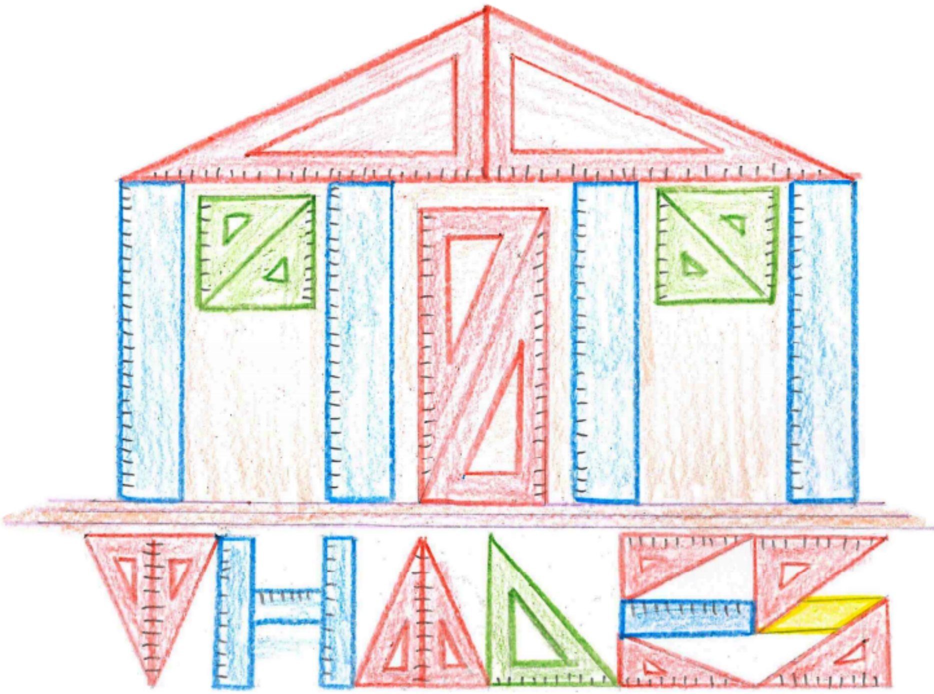
90

Vol. 32 (2)
2015



épsilon

Revista de Educación Matemática

Editada por la S.A.E.M. "THALES"

Foto portada: Casa de Thales. Autor: Jesús Eguren Maris. Colegio Stella Mans, Almería. "VII Concurso de dibujo matemático Almería 2015". Tercer premio.

epsilon 90

Revista de Educación Matemática

Página de la revista: http://thales.cica.es/epsilon
Revista: epsilon@thales.cica.es

Sociedad Andaluza de Educación Matemática "Thales"

Edita
Sociedad Andaluza de
Educación Matemática "Thales"
Centro Documentación "Thales"
Universidad de Cádiz
C.A.S.E.M.
11510 PUERTO REAL (Cádiz)

Maquetación e impresión
Utrerana de Ediciones, s.l.
Cristóbal Colón, 12
41710 Utrera (Sevilla)

Depósito Legal
SE-421-1984

ISSN:
2340-714X

Período
2º cuatrimestre 2015

Suscripción
ESPAÑA: 42,00 euros
PAÍSES DEL EURO: 63,00 euros
RESTO DE PAÍSES: 90 $ USA
(3 NÚMEROS AL AÑO)

SUMARIO / CONTENTS

Épsilon - Revista de Educación Matemática 2015, Vol. 32(2), nº 90, 7-20

La dispersión como elemento estructurador del currículo de estadística y probabilidad

Carmen Batanero
Universidad de Granada

Ignacio González-Ruiz
Universidad de Cantabria

M. del Mar López-Martín
Universidad de Granada

J. Miguel
Universidad de Granada

RESUMEN: *Las medidas de dispersión complementan a las de posición central para caracterizar una distribución. En el currículo se introducen en primer lugar en relación con las distribuciones de datos, generalizándose progresivamente a las distribuciones de probabilidad. En el estudio de la inferencia será necesario coordinarlas con las distribuciones muestrales de los estadísticos, que permiten realizar estimaciones con una valoración de su precisión. En los datos bivariantes, la dispersión se relaciona con la intensidad de la relación y se descompone en componentes que separan la variabilidad explicada y no explicada por los modelos de regresión. El objetivo de este trabajo es analizar la riqueza del concepto y la forma en que se contempla en el currículo en las diversas etapas educativas.*
Palabras clave: *Dispersión, ideas estadísticas fundamentales, currículo.*

Dispersion as a curriculum structuring statistics and probability

ABSTRACT: *Spread measures provide additional information to central tendency measures when characterizing a distribution. In the Spanish curricula, they are firstly introduced linked to data distributions, and afterwards they are generalized to probability distributions.*

In the study of statistical inference, it is necessary to coordinate them with the summaries of the sampling distributions, in order to make estimates with a value of their accuracy. In bivariate data, spread is related to the strength of the relationship between two variables and can be split in components that measure the variability that is explained and unexplained by a regression model. The aim of this paper is to analyze the wealth of the concept and the way it is considered in the Spanish curricula, along the different educational levels.
Keywords: *Spread, basic stochastic ideas, curriculum.*

INTRODUCCIÓN

Las medidas de dispersión son esenciales en una distribución de datos, complementando a las de posición central, al caracterizar la variabilidad de los datos respecto a las mismas. Su relevancia en la formación estadística ha sido señalada por Wild y Pfannkuch (1999), que incluyen la percepción de la variabilidad de los datos (y por tanto de su dispersión respecto a un promedio) como uno de los componentes básicos en el pensamiento estadístico. Igualmente, de los cinco elementos fundamentales de este tipo de pensamiento propuestos por Moore (1990), tres están en relacionados con la variabilidad aleatoria: la percepción de su ubicuidad en el mundo que nos rodea, la competencia para su explicación, identificando los factores de las que depende, y la habilidad de cuantificarla (que implica comprender y saber aplicar el concepto de dispersión).

A pesar de esta importancia, la didáctica sobre las medidas de dispersión es escasa, y se centra principalmente en la forma en que los estudiantes comprenden el tema (los principales trabajos sobre el tema se resumen en Estepa y del Pino, 2013; y Sánchez, Borim y Coutinho, 2011). Para completar estas investigaciones, la finalidad de nuestro trabajo es analizar la forma en que introduce y se va ampliando el concepto en las directrices curriculares españolas, con niveles progresivos de amplitud y complejidad. Este es un punto no tratado en investigaciones previas; sin embargo, es necesario para prever la comprensión progresiva del concepto por parte del estudiante.

En lo que sigue analizamos la dispersión desde cuatro puntos de vista: la estadística descriptiva univariante y bivariante; la probabilidad y la inferencia. Utilizando algunas ideas del enfoque ontosemiótico (Godino, Batanero y Font, 2007) mostramos que estos puntos de vista suponen significados diferenciados del concepto, cada uno de los cuáles contribuye a desarrollar el sentido de la dispersión en el estudiante.

FUNDAMENTOS

En nuestro análisis nos basamos en el enfoque ontosemiótico, que considera la actividad matemática como un conjunto de prácticas realizadas en la resolución de problemas (Godino, Batanero y Font, 2007). En este enfoque se diferencia entre prácticas institucionales (aceptadas por una institución, por ejemplo, de enseñanza) y personales (específicas de una persona). El significado de un objeto sería el conjunto de prácticas asociadas a dicho objeto y puede ser asimismo institucional y personal.

Las prácticas matemáticas se caracterizan mediante los objetos que intervienen en ella, que pueden ser de diferente naturaleza:

- *Situaciones-problemas.* Aquellas en las que surge la actividad matemática, en nuestro caso las situaciones que motivan la idea de dispersión; por ejemplo, valorar la bondad de ajuste de un modelo en el estudio de la regresión.
- *Lenguaje.* Son los términos, expresiones simbólicas, tablas o gráficos usados para representar la información proporcionada en una situación problemática, las operaciones y objetos utilizando en su resolución y las soluciones encontradas. Por ejemplo, las palabras *varianza, rango* o *variabilidad,* los símbolos específicos del tema, el gráfico de la caja o los diagramas de dispersión.
- *Conceptos.* Son los objetos matemáticos que se utilizan implícita o explícitamente en la actividad matemática y que pueden ser definidos. Asociados a la idea de dispersión aparecen otros conceptos matemáticos y estadísticos, como dato, distribución, promedio, o medida.
- *Propiedades o proposiciones* que relacionan entre sí los conceptos. Un ejemplo en probabilidad es la desigualdad de Tchebycheff, que relaciona la distribución de una variable aleatoria con la media y desviación típica.
- *Procedimientos.* Incluyen los algoritmos, operaciones o técnicas que constituyen parte de la enseñanza; entre otras las distintas técnicas de cálculo de las medidas de dispersión (datos aislados, distribución de datos agrupados o no, etc.).
- *Argumentos. Son las* justificaciones empleadas para mostrar la validez de una proposición o de la solución a un problema. Estas justificaciones incluyen las habituales en matemática: inducción, deducción, análisis-síntesis, etc., y también algunas específicas de la probabilidad e inferencia.

Todos estos objetos están relacionados, entre sí, formando configuraciones, que serán epistémicas si son propias de una institución matemática o de enseñanza y cognitivas si son específicas del alumno. En nuestro trabajo tratamos de identificar las diferentes configuraciones epistémicas relacionadas con la dispersión en los cuatro puntos de vista antes señalados, que para nosotros definen significados diferenciados del concepto. Nos centramos en los últimos decretos curriculares publicados (MECD, 2014, 2015), cuyo contenido respecto al tema de la dispersión no es muy diferente al que ha estado vigente hasta la fecha (MEC, 2006, 2007a, 2007b). Aunque el nuevo currículo añade más detalle en los criterios de evaluación y estándares de aprendizaje evaluables, nos limitamos a mostrar los contenidos en las diferentes tablas que se incluyen en el trabajo, para no extender excesivamente el mismo.

EL SIGNIFICADO DESCRIPTIVO UNIVARIANTE DE LA DISPERSIÓN

El primer contacto del estudiante con la idea de dispersión es desde la perspectiva de la estadística descriptiva, es decir, cuando el interés de un estudio estadístico radica en analizar un conjunto de datos sin pretensiones de generalizar los resultados del análisis.

Como vemos en la Tabla 1, este contacto se inicia ya desde la Educación Primaria, donde encontramos una mención tangencial a conceptos como *variabilidad estadística,* cuando se propone el trabajo con colecciones sencillas de datos, y la realización de tablas o gráficos elementales o su interpretación. Una primera medida elemental de dispersión en este nivel es *el rango*, fácil de calcular e interpretar por los niños, y que se asocian a las medidas de posición central: media aritmética y moda. La situación- problema que la determina es el encontrar una medida de la variabilidad de un conjunto de datos, que inicia la introducción del concepto de rango y algunas propiedades sencillas (el rango es la diferencia entre los valores máximos o mínimos). Las representaciones elementales de datos numéricos (como gráfico de barras y líneas) permiten visualizar la variabilidad.

Tabla 1. Contenidos relacionados con el significado descriptivo univariante de la dispersión en el currículo

Curso	Contenidos relacionados con la dispersión
Educación primaria	Iniciación intuitiva a las medidas de centralización: la media aritmética, la moda y el rango. Realización e interpretación de gráficos sencillos: diagramas de barras, poligonales y sectoriales.
1º y 2º ESO	Organización en tablas de datos recogidos en una experiencia. Diagramas de barras, y de sectores. Polígonos de frecuencias. Medidas de tendencia central. Medidas de dispersión.
3º ESO, enseñanzas académicas	Frecuencias absolutas, relativas y acumuladas. Agrupación de datos en intervalos. Gráficas estadísticas. Parámetros de posición. Cálculo, interpretación y propiedades. Parámetros de dispersión. Diagrama de caja y bigotes. Interpretación conjunta de la media y la desviación típica
3º ESO, enseñanzas aplicadas	Igual que en Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas. Se añade: Rango, recorrido intercuartílico y desviación típica. Cálculo e interpretación.
4º ESO, enseñanzas académicas	Medidas de centralización y dispersión: interpretación, análisis y utilización. Comparación de distribuciones mediante el uso conjunto de medidas de posición y dispersión.
4º ESO, enseñanzas académicas	Similar al anterior

A lo largo de la Educación Secundaria Obligatoria se reformula el problema de medir la dispersión *respecto a una medida de posición central* y se introduce otro relacionado, consistente en la comparación de dos distribuciones, teniendo en cuenta su variabilidad. Estos problemas motivan los conceptos de *desviación respecto a la media, varianza* y *desviación típica* y *recorrido intercuartílico,* así como la terminología y simbolización asociada. Cuando se desea que la medida de dispersión sea relativa (a la medida de valor central) se introduce el *coeficiente de variación*. Algunas propiedades importantes serían que las medidas de dispersión no pueden tomar valores negativos y además, algunas como la varianza, se ven afectadas por los cambios de escala de los datos mientras que quedan invariantes bajo cambios de origen.

Progresivamente, a partir de tercer curso, se trabaja con variables agrupadas, lo que amplía el repertorio de algoritmos y procedimientos; las directrices curriculares

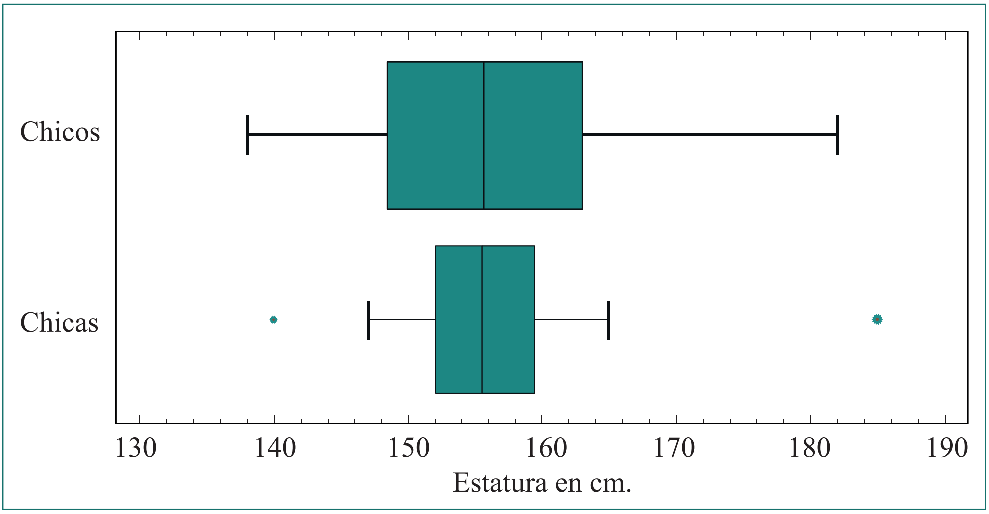


Figura 1. Distribución de estaturas de alumnos de una clase.

recomiendan el uso de la calculadora gráfica o la hoja de cálculo para facilitar estos algoritmos. Para dotar de mayor sentido la idea de dispersión se emplean los gráficos de frecuencias agrupadas, gráficos múltiples o de caja. También se recomienda el uso de las medidas de posición central y dispersión para la comparación de distribuciones. Aunque cualquier representación gráfica de una distribución de datos lleva implícita la idea de dispersión en los datos y rangos, los gráficos de cajas constituyen una representación idónea para comparación de distribuciones y el estudio de la dispersión- Así, en la Figura 1, observamos que los valores centrales de las estaturas de chicos y chicas de una clase de Educación Secundaria Obligatoria son similares, pero la dispersión es mucho mayor en los chicos. El gráfico muestra también los cuartiles y los valores atípicos, así como los intervalos en los que varía el 50% de valores de cada distribución.

4. LA DISPERSIÓN EN EL ANÁLISIS DESCRIPTIVO BIVARIANTE

Al iniciar el estudio de datos bivariantes, nos encontramos con dos nuevos problemas diferenciados que motivarán nuevos puntos de vista sobre la dispersión (Batanero, 2001). El primero se centra en analizar la posible existencia e intensidad de una relación entre dos variables cuantitativas, llevando a la introducción del concepto y métodos de correlación. El segundo consiste en determinar una función (entre una familia dada) que permita estimar una de las variables (dependiente) conocida el valor de la otra (independiente), de acuerdo con un criterio de *bondad de ajuste*; dando lugar a la introducción del concepto de regresión. Es claro que, en ambos casos, la dispersión juega un papel central. Los contenidos relacionados del currículo se resumen en la Tabla 2.

Ya en el cuarto curso de la Educación Secundaria Obligatoria, se introduce el *diagrama de dispersión.* Esta representación (Figura 2) ayuda a generalizar la idea de

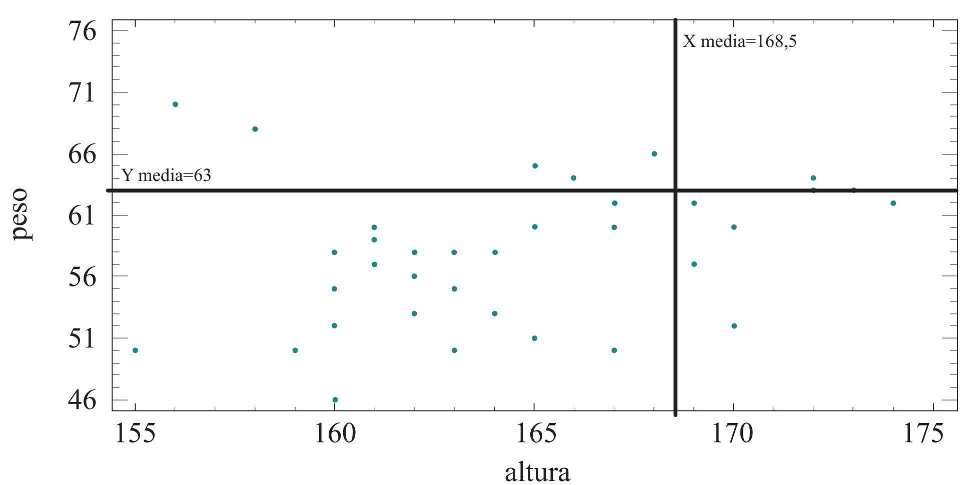


Figura 2. Distribución de alturas y pesos de un grupo de chicas

dispersión al caso bivariante y permite considerar diferentes componentes de la misma: a) dispersión de los puntos respecto al centro de gravedad formado por las dos medias (visualizado en la Figura 2 como intersección de las dos rectas paralelas a los ejes que pasan por el centro de gravedad); b) dispersión respecto a la variable *X* (dispersión de alturas en el ejemplo); c) dispersión respecto a la variable *Y* (dispersión de los pesos).

Tabla 2. Contenidos relacionados con el significado bivariante de la dispersión en el currículo

Curso	**Contenidos relacionados con la dispersión**
4º ESO, enseñanzas académicas y aplicadas	Construcción e interpretación de diagramas de dispersión. Introducción a la correlación
1º Bachillerato, Ciencias Sociales y Ciencias	Estadística descriptiva bidimensional: Distribución conjunta y distribuciones marginales. Distribuciones condicionadas. Medias y desviaciones típicas marginales y condicionadas. Independencia de variables estadísticas. Dependencia de dos variables estadísticas. Representación gráfica: Nube de puntos. Dependencia lineal de dos variables estadísticas. Covarianza y correlación: Cálculo e interpretación del coeficiente de correlación lineal. Regresión lineal. Predicciones estadísticas y fiabilidad de las mismas. Coeficiente de determinación (sólo en Ciencias)

En las materias Matemáticas I (Bachillerato de Ciencias) y Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales I (Bachillerato de Humanidades y Ciencias Sociales) estas ideas se formalizan al introducir las nociones de distribución marginal y distribución condicionada.

