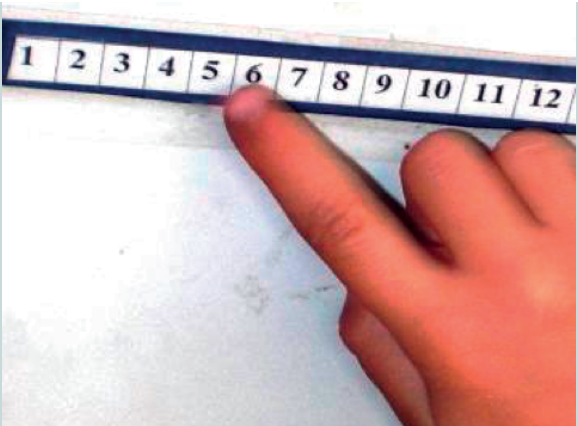
88

Vol. 31 (3)
2014



epsilon

Revista de Educación Matemática

Editada por la S.A.E.M. "THALES"

Portada:

La revista Epsilon está reseñada en:
IN-RECS, Dialnet, Latindex, RESH, DICE, MathEduc
y Base de Datos del Centro de Documentación Thales.

epsilon 88

Revista de Educación Matemática

Página de la revista: http://thales.cica.es/epsilon
Revista: epsilon@thales.cica.es

Sociedad Andaluza de Educación Matemática "Thales"

Edita
Sociedad Andaluza de
Educación Matemática "Thales"
Centro Documentación "Thales"
Universidad de Cádiz
C.A.S.E.M.
11510 PUERTO REAL (Cádiz)

Maquetación e impresión
Utrerana de Ediciones, s.l.
Cristóbal Colón, 12
41710 Utrera (Sevilla)

Depósito Legal
SE-421-1984

ISSN:
2340-714X

Período
3er cuatrimestre 2014

Suscripción
ESPAÑA: 42,00 euros
PAÍSES DEL EURO: 63,00 euros
RESTO DE PAÍSES: 90 $ USA
(3 NÚMEROS AL AÑO)

SUMARIO / CONTENTS

Épsilon - *Revista de Educación Matemática* *2014, Vol. 31(3), nº 88, 7-20*

Sobre la naturaleza de las matemáticas en la formación inicial de maestros: los procesos matemáticos en el sistema de creencias de los estudiantes

Ángel Alsina y Paula López
Universidad de Girona

Resumen: *Se analizan las creencias de 142 futuros maestros sobre la naturaleza de las matemáticas y, de forma más concreta, su visión sobre los procesos matemáticos. Los datos obtenidos a través de un cuestionario muestran que no se consideran suficientemente las formas de adquisición y uso de los contenidos matemáticos. Estos resultados ponen de manifiesto la necesidad de trabajar los procesos matemáticos durante la formación inicial y permanente del profesorado para favorecer la adquisición de la competencia matemática.*
Palabras clave: *naturaleza de las matemáticas, procesos matemáticos, dominio afectivo, sistema de creencias, formación de maestros, identidad profesional del maestro de matemáticas.*

About the nature of mathematics in initial teacher training: The mathematical processes in the belief systems of students

Abstract: *We analysed 142 pre-service teachers' beliefs about the nature of mathematics and, more specifically, their view of mathematical processes. The data obtained by questionnaire demonstrate that the ways of acquiring and using mathematical contents are not adequately considered. These results reveal the need to work the mathematical processes during the training teacher to promote mathematical competence.*
Keywords: *nature of mathematics, mathematical processes, affective domain, belief system, teacher training, professional identity of mathematics teachers.*

INTRODUCCIÓN

La formación inicial que reciben los futuros maestros tiene una gran repercusión en el desempeño de la profesión de maestro. La institución universitaria, pues, tiene la misión de preparar a maestros competentes, es decir, maestros que además de tener conocimientos y habilidades que permitan resolver adecuadamente los problemas profesionales, sientan y reflexionen acerca de la necesidad y el compromiso de actuar en correspondencia con sus conocimientos, habilidades, motivos y valores -con flexibilidad, dedicación y perseverancia-, en la solución de los problemas que de él demanda la práctica profesional (Esteve y Alsina, 2010). De acuerdo con las directrices estatales sobre las competencias profesionales que debe aprender un estudiante para maestro durante su formación inicial (MEC, 2007a; MEC, 2007b), de forma muy sintética los futuros maestros deberían construir y co-construir de manera autorregulada nuevos conocimientos disciplinares y didácticos, y reconstruir los conocimientos, experiencias y creencias previas que pueden suponer un obstáculo para su identidad profesional (Beijaard, Meijer y Verloop, 2004; Bauchamp y Thomas, 2009).

El argumento que se acaba de exponer es probablemente una de las principales razones por las que, en el contexto de la investigación en torno al dominio afectivo en educación matemática, los estudios acerca de las creencias de los futuros maestros tienen un peso importante. Caballero, Blanco y Guerrero (2008) señalan que el estudio de las creencias en educación matemática incluye cuatro dimensiones: creencias sobre la naturaleza de las matemáticas y de su enseñanza y aprendizaje; creencias sobre uno mismo como aprendiz de matemáticas; creencias acerca del papel del profesorado de matemáticas; y creencias suscitadas por el contexto socio-familiar. Todas ellas, como se ha indicado, ejercen un papel importante en la configuración progresiva de la identidad profesional del maestro de matemáticas, un término recientemente acuñado por Lutovac y Kaasila (2011, 2013) para referirse a un proceso narrativo que incluye una interacción entre el contexto matemático individual y social y un proceso de auto-reflexión en el que la identidad matemática pasada, presente y futura entran en diálogo. Considerando esta conceptualización, algo implícita, en este trabajo se considera que la identidad profesional del maestro de matemáticas se modela a lo largo de toda su trayectoria como aprendiz de matemáticas durante su formación no universitaria, y como aprendiz de didáctica de las matemáticas durante su formación universitaria. Las experiencias personales y los conocimientos teóricos y prácticos interiorizados durante toda la trayectoria como estudiante dan lugar a un complejo sistema de creencias que incluye creencias sobre las matemáticas, creencias como aprendiz de matemáticas, creencias acerca del funcionamiento de la clase de matemáticas y creencias sobre el contexto social en relación a las matemáticas.

En este trabajo se analizan las creencias de los estudiantes para maestro sobre la naturaleza de las matemáticas, y de forma más concreta su visión acerca de los procesos de pensamiento matemático en el aprendizaje de la disciplina, tomando en consideración las orientaciones de diversos organismos internacionales que en los últimos años han enfatizado la importancia de los procesos para un aprendizaje competencial de las matemáticas (NCTM, 2000; OCDE, 2001, 2004). En esta misma línea, en el reciente "Real Decreto 126/2014, de 28 de febrero, por el que se establece el currículo básico de la Educación

Primaria" (BOE, 2014) aparece un nuevo bloque de contenidos llamado "Procesos, métodos y actitudes en matemáticas", lo cual pone de manifiesto la importancia creciente de este tipo de conocimientos y destrezas.

Coincidiendo con el inicio del Siglo XXI, el *National Council of Teachers of Mathematics* publicó unos nuevos estándares que pretenden ser un recurso y una guía para todos los que toman decisiones que afectan a la educación matemática: los principios y estándares para la educación matemática (NCTM, 2000). La visión de la educación matemática de estos estándares es sumamente ambiciosa, y busca sobre todo asegurar que todos los estudiantes reciban una educación matemática de calidad que garantice el aprendizaje con comprensión de nociones matemáticas importantes. En otras palabras, se pretende romper con un currículo de matemáticas orientado exclusivamente a la adquisición de contenidos y dirigir la mirada hacia un currículo orientado a la adquisición de la competencia matemática, es decir, se insta a dejar de instruir a los alumnos exclusivamente para obtener un buen rendimiento académico y, en su lugar, educarlos para que comprendan y usen las matemáticas en situaciones significativas. Para conseguir este propósito sitúan a los procesos matemáticos como los conocimientos clave para aprender a usar los contenidos matemáticos de forma comprensiva y eficaz en diferentes contextos: "los estándares de proceso (resolución de problemas, razonamiento y prueba, comunicación, conexiones y representación) ponen de relieve las formas de adquisición y uso de dichos contenidos" (NCTM, p. 31).

Es desde esta perspectiva que se ha desarrollado el presente estudio con un grupo de 142 futuros maestros en el que se analizan las consideraciones que tienen acerca de los procesos matemáticos.

LA NATURALEZA DE LAS MATEMÁTICAS: EL PAPEL DE LOS PROCESOS MATEMÁTICOS

Hace ya más de una década, Niss (2002) propuso abandonar el planteamiento curricular focalizado en los contenidos matemáticos, puesto que se centra exclusivamente en la adquisición de símbolos y de técnicas y no tanto en su uso significativo. Ello le llevó a plantear ocho competencias matemáticas clasificadas en dos grupos: el primer grupo tiene que ver con la capacidad de preguntar y responder preguntas dentro de y con las matemáticas, y el segundo grupo con la capacidad de hacer frente y de gestionar el lenguaje matemático y sus herramientas. Estas competencias, centradas en lo que las personas pueden hacer, tienen que ver con procesos mentales o físicos, actividades y comportamientos (Alsina, 2014):

Cuadro 1. Preguntar y responder preguntas dentro de y con las matemáticas

Pensar matemáticamente (dominio de modos matemáticos de pensamiento), como por ejemplo:

- Plantear preguntas que son propias de las matemáticas y conocer el tipo de respuestas que las matemáticas pueden ofrecer;
- Comprender y manejar las posibilidades y limitaciones de un determinado concepto;
- Ampliar las posibilidades de un concepto extrayendo algunas de sus propiedades o generalizando resultados;
- Diferenciar los diferentes niveles de las matemáticas (afirmaciones condicionadas del tipo "si-entonces", hipótesis, definiciones, teoremas, conjeturas o casos).

Plantear y resolver problemas matemáticos, como por ejemplo:

- Identificar, plantear y especificar diferentes tipos de problemas matemáticos: puros o aplicados; abiertos o cerrados;
- Resolver diferentes tipos de problemas matemáticos, planteados por otros o por uno mismo, de diferentes maneras cuando sea necesario.

Modelización matemática (es decir, análisis y construcción de modelos), como por ejemplo:

- Analizar los fundamentos y las propiedades de los modelos existentes, incluida la evaluación de sus posibilidades y de su validez;
- Decodificación de los modelos existentes;
- Realización de actividades de modelización en un determinado contexto: estructurar el campo; matematizar; trabajar con el modelo, incluyendo la solución de los problemas a que da lugar; validar el modelo, interna y externamente; analizar y criticar el modelo; comunicar sobre el modelo y sus resultados; vigilar y controlar todo el proceso de modelización.

Razonamiento matemático, como por ejemplo:

- Seguir y evaluar cadenas de argumentos;
- Conocer qué es una demostración matemática (y qué no es) y en qué se diferencia de otros tipos de razonamiento matemático, como por ejemplo el heurístico;
- Descubrir las ideas básicas en una determinada línea de argumento (sobre todo en una prueba), incluyendo la distinción de las líneas principales de los detalles, las ideas de los tecnicismos;
- Elaborar formal e informalmente argumentos matemáticos y demostrar declaraciones.

Cuadro 2. Gestionar el lenguaje matemático y las herramientas matemáticas

Representación de las entidades matemáticas (los objetos y situaciones), como por ejemplo: – Comprensión y utilización (decodificación, interpretación, distinción entre) diferentes tipos de representaciones de objetos matemáticos, fenómenos y situaciones; – Comprensión y utilización de las relaciones entre las distintas representaciones de la misma entidad, y conocer sus puntos fuertes y sus limitaciones; – Elegir y cambiar entre las diferentes representaciones.
Manejo de símbolos matemáticos y formalismos, como por ejemplo: – Decodificación e interpretación simbólica y formal del lenguaje matemático, así como la comprensión de sus relaciones con el lenguaje natural; – Comprender la naturaleza y las normas de los sistemas matemáticos formales (tanto la sintaxis como la semántica); – Traducción del lenguaje natural al formal y simbólico; – Manejo y manipulación de las declaraciones y expresiones que contengan símbolos y fórmulas.
La comunicación en, con, y acerca de las matemáticas, como por ejemplo: – Comprensión de textos escritos, visuales o orales que tengan un contenido matemático, en una variedad de registros lingüísticos; – Expresar estas cuestiones de forma escrita, visual o oral, con diferentes niveles de precisión teórica y técnica.
Hacer uso de los recursos y herramientas, como por ejemplo: – Conocer la existencia y propiedades de los diversos instrumentos y recursos disponibles para la actividad matemática, y conocer sus posibilidades y limitaciones; – Ser capaces de utilizar reflexivamente dichos recursos y herramientas.

Ésta es la base a partir de la cual la OCDE, en el marco del Proyecto DeSeCo, indica diversas competencias matemáticas necesarias para formar a ciudadanos que puedan identificar y comprender el papel que desempeñan las matemáticas en el mundo, emitir juicios bien fundados, utilizar las matemáticas y comprometerse con ellas, y satisfacer las necesidades de la vida personal como ciudadano constructivo, comprometido y reflexivo (OCDE, 2004).

En el cuadro 3 se presenta un análisis comparativo entre los estándares de procesos del NCTM (2000) y las competencias matemáticas (Niss, 2002; OCDE, 2004):

Cuadro 3. Comparación entre los estándares de procesos y las competencias matemáticas.

Estándares de procesos matemáticos (NCTM, 2000)	Competencias matemáticas (Niss, 2002)	Competencias matemáticas (OCDE, 2004)
Resolución de problemas	Planteamiento y resolución de problemas matemáticos	Planteamiento y resolución de problemas
	Uso de recursos y herramientas	
Razonamiento y prueba	Dominio de modos de pensamiento matemático	Pensamiento y razonamiento
	Razonamiento matemático	Argumentación
Comunicación	Comunicación en, con y acerca de las matemáticas	Comunicación
Conexiones	-	-
Representación	Representación de entidades matemáticas	Representación y uso de operaciones y lenguaje técnico, simbólico y formal
	Análisis y construcción de modelos	Construcción de modelos
	Manejo de símbolos matemáticos y formalismos	

Los procesos matemáticos y las competencias matemáticas que se exponen en el cuadro anterior subrayan una misma visión que enfatiza la capacidad de usar de forma comprensiva y eficaz las matemáticas que se aprenden en la escuela en una variedad de contextos, además del escolar. Se trata de un nuevo enfoque que de Guzmán (2001, p. 9) sintetizó de forma muy clara:

> "En la situación de transformación vertiginosa de la civilización en la cual nos encontramos, está claro que los procesos verdaderamente eficaces de pensamiento, que no se vuelven obsoletos con tanta rapidez, es lo más valioso que podemos enseñar a nuestros jóvenes. En nuestro mundo científico e intelectual tan rápidamente mutante vale mucho más proveerse de procesos de pensamiento útiles que de contenidos que rápidamente se convierten en ideas inertes ..."

Los procesos matemáticos y las competencias matemáticas permiten ampliar la perspectiva acerca de la naturaleza de las matemáticas como disciplina. En el estudio TEDS-M 2008 (el primer estudio comparativo a nivel internacional y a gran escala, sobre educación superior, centrado en la formación inicial de los profesores de matemáticas) se presentan dos visiones contrapuestas: a) las matemáticas como un conjunto de reglas y

procedimientos, y b) las matemáticas como un proceso de indagación. En la primera visión se tienden a ver las matemáticas como un conjunto de procedimientos que hay que aprender, con normas estrictas acerca de lo que es correcto o no, mientras que en la segunda visión se valoran las matemáticas como un instrumento para responder a preguntas y resolver problemas, en la que los procesos matemáticos se consideran herramientas de indagación, es decir, medios para un fin y no el fin en sí mismo. En el cuadro 4 se presentan algunas afirmaciones de ambas visiones:

Cuadro 4. Visiones acerca de la naturaleza de las matemáticas como disciplina (Ministerio de Educación, Cultura y Deporte, 2012).

Matemáticas como un conjunto de reglas y procedimientos	Matemáticas como un proceso de indagación
Las matemáticas son una colección de normas y procedimientos que determinan cómo se resuelve un problema. Saber matemáticas implica recordar y aplicar definiciones, fórmulas, hechos matemáticos y procedimientos. Para resolver una tarea matemática es necesario conocer el procedimiento correcto. En caso contrario uno está perdido. El rigor lógico y la precisión son fundamentales para las matemáticas. Para hacer matemáticas se requiere mucha práctica, la aplicación correcta de procedimientos rutinarios y estrategias de resolución de problemas. Las matemáticas significan aprender, recordar y aplicar.	Las matemáticas implican creatividad y nuevas ideas. En matemáticas uno puede descubrir y ensayar muchas cosas por sí mismo. Si uno se involucra en las tareas matemáticas, puede hacer descubrimientos (p. ej., conexiones, reglas y conceptos). Los problemas de matemáticas se pueden resolver de maneras diferentes. Muchos aspectos de las matemáticas tienen notable valor práctico. Las matemáticas ayudan a resolver problemas y tareas de la vida cotidiana.

La visión de las matemáticas como un conjunto de reglas y procedimientos, pues, se asocia a la instrucción matemática, es decir, se interpreta el proceso de enseñanza-aprendizaje de la disciplina como un conjunto de reglas y procedimientos que se adquieren a través de la ejercitación, mientras que la visión de las matemáticas como un proceso de indagación se corresponde con un enfoque más competencial, en el que se ofrecen a los aprendices diversas herramientas para que progresivamente aprendan a usar las matemáticas en su vida cotidiana. En el informe español del TEDS-M 2008 (Ministerio de Educación, Cultura y Deporte, 2012) los futuros maestros españoles muestran un mayor acuerdo en interpretar las matemáticas como un proceso de indagación (73,4% de respuestas de acuerdo) que en considerarlas como un conjunto de reglas y procedimientos (50% de respuestas de respaldo). Ruiz de Gauna, García y Sarausa (2013), en un estudio realizado con estudiantes de primer curso del grado de maestro, analizan las actitudes hacia la materia (un 40% admiten que les gustan las matemáticas) junto con otras

consideraciones referentes a los contenidos matemáticos que forman parte del currículo (se destaca sobre todo la geometría, con un 91% de acuerdo), o la utilidad y el sentido de las matemáticas (un 66% admiten que sirven para razonar y pensar). Aunque implícitamente se hace alusión a algunos procesos matemáticos, en dicho estudio no se analiza con detalle la opinión de los estudiantes en relación a este tipo de conocimientos matemáticos.

A partir de estos datos previos, en este estudio se quiere analizar con mayor detalle cuales son las consideraciones de los futuros maestros acerca de los procesos matemáticos. En este contexto, nuestra pregunta de investigación es:

- ¿Cuáles son las opiniones de los estudiantes para maestro sobre los aspectos que mejor definen a las matemáticas?

Particularmente, el objetivo de nuestro estudio es identificar qué lugar ocupan los procesos matemáticos en el sistema de creencias de los estudiantes para maestro sobre las matemáticas como disciplina.

METODOLOGÍA

Participantes

La muestra está formada por 142 estudiantes, 72 pertenecientes al Grado de Educación Infantil y 70 del Grado de Educación Primaria. Todos los estudiantes, en el momento que se realizó el estudio, estaban cursando primero en la Universidad de Girona.

La edad media de los estudiantes del Grado de Educación Infantil es de 21,2 años, y de los de Educación Primaria es de 20,3 años. El porcentaje de hombres en Educación Infantil es de 4,35% y en Educación Primaria es de 12,04%. El 56,5% de los estudiantes de Infantil provienen del ciclo formativo de grado superior en Educación Infantil, y el 29,8% de estudiantes de Primaria provienen de ciclos formativos de grado superior. De los estudiantes que provienen de bachillerato, el 14,28% de Infantil y el 16,13% de Primaria provienen de un bachillerato científico-tecnológico. Por lo tanto, de la muestra del estudio, solo el 4,4% en Educación Infantil y el 6,8% en Primaria, han cursado matemáticas en los dos últimos años antes de empezar los estudios universitarios.

Diseño y procedimiento

En el primer semestre de primero, antes de iniciar cualquier asignatura o módulo formativo relacionado con las matemáticas y su didáctica se administró un cuestionario a todos los participantes para identificar diversas creencias acerca de la educación matemática centradas en las diversas dimensiones indicadas por Caballero, Blanco y Guerrero (2008). En una de estas cuestiones se les solicitaba que indicaran tres aspectos clave (de mayor a menor importancia) que asociaban con las matemáticas, puesto que se consideró que implícitamente iba a aportar datos acerca de la visión de los estudiantes acerca de la naturaleza de las matemáticas como disciplina.

Para la categorización de las respuestas dadas se ha combinado la categorización deductiva y la inductiva (Bonilla y Rodríguez, 1995), es decir, en un primer momento se ha

partido de unidades de significado identificadas en marcos teóricos existentes (categorización deductiva) pero, posteriormente, con la revisión cuidadosa de todo el material, se han identificado subcategorías que emergen de la misma información (categorización inductiva).

Las tres categorías principales que se han considerado para clasificar las respuestas han sido: *Factores Cognitivos*, *Factores Procedimentales* y *Factores Actitudinales*. Estas tres categorías se han establecido a partir de la revisión de la literatura (NCTM, 2000; Caballero, Guerrero y Blanco, 2007; Guirado, Olivera, Mazzitelli y Aguilar, 2010; Ministerio de Educación, Cultura y Deporte, 2012; Ruiz de Gauna, García y Sarasua, 2013) y a partir de las definiciones y clasificaciones dadas por la OCDE en su Proyecto DeSeCo (OCDE, 2001) sobre las competencias básicas, donde considera la competencia como una combinación de conocimientos, destrezas y actitudes.

