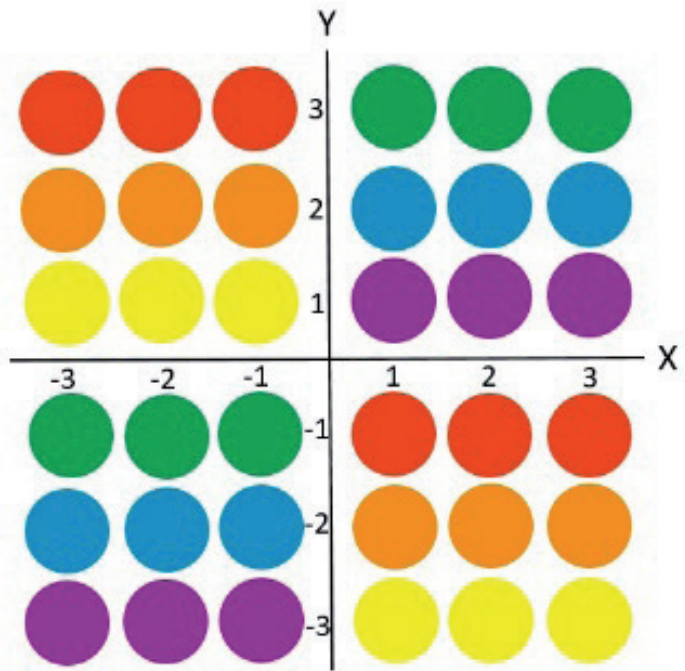


# 99

2018



# εpsilon

Revista de Educación Matemática

Editada por la S.A.E.M. "THALES"



# epsilon 99

Revista de Educación Matemática

## Director

Alexander Maz

## Comité Editor

Francisco España

Inmaculada Serrano

José María Vázquez de la Torre

Salvador Guerrero

Noelia Jimenez

## Comité Científico

Evelio Bedoya,

*Universidad del Valle, Colombia.*

José Carrillo

*Universidad de Huelva, España.*

José Iván López Flores,

*Universidad Autónoma de Zacatecas, México*

José Ortiz,

*Universidad de Carabobo, Venezuela.*

Liliana Mabel Tauber,

*Universidad Nacional del Litoral, Argentina.*

M<sup>a</sup> Mar Moreno,

*Universidad de Alicante, España.*

Matías Camacho,

*Universidad de la Laguna, España.*

Roberto Alfredo Vidal Cortés,

*Universidad Alberto Hurtado, Chile.*

Patricia Pérez Tyteca

*Universidad de Alicante*

Carlos de Castro

*Universidad Autónoma de Madrid*

M<sup>a</sup> Jose Madrid

*Universidad Pontificia de Salamanca*

**Página de la revista:** <http://thales.cica.es/epsilon>

**Revista:** [epsilon@thales.cica.es](mailto:epsilon@thales.cica.es)

Sociedad Andaluza de Educación Matemática “Thales”

## Edita

Sociedad Andaluza de  
Educación Matemática “Thales”

Centro Documentación “Thales”

Universidad de Cádiz

C.A.S.E.M.

Facultad de Ciencias

Departamento de Matemáticas

Campus del Río San Pedro

Torre Central, 4<sup>a</sup> planta

11510 Puerto Real (Cádiz)

Teléfono: 956012833

Email: [thales.matematicas@uca.es](mailto:thales.matematicas@uca.es)

## Maquetación

[mayteando@gmail.com](mailto:mayteando@gmail.com)

## Depósito Legal

SE-421-1984

## ISSN

2340-714X

## Período

2018

## Suscripción

Anual



7

## INVESTIGACIÓN

- 7 **La deforestación como consecuencia del incremento de áreas de cultivo: Actividad Provocadora de Modelos / Deforestation as a consequence of the increase in cultivation areas: Model Eliciting Activity**  
Verónica Vargas-Alejo  
Aarón V. Reyes-Rodríguez  
César Cristóbal-Escalante

- 29 **¿Qué andamios se ofrecen para enseñar matemáticas en Educación Infantil? Preguntas e interacciones en función del método/ What scaffolds are offered to teach mathematics in children's education? Questions and interactions depending on the method**  
Marta López  
Ángel Alsina

43

## EXPERIENCIAS

- 43 **Las Matemáticas puestas en Juego / Mathematics put into play**  
Nahina Dehesa De Gyves

55

## IDEAS

- 55 **Explicando la diferencia entre perímetro y área con el tangram / Explaining the difference between area and perimeter using Tangram**  
Alexander Maz-Machado  
Clara Argudo Osado  
María Rodríguez Baiget

- 65** **Una herramienta de análisis de los accesos al número propuestos en los libros de texto de infantil / An analysis tool for the number access proposed in early childhood textbooks**

Pascual D. Diago

David Arnau

**7**

## **MISCELÁNEA**

- 75** **RINCÓN “SAPERE AUDE”... ¿resolviendo problemas?**

Sixto Romero

## La deforestación como consecuencia del incremento de áreas de cultivo: Actividad Provocadora de Modelos

*Verónica Vargas-Alejo*

*Universidad de Guadalajara*

*veronica.vargas@academicos.udg.mx*

*Aarón V. Reyes-Rodríguez*

*Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo*

*rrav76@yahoo.com.mx*

*César Cristóbal-Escalante*

*Universidad de Quintana Roo*

*cescrist@uqroo.edu.mx*

**Resumen:** *En este artículo se describen los resultados de la implementación de una actividad provocadora de modelos [APMI] relacionada con el problema de la deforestación en el estado de Michoacán, México. La actividad es una de tres APM que se diseñaron como parte de una investigación de corte cualitativo. Las tareas se implementaron con un grupo de ocho docentes de nivel medio superior. El marco teórico se estructuró en torno a una perspectiva de Modelos y Modelación. Los resultados indican que la APMI contribuyó al surgimiento, modificación, ampliación y refinamiento de formas de pensar de los profesores relacionadas con modelos lineales y exponenciales.*

**Palabras clave:** *Actividad Provocadora de Modelos, Modelos y Modelación, Docentes, Función lineal, Función exponencial*

## Deforestation as a consequence of the increase in cultivation areas: Model Eliciting Activity

**Abstract:** *In this article we describe the results of the implementation of a model-eliciting activity, related to deforestation problem in the state of Michoacán, Mexico. This task is one of three model-eliciting activities designed into a qualitative research project.*

*Participants were a group of eight teachers of upper secondary level. The theoretical framework was based on Richard Lesh' Models and Modeling perspective. We provide evidence that the task supported the emergence, modification, extension and refinement of teachers' ways of thinking about linear and exponential models.*

**Keywords:** *Model Eliciting Activity, Models and Modeling, Teachers, Linear Function, Exponential Function*

## 1. INTRODUCCIÓN

Existen diversos estudios que han analizado el desarrollo de comprensión de los estudiantes respecto del concepto función, fundamentados en el uso de la modelación en el aula (Lesh y Doerr, 2003; NCTM, 2000; Yanagimoto y Yoshimura, 2013). En algunos de ellos, se señala que muchos estudiantes tienen dificultades para comprender el concepto; para establecer relaciones entre éste y otras ideas matemáticas, tales como variación, ecuación o modelo (Ärlebäck, Doerr y O'Neil, 2013); para comprender y utilizar la notación algebraica, y conectarla con otras representaciones como la gráfica o la tabular (Duval, 1996).

La construcción de modelos que nos permitan entender, explicar, comunicar, y pronosticar el comportamiento de fenómenos o situaciones no es una tarea sencilla. En los individuos existe una tendencia a generalizar a partir de poca información, la cual no siempre es pertinente al tomar decisiones. Sin conocimiento conceptual suficiente, y habilidades matemáticas básicas, las personas pueden tener dificultades para entender las ventajas y desventajas de adquirir cierto crédito o las consecuencias de la administración errónea de dosis de medicamento. Esto nos lleva a preguntarnos ¿Qué formación matemática mínima debe poseer cualquier individuo para enfrentar los retos de la vida diaria? ¿Cómo promover esta formación matemática en la escuela?

Pensar matemáticamente va más allá de hacer cálculos, “con frecuencia implica describir situaciones matemáticamente” (Lesh y Doerr, 2003: 15). Esta descripción requiere de análisis cualitativos y cuantitativos de la información, atribuir dimensiones al espacio y ubicar eventos en marcos de referencia. Conceptos matemáticos como función y variación son clave en la formación de los individuos (NCTM, 2000). Comprender el concepto de función implica que los estudiantes relacionen e integren distintas representaciones (Lesh, 2010), además, que identifiquen lo variable y lo invariante en una situación (Kaput, 1999). Al resolver un problema, los estudiantes deben entender que cada representación (tablas, gráficas, metáforas basadas en la experiencia, diagramas o dibujos, modelos concretos, lenguaje hablado, símbolos escritos, ecuaciones) proporciona información diferenciada, la cual permite visualizar una situación o problemática desde diversas perspectivas e incrementar el nivel de comprensión sobre ésta y conceptos subyacentes.

¿Cómo se aprende un concepto? Un concepto no se aprende en forma aislada de otros conceptos, fenómenos y procesos relacionados que le dan sentido y significado. De acuerdo con la perspectiva de Modelos y Modelación propuesta por Doerr y Lesh (2003), las Actividades Provocadoras de Modelos [*Model Eliciting Activities*] posibilitan la construcción e integración de conocimiento y habilidades matemáticas. ¿Qué tipo

de actividades son éstas?, ¿qué características poseen?, ¿cómo se construyen? Nos referiremos en adelante a esta Perspectiva de Modelos y Modelación como *PMM*. Estamos conscientes de que hay varias perspectivas de modelos y modelación (Kaiser y Sriraman, 2006) pero, por cuestiones de espacio, en este documento no se hace una revisión y diferenciación de las aportaciones de cada una de ellas.

En este artículo se describen resultados de una investigación relacionado con el surgimiento, modificación, ampliación y refinamiento de formas de pensar de docentes acerca de conceptos tales como función, variación, ecuación, así como la relación de estos conceptos entre sí, y con las representaciones gráficas y tabulares, que dieron lugar a modelos lineales y exponenciales. Se muestran las características de una actividad que se diseñó con base en la *PMM*. Interesaba conocer si la actividad propiciaba la construcción de sistemas conceptuales compartibles, manipulables, modificables y reutilizables (modelos) y determinar las características de tales modelos al responder a las preguntas siguientes: ¿Cumple la actividad con los principios de diseño de una APM? ¿Qué significa que cumpla con ellos? ¿Qué formas de pensar o modelos emergieron al realizarla? ¿Qué conocimientos, conceptos y habilidades matemáticas se utilizaron? ¿Es posible observar el surgimiento, modificación, ampliación y refinamiento de estas formas de pensar?

## 2. REVISIÓN DE LITERATURA

De acuerdo con la perspectiva de Modelos y Modelación (*PMM*) propuesta por Richard Lesh y colaboradores (Lesh y Doerr, 2003; Doerr, 2016; Lesh, 2010; Lesh, Yoon y Zawojewski, 2007), el aprendizaje de las matemáticas es un proceso de desarrollo de sistemas conceptuales, que cambian de manera continua, se modifican, extienden y refinan a partir de las interacciones del estudiante con sus compañeros y profesores al resolver problemas.

Los modelos son sistemas conceptuales (que consisten de elementos, relaciones y reglas que gobiernan las interacciones) que son expresados mediante el uso de sistemas de notación externa, y que son utilizados para construir, describir, o explicar los comportamientos de otros sistemas –de tal forma que el otro sistema pueda manipularse o predecirse de manera inteligente. (Lesh y Doerr, 2003, p. 10)

Los modelos, por lo tanto, se pueden compartir, manipular, modificar y reutilizar, para describir, interpretar, construir, manipular, predecir o controlar sistemas. El aprendizaje de un concepto se asocia con el desarrollo de modelos, esto es, de sistemas conceptuales construidos a partir de las situaciones que enfrenta un individuo; se asocia con las actividades que se realizan para entender un fenómeno, como la cuantificación de información cualitativa, medición, ubicación de eventos en sistemas de referencia, organización y análisis de datos, realización de cálculos numéricos, resolución de ecuaciones o aplicación de procedimientos (Lesh y Doerr, 2003). Alcanzar una comprensión conceptual implica considerar los conceptos en diversas dimensiones: concreto–abstracto, particular–general, en contexto–sin contexto, intuitivo–analítico–axiomático, fragmentado–integrado (Doerr y Lesh, 2003).

La construcción de conocimiento es un proceso social que implica fases de diferenciación, integración y refinamiento, durante las cuales se construyen, modifican, extienden y refinan modelos. La interacción entre los estudiantes durante el proceso de instrucción es una oportunidad para contrastar y refinar los sistemas conceptuales de cada participante. La comunicación y la confrontación de ideas ayudan a resaltar información, relaciones, y concepciones no consideradas o consideradas inadecuadamente, así como para explicitar criterios de evaluación. La comprensión conceptual cambia en la medida que el individuo comunica y comparte sus modelos con otras personas. El conocimiento no es algo inerte, sino algo más parecido a un organismo vivo, a un sistema complejo, dinámico, inmerso en un proceso de adaptación continua, que se autorregula, y cuya existencia es, parcialmente, el resultado de construcciones humanas (Lesh y Yoon, 2004).

Los modelos residen en la mente y en los medios representacionales: “los significados asociados con un sistema conceptual dado tienden a estar distribuidos a través de una variedad de medios representacionales” (Lesh y Doerr, 2003, p. 12). Los modelos son personales porque reflejan la experiencia del estudiante o individuo al abordar situaciones problemáticas. La construcción de un modelo pertinente para describir, explicar y pronosticar la evolución o aspectos de esa situación, es un proceso que permite a los estudiantes relacionar los diferentes factores que inciden en esa situación o fenómeno. Los sistemas conceptuales internos, al ser exteriorizados mediante representaciones, sufren modificaciones. Algo semejante ocurre cuando se comparten y discuten estos modelos con otras personas. ¿Cómo saber que un modelo es pertinente? Cuando el modelo se utiliza para describir una situación, para explicar sus cambios, para predecir su comportamiento, esto es, cuando es útil para responder preguntas que se plantean sobre dicha situación. En este sentido, la construcción de sistemas conceptuales permite a una persona desarrollar habilidades para crear nuevos modelos, a partir de sus experiencias previas (Lesh y Doerr, 2003, p. 24-25; Lesh, Cramer, Doerr, Post, y Zawojewsky, 2003). Esto hace que en la PMM se considere que el producto del aprendizaje es el proceso de construcción del modelo y no sólo el modelo.

En la PMM se propone que los alumnos resuelvan situaciones cercanas a la vida cotidiana, denominadas Actividades Provocadoras de Modelos, con el fin de “describir, explicar o predecir el comportamiento de situaciones significativas” (Ärleböck, Doerr, y O’Neil, 2013, p. 316). Lo anterior significa que los estudiantes, partir de su conocimiento matemático previo, darán significado a las situaciones problemática mediante la construcción de herramientas matemáticas. La actividad de modelación propicia que los estudiantes realicen acciones como: cuantificar información, dimensionar espacios, ubicar eventos en marcos de referencia, organizar y analizar datos, realizar cálculos, establecer relaciones y funciones matemáticas, desarrollar criterios de comparación o decisión, resolver ecuaciones y aplicar procedimientos, (Lesh y Doerr, 2003). Se busca, además, fomentar el planteamiento de preguntas, formulación de conjeturas, la argumentación, la toma de decisiones, comunicación, evaluación de respuestas y procedimientos.

El abordaje de una APM demanda del estudiante la construcción de una interpretación cuantitativa de las situaciones, así como realizar varios ciclos de modelación, que requieren diferentes formas de pensamiento. El proceso de solución exige más que procesar la información mediante el uso de un modelo invariante y único, requiere también la transformación del modelo, su ampliación o refinamiento. Para lograr todo lo antes señalado,

las APM deben diseñarse siguiendo seis principios, descritos por Lesh, Cramer, Doerr, Post, y Zawojewsky (2003) y Doerr (2016), los cuales se mencionan enseguida.

- *Principio de la realidad.* Las situaciones deben estar cercanas a los intereses de los estudiantes, sus experiencias y conocimientos para que le den sentido. Al diseñar la actividad el profesor debe responder lo siguiente ¿esto puede suceder en la vida real? El problema no necesariamente debe ser real, en el sentido absoluto, pero sí estar cercano a alguna experiencia cotidiana del alumno. Para ello se propone que el profesor se pregunte ¿La actividad impulsa a los estudiantes a dar sentido a la situación con base en la ampliación de sus experiencias y conocimientos personales?
- *Principio de la construcción de modelos.* La meta de la actividad debe ser el desarrollo explícito de una construcción, descripción, explicación, o de una predicción justificada. Uno de los productos más importantes que los alumnos deben crear, es un modelo. Ello implica utilizar una amplia variedad de sistemas de representación, gráfica, simbólica o basada en el lenguaje común; necesarios para describir las relaciones, operaciones, y patrones subyacentes. Una pregunta útil para satisfacer este criterio es: ¿La tarea pone a los alumnos en una situación donde ellos reconocen la necesidad de desarrollar un modelo para interpretar datos, metas, y el posible proceso de solución?
- *Principio de la autoevaluación.* Si los problemas son significativos para los estudiantes, y ellos reconocen la necesidad de hacer construcciones, descripciones, explicaciones, entonces puede ocurrir una aparición de ideas novedosas y relevantes en un grupo. Para que estas ideas o los sistemas conceptuales evolucionen, son necesarias la selección y el refinamiento. Por ello, se sugiere preguntarse: ¿El enunciado del problema sugiere criterios para evaluar la utilidad de soluciones alternativas?, ¿es claro el propósito (qué, cuando, porqué, donde, y por quién)?, ¿permite a los estudiantes juzgar cuándo sus respuestas requieren mejorarse, o cuando necesitan refinarse o ampliarse para un propósito dado?, ¿permite que los alumnos conozcan cuándo han obtenido una buena respuesta?, o ¿tienen que preguntar continuamente al profesor si “ya alcanzaron la solución”?
- *Principio de documentación del modelo.* Las situaciones deben ser reveladoras de pensamiento; es decir, deben responder las preguntas siguientes: ¿Permitirá revelar explícitamente lo que piensan los alumnos acerca de la situación? En particular, ¿permitirá que los estudiantes proporcionen información que pueda examinarse para identificar el tipo de sistema que pensaron y utilizaron (objetos, relaciones, operaciones, patrones, y regularidades)? Para determinar si se satisface este principio, se sugiere revisar si los productos elaborados por los alumnos revelan, tanto como es posible, la forma como pensaron los datos, las metas, y los procesos de solución. Las descripciones y explicaciones deben responder a preguntas del tipo: ¿Qué objetos matemáticos (por ejemplo; razones, tendencias, coordenadas) utilizaron los estudiantes? ¿Qué tipo de relaciones o comparaciones (de equivalencia, de orden, e invariancia bajo transformaciones) entre los objetos consideraron? ¿Qué tipo de operaciones e interacciones (combinaciones aditivas e interacciones multiplicativas) entre los objetos utilizaron? ¿Qué principios (transitividad y conmutatividad) dirigieron las comparaciones e interacciones

anteriores? ¿Qué sistemas de representación (gráficas, diagramas, símbolos alfanuméricos, y metáforas) utilizaron?

- *Principio de la reutilización del modelo.* Es importante preguntarse ¿El modelo desarrollado es útil sólo para quién lo construyó y puede aplicarse únicamente a la situación particular presentada en el problema?, o ¿proporciona una forma de pensamiento que es transferible, transportable, fácil de modificar, y reutilizable? Como herramientas conceptuales, los modelos matemáticos, y los procedimientos que se derivan de ellos, al ser generalizables varían ampliamente; aunque algunos están bastantes restringidos a las peculiaridades de situaciones problema particulares.
- *Principio de la generalización del modelo.* Este principio propone revisar si la actividad diseñada responde a las siguientes preguntas: ¿La solución proporciona un prototipo útil, o una metáfora para interpretar otras situaciones que pueden ser más complejas? Mucho tiempo después de que el problema ha sido resuelto ¿podrían los estudiantes recordarlo cuando se encuentran con otra situación estructuralmente semejante?

Matematizar situaciones (o actividades provocadoras de modelos) es un medio para apoyar la construcción y el desarrollo de comprensión conceptual. De acuerdo con Doerr (2016) es necesario establecer secuencias de actividades relacionadas estructuralmente. La tarea del estudiante consiste en identificar las similitudes y diferencias entre las actividades, lo cual implica centrar su atención en el sistema conceptual común subyacente. La necesidad de analizar y describir fenómenos naturales y sociales hace importante el aprendizaje del concepto de función. Las funciones son herramientas que permiten interpretar y describir fenómenos que cambian. Las funciones y sus representaciones (gráficas, tablas y ecuaciones) pueden conceptualizarse “como la descripción de relaciones entre cantidades, determinadas por la medida de los atributos de los objetos” (Ärlebäck, Doerr, y O’Neil, 2013, p. 317).

El diseño de actividades de esta investigación se basó en las recomendaciones de la *PMM* (seis principios señalados). Es nuestro interés propiciar el desarrollo de conocimiento y habilidades matemáticas en los docentes, relacionadas con conceptos de función, ecuación y variación, de una manera no aislada de otros conceptos, fenómenos y procesos relacionados que le dieran sentido y significado; y de una concepción del aprendizaje –visto como sistemas conceptuales en continuo cambio– en el marco de la interacción social mientras se realizan actividades.

### 3. METODOLOGÍA

La metodología del proyecto fue de cualitativa porque se documentó y analizó el desarrollo de conocimiento, su modificación, extensión y refinamiento por los docentes, al interactuar entre ellos y con el investigador para realizar actividades. Por ende, se diseñaron actividades, se implementaron y se documentaron resultados de la implementación en términos del uso de conceptos como variación, ecuación, función lineal, función exponencial a través de la creación de modelos por los docentes al abordar las situaciones.

### **3.1. Población de estudio**

Los participantes en este estudio fueron ocho profesores de nivel bachillerato que imparten clases de matemáticas en escuelas del estado de Michoacán, México, quienes contaban con distintas formaciones profesionales como ingenieros o físico matemáticos. Las tareas se implementaron durante un taller de verano, que fue parte de un evento regional dirigido a profesores de matemáticas. Es decir, había un interés genuino por parte de los docentes para aprender nuevas formas de trabajar en el aula que condujeran hacia aprendizajes significativos. El taller tuvo una duración de 10 horas, distribuidas en tres sesiones. En la primera sesión se introdujo la perspectiva de Modelos y Modelación y se implementó la APM1. Se continuó la discusión en la segunda sesión y se implementó la APM2. En la tercera sesión se hizo el cierre de la APM2 y del taller.

### **3.2. Actividades Provocadoras de Modelos**

La Actividad Provocadora de Modelos que aquí se discute (Figura 1) se denomina: La deforestación como consecuencia del incremento de áreas de cultivo (APM1). A esta actividad le siguió otra llamada: Propuesta de Reforestación (APM2). Los objetivos, al implementar las APM fueron apoyar la modificación y extensión del sistema conceptual de los profesores alrededor de los conceptos de función, variación, ecuación, incógnita, solución y sistemas de ecuaciones lineales; incidir en el desarrollo de habilidades para la modelación matemática, y concientizar a los docentes sobre las consecuencias que ha tenido el incremento en la producción y venta del aguacate sobre la deforestación en el estado de Michoacán. De acuerdo con lo revelado por Greenpeace (2017), la acelerada destrucción de los bosques ha puesto en riesgo de extinción a una gran variedad de plantas y animales que dependen de ese ecosistema.

Las APM se diseñaron con base en los seis principios mencionados previamente. Los conceptos de función, ecuación y variación están implícitamente involucrados en cada APM; así como los de crecimiento y razón de cambio. La APM1 cuenta con información numérica, tomada de diversas fuentes (periódicos, tesis y documentos oficiales) lo cual hace que los datos sean diferentes entre sí y, por lo tanto se deban revisar, analizar y seleccionar.



Yuri, funcionaria joven de la comunidad de Tingambato, preocupada por la reciente noticia sobre la pérdida de bosque que ocurre en la Meseta Purépecha, investigó en internet la problemática con el fin de solicitar apoyo para detener la deforestación. Pero, primero se propuso informarse mejor sobre la situación, de manera que ello le permitiera describirla. Su intención es, primero, concientizar a la población y finalmente, conseguir apoyo de toda la comunidad para resolver la problemática. La información que encontró fue la siguiente.

Un estudio realizado por el Centro de Investigaciones en Geografía Ambiental-UNAM, en los municipios de Charapan, Cherán, Los Reyes, Nahuatzen, Nuevo San Juan Parangaricutiro, Paracho, Peribán, Tancítaro, Tingambato, Uruapan y Ziracuaretiro, muestra cómo se perdieron 20 mil 32 hectáreas de bosques entre 1976 y 2005. Y sólo de 2000 al 2005 esta pérdida se aceleró y adquirió un ritmo de 509 hectáreas por año.

Un periódico de abril de 2017 señaló que cada año se pierden entre 600 y 1000 hectáreas de bosque en todo el estado, según datos gubernamentales del Instituto Nacional de Investigaciones.

En el año 2014 de acuerdo con la Forestal la superficie con bosque (pino, pino-encino y encino) en la Meseta Purépecha era de 147 744 ha. La Meseta Purépecha tiene una extensión territorial de 381 357 ha.

Yuri, a partir de esta información, tiene muchas preguntas. Le inquieta saber ¿cuánto bosque existió en 1976?, ¿cuánto bosque existió en 2005?, ¿cuánto bosque existe actualmente?, ¿cuánto bosque existirá dentro de 10 años? Si el ritmo de pérdida de hectáreas continúa siendo el señalado ¿cuándo dejará la Meseta Purépecha de tener bosques? Yuri considera que el bosque pronto desaparecerá. Sabe que la deforestación está relacionada con el crecimiento de cultivo de aguacate por lo que buscó más información para cotejar o evaluar la veracidad de los datos anteriores. Encontró la siguiente información.

En 1960 no existían monocultivos de aguacate en la meseta purépecha; había variedades criollas que daban cobertura de sombra al cultivo del café. Hacia 1976 calculamos una superficie de agricultura frutícola de 34 606 hectáreas, cuyo cultivo dominante ya era el monocultivo de aguacate Hass, aunque aún persistían áreas de cafetales. Hacia el año 2000 el cultivo del aguacate domina la superficie frutícola y alcanza las 55 627 ha, y en el año 2006 aumenta aún más hasta las 67 181 ha. El cultivo de huertas de aguacate ha traído profundos cambios.

Bocco, basándose en información del censo del aguacate de SAGAR, establece el área cubierta por aguacate en cinco municipios dentro de la Meseta Purépecha en 39 849 hectáreas para el año 1993, mientras que Coria y Martínez, a partir de la interpretación de fotografías aéreas de 1991, obtienen un total de 41 957 hectáreas para la Meseta Purépecha (62 393 para el estado de Michoacán).

Ayúdala a Yuri a encontrar un método o procedimiento para dar respuesta a cada una de sus dudas planteadas. Escríbele una carta donde expliques tu procedimiento.

Figura 2. El problema.

El material de la APM1 consta de cuatro hojas tamaño carta. En las dos primeras hay un artículo periodístico, cuyo objetivo es familiarizar al lector con el contexto del problema. La tercera hoja contiene preguntas de comprensión lectora. La cuarta hoja (Figura 2) incluye datos sobre deforestación en el estado de Michoacán, tomados de diversas fuentes, los cuales constituyen los insumos básicos para la actividad de modelación (Comisión Forestal del Estado de Michoacán, 2014; Greenpeace, 2017; Instituto Nacional de Estadística y Geografía, 2017).