Se introduce también la correlación y regresión, relacionadas directamente con la dispersión; cuanto mayor sea la dispersión de los puntos respecto a un modelo matemático de ajuste a los datos (línea o recta de regresión), menor será la intensidad de la relación (o de la correlación) entre las variables. La covarianza y el coeficiente de correlación lineal serán nuevos estadísticos que permiten valorar la intensidad y signo de la relación, pero también son nuevos indicadores de la dispersión conjunta de los datos.

$$S_{xy} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s}(x_i - x)\cdot(y_j - y)\cdot n_{ij} \;\; ; \;\; r = \frac{S_{xy}}{S_x S_y}$$

Como vemos en sus fórmulas, está claro esta relación; la covarianza S_{xy} será mayor o menor cuanto mayor o menor sea la diferencia de los puntos a su media (más o menos dispersión); el coeficiente de correlación se expresa como cociente entre esta y las desviaciones típicas de las variables; para que tome un valor alto, estas (la dispersión) debe ser pequeña. Por otro lado, es posible descomponer la varianza de la variable dependiente en dos componentes:

$$S_Y^2 = S_{explicada}^2 + S_{residual}^2$$

donde S_y^2 es la varianza total de la variable Y, $S_{explicada}^2$ es la varianza explicada por la regresión y $S_{residual}^2$ es la varianza no explicada o varianza residual.

Es precisamente el cuadrado del coeficiente de correlación (coeficiente de determinación) el que nos da la proporción de varianza de la variable dependiente Y explicada por el modelo línea de regresión (recta de regresión). Cuanto mayor sea este coeficiente más proporción de la varianza de Y es explicada por el modelo de regresión o, lo que es lo mismo, es mejor la bondad de ajuste. De este modo, se relaciona también la idea de dispersión con la bondad de ajuste de un modelo.

LA DISPERSIÓN EN PROBABILIDAD

La introducción de algunas variables aleatorias sencillas y sus distribuciones (binomial, normal), en el 1º curso de Bachillerato para los alumnos de Ciencias Sociales y del 2º curso para los alumnos de Ciencias (ver Tabla 3), permite considerar un nuevo punto de vista para las medidas de posición central y dispersión: su carácter de parámetro de las distribuciones de probabilidad. La situación-problemática principal que motiva el estudio de estos conceptos será la de determinar modelos generales de distribuciones (familias) que permiten resolver una gama de situaciones probabilísticas y encontrar las expresiones de sus distribuciones de probabilidad. Así, en el caso de la distribución normal (Figura 3) un cambio en su desviación típica no sólo produce una mayor menor dispersión de la función de densidad, sino que reduce el apuntamiento de la misma.

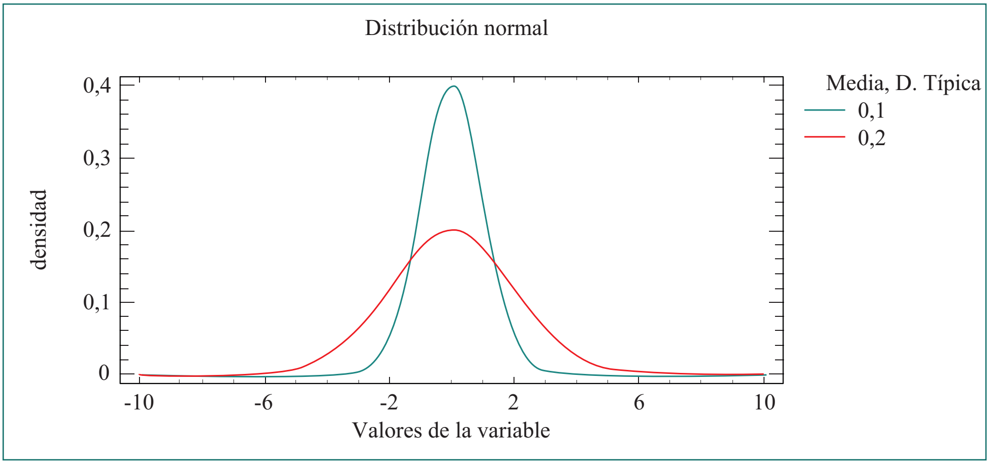


Figura 3. La desviación típica como parámetro en la distribución normal

Tabla 3. Contenidos relacionados con el significado probabilístico de la dispersión en el currículo

Curso	Contenidos relacionados con la dispersión
1º Bachillerato, Ciencias Sociales	Variables aleatorias discretas. Distribución de probabilidad. Media, varianza y desviación típica. Distribución binomial. Caracterización e identificación del modelo. Cálculo de probabilidades.
2º Bachillerato, Ciencias	Variables aleatorias continuas. Función de densidad y de distribución. Interpretación de la media, varianza y desviación típica. Distribución normal. Tipificación de la distribución normal. Asignación de probabilidades en una distribución normal. Cálculo de probabilidades mediante la aproximación de la distribución binomial por la normal.

La tipificación o procedimiento que permite reducir cualquier distribución normal a la normal estándar de media 0 y desviación típica 1, es también específico del significado probabilístico de la dispersión. Una propiedad importante en la distribución normal es que un 99.97% de sus valores están comprendidos en el intervalo $\mu \pm 3\sigma$; es decir $P(\mu - 3\sigma \leq X \leq \mu + 3\sigma) = 0.9997$. Más adelante se mostrará una propiedad similar, la desigualdad de Tchebycheff, la cual permitirá obtener la probabilidad de que los valores de una distribución se encuentren en intervalos que distan k desviaciones típicas de la media.

LA DISPERSIÓN EN INFERENCIA

En Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales II, asignatura opcional en el segundo curso del Bachillerato de Humanidades y Ciencias Sociales, se introducen contenidos propios de la inferencia estadística (ver Tabla 4). En este contexto, un problema de interés radica en la estimación de los parámetros de las distribuciones de probabilidad en una población (por ejemplo, la media de una distribución normal) a partir de los datos de una muestra aleatoria tomada de dicha población. Un segundo problema consiste en contrastar hipótesis sobre los valores de dichos parámetros.

Estos problemas llevan a la introducción de muchos conceptos nuevos, como *distribución muestral*, *error de estimación*, *intervalo de confianza,* relacionados con la idea de dispersión. Son características propiedades como la relación entre tamaño de muestra, precisión y confianza o la relación entre la desviación típica de la variable en la población y la de la distribución de la media muestral.

Tabla 4. Contenidos relacionados con el significado inferencial de la dispersión en el currículo

Curso	**Contenidos relacionados con la dispersión**
2º Bachillerato, Ciencias Sociales	Estadística paramétrica. Parámetros de una población y estadísticos obtenidos a partir de una muestra. Estimación puntual. Media y desviación típica de la media muestral y de la proporción muestral. Distribución de la media muestral en una población normal. Distribución de la media muestral y de la proporción muestral en el caso de muestras grandes. Estimación por intervalos de confianza. Relación entre confianza, error y tamaño muestral. Intervalo de confianza para la media poblacional de una distribución normal con desviación típica conocida. Intervalo de confianza para la media poblacional de una distribución de modelo desconocido y para la proporción en el caso de muestras grandes.

La gran dificultad que para los alumnos supone con frecuencia la comprensión de la inferencia se debe a que es necesario manejar simultáneamente tres tipos de distribuciones (cada una de ellas con su correspondiente dispersión):

- La distribución de probabilidad de la población, cuyos parámetros quedemos estimar o contrastar; por ejemplo la distribución normal N (μ, σ);
- La distribución de los datos de una muestra; con su media y deviación típica $\bar{x}$, S_x
- La *distribución muestral:* Cuando consideramos un resumen estadístico, por ejemplo, la media de una muestra, en todas las muestras del mismo tamaño que es posible extraer de la población dada, este estadístico es considerado como una variable aleatoria con una distribución de probabilidad. En el ejemplo, la media de una muestra de tamaño *n* de una población normal N (μ, σ) también sigue una distribución normal $N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$.

Esta dificultad puede hoy día disminuirse con la ayuda de la simulación; por ejemplo, en la Figura 4 mostramos un simulador de la distribución de la media muestral disponible en: www.rossmanchance.com/applets/SampleMeans/SampleMeans.html.

En diferentes ventanas el simulador representa la distribución poblacional (izquierda-superior), la distribución de datos en la última muestra simulada (derecha-superior), la distribución muestral empírica de todas las medias que se van obteniendo en sucesivas muestras (izquierda – inferior) y la misma distribución muestral estandarizada, que se va aproximando a la distribución normal N (0,1) cuando se repite el proceso de muestreo.

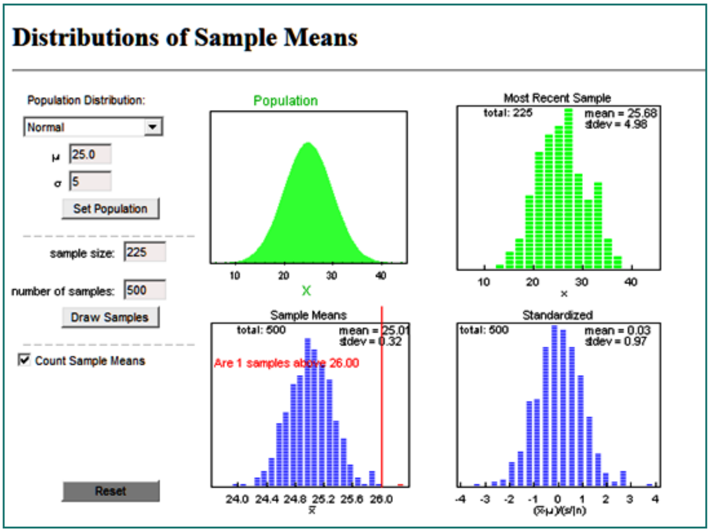


Figura 4. Simulación de la distribución de la media muestral (applet de la colección Rossman y Chance, http://www.rossmanchance.com/applets/).

SINTESIS DE SIGNIFICADOS DE LA DISPERSIÓN

A pesar de la brevedad de nuestro análisis, es posible observar cómo, cada nuevo capítulo de la estadística (estadística descriptiva univariante, bivariante, probabilidad e inferencia) da un papel relevante al concepto de dispersión en la resolución de problemas estadísticos. Cada uno de ellos introduce, además, nuevos objetos matemáticos, terminología o gráficos y procedimientos específicos relacionados con la dispersión.

Consecuentemente, de acuerdo a nuestro marco teórico, podemos diferenciar significados parciales de la dispersión, que denominaremos significado descriptivo univariante, descriptivo bivariante, probabilístico e inferencial. Cada uno de ellos viene definido por una configuración específica de objetos matemáticos, algunos de los cuáles se presentan en la Tabla 5.

Se trata de proposiciones o razonamientos que, en lugar de expresarse con certeza, incluyen afirmaciones de probabilidad. Un ejemplo es la desigualdad de Tchebycheff, que nos indica que para toda variable aleatoria ζ, con media μ y varianza σ^2 finitas, podemos acotar los valores que toma la variable alrededor de su media, tanto como queramos en el intervalo (μ − ε, μ + ε) siendo ε > 0 todo lo pequeño que se desee. Ahora bien, esta acotación no es segura sino probable (con una alta probabilidad), como indica la desigualdad:

$$P\left(\xi - \mu \geq \varepsilon \right) \leq \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$$

Asimismo, en inferencia el rechazo y aceptación de una hipótesis no son simétricos; la confirmación de una teoría a partir de datos empíricos nunca es definitiva, porque los datos futuros podrían contradecirla. En cambio, si los datos del experimento se apartasen del patrón esperado, la teoría sería refutada (Batanero, 2000; Rivadulla, 1991).

Tabla 5. Significados diferenciados de la dispersión

	Descriptivo univariante	**Descriptivo bivariante**	**Probabilístico**	**Inferencial**
Situaciones problemas	Análisis de variabilidad producida en los datos.	Estudiar relación entre variables. Analizar la bondad de ajuste de un modelo.	Análisis de variabilidad probable en un modelo.	Precisión de una estimación. Riesgo de error en un contraste
Lenguaje	Gráficos estadísticos univariantes Símbolos: $\bar{x}$, S.	Gráficos estadísticos bivariantes Símbolos: r; S_{xy}	Representación gráfica de distribuciones. Tablas de distribuciones. Símbolos: σ, ξ, $N(\mu, \sigma)$	Representación de distribuciones muestrales. Símbolos: $N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$
Conceptos	Resúmenes estadísticos descriptivos	Covarianza, Correlación, Coeficiente de determinación	Distribuciones de probabilidad Parámetro	Distribución muestral, estimación, intervalo de confianza, error tipo I y II
Propiedades	La suma de la distancia de datos a la media es cero. Las medidas de dispersión siempre son positivas	Partición de la varianza en parte explicada y no explicada por la regresión	Desigualdad de Tchebycheff	Insesgadez (de un estimador) Relación entre confianza, precisión y tamaño de la muestra
Procedimientos	Cálculo numérico de estadísticos	Mínimos cuadrados Otros modelos de ajuste	Cálculo de probabilidades Simulación	Muestreo Contraste de hipótesis Simulación
Argumentos	Similares a otras ramas de la matemática	Similares a otras ramas de la matemática	Incluyen expresiones de probabilidad	Incluyen expresiones de probabilidad. No simétricos (en el rechazo o aceptación de una hipótesis)

IMPLICACIONES DIDÁCTICAS

A lo largo de la escolaridad, cada uno de los capítulos analizados de la estadística se estudia en cursos diferentes y, por la falta de tiempo, no siempre se conectan entre sí. Sería importante para conseguir el aprendizaje significativo del alumno que los diversos significados mostrados de la dispersión se enlacen entre sí, para contribuir a la construcción de un significado global que abarca todos ellos. Así, al estudiar la estadística bivariante, es sencillo recordar el significado univariante de la dispersión, en el cálculo de las medidas para cada una de las distribuciones marginales; por ejemplo, al calcular las varianzas y desviaciones típicas que intervienen en las fórmulas del coeficiente de correlación y regresión. Sería también útil presentar analizar con los estudiantes las diversas formas de descomponer la dispersión total en el análisis bivariante.

Las variables aleatorias se suelen introducir como generalización de la idea de variable estadística, al considerar una variable en una población hipotética; es sencillo entonces concebir las medidas de posición central y dispersión de las variables aleatorias como generalización de las correspondientes al caso descriptivo.

Finalmente, en el estudio de la inferencia, como hemos indicado, los alumnos han de manejar a la vez las variables estadísticas y aleatorias, junto con sus distribuciones y las distribuciones muestrales. El uso de la simulación, como hemos sugerido, puede ayudarles a conectar los sentidos descriptivos, probabilísticos e inferenciales de la inferencia estadística.

Para finalizar, es importante que el profesor sea consciente del papel destacado de la dispersión en estadística. Puesto que, como indicó Moore (1990), la estadística es la ciencia de los datos y estos están caracterizados por la variabilidad, la habilidad para percibir, medir y explicar la dispersión de los datos y de los modelos que utilizamos para describirlos es la clave del razonamiento estadístico.

AGRADECIMIENTOS

Proyecto EDU2013-41141-P (MEC) y grupoFQM126 (Junta de Andalucía).

REFERENCIAS

Batanero, C. (2000). Controversies around significance tests. Mathematical Thinking and Learning, 2(1-2), 75-98.

Batanero, C. (2001). Didáctica de la estadística. Granada: Departamento de Didáctica de la Matemática.

Estepa, A. y del Pino, J. (2013). Elementos de interés en la investigación didáctica y enseñanza de la dispersión estadística. Números 83, 43-63.

Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. ZDM, The International Journal on Mathematics Education, 39(1-2), 127-135.

MECD (2014). Real Decreto 126/2014, de 28 de febrero, por el que se establece el currículo básico de la Educación Primaria. Madrid: Autor.

MEC (2006). Real Decreto 1513/2006, de 7 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas de la Educación primaria. Madrid: Autor.

MEC (2007a). Real Decreto 1631/2006, de 29 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas correspondientes a la Educación Secundaria Obligatoria. Madrid: Autor.

MEC (2007b). Real Decreto 1467/2007, de 2 de noviembre, por el que se establece la estructura del bachillerato y se fijan sus enseñanzas mínimas. Madrid: Autor.

MECD (2015). Real Decreto 1105/2014 de currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato. Madrid: Autor.

Moore, D. S. (1990). Uncertainty. En L. A. Steen (Ed.). On the shoulders of giants. new approaches to numeracy. Washinton, D. C.: National Academy Press.

Rivadulla, A. (1991). Probabilidad e inferencia científica. Barcelona: Anthropos.

Sánchez, E., Borim,, C. y Coutinho, C. (2011). Teachers' understanding of variation. En C. Catanero, G. Burrill, & C. Reading (Eds.), Teaching statistics in school mathematics-challenges for teaching and teacher education (pp. 211-221). New York: Springer.

Wild, C. J. y Pfannkuch, M. (1999). Statistical thinking in empirical enquiry. International Statistical Review, 67(3), 223-263.

Épsilon - Revista de Educación Matemática *2015, Vol. 32(2), nº 90, 21-30*

Obtención del volumen del tetraedro por alumnos con talento matemático, sin emplear formulas

Sandra Guerrero y Pablo Flores
Universidad de Granada

Resumen: *Usualmente la enseñanza de la geometría pretende el aprendizaje de medidas, predominantemente empleando formulas, pero sin profundizar en su significado. Es relevante introducir procesos que favorezcan el aprendizaje de elementos geométricos, o de magnitudes que les afectan. Este texto describe el método empleado para trabajar el volumen del tetraedro regular*[1] *por alumnos con talento matemático, sin emplear fórmulas, sustentado en una propuesta de enriquecimiento curricular diseñada para que los estudiantes obtengan relaciones y reglas generales empleando material manipulativo.*
Palabras clave: *volumen del tetraedro, no empleo de fórmulas, estudiantes con talento matemático.*

Getting the volume of tetrahedron mathematically talented students without using fórmulas

Abstract: *Usually the teaching of geometry learning aims names and measures, predominantly using formulas, but without going into its meaning. It is important to introduce processes that foster learning geometric elements, or of quantities that affect them. This paper describes the method employed to work the volume of the tetrahedron mathematically talented students without using formulas, based on a proposal of curricular enrichment designed for students to gain general rule sand establish relationships, using manipulative material.*
Keywords: *tetrahedron volume, no use of formulas, mathematically talented students.*

1. En lo sucesivo al referirnos al tetraedro regular que tiene por arista el lado del triángulo equilátero aludiremos a él como tetraedro o T.

INTRODUCCION

ESTALMAT (Estimulo del Talento Matemático)[2] es un proyecto desarrollado en España que tiene la finalidad de detectar el talento matemático y respaldar la calidad de estudiantes que lo manifiesten. Los estudiantes participantes en esta investigación se consideran con talento matemático, por haber superado una prueba de acceso al programa en la que dan cuenta de sus habilidades matemáticas. En la prueba compitieron con casi 500 compañeros de las 4 provincias andaluzas.

Un posible enfoque para la atención de estos alumnos es desarrollar sus potencialidades diseñando unas prácticas docentes que las atiendan, esta forma de intervención se adapta adecuadamente al grupo de alumnos que forman parte del proyecto ESTALMAT en Andalucía Oriental como se cita en (Ramírez, 2012).

Las clases del proyecto Estalmat se destinan al enriquecimiento curricular, es decir, no avanzan en los programas de matemáticas escolares, sino que afrontan nuevos problemas, incluyendo el tratamiento de aspectos matemáticos generalmente no tratados en clase.

La mayoría de estos alumnos no están diagnosticados mediante procesos objetivos baremados. El curso se compone de 25 alumnos de 14 a 16 años de edad, de los cuales asistieron 7 chicas y 16 chicos.

