

97

2017



**epsilon**

Revista de Educación Matemática

Editada por la S.A.E.M. "THALES"



# epsilon 97

Revista de Educación Matemática

## Director

Alexander Maz

## Comité Editor

Francisco España

Inmaculada Serrano

José María Vázquez de la Torre

Salvador Guerrero

Noelia Jimenez

## Comité Científico

Evelio Bedoya,

*Universidad del Valle, Colombia.*

José Carrillo

*Universidad de Huelva, España.*

José Iván López Flores,

*Universidad Autónoma de Zacatecas, México*

José Ortiz,

*Universidad de Carabobo, Venezuela.*

Liliana Mabel Tauber,

*Universidad Nacional del Litoral, Argentina.*

M<sup>a</sup> Mar Moreno,

*Universidad de Lleida, España.*

Matías Camacho,

*Universidad de la Laguna, España.*

Roberto Alfredo Vidal Cortés,

*Universidad Alberto Hurtado, Chile.*

Patricia Pérez Tyteca

*Universidad de Alicante*

Carlos de Castro

*Universidad Autónoma de Madrid*

M<sup>a</sup> Jose Madrid

*Universidad Pontificia de Salamanca*

**Página de la revista:** <http://thales.cica.es/epsilon>

**Revista:** [epsilon@thales.cica.es](mailto:epsilon@thales.cica.es)

Sociedad Andaluza de Educación Matemática “Thales”

## Edita

Sociedad Andaluza de  
Educación Matemática “Thales”

Centro Documentación “Thales”

Universidad de Cádiz

C.A.S.E.M.

Facultad de Ciencias

Departamento de Matemáticas

Campus del Río San Pedro

Torre Central, 4<sup>a</sup> planta

11510 Puerto Real (Cádiz)

Teléfono: 956012833

Email: [thales.matematicas@uca.es](mailto:thales.matematicas@uca.es)

## Maquetación

[mayteando@gmail.com](mailto:mayteando@gmail.com)

## Depósito Legal

SE-421-1984

## ISSN

2340-714X

## Período

2017

## Suscripción

Anual



7

## INVESTIGACIÓN

7 **Límite infinito de sucesiones y divergencia/** Infinite limit of sequences and divergence

Mónica Arnal.

Javier Claros.

M<sup>a</sup> Teresa Sánchez.

Miguel Ángel Baeza.

23 **Videojuegos de estrategia en Educación Matemática. Una propuesta didáctica en secundaria/** Strategy video games in Mathematics Education. A didactic proposal in secondary

Irene Ferrando

Jaime Castillo

Marta Pla-Castells

43

## EXPERIENCIAS

43 **Metacognición en clases de Matemática: un aporte para la enseñanza/** Metacognition in Mathematical classes: a contribution for teaching

Patricia Barreiro.

Paula Leonian.

57 **Demostraciones del Teorema de Pitágoras con goma EVA. STEAM en el aula de Matemáticas/** Demonstrations of the Pythagorean Theorem with EVA rubber. STEAM in the Mathematics classroom

Luis Miguel Iglesias Albarrán.

65 **Reflexión sobre la práctica del profesor de matemáticas en la enseñanza de las funciones/** Reflection in mathematics teacher practices on functions education

María Burgos Navarro.

Pablo Flores Martínez.

75

## IDEAS PARA EL AULA

- 75 **Uso de representaciones verbales en la enseñanza del Teorema de Thales/**  
Use of verbal representations in the teaching of Thales Theorem  
David Gutiérrez-Rubio, Universidad de Córdoba

81

## MISCELÁNEA

- 81 **RINCÓN “SAPERE AUDE”... ¿resolviendo problemas?**  
Sixto Romero

## Límite infinito de sucesiones y divergencia

Mónica Arnal

*Universidad Rey Juan Carlos (España)*

Javier Claros

*Universidad Complutense de Madrid (España)*

M<sup>a</sup> Teresa Sánchez

*Universidad de Málaga (España)*

Miguel Ángel Baeza

*Universidad Complutense de Madrid (España)*

**Resumen:** *En este documento se muestran las dificultades para seleccionar una definición de límite infinito de sucesiones entre profesores. Estas dificultades están propiciadas por el efecto que el término divergencia ocasiona en dichas definiciones. Las dificultades, mostradas a través de una consulta a expertos, están presentes tanto en profesores como en autores de libros de texto y en este documento se muestran ejemplos de las mismas. Se aporta además una nueva acepción de sucesión divergente y se prepara el camino para un estudio posterior de la definición seleccionada.*

**Palabras clave:** *Sucesión, Límite, Infinito, Divergencia, Profesores, Libros de texto*

## Infinite limit of sequences and divergence

**Abstract:** *In this paper we show the difficulties in choosing a definition for the infinite limit of sequences among teachers. These difficulties are caused by the effect that the divergence term causes in these definitions. The difficulties, shown after an expert consult, are present both in teachers and books authors and, in this document, examples about these difficulties are given. We also provide a new meaning for divergent sequence and we clear the path for the subsequent phenomenological study of the chosen definition.*

**Keywords:** *Sequence, Limit, Infinite, Divergence, Teachers, Schoolbook*

## 1. INTRODUCCIÓN

En el presente artículo mostramos la falta de homogeneidad en la definición del término “divergencia”. El resultado obtenido a partir de la realización de dos cuestionarios, realizados a matemáticos en el que se buscaba una definición correcta y aceptada por la comunidad matemática del límite infinito de una sucesión, muestra la diversidad de acepciones del término divergencia entre los encuestados y las dificultades que esto origina para la selección de la citada definición.

El documento se compone de seis apartados. En el primero realizamos una introducción y presentación de los objetivos del presente documento. En el segundo, denominado antecedentes, realizamos una selección de autores que han realizado investigaciones del límite de una sucesión y del concepto de divergencia, desde una perspectiva didáctica. El tercer apartado, llamado primer cuestionario a expertos (en adelante Cuestionario 1), lo dedicaremos a presentar y analizar los resultados obtenidos en un cuestionario a profesores de Educación Secundaria Obligatoria, Bachillerato y Universidad. En dicho cuestionario presentamos 6 definiciones del límite infinito de sucesiones, obtenidas de manuales universitarios, con el fin de detectar las dificultades y discrepancias de notación y definición empleados, que pudiesen dificultar la selección de la definición buscada. Además, señalaremos la influencia que el uso del término divergencia tiene en la selección de la definición de límite infinito. En el cuarto apartado, denominado divergencia en libros de texto, analizaremos algunas definiciones de diferentes autores y como algunas de ellas son presentadas en los libros de texto de Educación Secundaria Obligatoria, Bachillerato y Universidad comprendidos entre los años 1969 y 2016. En el quinto apartado, denominado segundo cuestionario a expertos (en adelante Cuestionario 2), repetimos las acciones realizadas en el Cuestionario 1 pero obviando el término divergencia para que no interfiriese en el resultado final de nuestro formulario. Dicho cuestionario se compuso de 5 definiciones obtenidas de manuales universitarios y libros de texto de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato. En el último apartado expondremos las conclusiones y perspectivas futuras.

En los Anexos I y II se encuentran los dos cuestionarios enviados a los expertos, y en el Anexo III las puntuaciones obtenidas por cada una de las definiciones en ambos cuestionarios.

Los objetivos de este artículo son los siguientes:

1. Seleccionar una definición de límite infinito de una sucesión para un posterior estudio.
2. Mostrar las dificultades en la uniformidad sobre la noción de divergencia en los profesores cuando trabajan con sucesiones con límite infinito.
3. Señalar las dificultades que tienen los autores de manuales universitarios y de libros de texto de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato para adoptar una definición común sobre el término divergencia, cuando éste es usado en sucesiones con límite infinito.

## 2. ANTECEDENTES

Esta investigación comienza con el estudio de las dificultades puestas de manifiesto en el aula sobre la noción de límite infinito de sucesiones en nuestra experiencia como

docentes, así como con la definición de divergencia y las clasificaciones que se dan de las sucesiones con límite infinito, categorizadas de manera diferente según algunos de los autores de libros de textos de matemáticas y manuales universitarios que hemos consultado (véase Rey Pastor, 1969; Spivak, 1975; Pozniak, 2000).

Son muchos los autores que se han ocupado del estudio del límite y del infinito, señalando sobre todo las dificultades en torno a su comprensión. Del estudio del límite destacamos los trabajos realizados por Davis y Vinner (1986), Sierpinska (1990), Mamona-Downs (2001), Sacristán (2003), Hitt (2003) y Morales et al. (2013). Mientras, del estudio del infinito destacamos los trabajos realizados por Salat (2011) y Belmonte y Sierra (2011).

Según Morales et al. (2013) el concepto de límite tiene un papel muy importante en la comprensión de la mayor parte del contenido de las áreas de Cálculo y de Análisis Matemático. Identifican y caracterizan las dificultades en torno al concepto de límite infinito que desarrollan los estudiantes cuando lo analizan y lo interpretan en distintas representaciones. Además, observan que la mayoría de las investigaciones llevadas a cabo han estado centradas en el límite finito, ante escasos estudios de límite infinito. Consideran que es fundamental investigar sobre cada límite de manera particular. En el caso que nos ocupa, señalamos por lo tanto la importancia de estudiar el límite infinito de sucesiones.

En el límite infinito sobresale la dificultad del concepto de infinito el cual es necesario comprender para poder asimilar el límite infinito de una sucesión. Es la teoría APOS, comenzada por Dubinsky en 1991, la que realiza la primera investigación del desarrollo de la comprensión de los estudiantes del concepto matemático de infinito, apoyándose en el estudio de los esquemas. Dependiendo de la edad del alumno, el concepto matemático de infinito es interpretado de distinta forma. La teoría APOS, según Weller et al. (2004), puede proporcionar una explicación de cómo las personas conciben el infinito. Este es el primer paso hacia el desarrollo de estrategias pedagógicas destinadas a ayudar a los estudiantes a comprender y aplicar los tipos de transformaciones necesarias para la solución de varios problemas que involucran al infinito.

Núñez (1993) se ocupó del estudio de la construcción de los procesos infinitos por los niños de 9 a 14 años, todos en términos de infinito potencial, razón por la que afirma que el infinito actual no se plantea antes de cumplir los 15 años.

Hitt (2003) señaló la necesidad de iniciar una discusión entre profesores de secundaria acerca del infinito potencial y el infinito actual, debido a la necesidad de introducir conceptos que involucran ambos términos. En nuestro caso, en el límite infinito de sucesiones se encuentran presentes ambos infinitos pero es este último el que presenta más dificultades y es por lo tanto en el que más debemos incidir cuando se trabaje con los alumnos.

Este concepto de infinito actual fue señalado por Hauchart y Rouche (1987) quienes encontraron que estudiantes de 12 a 18 años parecían tener un concepto de infinito actual, cuando trabajaban el concepto de límite, tanto en sucesiones como en series infinitas.

Además del punto de vista del alumno, el concepto de límite se ha abordado desde el punto de vista del profesor. En este caso señalamos el trabajo de Espinosa y Azcárate (2000) en el que se analiza la labor de dos profesores cuando tienen que enseñar el concepto de límite o el trabajo de Sánchez (2012) la cual realiza perfiles fenomenológicos

de los profesores dependiendo de los fenómenos que usan estos cuando tienen que enseñar el límite finito de una función en un punto.

Tras abordar las investigaciones previas, nos ocupamos de la selección de una definición de límite infinito de una sucesión para un posterior estudio, tal y como ya hicieron Claros (2010) y Sánchez (2012) en la elección de una definición, correcta y aceptada por la comunidad matemática, del límite finito de una sucesión y del límite finito de una función en un punto respectivamente. Esta selección se abordaba a través de una consulta a expertos, un instrumento útil de recogida de datos como ya se señaló en Claros, Sánchez y Coriat (2013).

Para la realización de dicha consulta a expertos tomamos como referencia los manuales de análisis más conocidos, como son: Spivak (1975), Bartle (2000), Pozniak (2000), Rey Pastor (1969) y Pestana (2007).

### 3. PRIMER CUESTIONARIO A EXPERTOS

En la búsqueda por encontrar la definición más aceptada por la comunidad matemática sobre el límite infinito de una sucesión, realizamos un cuestionario a expertos en educación matemática (Ver Anexo I). La muestra estuvo formada por 5 profesores de Educación Secundaria y Bachillerato y 4 profesores universitarios, todos ellos con entre 5 y 35 años de experiencia docente. Cada profesor debía atribuir el orden de idoneidad a las 6 definiciones propuestas: un “1” en la que considerase más adecuada desde un punto de vista matemático, un “2” a la que siga en adecuación, etc., hasta llegar al “6”, que se reservaría para la menos adecuada. Además, debía atribuir un “0” a las redacciones que no pudieran considerarse como definiciones o no fueran adecuadas.

El primer cuestionario estuvo formado por las definiciones dadas por los siguientes autores en manuales universitarios: Bradley G.L. y Smith K.L. (1998), Díaz Moreno J.M. (1998), Baenas Tormo T., Martínez de Santiago C. (2007), Brinton Thomas G. (2005), definición con errata y Pestana D., (2007). Todas ellas se pueden encontrar en el anexo I, donde aparece completo el Cuestionario 1.

Durante el análisis se observó que las definiciones donde se encontraba el término divergente o divergencia, distorsionaban el orden de selección por parte del profesorado, llegando a obtener una misma definición el valor “1”, en el caso de que el profesor estuviese de acuerdo con el significado otorgado a la divergencia, o un “0” en el caso de considerarla errónea.

A cada profesor se le atribuyó el nombre de Experto y se le acompañó de la expresión “x.1”, donde “x” es un número del 1 al 9, donde cada uno representa uno de los 9 profesores de la muestra y “1” en referencia a que nos encontramos en los resultados del Cuestionario 1. Utilizamos esta nomenclatura para preservar el anonimato del experto durante todo el análisis de datos.

Mostramos a continuación algunas de las respuestas textuales a una de las definiciones del Cuestionario 1, donde se observa la dificultad con el término divergente.

**Experto 1.1:**  $\{a_n\} \in \mathbb{R}; \{n\} \in \mathbb{N}$ ? Considera que es redundante la afirmación: “En tal caso también se dice que la sucesión  $\{a_n\}$  es divergente” (ver figura 1).

*Diremos que  $\{a_n\}$  tiene por límite  $+\infty$ , o que  $\{a_n\}$  diverge a  $+\infty$ , y lo representaremos mediante  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$  si  $\forall M \in \mathbb{R}, \exists n_0 \in \mathbb{N}/a_n > M \forall n \geq n_0$ . En tal caso también se dice que la sucesión  $\{a_n\}$  es divergente.*

Figura 1. Fragmento Baenas Tormo T., Martínez de Santiago C. (2007).

Experto 3.1: “El termino divergente es ambiguo, ¿cómo se denomina a  $\{x_n\}$  si

$$\lim_{n \rightarrow -\infty} a_n = -\infty \text{?}”$$

Experto 4.1: “Que sea divergente no es lo mismo que el limite sea  $+\infty$ ”.

Mientras que para unos expertos la definición es redundante, para otros el término divergente es ambiguo o erróneo. Esto lleva a distorsionar los resultados finales del Cuestionario 1, donde la aceptación o no del término divergente implica la aceptación o no de la definición del límite infinito, sin considerar la verdadera adecuación de dicha definición que es verdaderamente lo que nos preocupaba.

Dada la falta de uniformidad que encontramos en las respuestas dadas por los profesores en las respuestas al Cuestionario 1, debido sobre todo a las dificultades con el término divergencia que aparecía en algunas definiciones presentadas, decidimos buscar la definición de dicho término en libros de texto y manuales universitarios con el fin de añadirla a un nuevo cuestionario que debería eliminar todo atisbo de dudas en el profesorado.

#### 4. DIVERGENCIA EN LIBROS DE TEXTO

En la búsqueda de la definición de divergencia seleccionamos 5 autores de manuales universitarios que definían el término divergencia o sucesión divergente: Spivak (1975), Bartle (2000), Pozniak (2000), Rey Pastor (1969) y Pestana (2007), así como los libros de texto de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato de González, Llorente y Ruiz (1995), Cólera, Oliveira, García y Santaella (2008), Vizmanos y Anzola (2003), Vizmanos, Hernández, Alcaide, Moreno y Serrano (2011).

En Spivak (1975, p.553) y Bartle (2000, p.54) se definía como una sucesión divergente a la que no es convergente. Previamente el autor había definido como sucesión convergente aquellas que tenían límite finito. En este caso, serían sucesiones divergentes tanto las sucesiones de límite infinito, como aquellas que carecen de límite. Mostramos, a modo de ejemplo, un fragmento escaneado extraído de libro de Bartle (2000) que refleja lo anteriormente expuesto (figura 2):

Para las sucesiones que nos ocupan, las de límite infinito, estas no serán consideradas por Bartle como sucesiones con límite, es decir convergentes, y, por tanto, las clasificará como divergentes (figura 3).

Otra definición de convergencia, es la del matemático Pozniak (1982,p. 54), que admite que una sucesión de límite infinito pueda tener límite, y, por consiguiente, ser

**3.1.3 Definition** A sequence  $X = (x_n)$  in  $\mathbb{R}$  is said to converge to  $x \in \mathbb{R}$ , or  $x$  is said to be a limit of  $(x_n)$ , if for every  $\varepsilon > 0$  there exists a natural number  $K(\varepsilon)$  such that for all  $n \geq K(\varepsilon)$ , the terms  $x_n$  satisfy  $|x_n - x| < \varepsilon$ .

If a sequence has a limit, we say that the sequence is convergent; if it has no limit, we say that the sequence is divergent.

Figura 2. Fragmento Bartle (2000, p.54).

**3.2.8 Examples (a)** The sequence  $(n)$  is divergent.

**(b)** The sequence  $((-1)^n)$  is divergent.

If  $n$  is an odd natural number with  $n \geq K_1$ , this gives  $|-1 - a| < 1$ , so that  $-2 < a < 0$ . (Why?) On the other hand, if  $n$  is an even natural number with  $n \geq K_1$ , this inequality gives  $|1 - a| < 1$  so that  $0 < a < 2$ . Since  $a$  cannot satisfy both of these inequalities, the hypothesis that  $X$  is convergent leads to a contradiction. Therefore the sequence  $X$  is divergent.

Figura 3. Fragmentos Bartle (2000, p.64).

\*\*\*) Notemos que las sucesiones infinitas se denominan a veces sucesiones convergentes hacia el infinito. Por eso, si la sucesión  $\{x_n\}$  es infinita, se escribe simbólicamente así:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty.$$

Si los elementos de la sucesión infinita tienen, partiendo de un número, un signo determinado, se dice que la sucesión  $\{x_n\}$  converge hacia el infinito de signo determinado. Esto se escribe simbólicamente del modo siguiente:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty.$$

Figura 4. Fragmento Pozniak (2000, p.58).

convergente. Según este autor las sucesiones de límite finito son sucesiones convergentes y las sucesiones de límite infinito ( $+\infty$  ó  $-\infty$ ) son convergentes a infinito de signo determinado (figura 4).

Mostramos a continuación un ejemplo de sucesión convergente a infinito de Juan Carlos Gorostizaga dado que en Pozniak (2000) la definición no viene acompañada de ningún ejemplo (figura 5).

Pozniak no aclara que ocurre con la sucesión  $x_n = (-1)^n \cdot n$ , pero dada su definición de sucesiones convergentes hacia el infinito parece que ésta quedaría clasificada como tal.

Una tercera acepción de convergente y divergente es la de sucesión oscilante, propuesta por Rey Pastor (1969, pp.274-275).

**Sucesión convergente a infinito:**

$$1) \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n) = +\infty \rightarrow \forall A > 0 \exists p \in \mathbb{N}, x_n > A$$

Es decir, los términos de la sucesión (para valores de  $n$  altos) pertenecen al entorno de infinito.

Como ejemplo considérese la sucesión de números pares:

$$(2n) = 2, 4, 6, 8, 10, \dots, 10000000, \dots$$

Figura 5. Fragmento web Juan Carlos Gorostizaga (Manual Escuela Técnica Superior de Náutica y Máquinas Navales).

**EJEMPLO 2: La sucesión oscilante 1, 2,  $\frac{1}{2}$ , 3,  $\frac{1}{3}$ , 4,  $\frac{1}{4}$ , ...**

Figura 6. Fragmento Rey Pastor (1969, p.277).

**Algunos autores llaman divergentes a las sucesiones no convergentes a un límite finito. Nosotros seguiremos la nomenclatura más precisa que hemos expuesto.**

Figura 7. Fragmento Rey Pastor (1969, p.275).

Pastor considera que con esta tercera categoría, las sucesiones oscilantes, soluciona uno de los problemas que tenían Bartle y Pozniak con algunas sucesiones. Para él son convergentes las sucesiones que tienen límite finito, divergentes las que tienen límite infinito ( $+\infty$  ó  $-\infty$ ) y oscilantes las que carecen de límite finito e infinito (figura 6).

El autor hace alusión a otras definiciones, que hemos presentado anteriormente (figura 7).

Con la nueva definición de convergente, divergente y oscilante, nos realizamos la siguiente pregunta ¿la sucesión  $x_n = (-1)^n \cdot n$  es convergente, divergente u oscilante?

Considerando que la sucesión  $x_n = (-1)^n \cdot n$  no tiene límite finito, ni infinito, Rey Pastor desearía la clasificación de Pozniak, ya que  $x_n = (-1)^n \cdot n$  no tiene límite finito, y por tanto no es convergente y desearía la clasificación de Bartle de considerarla divergente ya que no tiende infinito.

Pese a su definición de divergencia, para Rey Pastor la sucesión  $x_n = (-1)^n \cdot n$  es divergente por tener límite infinito (figura 8).

Pastor considera más infinito y menos infinito como infinito, de ahí la ambigüedad que pueda existir entre divergente y oscilante en alguna de las sucesiones.

diremos que tie-

ne *límite infinito*, y escribiremos:

$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = \infty$ , o bien:  $\alpha_n \rightarrow \infty$ ,

EJEMPLO 6:

$\frac{5}{1}, \frac{2}{2}, \frac{3}{3}, \frac{10}{4}, \frac{19}{5}, \dots$	$\frac{6 - n^2}{n}, \dots$	$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6 - n^2}{n} = -\infty$
$\frac{7}{1}, \frac{10}{2}, \frac{15}{3}, \frac{22}{4}, \frac{31}{5}, \dots$	$\frac{6 + n^2}{n}, \dots$	$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6 + n^2}{n} = +\infty$
$-2, 4, -8, 16, -32, \dots$	$(-2)^n, \dots$	$\lim_{n \rightarrow \infty} (-2)^n = \infty$

Figura 8. Fragmentos Rey Pastor (1969, p.274).

**Definición 15.3.** Decimos que

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ ,

si para todo  $M \in \mathbb{R}$  existe un  $N \in \mathbb{R}$  tal que  $a_n > M$ , si  $n > N$ . Decim que

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$ ,

si para todo  $M \in \mathbb{R}$  existe un  $N \in \mathbb{R}$  tal que  $a_n < M$ , si  $n > N$ .

Figura 9. Fragmento Pestana (2007, p.436).

A estas diferentes acepciones del término divergencia que hemos encontrado tenemos que sumar una más dada por Pestana (2007, pp.435-436). Este autor propone una nueva definición de sucesión divergente, basada en la definición de Rey Pastor y que es actualmente muy utilizada en los libros de texto de Educación Secundaria y Bachillerato.

Una sucesión es divergente cuando no se acerca a ningún punto finito. Para evitar dudas de la no existencia del límite añade que una sucesión que diverge puede que tenga límite infinito o menos infinito, aclarando, además, ambos términos (figura 9).

Idéntica definición toman algunos libros de texto de Bachillerato, (Colera J., Oliveira M.J., García R., Santaella E., 2009, p.58, Ed. Anaya), (Avellanas L., García J.C., Martínez C., 1996, p.256, Ed. McGraw Hill), (Anzola M., Vizmanos J.R., 2003, p.178, Ed. SM) (figura 10).

Diremos que  $+\infty$  ( $-\infty$ ) es punto de acumulación de una sucesión  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$  si hay términos positivos (negativos) arbitrariamente grandes (pequeños), es decir, si para todo  $M > 0$ , por grande que sea, hay términos  $a_n > M$  ( $a_n < -M$ ). (Avellanas L., García J.C., Martínez C., McGraw Hill 1996, p.256)

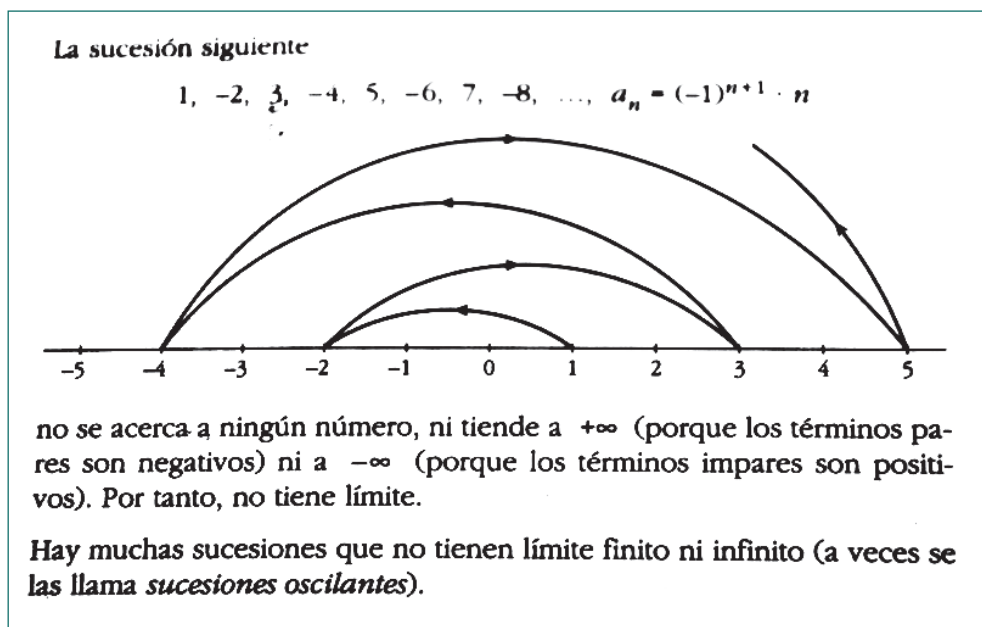


Figura 10. Fragmento Colera J., Oliveira M.J., García R., Santaella E. (2009, p.58, Ed. Anaya).

**8** Marcando en la recta real varios términos de las siguientes sucesiones, comprenderás por qué decimos que «oscilan» entre sus puntos de acumulación.

- (a)  $-1, 1, \dots, -1, 1, \dots$ , con  $a_n = (-1)^n$  tiene dos puntos de acumulación:  $-1$  y  $1$ .
- (b)  $0, 1, 0, 2, 0, 3, 0, 4, \dots$  tiene puntos de acumulación  $0$  y  $+\infty$ .
- (c)  $-1, 1, -2, 2, -3, 3, -4, 4, \dots$  tiene puntos de acumulación  $+\infty$  y  $-\infty$ .

Figura 11. Fragmento Avellanas L., García J.C., Martínez C. (McGraw Hill 1996, p.256).

Llamar puntos a  $+\infty$  y  $-\infty$ , como utiliza este libro de texto, es un abuso del lenguaje. Pese a que en algunos países y algunos manuales españoles los llaman puntos de la recta real completa, nosotros los consideraremos de la forma estándar, es decir que no serán puntos de la recta real.

A continuación resumimos todas las posibles definiciones de divergencia matemática encontradas, en cuatro diferentes acepciones y añadimos la que consideraremos de aquí en adelante en nuestra investigación (Arnal, Claros, Sánchez y Baeza). Las sucesiones de límite finito las consideraremos convergentes, al igual que lo hacen todos los autores estudiados.

Tabla 1. Definiciones de divergencia

	$X_n=1/n$	$X_n=n$	$X_n=(-1)^n \cdot n$	$X_n=(-1)^n$
Bartle	Convergente	Divergente	Divergente	Divergente
Pozniak	Convergente	Convergente a infinito de signo determinado	Convergente a infinito	Divergente
Rey Pastor	Convergente	Divergente	Oscilante/divergente	Oscilante
Pestana	Convergente	Divergente	Oscilante	Oscilante
Arnal-Claros-Sánchez-Baeza	Convergente	Divergente	Ni convergente, ni divergente	Ni convergente, ni divergente

Respecto a nuestra definición de divergencia señalamos lo siguiente:

- Las sucesiones de límite infinito ( $+\infty$  ó  $-\infty$ ), las clasificaremos como divergentes, al considerar que estas sucesiones sí tienen límite, pero este es infinito. Por tanto, la definición de una sucesión divergente buscada inicialmente será equivalente a la de límite infinito de una sucesión.
- Las que no tienen límite, no las consideraremos ni convergentes, ni divergentes.