### 3.3. Forma de trabajo en el aula

La APM1 se implementó en un periodo de cuatro horas de la siguiente manera:

1. Fase individual. Entrega del artículo periodístico y lectura individual.
2. Fase en equipos. Resolución del problema en equipo –dos equipos de 3 profesores [denominados M1, M2, M3, N1, N2, N3] y una pareja de profesores [profesores P1 y P2]– en ambiente colaborativo. Los docentes construyeron el modelo, escribieron una carta y prepararon una exposición.
3. Fase grupal. Presentación de la carta al grupo, evaluación y discusión de modelos por todo el grupo.
4. Fase individual (tareas extra clase). Resolución del problema individualmente.

La descripción de lo ocurrido en el aula durante estas fases es la siguiente. El Investigador [I] entregó a los profesores las tres primeras hojas de la actividad; les pidió que las leyeran y respondieran las preguntas individualmente. Después de que leyeron, discutieron en grupo la situación y comentaron qué tanto conocían al respecto, como pobladores de la región. Enseguida, se les entregó el enunciado del problema y, en equipos de tres integrantes, empezaron a abordarlo. Los modelos construidos fueron presentados en la fase grupal. Una vez realizada la presentación y discusión de resultados se solicitó, como tarea individual, realizar nuevamente la carta indicada en la hoja 4 de la APM1.

El investigador participó como observador durante el proceso de resolución del problema y como facilitador de la discusión grupal. De vez en cuando intervino planteando preguntas como las siguientes: ¿ha quedado claro el problema?, ¿es similar a los que ustedes utilizan en sus clases?, ¿qué información proporciona?, ¿por qué ese modelo es útil?

Los instrumentos de recolección de datos incluyeron grabaciones de audio y video, las cartas elaboradas por los docentes, fotografías de las producciones escritas que se efectuaron en el pizarrón, archivos electrónicos de Excel y Word elaborados por los profesores, así como notas de campo registradas en la bitácora del investigador. Estos instrumentos sirvieron para identificar y analizar las formas de proceder de los profesores ante la APM1, tanto individual, en equipo como en forma grupal; la forma de comunicación de ideas, la emergencia de conceptos y uso de habilidades matemáticas; así como las modificaciones, extensiones y refinamiento de formas de pensar. Posibilitaron verificar o modificar las hipótesis construidas a partir de las observaciones –bitácora del investigador– y corroborarlas, mediante estrategias de triangulación.

### 3.4. Criterios de análisis

Los seis principios propuestos para el diseño de las APM (Lesh, Cramer, Doerr, Post y Zawojewsky, 2003; Doerr, 2016) sirvieron como criterios de análisis para evaluar si la APM1 propició la construcción de sistemas conceptuales compatibles, manipulables, modificables y reutilizables que apoyaran el surgimiento, modificación, ampliación y refinamiento de formas de pensar de docentes, relacionadas con conceptos de función, variación, ecuación; así como la relación de estos conceptos entre sí y con diversas representaciones. El cumplimiento de los principios permitió identificar los modelos, así como el proceso de construcción de los mismos, los conocimientos y habilidades matemáticas de los docentes a lo largo de la sesión. Es decir, durante el trabajo individual, en equipo y grupal, a través del diálogo utilizado durante las interacciones en equipo, exposiciones y cartas elaboradas.

## 4. RESULTADOS Y DISCUSIÓN

Se presenta el análisis de la actividad provocadora de modelos, con base en los seis principios de la *PMM*. Se muestran reflexiones relacionadas con la interpretación, descripción y predicción de la situación; se analizan los modelos construidos por los docentes, así como la transformación de sus formas de pensamiento.

### 4.1. Principio de la realidad

Fase 1. A todos los docentes les atrajo el contexto del problema, incluido en el artículo de periódico, debido, entre otros aspectos, a que eran habitantes de la región y la situación ocurre en su entorno. Describieron, *cualitativamente*, de acuerdo con su experiencia, cómo percibían el fenómeno de la deforestación y el éxito del cultivo de aguacate; a través de narraciones de lo que conocían sobre la problemática. Manifestaron que la deforestación es motivo de preocupación para muchos michoacanos, en particular, el cambio de tipo de suelo –de bosque a zona de cultivo de aguacate– y la tala inmoderada. No todos conocían a profundidad la situación, por ejemplo, la existencia de zonas indígenas y sus programas de creación de viveros para reforestar zonas de su región. Mencionaron que hace falta el impulso de más iniciativas oficiales para resolver la problemática. Por otra parte, comentaron que les interesaba el cuidado del medio ambiente y promoverlo en sus escuelas. Esto lo señalaron durante la discusión de la lectura del artículo y al final del taller, como se observa en el siguiente extracto.

Docente N2: Es una problemática muy interesante. En lo particular me interesa el cuidado del medio ambiente. Es algo que promuevo mucho con mis estudiantes, por lo tanto, estos problemas me cayeron del cielo.

## 4.2. Principios de construcción y documentación de modelos

Durante la Fase 2 de resolución en equipo de la APM1, los ocho profesores tuvieron varias inquietudes. Consideraron que el problema no era tradicional, como los incluidos comúnmente en los libros de texto, con datos e incógnitas necesarias y suficientes para resolverlo. Señalaron que había datos de diversas fuentes: artículos de periódico nacionales, tesis y documentos oficiales. La interpretación inicial de los ocho docentes fue que tenían bastante información, pero, al mismo tiempo, insuficiente para responder a las interrogantes. Los comentarios siguientes [tomados de la transcripción del audio] son ejemplo de lo comentado por los docentes.

El docente M1 comentó que había bastante información; su referente de comparación eran los problemas tradicionales que se usan en clase. El profesor P1, por otra parte, no identificó la existencia de datos pertinentes para resolverlo.

- M1: Es un problema con mucha información y no está correcta
- P1: No lo vamos a poder sacar... nos hacen falta unos datos que no nos están dando

Con base en esta interpretación inicial, los equipos M y N propusieron la construcción de modelos concretos, gráficos y simbólicos (Figuras 3 y 6) para describir e ilustrar las relaciones, operaciones y patrones. El profesor M3 sugirió construir una representación gráfica, mientras que el equipo N propuso la construcción de un modelo lineal.

- M3: ¿Yo aquí qué haría? Pues... por ejemplo, plantearía una gráfica, en las cuales [sic]... ¿a partir de cuándo es el estudio? Pues de dos mil... de la fecha inicial, a la fecha, a la fecha, a la fecha final que es dos mil catorce, creo
- M1: Desde mil novecientos setenta y seis
- N1: Bueno... [inaudible], la información, un poquito más precisa, sugiere realmente una variación lineal.
- N2: Sí, sí, sí.

Ambos equipos, después de revisar la información, la seleccionaron, relacionaron y organizaron, e hicieron operaciones. Desarrollaron, de manera explícita, una descripción, explicación, y predicción de la situación de deforestación en la región purépecha de Michoacán y la documentaron (*principio de documentación del modelo*). Hubo dos formas de proceder, mediante el uso de modelos algebraicos lineales, y de modelos tabulares y gráficos exponenciales (Figuras 3 y 6). En ellos se observa la forma de pensar respecto a la problemática y el uso de objetos matemáticos, relaciones, operaciones, patrones y regularidades; utilizaron variables, relaciones funcionales lineales y exponenciales.

### 4.2.1. Modelo lineal del equipo N

En la carta del equipo N (Figura 3) se observan los datos empleados para analizar la situación, las relaciones establecidas entre ellos, las operaciones aritméticas que permitieron dar respuesta a las preguntas planteadas y, finalmente, un modelo algebraico. Los integrantes del equipo N decidieron utilizar una tasa de cambio (800 ha/año) para

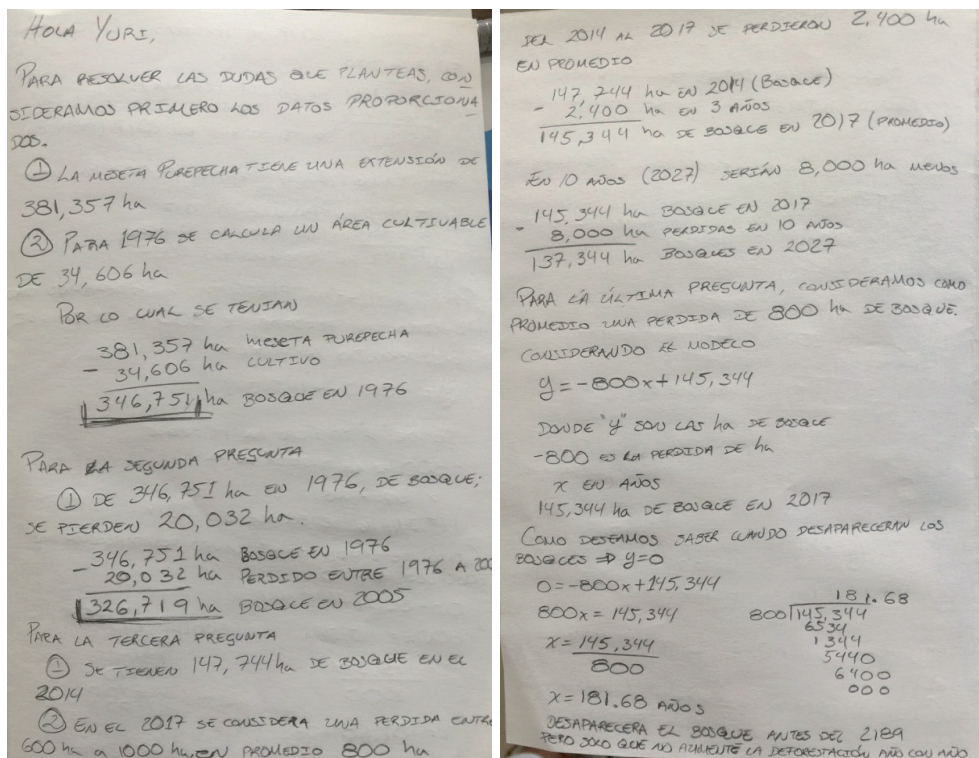


Figura 3. Carta del equipo N.

predecir cuándo desaparecería el bosque. Al final, sumaron  $2007 + 181.68$  para argumentar que el bosque desaparecería antes del año 2189. Se puede observar que los integrantes del equipo N no escribieron las unidades dimensionales de la tasa (Figura 3), sin embargo, las mencionaron verbalmente durante su exposición. Se consideraron unidades de medida como hectáreas y se proporcionaron argumentos para sustentar algunas de sus respuestas; incluso se describió el significado de cada elemento de la función lineal que obtuvieron como modelo:  $y = 800x + 145344$ . La conclusión del equipo fue: “desaparecerá el bosque antes del 2189 pero solo que no aumente la deforestación año con año”. Los docentes estimaron que en 172 años ya no habrá bosque en Michoacán. Su carta la escribieron en lápiz y papel (Figura 3) al igual que el equipo M.

#### 4.2.2. Modelo exponencial del equipo M

Los integrantes del equipo M mencionaron en su carta que la información [del problema] no estaba articulada (Figura 4); y verbalmente, expresaron que no estaba organizada, que no era suficiente y a veces los datos no coincidían. Este equipo seleccionó información, la organizó e hizo operaciones. Los profesores comentaron lo siguiente: “se tabularon los datos y se encontró que en 1976 habían [sic] 34606 hectáreas de cultivo de

Querida Yuri

La información de la cual disponemos no está articulada, pero consideramos la información disponible, llegamos a las siguientes conclusiones:

1. Se tabularon los datos y se encontró que en 1976 habían 34,606 hectáreas de cultivos de cinco municipios de la meseta purépecha
  - Para el año 2000 en toda la región purépecha 55, 627 hectáreas
  - Para el año 2006, 67,181 hectáreas de monocultivos de aguacate

En base a estos datos proyectados gráficamente, se espera que en un aproximado de 40 años alcance un total de 147,000 hectáreas de aguacate, porque en base a otro dato que tenemos del año 2014 de la región purépecha, existían 147, 744 hectáreas de bosque de un total de 381, 357 hectáreas de la región, es importante considerar que no se cuenta con información suficiente de que cada una de las hectáreas de bosque, sean cambiadas por cultivo de aguacate.

Figura 4. Carta del equipo M. Se transcribió el texto para una mejor visibilidad.

cinco municipios de la meseta purépecha”. Es decir, identificaron datos y variables, y los relacionaron a través de tablas y una gráfica (Figura 5). Los profesores crearon un modelo exponencial a partir de varios supuestos. Finalmente, predijeron que en 40 años se tendrían 147000 hectáreas cultivadas de aguacate, casi equivalente al bosque existente en la actualidad.

Una descripción del proceso de construcción del modelo es la siguiente: Los integrantes del equipo M identificaron dos relaciones entre variables, (1) cantidad de hectáreas de cultivo de aguacate de la meseta purépecha [mp] vs tiempo y (2) cantidad de hectáreas perdidas de bosque en la meseta purépecha vs tiempo. Con base en los datos considerados útiles, se elaboraron tablas que permitieran entender el comportamiento de los datos (Tabla 1). El subtítulo “Pérdida” que utilizaron los integrantes del equipo en la columna 2 (Tabla 1a) tiene dos significados: 1) corresponde a la cantidad de hectáreas (ha) de bosque (fila dos, segunda columna) que se perdió en 29 años, y 2) corresponde a la tasa de cambio o hectáreas de bosque perdidas por año, de acuerdo con información contenida en el problema. A partir de los datos de la Tabla 1a, el equipo M generó una nueva tabla con datos que le permitieron analizar tanto el crecimiento del cultivo de aguacate como la pérdida de bosque michoacano (Tabla 2). Los integrantes del equipo consideraron que el cultivo de aguacate estaba creciendo con una tasa de 509 ha por año. Esto se observa en los datos de la segunda columna y en los de la tercera. El subtítulo pérdida se refiere a la cantidad de hectáreas de aguacate que existen en cada año. La tercera columna corresponde a la cantidad de hectáreas de bosque michoacano existente cada año.

Con base en los datos de la Tabla 1b (correspondientes a los años 1976, 2000 y 2006) los profesores elaboraron una gráfica para describir la situación (Figura 5). En el eje horizontal ubicaron el tiempo (periodo de 1960 a 2030); en el eje vertical la cantidad posible de hectáreas de cultivo de aguacate en la meseta purépecha (20000 ha-380000 ha). De acuerdo con la explicación verbal del equipo, les faltó tiempo para trazar (en el mismo plano cartesiano) la gráfica de tipo exponencial decreciente, correspondiente

al decrecimiento del bosque. Al parecer consideraron que las hectáreas de bosque en 1960 eran las correspondientes a la extensión total de área de la región 381357 ha (dato de Tabla 1c) y en 1976 era 381357 ha menos 34606 ha (dato de Tabla 1b) de cultivo de aguacate. No consideraron que pudiera haber extensión territorial ocupada por pobladores o bien por otro tipo de cultivos.

Tabla 1. Organización de datos propuesta por los integrantes del equipo M. Se transcribió el contenido de las tablas para una mejor visibilidad

| <b>Año</b>   | <b>Pérdida</b>                        | <b>Año</b>   | <b>Ha cultivadas con aguacate</b>            | <b>Año</b>  | <b>Extensión total de área de la región</b> | <b>hectáreas de bosque</b> |
|--|---------------------------------------|--|--|-------------|---|----------------------------|
| <b>1976-2005</b><br><b>2000-2005</b><br><b>2005-2006</b> | 20032 ha<br>509 por año<br>600 a 1000 | <b>1976</b><br><b>1991</b><br><b>2000</b><br><b>2006</b> | 34606 ha<br>41997 ha<br>55627 ha<br>67181 ha | <b>2014</b> | 381357                                      | 147744                     |
| (a)  |                                       | (b)  |  | (c)         |   |                            |

Tabla 2. Análisis de la situación del año 2005 al 2017. Se transcribió el contenido de la tabla para una mejor visibilidad

| <b>Año</b>  | <b>Pérdida</b> | <b>Bosque</b> |
|-------------|----------------|---------------|
| <b>2005</b> | 20032          |               |
| <b>2006</b> | 20541          |               |
| <b>2007</b> | 21050          |               |
| <b>2008</b> | 21559          |               |
| <b>2009</b> | 22068          |               |
| <b>2010</b> | 22577          |               |
| <b>2011</b> | 23086          |               |
| <b>2012</b> | 23595          |               |
| <b>2013</b> | 24104          |               |
| <b>2014</b> | 24613          | 147744        |
| <b>2015</b> | 25122          | 147235        |
| <b>2016</b> | 25631          | 146726        |
| <b>2017</b> | 26140          | 146217        |
| <b>2027</b> | 31230          | 141127        |

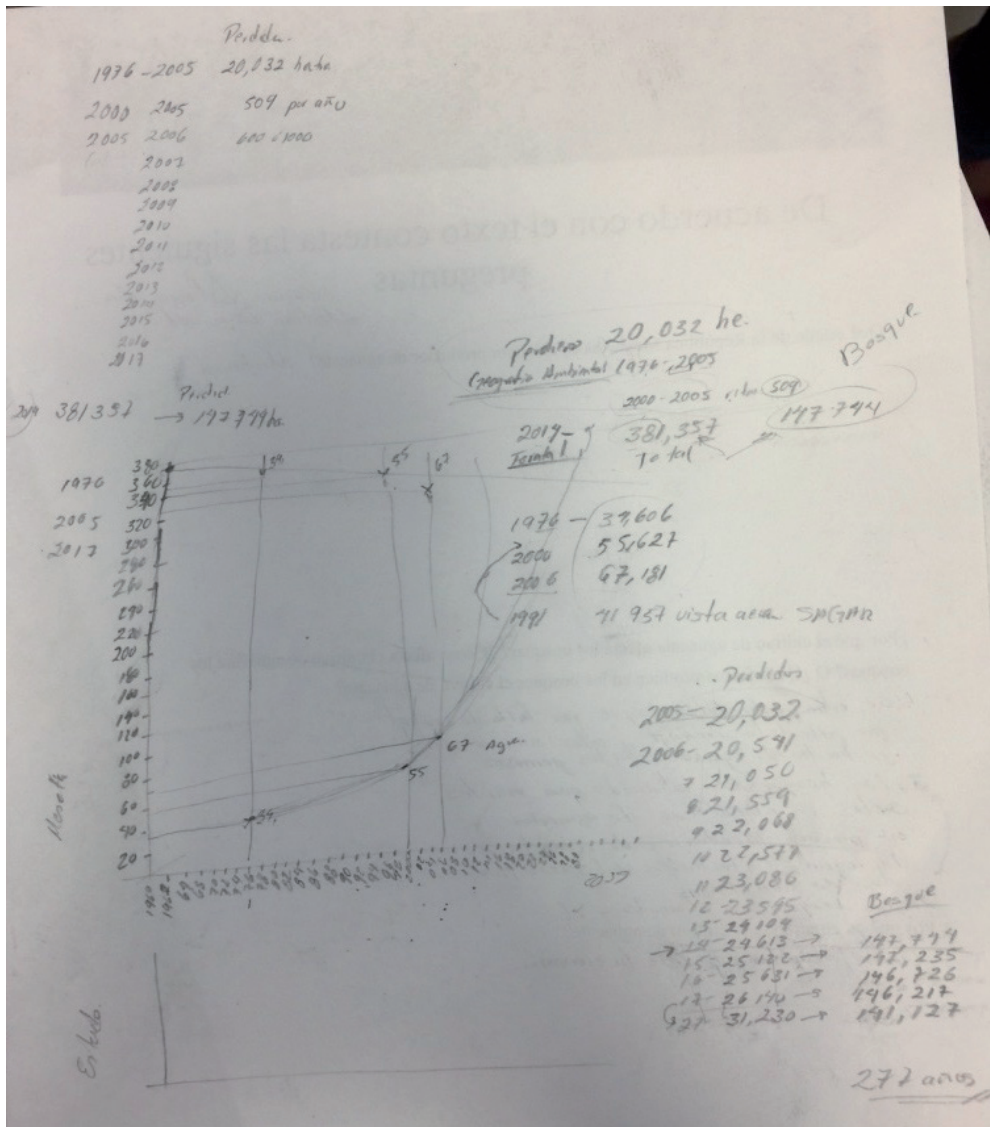


Figura 5. Gráfica elaborada por los integrantes del equipo M.

#### 4.2.3. Modelo de la pareja P

La pareja P de profesores identificó datos e incógnitas, pero su forma de pensar, quizá influenciada por una enseñanza-aprendizaje tradicional, le condujo a considerar que el problema no podía resolverse, porque la información no era precisa para establecer una relación entre las hectáreas de bosque de la meseta purépecha y el tiempo. No logró

seleccionar ni relacionar los datos, formular hipótesis y tomar decisiones para resolver el problema. Esta pareja de profesores no consideró que pensar matemáticamente va más allá de hacer cálculos, también es importante la estimación.

- P2: Quisimos hacer eso [una tabla de datos] tratando de sacar un ritmo de deforestación, pero no pude hacerlo, no pude. Al leerlo, los datos que me daban [los datos incluidos en la carta] no coinciden.

#### **4.2.4. Reflexiones**

Los profesores se involucraron en la necesidad de analizar y describir el fenómeno de deforestación. Tuvieron que relacionar cantidades para interpretar la situación, así como utilizar representaciones para comunicar sus descripciones y predicciones.

En los modelos de los equipos M y N se nota la identificación de patrones y procesos de generalización. En la carta del equipo N, aparecen procedimientos aritméticos seguidos por una identificación de patrones y formalización de estos. Generalizaron la relación mediante una expresión algebraica, la cual denota un buen manejo de conceptos matemáticos como funciones lineales, variables, ecuaciones lineales, incógnitas y solución. En el equipo M se observó algo similar, excepto que ellos procedieron con el uso de representaciones aritméticas y gráficas. Ambos equipos mostraron habilidades para identificar información, discernirla, organizarla, hacer conjeturas, tomar decisiones y evaluarlas durante el proceso de solución. Sin embargo, los equipos M y N olvidaron que en la hoja cuatro del problema se les pedía la escritura de una carta con la descripción de un procedimiento; por lo tanto, debían justificar por escrito las hipótesis o supuestos de los que partieron para construir el modelo.

Los comentarios del equipo P son característicos de lo que hemos observado en el aula, desde nuestra experiencia (Vargas-Alejo, Cristóbal-Escalante, y Carmona, 2018), cuando se resuelve una actividad provocadora de modelos. Uno de los equipos del grupo, usualmente no considera el proceso de estimación como método válido para resolver un problema. Esto posiblemente se relaciona con experiencias pasadas, relacionadas con formas de aprendizaje tradicionales.

#### **4.3. Principio de la autoevaluación y reutilización del modelo**

Durante el trabajo en equipo, pero sobre todo en la Fase 3 de discusión grupal, los profesores evaluaron sus modelos e identificaron si sus respuestas necesitaban mejorarse, o requerían refinarse o ampliarse (*Principio de la autoevaluación*) en términos de dar solución al problema de la deforestación (APM1). Esto se observa en el siguiente extracto del equipo M, quien había considerado que en 40 años se acabaría el bosque.

- M1: le digo... falta de tiempo para ir acomodando los datos para las respuestas que nos pedían, pero...
- I: y es que lo están haciendo también a mano [se refería al proceso de graficación]
- M1: si manual, y pues son información [sic] diferente [se refiere a los datos de la Tabla 4: crecimiento de hectáreas de cultivo de aguacate y decrecimiento de

hectáreas de bosque]... y ya después, esto en base, ya más clara la información, otra vez volver a hacer un análisis, volver a graficar la información; una y otra, una sube y una baja [se refiere a las gráficas que muestran cómo crece la cantidad de hectáreas de cultivo de aguacate y cómo decrece la cantidad de hectáreas de bosque, Figura 5]

Durante la discusión grupal de presentación de modelos, los ocho profesores determinaron que bajo ciertas condiciones los dos modelos construidos podían utilizarse y adecuarse. Esto puede observarse en el siguiente extracto tomado del audio de un integrante del equipo N.

- N1: Pero... lo que les digo es... no es una realidad, sino es, una adaptación para resolver y darnos una idea [se refería al modelo lineal construido, Figura 3]. Si nos vamos a la realidad, no... muy pocas veces es un modelo lineal, son exponenciales, pero con los datos que tenemos, no podemos manejar un modelo exponencial. ¿Si?

El profesor N1 identificó que el modelo lineal podía utilizarse para aplicarse a otras situaciones (*Principio de la reutilización*) y, por lo tanto, para resolver una familia de problemas cuya estructura fuera similar. Incluso, consideró que el proceso de estimar era una forma de pensamiento transferible, transportable y reutilizable. Esto puede observarse en el siguiente extracto tomado del audio del docente N1.

- N1: Yo lo que quería comentar es que... que a diferencia... Pues yo me fui luego, luego, al modelo lineal porque yo hice una actividad con mis grupos muy similar a esta. La que te comentaba. Este... la basura que se está produciendo ¿cuántas toneladas se están produciendo al año? Y ¿cuántas se van a producir en 10, 20 años? Entonces yo chequé que con la información que se tiene, no se puede hacer una... un modelo exponencial, ¿si?, es uno lineal; no es bueno a largo plazo, es cierto. Pero nos da una buena idea. Entonces los chicos con los que trabajé se quedaron con un aprendizaje significativo

Con excepción del profesor N1 (como puede observarse a continuación), el grupo no mencionó de manera explícita que el modelo podía ser un prototipo útil para interpretar otras situaciones, inclusive más complejas..

- N1: Entonces... en realidad hay muchos datos más, muchos parámetros, muchas variables que no estamos considerando por los cuales la deforestación va aumentando...

En su intervención se observa que de tener más información, la consideraría en su modelo, el cual ampliaría o modificaría (*Principio de la generalización del modelo*).

#### 4.3.1. Reflexiones

En esta Fase 3 se observó, tal como lo menciona la *PMM* (Lesh y Doerr, 2003), que la comunicación de modelos e interacción social apoyó la construcción, modificación,

ampliación y refinamiento de ideas de todos los equipos. Algo importante de resaltar es que aunque varios profesores llevaban equipo de cómputo, no hicieron uso de hojas de cálculo, ni de graficadores.

#### **4.4. Refinamiento de formas de pensar**

En la Fase 4, de resolución del problema en forma individual, sólo seis docentes entregaron su carta. Tres profesores expresaron a Yuri en sus cartas individuales que el modelo más adecuado para describir el comportamiento de la situación, a partir de los datos contenidos en el problema, era un modelo lineal (dos docentes pertenecían al equipo N y uno a la pareja P). El profesor M3 escribió que era complicado elaborar un modelo a partir de los datos (se refería al hecho de construirlo con precisión) y los docentes M1 y M2 mencionaron que el modelo exponencial era el más adecuado. Todos sin excepción comentaron que el bosque indudablemente desaparecería, pero que a partir de los datos contenidos en el problema no se sabía, de manera exacta, cuándo. Acordaron que podían usar la estimación para proponer respuestas, aunque seguían con la idea de tener datos precisos para ofrecer un modelo adecuado.

##### **4.4.1. Reflexiones**

Se notaron cambios en las formas de pensar de los profesores con respecto a la posibilidad de crear modelos, a partir de la estimación, para resolver la problemática. 80% de los docentes manifestaron que no estaban acostumbrados a realizar este tipo de actividades, menos aún a usarlas en el aula. En general, solían resolver problemas típicos de los libros de texto en sus clases, lo cual podían modificar a partir de esta experiencia para involucrar este tipo de situaciones.

## **5. REFLEXIONES FINALES Y CONCLUSIONES**

Las preguntas planteadas inicialmente: ¿Cumple la actividad con los principios de diseño de una APM? ¿Qué significa que cumpla con ellos? ¿Qué formas de pensar o modelos emergieron al realizarla? ¿Qué conocimientos, conceptos y habilidades matemáticas utilizaron los docentes? ¿Es posible observar el surgimiento, modificación, ampliación y refinamiento de estas formas de pensar? pueden responderse de la siguiente manera.