Durante una sesión del programa Estalmat para Andalucía Oriental, del curso 2013-2014, llevamos a cabo un enriquecimiento curricular enmarcado dentro de una actividad extraescolar, centrado en hallar el volumen del tetraedro, partiendo de la idea de que era posible que los estudiantes prescindieran de emplear fórmulas para calcular volúmenes, y lo suplieran mediante la comparación directa de cuerpos,

JUSTIFICACIÓN CURRICULAR

El Decreto 231/2007, de 31 de julio, en su artículo 5 establece la definición y principios para la determinación de las enseñanzas correspondientes a la educación secundaria obligatoria en Andalucía. Especifica en el apartado d del punto 3, que “se deben integrar aprendizajes y experiencias que se consiguen o adquieren en espacios y tiempos escolares con los que se puedan conseguir o adquirir fuera de ellos” (Junta de Andalucía, 2007, p.5). Estas ideas nos han animado a presentar una sesión que tome en consideración actividades externas, para llegar a obtener el volumen del tetraedro.

METODOLOGIA

Durante la sesión se realizaron tareas de crecimiento grupal con los estudiantes para hallar el volumen del tetraedro empleando el mínimo de fórmulas posible. El foco de atención se centró en cubrir dos aspectos muy importantes como son: calcular el volumen del tetraedro por comparaciones y estudiar diversas pirámides en el interior del cubo

2. En adelante para mencionar al proyecto Estimulo del Talento Matemático, lo indicaremos como ESTALMAT.

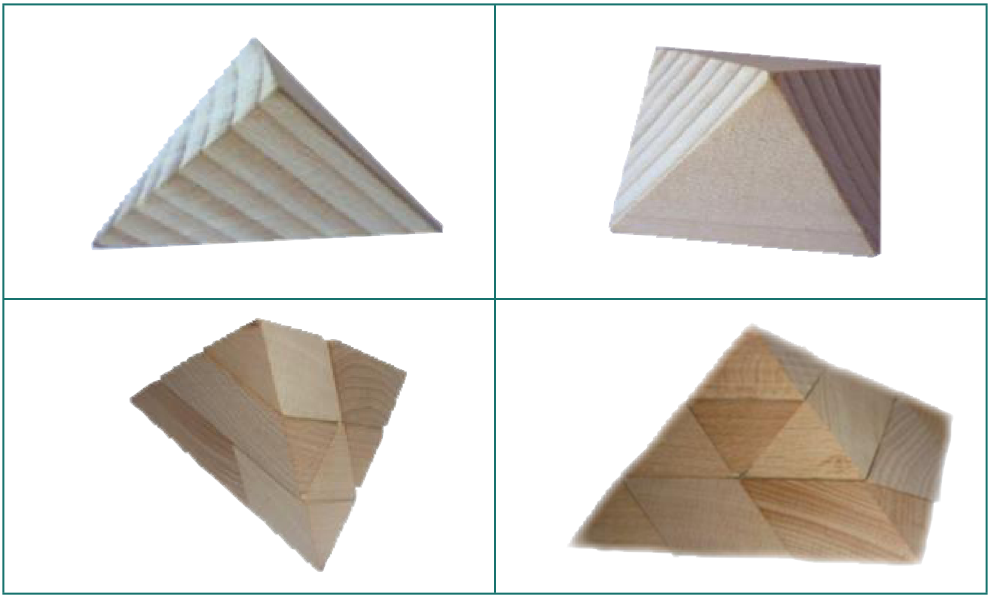


Figura 1: Tetraedro simple y triple *Pirámide simple y triple*

PLANEACIÓN Y DISEÑO DE LA SESIÓN DE ENRIQUECIMIENTO CURRICULAR

La sesión pretendía que los estudiantes apreciaran el volumen del tetraedro por percepción directa, comparando los volúmenes del tetraedro y la pirámide cuadrada[3] de lados iguales, determinando razonadamente cuál tiene mayor volumen tras examinar cómo se relacionan sus elementos. La continuidad de los argumentos de comparación la harían componiendo tetraedros y pirámides más grandes tomando como referencia los que tienen por lado la unidad, empleando para ello un puzle compuesto de pirámides y piezas de pirámides, descrito en Flores (2006). Esto les permitiría observar que el volumen de P es mayor que el de T, dado que el número de piezas utilizadas para su composición es mayor (figura 1).

Con objeto de concretar esta comparación y establecerla con una unidad de volumen conocida como es la del cubo, se propone buscar formas de componer el cubo a partir de tetraedros y pirámides, identificando qué pirámides se forman al obtener un tetraedro dentro del cubo, indicando cuántas caras tienen, qué son esas caras, qué relación tienen con los datos del cubo. (Figura 2).

Los alumnos dibujarían el tetraedro dentro del cubo. El problema entonces pasa a ser determinar el volumen de las figuras en que queda descompuesto el cubo, preferentemente en función de tetraedros y pirámides Es útil identificar que se puede componer una

3. En lo que sigue para referirnos a la pirámide cuadrada que tiene por arista el lado del triángulo equilátero la nombraremos como pirámide o P.

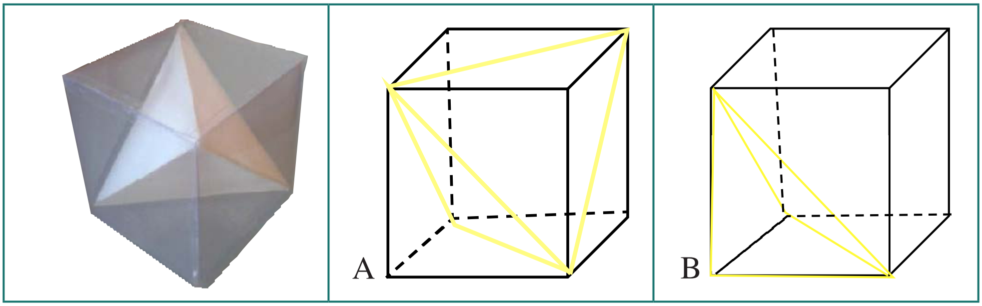


Figura 2: Tetraedro dentro del cubo(A), formado con diagonales de las caras. Se complementa con cuatro pirámides trirectángulas, como las que se indican en B

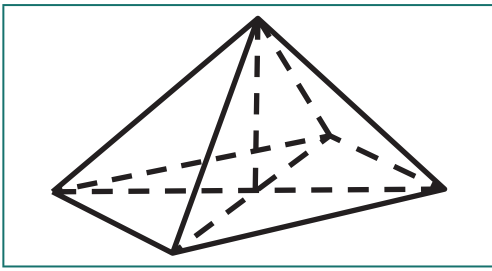


Figura 3. Pirámide cuadrada formada por 4 pirámides trirectángulas

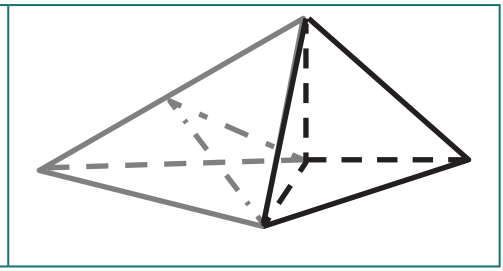


Figura 4. 2 pirámides trirectángulas unidas (gris), de igual base y altura que el tetraedro (negro)

pirámide con cuatro tetraedros trirectángulos (Ttr)[4]. El siguiente paso consiste en determinar el volumen del Ttr. Para ello se puede recurrir a unir dos Ttr para formar una pirámide oblicua de igual base y altura que el tetraedro como se detalla en Guerrero (2014), con lo cual, y aplicando que "dos pirámides de igual superficie de la base e igual longitud de la altura tienen el mismo volumen", se logra descomponer el volumen del cubo en la suma del volumen de tres tetraedros, precisando las relaciones de volumen 1:3 entre T y el cubo y 2:1 entre P y T. En este caso aceptamos que el volumen depende de la superficie de la base y de la altura, propiedad que se maneja desde los elementos de Euclides, pero que requiere para su justificación el Principio de Cavalieri. (Figuras 3-4)

A partir de los puzles tendrían muchos elementos de comparación, como por ejemplo que los volúmenes de la pirámide y el tetraedro juntos son iguales al del cubo.

Para obtener el volumen de manera perceptible hay que buscar otras estrategias, como determinar el volumen del Ttr a través de particiones infinitas.

En cualquier caso, ya están en disposición de calcular el volumen de tetraedros y pirámides de lados dados, a partir del cubo en el que ambos caben. Al introducir el tetraedro

4. En adelante para referirnos al tetraedro trirectángulo lo indicaremos como Ttr

dentro del cubo se hace visible que su arista es igual a la diagonal de la cara del cubo. La secuencia de enseñanza propone relacionar la diagonal y el lado de la cara del cubo expresando estos segmentos unos en función de otros, como un paso previo para hallar el volumen del tetraedro en función de su arista, empleando el resultado obtenido, es decir, que su volumen es un tercio del volumen del cubo.

IMPLEMENTACIÓN DE LA SESIÓN DE ENRIQUECIMIENTO

Una vez diseñada la clase, las tareas se implementaron en el orden señalado, para conducir al estudiante a una evolución en sus razonamientos. En la primera de las tres horas que duró la sesión, se hizo una presentación en PowerPoint, mostrando la dificultad de justificar las fórmulas de cálculo del volumen. Durante el desarrollo se entregó un formulario por estudiante consistente en 4 cuestiones, comenzando por examinar y justificar la relación entre los volúmenes de T y P. Luego se formaron grupos de 2 estudiantes a los que se les repartió los puzles mencionados anteriormente, para que precisaran la relación. Posteriormente se pidió dibujar el tetraedro dentro del cubo y examinar el volumen del Ttr, para terminar pidiendo la fórmula que permite calcular el volumen de tetraedro en función de la longitud de su arista. A continuación presentamos cómo se desarrolló la sesión y examinamos las respuestas de los estudiantes.

TRABAJO DE LOS ESTUDIANTES DURANTE LA SESIÓN

Al comienzo, la comparación entre los volúmenes de P y T, la hicieron de manera intuitiva cotejando sus alturas y las áreas de las bases. Al comparar áreas de las bases aventuraron que el volumen de una pirámide debía ser proporcional al área de su base. Percibieron la dificultad de apreciar la diferencia de volúmenes de P y T dado el tamaño similar de ambos, mostrando cierta disposición para comparar con poliedros semejantes más grandes. Se sintieron tentados por el reto de componer una pirámide con todas las piezas del puzle (Flores, 2006), lo que distrajo su atención durante algún tiempo. Posteriormente comenzaron a construir pirámides y tetraedros de lados dobles y triples. Durante la composición de estos poliedros los estudiantes fueron hábiles con las piezas del puzle, pese a que son diferentes y presentan formas inusuales, apreciando que todas las piezas se descomponen en tetraedros y pirámides. La construcción de poliedros dobles y triples les permitió confirmar su hipótesis de partida de que el volumen de P es mayor que el de T. Para lo cual les fue útil analizar la cantidad de pirámides y tetraedros unidad, necesarios para componer los poliedros semejantes de lado n veces el lado del triángulo equilátero. En la tabla 1 aparecen las cantidades de tetraedros y pirámides empleadas para ello.

Una vez confirmado que el volumen de T es menor que el de P, se propuso buscar un tetraedro al interior del cubo. Una vez identificado se les suministró el puzle del tetraedro, consistente en un tetraedro y 4 Ttr. Los estudiantes trabajaron con este puzle, para realizar construcciones, pero también para elaborar representaciones planas en perspectiva de las mismas, y caracterizar el Ttr.

Tabla 1: Relaciones entre volúmenes de P_i y T_i[5]

Lado	**Tetraedro**		**Pirámide**		**Observaciones**
	Tetraedros	**Pirámides**	**Tetraedros**	**Pirámides**	
1	1	0	0	1	
2	4	2	4	6	P_2-T_2=6P_1
3	11	8	16	18	P_3-T_3=5T_1+10P_1
4	24	12	40	43	
5	45	40	80	84	

Finalmente obtuvieron reglas a partir de la generalización de las regularidades encontradas al relacionar la diagonal con la cara del cubo y establecer que el volumen de P es el doble de T y este la tercera parte del cubo.

En esencia establecieron comparaciones de volúmenes mediante el rellenado de pirámides.

ANÁLISIS DE LAS RESPUESTAS ESCRITAS DE LOS ESTUDIANTES AL FORMULARIO

Para examinar los razonamientos escritos de los estudiantes, se recogieron sus formularios escritos. Se realizó una tabla con los campos en los que se esperaba respuestas y se rellenaron revisando los escritos. Una vez apreciadas las respuestas se organizaron en 16 categorías, correspondientes a los procesos planteados en el camino hacia obtener el volumen del tetraedro.

En la tabla 2 aparecen las respuestas, así como las etapas previstas realizadas por los alumnos, teniendo en cuenta que, aunque asistieron 23 alumnos, recogimos 21 respuestas escritas, dado que dos formularios estaban firmados por dos parejas de alumnos.

Tabla 2: Respuestas satisfactorias de los alumnos a las etapas previstas

Categoría	**1**				**5**		**7**	**Ttr**			**11**					**16**
		2	3	4		6		8	9	10		12	13	14	15	
No. Alum.	21	16	10	2	15	2	9	4	9	7	20	21	21	20	17	18

5. La notación Pi y Ti corresponde a las pirámides y tetraedros de lado i.

Categorías

1) Afirman que el volumen de P es mayor que el de T
  - **2)** Comparan las bases de P y T
  - **3)** Comparan bases y alturas
  - **4)** Otras justificaciones (comparación de peso, encuentran figuras interiores)

5) Componen y expresan T_2 y P_2
  - **6)** Concluyen que el volumen de P no es triple del T

7) Componen y expresan T_3 y P_3

Hallan volumen de Ttr:
  - **8)** Por truncamientos reiterados
  - **9)** Por descomposición.
  - **10)** Por fórmula

11) Relacionan volúmenes de Ttr, P, T y cubo, determinando que el volumen P es el doble del volumen de T
  - **12)** Dada la arista del cubo hallan la del tetraedro
  - **13)** Dada la arista del tetraedro hallan la del cubo
  - **14)** Dada la arista del cubo hallan su volumen y el del tetraedro
  - **15)** Dada la arista del tetraedro hallan su volumen y el del cubo

16) Dado el volumen del tetraedro hallan su arista

A partir de la manipulación de figuras opacas todos los estudiantes encontraron que P tiene mayor volumen que T (Cat. 1), analizaron sus formas y propiedades. Dieciséis estudiantes comparan las pirámides estableciendo la proporcionalidad entre las bases y argumentan que el volumen de P es mayor que el de T porque su base tiene mayor área. Diez de ellos, además, comparan las alturas respectivas (cat. 2, 3 y 4). Otras justificaciones (cat. 4) acuden a dibujos interiores o a comparar el peso de las piezas entregadas, por ejemplo.

Quince estudiantes compusieron las pirámides y tetraedros de lados dos, nueve de ellos incluso construyeron las figuras triples y las expresaron en función de la pirámide y el tetraedro unidad. En todas las composiciones percibieron que para construir las pirámides, emplearon más piezas que para componer los tetraedros, lo cual lleva a dos alumnos a expresar (cat. 6) que el volumen de P es menor del triple del volumen de T. Sin embargo no tienen argumentos suficientes para precisar la relación entre P y T.

Una vez dibujado el cubo y en su interior el tetraedro, pasan a calcular el volumen de Ttr, que lo encontraron de tres maneras. Cuatro estudiantes reproducen un proceso de truncamientos reiterados infinitos mostrado en clase, mediante el cual se obtiene que el volumen de Ttr es 1/6 del cubo original (Flores, Ramírez y Rodríguez, 2014). Nueve estudiantes siguieron el proceso de descomposición empleando fórmulas de proporcionalidad, y sólo siete no han podido evitar emplear la fórmula, pese a que se ha planteado la actividad para obviarlas. En total veinte de las respuestas llegan a establecer la relación 1:6 entre el volumen del Ttr y el cubo.

Al relacionar aristas y volúmenes; todos los estudiantes relacionan la diagonal y el lado de la cara del cubo. Salvo el estudiante uno, los demás hallaron los volúmenes de T y del cubo conociendo la arista de este último. Diecisiete estudiantes hallan el volumen de T y el del cubo, dada la arista de T. Dieciocho estudiantes hallan la longitud de la arista de T, dado su volumen. Las tareas de la esta actividad fueron las que tuvieron más relaciones acertadas en todos y cada uno de los pasos.

Tras explicarles cómo construir un “tetrabrick” tetraédrico, con cartón, se les pidió realizar uno de medio litro de capacidad. Tenían que determinar la longitud de su arista y hacer las medidas adecuadas para construirlo. 18 respuestas recogen la relación que les permite determinar la arista de T conocido su volumen.

Todos los estudiantes siguen el razonamiento propuesto, independientemente del número de pasos contestados. En general hicieron un uso escaso de fórmulas, siguiendo el proceso planteado.

CONCLUSIONES

El proceso de relacionar volúmenes por comparación directa no es sencillo, salvo en casos en que se aprecie el proceso de descomposición y recomposición. Este proceso se complica en las pirámides, en las que para romperlo se suele emplear el principio de Cavalieri (González-López y Flores, 2001). Esta dificultad, junto con el interés en que los alumnos desarrollen sentido de la medida, apreciando que la magnitud (volumen en este caso), se aplica a cuerpos sólidos, preferentemente poliedros, en su comienzo, poniendo en juego destrezas de comparación, de suma, etc. (Moreno, Gil y Montoro, 2015), nos ha llevado a proponer un proceso de enriquecimiento curricular para alumnos de ESTALMAT basado en el volumen (Guerrero, 2014, Flores, Ramírez y Rodríguez, 2014). En este artículo hemos relatado el proceso llevado a cabo, y examinado el éxito de los alumnos al seguir el razonamiento propuesto.

Apreciamos que los estudiantes de ESTALMAT Andalucía Oriental, siguieron con cierta facilidad el proceso de razonamiento propuesto, mostrando con ello una gran sensibilidad para reconocer el papel de las fórmulas en el cálculo del volumen, evitando ponerlas en juego sin haber hecho antes otro tipo de razonamientos. Durante el proceso mostraron capacidad para identificar cuáles de sus razonamientos eran debidos a resultados aprendidos mediante fórmulas y cuáles se podían obtener por comparación directa de medidas, especialmente de comparación directa. Desarrollaron estrategias eficientes, encontraron patrones y establecieron relaciones. El modelo de combinar enriquecimiento curricular (en este caso, la comparación de volúmenes), con fijar su atención sobre aspectos de razonamiento matemático (el papel de la fórmula en matemáticas, en este caso) (Ramírez, 2012, Ramírez y Flores, 2015), lo han seguido de manera satisfactoria.

El proceso ante todo se enfocó a la comparación de cantidades de volumen de poliedros, a través del descubrimiento de relaciones entre segmentos, áreas y volúmenes mediante la composición y la descomposición de estos. Hasta finalizar las actividades, no se hicieron mediciones, por tanto no hay aplicación de medida directa en ningún momento, ya que no se ha definido una unidad de medida. Está pendiente completar este proceso de razonamiento mediante la introducción de las etapas de medición que den mayor sentido de la medida (Moreno et al., 2015), examinando qué tipo de deformaciones permite encajar las unidades de volumen, generalmente cúbicas, en pirámides.

REFERENCIAS

Flores, P. (2006). Una pirámide rellena de…pirámides. En Flores, P., Ruiz, F. y De la Fuente, M. (Coord.). *Geometría para el siglo XXI*. (pp. 2221 – 247). Badajoz, Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas y SAEM Thales.

Flores, P., Ramírez, R. y Rodríguez, M. (2014). *Volumen del tetraedro.* Seminario ESTALMAT, Barcelona, 2014.

González-López, M.J. y Flores, P. (2001). Conocimiento profesional del profesor de secundaria sobre las Matemáticas: el caso del volumen. *Educación Matemática*, XIII(1), 94-106.