No consideraremos en nuestro estudio los límites de las subsucesiones contenidas en la sucesión inicial, y por tanto no existirá su límite. Esta consideración ha sido tomada por el contexto en el que nos encontramos, siendo estos los límites estudiados en secundaria.

## 5. SEGUNDO CUESTIONARIO A EXPERTOS

Tras comprobar que el uso del término divergencia, en ninguna de sus acepciones ayudaría a la elección de la definición de límite infinito de una sucesión, y que las dificultades observadas en los profesores también se reproducían en los autores de libros de texto, decidimos eliminar dicho término del segundo cuestionario que elaboramos y que abordamos a continuación. (Ver Anexo II).

En el segundo cuestionario que se elaboró se tuvieron en cuenta las siguientes consideraciones:

- Se buscaron en los libros de texto y manuales universitarios definiciones que no empleaban el término divergencia,
- Se eliminaron las definiciones que habían sido rechazadas en el primer cuestionario.
- Se tomaron 5 definiciones de manera que hubiera una amplia variedad sobre las que los profesores pudieran elegir. Ver Anexo II.

La muestra a la que se administró el Cuestionario 2 estuvo formada por 5 profesores de Educación Secundaria y Bachillerato y 2 profesores universitarios. La forma de

proceder para la evaluación de este cuestionario fue la misma que para el Cuestionario 1. Un “1” significaba que dicha definición era la más adecuada desde un punto de vista matemático, un “2” la que seguía en adecuación, etc., hasta llegar al “5”, que se reservaría para la menos adecuada. Además, los expertos podían atribuir un “0” a aquellas definiciones que no consideraran adecuadas por algún motivo.

Para mantener el anonimato del profesorado, se asignó en este cuestionario la notación  $x.2$ , siendo “ $x$ ” un número comprendido entre el 1 y el 7. Cada número correspondía a un experto que había participado en la realización del Cuestionario 2 y el “2” hacía referencia al cuestionario en el que estábamos trabajando.

Para obtener la puntuación total obtenida para cada definición invertimos el orden dado por cada experto, “1” lo cambiamos a “1”, “2” a “1/2”, “3” a “1/3”, “4” a “1/4” y “5” a “1/5” y sumamos esta cantidad dada por todos los expertos. Todas las puntuaciones pueden encontrarse en el Anexo III.

Después de analizar los datos obtenidos al administrar el Cuestionario 2, pudo observarse que dos de las definiciones, Linés (1983) y Vizmanos et al. (2011), tenían una buena aceptación por parte de los profesores que conformaron la muestra. De hecho la diferencia de puntuación entre ambas definiciones es muy pequeña, así mientras una obtuvo 5 puntos la otra obtuvo  $4+1/12$ . Esto unido al hecho de que los libros de los diferentes periodos educativos comprendidos entre 1969 y 2016 usaran el sistema de representación verbal de manera preponderante y el sistema de representación simbólico apenas tuviese presencia en el límite infinito de sucesiones, tanto en definiciones, como en ejemplos, nos llevó a seleccionar como definición la de Linés (1983) frente a la de Vizmanos (2011).

Así alcanzamos nuestro objetivo de poder seleccionar una definición de límite infinito de sucesiones para abordar su posterior estudio. La definición seleccionada fue:

“Sea  $K$  un cuerpo ordenado, y  $\{a_n\}$  una sucesión de elementos de  $K$ . La sucesión  $\{a_n\}$  tiene por límite “más infinito”, si para cada elemento  $H$  de  $K$ , existe un número natural  $v$ , tal que es  $a_n > H$ , para todo  $n \geq v$ ”.

Pasamos a continuación a describir las conclusiones obtenidas así como las perspectivas futuras que nos proponemos abordar.

## 6. CONCLUSIONES Y PERSPECTIVAS FUTURAS

Después de la realización del Cuestionario 1, el Cuestionario 2 y el análisis de las definiciones de límite infinito de una sucesión y del término divergencia en libros de texto de secundaria y manuales universitarios podemos concluir lo siguiente:

No existe uniformidad en el término divergencia, tanto en profesores como en autores de libros de texto, y esto conlleva diferentes dificultades en su utilización. Se alcanza el objetivo 2 inicialmente planteado después del estudio realizado de los autores: Bartle, Pozniak, Rey Pastor y Pestana en el apartado 4.

Por este motivo se ha tenido que optar por las siguientes definiciones, para continuar nuestro estudio: una sucesión es divergente cuando tiene límite más infinito o menos

infinito, una sucesión es convergente cuando tiene límite finito, y el resto de las sucesiones serán clasificadas como sucesiones ni convergentes, ni divergentes.

El empleo, al mismo tiempo de los términos sucesión divergente y límite infinito de sucesiones no facilita la comprensión de los mismos. Este hecho es constatado en profesores, a través del Cuestionario 1 en el que el uso del término divergencia distorsionó completamente la elección de la definición de límite infinito de sucesiones. Muestra de ello son algunos de los ejemplos mostrados en el apartado 3, alcanzando así el objetivo 3 propuesto.

Como consecuencia de esto nos vimos obligados a redactar un Cuestionario 2 que permitiera elegir una definición de límite infinito de sucesiones correcta y aceptada.

Finalmente, se ha seleccionado una definición de límite infinito de una sucesión, alcanzando el objetivo 1, después de observar que no todas las definiciones que aparecen o han aparecido en los libros de texto son aceptadas por los profesores. La definición considerada, después de dos cuestionarios corresponde a Linés (1983). Esta definición será la que nos permitirá continuar con las siguientes investigaciones.

Debemos indicar que entre las tareas de investigación pendientes se encuentra el análisis de las dificultades que los alumnos pueden presentar después de encontrar en sus libros de textos y en sus profesores, diferentes acepciones de sucesiones divergentes. Además el siguiente paso es realizar un estudio fenomenológico de la definición seleccionada siguiendo a Freudenthal (1983).

## REFERENCIAS

- Avellanas L., García J.C., Martínez C.(1996). Matemáticas 2º Bachillerato. Ed. McGraw Hill
- Baenas Tormo T., Martínez de Santiago C. (2007). Cálculo de variable natural. Ed. Club Universitario.
- Bartle, R.G.(2000). Introduction to Real Analysis. Ed. John Wiley & Sons
- Belmonte J.L y Sierra M.(2011). Modelos intuitivos del infinito y patrones de evolución nivelar. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 14.2, 139-171
- Blázquez, S. (2000). Noción de límite en matemáticas aplicadas a las ciencias sociales. Valladolid: Universidad de Valladolid.
- Blázquez, S. y Ortega, T. (2000). El concepto de límite en la educación secundaria. En el futuro del cálculo infinitesimal. México: Grupo Editorial Iberoamérica
- Bradley G.L., Smith K.L. (1998). Cálculo de una variable. Ed. Prentice Hall
- Brinton Thomas G. (2005). Cálculo. Ed. Pearson Education.
- Claros, J. (2010). Límite finito de una sucesión: fenómenos que organiza. Tesis Doctoral. Granada: Departamento de Didáctica de las Matemáticas.
- Claros, J., Sánchez, T. y Coriat, M. (2013). Sucesión convergente y sucesión de Cauchy: Equivalencia matemática y equivalencia fenomenológica. Enseñanza de las Ciencias. 31.2, 113-131
- Colera J., Olivera M.J., Fernández S. (1997). 2º Bachillerato LOGSE. Ed. Anaya
- Cólera, Oliveira, García y Santaella (2008). Matemáticas 1º Bachillerato. Ed. ANAYA
- Davis, R. y Vinner, S.(1986). The notion of Limit: some seemingly unavoidable misconception stages. Journal of Mathematics Behaviour, 5, 281-303
- Díaz Moreno J.M. (1998). Introducción a la topología de los espacios métricos. Ed. Universidad de Cádiz.

- Dubinsky et al.(2005). Some historical issues and paradoxes regarding the concept of infinity: an APOS analysis: Part 2. *Studies in Mathematics*, 60, 253-266.
- Espinosa, L. y Azcárate, C.(2000). Organizaciones matemáticas y didácticas en torno al objeto “límite de función”: propuesta metodológica para el análisis. *Enseñanza de las Ciencias*, 18.3, 355-368.
- González,C., Llorente, J. y Ruiz, M.J. (1995). *Matemáticas I*. Ed. EDITEX.
- Gorostizaga, J.C. *Manual Escuela Técnica Superior de Náutica y Maquinas Navales*.
- Hauchart, C. y Rouche,N. (1987). *Apprivoiser l’Infini*, Ciaco.
- Hitt, F.(2003). El concepto de infinito: Obstáculo en el aprendizaje de límite y continuidad de funciones en *Matemática Educativa: Aspectos de la Investigación Actual*. México D.F. Editorial Fondo Educativo Interamericano
- Linés E. (1983). *Principios de Análisis Matemático*. Ed. Reverté
- Mamona-Downs, J. (2001). Letting the intuitive bear on the formal; a didactical aproach for the understanding of the limit of a sequence. *Educational Studies in Mathematics*, 48, 259-288
- Morales, A., Reyes, L.E., Hernández, J.C. (2013). El límite al infinito. Análisis preliminar para la elaboración de una estrategia metodológica de su enseñanza-aprendizaje. *Revista Premisa*. 15.3, 3-14
- Núñez, R. (1993). Approaching infinity: a view from cognitive psychology. *Proceedings of the 15th Conference for the Psychology of Mathematics Education*, 105-111.
- Pestana,D. et al (2007).*Curso práctico de Cálculo y Precálculo*. Ed. Ariel Ciencia.
- Pozniak, E. (2000). *Fundamentos del Análisis Matemático*. Ed. MIR.
- Rey Pastor, J.(1969). *Análisis Matemático*. Ed. Kapelusz
- Sacristán, A. (2003). Dificultades y paradojas del infinito: experiencias en un ambiente de exploración computacional. *Matemática Educativa: Aspectos de la investigación actual* (pp.262-279). México: Centro de Investigación y de Estudios Avanzados-FCE.
- Salat, R. (2011). El infinito en matemáticas. *Números*. Vol. 77, 75-83.
- Sánchez, T. (2012). Límite finito de una función en un punto: fenómenos que organiza. Tesis Doctoral. Granada: Departamento de Didáctica de las Matemáticas.
- Sierpinski, A.(1990). Some remarks on understanding in mathematics. *For the Learning of Mathematics*, vol 10.3, 24-36.
- Spivak, M. (1975).*Calculus*. Barcelona. Ed. Reverté.
- Vizmanos J.R. y Anzola, M. (2003) *Matemáticas 4º E.S.O*. Ed. SM.
- Vizmanos J.R., Hernández J., Alcalde F., Moreno M., Serrano E. (2011). *2º Bachillerato*. Ed. SM
- Weller, K., Brown, A., Dubinsky, E., McDonad, M, Stenger, C. (2004). Intimations of infinity. *Notice of the AMS*, 51, 741-750.
- Zorich V.A. (2004) *Mathematical Analysis I*. Ed. Springer

## ANEXO I

DEFINICIONES	PUNTUACIÓN
<p><b>Definición 1</b></p> <p><math>\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty</math> significa que, para todo número real <math>A</math>, se verifica que <math>a_n &gt; A</math> para todo <math>n</math> suficientemente grande.</p>	
<p><b>Definición 2</b></p> <p>Una sucesión real <math>(x_n)</math> es divergente y escribimos <math>\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \infty</math> si para todo <math>k &gt; 0</math> existe <math>m \in \mathbb{N}</math> tal que <math> x_n  &gt; k</math> para todo <math>n \geq m</math>.</p>	
<p><b>Definición 3</b></p> <p>Diremos que <math>\{a_n\}</math> tiene por límite <math>+\infty</math>, o que <math>\{a_n\}</math> diverge a <math>+\infty</math>, y lo representamos mediante <math>\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty</math> si <math>\forall M \in \mathbb{R}, \exists n_0 \in \mathbb{N} \mid a_n &gt; M, \forall n \geq n_0</math>. En tal caso también se dice que la sucesión <math>\{a_n\}</math> es divergente.</p>	
<p><b>Definición 4</b></p> <p>La definición <math>\{a_n\}</math> diverge a infinito si para todo número <math>M</math> existe un entero <math>N</math> tal que para todo <math>n</math> mayor que <math>N</math>, <math>a_n &gt; M</math>. Si se cumple esta condición, escribiremos <math>\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty</math> o <math>a_n \rightarrow +\infty</math>.</p>	
<p><b>Definición 5</b></p> <p>Escribimos <math>x_n \rightarrow +\infty</math> y decimos que la sucesión <math>\{x_n\}</math> tiende a <math>+\infty</math> si para cada <math>c \in \mathbb{R}</math> existe <math>N \in \mathbb{N}</math> tal que <math>d(x_n, c) &gt; 0</math> para todo <math>n &gt; N</math>.</p>	
<p><b>Definición 6</b></p> <p>Decimos que <math>\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty</math> si para todo <math>M \in \mathbb{R}</math> existe un <math>N \in \mathbb{R}</math> tal que <math>a_n &gt; M</math> si <math>n &gt; N</math>.</p>	

1. Pese a no encontrarse en el primer cuestionario, señalamos las referencias bibliográficas de cada una de las definiciones.

**Definición 1:** Bradley G.L., Smith K.L. (1998). Cálculo de una variable. Ed. Prentice Hall

**Definición 2:** Díaz Moreno J.M. (1998). Introducción a la topología de los espacios métricos. Ed. Universidad de Cádiz

**Definición 3:** Baenas Tormo T., Martínez de Santiago C. (2007). Cálculo de variable natural. Ed. Club Universitario

**Definición 4:** Brinton Thomas G. (2005). Cálculo. Ed. Pearson Education

**Definición 5:** Zorich V.A. (2004) Mathematical Analysis I. Ed. Springer

La definición del cuestionario es una adaptación y traducción de Zorich (2004). En dicha definición aparecía  $x_n > c$ . Al copiar dicha definición se cometió una errata ya que se había sustituido  $x_n > c$  por  $d(x_n, c) > 0$

**Definición 6:** Pestana D., Rodríguez J.M., Romera E., Touris E., Álvarez V y Portilla A. (2000). Curso práctico de Cálculo y Precálculo. Barcelona. Ariel Ciencia

## ANEXO II<sup>2</sup>

DEFINICIONES	PUNTUACIÓN
<p><b>Definición 1</b>  <math>\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty</math> significa que, para todo número real A, se verifica que <math>a_n &gt; A</math> para todo <math>n</math> suficientemente grande.</p>	
<p><b>Definición 2</b>                      Sea K un cuerpo ordenado, y <math>\{a_n\}</math> una sucesión de elementos de K. La sucesión <math>\{a_n\}</math> tiene por límite “más infinito”, si para cada elemento H de K, existe un número natural v, tal que es <math>a_n &gt; H</math>, para todo <math>n \geq v</math>.</p>	
<p><b>Definición 3</b>  <math>\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty \Leftrightarrow \forall M &gt; 0</math> se puede encontrar un <math>n_0 \in \mathbb{N}</math> tal que si <math>n &gt; n_0 \Rightarrow a_n &gt; M</math></p>	
<p><b>Definición 4</b>                      El límite de una sucesión es <math>\infty</math>, <math>\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = \infty \Leftrightarrow</math> Podemos conseguir que <math>s_n</math> sea tan grande como queramos dándole a <math>n</math> valores suficientemente grandes.</p>	
<p><b>Definición 5</b>                      Decimos que <math>\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty</math>, si para todo <math>M \in \mathbb{R}</math> existe un <math>N \in \mathbb{R}</math> tal que <math>a_n &gt; M</math> si <math>n &gt; N</math>.</p>	

2. Pese a no encontrarse en el segundo cuestionario, señalamos las referencias bibliográficas de cada una de las definiciones.

**Definición 1:** Bradley G.L., Smith K.L. (1998). *Cálculo de una variable*. Ed. Prentice Hall.

**Definición 2:** Linés E. (1983). *Principios de Análisis Matemático*. Ed. Reverté.

**Definición 3:** Vizmanos J.R., Hernández J., Alcalde F., Moreno M., Serrano E. (2011). *2º Bachillerato*. Ed. SM.

**Definición 4:** Colera J., Olivera M.J., Fernández S. (1997). *2º Bachillerato LOGSE*. Ed. Anaya.

**Definición 5:** Pestana D., Rodríguez J.M., Romera E., Touris E., Alvarez V y Portilla A. (2000). *Curso práctico de Cálculo y Precálculo*. Barcelona. Ariel Ciencia.

## ANEXO III

Las siguientes puntuaciones fueron las obtenidas en el Cuestionario 1 y en el Cuestionario 2.

### Cuestionario 1

	Def. 1	Def. 2	Def. 3	Def. 4	Def. 5	Def. 6
<b>Experto 1.1</b>	1	0	1/2	1/3	0	1/4
<b>Experto 2.1</b>	1/2	0	1	1/5	0	1/6
<b>Experto 3.1</b>	1	0	0	1/4	1/2	1/3
<b>Experto 4.1</b>	1/6	0	0	0	0	1/6
<b>Experto 5.1</b>	1	0	1/2	1/3	0	1/4
<b>Experto 6.1</b>	1/4	1/3	1	1/2	1/6	1/3
<b>Experto 7.1</b>	1/5	1/4	1	1/2	1/6	1/3
<b>Experto 8.1</b>	1/5	0	1/2	0	1/4	1/3
<b>Experto 9.1</b>	1/3	0	1	0	1/4	1/2

### Cuestionario 2

	Def. 1	Def. 2	Def. 3	Def. 4	Def. 5
<b>Experto 1.2</b>	1/4	1/2	1	0	1/3
<b>Experto 2.2</b>	1/2	1	0	0	1/3
<b>Experto 3.2</b>	1/3	1	1/2	1/4	1/5
<b>Experto 4.2</b>	1/3	1/2	1	1/4	1/5
<b>Experto 5.2</b>	0	1	1/3	0	1/2
<b>Experto 6.2</b>	1/3	0	1	0	1/2
<b>Experto 7.2</b>	1/2	1	1/4	0	1/3
<b>Total</b>	2 + 1/4	5	4 + 1/12	1/2	2 + 2/5

## Videojuegos de estrategia en Educación Matemática. Una propuesta didáctica en secundaria

Irene Ferrando

Jaime Castillo

Marta Pla-Castells

Universitat de València

**Resumen:** *En este trabajo presentamos el análisis de una propuesta didáctica basada en una actividad de modelización para trabajar conceptos y procedimientos matemáticos mediante el videojuego Bloons Tower Defense 5. Se trata de un videojuego del género de defensa de torres y es un juego de estrategia en el que el jugador debe defender un territorio utilizando torres defensivas que disparan fuego a los enemigos de forma autónoma. El análisis de la propuesta didáctica presentada se basa en una experiencia llevada a cabo con alumnos de 4º curso de ESO y, según los resultados, se realizarán algunas propuestas de mejora al modelo de enseñanza inicial. La propuesta diseñada permite trabajar contenidos del bloque de funciones a través de la resolución de problemas de modelización. Además, los resultados de este estudio exploratorio pueden posibilitar la realización de investigaciones en el ámbito de la modelización.*

**Palabras clave:** *modelización, videojuegos, gamificación, educación matemática*

## Strategy video games in Mathematics Education. A didactic proposal in secondary

**Abstract:** *In this work, we present the analysis of a didactic proposal based on a modeling activity. The proposal aims to work mathematical contents through the video game Bloons Tower Defense 5. It is a tower defense genre strategy videogame in which the player must defend a territory using defensive towers that fire at enemies autonomously. The analysis of the present didactic proposal is based on an experience carried out with 10<sup>th</sup> grade' students. We will present some improvement proposals to the initial teaching*

*model based on the results of the experience. The activity allows to work contents related to functions of the through modelling problem solving. Moreover, the exploratory results can promote future research on modelling.*

**Key words:** *modelling, videogames, gaming, mathematics education*

## JUSTIFICACIÓN E INTRODUCCIÓN

Los juegos requieren relacionarse con unas reglas, incitan al uso de técnicas que lleven al éxito y permiten desarrollar patrones complejos, equivalentes a problemas matemáticos (de Guzmán, 2007). La introducción del juego en las aulas permite trabajar contenidos matemáticos complejos a través de la gamificación, metodología definida como el uso de técnicas, elementos y dinámicas propias de los juegos y el ocio en actividades no recreativas con el fin de potenciar la motivación, así como reforzar la conducta para solucionar un problema u obtener un objetivo (Deterding, Dixon, Khaled y Nacke, 2011).

En particular, Charsky, (2010) considera que las características esenciales de los videojuegos que los habilitan como herramientas en entornos educativos son la competición, la presencia de objetivos, la existencia de reglas bien definidas y la necesidad de tomar decisiones. Todas estas características son fácilmente extrapolables al proceso de resolución de problemas matemáticos. Por este motivo, se ha diseñado un buen número de videojuegos educativos concebidos para ser herramientas de enseñanza en matemáticas. No obstante, se ha comprobado que los videojuegos educativos no son los que más interesan a los estudiantes y éstos prefieren jugar a videojuegos comerciales, diseñados para potenciar su aspecto lúdico (Hamlen, 2011). Esto justifica el interés por adaptar videojuegos comerciales, a priori recreativos, para utilizarlos como herramientas de enseñanza (véase Albarracín, Hernández-Sabaté y Gorgorió, 2017).

Por otro lado, diferentes autores proponen el uso de problemas de modelización, entendidos como problemas reales, complejos y de respuesta abierta, como herramienta de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. En efecto, en línea con lo afirmado por Blum (2002), los seres humanos aprenden matemáticas para entender el mundo que les rodea, para resolver problemas que les afectan o para prepararse para futuras profesiones. Al tratar la cuestión de cómo aprender matemáticas, no podemos dejar pasar las relaciones que éstas tienen con la realidad, y aquí es donde entra en juego la modelización. La interpretación y validación de los resultados obtenidos tras la matematización del modelo son, por tanto, habilidades esenciales para la resolución de problemas de enunciado verbal.

Así como los enunciados verbales de los problemas, los videojuegos también se inspiran en la realidad y, en ocasiones, la simulan. Es por esto que en un gran número de videojuegos solemos encontrar situaciones cuasi-reales. En esta línea, los videojuegos ofrecen una oportunidad única en el terreno de la modelización, por sus ventajas (la interacción del usuario con la interfaz y la claridad de los resultados que son consecuencia de las decisiones tomadas) y porque partir de un modelo previamente idealizado, simplificado y programado, tiene un interés didáctico claro a la hora de acercar a los alumnos a la modelización.

Este trabajo consiste en el diseño y el análisis de una propuesta didáctica enfocada a trabajar contenidos de funciones a través de la gamificación. Globos y Monos,

Modelización con Bloons Tower Defense 5 (BTD5<sup>1</sup>), es una actividad de modelización matemática para trabajar las funciones lineales con alumnos de 4º ESO. La actividad está diseñada a partir de un videojuego comercial llamado Bloons Tower Defense 5 (BTD5), y busca aprovechar sus características específicas en el aprendizaje de las matemáticas.

Los contenidos que se van a trabajar a través de la propuesta se incluyen en el bloque de funciones. Diferentes autores (Janvier, 1978, Azcárate y Deulofeu, 1999), señalan la importancia de introducir el concepto de función a través de problemas contextualizados. Las actividades de modelización son algo más que eso, pues el contexto no es sólo un marco para la actividad. El objetivo de las actividades de nuestra propuesta es que los alumnos utilicen el lenguaje matemático para verbalizar matemáticamente un proceso.

Así, esta propuesta se enmarca dentro del uso de videojuegos como entornos de resolución de problemas, pues se pretende hacer uso de la modelización matemática para resolver problemas que nacen del contenido del propio videojuego. Según la revisión de la literatura que se hace en Blum y Niss (1991), en modelización matemática se empieza con un problema real, esto es, una situación que lleva consigo ciertas preguntas abiertas que desafían intelectualmente a algún individuo que no está en posesión inmediata de métodos, procesos o algoritmos directos y suficientes para resolver estas preguntas. Este problema, cuyos elementos pertenecen a algún segmento del mundo real y permiten que algunos conceptos, métodos y resultados matemáticos entren en juego, ha de ser simplificado, idealizado, estructurado y sometido a las condiciones y suposiciones apropiadas. El mundo real se matematiza: sus datos, conceptos y relaciones y las condiciones y suposiciones asumidas han de ser traducidos a matemáticas. Así se pasa del modelo real al modelo matemático, donde los elementos básicos de la situación original se corresponden con objetos matemáticos que se relacionan según las relaciones del modelo real.

En los siguientes apartados describiremos las características del videojuego utilizado en el diseño de la propuesta y, a continuación, presentaremos la propuesta original tal y como fue puesta en marcha en un grupo natural de 4º curso de ESO en un centro público de Valencia. En base al análisis de la experiencia llevada a cabo, en particular de las dificultades encontradas, aportaremos una propuesta de mejora.

## DESCRIPCIÓN DEL VIDEOJUEGO

Este juego pertenece al género *tower defense*, que se caracteriza por una serie de mecánicas comunes:

- Cada nivel consiste en un mapa sobre el cual hay un camino.
- Por el camino circulan una serie de enemigos que aparecen en hordas, dividiendo cada nivel en diferentes rondas.
- El jugador ha de disponer una serie de torres fijas en puntos del mapa escogidos por el que atacarán a los enemigos dentro de un determinado radio de acción y con una fuerza determinada, ambas características específicas de la torre.

---

1. <http://www.minijuegos.com/juego/bloons-td-5>.

- Las torres se compran con el recurso del juego (dinero, monedas, etc.) y se mejoran para potenciar sus características. Estas monedas se obtienen o bien a un ritmo constante, o bien por acabar con enemigos.
- El objetivo del juego es sobrevivir a los sucesivos ataques de los enemigos, evitando que lleguen al final del camino.

En el caso concreto del *BTD5*, los enemigos son unos globos de colores y las torres suelen tomar la forma de monos que lanzan dardos a los globos para reventarlos. Estas características lo hacen más atractivo por su aspecto gráfico y lo liberan de la violencia que generalmente impregna estos videojuegos, facilitando su uso como herramienta de enseñanza. En cualquier caso, la propuesta puede adaptarse fácilmente a cualquier otro videojuego de características similares (Albarracín, 2014).

## DESCRIPCIÓN DE LA PROPUESTA ORIGINAL

La actividad está diseñada para que los alumnos realicen una tarea de modelización en una de las situaciones más básicas del videojuego *BTD5*. La situación problemática de partida es la optimización del recurso del que disponemos en el videojuego (las monedas) a través de la búsqueda de la máxima eficiencia de las torres que dispongamos sobre el mapa. Para ello, los alumnos seguirán los pasos del proceso de modelización decidiendo qué información es relevante a la hora de construir el modelo y cómo matematizarlo adecuadamente, guiados por los ejercicios de la actividad.

En el proceso de matematización aparecerán los conceptos de variable, función e inequación como piezas clave en la resolución. En concreto, se hará hincapié en el trabajo sobre la función lineal: los alumnos dispondrán de una serie de magnitudes que están linealmente relacionadas entre sí, y deberán escribir esas relaciones en términos matemáticos, escogiendo aquella que les resulte más útil para su objetivo. Además, se pretende utilizar la modelización como herramienta de enseñanza no sólo de estos contenidos, sino también de las competencias de interpretación, toma de decisiones y validación de resultados, fundamentales en el aprendizaje de matemáticas.

Para esta actividad se ha escogido el mapa inicial (véase Figura 1), y se pedirá a los alumnos que maximicen la eficacia de la torre más básica del juego, llamada *mono lanzadardos*, de cara a conseguir destruir el mayor número de globos posible. El objetivo último es aguantar el mayor tiempo posible sin gastar más monedas, lo que nos permitirá ahorrar y comprar torres más poderosas (y más caras) que nos darán una ventaja considerable. Este es el elemento motivacional que da sentido a la actividad.

La maximización de la eficacia del primer *mono lanzadardos* que coloquemos en el mapa tiene dos partes bien diferenciadas: la elección de la posición de la torre y la elección de sus mejoras.

La propuesta está dividida en seis bloques que secuencian el proceso de modelización. Se propone la realización de esta actividad a lo largo de cuatro sesiones: una primera sesión de toma de contacto, planteamiento de la tarea y discusiones iniciales sobre el modelo; dos sesiones más para el trabajo de los ejercicios correspondientes a la matematización del modelo y la validación de las hipótesis a través del trabajo con funciones



Figura 1.

y variables; y una última sesión de revisión de resultados y ampliación de la actividad. En la experiencia que llevamos a cabo con un grupo de alumnos de 4º de ESO, solo dispusimos de dos sesiones y, por tanto, los alumnos solo pudieron abordar hasta el bloque 4. En la Tabla 1 presentamos la organización temporal de la propuesta.