Encontramos evidencia de que la APM1 satisface cabalmente con cinco de los seis principios establecidos: *principio de la realidad*, *principio de la construcción del modelo*, *principio de la autoevaluación*, *principio de documentación del modelo*, *principio de la reutilización del modelo*. La APM1 permitió revelar explícitamente lo que pensaban los profesores acerca de la situación durante todo el proceso de solución del problema. Es decir, durante proporcionó información para identificar el sistema conceptual y su evolución. Promovió la ampliación y refinamiento del conocimiento y habilidades

matemáticas de los docentes, al involucrarlos en las tareas de elección de datos, variables, discriminación, organización de la información y uso de la estimación.

Los modelos que surgieron fueron lineales y exponenciales. Los profesores identificaron y utilizaron en sus modelos conceptos matemáticos como variación, ecuación, incógnita y función (lineal y exponencial), pero además, utilizaron y validaron las habilidades de generación de conjeturas, hipótesis, estimación y toma de decisiones para construir modelos. Los profesores discutieron la diferencia que implicaba el uso de distintos modelos en la predicción del fenómeno analizado; en este caso el de deforestación. Tuvieron conflictos con sus percepciones tradicionales de resolución de problemas rutinarios en el aula, donde basta el uso de algún algoritmo o procedimiento para encontrar soluciones. Sin embargo, el trabajo en equipo y la discusión grupal les permitió modificar, extender y refinar sus formas de pensar.

Una tarea pendiente de incluir en el proyecto de investigación es promover el uso de la tecnología para extender y refinar los modelos que emergieron para resolver la APM1. El uso de software como GeoGebra podría apoyar la construcción de modelos que fueran reutilizables, transferibles y fáciles de modificar para crear nuevos escenarios (*principio de la generalización del modelo*) o bien para analizar situaciones similares con datos distintos u otras condiciones iniciales. El carácter dinámico del software podría apoyar la profundización y análisis de conceptos como variación en modelos lineales y exponenciales.

## AGRADECIMIENTO

Agradecemos a la Secretaría de Educación Pública, por el apoyo brindado para la realización de este trabajo a través del proyecto PRODEP: UDG-PTC-1377.

## REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Ärlebäck, J. B., Doerr, H., & O'Neil, A. (2013). A modeling perspective on interpreting rates of change in context. *Mathematical Thinking and Learning*, 15(4), 314-336.
- Comisión Forestal del Estado de Michoacán (2014). *Inventario estatal forestal y de suelos Michoacán de Ocampo 2014*. Morelia: Gobierno del Estado de Michoacán.
- Doerr, H. M. (2016). Designing sequences of model development tasks. En C. R. Hirsch & A. R. McDuffie (Eds.), *Annual Perspectives in Mathematics Education 2016: Mathematical modeling and modeling mathematics* (pp. 197-205). Reston, Va: National Council of Teachers of Mathematics.
- Doerr, H. M. & Lesh, R. (2003). A modeling perspective on teacher development. En R. Lesh & H. M. Doerr (Eds.), *Beyond Constructivism. Models and modeling perspectives on mathematics problem solving, learning, and teaching* (pp. 125-140). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Duval, R. (1996). *Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento*. Traducción de uso interno realizada por el Departamento de Matemática Educativa del Cinvestav, IPN, México. Título original Registres de représentation sémiotique

- et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 5, 37-65, IREM de Stramburgo, 1993.
- Greenpeace (2017). Meseta purépecha, Michoacán: bosques convertidos en aguacate. Recuperado el 15 de agosto de 2017 del sitio de internet de Greenpeace: <http://www.greenpeace.org/mexico/es/Campanas/Bosques/Geografiade-la-deforestacion/Michoacan/>
- Instituto Nacional de Estadística y Geografía (2017). *La producción forestal en la Meseta Purépecha en el estado de Michoacán*. Recuperado de [http://internet.contenidos.inegi.org.mx/contenidos/productos/prod\\_serv/contenidos/espanol/bvinegi/productos/historicos/380/702825118310/702825118310\\_1.pdf](http://internet.contenidos.inegi.org.mx/contenidos/productos/prod_serv/contenidos/espanol/bvinegi/productos/historicos/380/702825118310/702825118310_1.pdf)
- Kaiser, G., & Sriraman, B. (2006). A global survey of international perspectives on modelling in mathematics education. *ZDM*, 38 (3), 302-303.
- Lesh, R. (2010). Tools, researchable issues and conjectures for investigating what it means to understand statistics (or other topics) meaningfully. *Journal of Mathematical Modeling and Application*, 1(2), 16-48.
- Lesh, R. & Doerr, H. M. (2003). Foundations of a models and modelling perspective on mathematics teaching, learning, and problem solving. En R. Lesh, & H. M. Doerr (Eds.), *Beyond Constructivism. Models and Modeling perspectives on mathematics problem solving, learning and teaching* (pp. 3-34). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.
- Lesh, R., & Yoon, C. (2004). Evolving communities of mind in which development involves several interacting and simultaneously developing strands. *Mathematical Thinking and Learning*, 6(2), 205-226.
- Lesh, R. Cramer, K. Doerr, H. M., Post, T., & Zawojewsky, J. S. (2003). Model development sequences. En R. Lesh & H. M. Doerr (Eds.), *Beyond Constructivism. Models and modeling perspectives on mathematics problem solving, learning, and teaching* (pp. 35-59). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Lesh, R., Yoon, C., & Zawojewski, J. S. (2007). John Dewey revisited: making mathematics practical versus making practice mathematical. En R. A. Lesh, E. Hamilton, & J. J. Kaput (Eds.), *Foundations for the future in mathematics education* (pp. 315-348). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and Standards in School Mathematics*. Reston, Va.: National Council of Teachers of Mathematics.
- Yanagimoto, A. & Yoshimura, N. (2013). Mathematical modelling of a real-world problem: the decreasing number of bluefin tuna. En G. Kaiser & G. Stillman (Eds.), *Teaching Mathematical Modeling: Connecting to Research and practice. International Perspectives on the Teaching and Learning of Mathematical Modelling series* (pp. 229-239). Dordrecht: Springer.
- Vargas-Alejo, V., Cristóbal-Escalante, C., & Carmona, G. (2018). Competencias Matemáticas a través de la implementación de actividades reveladoras de pensamiento. *Educación Matemática*, 30(1), 213-236.



## ¿Qué andamios se ofrecen para enseñar matemáticas en Educación Infantil? Preguntas e interacciones en función del método

Marta López y Ángel Alsina  
Universidad de Girona

**Resumen:** Se analizan dos tipos de andamios (preguntas e interacciones) en tres métodos de enseñanza de las matemáticas en Educación Infantil: cuaderno de actividades (CA), manipulación y experimentación (ME) y rincones de trabajo (RT).

A partir de un estudio cuantitativo con 9 maestras y 149 alumnos de 3 a 6 años se han obtenido los siguientes resultados: a) en los tres métodos se plantean más preguntas cerradas que abiertas; b) en los tres métodos se observan interacciones monológicas, duológicas, de contingencia explorativa y de contingencia conversacional; c) en RT es donde más abundan las preguntas abiertas, las interacciones duológicas y las de contingencia conversacional. Se concluye que el método influye en el tipo de ayudas y, en consecuencia, en el aprendizaje que realizan los alumnos.

**Palabras clave:** prácticas matemáticas, andamios, preguntas, interacción, Educación Infantil

## What scaffolds are offered to teach mathematics in children's education? Questions and interactions depending on the method

**Abstract:** Two types of scaffolding (the questions and the type of interactions) are analyzed in three methods of teaching mathematics in Early Childhood Education: activity notebook (CA), manipulation and experimentation (ME) and work corners (RT).

Based on a quantitative study with 9 teachers and 149 students from 3 to 6 years old, the following results have been obtained: in all three methods more closed questions are asked than open ones; b) monological, duological, exploratory contingency and conversational contingency interactions are observed in the three methods; c) in RT is where the open questions, the conversational contingency and duological interactions abound

most. It is concluded that the method influences the type of aid and, consequently, the learning carried out by the students.

**Keywords:** *mathematical practices, scaffolding, questions, interaction, Early Childhood Education.*

## INTRODUCCIÓN

Durante los últimos años se han llevado a cabo numerosas investigaciones con el propósito de analizar el rendimiento matemático de los alumnos y cuál es la realidad educativa que existe alrededor de la enseñanza de esta disciplina en nuestro país. Los resultados de dichas investigaciones son abrumadores, pues todos coinciden en destacar una clara preocupación sobre el nivel matemático que presentan nuestros alumnos. Un ejemplo de ello son los datos obtenidos en las pruebas de medición del rendimiento matemático realizadas a nivel nacional e internacional tanto en Educación Primaria como en Educación Secundaria, tales como *Trends in International Mathematics and Science Study* (TIMSS) y *Programme for International Student Assessment* (PISA) respectivamente, en las que los resultados de los alumnos españoles se sitúan por debajo de la media internacional. En el estudio TIMSS 2015, por ejemplo, la puntuación de los alumnos españoles de 4º de Educación Primaria fue de 505 puntos, mientras que la media de la OCDE se sitúa en 525 puntos (Ministerio de Educación, Cultura y Deporte, 2016a). Ocurre lo mismo en el estudio PISA 2015, en el que la puntuación de España (486 puntos) se sitúa 4 puntos por debajo de la media de la OCDE (Ministerio de Educación, Cultura y Deporte, 2016b).

Pero, ¿se repite esta misma tendencia en las primeras edades? La realidad es que existen pocas investigaciones centradas en el estudio del rendimiento matemático de los alumnos de Educación Infantil. Aun así, en este artículo partimos de la base que una posible explicación del bajo rendimiento matemático de los alumnos de las etapas de Educación Primaria y Secundaria puede encontrarse en la manera cómo se lleva a cabo el proceso de enseñanza y aprendizaje matemático en la etapa de Educación Infantil.

Actualmente nadie pone en duda que para llevar a cabo un buen proceso de aprendizaje matemático, especialmente en las primeras edades, es imprescindible llegar a los conocimientos desde la propia vivencia. En este sentido, McLeod (1994) señala la importancia de establecer una relación entre el aprendizaje matemático y el contexto educativo que ofrece la metodología elegida. Según este autor, el tipo de escenario permite al alumno desarrollar, en mayor o menor medida, su aspecto emocional, condicionando así su aprendizaje matemático. Por esta razón, diversos organismos y autores indican que una enseñanza de las matemáticas de calidad en Educación Infantil exige que el maestro proporcione experiencias diversificadas, en diferentes contextos y con múltiples materiales que permitan ambientes propicios al aprendizaje, a la experimentación y al desarrollo de todas sus capacidades (NCTM, 2003; NCR, 2009; Alsina, 2006, 2011).

Con base en este planteamiento, algunos maestros conscientes de la importancia de afrontar las limitaciones que aportan metodologías rígidas como por ejemplo el cuaderno de actividades, intentan sustituirlas por un trabajo manipulativo, pero no obtienen mejores resultados (López, 2015). Ello es debido a que, aunque puedan existir métodos que por sus características puedan facilitar un escenario más idóneo para el ofrecimiento de

andamios de calidad, existe un elemento primordial que afecta y determina sin ninguna duda el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas de los alumnos: la planificación y gestión de las actividades que realiza el maestro. En las prácticas de enseñanza se construye una tipología de interacción entre el docente y el alumno que acaba repercutiendo, para bien o para mal, en su proceso de aprendizaje matemático.

Desde esta perspectiva, en este estudio nos planteamos la siguiente pregunta de investigación: ¿qué andamios ofrece el profesorado de Educación Infantil para fomentar el aprendizaje matemático de los alumnos? De esta pregunta derivan los objetivos de nuestro estudio: 1) analizar el tipo de preguntas que plantea el profesorado en función del método; 2) analizar el tipo de interacción que se genera en el aula entre el maestro y los alumnos en función del método. El estudio se realiza en tres de los contextos de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas más habituales en Educación Infantil, que a la vez determinan tres tipos de métodos: a) los cuadernos de actividad (CA) con un escenario totalmente rígido donde todos los alumnos realizan, de forma individual, la misma tarea durante el mismo tiempo; b) las actividades de manipulación y experimentación (ME), las cuales presentan un escenario donde el alumno tiene la oportunidad de aprender manipulando aunque el maestro sigue siendo la persona que dirige la sesión; y c) los rincones de trabajo (RT), que además de permitir un aprendizaje manipulativo ofrecen un escenario libre donde el alumno es el principal protagonista de su proceso. Él es quién decide qué investigar, cómo hacerlo y durante cuánto tiempo. Un contexto, pues, que le exige desarrollar su propia autonomía y ser responsable con las decisiones que tome.

## **MÉTODOS Y TIPOS DE ANDAMIOS EN LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS EN EDUCACIÓN INFANTIL**

En relación a los métodos de enseñanza centrados en la actividad matemática que se desarrolla, Baroody y Coslick (1998) distinguen cuatro métodos distintos, sintetizados por de Castro (2007):

Enfoque de destrezas. Se centra en la memorización de las destrezas básicas a través de la repetición. Los aprendices son considerados como recipientes vacíos, e incapaces de comprender la mayor parte de los conocimientos matemáticos. Las actividades no son significativas para los alumnos. Sin embargo, los alumnos pueden llegar a alcanzar gran destreza en la ejecución de procedimientos, siendo muy rápidos y cometiendo pocos errores. El contexto de enseñanza de las matemáticas basado en los CA se sitúa en este enfoque (López, 2015).

- Enfoque conceptual. Se centra en el aprendizaje de procedimientos con comprensión. Aunque en algunas ocasiones las actividades se presentan descontextualizadas y no está claro su sentido (por qué se hacen), hay un esfuerzo por promover un aprendizaje significativo. El contexto de enseñanza de las matemáticas basado en la ME se sitúa en este enfoque (López, 2015).
- Enfoque de resolución de problemas. Se centra en el desarrollo del pensamiento matemático a través del razonamiento y la resolución de problemas. El objetivo principal de la enseñanza es introducir al aprendiz en la actividad matemática a

través de la resolución de problemas reales para los niños. El profesor actúa como un compañero en el proceso de investigación sin dirigir este proceso.

- El enfoque investigativo. Es una mezcla del enfoque conceptual y el de resolución de problemas. Las matemáticas se ven simultáneamente como una red de conceptos y procedimientos y como un proceso de investigación. El objetivo es el aprendizaje de reglas, procedimientos y fórmulas de un modo significativo, pero también deben adquirirse competencias de razonamiento, representación, comunicación y resolución de problemas. El contexto de enseñanza de las matemáticas basado en los RT se sitúa en estos dos últimos enfoques (López, 2015).

Teniendo en cuenta que en Educación Infantil coexisten estos distintos enfoques, y que a menudo los docentes actúan de acuerdo con sus intuiciones y experiencias (Estrela, 2005), adquiere especial relevancia dar una definición clara de qué entendemos por andamios de calidad.

Según de Pablos y Jiménez (2007) un andamio de calidad se define como un determinado modelo de actuación con resultados satisfactorios que responden a una nueva visión compartida de querer avanzar y constituye la identidad de un determinado contexto donde se lleva a cabo. En una línea similar, Finkel (2008) señala que un andamio de calidad debe hacer posible un aprendizaje significativo de los alumnos, transformando así no únicamente el concepto de la enseñanza de calidad sino también el sentido del que la propia palabra “enseñar” puede significar. Van de Pol, Volman y Beishuizen (2010) también consideran que los andamios son el conjunto de apoyos que el maestro ofrece al alumno y que hacen posible que éste sea capaz de realizar una tarea ante la cual se encuentra bloqueado.

Aunque existen muchos tipos de andamios, en este trabajo nos centramos en las preguntas y las interacciones que se generan en el aula. En relación a las preguntas, Carretero (2004), McCormick y Donato (2000) y Mercer (2001), entre otros, las contemplan como el instrumento de mediación más adecuado. Para estos autores, algunos de los rasgos más característicos son los siguientes: a) nunca se trata de preguntas cerradas sino más bien abiertas que a menudo invitan a razonar y a justificar, definir o relacionar el objeto de estudio; b) una vez verbalizado el conocimiento o las experiencias previas, las preguntas parten de la aportación hecha por algún alumno, grupo de alumnos o por el propio maestro. Con ello se pretende que el grupo avance en el pensamiento colectivo a partir de aportaciones individuales; y c) a menudo estas preguntas se caracterizan por una intencionalidad muy concreta con el objetivo que sean los propios alumnos quienes intenten aplicar sus conocimientos como estrategias (por ejemplo: ¿qué relacionáis con...?, ¿cómo definirías...?, ¿hay algo familiar en este anunciado?). El objetivo es conseguir que el alumno tenga que esforzarse para encontrar conexiones con otros conocimientos previamente adquiridos a la vez que le permita tomar conciencia de su propia Zona de Desarrollo Próximo (ZDP).

Sobre las interacciones, Coyle (2000) las clasifica en cuatro grupos en el marco de un estudio sobre las distintas maneras de utilizar el lenguaje verbal: a) monológicas, cuando el maestro controla el discurso como el transmisor de la información; b) duológicas, como interacción compartida cuando el maestro controla el discurso en su interacción con el menos experto: es la secuencia I-R-F (*initiation, response, feedback*);

c) de contingencia explorativa, para referirse a un discurso transaccional en un proceso bidireccional impuesto por el maestro o el compañero más competente con el que está viviendo la interacción; y d) de contingencia conversacional, cuando se produce una interacción transformativa y co-constructiva ante sucesos mediante un discurso contingente no impuesto. Es aquí donde aparece el autocontrol del aprendiz.

Desde este marco referencial, como se ha indicado, el objetivo de este estudio es analizar dos tipos de andamios (las preguntas y las interacciones) en tres contextos distintos de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas en Educación Infantil

## **MÉTODO**

El estudio que presentamos a continuación es de carácter cuantitativo y se enmarca en el contexto de un estudio de mayor envergadura en el marco de una tesis doctoral (López, 2015).

## **PARTICIPANTES**

En el estudio han participado 9 maestras y 149 alumnos de Educación Infantil de distintos centros de la provincia de Girona (España). La selección tanto de los maestros como de los alumnos no ha sido al azar sino que fue intencional y por conveniencia. En concreto, se ha tenido en cuenta el tipo de método predominante en el aula para enseñar matemáticas: CA, ME y RT respectivamente.

## **Diseño y procedimiento**

Para realizar el análisis se elabora previamente una pauta de observación a partir de las categorizaciones de andamios aportadas por distintos autores (Siguel, 1980; McCormick y Donato, 2000; Esteve, 2003; Carretero, 2004; Bes Izuel, 2008; Van de Pol, Volman y Beishuizen, 2010; Gil-Jaurena, 2011; Håwera y Taylor, 2011). La pauta se organiza en cinco bloques: a) el maestro como mediador o facilitador del proceso; b) aprendizaje significativo producido; c) nivel de participación e interacción de los alumnos y el maestro; d) nivel de tratamiento de las individualizaciones y diferencias de los alumnos; y e) intencionalidad en el momento de ofrecer las ayudas (López, 2015). A través de los distintos ítems de cada bloque se intenta ofrecer un amplio panorama sobre los andamios que se ofrecen a los alumnos en función de la metodología utilizada por el maestro.

Como se ha indicado, este estudio se centra en el análisis de dos ítems estrechamente relacionados, que actúan como variables independientes: a) el planteamiento de preguntas (ítem que pertenece al bloque del maestro como mediador y facilitador del proceso) y b) el control de la interacción (ítem que pertenece al bloque del nivel de participación e interacción de los alumnos y el maestro).

En relación al planteamiento de preguntas se analizan tres aspectos: a) la tipología de preguntas, distinguiéndolas según si son abiertas o cerradas; b) su origen, refiriéndose a quién las aporta, es decir, si las preguntas las realiza el maestro o el alumno; y c) la intencionalidad, es decir si las preguntas que realiza el maestro tienen como objetivo que el alumno recuerde experiencias anteriores, establezca relaciones, se cuestione aquello que está investigando o simplemente identifique un concepto.

Tabla 1. Ejemplo de tipología de preguntas

| <b>Ejemplo</b> |  |
|----------------|--|
| Abiertas       | <i>Maestro: ¿Qué ves en esta imagen?</i>         |
| Cerradas       | <i>Maestro: ¿Ves un cuadrado en esta imagen?</i> |

Tabla 2. Ejemplo del origen de las preguntas

| <b>Ejemplo</b>         |   |
|------------------------|---|
| Aportación del alumno  | <i>Alumno: ¿Qué tenemos que hacer aquí?</i> |
| Aportación del maestro | <i>Maestro: ¿Cuántos círculos hay?</i>      |

Tabla 3. Ejemplo de la intencionalidad de las preguntas

| <b>Ejemplo</b>        |  |
|-----------------------|--|
| Recordar experiencias | <i>Maestro: ¿Os acordáis cómo hicimos esta tarea la semana pasada?</i> |
| Establecer relaciones | <i>Maestro: Mira la imagen ¿Están en la montaña o en la nieve?</i>     |
| Cuestionar            | <i>Alumno: Seis</i><br><i>Maestro: ¿Seis? ¿Seguro?</i>                 |
| Identificar           | <i>Maestro: ¿Qué forma geométrica es?</i>                              |

Por lo que respecta al segundo ítem analizado (el control de la interacción), tal y como se ha mencionado previamente, analizamos cuatro tipos: monológica (el maestro es quién inicia el debate), duológica (el maestro es quién responde), de contingencia explorativa (discurso instruccional transaccional en un proceso bidireccional impuesto por el más experto) y de contingencia conversacional (interacción transformativa y co-constructiva mediante un discurso contingente no impuesto).

Tabla 4. Ejemplos de interacción

| Ejemplo                     |   |
|-----------------------------|---|
| Monológica                  | <i>Maestro: ¿Cuántas hay?<br/>Alumno: Cuatro</i>  |
| Duológica                   | <i>Maestro: Vamos a mirar cuántas hay<br/>Alumno: Uno, dos, tres. Hay tres!<br/>Maestro: Muy bien!</i>  |
| Contingencia explorativa    | <i>Maestro: No, porque aquí ya os han puesto ejemplos.<br/>Pega aquí los cuadrados y así nos quedaran las formas bien hechas.</i>                                       |
| Contingencia conversacional | <i>Maestro: ¿Qué hay aquí dentro? ¿Una pelota?<br/>Alumno: Sí<br/>Maestro: ¿Una pelota puede ver aquí dentro?<br/>Alumno: No porque es demasiado grande y no cabría</i> |

Para la obtención de los datos, una vez obtenido el consentimiento informado, se grabaron en vídeo tres sesiones en cada clase de unos 50 minutos aproximadamente cada una, para que tanto las maestras como los alumnos se acostumbraran a la situación y no afectara en la forma de hacer la clase y en el rendimiento de los alumnos (debido a distracciones, etc.). Posteriormente se transcribieron las últimas sesiones grabadas en cada clase y se procedió a analizar el tipo y la cantidad de preguntas formuladas y las interacciones que se habían producido durante la clase a partir de las categorías proporcionadas por la literatura, mediante una categorización deductiva.

Para el análisis posterior de los datos obtenidos se ha utilizado el paquete estadístico SPSS 15.0 para Windows a través del que se han obtenido las medias de los resultados.

## RESULTADOS

### Tipos de preguntas en función del método

En este primer subapartado de resultados se muestran los datos obtenidos en relación a los aspectos de las preguntas analizados que se han indicado en el apartado de metodología: a) la tipología de preguntas, distinguiéndolas según si son abiertas o cerradas; b) su origen, refiriéndose a quién las aporta, es decir, si las preguntas las realiza el maestro o el alumno; y c) la intencionalidad, es decir si las preguntas que realiza el maestro tienen como objetivo que el alumno recuerde experiencias anteriores, establezca relaciones, se cuestione aquello que está investigando o simplemente identifique un concepto.

Los datos obtenidos en función del método son los siguientes:

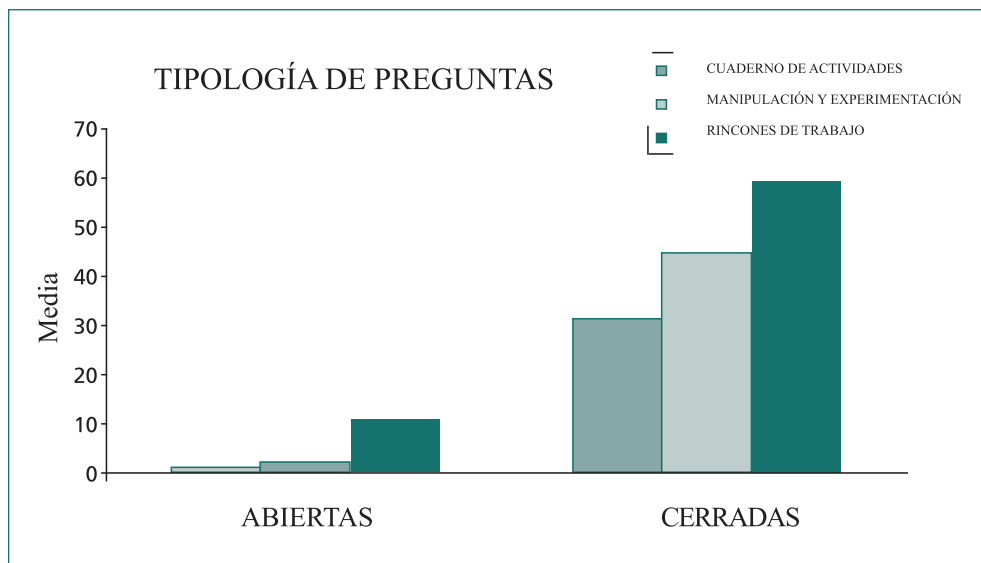


Gráfico 1: Tipo de preguntas

En el gráfico 1 se observa, por un lado, que en todos los métodos predominan las preguntas cerradas respecto a las abiertas y, por otro lado, que el contexto donde se plantean más preguntas de ambos tipos es en RT. Sorprende, además, la insignificante cantidad de preguntas abiertas que se plantean en los métodos de CA y ME.

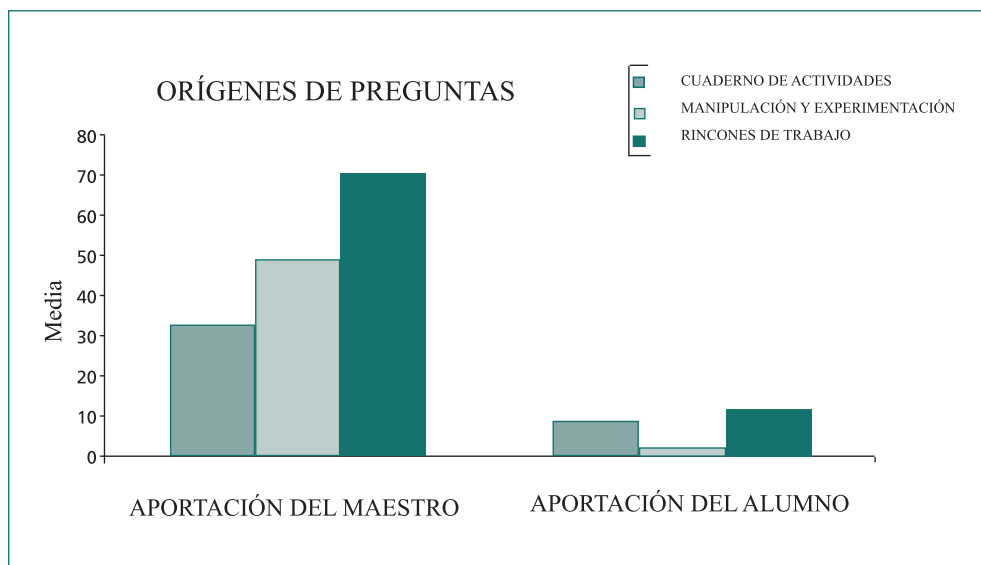


Gráfico 2: Origen de las preguntas

En relación a su origen, en el gráfico 2 podemos apreciar que en todas las metodologías una parte significativa de las preguntas son planteadas por el maestro, aunque los alumnos también han generado algunos momentos de reflexión realizando preguntas. En relación con las preguntas formuladas por el maestro, los datos obtenidos muestran de forma clara que en la metodología RT es en la que se generan más preguntas y en CA es en la que menos. Por otro lado, en relación a las preguntas formuladas por los alumnos, no se percibe demasiada diferencia entre las que se plantean en aulas donde predomina el trabajo con CA y RT, en cambio en ME son inferiores.