Guerrero, S. (2014). *Obtención del volumen del tetraedro por alumnos con talento matemático, sin emplear fórmulas*. Trabajo Fin de Máster, Departamento de Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada, Junio de 2014.

Junta de Andalucía (2007). *Decreto 231/2007, de 31 de Julio, por el que se establecen las enseñanzas correspondientes a la Educación Secundaria Obligatoria en Andalucía.*

Moreno, M.F., Gil, F. y Montoro, A.B. (2015). Sentido de la medida. En Flores, P. y Rico, L. (Coords.), *Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en Educación Primaria* (pp. 174-168). Madrid, Pirámide.

Ramírez, R. (2012). *Habilidades de visualización de los alumnos con talento matemático*. Tesis doctoral inédita. Granada, Universidad de Granada.

Ramírez, R. y Flores, P. (2015). *Planificación de sesiones de Enriquecimiento matemático*. Taller en 17 JAEM, Cartagena, 5 al 8 de julio de 2015.

Épsilon - *Revista de Educación Matemática* 2015, Vol. 32(2), nº 90, 31-38

Enseñando Geometría: Geogebra 3D en la formación para maestros

María José Madrid
Universidad de Córdoba

Resumen: *GeoGebra y más particularmente su vista gráfica3D presentan un infinito número de posibilidades para trabajar con cuerpos geométricos. Por eso aprovechando el enorme potencial de esta herramienta, se plantean en este trabajo una serie de sencillas actividades para realizar en el aula que favorecerán no solo que los maestros en formación comprendan correctamente los contenidos y las conexiones entre ellos y otros campos, si no que les aportarán ideas para su futuro trabajo en una aula de Educación Primaria.*
Palabras clave: *Geometría, Formación de maestros, Educación Primaria, GeoGebra 3D*

Teaching geometry: GeoGebra 3Dto teach trainee teachers

Abstract: *GeoGebra and more particularly its 3D graphic view shows an infinite number of possibilities to work with geometric figures. Due to the enormous potential of this software, this work presents some easy activities to do in the classroom that not only will help trainee teachers to understand the contents and the connections between them and other fields, but also they will give them ideas for their future job in a classroom of Primary Education.*
Keywords: *Geometry, Trainee teachers, Primary Education, GeoGebra 3D*

INTRODUCCIÓN

En el Real Decreto 126/2014, de 28 de febrero, por el que se establece el currículo básico de la Educación Primaria dentro del área de matemáticas se recogen los contenidos:

- Cuerpos geométricos: elementos, relaciones y clasificación.
- Poliedros. Elementos básicos: vértices, caras y aristas. Tipos de poliedros.
- Cuerpos redondos: cono, cilindro y esfera.

Sin embargo, estos contenidos plantean diversas dificultades a un gran número de alumnos en todos los diferentes niveles educativos; los consideran algo abstracto y de poca utilidad en el mundo real, son incapaces de ir más allá del aprendizaje memorístico de las distintas definiciones y fórmulas, no visualizan las representaciones en dos dimensiones de los cuerpos geométricos que se presentan en los libros y en definitiva no logran darse cuenta que estos cuerpos forman parte de cada momento de nuestra vida.

El software libre GeoGebra es un excelente simulador de problemas matemáticos, modifica el entorno educativo tanto en su dimensión espacio-temporal como metodológica, es además, un instrumento de trabajo para el profesor a la hora de plantear cuestiones y problemas a los alumnos cuya respuesta puede ser comprobada inmediatamente, y a su vez constituye un importante instrumento de trabajo para el alumno, que puede utilizarlo para prever o comprobar el resultado de los ejercicios o problemas que se le planteen, para diseñar experimentos y para realizar tareas de investigación adecuadas a su nivel de conocimiento de la materia (Hernández, 2010). Las múltiples ventajas de este software han motivado su utilización durante los últimos años en numerosas experiencias en el aula en distintos niveles educativos para favorecer la comprensión de distintos contenidos como por ejemplo la proporcionalidad geométrica en segundo de la ESO (Sáenz, Lasa y Wilhelmi, 2010) o las distribuciones estadísticas en la enseñanza universitaria (Gámez y Marín, 2010).

En su nueva versión GeoGebra 5.0 incluye la versión definitiva de su Vista Gráfica 3D, esta aporta infinidad de posibilidades para trabajar contenidos geométricos. Además, incluye entre sus posibilidades mostrar la vista gráfica en dos dimensiones junto con la 3D, permitiendo a los alumnos interactuar con ambas vistas.

Este artículo presenta una propuesta para trabajar la geometría en tres dimensiones poniendo énfasis en el uso de las herramientas que ofrece GeoGebra 3D y de las infinitas posibilidades que estas presentan; se pretende con ella favorecer el proceso de aprendizaje de los contenidos y la capacidad para realizar conexiones entre este y otros temas. Con este objetivo se proponen diversas actividades que favorecerán que los alumnos conozcan y dominen algunos contenidos de geometría, utilicen adecuadamente GeoGebra para trabajar con cuerpos geométricos en tres dimensiones e incluso pueden favorecer el aprendizaje significativo mediante la visualización de los conceptos a través de un software dinámico como es GeoGebra.

Las actividades se han propuesto para alumnos del grado en Educación Primaria pues la importancia de un aprendizaje significativo cobra mayor valor en estos alumnos. Ellos tendrán la tarea de explicar por primera vez estos conocimientos a las nuevas generaciones favoreciendo una correcta y completa comprensión de los conceptos y de sus conexiones con otros temas; sin embargo si ellos mismos no los comprenden de forma completa y correcta no facilitarán a sus futuros alumnos su aprendizaje.

En definitiva, esto hace necesario que los futuros maestros conozcan los contenidos pero también las posibilidades que ofrecen las tecnologías de la información y la comunicación y concretamente en este caso el software GeoGebra en el proceso de enseñanza de los mismos. De hecho, estudios de caso realizados con futuros maestros de Educación Primaria muestran que estos consideran que la utilización de GeoGebra 3D en el aula contribuirá positivamente al aprendizaje de los alumnos (Baltaci y Yildiz, 2015).

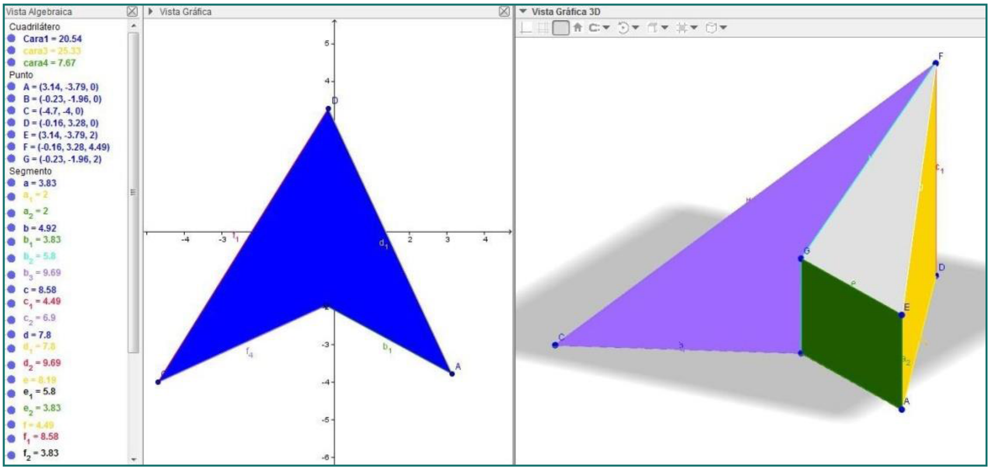


Figura 1. Ejemplo de la construcción de un poliedro utilizando polígonos.

ACTIVIDADES

Conociendo los poliedros y sus elementos.

La utilización de la Vista Gráfica en dos dimensiones y la vista Gráfica 3D complementadas con la Vista Algebraica favorecerá la comprensión del concepto de poliedro y de los distintos elementos de un poliedro cualquiera.

Para ello cada alumno a través de la definición dada: los poliedros son cuerpos geométricos limitados por polígonos, representará un poliedro y ayudado por la Vista Algebraica fijará cuáles son sus caras, sus aristas y sus vértices (figura 1).

Se trata de un poliedro creado únicamente a través de polígonos que permitirá darse cuenta que no cualquier construcción poligonal es un poliedro, además se observará como estos polígonos son las caras del poliedro, y los segmentos y vértices de los polígonos serán respectivamente aristas y vértices del poliedro.

Los primas y las pirámides. Áreas, volúmenes y desarrollos planos.

Aprovechando las herramientas de GeoGebra se representarán de forma sencilla el cubo y el tetraedro. Se analizarán sus elementos, se calcularán su área y volumen y se realizará su desarrollo plano (figuras 2 y 3).

Finalmente, partiendo de la consideración de que tanto el cubo como el tetraedro son casos particulares de prismas y pirámides, se pedirá a los alumnos que realicen la construcción de otro prisma y otra pirámide distintos y que analicen sus elementos, su área y volumen y realicen su desarrollo plano.

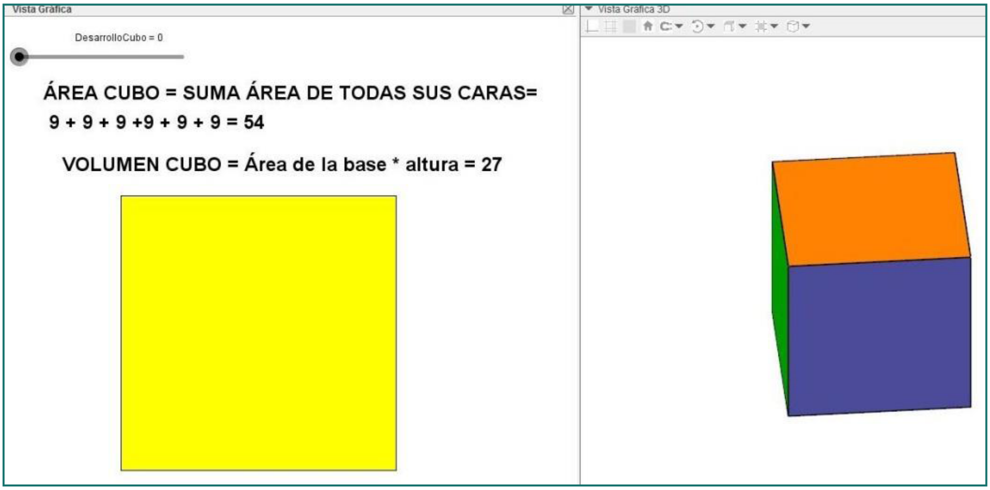


Figura 2. El cubo.

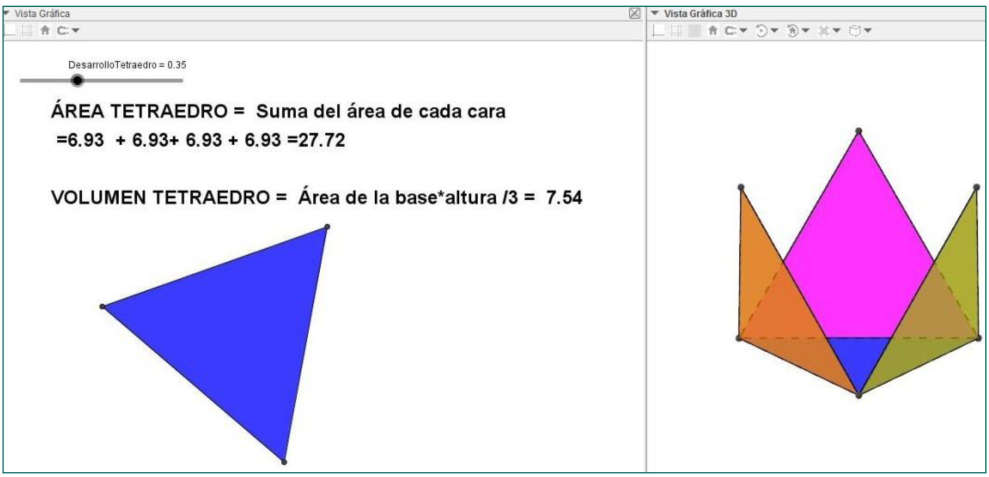


Figura 3. El tetraedro.

Creando las superficies de revolución: el cilindro y el cono.

Siguiendo la definición de cilindro (cuerpo de revolución engendrado por un rectángulo al girar sobre uno de sus lados como eje) y cono (cuerpo de revolución engendrado por un triángulo rectángulo al girar sobre uno de sus catetos como eje) construir a través de la herramienta rastro ambos cuerpos (ver figuras 4 y 5).

Una vez realizado esto, utilizando las herramientas de GeoGebra se representará otro cilindro y otro cono para estudiar sus elementos, su área, su volumen y su desarrollo plano.

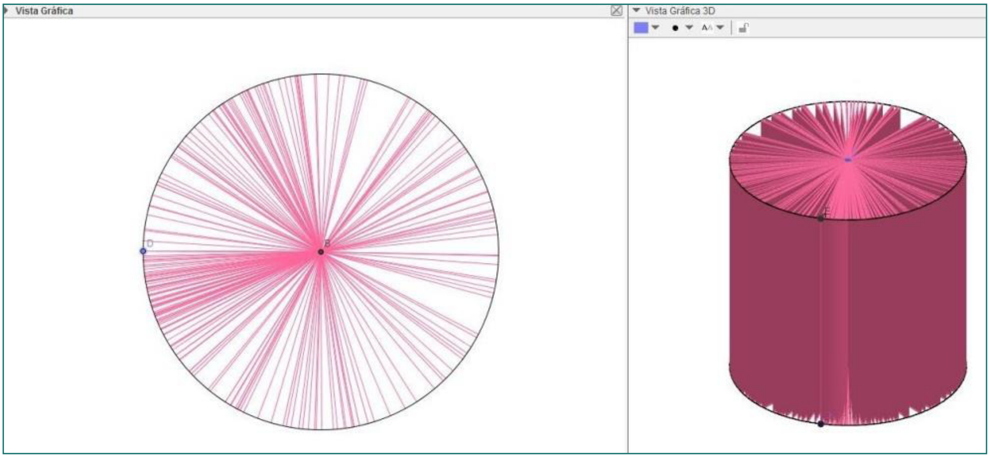


Figura 4. Superficie de revolución. El cilindro.

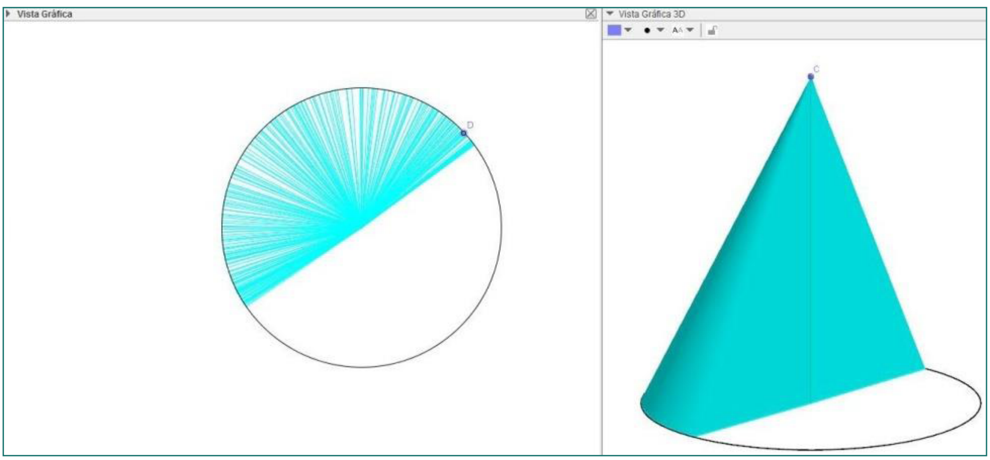


Figura 5. Superficie de revolución. El cono.

Además, siguiendo con el mismo esquema se puede plantear también la construcción de una esfera a partir de su definición como superficie de revolución. A continuación se identificaría sus elementos, su área y volumen. E incluso se podría debatir sobre si es o no posible representar su desarrollo plano y el porqué.

Desarrollos planos y papiroflexia.

En las actividades previas se han realizado los desarrollos planos de diversos poliedros y cuerpos de revolución, partiendo de esa consideración del paso de las tres dimensiones al plano, se planteara la consideración contraria, la papiroflexia nos lleva del papel en 2

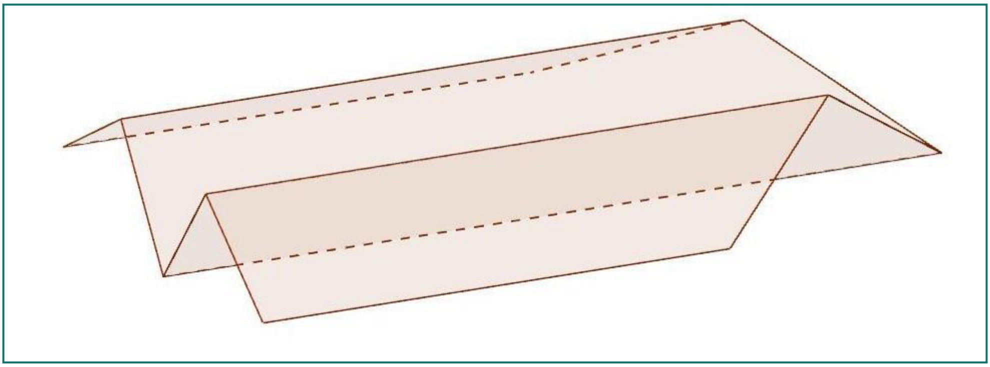


Figura 6. Avión de papiroflexia construido con GeoGebra.

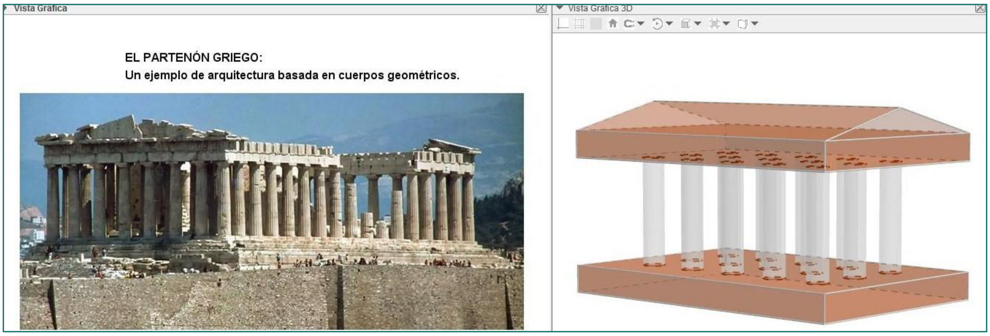


Figura 7. Reconstrucción con GeoGebra del Partenón Griego.

dimensiones al objeto tridimensional, por eso utilizando GeoGebra y complementándolo con hojas de papel si fuera necesario se recrearán algunos movimiento de figuras, como el avión.

Construyendo la realidad

La estructura de numerosos objetos, edificios, esculturas, etc. se basa en cuerpos geométricos, por ejemplo estos pueden encontrarse en el Partenón de Atenas en Grecia, mostrando un ejemplo de la importancia de la geometría en el arte. A través de GeoGebra se realizará una sencilla reconstrucción de este edificio potenciando la conexión entre arte y matemáticas.