Los *Factores Cognitivos* incluyen elementos que ayudan al estudiante a "saber conocer". Esta categoría se ha subdividido en cuatro subcategorías definidas a partir de las respuestas dadas por los estudiantes y a partir de las categorías del trabajo de Guirado, Olivera, Mazzitelli y Aguilar (2010): *Inteligencia, memoria, comprensión y cálculo mental y escrito.* Los *Factores Procedimentales* permiten "saber hacer". En esta categoría, basándonos en los estándares de procesos definidos por el NCTM (2000), se han considerado las subcategorías: *resolución de problemas, razonamiento, comunicación y conexiones.* Por último, los *Factores Actitudinales* se conciben como el conjunto de aspectos que ayudan al alumno a "saber ser". A partir del trabajo de Guirado, Olivera, Mazzitelli y Aguilar (2010) y de las respuestas dadas por los estudiantes se han considerado cuatro subcategorías: *interés, esfuerzo, participación y autoconcepto*. En el cuadro 5 se presenta una síntesis de las categorías y subcategorías consideradas:

Cuadro 5. Categorías y subcategorías sobre la naturaleza de las matemáticas

Factores Cognitivos	Factores Procedimentales	Factores Actitudinales
Inteligencia Memoria Comprensión Cálculo mental y escrito	Resolución de problemas Razonamiento Comunicación y representación Conexiones	Interés Esfuerzo Participación Autoconcepto

Dado el tipo de población y de datos analizados, aunque la pregunta a analizar sea una variable cualitativa, la metodología que se ha utilizado para su análisis y discusión ha sido de tipo cuantitativo. Para tener en cuenta el orden de los tres aspectos clave que los estudiantes asocian con las matemáticas (de mayor a menor importancia), se han ponderado sus respuestas dando un peso de 0,5 al primer factor, de 0,3 al segundo y de 0,2 al factor que indican en tercera posición.

RESULTADOS

Para la exposición de los resultados, en primer lugar se muestran los datos obtenidos acerca de los tres aspectos clave que los estudiantes asocian con las matemáticas. Al haber ponderado las respuestas según el orden de los aspectos indicados (0,5; 0,3; 0,2), el número de estudiantes que se indican en las tablas de resultados de cada categoría no es un número natural.

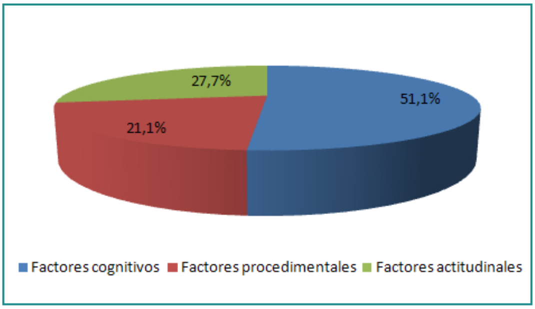


Figura 1. Gráfico comparativo entre las tres categorías.

Tabla 1. Resultados obtenidos en las tres categorías

	Nº estudiantes	Porcentaje
Factores cognitivos	72,6	51,1%
Factores procedimentales	30	21,1%
Factores actitudinales	39,4	27,7%
Total	142	100 %

Los resultados anteriores muestran que más de la mitad de los estudiantes para maestro (un 51,1%), considera que los aspectos cognitivos son los que mejor definen a las matemáticas. En segundo lugar consideran los factores actitudinales (un 27,7%), mientras que los aspectos que vinculan menos con las matemáticas son los procedimentales (21,1%).

A continuación se presentan los resultados de forma más detallada, diferenciando cuatro subcategorías dentro de cada categoría.

Tabla 2. Resultados obtenidos en las distintas subcategorías

		Nº estudiantes	Porcentaje	Media entre los factores
Factores cognitivos	Inteligencia	26,8	18,9%	18,55
	Memoria	3,8	2,7%	
	Comprensión	12,4	8,7%	
	Cálculo mental y escrito	31,2	22%	

		Nº estudiantes	Porcentaje	Media entre los factores
Factores procedimentales	Razonamiento	5,2	3,7%	7,65
	Comunicación	2,2	1,5%	
	Conexiones	6,1	4,3%	
	Resolución de problemas	17,1	12%	
Factores actitudinales	Interés	19,5	13,7%	9,3
	Esfuerzo	14,6	10,3%	
	Participación	0,7	0,5%	
	Autoconcepto	2,4	1,7%	
	Total	142	100%	

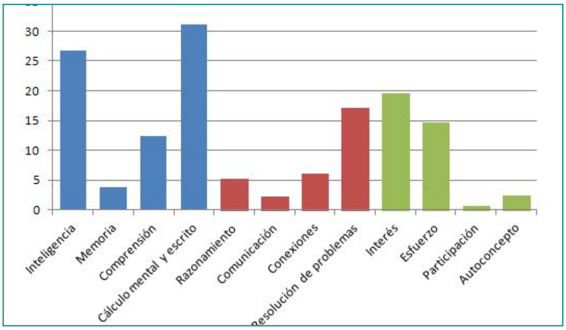


Figura 2. Gráfico comparativo entre las sub-categorías.

Estos datos indican que, en relación a los factores cognitivos, los aspectos que los estudiantes identifican más con las matemáticas son el cálculo mental y escrito (22%) y la inteligencia (18,9%). Dentro de los factores actitudinales, los aspectos más destacados son el interés (13,7%) y el esfuerzo (10,3%). Y respecto a los factores procedimentales, el aspecto que asocian más a las matemáticas es la resolución de problemas (12%). El factor cognitivo que menos asocian con las matemáticas es la memoria (2,7%), el factor actitudinal menos relevante es la participación (0,5%) y el factor procedimental que menos consideran es la comunicación (1,5%).

DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

En este estudio se han identificado las creencias de los estudiantes para maestro sobre la naturaleza de las matemáticas. Una primera interpretación de los resultados obtenidos confirma la presencia de tres categorías de factores: cognitivos, actitudinales y procedimentales, en contraposición a diversos estudios preliminares que subrayan exclusivamente factores cognitivos y actitudinales, incluidos en la agenda *Creencias y dominio afectivo: actitudes y cognición* (Llinares, 2008). En otras palabras, en estos estudios previos se consideran únicamente los factores de las matemáticas que permiten a los alumnos "saber conocer" y "saber ser", de acuerdo con la terminología de la OCDE para

definir las competencias clave (OCDE, 2001). Consideramos que la incorporación de factores procedimentales, en la línea ya iniciada por algunos trabajos (NCTM, 2000; Guirado, Olivera, Mazzitelli y Aguilar, 2010), contribuye a comprender con mayor precisión el conjunto de creencias que acaban configurando la identidad profesional del maestro de matemáticas acerca de la naturaleza de las matemáticas. Estos factores responden al "saber hacer" (OCDE, 2001), e incluyen las formas de pensar propias de las matemáticas, como resolver problemas, razonar y demostrar, comunicar y representar o hacer conexiones (NCTM, 2000).

Una segunda interpretación de los resultados obtenidos es el escaso peso de los factores procedimentales en el conjunto de creencias acerca de la naturaleza de las matemáticas. Los datos obtenidos han puesto en evidencia que los futuros maestros no consideran suficientemente las formas de adquisición y uso de los contenidos matemáticos. Estos datos ponen de manifiesto una construcción de la identidad profesional del maestro de matemáticas que deja de lado algunas de las tendencias contemporáneas en educación matemática (NCTM, 2000; Niss, 2002; OCDE, 2004), en las que se destaca la importancia de los procesos de pensamiento matemático para el aprendizaje de las matemáticas en general y para la adquisición de la competencia matemática en particular. A la vez, los resultados de nuestro trabajo muestran algunas contradicciones con los datos del estudio internacional TEDS-M (Ministerio de Educación, Cultura y Deporte, 2012). Como se ha indicado, en dicho estudio los futuros maestros españoles muestran un mayor acuerdo en interpretar las matemáticas como un proceso de indagación (73,4% de respuestas de acuerdo), lo que significa que mayoritariamente asocian las matemáticas con una visión competencial que incluye la actividad heurística, la resolución de problemas o las conexiones con la vida cotidiana. Sin embargo, en nuestro estudio, cuando se les pregunta acerca de los factores que asocian con las matemáticas, estos aspectos procedimentales son los que tienden a ocupar las últimas posiciones en su escala de creencias. En una línea similar al TEDS-M, en el estudio de Ruíz de Gauna, García y Sarausa (2013), los factores procedimentales (y en concreto las acciones de "razonar" y "pensar") tienen una alta valoración entre los estudiantes (66%), mientras que en nuestro estudio el 3,7% de los estudiantes asocian el razonamiento a las matemáticas, y un 12% a la resolución de problemas. Una posible explicación es que las características de los participantes de ambos estudios son diferentes: en nuestro caso, se trata de estudiantes de primer curso de los Grados de Educación Infantil y Educación Primaria, mientras que el estudio TEDS-M se realizó con estudiantes de tercer curso de primaria de la antigua diplomatura de magisterio que ya habían recibido una formación en didáctica de las matemáticas.

De estos datos se desprenden algunas posibles implicaciones didácticas que deberían considerarse tanto en la formación inicial como en la formación permanente del profesorado. La consideración de los procesos matemáticos implica partir de un planteamiento curricular mucho más globalizado que no se limite a los contenidos de una única área, sino trabajar de forma integrada, explorando como se potencian unos y otros y usándolos sin prejuicios. Además, exige trabajar para favorecer la autonomía mental del alumnado, potenciando la elaboración de hipótesis, las estrategias creativas de resolución de problemas, la discusión, el contraste, la negociación de significados, la construcción conjunta de soluciones y la búsqueda de formas para comunicar planteamientos y resultados. En definitiva, pues, se trata de ayudar a gestionar el conocimiento, las habilidades y las

emociones pera conseguir un objetivo. En los últimos años son muchos los profesionales que han ido incorporando los procesos matemáticos en sus prácticas docentes (para una revisión más exhaustiva, consultar Alsina 2011, 2014), y es de esperar que vaya en aumento en el futuro dada la relevancia que actualmente se da a los procesos.

En cualquier caso, de acuerdo con Kaasila, Hannula y Laine (2012), los estudios acerca de la visión de las matemáticas de los futuros maestros tienen un papel importante porque revelan cómo van construyendo su identidad profesional, y desde este marco consideran que es necesario que los formadores de maestros comprendan sobre todo los puntos de vista negativos. La identificación y toma de conciencia de estas creencias es el requisito necesario para poder promover procesos de cambio durante la formación inicial (Kaasila, Hannula, Laine y Pehkonen, 2006, 2008), y evitar así que los futuros maestros accedan a la práctica profesional con unas creencias acerca de la naturaleza de las matemáticas que conlleven omisiones importantes durante el proceso de enseñanza-aprendizaje de la disciplina, como por ejemplo dejar de lado los procesos de pensamiento matemático.

Por esta razón va a ser necesario diseñar nuevos estudios que analicen con instrumentos más detallados las creencias de los futuros maestros acerca de los procesos matemáticos, ya que consideramos que el hecho de haber planteado una única pregunta sobre los aspectos clave que los estudiantes asocian con las matemáticas puede haber sido una limitación importante en el diseño de nuestro estudio. Paralelamente, sobre todo si en futuras investigaciones se confirman los resultados reveladores de este estudio, va a ser necesario diseñar programas de intervención que promuevan la incorporación de los conocimientos disciplinares y didácticos referentes a los procesos de pensamiento matemático en los módulos y asignaturas de didáctica de las matemáticas de los estudios del Grado de Maestro.

REFERENCIAS

Alsina, Á. (2011). *Educación matemática en contexto de 3 a 6 años.* Barcelona: ICE-Horsori

Alsina, Á. (2014). Matemáticas en la educación primaria. En N. Planas y Á. Alsina (2014). *Educación matemática y buenas prácticas.* (pp. 93-144). Barcelona: Editorial Graó (2ª edición).

Beauchamp, C. y Thomas, L. (2009). Understanding teacher identity: an overview of issues in the literature and implications for teacher education. *Cambridge Journal of Education, 39*(2), 175-189.

Beijaard, D., Meijer, P.C. y Verloop, N. (2004). Reconsidering research on teachers' professional identity. *Teaching and Teacher Education, 20,* 107-128.

BOE (2014). Real Decreto 126/2014, de 28 de febrero, por el que se establece el currículo básico de la Educación Primaria. Recuperado de: http://www.boe.es/buscar/pdf/2014/BOE-A-2014-2222-consolidado.pdf.

Bonilla, E. y Rodríguez, P. (2005). *Más allá del dilema de los métodos.* Colombia: Editorial Nomos.

Caballero, A., Blanco, L.J. y Guerrero, E. (2008). El dominio afectivo en futuros maestros de matemáticas en la Universidad de Extremadura. *PARADIGMA, XXIX* (2), 157-171.

Caballero, A., Guerrero, E. y Blanco, L.J. (2007), Las actitudes y emociones ante las Matemáticas de los estudiantes para Maestros de la Facultad de Educación de la Universidad de Extremadura. En M. Camacho, P. Bolea, P. Flores, B. Gómez, J. Murillo y Mª. T.

González (Eds.), *Investigación en Educación Matemática. Comunicaciones de los grupos de investigación. XI Simposio de la SEIEM* (pp. 41-42). Tenerefie: SEIEM.

De Guzmán, M. (2001). Tendencias actuales de la educación matemática. *Sigma,* 19, 5-25.

Esteve, O. y Alsina, Á. (2010). Hacia el desarrollo de la competencia profesional del profesorado. En O. Esteve, K. Melief y Á. Alsina (Eds.), *Creando mi profesión. Una propuesta para el desarrollo profesional del profesorado* (pp. 7-18). Barcelona: Editorial Octaedro.

Guirado, A.Mª, Olivera, A.C., Mazzitelli, C.A. y Aguilar, S.B. (2010). ¿Cuál es la representación que tienen los docentes acerca de ser un buen alumno de física y aprender física? *Revista Electrónica de Enseñanza de las Ciencias, 9*(3), 618-632.

Kaasila, R., Hannula, M. y Laine, A. (1012). "My personal relationship towards mathematics has necessarily not changed but…" Analyzing pre-service teachers' mathematical identity talk. *International Journal of Science and Mathematics Education 10,* 975-995.

Kaasila, R., Hannula, M., Laine, A. y Pehkonen, E. (2006). Facilitators for change of elementary teacher students' view of mathematics. En J. Novotaná, H. Moraová, M. Krátká, y N. Stehliková (Eds.), *Proceedings of the 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 385-392). Praga: PME.

Kaasila, R., Hannula, M., Laine, A. y Pehkonen, E. (2008). Socio-emotional orientations and teacher change. *Educational Studies in Mathematics, 67,* 111-123.

Llinares, S. (2008). Agendas de investigación en educación matemática en España: una aproximación desde "ISI-web of knowledge" y ERIH". En R. Luengo, B. Gómez, M. Camacho y L. Blanco (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XII* (pp. 25-54). Badajoz: SEIEM.

Lutovac, S. y Kaasila, R. (2011). Beginning a pre-service teacher's mathematical identity work through narrative rehabilitation and bibliotherapy. *Teaching in Higher Education, 16*(2), 225–236.

Lutovac, S. y Kaasila, R. (2013). Pre-service teacher's possible mathematical identities. Recuperado de: http://blogs.helsinki.fi/mavi-2012/files/2012/09/LutovacKaasila_MAVI-2012_revised-for-the-web2.doc.

MEC (2007a). ORDEN ECI/3854/2007, de 27 de diciembre, por la que se establecen los requisitos para la verificación de los títulos universitarios oficiales que habiliten para el ejercicio de la profesión de Maestro en Educación Infantil. *Boletín Oficial del Estado 312,* 53735-53738.

MEC (2007b). ORDEN ECI/3857/2007, de 27 de diciembre, por la que se establecen los requisitos para la verificación de los títulos universitarios oficiales que habiliten para el ejercicio de la profesión de Maestro en Educación Primaria. *Boletín Oficial del Estado 312,* 53747-53750.

Ministerio de Educación, Cultura y Deporte (2012). *TEDS-M. Informe español. Estudio internacional sobre la formación inicial en matemáticas de los maestros.* Madrid: Secretaría General Técnica. Subdirección General de Documentación y Publicaciones.

NCTM (2000). *Principles and standards for school mathematics.* Reston, Va.: NCTM.

Niss, M. (2002). *Mathematical competencies and the learning of mathematics: The Danish KOM Project.* Roskilde: Roskilde University.

OCDE (2001). *Defining and selecting key competencies.* Bruselas: OCDE.

OCDE (2004). *Informe PISA 2003. Aprender para el mundo de mañana.* Recuperado de: http://www.oecd.org/pisa/39732493.pdf.

Ruiz de Gauna, J., García, J. y Sarasua, J. (2013). Perspectiva de los alumnos de Grado de Educación Primaria sobre las Matemáticas y su enseñanza. *Números, 82,* 5-15.

Épsilon - Revista de Educación Matemática *2014, Vol. 31(3), nº 88, 21-38*

Dificultades de los estudiantes de once grado al hacer transformaciones de representaciones de una función

Tulio Amaya De Armas
Corporación Universitaria del Caribe (Colombia)
Universidad Nacional de Educación a Distancia (UNED)
Natalia Sgreccia
Universidad Nacional de Rosario y Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas (Argentina)

Resumen: *Tradicionalmente, ha sido problemático el aprendizaje del concepto de función. En este trabajo se reportan los hallazgos de una investigación en donde se analizaron las dificultades presentadas por estudiantes de once grado al hacer transformaciones de representaciones de una función, con el registro tabular como registro principal. Para recoger la información se aplicó un cuestionario, con una situación que involucra el concepto de función. Las dificultades estuvieron relacionadas con la identificación del contenido de las representaciones, el funcionamiento de los registros y la coordinación entre ellos. Fue posible apreciar que los estudiantes no reconocen el registro tabular como apoyo válido para sustentar sus respuestas.*

Palabras clave: *registros semióticos de representación, coordinación entre registros, conversión, tratamiento, función.*

Difficulties of students from elevend grade to make changes of representations of a function

Abstract: *Traditionally, the learning of the concept of function has been problematic. In this paper we report the findings of an investigation which analyzed the difficulties presented by grade eleven students to make transformations of representations of a function, with tabular register as primordial one. To collect the information a questionnaire was applied with a situation involving the concept of function. The difficulties were related to the identification of the content of the representations, the operation of registers and the coordination between them. It was possible to identify that students do not recognize as a valid support the tabular register to support their answers.*

Keywords: *semiotic registers of representation, coordination between registers, conversion, treatment, function.*

INTRODUCCIÓN

Al analizar lo propuesto en los estándares del *National Council of Teachers of Mathematics* (2000) y del Ministerio de Educación Nacional de Colombia (2005) frente a los resultados de las investigaciones respecto a la conceptualización de la noción de función (Cordero, 1997; Dolores, 2004; Gatica et al., 2010; Hitt, 2000, 2003a, 2003b), se evidencia una descompensación en el abordaje dado a este concepto a través de diferentes registros semióticos de representación, lo que podría dificultar el desarrollo de pensamiento variacional en los estudiantes. Esta descompensación lleva al alumno a cometer errores y los errores, si no son resignificados apropiadamente, pueden conducir el proceso de aprendizaje por un camino equivocado, ya que los estudiantes se pueden acostumbrar a ellos y no distinguir lo adecuado de lo inadecuado. Incluso, por acumulación de malas experiencias, pueden llevar a los sujetos a no permitirse conflictos cognitivos, por lo que en estas condiciones sería difícil la adquisición de conocimientos (Amaya, 2010).

Además, uno de los conceptos básicos relacionados a la enseñanza y el aprendizaje del cálculo es, sin duda, el de función. Asimismo, numerosas investigaciones en el campo de la Educación Matemática (Benítez, 2010; D'Amore, 2006; Ochoviet y Oktaç, 2011; Sánchez-Matamoros, García y Llinares, 2008) han puesto de manifiesto que existen dificultades persistentes en los estudiantes, ligadas a la construcción de este concepto (Del Castillo, 2003). Una de estas dificultades, según Duval (2004), es el tránsito entre diferentes registros de representación; esto es, identificar elementos en un registro de partida y encontrar su equivalente en un registro de llegada. En particular, Duval (2012a) considera que, a diferencia de otras ciencias, el acceso al objeto de estudio en matemáticas es exclusivamente semiótico y que toda actividad matemática consiste en la transformación de representaciones semióticas –producciones constituidas por signos que pertenecen a un sistema de referencia, el cual tiene sus propias reglas de significación y de funcionamiento–.

De lo anterior se puede deducir que este proceso de transformación de representaciones es esencial en el aprendizaje de las matemáticas, ya que la única forma de acceder a los conocimientos matemáticos es a través de las representaciones semióticas (Hitt, 2003a). Las representaciones en diferentes registros se complementan, es decir, ningún sistema de representación puede producir una representación cuyo contenido sea del todo completo y adecuado al objeto representado, por lo que el recurso a varios registros se considera condición necesaria para la conceptualización (Del Castillo, 2003). Esto se debe, según Duval (1999), a que no hay conocimiento que un sujeto pueda movilizar sin una actividad de representación, es decir, no es posible estudiar los fenómenos relativos al conocimiento sin recurrir a las representaciones semióticas. En este sentido se ha fortalecido la idea de que cuando se usan en la enseñanza de las matemáticas actividades didácticas que favorecen la utilización y articulación entre diferentes registros, el aprendizaje resulta beneficiado.

Se evidencia así que un sistema de representación coopera en la construcción de objetos matemáticos, relaciones y procesos mediante la creación de un ambiente en el cual

se comparten los artefactos culturales lingüísticos que pueden expresarse en la comunidad (Kaput, 1989). También pone en evidencia la importancia de que los alumnos conecten los diferentes sistemas semióticos de representación con los elementos del medio sociocultural donde se desempeñan.

El presente estudio se centra en el análisis de las transformaciones entre representaciones que realizan estudiantes colombianos de 15-17 años de edad. Se caracterizan sus dificultades, tanto con la identificación del contenido de la representación de partida como con el funcionamiento de los registros en los que se hacen las representaciones y la coordinación entre ellos, en el tema funciones.