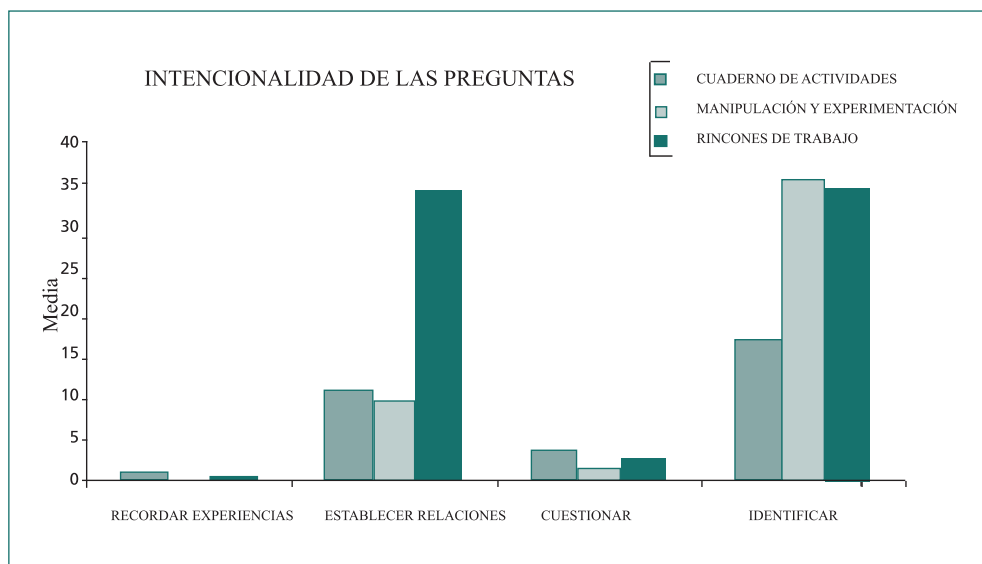


Gráfico 3. Intencionalidad de las preguntas.

El gráfico muestra que, en general, las preguntas que pretenden ayudar al alumno a recordar experiencias anteriores son casi inexistentes en las tres metodologías. Lo mismo sucede, aunque no con tanta evidencia, con aquellas que pretenden cuestionar la respuesta del alumno.

En particular, comparando las tres metodologías se manifiesta que la de los RT está por encima del resto respecto a las preguntas que buscan establecer relaciones; y la metodología ME en las que buscan la identificación, aunque la diferencia con la metodología de RT es mínima.

### Tipos de interacciones en función del método

En el gráfico 4 se presentan los datos obtenidos en relación al control de la interacción producida a través de los tres métodos (CA, ME y RT).

Partiendo del análisis del control de interacción que se ha hecho con cada metodología, los resultados expresan que el control de interacción monológico es el más utilizado

por todas las metodologías. Se percibe una clara diferencia por parte de los RT por encima de las otras dos metodologías con el control de interacción duológico y la contingencia conversacional, mientras que, con la contingencia explorativa, la diferencia es mínima.

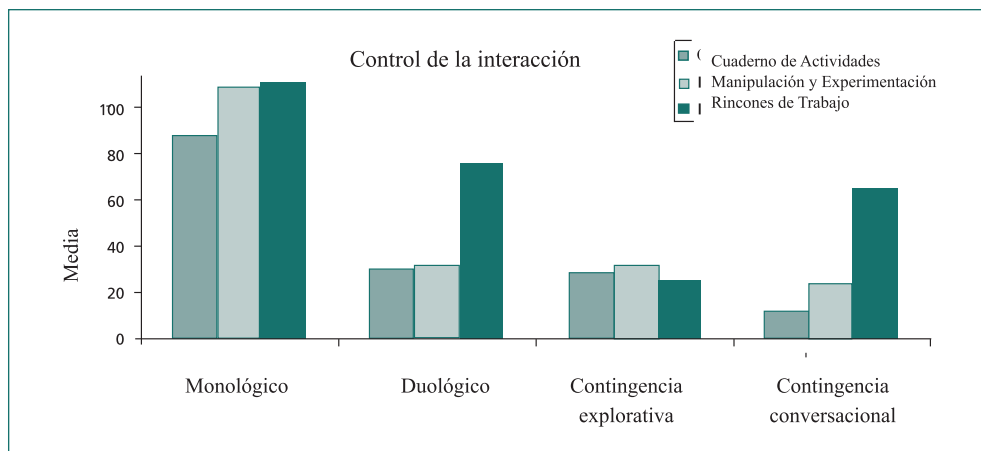


Gráfico 4: Media del control de la interacción según la metodología

## DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

En este artículo se han analizado el tipo de andamios (preguntas e interacciones) que ofrece el profesorado de Educación Infantil para facilitar el aprendizaje de las matemáticas de los alumnos. En concreto, el estudio se ha realizado en tres tipos de contextos de enseñanza distintos que responden a tres de los tipos de métodos más habituales de enseñanza de las matemáticas: CA, ME y RT.

En relación a la participación y la interacción producida por el maestro, los datos obtenidos muestran que el método con un contexto libre (RT) es el escenario donde se generan más preguntas tanto abiertas como cerradas y no solo por parte del maestro sino también por parte del alumno. Además destaca por ser el escenario que más favorece preguntas para establecer relaciones, generando así el clima idóneo para la propia investigación. En contraposición, el método más dirigido (CA) destaca por ser el que ofrece menos preguntas, independientemente de su tipología y origen.

Respecto al control de la interacción, los resultados reflejan que el método más libre (RT) es el que más propicia interacciones bajo el control que denominamos duológico (intervención del maestro finalizada con un *feedback*) y la contingencia conversacional (construcción de aprendizaje compartido); mientras que la mayor parte de las interacciones que se producen en la enseñanza de matemáticas bajo el método de carácter más dirigido (CA) son de tipo monológico (intervenciones iniciadas por el maestro).

Ante estos resultados llegamos a la conclusión que según si nos encontramos ante una metodología libre o dirigida, se presentan a los alumnos más o menos cantidad de retos a los que enfrentarse y la cantidad, tipología e intencionalidad con que se ofrecen las preguntas varía ya que las necesidades son distintas. ¿Pero cómo repercute este hecho en el aprendizaje matemático del alumno?

Si realizamos una breve comparación entre los resultados obtenidos por las dos metodologías aparentemente más distintas a nivel organizativo (CA y RT) y los relacionamos con los datos obtenidos en una investigación cuantitativa previa donde se analizaba el rendimiento matemático de los alumnos (Autores, 2015), podemos observar que los alumnos que han realizado su proceso de enseñanza-aprendizaje matemático a partir de una metodología dirigida y rígida (CA) no solo reciben una tipología de preguntas concretas y un número menor de ellas en todos los sentidos (abiertas, cerradas, aportadas por el alumno y aportadas por el maestro) sino también un menor nivel de competencia matemática.

De ello se desprende que el contexto que proponemos para aprender matemáticas en Educación Infantil no sólo afecta a la cantidad de preguntas que el maestro ofrece a sus alumnos, a su tipología (abiertas o cerradas) e intencionalidad con la que se realicen (recordar experiencias, identificar, cuestionar o establecer relaciones) sino también en la tipología de interacción que se construye entre el maestro y el alumno (monológica, dúo-lógica, de convergencia explorativa o conversional) para enseñar esta disciplina, repercutiendo así en el aprendizaje de los alumnos. Eso explicaría, por ejemplo, los pobres resultados de la metodología ME que, aun ofreciendo un contexto basado en un aprendizaje manipulativo, ha obtenido peores resultados académicos que el resto (López, 2015). Quizá sea un escenario que a simple vista pueda parecer más idóneo para el aprendizaje por el mero hecho de basar su enseñanza en la manipulación de materiales, pero si el contexto que propone no ofrece retos adaptados a las necesidades de los alumnos acompañados de andamios de calidad difícilmente permitiremos al alumno crecer en un entorno emocional rico, dificultando así una mejora en su rendimiento matemático.

Como conclusión, pues, los resultados obtenidos en esta investigación ilustran que la función que damos a nuestra práctica matemática crea, sin ninguna duda, su forma. Así, enseñar matemáticas en un contexto en el que se permita al alumno aprender mediante la manipulación de material, pero sin que pueda decidir el camino que debe seguir en su proceso de enseñanza y aprendizaje y sin un buen acompañamiento por parte del maestro puede dificultar la mejora del rendimiento académico. Si los alumnos no hacen un buen uso del material, no se enfrentan a retos que les hagan crecer como personas y si el trabajo realizado con él no va acompañado de una buena orientación por parte del adulto, por ejemplo planteando preguntas que les permitan cuestionarse las cosas y establecer relaciones bajo una tipología de interacción donde sea posible la construcción de aprendizaje compartido entre maestro y alumno, se puede llegar a convertir en contraproducente a largo plazo. Tal y como decía un antiguo proverbio de la sabiduría china (Stevens, 2011, p. 13):

En verdad todo depende, en esas cosas, del hombre, y poco o nada del método. El método es ciertamente sólo el camino y la dirección que uno toma, mediante lo cual el cómo de su obrar es la fiel expresión de su ser. Si esto no es así, el método no es más que una afectación, algo artificial aprendido como un agregado, sin raíces ni savia, sirviendo al

objetivo ilegal del autoencubrimiento, un medio de ilusionarse sobre sí mismo y escapar a la ley quizás implacable del propio ser.

## BIBLIOGRAFÍA

- Alsina, Á. (2006). *Como desarrollar el pensamiento matemático de 0 a 6 años*. Barcelona: Editorial Octaedro-Eumo.
- Alsina, Á. (2011). *Educación matemática en contexto de 3 a 6 años*. Barcelona: ICE-Horsori.
- Baroody, A.J. y Coslick, R.T. (1998). *Fostering Children's Mathematical Power: An Investigative Approach to K-8 Mathematics Instruction*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Bes Izuel, M.A. (2008). Un modelo de análisis de la interacción en el aula de segundas lenguas. En XXVI AESLA 2008: *De la lingüística aplicada a la lingüística de la mente: hitos, prácticas y tendencias*. Almería.
- Canals, M<sup>a</sup>. A. (2007). *Vivir las matemáticas*. Barcelona: Octaedro.
- Carretero, A. (2004). *El discurso contingente como herramienta pedagógica para favorecer la co-construcción de la docencia en clase de alemán/LE para adultos en un nivel de principiantes. Un estudio en la investigación-acción*. Barcelona: Universidad Pompeu Fabra.
- Coyle, D. (2000). *Changing the rules of the game: Adolescent Voices Taking Control-if only they would, if only they could. Learner autonomy, leaner autonomy: Future directions*. Londres: Longman.
- de Pablos, J. y Jiménez, R. (2007). Buenas prácticas con TIC apoyadas en las políticas educativas: claves conceptuales y derivaciones para la formación en competencias ECTS. *Revista Latinoamericana de Tecnología Educativa*, 6(2), 15-28.
- Esteve, J.M. (2003). *La tercera revolución educativa. La educación en la sociedad del conocimiento*. Barcelona: Paidós.
- Estrela, M.T. (2005). *Autoridad y disciplina en la escuela*. Sevilla: Trillas.
- Finkel, D. (2008). *Dar clases con la boca cerrada*. Valencia: Publicacions de la Universitat de València.
- Gil-Jaurena, I. (2012). Observación de procesos didácticos y organizativos de aula en Educación Primaria desde un enfoque intercultural. *Revista de Educación*, 358, 85 -110.
- Hāwera, N. y Taylor, M. (2011). *Maori Medium children's views about learning mathematics: possibilities for future directions*. Australia: A.A.M.T, The Australian Association of Mathematics Teachers Inc.
- López, M. (2015). *La influència del mètode d'ensenyament i de les bastides en l'aprenentatge de les matemàtiques a l'Educació Infantil* (Tesis Doctoral). Girona: Universitat de Girona.
- McCormick, D.E. y Donato, R. (2000). Teacher questions as scaffolded assistance in an ESL classroom. En J.K. Hall y L.S. Verplante (Eds.), *Second and Foreign language learning through classroom interaction* (p.183-201). Mahawah, NJ: Lawrence Erlbaum.
- McLeod, D.B. (1994). Research on affect and mathematics learning in the JRME: 1970 to the present. *Journal for Research in Mathematics Education*, 25(6), 637-647.
- Mercer, N. (2001). *Palabras y mentes*. Barcelona: Paidós.

- Ministerio de Educación, Cultura y Deporte (2016a). TIMSS 2015. Informe español. Boletín de Educación, 50. Recuperado de: <https://www.mecd.gob.es/inee/dam/jcr:1ce5e042-4ee4-4d8f-8d0b-605586dc0159/educainee50provokk.pdf>
- Ministerio de Educación, Cultura y Deporte (2016b). PISA2015. Informe español. Boletín de Educación, 51. Recuperado de: <https://www.mecd.gob.es/inee/dam/jcr:0e5376e8-b094-41f6-b795-44c9102678b7/educainee51provokk.pdf>
- National Council of Teachers of Mathematics (2003). *Principios y estándares para la educación matemática*. Sevilla: Thales.
- National Research Council (2014). Fundamentos cognitivos para la iniciación en el aprendizaje de las matemáticas. *Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia*, 3(1), 21-48.
- Stevens, J.O. (2003). *El darse cuenta. Sentir, imaginar y vivenciar*. Santiago de Chile: Cuatro Vientos.
- Van de Pol, J., Volman, M. y Beishuizen, J. (2010). Scaffolding in teacher- Student Interaction: A Decade of Research. *Educational Psychology Review*, 22, 271-296.



## Las Matemáticas puestas en Juego

Nahina Dehesa De Gyves

*Tecnológico Nacional de México*

*Campus Instituto Tecnológico del Istmo*

**Resumen:** *Se presentará una experiencia de aprendizaje de las matemáticas en un espacio lúdico en la que se ponen en juego la acción y no solo la repetición de información. La acción se refiere a motivar, diseñar, elaborar, problematizar, resumir y coordinar un juego cuya temática se realice en torno a contenidos matemáticos. La estrategia docente es muy importante debido a que coordinar y evaluar dichas acciones no es una labor simple. En las siguientes líneas se enfatizará la posibilidad de coordinar dicha experiencia a poblaciones distintas: participantes de nivel escolar básico, medio básico y de nivel superior.*

**Palabras clave:** *Inteligencia kinestésica, inteligencias múltiples, inteligencia lógica-matemática, inteligencia espacial, juegos matemáticos, evaluación docente.*

## Mathematics put into play

**Abstract:** *A learning experience of mathematics will be presented in a playful space in which the action is put into play and not only the repetition of information. The action refers to motivating, designing, elaborating, problematizing, summarizing and coordinating a game whose theme is based on mathematical contents. The teaching strategy is very important because coordinating and evaluate such actions is not a simple task. The following lines will emphasize the possibility of coordinating the experience populations different: participants of basic school level and upper level.*

**Keywords-kinesthetic** *intelligence, multiple intelligences, logical-mathematical intelligence, spatial intelligence, mathematical games.*

## INTRODUCCIÓN

Los constantes procesos de globalización y mundialización revisten a la educación de constantes cambios y el tomar como referente el concepto de competencias es uno de ellos. En él el papel del docente se visualiza más activo y el alumno también. Menciona Monereo

y Pozo (2001) que los estudiantes las adquieren cuando son capaces de movilizar recursos (conocimientos, habilidades, actitudes y destrezas), que resultan de un proceso de construcción de conocimiento que emplea la cognición estratégica y la meta cognición.

En el objetivo de apoyar la capacidad de usar las matemáticas en situaciones de la vida diaria, ciudadana, personal y laboral (Zorrilla, 2007) se incluye en el presente trabajo el desarrollo de Juegos como estrategia didáctica para desarrollar contenidos matemáticos. La propuesta de intervención en el aula inicia proporcionando un juego de dominó de piezas con contenidos matemáticos.

La relación de juegos con contenidos matemáticos puede establecerse mediante el marco de análisis proporcionado por las inteligencias múltiples. Las investigaciones que se mencionarán más adelante enfatizan la importancia de emplear el cuerpo tridimensionalmente. Se aboga por una articulación entre tres aspectos: sentidos, emociones y movimientos (Hannaford, 2008). Bajo la premisa de que para aprender hay que moverse, no basta con tener la experiencia de haber jugado, se plantea el reto de diseñar un juego propio.

También hay que resaltar dos aspectos más inmersos en la propuesta, el papel del docente y el trabajo colaborativo realizado entre los estudiantes. Existe una fase posterior al juego y diseño de uno propio, la de su aplicación a diferentes públicos. Al respecto se puede mencionar el aspecto motivante existente entre los pares.

En la última y no menos importante fase de la propuesta coordinada desde el aula, se encuentra el resumen de la experiencia realizada por parte del estudiante en una video-grabación. A continuación se iniciará con mayor detalle la descripción de la propuesta de intervención.

## **LAS INTELIGENCIAS MÚLTIPLES Y LOS JUEGOS**

Para Gardner (2013) la habilidad de simbolizar es uno de los factores más importantes que separan a los seres humanos de la mayoría de las otras especies. Señala que cada una de las siete inteligencias en su teoría cumple con el criterio de poder ser simbolizada. La inteligencia Lingüística se refiere a una sensibilidad a los sonidos, la estructura, los significados y las funciones de las palabras y el lenguaje. La inteligencia Lógico-matemática se refiere a una sensibilidad y capacidad para discernir en términos de esquemas numéricos o lógicos; la inteligencia Espacial se refiere a la capacidad para percibir con precisión el mundo visual y espacial. La inteligencia Corporal- Kinestésica se refiere a una habilidad para controlar los movimientos del cuerpo y manejar objetos con destreza. La inteligencia Interpersonal hace alusión a una capacidad para discernir y responder de manera adecuada a los estados de ánimo, los temperamentos, las motivaciones y los deseos de otras personas. La inteligencia Intrapersonal se refiere a un acceso a los sentimientos propios y habilidad para discernir las emociones íntimas, conocimiento de las fortalezas y debilidades propias. Por último, la inteligencia Musical se refiere a la habilidad para producir y apreciar ritmo, tono y timbre.

En relación del juego con las inteligencias de Gardner, menciona Armstrong (2009) que emplear la estrategia del juego implica varias inteligencias (incluyendo la Kinestésica-corporal, la lingüística y la espacial), se incluye la inteligencia interpersonal porque las interacciones humanas que tienen lugar ayudan a los alumnos a desarrollar un nuevo

nivel de comprensión. A través de la conversación y otras interacciones, los alumnos empiezan a convertirse en expertos del tema que están estudiando. También cabe señalar la semejanza de estructura entre el juego y la matemática y que existen muchos tipos de actividad y muchas actitudes fundamentales comunes que pueden ejercitarse escogiendo juegos adecuados.

## UNA EXPERIENCIA ÁULICA

En el semestre lectivo de agosto a diciembre 2015 se impartió un curso de cálculo diferencial a un grupo de ingeniería industrial de primer semestre, empleándose la siguiente estrategia: Primeramente se dividen los estudiantes en equipos de 4 integrantes, se les proporciona un juego de mesa de operaciones con fracciones por equipo y se les recuerda las reglas tanto del juego (puede ser un dominó o memorama) como las de Aritmética. Se les proporciona de cuarenta a sesenta minutos para resolverlo. Las reglas de la Aritmética en sus modalidades con los números enteros, decimales y fracciones se han practicado desde el nivel básico y sin embargo, como lo pudimos constatar, su manejo no deja de ser un reto que puede complicar su desarrollo. Aclaremos un poco más este punto.

La razón por la cual se tiene a la Aritmética como un punto de partida (sin que forme parte del programa de estudios del nivel Superior) es porque es la base para cualquier desarrollo posterior (Trigonometría, Álgebra, Geometría Analítica y Cálculo) y observar su manejo puede funcionar como diagnóstico acerca de la actitud con la que el estudiante aborda un problema o ejercicio matemático. Si empleamos la palabra ejercicio cuando el docente menciona explícitamente una serie de pasos sencillos que debe seguir el estudiante, nos permitirá identificar con el término “problema” cuando no exista dicho asesoramiento. Así por ejemplo, dada la instrucción: “Resuelvan el siguiente dominó” podría resultar un problema para algunos o todos los participantes, pero una vez aclarada las reglas, la actividad problemática se puede convertir en un ejercicio.

Las observaciones en el aula han sido consistentes en varios ciclos escolares: para un buen número de los participantes pensar matemáticamente sigue siendo un problema independientemente de que estos temas los hayan estudiado con anterioridad. Cuando se les cuestiona la razón, argumentan que es debida al olvido por los años sin practicar. La tesis principal que sostiene el presente trabajo es que dicha respuesta es incompleta, la práctica frecuente de esperar a que el docente resuelva ejercicios para repetir las casi inmediatamente ha provocado ya un condicionamiento difícil de romper: el alumno se resiste a actuar de una manera libre a menos que se cambie el contexto tradicional por el contexto proporcionado por un juego.

## EL JUEGO Y EL AULA

Jugar un dominó puede ejemplificar la fractura de un ambiente tradicional en el que se espera la actuación del profesor en términos de exponer la resolución de un ejercicio o problema matemático para que, una vez resuelto por él, el alumno pueda repetir su

proceso de solución. El objetivo del juego de dominó no es exclusivamente repasar aritmética, álgebra o cálculo (se pueden emplear de diversos tipos) es vislumbrar el ritmo, el tipo y el nivel de participación de cada uno de los integrantes de los equipos. La enseñanza tradicional ha privilegiado la memorización y no la aplicación de reglas matemáticas a contextos nuevos y externos al aula. En su lugar, proponemos acercar al alumno en situaciones problemáticas que pueda resolver. Para ello es necesario dejar responderlo sin la inmediata y estricta aprobación del experto.

## DESARROLLANDO TU PROPIO JUEGO

Enfrentarse al reto de coordinar ritmos de aprendizaje diversos con diversidad de intereses y aptitudes es un tema que se retoma en la presente propuesta. Para identificar los intereses individuales nos proponemos como primer paso retomar al grupo formado por equipos. Se les recuerda que los equipos se forman libremente entre ellos, enfatizando que trabajaran durante todo el curso de esa forma para cubrir una calificación parcial del promedio general. Ahora el reto planteado en el semestre es que los propios estudiantes diseñen y elaboren su propio juego.

La metodología empleada se describe en la Tabla 1. A continuación se da una explicación breve: se fomenta la inteligencia interpersonal al consensar con los alumnos sobre sus intereses y sobre alguna idea de proyecto que les interesaría realizar, a partir de ahí se pretende relacionar las matemáticas al proyecto que se realizará. El proyecto bien puede ser elaborar un dominó como los que han jugado y en Dehesa (2016) se explica con más detalle el procedimiento empleado. Posteriormente, a través del seguimiento del proyecto en algunas sesiones del curso, es cuando se verifica si fue viable su idea, en cuanto presupuesto y/o componentes.

A continuación presentamos en la Tabla 1 el desarrollo de la elaboración de los juegos durante el semestre en términos de los objetivos pedagógicos e inteligencias mayormente involucradas:

Tabla 1. Seguimiento de la elaboración de un juego.

| Semana | Objetivo pedagógico   | Fase              | Inteligencia                 |
|--------|---|-------------------|------------------------------|
| 1 y 2  | Se decide el tipo de juego a desarrollar  | Define            | Intrapersonal                |
| 3      | Se revisan los componentes y materiales a utilizar. Se elabora una primera propuesta. | Elabora           | Interpersonal                |
| 4      | Se prueba en clases con otros compañeros como jugadores                               | Prueba            | Kinestésica                  |
| 5      | Se reajusta la matemática empleada o cambia de proyecto                               | Elabora y calcula | Lógica- matemática, espacial |
| 6      | Se aplica el juego a público  | Aplica            | Lingüística                  |
| 7      | Se realiza un reporte   | Concluye          | Lingüística                  |
| 8      | Se realiza un video   | Sintetiza         | Musical                      |

Una vez realizado los pasos del 1 al 5 del cuadro anterior, prácticamente se ha concluido la fase de elaboración del proyecto. Los pasos restantes invitan a comunicar su propuesta de forma escrita y oral con el propósito de fomentar la Inteligencia Lingüística e Interpersonal. En dicha dirección, también se les invita a elaborar un video de máximo de 4 minutos como testimonio de la presentación de su proyecto (esta última indicación es opcional).

## SE APLICA EL JUEGO AL PÚBLICO

A continuación se describirá con más detalle el paso 6 que consiste en aplicar el juego a un público externo al aula. A manera de ejemplo se ha elegido el juego del Twister presentado por un equipo de alumnos en dos momentos diferentes. En la primaria Simone de Beauvoir el 13 de noviembre del 2015 y en la Feria de Ciencias realizada el jueves 3 de diciembre del 2015 en el propio Instituto Tecnológico y los alumnos a quienes se aplicó el juego fueron respectivamente de nivel Básico y Superior. Las razones para considerar a dichos públicos es que coincidimos con De Guzmán (1984) acerca del objetivo primordial de la enseñanza básica y media. Para el autor no consiste en embutir en la mente del niño un amasijo de información pensando que le va a ser muy necesaria como ciudadano en nuestra sociedad. El objetivo fundamental consiste en ayudarlo (y ahora incluimos ayudarnos) a desarrollar su (nuestra) mente y sus potencialidades intelectuales, sensitivas, afectivas, físicas, de modo armonioso. Y para ello nuestro instrumento principal debe consistir en el estímulo de la propia acción, colocándonos en situaciones que fomenten el ejercicio de aquellas actividades que mejor pueden conducir a la adquisición de las actitudes básicas mencionadas. Ejemplifiquemos con un juego en acción cómo se pretende cubrir dicho objetivo.

El juego del Twister se compone de las siguientes partes: una lona de 1.5 X 1.5 m y una ruleta tal como se muestran en la Figura 1 y 2 respectivamente.

Vemos como los colores llamativos los motiva a presentarlo a un público exterior. Mencionan De Castro y Ramírez (2016) que *las ilustraciones pueden facilitar el aprendizaje de contenidos matemáticos como la relación parte-todo, la relación uno a muchos desde edades tempranas. Y en este trabajo confirmamos que los jóvenes se sienten atraídos por diseños que apoyan ciertas dinámicas de juego.* Por ejemplo, la ruleta coloreada que se muestra en la Figura 2 puede ser un buen punto de partida para la siguiente dinámica:

- Parte 1. Se gira la ruleta con el propósito de obtener uno de los colores siguientes: rojo, naranja, amarillo, verde, azul, morado.

## EN PRIMARIA

En la Figura 3 se muestra a los participantes de la dinámica realizada en la primaria. Para ellos el color de la ruleta les permitió escoger una tarjeta en la que aparece una operación con fracciones y la respuesta correcta se encontraba dentro de las seis posibilidades del Twister que tienen el color seleccionado pero con sólo una de ellas con la respuesta correcta. En el nivel superior se diseñó una estrategia un poco diferente que aclararemos en la siguiente sección.