Resolución de problemas con GeoGebra

La correcta resolución de un problema resulta en muchas ocasiones difícil para los alumnos, a través del uso de GeoGebra es posible reconstruir el enunciado del problema y visualizar más fácilmente su solución. Por ejemplo el siguiente problema:

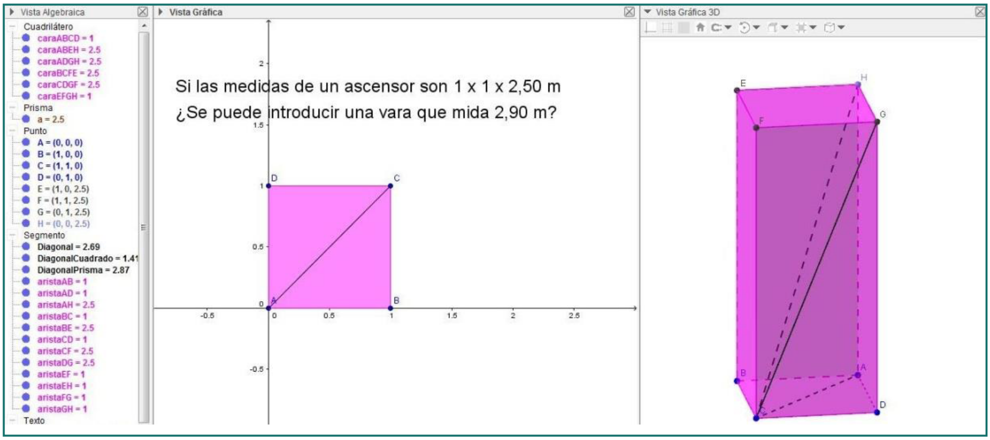


Figura 8. Problema del ascensor.

Si las medidas de un ascensor son 1 x 1 x 2,50 m. ¿Se puede introducir un palo que mida 2,90 m?

Para resolverlo basta con construir el ascensor, un prisma, y ver el tamaño de los segmentos que pueden introducirse en este "ascensor". Así es posible ver que el palo es mayor que la diagonal del cuadrado, que la diagonal del rectángulo y que la diagonal del poliedro por lo tanto será imposible introducirlo.

Otro problema que podría plantearse para su resolución con GeoGebra es:

Un salón cuadrado tiene una superficie de 50 m2. Hemos de embaldosarlo con baldosas cuadradas de 25cm de lado. ¿Cuántas son necesarias?

CONCLUSIONES

El trabajo en el aula con la geometría suele realizarse a través del aprendizaje memorístico de conceptos y la realización diferentes ejercicios y problemas rutinarios que impiden en muchas ocasiones que el alumno alcance un aprendizaje significativo y sea capaz de conectar estos contenidos matemáticos con otros temas. A lo largo de este trabajo se presentan una serie de actividades variadas que combinadas en el aula con las actividades habituales, favorecerán tanto el aprendizaje de los contenidos y aportarán a los maestros en formación ideas para llevar a cabo con sus futuros alumnos.

Estas actividades representan una pequeña parte dentro del inmenso número de posibilidades que presenta GeoGebra, pero favorecerán que los alumnos manejen con soltura los conceptos del bloque de geometría relativos a los cuerpos geométricos, comprendan los cálculos de áreas y volúmenes, utilizan el software dinámico GeoGebra adecuadamente a la hora de trabajar con cuerpos geométricos valorando además las tecnologías de la información y la comunicación de forma adecuada y beneficiosa para el proceso de enseñanza-aprendizaje y comprendiendo las ventajas que proporciona GeoGebra de cara a fomentar el aprendizaje significativo mediante la visualización de los conceptos.

REFERENCIAS

Baltaci, S. & Yildiz, A. (2015). GeoGebra 3D from the perspectives of elementary pre-service mathematics teachers who are familiar with a number of software programs. *Cypriot Journal of Educational Sciences, 10*(1), 12-17.

Gámez, A. y Marín, L.M. (2010). Distribuciones estadísticas: un ejemplo de uso de GeoGebra en enseñanza universitaria. *Epsilon, 74*, 33-42.

Hernández, J.L. (2010). GeoGebra, un cambio radical en el entorno de aprendizaje. *Epsilon, 74*, 53-65.

Real Decreto 126/2014, de 28 de febrero, por el que se establece el currículo básico de la Educación Primaria, BOE, 52, 1 de marzo de 2014, 19349-19420. Extraído el 28 de Julio de 2015 desde http://www.boe.es/boe/dias/2014/03/01/pdfs/BOE-A-2014-2222.pdf

Sáenz, A., Lasa, A. y Wilhelmi, M.R. (2010). Utilización de GeoGebra en proporcionalidad geométrica en 2º ESO. *Epsilon, 74*, 21-32.

Una propuesta para iniciar el trabajo algebraico en la escuela primaria: el caso de los gogos

Fabiana Kiener
Universidad Nacional del Litoral

Resumen: *El trabajo algebraico escolar constituye una problemática de interés abordada desde distintas perspectivas teóricas. Cuestionamos su introducción habitual mediante la resolución de ecuaciones porque ocasiona una pérdida de sentido. Planteamos la necesidad de diseñar alternativas para iniciar a los estudiantes en este dominio de la matemática.*
En este artículo presentamos una propuesta de enseñanza destinada a alumnos de 11 a 12 años, en la que el lenguaje algebraico surge como herramienta necesaria para poder resolver la situación. Se promueve la generación de conjeturas y validaciones, el uso de diferentes registros de representación y la construcción del sentido del trabajo algebraico.
Palabras claves: *Álgebra temprana, dependencia, construcción del sentido, Educación matemática.*

An offer to initiate the algebraic work in the primary school: the case of the gogos

Abstract: *The algebraic school work constitutes a problematic of interest approached from different theoretical perspectives. We question its habitual introduction by means of the resolution of equations because it causes a loss of sense. We raise the need to design alternatives to initiate the students in this domain of the mathematics.*
In this article let's sense beforehand an offer of education destined for pupils of 11/12 years, in that the algebraic language arises as tool necessary to be able to solve the situation. There is promoted the generation of conjectures and validations, the use of different records of representation and the construction of the sense of the algebraic work.
Keyswords: *Early algebra, dependence, construction of the sense, Mathematics education.*

INTRODUCCIÓN

El trabajo algebraico en el nivel escolar constituye una problemática de gran interés que ha sido abordada desde distintas perspectivas y enfoques teóricos. Si bien los centros de atención difieren de un estudio a otro, uno de los factores comunes consiste en la preocupación por las múltiples dificultades que presentan los alumnos en relación con el álgebra (Barrio, Lalanne y Petich, 2010; Ramírez García y Rodríguez Marcos, 2011; Sessa, 2005; Socas et al, 1996) y la consiguiente necesidad de buscar alternativas para su enseñanza que prevengan los errores frecuentes y favorezcan la construcción del sentido. El conocimiento del álgebra resulta fundamental no sólo para manipular y comprender expresiones simbólicas, sino también, como lo sostiene Arcavi (2013), para desarrollar una actitud crítica hacia ellas, pudiendo determinar cuándo es apropiado utilizarlas y cuándo no lo es.

> Esto es especialmente importante en una era en la que abunda la información con sus diversos ropajes, muchos de ellos pseudocientíficos y apoyados en argumentos «matemáticos». Un aspecto central del alfabetismo algebraico consistiría pues en la capacidad de inspeccionar y cuestionar cualquier uso, mal uso o abuso de las expresiones algebraicas para sustentar conclusiones. (Arcavi, 2013, p. 14)

Desde el punto de vista matemático, Sessa (2005) sostiene que el álgebra constituye una oportunidad esencial para estudiar propiedades y relaciones entre los números, elaborar conjeturas, organizar y producir argumentos, por lo que ofrece una posibilidad para fomentar en los alumnos la justificación matemática de sus respuestas. Al mismo tiempo, su importancia radica en que "está presente en toda la matemática, pues cualquier problema termina convirtiéndose en un cálculo más o menos algebraico calquier problema termina convirtsiones literales sobre las que se realizan operaciones"" (Socas et al., 1996, p. 38) y su enseñanza se establece en los documentos oficiales a partir de los últimos años de la escuela primaria (Núcleos de Aprendizaje Prioritarios y Diseños Curriculares Jurisdiccionales de la Provincia de Santa Fe).

Respecto a las características de su tratamiento en nuestro país (Argentina), Sessa (2005) afirma que suele iniciarse mediante la resolución de ecuaciones. El tratamiento precoz de este concepto ocasiona serias dificultades en los alumnos, ya que no disponen de suficientes elementos como para explicitar diferencias entre las transformaciones efectuadas al resolverlas y muchas veces terminan memorizando "reglas prácticas" para su resolución, sin entender el sentido de lo que están haciendo (Sessa, 2005; Moreno y Castellanos, 1997). Entre las cuestiones que suelen estar ausentes en la escuela durante el abordaje de este tema, menciona la explicitación del dominio numérico sobre el que se está trabajando, la resolución de ecuaciones sin solución o con infinitas soluciones, *el principio de necesidad* (las ecuaciones aparecen como una complicación innecesaria), el estudio de distintos problemas que se resuelvan con la misma ecuación, o de un mismo problema que se pueda resolver con distintas ecuaciones (dependiendo de cómo se seleccionen las variables).

Para subsanar esta situación la autora propone diversas vías de entrada para el álgebra escolar. Una de estas vías consiste en la "construcción de la idea de dependencia entre dos magnitudes o cantidades y por la consideración de las letras para expresar esas cantidades variables." (Sessa, 2005; p. 71)

Carraher, Schliemann y Schwartz (2013) escogen dicha vía de entrada para desarrollar sus experiencias de "álgebra temprana" en la escuela primaria. Muestran cómo pueden abordarse las operaciones aritméticas como la suma y la multiplicación en los primeros años del nivel primario desde una mirada funcional (Schliemann, Carraher y Brizuela, 2011). Las propuestas didácticas se caracterizan por utilizar el soporte contextual en las situaciones problemáticas que se proponen a los alumnos, introducir de modo gradual la notación formal y articular con los demás temas del currículo.

Además de enriquecer el trabajo algebraico, la utilización de una vía funcional posibilita la articulación de diferentes lenguajes, lo cual constituye una de las recomendaciones de Socas et al. (1996) para favorecer la comprensión algebraica. Al mismo tiempo, se relaciona con la potente idea de Duval (2008) acerca de que el único modo de acceder a los objetos matemáticos es a través de las representaciones semióticas y que no sólo se debe pasar de un registro a otro que utilice la misma clase de signos (*tratamiento*) sino que se deben propiciar espacios para la *conversión* de un registro a otro, que utilice distintos tipos de signos.

CARACTERÍSTICAS DE LA PROPUESTA DE ENSEÑANZA

La propuesta de enseñanza se enmarca en una investigación que tiene por objeto estudiar la iniciación al trabajo algebraico en septimo grado de la escuela primaria desde una vía funcional.

Se pretende promover la construcción del sentido del álgebra escolar, atendiendo a los tres aspectos mencionados por Sadovsky (2005) como necesarios para repensar dicha construcción: la reflexión en torno al modo en que se concibe el conocimiento matemático con el fin de explicitar los asuntos que "constituyen bases esenciales para pensar la enseñanza", la revisión del papel que juegan las interacciones entre los pares en el proceso de producción de conocimientos y el modo en que "los contextos en los que se presentan los problemas matemáticos condicionan la matemática que se produce" (Sadovsky, 2005; p.19).

En relación con el primer punto, adoptamos la posición de Chevallard, Bosch y Gascón (2000) según la cual una buena reproducción por parte del alumno de la actividad matemática, exige que éste intervenga en la misma, que formule enunciados, pruebe proposiciones, construya modelos, lenguajes, conceptos y teorías, que los ponga a prueba e intercambie con otros, que pueda reconocer los que están conformes con la cultura matemática y que tome los que le son útiles para continuar con su actividad. Este tipo de actuación exige dejar de lado una tendencia clásica en la enseñanza de la matemática, según la cual recae sobre el profesor la responsabilidad de validar todas las afirmaciones y resultados que se trabajen. En las tareas propuestas se promueve el trabajo autónomo de los alumnos, propiciando espacios para la toma de decisiones y la justificación de las respuestas dadas, aprovechando las oportunidades que ofrece el trabajo algebraico para ello.

En cuanto al segundo punto mencionado por Sadovsky (2005), el papel de las interacciones en el aula, se tendrá en cuenta al momento de implementar la propuesta de enseñanza, pero excede los objetivos de este artículo.

Respecto al tercer aspecto, cabe destacar que al momento de diseñar la propuesta consideramos como punto de partida un problema aplicado en un aula de 3º grado por Carraher et al (2013) que tiene por objetivo iniciar a los alumnos en el lenguaje algebraico. Trabajamos cooperativamente con las maestras de los dos grados septimos en los que se iba a implementar la propuesta de enseñanza. Realizamos modificaciones sobre el enunciado y el contexto del problema inicial para adecuarlo al grupo de niños de 11 a 12 años considerado. En particular, atendiendo a la sugerencia de una de las docentes, modificamos "cajas de caramelos" por "cajas con gogos[1]", que resulta más significativo para este grupo de niños.

PROPUESTA DE ENSEÑANZA

La propuesta que presentamos fue diseñada para dos grados de septimo de una escuela primaria de la ciudad de Santa Fe (Argentina). Los alumnos de dichos cursos han trabajado previamente gráficos cartesianos. No han abordado nociones algebraicas durante su escolaridad.

Actividad 1: El problema de los gogos de Pablo y Juan

Figura 1. El problema de los gogos de Pablo y Juan,

El docente plantea oralmente la siguiente situación, sosteniendo en sus manos las dos cajas iguales que se muestran en la Figura 1.

"Vamos a suponer que estas cajas pertenecen a un tal Pablo y un tal Juan. Tienen gogos adentro. Yo voy a pasar las cajas por acá, no pueden abrirlas, las pueden tocar, hacerlas sonar y las van pasando. Pablo y Juan tienen la misma cantidad de gogos adentro de sus cajas. Venían coleccionando y llegaron a juntar la misma cantidad de gogos. La cuestión es que Pablo hoy en el recreo ganó tres gogos más. La pregunta es la siguiente: ¿Cuántos gogos tiene Pablo y cuántos gogos tiene Juan?"

Después de plantear la pregunta y explicar nuevamente la situación, si fuese necesario, se destina un tiempo para que los alumnos piensen su respuesta.

1. Los gogos son muñecos pequeños de plástico de diferentes colores que los niños utilizan para jugar. Se pueden observar tres de ellos en la Figura 1.

Luego, el docente escribe en el pizarrón las respuestas de los alumnos organizándolas en una tabla como la que sigue:

Número de gogos de Pablo	Número de gogos de Juan
10	13
3	6
7	13

A los alumnos que no especificaron una cantidad determinada, les pide que indiquen valores posibles, que realicen una predicción.

A continuación, añade una columna a la tabla para colocar el resultado de la diferencia entre el número de gogos de Pablo y Juan.

Número de gogos de Pablo	Número de gogos de Juan	Diferencia
10	13	3
3	6	3
7	13	6

En esta instancia, es probable que algunos alumnos identifiquen pares de valores que no son correctos. El docente promueve la discusión sobre estos casos para que los alumnos justifiquen sus respuestas. La idea es que puedan precisar que si bien en principio Pablo y Juan pueden tener cualquier número de gogos, una vez que se indica un valor para uno de ellos, el otro no puede tomar cualquier otro valor. De este modo, se habilita la aparición de la noción de dependencia entre estas dos variables.

El docente pregunta a los alumnos si hay alguna manera de escribir esta relación. Por ejemplo: "*Si en principio Pablo puede tener cualquier número de gogos,* ¿cómo lo podríamos indicar? (escucha las respuestas de los alumnos para ver si piensan en la posibilidad de utilizar una letra), *podríamos decir N gogos ¿les parece que lo podríamos indicar así?* (escribe N en la celda que corresponde al número de gogos de Pablo). *Entonces ¿cómo podríamos escribir el número de gogos de Juan?"* (invita a los alumnos a responder la pregunta y explicar sus respuestas)

Justificación de la actividad

Esta tarea se plantea con el objetivo de introducir el lenguaje simbólico para expresar de alguna manera lo que "se sabe" sobre el número de gogos de Pablo y Juan, teniendo en cuenta que lo único que se conoce es la relación entre las cantidades de gogos de cada uno y eso es lo que se termina expresando en símbolos.

Si bien el problema en principio parecería tener como fin la realización de predicciones numéricas específicas, la meta final es que los alumnos puedan identificar características generales a partir de los ejemplos particulares propuestos. De algún modo, se pretende identificar el término general de dos sucesiones de números naturales (“número de gogos de Pablo” y “número de gogos de Juan”).

El hecho de acompañar el enunciado verbal con los elementos concretos (las dos cajas y los tres gogos) e inclusive promover la circulación de dichos objetos entre los alumnos (que posiblemente a partir de determinadas acciones con las cajas –hacerlas sonar, sopesarlas, etc.- intentarán realizar una predicción lo más ajustada posible a la realidad) tiene que ver con lo planteado anteriormente por los autores que fomentan el álgebra temprana (Carraher et al., 2013). Además, la decisión didáctica de considerar a los gogos para contextualizar el problema responde a la necesidad de proponer una tarea que comprometa a los alumnos por su cercanía con la situación planteada, entendiendo que el contexto influye en las posibilidades de construir el sentido de las nociones involucradas (Sadovsky, 2005).

Actividad 2: Lenguaje coloquial y simbólico sobre el número de gogos

Primera parte: Trabajo en parejas

Si le llamamos N al número de gogos de Pablo, completa los espacios en blanco de la siguiente tabla para expresar el número de gogos de otros compañeros de Pablo.

Compañero	Número de gogos en palabras	Número de gogos en símbolos
Franco	Tiene 2 gogos menos que Pablo	
Joaquín	Tiene la mitad de las gogos que tiene Pablo	
Andrés		5.N
Lautaro	Tiene dos gogos más que el triple de la cantidad de gogos de Pablo.*	
Nicolás		2.N-1

Segunda parte: Trabajo colectivo

Se realiza la puesta en común de la resolución de la actividad. El docente promueve el desarrollo de explicaciones y justificaciones por parte de los alumnos sobre sus propias respuestas y las de sus compañeros.

Justificación de la actividad

Esta actividad se plantea con el objetivo de reforzar la posibilidad de expresar una relación (número de gogos de diferentes niños) en símbolos. Para ello se propone la traducción entre el lenguaje coloquial y el simbólico. Este tipo *conversión* de un registro de representación a otro es uno de los aspectos mencionados como relevantes para acceder a los objetos matemáticos (Duval, 2008) y en particular, para favorecer la compresión de trabajo algebraico (Socas et al., 1996).

Por otro lado, la puesta en común de las resoluciones de la actividad puede ofrecer un espacio propicio para:

- el *tratamiento* de un mismo sistema de representación al observar dos o más formas de expresar lo mismo (escrituras equivalentes).
- revisar las propiedades de las operaciones en el conjunto de los números naturales al analizar la equivalencia entre diferentes escrituras como por ejemplo 3.N +2 y 2+3.N o entre 2.N -1 y 1 – 2.N.

De modo que esta tarea favorece el tratamiento y conversión de registros de representación (Duval, 2008) y la articulación con otros temas del currículo propuesto por Carraher et al. (2013) como uno de los aspectos a considerar al momento de abordar el álgebra temprana. Respecto al último punto cabe destacar que si bien los alumnos han trabajado previamente con las propiedades de las operaciones, nunca las han utilizado para justificar la equivalencia de escrituras algebraicas.

Actividad 3: El problema incompleto

Primera parte: Trabajo individual

Del problema siguiente se borró una parte:

Se sabe que Mateo tiene		gogos que tiene Pablo.

Un alumno que intentó resolverlo armó una tabla como la que sigue con los valores posibles para los gogos de Pablo y Mateo:

Número de gogos de Pablo	Número de gogos de Mateo
8	4
4	2
6	3
12	6

a) Completa el enunciado del problema.
b) ¿Cómo se podría indicar cuántos gogos tiene Mateo si Pablo tiene N gogos?

Justificación de la actividad

Esta tarea pretende generar la articulación entre diferentes registros de representación. Además, la resolución de la actividad supone la caracterización de la relación entre el número de gogos de Pablo y Mateo para deducir el término general de cada sucesión de números naturales, propiciando nuevamente la identificación de regularidades entre los pares de valores numéricos dados. También puede dar lugar a diferentes maneras de expresar lo mismo (tanto en forma coloquial como simbólica).