FUNDAMENTACIÓN TEÓRICA

En las últimas décadas las investigaciones en Educación Matemática han tenido un importante desarrollo, presentándose algunos acuerdos entre administradores educativos y grupos de investigadores, quienes a su vez han sentado algunas sugerencias sobre el tipo de problemas que se debe utilizar en matemáticas -que despierten el interés de los alumnos y favorezcan su aprendizaje-, la forma de organizar las secuencias de actividades utilizadas en clase de matemáticas y la necesidad de analizar las producciones de los estudiantes -para utilizar sus dificultades de comprensión en beneficio de su propio aprendizaje-. Este trabajo se encuadra en esto último.

En particular, los contextos de representación usados en la actividad matemática surgen como hilo de enlace que permite proponer problemas interesantes a través de los cuales analizar las dificultades de comprensión de los estudiantes –a través de, por ejemplo, sus errores conceptuales– y usarlos para mejorar sus procesos de aprendizaje.

En relación con el tipo de actividades para favorecer el desarrollo del pensamiento matemático de los estudiantes, el *National Council of Teachers of Mathematics* (2000) considera fundamental que se los enfrente a actividades que constituyan un reto para su curiosidad, que los estimulen a usar sus presaberes, a investigar lo que desconozcan y a analizar los contenidos estudiados. Específicamente, el Ministerio de Educación Nacional (2005) considera indispensable el estudio de patrones, nociones y conceptos propios del pensamiento variacional, el cual tiene que ver con el reconocimiento, la percepción, la identificación y la caracterización de la variación y el cambio en diferentes contextos, así como con su descripción, modelación y representación en distintos sistemas o registros simbólicos, ya sean verbales, icónicos, tabulares, gráficos o algebraicos. Tiene como propósito construir distintos acercamientos significativos para la comprensión y uso de los conceptos y procedimientos de las funciones y sus sistemas analíticos así como del cálculo numérico y algebraico. Además, cumple un papel preponderante en la resolución de problemas sustentados en el estudio de la variación y el cambio, y en la modelación de procesos de la vida cotidiana. Su estudio se inicia con la detección de los criterios que rigen regularidades o reglas de formación, para identificar la unidad que se repite periódicamente dando lugar a un patrón.

El tipo de actividades sugeridas por el *National Council of Teachers of Mathematics* (2000) y el análisis de secuencias y patrones recomendado por el Ministerio de Educación Nacional (2005) pueden desarrollar en los estudiantes la capacidad para identificar o construir un patrón de regularidad y la capacidad para reproducirlo en diferentes

registros, por medio de un cierto procedimiento, algoritmo o fórmula. Según Del Castillo (2003), este proceso de establecer congruencias es condición necesaria para la comprensión de un concepto matemático.

El análisis de las dificultades de comprensión de los estudiantes invocando sus concepciones es indispensable para ayudarlos a entender el tema que se esté estudiando, para lo que es necesario analizar sus errores conceptuales. Al respecto, Godino, Font y Batanero (2003) mencionan:

> (…) hablamos de error cuando el alumno realiza una práctica (acción, argumentación, etc.) que no es válida desde el punto de vista de la institución matemática escolar. El término dificultad indica el mayor o menor grado de éxito de los alumnos ante una tarea o tema de estudio. Si el porcentaje de respuestas incorrectas (índice de dificultad) es elevado se dice que la dificultad es alta, mientras que si dicho porcentaje es bajo, la dificultad es baja (p.69).

Este planteamiento implica concebir la práctica curricular y evaluativa como un seguimiento permanente al proceso de adquisición de conocimientos. El error se constituye en una vía natural de acceso al conocimiento, una manifestación de un proceso constructivo que se debe encauzar y orientar de tal manera que el que aprende se termine beneficiando.

Por otro lado están los contextos de representación usados en la actividad matemática. Duval (2004) considera prioritarias las posibilidades de transformar una representación semiótica en otra representación semiótica, como base en un proceso de comunicación que busca saber cómo puede ser codificado/decodificado un objeto matemático para poder ser comprendido por alguien. Según este autor, todo progreso de conocimiento en matemáticas pasa por este trabajo de transformación. Distingue dos tipos de transformaciones: el *tratamiento*, que es una transformación estrictamente interna en un registro determinado, con cierta homogeneidad en las representaciones producidas, donde la producción se hace como si cada representación fuera autosuficiente, y la *conversión*, que es una transformación de un objeto de un registro a otro, es decir, es aquella en la que la representación se pone en paralelo con otra representación de otro registro.

La conversión de un registro a otro puede resultar congruente o no; es decir, el pasaje entre dos representaciones de un mismo objeto puede hacerse en un sentido y no hacerse en el otro. Además, las representaciones de un mismo objeto pueden resultar heterogéneas; esto es, el contenido de una representación en un registro dado puede ser sustancialmente diferente al contenido de otra representación en otro registro. Para Duval (2004), si se quieren comprender los procesos de aprendizaje de las matemáticas, es necesario tomar en cuenta muy seriamente esta heterogeneidad, estableciéndose así la necesidad de utilizar más de una representación para acceder al conocimiento matemático y de conocer la proveniencia de las transformaciones; es decir, si provienen de un tratamiento o de una conversión, que permita un análisis cognitivo de las dificultades en la adquisición de los conocimientos matemáticos.

Las representaciones matemáticas o sistemas simbólicos matemáticos son sistemas de representaciones especiales en los que el mundo representado es una estructura matemática y el mundo representante es un esquema de símbolos que contiene correspondencias especiales (Kaput, 1987). Los sistemas simbólicos matemáticos, de la misma

manera que el lenguaje natural y los sistemas pictóricos, controlan el influjo de experiencias al separarlos en pedazos, asignando los símbolos a dichos pedazos y coordinando estas notaciones en un entorno adecuado de matices y referentes complejos. El sistema de símbolos matemáticos y sus conexiones puede formar una estructura que actúa para representar otro sistema de símbolos que exhibe una autosimilitud cuando se amplifica (Meel, 2003). Es así que, a través de las representaciones externas de un objeto matemático y las relaciones entre ellas, es posible estructurar nuevas representaciones que pueden tener connotaciones diferentes a las que les dieron origen.

Entre las tantas representaciones que permite una función, está la representación analítica, la cual a su vez puede asumir varias formas: *algebraica*, consistente en una fórmula que permite modelar la situación en juego; *polinomio aritmético*, como resultado de reemplazar un valor numérico en un registro algebraico; *secuencia*, que permite determinar el patrón de regularidad o de crecimiento de una función. Otra de las representaciones semióticas de una función es la *tabular*, en la que se parte de una tabla y se ubican las entradas de tal forma que el número de columnas (o filas, según se ordenen) corresponde al total o gran parte de las cantidades que intervienen en la situación, que vienen a ser los elementos que constituyen la función en ese registro.

Al respecto, diversas investigaciones (Amaya, 2010; Carrión, 2007; Dolores, 2004; León y Corredor, 2003) han tratado de identificar los problemas más comunes en el aprendizaje de las matemáticas, a través del análisis de las producciones de los estudiantes, sus procedimientos espontáneos, sus errores y sus incomprensiones. Han intentado dilucidar elementos acerca de su funcionamiento cognitivo y proponer formas para mejorar la adquisición de habilidades que permitan a los alumnos acceder con mayor facilidad a los conceptos. Comprender matemáticas se manifiesta a través de habilidades a disposición y transferibles a diversos espacios de razonamiento en y sobre la realidad. Para Meel (2003), comprender en matemáticas significa saber qué hacer y por qué se debe hacer algo con un concepto matemático en el momento que se requiera utilizarlo, lo que proporciona vías para la transferencia y extracción de información desde la memoria del estudiante. Esta idea está relacionada con la manera como se construyen conceptos o redes conceptuales, vinculados a una serie de procesos cognitivos en relación con representaciones simbólicas; esto es, a la significación que un individuo le atribuye a un objeto matemático al vincular las representaciones internas y externas con una situación contextual.

Según Hitt (2000), una idea matemática -o procedimiento o hecho- es entendida si su representación mental es parte de una red de representaciones. El grado de entendimiento es determinado por el número y la fuerza de las conexiones. En este sentido, la adquisición de un concepto por parte de un individuo se dará cuando coordine por lo menos dos de sus representaciones. Esto tiene que ver, según Duval (1999), con la articulación entre sus representaciones semióticas. U*n concepto matemático visto en sus diferentes representaciones proporcionará información específica, dando solidez al concepto.* Para Meel (2003), estos mecanismos producen significados y, por lo tanto, desarrollan comprensión para el estudiante por medio de la creación de nuevos vínculos entre los sistemas de representación o los elementos de reorganización dentro de un sistema de representación.

De lo anterior se reconoce que la comprensión de un objeto matemático se hace por medio de las representaciones semióticas, lo cual se basa en la ley fundamental del funcionamiento cognitivo de Duval (1999): no hay noesis sin semiosis. Se manifiesta a través de la soltura en la actividad cognitiva de conversión. De aquí cabe destacar el papel de las representaciones semióticas como andamio en la adquisición de los conocimientos matemáticos. Se basan en tratamientos y conversiones entre registros, que permiten conexiones entre los elementos de una red (el concepto) así como de la estructura cognitiva (como un todo). Según Duval (2004), en matemáticas, poder cambiar de sistema de representación es una exigencia cognitiva absolutamente necesaria y fundamental, porque el acceso a los conocimientos matemáticos requiere la integración en una arquitectura cognitiva de los sistemas semióticos de representación. De hecho "se cree que la familiarización progresiva con un nuevo tipo de representación provoca de manera casi natural el pasaje de este tipo de representación a los tipos de representación anteriormente utilizados" (Duval, 2004, p.30).

Además, Duval (2012b) considera que las diferencias que separan las matemáticas de otros campos del conocimiento provienen del modo de acceso a los objetos estudiados: en matemáticas se hace por medio de la producción de representaciones semióticas y no por la percepción o la utilización de instrumentos, como ocurre en otras ciencias.

> Esto nos permitirá inferir tres ideas clave para describir el modo de funcionamiento cognitivo que caracteriza al pensamiento matemático. (1) Los registros son los sistemas productores de representaciones semióticas. (2) La comprensión en matemáticas moviliza siempre implícita o explícitamente al menos dos registros; dicho de otra manera, la comprensión en matemáticas requiere la coordinación y el funcionamiento en sinergia de varios registros. (3) Cada registro abre un campo de transformación de las representaciones, y por lo tanto, posibilidades de tratamiento matemático que le son propias (p.15).

Duval (2004) considera que el reto de la enseñanza para la formación inicial no es tanto la adquisición de tal o cual conocimiento matemático, sino -a través de ello- el desarrollo de las capacidades de pensamiento del alumno. El desarrollo de estas capacidades depende de adquisiciones funcionales de diferentes sistemas que se requieren para la comprensión de todos los conocimientos que él deberá adquirir, no solamente en la escuela, sino después de ella. Por estar en un mundo en el cual ningún individuo puede aprender de antemano lo que le será profesional o humanamente útil, el reto de la enseñanza en la formación inicial es dar al estudiante los medios para comprender y aprender por él mismo. Al respecto, la UNESCO (2005) considera que la escuela, como responsable tradicional de la educación de los miembros de una sociedad, debe bregar para que estos adquieran una formación básica que les permita aprender a aprender, y hacerlo continua, sistemática y permanentemente. Lo que está en juego, según Duval (2012a), es el desarrollo de la autonomía intelectual de los estudiantes. Desde esta perspectiva es que las matemáticas pueden aportar una gran contribución a la formación de los alumnos.

METODOLOGÍA

Se asume un estudio descriptivo de casos (Servan y Servan, 2010), bajo un enfoque cualitativo de tipo empírico (Bravin y Pievi, 2008). Las transformaciones entre registros, tanto tratamientos como conversiones, se constituyeron en las categorías de análisis de la investigación. Se desarrolló en tres etapas fundamentales:

a) Revisión documental: consistió en una búsqueda bibliográfica a fin de obtener antecedentes de investigaciones y fundamentar a nivel teórico lo relativo a las dificultades de los estudiantes con las transformaciones de representaciones del concepto de función.

b) Diseño y aplicación de instrumentos: se elaboraron, adecuaron y pusieron en marcha los protocolos empleados en la investigación.

c) Obtención y análisis interpretativo de resultados: teniendo en cuenta el desempeño estudiantil en las transformaciones entre registros del contenido función, se procesó la información recabada y se avanzó hacia la discusión de los hallazgos.

Los informantes fueron 50 estudiantes (E_n, con n = 1, 2, 3, …, 50) de undécimo grado de la media académica de una escuela pública colombiana, con edades entre 15 y 17 años, en un curso ordinario de pre-cálculo previo al ingreso a la universidad. Para este trabajo el desempeño fue de manera individual.

En una investigación más amplia, en la que se inscribe este trabajo, se utilizaron cuatro tipos de técnicas: cuestionarios escritos con preguntas abiertas, observación participante, entrevistas semiestructuradas y grupos de discusión. En cuanto a los cuestionarios, cabe señalar que se aplicó un total de seis, cada uno involucrando una situación problemática. Aquí se comparten los resultados relativos a una de las situaciones, en la que se consideró al registro tabular como registro principal. Los contenidos matemáticos requeridos ya habían sido desarrollados en el curso.

La situación presentada está constituida por ocho cuestiones a resolver:

En la siguiente tabla se muestran los costos de producción de una empresa de discos compactos.

Número de discos	*Costo (en dólares)*
1000	*116000*
2000	*128000*
3000	*140000*
5000	
6100	
	224000
15000	
72000	

1) *Termina de llenar la tabla.*
2) *Determina el costo de 5500 discos y de 14500 discos respectivamente.*
3) *Explica cómo obtuviste la respuesta a la pregunta 2).*
4) *¿Qué cantidades intervienen en la situación? ¿Cuáles varían y cuáles son constantes o permanecen fijas?*
5) *¿Qué relación de dependencia hay entre las variables?*
6) *Si se sabe que el costo de producción fue de 314000 dólares, ¿cuántos discos se produjeron?*
7) *Obtén una expresión matemática que permita calcular los costos de producción para cualquier cantidad de discos compactos.*
8) *Realiza una gráfica que represente esta situación.*

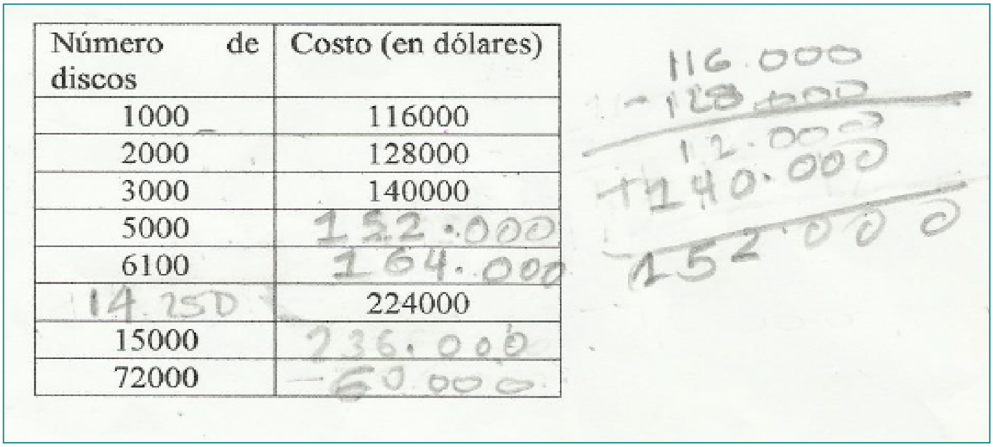
Para procesar la información se analizaron las resoluciones de los estudiantes para cada categoría de análisis, atendiendo tanto a los tratamientos como a las conversiones empleadas. Se empleó la técnica de análisis del contenido (Ander-Egg, 2003) para estudiar el contenido manifiesto de las producciones escritas al abordar las cuestiones planteadas. Se agruparon las resoluciones con respuestas similares y se fue registrando en una matriz de datos el porcentaje de alumnos de cada grupo así como las características de los procedimientos llevados a cabo, ejemplificando en algunos casos con el de algún estudiante en particular.

RESULTADOS

En lo que sigue se describen algunas características de los desempeños estudiantiles al realizar transformaciones de registros en la resolución de la situación planteada.

Cuestión 1. “Termina de llenar la tabla”.

Una característica de las resoluciones del 92% de los estudiantes fue el paso previo al registro analítico-aritmético, donde realizaron las operaciones que consideraron pertinentes, para el llenado de la tabla. Es decir, primero hicieron una conversión, utilizando el registro analítico-aritmético como registro auxiliar. Realizadas las operaciones (transformaciones tipo tratamientos) en este registro, volvieron a hacer otra conversión, al registro tabular como registro principal, y entonces procedieron a llenar la tabla (Fig. 1). Realizaron un tratamiento en cierto sentido sin autosuficiencia, necesitando de la articulación con el registro analítico-aritmético como registro auxiliar para poder funcionar. Sin embargo, teniendo en cuenta que ningún sistema de representación produce una representación cuyo contenido sea del todo completo y adecuado al objeto representado (Del Castillo, 2003), el recurso a otros registros podría considerarse oportuno y hasta conveniente, quedando la inquietud acerca de las reglas compartidas entre los registros en juego.



Número de discos	Costo (en dólares)
1000	116000
2000	128000
3000	140000
5000	152.000
6100	164.000
14.250	224000
15000	236.000
72000	60.000

Figura 1. Tabla completada por el estudiante E_8

Particularmente E_8 parece asumir de inmediato un modelo lineal afín de la situación. Encuentra la diferencia entre las dos primeras entradas (omitiendo signos) para conocer la constante de proporcionalidad directa (12000) cada 1000 unidades (discos). Procede a adicionar 12000 a filas consecutivas posteriores de la columna “costo”, sin detenerse demasiado a observar el incremento correspondiente en la cantidad de discos (pues en las tres primeras filas el incremento de discos es de a 1000 unidades, pero en la cuarta fila el incremento es de 2000 discos y en la siguiente es de 1100). En concordancia con lo planteado por Carrión (2007), en la resolución de E_8 se advierten errores tanto en la ubicación de las cantidades con las que se opera como en la escritura matemática implicada.

Cuestión 2. “Determina el costo de 5500 discos y de 14500 discos respectivamente”.

En su mayoría los estudiantes se percataron de que el incremento en el costo de producción era un múltiplo de 12. Sin embargo, al variarles el incremento en la cantidad de discos de 1000 a 100, no hicieron el cambio de 12000 a 1200 en los costos. Esto les impidió seguir un patrón para cualquier cantidad de discos.

Precisamente el 72% de los estudiantes identificó el patrón de regularidad y de crecimiento de la situación; sin embargo solo el 8% lo utilizó adecuadamente. El 12% empleó los datos de la tabla y los modificó con información que se puede deducir de la situación, pero que no aparece explícita en la tabla que se les pide llenar. El 6% de los estudiantes encontró el costo para producir cada disco si no se tuvieran costos fijos y lo utilizó para dar su respuesta. El resto trató de encontrar este valor, pero haciendo una regla de tres simple directa, sin excluir los costos fijos de producción y sin llegar a la respuesta pedida. Es así que se evidencian múltiples interpretaciones de la situación, y aunque no todas ellas son adaptadas a esta, sí muestran rasgos característicos genuinos del concepto de función; lo que según Gallardo, González y Quintanilla (2013) es un indicio claro de que algo se ha comprendido del concepto.

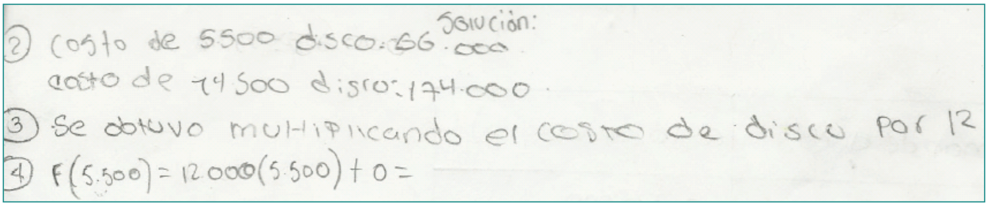


Figura 2. Descripción del procedimiento efectuado por el estudiante E12

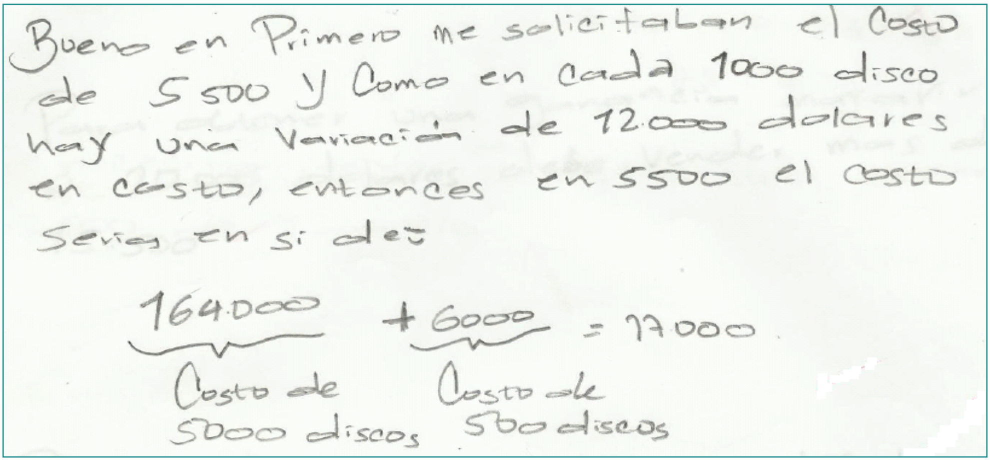
Cuestión 3. "Explica cómo obtuviste la respuesta a la pregunta 2)".