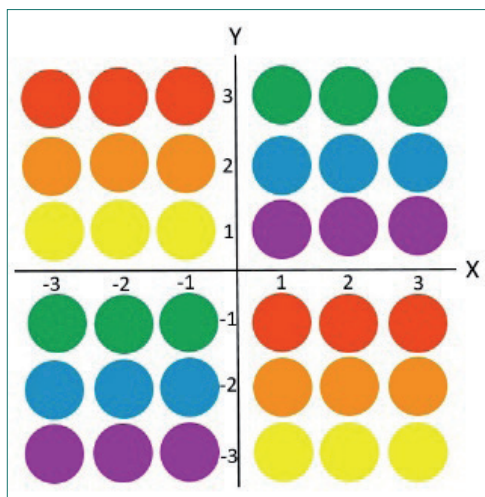


Figura 1. Lona de Twister..



Figura 2. Ruleta de Twister



Figura 3. Grupo participante de la dinámica.

## EN EL INSTITUTO TECNOLÓGICO DEL ISTMO

Según el color obtenido, el participante ubica en el plano de la Figura 1 un punto del mismo color al mismo tiempo que indica su coordenada (el que él elija). Si observamos a la Figura 1 con mayor detenimiento se incluyeron unos ejes cartesianos la cual divide a la lona de forma simétrica (en 4 cuadrantes). En la Figura 4 podemos observar que es la ruleta quien define la dirección del primer paso. En la Figura 5 el alumno se posiciona en el origen y en la Figura 6 delibera cómo realizará su movimiento. En caso de identificar el punto correctamente mencionando sus coordenadas, pasa a la siguiente ronda, en caso contrario será eliminado.



Figura 4. La ruleta define el primer paso.



Figura 5. Listo para iniciar.



Figura 6. En acción.

Es en la Feria de Ciencias del Instituto donde se realizó la dinámica y como dato adicional se registró la participación de 40 estudiantes del nivel superior (organizados en 12 equipos). De los 40 participantes 38 pasaron a la primera ronda, es decir, pudieron ubicar el punto de forma correcta (tomando en cuenta que ellos mismos seleccionaron el punto empleando la ruleta). En la segunda ronda 36 participantes ubicaron correctamente el punto, en la tercera ronda 34, en la cuarta ronda 30, en la quinta 21, en la sexta 12 y en la séptima ronda solo quedaron 6. En dicho reporte podemos ver qué para un alumno de nivel superior no es inmediata la ubicación de un punto (dentro de seis posibilidades, solo 6 personas pudieron ubicar correctamente 6 puntos seguidos) en el plano mediante la coordinación con su propio cuerpo.

## UNA EXPERIENCIA MÁS

Ahora se presenta una experiencia de aplicación de juegos pero en el nivel medio superior, realizado el 26 de Septiembre de 2016. Los alumnos del tercer semestre de la carrera de Ingeniería Industrial del ITI estuvieron gustosos de participar en un maratón (de 10 a.m. a 2 p.m.) de juegos de mesa dirigido a 122 alumnos de primer semestre, 80 alumnos de tercer semestre y 83 alumnos de quinto semestre del Cecypte Plantel 33, Chahuities Oaxaca. En la foto 5 podemos observar un área de juegos acondicionada previamente con 16 mesas y cuatro sillas para cada mesa (Figura 7).

Cada grupo de los tres semestres: primero, tercero y quinto (en equipos de 4 integrantes) entraban por espacio de 45 minutos y volvían a salir dejando el espacio libre para el ingreso de otro grupo. Los contenidos matemáticos de los juegos de mesa fueron: operaciones con fracciones, operaciones algebraicas, resolución de ecuaciones lineales, teorema de Pitágoras, y vectores. En las Fotos 6 y 7 se muestra tantos a los jugadores (alumnos de nivel medio superior) como al instructor y diseñador del juego (alumno de nivel superior).



Figura 7. Un espacio para jugar.



Figura 8. Listos para iniciar.

En el desarrollo de esta experiencia pudimos confirmar lo reportado por Ramirez (2009) y que a su vez motivan la realización de trabajos como éste: se promueve más que una competencia desigual, un trabajo colaborativo tanto a nivel superior como en los niveles básico y medio básico (ver Figura 10). Ya Mesurado (2010) ha reportado que la percepción de que una tarea es desafiante afecta la activación cognitiva durante



Figura 9. Asesorando el juego.

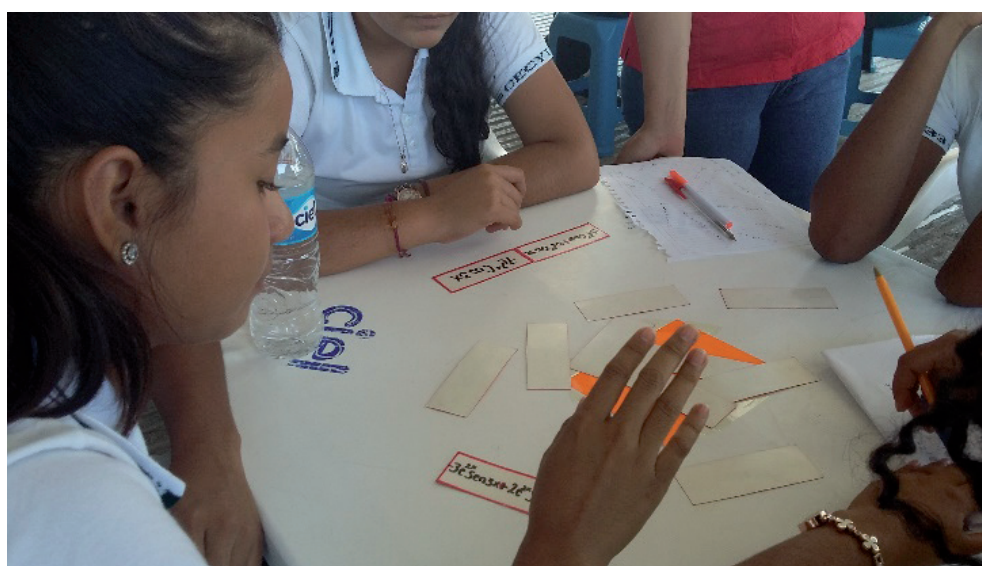


Figura 10. Resolviendo un memorama colaborativamente.

la realización de la misma y lo que pudimos observar en la realización de los juegos es que sí hubo un grado considerable de atención a la tarea. En palabras de Ramirez (2009, p. 144): “Los jóvenes universitarios, juegan, comparten e interactúan con los niños a la vez que afianzan sus conocimientos y se concentran en el aprendizaje obteniendo mejores calificaciones y disminuyendo la mortalidad académica”.

## CONCLUSIONES

Las acciones matemáticas de contar, operar los números y visualizar no sólo se pueden ejercitar en un contexto en la que el único objetivo sea repetir lo que realiza el docente con el Álgebra y la Aritmética desarrollada en el pizarrón. Para pensar soluciones, tener la posibilidad de plantearlas sin temor a ser rechazado y reflexionar sobre lo realizado es necesario contar con un contexto diferente. Si un aspecto fundamental en la formación de los estudiantes en el aprendizaje de la matemática es la necesidad de resolver problemas que aquejan en su contexto inmediato. ¿Qué más inmediato puede existir que nuestro cuerpo? En la experiencia reportada pensar si moverse a la izquierda, derecha, arriba o abajo en el Twister es pensar “con” el cuerpo, y tal como se reporta, entrar a ese juego implica desubicarse (34 de 40 universitarios). En el ámbito académico y escolar es fatal equivocarse pero en el ámbito de juego es aceptable (debido a que tener la seguridad del resultado implicaría tornarse aburrido y nadie jugaría). Así, hemos entrado en un escenario en donde el error no es lo que capta nuestra atención, va implícito, podemos desubicarnos varias veces y volvernos a ubicar siempre y cuando lo intentemos suficientes veces. Reflexionar sobre el tema de evaluación escolar sobre todo en el área matemática puede provocar abrirse a otras formas al ya tradicional examen escrito, se ha mostrado una en la que naturalmente se provee un espacio de posible pérdida y equivocación pero con posibilidad de aprender algo académico.

Hay otros aspectos de la dinámica del Juego que no son ajenos al estudiante: sabe que respetar o no sus reglas con lleva a consecuencias acordadas. Por ejemplo, en la interacción con los 285 alumnos del nivel medio superior la encomienda fue realizar el juego colaborativamente y podemos señalar en respuesta, la tolerancia a las limitaciones de los miembros del equipo y la búsqueda de potencializar las cualidades ya existentes de sus miembros. El tiempo invertido en el juego tanto en su coordinación (4 horas continuas del maratón) como en su elaboración (a lo largo de 8 semanas) no es poco ni tampoco es un trabajo perdido. Es posible considerarse así si ampliamos el concepto de inteligencia (en la que se incluye la inteligencia intrapersonal e interpersonal, por ejemplo) en una donde no es mayormente importante cubrir todos los temas del programa escolar con respecto a la forma de cubrirlo.

Por último, acerca del papel docente. Una componente a considerar de forma permanente ha sido preparar el terreno para que el alumno se sienta relajado individual o colaborativamente. Y aunque en lo descrito no se enfatiza propiamente los temas del programa del nivel superior, sí se abarcan pero su discusión será tema de posteriores estudios.

## REFERENCIAS

- Armstrong, T. (2009). *Las inteligencias múltiples en el aula: guía práctica para educadores*. Barcelona: Paidós Ibérica.
- De Castro, C. y Ramírez, M. (2016). El uso de álbumes ilustrados para potenciar el aprendizaje matemático en las primeras edades. *Épsilon. Revista de Educación Matemática*, 33 (3), 61-80.

- De Guzmán, M. (1984). Juegos matemáticos en la enseñanza. En sociedad canaria de profesores de Matemáticas Isaac Newton (ed.). *Actas de las IV Jornadas sobre Aprendizaje y Enseñanza de las Matemáticas*, Santa Cruz de Tenerife (pp. 4985.)
- Dehesa, N. (2016). El dominó como medio para articular los registros de representación semiótica en contenidos de cálculo. *El Cálculo y su Enseñanza*, VII, 9-22. [http://mattec.matedu.cinvestav.mx/el\\_calculo/index.php?vol=7&index\\_web=13&index\\_mgzne](http://mattec.matedu.cinvestav.mx/el_calculo/index.php?vol=7&index_web=13&index_mgzne)
- Gardner, H. (2013). *Inteligencias múltiples: la teoría en la práctica*. Barcelona: Editorial Paidós.
- Hannaford, C. (2008). *Aprender moviendo el cuerpo. No todo el aprendizaje depende del cerebro*. México: Editorial Pax.
- Mesurado, B. (2010). La experiencia de Flow o Experiencia óptima en el ámbito educativo. *Revista Latinoamericana de Psicología*, 42 (2), 183-192.
- Monereo, C. J. y Pozo I. Competencias para (con) vivir con el siglo XXI. *Cuadernos de Pedagogía Monográfico*, 370, 12-18.
- Ramírez, X. (2009). La lúdica en el aprendizaje de las matemáticas. *Revista del instituto de estudios en educación universidad del norte: Zona Próxima*, 10, 138-145.
- Zorrilla, J. F (2007). *Desarrollo de habilidades verbales y matemáticas 1*, México: Editorial AGO.



## Explicando la diferencia entre perímetro y área con el tangram

Alexander Maz-Machado  
Clara Argudo Osado  
María Rodríguez Baiget  
Universidad de Córdoba

*Resumen:* El uso del tangram en los entornos escolares como una herramienta para mejorar la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas no es nuevo. De todos modos, un tangram se puede explotar de muchas maneras diferentes en el entorno educativo. Este artículo intenta mostrar cómo se puede usar el tangram para explorar la relación entre dos conceptos matemáticos: área y perímetro. Ambos conceptos reciben buena parte de la atención en el currículo de los primeros años de la educación primaria y en adelante, a lo largo de toda la educación obligatoria. Aún así, los estudiantes de todas las edades a menudo muestran confusión o falta de comprensión sobre la diferencia entre el área y el perímetro. Por lo tanto, la conceptualización de área y perímetro, así como los aspectos de cuya relación plantean mayores dificultades en el desarrollo del concepto de los alumnos, precederán la descripción del tangram y el área y el perímetro de sus partes. También se propondrán algunas actividades centradas en el área y el perímetro.

**Palabras Clave:** Tangram, área, perímetro, geometría.

## Explaining the difference between area and perimeter using Tangram

*Abstract:* The use of tangrams in school settings as a tool for enhancing mathematics teaching and learning is not new. All the same, a tangram can be educationally exploited in many different ways. This paper attempts to show how tangrams can be used in exploring the relation between two mathematical concepts: area and perimeter. Both concepts are given a good share of attention in the curriculum from the earlier years of Primary Education and on, all throughout compulsory education. Still, students at all ages often show confusion or lack of comprehension about the difference between area and perimeter. Therefore, conceptualisation of area and perimeter, as well as the aspects of whose relation pose greater difficulties in children's concept development, will

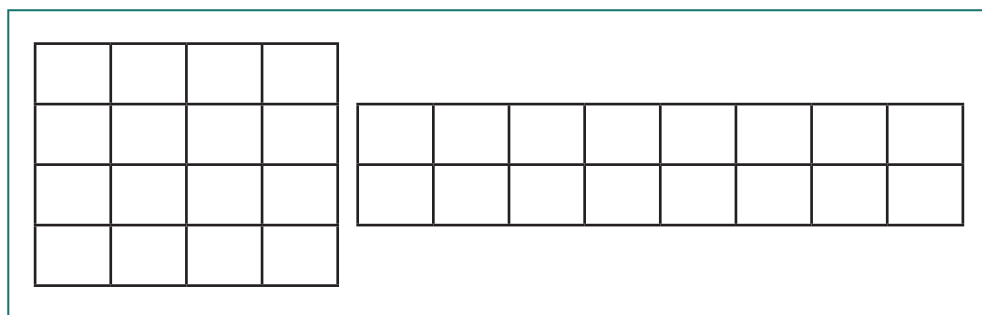


Figura 1. Polígonos con áreas iguales y perímetros distintos.

*precede description of the tangram and the area and perimeter of its parts. Some area and perimeter focused activities will also be proposed.*

**Keywords:** *tangram, area, perimeter, compulsory education, geometry.*

Sabemos que el perímetro de un polígono es el contorno del mismo y su medida expresa una longitud lineal. También que que el área del polígono es la superficie acotada por el perímetro y su medida expresa un valor de superficie. Por lo tanto cada uno se refiere a cosas diferentes.

Estos conceptos se enseñan desde la educación primaria y se utilizan en los demás niveles de educación, tanto en secundaria y bachillerato como en la universidad. Son lo que se considera como conceptos básicos que toda persona debe saber y distinguir. Sin embargo, en muchas ocasiones los alumnos no tienen clara la diferencia y creen que hay algún tipo de relación o dependencia entre ellos.

A modo de ejemplo de esta situación, comentamos que recientemente en un examen de una asignatura de matemáticas a maestros en formación se les pregunto que indicaran si era verdadera o falsa la afirmación: Si el valor del área de dos polígonos es igual, entonces, el valor de sus perímetros también es igual. Sorpresivamente el 68% de los alumnos respondió que era verdad cuando un simple ejemplo permite ver que la falsedad de la afirmación. En la Figura 1, ambos polígonos tienen la misma área  $16u^2$  pero el primero tiene un perímetro de  $16u$  mientras que el del segundo es  $20u$ .

Consideramos que es necesario incidir sobre estos conceptos dada su importancia dentro del currículo establecido para toda la educación obligatoria en España. A nivel nacional, en el Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato se establece, entre otros también relacionados con el tema, el siguiente contenido para Matemáticas de 1º y 2º de ESO: “Cálculo de áreas y perímetros de figuras planas. Cálculo de áreas por descomposición en figuras simples.”; para Primaria, en el Real Decreto 126/2014, de 28 de febrero, por el que se establece el currículo básico de la Educación Primaria es destacable el siguiente estándar de aprendizaje evaluable: “4.4. Utiliza la composición y descomposición para formar figuras planas y cuerpos geométricos a partir de otras.”. No obstante, en normativas autonómicas como la Orden de 14 de julio de 2016, por la que se desarrolla el currículo correspondiente a la Educación Secundaria Obligatoria en la

Comunidad Autónoma de Andalucía, se refiere expresamente la utilización del tangram como estrategia metodológica de la siguiente manera:

el uso de materiales manipulativos como el tangram, los pentominós o los geoplanos favorecen la enseñanza y el aprendizaje del cálculo de longitudes y área (...) Conviene utilizar contextos geométricos y potenciar el aprendizaje de las expresiones algebraicas que son muy necesarias para aplicar fórmulas en el cálculo de áreas y volúmenes.

## EL TANGRAM

El tangram es un juego matemático recreativo en el que se reta a los jugadores a componer una figura, similar a la dada por una silueta, utilizando únicamente y todas y cada una de las piezas del juego. Estas piezas son planas y tienen una forma y tamaño determinados, guardando siempre entre sí ciertas relaciones geométricas. Se trata, por lo tanto, de un rompecabezas de reorganización de piezas. A diferencia de otros puzles de “piezas dentadas” (*jigsaw*, en inglés), en los que cada pieza encaja solamente en una posición concreta, en el tangram hay generalmente más de una manera de completar la figura.

Diversos autores ya ha señalado su potencial como apoyo en la enseñanza de aspectos tan variados como el desarrollo de la creatividad (Piraquive, López-Fernández & Llamas, 2015), el dominio matemático (Tchoshanov, 2011) de las fracciones (Rodríguez & Sarmiento, 2002) y en mayor medida para geometría (Siew, Chong, & Abdullah, 2013; Fernández, 2003).

El tangram chino de 7 piezas o *tans* es el más popular y el que utilizamos para esta experiencia. Sus piezas, con formas geométricas sencillas, son el resultado de descomponer un cuadrado según se indica en la figura 1 (FIGURA): 2 triángulos grandes, 1 triángulo mediano, 2 triángulos pequeños, 1 cuadrado y 1 romboide.

Las perímetros y áreas de las 7 piezas se pueden expresar fácilmente tomando como unidad básica el cateto del triángulo pequeño (TABLA MEDIDAS). El motivo por el que este triángulo pequeño —isósceles y rectángulo— es la unidad más conveniente es que, en primer lugar, la longitud de cada uno de los lados de todas las demás piezas geométricas es múltiplo entero de uno de sus lados: o bien de los catetos ( $1x$ ,  $2x$ ), o bien de la hipotenusa (de nuevo  $1x$ ,  $2x$ , siendo que la hipotenusa es  $\sqrt{2}x$ ). Si estas longitudes de los lados son útiles para calcular los perímetros de las piezas o de las figuras que se compongan utilizándolas, se cumple, en segundo lugar, que el triángulo pequeño es contenido (en área) un número también entero de veces (1, 2, 3 o 4) por cada pieza.

Dadas estas características, los alumnos no necesitan realizar cálculos abstractos o comprender expresiones como las anteriores para establecer relaciones entre las medidas de los lados de las diferentes piezas y figuras geométricas ni entre las medidas de sus áreas. Para ello basta con manipular (rotar, mover, apilar) las piezas y compararlas visualmente (FIGURA VISUAL). Conclusiones del tipo “el lado corto del triángulo grande mide el doble que el lado corto del triángulo pequeño” o “el triángulo mediano tiene un área que es 2 veces el triángulo pequeño” son accesibles para los alumnos de primaria, especialmente para los de mayor edad, y secundaria en base a sus experiencias matemáticas previas en la escuela y en la vida cotidiana. Es en este punto donde reside el especial interés del tangram para la comprensión de las relaciones entre área y perímetro, aunque, en realidad,

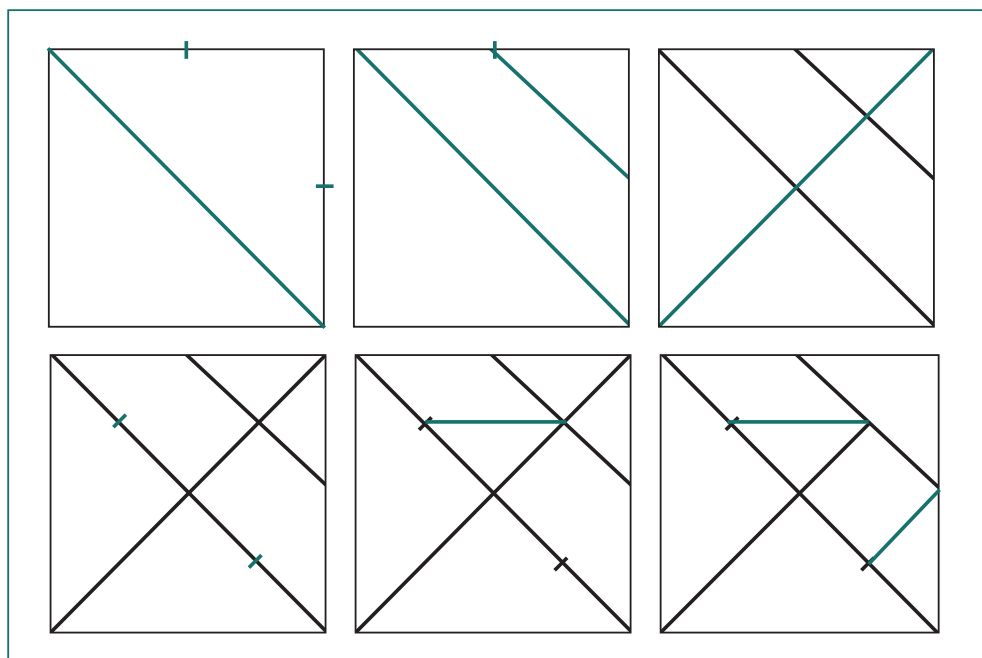
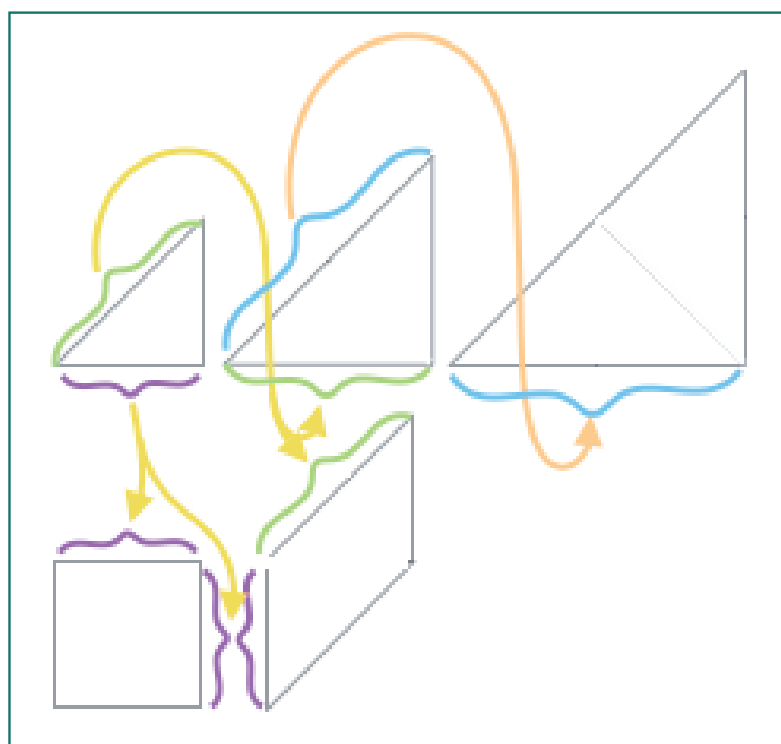


Figura 1.



haciendo esto también se desarrolla o prepara (en el caso de los más pequeños) de forma subyacente el establecimiento de unidades de referencia no convencionales, así como el lenguaje algebraico (2l, 4l, etc.).

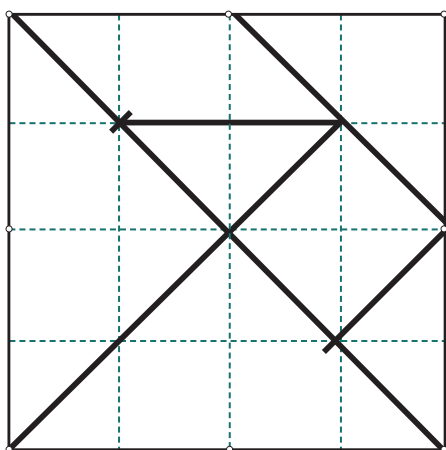
En cualquier caso, las piezas del tangram tienen los siguientes valores (en función del lado del cuadrado, que es también el lado corto del triángulo pequeño):

| Pieza | Nº de piezas iguales | Figura                 | Lados   | Perímetro   | Área                                 |
|-------|----------------------|------------------------|---|---|--------------------------------------|
| 1     | 2                    | Triángulo pequeño (T1) | Lado corto (cate-<br>tos): $l$<br>Lado largo (hipote-<br>nusa): $l\sqrt{2}$   | $P_{T1} = l + l + l\sqrt{2} = 1(2 + \sqrt{2}) = 3,4142l$                    | $S_{T1} = \frac{l^2}{2}$             |
| 2     | 1                    | Triángulo mediano (T2) | Lado corto (cate-<br>tos): $l\sqrt{2}$<br>Lado largo (hipote-<br>nusa): $2l$  | $P_{T2} = 1\sqrt{2} + l\sqrt{2} + 2l = 2l(1 + \sqrt{2}) = 4,8284l = P_R$    | $S_{T2} = 2S_{T1} = l^2$             |
| 3     | 2                    | Triángulo grande (T3)  | Lado corto (cate-<br>tos): $2l$<br>Lado largo (hipote-<br>nusa): $2l\sqrt{2}$ | $P_{T3} = 2l + 2l + 2l\sqrt{2} = 2l(2 + \sqrt{2}) = 6,8284l$                | $S_{T3} = 2S_{T2} = 4S_{T1} = 2l^2$  |
| 4     | 1                    | Cuadrado (Q)           | $l$   | $P_Q = 4l$  | $S_Q = S_{T2} = 2S_{T1} = l^2$       |
| 5     | 1                    | Trapezio (R)           | Lado largo: $l\sqrt{2}$<br>Lado corto: $l$                                    | $P_R = l + l + l\sqrt{2} + l\sqrt{2} = 2l(1 + \sqrt{2}) = 4,8284l = P_{T2}$ | $S_R = S_Q = S_{T2} = 2S_{T1} = l^2$ |

Teniendo en cuenta estos valores, se calcula que, siempre que estén en juego todas las piezas del tangram, la figura formada tendrá un área total de 8 veces el cuadrado del lado corto del triángulo pequeño:

$$S_{TOTAL} = 2 \left( \frac{l^2}{2} \right) + l^2 + 2 (2l^2) + l^2 + l^2 = 8l^2;$$

resultado al que los alumnos podrían también llegar a partir de la propia construcción de las figuras del tangram, aplicando conocimientos básicos Educación Secundaria como es el teorema de Pitágoras, o utilizando como unidad el área del cuadrado (Q), es decir, contando cuántas veces cabe un cuadrado como el de la pieza (*tan*) en el cuadrado de partida mediante la manipulación de las piezas y la comparación visual:



Las áreas de las piezas se relacionan entre sí de forma que todas son el doble o el cuádruple que la del triángulo pequeño:

$$S_R = S_Q = S_{T2} = 2S_{T1} = \frac{1}{2} S_{T3}$$

Sin embargo, las razones entre los perímetros de las piezas, a diferencia de las de las áreas, no se corresponden todas con números tan sencillos. Es por ello que puede ser más interesante desde un punto de vista pedagógico, especialmente en primaria, pedir a los alumnos que ordenen tanto áreas como perímetros de mayor a mayor, pues este es un ejercicio que les resulta familiar desde los primeros cursos y en base al cual también puede intuirse la independencia entre área y perímetro:

$$P_{T1} < P_{T2} = P_R < P_Q < P_{T3}$$

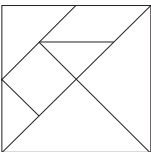
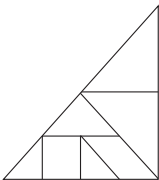
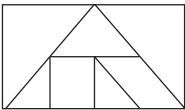
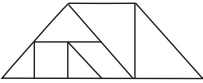
$$S_{T1} < S_{T2} = S_R < S_Q < S_{T3}$$

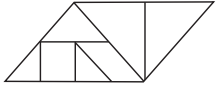
Así pues, antes siquiera de pasar a construir figuras, los alumnos ya podrían observar y/o medir las propias piezas del tangram para, en primer lugar, practicar y familiarizarse con el tangram y las tareas de medición para el trabajo con figuras compuestas por varias piezas y, en segundo, tantear las relaciones entre área y perímetro en sí, que es el objetivo de esta experiencia.