La propuesta de enseñanza continúa con tareas que involucran el registro gráfico, pero que, por cuestiones de extensión, omitimos en esta artículo.

CONSIDERACIONES FINALES

Las tareas presentadas en este artículo tienen como propósito iniciar a los alumnos en el álgebra de una manera alternativa al tratamiento habitual. El problema de los gogos plantea una situación en la que el lenguaje algebraico se utiliza para plasmar la relación que existe entre dos variables de una manera más eficaz que mediante el uso de números concretos que ejemplifiquen tal relación. Esto posibilita, por un lado, que los estudiantes perciban que la relación expresada en símbolos alcanza un nivel de generalidad tal, que incluye a las predicciones particulares que realizaron. Por otro lado, este tipo de situaciones promueven la construcción del sentido del lenguaje algebraico, ya que el mismo surge como herramienta *necesaria* para poder responder a las cuestiones planteadas (Sessa, 2005; Arcavi, 2013).

Entendemos que “el diseño curricular debe crear problemas para los cuales ninguna técnica preaprendida sea útil, y el alumno se vea obligado a movilizar su comprensión de los conceptos y los conecte con otro conceptos conocidos” (Arcavi, 1999, p. 44). Por tal motivo, en la propuesta de enseñanza se fomenta la estimación (al predecir el número de gogos en las cajas), el tratamiento y la conversión de registros de representación (Duval, 2008), la formulación de argumentos y explicaciones sobre las respuestas dadas (Sessa, 2005), la articulación con conocimientos previos (como las propiedades de las operaciones) y el uso del soporte contextual (Carraher et al, 2013) para iniciar el trabajo algebraico, en lugar de pretender una única respuesta mecánica.

El modo en el que se inicia el álgebra escolar cobra especial relevancia, teniendo en cuenta que exige una determinada postura y una serie de decisiones didácticas que determinarán qué aspectos se van a profundizar y cuáles serán dejados de lado o tratados superficialmente. La perspectiva adoptada influirá, por tanto, en la relación que los alumnos puedan establecer con el álgebra y el sentido que le otorguen a la misma. Consideramos, por este motivo, que resulta de interés plantear propuestas para iniciar el álgebra en la escuela, que promuevan no sólo la comprensión y uso de expresiones simbólicas, sino también, la producción de argumentos que justifiquen su utilización y el sentido que tiene la misma en el desarrollo de la matemática.

REFERENCIAS

Arcavi, A (2013). Reflexiones sobre el álgebra escolar y su enseñanza. En L. Rico, M. C. Cañadas, J. Gutiérrez, M. Molina e I. Segovia (Eds.), *Investigación en Didáctica de la Matemática. Homenaje a Encarnación Castro*. Granada: Editorial Comares.

Arcavi, A. (1999) …Y en matemáticas, los que instruimos ¿qué construimos? *Números,* 38, 39-56. Recuperado el 12 de junio de 2015, de: http://www.sinewton.org/numeros/numeros/38/Articulo04.pdf

Barrio, E., Lalanne, L. y Petich A. (2010) *Entre aritmética y álgebra: un camino que atraviesa los niveles primario y secundario. Investigaciones y aportes.* Buenos Aires: Novedades Educativas.

Carraher, D., Schliemann, D. y Schwartz, J. (2013). ¿Álgebra en la escuela primaria? En C. Broitman (comp.), *Matemáticas en la escuela primaria (II). Saberes y conocimientos de niños y docentes,*121-167. Buenos Aires: Paidós.

Chevallard, Y., Bosch, M. y Gascón, J. (2000). *Estudiar matemáticas. El eslabón perdido entre enseñanza y aprendizaje* (2da ed.). Barcelona: Horsori.

Duval, R. (2008) Eight problems for a semiotic approach in mathematics education. En L. Radford, G. Schubring y F. Seeger (Eds.) *Semiotics in Mathematics Education*. *Epistemology, History, Classroom and Culture*, 49-62. Rotterdam: Sense Publishers.

Moreno, I. y Castellanos L. (1997). Secuencia de enseñanza para solucionar ecuaciones de primer grado con una incógnita. *Revista EMA 2*(3), 247-258.

Ramírez García, M., Rodríguez Marcos P. (2011) Interpretaciones del signo igual. Un estudio de libros de texto. *Revista UNIÓN, 26*, 41-55.

Sadovsky, P. (2005). *Enseñar Matemática hoy. Miradas, sentidos y desafíos*. Buenos Aires: libros del Zorzal.

Schliemann, A., Carraher, D. y Brizuela, B. (2011). *El carácter algebraico de la aritmética. De las ideas de los niños a las actividades en el aula.* Buenos Aires: Paidós.

Sessa, C. (2005) *Iniciación al estudio didáctico del Álgebra. Orígenes y perspectivas*. Buenos Aires: Libros del Zorzal.

Socas, M., Camacho, M., Palarea, M. y Hernández, J. (1996) Iniciación al álgebra. Matemáticas: cultura y aprendizaje. Madrid: Síntesis.

Aprendiendo a subitizar cantidades con el *rekenrek* en un sistema online para el aprendizaje de las matemáticas

Carlos de Castro Hernández
carlos.decastro@uam.es
Universidad Autónoma de Madrid

Resumen: *Propuesta de actividades desarrollada con Smartick, sistema para el aprendizaje de las matemáticas online, dirigidas al uso de configuraciones numéricas y al aprendizaje de la subitización conceptual con el* rekenrek*. Esta propuesta, para alumnos de 4 a 7 años, constituye una iniciación a la aritmética y a la resolución de problemas verbales con un modelo visual que complementa al conteo en la iniciación en el aprendizaje numérico.*
Palabras clave: *Aritmética, conteo, educación infantil, resolución de problemas, sistemas de aprendizaje online, subitización, visualización.*

Learning to subitize quantities with the *rekenrek* in an online mathematics learning system

Abstract: *Proposal of activities developed with Smartick, an online system for the learning of mathematics, aiming at the use of number arrays and the learning of conceptual subitizing with the* rekenrek*. This proposal, for students from 4 to 7 years, is an introduction to arithmetic and solving word problems with a visual model that complements the use of counting in the initial learning of numbers.*
Keywords: *Arithmetic, counting, early childhood, problem solving, online learning systems, subitization, visualization.*

INTRODUCCIÓN

En este artículo presento una serie de actividades *online* para el uso de configuraciones numéricas, el aprendizaje de la subitización, y el uso de un ábaco especial holandés, el *rekenrek*, como modelo manipulativo y visual para la iniciación al cálculo. Un concepto clave para comprender la propuesta es el de subitización. La subitización consiste en reconocer de forma súbita (repentina, inmediata, instantánea), de un golpe de vista, e indicar el número de objetos que hay en una colección. La subitización es un procedimiento de cuantificación diferente y complementario al conteo. Hay dos tipos distintos de subitización: si reconocemos uno, dos o tres objetos (Fischer, 1992), de un vistazo, debido a que son muy pocos y esto nos permite controlar el número sin contar, hablamos de *subitización perceptiva*; si reconocemos un número mayor de objetos, gracias a su disposición espacial, por formar una figura reconocible, estamos ante el caso de una *subitización conceptual* (Clements, 1999). La peculiaridad de la propuesta que presento reside en que, pese a la importancia capital de la subitización conceptual en la iniciación al cálculo, tratamos con un contenido "invisible" en el currículo, que no aparece en el mismo, lo cual incide negativamente en su enseñanza.

Las actividades que configuran esta propuesta de "ideas para el aula" han sido diseñadas para *Smartick*, método programado *online* para el aprendizaje de las matemáticas, para estudiantes de 4 a 14 años (http://www.smartick.es/). *Smartick* se utiliza en sesiones diarias de 15 minutos. Partiendo de un cuestionario inicial, para cada nuevo alumno se genera un plan de estudios personalizado que se adapta en tiempo real según las respuestas que va dando el alumno a las tareas planteadas. El sistema cuenta, además de las actividades (que se van corrigiendo de forma inmediata), con problemas resueltos y tutoriales. También hay en el sistema un entorno para el tutor del alumno (padre, madre, profesor, etc.) en que se suministra información sobre la evolución del alumno. El tutor recibe además informes tras cada sesión por correo electrónico.

Todas las actividades que muestro en este artículo están disponibles en la sección de "Recursos didácticos" de Smartick (http://www.smartick.es/matematicas/recursos-didacticos.html), que cuenta con más de 300 actividades del sistema en abierto, que pueden ser utilizadas como recursos en el aula. Además, las actividades pueden ser realizadas fuera de cualquier entorno tecnológico, de forma manipulativa, con un *rekenrek* elaborado de forma casera.

INICIACIÓN EN EL USO DE CONFIGURACIONES

El primer tipo de configuración numérica que utilizan los pequeños desde su primer año de vida es el formado por los dedos de sus propias manos. Es algo muy habitual que, en el entorno familiar, cuando el bebé va a cumplir su primer año de vida, los padres o abuelos le enseñen a mostrar su edad levantando un dedo como respuesta automatizada a la pregunta: ¿Cuántos años tienes? Mostrar cantidades con las manos tiene una función en el aprendizaje numérico: refuerza la idea de cardinalidad; esto es, que la palabra "tres" representa globalmente a los tres dedos levantados. Autores como Brissiaud (1992, 1993) han elaborado propuestas de trabajo para niños de educación infantil en las que se hace un uso sistematizado de los dedos de las manos para representar números.

Figura 1. Actividades de iniciación en el uso de configuraciones.

Con posterioridad al uso de los dedos, aparecen las configuraciones de los dados, dentro de juegos tradicionales de tablero como el parchís o la oca. Este tipo de juegos de conteo empieza a ser muy importante de los 4 a los 6 años, edades entre las que aumenta más su uso (Secadas, 2004). También de 4 a 6 años comienzan a utilizarse juegos de cartas para el aprendizaje de las matemáticas (Kamii, 1995). Dedos, dados, y cartas, proporcionan una aproximación visual, a través de sus configuraciones características, al aprendizaje del número, que complementa al conteo. Mientras en el conteo se trata a las colecciones de objetos como agregados de unidades, a través de la correspondencia uno a uno entre objetos y numerales, cuando usamos configuraciones nos acercamos a la cantidad de objetos de forma global: el cuatro se asocia a la figura que forman los vértices del cuadrado. En el conteo predomina el procedimiento, ligado a los principios subyacentes en el mismo; en la configuración, los procesos de visualización.

En la Figura 1, observamos tres tipos de actividades de Smartick con configuraciones. Al principio, esperamos que la asociación entre las diferentes representaciones numéricas se realice a través del conteo. Poco a poco, con la práctica y el uso continuado, cada configuración se va interiorizando. Se forma la imagen mental que se asocia a un número concreto. La imagen de una mano extendida y otra junto a ella con un dedo levantado, o la imagen de dos filas paralelas con tres objetos en cada una, evocan para nosotros inmediatamente el número seis, cuando hemos tenido experiencia suficiente con estas configuraciones. Además, en la Figura 1 vemos dos formas diferentes de poner el dos con los dedos, o se presentan los dados con distintas orientaciones, con el fin de que el niño no asocie de forma rígida un número con una configuración de dedos o una orientación determinada.

EL *REKENREK*: UN MODELO VISUAL PARA LA INICIACIÓN AL CÁLCULO

Usar dados y cartas tiene un innegable interés, pero también un inconveniente. Aunque algunas configuraciones sugieren relaciones aritméticas como, por ejemplo, el 6 del dado sugiere las descomposiciones 6 = 3 + 3 o 6 = 2 + 2 + 2, dados y cartas no permiten desarrollar un enfoque visual sistematizado para la suma y la resta. En efecto, si juntamos dos dados con un dos y un tres en cada uno de ellos, no percibimos la configuración correspondiente al cinco. Aquí es donde intervienen materiales didácticos formados por configuraciones, tan antiguos como las tablas con patrones de Stern (Stern y Stern,

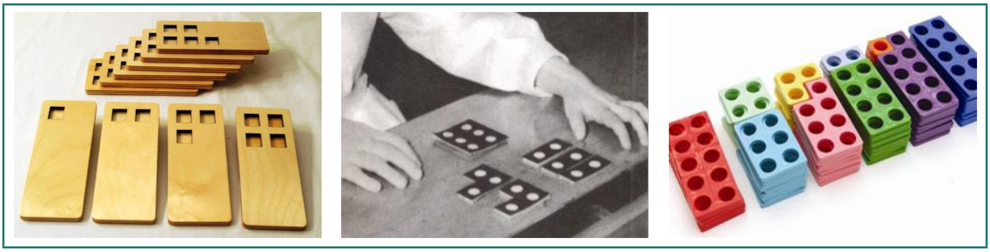


Figura 2. Las tablillas de Stern, placas de H. Lebert, y el Numicon.

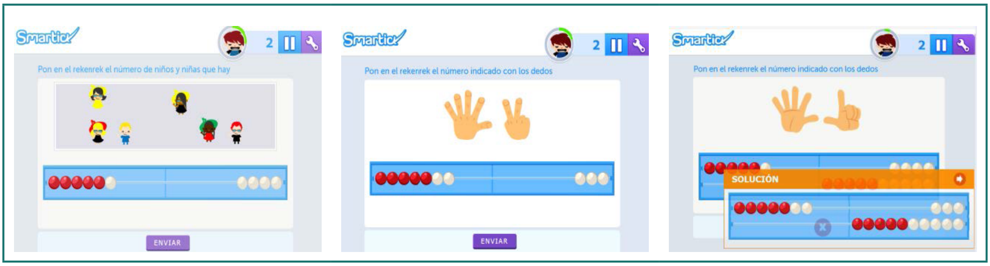


Figura 3. Primeras actividades con el rekenrek.

1949), o las placas de Herbinière-Lebert (Mialaret, 1955/1967) (Figura 2), en que en lugar de las configuraciones propias de los dados se utiliza una disposición de dos en dos, denominada por Stern y Stern "patrones estructurales aritméticos". Una versión actual inspirada en estos dos materiales son las configuraciones utilizadas en el Numicon (Figura 2, derecha). En todos estos materiales, si juntamos la configuración del 7 y la del 3, por ejemplo, vemos la configuración del 10 (ver las formas rosa y amarilla del Numicon).

En *Smartick* se utiliza el *rekenrek* como modelo visual para el aprendizaje de la aritmética. El *rekenrek* es un ábaco desarrollado por Adrian Treffers, investigador del Instituto Freudenthal de Holanda (Blanke, 2008). *Rekenrek* significa "rejilla de cálculo" (en inglés, recibe el nombre de arithmetic rack, number rack o mathrack). Al igual que en el caso de las Regletas con tapa (Brissiaud, 1993), es un material que copia las configuraciones de las manos. Como vemos en la Figura 3, en el centro, igual que el 7 se muestra con las manos con una mano y dos dedos de la otra, en el *rekenrek* representamos el 7 con cinco cuentas rojas (que corresponden con 5 dedos de una mano) y dos cuentas blancas (dos dedos de la otra). Esta asociación del material con las manos persigue dos objetivos: en primer lugar, hacer un aprendizaje significativo basado en el conocimiento que tenemos de las manos para representar cantidades; en segundo lugar, ir poco a poco prescindiendo del uso de los dedos, que se sustituyen por el *rekenrek*.

En la Figura 3, observamos distintos tipos de actividad que se realizan con un *rekenrek* virtual. En ellas utilizamos el *rekenrek* para indicar cuántos hay y se hace explícita la relación de este material con las manos para mostrar cantidades. También incluyo un ejemplo de cómo el sistema proporciona una retroalimentación inmediata cuando se comete un error.

Figura 4. Las actividades con limitación en el tiempo de exposición.

Figura 5. La banda numérica adaptada al rekenrek.

DEL CONTEO A LA SUBITIZACIÓN

Cuando trabajamos con configuraciones, pasado un tiempo, llegamos a asociar la configuración con la cantidad, sin necesidad de contar. Esto es lo que ocurre cuando los niños, después de contar repetidas veces los cinco puntos en la cara del dado, reconocen la figura característica formada por los cuatro vértices del cuadrado con el punto en medio y saben ya que han obtenido el 5. En Smartick, después de muchas actividades en que se permite el conteo, pasamos a un nuevo bloque de actividades en que las se limita el tiempo de exposición de las cantidades a dos segundos. En la Figura 4, vemos un icono morado que debemos clicar para iniciar la actividad. A continuación, aparece una imagen del *rekenrek*, que desaparece a los dos segundos (Figura 4, derecha). En la parte de debajo de la actividad, disponemos de una banda numérica en la que debemos dar la respuesta. Como se aprecia en la Figura 5, pasados los dos segundos de exposición, la imagen con el 7 en el *rekenrek* desaparece. A los niños no les da tiempo a contar, de modo que la única forma de acertar es a través de la subitización conceptual.

Como podemos ver en la Figura 5, la banda numérica que utilizamos en estas actividades está adaptada al *rekenrek*, de modo que permite representar una cantidad (digamos el 7) de tres formas distintas: a) reconociendo el numeral "7"; b) contando 7 casillas, c)

Figura 6. Problema de cambio esquematizado y suma horizontal.

Figura 7. Ampliación de los significados de la suma.

subitizando siete casillas, aprovechando que las casillas están coloreadas como el *rekenrek*. Por otra parte, un aspecto llamativo al usar la banda numérica virtual, es que utilizamos un cursor ventana, que enfatiza una lectura cardinal, pero al ir desplazando el cursor las 7 casillas quedan oscurecidas, y las cifras en blanco, enfatizando una lectura acumulada de las siete casillas iniciales. Esta distinción entre los dos tipos de lectura de una banda numérica se puede ver en Brissiaud (1993).

LA MODELIZACIÓN EN RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS Y LAS OPERACIONES ARITMÉTICAS

En las actividades anteriores hemos aprendido a establecer relaciones básicas entre distintos tipos de representaciones numéricas. También hemos pasado del conteo a la subitización. Después de aprender el manejo básico del *rekenrek*, podemos usarlo como modelo para resolver problemas aritméticos y para hacer operaciones sencillas. En la Figura 6 se plantea el problema: “Si el *rekenrek* marca el 5 y añadimos 2 cuentas, ¿qué número marcará?” Este tipo de problema aparece repetido con diferentes cantidades de cuentas.

Figura 8. Problema de cambio decreciente esquematizado y resta horizontal.

Figura 9. Ampliación de los significados de la resta.

Aunque puede considerarse un problema aritmético verbal, se trata de un problema “esquematizado” cuyo enunciado no evoca una situación de la vida ordinaria, sino que presenta un problema concreto sobre el manejo del *rekenrek*. El objetivo de este problema es establecer el significado informal básico para la suma (añadir), previamente a la introducción formal de la suma, en una actividad posterior (Figura 6, derecha). En la Figura 7, tratamos, con otros problemas de este tipo, de ampliar los significados de la suma, usando esquemas de combinación, comparación e igualación.

Igualmente, en la resta se comienza con un problema de cambio decreciente con incógnita en la cantidad final. Se trata de un problema de quitar “esquematizado”. En la Figura 8, vemos el ejemplo de poner 9 cuentas en el *rekenrek* y quitar 2. Este es el significado básico que planteamos para la resta (quitar). Posteriormente, pasamos a actividades de resta escritas en horizontal (Figura 8, derecha), que pueden modelizarse también en el *rekenrek*, como se hace en el problema anterior.

Después de introducir la resta, presentamos problemas esquematizados de combinación, comparación e igualación que se resuelven con la resta. Ejemplo de este tipo de problemas (de comparación) lo vemos en la Figura 9, donde ejemplifico en el *rekenrek* cómo puede modelizarse cada uno de los problemas. A continuación, los problemas aritméticos verbales esquematizados dejan paso a problemas verbales que evocan contextos de la vida cotidiana.