Tabla 1: Organización temporal de la propuesta

Primera sesión	Toma de contacto y discusión sobre el modelo inicial	Bloques 1 y 2
Segunda sesión	Matematización del modelo y validación	Bloques 3 y 4
Tercera sesión	Generalización	Bloque 5
Cuarta sesión	Ampliación y mejoras del modelo	Bloque 6

Esta propuesta se ha diseñado para que los alumnos trabajen en grupos de dos o tres personas, aunque también se proponen puestas en común en gran grupo.

El papel del profesor será el moderador en los debates que se generen en el aula: tendrá que clarificar el contexto y resolver las dudas que pudieran surgir además de conducir a los estudiantes a las respuestas que se esperan. En cuanto a los materiales, a cada alumno se le entregará un cuadernillo con los enunciados de los ejercicios y el profesor dispondrá de un iPad® con el videojuego BT5 conectado a un proyector.

### Bloque 1. Observación y formación de criterios

En este primer bloque que inicia la primera sesión, el profesor presentará a los alumnos el videojuego. Con su iPad® conectado a un proyector, explicará las mecánicas

básicas del juego jugando las primeras rondas de algunas partidas. Es importante aquí que el profesor recalque que el objetivo principal es maximizar la eficiencia del recurso del juego, las monedas, y que se plantee entonces la cuestión más básica: la maximización de la eficacia del *mono lanza-dardos*.

El objetivo de la actividad de este bloque es escoger un lugar para colocar el primer *mono lanza-dardos* de la partida y para ello los alumnos cuentan en su cuadernillo con dos pantallas del juego impresas (Figura 1 y Figura 2)

En la primera parte de este bloque, los alumnos decidirán dónde colocarían al primer *mono lanza-dardos* respondiendo a los siguientes apartados:

Tabla 2: Actividades Bloque 1

Podemos poner el *mono lanza-dardos* en cualquier lugar que no esté sobre el camino por el que van a pasar los globos.

- 1.a) ¿Cuál crees que es el mejor lugar para poner el *mono lanza-dardos*? Puedes marcarlo en el mapa.
- 1.b) ¿Por qué crees que este es el mejor lugar?
- 1.c) ¿Podrías escribir ese motivo en forma de criterio?
- 1.d) ¿Podrías dar otros criterios que crees que no son tan buenos como el tuyo y explicar por qué?
- 1.e) Vamos a poner en común ahora los criterios que hemos elegido en cada grupo y ponernos de acuerdo sobre cuál será el mejor criterio. Apúntalo aquí:
- 1.f) Aplica el criterio a cada una de las posiciones marcadas en el siguiente dibujo.
  - Posición A: .....
  - Posición B: .....
  - Posición C: .....
- 1.g) Siguiendo el criterio, y teniendo en cuenta la respuesta del apartado anterior, ¿Cuál es la mejor posición para colocar al mono, A, B o C?

Este ejercicio está pensado para que se resuelvan en pequeños grupos los apartados de 1.a) a 1.d) con la ayuda de la Figura 1, se haga una puesta en común en gran grupo para el apartado 1.e) y se resuelvan a continuación (en pequeños grupos) los apartados 1.f) y 1.g) con la Figura 2.

En los primeros cuatro apartados, los alumnos tendrán que pasar de su idea intuitiva sobre dónde es mejor colocar al mono a la elaboración de un criterio que avale que esa posición es mejor que otras, comparándolo con otros. Con esto se pretende, por un lado, forzar la concienciación de los propios alumnos sobre su proceso mental en la toma de decisiones y, por otro lado, apelar a su competitividad para aumentar su motivación.

En la puesta en común se espera que se llegue a la conclusión de que el mejor criterio para colocar al *mono lanza-dardos* es aquel lugar en el que el radio de visión del mono abarque mayor longitud de camino. Esto resulta trivial cuando se tiene en cuenta que la latencia de tiro es constante y que los globos serán de un sólo tipo y viajarán a una velocidad constante e igualmente espaciados, por lo que, a más longitud, más tiempo para reventar globos, y más globos reventados. En los apartados 1.f) y 1.g) los alumnos deberán aplicar el criterio escogido a las posiciones específicas que aparecen en la Figura 2. En este momento, probablemente surja la pregunta de cómo tomar la medida, pues el



Figura 2.

camino es ancho, esto da pie a introducir diferentes maneras de medir. Una manera de intentar que todos los grupos midan igual es proponer dibujar una poligonal que discorra por el centro de cada segmento recto del camino.

Las posiciones entre las que se pide que se elija la mejor son posiciones prototípicas: la (A) es la posición encajada, la (B) y la (C) son, respectivamente, posiciones interiores y exteriores a una esquina (véase Figura 2). La caracterización de estas posiciones como ejemplos de una categoría más amplia puede ser interesante de cara a una posible extensión del modelo a situaciones más generales.

## Bloque 2. Construcción del modelo

En este bloque se pedirá a los alumnos que estudien la situación para su modelización a través de las siguientes preguntas:

Tabla 3: Preguntas Bloque 2

- |   |
|---|
| <p>2.a) Intenta dividir el fenómeno en una serie de pasos, siendo todo lo cuidadoso que puedas.</p> <p>2.b) Ahora vamos a ponernos todos de acuerdo en una serie de pasos que utilizaremos para modelizar el fenómeno</p> |
|---|

Estos ejercicios se realizarán en la segunda parte de la primera sesión. Con su resolución, se pretende que se lleve a cabo una discusión, primero dentro de cada grupo y después en común entre los grupos, para simplificar el problema de cara a crear un modelo matemático.

En cuanto a la resolución de este bloque, se espera que al final se llegue a una descomposición de la situación similar a la siguiente:

- Los globos entran en el mapa (omisible).
- El primer globo entra en el campo de visión del mono.
- El mono apunta y dispara.
- El dardo llega hasta el globo y lo revienta.
- El mono se gira y dispara al siguiente globo (una vez ha pasado el tiempo suficiente para que pueda volver a disparar).
- Si no le da tiempo a disparar a algún globo porque está ya fuera de su radio de visión, se le escapa y va a por el siguiente.
- Esto se repite hasta que no hay más globos.

Uno de los aspectos puede resultar difícil o controvertido es que el dardo tarda un tiempo en llegar al globo desde que es lanzado por el mono. Si se observa cuidadosamente, el dardo lleva una velocidad constante desde que el mono lo dispara hasta que llega al globo, por lo tanto, el tiempo que tarda en llegar al globo depende de la distancia del mono al globo y del camino que el globo esté recorriendo. Sin embargo, como el radio del mono es de visión, se puede comprobar experimentalmente que es suficiente que el mono haya visto al globo y le dispare, pues el globo reventará igualmente cuando el dardo le impacte, aunque esté fuera del radio de visión.

Considerar o no cada uno de estos factores puede hacer el ejercicio mucho más complicado de lo que se quiere, y este puede ser un buen momento para introducir la simplificación como parte del proceso de modelización. En esta actividad se ha escogido considerar que el dardo impacta al globo siempre 0.5s después de ser disparado para simplificar el problema.

### Bloque 3. Orientación para la matematización del modelo

Los bloques 3 y 4 van orientados a la comprobación de que se ha escogido la mejor posición para el *mono lanza-dardos*, esto es, que el criterio escogido en el bloque 1, fundamentado en una serie de hipótesis teóricas, se valida experimentalmente. Para ello, durante la segunda sesión, los alumnos averiguarán, trabajando sobre su modelo matemático, si el primer *mono lanza-dardos* que se ha colocado en la posición (A) es capaz de reventar todos los globos de la primera ronda, con el objetivo de encontrar una manera de saber predecir si el mono podrá reventar todos los globos de una ronda determinada sólo con los datos de esta ronda.

En primer lugar, se presentan las características de la ronda:

Tabla 4: Características actividades Bloque 3

Características de la Ronda 1:

- 20 globos rojos.
- Distancia entre globos consecutivos: 1.6 cm.
- Todos los globos viajan a una velocidad de 2 cm/s.
- Longitud total del camino dentro del área de visión: 10,5 cm.
- Latencia de tiro (tiempo mínimo entre disparos) es de 0.8s.
- Tiempo de vuelo del dardo (entre el mono y el globo): 0.5s.

Este bloque consta de una única pregunta que se divide en dos apartados, uno para la discusión dentro del grupo y otra para la discusión entre grupos.

Tabla 5: Preguntas Bloque 3

- |  |
|--|
| <p>3.a) ¿Qué podemos utilizar para saber si el <i>mono lanza-dardos</i> es capaz de reventar un globo? Apunta aquí un par de ideas</p> <p>3.b) Vamos a ponerlas en común para elegir una de ellas, la que nos parezca más útil para poder construir el modelo teórico. Apunta aquí la que escogamos.</p> |
|--|

Lo que se busca iniciar en este bloque y terminar con el bloque 4 es que los estudiantes reconozcan que, para saber si un globo ha reventado, hay que considerar tres variables: el número de ese globo dentro de su ronda, el tiempo que pasa hasta que revienta y la distancia recorrida hasta que revienta.

El tiempo y la distancia recorrida por el globo son relevantes porque sirven para comprobar si el globo ha reventado o no. En efecto, sabiendo la distancia teórica (recorrida desde un punto de referencia) a la que el globo reventaría y sabiendo la distancia máxima (desde el mismo punto de referencia) a la que el mono podría reventar el globo, podemos deducir que, si la primera es mayor que la segunda, entonces ese globo no habría reventado. El tiempo es la variable que utilizaremos como hilo conductor del suceso que estamos modelizando, y está relacionado con la distancia recorrida por el globo a través de un dato conocido: su velocidad. Además, el número de globos será importante porque, conocido lo anterior, podríamos comprobar cuántos globos sería capaz de reventar el mono, y comparar ese número con el número de globos que tiene la ronda para saber si el mono es capaz de hacernos superar la ronda por sí mismo o no.

Así, se pretende que se identifiquen estas tres variables y que, además, se explique cómo utilizarlas para comprobar si el mono supera la ronda. Para ello, recurrimos a preguntas para orientar a los alumnos: “¿Qué queremos saber?”, “Si supiéramos la distancia que ha recorrido un globo, ¿qué necesitaríamos para saber si ha reventado?”, “¿Cómo podemos saber la distancia que ha recorrido un globo?”, etc.

#### Bloque 4. Matematización del modelo

Las preguntas de este bloque, detalladas en la Tabla 6, pretenden obtener una matematización inicial del modelo, tomando como caso la primera ronda.

La idea es que los estudiantes identifiquen las variables físicas que intervienen en el modelo (apartados 4.a) y 4.b)), y que obtengan sus valores para los primeros globos (apartados de 4.c) a 4.i)). De ahí, los alumnos tendrán que encontrar un patrón a través de los apartados 4.j) y 4.k)) que servirá para contestar a la pregunta inicial: ¿Podrá el *mono lanza-dardos* reventar todos los globos de la Ronda 1 desde la posición (A)? Esta pregunta debería ser fácil de responder para ellos, pues como los globos están suficientemente separados entre ellos, todos revientan en la misma posición y, por tanto, la función que determina la distancia en función del número del globo es una función constante que nunca alcanza la cota de la distancia máxima a la que el mono es capaz de reventar globos.

Tabla 6: Preguntas Bloque 4

- 4.a) ¿Qué variables serán útiles para describir el fenómeno utilizando el criterio de la pregunta 3.b)?
- 4.b) Apunta aquí las variables que decidamos entre todos que vamos a utilizar.
- 4.c) ¿Qué valor será el inicial para cada variable y qué significará para cada variable dentro del fenómeno?
- 4.d) ¿Cuál sería el siguiente momento importante según la división en pasos del fenómeno en 2.b)?
- 4.e) ¿A qué distancia estará el siguiente globo del punto inicial en ese instante?
- 4.f) ¿Cuándo podrá el *mono lanza-dardos* disparar de nuevo?
- 4.g) ¿Dónde estará el segundo globo en ese instante?
- 4.h) ¿Puedes calcular los valores de las variables para el segundo globo en el instante en que revienta?
- 4.i) Observa el siguiente esquema que resume los datos de las preguntas anteriores y completa lo que pasará para el tercer globo.

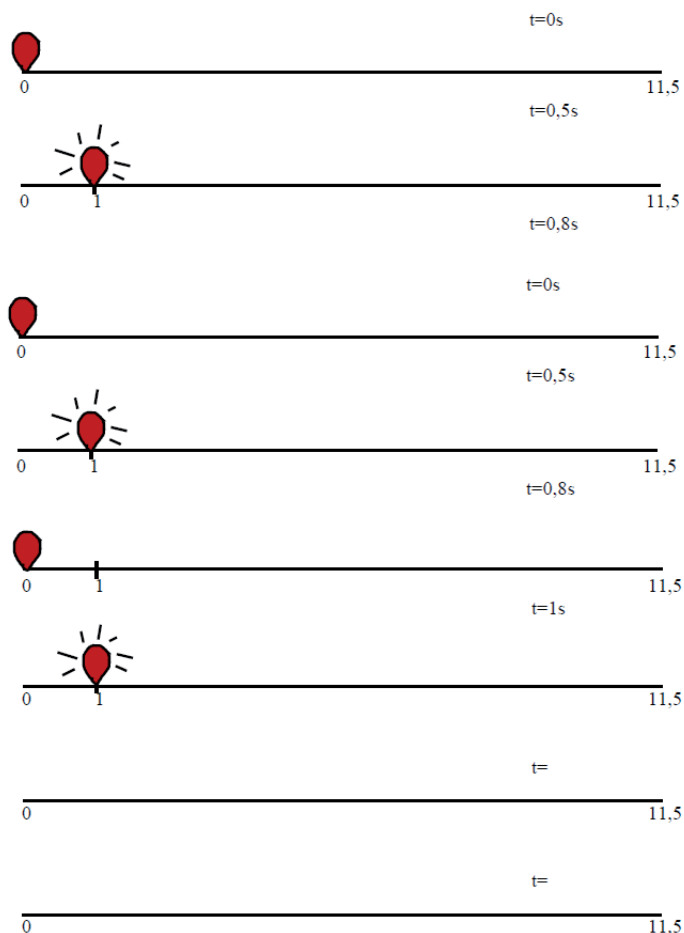


Tabla 6: Preguntas Bloque 4 (continuación)

4.j) Completa la siguiente tabla con la información de los apartados anteriores

Nº de globo	1	2	3	4	...	n
Instante en que revienta					...	
Distancia que recorre hasta que revienta					...	

4.k) ¿Qué conclusión puedes sacar de la última columna de la tabla? Antes de pasar a la resolución del apartado 4.c, es conveniente iniciar dos discusiones: una relativa a la elección de un sistema de referencia y otra relativa a los errores de medición.

### Bloque 5. Generalización del modelo. Expansión de resultados

Este bloque, desarrollado durante la tercera sesión, contiene cuestiones que buscan que los estudiantes generalicen el trabajo hecho para el caso de la Ronda 1 a la Ronda 2. El objetivo es que afiancen el trabajo ya realizado y que puedan contrastar los resultados obtenidos de los cálculos en el bloque 4 con los obtenidos en este bloque, véase Tabla 7.

Cuando los alumnos lleguen al apartado 5.b) deberán ser capaces de ver que la función que da la distancia que recorre un globo antes de reventar ya no es constante, y que ahora no pueden asegurar que todos los globos de la ronda reventarán. En el apartado 5.c) se les pide que expliciten este hecho, y en el apartado 5.d) han de encontrar alguna estrategia para predecir si el *mono lanza-dardos* podrá reventar todos los globos de la Ronda 2 desde la posición (A). Aquí entra en juego el trabajo con inecuaciones. Para ello, podrán hacer uso de la expresión algebraica que se les pide en la última columna de la tabla del apartado 5.b), y tendrán que compararla con la distancia máxima para ver cuál será el primer globo que teóricamente el mono no reventará. Entonces, si ese número es inferior a 30, que es el número de globos que tiene la Ronda 2, no se superará la Ronda. Por tanto, si el *mono lanza-dardos* no es capaz de reventar todos los globos y la Ronda 2 no se supera, los alumnos deben pensar cómo mejorar al mono para poder pasar a la siguiente Ronda.

### Bloque 6. Ampliación: mejoras

Este es el último bloque de la propuesta, y el objetivo es que los alumnos modifiquen el modelo obtenido previamente. Estamos en la situación de que el *mono lanza-dardos* en la posición (A) no ha podido superar la Ronda 2, hay dos opciones de mejora: aumentar su radio de acción, o bien aumentar el número de globos que un dardo es capaz de reventar. Se pide a los alumnos que estudien el efecto de cada una de estas mejoras y escojan cuál sería la más eficiente con las siguientes preguntas:

Tabla 7: Características y preguntas Bloque 5.

Características de la Ronda 2:

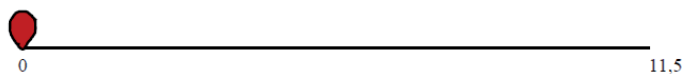
- 30 globos rojos.
- Distancia entre globos consecutivos: 1 cm aproximadamente.
- Todos los globos viajan a una velocidad de 2 cm/s.

Además, ya sabíamos que:

- Longitud total del camino dentro del área de visión: 10,5 cm.
- Latencia de tiro (tiempo mínimo entre disparos) es de 0.8s.
- Tiempo de vuelo del dardo (entre el mono y el globo): 0.5s

5.a) Completa el siguiente esquema sobre la ronda dos escribiendo en cada instante el paso que está ocurriendo (de los de la lista de 2.b) y los globos que aparecen en el camino, marcando la distancia a la que están del punto inicial y cuando revientan.

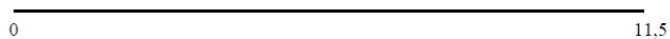
1)  $t=0$ . 7El primer globo es avistado por el mono lanzadardos.



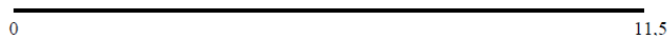
2)  $t=$  .



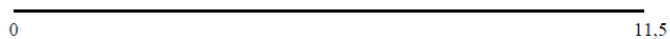
3)  $t=$  .



4)  $t=$  .



5)  $t=$  .



5.b) Rellena ahora esta tabla con la información recogida

Nº de globo	1	2	3	4	...	n
Instante en que revienta					...	
Distancia que recorre hasta que revienta					...	

5.c) ¿Puedes destacar alguna diferencia entre esta tabla y la anterior?

5.d) ¿Podrá el mono reventar todos los globos? ¿Si no, cuál será el primero que no reventará?

Tabla 8: Características y preguntas Bloque 6

Mejora 1.1: Dardos de largo alcance. Hace que el *mono lanza-dardos* dispare más lejos de lo normal.  
Mejora 2.1: Tiros afilados. Puede reventar 1 globo más por disparo.  
6.a) Analiza la mejora 1.1. ¿Cómo crees que influye aumentar el radio de disparo?  
6.b) Si la longitud del camino que entra dentro del área de visión del mono es ahora 12,1cm, ¿cuántos globos sería capaz de reventar ahora el mono en la Ronda 2?  
6.c) Analiza ahora la mejora 2.1. ¿Se te ocurre alguna idea para sacarle más partido? Apunta algunas ideas y plantea pruebas experimentales para ver si lo que estabas pensando ocurre realmente en el juego.

En el apartado 6.c) se pide un análisis cualitativo de la segunda mejora. El objetivo es que vean que, para maximizar esta mejora, lo ideal es que el mono dispare a los globos de forma que la trayectoria del dardo sea una recta coincidente con la trayectoria del globo.

En este apartado se pretende que los alumnos vean que al construir un modelo e ir generalizándolo y adaptándolo a nuevas situaciones, un cambio en las condiciones puede suponer un gran cambio en el modelo. Al introducir la mejora 2.1, la posición (A) deja de ser la idónea, pasando a serlo la posición (C) (exterior a una esquina) pues desde esa posición la trayectoria del dardo y la de los globos coinciden, y un mismo dardo puede explotar dos globos consecutivos.

A continuación, mostraremos los resultados de la experiencia de la implementación de los cuatro primeros bloques de nuestra propuesta con un grupo natural de 4º de ESO.

## ANÁLISIS DE LA EXPERIENCIA

La actividad se propuso a un grupo de 4º ESO de 21 alumnos, y se desarrolló durante dos sesiones, por lo que no dio tiempo a terminarla. No obstante, se recogieron datos de la experiencia que permitieron detectar algunos problemas de la propuesta y que han dado lugar a una serie de propuestas de mejora. Se analizarán aquí las dificultades observadas.

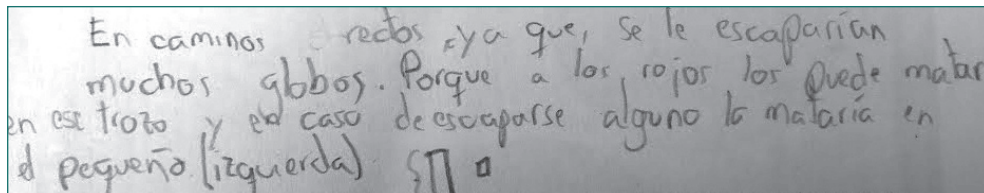
Antes de tratar las dificultades, conviene recordar que la propuesta tiene dos objetivos didácticos principales: el primero, el trabajo con los conceptos de variable, función e inecuación; y el segundo, el trabajo de modelización en sus diferentes fases. Este segundo objetivo quería conseguirse a través de la generalización del modelo en el bloque 5 y de las conclusiones del bloque 6, en el que se comprueba cómo la máxima eficiencia se consigue cambiando de criterio para elegir la posición del mono cuando cambiábamos sus características con una mejora.

Aunque no se llegó hasta el bloque 6 en la experiencia, sí que observamos que los alumnos fueron progresivamente perdiendo de vista el objetivo inicial de la actividad, la maximización de la eficiencia del *mono lanza-dardos*. Esto puede deberse a que la actividad no estuviera suficientemente organizada o a que no se presentara con suficiente claridad. De cualquier manera, si se pierde el hilo del proceso de modelización no se tiene éxito con el objetivo didáctico que se pretendía conseguir.



Porque ocupa un radio que tapa más camino y cubre más direcciones

Figura 3.



En caminos rectos ya que, se le escaparían muchos globos. Porque a los rojos los puede matar en ese trozo y en el caso de escaparse alguno lo mataría en el pequeño (izquierda) □ □

Figura 4.

También se han identificado dificultades técnicas. Por un lado, tomar medidas experimentales con un pequeño error relativo es realmente difícil precisamente porque el juego funciona en HD y contar píxeles es prácticamente imposible. De hecho, en el diseño de la actividad se decidió ajustar los decimales de los datos medidos experimentalmente para que cuadraran los cálculos teóricos con los resultados experimentales en la resolución de los bloques 4 y 5. Un ejemplo de esto es el siguiente: para determinar la distancia de separación entre globos consecutivos de la Ronda 2, se hicieron una serie de medidas entre centros de globos consecutivos. En vez de tomar alguna medida de centralización de esas medidas se decidió escoger aquella que, al introducirla en los cálculos, hacía coincidir la predicción teórica del número de globos reventados en la Ronda 2 con el resultado experimental. Esta dificultad puede transformarse en una oportunidad de enseñanza. En efecto, se puede ampliar la actividad añadiendo una primera parte de toma de medidas, en la que los alumnos aborden este tipo de dificultades y busquen soluciones. De esta manera se trabajarían más conceptos matemáticos (estadísticos, geométricos, etc.).

Otra de las dificultades en el diseño y que se manifestaron en la implementación de la actividad tiene que ver con la elección de un criterio para escoger la posición del mono que se hace en el bloque 1. El criterio que se espera que los alumnos escojan es el siguiente: “a mayor longitud de camino dentro del radio de visión del mono, más globos será capaz de reventar”, asumiendo que los globos van a velocidad constante por el camino y están igualmente espaciados, como ocurre en las Rondas 1 y 2, con las que se trabaja en la actividad. En la puesta en común que se llevó a cabo para contestar al apartado 1.e), este criterio resultó totalmente minoritario, siendo mayoritario el criterio: “maximizar la longitud, pero que además el área de visión interseque al camino en dos lugares que estén a la mayor distancia posible” que los alumnos expresan de formas diversas, véase Figura 3 y Figura 4.

Para poder convertir las primeras rondas del videojuego en una situación abordable, en el proceso de diseño de la actividad se restringió el problema al máximo, centrando la pregunta en la eficiencia de la torre más básica, el *mono lanza-dardos*, y al primer mapa del juego. Además, para poder hacer mediciones y trabajar con magnitudes físicas como

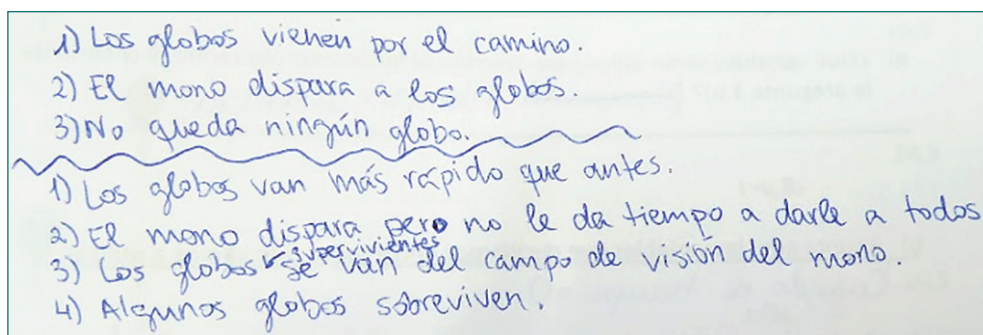


Figura 5.

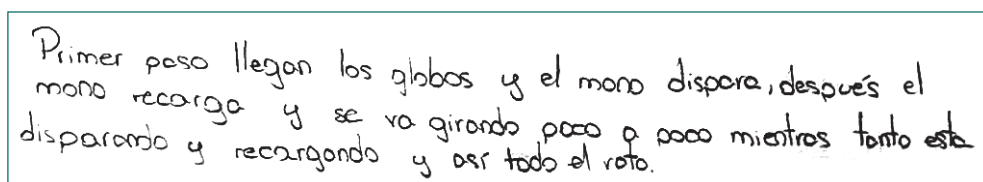
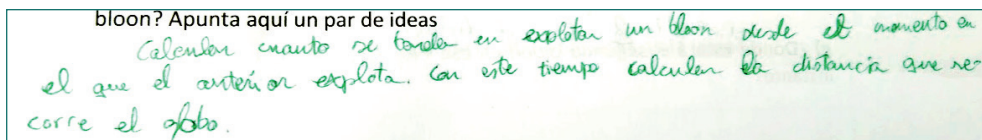


Figura 6.

distancia, tiempo y velocidad, se supuso que el camino por el que discurren los globos es una poligonal que pasa por el centro del camino que está dibujado en el mapa, y que los globos son puntos y, por tanto, adimensionales. Esto supone una simplificación de la situación real y, de hecho, provocó que, durante la implementación de la actividad, se introdujera una discusión sobre la elección del criterio para ubicar el primer *mono lanzadardos*. Esta discusión derivó en un aumento del tiempo previsto pero también fue una oportunidad para tratar otros temas y enriquecer la actividad. Además, aunque esta discusión no resulte especialmente relevante para el desarrollo de los siguientes ejercicios de la actividad -pues los alumnos escogen igualmente la posición (A) frente a la (B) o la (C)- sí juega un papel fundamental en la comprensión del proceso de modelización, en concreto de la simplificación de la situación a modelizar.

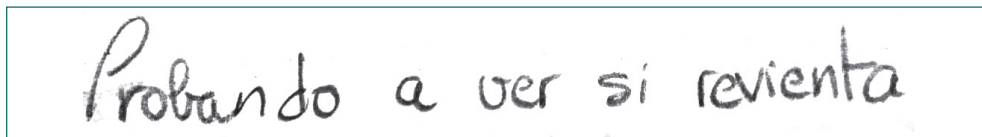
En cuanto a las dificultades encontradas por los alumnos, éstas se concentraron alrededor de las otras dos discusiones importantes. En el bloque 2 se propone dividir la situación con la que se está trabajando en una serie de pasos, con el ánimo de distinguir qué es relevante y qué no lo es. En la experiencia, los alumnos quedaron, en general, bastante perplejos con el enunciado de este ejercicio: no sabían qué contestar, se sentían perdidos e hicieron falta aclaraciones sobre qué hacer y por qué hacerlo. Esto se relaciona de nuevo con la falta de claridad relativa al hilo conductor en el desarrollo de la actividad, la pérdida de la motivación original y las dificultades para recordar los objetivos. En la Figura 5 y en Figura 6 mostramos un par de extractos de las respuestas de los alumnos a esta cuestión.