## ACTIVIDAD

Se entregará un juego de Tangram por parejas (si la actividad se realiza en primaria) o individualmente (si es en secundaria).

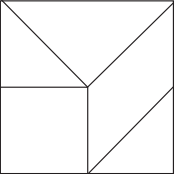
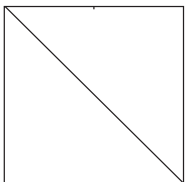
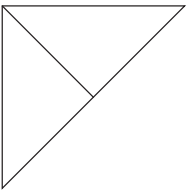
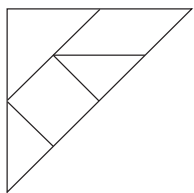
El alumno debe construir las figuras de la primera columna y luego ir completando las filas. Para ello deberán medir y hallar el perímetro y el área de cada una. Los alumnos de secundaria pueden además --o en lugar de esto-- expresar perímetro y área en función del lado del triángulo pequeño. En cualquier caso, las expresiones de las tablas siguientes serán aplicables a las medidas de todos los tangram similares al del modelo descrito en este trabajo, sea cual fuere su tamaño. En las tablas presentadas a los alumnos, se dejarán en blanco las columnas E, F y G.

| A  | B            | C          | D   | E   | F                           | G  |
|----|--------------|------------|---|---|-----------------------------|--|
| Nº | Nº de piezas | Figura     |   | Valor del Perímetro                             | Formula del área            | Valor del área   |
| 1  | 7            | Cuadrado   |   | $P_1 = l(2 + 7\sqrt{2}) = 11,8995l$             | $S_1 = b \cdot h$           | $S_1 = (2l\sqrt{2})^2 = 8l^2$                                      |
| 2  | 7            | Triángulo  |  | $P_2 = 4l(2 + \sqrt{2}) = P_4 = P_5 = 13,6568l$ | $S_2 = \frac{b \cdot h}{2}$ | $S_2 = \frac{4l \cdot 4l}{2} = 8l^2$                               |
| 3  | 7            | Rectángulo |  | $P_3 = 12l$                                     | $S_3 = b \cdot h$           | $S_3 = 4l \cdot 2l = 8l^2$   |
| 4  | 7            | Trapezio   |  | $P_4 = 4l(2 + \sqrt{2}) = P_2 = P_5 = 13,6568l$ | $S_4 = h \frac{a+b}{2}$     | $S_4 = h \frac{2l+6l}{2} = h \cdot 4l$<br>$2l \frac{8l}{2} = 8l^2$ |

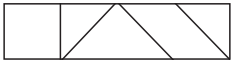
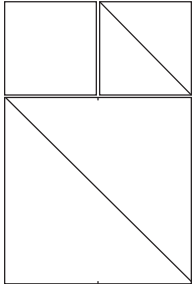
| A  | B            | C             | D   | E  | F                 | G                               |
|----|--------------|---------------|---|--|-------------------|---------------------------------|
| Nº | Nº de piezas | Figura        |   | Valor del Perímetro                                  | Formula del área  | Valor del área                  |
| 5  | 7            | Paralelogramo |  | $P_5 = 4l(2 + \sqrt{2}) =$<br>$P_2 = P_4 = 13,6568l$ | $S_5 = b \cdot h$ | $S_5 = 4l \cdot 2l$<br>$= 8l^2$ |

Se les pregunta a los alumnos qué tienen en común todas las piezas. Y qué tienen diferente (en relación con forma y área). ¿Que puedes decir sobre el área y el perímetro?

Luego les pedimos que repartan las 7 piezas de un tangram para construir pares de figuras iguales:

| A  | B            | C            | D   | E  | F                                | G                                |
|----|--------------|--------------|---|--|----------------------------------|----------------------------------|
| Nº | Nº de piezas | Figura       |   | Valor del Perímetro                        | Formula del área                 | Valor del área                   |
| 6  | 7            | 2 cuadrados  |   | $P_{Q1} = l(2 + 7\sqrt{2}) =$<br>$11,899l$ | $S_Q = b \cdot h$                | $S_{Q1} = b \cdot h$<br>$= 8l_2$ |
|    |              |              |  | $P_{Q2} = l(2 + 7\sqrt{2}) =$<br>$11,899l$ |                                  |                                  |
| 7  | 7            | 2 triángulos |  | $P_{T1} = 4l(2 + \sqrt{2}) =$<br>$13,66l$  | $S_T =$<br>$\frac{b \cdot h}{2}$ | $S_{T1} = 8l_2$                  |
|    |              |              |  | $P_{T2} = 4l(2 + \sqrt{2}) =$<br>$13,66l$  |                                  |                                  |

¿Y estas figuras? ¿Qué tienen en común y qué tienen diferente?

| A  | B            | C            | D   | E   | F                 | G                         |
|----|--------------|--------------|---|---|-------------------|---------------------------|
| Nº | Nº de piezas | Figura       |   | Valor del Perímetro                             | Formula del área  | Valor del área            |
| 8  | 5            | Rectángulo A |  | $P_6 = l + l + l + 2l + 2l + 2l + l = 10l$      | $S_6 = b \cdot h$ | $S_6 = 2l \cdot 3 = 6l^2$ |
| 9  | 5            | Rectángulo B |  | $P_7 = l + l + l + l + l + l + l + l + l = 10l$ | $S_7 = b \cdot h$ | $S_7 = 4l \cdot l = 4l^2$ |

Podrías construir otras dos figuras que tengan igual área pero diferente valor de su perímetro?

## CONCLUSIONES

Esta comprobado que el Tangram permite visualizar muchos conceptos geométricos y pro tanto es un recurso útil para la enseñanza de la geometría. El hecho de poder manipular, observar y realizar mediciones de las piezas del Tangram en el aula facilita que los alumnos comprendan e interioricen los conceptos de perímetro y de área permitiéndoles distinguirlos. En la actividad propuesta se fomenta que sean capaces de encontrar ejemplos y contraejemplos para la pregunta inicial del artículo respecto a ¿Si el valor del área de dos polígonos es igual, entonces, el valor de sus perímetros también es igual?.

## REFERENCIAS

- Fernández, M. T. (2003). Geometría para futuros profesores de primaria: experiencias con el tangram chino. *SUMA*, 42, 13-22.
- Orden de 14 de julio de 2016, por la que se desarrolla el currículo correspondiente a la Educación Secundaria Obligatoria en la Comunidad Autónoma de Andalucía, se regulan determinados aspectos de la atención a la diversidad y se establece la ordenación de la evaluación del proceso de aprendizaje del alumnado.

- Piraquive, C. J., López-Fernández, V., & Llamas, F. (2015). El uso del Tangram como estrategia de aprendizaje para el desarrollo de la creatividad y las inteligencias múltiples. *REI-DOCREA*, 4, 74-84.
- Real Decreto 126/2014, de 28 de febrero, por el que se establece el currículo básico de la Educación Primaria.
- Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato.
- Rodríguez, C. I., & Sarmiento, A. (2002). El tangram y el plegado: dos recursos pedagógicos para aproximarse a la enseñanza de las fracciones propias. *Revista EMA*, 7(1), 84-100.
- Siew, N. M., Chong, C. L., & Abdullah, M. R. (2013). Facilitating students' geometric thinking through van hiele's phase-based learning using Tangram. *Journal of Social Sciences*, 9(3), 101.
- Tchoshanov, M. (2011). Building students' mathematical proficiency: connecting mathematical ideas using the Tangram. *Learning and Teaching Mathematics*, 2011(10), 16-23

## Una herramienta de análisis de los accesos al número propuestos en los libros de texto de infantil

Pascual D. Diago

David Arnau

Universitat de València

(Dpto. Didàctica de la Matemàtica)

**Palabras clave:** Educación Infantil, número natural, accesos escolares, libros de texto, currículum

**Resumen:** Presentamos una descripción de los accesos al número natural en educación infantil y de cómo secuencia cada uno los distintos usos del número. Diseñamos una herramienta que permite analizar los accesos al número propuestos en libros de texto. Presentamos el análisis de dos textos de la etapa en la que los libros seguían las directrices curriculares correspondientes a diferentes épocas. El objetivo del trabajo es ofrecer a los maestros de infantil una propuesta de cómo evaluar la adecuación de los libros de texto a las disposiciones curriculares relativas a la enseñanza del número en el segundo ciclo de Educación Infantil.

## An analysis tool for the number access proposed in early childhood textbooks

**Abstract:** We present a description of the accesses to the natural number in Early Childhood Education and how each one sequences the different uses of the number. We design a tool to analyze the accesses to the number proposed in textbooks. In this paper we present the analysis of two texts from the period in which books followed the curricular guidelines corresponding to different periods. The objective is to offer teachers a proposal on how to evaluate the adequacy of textbooks to the curricular provisions related to number teaching in the second cycle of Early Childhood Education.

**Keywords:** Early Childhood Education, natural number, scholar access, textbooks, curriculum

## INTRODUCCIÓN Y OBJETIVOS

La enseñanza del número y la aritmética básica en educación infantil son dos de los pilares más importantes sobre los que se apoyan las matemáticas en la etapa de educación infantil. Cómo abordar esta enseñanza ha sido fuente de fuertes controversias a lo largo del siglo pasado y ha dado origen a abundante literatura (Baroody, 2004; Beth y Piaget, 1961/1968; Fuson, 2004; Kilpatrick, Swafford, y Swafford, 2001; Sarama y Clements, 2009; Steffe y Johnson, 1971). Básicamente ha dado lugar a dos accesos escolares al número: el acceso ordinal y el acceso cardinal. Sin embargo, también han surgido propuestas, como las de Piaget y colaboradores (véase, p. ej., Beth y Piaget, 1961/1968) que planteaban la imposibilidad de enseñar el número en educación infantil.

Al menos en el caso de nuestro sistema educativo esto ha dado lugar al planteamiento de instrucciones curriculares situadas en los extremos de un continuo producidas por las constantes reformas promovidas por las instituciones.

Es habitual señalar la resistencia por parte de maestros a los cambios metodológicos propuestos por las directrices curriculares. En ocasiones se apunta a las editoriales como generadores de estas inercias al no incorporar a sus propuestas las novedades curriculares planteadas. En el caso de los textos de la enseñanza del número en la educación infantil, y como consecuencia de los ya señalados cambios curriculares de las últimas décadas, encontramos un marco inmejorable en el que poder analizar estas inercias. Esto es así porque, como se pondrá de manifiesto en los apartados siguientes, secuencias de enseñanza basadas en un acceso cardinal u ordinal deberían tener una organización radicalmente distinta.

En este manuscrito, nos plantemos el objetivo de diseñar una herramienta que nos permita determinar la idoneidad de las secuencias de actividades numéricas planteadas en virtud del acceso escolar al número natural vigente en las instrucciones curriculares del momento en que se publicó el libro de texto. Además, una vez diseñada la herramienta, pretendemos comparar la distribución del contenido en dos manuales editados en momentos en los que las instrucciones curriculares eran diametralmente opuestas. En concreto compararemos un manual de la época de los Programas Renovados (MEC, 1981) con un manual del final de la etapa LOGSE (MEC, 1991).

## ANTECEDENTES Y MARCO TEÓRICO

### Usos y contextos del número

Como indica Freudenthal (1973) el singular *concepto de número* es engañoso pues depende del punto de vista desde el que se estudia o se usa. El uso que hacemos de los números depende de cuál es la finalidad de la tarea propuesta. Son varios los autores que establecen listados de usos del número (véase, p. ej., Castro, Rico y Castro, 1988, Freudenthal, 1973; Fuson 1988; Gómez, 1988), los cuales están ligados directamente con contextos o situaciones del mundo que nos rodea. Así, si nuestra intención es dar cuenta de los distintos usos cotidianos que podemos hacer del número, nos encontraremos con

el número para contar, el número para expresar numerosidad, el número para medir, el número para ordenar, el número como código, etc.

Para el análisis que pretendemos conviene que definamos los contextos a los que atenderemos en este estudio, ya que son los que aparecen usualmente en los libros de texto de infantil como consecuencia de las limitaciones del medio escrito:

- El contexto cardinal es aquel en el que los números se usan con la intención de describir la cantidad de elementos que integran una agrupación de objetos.
- El contexto ordinal es aquel en el que los números se utilizan con la intención de indicar la posición relativa de un objeto con respecto a otros objetos previamente ordenados.
- El contexto secuencia es aquel en el que los números se utilizan en una situación de recitado de la secuencia numérica en la que debemos emitir la lista de números de acuerdo a unas instrucciones de inicio y fin. Este uso podemos calificarlo de artificial pues aparece ligado a situaciones sociales (p. ej., demostrar la habilidad del niño en una reunión familiar) o escolares (p. ej., fomentar la elaboración de la secuencia numérica por parte del maestro). Conviene no confundir este contexto con el de contaje (en el que se usa la secuencia numérica al mismo tiempo que se realiza las acciones de etiquetaje y partición sobre los elementos de un conjunto) el cual es difícilmente observable aislado en una situación escolar.

### **Accesos escolares al número natural**

Desde el punto de vista de la enseñanza del número en la educación infantil, el maestro ha de dotar de herramientas al niño para que este puede matematizar el entorno natural, social y escolar. Básicamente existen dos técnicas para abordar las situaciones en las que debe usarse el número: la acción de contar y la acción de coordinar. La organización de la enseñanza alrededor de estas dos técnicas da lugar a los dos accesos escolares principales al número natural (Puig y Cerdán, 1988): el acceso ordinal y el acceso cardinal. El primero de estos dos accesos estará organizado por la actividad de contar y tendría su soporte formal en la construcción del número según Peano. El acceso cardinal, por su parte, estará organizado por la actividad de coordinar conjuntos y respondería a la construcción del número natural según Cantor.

Como señala en Freudenthal (1983) conviene distinguir entre el acceso al número como concepto y el contenido matemático del concepto de número. Esto es crucial en la escuela por las características de las actividades que se realizan que se enfocarán a usos distintos del número. Así, desde un punto de vista fenomenológico, decidir un acceso cardinal o un acceso ordinal tiene como consecuencia una distinta organización del orden en que se presentarán los contextos en los que aparecerán fenómenos que podrán ser organizados con los instrumentos matemáticos de los que dispone el estudiante.

Así, en el acceso ordinal se dará importancia a la idea de orden ligada a la cadena numérica, y las actividades iniciales se desarrollarán en un contexto de secuencia y de conteo, para después, poder acceder a los demás usos del número (ordinal, cardinal y medida). En cambio, en el acceso cardinal se dará importancia a la idea de numerosidad que podrá ser abordada desde la actividad de coordinar conjuntos. En este caso se partirá

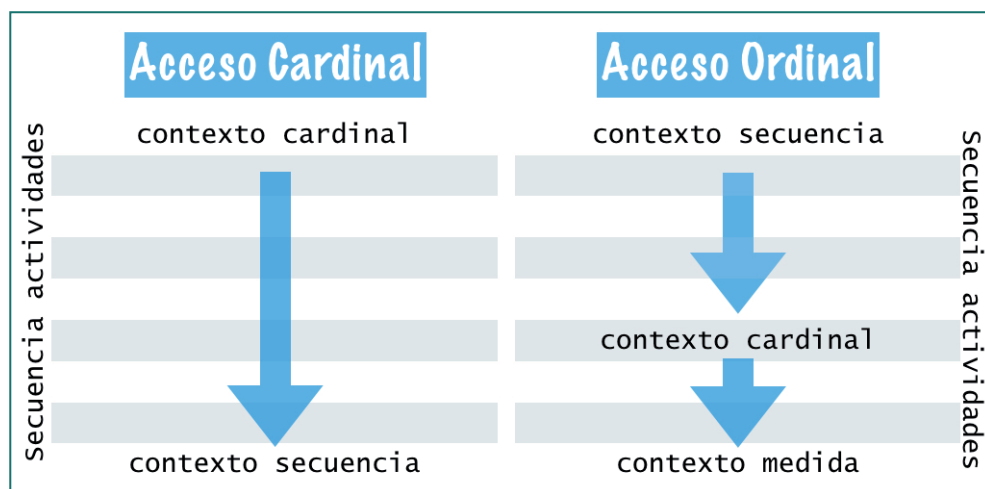


Figura 1. Secuenciación de contextos para las actividades planteadas por dos textos de diferente acceso.

de actividades desarrolladas en contextos cardinales, pasando por medida, y llegando al final a contextos ordinal y de secuencia. En la Figura 1 describimos gráficamente esta situación en dos secuencias de actividades según planteen un acceso cardinal u ordinal al número.

### Los accesos propuestos desde los currículos

Las instrucciones curriculares contenidas en los Programas Renovados (Ministerio de Educación y Ciencia, 1981) estaban fuertemente influidos por las ideas de Piaget. De hecho, las instrucciones se agrupaban bajo el epígrafe de *Experiencias Prenoméricas*, reflejando la máxima piagetiana de que el número no podía (o debía) ser enseñado en educación infantil. Desde esta perspectiva la secuencia numérica no solo no es la actividad central, sino que además debía ser evitada pues podía ofrecer falsas apreciaciones sobre la capacidad real del niño a la hora de comprender la idea de número natural (Beth y Piaget, 1961/1968). Esto llevó a que los libros de texto dirigidos a la etapa de educación infantil estuvieran repletos de actividades que pretendían desarrollar las estructuras previas al número. A saber: las estructuras de clasificación y seriación. Sin embargo, la coherencia con la teoría se vio comprometida en el propio currículo por la incorporación de subapartados en los que se planteaba la enseñanza del número. En los libros de texto de la época, esto se reflejó en la presencia de actividades numéricas fuertemente ligadas a las actividades de coordinar conjuntos.

La llegada de la LOGSE (Ministerio de Educación y Ciencia, 1991) supuso una revolución en la forma de enseñar el número en educación infantil pues se orientó hacia un acceso ordinal en el que la enseñanza y uso de la secuencia numérica pasaba de proscribita a ser un elemento central.

## DISEÑO EXPERIMENTAL

Para el estudio que presentamos analizaremos los contextos numéricos de las actividades presentes en dos libros de texto pertenecientes a épocas con disposiciones curriculares diferentes. El objetivo será determinar cómo estaban organizadas las secuencias de actividades para ver si adaptaban a las organizaciones teóricas que se derivarían de los accesos escolares planteados en cada una de las épocas.

Para llevar a cabo este análisis contextualizado según el currículum del momento se han elegido los libros de Lázaro (1988) perteneciente a la etapa de los Programas Renovados (Ministerio de Educación y Ciencia, 1981) y de Uguina (2004), perteneciente a la época LOGSE (Ministerio de Educación y Ciencia, 1991).

Con estas premisas planteamos un estudio de nivel 1 (Puig, 1996) de los mencionados libros de texto, en el cual analizaremos el enunciado de las actividades propuestas, es decir, no entraremos en disquisiciones sobre cómo se enfrenta el alumno a la tarea a la hora de resolverla. La metodología seguida consiste en la clasificación de actividades por la tarea que se plantea y el uso del número asociado a partir de la pregunta que se hace en el enunciado de la actividad. De este modo, enmarcamos cada actividad en uno u otro contexto de los previamente nombrados (cardinal, ordinal o secuencia).

Con el fin de robustecer el análisis definimos una herramienta capaz de dar cuenta del tipo de acceso propuesto en función de los contextos presentes en las actividades. Así, esta herramienta se concretará en la definición de dos parámetros que darán cuenta de la disposición de las actividades de contexto cardinal, por un lado, y de contexto secuencia, por otro. Esto es así porque dichos contextos son claros indicadores (según su aparición en la secuencia de actividades) de los accesos escolares más comunes (cardinal y ordinal).

Para cada actividad secuenciada en el libro de texto se toma en consideración su orden de aparición, es decir, la posición que ocupa en la secuencia ordenada de actividades. A continuación, según lo descrito anteriormente, se le asigna uno de los contextos. Si la actividad no responde a ninguno de ellos o se enmarca en otro contexto se descarta.

Definimos el *parámetro cardinal* como:

$$P_C = \frac{\text{Si posición que ocupa la actividad de contexto cardinal } i}{\text{total actividades de contexto cardinal}}$$

De modo similar, definimos el *parámetro secuencia* como:

$$P_S = \frac{\text{Si posición que ocupa la actividad de contexto secuencia } i}{\text{total actividades de contexto secuencia}}$$

Según estas definiciones, en un libro cuya propuesta sea un acceso cardinal se espera obtener un valor más bajo del parámetro  $P_C$  para las actividades de contexto cardinal, ya que estas aparecerán al inicio de la secuencia de actividades. En cambio, si la propuesta es de acceso ordinal, el valor  $P_C$  será mucho más alto, pues primarían en las primeras

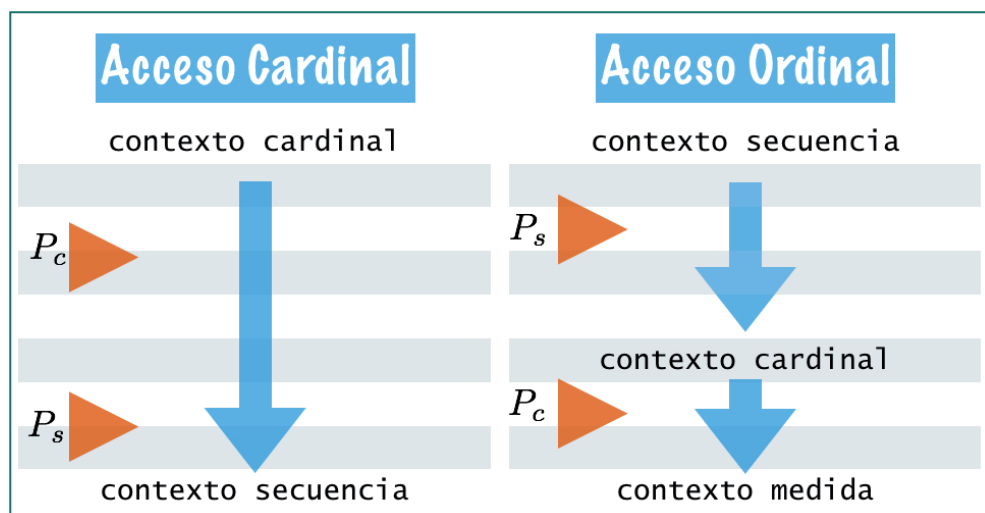


Figura 2. Valores esperados para los parámetros cardinal y secuencia según el acceso que prime en el texto.

posiciones las actividades del contexto secuencia y posteriormente aparecerían las actividades de contexto cardinal.

De forma análoga, en un libro cuya propuesta sea de acceso cardinal se espera obtener un valor más alto del parámetro  $P_s$ , pues las actividades de contexto secuencia aparecerán hacia el final del libro. En una propuesta ordinal el valor de  $P_s$  deberá ser menor, pues las actividades del contexto secuencia se plantearán al inicio del libro de texto. Gráficamente los valores esperados para cada uno de los parámetros, según el acceso propuesto, pueden describirse como se detalla en la Figura 2.

Con todo, planteamos la hipótesis de investigación siguiente: si los contextos se adaptaran a la trayectoria teórica propuesta en el acceso escolar vigente en cada momento, las actividades de contexto cardinal y, sobre todo, contexto secuencia se ubicarán en posiciones distintas dentro del texto, con lo que los valores  $P_c$  y  $P_s$  tendrían que ser significativamente diferentes para cada uno de los libros analizados. En las Figuras 3 y 4 mostramos algunos ejemplos de las actividades analizadas en sendos libros de texto.

## RESULTADOS

Los resultados del análisis de ambos libros los mostramos en las Tablas 1 y 2. En ellas, se muestra el número de actividades numéricas correspondientes a cada texto clasificadas según su contexto. Se han calculado los porcentajes sobre las actividades numéricas y sobre el total de actividades del libro. La propuesta de Lázaro (1988) cuenta con un total de 79 actividades, siendo 46 de ellas de carácter numérico. Para la propuesta de Uguina (2004), el número total de actividades es de 72, siendo 31 de ellas de carácter numérico.

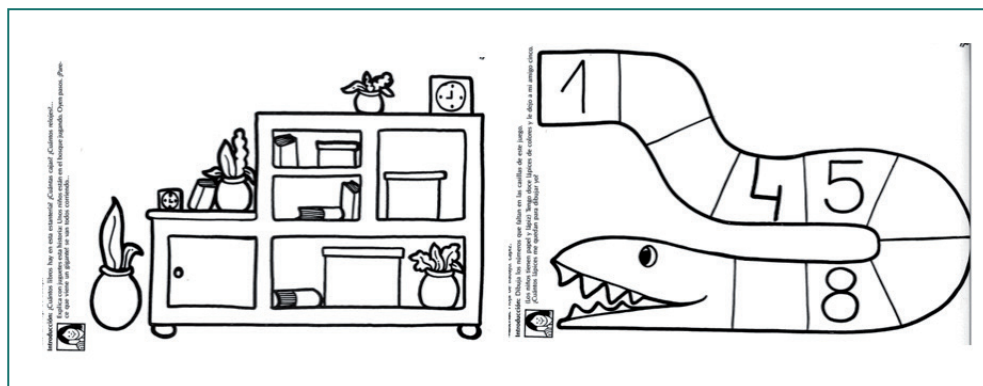


Figura 3. Dos ejemplos de actividades del texto de Lázaro (1988).

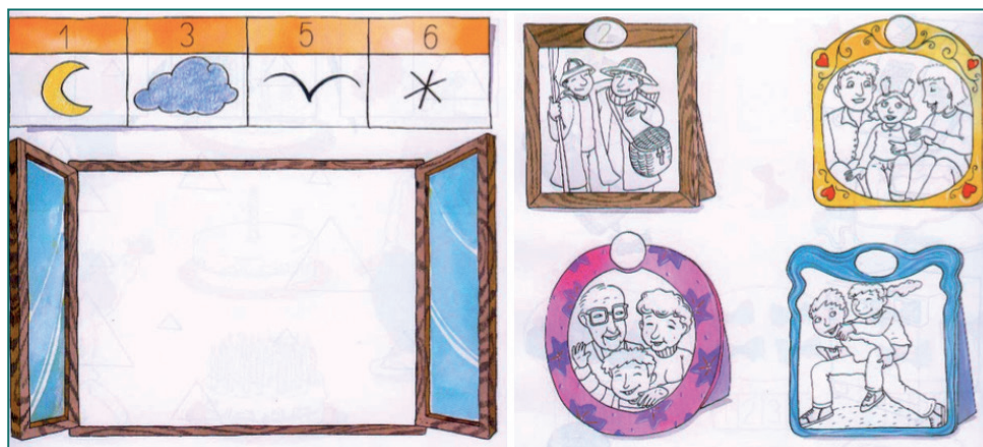


Figura 4. Dos ejemplos de actividades del texto de Uguina (2004).