Fueron notorias las dificultades de los estudiantes al intentar describir los procesos realizados: el 36% realizó de manera adecuada los procedimientos y solo el 16% los describió correctamente, el 32% describió correctamente un procedimiento errado y los restantes (32%) no pudieron ni con el proceso ni con su descripción. Al tratar de explicar los procedimientos que siguieron para obtener sus respuestas, lo que hicieron fue repetir lo realizado anteriormente, acorde a lo reportado por Amaya y Barrera (2009). En las explicaciones dadas por los estudiantes se evidencian dificultades al pasar de cualquier registro de representación al del lenguaje materno (coloquial); es decir, esta conversión le resultó problemática a un grupo considerable de estudiantes. Esto coincide con los hallazgos de Caligaris, Schivo, Romiti y Sgreccia (2013), en este caso, en el ingreso a la universidad.

Un ejemplo de esta situación se muestra en la Fig. 2, donde el estudiante E_{12} manifestó que hizo algo que en realidad no es lo que se ve que hizo. Al resolver un polinomio aritmético dice que multiplicó por 12, cuando en realidad lo hizo por 12000. Los resultados de su resolución no coinciden con lo que le daría haciendo lo que dice que hizo (cuyos resultados sí serían válidos).

Sin embargo, al validar esta respuesta en un grupo de discusión, el estudiante da muestra de que su comunicación escrita fue la inadecuada, porque en su oralidad fue bien explícito aclarando adecuadamente lo que realizó. En general los estudiantes dan la cifra de cualquier cantidad sin decir los miles, incluso a veces también así lo escriben. Pero al cuestionárseles sobre la incoherencia de los valores, hicieron la aclaración que era 12000, acotando "todo el mundo dice 12". Fue prácticamente una constante en este grupo de estudiantes: ser más explícitos y precisos en su comunicación oral que en la escrita.

En la conversión al registro coloquial parece que los estudiantes dejaron el proceso de asimilación -en el sentido de Piaget- a medias, al quedarse solo en el manejo de datos, estableciendo pocos vínculos entre la nueva información y su estructura mental constituida (Meel, 2003). Es decir, lograron establecer pocas conexiones entre el contenido de los registros que los ayudara en la comprensión de la situación y el proceso de conexión entre las representaciones. Esto requiere un manejo adecuado de la relación entre el conocimiento y los elementos de la red, así como de la estructura como un todo. Acorde con estas ideas, el progreso matemático -lograr generalizar y justificar los procedimientos de solución a tipos de problemas cada vez más amplios (Godino et al, 2003)- fue logrado por pocos estudiantes (16%) en esta investigación. Y este proceso de establecer


Bueno en Primero me solicitaban el Costo de 5500 y Como en cada 1000 disco hay una Variación de 12.000 dolares en costo, entonces en 5500 el costo seria en si de:

$$\underbrace{164.000}_{\text{Costo de 5000 discos}} + \underbrace{6000}_{\text{Costo de 500 discos}} = 17.000$$

Figura 3. Descripción del procedimiento efectuado por el estudiante E21

congruencias es, según Del Castillo (2003), condición necesaria para la comprensión en matemáticas.

En el manuscrito que se muestra en la Fig. 3 se evidencia que el estudiante E_{21} reconoció algunos elementos significativos de la función, teniendo en cuenta que para Tall (1985) el propósito de toda función es mostrar cómo varía algo. El hecho de que un alumno reconozca que en la situación se da el proceso de variación es de gran relevancia para este estudio, por cuanto el hecho de llevarlos a realizar transformaciones de registros se convirtió en una intervención para la mejora en la comprensión del tema.

Cuestión 4. "¿Qué cantidades intervienen en la situación? ¿Cuáles varían y cuáles son constantes o permanecen fijas?".

Los estudiantes (64%) presentaron serias dificultades relacionadas con el reconocimiento de los elementos de la función y con el manejo de las operaciones; es decir, con la identificación del contenido de las representaciones y con el funcionamiento del registro, en términos de Duval (2004). Sin embargo, el 48% de ellos identificó ciertos elementos de la función, pero no alcanzó a dar respuestas del todo acertadas, por omitir otros. Por ejemplo, se dieron cuenta que por cada incremento de 1000 en la cantidad de discos se presentaba un incremento de 12000 dólares en el costo de producción, pero al dar su respuesta no tuvieron en cuenta que en la cuarta fila hubo un salto en la secuencia de número de discos (se omitió el 4000), por lo que en la primera entrada que llenaron de la tabla (correspondiente al costo para 5000 discos), en lugar de 164000 (140000+12000+12000) colocaron 152000, que era el valor correspondiente a 4000.

Otra de las dificultades fue relacionar los elementos de la función con su significado contextual. Por ejemplo, les costó aceptar que los valores de la función correspondieran con los costos de producción, que los costos fijos por unidad fueran 12 y no 12000, y que los costos fijos de producción fueran 104000 y no 116000, evidenciándose lo que Benítez (2010) llama interpretación local de la situación.

Cuestión 5. "¿Qué relación de dependencia hay entre las variables?".

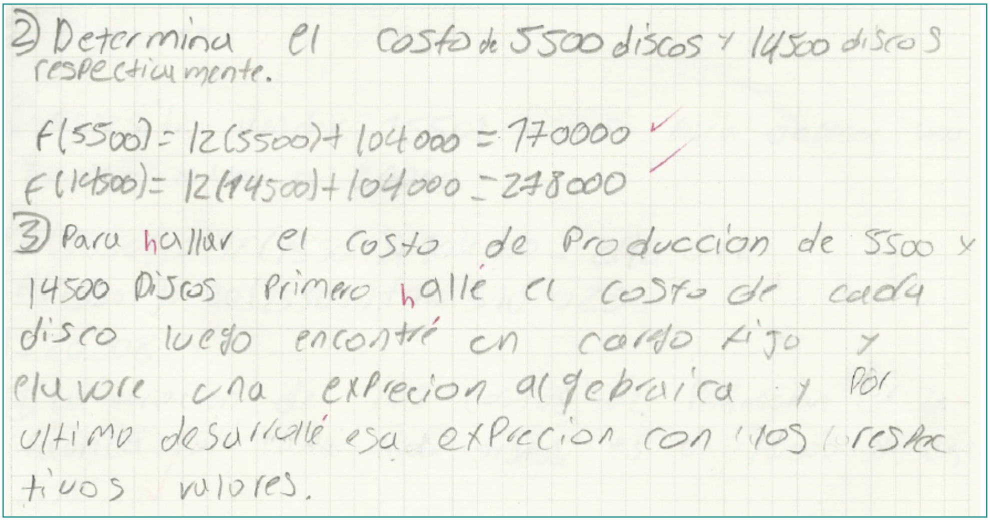
Un alto porcentaje de estudiantes (76%) presentó dificultades para relacionar los elementos de la función en una transformación tipo conversión. En cada registro pudieron identificar solo algunos elementos. Por ejemplo, ignoraron los costos fijos de producción y trabajaron con la función lineal como si fuera una función afín, evidenciándose un obstáculo en el sentido de Brousseau (1999). Aquellos que identificaron los elementos de la función (24%) también pudieron clasificarlos y establecer relaciones de dependencia entre ellos. Además, cabe advertir que el 16% de los estudiantes utilizó un registro auxiliar analítico-aritmético para dar respuesta a la consigna; mostrándose nuevamente que el proceso de hacer transformaciones entre registros no es una cuestión sencilla ni espontánea, es decir, estos procesos ontosemióticos de identificación de aspectos comunes en distintos registros suelen resultar complejos.

Cuestión 6: "Si se sabe que el costo de producción fue de 314000 dólares, ¿cuántos discos se produjeron?".

Ningún estudiante utilizó el concepto de ecuación para encontrar la incógnita solicitada, ni en la entrada de la tabla que implicaba un tratamiento, ni en la pregunta que implicaba una conversión al registro algebraico, coincidiendo en este sentido con lo reportado por Ochoviet y Oktaç (2011). Los que dieron con la respuesta, lo hicieron por tanteo (24%) o utilizando el patrón deducido en la secuencia (16%). Es decir, a los estudiantes se les dificultó más encontrar el número de discos cuando se les dio previamente el costo de producción para una cierta cantidad de discos, que el proceso inverso: hallar el costo de producción para una determinada cantidad dada de discos. El primer caso es un proceso que lleva implícito el concepto de ecuación, que no fue utilizado por ningún estudiante para dar respuesta a esta pregunta. El segundo caso parece ser más familiar a los estudiantes, ya que es dar solución a un polinomio aritmético -como el mostrado en la Fig. 4, con el que se trabaja con frecuencia en cursos anteriores y en asignaturas como Física y Química- o seguir el patrón de regularidad hasta dar con la respuesta.

Sin embargo resulta curioso que un grupo de estudiantes haya encontrado y utilizado una expresión algebraica que modelara la situación y no la hubieran utilizado para encontrar una incógnita. Aquí los estudiantes no pudieron concebir la letra como número generalizado, lo que les pudo impedir usar el concepto de ecuación para encontrar la incógnita solicitada. Esto es, establecer la equivalencia entre la expresión algebraica y el valor dado para los costos de producción que lo llevaría a plantear una ecuación y, de resolverla, a encontrar el número de discos correspondientes a esos costos de producción (fig. 4).

Además, cabe señalar que el 80% de los estudiantes no utilizó la información que había consignado en su tabla para responder otras preguntas, en concordancia con lo reportado por Amaya y Barrera (2009), donde la mayoría de los alumnos realizó nuevos procedimientos para responder una pregunta, cuya respuesta ya había obtenido al llenar la tabla.



2) Determina el costo de 5500 discos y 14500 discos respectivamente.

f(5500) = 12(5500)+104000 = 170000

f(14500) = 12(14500)+104000 = 278000

3) Para hallar el costo de produccion de 5500 y 14500 Discos primero hallé el costo de cada disco luego encontré en cargo fijo y elavore una exprecion algebraica y por ultimo desarrollé esa exprecion con los respectivos valores.

Figura 4. Descripción del procedimiento efectuado por el estudiante E18

Se evidencia en los estudiantes dificultades para conectar las representaciones en los registros tabular, analítico y del lenguaje materno, en sintonía con lo reportado por Sánchez-Matamoros et al. (2008), lo que según Hitt (2000) podría utilizarse como indicio de si se comprende o no la situación.

Cuestión 7. "Obtén una expresión matemática que permita calcular los costos de producción para cualquier cantidad de discos compactos".

El mismo grupo de estudiantes que pudo relacionar los elementos de la función modeló la situación funcional, recurriendo y sin recurrir a un registro auxiliar. De salida escribieron una expresión analítica y la utilizaron para obtener otras respuestas, como se muestra en la Fig. 4. El estudiante E_{18} presenta claras evidencias de haber encontrado una expresión algebraica y utilizarla para obtener algunas de las respuestas que se le solicitaron. Este resultado corrobora una vieja creencia popular según la cual es más fácil el trabajo con funciones partiendo del registro algebraico como registro principal. Además, hay una creencia generalizada entre los estudiantes que al solicitárseles una expresión matemática que modele la situación, se les está pidiendo que escriban una fórmula. De hecho, aquí un reducido grupo de estudiantes (4%) propuso como modelo una tabla. En general, no conciben como un modelo matemático otra representación que no sea la algebraica.

Cuestión 8. "Realiza una gráfica que represente esta situación".

En la conversión al registro gráfico también presentaron dificultades relacionadas específicamente con la congruencia entre los ejes y el sistema de unidades utilizado para demarcarlos. Colocaron en los ejes la secuencia de números en el orden en que los iban

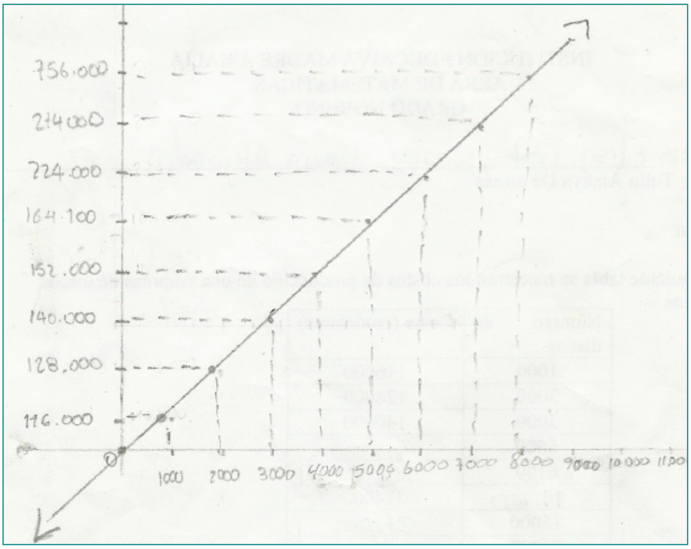


Figura 5. Gráfica realizada por el estudiante E5

encontrando al ir resolviendo el polinomio aritmético, sin tener en cuenta el orden y cardinal en la variable independiente. Algo similar fue reportado por Dolores (2004), quien encontró que los estudiantes asociaban el comportamiento de las imágenes en las gráficas con el comportamiento de sus abscisas, sin importarles el signo de sus ordenadas.

En el caso presente, los estudiantes sí tuvieron en cuenta el signo de las ordenadas, pero no la ubicación en los ejes. La dificultad estuvo asociada al funcionamiento del registro gráfico y a la coordinación con el tabular (Duval, 2004). En la Fig. 5 se puede ver que el estudiante E_5 asignó longitudes similares a los segmentos 0-116000 y 116000-128000; es decir, la secuencia que siguió en la marcación de los ejes no corresponde a una progresión aritmética como habría de esperarse. Además, en la resolución de este alumno se evidencia el uso de la función afín en lugar de la lineal. Los estudiantes tienen tendencia a hacer "pasar por el origen" a las representaciones gráficas de rectas.

Otro aspecto que cabe destacar es el relacionado con la continuidad de la gráfica. Aunque los valores del dominio son discretos, el estudiante E_5 los asumió como continuos, uniendo los puntos marcados hasta obtener una función continua como se muestra en la Fig. 5, quizás por esa "rara tendencia" que tienen los alumnos a unir todos los puntos de una función (Gatica, Tauber y Ruiz, 2002). Según estos autores, la graficación comprende acciones de interpretación y construcción. La interpretación se refiere a la habilidad de los estudiantes para leer y darle significado a una gráfica, mientras que la construcción se refiere a crear algo nuevo, elaborando una gráfica a partir de una regla funcional dada. En este caso, parece que ambas acciones se realizaron parcialmente: la interpretación porque no pudieron relacionar elementos de la función del registro tabular con sus equivalentes en el registro gráfico, confundiendo por ejemplo dominio con rango; la construcción porque no ubicaron los elementos que encontraron en el registro tabular en el lugar correspondiente en el registro gráfico. De esta manera las dos representaciones, tabular y gráfica, no resultaron congruentes. Además, para los estudiantes, la gráfica de la función depende de los puntos que se tomen para graficarla.

CONCLUSIONES

Los resultados de la investigación muestran que la transformación de registros de representación de una función es una actividad compleja para estudiantes de la media académica, a pesar de que en dos cursos previos habían trabajado con funciones. La misma no es espontánea y requiere una enseñanza intencionada que, en concordancia con Romiti, Sgreccia y Caligaris (2012), procure atender de manera equitativa a los diversos registros, tanto en actividades de tratamiento como de conversión.

Las dificultades de los estudiantes estuvieron relacionadas con la identificación del contenido de las representaciones, la utilización del concepto de ecuación para encontrar una incógnita, el funcionamiento de los registros y la coordinación o conversión entre dichos registros.

En cuanto a la identificación del contenido de una función en el registro tabular, como registro de partida, la mayoría de los estudiantes pudo identificar algunos elementos, pero no los suficientes para hacer transformaciones acordes a las cuestiones solicitadas. Por ejemplo, muchos se dieron cuenta que la secuencia para los costos iba de 12000 en 12000 cuando el número de discos cambiaba de 1000 en 1000. Sin embargo, esto no fue suficiente para determinar el patrón de crecimiento de la situación. Trabajaron la función lineal como si fuera una función afín y para encontrar los resultados solicitados realizaron una regla de tres simple directa. Este hecho les impidió llenar correctamente la tabla, dar respuestas acertadas a las cuestiones planteadas, y realizar correctamente la gráfica. No obstante, los estudiantes identificaron en la situación rasgos característicos genuinos del concepto de función, lo que es un gran avance en su desarrollo de pensamiento variacional y un indicio claro de que algo se ha comprendido del concepto. Pero dio la impresión que fue una comprensión parcial, que se evidenció solo en algunas de las cuestiones planteadas, como si de una pregunta a otra se hubiera cambiado la muestra de estudiantes.

Teniendo en cuenta lo anterior se plantea como una posibilidad de trabajo en el aula, para contribuir a mejorar estos desempeños estudiantiles, formular preguntas intermedias del tipo: *¿cómo está constituido el costo de producción de discos?, ¿hay costos fijos (independientes de la cantidad a producir) y costos variables (según la cantidad de discos que se produzcan)?, ¿podrías identificarlos: costo fijo:….; costo de 1000 discos:…, de 500 discos:…, de 100 discos:…, de 1 disco:…?*

En la utilización del concepto de ecuación para encontrar una incógnita, la dificultad estuvo en que la mayoría no pudo hallar una expresión algebraica que representara la situación, y los que la obtuvieron no establecieron la equivalencia entre esta y el valor numérico dado para los costos de producción, lo que los llevaría a la ecuación requerida. Teniendo en cuenta la dificultad al hacer conversiones entre los registros algebraico y coloquial -en ambos sentidos-, una posible guía para ello es: *sabemos que el costo fijo es 104000 dólares, que el costo por unidad es de 12 dólares y que se gastaron 314000 dólares en producción de discos:*

104000	+	*12*		*x*	=	*314000*
costo fijo		*costo de cada unidad*		*cantidad de discos producidos*		*lo que se gastó*

¿Puedes obtener la cantidad de discos producidos? Hazlo e indica otra/s forma/s posible/s de hallar dicha cantidad.

En el funcionamiento de los registros y la coordinación entre ellos fue posible apreciar que los estudiantes no reconocieron el registro tabular como apoyo válido para sustentar sus respuestas; necesitaron verificar sus respuestas en el registro algebraico analítico antes de darlas. Para fortalecer este aspecto (y sin ignorar el recurso de cálculos mentales) una propuesta es: *explicitar en la consigna "solo empleando la tabla"; solicitar "explicar con tus propias palabras qué información aporta la tabla"; ¿le agregarías o quitarías filas/columnas a la tabla?, ¿sí/no por qué?; ¿con qué prefieren trabajar las funciones: tablas, fórmulas, gráficos?, ¿por qué?*

En las transformaciones tipo conversión utilizaron como andamio el registro algebraico-analítico como paso previo hacia cualquier otro registro; incluso hasta en las transformaciones tipo tratamiento siempre acudieron al registro algebraico-analítico como paso obligado. Es decir, no se dieron tratamientos puros, siempre acudieron a este registro auxiliar para hacer modificaciones o verificar cualquier cuestión por la que se les indagara. Utilizando el registro tabular como registro principal hicieron las operaciones en el registro algebraico-analítico y volvieron a hacer otra conversión de regreso al tabular como registro principal, donde terminaron el tratamiento. Aquí surge la duda de si se violó el principio de autosuficiencia de los registros ante una transformación tipo tratamiento (Duval, 2004) o es que estos dos registros comparten algunas reglas.

Finalmente, coincidimos con D'Amore (2006) en que el uso de distintas representaciones y su progresiva articulación enriquecen el significado, conocimiento, comprensión del objeto así como su complejidad. Por ello robustecer el trabajo escolar en este sentido es una de nuestras tareas.

REFERENCIAS

Amaya, T. (2010). Errores de los estudiantes de octavo grado en el trabajo pre-algebraico. *Revista de la Escuela de Ciencias de la Educación, 6*(5), 225-244.

Amaya, T. y Barrera, J. (2009). Un estudio de la variación utilizando funciones en estudiantes de la media académica. En P. Lestón (Ed.). *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, 22* (pp.93-99). México DF: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Ander-Egg, E. (2003). *Métodos y Técnicas de Investigación Social IV. Técnicas para la recogida de datos e información.* Buenos Aires: Lumen.

Benítez, A. (2010). Estudio numérico de la gráfica para construir su expresión algebraica. El caso de los polinomios de grado 2 y 3. *Educación Matemática, 22*(1), 5-29.

Bravin, C. y Pievi, N. (2008). *Documento metodológico orientador para la investigación educativa*. Buenos Aires: Ministerio de Educación.

Brousseau, G. (1999). Los Obstáculos Epistemológicos y los Problemas en Matemáticas. Traducido por Hernández y Villalba del original: Brousseau, G. (1983). Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *4*(2), 165-198.

Caligaris, M., Schivo, M.E., Romiti, M.R. y Sgreccia, N. (2013). *Naturalmente difícil*. Ponencia presentada en la XXXVI Reunión de Educación Matemática. Rosario, septiembre.

Carrión, V. (2007). Análisis de errores de estudiantes y profesores en expresiones combinadas con números naturales. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, (11), 19-57.

Cordero, F. (1997). El entendimiento de algunas categorías del conocimiento del cálculo y análisis: el caso del comportamiento tendencial de las funciones. *Revista Latinoamericana de Investigación en Educación Matemática*, *1*(1), 56-74.

D'Amore, B. (2006). Objetos, significados, representaciones semióticas y sentido. *Revista Latinoamericana de Investigación en Educación Matemática, 9*(1), 177-195.

Del Castillo, A. (2003). *La articulación de los registros gráfico, analítico y de la lengua natural*. Recuperado el 9 de marzo de 2013, de http://www.semana.mat.uson.mx/Memorias/pupi.pdf.

Dolores, C. (2004). Acerca del análisis de funciones a través de sus gráficas: concepciones alternativas de estudiantes de bachillerato. *Revista Latinoamericana de Investigación en Educación Matemática, 7*(3), 195-218.