Por otro lado, en el bloque 3 se pide a los alumnos que encuentren una manera de determinar si el mono será capaz de reventar todos los globos de una ronda. Los alumnos,



bloon? Apunta aquí un par de ideas  
Calcular cuanto se tarda en explotar un bloon desde el momento en el que el anterior explota. con este tiempo calcular la distancia que recorre el abto.

Figura 7.



Probando a ver si revienta

Figura 8.

salvo algunas excepciones que aportan respuestas como la mostrada en la Figura 7, se mostraron desconcertados ante esta pregunta, dando respuestas del tipo “se pone el mono en el sitio y se prueba a ver si lo revienta” (véase Figura 8). Se observa, por tanto, una dificultad para distinguir entre el contexto del problema y el contexto matemático que permite abordarlo.

Además, se observó que los alumnos tenían dificultades para aplicar sus conocimientos relativos al bloque de funciones en la resolución de las actividades del bloque 4. Es por ello que, en la siguiente sección, presentamos algunas propuestas de mejora al diseño original.

## RESULTADOS DEL ESTUDIO EXPLORATORIO

Para intentar salvar las dificultades identificadas, se ha diseñado una propuesta de mejora. Esta propuesta pasa por aumentar al menos en una sesión la duración de la actividad a 5 sesiones, pues los debates que se generan en las puestas en común pueden ser largos y difíciles de moderar. Además, se proponen dos cambios concretos: el primero consistirá en clarificar la estructura del proceso de modelización a través de la relación entre objetivos y métodos y, el segundo, pretende profundizar en los contenidos de funciones que aparecen en la actividad.

### Explicación del esquema de la actividad y del proceso de modelización

Con respecto al primer punto, se sugiere dejar claro el objetivo desde el inicio de la actividad. Para ello se sugiere presentar un esquema como el de la Figura 9.

Convendría también indicar que hay diferentes maneras de mejorar la rentabilidad de las monedas: comparar los precios de las torres y sus eficiencias, estudiar la eficacia cambiando de dos o más torres, etc., pero que lo que se va a hacer es estudiar el caso más sencillo: maximizar el poder del *mono lanza-dardos* para tardar lo máximo posible en mejorarlo y así evitar tener que gastar monedas (Figura 10).

**Objetivo:** Maximizar la rentabilidad de las monedas.

¿Cómo?

Maximizando la eficiencia del primer mono lanzadardos.

Figura 9.

**Objetivo:** Maximizar la eficacia del mono lanzadardos.

¿Cómo? → Sólo podemos escoger su posición.

Encontrar la mejor posición para el mono y justificar por qué es la mejor.

Figura 10.

Para dar un esquema de cómo se desarrollará la actividad, proponemos hacer una explicación como la que sigue (Tabla 9 y Figura 11):

Tabla 9: Características de la propuesta de mejora

Nuestro objetivo es encontrar la mejor posición para el primer *mono lanza-dardos*, pues es la única variable sobre la que tenemos control. Para ello tendremos que elegir una posición y justificar por qué es la mejor, es decir, elaborar una hipótesis. Sin embargo, esta hipótesis será, en principio, solo teórica. Para comprobar su validez, tendremos que compararla con la realidad: intentaremos predecir el resultado de una Ronda con la información que tenemos, y después lo comprobaremos jugando.

Con esta explicación se espera que los estudiantes sigan mejor el desarrollo de los bloques 1 a 4. El bloque 5 sería una extensión del modelo a la Ronda 2, se comprobaría que el mono ya no da más de sí y que se debe que mejorar, lo que lleva al bloque 6.

### Ampliación de los ejercicios para el trabajo de funciones

Con respecto a la segunda propuesta de mejora, se sugiere añadir una serie de ejercicios en la parte final de los bloques 4 y 5. El bloque 4 quedaría de la siguiente manera a partir del apartado 4.j):

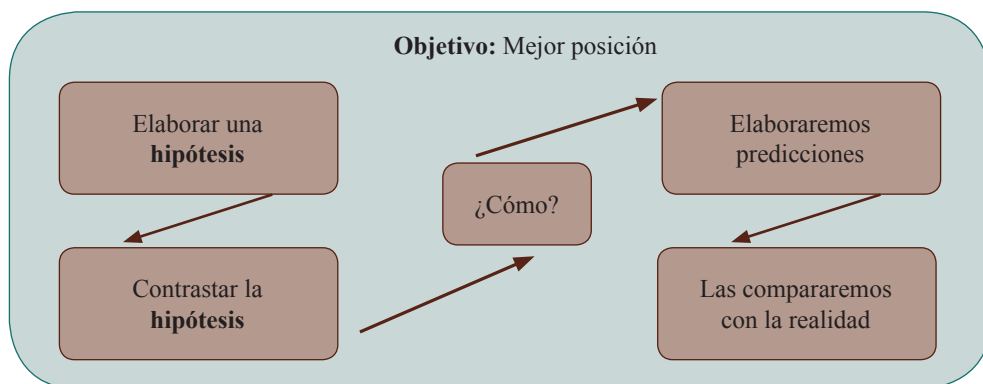


Figura 11.

Tabla 10: Mejora Bloque 4

4.j) Completa la siguiente tabla con la información de los apartados anteriores

Nº de globo	1	2	3	4	...	n
Instante en que revienta					...	
Distancia que recorre hasta que revienta					...	

4.k) Escribe las expresiones algebraicas para las siguientes funciones:

- Tiempo en el que el globo revienta dependiendo de su número,  $T(n)=$
- Distancia a la que el globo revienta dependiendo de su número,  $D(n)$

4.l) ¿A qué categoría pertenecen estas funciones? Representálas.

4.m) ¿Cuál de estas funciones será más útil para saber si el mono podrá reventar o no todos los globos de la Ronda 1? ¿Por qué?

4.n) Recuerda la distancia máxima a la que un globo puede ser reventado. Representálas en la gráfica correspondiente. ¿Qué nos dice ahora esta gráfica sobre si el mono podrá reventar todos los globos de la Ronda 1?

4.o) Sabiendo que los globos viajan a 2 cm/s, ¿puedes decir si existe un tiempo máximo al que los globos puedan explotar? ¿Será el mismo para todos?

Al bloque 5 se añadirían los mismos ejercicios y algún apartado extra para compararlo con el bloque 4 (Tabla 11).

Estas modificaciones se han hecho tras revisar de nuevo la literatura, siguiendo a Deulofeu (2001) que insiste en que en el aprendizaje de funciones se ha de trabajar tanto con tablas como con gráficas y expresiones algebraicas. Además, se han querido introducir ejercicios que recordaran aspectos conocidos sobre las funciones lineales, relacionándolas con el contexto de la actividad.

Tabla 11: Mejora Bloque 5

5.b) Completa la siguiente tabla con la información de los apartados anteriores

Nº de globo	1	2	3	4	...	n
Instante en que revienta					...	
Distancia que recorre hasta que revienta					...	

5.c) Escribe las expresiones algebraicas para las siguientes funciones:

- Tiempo en el que el globo revienta dependiendo de su número,  $T(n)$ =
- Distancia a la que el globo revienta dependiendo de su número,  $D(n)$

5.d) ¿A qué categoría pertenecen estas funciones? Representálas.

5.e) Recuerda la distancia máxima a la que un globo puede ser reventado. Representála en la gráfica correspondiente. ¿Qué nos dice ahora esta gráfica sobre si el mono podrá reventar todos los globos de la Ronda 2?

5.f) ¿Cómo podrías sacar la misma conclusión del apartado anterior sin utilizar las gráficas, es decir, utilizando sólo métodos algebraicos?

5.g) ¿Cuáles son las pendientes de las funciones  $T(n)$  y  $D(n)$ ? ¿Puedes decir cuál es el valor máximo que tendría que tener la pendiente de  $D(n)$  para que el mono pudiera reventar hasta el último globo de la Ronda 2?

## CONCLUSIONES

El objetivo de la experiencia con nuestra propuesta “Globos y Monos. Modelización con BT5” era comprobar su potencial como herramienta de enseñanza para trabajar contenidos de funciones a través de la modelización, en un contexto de gamificación con un videojuego comercial.

Las dificultades que la actividad presentaba en su diseño inicial y que fueron descubiertas tras la implementación exploratoria resultaron claves para rediseñar la propuesta. Por un lado, la nueva propuesta pretende profundizar más en el proceso de modelización, presentando un esquema más organizado del proceso desarrollado, relacionando objetivos con métodos y justificando los pasos a seguir. Por otro lado, se plantea la posibilidad de estudiar la introducción del modelo inicial y profundizar en el proceso de toma de medidas experimentales como parte de la actividad, para así trabajar contenidos estadísticos y geométricos y enriquecer la propuesta.

Dado que los contenidos de funciones no se trabajan de forma suficientemente explícita en la propuesta original, se han rediseñado algunas actividades para introducir las funciones, en concreto, las propiedades de las funciones lineales, contextualizadas dentro de la actividad, y en sus diferentes formas (tabla, gráfica y expresión algebraica). Se pretende que los alumnos entiendan mejor el concepto de función y su potencial como herramienta de predicción y toma de decisiones en un proceso de modelización.

Por último, queremos destacar que los resultados de esta experiencia y el estudio exploratorio realizado, pueden permitir, en un futuro, realizar investigaciones en el ámbito de la modelización matemática de forma que los problemas de “contexto real” se definan en el contexto virtual generado por un videojuego.

## REFERENCIAS

- Albarracín, L. (2014). *Los videojuegos de defensa de torres*. Revista SUMA, 77, 61-67.
- Albarracín, L., Hernández-Sabaté, A. y Gorgorió, N. (2017). *Los videojuegos como objeto de investigación incipiente en Educación Matemática*. *Modelling in Science Education and Learning*, 10(1), 53-72.
- Azcárate, C. y Deulofeu, J. (1999). *Funciones y gráficas*. *Matemáticas: Cultura y aprendizaje Síntesis*.
- Blum, W. (2002). ICMI study 14: *Applications and modelling in mathematics education – discussion document*. *Educational Studies in Mathematics*, 51(1-2), 149-171. doi:1022435827400
- Blum, W. y Niss, M. (1991). *Applied mathematical problem solving, modelling, applications, and links to other subjects — state, trends and issues in mathematics instruction*. *Educational Studies in Mathematics*, 22(1), 37-68. doi:10.1007/BF00302716
- Charsky, D. (2010). *From edutainment to serious games: A change in the use of game characteristics*. *Games and Culture*, 5(2), 177-198. doi:10.1177/1555412009354727
- de Guzmán Ozámiz, M. (2007). *Enseñanza de las ciencias y la matemática*. *Revista Iberoamericana de educación*, (43), 19-58.
- Deterding, S., Dixon, D., Khaled, R. y Nacke, L. (2011) *From game design elements to gamefulness: Defining “gamification”*. *Proceedings of the 15th International Academic MindTrek Conference: Envisioning Future Media Environments*, 9–15. doi:10.1145/2181037.2181040
- Deulofeu, J. (2001). *Las funciones en la educación secundaria: ¿para qué?, ¿cómo? aportaciones de la investigación*. *X Jaem*, 367-377.
- Hamlen, K. (2011). *Children's choices and strategies in video games*. *Computers in Human Behavior*, , 532-539. doi:10.1016/j.chb.2010.10.001
- Janvier, C. (1978). *The interpretation of complex cartesian graphs representing situations: Studies and teaching experiments* (PhD Thesis). University of Nottingham. United Kingdom.

Los autores agradecen la financiación de la Conselleria de Educació, Investigació, Cultura i Esport de la Generalitat Valenciana a través de los proyectos GV2016-129 y GVPROMETEO2016-143.

## Metacognición en clases de Matemática: un aporte para la enseñanza

Patricia Barreiro y Paula Leonian

*pbarreir@ungs.edu.ar – pleonian@ungs.edu.ar*

*Universidad Nacional de General Sarmiento*

**Resumen:** *El presente trabajo se encuadra en la línea de Resolución de Problemas. Reportamos una experiencia que se realizó en un curso de Matemática de ingreso a la universidad. La intención fue incentivar la reflexión metacognitiva de estudiantes luego de un proceso de resolución de problemas. Para ello diseñamos un dispositivo que considera la implementación de gamas de problemas y de consignas de tipo metacognitivas. Presentamos primeramente el concepto de gamas de problemas y criterios para su gestión en la clase por parte del docente. En segundo lugar, presentamos el dispositivo y resultados obtenidos sobre la reflexión metacognitiva realizada por estudiantes.*

**Palabras Clave:** *Reflexión metacognitiva, Gamas de problemas, Resolución de problemas.*

## Metacognition in Mathematical classes: a contribution for teaching

**Abstract:** *This article is based on Problem Solving theory. We report an experience held in a mathematics pre-university course. The aim of it was to favor, in students, their metacognitive' reflection after solving problems. To do this, we design a didactical device that includes the use of families of problems and metacognitive statements. We present, firstly, the concept of families of problems and criteria useful for teachers to work with them in classes. Secondly we present the device and results obtained about metacognitive reflection produced by students.*

**Keywords:** *Metacognitive reflection, Families of problems, Problem solving*

## INTRODUCCIÓN

Diversas investigaciones que abordan problemáticas del ingreso a estudios superiores, sumadas a otras propias, ponen de manifiesto que los estudiantes no cuentan con estrategias necesarias para abordar situaciones matemáticas excepto que respondan a ciertos estereotipos, presentan conocimientos incompletos y no poseen control sobre su propio aprendizaje, como lo diagnostican Marino y Rodríguez (2009); Marquina (2011). Consideramos que, el hecho de no tener control sobre el propio aprendizaje produce en el estudiante una dificultad para enfrentarse a tareas nuevas y desafiantes, pues no reconoce de qué estrategias dispone, le quedan ocultas herramientas a las que podría apelar y favorece que su aprendizaje quede sumamente ligado a la actividad puntual que resolvió. En este sentido la reflexión metacognitiva sobre los propios aprendizajes resulta clave para mejorar los aprendizajes, ya que dicha reflexión implica “monitorear su ejecución, detectar dificultades, evaluar su progreso y predecir los resultados de su actividad” (Aguilar, 1994; citado por González, 1998).

En particular, centramos la atención en estudiantes de la Universidad Nacional de General Sarmiento (UNGS) que asisten a un Taller de Matemática que forma parte de un curso obligatorio de pre-grado (Curso de Aprestamiento Universitario, CAU). Dado que el Taller de Matemática debe ser aprobado por todos los ingresantes, independientemente de la carrera que elijan, es un espacio en el que se plantean sostenidamente distintos estudios, investigaciones, diagnósticos, etc., siempre con la finalidad de mejorar los aprendizajes de los estudiantes y no obstaculizar su ingreso a las carreras. Es así que contamos con diversos resultados de investigaciones uno de los cuales identifica las dificultades de los estudiantes en poder reflexionar metacognitivamente (Chacón y Rodríguez, 2009). En ese trabajo se concluye que:

Schoenfeld (1992) identifica dimensiones que influyen en la resolución de problemas. Éstas son: la cognitiva, el conocimiento de heurísticas, la metacognitiva, la afectiva y la experiencia en la resolución de problemas. Es interesante pensar en generar espacios en el aula que las pongan en juego, como por ejemplo la discusión de los métodos empleados para la resolución, las estrategias diversas puestas en juego y poder intercambiar experiencias desde el plano afectivo. (p.7)

Esto nos pone ante un panorama en el que resulta valioso llevar a cabo propuestas didácticas que se propongan activar, en los estudiantes, la reflexión sobre las tareas para que éstos comiencen a tener control sobre las mismas y sobre sus aprendizajes.

El trabajo que aquí presentamos se encuadra en la Resolución de Problemas o Escuela Anglosajona cuyos pioneros se pueden considerar Polya (1965) y Schoenfeld (1992) y tiene como principal propósito *activar mecanismos de metacognición en los estudiantes del Taller de Matemática del CAU*.

## MARCO TEÓRICO

El concepto de *metacognición* ha sido desarrollado en el contexto de enseñanza y aprendizaje de la Matemática por Schoenfeld (1992). Este autor, a su vez ha hecho contribuciones al campo de la Educación Matemática denominado *Resolución de*

*Problemas* que se inicia con trabajos de Polya (1965). Una presentación sintética de la línea puede verse en Pochulu y Rodríguez (2012). En esta línea, cuyo foco está en que el estudiante se convierta en un buen resolutor de problemas y que sea consciente de su actividad cognitiva, este concepto resulta clave. Se pretende que los sujetos puedan monitorear y dirigir su propio proceso cognitivo, es decir, que sean capaces de controlar sus acciones, analicen los resultados que van obteniendo, ajusten sus estrategias, etc. A esta habilidad se la denomina *metacognición* (González, 1996). En este marco otro concepto clave es el de *problema para un sujeto*. Con esta denominación, o para abreviar, simplemente *problema*, nos referimos a una actividad que tiene una meta a alcanzar, datos iniciales y el camino hacia la solución no le resulta inmediato al resolutor. La incertidumbre que posee el sujeto a la hora de abordar la situación hace que ponga en juego una diversidad de estrategias, que pueden ser matemáticamente correctas o no, y que le ayudarán a entender el problema e intentar encarar la resolución. A este conjunto de estrategias se las denomina *heurísticas* (Polya, 1965). Algunos ejemplos de heurísticas son: buscar regularidades, hacer una tabla o un gráfico, empezar el problema desde atrás, considerar un caso particular, resolver un problema similar más sencillo, variar las condiciones del problema, entre otras. Muchas veces, es claro que algunas de éstas no son matemáticamente válidas, como por ejemplo: modificar el problema o considerar un caso particular. Para mayor especificidad sobre la noción de problema y heurísticas ver los trabajos de Barreiro y Leonian (2013); Colombano, Isla Zuvialde, Marino y Real (2009), Marino y Rodríguez (2009), González (1998), Pochulu y Rodríguez (2012). Debemos tener en cuenta que el hecho que una actividad resulte problema para un alumno o no, sólo se develará al momento en el que el estudiante se enfrente a él. Esto trae aparejado que cuando el docente se encuentra en el momento del diseño de actividades, él no tiene certeza de que éstas resultarán problema para sus estudiantes y sólo lo sabrá cuando los lleve al aula. Dada la diversidad cognitiva de los estudiantes en la clase, es razonable esperar que una tarea propuesta en la clase resulte problema para algunos estudiantes y no para otros. En este último caso podría ocurrir que no haya bloqueo, les resulte clara la forma de encarar o bien que sea tan difícil que los estudiantes tiendan a abandonarla. En cualquiera de los dos casos, no se vería su desempeño como resolutores de problemas y no habría reflexión metacognitiva al respecto, por lo que estos casos no nos resultarían útiles para este trabajo. Esta dificultad, que es natural que se presente en el aula, nos invita a definir el concepto de *gama de problemas*. La misma se define como una familia de al menos tres problemas relacionados que se diseña con la siguiente lógica: se parte de un *problema base (PB)* y se diseñan dos (al menos) nuevos problemas: uno será un *problema de complejidad mayor (PCMa)* y otro un *problema de complejidad menor (PCMe)*. De este modo, el PCMa y PCMe son *problemas asociados* a un PB y, para que conformen la gama, deben ser tales que: versen sobre la misma temática del PB (nos referimos al contexto intra o extra-matemático) y deberían admitir el uso de varias de las heurísticas que el PB posibilita. Más aún, si la gama de problemas se diseñara con la finalidad de enseñar algunas heurísticas, éstas deberían poder utilizarse en cada uno de los problemas que conforma la gama. El sentido de la gama de problemas es disponer de una consigna de complejidad mayor para quienes el PB resultó sencillo, mientras que el de complejidad menor se usaría para quienes el PB resultó inabordable.

Otra cuestión central que incluimos en este marco teórico se refiere a dejar unas pautas básicas para gestionar los problemas que conforman una gama. Es responsabilidad del docente decidir, luego de advertir cómo le resulta la resolución del PB a *cada estudiante*, y decidir “en tiempo real” si le da o no alguno de los otros dos problemas de la gama. ¿Cómo decidirá el docente si el estudiante necesita otro de los problemas de la gama o no? ¿Qué se interpretará frente a un estudiante que no escribe nada en su hoja?, ¿estará pensando y aún no necesita otro de los problemas?, ¿estará con un nivel de bloqueo que lo hará quedar inactivo?, ¿cómo intervenir para ayudarlo? En síntesis, administrar la gama de problemas en clases de matemática es una parte de la gestión docente que resulta compleja. Por este motivo, incluimos aquí unas pautas para la gestión de las gamas en una clase de matemática:

- ofrecer, inicialmente, el PB a todos los estudiantes;
- observar el trabajo de los alumnos ante la resolución del PB;
- ante una resolución inmediata del PB, correcta o no, se le ofrece el problema de complejidad mayor;
- si el estudiante no avanza en ningún tipo de producción, indagar si ha comprendido el problema. En caso de que el obstáculo haya sido solucionado, dejarlo avanzar sin cambiarle el problema. Si, en cambio, se detecta que no ha comprendido el problema (o que la consigna le haya resultado demasiado compleja), entregar el PCMe.

## DESARROLLO E IMPLEMENTACIÓN

Diseñamos, fundamentamos y aplicamos un dispositivo didáctico que nos permitiera favorecer la reflexión metacognitiva de los estudiantes.

Detallamos aquí los rasgos claves del diseño del dispositivo y su fundamentación, en primera instancia. Luego damos detalles de la implementación.

El dispositivo consistió en el diseño y fundamentación de cuatro clases y fue grabado en audio, registrando con fotografías los momentos de síntesis plasmados en el pizarrón alcanzados por los estudiantes mediante la metodología de observación participante. La implementación se desarrolló en el CAU, curso de pre-grado de carácter masivo que, como anticipamos, deben cursar obligatoriamente todas las personas que aspiren ingresar a la UNGS. Trabajamos en una comisión del Taller de Matemática a la que asistieron un promedio de 20 alumnos por clase a lo largo de los meses mayo y junio de 2012.

Para cada clase diseñamos una gama de problemas sobre distintos contenidos matemáticos: números, álgebra y geometría (áreas). Los encuentros se realizaron después de haber trabajado cada tema en las clases, pero teniendo la precaución que los problemas no quedaran asociados con el contenido matemático recientemente enseñado. Es decir, los problemas de álgebra (y del mismo modo los demás) no se trabajaron inmediatamente después de haber desarrollado el tema en la clase, sino en un momento posterior. La intención fue que los contenidos abordados en el curso regular no condicionaran su quehacer en la resolución de los diversos problemas.

Esquemáticamente el dispositivo tuvo esta forma (ver tabla 1):

Tabla 1

	Clase 1	Clase 2	Clase 3	Clase 4
<b>Problemas de contenido...</b>	Álgebra básica	Algebra básica	Geometría	Geometría
<b>Tipo de trabajo en clase</b>	Resolución de problemas individualmente	Recuperación del trabajo realizado sobre el problema 1 en forma individual a través de una grilla. Resolución del Problema 2. Confrontación de resoluciones. Primera identificación de heurísticas/utilidad o no referido a la gama de problemas 1 y 2 Puesta en común	Recuperación del trabajo sobre el problema 3. Puesta en común. Identificación de heurísticas comunes a las tres gamas de problemas. Discusión sobre la utilidad del trabajo	Resolución de problemas individualmente a modo de evaluación del trabajo realizado.
<b>Tareas de reflexión metacognitiva</b>		Completar una grilla Responder preguntas para la puesta en común	Buscar en sus resoluciones heurísticas comunes a los tres problemas trabajados.	
<b>Observaciones</b>	Se les pide a los estudiantes que entreguen el problema 1 y sus borradores e intentos de resolución	Se les pide a los estudiantes que entreguen el problema 2, sus borradores, intentos de resolución y la grilla	Se les pide a los estudiantes que entreguen el problema 3, sus borradores e intentos de resolución	Se les pide a los estudiantes que entreguen el problema 4, sus borradores e intentos de resolución

A modo de ejemplo, incluimos a continuación una de las gamas de problemas que fue implementada, diseñada según los criterios descriptos en el marco teórico (figura 1).

Consideramos que la menor complejidad de este problema radica en la inclusión del dibujo, lo que le permitirá al alumno concentrarse en la pregunta en el caso de que no entienda sobre qué trata el problema. La pregunta del PCMe es más dirigida (porque hace referencia directa al dibujo que se muestra en el enunciado) pero apunta a lo mismo que la pregunta del PB. Salvo la heurística de realizar un dibujo, creemos que el problema admite las mismas que el PB. Es decir, los alumnos pueden reinterpretar el problema en un lenguaje diferente, dividir el problema en subproblemas, analizar ejemplos y verificar utilizando casos particulares. En particular, se podría decir que en este caso se agrega la heurística de “resolver un problema más sencillo” cuando, si fuera posible, se les dé la posibilidad de resolver el PB luego de haber trabajado con el PCMe (figura 2).

### Problema Base (PB)

*Se tienen fósforos del mismo tamaño y se arman con ellos cuadrados en donde cada lado es un fósforo. La figura que ocupa el primer lugar está formada por un cuadrado, la que ocupa el segundo lugar está formada por dos cuadrados que comparten exactamente un lado, la figura que ocupa el tercer lugar está formada por tres cuadrados de modo que cada cuadrado con su consecutivo comparte exactamente un lado, y así sucesivamente...*

*¿Podría ser que en alguna ubicación existiera una figura que tuviera 1500 fósforos?*

### Problema de complejidad menor (PCMe)

*Se tienen fósforos del mismo tamaño y se arman las siguientes figuras que conforman una secuencia:*

*Con 1500 fósforos ¿se puede armar alguna figura del estilo de las que forman la secuencia mencionada, utilizando la mayor cantidad posible de fósforos? Identificar cuál sería su posición en la secuencia y decidir si sobraría o no algún fósforo sin usar.*

Figura 1

### Problema de complejidad Mayor (PCMa)

*Se tienen fósforos del mismo tamaño y se arman con ellos cuadrados en donde cada lado es un fósforo. La figura que ocupa el primer lugar está formada por un cuadrado, la que ocupa el segundo lugar está formada por dos cuadrados que comparten exactamente un lado, la figura que ocupa el tercer lugar está formada por tres cuadrados de modo que cada cuadrado con su consecutivo comparte exactamente un lado, y así sucesivamente...*

*Supongamos que contamos con una determinada cantidad de fósforos y que queremos armar con ellos una figura que utilice la mayor cantidad de ellos, ¿es posible hacerlo sin que sobren fósforos?*

*¿Es posible formar una figura (lo más grande posible) con una cierta cantidad de fósforos y que sobre alguno?*

*En caso de que no sobren fósforos, justificar por qué sucedería esto.*

*En caso de que sobren algunos fósforos, ¿podrías decir algo sobre la cantidad que sobra?*

Figura 2

Consideramos que este problema tiene una complejidad mayor pues, además de incluir las heurísticas mencionadas en el PB, se pretende un nivel de generalización mayor. Además, cambia el tipo de pregunta, por lo tanto, hace pensar al alumno en una familia de posibilidades y sobre las condiciones que deberán cumplirse para que sobre o no cierta cantidad de fósforos.

Previmos una forma de trabajo en el aula que a continuación describimos, considerando que favorece a que los alumnos tomen conciencia de las estrategias que ponen en juego en el momento de entender el problema y abordarlo para su resolución. Sostenemos que esta no es una actividad espontánea que el alumno pueda realizar sin la intervención docente. Por tal motivo, creemos que la forma en que el docente gestione la clase, el tipo de tareas que proponga, el modo en que decida intervenir va a ser cuestiones clave para favorecer en los estudiantes un trabajo que –sin esta intencionalidad– les sería totalmente transparente, sumado a que es una práctica muy poco usual en su biografía escolar.

En la clase 1 se les dio a los estudiantes el PB 1 para que lo resuelvan, con un pedido explícito que incluyeran no sólo la resolución que consideraban correcta, sino todos los intentos de resolución y borradores. En la clase 2 se les propuso que llenen una tabla donde volcaron la información requerida para recuperar lo hecho en el problema 1. En una primera instancia trabajaron individualmente y luego se les pidió que completen una grilla por grupo, donde debieron quedar plasmadas las respuestas individuales.

A continuación, se exhibe la grilla utilizada para recuperar lo trabajado en el problema (1).