Tabla 1. Resultados del análisis del texto de Lázaro (1988).

|                  | Contextos |         |           |
|------------------|-----------|---------|-----------|
|                  | Cardinal  | Ordinal | Secuencia |
| Núm. actividades | 35        | 5       | 6         |
| % total          | 44,30%    | 6,33%   | 7,59%     |
| % act. numéricas | 76,10%    | 10,87%  | 13,04%    |

Tabla 2. Resultados del análisis del texto de Uguina (2004).

|                  | Contextos |         |           |
|------------------|-----------|---------|-----------|
|                  | Cardinal  | Ordinal | Secuencia |
| Núm. actividades | 16        | 1       | 14        |
| % total          | 22,22%    | 1,39%   | 19,44%    |
| % act. numéricas | 51,61%    | 3,23%   | 45,16%    |

Una vez calculados los parámetros cardinales y secuencia para cada uno de los libros, basados en los datos mostrados en las Tablas 1 y 2, y normalizándolos (pues ambos libros tienen diferente número de actividades) se obtiene el siguiente resultado para los parámetros cardinal y secuencia de cada uno de los textos:

Tabla 3. Comparativa de los parámetros cardinal y secuencia obtenidos para ambos libros.

|       | Lázaro (1988) | Uguina (2004) |
|-------|---------------|---------------|
| $P_C$ | 49,98%        | 52,17%        |
| $P_S$ | 75,74%        | 73,71%        |

## CONCLUSIONES

Como se observa en la Tabla 3, los valores de los parámetros cardinal y secuencia son muy similares pese a corresponder a textos redactados en dos épocas con enfoques curriculares muy distintos. En ambos la secuencia de actividades presente en el texto parece configurada para un acceso cardinal al número natural.

Esta configuración puede estar influida por las limitaciones de los estudiantes a la hora de representar e identificar los números. Como consecuencia de esto, el uso de fichas puede dar pie a utilizar, principalmente, un contexto cardinal. Sin embargo, la presencia de la representación simbólica de números en ambos textos es habitual.

La herramienta diseñada permitirá a los maestros estudiar la secuenciación de contextos en las actividades relacionadas con el acceso propuesto para la introducción del número natural en Educación Infantil.

## REFERENCIAS

Baroody, A. J. (2004). The Developmental Bases for Early Childhood Number and Operations Standards. In D. H. Clements, J. Sarama, & A.-M. DiBiase (Eds.), *Engaging Young*

- Children in Mathematics: Standards for Early Childhood Mathematics Education* (pp. 173–219). Mahawah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Beth, E. W., y Piaget, J. (1968). *Relaciones entre la lógica formal y el pensamiento real*. Madrid: Ciencia Nueva. [Título de la edición original “Epistemologie mathématique et psychologie. Essai sur les relations entre la logique formelle et la pensée réelle”. Año de publicación 1961. Traducción de Víctor Sánchez de Zabala].
- Castro, E., Rico, L., y Castro, E. (1988). *Números y operaciones*. Fundamentos para una aritmética escolar. Madrid: Síntesis.
- Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an educational task*. Dordrecht: Reidel Publishing Company.
- Freudenthal, H. (1983). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Fuson, K. C. (1988). *Children’s counting and concepts of number*. New York: Springer-Verlag.
- Fuson, K. C. (2004). Pre-K to grade 2 goals and standards: Achieving 21st century mastery for all. In D. H. Clements, J. Sarama, & A. M. DiBiase (Eds.), *Engaging Young Children in Mathematics: Standards for Early Childhood Mathematics Education* (pp. 105 – 148). Mahawah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Gómez, B. (1988). *Numeración y Cálculo*. Madrid: Síntesis.
- Kilpatrick, J., Swafford, J., y Swafford, J. (2001). *Adding it up: Helping children learn mathematics*. Washington, DC: National Academy Press.
- Lázaro, C. G. (1988). *Pensar y calcular. Nivel 5 años*. Madrid: H. Seco Olea Ediciones.
- Ministerio de Educación y Ciencia. (1981). *Programas Renovados de Educación Preescolar y Ciclo Inicial*. Madrid: Editorial Escuela Española, S. A.
- Ministerio de Educación y Ciencia. (1991). Real Decreto 1333/1991, de 6 de septiembre, por el que se aprueba el Currículo de la Educación Infantil. *BOE*, 216, 29716–29726.
- Puig, L. (1996). *Elementos de resolución de problemas*. Granada: Comares.
- Puig, L., y Cerdán, F. (1988). *Problemas aritméticos escolares*. Madrid: Síntesis.
- Sarama, J., y Clements, D. H. (2009). *Early childhood mathematics education research: Learning trajectories for young children*. New York: Routledge.
- Steffe, L. P., y Johnson, D. (1971). Problems-Solving Performances of First-Grade Children. *Journal for Research in Mathematics Education*, 2, 179–181.



## RINCÓN “SAPERE AUDE”... ¿resolviendo problemas?

Sixto Romero

*Escuela Técnica Superior de Ingeniería*

*Universidad de Huelva*

*sixto@uhu.es*

### INTRODUCCIÓN

#### Matemáticas: ¿dónde comenzó todo?

Hoy seguimos tratando la evolución de los conceptos e ideas matemáticas según su desarrollo histórico. En realidad, las matemáticas son tan antiguas como la propia humanidad: en los diseños prehistóricos de cerámica, tejidos y en las pinturas rupestres se pueden encontrar evidencias del sentido geométrico y del interés en figuras geométricas. Los sistemas de cálculo primitivos estaban basados, seguramente, en el uso de los dedos de una o dos manos, lo que resulta evidente por la gran abundancia de sistemas numéricos en los que las bases son los números 5 y 10.

Si Diofanto, Euclides, Arquímedes de Siracusa, Apolonio de Perge,...entre otros centraron la introducción histórica del Rincón anterior, hoy vamos a insistir sobre las Matemáticas en la antigüedad, concretamente las Matemáticas en Grecia.

Los griegos tomaron elementos de las matemáticas de los babilonios y de los egipcios. La innovación más importante fue la invención de las matemáticas abstractas basadas en una estructura lógica de definiciones, axiomas y demostraciones. Según los cronistas griegos, este avance comenzó en el siglo VI a.C. con Tales de Mileto y Pitágoras de Samos. A ellos, brevemente nos referiremos.

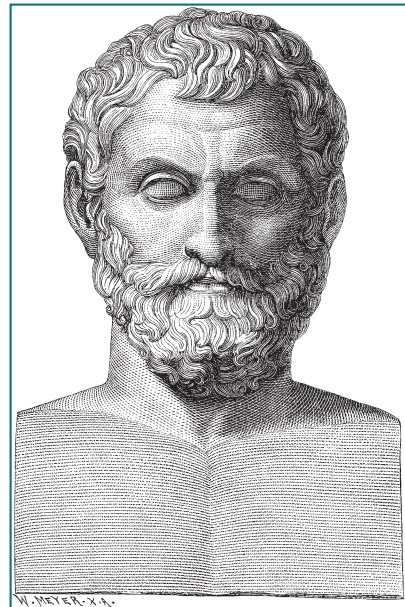


Fig. 1. Tales de Mileto.

[https://en.wikipedia.org/wiki/Thales\\_of\\_Miletus](https://en.wikipedia.org/wiki/Thales_of_Miletus)

**Tales de Mileto**, (siglo VI a. C), filósofo reconocido como uno de los legendarios Siete Sabios, o “Sophoi”, de la antigüedad. Es recordado principalmente por su cosmología basada en el agua como la esencia de toda la materia, con la Tierra como un disco plano flotando en un vasto mar. El historiador griego Diógenes Laërtius (siglo III d. C), citando a Apolodoro de Atenas (140 a. C), colocó el nacimiento de Tales durante la 35ª Olimpiada (aparentemente un error de transcripción, debería leerse la 39ª Olimpiada, 624 a. C su muerte en la 58ª Olimpiada (c.548-c.545 a. C.) a la edad de 78 años.

No existen escrituras de Tales que sobrevivan, y no existen fuentes contemporáneas. Por lo tanto, sus logros son difíciles de evaluar. La inclusión de su nombre en el canon de los legendarios Siete Sabios condujo a su idealización, y se le atribuyeron numerosos trabajos, muchos de ellos sin duda espurios, como “Conócete a ti mismo” y “Nada en exceso”. Para el historiador Herodoto (hacia el año c. 484-c. 425 a. C), Thales fue un estadista práctico que abogó por la federación de las ciudades jónicas de la región del Egeo. El poeta y erudito Calímaco (c.305-c.240 a. C) registró la creencia tradicional de que Thales aconsejaba a los navegantes que se orientaran por la Osa Menor en lugar de a la Osa Mayor ambas constelaciones prominentes en el norte Hemisferio. También se dice que usó su conocimiento de la geometría para medir las pirámides egipcias y calcular la distancia desde la orilla de los barcos en el mar. Aunque tales historias son probablemente apócrifas, ilustran la reputación de Thales. El poeta y filósofo Jenófanes (hacia c. 560-c.478 a. C) afirmó que Thales predijo el eclipse solar que detuvo la batalla entre el rey Alyattes de Lidia (Anatolia, actual Turquía) (que reinó hacia c.610-c.560 a. C) y el rey Ciaxares de Media (Irán) (c. 625 –c.585 a. C), evidentemente el 28 de mayo de 585. Los eruditos modernos creen, sin embargo, que no podría haber tenido el conocimiento para predecir con precisión ni la localidad ni el carácter de un eclipse. Por lo tanto, su hazaña fue aparentemente aislada y solo aproximada; Heródoto habló de su predicción del año solamente. Que el eclipse fue casi total y ocurrió durante una batalla crucial contribuyó considerablemente a su exagerada reputación como astrónomo.

A Thales se le atribuye el descubrimiento de cinco teoremas geométricos: (1) que un círculo está bisecado por su diámetro, (2) que los ángulos en un triángulo opuesto a dos lados de igual longitud son iguales, (3) que los ángulos opuestos formados por intersección de las líneas rectas son iguales, (4) que el ángulo inscrito dentro de un semicírculo es un ángulo recto, y (5) que se determina un triángulo si se dan su base y los dos ángulos de la base. Sin embargo, sus logros matemáticos son difíciles de evaluar debido a la antigua práctica de acreditar descubrimientos particulares a hombres con una reputación general de sabiduría.

La afirmación de que Thales fue el fundador de la filosofía europea se basa principalmente en Aristóteles (c.384-c.322 a. C.), quien escribió que Tales fue el primero en sugerir un único sustrato material para el universo: el agua o la humedad. Según Aristóteles, Thales también sostuvo que “todas las cosas están llenas de dioses” y que los objetos magnéticos poseen almas en virtud de su capacidad de mover el alma de hierro, lo que en la visión griega distingue a las cosas vivientes de las no vivas, y movimiento y cambio (o la capacidad de mover o cambiar otras cosas) siendo característico de los seres vivos.

La importancia de Thales radica menos en su elección del agua como sustancia esencial que en su intento de explicar la naturaleza mediante la simplificación de los fenómenos y en su búsqueda de causas dentro de la propia naturaleza, más que en los caprichos

de los dioses antropomórficos. Al igual que sus sucesores, los filósofos Anaximandro (c.610-c.546 / 545 a. C) y Anaxímenes de Mileto (floreció hacia c.545 a. C), consideran a Tales como el más que supo unir los mundos del mito y la razón.

**Pitágoras**, (Samos-c. 569 a. C., Metaponto c. 475 a. C.) filósofo, matemático y fundador griego de la hermandad pitagórica que, aunque de naturaleza religiosa, principios formulados que influyeron en el pensamiento de Platón y Aristóteles y contribuyeron al desarrollo de las matemáticas y la filosofía racional occidental. (Para un tratamiento más completo de Pitágoras y el pensamiento de Pitágoras, lo abordaremos más adelante).

Pitágoras emigró al sur de Italia alrededor del año 532 a. C, aparentemente para escapar de la dominación tiránica de Samos, y estableció su academia ético-política en Croton (ahora Crotona, Italia). Es difícil distinguir las enseñanzas de Pitágoras de las de sus discípulos. Ninguno de sus escritos ha sobrevivido, y los pitagóricos invariablemente apoyaron sus doctrinas citando indiscriminadamente la autoridad de su maestro. Sin embargo, a Pitágoras generalmente se le atribuye la teoría de la importancia funcional de los números en el mundo objetivo y en la música. Otros descubrimientos a menudo atribuidos a él (la inconmensurabilidad del lado y la diagonal de un cuadrado, por ejemplo, y el teorema de Pitágoras para triángulos rectángulos) probablemente fueron desarrollados más tarde por la escuela pitagórica. Más probablemente, la mayor parte de la tradición intelectual que se origina con el propio Pitágoras pertenece a la sabiduría mística en lugar de a la erudición científica.

¡El desarrollo del Pitagorismo se hará con más profundidad en el número siguiente 100!

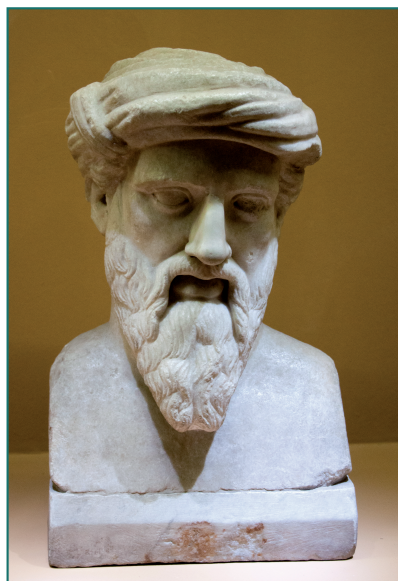


Fig. 2. Pitágoras de Samos  
<https://es.wikipedia.org/wiki/Pit%C3%A1goras>.

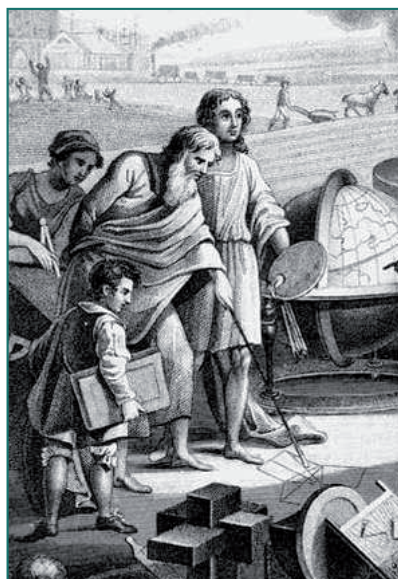


Fig. 3. Pitágoras demostrando su teorema de Pitágoras en la arena usando un palo.  
<https://www.britannica.com/biography/Pythagoras>.

## SAPERE AUDE, GEOMETRÍA

### 1. Ejercicios de aquí y allá (solución a la Propuesta del número anterior 98)

En el número 98 proponía dos ejercicios de naturaleza distintas. El primero es de corte clásico de geometría, tan olvidada como en multitud de ocasiones he (hemos) puesto de manifiesto en este rincón. Euclides aportó tanto y es de tal importancia que hasta la actualidad sus Elementos siguen vigentes, después de más de 2000 años de su formulación. Su aportación ha tenido amplia trascendencia a lo largo de la historia de las Matemáticas, el pensamiento de Euclides se enseñó (se sigue enseñando) hasta el siglo XVIII, mucho después de su tiempo, periodo en el que surgieron las llamadas geometrías no euclidianas (que, naturalmente abordaremos en ese rincón). La Geometría es concebida como la parte de la Matemática que trata de las propiedades de las figuras en el plano y en el espacio, y que junto a la Aritmética y el Álgebra y Análisis conforma el conjunto del edificio matemático. Pues bien, como afirma Gerhard Frey, "...hay diversas geometrías, pero sólo hay una aritmética...". En esta primera joyita, ponemos una de las aplicaciones del Teorema de Thales, que como sabemos lo descubrió mientras investigaba la condición de paralelismo entre dos rectas, concretamente utilizamos su recíproco.

El segundo, lo define Jean-Marc Desbonnez (Review-Losanges.Nº39-2017) como hacer Matemática para reír y para llorar: el smiley. Pequeñas figuras que evocan alegría, indiferencia, tristeza, sorpresa..., cuyo uso en las redes sociales, Whassap, Facebook, Instagram,... puede ir acompañado de mensajes y comentarios electrónicos.

#### Propuesta 1: dos joyitas geométricas

**JOYITA: a)** Sea  $PQRST$  un pentágono convexo tal que los lados cumplen que  $PQ = PR$ ,  $PS = PT$  y los ángulos  $RPS = PQT + PTQ$ . Si el punto  $M$  es la mitad de  $QT$ , probar que el lado  $RS = 2 PM$ .

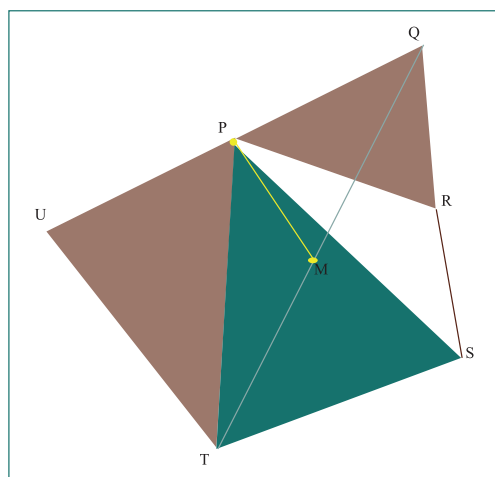


Fig.4. Pentágono Convexo.

#### SOLUCIÓN

##### PASO 1

Sea  $U$  el simétrico de  $Q$  con relación al punto  $P$ . Se tiene entonces que  $PU = PQ = PR$  y  $PS = PT$ .

##### PASO 2

El ángulo  $\widehat{UPT}$  es exterior al triángulo  $QPT$ , así tendremos que

$$\widehat{UPT} = \widehat{PQT} + \widehat{PTQ}$$

y

$$\text{entonces } \widehat{UPT} = \widehat{RPS} .$$

Por el criterio de semejanza (LAL-Lado-Ángulo-Lado), que dice que. "Si un ángulo de un triángulo es isométrico a un ángulo de otro triángulo y los lados correspondientes de estos ángulos son proporcionales, entonces los dos triángulos son semejantes", aplicado a los triángulos RPS y UPT podemos afirmar que son isométricos y se cumple que los lados RS y UT son iguales.

### PASO 3

Por ello, aplicando el recíproco del teorema de Thales al triángulo QUT que dice: "Si una recta  $r$  pasa por la mitad de uno de los lados de un triángulo y es paralela al otro lado entonces la recta corta al tercer lado por la mitad". De ahí que  $UT=2PM$ .

Se deduce entonces que

$$RS=2 PM \text{ csqd.}$$

**JOYITA: b)** Con un poco e imaginación, para conseguir un smiley, utilizaremos puntos, círculos, segmentos, cónicas, ... ¡Ánimo!

Construir un smiley con tres círculos (la cabeza y los dos ojos), cuatro puntos (las dos pupilas y los dos orificios de la nariz), dos segmentos (la nariz), y un arco de parábola (para la boca).

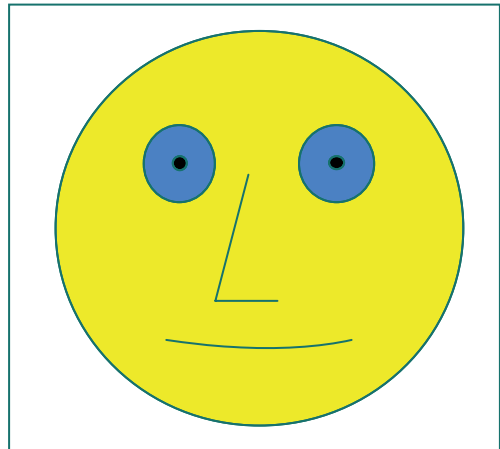


Fig. 5. Ejemplo. Smiley.

## SOLUCIÓN

### PASO 1

Para comenzar debemos elegir las dimensiones adecuadas que, naturalmente, pueden variar en función del tamaño y de la calidad artística que queremos impregnar el smiley: radios de los círculos, posiciones de los ojos, las pupilas, la boca, ... Nosotros lo haremos con el programa Geogebra, cuyo funcionamiento suponemos que el lector conoce mínimamente.

## PASO 2

### Comencemos por los ojos y la cabeza

Basta con conocer la ecuación cartesiana de un círculo de Centro  $C(x_0, y_0)$  y de radio  $r$  cuya ecuación vendrá dada por la expresión

$$(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = r^2$$

Para el ejemplo que presentaremos más adelante en la Fig. hemos elegido:

**a) Para la cabeza**, la circunferencia

$$(x-0)^2 + (y-0)^2 = 3^2$$

centrada en el punto  $C(0,0)$  y radio  $r = 3$

**b) Para los ojos**,

*b. 1. Izquierdo:*

$$(x+1)^2 + (y-1)^2 = (\sqrt{0.19})^2$$

*b. 2. Derecho:*

$$(x-1)^2 + (y-1)^2 = (\sqrt{0.19})^2$$

**c) Para las pupilas**

*c. 1. Izquierda*

El punto  $B$  de coordenadas  $(-1,1)$

*c. 2. Derecha*

El punto  $A$  de coordenadas  $(1,1)$

hemos elegido el color **rojo**, que a voluntad podemos cambiar.

**d) Para la nariz y fosas nasales** hemos elegido los puntos y segmentos que aparecen en la Fig. y que se detallan en la vista algebraica del fichero *ggb* adjunto.

*Para la boca que la presentaremos animada*

Utilizaremos para la boca un arco de parábola delimitado por la ecuación

$$y = kx^2 + b$$

siendo

- El valor de  $k$  nos mostrará la concavidad, cuyo sentido lo determinará el sentimiento de alegría o de tristeza que hará variar con la ayuda de un cursor. El intervalo de variación se centra en el valor 0, y el arco de parábola debe estar incluido en el círculo que hemos optado que represente la cabeza. Se ha elegido que  $k$  varía en el intervalo  $[-0.3, 0.3]$  con un paso incremental de 0.1.
- El valor de  $b$  es el que determina la traslación en sentido vertical y debe ser negativo por las características de elección del dibujo de la cabeza, centrada en el origen de coordenadas  $O(0,0)$ . En el caso que nos ocupa hemos tomado  $b = -0.1$ . De esta manera la boca queda conformada por la ecuación  $y = kx^2 - 0.1$ .

NOTA. Cuando  $k$  sea igual a 0, la posición de la boca estará en la recta horizontal  $y = -0.1$ , y que representaría una expresión de ¡indiferencia!

- El dominio de utilización está limitado.

En este sentido la gráfica

$$y = kx^2 - 0.1$$

sobresale la ecuación

$$(x-0)^2 + (y-0)^2 = 32$$

Pero se puede limitar el dominio al intervalo  $[-1.2, 1.2]$  utilizando en Geogebra la función

$$\text{Si } [-1.2 < x < 1.2, kx^2 - 0.1]$$

### PASO 3

#### Movimiento de las pupilas

Para darle animación a las pupilas variamos el parámetro  $k$ .

- La pupila izquierda está situada en el punto  $(-1, 1)$ , por lo tanto, se desea hacerla variar horizontalmente sobre toda la anchura del ojo izquierdo, en el intervalo

$$[-1 - \sqrt{0.19}, -1 + \sqrt{0.19}] = [-1.435, -0.56]$$

Es decir, debemos encontrar una fórmula que nos transforme un valor de  $k$  del intervalo  $[-0.3, 0.3]$  en un valor del intervalo  $[-1.435, -0.56]$ .

Se trata de una transformación lineal  $f(x) = px + q$  tal que

$$f([-0.3, 0.3]) = [-1.435, 0.56]$$

obtenemos el sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas

$$-0.3 p + q = -1.435$$

$$0.3 p + q = -0.56$$

Cuya solución es  $p = 1.458$ ,  $q = -0.997$ , que nos lleva a afirmar que la nueva pupila izquierda tiene de coordenadas  $(1.458k-1,1)$

- La pupila derecha está situada en el punto  $(1,1)$ , por lo tanto, razonando de forma análoga sobre el intervalo  $[0.56,1.435]$ , tenemos para la pupila derecha las nuevas coordenadas  $(1.458k+1,1)$ .

El resultado podemos verlo en la evolución de las figuras siguientes desde *la tristeza* a *la alegría* pasando por *la indiferencia*:

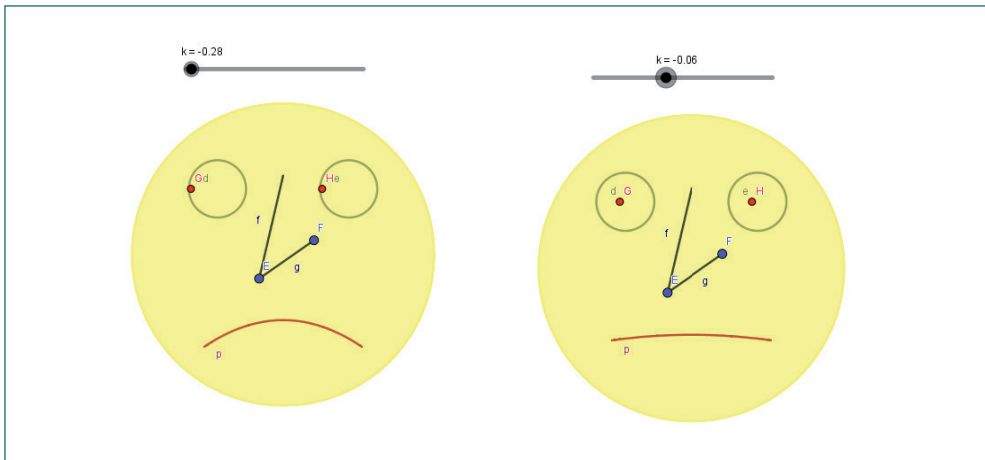


Fig. 6. Evolución de la tristeza en Smiley.

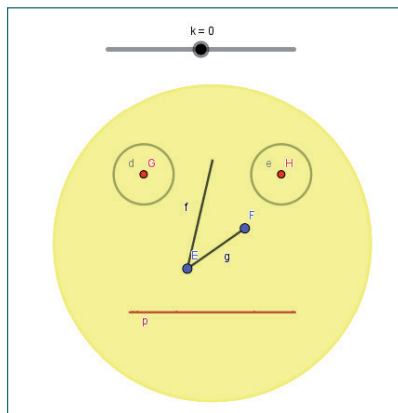


Fig. 7. Indiferencia del Smiley.

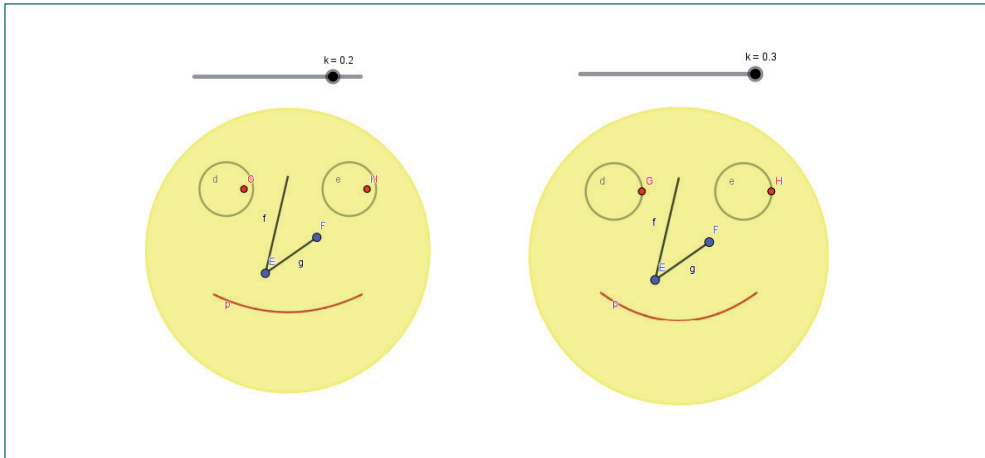


Fig. 8. Evolución de alegría en Smiley.