Duval, R. (1999). *Semiosis y pensamiento humano. Registros semióticos y aprendizajes intelectuales*. Cali: Universidad del Valle.

Duval, R. (2004). *Los problemas fundamentales en el aprendizaje de las matemáticas y las formas superiores del conocimiento*. Cali: Universidad del Valle.

Duval, R. (2012a). Preguntas y desafíos de la enseñanza de las matemáticas para todos: implicaciones para la investigación en didáctica. En U. Malaspina (Coord.). *Resúmenes del VI Coloquio Internacional de Didáctica de las Matemáticas: avances y desafíos actuales* (pp.3-6). Lima: Pontificia Universidad Católica del Perú.

Duval, R. (2012b). Lo esencial de los procesos cognitivos de comprensión en matemáticas: los registros de representación semiótica. En U. Malaspina (Coord.). *Resúmenes del VI Coloquio Internacional de Didáctica de las Matemáticas: avances y desafíos actuales* (pp.14-17). Lima: Pontificia Universidad Católica del Perú.

Gallardo, J., González, J. y Quintanilla, V. (2013). Tareas, textos y usos del conocimiento matemático: apuntes a la interpretación de la comprensión desde el cálculo aritmético elemental. *Revista Educación Matemática, 25*(2), 61- 88.

Gatica, N., Maz-Machado, A., May, G., Cosci, C., Echevarría, G. y Renaudo, J. (2010). Un acercamiento a la idea de continuidad de funciones en estudiantes de Ciencias Económicas. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, (22), 121-131.

Gatica, N., Tauber, L. y Ruiz, F. (2002). Registros de representación puestos en juego en el concepto de función: un estudio en estudiantes ingresantes a la carrera de ingeniería. En M. Penalva, G. Torregrosa y J. Valls (Eds.). *Aportaciones de la didáctica de la matemática a diferentes perfiles profesionales* (pp.417-430). Alicante: Universidad de Alicante.

Godino, J., Font, V. y Batanero, C. (2003). *Fundamentos de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas para maestros*. Granada: Universidad de Granada.

Hitt, F. (2000). Representations and mathematics visualization. En M.L. Fernández (Ed.). *Proceedings, PME-NA 22* (pp.131-147). Tucson: ERIC Publications.

Hitt, F. (2003a). Una Reflexión Sobre la Construcción de Conceptos Matemáticos en Ambientes con Tecnología. *Boletín de la Asociación Matemática Venezolana*, *10*(2), 213-223.

Hitt, F. (2003b). *Dificultades en el aprendizaje del cálculo. Décimo primer Encuentro de Profesores de Matemáticas del Nivel Medio Superior*. Morelia: Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo.

Kaput, J. (1987). Representation and mathematics. En C. Janvier (Ed.). *Problems of representation in mathematics learning and problem solving* (pp.19-26). Hillsdale: Erlbaum.

Kaput, J. (1989). Linking representations in the symbol systems of algebra. En C.Kieran & S. Wagner (Eds.). *A research agenda for the learning and teaching of algebra* (pp.167-194). Reston: NCTM.

León, O. y Corredor, D. (2003). *Argumentar y validar en matemáticas ¿una relación necesaria? Hacía una comprensión del desarrollo de competencias argumentativas en matemáticas*. Bogotá: Colciencias y Universidad de Valle.

Meel, D. (2003). Modelos y teorías de la comprensión matemática: Comparación de los modelos de Pirie y Kieren sobre el crecimiento de la comprensión matemática y la Teoría APOE. *Revista Latinoamericana de Investigación en Educación Matemática, 6*(3), 221-271.

Ministerio de Educación Nacional. (2005). *Potenciar el pensamiento matemático: un reto escolar. Estándares básicos de competencias en matemáticas*. Bogotá: Ministerio de Educación Nacional.

National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principios y Estándares para la Educación Matemática*. Traducción al español, Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales. Sevilla: Proyecto Sur.

Ochoviet, C. y Oktaç, A. (2011). Algunos aspectos del desarrollo del pensamiento algebraico: el concepto de raíz y de variable en ecuaciones polinómicas de segundo grado. Un estudio de casos realizado con estudiantes uruguayos de enseñanza secundaria. *Revista Educación Matemática, 23*(3), 91-121.

Romiti, M.R., Sgreccia, N. y Caligaris, M. (2012). *Propuesta de mejora en el aprendizaje del concepto de límite de una función real*. X Conferencia Argentina de Educación Matemática. Buenos Aires, septiembre.

Sánchez-Matamoros, G., García, M. y Llinares, S. (2008). La comprensión de la derivada como objeto de investigación en didáctica de la matemática. *Revista Latinoamericana de Investigación en Educación Matemática, 11*(2), 267-296.

Servan, P. y Servan, I. (2010). Intervención en la familia. Estudio de casos. En G. Serrano (Coord.). *Modelo de investigación cualitativa en educación social y animación sociocultural: animaciones prácticas* (pp.221-252). Madrid: Narcea.

Tall, D. (1985). Understanding the calculus. *Mathematics Teaching, 1*(10), 49-53.

UNESCO. (2005). *Hacia las sociedades del conocimiento. Informe mundial de la UNESCO*. Recuperado el 7 de enero de 2013, de http://unesdoc.unesco.org/images/0014/001419/141908s.pdf.

Épsilon - *Revista de Educación Matemática* 2014, Vol. 31(3), nº 88, 39-54

Trayectorias de aprendizaje de la multiplicación y la división de cuatro a siete años

Mónica Ramírez García
monica.ramirez@edu.ucm.es
Universidad Complutense de Madrid
Carlos de Castro Hernández
carlos.decastro@uam.es
Universidad Autónoma de Madrid

Resumen: *Describimos una trayectoria de aprendizaje de la multiplicación y la división con niños de 4 a 7 años. Para ello, definimos las trayectorias de aprendizaje y valoramos la importancia de su consideración en los primeros años. Después, mostramos las trayectorias a través de una experiencia desarrollada en un colegio con niños de 4 a 7 años. Los niños desarrollan estrategias informales de modelización directa para resolver problemas de multiplicación y división de complejidad creciente, mostrando su evolución en el uso de representaciones, materiales manipulativos y en el proceso de simbolización.*
Palabras clave: *Educación infantil, división, multiplicación, resolución de problemas, trayectorias de aprendizaje.*

Learning trajectories for multiplication and division from four to seven years

Abstract: *We describe a learning trajectory for multiplication and division with children from four to seven years. To this end, we define learning trajectories and value the importance of reflecting on them in the early years. Then we show the trajectories through an experience developed in a school with children from four to seven years. Children develop informal direct modeling strategies to solve multiplication and division problems of increasing complexity, showing their evolution in the use of representations, manipulatives and in the process of symbolization.*
Keywords: *Early childhood, division, multiplication, problem solving, learning trajectories.*

1. INTRODUCCIÓN

Este artículo trata sobre el aprendizaje de la multiplicación y la división de un modo algo diferente al habitual, pues se centra en el aprendizaje informal de dichas operaciones que tiene lugar (o podría tenerlo) entre los 4 y los 7 años, antes de comenzar con el estudio formal de las mismas. Para comenzar, parece oportuno establecer un marco curricular de referencia que centramos, por brevedad, en la multiplicación. Con respecto a esta operación, en el currículo de educación primaria de la Ley Orgánica de Educación (LOE) (MEC, 2007) se proponía la "construcción de las tablas de multiplicar del 2, 5 y 10" (p. 31557) para el primer ciclo de primaria (primer y segundo cursos) y la "construcción y memorización de las tablas de multiplicar" (p. 31559) para el segundo ciclo (tercero y cuarto cursos de primaria). La reciente orden que establece el nuevo currículo de primaria para el ámbito de gestión del Ministerio de Educación, Cultura y Deporte incluye la "iniciación a la construcción de las tablas de multiplicar" (MEC, 2014, p. 34069) en primer curso. Precisando más el contenido de esta "iniciación", el borrador del currículo de la Comunidad de Madrid propone la memorización de las tablas de multiplicar del 0, 1, 2 y 5 en primer curso de educación primaria (Consejería de Educación, Cultura y Deporte de la Comunidad de Madrid, 2014). Resumiendo, la línea que marcan los actuales cambios legislativos es la de adelantar un año la memorización de algunas de las tablas de multiplicar. Esta opción puede resultar polémica, puesto que resulta antitética con otros planteamientos curriculares recientes de gran prestigio, como la propuesta de los *Focos Curriculares* (CCSSI, 2010), donde se recomienda para el cuarto grado de primaria que "los estudiantes usen su comprensión de la multiplicación para desarrollar una recuperación rápida [de la memoria] de las tablas de multiplicar" (p. 16).

Castro, Cañadas y Castro-Rodríguez (2013) indican que los niños son capaces de resolver situaciones aritméticas sencillas desde los 3 años, y que la resistencia a presentarles estas situaciones en esta edad, puede provocar que no consigan dotar de significado, más adelante, al algoritmo que aprenderán en primaria (p. 9). Así, los niños deberían tener la oportunidad de construir significados propios de las operaciones aritméticas sin necesidad de (previamente a su) instrucción formal. En línea con este planteamiento, en este artículo describimos una *trayectoria de aprendizaje* que los maestros y maestras de educación infantil y de primer curso de primaria podrán seguir con sus alumnos para que construyan significados de la multiplicación y la división previamente al aprendizaje formal de dichas operaciones en segundo y tercer cursos.

Trayectorias de aprendizaje en educación matemática

Una trayectoria de aprendizaje tiene tres componentes: un objetivo, una progresión a través de la cual los niños van evolucionando hasta lograr dicho objetivo, y una serie de actividades de enseñanza o tareas vinculadas a cada nivel de pensamiento que ayudan a los niños a desarrollar niveles superiores de pensamiento y a alcanzar el objetivo propuesto (Clements y Sarama, 2009). El objetivo, en una trayectoria de aprendizaje, es una de las *grandes ideas matemáticas*, que ocupan un lugar privilegiado en el aprendizaje de las matemáticas, y se describen en importantes documentos curriculares (NAEYC y NCTM, 2013; NCTM, 2003, OCDE, 2005). Por ejemplo, "una gran idea matemática es

que el conteo puede usarse para determinar cuántos hay en una colección" (Clements y Sarama, 2009, p. 3). Las progresiones evolutivas describen los pasos que los niños suelen seguir para lograr destreza y comprensión de un determinado tema matemático. Por ejemplo, para resolver problemas aritméticos verbales de estructura aditiva, los niños suelen pasar por estrategias de modelización directa, después de conteo y, finalmente, de uso de hechos numéricos básicos o derivados (Carpenter, Fennema, Franke, Levi y Empson, 1999). Se puede establecer una correspondencia entre estos tipos de estrategias y los niveles evolutivos en el aprendizaje de la adición establecidos por Fuson (1992). Clements y Sarama (2009) se refieren a estas progresiones como *caminos de aprendizaje*. Por último, ligadas estrechamente a los niveles de pensamiento, hay conjuntos de tareas que conformarían un *camino de enseñanza* establecido con el fin de facilitar la progresión de los niños a lo largo del correspondiente *camino de aprendizaje*.

El concepto de trayectoria de aprendizaje ha tenido un largo recorrido en la educación matemática desde su origen en 1995. Se puede profundizar en esta idea, su origen, y sus diferentes acepciones y usos en los trabajos de Gómez, González y Romero (2014) y de Gómez y Lupiáñez (2007).

En la posición conjunta sobre el aprendizaje de las matemáticas en los primeros años (NAEYC y NCTM, 2013, p. 7), entre las orientaciones que se dan para las propuestas para el aula está "asegurar que el currículo sea coherente y compatible con las relaciones y secuencias conocidas de las ideas matemáticas fundamentales". En este punto del documento se hace referencia explícita a la importancia de las trayectorias de aprendizaje como referencia para guiar la enseñanza.

Las trayectorias de aprendizaje y su fundamentación en la investigación

En este apartado queremos incidir en una idea que nos parece relevante: las trayectorias de aprendizaje deben estar sólidamente basadas en la investigación en sus tres componentes (objetivo, camino de aprendizaje y camino de enseñanza). Daro, Mosher y Corcoran (2011) proponen ejemplos de trayectorias de aprendizaje entre las cuales figura un marco para el aprendizaje de la multiplicación (p. 81). En este trabajo, por brevedad, tomamos, a modo de ejemplo, la división para ilustrar la conexión de las trayectorias con los resultados de investigación. Se puede constatar que la experiencia que relataremos en el apartado siguiente está basada en estas referencias teóricas.

Clements (2004) indica que el *particionamiento*, operación de descomponer un conjunto de objetos en varios conjuntos de igual tamaño, es una idea fácilmente comprensible para los niños, que surge en situaciones de reparto alrededor de los 3 años de edad. También a los tres años pueden dividir una colección en conjuntos iguales de un cardinal dado, si los subconjuntos son muy pequeños (división medida). Muchos niños de 4 o 5 años pueden trabajar con números mayores inventando una estrategia de correspondencia uno a uno para dividir la colección inicial en subconjuntos iguales. La idea es fundacional para todos los tipos de situaciones multiplicativas y de división medida (donde se conoce el número de objetos en cada grupo) y de división partitiva (donde se conoce el número de grupos). Pero las complejidades de encontrar soluciones exactas con números mayores, excepto mediante ensayo y error y a través de la reflexión sobre una serie de acciones repetidas, hacen que esta idea sea mejor captada en detalle en cursos superiores

(Clements, 2004, pp. 24-25). Precisando acerca del tamaño de las cantidades en los problemas, Clements (2004, p. 36) indica que a los 4 años los niños pueden utilizar estrategias informales para repartir hasta 10 objetos entre dos niños y que a los 5 años son capaces de repartir hasta 20 objetos en partes iguales entre 3, 4 o 5 personas, y de formar, con hasta 20 objetos, grupos iguales de 2 a 5 objetos, determinando el número total de grupos. Con 6 años, manejan cantidades superiores, de hasta 100, repartiéndolas entre hasta 10 personas y agrupándolas en grupos iguales de hasta 10 objetos.

Dentro de nuestra línea de trabajo sobre resolución de problemas aritméticos verbales en educación infantil, hemos observado en trabajos anteriores cómo los niños resuelven problemas de estructura multiplicativa, de multiplicación y división medida (De Castro, Molina, Gutiérrez, Martínez y Escorial, 2012), problemas de reparto igualatorio (López y De Castro, 2014), de comparación multiplicativa, de multiplicación y división (De Castro, Walsh, Del Coso, Salvador, González y Escorial, 2009) y de descomposición factorial (De Castro y Hernández, 2014). Todos estos trabajos se han realizado con niños de 5-6 años, en último curso de educación infantil. Recomendamos su lectura como complemento a este artículo, por versar sobre problemas de tipos diferentes a los del presente trabajo, que no se plantean habitualmente en educación infantil. En este artículo, nuestro objetivo es mostrar una panorámica más amplia en cuanto al rango de edad, sobre los problemas de estructura multiplicativa, abarcando desde los 4 a los 7 años, e incluyendo en primer curso de primaria problemas de multiplicación y división agrupamiento con grupos de diez, para vincular los problemas de estructura multiplicativa con el concepto de decena (Carpenter, Franke, Jacobs, Fennema y Empson, 1997; Ramírez y De Castro, 2014).

2. DESCRIPCIÓN DE LAS TRAYECTORIAS A LO LARGO DE TRES CURSOS: 4-5, 5-6 Y 6-7 AÑOS

En este apartado, describimos el desarrollo de varias sesiones de talleres de resolución de problemas, realizadas en el CEIP Virgen de Peña Sacra, de Manzanares el Real (Madrid), con niños pertenecientes a tres cursos diferentes, con edades comprendidas entre los cuatro y los siete años. La metodología que seguimos en estos talleres está descrita en trabajos anteriores (De Castro y otros, 2009; De Castro y otros, 2012). De un modo muy sucinto, planteamos problemas aritméticos basados en la lectura de un cuento (para favorecer la comprensión del enunciado), sin enseñanza previa, y dando una libertad absoluta en el uso de materiales para resolver los problemas razonando con la ayuda de objetos (cubos encajables, materiales manipulativos, dibujos, etc.). Al comentar el trabajo de los alumnos, nos hemos centrado en mostrar la evolución que se observa a lo largo de estos tres cursos, de las estrategias, uso de materiales y representaciones para los problemas de multiplicación y división.

Multiplicación en un aula de 4-5 años

En la resolución de problemas con niños de 4 y 5 años es importante que el tamaño de los números sea bajo, para adaptarnos a la capacidad de conteo de los pequeños

Figura 1. Lectura del cuento y momento de explicación de Óscar.

(Clements, 2004). La referencia que tomamos es que, hasta mitad de curso, no superemos los 6 objetos. En nuestra experimentación, uno de los primeros problemas está basado en la lectura del cuento "Chivos chivones" (González y Fernández, 2007). A lo largo del cuento, los tres chivos, y sus cuernos, aparecen y son mencionados continuamente. La lectura repetida del cuento (en varios días diferentes) permite a los niños imaginar la situación descrita en el enunciado del problema. Así, a partir del cuento, planteamos a los niños el siguiente problema: Si había tres chivos, y cada uno tiene dos cuernos. ¿Cuántos cuernos tienen en total entre los tres? Al trabajar con cantidades tan bajas, que pueden representarse con los dedos, algunos niños resuelven ya el problema en el momento de la lectura y el planteamiento del problema, todavía en la "asamblea" (Figura 1a). Algunos niños resuelven el problema mediante un dibujo. Guillermo representa los cuernos de los chivos utilizando tres colores diferentes para diferenciar qué cuernos corresponden a cada chivo (Figura 1c). En la Figura 1b, vemos cómo la maestra sujeta la hoja de trabajo a Guillermo y le va preguntando sobre el significado de sus representaciones. Con este apoyo, Guillermo va explicando cómo ha resuelto el problema.

Algunos niños dan el resultado, pero la maestra está interesada en que todos comprendan la situación, y que los que creen que han resuelto el problema, lo comprueben en el trabajo individual, y le expliquen cómo lo han hecho. Se produce la siguiente conversación:

- Bea: A ver, ¿alguien se acuerda de cómo era el problema?
- Óscar: Éstos [Pone con los dedos seis, que es el resultado].
- Bea: Sí. Esa es la solución que tú crees. Seis, ¿no? Pero, ¿cuál era el problema?
- Mario: Seis. El problema es seis [De nuevo, se refiere al resultado].
- Guillermo: Dos cuernos en cada chivo.
- Bea: En cada chivo y, ¿cuántos chivos hay?
- Nerea: Seis.
- Guillermo: Tres [Corrige a Nerea y lo indica poniendo tres con los dedos].
- Bea: Tres, con dos cuernos en cada chivo, ¿cuántos cuernos hay en total entre los tres?
- Nerea: Seis [Pone seis con los dedos].
- Guillermo: Seis.

– Bea: Ahora me decís por qué pensáis que son seis [Con "ahora", la maestra se refiere al momento en que, durante el trabajo individual, pase preguntando a cada niño cómo lo ha hecho].

Óscar resuelve el problema con el rekenrek. Este es un ábaco holandés, inventado en 1991 por Adrian Treffers, del Instituto Freudenthal, que se utiliza como modelo visual para la iniciación al cálculo. Óscar utiliza las cuentas de la varilla superior para representar los cuernos, y las cuentas de la varilla inferior para los chivos. En las dos primeras imágenes de la Figura 2, vemos que levanta dos dedos (cuernos) en su mano derecha y el pulgar de su mano izquierda (chivo). Interpretamos estos gestos con los dedos como una "segunda" representación, que refuerza la representación con el ábaco, y que Óscar hace para comprobar su procedimiento. Después, va añadiendo dos cuentas en la varilla de arriba por cada una en la varilla de abajo. Finalmente, cuando Beatriz (la maestra) pasa a su lado, Óscar separar las cuentas de la varilla inferior, que representan a los tres chivos, para enfatizar y explicar a la maestra la correspondencia dos a uno entre cuernos y chivos (Figura 2d).

División en un aula de 4-5 años

Basándonos en la lectura del cuento "¿A qué sabe la luna?" (Grejniec, 2004), planteamos el siguiente problema en el aula de 4-5 años: Si el ratón reparte seis trocitos de luna entre el zorro y la cebra, ¿cuántos trozos le puede dar a cada uno? En este problema damos por válida cualquier descomposición del seis, aunque observaremos ya la tendencia a los repartos equitativos. Enseguida empezamos a oír: "Ocho", "Siete". Beatriz repite el enunciado y de nuevo los niños dan estimaciones o intentan "adivinar el resultado": "Siete, "Dos", "Ocho", "No, no. Seis".

En la Figura 3, vemos el proceso de resolución de Nerea y de Diego. Los dos alumnos, y todos los que resolvieron este problema lo hicieron con cubos encajables, utilizando una estrategia de modelización directa: el "reparto" por unidades. Comienza por la representación del zorro y la cebra con los cubos negro y morado de la Figura 3b (Nerea), y el verde y naranja en la Figura 3d (Diego). A partir de ahí, se representan los trozos de luna con 6 cubos encajables y se van repartiendo uno a uno colocándose alternativamente junto a los cubos que representan al zorro y la cebra. Finalmente, se cuentan los cubos (trozos de luna) que hay junto a cada animal. En la Figura 3d, observamos cómo Diego mantiene ligeramente separados los cubos iniciales, que representan a los animales, de los cubos restantes, que representan trozos de luna, a fin de no confundirlos en el recuento final.