Tabla 2

<b>Una mirada sobre el trabajo realizado en el problema 1. A modo de síntesis</b>	
Enunciado del problema trabajado en clase	
Describan el trabajo realizado en la búsqueda de la solución propuesta. La intención es recuperar aquí una síntesis de “lo que uno hizo” por si acaso nos tocara ver esta resolución dentro de unos meses	
Aquí indiquen qué estrategias de trabajo han identificado como <u>útiles</u> para encarar o resolver este problema.	
Aquí indiquen qué estrategias han realizado que no los condujeron a la resolución del problema	
Aquí dejen indicadas observaciones en general que consideren importantes	

Al momento de realizar la actividad, recorrimos el aula para conocer en qué situación se encontraba cada alumno. Tal como habíamos anticipado al momento del diseño, al recorrer los bancos observamos que había estudiantes que no podían empezar a trabajar y debimos intervenir para saber cuál era la causa. También observamos estudiantes que luego de haber hecho algunos intentos, no pudieron avanzar. Cuando detectamos que el problema resultó tan complejo que inhibió cualquier actividad del estudiante, procedimos a cambiarle la actividad y le entregamos el PCMe. Por el contrario, si el estudiante entregaba rápidamente su actividad completa (fuera su resolución correcta o incorrecta), le proponíamos continuar con el PCMa. Los estudiantes no percibían la intención y nivel de cada uno de los problemas pues de lo contrario hubieran sabido qué hacer. La idea siempre fue que los alumnos registren su proceder de manera individual antes de la puesta en común.

Con el objetivo de reflexionar sobre los procedimientos realizados al abordar los problemas trabajados, planteamos un debate sobre los ítems que componen las grillas.

Esto lo retomamos en una puesta en común al final de la clase. Trabajamos sobre la segunda gama de problemas. Luego, les pedimos que comenten lo que hicieron y completamos en el pizarrón un listado con las estrategias usadas para resolver el problema, hayan sido exitosas o no. De esta manera retomamos también la grilla que completaron de manera grupal para la actividad anterior. Les pedimos que comparen el listado que

quedó escrito en el pizarrón con la tabla que ellos completaron, y que respondieran las siguientes preguntas: ¿Existen algunas estrategias que hayan sido usadas en los dos problemas? ¿Qué cosas de las que se hicieron hasta ahora pueden ser útiles tener en cuenta si quiero ayudar a un amigo a resolver un problema como los que se plantearon hasta ahora?

Estas preguntas estuvieron pensadas para que los estudiantes reflexionaran sobre las heurísticas que les sirvieron o no a la hora de enfrentar las actividades propuestas. Éstos fueron los momentos fuertes de reflexión metacognitiva, que necesariamente la llevó a cabo cada estudiante. En nuestro rol de docentes sólo incentivamos a que ellos realicen este tipo de tarea con intervenciones apropiadas. Por cuestiones de cronograma, dejamos de tarea para la clase 3 el tercer PB.

En la clase 3 retomamos todo lo trabajado anteriormente, incluyendo el último problema, mediante una puesta en común guiada para que los estudiantes advirtieran autónomamente que era factible el uso de las mismas heurísticas en distintos contextos y con contenidos diferentes y que podrían resultar útiles o no, pero formarían parte de sus herramientas a la hora de abordar un nuevo problema. Tanto en esta clase como en la anterior buscamos generar una reflexión metacognitiva en los estudiantes utilizando las grillas y el debate sobre las mismas. En la clase 4 evaluamos lo trabajado a través de la resolución de la cuarta gama de problemas.

## RESULTADOS

A continuación, describimos algunos resultados que hemos obtenido como fruto de esta experiencia y acompañamos con evidencias basadas en los registros de clases.

El fragmento de clase que transcribimos a continuación evidencia que los estudiantes advierten la utilidad de la grilla y reconocen, frente a la gama de problemas planteada, las heurísticas que pusieron en juego: *probar con valores, reinterpretar el problema en un lenguaje diferente, elegir un registro de representación adecuada*. Esto no quiere decir, que, en este momento, los estudiantes estén en condiciones de tomar conciencia que están utilizando heurísticas, ni tampoco los nombres con que la teoría las nombra, pero sí advierten ciertos procedimientos y estrategias que están identificando a partir de mirar sus grillas y comparar con lo que el docente escribe en el pizarrón. Debe tenerse en cuenta que es de los primeros acercamientos de los estudiantes a la reflexión metacognitiva.

P: Bueno, qué podemos poner en “describir el trabajo realizado”, ¿quién me puede contar respecto al problema 2 qué cosas estuvieron haciendo?

A1: Darles valores a las letras

P: está bien, o sea, van poniendo diferentes ejemplos (*lo escribe en el pizarrón*). ¿Por ejemplo?

A3: 1, 2, 3

P: cuando me dijeron probar con valores una alumna me dijo éste (*señala al pizarrón*), otro me dijo este, otro me dijo otro... Cada uno de los que me dijeron que probó con estos casos, ¿probó solo con éste o probó con más casos?

A3: Yo usé varios, hice primero con 1, 2, 3; después con 2, 3, 4; después con 5, 6, 7.

P: Probamos con varios casos. Porque en este caso decir “valores” en plural puede ser le di un valor a cada uno y ese es un ejemplo, o dar varios ejemplos como estos. A vos que diste estos ejemplos (números negativos), ¿usaste otros?

A1: no

A continuación, se evidencia el reconocimiento de la utilidad –o no- del uso de heurísticas. Aquí se ve cómo los estudiantes ponen en tela de juicio si “*probar con valores*” puede considerarse como una estrategia útil, ya que a partir de ella se genera la idea de que existe, entre los números, una regularidad. Se observa en el docente la intención de traer al plano consciente la utilidad de lo que hicieron.

P: No, primero estamos contando lo que hicimos, acá anoto luego lo que no sirvió. ¡Ojo! Que al juntarnos entre todos después uno puede decir “lo que a todos les sirvió yo lo anoto en la parte de *no me sirvió*” ... podría pasar... es todo muy personal.

A2: Claro. Yo, por ejemplo, primero fui probando con varios valores de números enteros consecutivos, pero después es como que eso no alcanza para justificar matemáticamente que después siempre va a dar uno... entonces hay que buscar la forma de usar una variable... (ver anexo, PB2)

...

P: Ahora les pregunto, ¿cuál de todas estas cosas les pareció una estrategia útil? ¿Con cuáles dicen “me ayudó a resolver”?

A7: la primera (*se refiere a la heurística de probar con valores*) nos dio la pauta por los números.

P: la primera porque les da 1 siempre. De alguna manera te da la idea de cómo está funcionando.

A2: todos pasamos por esa instancia, es lo que nos dio la idea de que el resultado daba siempre 1.

P: ¿entienden lo que él dice? Nadie saltó de repente a una simbolización, quizás yo que sé más Matemática podría haber arrancado simbolizando, pero él dice que sin el 1 que les da en los ejemplos no tendrían nada que ir a buscar. ¿Qué iría a buscar si no tengo idea?

En la gestión de la clase el docente intentó generar momentos de debate donde pretendió que los estudiantes mismos evidenciaran que utilizaron las mismas heurísticas en distintos problemas e incluso con contenidos diferentes, con el fin de llevar la discusión a que los estudiantes adviertan que frente a nuevos problemas podrían recurrir a esas estrategias que les sirvieron en los tres problemas anteriores.

P: ¿hay en la lista que ustedes armaron alguna estrategia de estas (aunque no estén igual redactadas) que les parezca que se repitió?

A: el de simbolizar

P: ¿en qué parte del problema 1 (para ponernos en contexto)?

A: cuando te pide la ecuación del problema.

...

P: ¿Algo más encuentran parecido?

A3: yo no le veo nada parecido.

P: ¿Vos no le encontrás nada, para vos es bien diferente?

A3: en el primero nos daban datos, y acá no había datos

...

**P:** de todo lo que pusimos acá, ¿encuentran elementos en común entre los dos problemas? Si identificamos cosas que hicimos en los dos problemas que nos ayudaron a resolver, quizás en un futuro problema me resulte más fácil abordar un problema, si soy consciente de eso.

**A2:** en los dos problemas se prueban con valores. Si ahí en el de los fósforos te ponés a pensar decís entre 4 y 7 hay 3, entre otros también hay 3. Nosotros pensamos en encontrar una fórmula para alguien que, no sé, nosotros dijimos ¿por qué no armar una tabla tipo  $x$  e  $y$ , y la completamos como si fuese modelización y dar valores: para  $x=2$  da 4, etc. ¡Es lo mismo! Ahí usamos valores numéricos: los enteros. Por ahí, como dijo la compañera antes, el que tenga valores numéricos fijos te lleva a vos a probar. Parecería ser que, al ver la letra, además de probar directamente vamos a plantear la expresión algebraica.

## A MODO DE CIERRE

Según Schoenfeld (1992) el pensamiento metacognitivo puede monitorear y dirigir el propio proceso cognitivo. Esto implica, además de proponer a los estudiantes resolver problemas y utilizar heurísticas, que ellos conozcan cómo trabajan, controlen sus acciones y en función de los resultados que van obteniendo, ajusten, modifiquen, refuercen, etc. En definitiva, que regulen su proceder.

Si ponemos como ejemplo el uso de heurísticas, se espera que en algún momento el alumno reconozca que algunas estrategias le están sirviendo –o no– para avanzar en el proceso de resolución de problemas, más allá del contenido matemático que éstos tengan. Debería advertir que hay cuestiones comunes que él está utilizando para, luego, poder decidir conscientemente, utilizarlas ante nuevos problemas. Esta tarea es propia de cada sujeto y es el docente quien puede (desde nuestra perspectiva, debe hacerlo) tener un rol central a la hora de invitar a los estudiantes a realizar una reflexión de tipo metacognitiva.

Debemos hacer notar que, según este enfoque teórico, el proceso de reflexión metacognitiva es individual. Consideramos importante sostener una puesta en común en la que los estudiantes puedan discutir sobre las estrategias utilizadas (propias y ajenas) de manera que puedan fortalecer su propio proceder y tenerlo disponible en las próximas situaciones a resolver. Además, aunque sean individuales y personales en la confrontación con otros se puede comparar, reconocer la adecuación o no de otras estrategias diferentes de las propias, etc.

El CAU es un curso de ingreso al nivel superior centrado en la enseñanza de contenidos, sin embargo, este hecho no inhibió que pudiéramos articularlo con la Resolución de Problemas y en particular promover el control y reflexión sobre el propio accionar cognitivo. Sostenemos que estas dos formas de trabajo no son incompatibles, y teniendo en cuenta las características del curso pudimos diseñar y llevar a cabo esta experiencia.

Entendemos que el dispositivo didáctico, con un diseño cuidado y fundamentado tanto en la elaboración de la gama de problemas como en la gestión de la clase, favoreció la reflexión metacognitiva de los estudiantes, como se ha mencionado en sólo algunos de los pasajes de las clases que, por una cuestión de espacio no pudimos mostrar en una extensión mayor.

Sintetizamos algunos criterios que consideramos han sido clave en el diseño del dispositivo para que el docente pueda favorecer la reflexión metacognitiva de los estudiantes.

*Contar con un instrumento que les permita a los estudiantes, en un momento posterior a la propia resolución, rever los procedimientos realizados al momento de abordar un problema.*

1. Una posible forma es la utilización de la grilla mencionada. Es clave el hecho que este instrumento sea usado con posterioridad a la misma resolución, de modo de poder resolver otros problemas, poner en juego otras heurísticas y en el momento del uso del instrumento intentar que esto sea advertido por los alumnos.
2. *Planificar momentos de reflexión individual sobre las propias producciones.*
3. Esto propone al docente no dejar para una última instancia la reflexión sobre las tareas. Es decir, ir generando la práctica de la reflexión sostenidamente a lo largo de las distintas resoluciones. Al principio algunas cuestiones comunes no se podrán advertir (simplemente pues, por ejemplo, no ha ocurrido que una misma estrategia pueda ser usada en problemas con distintos contenidos matemáticos), pero ocurrirá con posterioridad.
4. *Generar momentos de debate en las clases donde el docente intervenga para que los estudiantes adviertan el uso de las mismas heurísticas en distintos problemas y con contenidos diferentes.*
5. *Generar momentos de debate en las clases donde el docente intervenga para que los estudiantes identifiquen el uso de estrategias que resultaron útiles al momento de resolver la situación y las diferencien de las que no lo fueron.*

Aquí es clave que el docente no sea quien explicita esto, sino que logre, con sus intervenciones que los alumnos lo adviertan. Para ejemplificar esto: si el docente dice a la clase “podemos ver que en el problema 1, 2 y 3 hubo contenidos matemáticos distintos pero ustedes han usado la misma estrategia” no estaría logrando esto. En cambio, con una intervención del tipo de la siguiente, estaría intentando esto. “¿Podrían decir qué contenidos matemáticos usaron para resolver el problema 1, 2 y 3?, ¿cómo son esos contenidos? (esperando que adviertan que son diferentes). Mencionen todas las estrategias utilizadas cuando abordaron cada problema. Organicen la lista debajo de cada problema, identificando si les fueron o no útiles. ¿Qué encuentran en este listado? (esperando que vean estrategias comunes). Saquen alguna conclusión respecto del uso de estas estrategias en estas tres tareas. Si estuvieran frente a una nueva actividad, la experiencia que vivieron al resolver estas otras, ¿les permite aprender algo?”

## BIBLIOGRAFÍA

- Barreiro, P. y Leonian, P. (2013). Enseñanza de heurísticas, Ponencia a presentada en Relme 27, Buenos Aires, Argentina.
- Chacón, M. y Rodríguez, M. (2009). Un acercamiento al conocimiento metacognitivo sobre resolución de problemas de estudiantes de nivel pre-universitario. Comunicación presentada en la XXXII Reunión de Educación Matemática (REM), Universidad Nacional de Mar del Plata. Buenos Aires. Disponible en <https://www.researchgate.net/>

publication/320411227\_Un\_acercamiento\_al\_conocimiento\_metacognitivo\_sobre\_resolucion\_de\_problemas\_de\_estudiantes\_de\_nivel\_pre-universitario?\_iepl%5BviewId%5D=oQt4TAPSB9oo3dHJIRQIvVV4&\_iepl%5Bcontexts%5D%5B0%5D=publicationCreationEOT&\_iepl%5BtargetEntityId%5D=PB%3A320411227&\_iepl%5BinteractionType%5D=publicationTitle.

- Colombano, V.; Isla Zuvalde, D.; Marino, T. y Real, M. (2009). El problema de diseñar problemas. *Actas de la XXXII Reunión de Educación Matemática*, Universidad Nacional de Mar del Plata.
- González, F. (1996). Acerca de la metacognición. *Paradigma* XIV-XVII, 109-135.
- González, F. (1998). Metacognición y Tareas Intelectualmente Exigentes: El caso de la Resolución de Problemas Matemáticos. *Zetetiké*, 6 (9), 59 – 87.
- Marino, T. y Rodríguez, M. (2009). Un estudio exploratorio sobre heurísticas en estudiantes de un curso de matemática de nivel pre-universitario. *Paradigma*, Vol XXX, N° 2, 165-186.
- Marquina, M (2011). El ingreso a la universidad a partir de las reformas de los 90: las nuevas universidades del conurbano, En: Admisión a la universidad y selectividad social, Editorial UNGS, Buenos Aires.
- Polya, G. (1965). *Cómo plantear y resolver problemas*. [Versión en español de la obra How to solve it publicada por Princeton University Press en 1945]. México: Trillas.
- Rodríguez, M. (2012). Resolución de problemas. En Pochulu, M. y Rodríguez, M. (Comps.). *Diferentes enfoques en la didáctica de la matemática*, 15-38. Buenos Aires: UNGS
- Schoenfeld, A. (1992). Learning to think mathematically: problem solving, metacognition and sense making in Mathematics, in D. Grouws (De.) *Handbook for research on mathematics teaching and learning*, New York: MacMillan.

## ANEXO

En este anexo incluimos las otras gamas de problemas con las que trabajamos en la experiencia anteriormente presentada.

### Gama de Problemas N°2

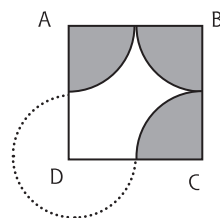
**PCB:** Si  $a$ ,  $b$  y  $c$  son tres números enteros consecutivos, ¿qué se puede decir de la expresión  $b^2 - a \cdot c$ ?

**PCMe:** Si  $a$ ,  $b$  y  $c$  son tres números enteros consecutivos, ¿existirá números para los cuales la expresión  $b^2 - a \cdot c$  tome el valor 2?

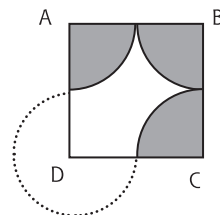
**PCMe:** Si  $a$ ,  $b$  y  $c$  son tres enteros consecutivos, ¿qué podrías decir de las raíces de la cuadrática  $4ax^2 + 4bx + c = 0$ ?

### Gama de Problemas N°3

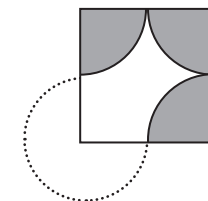
**PCB:** En la figura que sigue hay indicado un cuadrado de lado 5 cm y los arcos interiores corresponden a cuartos de circunferencias. La línea de puntos delimita un círculo cuya cuarta parte queda oculta tras el cuadrado. Comparar el área de la figura blanca (que incluye la parte visible del círculo) con el área del cuadrado



**PCMa:** ABCD es un cuadrado del que no se conocen sus medidas y los arcos interiores corresponden a cuartos de circunferencias. La línea de puntos delimita un círculo cuya cuarta parte queda oculta tras el cuadrado. Comparar el área de la figura blanca (que incluye la parte visible del círculo) con el área del cuadrado.

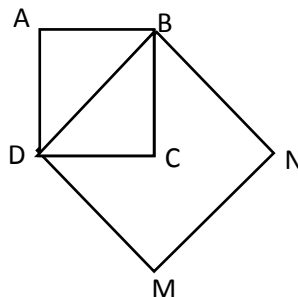


**PCMe:** En la figura que sigue hay indicado un cuadrado de lado 5 cm y los arcos interiores corresponden a cuartos de circunferencias. La línea de puntos delimita un círculo cuya cuarta parte queda oculta tras el cuadrado. Calcular el área de la figura no sombreada.

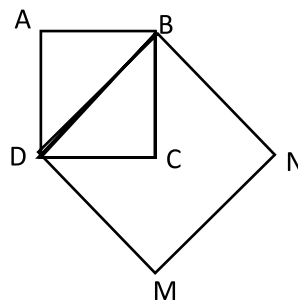


## Gama de Problemas N°4

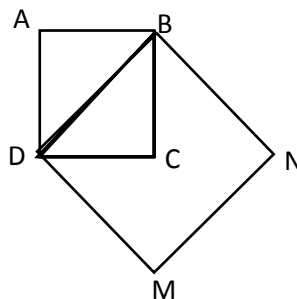
**PCB:** Comparar las áreas de los cuadrados  $ABCD$  y  $BDMN$ .



**PCMe:** En el cuadrado  $ABCD$ , el lado  $AB$  mide 5 cm, ¿cuánto vale el área del cuadrado  $BDMN$ ?



**PCMa:** ¿Es posible construir un cuadrado cuya área sea el cuádruple del área del cuadrado  $ABCD$ , utilizando el cuadrado  $BDMN$  para su construcción? Cualquiera sea tu respuesta explica. En caso afirmativo, muestra cómo harías la construcción. Describir el procedimiento que permita construir un cuadrado de área el cuádruple de  $ABCD$ , usando el cuadrado  $BDMN$ .



## Demostraciones del Teorema de Pitágoras con goma EVA. STEAM en el aula de Matemáticas

Luis Miguel Iglesias Albarrán

*IES San Antonio, Bollullos Par del Condado*

*Área: Didáctica de la Matemática, Universidad de Huelva*

*<http://luismiglesias.es>*

**Resumen:** *Experimentación didáctica de aula en torno a la realización por parte de estudiantes de 2º de ESO de distintas construcciones, con goma EVA, para elaborar otras tantas demostraciones distintas del Teorema de Pitágoras, a partir de demostraciones sin palabras del mismo construidas con Geogebra. Experiencia STEAM = STEM + A, con un enfoque activo y competencial desarrollado en el aula de matemáticas.*

**Palabras Clave:** *geometría, didáctica de la matemática, matemáticas manipulativas, stem, steam, competencias clave, materiales didácticos, TIC, geogebra, demostraciones sin palabras.*

## Demonstrations of the Pythagorean Theorem with EVA rubber. STEAM in the Mathematics classroom

**Abstract:** *Classroom didactic experimentation around the accomplishments with various constructions with Foamy by Secondary Education students, to elaborate as many demonstrations different from the Theorem of Pythagoras, from demonstrations without words of the same constructed with Geogebra. STEAM = STEM + A Experience with an active and competence-based approach developed in the mathematics classroom.*

**Keywords:** *Geometry, Mathematics Didactics, Manipulative Mathematics, STEM, STEAM, Key Competencies, Didactic Materials, ICT, Geogebra, Without-Word Demonstrations.*

### INTRODUCCIÓN

STEM es un acrónimo en inglés de Science, Technology, Engineering y Mathematics que sirve para designar las disciplinas académicas de Ciencia, Tecnología, Ingeniería y

Matemáticas (CTIM). STEM básicamente nos traslada la idea de un planteamiento integrador de los procesos de enseñanza-aprendizaje de las materias de ciencias.

Es precisamente en esa línea en la que se mueven los actuales currículos educativos de EEUU y Europa (5). En España, la Ley Orgánica para la Mejora de la Calidad Educativa (LOMCE) (2) apunta en esa dirección sustituyendo las anteriores competencias básicas: Competencia Matemática y Competencia en el conocimiento y la interacción con el mundo físico contempladas en la Ley Orgánica de Educación (LOE) (1), por la nueva competencia clave denominada: Competencia matemática y competencias básicas en ciencia y tecnología, a la cual llamaremos Competencia STEM (4).

Las competencias se conceptualizan como un «saber hacer» que se aplica a una diversidad de contextos académicos, sociales y profesionales. Para que la transferencia a distintos contextos sea posible resulta indispensable una comprensión del conocimiento presente en las competencias y la vinculación de este con las habilidades prácticas o destrezas que las integran.

La Recomendación 2006/962/EC, del Parlamento Europeo y del Consejo, de 18 de diciembre de 2006, sobre las competencias clave para el aprendizaje permanente, insta a los Estados miembros a «desarrollar la oferta de competencias clave». Se delimita la definición de competencia, entendida como una combinación de conocimientos, capacidades, o destrezas, y actitudes adecuadas al contexto. Se considera que «las competencias clave son aquellas que todas las personas precisan para su realización y desarrollo personal, así como para la ciudadanía activa, la inclusión social y el empleo». Se identifican claramente ocho competencias clave esenciales para el bienestar de las sociedades europeas, el crecimiento económico y la innovación, y se describen los conocimientos, las capacidades y las actitudes esenciales vinculadas a cada una de ellas. Asimismo, se destaca la necesidad de que se pongan los medios para desarrollar las competencias clave durante la educación y la formación inicial, y desarrolladas a lo largo de la vida.

Así pues, el conocimiento competencial integra un conocimiento de base conceptual: conceptos, principios, teorías, datos y hechos (conocimiento declarativo-saber decir); un conocimiento relativo a las destrezas, referidas tanto a la acción física observable como a la acción mental (conocimiento procedimental-saber hacer); y un tercer componente que tiene una gran influencia social y cultural, y que implica un conjunto de actitudes y valores (saber ser).

Por otra parte, el aprendizaje por competencias favorece los propios procesos de aprendizaje y la motivación por aprender, debido a la fuerte interrelación entre sus componentes: el conocimiento de base conceptual («conocimiento») no se aprende al margen de su uso, del «saber hacer»; tampoco se adquiere un conocimiento procedimental («destrezas») en ausencia de un conocimiento de base conceptual que permite dar sentido a la acción que se lleva a cabo.

Por otro lado, «los niños al nacer son científicos naturales, ingenieros y resuelven problemas. Consideran el mundo alrededor de ellos y tratan de darle sentido a todo cuanto ocurre de la mejor manera que saben: tocando, probando, construyendo, desmontando, creando, descubriendo y explorando. Para los niños, esto no es educación. ¡Es divertido!» (6)

Sin embargo, investigaciones realizadas prueban que antes de concluir Primaria, un tercio de los niños y niñas han perdido interés por la ciencia y durante la Secundaria, casi el 50 % ha perdido el interés o no la considera relevante para su educación o sus planes futuros.

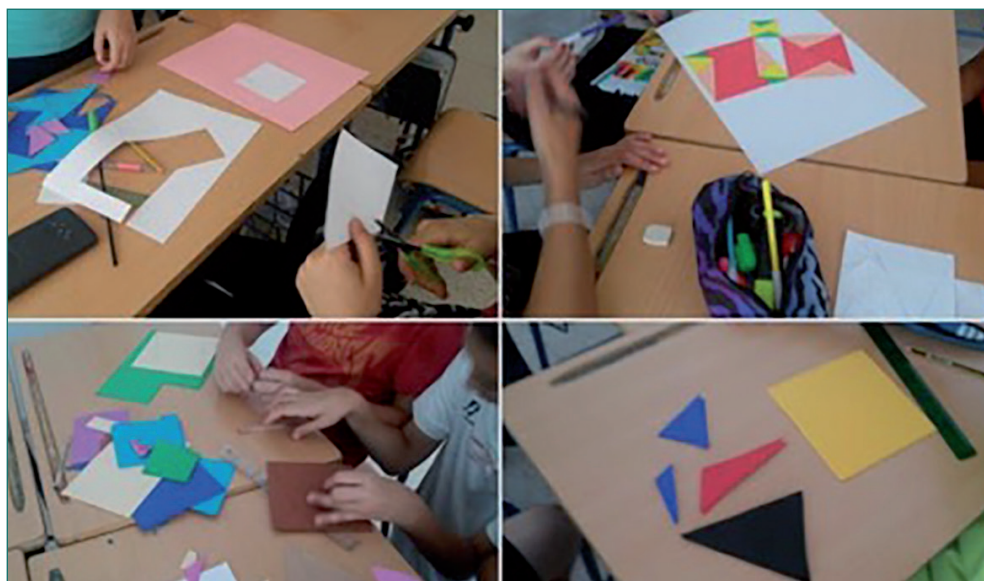


Figura 1. Estudiantes construyendo las figuras.

Por tanto, urge y es de vital importancia orientar nuestra labor docente hacia la elaboración y experimentación de propuestas didácticas integradoras que potencien un verdadero desarrollo competencial integral del alumnado pero, como docente de matemáticas que soy, haciendo especial hincapié en el desarrollo de tareas integradas y pequeños proyectos que potencien la competencia STEM desde el aula de matemáticas.

Si a todo ello le sumamos que dichas propuestas didácticas intenten desarrollar la parte creativa del alumnado, digamos la parte más artística, estaremos incorporando la letra A, con lo cual estaremos potenciando:  $STEM + A = STEAM$ , es decir, STEAM en el aula de matemáticas. En primera instancia, podemos considerar que es bastante complicado introducir la “A” pero no lo es en absoluto, si diseñamos y llevamos al aula propuestas didácticas integradas globalizadoras, tendentes a modelizar la realidad, a diseñar algoritmos y programar aplicaciones que resuelvan situaciones problemáticas determinadas o tareas que requieran diseñar algún tipo de envase, diseño de una obra de ingeniería, ... (7)

## LA EXPERIENCIA

La experiencia de aula que presento en este artículo camina en la dirección descrita. A partir de la atenta observación de distintas “demostraciones sin palabras” del Teorema de Pitágoras proyectados en la pizarra digital interactiva, elaborados con applets interactivos de Geogebra, coloca a los estudiantes en el centro del proceso de aprendizaje para que, trabajando de manera cooperativa, en distintos grupos:

1. Elijan qué demostración realizar, de entre las visionadas.
2. Que realicen la construcción geométrica elegida, paso a paso, usando las medidas y los útiles de dibujo adecuados.



Figura 2. Demostraciones sin palabras del teorema de Pitágoras con Geogebra.

3. Que lleven la misma a soporte goma EVA, destacando su lado más visual y creativo.
4. Que presenten en vídeo, mientras manipulan la construcción elaborada en goma EVA, la demostración realizada, potenciando de este modo la competencia comunicativa del alumnado. Como les suelo decir, “explicar es aprender dos veces”. (9)

La experiencia fue llevada a cabo en clases de la materia de matemáticas, con 28 estudiantes de 2º ESO del IES La Palma (La Palma del Condado), durante el curso 2014/2015.

Como introducción a la unidad de Geometría en la que se trabaja el teorema de Pitágoras y la semejanza de figuras en 2º de ESO, pensé que sería una buena opción fortalecer el aprendizaje significativo del Teorema de Pitágoras, yendo un paso más allá de la memorización y aplicación de la fórmula  $a^2 = b^2 + c^2$  que casi todos los alumnos repiten de carrerilla pero que, desgraciadamente, no suelen asociar con su verdadero y potente significado geométrico, debido en gran parte a los escenarios de enseñanza-aprendizaje transmisivos en los que se adquieren, aplicando la fórmula casi de manera exclusiva a la resolución de ejercicios descontextualizados, desconociendo el verdadero potencial geométrico del célebre teorema (figura 2).