REFLEXIONES FINALES

Las actividades que he presentado pueden hacerse con niñas y niños de 4 a 6 años, pero no agotan el uso del *rekenrek*. La continuación natural es el uso de este modelo visual para el aprendizaje de estrategias de cálculo mental, como el paso al diez o el uso de dobles. El trabajo con el *rekenrek* puede contribuir a dar respuesta a un problema que nos encontramos a diario en las aulas de educación primaria: ¿Cómo conseguir que los niños dejen de utilizar los dedos para contar y pasen a utilizar estrategias de cálculo mental? Mientras que el conteo de objetos resulta fundamental para el aprendizaje numérico en educación infantil, y al inicio de la educación primaria, llega un momento en que los pequeños deben calcular con fluidez, usando estrategias más eficientes que las de conteo. Todo el trabajo de visualización que se hace con configuraciones numéricas constituye un intento de respuesta a esta problemática.

Retomando ideas de la introducción, pienso que es necesario que en los currículos de educación infantil y primaria aparezca explícitamente la subitización, como un procedimiento de cuantificación más, junto con el conteo, la correspondencia uno a uno, o la estimación. Cuando un conocimiento no tiene el estatus de "contenido a estudiar, presente en el currículo" es muy difícil que se incluya de forma adecuada en el trabajo en el aula. Cada vez hay más propuestas, como la de *Smartick* que he presentado aquí, la de Clements y Sarama (2009), o la de materiales como el Numicon, que inciden en un desarrollo sistematizado de la subitización conceptual a través del uso de diferentes configuraciones.

Con respecto a los materiales manipulativos, a medida que se van desarrollando recursos online para el aprendizaje de las matemáticas, se establecen comparaciones más ricas y matizadas entre los materiales manipulativos físicos y sus análogos virtuales. Así, por ejemplo, en algunos geoplanos virtuales aparece coloreado el interior de la figura delimitada por la goma elástica virtual, y esto facilita la consideración de una figura como región del plano, que no debe confundirse con su borde. También en la banda numérica que hemos visto en la Figura 5, las casillas se van coloreando al arrastrar el cursor, permitiendo varias lecturas alternativas y complementarias en el modelo que enriquecen la concepción infantil del número.

Espero que las ideas que he presentado en este artículo sirvan de estímulo a maestras y maestros, para introducir la subitización y el uso de configuraciones en las aulas, y para incorporar cada vez más recursos didácticos tecnológicos, teniendo una idea clara de lo que aportan dichos recursos a los primeros aprendizajes numéricos infantiles.

REFERENCIAS

Blanke, B. (2008). *Using the* rekenrek *as a visual model for strategic reasoning in mathematics*. Salem, OR: The Math Learning Center. Recuperado de:
mathlearningcenter.org/media/Rekenrek_0308.pdf

Brissiaud, R. (1992). A toll for number construction: Finger Symbol Sets. En J. Bideaud, C. Meljac y J.P. Fischer (eds.), *Pathways to number: Children's Developing Numerical Abilities* (pp. 191-208). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Brissiaud, R. (1993). *El aprendizaje del cálculo: Más allá de Piaget y de la teoría de los conjuntos*. Madrid: Visor.

Clements, D. H. (1999). Subitizing: What is it? Why teach it? *Teaching Children Mathematics, 5*(7), 400-405.

Clements, D.H. y Sarama, J. (2009). *Learning and teaching early math: The learning trajectories approach*. New York: Routledge.

Fischer, J.P. (1992). Subitizing: The discontinuity after three. En J. Bideaud, C. Meljac y J.P. Fischer (eds.), *Pathways to number: Children's Developing Numerical Abilities* (pp. 191-208). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Kamii, C. (1995). *El número en la educación preescolar*. Madrid: Visor.

Mialaret, G. (1955/1967). *Pedagogía de la iniciación en el cálculo*. Buenos Aires: Kapelusz.

Secadas, F. (Coord.) (2004). *Contar es fácil: Fundamentos psicopedagógicos del aprendizaje del cálculo*. Madrid: CEPE.

Stern, C. y Stern, M.B. (1949). *Children discover arithmetic: An introduction to structural arithmetic*. New York: Harper & Row, Publishers.

Épsilon - *Revista de Educación Matemática* *2015, Vol. 32(2), nº 90, 59-69*

El proceso de construcción del saber pedagógico en Educación Matemática: el caso de María Antònia Canals

María Sotos
Universidad de Castilla-La Mancha

Mª Carmen López
Universidad de Salamanca

Resumen: *Presentamos el proceso de construcción del saber pedagógico de la profesora M. Antònia Canals i Tolosa, utilizando el modelo de los saberes docentes de Tardif. Dicho modelo destaca la importancia de los saberes experienciales y del proceso de reflexión compartida, necesario para construir el saber pedagógico. En el caso de la profesora Canals, la importancia de esos dos elementos es evidente, y su análisis permite indagar en la historia de la educación en general, y de la educación matemática en particular.*
Palabras clave: *Saber pedagógico, Historia de la Educación, Profesorado, María Antònia Canals, Educación matemática.*

The construction process of pedagogical knowledge in mathematics education: the case of Maria Antònia Canals

Abstract: *We present the construction process of pedagogical knowledge of the professor M. Antònia Canals i Tolosa, using the model of teachers knowledge of Tardif. This model emphasizes the importance of experiential knowledge and shared reflection process necessary to build pedagogical knowledge. In the case of Professor Canals, the importance of these two elements is clear, and their analysis allows to investigate the history of education in general and mathematics education in particular.*

Keywords: *Pedagogical Knowledge, History of Education, Teachers, Maria Antònia Canals, Mathematics Education.*

INTRODUCCIÓN

El juego de la historia es un juego de reconstrucción. No en el sentido de la recomposición de algo que tiempo atrás ya estuvo construido así, sino en el de la reelaboración, a partir de la interpretación de ciertas pruebas, de un nuevo relato que también podría haber ocurrido. Para ello, las pruebas tienen que haber perdurado hasta hoy, y en eso tienen ventaja los objetos materiales.

Así, la historia de la educación suele ser propensa a recurrir a lo que con más facilidad perdura: las leyes y los libros y materiales escolares, cuando realmente se sabe que somos las personas las que realizamos el acto educativo propiamente dicho, y por eso la educación es una ciencia social. En este sentido, no se puede hacer historia de la educación sin intentar rehacer la historia de sus sujetos: el alumnado y los docentes. Como afirman Bracho-López *et al.* (2014), es notorio el gran número de trabajos presentados en congresos que tienen como hilo conductor las historias de vida asociadas a la formación del profesorado y a la historia de la educación matemática. Esta línea de investigación suele denominarse como narrativas de vida.

En este trabajo hemos tomado como punto de partida el caso de una maestra, Maria Antònia Canals i Tolosa, como ejemplo de cómo el análisis del proceso de construcción del saber pedagógico de los docentes es una manera de indagar en la historia de la educación matemática. Porque la historia hace al docente en la misma medida en que este hace a la historia.

Para desarrollar esa perspectiva biográfica, hemos recogido información de la trayectoria personal de Maria Antònia Canals, contruyendo un relato de vida mediante 10 documentos publicados sobre M. A. Canals, 19 entrevistas y 5 cartas remitidas por ella y 10 entrevistas a otras personas relacionadas con la profesora.

Aquí no presentamos dicho relato de vida, pero lo utilizamos para poder establecer cómo construye M. A. Canals su propio saber pedagógico. Este concepto de saber pedagógico procede del marco teórico de la teoría de los saberes docentes de Tardif (2004), en donde plantea este concepto, que consiste en:

> […] una construcción propia dentro del sujeto, que lleva a cabo como resultado de las interacciones entre sus disposiciones internas y el contexto cultural y social de manera activa y participativa, que le permite organizar, interpretar y reestructurar el conocimiento con la experiencia, los saberes previos y la información que de diversas fuentes recibe. (Díaz, 2005, p. 6)

En ese saber pedagógico está incluida la información recibida durante la formación académica, pero también otros saberes previos, así como las experiencias acumuladas por cada sujeto. Y dicho saber pedagógico no es el resultado de la suma de estos factores, sino de determinadas interacciones entre sus disposiciones internas y el contexto sociocultural.

De manera mucho más analítica, Tardif ha distinguido entre diferentes saberes docentes que proceden de diferentes fuentes. En primer lugar señala los saberes profesionales, que son el conjunto de saberes transmitidos por los centros de formación del profesorado.

En segundo lugar habla de los saberes disciplinarios, que “son los saberes de que dispone nuestra sociedad que corresponden a los diversos campos del conocimiento, en formas de disciplinas, dentro de las distintas facultades y cursos” (Tardif, 2004, p. 30).

En tercer lugar están los saberes curriculares, que “se presentan en forma de programas escolares (objetivos, contenidos, métodos) que los profesores deben aprender a aplicar” (Tardif, 2004, p. 30).

Y finalmente los saberes experienciales o prácticos:

> […] los mismos maestros, en el ejercicio de sus funciones y en la práctica de su profesión, desarrollan saberes específicos, basados en su trabajo cotidiano y en el conocimiento de su medio. Esos saberes brotan de la experiencia, que se encarga de validarlos (Tardif, 2004, p. 30).

Los tres primeros tipos de saberes son de carácter externo, aunque el docente termine por incorporarlos. Determinadas instituciones son las encargadas de organizarlos y transmitirlos, mientras que los saberes prácticos son producidos en el interior del propio docente, a partir de sus experiencias. Es más, Tardif señala que:

> los saberes experienciales surgen como núcleo vital del saber docente, núcleo a partir del cual los profesores tratan de transformar sus relaciones de carácter exterior con los saberes en relaciones de carácter interior con su propia práctica. En este sentido, los saberes experienciales no son saberes como los demás; están formados, en cambio, por todos los demás, pero traducidos, “pulidos” y sometidos a las certezas construidas en la práctica y en la experiencia (Tardif, 2004, p. 41).

De hecho, son estos saberes prácticos los que forman el núcleo central de la competencia profesional docente, pero sin que necesariamente tengan que considerarse como saberes subjetivos, ya que ese saber experiencial se convierte en saber pedagógico mediante un proceso de reflexión compartido.

> A través de las relaciones con los compañeros y, por tanto, a través de la confrontación entre los saberes producidos por la experiencia colectiva, los saberes experienciales adquieren una cierta objetividad: las certezas subjetivas deben sistematizarse, a fin de transformarse en un discurso de experiencia, capaz de informar o de formar a otros docentes y de proporcionar una respuesta a sus problemas. (Tardif, 2004, p. 40)

Ya en el ejemplo de Maria Antònia, vemos que la construcción de su saber pedagógico se produce en unos contextos social y familiar muy particulares.

El contexto social es el de mayor esplendor de la renovación pedagógica en Catalunya, y para caracterizarlo nos tenemos que referir a la Escuela Nueva. Maestros/as y gestores educativos como Artur Martorell, Eladi Homs, Rosa Sensat o Alexandre Galí, fueron responsables del auge de la Escuela Nueva y, en particular, de la implantación del modelo pedagógico de la doctora Montessori en Catalunya.

Para que esto pudiera ocurrir, también se contaba con un ambiente ideológico y cultural en el que jugó un papel destacado el Noucentisme y la Renaixença. Y en el terreno más político e institucional, se contaba con la Mancomunitat dirigida por Prat de la Riba, que diseñó todo un programa escolar en el que se incluían cursos de verano, visitas de estos docentes al extranjero y revistas especializadas. El apoyo institucional al modelo de la Escuela Nueva, fruto del interés de la burguesía catalana por procurar a sus hijas/os una educación que desarrollase todas sus capacidades, sirvió para que proliferasen centros escolares inspirados en ese modelo.

Había otras experiencias escolares diferentes, como la Escuela Moderna de Ferrer i Guardia, pero la Escuela Nueva fue la que daba mejor respuesta a los intereses de la burguesía catalana. Esta burguesía estaba interesada en una educación que desarrollase la creatividad y la capacidad de innovación, pero sin descuidar la educación moral de las personas.

A esto hay que añadir el contexto familiar, ya que se trataba de una familia con un alto nivel de dedicación a la enseñanza y a la cultura. En ella destacan tres nombres propios: su padre, su madre y su tía Dolors. Con el primero, pese a que falleció cuando ella sólo contaba con ocho años de edad, comparte la pasión por las matemáticas, de la segunda recibe un conjunto de valores morales que contribuyen a configurar su propia personalidad, y de su tía obtiene una sólida formación sobre el método Montessori, primero como alumna de su escuela y luego como asesora particular.

En ese entorno histórico es en el que se desarrolla la socialización primaria de Maria Antònia Canals, coincidiendo los principios pedagógicos del contexto familiar y del contexto escolar. Maria Antònia era una niña que asistía a clases en la escuela Montessori que dirigía su tía y, en su casa, la educación familiar también estaba presidida por las ideas de libertad y responsabilidad tan típicas de la Escuela Nueva. Esto contribuye a que centre su ámbito profesional entre las matemáticas y la educación, y a que desarrolle ciertos elementos de su personalidad, que juegan un papel destacado en las elecciones más arriesgadas de su trayectoria biográfica.

Su primer modelo docente es el de su tía Dolors Canals, la maestra Montessori con la que estuvo los primeros años de escolarización, y a la que siempre ha considerado un referente profesional imprescindible. Un buen ejemplo de esto se produce cuando, años más tarde, Maria Antònia conoce por primera vez los bloques lógicos de Z. Dienes, que le entusiasman pero que también entran en conflicto con uno de los principios de Montessori, el de trabajar un sólo concepto a la vez, por lo que no se atreve a usarlos hasta tener el consentimiento de su tía.

Tras el golpe de estado de Franco ese contexto escolar cambia completamente y, tras la muerte de su padre, el resto de la escolarización de Maria Antònia, incluyendo los estudios universitarios de Ciencias Exactas, se desarrolla en un ambiente muy diferente. La escuela franquista sustituye la libertad por la autoridad, la experiencia por la memoria y la creatividad por la rutina. Es un sistema escolar en el que los intereses del niño ya no ocupan un lugar central, el aula deja de ser un laboratorio de pedagogía práctica y la educación moral recibida dista mucho de la que recibe dentro de su familia.

La experiencia le permite comparar ambos modelos y refuerza su adhesión a lo que conocía de la Escuela Nueva. Los recuerdos de esas experiencias educativas (tanto las escolares como las familiares) son siempre muy positivos, y algunos de ellos coinciden con los mejores recuerdos de su padre. A la licenciatura en Ciencias Exactas, añade la formación académica como maestra, que la cursa en la Escuela Normal de Tarragona sin asistir a clase, por lo que hay que suponer que contaba con un escaso saber profesional.

A partir de su formación universitaria, y tras una corta experiencia laboral como profesora de matemáticas en el *Liceo Francés* y en el Instituto de bachillerato *Joan Maragall*, la trayectoria profesional de M. Antònia se desarrolla en dos escuelas ejemplares de la renovación pedagógica catalana de la segunda mitad del siglo XX. Nos referimos a las escuelas *Talitha* y *Ton i Guida*, la primera creada por M. T. Codina y la segunda por M. Antònia, en un contexto de exclusión social que le obligó a innovar para poder adaptarse a esa nueva situación. En ambos casos, la creación de un equipo pedagógico cohesionado y la formación permanente de dichos equipos fueron dos de los aspectos más destacados de esas escuelas.

Teniendo en cuenta todos los elementos anteriores, estamos en condiciones de establecer los diferentes saberes docentes en el caso de Maria Antònia. Los saberes profesionales no responden al modelo de Tardif, ya que no proceden de la institución dedicada a la formación del profesorado, a la que ni siquiera asistió a clase. Pero como M. Antònia siempre ha tenido como referencia profesional el modelo de su tía, esos saberes profesionales podemos equipararlos a los que le transmite su tía Dolors.

Como saber disciplinario, la licenciatura en Ciencias Exactas le sirve para tener una sólida formación, en la que tuvo especial interés por la geometría. Pero como su paso por la universidad fue una experiencia pedagógica totalmente alejada de los principios de la Escuela Nueva, ese período le resulta decepcionante, llegando a rechazar una beca para continuar con el doctorado en Alemania, pues se prometió a sí misma abandonar la universidad al terminar sus estudios y no volver nunca más.

Los saberes curriculares son algo que aprende desde la práctica y de la mano de M. T. Codina, pues, al poco tiempo de terminar sus estudios universitarios, comienzan el proyecto educativo de la escuela *Talitha*, en donde, junto al resto del equipo docente, se encargan de establecer su propio programa escolar. De manera que estos saberes coinciden con el desarrollo de sus saberes experienciales. Si la Escuela Nueva está presente en la vida de M. Antònia desde su inicio, y las escuelas donde desempeña su trabajo de maestra siguen ese mismo modelo, se puede trazar un camino que se origina con la doctora Montessori (a través de su tía Dolors) y que llega hasta M. T. Codina, junto a Alexandre Galí, que es uno de los puentes que conectan la renovación pedagógica catalana de principios del siglo XX con la que vuelve a aparecer a finales de los años 50.

La experiencia en *Talitha* es la que comienza a consolidar el saber pedagógico de Maria Antònia. Es un proyecto educativo nuevo, que hay que construirlo, en su totalidad, con un intenso trabajo de reflexión sobre la acción. Y ese saber pedagógico, que se construye sobre la base del modelo interiorizado durante su socialización primaria, ya es un saber consciente, sobre el que se habla y se discute en las numerosas sesiones de trabajo que desarrollan en esos años. En ese proceso de diseño pedagógico se establecen los ejes fundamentales de la escuela *Talitha*, que se pueden resumir en la siguiente tabla.

Tabla 1. Ejes del Proyecto Educativo. *Escola Talitha*

Educación integral	"Procés que abasta tota la persona. (...) Simplificant, la diferència està a centrar la funció de l'escola en l'adquisició de coneixements —majoritàriament conceptuals— o a proposar-se l'educació de cada alumne a fons i atenent tots els aspectes de la personalitat" (pp. 40-41).
Responsabilidad y libertad	"No es tractava d'un programa o de normes establertes per sempre: calia tenir en compte el desenvolupament de l'escola i el procés de l'entorn social, és a dir, constantment havíem de considerar, estudiar, adaptar" (p. 41).
Relación entre los compañeros de aula	"ERA L'ESBÓS DEL QUE AMB EL TEMPS ANOMENARÍEM L'EDUCACIÓ DE LA SOCIABILITAT, un dels aspectes que, tot i que en aquell moment el ventall de la diversitat era força reduït, també resultava innovador" (p. 42).
Lengua materna y cultura catalanas	"Sempre vàrem pensar que la llengua pròpia era la primera expressió del realisme i de l'atenció a l'alumne que l'escola es proposava" (pp. 42-43).
Atención individualizada	"L'interès per conèixer cada persona, el pes que en el desenvolupament individual tenien el moment evolutiu i el bagatge personal, ens encaminàvem tant a afinar criteris psicològics com a buscar la didàctica adequada per tal que la intervenció fos realment educativa" (p. 44).
Expresión	"Consideràvem l'expressió un mitjà de desenvolupament: com a tal, calia eixamplar les relacions entre l'expressió i tota mena d'adquisicions, com també afavorir que cadascú reforcés tant como fos possible la seva forma d'expressar-se" (p. 45).