Multiplicación en un aula de 5-6 años

En el aula de 5-6 años, se plantea el problema de multiplicación: "¿Cuántos sándwiches de miel tiene que preparar mamá oso si hay seis osos y cada uno quiere dos sándwiches?". Al igual que ocurre en el caso de la división, los niños utilizan la misma estrategia básica que en 4-5 años, pero con números mayores, mayor variedad de materiales, y con presencia de representaciones simbólicas. Un aspecto que destacamos es que, en ausencia de instrucción sobre el proceso de resolución, algunas representaciones tienen un marcado acento personal, que dificulta que las personas que las ven puedan interpretarlas de forma sencilla. Así, en la Figura 4a, Joshua representa los 12 sándwiches

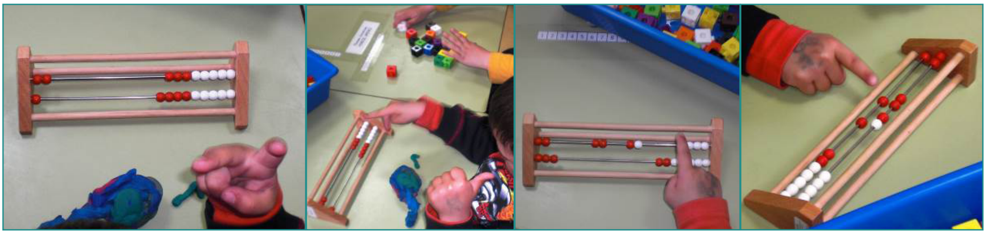


Figura 2. Proceso de resolución/explicación de Óscar con el rekenrek.

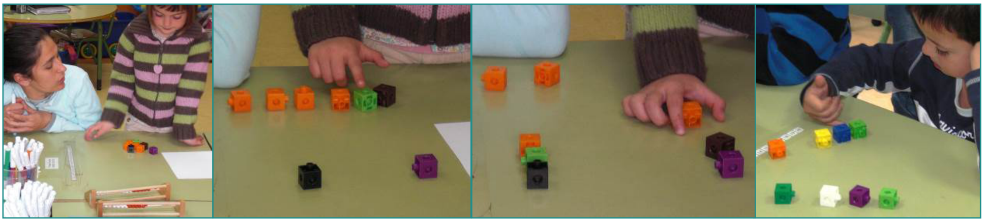


Figura 3. Proceso de resolución/explicación de Nerea y Diego.

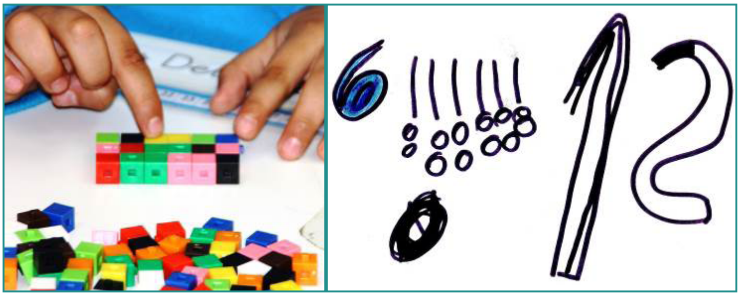


Figura 4. Estrategia de Joshua y dibujo de Noelia.

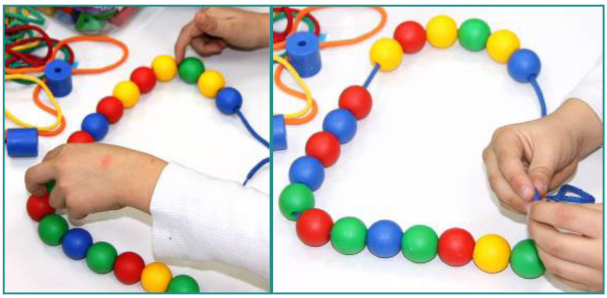


Figura 5. Estrategia de Eloy.

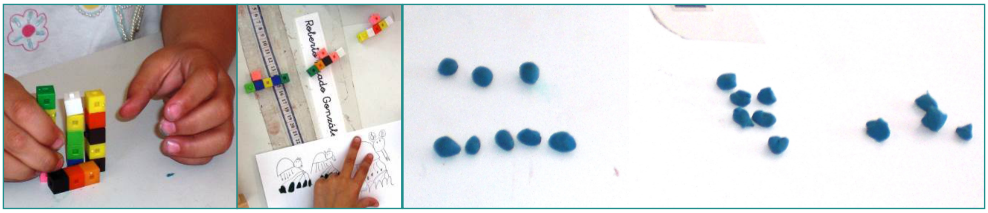


Figura 6. Evolución de las estrategias infantiles en problemas de división-reparto en 5-6 años (I).

y los 6 osos con tres filas de 6 cubos, donde la primera fila representa los osos y las restantes los sándwiches. Por el contrario, en el dibujo de Noelia (Figura 4b), se diferencian perfectamente las representaciones de ambas cantidades, y se aprecia el paso a la representación simbólica, con numerales escritos, de las cantidades.

Eloy utiliza cuentas con las que va formando un collar de 18 cuentas (Figura 5). Las 12 de la izquierda representan los sándwiches, y las 6 de la derecha representan los osos. En la Figura 5b, se observa la separación entre unas cuentas y otras. En la Figura 5a, Eloy va señalando, por cada cuenta de la derecha (un oso), dos cuentas a la izquierda (sándwiches). En la imagen se ve cómo señala la cuarta cuenta por la derecha con el índice, mientras que abarca las cuentas 7 y 8 con dos dedos. Al igual que en la estrategia de Joshua, observando el collar no resulta fácil imaginar, antes de la explicación de Joshua, cómo se ha utilizado esta representación para resolver el problema.

División en un aula de 5-6 años

En el aula de 5-6 años, planteamos el problema: "Si hay 15 montones de hierba, y 3 chivos, ¿Cuántos montones de hierba se come cada chivo?". Si en 4-5 años repartíamos 6 objetos entre 2, en este caso, el tamaño de dividendo y divisor van aumentando. De nuevo, el enunciado puede interpretarse como problema de división (reparto equitativo) o como problema de descomposición aditiva en tres sumandos. En la Figura 6a, observamos la misma estrategia que vimos en 4-5 años. Los niños tienen, durante dos cursos, varias ocasiones de adquirir el esquema básico de reparto de objetos, representando ambas cantidades que aparecen en el enunciado. No obstante, más allá de esta estrategia básica, comenzamos a ver variaciones interesantes, que dan cuenta del desarrollo infantil en estas edades. Por ejemplo, Lía (Figura 6b), tras aplicar la estrategia de modelización directa de reparto, representa el reparto con un dibujo, cosa que no suele ocurrir con 4 años. Empiezan a surgir soluciones en las que solo se representa una de las dos cantidades del enunciado, el dividendo o cantidad a repartir, formando una barra con 15 cubos y fraccionándola después en 3 barras iguales de 5 cubos. También surgen repartos no equitativos. Shakira representa los tres chivos en la esquina superior izquierda (Figura 6c), y luego da a los chivos mediano, grande y pequeño, cinco, seis y cuatro montones de hierba respectivamente.

A pesar de que la estrategia básica sigue siendo el reparto de objetos, otros materiales comienzan a usarse. Hugo no es capaz de realizar el reparto con la banda numérica (Figura 7a), pero al escuchar a Lía que da la solución de 5, lo comprueba contando 5

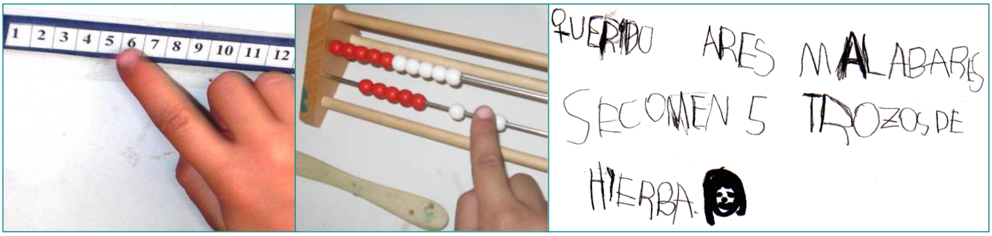


Figura 7. Evolución de las estrategias infantiles en problemas de división-reparto en 5-6 años (II).

Figura 8. Agrupamiento según el número de grupos.

casillas, tres veces, hasta llegar a 15. En la Figura 7b, Roberto, tras resolver el problema con los cubos encajables, representa la solución (los tres grupos de 5) en el rekenrek. Más que un proceso de resolución, se trata de una traducción entre sistemas diferentes de representación para escribir el resultado. En la Figura 7c, aparece una carta de un alumno al final del taller a Ares (maestro en prácticas y malabarista, llamado por los pequeños "Ares malabares"). Esta carta muestra cómo el conocimiento de la lectoescritura propio del último curso de educación infantil se une a la capacidad de articular el propio pensamiento, para producir este mensaje escrito.

Multiplicación en primer curso de primaria (6-7 años)

Ya dentro de la educación primaria, basándonos en el cuento "El gato tragón" (Núñez y Dumas, 2005), el problema planteado es: El gato tragón se comió 7 niñas. Si cada niña tiene 2 brazos, ¿Cuántos brazos se comió el gato? La estrategia básica en este problema es de modelización directa (estrategia de *agrupamiento*). En el enunciado se habla de 7 grupos (cada niña cuenta como un "grupo" de dos brazos) con 2 elementos en cada grupo (los brazos). Los niños forman 7 grupos con 2 objetos en cada una y luego cuentan de uno en uno los objetos. Esta estrategia ya la hemos visto desde educación infantil (Figura 4), pero en la Figura 8 podemos observar variaciones de interés que muestran la evolución. Por ejemplo, separar claramente las representaciones de las dos cantidades (de niñas y de brazos) para facilitar el conteo del resultado (Figura 8a) o la escritura de números de dos cifras con la aparición del valor posicional. En la Figura 8b, vemos que el alumno escribe primero 41, que aparece tachado dos veces, para al final escribir el resultado correcto de 14.

Figura 9. Agrupamiento según el número de grupos con dedos.

Figura 10. Agrupamiento según el número de grupos con Tabla 100.

Hay niños que utilizan los dedos para ir construyendo los grupos, añadiendo el número de elementos por grupo cada vez que se considera un grupo. En la Figura 9, un niño va añadiendo 2 dedos cada vez que cuenta una niña hasta completar las siete niñas. Podemos ver, de izquierda a derecha, cómo el alumno pone el dos de los brazos de la primera niña, después va añadiendo dos por cada niña, con lo que tendrá cuatro dedos, acción que no se ve en la secuencia de la Figura 9, y así sucesivamente, seis (otros dos brazos de otra niña), ocho, diez y, ya en la imagen, el doce (para lo cual tiene que quitar los cinco dedos de la mano izquierda), y el catorce, resultado final.

También vemos esta estrategia en la tabla 100. Por cada niña, se van tapando con dos dedos dos numerales que representan los dos brazos de la niña. Tras repetir esta operación siete veces, el último numeral tapado (14) indica la solución del problema. En la Figura 10 observamos los tres primeros pasos de esta estrategia. El uso de la tabla 100 es un instrumento que facilita la transición de estrategias de modelización directa a estrategias de conteo basadas en la secuencia de numerales.

Las representaciones gráficas infantiles van evolucionando, incluyendo una mezcla de representaciones icónicas y simbólicas (con numerales) para el proceso de resolución. En la Figura 11a, Sergio representa las niñas con numerales y los brazos con puntos y resuelve el problema contando los puntos. En la derecha, mostramos el trabajo de otro niño donde la representación de las niñas posee un grado mayor de iconicidad. Los brazos aparecen numerados, de modo que el último numeral (14) indica el resultado (Figura 11b).

Otra variedad de esta estrategia consiste en representar con un objeto cada grupo y contar cada objeto el número de veces que indica el número de elementos por grupo. En este problema, algunos niños representaron con 7 objetos el número de grupos (las

Figura 11. Estrategia de agrupamiento, gráfica, con símbolos escritos.

Figura 12. Reparto de objetos de uno en uno contando inicialmente la cantidad total.

niñas) y contaron cada uno de ellos dos veces (una por cada brazo) para alcanzar el resultado final.

Algunos alumnos han resuelto este problema mediante modelización directa haciendo 2 grupos de 7. En este problema hay 7 grupos (las niñas) con 2 elementos en cada grupo (los brazos), pero varios niños han representado un grupo de 7 por uno de los brazos de las 7 niñas y otro grupo de 7 por el otro brazo. Esta estrategia la hemos visto aplicada con el rekenrek, poniendo 7 cuentas en cada varilla, y en la tabla 100, saltando de la casilla del 7 a la del 14.

Un problema de división en primer curso de educación primaria

En primer curso de primaria se plantea un problema de estructura multiplicativa, de grupos iguales, de división partitiva. Basado en el cuento "Un regalo diferente", el enunciado es: Marcel y Tristán se comieron 18 buñuelos de crema. ¿Cuántos se comió cada uno? Todos los niños intentaron repartir de forma equitativa los buñuelos, aún sin que el enunciado lo indicase. La estrategia básica es la de *reparto*, de modelización directa (Figura 12).

Esta estrategia se aplica con diferentes variaciones. Algunos niños cuentan primero los objetos a repartir, pero otros reparten sin contar inicialmente esta cantidad, y van comprobando, a cada paso del reparto, el total de lo repartido hasta alcanzar el total a repartir. Otra variación es el reparto en grupos, por ejemplo, de dos en dos o de tres en tres y, posteriormente, ajustando el reparto con los objetos sobrantes. Al ser un problema en el que se divide en dos grupos, muchos niños elaboraban una barra con 18 cubos,

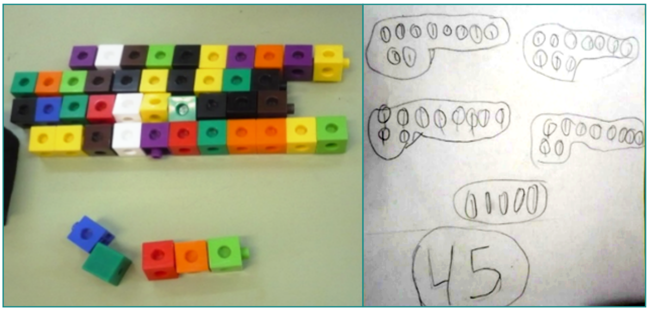


Figura 13. Representación de la estrategia de agrupamiento y juntar todos.

Figura 14. Agrupamiento y juntar todos con bloques de base 10.

estimaban el punto medio para partirla en dos partes aproximadamente iguales, y luego comprobaban que en las dos partes resultantes hubiese el mismo número de cubos, comparando la longitud de las barras.

Un problema de multiplicación con grupos de diez en educación primaria

En primer curso de primaria planteamos problemas aritméticos de operaciones combinadas (multiplicación y suma) en los que nos dan el número de decenas y de unidades sueltas y debemos calcular el número total de unidades. Un problema de este tipo es: Si tenemos 4 decenas de huevos y 5 huevos más, ¿cuántos huevos tenemos en total? La estrategia básica para abordar este tipo de problemas consiste en formar con objetos tantos grupos de diez y unidades sueltas como se indica en el enunciado y después contar uno por uno los objetos. En la Figura 13, vemos la representación manipulativa y gráfica correspondiente a dicha estrategia. En un nivel más avanzado, los niños cuentan de diez en diez los grupos de diez, y luego de uno en uno las unidades sueltas: “10, 20, 30, 40, 41, 42, 43, 44, 45”.

Una variante de esta estrategia consiste en representar las cantidades con bloques de base 10. En la Figura 14a un niño ha representado 45 con 4 barras y 5 unidades. Igual que en el caso anterior, inicialmente los niños necesitan contar de uno en uno todas las unidades que componen las decenas como está haciendo el niño de la Figura 14b para saber la cantidad total. Más tarde, los niños cuentan de 10 en 10 las barras y de uno en uno las unidades. Con la ayuda de la tabla 100, los niños cuentan de 10 en 10 (Figura 14c) el

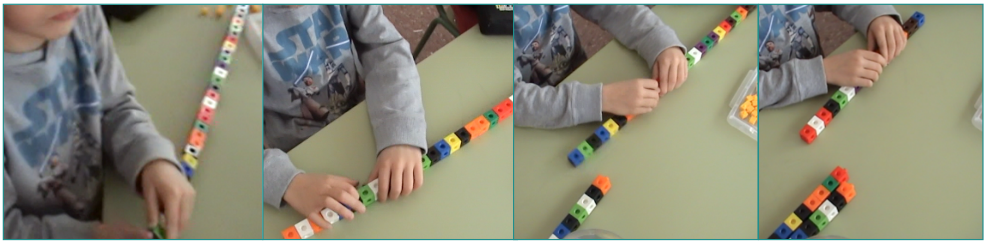


Figura 15. Medida contando primero el total de elementos con objetos.

Figura 16. Estrategia de *medida* con cajas de huevos de 10.

número de grupos que se indica en el problema, para después avanzar por unidades. Finalmente, las estrategias van evolucionando hasta mostrar un conocimiento del valor posicional y del concepto de decena. Cuatro grupos de 10, y 5 unidades sueltas son 45. Esta es la estrategia óptima esperada en este tipo de problemas que, como vemos, no se aplica desde el principio, sino que es el resultado de una larga evolución.

Un problema de división con grupos de diez en Educación Primaria

Para terminar, planteamos problemas de división agrupamiento, con grupos de diez, y con resto. Uno de estos problemas es: Si tenemos 37 huevos, ¿cuántas cajas de 10 huevos podemos llenar y cuántos huevos sobran? La estrategia básica se llama estrategia de medida. Es una estrategia de modelización directa que consiste en tomar 37 objetos, formar grupos de diez, contarlos, y contar después los objetos que quedan sin agrupar. En la Figura 15 seguimos todo el proceso.

Dentro del material de aula que ofrecemos a los alumnos suelen estar las cajas de huevos de diez. Los niños utilizan espontáneamente las cajas para resolver el problema introduciendo un cubo en cada huevo. Esto facilita la formación, el conteo de los grupos, y la visualización del concepto de decena (Figura 16). La misma estrategia se puede llevar a cabo con bloques de base 10, de modo que la solución del problema estará dada por el número de barras (grupos de 10, decenas) y cubos (unidades). Dado que el uso de materiales no está dirigido por los profesores, también se ven soluciones "mixtas", con uso simultáneo de cajas de huevos y bloques de base 10 (Figura 16c).

Otras estrategias para este tipo de problemas se apoyan en la tabla 100, donde se busca el número objetivo (37) y las filas completas representan decenas y las casillas

individuales cuentan como unidades sobrantes. Finalmente, como estrategias más avanzadas, hay niños que utilizan el conteo a saltos de diez en diez y el conteo por unidades, sin ayuda de objetos. Para llegar a 37 huevos, cuentan 10, 20, 30, que son 3 cajas, y después 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, que son 7 huevos sueltos, llevando la cuenta de decenas y unidades sueltas con los dedos. La estrategia óptima, igual que en el apartado anterior, consiste en la aplicación directa del conocimiento del valor posicional, para determinar que 37 unidades son 3 decenas y 7 unidades sin agrupar.

REFLEXIONES FINALES

En los talleres realizados se ha observado que, desde los 4 a los 7 años, la mayoría de los niños resuelven problemas de multiplicación y división utilizando estrategias informales de modelización directa, inventadas por ellos mismos, sin tener ningún conocimiento formal sobre dichas operaciones aritméticas. A través de la resolución de problemas hemos conseguido que los niños razonen y modelicen, y articulen sus ideas para comunicarlas al resto de la clase, pudiendo establecer así relaciones entre los conocimientos que tienen con los de los compañeros.

Los niños siguen, a lo largo de la trayectoria que hemos descrito para el aprendizaje de la multiplicación y la división, un *camino de aprendizaje* jalonado por estrategias de modelización directa, estrategias de conteo y uso del valor posicional (en los problemas con grupos de diez). A través de problemas, en los que se utilizan recursos (como el rekenrek, la tabla 100, las cajas de huevos de 10, o los bloques de base 10), se cuida el tamaño de los números, y se introducen elementos especiales (como los grupos de 10 en los problemas de estructura multiplicativa), se va conformando el *camino de enseñanza* que promueve la evolución de los niños a través del correspondiente camino de aprendizaje. El objetivo final es proporcionar la base informal de conocimiento adecuada para el aprendizaje de la multiplicación y la división, y la comprensión del concepto de decena (Ramírez y De Castro, 2014).

Volviendo a la introducción del artículo, en nuestra línea metodológica, pensamos que es preferible adelantar en el currículo experiencias que ayuden a desarrollar los conocimientos informales, más que anticipar conocimientos formales. Así, más que adelantar la memorización de las tablas de multiplicar a primero de educación primaria, abogamos por introducir situaciones en las de los niños puedan construir significados para la multiplicación y la división, desde los 4 años, para favorecer su posterior comprensión, como las que hemos mostrado en este artículo.

Dentro de los principios del NCTM (2003), el principio de enseñanza señala que “Una enseñanza eficaz requiere conocer lo que los alumnos saben y lo que necesitan aprender, y luego estimularlos y ayudarlos para que lo aprendan bien” (NCTM, 2003, p. 17). Este “conocer lo que los alumnos saben” como punto de partida, evocador de la idea de aprendizaje significativo, puede interpretarse de formas diversas. Cuando un maestro está en tercer curso de educación primaria, iniciando a los alumnos en la multiplicación, puede plantearse cuáles son los conocimientos previos sobre los cuales construir el aprendizaje formal de la división. Sin embargo, a nuestro parecer, el ideal sería que desde los 4 años, e incluso antes, todavía en la educación infantil, los maestros puedan ayudar a los niños a recorrer las trayectorias de aprendizaje de la multiplicación y la división que

hemos descrito en este trabajo. En este sentido, pensamos que la idea de *trayectoria de aprendizaje*, que hemos tratado de ejemplificar en este artículo, supone una de las aportaciones fundamentales de la didáctica de la matemática en los últimos 20 años, pues permite enfocar el trabajo del aula hacia las ideas matemáticas nucleares, abordándolas de un modo informal, tiempo antes de tener que afrontar su aprendizaje formal, favoreciendo así su aprendizaje significativo.

REFERENCIAS

Arriba, M. y Osuna, R. (2005). *Un regalo diferente*. Pontevedra: Kalandraka.