Es por ello por lo que, apoyándome en el post que publiqué en mi blog en días previos a la experimentación, 17 demostraciones sin palabras del Teorema de Pitágoras (8), sobre el magnífico trabajo que había realizado Steve Phelps con Geogebra, decidí proyectar en clase, analizar y trabajar con mi alumnado la construcción geométrica de las mismas para, posteriormente, pasar a la acción, elaborando diferentes demostraciones del célebre teorema, usando goma EVA.

Pues bien, hoy tengo el gusto de compartir esta experiencia didáctica en el presente artículo, por si puede servir de ayuda e inspiración a algunos otros docentes.

## **MATERIAL UTILIZADO**

- Pizarra Digital Interactiva.
- Libro digital interactivo con diferentes “demostraciones sin palabras” del Teorema de Pitágoras. Applets interactivos elaborados con Geogebra.
- Útiles de dibujo (Regla, escuadra y cartabón).
- Goma EVA.
- Tijeras.
- Tablet para grabación de vídeos con las exposiciones de los estudiantes.

## **SECUENCIA TEMPORAL**

El desarrollo de la experiencia se desarrolló durante 4 sesiones de 55 minutos.

- Primera sesión: Presentación de la propuesta didáctica (producto final a conseguir, objetivos didácticos, contenidos e instrumentos de evaluación) y visionado de applets interactivos. Distribución de equipos.
- Segunda sesión: Realización de las construcciones geométricas. Inicio del trabajo con goma EVA.
- Tercera sesión: Finalización de los proyectos y grabación en vídeo de las exposiciones orales.
- Cuarta sesión: Exposición de los trabajos realizados por los distintos grupos. Coevaluación de los proyectos (figura 3).

## **RECOGIDA DE DATOS (EVALUACIÓN)**

Se llevó a cabo el seguimiento del trabajo desarrollado por los distintos grupos durante las sesiones de elaboración, con una participación muy activa de todos los estudiantes. Daba gusto verlos trabajar. Se les veía muy motivados y comprometidos con la tarea.

Finalmente, durante la puesta en común se llevó a cabo una coevaluación grupal de los proyectos presentados por los distintos grupos.

## **CONCLUSIONES**

Se pone de manifiesto que el aprendizaje alcanzado mediante el trabajo realizado con metodologías activas, empodera a los estudiantes, y es mucho más rico y significativo que el obtenido a través de otras propuestas metodológicas más antagónicas y transmisivas.

### 3. Exposiciones de productos elaborados... (I)



Figura 3. Exposición de productos elaborados (10).

### 2. El proceso...



[Pulsa para ver algunas fotos tomadas durante el proceso](#)

Figura 4. Presentación-resumen de la experimentación didáctica (introducción, proceso y exposición de productos) (10).

La geometría hay que verla, construirla, tocarla y manipularla. Eso fue, exactamente, lo que hicimos.

A la vista de los productos generados y del visionado de los vídeos elaborados nos lleva a afirmar que el objetivo propuesto de descubrir toda la plenitud y significado geométrico del Teorema de Pitágoras, yendo más allá de la tan manida fórmula  $a^2 = b^2 + c^2$  que casi todos cantamos de carrerilla, fue alcanzado.

Esto es hacer STEAM y trabajar por competencias, no más. Y ya ves lo que son capaces de conseguir nuestros aprendices, cuando le damos libertad para idear, diseñar, construir y contar. Particularmente, disfruto muchísimo viéndolos aprender de este modo e invito a probar de esta medicina a cualquier docente. Eso sí, advierto que, provoca adicción. ;-) ¿Te animas? (Figura 4).

## REFERENCIAS

- España. Ley Orgánica 2/2006, de 3 de mayo, de Educación. BOE, de 4 de mayo de 2006, núm. 106 p. 17158-17207.
- España. Ley Orgánica 8/2013, de 9 de diciembre, para la mejora de la calidad educativa. BOE, 10 de diciembre de 2013, núm. 295, p. 97858-97921
- España. Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato. BOE, 3 de enero de 2015, núm. 3, p. 169-546
- España. Orden ECD/65/2015, de 21 de enero, por la que se describen las relaciones entre las competencias, los contenidos y los criterios de evaluación de la educación primaria, la educación secundaria obligatoria y el bachillerato. BOE, 29 de enero de 2015, núm. 25, p. 6986-7003
- Comisión Europea/EACEA/Eurydice, 2012. El desarrollo de las competencias clave en el contexto escolar en Europa: desafíos y oportunidades para la política en la materia. Informe de Eurydice. Luxemburgo: Oficina de Publicaciones de la Unión Europea.
- MatemÁTICas: 1,1,2,3,5,8,13,... . (2011). Más formación en ciencia y matemáticas para docentes de Primaria. <http://matematicas11235813.luismiglesias.es/2011/09/08/mas-formacion-en-ciencia-y-matematicas-par-a-docentes-de-primaria>
- MatemÁTICas: 1,1,2,3,5,8,13,... . (2015). Caja registradora con #Scratch. Devuelve mínimo número de billetes y monedas. <http://matematicas11235813.luismiglesias.es/2015/11/17/caja-registradora/>
- MatemÁTICas: 1,1,2,3,5,8,13,... . (2015). 17 demostraciones sin palabras del teorema de Pitágoras, con #GeoGebra. <http://matematicas11235813.luismiglesias.es/2015/02/12/17-demostraciones-sin-palabras-del-teorema-de-pitagoras-con-geogebra/>
- Centro Nacional de Innovación e Investigación Educativa. Ministerio de Educación, Cultura y Deporte. (2014). Voces competentes. LingMÁTICas: fortaleciendo la competencia lingüística en clase de MatemÁTICas. <http://blog.educalab.es/cniie/2014/07/21/voces-competentes-lingmaticas-fortaleciendo-la-competencia-linguistica-en-clase-de-matematicas/>
- Matemáticas manipulativas - Construcción de diferentes demostraciones del teorema de Pitágoras con goma EVA. (2015). Luis Miguel Iglesias Albarrán. <https://docs.google.com/presentation/d/1fVsjIv9b86eeHHMs8jIwoQu-jrZnfuYyT3Y4z4eLHbI/pub?start=true&loop=true&delayms=10000&slide=id.p>



## Reflexión sobre la práctica del profesor de matemáticas en la enseñanza de las funciones

María Burgos Navarro  
Pablo Flores Martínez  
Universidad de Granada

**Resumen:** *Son muchos los motivos por los que los procesos reflexivos deberían formar parte de la práctica docente. El profesor de matemáticas se encuentra a diario con situaciones problemáticas que deberá afrontar tomando decisiones fundamentadas que afectarán a su desempeño educativo y requerirán analizar su comportamiento y reorientar la práctica docente de la forma más eficaz y responsable.*

*En este artículo presentamos una experiencia llevada a cabo como parte de un curso del máster de Didáctica de la Matemática, cuyo objetivo fue mostrar a los docentes el proceso reflexivo como vía de desarrollo profesional que les capacite para revisar su propia práctica docente. Describimos el proceso reflexivo en el contexto-problema de la enseñanza de las funciones en último curso de bachillerato.*

**Palabras clave:** *formación de profesores, profesor de matemáticas reflexivo, funciones.*

## Reflection in mathematics teacher practices on functions education

**Abstract:** *There are many reasons that motivate the use of reflection processes as part of the teaching practice. Mathematics teachers fall almost every day into problematic situations that must resolve by taking fundamental decisions. These decisions will interfere with their teaching duties, and will require to analyze their own behaviour and to reorient their instructional practice in a more efficient and responsible way.*

*In this manuscript we present an experiment developed as part of a course in the Master "Didáctica de la Matemática". The aim of the experiment was to show the teachers the reflection process as professional experience that allows them to revise their own teaching abilities. We describe the reflection process in the scope of teaching functions in the last academic course of high school.*

**Keywords:** *teacher training, reflective mathematics teacher, functions.*

## INTRODUCCIÓN

En el desempeño de la labor educativa, el profesor debe afrontar continuamente situaciones imprevistas para las que no tiene una respuesta inmediata ni pre-establecida. Los estudiantes son diferentes como individuos, con intereses, necesidades y limitaciones distintas. Con la práctica docente, el profesor, aumenta su experiencia y su conocimiento profesional. Este conocimiento debe estar fundamentado, de cara a que el profesor disponga de criterios para diferenciar conocimientos subjetivos y conocimientos institucionalizados, tanto de sus alumnos como de los propios contenidos matemáticos y de su forma de enseñanza.

En esta línea adquiere gran importancia incentivar la tarea reflexiva del docente, que acepte esta práctica como parte de un proceso continuo de aprendizaje, en el que se revisen creencias, se tome distancia de los problemas y se consideren nuevas perspectivas que le lleven a reformular sus dudas o preocupaciones como profesional responsable.

En este trabajo presentamos un proceso reflexivo llevado a cabo en el contexto de la asignatura Conocimiento y Desarrollo Profesional del Profesor de Matemáticas del máster en Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada.

El ciclo de reflexión desarrollado en el curso, comenzó con la formulación precisa, por parte de cada uno de los profesores participantes, entre ellos la primera autora, de situaciones problemáticas que habían supuesto un conflicto o dificultad real en algún momento de su experiencia docente. Se establecía de la forma más clara posible el contexto, el sujeto afectado (alumno, profesor), la acción (aprendizaje, enseñanza) y finalmente la cuestión que respondía al dilema profesional.

El segundo paso en un proceso de reflexión requiere un distanciamiento que permita clarificar los presupuestos que han llevado al profesor a formular su problema profesional. Se trata pues de desentrañar nuestra postura, filtrando el aspecto emocional y evitando cualquier predisposición que dificulte la aceptación de aportes externos. En este momento del ciclo implementado, se requería la colaboración de los demás profesores a través del Foro, de forma que cada participante debía indicar una creencia que apreciaba que estaba influyendo en el planteamiento del problema de cada uno de sus compañeros, formulándola mediante la expresión: “*Yo creo que... cree que....*”.

Revisar las creencias que otros compañeros intuyen que condicionan nuestra percepción del problema, analizar con cuál de ellas nos sentimos identificados, cuáles compartimos o cuáles nos hacen dudar, porque no hemos sido conscientes de que influyen en nuestra visión personal del problema, nos permite tomar distancia del mismo.

En este momento, se trataba de buscar información clara, significativa, en la que se apreciara aspectos novedosos que ayudasen a contemplar el problema desde una postura próxima a la percepción personal, pero de una forma amplia, que ayudase a completar nuestra visión y acercarnos a una solución del problema.

También en esta fase del ciclo reflexivo, se produjo una interacción a través del Foro, donde otros participantes aportaron sugerencias de textos, teorías o experiencias personales que pudieran ayudarnos a confrontar el problema con otras perspectivas.

Cada participante pudo recoger las aportaciones que le habían sugerido sus compañeros a través de la plataforma y finalmente reformular su problema profesional, como consecuencia del ciclo reflexivo realizado.

A continuación describimos brevemente el marco teórico en que se apoya este trabajo, para describir después, los resultados de las distintas etapas del ciclo recorrido para profundizar sobre el problema profesional planteado por la primera autora del trabajo. Por último, examinamos las aportaciones de este ciclo de reflexión a nuestro desarrollo profesional.

## **REFLEXIÓN SOBRE LA PRÁCTICA DEL PROFESOR DE MATEMÁTICAS**

Como hemos mencionado antes, la reflexión es una potente herramienta en la formación y desarrollo profesional de los docentes, ya que requiere que mediten de forma sistemática sobre su práctica e indaguen sobre la interpretación de sus problemas profesionales desde las distintas aportaciones procedentes de la didáctica de la Matemática. El profesor reflexivo presenta una abierta disposición a enfrentar los conflictos que acontecen en su vida profesional, por medio de la revisión continua de su práctica.

La concepción de profesional reflexivo procede de las ideas de Donald Schön. Para Schön (1992) el profesional afronta situaciones problemáticas de su práctica, mediante procesos de distanciamiento y toma de decisiones que no pueden explicarse exclusivamente a partir de su conocimiento teórico. Este proceso, que consiste tanto en una reflexión “en la acción” como “sobre su acción”, es el que Schön destaca como específico del comportamiento práctico responsable. La reflexión en la acción a que hace referencia Schön, es un proceso sistemático que permite actuar frente a un evento que necesita solución en un momento dado, por medio de la toma de decisiones basadas en experiencias anteriores sobre situaciones similares o relacionadas. Por otro lado, la reflexión sobre la acción, sucede después y alejada de ésta, lo que aporta tiempo y distancia para el análisis de la situación antes de tomar decisiones. Con esta actuación reflexiva, el práctico actúa de manera sistemática y responsable.

El profesor es un profesional práctico, tanto por la inmediatez de su toma de decisiones para afrontar los problemas de su práctica, como por la importancia de sus actuaciones frente a los logros. Por tanto, procede afrontar el desarrollo profesional del profesor como un proceso de creación de hábitos de reflexión, para aprender desde el desempeño práctico de su función docente, adquiriendo nuevas formas de actuar que le permitan dar solución a los conflictos que motivaron su análisis (Perrenoud, 2004).

A partir de las ideas de Perrenoud (2004), Flores (2007) señala como características del profesor reflexivo:

- percibe situaciones de su práctica que necesiten otra manera de actuar;
- se distancia de esas situaciones para poder analizarlas;
- explicita y examina los elementos que condicionan esas situaciones, considerando los que derivan de sus creencias.
- busca otras formas de interpretar la situación, recurriendo a diferentes fuentes (compañeros de trabajo, documentos oficiales, libros de textos, investigaciones, etc.)

Para que el profesor llegue a ser un profesional reflexivo, se han planteado diversos recursos desde la formación docente. Smyth (1991) propone un esquema de acción reflexiva en un ciclo compuesto de cuatro fases:

1. Definir el problema con precisión.
2. Indagar que teorías propias subyacen al mismo.
3. Confrontar las creencias y planteamientos conscientes en el problema con otras formas de contemplarlo.
4. Reconstruir la cuestión.

Si bien el Ciclo de Smyth parece focalizar la atención sobre la actuación individual del profesor, es interesante considerar que se puede facilitar su ejecución mediante la realización conjunta con otros profesionales docentes. Es por eso que, durante un curso de investigación sobre el conocimiento y desarrollo profesional del profesor de matemáticas, llevamos proponiendo facilitar que los participantes realicen un ciclo de Smyth a partir de un problema profesional (Flores, 2007). Este proceso comienza cuando el profesor identifica un problema profesional surgido en el desempeño de su práctica. Para poder ser afrontado y compartido por los demás, el problema debe ser descrito de la forma más precisa posible. Después, en la fase de información, se acota el problema, haciendo que quien lo plantea indague sobre los presupuestos y teorías prácticas que sustentan su interpretación. La confrontación requiere la participación de otros que ayuden al práctico reflexivo a valorar otras formas de entender la situación. El procesamiento de la información recibida, siempre filtrado por la funcionalidad que el profesor reflexivo le adjudica, lleva a terminar el ciclo formulando nuevas formas de considerar el problema y elaborando propuestas para posibles soluciones o actuaciones, que estarán sujetas a revisión a través de nuevos ciclos como el descrito.

## **EL CICLO DE REFLEXIÓN: ENSEÑANZA DE LAS FUNCIONES**

En esta sección describimos la experiencia de la primera autora durante el taller de reflexión, por lo que estará redactado en primera persona.

### **Definición del problema profesional**

Durante mi experiencia docente, he podido comprobar, de forma habitual que, muchos alumnos al final del bachillerato o incluso al llegar a los primeros cursos de carrera técnica universitaria, desligan las funciones y sus propiedades de sus representaciones gráficas. Para ellos, es más o menos sencillo realizar cálculos a partir de su expresión analítica, es decir, pueden reconocer o determinar el dominio de la función, o sus asíntotas, obtener su función derivada y a partir de ella determinar sus extremos relativos e intervalos de monotonía, etcétera, pero, sin embargo, la representación gráfica de las funciones les resulta una “tarea ardua” y con frecuencia, es la parte “olvidada” en los exámenes. Por otro lado, tienen serias dificultades para reconocer determinadas propiedades a partir de una representación gráfica; responder a las preguntas “¿qué tipo de función puede responder a esta gráfica?” o “¿cuál es el dominio y la imagen de la función con esta representación gráfica?” puede tener un alto índice de fracaso.

El primer momento del ciclo reflexivo se refiere a la definición clara de la situación que se va a analizar, detallando para ello, el sujeto al que afecta y a la acción involucrada. A raíz de la actuación práctica que acabamos de relatar, establecemos:

Contexto: Enseñanza de las funciones. Los alumnos de último curso de bachillerato, saben realizar cálculos con la expresión analítica de una función (determinar su dominio, imagen, asíntotas, límites, monotonía, máximos y mínimos...). Sin embargo existe una desconexión con la representación gráfica de la misma. Con frecuencia, no saben representarla o no identifican en la gráfica, lo que han obtenido sobre la expresión analítica de la misma.

Sujeto: Profesor.

Acción: Enseñanza.

Cuestión: ¿Cómo puedo explicar las funciones para que no exista esa ruptura y que el alumno reconozca en la representación gráfica los elementos de estudio?

### **Distanciarse y mirar hacia atrás para clarificar presupuestos.**

En el segundo momento del ciclo de reflexión, para delimitar el problema y analizar las concepciones o presupuestos que subyacen a nuestra interpretación del mismo, los compañeros formularon ciertas creencias que, a su juicio, estaban influyendo en el problema que había planteado. A continuación reflejamos las creencias manifestadas (cuadro 1).

*Yo creo que María cree que:*

- Los alumnos de bachillerato mecanizan el procedimiento y no comprenden los conceptos, por eso no reconocen las características de la función en la representación de la misma
- Hay que dar mayor importancia de la que se da al estudio práctico en el estudio de funciones.
- Los alumnos:
  - estudian la función de manera diferente a partir de la expresión analítica que a partir de la gráfica,
  - estudian los elementos en la función analítica, pero no saben representarlos en la gráfica,
  - determinan de manera mecánica los elementos de la función en su expresión gráfica.
- Los alumnos dominan la representación gráfica de funciones en Bachillerato.
- Los conceptos se deben enseñar apartados de sus representaciones.
- Los estudiantes no saben interpretar gráficas aunque sepan trabajar de forma analítica las funciones.
- Los alumnos deben saber representar una función a partir de sus propiedades y deben obtener sus propiedades a partir de la representación gráfica.
- Los alumnos mecanizan los procedimientos para el estudio de funciones pero, en realidad, no reconocen el verdadero significado de cada concepto de estudio. Por lo tanto, no lo identifican con la gráfica

Después de haber leído las creencias que habían aportado los compañeros, decidí distribuir las tres categorías siguientes, y obligarme a explicitar los argumentos que me hacen tomar esta postura, con lo que estaré poniendo en claro las creencias con las que afronto el problema:

- a) las que descarto, porque no las siento;
- b) las que acepto, porque efectivamente “las creo”, y
- c) las que me hacen dudar o influyen en mi forma de ver el problema (antes y después).

Descarto:

- *Que los alumnos dominan la representación gráfica de funciones en Bachillerato.* Creo que “dominar la representación gráfica”, supone ser capaz de, a partir de los cálculos derivados de la expresión analítica de la función, elaborar la representación de ésta y distinguir sus características notables: dominio, imagen, asíntotas, intervalos de crecimiento y decrecimiento, extremos relativos, curvatura, etc. También, supone reconocer en una determinada gráfica, estos elementos sin disponer de su descripción algebraica.
- *Que los conceptos se deben enseñar apartados de sus representaciones.* Creo que un concepto se aprende si se puede representar o cambiar entre un sistema de representación y otro. Es decir, un alumno habrá comprendido el concepto de límite si, como procedimiento, puede calcularlo a partir de la expresión de la función, y como concepto puede verlo en la gráfica de ésta.

Creo que (en este caso unifico varias aportaciones de mis compañeros que, de una forma u otra, aluden al mismo presupuesto):

- *Los estudiantes mecanizan los procedimientos y no saben representar o reconocer (interpretar) las características de la función en la gráfica.* Esta creencia, que comparto, se basa en mi experiencia como docente, en lo que he comprobado que son capaces de hacer los estudiantes y de las dudas que ellos me han consultado.
- *No comprenden los conceptos, por eso no reconocen las características de la función en la representación de la misma.* Como he mencionado antes, no hay comprensión de un concepto si no se puede representar y traducir de un sistema de representación a otro.

Me hacen dudar (porque en el momento de formular el problema no las había pensado así):

- *Los alumnos estudian la función de manera diferente a partir de la expresión analítica que a partir de la gráfica.* Esta afirmación no puedo plantearla como parte de mis presupuestos, pero tampoco puedo rechazarla, porque me hace reflexionar y formularme nuevas preguntas que no había tenido en cuenta al plantear mi problema profesional: ¿Qué ven los alumnos detrás de la expresión analítica de una función? ¿y detrás de la gráfica?, ¿cuál es su concepto de función?
- *Los alumnos determinan de manera mecánica los elementos de la función en su expresión gráfica.* En ningún momento antes me había planteado que se pudiera interpretar mecánicamente una gráfica. En la situación problema, me cuesta identificar la componente procedimental a la hora de determinar características de una función a partir de su representación. ¿Realmente puede ser así?
- *Hay que dar mayor importancia de la que se da al estudio práctico en el estudio de funciones.* Sin duda estoy de acuerdo con esta afirmación, pero, no me había

planteado que estuviera detrás de la desconexión entre la expresión analítica de la función y la representación gráfica de la misma. Ahora bien, ¿ayudaría dar más presencia al estudio práctico a evitar este problema?

Recabar información, indagar motivos para aceptar o rechazar las creencias, nos lleva a distanciarnos de cómo afrontamos la enseñanza del contenido matemático, en nuestro caso, las funciones, y nos predispone a considerar razones por las que existe una ruptura entre la expresión analítica y la gráfica de las funciones.

## Confrontación

El próximo momento se refiere a la confrontación, que en términos de Smyth (1991) supone la percepción de otras prácticas y teorías, buscando responder a la pregunta *¿Qué otras formas hay de percibir esta práctica?*

Esta confrontación se realiza mediante un proceso de apertura hacia otras experiencias, pero siempre desde la expectativa de darles sentido. Por tanto, no basta con el estudio de la literatura (libros, artículos de investigación), en parte sugerida por los compañeros, sino que se trata de una lectura crítica, que sólo acepta aquellas aportaciones que resultan sugerentes al práctico.

A continuación resumo las apreciaciones más importantes que he extraído de las diferentes lecturas propuestas: Arce y Ortega (2013), Blázquez y Ortega (2001), Leinhart et al (1990), Pecharromán y Ortega (2010), Shell Centre (1990).

- El estudio y representación de funciones requiere dos procesos no necesariamente consecutivos, que tienen que coordinarse. Por un lado el paso de la expresión algebraica a la determinación de características -con repercusión gráfica; por otro, la identificación de la repercusión gráfica en el registro algebraico, y la coordinación entre los aspectos parciales.
- La interpretación de las características de una función a partir de su gráfica es una actividad decisiva para lograr la coordinación anterior, que se realiza de manera poco frecuente en la enseñanza.
- Motivar por parte de los estudiantes el uso de estrategias basadas en la intuición, en el sentido común y la interpretación de situaciones de la realidad, ayuda a los estudiantes a mirar la gráfica de forma global como una expresión de la relación entre dos cantidades mutuamente cambiantes.
- Poder interpretar con soltura una gráfica, apreciarla como un registro que suministra información sobre el fenómeno, más allá de considerarla solo como la plasmación de las cualidades obtenidas mediante el proceso formal de obtención de los elementos que se usan para estudiar las funciones (dominio, continuidad y asíntotas, extremos, monotonía, curvatura,...) requiere de una serie de pasos de gran complejidad cognitiva: diferenciar elementos aislados y comparar unos con otros en funciones discretas, apreciar variaciones conjuntas, extremos y sus transiciones, en procesos continuos, etc. Es importante tomar conciencia de qué información en una gráfica requiere por parte del aprendiz, haber interiorizado esta serie de pasos.

- Algunas de las incorrecciones en las representaciones gráficas, pueden reflejar deficiencias en el esquema conceptual que el alumno tiene de conceptos como el de función, asíntota, o las características de determinados tipos de funciones. Los alumnos, necesitan disponer de muchas oportunidades para discutir ideas y errores conceptuales, presentar pruebas y discutir explicaciones, de cara a desarrollar las destrezas interpretativas necesarias.

## Reformulación

En esta última fase, me planteo ¿de qué otras formas puedo enseñar las funciones a partir de las creencias manifestadas y en base al estudio de las referencias propuestas?

En este momento de planificación de mejoras, de reconstrucción de la práctica profesional, como consecuencia del análisis reflexivo de las etapas anteriores, considero importante:

- evitar tratar las representaciones gráficas y algebraicas como sistemas simbólicos distintos y apoyarme en ambas desde el inicio para construir el concepto de función.
- usar la representación gráfica como medio para generar la visualización inicial de los conceptos, de modo que los estudiantes vayan incorporando los nuevos conceptos asociados a las funciones a través de la conjunción de los distintos sistemas de representación.
- plantear tareas donde se enuncien propiedades de una función exclusivamente a través de su representación gráfica
- dar mayor peso en mi práctica a la interpretación cualitativa de gráficos que modelizan situaciones reales, buscando en los estudiantes el interés por la representación gráfica, e incentivando en ellos el uso de estrategias intuitivas descriptivas.
- incorporar en mi práctica docente software, como puede ser GeoGebra, que facilite la construcción y estudio de las representaciones gráficas, evitando las limitaciones que conlleva una enseñanza basada únicamente en la representación con lápiz y papel.

Finalmente, la cuestión inicial basada en la creencia de que

*los estudiantes mecanizan los procedimientos y no comprenden los conceptos, de forma que no pueden representar o reconocer (interpretar) las características de la función en la gráfica,*

adquiere una nueva formulación:

*¿cómo puedo trabajar en clase las funciones para que la visualización permita la interpretación inicial de los conceptos y su definición formal se alcance como parte de un aprendizaje significativo de los mismos a través de los distintos sistemas de representación?*

## CONCLUSIONES

No cabe duda de la importancia de la reflexión para la práctica profesional del docente (Flores, 2000 y 2007; Schön, 1992). Como afirma Smyth (1991, p. 293), los profesores “pueden utilizar sus propias capacidades para formular e implementar programas de cambio”.

El profesor de Matemáticas reflexivo tiene la capacidad de analizar su propia práctica docente, distinguiendo el sistema de creencias que fundamentan su actuación. Extrae de la Didáctica de las Matemáticas, de forma crítica y fundamentada, los aspectos que le resultan más apropiados a la hora de explicar sus actuaciones.

En este artículo, hemos presentado el proceso de reflexión sobre un problema profesional de la primera autora, bajo la supervisión del segundo autor y profesor de la asignatura del máster en Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada, en relación a la enseñanza de las funciones para alumnos de segundo curso de bachillerato.

El proceso de reflexión aborda la difícil tarea de confrontar al profesor con nuevas formas de ver los problemas, manteniendo su idiosincrasia (su carácter de profesional práctico, no sujeto a ser reproductor de teorías), pero a la vez, permitiéndole avanzar en su conocimiento y desarrollo profesional.

La experiencia desarrollada en el taller reflexivo, sin duda cubre estas expectativas y para nosotros ha sido muy significativa. Reflexionar sobre nuestras propias creencias y contar con la colaboración de compañeros docentes con experiencias similares (o no), concepciones diversas y puntos de vista distintos, para alejarnos de nuestras circunstancias y observar cómo se ve desde fuera nuestro problema, ha sido una práctica novedosa que nos ha favorecido tanto como sujeto activo del ciclo de reflexión, como colaborador al “enunciar lo que yo creo que cree mi compañero”.

El proceso de reflexión persigue la conjunción operativa entre el conocimiento práctico, necesario para la acción, y el conocimiento teórico que sirve de argumento al práctico. Esto requería por nuestra parte, filtrar los aportes teóricos y seleccionar lo que apreciábamos como valioso, a través de una lectura crítica que lo aproxime a nuestra propia actuación.

En suma, del ciclo de reflexión salimos con una nueva formulación del problema, en mi caso, cómo establecer el sistema de representación gráfica como medio de aprendizaje, y una propuesta fundamentada de posibles soluciones a nuestro problema profesional o vías de actuación, que de nuevo podrían dar lugar a un futuro ciclo de reflexión.

Pero el conocimiento profesional que adquirimos con el taller de reflexión, no se limita únicamente a nuestro problema profesional, ya que se completa con la puesta en común por parte de los participantes del curso de las experiencias sobre sus propios ciclos de reflexión (desde la formulación de sus problemas prácticos hasta la reformulación de los mismos).