Tabla 1. Ejes del Proyecto Educativo. *Escola Talitha* (continuación)

Expresión plástica	"La plàstica ocupava un bon lloc en la pedagogia que s'impartia a *Talitha* i que per damunt de tot es respectava la imaginació de l'infant" (48). (Rifà, 2001, p. 237)
Formación física	"Hem de tenir present que aquesta competència havia quedat assumida per les entitats del règim, de tal manera que la finalitat educativa de qualsevol activitat d'aquest àmbit havia estat pràcticament buidada en la finalitat política" (p. 49).
Adquisición de conocimientos	"Una condició bàsica perquè un coneixement o una descoberta quedin realment incorporats al bagatge personal és la connexió amb els experiències viscudes o amb les que els nois i les noies poden viure i que incorporaran, per tant, al seu lèxic habitual" (p. 49).
Contacto directo con la realidad	"Per als mestres, l'objectiu de proporcionar als alumnes coneixement de primera mà sobre el que havien de saber esdevenia motiu d'obertura, de recerca i d'adequació constants; per als alumnes, contactar amb l'entorn natural i/o social representava l'al·licient de trobar-se en una situació —nova per a la majoria— que esperonava el seu interès i els demanava relacionar-la amb els propis coneixements, de manera que progressivament ampliaven i reestructuraven els esquemes personals, tant mentals com actitudinals" (p. 50).
Lectura	"Factor educatiu molt valorat. Tot i que el nombre de llibres era reduït, ben aviat vàrem trobar la necessitat de diferenciar entre la biblioteca general de l'escola, la de classe i la de la sala de mestres" (p. 50).
Material didáctico gráfico	"Es tractava d'ordenar i organitzar el que podia ser útil per als diferents aprenentatges i que solia consistir en làmines, gravats, il·lustracions, etc., que els mestres aplegàvem" (p. 51).
Juego	"Constituïa un factor de gran valor: atenyia aspectes com l'expressió, la gratuïtat, la creativitat, la sociabilitat, el coneixement i domini d'un mateix, l'actitud davant les normes" (pp. 51-52).
Atención sanitaria	"A partir del curs 1957-58 el pediatra Dr. Jordi Carol Murillo va assumir la responsabilitat de la revisió mèdica anual, amb caire no únicament d'atenció sanitària sinó de prevenció i d'educació per a la salut" (p. 53)

Fuente: Codina, 2007

En palabras de la propia M. Antònia,

[…] me fui con Teresa y otras mujeres entrañables (lo son hoy aun, las que quedan) entre ellas Marta Mata; empezamos, y trabajé en la escuela *Talitha* durante 6 años. Allí aprendí todo lo que sé sobre la educación; aprendí que no se trata de enseñar sino de propiciar que alguien aprenda, descubra, progrese... Y esto es lo que siempre he creído y creo (Canals, entrevista).

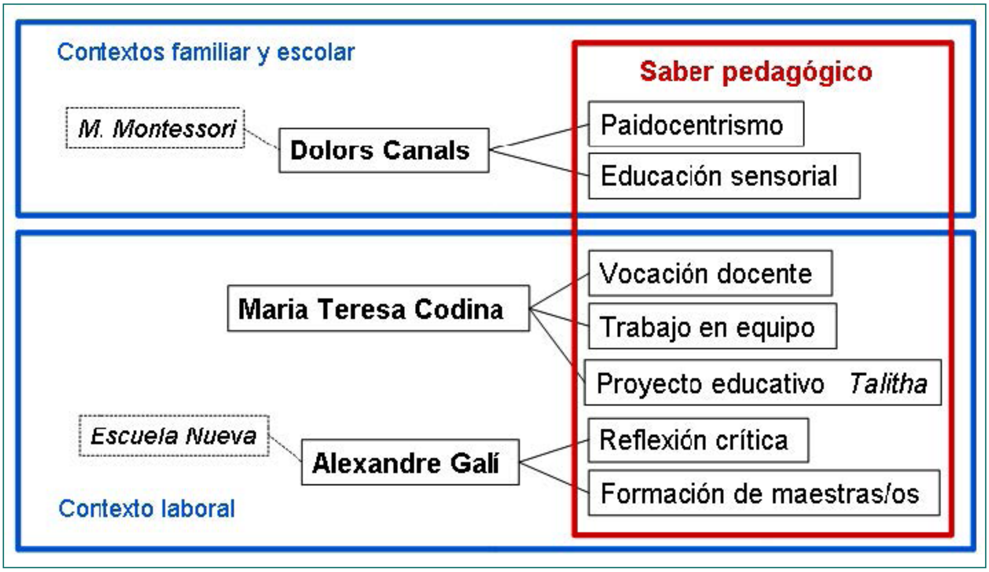


Figura 1. Modelo de *Saber pedagógico* de Maria Antònia Canals

Ese trabajo se realizaba en equipo, en donde se discutían y acordaban todos los temas relacionados con el trabajo escolar. Pero como la experiencia de *Talitha* coincidió con otras escuelas similares, los equipos docentes mantenían contactos permanentes.

> Els mestres de totes aquestes escoles començaren a conèixer-se i a ajudar-se en la preparació del treball. A finals de la dècada, els de *Talitha* i Costa i Llobera, juntament amb els de Santa Anna, Sant Gregori, Andersen i Lys, es trobaven a casa d'Alexandre Galí, en sessions de diverses didàctiques i de temes d'interès per a l'escola, «els dilluns del Sr. Galí». Aquests dilluns funcionaven a partir de la tria prèvia de temes i comportaven presentació, discussió i intercanvis de materials, exemples, etc. (Mata, 2001, p. 53).

Hay que aclarar que los primeros contactos de M. Antònia con el Sr. Galí se produjeron por iniciativa de M. Teresa Codina, cuando comienza a trabajar en *Talitha*. Más adelante se unen docentes de *Costa i Llobera*, en unas sesiones que se desarrollaban los sábados. Cuando se organizan los «lunes del Sr. Galí» que menciona Mata, M. Antònia ya estaba trabajando en *Ton i Guida* y continúa asistiendo, aunque Mata no mencione a *Ton i Guida* en su texto.

Así, cuando M. Antònia organiza la escuela *Talitha*, mantiene como uno de sus puntos básicos la formación de un equipo docente coherente con el proyecto, y con una manera de trabajar en la que realizaban un análisis y una reflexión permanentes sobre su propia práctica (Solà, 2003).

En todo este proceso, que comienza en 1956 y se prolonga hasta 1979, cuando deja la escuela *Ton i Guida*, es en donde M. Antònia objetiva todos sus saberes experienciales para conformar su propio saber pedagógico, que está organizado alrededor de seis características fundamentales.

Las dos primeras proceden de su entorno familiar y escolar, ya que son los dos puntos fundamentales de la obra de Montessori: el paidocentrismo y la educación sensorial. Detrás de estos dos puntos están la teoría de la necesidad de Claparède y el valor que Dewey concede a la experimentación, aunque M. Antònia los elabora a partir del método Montessori. De hecho, todo el planteamiento de la enseñanza de las matemáticas de M. Antònia Canals se organiza a partir de la educación sensorial y sin olvidar que las/os niñas/os son el centro de todo el proceso[1].

Por otra parte, del contexto laboral (las escuelas *Talitha* y *Ton i Guida*) proceden otras cuatro características. Las dos primeras, la vocación y el trabajo en equipo, relacionadas con su trabajo junto a M. T. Codina. En su idea de vocación también juegan un papel importante sus creencias religiosas, pero es la propuesta de M. T. Codina de dirigir el parvulario en la escuela *Talitha,* la que le hace plantearse la educación de manera vocacional, al servicio de la formación de personas libres, críticas y creativas. En ese mismo entorno (*Talitha*) es donde forman un equipo pedagógico que funciona mediante el autoaprendizaje a partir del análisis de su propia práctica escolar.

Y las dos últimas, la reflexión crítica y la formación de docentes, referidas al tipo de trabajo que realizaban junto a Alexandre Galí. Galí era una especie de asesor pedagógico, que reunió a un grupo no muy numeroso de maestras y maestros, con el que mantenían reuniones periódicas en lo que era un espacio de reflexión compartida, de la misma manera que también lo son los numerosos grupos de maestras/os que M. Antònia ha dinamizado. El magisterio del señor Galí consolidó un grupo de docentes preocupados, tanto por la realidad de sus escuelas en particular, como por la realidad del sistema educativo en su conjunto. En esa dinámica, aunque la constitución de la *Associació de Mestres Rosa Sensat* se considera como el inicio del proceso de formación permanente de maestros en el ámbito de ese movimiento de renovación pedagógica, las sesiones con el señor Galí son el precedente inmediato de esa formación[2].

Estas seis características fundamentales se reúnen en las escuelas *Talitha* y *Ton i Guida*, como proyectos educativos integrales, en el que se inscriben otros más concretos como el de la enseñanza de las matemáticas. En este ámbito es notable su preocupación por los materiales manipulables como recurso para la enseñanza de las matemáticas, llegando a elaborar sus propias regletas de colores y con la creación, en 2001, del Gabinet de Materials i de Recerca per a la Matemàtica a l'Escola (GAMAR).

En definitiva, el modelo de los saberes docentes de Tardif, cuya originalidad reside en la importancia que le otorga a los saberes experienciales, como base de elaboración del saber pedagógico, es un marco teórico válido para poder comprender cómo se forma dicho saber. En los saberes experienciales juegan un determinado papel el resto de saberes docentes (profesionales, disciplinarios y curriculares), diferente en cada caso

1. Este mismo planteamiento queda patente en los dos decálogos escritos por M. Antònia Canals (Biniés, 2008, p. 75 y Queralt y Monzó, 2009, p. 116)

2. Estas sesiones también son un claro ejemplo del paralelismo que existe entre los dos períodos del movimiento de renovación pedagógica en Catalunya durante el siglo XX. Maestras y maestros del movimiento de la Escuela Nueva también se reunían, a principios de siglo, para sumar esfuerzos y mejorar mutuamente. A esas reuniones periódicas asistían Alexandre Galí, Manuel Ainaud, Eladi Homs, Pau Vila, Rosa Sensat, Palau i Vera, Celestina Vigneaux y Anna Rubiés, entre otros (Portell y Marquès, 2006, p. 38).

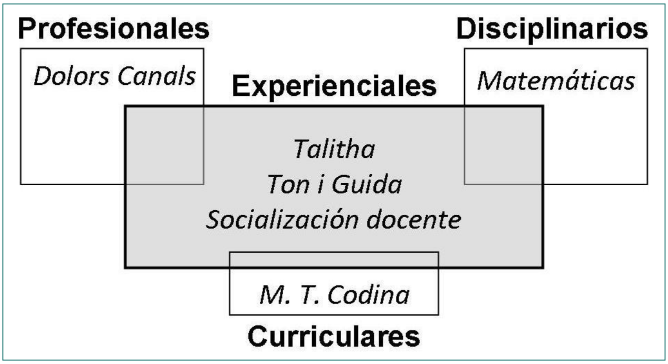


Figura 2. Los saberes docentes de M. A. Canals, según el modelo de Tardif.

concreto. La particularidad más importante de M. Antònia es que sus saberes profesionales no proceden tanto de sus estudios de Magisterio, como del estrecho contacto que mantuvo con su tía Dolors Canals.

También hay un segundo aspecto que destaca del modelo de Tardif y es, precisamente, el cómo se construye el saber pedagógico. No es tanto una especie de suma de todo el conjunto de saberes docentes, sino que nace de los saberes experienciales, prácticos, y sólo mediante un proceso de reflexión compartida es como se pueden objetivar esos saberes prácticos.

La reconstrucción del saber pedagógico de los docentes, a partir de sus experiencias biográficas, sirve para comprender las formas de la educación en un momento histórico determinado, mediante un ejercicio de historia oral que nos permite conocer las prácticas escolares del pasado.

El caso de Maria Antònia Canals resulta ejemplar para comprender el papel que la Escuela Nueva ha tenido en la historia de la educación en Catalunya, y cómo ese modelo pedagógico se traduce en un determinado saber pedagógico, compartido con otros docentes que la acompañaron (Sotos, 2015). Podría pensarse que la dictadura franquista supuso la desaparición de los movimientos de renovación pedagógica en España, que en gran parte así ocurrió, pero siguiendo las trayectorias personales de las maestras y maestros de nuestras escuelas podemos descubrir cómo, en este caso, los planteamientos de la Escuela Nueva siguieron jugando un papel destacado en la historia de la educación en Catalunya, y que siguen siendo visibles en instituciones como la *Associació de Mestres Rosa Sensat*, en la que M. Antònia también fue una de sus socias fundadoras.

REFERENCIAS

Biniés, P. (2008). *Conversaciones matemáticas con Maria Antònia Canals. O cómo hacer de las matemáticas un aprendizaje apasionante*. Barcelona: Graó.

Bracho-López, R., Jiménez-Fanjul, N., Maz-Machado, A., Torralbo-Rodríguez, M. y Fernández-Cano, A . (2014). Producción científica sobre narrativa en Educación Matemática en la Web of Science. *BOLEMA-Boletín de Educaçao Matemática, 28*(49), 744-761.

Codina, M. T. (2007). *Educar en temps difícils. Escola Talitha, 1956-1974*. Barcelona: Eumo.

Díaz, V. (2005). Teoría emergente en la construcción del saber pedagógico. *Revista Iberoamericana de Educación* [en línea], 37/3. Recuperado el 1 de marzo de 2015, de http://cort.as/EE63

Mata, M. (2001). Un període difícil. En Canals, M. A.; Codina, M. T.; Cots, J.; Darder, P.; Mata, M. y Roig, A. M. (Comp.), *La renovació pedagògica a Catalunya des de dins (1940-1980). Fets i records*, 29-82. Barcelona, Edicions 62.

Portell, R. y Marquès, S. (2006). *Els mestres de la República*. Badalona: Ara Llibres.

Queralt, T. y Monzó, O. (eds.)(2009*). Documentos de trabajo de María Antònia Canals*. València: Revista SUMA.

Solà, R. (2003). *L'escola Ton i Guida: quan la pedagogia activa va anar al suburbi (Barcelona 1962-1994)*. Barcelona: Edicions 62.

Sotos, M. (2015). *Didáctica de las matemáticas y desarrollo profesional de una maestra. El caso de Maria Antònia Canals i Tolosa.* Tesis doctoral, Universidad de Salamanca.

Tardif, M. (2004). *Los saberes del docente y su desarrollo profesional.* Madrid: Narcea.

Épsilon - *Revista de Educación Matemática* **2015, Vol. 32(2), nº 90, 71-72**

Inventar problemas para desarrollar la competencia matemática

Fernández Bravo, J. A. & Barbarán Sánchez J. J. (2015).
Madrid: La Muralla.
ISBN: 978-84-7133-814-3
http://www.arcomuralla.com/detalle_libro.php?id=444

Los autores nos presentan un libro que aborda dos tópicos tan interesantes en la Didáctica de la Matemática como son la invención de problemas y la competencia matemática. Es una obra que va dirigida principalmente al profesorado de Educación Secundaria (ESO y Bachillerato), así como a estudiantes del Grado de Maestro y del Máster Universitario de Profesorado de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato.

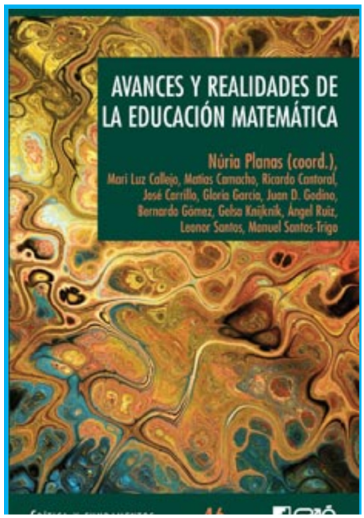
El libro está dividido en cinco capítulos. En los tres primeros, se analiza el estado de la cuestión sobre la competencia matemática, la invención y la resolución de problemas. En ellos se nos pone al día sobre estos tres importantes tópicos. En el capítulo 4, corazón del libro, como afirman los autores, se presenta un método para que el alumno entienda qué hacer y cómo hacerlo, que razone, que establezca relaciones, aplique propiedades, desarrolle pensamiento y acción intelectual –y se atreva a ello–. En este capítulo se presentan seis metamodelos y 49 modelos de situaciones problemáticas que tienen a la invención y reconstrucción de problemas como denominador común. Para cada modelo se proponen ejemplos de problemas de aplicación directa en el aula. Finalmente, se adjunta una tabla que podrá utilizar el profesor para seleccionar la competencia matemática que quiere trabajar con sus alumnos y que además le informa de las tres principales competencias matemáticas que desarrolla cada modelo. En el capítulo 5, se expone un programa (con sus correspondientes indicaciones metodológicas para el profesorado) para que los alumnos aprendan a resolver problemas usando como herramienta la invención y potenciando el desarrollo de la creatividad y el razonamiento. Las propuestas formuladas por los autores en los capítulos 4 y 5 están avaladas por el éxito que ha tenido su aplicación con alumnos de diferentes etapas educativas, disfrutando del hacer matemático.

El grado de comprensión y emoción de lo que se aprende es directamente proporcional al grado de la aplicación adecuada. En la sociedad del siglo XXI en la que vivimos, nuestros alumnos tienen que ser matemáticamente competentes. Esta obra es un libro esencial para los que de alguna manera tenemos la responsabilidad del aprendizaje en la enseñanza que impartimos.

Carlos Almena Sánchez
Profesor Asociado Facultad de Educación.
Universidad Camilo José Cela.

Épsilon - *Revista de Educación Matemática* **2015, Vol. 32(2), nº 90, 73-74**

Avances y realidades de la Educación Matemática



Núria Planas (coord.), Mari Luz Callejo, Matías Camacho, Ricardo Cantoral, José Carrillo, Gloria García, Juan D. Godino, Bernardo Gómez, Gelsa Knijknik, Ángel Ruiz, Leonor Santos, Manuel Santos-Trigo
Editorial: GRAÓ
Enero 2015 (primera edición)
ISBN: 978-84-9980-566-5
226 páginas

Durante los último años se han realizado en el seno de la comunidad iberoamericana abundantes y diversas investigaciones de calidad en educación matemática. Esta obra tiene como objetivo dar a conocer algunas de estas, reuniendo las experiencias de 11 investigadores en este área de conocimiento provenientes de España, Colombia, Costa Rica, Brasil, México y Portugal. El libro pretende a su vez destacar la importancia de la colaboración científica internacional y el inmenso número de posibilidades que esta trae consigo.

En el libro, divido en tres grandes partes, cada investigador realiza un análisis de su propia trayectoria y la de su grupo de trabajo, apuntando los avances que han realizado a lo largo de sus investigaciones y a su vez comentando aquello que consideran que aún está por hacer.

En la primera parte, cuatro investigadores presentan sus trayectorias relacionadas con los modelos de enseñanza, la evaluación y al aprendizaje de los alumnos. En concreto, Gómez analiza desde una perspectiva histórica el pensamiento numérico algebraico. Santos explica sus estudios sobre la evolución reguladora y el porqué de la utilidad de llevarla a la práctica diaria del aula. García habla sobre los procesos de inclusión-exclusión en el aula de matemáticas. Por último, Planas reflexiona sobre cómo se generan las oportunidades de aprendizaje matemático y en particular sobre la diversidad lingüística en el aula de matemáticas.

En la segunda, los investigadores Callejo, Carrillo, Knijknick, Camacho y Santos-Trigo explican sus investigaciones centradas en el desarrollo profesional del profesorado y la resolución de problemas. En el caso de los dos últimos, lo presentan desde la perspectiva de la colaboración internacional, en este caso entre España y México.

Finalmente en la tercera, los tres autores incluidos hablan sobre las perspectivas educativas, teóricas y curriculares. Cada uno presenta un modelo, Cantoral el socioepistemológico, Godino el ontosemiótico y Ruíz el de la praxis, elaborados todos ellos para explicar lo que subyace a la actividad matemática.

En definitiva, esta obra aporta la reflexión de cada investigador sobre su propio trabajo realizado junto con grupos de investigación o colaboraciones internacionales que permite al lector conocer de primera mano algunos de los logros que se han llevado a cabo en el seno de la comunidad iberoamericana en el campo de la educación matemática durante los últimos años y abre a su vez la puerta al desarrollo de futuros estudios.

María José Madrid
Universidad de Córdoba