Carpenter, T. P., Fennema, E., Franke, M. L., Levi, L. y Empson, S. B. (1999). *Children's mathematics: Cognitively guided instruction*. Portsmouth: Heinemann.

Carpenter, T. P., Franke, M. L., Jacobs, V., Fennema, E. y Empson, S. B. (1997). A Longitudinal Study of Intervention and Understanding in Children's Multidigit Addition and Subtraction. *Journal for Research in Mathematics Education, 29*, 3-30.

Castro, E., Cañadas, M. C. Y Castro-Rodríguez, E. (2013). Pensamiento numérico en edades tempranas. *Edma 0-6: Educación Matemática en el Infancia, 2*(2), 1-11.

CCSSI (2010). *Common Core State Standards for Mathematics*. Washington, DC: Common Core State Standards Initiative. Recuperado el 15/11/2014 de: http://www.corestandards.org/assets/CCSSI_Math%20Standards.pdf

Clements, D. H. (2004). Major themes and recommendations. In D. H. Clements, J. Sarama, & A. M. DiBiase (eds.), *Engaging young children in mathematics: Standards for early childhood mathematics education* (pp. 7-72). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Clements, D. H. y Sarama, J. (2004). Learning trajectories in mathematics education. *Mathematical Thinking and Learning, 6*(2), 81-89.

Consejería de Educación, Juventud y Deporte de la Comunidad de Madrid (2014). Borrador del Currículo de Educación Primaria. Recuperado de: http://www.feccoo-madrid.org/comunes/recursos/15708/1823565Borrador_de_Curriculum_de_Educacion_Primaria.pdf

Daro, P., Mosher, F., & Corcoran, T. (2011). *Learning trajectories in mathematics: A foundation for standards, curriculum, assessment, and instruction*. CPRE Research Report #RR-68. Philadelphia: Consortium for Policy Research in Education. DOI: 10.12698/cpre.2011.rr68

De Castro C. y Hernández, E. (2014). Problemas verbales de descomposición multiplicativa de cantidades en educación infantil. *PNA, 8*(3), 99-114.

De Castro, C., Molina, E., Gutiérrez, M. L., Martínez, S., Escorial, B. (2012). Resolución de problemas para el desarrollo de la competencia matemática en Educación Infantil. *Números. Revista de Didáctica de las Matemáticas, 80*, 53-70.

De Castro, C., Walsh, J., Del Coso, E., Salvador, C., González, V. y Escorial, B. (2009). "Dos de todo": El cuento chino de los problemas de comparación multiplicativa en la Educación Infantil. *Epsilon: Revista de la Sociedad Andaluza de Educación Matemática "Thales" 73*(3), 33-42.

Fuson, K. C. (1992). Research on whole number addition and subtraction. En D. C. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 243-275). Nueva York, NY: Macmillan.

Gómez, P. y Lupiáñez, J. L. (2007). Trayectorias hipotéticas de aprendizaje en la formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria. *PNA, 1*(2), 79-98.

Gómez, P., González, M.J. y Romero, I. (2014). Caminos de aprendizaje en la formación de profesores de matemáticas: objetivos, tareas y evaluación. Profesorado. Revista de Currículum y Formación de Profesorado, 18(3), 319-338. Disponible en: http://www.ugr.es/local/recfpro/rev183COL7.pdf

González, O. y Fernández, F. (2007). *Chivos chivones*. Pontevedra: Kalandraka.

Grejniec, M. (2004). *¿A qué sabe la luna?* Pontevedra: Kalandraka.

López, M.E. y De Castro, C. (2014). Iniciación a los problemas de reparto igualatorio en educación infantil. *Épsilon, 31*(2), nº 87, 83-98.

Ministerio de Educación y Ciencia (2007, 20 de julio). ORDEN ECI/2211/2007, de 12 de julio, por la que se establece el currículo y se regula la ordenación de la Educación primaria. *BOE, 173*, pp. 31487-31566.

Ministerio de Educación, Cultura y Deporte (2014, 1 de marzo). Real Decreto 126/2014, de 28 de febrero, por la que se establece el currículo de Educación primaria. *BOE, 52*, pp. 19349-19420.

Ministerio de Educación, Cultura y Deporte (2014, 1 de mayo). Orden ECD/686/2014, de 23 de abril, por la que se establece el currículo de la Educación Primaria para el ámbito de gestión del Ministerio de Educación, Cultura y deporte y se regula su implantación, así como la evaluación y determinados aspectos organizativos de la etapa. *BOE, 106*, pp. 33827-34369.

NAEYC y NCTM (2013). Matemáticas en la Educación Infantil: Facilitando un buen inicio. Declaración conjunta de posición. *Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia, 2*(1), 1-23.

NCTM (2003). *Principios y Estándares para la Educación Matemática*. Sevilla: Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales.

Núñez, M. y Dumas, O. (2005). *El gato tragón*. Pontevedra: Kalandraka.

OCDE (2005). *Informe PISA 2003: Aprender para el mundo del mañana*. Madrid: Santillana.

Ramírez, M. y De Castro, C. (2014). Descubrimiento del valor posicional a través de la resolución de problemas. *Revista de Didácticas Específicas, 11,* 40-66.

Ramos, M. (2004). *¡Mamá!* Barcelona: Corimbo.

Épsilon - *Revista de Educación Matemática* 2014, Vol. 31(3), nº 88, 55-66

Utilizando gráficas y tablas para comparar distintos procesos de elección

Alberto Arnal-Bailera
Universidad de Zaragoza

RESUMEN: *Analizamos un problema aparentemente sencillo: un grupo de vecinos deciden entre una de tres opciones posibles para pintar la escalera. Se propone un proceso en el que introduce dos preguntas para efectuar la decisión. Realizamos un análisis matemático de la equidad de este proceso y las diferencias con el proceso de una sola pregunta.*
PALABRAS CLAVE: *Toma de decisiones, matemáticas electorales, representaciones gráficas.*

Using graphics and tables to compare different processes of choice

ABSTRACT : *We analyze a seemingly simple problem: the process for a group of neighbors for deciding between one of three options to paint the stairs. However, the president of the community proposes a process that introduces two questions rather than one to make the decision. We perform a mathematical analysis of the equity of this process and the differences with one question process.*
KEYWORDS: *decision making, electoral mathematics, graphic representations.*

INTRODUCCIÓN

Se admite comunmente que la educación matemática tiene tres finalidades principales: Formativa (contribuyendo al desarrollo de capacidades generales y de razonamiento lógico de los estudiantes), funcional (por ejemplo contribuyendo a responder a situaciones de la vida diaria como consumidor o futuro elector) e instrumental (contribuyendo al desarrollo y a la formalización de las ciencias experimentales, tecnológicas y sociales).

La Orden de 9 de mayo de 2007, del Departamento de Educación, Cultura y Deporte del Gobierno de Aragón, por la que se prueba el currículo de la Educación secundaria obligatoria, resume la persecución de estas finalidades en la intención de desarrollar la competencia matemática, esto es promover el uso la argumentación y el lenguaje preciso y riguroso propio de las matemáticas así como las herramientas propias de esta ciencia, como las representaciones gráficas, para resolver problemas cotidianos que tengan de que ver con su vida personal o social y también con otros ámbitos del conocimiento.

Entre los procesos de toma de decisión más estudiados están los referidos a procesos electorales (Álvarez y Alonso, 2010; Álvaro, 2001; Girón y Bernardo, 2007; Hernández, 2001). Apenas hemos encontrado sobre las distintas posibilidades que se plantean en elecciones directas entre varias opciones, a pesar de que también se presentan en el contexto electoral español en la elección de senadores. Fernández y Fernández (1999) analizan un texto histórico que describe un proceso de elección entre varios candidatos a un mismo puesto. La razón podría estar en la simplicidad con la que habitualmente se desarrolla un proceso de elección entre varias opciones. Por ejemplo en Suiza durante los últimos 170 años se han realizado numerosas consultas a la población sobre reformas de leyes y la disyuntiva que se plantea es "sí" o "no". Si la estructura de la consulta es una pregunta con varias respuestas, se puede actuar de varios modos, entre ellos: la opción más votada es la elegida (elección de senadores en España, listas abiertas…) o bien asignar un determinado valor a la opción preferida y valores inferiores a la segunda y sucesivas, al modo de los concursos televisivos de Eurovisión por ejemplo o el descrito en Fernández y Fernández (1999).

Nos ocupamos aquí del análisis comparativo de los procesos para tomar una decisión en una comunidad de vecinos en la que quieren pintar la escalera debiendo los vecinos elegir entre tres colores posibles. Hay dos propuestas sobre cómo desarrollar el proceso de toma de la decisión, una votación con tres opciones, eligiéndose la más votada, y una votación más compleja con dos preguntas, en la primera de las cuales se vota sí o no a un determinado color y en la segunda solo votan los que no querían el primero, eligiendo entre los otros dos. A primera vista ya vemos que la falta de simetría del proceso afectará de algún modo a su ecuanimidad. Propondremos distintas representaciones gráficas y tablas que contribuirán a poner de relieve las diferencias entre las dos propuestas y cómo en muchas ocasiones la decisión está muy influenciada por el propio proceso.

PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Consideramos un problema típico en una comunidad de vecinos: Hace ya varios años que se pintó la escalera por última vez y parece razonable volver a pintarla. Los colores entre los que tienen que elegir son el amarillo, el verde y el naranja. Se proponen dos procesos para tomar la decisión sobre el color:

- Primera: Un vecino propone que se hagan papeletas con tres opciones, pintar de amarillo, de verde y de naranja. Cada vecino marca qué color prefiere se meten en una caja y se cuentan las papeletas favorables a cada opción.
- Segunda: El presidente de la comunidad de propietarios alega que el naranja es muy distinto de los otros dos colores al ser un color cálido y los otros dos fríos. Por ello propone un proceso distinto mediante dos preguntas:

- 1ª pregunta: ¿Quiere Vd. que se pinte la escalera de naranja?
- 2ª Responda solo en caso de que haya respondido de modo negativo a la primera pregunta, ¿Prefiere que se pinte de amarillo o de verde?

Vamos ahora a realizar un análisis exhaustivo de las posibles distribuciones de las opiniones de los vecinos y cómo se traducen en una decisión u otra en función del proceso empleado.

Consideramos primero una pequeña comunidad de vecinos de 19 vecinos (caso discreto) y veremos después si las conclusiones extraídas son extrapolables cuando el proceso se planteara a un número grande de personas, para este caso trabajaremos con los porcentajes de vecinos (caso continuo).

UN NÚMERO PEQUEÑO DE VECINOS, EL CASO DISCRETO

En la comunidad de vecinos de nuestro ejemplo hay 19 vecinos. Nadie es indiferente y todo el mundo toma partido por una u otra opción. Estas distintas formas de pensamiento las podemos representar en una tabla de doble entrada (ver Tabla 1), poniendo en las columnas las distintas cantidades de vecinos que quieren pintar de verde, y en las filas las de los que quieren pintar de amarillo. El resto hasta 19 son los que quieren pintar de naranja. Así en la celda (i,j) podemos identificar el número de vecinos a favor de pintar de naranja cuando hay i vecinos a favor de pintar de verde y j a favor de pintar de amarillo.

Vamos a llamar distribución de votos a la terna formada por los votos recibidos por cada color, expresados estos en número o en porcentaje.

En la intersección de la columna 7 (vecinos favorables al verde) con la fila 5 (vecinos favorables al amarillo), hay un 8 que señala que el resto de los vecinos hasta 19 quieren pintar de naranja. Las celdas sombreadas en gris son distribuciones imposibles ya que sumarían más de los 19 votos totales.

Estas distintas distribuciones de las opiniones de los vecinos son previas al comienzo del proceso de decisión, pero no se van a interpretar de un mismo modo según sea el proceso de toma de decisiones (tabla 1).

Veamos ahora cómo queda la tabla anterior, en la que vamos a sustituir en cada celda el número de personas que quieren pintar de naranja por el resultado final de la decisión tomada por la comunidad según sea el proceso que se siga para la toma de decisiones.

Primer proceso de elección, elección simultánea entre las tres opciones:

En esta primera forma de elección, la propuesta por el vecino, gana la opción más votada, por ejemplo en la casilla donde confluyen la columna 3 y la fila 7 observamos un número 9 (ver Tabla 1) o una letra N (ver Tabla 2). Esto quiere decir que cuando hay 3 vecinos a favor de pintar de verde y 7 a favor de pintar de amarillo, quedan 9 a favor de pintar de naranja y esta es la decisión adoptada por la comunidad (tabla 2).

Tabla 1. Distribuciones de votos de los vecinos.

Vecinos favorables al color amarillo

19	0																			
18	1	0																		
17	2	1	0																	
16	3	2	1	0																
15	4	3	2	1	0															
14	5	4	3	2	1	0														
13	6	5	4	3	2	1	0													
12	7	6	5	4	3	2	1	0												
11	8	7	6	5	4	3	2	1	0											
10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0										
9	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0									
8	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0								
7	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0							
6	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0						
5	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0					
4	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0				
3	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0			
2	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0		
1	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	
0	19	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19

Vecinos favorables al color verde

Tabla 2. Color elegido según las distribuciones de votos. Primera forma de elección.

Vecinos favorables al color amarillo

19	A																			
18	A	A																		
17	A	A	A																	
16	A	A	A	A																
15	A	A	A	A	A															
14	A	A	A	A	A	A														
13	A	A	A	A	A	A	A													
12	A	A	A	A	A	A	A	A												
11	A	A	A	A	A	A	A	A	A											
10	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A										
9	N		A	A	A	A	A	A	A		V									
8	N	N	N		A	A	A	A		V	V	V								
7	N	N	N	N	N		A		V	V	V	V	V							
6	N	N	N	N	N	N	N	V	V	V	V	V	V	V						
5	N	N	N	N	N	N	N		V	V	V	V	V	V	V					
4	N	N	N	N	N	N	N	N	V	V	V	V	V	V	V	V				
3	N	N	N	N	N	N	N	N		V	V	V	V	V	V	V	V			
2	N	N	N	N	N	N	N	N	N	V	V	V	V	V	V	V	V	V		
1	N	N	N	N	N	N	N	N	N		V	V	V	V	V	V	V	V	V	
0	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19

Vecinos favorables al color verde

Tabla 3. Color elegido según las distribuciones de votos. Segunda forma de elección.

Vecinos favorables al color amarillo

19	A																			
18	A	A																		
17	A	A	A																	
16	A	A	A	A																
15	A	A	A	A	A															
14	A	A	A	A	A	A														
13	A	A	A	A	A	A	A													
12	A	A	A	A	A	A	A	A												
11	A	A	A	A	A	A	A	A	A											
10	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A										
9	N	A	A	A	A	A	A	A	A		V									
8	N	N	A	A	A	A	A	A		V	V	V								
7	N	N	N	A	A	A	A		V	V	V	V	V							
6	N	N	N	N	A	A		V	V	V	V	V	V	V						
5	N	N	N	N	N		V	V	V	V	V	V	V	V	V					
4	N	N	N	N	N	N	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V				
3	N	N	N	N	N	N	N	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V			
2	N	N	N	N	N	N	N	N	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V		
1	N	N	N	N	N	N	N	N	N	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	
0	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19

Vecinos favorables al color verde

En total hay 210 distribuciones posibles de los votos acerca de las tres opciones. En 9 de ellas que hay empate entre dos opciones (en blanco). Hay 67 distribuciones de los votos que hacen ganadora a cada una de las tres opciones.

Se observa la confirmación matemática de lo se intuía a partir de la pregunta, ninguna de las tres opciones recibe un trato diferente de las otras dos.

Segundo proceso de elección, doble pregunta.

En esta segunda forma de elección, la propuesta por el presidente, hay dos preguntas, por lo que hay que hacer un análisis un poco más pausado para ver cuál es la opción elegida en cada caso. Por ejemplo en la casilla donde confluyen la columna rotulada con un '3' y la fila rotulada con un '7' observamos un número 9 (ver Tabla 1) o una letra N (ver Tabla 2). Esto quiere decir que cuando hay 3 vecinos a favor de pintar de verde y 7 a favor de pintar de amarillo, quedan 9 a favor de pintar de naranja. Por tanto en la primera pregunta hay 9 vecinos a favor de pintar de naranja y 10 en contra, con lo que este color se desecha. En la segunda pregunta solo votan los contrarios al naranja, ganando los partidarios del color amarillo y esta es la decisión adoptada por la comunidad. Notar que el color de la pintura finalmente elegida es apoyada solo por 7 vecinos frente a 9 que apoyaban el naranja.

Cabe destacar que en casos como el anterior varía la decisión de la comunidad según cuál sea la forma de elección, hay 18 casos similares a este, en los que en ganaba la opción 'color naranja' en la primera forma de elección para pasar a ganar el amarillo o el verde en la segunda forma de elección. Estos casos están remarcados en las Tablas 1 y 2.

También ahora hay 210 distribuciones posibles de los votos acerca de las tres opciones, aunque ahora solo hay empate en 5 de ellas. La opción naranja solo gana cuando tiene 10 votos o más en la primera elección, lo que ocurre en 55 de las distribuciones.

Las opciones amarillo y verde tienen cada una 75 distribuciones favorables y presentan una simetría entre ambas. Cada uno de los dos conjuntos de 75 distribuciones se puede descomponer en dos subconjuntos, 55 de ellas corresponden a situaciones en las que la mayoría de los vecinos están a favor del color amarillo o verde respectivamente, como en el caso de la opción naranja. El resto de las distribuciones corresponden a situaciones en las que, sin tener mayoría absoluta ninguno de los colores, unidos los partidarios de amarillo y verde superan a los partidarios del naranja en la primera pregunta para luego decidir en la segunda pregunta solamente entre estas dos opciones.

Se observa la confirmación matemática de lo se intuía a partir de las dos preguntas, la opción naranja recibe un trato diferente de las otras dos, un trato mucho peor ya que solamente puede ganar en caso de obtener la mayoría absoluta de los votos en la primera pregunta.

Observamos (ver Tabla 4) como la primera forma de elección guarda una simetría perfecta entre las tres opciones a elegir, mientras que la segunda "quita" algunas distribuciones favorables a la opción naranja para aumentar las de verde y amarillo.

Tabla 4. Comparación entre las dos formas de elección-discreto

Formas de elección → ↓ Distribuciones	Primera	Segunda
Favorables a verde	67	75
Favorables a amarillo	67	75
Favorables a naranja	67	55
Empates	9	5
Totales	210	210

UN NÚMERO GRANDE DE VECINOS, EL CASO CONTINUO

¿Cómo quedaría este análisis si el número fuera mucho mayor? Consideraremos ahora como variables los porcentajes de votos para cada color.

Vamos a hacer representaciones gráficas en dos ejes cartesianos de la relación entre el porcentaje de población favorable a pintar de amarillo en el eje x y porcentaje de población favorable a pintar de verde en el eje y. Dado el supuesto de no abstención, el resto hasta el 100% de participación en el proceso estará a favor de pintar de naranja. Para simplificar la notación, llamamos V, A o N a las variables que representan el porcentaje de población favorable a pintar de verde, amarillo o naranja, respectivamente.

Notar que podemos utilizar un gráfico en dos dimensiones para representar lo que en realidad son tres variables ya que están unidas por la ecuación V+A+N=100, lo que hace

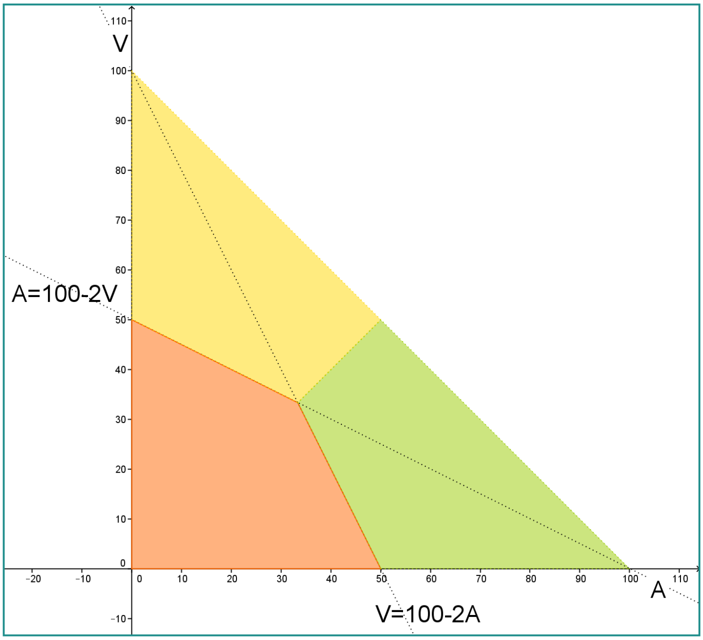


Figura 1. Opción elegida – primera forma de elección.

que si conocemos V y A podamos conocer N y por tanto saber cuál es el color elegido por la comunidad en cada sistema de elección.

La primera representación corresponde a la opción que proponía el vecino, en la que se elegía simultáneamente entre los tres colores. Marcamos con los tres colores las regiones donde gana cada opción. Vamos a representar estas regiones teniendo en cuenta primero que $V\geq 0$, $A\geq 0$ y que $A+V\leq 100$. Además:

- Para ganar la opción V, se tiene que cumplir que $V>A$ y además que $V>N$. Como $N=100-A-V$, nos queda que $V>100-A-V$, simplificando: $A>100-2V$.
- Para ganar la opción A, se tiene que cumplir que $A>V$ y además que $A>N$. Como $N=100-A-V$, nos queda que $A>100-A-V$, simplificando: $V>100-2A$.
- Para ganar la opción N, se tiene que cumplir $N>A$ y $N>V$, aplicando que $N=100-A-V$, simplificando tenemos: $A<100-2V$ y $V<100-2A$.

Así, podríamos dibujar un gráfico análogo a la Tabla 2 (figura 1).