## REFERENCIAS

Arce, M. y Ortega, T. (2013). Deficiencias en el trazado de gráficas de funciones en estudiantes de bachillerato. *PNA*, 8(2), 61-73.

- Blázquez, S. y Ortega, T. (2001). Los sistemas de representación en la enseñanza del límite. Vol 4. N°3, 219-236. *RELIME*. ISSN: 1665-2436. México DF
- Shell Centre for Mathematical Education (1990). *El lenguaje de las funciones y las gráficas*. Madrid, MEC, Servicio Editorial Publicaciones del País Vasco.
- Flores, P. (2000) Reflexión sobre problemas profesionales surgidos durante las prácticas de enseñanza. *Revista EMA*, 5(2), 113-138.
- Flores, P. (2007). Profesores de matemáticas reflexivos: formación y cuestiones de investigación. *Revista PNA*, 1(4), 139-158.
- Leinhardt, G., Zaslavsky, O. y Stein, M. (1990). Functions, graphs and graphing: tasks. Learning and teaching. *Review of Educational Research*, 60(1), 1-64.
- Pecharromás-Gómez, C. (2009). *Aprendizaje de las propiedades globales de las funciones a través de sus gráficas* (Tesis doctoral). Universidad de Valladolid, Castilla y León.
- Pecharromás, C. y Ortega, T. (2010) Diseño de enseñanza de las propiedades globales de las funciones a través de sus gráficas. *Enseñanza de las ciencias*, 28(2), 215-226.
- Perrenoud, J. P. (2004). *Desarrollar la práctica reflexiva en el oficio de enseñar*. Barcelona: Grao.
- Schön, D. (1992). Formar profesores como profissionais reflexivos. En A. Nóvoa (Org.). *Os professores e a sua formação*. Lisboa: Dom Quixote.
- Smyth, J. (1991). Una pedagogía crítica de la práctica en el aula. *Revista Educación*, 294, 275-300.

## Uso de representaciones verbales en la enseñanza del Teorema de Thales

David Gutiérrez-Rubio  
Universidad de Córdoba

**Resumen:** *Se plantea una propuesta de clase que trabaja, previamente al enunciado matemático del Teorema de Thales, una representación verbal en términos cotidianos y una serie de actividades encauzadas a que el alumno pueda intuir cómo será la solución de un problema que necesite aplicar dicho teorema. Asimismo, se trabaja la representación verbal del concepto de proporcionalidad a través de proporciones sencillas (doble, triple, ...) y su salto a expresiones más complicadas a través del lenguaje matemático.*

**Palabras clave:** *Teorema de Thales, geometría, representación verbal, educación matemática.*

## Use of verbal representations in the teaching of Thales Theorem

**Abstract:** *We describe a series of activities for the classroom prior to the mathematical statement of Thales Theorem, a verbal representation in everyday terms and a series of activities so to the student can intuit how will be the solution of a problem that needs to apply the theorem. Moreover, the verbal representation of the concept of proportionality is worked through simple proportions (double, triple, ...) and its jump to more complicated expressions through mathematical language.*

**Keywords:** *Thales theorem, geometry, verbal representation, mathematics education*

### INTRODUCCIÓN

La enseñanza tradicional del Teorema de Thales, como muchos otros conceptos de geometría plana, tienen como principal método de representación el gráfico. Autores como Duval (2006) recalcan la necesidad de utilizar una variedad lo más amplia de métodos de representación para los distintos conceptos utilizados, así como ser capaces de pasar de uno a otro.

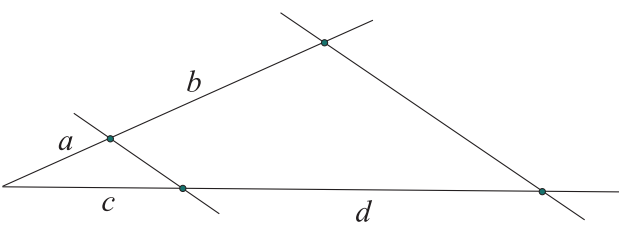
Por su parte, según la normativa estatal en España “Forma parte de esta destreza la creación de descripciones y explicaciones matemáticas que llevan implícitas la interpretación de resultados matemáticos y la reflexión sobre su adecuación al contexto, al igual que la determinación de si las soluciones son adecuadas y tienen sentido en la situación en que se presentan.” (O. ECD/65/2015, de 21 de enero).

El uso de representaciones verbales ayuda también a que el estudiante confiera de sentido a los entes abstractos que aparecen en Matemáticas, a través de su inclusión en un contexto y discurso familiar (Walkerdine, 1982).

En este artículo planteamos una serie de actividades previas al enunciado formal del Teorema de Thales, destinadas a que el alumnado sea capaz de verbalizar relaciones sencillas entre dos magnitudes. Para ello empezaremos con problemas donde las relaciones entre dichas magnitudes sean fáciles de trasladar al lenguaje coloquial (doble, triple, etc.) e ir progresivamente ampliando la dificultad. El objetivo de dicha actividad es, por un lado, mejorar la verbalización de relaciones entre magnitudes, y por otro presentar una versión intuitiva del Teorema de Thales previo a su enunciado formal. La progresiva dificultad en la verbalización de las actividades planteadas hace que el alumno sienta la necesidad de utilizar un lenguaje más específico (el lenguaje matemático) para poder resolver los problemas planteados.

## TÉRMINOS EMPLEADOS

El primer paso antes de verbalizar un enunciado o concepto matemático es la de buscar una representación equivalente que permita una mayor transición al lenguaje hablado. En este caso, vamos a trabajar con la siguiente forma de enunciar el Teorema de Thales:

	<p><b>Teorema de Thales:</b> En las condiciones del teorema (rectas paralelas, etc.) se cumple que:</p> <p>Si <math>\frac{b}{a} = x</math> entonces <math>\frac{d}{c} = x</math></p>
---	--

Aunque el teorema establece más relaciones de proporcionalidad entre segmentos, nosotros nos centraremos sólo en el tipo del expuesto como enunciado.

Como hemos dicho, utilizaremos términos coloquiales y de fácil visualización para representar los conceptos elegidos. En este caso concreto hemos elegido los siguientes:

- La construcción geométrica representa un bloque de viviendas.
- Cada segmento representa un vecino y su longitud representa cómo de grande es su casa.

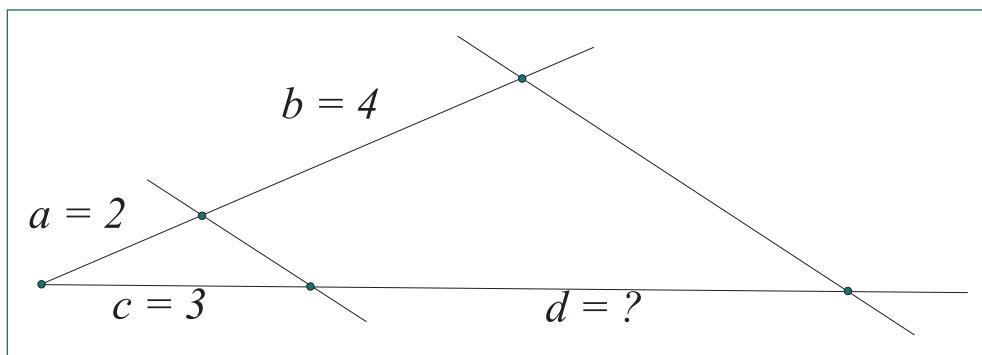


Figura 1.

- La implicación lógica del teorema (el “entonces”) necesita de una situación de la vida cotidiana que se represente por dicho conector lógico. En este caso hemos usado la envidia, cuya idea más conocida es, por ejemplo “si mi hermano tiene una bici, *entonces* yo también quiero una”.

## DESARROLLO DE LAS ACTIVIDADES

La construcción típica para mostrar el Teorema de Thales se ilustra en la Figura 1. Diremos que este dibujo representa un bloque de vecinos de 2 plantas (semirrectas superior e inferior) y cada segmento representa un vecino. Así, tenemos 2 vecinos en la planta de arriba y 2 en la planta de abajo. Las rectas verticales son los ascensores, que deben ser paralelos (aunque este hecho no tendrá relevancia en nuestra representación).

Contamos que en este bloque de viviendas los vecinos son muy envidiosos y se pasan todo el día planteando quejas al presidente de la comunidad (llamado Thales).

La construcción representada en la Figura 1 la narramos con la siguiente historia: El vecino del bajo derecha  $d$  está todo el día quejándose porque su vecino de arriba  $b$  tiene una casa el doble de grande que el que tiene a su lado ( $a$ ). Él también quiere tener una casa el doble de grande que el que tiene a su lado ( $c$ ). “Si  $b$  es el doble que  $a$ , entonces yo también quiero ser el doble que  $c$ ”, dice enfadado en la reunión de vecinos. ¿Cuánto ha de medir la casa del vecino  $d$  para que deje de quejarse?

Sobre el lenguaje utilizado hay que destacar dos puntos:

- a) En casos en que se verbalice es conveniente no usar economía del lenguaje. En el ejemplo anterior, es importante no omitir la palabra “entonces”, para que el alumno entienda mejor la implicación expresada.
- b) El uso de la teatralidad de forma moderada ayuda a que el alumno se sitúe en el contexto del problema.

El alumnado no debería de tener problemas, una vez entendidas las exigencias del vecino  $d$ , de proporcionar la solución.

A continuación planteamos los siguientes problemas para los valores de  $a$ ,  $b$ ,  $c$  y  $d$ , donde deberemos averiguar de qué se queja cada vecino exactamente, y cómo satisfacer sus demandas. La progresiva dificultad consiste en ir complicando las relaciones entre los diferentes segmentos y la de recorrer la casuística del segmento que será la incógnita.

Tabla 1. Valores, verbalización y solución.

Valores	Verbalización y solución
$a = 3, b = 9, c = 2, d = ?$	El vecino $d$ formula la siguiente queja: “Mi vecino de arriba $b$ es el triple del que tiene al lado ( $a$ ). Yo también quiero ser el triple del que tengo a mi lado ( $c$ )”. Solución: $d = 6$ .
$a = ?, b = 2, c = 4, d = 1$	El vecino $a$ formula la siguiente queja: “Mi vecino de abajo $c$ es el cuádruple del que tiene al lado ( $d$ ). Yo también quiero ser el cuádruple del que tengo a mi lado ( $b$ )”. Solución: $a = 8$ .
$a = 5.1, b = 10.2, c = ?, d = 22$	El vecino $c$ formula la siguiente queja: “Mi vecino de arriba $a$ es la mitad del que tiene al lado ( $b$ ). Yo también quiero ser la mitad del que tengo a mi lado ( $d$ )”. Solución: $c = 11$ .
$a = 9, b = ?, c = 2.1, d = 6.3$	El vecino $b$ formula la siguiente queja: “Mi vecino de abajo $d$ es la tercera parte del que tiene al lado ( $c$ ). Yo también quiero ser la tercera parte del que tengo a mi lado ( $a$ ). Solución: $b = 3$ .

Con esta casuística de problemas vamos representando de forma verbal las relaciones “doble”, “triple”, “cuádruple”, “mitad” y “tercera parte”. Una vez que el alumno esté familiarizado con la tónica de los ejercicios planteamos el siguiente problema con una dificultad nueva:

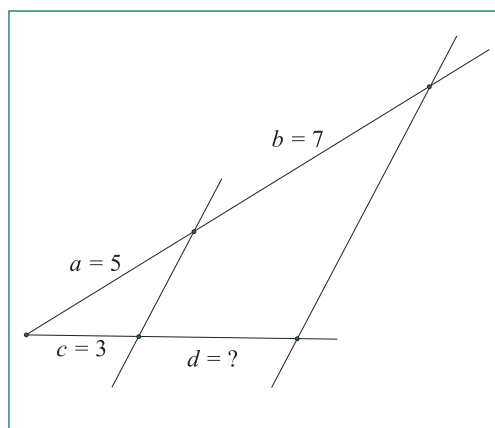


Figura 2.

La dificultad para verbalizar la situación descrita en la Figura 2 viene dada por la relación entre los vecinos  $a$  y  $b$ , al no existir una palabra como “doble” o “triple” que describa con precisión esta relación. Para ello plantearemos la pregunta en clase y oiremos las sugerencias que realicen los alumnos hasta que consigan llegar a una expresión del tipo “ $b$  es 1,4 veces más grande que  $a$ ” o “ $b$  es  $7/5$  veces más grande que  $a$ ”. Para ayudarles a llegar a esa conclusión se puede hacer notar que una expresión equivalente a “doble” es “2 veces más grande que”.

Así, la historia de los vecinos envidiosos que se extrae de la Figura 2 viene a ser algo así:

El vecino  $d$  formula la siguiente queja: “Mi vecino de arriba es 1,4 veces más grande que el que está a su lado  $a$ . Yo también quiero ser 1,4 veces más grande que el que tengo a mi lado ( $c$ )”. Solución:  $d = 3 \times 1,4 = 4,2$ .

Con esta última actividad hemos conseguido ampliar la representación verbal de la relación entre 2 magnitudes en casos más complejos. Se pueden realizar varias actividades más, incluso con números elegidos al azar, para desarrollar la soltura en el paso a la expresión verbal.

Como último paso antes de formular el Teorema de Thales, buscamos una expresión más acorde al lenguaje matemático de las relaciones entre magnitudes. El siguiente ejemplo puede mostrar cómo:

“El vecino es 1,3 veces más grande que el que tiene a su lado ( $b$ )”

Preguntaremos en clase cuánto ha de valer  $a/b$ . Si todos tienen claro que  $a/b$  ha de ser 1,3 decimos que una forma equivalente y más matemática de decir “ $a$  es 1.3 veces más grande que  $b$ ” es decir “ $a/b = 1,3$ ”. De igual forma, “ $a$  es el doble que  $b$ ” se puede poner como “ $a/b = 2$ ” o “ $a$  es la mitad que  $b$ ” se puede poner como “ $a/b = 0,5$ ”.

Entonces, usando esta forma más matemática de representar las envidias entre vecinos, si el vecino  $c$  está envidioso porque  $a/b = 1,3$  ¿qué tiene que ocurrir para que esté contento? Que  $c/d$  también sea 1,3. Es decir, que  $c/d = a/b$ .

En estas condiciones estamos pues listos para enunciar el Teorema de Thales en su forma original.

Siguiendo con la representación verbal y el uso de la teatralidad, puede explicarse la necesidad de que las rectas secantes sean paralelas diciendo que “si los ascensores no están paralelos, eso sería un grave problema para el bloque, y las quejas por envidia de los vecinos quedarían relegadas a un segundo plano hasta que se arreglen los ascensores”.

## CONCLUSIONES

Con la presente propuesta pretendemos fomentar el uso de la verbalización de conceptos y relaciones en un campo como la geometría donde predomina la representación visual. Asimismo, fomentamos que el alumno relacione ideas matemáticas (Teorema de Thales, relaciones entre magnitudes) con contrapartidas sencillas, y la necesidad de utilizar un lenguaje matemático que describa con precisión situaciones de la realidad más complicadas.

## REFERENCIAS

Duval, R. (2006). Un tema crucial en la educación matemática: La habilidad para cambiar el registro de representación. *La Gaceta de la RSME*, 9(1), 143–168.

- Gómez-Granell, C. (1989). La adquisición del lenguaje matemático: un difícil equilibrio entre el rigor y el significado. *Comunicación, lenguaje y educación*, 1(3-4), 5-16.
- Orden EC/65/2015 de 21 de enero, por la que se describen las relaciones entre las competencias, los contenidos y los criterios de evaluación de la educación primaria, la educación secundaria obligatoria y el bachillerato (2015). BOE, 25, 6986-7003.
- Walkerdine, V. (1982). *From context to text: A psychosemiotic approach to abstract thought. Children thinking through language*. Londres: Edward Arnold.

## RINCÓN “SAPERE AUDE”... ¿resolviendo problemas?

Sixto Romero

*Escuela Técnica Superior de Ingeniería*

*Universidad de Huelva*

*sixto@uhu.es*

### INTRODUCCIÓN

Leí hace tiempo un artículo de Joaquim Prats, Universidad de Barcelona, titulado, *Dificultades para la enseñanza de la Historia en la Educación Secundaria: reflexiones ante la situación española*, aparecido en *Histodidáctica*:

*“...en Europa, y más concretamente en el Reino Unido, se planteó las dificultades que suponía la enseñanza de la historia en los niveles obligatorios de la educación... M. Price escribió que se hacía cada día más patente que la historia no interesaba a la mayor parte del alumnado adolescente, al menos tal como se explicaba. Decía también que en un modelo curricular abierto y flexible, la historia corría grave peligro:”...un peligro real de desaparecer como tal del plan de estudios como asignatura específica. Como materia con derecho propio. La tendencia, decía Price, es que sobreviva sólo como ingrediente de los estudios sociales o de la educación cívica...”.* Con ello se ponía de manifiesto lo que comenzaba a ser una preocupación de un sector amplio de la comunidad educativa inglesa. El debate que generó supuso un paso adelante en los planteamientos didácticos de la historia enseñada. Se cuestionó la historia enunciativa y se propuso un modelo de enseñanza y aprendizaje basado en la construcción de conceptos, destrezas y conocimientos metodológicos. Se generaron proyectos que rompieron, de una manera radical, los viejos tópicos de la enseñanza de la historia y plantearon modelos que, hoy todavía, resultan bastante novedosos. El planteamiento de base era retomar la historia entendida como una materia escolar con un alto grado posibilidades educativas, y enseñar cómo se construye el conocimiento histórico a través de situaciones de simulación de la indagación histórica y centrándose en el aprendizaje de los conceptos fundamentales de la teoría histórica.

*“...en España, todas las posiciones que se manifestaron en el reciente debate sobre qué historia enseñar, propugnaban un tipo de conocimiento que ofrecía la historia como un conocimiento acabado. Todos defendieron una historia enunciativa,...”*

*“...una de las razones es que no se reconoce para la educación como un saber discursivo, reflexivo y científico...”.*

Me pregunto: ¿cómo “tratamos” los matemáticos a La Historia de las Matemáticas?

Desde hace mucho tiempo vengo reivindicando que en los currícula de la enseñanza de las matemáticas debe incluirse la HISTORIA DE LAS MATEMATICAS CON MAYÚSCULAS. El origen de las matemáticas es muy distante. Pero durante todo el tiempo que precede a la invención de la escritura, parece difícil enunciar algo más que generalidades, solo apoyado indirectamente por alguna evidencia arqueológica (sucesiones de muescas o marcas que pueden hacer pensar en un conteo, una habilidad, en unas figuras extrañas, etc.) o analogías que pueden extraerse de los estudios etnológicos: sabíamos cómo contar; aquí, se podrían usar varios sistemas de numeración (decimal, duodecimal, sexagesimal, etc.), podríamos usar solo cuatro números (uno, dos, tres, “muchos”); también deberíamos conocer algunos principios de la topografía de los campos cultivados, impuestos por el desarrollo de la agricultura. En cualquier caso, llama la atención que la invención de la escritura está en todas partes estrechamente vinculada a preocupaciones matemáticas, o al menos contables. Comenzamos registrando números, pero también muy rápidamente, nos preguntamos sobre las relaciones que existen entre ellos. Colocados y resueltos muy rudimentarios en Mesopotamia y Egipto, estos problemas ya delimitan los contornos de una aritmética, un álgebra, una geometría: ¡Aritmética, Álgebra y Geometría siempre unidas!

Por ello incluiremos, su aparición será en el primer número del nuevo año 2018, dentro del Rincón SAPERE un párrafo, una breve reseña histórica sobre Historia de las Matemáticas: *Matemáticas: ¿dónde comenzó todo?*

Permitidme que a modo de presentación os muestre una pincelada de la sección dentro del Rincón.

No puedo negar mi atracción, mi admiración, mi devoción por los Leonardos: Leonardo de Pisa (Pisa, 1170 -¿?1240) y Leonardo da Vinci (Vinci, 15 de abril de 1452-Amboise, 2 de mayo de 1519).

Recordemos que en la Historia de las Matemáticas la presencia del número ha sido clave, entre otros se debe a Leonardo de Pisa, también llamado Leonardo Pisano, Leonardo Bigollo o simplemente Fibonacci.

El apodo de Guglielmo (Guillermo), padre de Leonardo, era Bonacci. Leonardo recibió de forma póstuma el apodo de Fibonacci (por filius Bonacci, hijo de Bonacci). Guglielmo dirigía un puesto de comercio en Bugía, en el norte de África (hoy Bejaia, Argelia), y según algunas versiones era el cónsul de la República de Pisa. De niño Leonardo viajó allí para ayudarlo, y fue donde aprendió el sistema de numeración árabe.

Consciente de la superioridad de los numerales árabes (con un sistema de numeración decimal, notación posicional y un dígito de valor nulo: el cero), Fibonacci viajó a través de los países del Mediterráneo para estudiar con los matemáticos árabes más destacados de ese tiempo, regresando hacia el 1200.

Las sucesiones de Fibonacci nacen gracias a Leonardo de Pisa que es más conocido por Fibonacci, que significa «hijo de Bonacci», fue uno de los matemáticos más relevantes de la Edad Media.

Su empeño fue intentar poner orden en todo aquello cuánto había aprendido de aritmética y álgebra, y de ofrecer al mundo, inicialmente a los comerciantes, un potente sistema de cálculo, cuyas ventajas él había ya experimentado. Nace así en 1202, cuando Leonardo tiene 32 años de edad, la publicación denominada Liber abaci («abaci» en el sentido de aritmética y no del ábaco como instrumento). Este libro mostró la importancia

del nuevo sistema de numeración aplicándolo a la contabilidad comercial, conversión de pesos y medidas, cálculo, intereses, cambio de moneda, y otras numerosas aplicaciones. En estas páginas describe el cero, la notación posicional, la descomposición en factores primos, los criterios de divisibilidad. El libro fue recibido con entusiasmo entre el público culto, teniendo un impacto profundo en el pensamiento matemático europeo., primero de los libros occidentales en describir los números arábigos, considerando que el primero fue la Crónica Albeldense, o Codex Conciliorum Albeldensis seu Vigilanus, también denominado Cronicón Emilianense I, es un manuscrito anónimo redactado en latín y finalizado en el 881. Al estar dirigido a comerciantes y académicos, empezó a convencer al público de la superioridad del nuevo sistema numérico, nace así la primera suma matemática de la Edad Media. Este libro mostró la importancia del nuevo sistema de numeración aplicándolo a la contabilidad comercial, conversión de pesos y medidas, cálculo, intereses, cambio de moneda, y otras numerosas aplicaciones. En estas páginas describe el cero, la notación posicional, la descomposición en factores primos, los criterios de divisibilidad. El libro fue recibido con entusiasmo entre el público culto, teniendo un impacto profundo en el pensamiento matemático europeo.

La sucesión de Fibonacci es una sucesión de números muy conocida y usada en matemáticas además es una sucesión infinita que, empezando por la unidad, cada uno de sus términos es la suma de los dos anteriores; resultando sorprendente que una construcción matemática como esa aparezca recurrentemente en la naturaleza así como la distribución de las hojas alrededor del tallo, la reproducción de los conejos o la disposición de las semillas en numerosas flores y frutos se produce siguiendo secuencias basadas exclusivamente en estos números. Lo podemos ver por una curiosa sucesión de números:

0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, ...

Esta sucesión de números tiene múltiples aplicaciones en diversas ramas del saber humano: ciencias de la computación, teoría de juegos, geometría, matemáticas, la naturaleza, en la literatura, en física, y en el arte...

La sucesión de Fibonacci fue explicada por el matemático como la solución a un problema de cría de conejos, aunque éste se trate sólo de una metáfora para volver el conocimiento de fácil acceso. *"Un hombre tenía una pareja de conejos en un lugar controlado y quería saber cuántos podrían reproducirse en un año a partir de la pareja inicial, considerando que de forma natural los conejos tienen una pareja cada mes y que es a partir del segundo cuando se empiezan a reproducir"*. De este modo partimos de que una primera cría de conejos desencadenará a toda una comunidad de conejos. 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13... conforme el tiempo avance y los animales se vayan reproduciendo. Los números pueden obtenerse sumando el último de la sucesión con el valor anterior y así sucesivamente.

Algo que resulta por demás interesante es la relación que la sucesión de Fibonacci guarda con la Geometría. Es aquí donde aparece el número áureo

$$\phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = 1,618034$$

un número irracional que consiste en una proporción que se encuentra tanto en figuras geométricas como en la naturaleza. Como por ejemplo en la concha del nautilus, la

relación entre las partes, el techo y las columnas del Partenón en Atenas, en el cuadro "Leda Atómica" de Salvador Dalí, en las estructuras y tiempos de la película "El acorazado Potemkin" de Serguéi Eisenstein o en las estructuras de algunas sonatas de Mozart, Beethoven y Schubert. La relación reside en que si dividimos los valores de la sucesión Fibonacci entre el que le anteceda

$$\frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{8}{5}, \frac{13}{8}, \frac{21}{13}, \frac{34}{21}, \frac{55}{34}, \frac{89}{55}, \dots, \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

1, 2, 1.5, 1.666, 1.6, 1.615, 1.619, 1.617, 1.618, ....., 1.618034

encontraremos que el resultado tienda a aproximarse al número áureo: 1.618034. El número áureo y la sucesión de Fibonacci forman parte del conocimiento humano que pretende explicar el mundo a partir de las matemáticas, y nos permite apreciar la belleza de la naturaleza desde un punto de vista distinto a la mera contemplación.

¡Ay, divinos números y geometría! Ya Rafael Alberti en su poema *A la divina proporción* los elevó a la *divinidad*

*A ti, maravillosa disciplina,  
media, extrema razón de la hermosura,  
que claramente acata la clausura  
viva en la malla de tu ley divina.*

*A ti, cárcel feliz de la retina,  
áurea sección, celeste cuadratura,  
misteriosa fontana de medida  
que el Universo armónico origina.*

*A ti, mar de los sueños, angulares,  
flor de las cinco formas regulares,  
dodecaedro azul, arco sonoro.  
Luces por alas un compás ardiente.  
Tu canto es una esfera transparente.  
A ti, divina proporción de oro.*

## SAPERE AUDE, GEOMETRÍA

### 1. Ejercicios de aquí y allá (solución a la Propuesta del número anterior 96)

#### *Propuesta 1: dos joyitas geométricas*

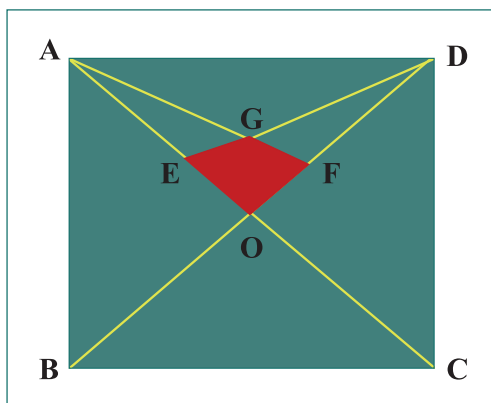
Vamos a resolver en este SAPERE AUDE dos joyitas en las que aparecen los conceptos que probablemente se ha utilizado más en la historia de la Geometría: la semejanza de triángulos, los teoremas de Thales y Pitágoras.

**JOYITA: a)** Si  $2EO = AE$ ,  $2FO = FD$  y que  $ABCD$  es un cuadrado de lado 4 cm, ¿cuál es el área de la región coloreada en rojo?

## SOLUCIÓN

### PASO 1

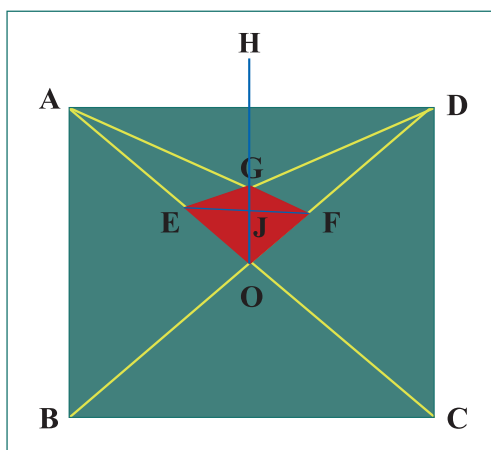
Construyamos el segmento OH perpendicular al lado AD, siendo G el punto de intersección de los segmentos AF y ED y J el punto de intersección de los segmentos OH y EF. Obsérvese como el punto G pertenece al segmento OH, y el área de la zona coloreada de rojo es el área del cuadrilátero GFOE y será por tanto igual a:



$$\text{Área}(GFOE) = \text{Área}(ADG) + \text{Área}(AFO) + \text{Área}(EDO) - \text{Área}(ADO)$$

### PASO 2

Es muy fácil deducir que el área del triángulo ADO es igual a 4 cm<sup>2</sup>. Basta ver que es la cuarta parte del área del cuadrado ADCB o comprobar que es el producto de la base AD (4 cm) por la altura OH (2cm) dividido por 2, fórmula del área de un triángulo.