## SAPERE AUDE, TEORÍA DE NÚMEROS

En el primer ejercicio resolveremos una ecuación, denominada ciclométrica, en la que aparecen cocientes de términos de la sucesión de Fibonacci: 1,1,2,3,5,8,13,21,34,55,89,144,233,377, 610,.....

Presentaré también, un método geométrico utilizando triángulos rectángulos.

### Propuesta 2: dos joyitas numéricas

**JOYITA: a)** Demostrar sin ayuda de ninguna calculadora que

$$\operatorname{arctg} \frac{144}{233} + \operatorname{arctg} \frac{89}{377} = \frac{\pi}{4}$$

## SOLUCIÓN

### Paso 1

En la sucesión de Fibonacci: 1,1,2,3,5,8,13,21,34,55,89,144,233, 377,610..., aparecen los términos 89,144,233 y 377 que a su vez están en la igualdad que tenemos que demostrar y que son cuatro términos consecutivos de la citada sucesión que cumplen:

$$377=233+144$$

$$89= 233-144$$

- Probemos si la igualdad citada ut-supra se cumple para otros cuatro términos consecutivos de la sucesión de Fibonacci, por ejemplo: 1,1,2,3

Veamos si

$$\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{2}\right) + \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{3}\right) = \left(\frac{\pi}{4}\right)$$

En efecto. Si llamamos

$$\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{2}\right) = x \Rightarrow \operatorname{tg}(x) = \left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{3}\right) = y \Rightarrow \operatorname{tg}(y) = \left(\frac{1}{3}\right)$$

De aquí, veamos si

$$\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{2}\right) + \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{3}\right) = x + y$$

es igual a  $\frac{\pi}{4}$ .

Utilizando la fórmula trigonométrica de la tangente de la suma.

$$\operatorname{tg}(x + y) = \frac{\operatorname{tg}(x) + \operatorname{tg}(y)}{1 - \operatorname{tg}(x) \cdot \operatorname{tg}(y)} = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}} = \frac{\frac{5}{6}}{\frac{6-1}{6}} = \frac{\frac{5}{6}}{\frac{5}{6}} = 1 \Rightarrow x + y = \operatorname{arctg}(1) = \frac{\pi}{4}$$

$$\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{2}\right) + \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{\pi}{4}$$

De la misma manera se puede comprobar que

$$\operatorname{arctg}\left(\frac{5}{8}\right) + \operatorname{arctg}\left(\frac{3}{13}\right) = \frac{\pi}{4}$$

## PASO 2

La pregunta que nos hacemos: ¿Se puede generalizar a cualquier cuaterna de números sucesivos en la sucesión de Fibonacci? El problema se enunciaría así:

**Para cualquier número natural "n" demostrar que**

$$\operatorname{arctg}\left(\frac{F_{n+1}}{F_{n+2}}\right) + \operatorname{arctg}\left(\frac{F_n}{F_{n+3}}\right) = \frac{\pi}{4}$$

**dónde  $F_n$  designa el número de la sucesión de Fibonacci de rango "n".**

Siguiendo un razonamiento análogo se tiene,

$$\operatorname{arctg}\left(\frac{F_{n+1}}{F_{n+2}}\right) = x \Rightarrow \operatorname{tg}(x) = \frac{F_{n+1}}{F_{n+2}}$$

$$\operatorname{arctg}\left(\frac{F_n}{F_{n+3}}\right) = y \Rightarrow \operatorname{tg}(y) = \frac{F_n}{F_{n+3}}$$

$$\operatorname{tg}(x+y) = \frac{\operatorname{tg}(x) + \operatorname{tg}(y)}{1 - \operatorname{tg}(x)\operatorname{tg}(y)} = \frac{\frac{F_{n+1}}{F_{n+2}} + \frac{F_n}{F_{n+3}}}{1 - \frac{F_{n+1}}{F_{n+2}} \cdot \frac{F_n}{F_{n+3}}} = \frac{F_{n+1}F_{n+3} + F_nF_{n+2}}{F_{n+2}F_{n+3} - F_nF_{n+1}} = \frac{F_{n+1}(F_{n+1} + F_{n+2}) + F_n(F_{n+1} + F_n)}{(F_{n+1} + F_n)F_{n+3} - F_nF_{n+1}}$$

$$\operatorname{tg}(x+y) = \frac{F_{n+1}(F_{n+1} + F_{n+2}) + F_n(F_{n+1} + F_n)}{(F_{n+1} + F_n)F_{n+3} - F_nF_{n+1}} = \frac{F_{n+1}^2 + F_{n+1}F_{n+2} + F_n(F_{n+1} + F_n)}{(F_{n+1} + F_n)F_{n+3} - F_nF_{n+1}}$$

$$\operatorname{tg}(x+y) = \frac{F_{n+1}^2 + F_{n+1}(F_{n+1} + F_n) + F_n(F_{n+1} + F_n)}{(F_{n+1} + F_n)(F_{n+2} + F_{n+1}) - F_nF_{n+1}} = \frac{F_{n+1}^2 + F_{n+1}^2 + F_{n+1}F_n + F_nF_{n+1} + F_n^2}{(F_{n+1} + F_n)(F_{n+2} + F_{n+1}) - F_nF_{n+1}}$$

$$\operatorname{tg}(x+y) = \frac{F_{n+1}^2 + F_{n+1}^2 + F_{n+1}F_n + F_nF_{n+1} + F_n^2}{(F_{n+1} + F_n)(F_{n+2} + F_{n+1}) - F_nF_{n+1}} = \frac{2F_{n+1}^2 + 2F_{n+1}F_n + F_n^2}{(F_{n+1} + F_n)(F_{n+2} + F_{n+1}) - F_nF_{n+1}}$$

$$\operatorname{tg}(x+y) = \frac{2F_{n+1}^2 + 2F_{n+1}F_n + F_n^2}{(F_{n+1}F_{n+2} + F_nF_{n+2} + F_{n+1}^2 + F_nF_{n+1}) - F_nF_{n+1}}$$

$$\operatorname{tg}(x+y) = \frac{2F_{n+1}^2 + 2F_{n+1}F_n + F_n^2}{F_{n+1}F_{n+2} + F_nF_{n+2} + F_{n+1}^2} = \frac{2F_{n+1}^2 + 2F_{n+1}F_n + F_n^2}{F_{n+1}(F_{n+1} + F_n) + F_n(F_{n+1} + F_n) + F_{n+1}^2} = \frac{2F_{n+1}^2 + 2F_{n+1}F_n + F_n^2}{F_{n+1}^2 + F_{n+1}F_n + F_nF_{n+1} + F_n^2 + F_{n+1}^2}$$

$$\operatorname{tg}(x+y) = \frac{2F_{n+1}^2 + 2F_{n+1}F_n + F_n^2}{F_{n+1}^2 + F_{n+1}F_n + F_nF_{n+1} + F_n^2 + F_{n+1}^2} = \frac{2F_{n+1}^2 + 2F_{n+1}F_n + F_n^2}{2F_{n+1}^2 + 2F_{n+1}F_n + F_n^2} = 1 \Rightarrow x+y = \operatorname{arctg}(1) = \frac{\pi}{4}$$

De aquí que

$$\operatorname{arctg}\left(\frac{F_{n+1}}{F_{n+2}}\right) + \operatorname{arctg}\left(\frac{F_n}{F_{n+3}}\right) = \frac{\pi}{4}$$

### PASO 3

Podemos trabajar desde el punto de vista geométrico la igualdad que nos ocupa

$$\operatorname{arctg}\left(\frac{F_{n+1}}{F_{n+2}}\right) + \operatorname{arctg}\left(\frac{F_n}{F_{n+3}}\right) = \frac{\pi}{4}$$

Construyamos los números de la sucesión de Fibonacci así.

- a) A un cuadrado de lado 1 unidad de longitud se le adjunta otro cuadrado de lado 1 para construir un rectángulo de  $2 \times 1$ .



Fig. 9. Nivel 1-Sucesión de Fibonacci.

- b) A esta figura se le adjunta un cuadrado de lado 2 para construir un rectángulo de  $3 \times 2$



Fig. 10. Nivel 2-Sucesión de Fibonacci

- c) A la obtenida se adjunta un cuadrado de lado 3 para construir un rectángulo de  $5 \times 3$ , y así sucesivamente.

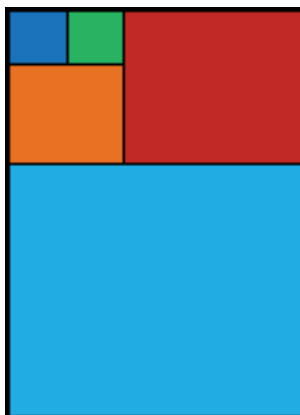




Fig. 11. Nivel 3-Sucesión de Fibonacci

En resumen, las etapas intermedias se obtienen adjuntando un cuadrado  a un rectángulo  al que se le adjunta otro cuadrado para obtener un rectángulo.

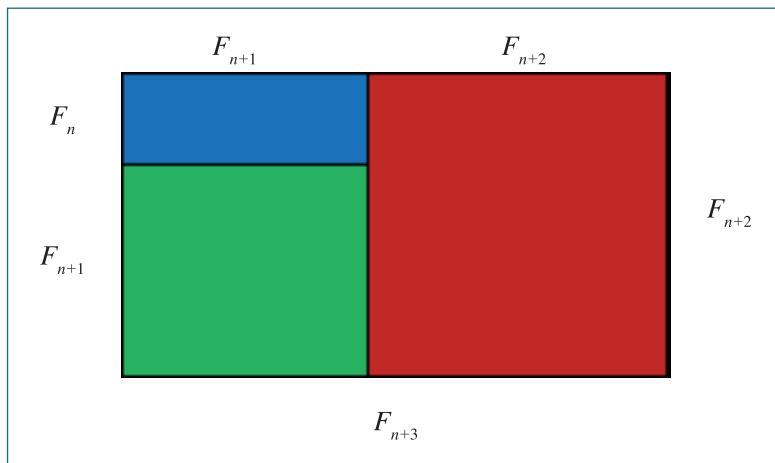


Fig.12. Nivel n-Sucesión de Fibonacci

En la figura

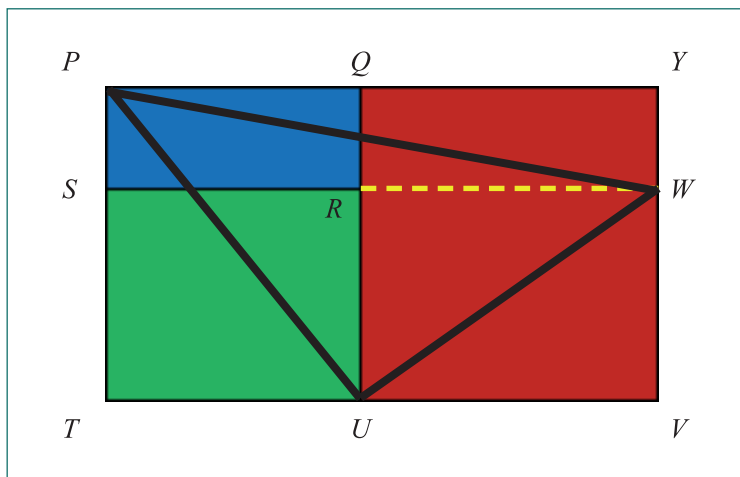


Fig.13. Método Geométrico. Nivel n-Sucesión de Fibonacci

- Los rectángulos PQUT y RWVU isométricos porque tienen la misma longitud  $F_{n+2} = F_n + F_{n+1}$  y la misma anchura.
- Sus diagonales tienen la misma medida  $PU = WU$ .
- Los triángulos  $PTU$ ,  $UQP$  y  $WRU$  son isométricos.

- d) Los ángulos  $QUP$  y  $WCR$  son complementarios y por lo tanto el ángulo  $WUP$  es un ángulo recto.

Por lo tanto, el triángulo  $PUW$  es isósceles y rectángulo en el vértice  $U$ . Los ángulos en la base valen entonces  $\frac{\pi}{4}$ .

El ángulo en la base  $UWP$  es la suma de los ángulos  $RWU$  y  $PWS$ , el primero en el triángulo  $WRU$  rectángulo en  $R$  y el segundo en el triángulo  $PSW$  rectángulo en  $S$ . Por ello, se tiene que  $RWU+PWS = \frac{\pi}{4}$

Usando la razón trigonométrica tangente:

$$tg(RWS) = \frac{F_{n+1}}{F_{n+2}}$$

$$tg(PWS) = \frac{F_n}{F_{n+3}}$$

Por lo tanto,

$$arctg\left(\frac{F_{n+1}}{F_{n+2}}\right) + arctg\left(\frac{F_n}{F_{n+3}}\right) = \frac{\pi}{4}$$

Debemos notar entonces que con el criterio como se ha construido la Fig. 12, se puede generalizar el resultado obtenido a otros valores que se conformen como términos de la sucesión de Fibonacci. Llegamos a la conclusión de que los diferentes rectángulos forman una progresión en recurrencia:

$$r_2 = r_1 + r_0$$

y

$$r_3 = r_2 + r_1$$

con representando, respectivamente el ancho y el largo del rectángulo inicial. La sucesión es una sucesión de Fibonacci generalizada.

**NOTA.** Así podemos proponer a nuestros alumnos que demuestren las igualdades siguientes

$$\operatorname{arctg}\left(\frac{9+2\sqrt{3}}{15+3\sqrt{3}}\right) + \operatorname{arctg}\left(\frac{6+\sqrt{3}}{24+5\sqrt{3}}\right) = \frac{\pi}{4}$$

$$\operatorname{arctg}\left(\frac{1+3\sqrt{7}}{\frac{3}{2}+5\sqrt{7}}\right) + \operatorname{arctg}\left(\frac{\frac{1}{2}+2\sqrt{7}}{\frac{5}{2}+8\sqrt{7}}\right) = \frac{\pi}{4}$$

$$\operatorname{arctg}\left(\frac{2\sqrt{5}+3\sqrt{11}}{3\sqrt{5}+5\sqrt{11}}\right) + \operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{5}+2\sqrt{11}}{5\sqrt{5}+8\sqrt{11}}\right) = \frac{\pi}{4}$$

¡Este tipo de ejercicio, hace realidad que la Teoría de Números y Geometría!, juntas representan una de las actividades más interesantes para abrir la mente a nuestros estudiantes. Por muy sofisticado que parezca, comprender la gran magia y el poder de los números nos ayudará a resolver situaciones que quedan establecidas en la construcción del modelo matemático como abstracción de la realidad.

**JOYITA: b)** En este segundo ejercicio, sin necesidad de utilizar calculadora y sin desarrollar, de forma razonada resolver las cuestiones siguientes:

- b. 1.** ¿En qué cifra termina  $1!+2!+3!+4!+5!$  ?
- b. 2.** ¿Y  $1!+2!+3!+4!+5!+\dots+10!$  ?
- b. 3.** ¿Y  $1!+2!+3!+4!+5!+6!+\dots\dots\dots 100!$  ?
- b. 4.** Tal vez asuste un poco la pregunta. ¿y  $1!+2!+3!+\dots\dots\dots+1000!$  ?
- b. 5.** ¿Podemos sacar una conclusión para la suma

$$\sum_{i=1}^n i!$$

siendo n cualquier número positivo?

## SOLUCIÓN

### PASO 1

- b. 1.** Veamos en qué cifra termina el número expresado en forma factorial

$$1!+2!+3!+4!+5!$$

Sabemos que

$$1!=1$$

$$2!=1.2=2$$

De ahí que  $1!+2!=3$

$$3!=1.2.3=6$$

$$4!=1.2.3.4=24$$

De aquí se deduce que,  $3!+4!=6+24=30=3.10$ , termina en cero.

$5!=1.2.3.4.5=120=12.10$ , por lo tanto  $5!$ , termina en cero.

Por lo tanto  $[1!+2!]+[(3!+4!)+5!]=[1+2]+(3+12).10=3+15.10$ , termina en 3.

## PASO 2

**b. 2.** ¿Y  $1!+2!+3!+4!+5!+\dots+10!$  ?

$$6!=6.5!=6.12.10=72.10, \text{ termina en cero}$$

$$7!=7.6!=504.10, \text{ termina también en cero,}$$

Y así sucesivamente de  $8!$ , en adelante todos los números terminan en cero.

$$1!+2!+3!+4!+5!+6!+7!+8!+9!+10!=[1!+2!+3!+4!+5!]+[6!+7!+8!+9!+10!]=A+B$$

Siendo  $A=[1!+2!+3!+4!+5!]$  y  $B=[6!+7!+8!+9!+10!]$

El número A termina en 3, y el B termina en 3, por lo tanto

$$1!+2!+3!+\dots+8!+9!+10!, \text{ termina en 3.}$$

## PASO 3

**b. 3.** ¿Y  $1!+2!+3!+4!+5!+6!+\dots+100!$  ?

El número

$$\begin{aligned} &1!+2!+3!+4!+5!+6!+\dots+100! = \\ &=[1!+2!+3!+4!+5!+6!+7!+8!+9!+10!]+[11!+12!+\dots+100!]= \\ &=A+[11+12.11+13.12.11+\dots+100.99.98.\dots.11]10! = A+B \end{aligned}$$

siendo

$$A = [ 1!+2!+3!+4!+5!+6!+7!+8!+9!+10! ]$$

$$B = [ 11!+12!+\dots+100! ] = A + [ 11+12.11+13.12.11+\dots+100.99.98.\dots.11 ] 10!$$

Ya hemos visto que A termine en 3, y B termina en 0, Por lo tanto,

$$1!+2!+3!+4!+5!+6!+\dots+100! \text{ termina en } 3.$$

#### PASO 4

**b. 4.** ¿Y  $1!+2!+3!+\dots+1000!$  ?

Análogamente se llega a que  $1!+2!+3!+4!+5!+\dots+999!+1000!$ , es un número que termina en 3.

#### PASO 5

**b. 5.** Para cualquier  $n \in \mathbb{N}$ , se tiene que

$$\sum_{i=1}^n i! = \begin{pmatrix} 1 & i = & 1 \\ 3 & i = & 2 \\ 9 & i = & 3 \\ 3 & i = & n \in \mathbb{N}, n \geq 4 \end{pmatrix}$$

### SAPERE AUDE, EJERCICIOS DE AQUÍ Y ALLÁ, PROPUESTAS

#### Propuesta 1: dos joyitas geométricas

En mi reflexión sobre la necesidad de que la Geometría esté siempre presente, y de manera adecuada en los currículo de primaria y secundaria, me parece interesante el trabajo de Pierre Stegen Christine Géron (Haute Ecole de la Ville de Liège) y Sabine Daro (ASBL Hypothèse), "Favoriser le développement du langage géométrique à la liaison primaire secondaire" cuya lectura recomiendo

<http://www.hypothese.be/upload/files/geometrie.pdf>

Éste y otros trabajos de investigación en Didáctica de las Matemáticas evidencian que la transición de la escuela primaria a la secundaria se caracteriza por la enseñanza

de la Geometría, por un cambio bastante radical. Vamos de una geometría esencialmente práctica (basada en la percepción visual luego experimentación) a una geometría más teórica (también llamada axiomática basada en el uso de propiedades).

El objetivo es delinear un marco que ubique el rol y el lugar de la adquisición del lenguaje en el aprendizaje de la geometría en la conexión primaria-secundaria para comprender mejor los trabajos de construcción geométrica que estamos proponiendo en el Rincón Sapere Aude.

En la propuesta de este número presentamos dos joyitas:

a) el primer caso de trata de un problema de manipulación, modelización y optimización que consiste en determinar la forma y las dimensiones de un canal (¡bien podría ser una alcantarilla!) de volumen máximo construido a partir de una hoja de zinc de una determinada longitud (M.F.Guisard, I. Wettendorf-Losanges-Nº40-2018). En él se deben estudiar varios tipos de canalización, en función de las diferentes formas de las secciones que exploren.

b) El teorema de Napoleón. Se trata de un resultado conocido y que se atribuye al emperador Napoleón Bonaparte (también se conoce con el nombre de el Teorema del Emperador) aunque se cree que su autor fue Lorenzo Mascheroni, matemático italiano que logró una aproximación geométrica del número  $\pi$  denominada Aproximación de Mascheroni, que al principio de su carrera se interesó por la poesía y griego. En su libro Geometria del Compasso probó que cualquier construcción geométrica que pueda ser hecha con regla y compás puede ser hecha únicamente con compás, aunque el primero en dar ese resultado (hoy conocido como Teorema de Mohr-Mascheroni) fue el danés Georg Mohr quién publicó una prueba en 1672. La razón por la que ha pasado a la historia con esta atribución parece ser que es la gran afición de Napoleón por las matemáticas y su gran amistad con Mascheroni que le llevaron a estudiar sus libros y a popularizar sus resultados con tanto éxito que, incomprensiblemente, en algún momento se atribuyó este teorema a Napoleón.

a) *Construir una sección de un canal de capacidad máxima que se puede obtener, en planta, a partir de una hoja de zinc rectangular de 21cm de ancho paralelamente a su longitud.*

*NOTA: Se indica que los alumnos pueden utilizar una hoja DIN-A4 para comprender la multitud de pliegues posibles.*

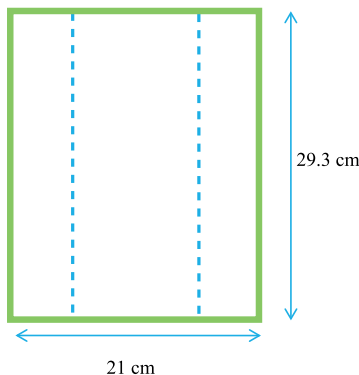


Fig. 14. Placa de Zinc rectangular

- b) Sea un triángulo cualquiera  $ABC$ . Si se construyen tres triángulos equiláteros a partir de sus lados, entonces los centros de los triángulos equiláteros es también un triángulo equilátero. (Teorema de Napoleón).

NOTAS.

- b. 1.** Un teorema análogo es cuando los triángulos equiláteros se construyen en el interior de los lados de un triángulo y el denominado triángulo interior de Napoleón también es equilátero.
- b. 2.** Es sorprendente como la diferencia entre las áreas de los triángulos de Napoleón, exterior e interior; es igual al área del triángulo original

## Propuesta 2: dos joyitas numéricas

En teoría de números Srinivasa Ramanujan (Erode, 22/12/1887- Kumbakonam, 26/04/1920) fue un matemático indio que con una mínima educación académica en matemáticas puras hizo contribuciones extraordinarias en análisis matemático, teoría de números, series y fracciones continuas. Ramanujan desarrolló inicialmente su propia investigación matemática en forma aislada; que fue rápidamente reconocida por los matemáticos indios. Cuando sus habilidades se hicieron evidentes para una comunidad matemática más amplia, centrada en Europa en ese momento, comenzó su famosa colaboración con el matemático británico G.H. Hardy. (Hay que destacar la breve pero intensa colaboración con el joven matemático indio Ramanujan era autodidacta sin formación académica formal, como se ha citado, pero con gran capacidad en la resolución de problemas. Aún sin formación académica, Ramanujan había publicado varios artículos en revistas científicas indias, lo que le hizo adquirir cierto prestigio en la región de Madras (actualmente Chennai), la zona en la que vivía, y que le sirvió para que el matemático Ramachandra Rao (1871-1936) le ayudase a conseguir un trabajo como administrativo en la Autoridad Portuaria de Madras; que le dio tranquilidad para poder dedicarse más activamente a las matemáticas y donde pudo interactuar con compañeros con formación matemática.

Animado por sus colegas indios, Ramanujan escribió en 1912 a algunos matemáticos europeos a los que envió algunos de sus trabajos y demostraciones matemáticas. No recibió respuesta de ninguno de ellos. Tras leer el libro *Orders of Infinity* de Hardy (publicado en 1910), Ramanujan escribió a Hardy, que recibió su carta en enero de 1913. En su carta de presentación, Ramanujan hacía notar que no tenía formación formal en matemáticas, por lo que Hardy debió pensar "otro osado que me escribe en busca de ayuda" y su primera intención fue no hacer caso a la solicitud. Sin embargo, algo llamó la atención de Hardy en los escritos que acompañaban las cartas, por lo que empezó a leerlos con calma. Tras consultar con Littlewood, los dos identificaron un gran talento matemático en el joven indio y Hardy le invitó a viajar a Cambridge para completar su formación e investigar. Sin embargo, Ramanujan rechazó la invitación por razones religiosas, era un brahmán ortodoxo y vegetariano estricto; y al que su religión dificultaba viajar. Sin embargo, Eric H. Neville (1889-1961), matemático amigo de Hardy, le convenció durante un viaje a la India. Así, Ramanujan llegó a Cambridge el 30 de abril de 1914, siendo alojado en el Trinity College. El estallido de la I Guerra Mundial facilitó la prolongación de

la estancia de Ramanujan en Cambridge donde, de manera independiente y también en colaboración con Hardy, realizó algunas de las aportaciones más sobresalientes en teoría de números del siglo XX. Al acabar la I Guerra mundial, Ramanujan regresó a la India, abandonando Inglaterra el 27 de febrero de 1919, falleciendo el 26 de abril de 1920, tras problemas de salud que le acompañaron durante toda su vida).

<https://principia.io/2016/02/07/hardy-teoria-de-numeros-y-descubridor-de-ramanujan-ljlyOCI/>

Redescubrió teoremas conocidos previamente, además de formular numerosas nuevas proposiciones. trabajó principalmente encontrando identidades relacionadas con el número  $\pi$  y el número  $e$  o los números primos. En general sus fórmulas son muy enrevesadas, pero en su mayoría verdaderas (a posteriori se ha descubierto que algunos de sus resultados eran incorrectos), y muchas de ellas se han convertido en potentes herramientas para calcular grandes cantidades de decimales de, principalmente, el número  $\pi$ . Hizo impresionantes aportaciones a lo que se denomina *apilamientos infinitos de radicales*

$$\sqrt{a_0 + b_0 \sqrt{a_1 + b_1 \sqrt{a_2 + b_2 \sqrt{a_3 + \dots}}}}$$

¡A estos vamos a dedicar la primera joyita!

La segunda la dedicamos a poner en valor de la importancia de los números compuestos. Y aquí los números primos, una vez más, constituyen el basamento sobre los que se construyen todos los números (compuestos).

Por eso no es difícil de intuir que los números primos son importantes. Pero, ¿por qué? ¿Qué tienen de especial? La especial naturaleza de estos números les da una importancia fundamental en matemáticas. Los números enteros compuestos, se pueden expresar como productos de potencias de números primos, a dicha expresión se le llama **descomposición de un número en factores primos**.

a) Probar que

$$\sqrt{1 + 2\sqrt{1 + 3\sqrt{1 + 4\sqrt{1 + 5\sqrt{1 + \dots}}}}} = 3$$

b) Demostrar que un entero natural  $n$  que es al mismo tiempo el cuadrado  $n=p^2$  y el cubo  $n=q^3$  también  $n$  es el cuadrado de un cubo.

Generalizando: Si  $a, b, n, m$  son enteros naturales con  $n \wedge m = 1$  y  $a^n = b^m$ . Demostrar que existe un número entero  $c$  tal que  $a = c^m$  y  $b = c^n$ .

**NOTA: Las respuestas pueden enviarla a la dirección electrónica: [sapereaudethales@gmail.com](mailto:sapereaudethales@gmail.com)**