### PASO 3

Como las diagonales de un cuadrado son perpendiculares entre ellas, se tiene que AO y DO son perpendiculares y el área del triángulo EDO es igual:

$$\text{Área}(EDO) = (\text{DO} \cdot \text{EO}) / 2$$

Veamos cual es el valor de AO y EO. El valor de AO se puede calcular de varias formas. Como el área del triángulo ADO es 4 cm<sup>2</sup> y AO=DO

$$\text{Área}(ADO) = 4 = \frac{AO \cdot DO}{2} = \frac{AO \cdot AO}{2} = \frac{AO^2}{2} \Rightarrow AO^2 = 8 \Rightarrow AO = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

El valor de

$$EO = \frac{AO}{3} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

y el área del triángulo AFO es

$$\text{Área}(AFO) = \text{Área}(EDO) = \frac{2\sqrt{2}\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)}{2} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3} \text{ cm}^2$$

#### PASO 4

Calculemos el área de ADG. Aplicando el teorema de Thales se tiene que EF paralelo a AD y  $EF = \frac{AD}{3}$ , por lo tanto los triángulos AHG y GFJ son semejantes y se tiene que

$$\frac{HG}{GJ} = \frac{AH}{JF} = 3$$

y entonces  $GJ = \frac{1}{3} HG$ .

Por otro lado, los triángulos AHO y EJO son también semejantes y

$$\frac{HO}{JO} = \frac{AO}{EO} = 3$$

Por lo tanto,  $JO = \frac{2}{3} \text{ cm}$ . Observemos que  $HG + GJ + JO = HO = 2 \text{ cm}$ , sustituyendo los valores de GJ y JO anteriores se obtiene

$$HG + \frac{1}{3} HG + \frac{2}{3} = 2 \Rightarrow \frac{4}{3} HG = 2 - \frac{2}{3} = \frac{4}{3} \Rightarrow HG = 1 \text{ cm}$$

Por consiguiente, el área del triángulo ADG es igual a

$$\text{Área}(ADG) = \frac{\text{Base} \cdot \text{Altura}}{2} = \frac{AD \cdot HG}{2} = \frac{4 \cdot 1}{2} = 2 \text{ cm}^2$$

#### PASO 5

Y el área de la zona coloreada, **Área(GFOE)** es igual a

$$\text{Área(GFOE)} = \text{Área}(ADG) + \text{Área}(AFO) + \text{Área}(EDO) - \text{Área}(ADO) = 2 + 2 \cdot \frac{4}{3} - 4 = \frac{2}{3} \text{ cm}^2$$

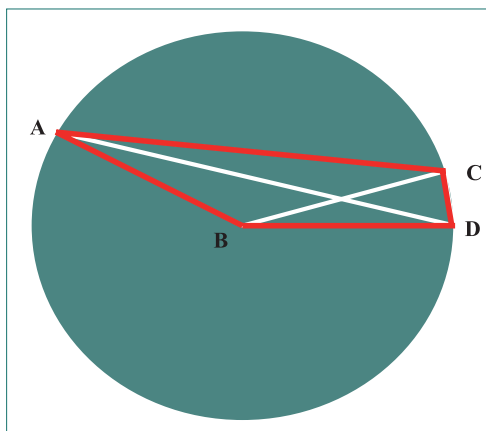
$$\text{Área(GFOE)} = \frac{2}{3} \text{ cm}^2$$

**JOYITA:** b) Sea  $ABCD$  un cuadrilátero tal que  $\widehat{CAD}=25^\circ$ ,  $\widehat{ACD}=45^\circ$  y  $\widehat{BAC}=\widehat{BCA}=20^\circ$ . ¿Cuánto mide el ángulo  $\widehat{DBC}$ ?

## SOLUCIÓN

### PASO 1

Puesto que  $\widehat{BAC}=\widehat{BCA}=20^\circ$ , se sabe que el triángulo  $ABC$  es isósceles, con  $AB=BC$  y el ángulo  $\widehat{ABC}=120^\circ-20^\circ-20^\circ=140^\circ$  (ver figura).



### PASO 2

Se sabe también que el ángulo exterior de  $\widehat{ABC}$ , es decir el ángulo que, con  $\widehat{ABC}$ , hace un giro completo, mide  $360^\circ-140^\circ=220^\circ$ .

Por otro lado, fijemos la atención en el triángulo  $ACD$ , se tiene que

$$\widehat{ADC}=180^\circ-\widehat{ACD}-\widehat{CAD}=180^\circ-45^\circ-25^\circ=110^\circ$$

El ángulo exterior de  $\widehat{ABC}$  es entonces igual a  $2\widehat{ADC}$ .

### PASO 3

Tracemos el círculo de centro  $B$  y radio  $AB=BC$ . Sea  $D'$  la intersección del círculo y del segmento  $BD$ , entonces,  $2\widehat{ADC}$  tiene la misma medida que el ángulo exterior de  $\widehat{ABC}$  puesto que interceptan el mismo arco, según el teorema de la medida del ángulo inscrito. Por lo tanto,  $D'=D$ .

Así llegamos a la conclusión que  $\widehat{DBC}=2\widehat{CAD}=2(25^\circ)=50^\circ$

## SAPERE AUDE, TEORÍA DE NÚMEROS

### Propuesta 2: dos joyitas numéricas

La Teoría de números, rama de las matemáticas relacionadas con las propiedades de los enteros positivos, a veces llamado *aritmética superior*, se encuentra entre las actividades matemáticas más antiguas y naturales y siempre ha fascinado tanto a los aficionados como a los matemáticos profesionales. En contraste con otras ramas de las matemáticas, muchos de los problemas y teoremas de la teoría de los números pueden ser entendidos por legos, aunque las soluciones a los problemas y las pruebas de los teoremas a menudo requieren un fondo matemático sofisticado.

Hasta mediados del siglo XX, la teoría de números se consideraba la rama más pura de las matemáticas, sin aplicaciones directas al mundo real. La llegada de los ordenadores y de las nuevas tecnologías revelaron que la teoría de los números podría proporcionar respuestas inesperadas a muchos problemas del mundo real. Al mismo tiempo, las mejoras en la tecnología informática permitieron a los investigadores en teoría de números, realizar avances notables al *factorizar grandes números*, *determinar números primos*, *probar conjeturas* y *resolver problemas numéricos* que antes se consideraban inalcanzables.

La moderna teoría de números es una disciplina amplia que se clasifica en subtítulos tales como *teoría elemental*, *teoría algebraica*, *teoría analítica*, *teoría geométrica* y *teoría probabilística*. Estas categorías reflejan los métodos utilizados para abordar los problemas relacionados con los enteros.

Tres ejercicios, joyitas, con diferentes grados de dificultad presentamos en este Sapere Aude.

**JOYITA: a)** Consideremos  $x, y, z, t \in \mathbb{N}$  tales que  $x < 2y$ ,  $y < 3z$ ,  $z < 4t$ ,  $t < 40$ . ¿Cuál es el valor mayor que puede tomar el número  $x$ ?

### SOLUCIÓN

#### PASO 1

Partiendo de los datos iniciales se tiene que

$$x < 2y \Rightarrow x < 2y - 1$$

$$y < 3z \Rightarrow y < 3z - 1$$

$$z < 4t \Rightarrow z < 4t - 1$$

$$t < 40 \Rightarrow t < 39$$

De dónde

$$x \leq 2y - 1 \leq 2(3z - 1) - 1 = 6z - 3 \leq 6(4t - 1) - 3 = 24t - 9 \leq 24 \cdot 39 - 9 = 936 - 9 = 927$$

## PASO 2

Tomando

$$t = 39; z = 4 \cdot 39 - 1 = 155; y = 3 \cdot 155 - 1 = 465 - 1 = 464$$

llegamos a obtener

$$x = 2 \cdot 464 - 1 = 928 - 1 = 927$$

Por lo tanto, vemos que el valor máximo para  $x$  es:  $x = 927$ .

**JOYITA: b)** ¿Cuántas combinaciones de tres (tripletas) números primos  $\{x, y, z\}$  satisfacen la ecuación

$$x + y^2 + z^3 = 200 ?$$

## SOLUCIÓN

### PASO 1

Como  $x, y, z$  son primos,  $x + y^2 + z^3$  al ser igual a 200 es par, uno de ellos es igual a 2. Ensayemos con valores enteros para  $x, y, z$ , vemos que  $z < 6$  e  $y < 15$  porque  $6^3 > 200$  y  $15^2 > 200$ .

De aquí se deduce que

$$\begin{aligned} z &\text{ es igual a } 2, 3 \text{ ó } 5 \\ y &\text{ es igual a } 2, 3, 5, 7, 11 \text{ ó } 13. \end{aligned}$$

### PASO 2

Analicemos los tres casos siguientes:

#### Caso 1

Si  $x = 2$ , entonces  $y^2 + z^3 = 198$ . Pero con ninguno de los dos casos,  $z = 3$  ó  $5$  podemos tener  $y^2 + z^3 = 198$ .

#### Caso 2

Si  $y = 2$ , entonces  $x + z^3 = 196$ . Supongamos  $z = 5$ , entonces  $x = 196 - 125 = 71$  que es un número primo. Se tiene entonces una solución:  $\{71, 2, 5\}$ .

Si se supone ahora que  $z=3$ ,  $x=196-127=169$  que es divisible por 13. Para este caso no hay solución.

### Caso 3

Si  $z=2$ , entonces  $x+y^2=192$ .

Se analiza los 5 casos posibles correspondientes a los 5 valores posibles de  $y$ .

- 3.1. Si  $y=3$ , entonces  $x=183$  que es divisible por 3.
- 3.2. Si  $y=5$ , entonces  $x=167$  que es primo y obtenemos la solución **{167,5,2}**.
- 3.3. Si  $y=7$ , entonces  $x=143$  que es múltiplo de 11.
- 3.4. Si  $y=11$ , entonces  $x=71$  que es un número primo y obtenemos la solución **{71,11,2}**.
- 3.5. Si  $y=13$ , entonces  $x=23$  y obtenemos la solución **{23,13,2}**.

### PASO 3

En definitiva, tenemos las cuatro tripletas de números primos,

$$71 + 2^2 + 5^3 = 200$$

$$167 + 5^2 + 2^3 = 200$$

$$71 + 11^2 + 2^3 = 200$$

$$23 + 13^2 + 2^3 = 200$$

**JOYITA: c)** En el siguiente cuadro de número

1 2 3  
4 5 6  
7 8 9

la suma de los elementos que están en las diagonales valen 15. Si escribimos dos cuadros C1 y C2 que se construyen siguiendo el mismo criterio con:

- C1. Los números del 1 al 64.
- C2. Los números del 1 al 144.

1. ¿Cuál será la suma de los elementos que están en cada una de las diagonales de los cuadros C1 y C2?

2. Generalizar al caso  $C_n$ : ¿cuál será la suma de los elementos de cada una de las dos diagonales del cuadro formado por los números del 1 a  $n^2$ ?

## SOLUCIÓN

### 1. SUMA DE LOS ELEMENTOS DE LAS DIAGONALES DE LOS CUADROS C1 Y C2

#### PASO 1

##### CUADRO C1

El cuadro C1 será de la forma:

a) Observemos que los números de la diagonal principal son **1,10,19,28,37,46,55** y **64** cuya suma es

$$S = 1 + 10 + 19 + 28 + 37 + 46 + 55 + 64 = 1 + (1 + 9) + (1 + 2 \cdot 9) + (1 + 3 \cdot 9) + \dots + (1 + 7 \cdot 9) = \overbrace{1 + \dots + 1}^8 + 9(1 + 2 + \dots + 7) = 8 + (1 + 2 + \dots + 7) \cdot 8 + 9 \frac{7 \cdot 8}{2} = 8 + 252 = 260$$

<b>1</b>	2	3	4	5	6	7	<b>8</b>
9	<b>10</b>	11	12	13	14	<b>15</b>	16
17	18	<b>19</b>	20	21	<b>22</b>	23	24
25	26	27	<b>28</b>	<b>29</b>	30	31	32
33	34	35	<b>36</b>	<b>37</b>	38	39	40
41	42	<b>43</b>	44	45	<b>46</b>	47	48
49	<b>50</b>	51	52	53	54	<b>55</b>	56
<b>57</b>	58	59	60	61	62	63	<b>64</b>

Se ha aplicado a 1,2,3,4,5,6 y 7, la suma de los términos de una progresión aritmética

$$S = \frac{(a_1 + a_n)n}{2} = \frac{(1+7)8}{2}$$

**NOTA:** También podíamos haber aplicado directamente la fórmula a los términos de la progresión aritmética **1,10,19,28, 37,46,55,64**.

$$S = \frac{(a_1 + a_n)n}{2} = \frac{(1+64)8}{2} = \frac{520}{2} = 260$$

Por ello, la suma de los términos de los elementos de la diagonal principal es

$$S=260$$

b) Los números de la diagonal secundaria son **8,15,22, 29,36,43,50,57**, y podemos aplicar el mismo razonamiento empleado en el apartado (a):

$$S = 8 + 15 + 22 + 29 + 36 + 43 + 50 + 57 = (1 + 1.7) + \overbrace{(1 + 2.7) + (1 + 3.7) + (1 + 4.7)}^8 + (1 + 5.7) + (1 + 6.7) + (1 + 7.7) + (1 + 8.7) = S(1 + 1 + \dots + 1)M + 7 \cdot (1+2+3+\dots+8) = 8+7 \frac{(1+8) \cdot 8}{2} = 8 + 7 \frac{72}{2} = 8 + 252 = 260$$

También se podía haber aplicado la suma de los términos de una progresión aritmética a términos cuyo primero es 8, y el último es 57 con razón  $d=7$

- Tenemos así que la suma de los términos de los elementos de la diagonal secundaria es

$$S=260$$

**NOTA:** También podemos probar que la suma de las diagonales principal y secundaria coinciden de la siguiente manera:

Se cumple que las diferencias entre los términos

1	2	3	4	5	6	7	8
9	10	11	12	13	14	15	16
17	18	19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30	31	32
33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48
49	50	51	52	53	54	55	56
57	58	59	60	61	62	63	64

de las dos diagonales se compensan puesto que la diferencia entre los dos términos diagonales sobre:

- la primera línea es  $8-1=7$
- la segunda línea es  $15-10=5$
- la tercera línea es  $22-19=3$
- la cuarta línea es  $29-28=1$
- la quinta línea es  $36-37=-1$
- la sexta línea es  $43-46=-3$
- la séptima línea es  $50-55=-5$
- la octava línea es  $57-64=-7$

Por consiguiente, la suma de los términos sobre la diagonal yendo desde la esquina de la parte superior derecha a la esquina de abajo izquierda es también 260.

## PASO 2

### CUADRO C2

El cuadro C2 será de la forma

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36
37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48
49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72
73	74	75	76	77	78	79	80	81	82	83	84
85	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95	96
97	98	99	100	101	102	103	104	105	106	107	108
109	110	111	112	113	114	115	116	117	118	119	120
121	122	123	124	125	126	127	128	129	130	131	132
133	134	135	136	137	138	139	140	141	142	143	144

- a) Observemos que los números de la diagonal principal son: **1,14,27,40,53,66,79,92,105,118,131,144** cuya suma es aplicando directamente la fórmula de la suma de una progresión aritmética

$$S = \frac{(1+144) \cdot 12}{2} = \frac{145 \cdot 12}{2} = 870$$

Por lo tanto, la suma de los términos de la diagonal principal es

$$S = \mathbf{870}$$

- b) Los términos de la diagonal secundaria son

$$\mathbf{12, 23, 34, 45, 56, 67, 78, 89, 100, 111, 122, 133}$$

cuya suma es

$$S = \frac{(12+133) \cdot 12}{2} = \frac{145 \cdot 12}{2} = 145 \cdot 6 = 870$$

#### NOTAS:

- Al mismo resultado llegamos, si razonamos de manera análoga que anteriormente, teniendo en cuenta que la razón para los elementos de la diagonal principal es  $d=13$  y para los elementos de la diagonal secundaria es  $d=11$ .
- Como en el caso primero del cuadro  $8 \times 8$  para el cuadro de  $12 \times 12$  se puede demostrar la igualdad de la suma de los elementos de las diagonales principal y secundaria, respectivamente, viendo las diferencias de

– la primera línea:	$12-1 = 1$
– la segunda línea:	$23-14 = 9$
– la tercera línea:	$34-27 = 7$
– la cuarta línea:	$45-40 = 5$
– la quinta línea:	$56-53 = 3$
– la sexta línea:	$67-66 = 1$
– la séptima línea:	$78-79 = -1$
– la octava línea:	$89-92 = -3$
– la novena línea:	$100-105 = -5$
– la décima línea:	$111-118 = -7$
– la décimo-primer línea:	$122-131 = -9$
– la décimo-segunda línea:	$133-144 = -11$

compensándose las diferencias y por ello la suma de los términos sobre la diagonal yendo desde la esquina de la parte superior derecha a la esquina de abajo izquierda es también 870.

## 2. Generalicemos al caso de un cuadro de "n" elementos

- **CUADRO Cn**

El cuadro Cn es de la forma

<b>1</b>	2	3	.....	n-1	<b>n</b>
n+1	<b>n+2</b>	n+3	.....	<b>2n-1</b>	2n
2n+1	2n+2	<b>2n+3</b>	.....	3n-1	3n
.....					
.....					
.....					
<b>n<sup>2</sup>-n+1</b>	n <sup>2</sup> -n+2	n <sup>2</sup> -n+3	.....	n <sup>2</sup> -1	<b>n<sup>2</sup></b>

Sigamos el mismo esquema que para los cuadros anteriores de 8x8 y 12x12.

a) Observemos que los números de la diagonal principal son:

$$1, n+2, 2n+3, \dots, n^2-n-1, n^2$$

cuya suma es aplicando directamente la fórmula de la suma de una progresión aritmética

$$S = \frac{(1+n^2).n}{2}$$

b) La suma de los elementos de la diagonal secundaria cuyos elementos son

$$n, 2n-1, 3n-2, \dots, n^2-n+1 \text{ es}$$

$$S = \frac{[n+(n^2-n+1)].n}{2} = \frac{(n^2+1).n}{2}$$

Es decir

$$S = \frac{(1+n^2).n}{2}$$

que como esperamos coinciden las sumas de las diagonales principal y secundaria.

**NOTAS:** Es este un ejercicio para "sacarle mucho jugo".

1. A partir de este resultado podemos indicar a nuestros estudiantes que no es tan complicado generalizar una propiedad. En este caso:

- Si le damos el valor n=8, se tendrá la suma

$$S = \frac{(1+8^2).8}{2} = \frac{65.8}{2} = 260$$

que es el caso del CUADRO1.

- Si le damos el valor  $n=12$ , se tendrá la suma

$$S = \frac{(1+12^2) \cdot 12}{2} = \frac{145 \cdot 12}{2} = \frac{1740}{2} = 870$$

que es el caso del CUADRO 2.

2. También se puede invitar al estudiante a que investigue a construir los cuadros para  $n=1,2,3,4,5,6,\dots,k$  líneas e intentar obtener una regla para obtener el mismo valor que se obtiene para el valor de la suma de las diagonales principales y secundaria utilizando otras líneas

- $n=1$  con suma  $S=1$

1

- $n=2$

1 2

3 4

con suma  $S=5$

- $n=3$

1	2	3
4	5	6
7	8	9

Con suma  $S=15$

En este caso puede comprobarse la belleza de los números cuándo se presentan organizados en cuadros de un número de orden impar cómo éste último. Por ejemplo, los elementos de las diagonales:  $1+5+9=3+5+7$  suman igual que las líneas centrales  $2+5+8=4+5+6$  e igual que las sumas  $[(1+4+7) + (3+6+9)]/2=(1+2+3+7+8+9)/2$  de las dos líneas verticales (horizontales) paralelas  $1^a$  y  $3^a$ .

- $n=5$

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12	13	14	15
16	17	18	19	20
21	22	23	24	25

Con suma  $S=65$

Los elementos de las diagonales:  $1+7+13+19+25=5+9+13+17+21$  suman igual que las líneas centrales  $3+8+13+18+23=11+12+13+14+15$  e igual que las sumas de las dos líneas verticales (horizontales)  $2^a$  y  $4^a$ ,  $1^a$  y  $5^a$

$$\begin{aligned} [(2+7+12+17+22) + (4+9+14+19+24)]/2 &= [(6+7+8+9+10)+(16+17+18+19+20)]/2 \\ [(1+2+3+4+5)+(21+22+23+24+25)]/2 &= [(1+6+11+16+21)+(5+10+15+20+25)] \end{aligned}$$

3. ¿De este resultado, se puede inferir inmediatamente alguna propiedad genérica para los *cuadros de orden impar*?

## 4. ¿Sucede lo mismo para los cuadros de orden par?

Véase caso  $n=4$ .

- $n=4$

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

Con suma  $S=34$ 

Los elementos de las diagonales:  $1+6+11+16=4+7+10+13$  pero en este caso al no existir una línea central, ¿qué sucede con las demás líneas? Un invitación heurística al estudiante es recomendable para que ensaye y vea que la suma que se obtiene con las líneas verticales (horizontales)  $(2^a+3^a)/2$ ,  $(1^a+4^a)/2$  coinciden, y obtener una regla para genérica para los cuadros de orden par. ¡Seguir profundizando en el estudio de estas disposiciones puede llevar a obtener una expresión para las progresiones aritméticas de orden superior que bien podría contextualizarse para los alumnos de bachillerato!

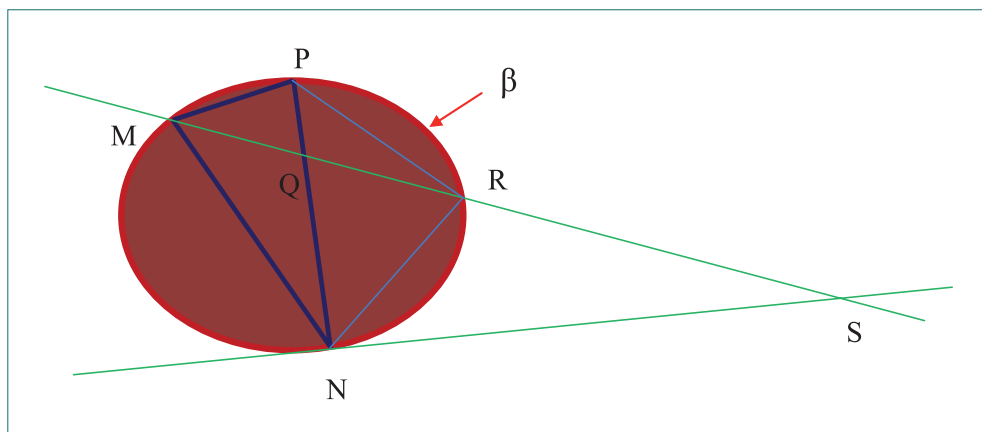
## SAPERE AUDE, EJERCICIOS DE AQUÍ Y ALLÁ, PROPUESTAS

## Propuesta 1: dos joyitas geométricas

Frente al obstáculo, el impedimento y la dificultad, la poca difusión de planteamientos didácticos de la enseñanza de la Geometría y considerando las diferencias existentes entre los niveles educativos a los que nos dirigimos, mi intención es seguir humildemente brindando un material que dé cuenta de algunos de los componentes esenciales que se encuentran presentes en la enseñanza de esta parte de las Matemáticas. Es importante reflexionar sobre las razones de la necesidad de/para enseñar Geometría. Si los docentes ¿tenemos claro? **“el por qué”**, estaremos en condiciones de tomar decisiones más acertadas acerca de su enseñanza. Ya lo he indicado en números anteriores: una razón para insistir en la enseñanza de la Geometría podemos encontrarla en nuestro entorno inmediato, basta con mirarlo y descubrir que en él se encuentran muchas relaciones y conceptos geométricos: la Geometría modela el espacio que percibimos: construcción y demostración teórica de esta parte de las Matemáticas.

¡Estas son dos joyitas que hacen muy necesario e interesante el estudio de la Geometría que me atrevo a llamarla Geometría Olvidada!

- Sea  $MNP$  un triángulo acutángulo. La bisectriz del ángulo en  $M$  corta al lado  $NP$  en  $Q$  y el círculo  $\beta$  circunscrito al triángulo  $MNP$  en  $R$ . La tangente a  $\beta$  en  $N$  corta a  $MQ$  en  $S$ . Demostrar que si  $MQ^2=2PQ^2$ , entonces  $R$  es la mitad de  $MS$  (ver figura).
- Sea  $MNP$  un triángulo equilátero de altura 1 unidad de longitud. El círculo  $\beta$  de radio 1 y de centro situado en el mismo lado de  $MN$  que  $P$  es tangente a  $MN$  en un punto situado entre  $M$  y  $N$ . Mostrar que la longitud de arco de círculo situado en el interior del triángulo  $MNP$  es independiente del punto de tangente.



### Propuesta 2: dos joyitas numéricas

Unamos una vez más la Aritmética (de los números) y la Geometría. Sabemos que los números irracionales no se pueden expresar como una fracción de números enteros, porque no podemos expresarlo como un número cuyo desarrollo decimal no es periódico en la fracción. Solo números con desarrollo decimal finito o infinito y periódico (números racionales  $Q$ ) se pueden expresar como fracciones de enteros.

El descubrimiento de la raíz cuadrada de 2,  $\sqrt{2}$ , como un número irracional se atribuye generalmente al pitagórico Hípaso de Metaponto quien fue el primero en realizar la demostración (naturalmente desde el punto de vista geométrico) de la irracionalidad. La historia narra que precisamente descubrió la irracionalidad de  $\sqrt{2}$ , cuando intentaba averiguar una expresión racional del mismo. Sin embargo, Pitágoras creía en la definición absoluta de los números, y esto le obligaba a no creer en la existencia de los números irracionales. Por esta razón estando ya desde el principio en contra de esa demostración, sus compañeros pitagóricos sentenciaron a Hípaso a la pena capital, ahogándolo en el mar. El matemático griego Teeteto (417 a.C.-369 a.C.) proponía el problema de encontrar el lado de un cuadrado, cuya área sea el doble de área de un cuadrado de lado  $\{ \displaystyle m \}''$ . Cuya solución conlleva la aparición de la raíz cuadrada de dos.

En este Sapere Aude presento dos ejercicios con diferentes grados de dificultad.

- a) Trabajemos con el número irracional raíz de dos. Consideremos unos cálculos algebraicos elementales donde interviene el número irracional  $\sqrt{2}$ :

$$(\sqrt{2}-1)^1 = -1 + \sqrt{2}$$

$$(\sqrt{2}-1)^2 = (\sqrt{2}-1) \cdot (\sqrt{2}-1) = 2 - 2\sqrt{2} + 1 = 3 - 2\sqrt{2}$$

a.1. ¿Cuál es el valor de las siguientes potencias,  $(\sqrt{2}-1)^3, (\sqrt{2}-1)^4, (\sqrt{2}-1)^5, \dots$ ?

a.2. Después de algunos cálculos, ¿sabráis obtener, como generalización, una expresión para  $(\sqrt{2}-1)^n$ ?

a.3. Se podría pensar en una expresión de la forma  $(\sqrt{2}-1)^n = A_n - B_n\sqrt{2}$ . ¿Cómo podemos escribir  $A_n$  y  $B_n$ ?

b) La sucesión de números denominada sucesión de Padovan (en honor a Richard Padovan, arquitecto y matemático nacido en 1935) es la sucesión recurrente definida así:

$$p_1 = 1$$

$$p_2 = 1$$

$$p_3 = 1$$

La sucesión puede ser anodina,

**1,1,1,2,2,3,4,5,7,9,12, 16,...**

pero si nos fijamos en el cociente  $P_n = \frac{u_{n+1}}{u_n}$  y calculamos el valor hacia el que tiende en el límite cuando  $n$  tiende a infinito, nos encontraremos el número denominado número de plata en similitud con el número de oro o número plástico en el sentido de la belleza arquitectónica.

b.1. Calcular el valor del límite:  $\Psi = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P_{n+1}}{P_n}$

b.2. La idea de dibujar una sucesión de triángulos equiláteros en los que la longitud de los lados sean los números de la sucesión de Padovan nos lleva a conseguir una bella figura denominada **Espiral de triángulos de Padovan**. ¿Sabrías dibujarla?. Utilizar cualquier programa para obtener el dibujo.

**NOTA:** Las respuestas pueden enviarla a la dirección electrónica:  
[sapereaudethales@gmail.com](mailto:sapereaudethales@gmail.com)