Observamos, ver figura 1, que la simetría en la formulación de la pregunta, en la que las tres posibles respuestas tienen papeles simétricos, hace que las áreas de las tres regiones en que queda dividido el triángulo tengan la misma área ($5000/3\ u^2$)

La segunda representación corresponde a la opción que proponía el presidente, en la que se respondía sucesivamente a dos preguntas. Marcamos con los tres colores las regiones donde gana cada opción:

- Para ganar la opción V, se tiene que cumplir que $V>A$ y $N<50$. Como $N=100-A-V$, nos queda que $100-A-V<50$, simplificando: $50<A+V$.

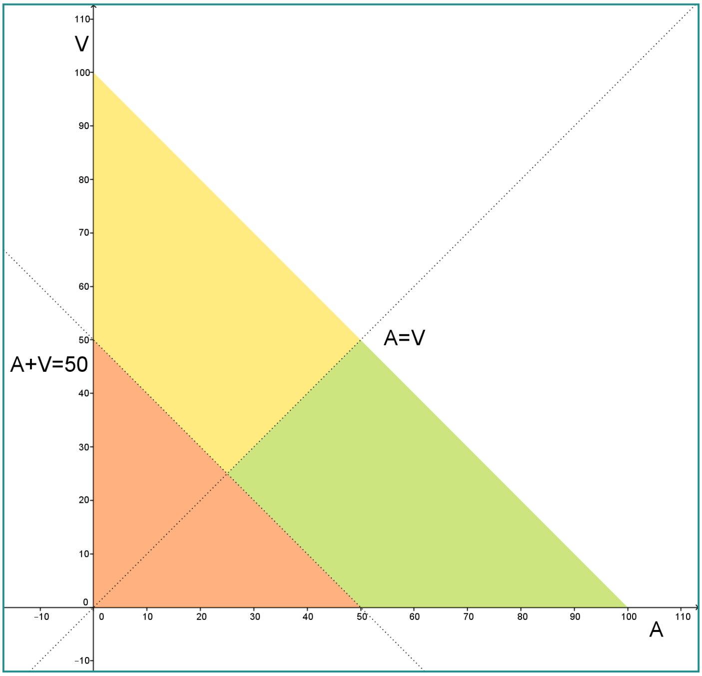


Figura 2. Opción elegida – segunda forma de elección.

- Para ganar la opción A, se tiene que cumplir que V<A y N<50. Como N=100-A-V, nos queda que 100-A-V<50, simplificando: 50<A+V.
- Para ganar la opción N, se tiene que cumplir N>50. Como N=100-A-V, nos queda que 100-A-V<50, simplificando: 50>A+V.

Así, podemos dibujar un gráfico análogo a la Tabla 3 en el que observamos, ver Figura 2, que el hecho de que para ganar la opción color naranja deba obtener mayoría en la primera pregunta se traduce gráficamente en que el área que representa su región asociada ha perdido área, quedando ahora en 1250 u^2. Las otras dos regiones tienen áreas iguales, 1875 u^2 cada una. Estas áreas han sido calculadas directamente por el programa de geometría dinámica GeoGebra.

Las zonas amarilla o verde (ver Figura 3) corresponden respectivamente a distribuciones de voto que con el primer proceso de elección daban como resultado pintar de naranja y con la segunda forma dan como resultado pintar de amarillo o verde:

Las diferencias entre un gráfico y otro permiten describir de modo cualitativo y cuantitativo las diferencias entre un tipo y otro de formas de elección de la pintura (ver Figura 3): por un lado es injusto que una de las opciones (color naranja) tenga que tener mayoría absoluta para poder ser elegida, por otro la diferencia de áreas entre las regiones verdes o amarillas de uno y otro gráfico (ver Tabla 5) darían una primera aproximación al tamaño de la injusticia de la segunda forma de elección y de la simetría de la primera. Aunque esta injusticia es mucho mayor si tenemos en cuenta que es previsible que las distintas distribuciones de % entre unas opciones y otras no sean uniformes y la mayor

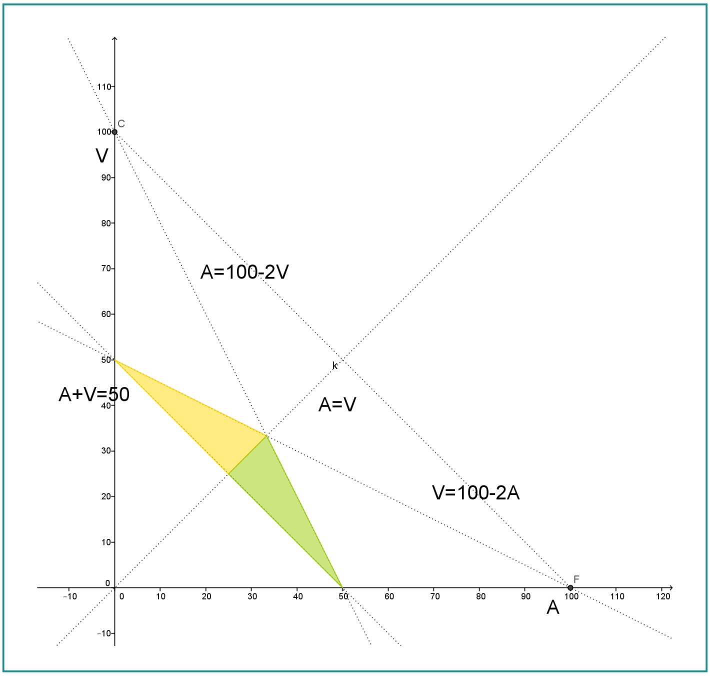


Figura 3. Diferencia entre la primera y segunda formas de elección.

parte de las ocasiones haya una cierta disputa entre unos colores y otros, lo que en términos de probabilidad se expresaría dando mayor probabilidad a la región que cambia de color que la que le correspondería exclusivamente en razón de su área.

Tabla 5. Comparación entre las dos formas de elección – continuo.

Formas de elección → ↓ Áreas	Primera	Segunda
Favorables a verde	$1666,\hat{6}$ u^2	1875 u^2
Favorables a amarillo	$1666,\hat{6}$ u^2	1875 u^2
Favorables a naranja	$1666,\hat{6}$ u^2	1250 u^2
Totales	5000 u^2	5000 u^2

Aunque resulta claro, hay que explicitar que el papel jugado por cada color podría ser intercambiado en la opción del presidente y perjudicar así las opciones de ganar de los partidarios del verde o del amarillo en lugar de las opciones de los partidarios del naranja, por ejemplo planteando:

- 1ª pregunta: ¿Quiere Vd. que se pinte la escalera de verde?
- 2ª en caso de que haya respondido de modo negativo a la primera pregunta, ¿Prefiere que se pinte de amarillo o de naranja?

CONCLUSIONES Y APLICACIÓN EN EL AULA

Hacemos notar en este artículo la posibilidad de complicar un proceso a priori sencillo y la necesidad en ese caso de hacer una reflexión pausada de los efectos matemáticos de esa complicación y cómo afecta a la oportunidad de ser elegida cada opción posible.

Aunque en general no podemos ordenar los procesos de elección entre varias opciones hasta el punto de llegar a decir si uno es mejor o peor que otro, en este caso sí resulta claro que la propuesta del Presidente de la Comunidad de vecinos es directamente injusta puesto que no es simétrica, dando mayor número de posibilidades de ganar a unos colores que a otros.

Hemos mostrado además, cómo esta falta de simetría afecta a la justicia del proceso también en el caso de un número elevado de electores, aprovechando así para mostrar un ejemplo de la relación entre un problema discreto y su equivalente continuo y las claras similitudes entre las representaciones gráficas y las tablas que aparecen en un caso y otro.

Las matemáticas, atendiendo a su finalidad funcional, deben apoyar el proceso de toma de decisiones de los futuros electores –tanto en sus elecciones políticas como en las de contextos más cotidianos como este–, dotándoles de herramientas matemáticas y capacidades argumentativas contribuyendo así a la formación de un espíritu crítico que les permita comprender situaciones en las que se plantean elecciones. Para ello, debemos mostrar a los alumnos situaciones de la vida cotidiana relacionadas con los procesos de elección, sean o no de tipo político, promoviendo un análisis matemático detallado de la justicia o injusticia de los mismos.

Nuestra propuesta didáctica en torno a las matemáticas electorales, a desarrollar en futuros artículos, incluiría:

1) Estudio de los efectos de la vigente Ley d´Hont sobre la diferente representación de los electores según si su opción es o no mayoritaria. Estudio de otras leyes de reparto de representantes y comparación entre ambas. Ambos estudios podrían contextualizarse fácilmente considerando las últimas elecciones del municipio del Centro que se trate.
2) Estudio de cómo otros procesos de elección más simples son también susceptibles de ser enfocados de diversos modos y que el utilizar uno u otro no es inocente en absoluto.

REFERENCIAS

Álvarez, M. y Alonso, J.M. (2010). Las elecciones generales de 2008 y el juego del parlamento. *Suma,* 63, 7-15.

Alvaro, M. (2001) Los sistemas de votación y su problemática. *Epsilon: Revista de la Sociedad Andaluza de Educación Matemática "Thales"*, 50, 293-300.

Confédération suisse. Initiatives populaires. Recuperado el 1 de agosto de 2014, de http://www.bk.admin.ch/themen/pore/vi/index.html?lang=fr

Hernández, E. (2001). Matemáticas y sistemas electorales. En Hernández, J. (coord.) *La enseñanza de las matemáticas a debate: referentes europeos* (pags. 69-85). Madrid: Subdirección General de Información y Publicaciones.

Fernández, E. y Fernández, F. (1999) La teoría de votación y la "memoria matemática sobre el cálculo de la opinión en las elecciones" del Dr. D. Joseph Isidoro Morales. *Epsilon: Revista de la Sociedad Andaluza de Educación Matemática "Thales",* 45, 295-310.

Girón, F. J. y Bernardo, J. M. (2007). Las matemáticas de los sistemas electorales. *Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales*, 1, 21-34.

Estudiando probabilidad con el juego Chinesenspiel

Carmen León-Mantero
José Carlos Casas
Universidad de Córdoba

Resumen: *Cuando los conceptos se presentan de foma lúdica no solo se logra captar la atención de los alumnos sino que también su comprensión es mayor y más rápica. Presentamos una actividad para introducir conceptos de probabilidad a los alumnos de educación primaria a través de un juego matemático conocido como Chinesenspiel.*
Palabras Clave: *Probabilidad, juego matemático, educación primaria, matemáticas*

Studying probability with the Chinesenspiel game

Abstract: *When we present the concepts to students in a playful way , we get more attention and understanding is higher and faster. We present an activity to introduce concepts of probability to the primary school students through a mathematic game known as Chinesenspiel.*
Keywords: *Probability, mathematics games, primary school students, mathematics*

INTRODUCCIÓN

En diferentes ocasiones, la emersión de nuevos modos de pensar en matemáticas ha sido fruto del trabajo realizado fuera del contexto científico, y es que a menudo ocurre que cuando somos capaces de plantear y responder cuestiones en un ambiente relajado o lúdico surgen nuevas vías de pensamiento matemático. Por tanto, el uso de juegos matemáticos al iniciar el estudio de un tema puede aportar a alumnos de cualquier nivel, entre otros beneficios, motivación, interés, una aproximación inicial adecuada y la adquisición de algunas de las habilidades matemáticas que las matemáticas requieren (De Guzmán, 1989).

Un ejemplo de juego matemático es el denominado Chinesenspiel. Se trata de una adaptación del juego del parchís, clasificado como juego de persecución, que por su simpleza resulta muy útil para introducir el concepto de probabilidad en los niveles de educación primaria.

El Real Decreto 1513/2006 de Educación Primaria, así como el currículo de Educación Primaria de Andalucía recogen en el bloque 4 y el núcleo temático 6 respectivamente del área de matemáticas, denominado Tratamiento de la información, azar y probabilidad, los siguientes contenidos resumidos para el tercer ciclo:

Carácter aleatorio de algunas experiencias

- Presencia del azar en la vida cotidiana. Estimación del grado de probabilidad de un suceso.
- Valoración de la necesidad de reflexión, razonamiento y perseverancia para superar las dificultades implícitas en la resolución de problemas.

Desde las instituciones se recomienda promocionar el aprendizaje de la estadística y la probabilidad de una manera natural desde la educación primaria con la finalidad de ayudar a los niños a relacionar estos conocimientos con los fenómenos que les rodean (MEC, 2006). Para ello, presentamos una actividad que podemos realizar con alumnos de tercer ciclo de primaria para introducir los conceptos de aleatoriedad, probabilidad y espacio muestral.

ACTIVIDADES

El material necesario para el desarrollo del juego es un tablero como el que mostramos en la figura 1, cuatro fichas (una para cada jugador) de colores rojo, verde, azul y amarillo, y un gran dado con dos caras blancas y las cuatro caras restantes con los colores de los jugadores: rojo, verde, azul y amarillo. El número de jugadores puede variar de 2 a 4.

Es posible que los alumnos no conozcan las reglas del juego, por tanto antes de comenzar a jugar, procederemos a explicárselas:

- Para empezar, cada jugador debe colocar su ficha en la esquina del tablero con el mismo color que ésta.
- Uno de los jugadores lanza el dado hasta que aparezca uno de los colores que aparecen en el tablero, lo que permitirá al jugador que tenga la ficha del mismo color iniciar el juego.
- El juego comienza cuando el jugador seleccionado lanza el dado. Si el resultado de éste es una cara blanca, el jugador repite lanzamiento. Si el color obtenido es el mismo que el del jugador que ha lanzado, avanza una casilla (en sentido contrario a las agujas del reloj) y vuelve a lanzar el dado. Si el color obtenido es cualquiera de los otros 3,se acaba su turno y le pasa el dado al jugador de su derecha.

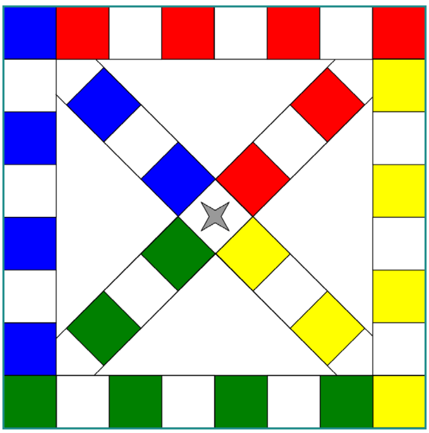


Figura 1. Tablero de Chinesenspiel.

- Cuando al mover ficha un jugador, éste se encuentra con otra en la casilla de destino, el jugador que se encontraba en esta posición tendrá que mover su ficha a la casilla de inicio.
- Cuando un jugador da la vuelta completa al tablero volviendo a la casilla inicial, enfilará en diagonal el último recorrido hasta la casilla central.
- Gana la partida el primero que logre llegar a la casilla central.

Tras preguntar a los alumnos si han entendido las reglas básicas, se les pide que hagan grupos de cuatro y se entrega a cada grupo un tablero y un dado para que comiencen a jugar de forma libre mientras el profesor comprueba que todos los alumnos han comprendido las reglas del juego y se han familiarizado con el tablero y el tipo de dado.

Como comentábamos anteriormente, vamos a proponer a nuestros alumnos actividades para trabajar los conceptos de aleatoriedad, espacio muestral y probabilidad. Para ello, les pediremos que pongan en común de forma reflexiva sus respuestas a las siguientes actividades:

Actividad 1

Proponemos a los alumnos las diferentes cuestiones sobre situaciones aleatorias:

- ¿Sabemos de antemano qué jugador va a comenzar el juego?
- ¿Influye el color elegido en el resultado del juego?

Actividad 2

Pedimos a los alumnos que indiquen el espacio muestral del experimento: una vez que conozcamos el jugador que comienza a jugar,

- ¿Qué resultados puede obtener cuando lance el dado?
- ¿En qué casillas podría quedarse cuando acabe su turno?

Actividad 3

Pedimos a los alumnos que intuyan los diferentes grados de probabilidad de las situaciones,

– ¿Qué situación es más fácil que ocurra? ¿que pierda turno, que vuelva a tirar moviendo ficha o que vuelva a tirar sin moverla?

Actividad 4

Proponemos a los estudiantes la situación “comerse la ficha de otro jugador” y les preguntamos:

- ¿Un jugador puede comerse la ficha de cualquiera de los otros jugadores?

– Si ponemos una ficha justo delante del jugador que tiene el turno, indicar algunas combinaciones con las que el jugador se come la ficha del otro. ¿Hay muchas combinaciones posibles? ¿Sabrías decir todas?
– Repetir la propuesta anterior con dos celdas de distancia.

Actividad 5

Colocamos las fichas a una distancia de una casilla del final respectivamente. Si le toca jugar al jugador con la ficha de color rojo,

– ¿Quiénes pueden ganar?
– ¿Qué tiene que salir para que gane el rojo?
– ¿Y el azul?
– ¿Y el verde?
– ¿Y el amarillo?
– ¿Quién es más fácil que gane?
– ¿Quién lo tiene más difícil?
– Si hubiese una ficha de color blanco, ¿tendría ventaja? ¿Por qué?

REFLEXIONES FINALES

Para profundizar más en el concepto de aleatoriedad podemos cambiar una regla del juego, por ejemplo, cuando un jugador pierde el turno, el dado pasa al jugador con el color resultante en el dado, en lugar de pasar al de su derecha. Para ello se podría elegir a un alumno para lanzar siempre el dado y otros ocho que fuesen los jugadores de dos tableros. En uno de los tableros se cambia de turno de forma convencional y en el otro según el color del dado. Transcurrido un tiempo, y si la partida es suficientemente larga, los jugadores con el mismo color deberían estar situados en lugares parecidos.

Tras la familiarización de los conceptos anteriores podemos introducir el concepto de probabilidad a través de la regla de Laplace e intentar que asignen probabilidades a cada uno de los sucesos del dado. Incluso podemos añadir el concepto de independencia de sucesos pidiendo a los alumnos que calculen la probabilidad de que se repita el mismo resultado en el dado después de haber obtenido, por ejemplo la cara blanca.

REFERENCIAS

De Guzmán, M. (1989). Juegos y Matemáticas. *Suma, 4*, 61-64.
MEC. (2006). *Real Decreto 1513/2006, de 7 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas de la Educación Primaria (BOE del 8 de diciembre)*.

Épsilon - *Revista de Educación Matemática* *2014, Vol. 31(3), nº 88, 71-88*

La extracción de raíces en el *Tratado de Mathematicas* (1573) del bachiller Juan Pérez de Moya

Vicente Meavilla Seguí
Licenciado en Matemáticas, Doctor en Filosofía (Pedagogía)
vmeavill@hotmail.com
Antonio M. Oller Marcén
Centro Universitario de la Defensa de Zaragoza
oller@unizar.es

RESUMEN: *Si se atiende al número de ediciones de algunas de sus obras y al volumen de su producción, no cabe duda de que el bachiller Juan Pérez de Moya es el matemático español más notable del siglo XVI. En este artículo se analizan los contenidos concernientes al tópico «extracción de raíces» propuestos por el bachiller en el Tratado de Mathematicas (1573) y se comparan con los que se desarrollan en textos de la misma época. A la luz de esta comparación, se pretende situar al matemático jienense (en cuanto al estudio de las raíces de números naturales se refiere) en el lugar que le corresponde dentro de la Matemática renacentista.*
Palabras *clave: Juan Pérez de Moya; siglo XVI; extracción de raíces; Aritmética; Tratado de Mathematicas.*

The extraction of roots in the *Tratado de Mathematicas* (1573) of the bachelor Juan Pérez de Moya

ABSTRACT: *According to the number of editions of some of his works and to the volume of its production it is clear that the Bachelor Juan Pérez de Moya is the most outstanding Spanish mathematician of the sixteenth century. In this paper we analyze the contents concerning the topic «extraction of roots» (Tratado de Mathematicas, 1573) and we compare them with those developed in texts from the same period of time. In*

light of this comparison, it is expected to place the Spanish mathematician (as for the study of the roots of natural numbers is concerned) in his right place within Renaissance Mathematics.
Keywords: *Juan Pérez de Moya; Sixteenth century; extraction of roots; Arithmetic; Tratado de Mathematicas.*

1. INTRODUCCIÓN

Los datos biográficos sobre el bachiller Juan Pérez de Moya son escasos e inciertos (Meavilla, 2005). Nació antes del 1513, probablemente en 1512, en Santisteban del Puerto (Jaén), tal como se indica en la portada de algunos de sus libros. Estudió en Salamanca y Alcalá de Henares. En 1536 obtuvo una capellanía en su pueblo natal y, ya muy mayor, fue canónigo de la Catedral de Granada, ciudad en la que murió allá por el 1596.

Además de algunas obras de carácter religioso y mitológico, el bachiller escribió varios libros de contenido científico-matemático en los que procuró divulgar los conocimientos de su época utilizando un lenguaje cercano, claro, preciso y compresible. La temática de dichos textos transita desde los «libros de cuentas» hasta el álgebra simbólica («regla de la cosa»), pasando por la aritmética, geometría, filosofía natural, navegación, geografía, astronomía y cosmografía.

A continuación enumeramos sus obras de contenido científico:

1) *Libro de cuenta, que trata de las quatro Reglas generales de Arithmetica practica, por numerosos enteros y quebrados y de reducciones de monedas destos Reynos de Castilla, con un razonamiento sobre la misma facultad*. Toledo, Juan Ferrer,1554.
2) *Libro Segundo de Arithmetica, Que trata de proporcion, y regla de tres, y monedas, pesos antiguos, con otras cosas tocantes al arte menor y mayor*. Salamanca, Iuan Canoua, 1557.
3) *Compendio de la regla de la cosa, o arte mayor*. Burgos, Martin de Bitoria, 1558.
4) *Arithmetica practica, y specvlatiua*. Salamanca, Mathias Gast, 1562[1].
5) *Arte de marear*[2], 1564.
6) *Obra intitvlada fragmentos mathematicos. En que se tratan cosas de Geometria, y Astronomia, y Geographia, y Philosophia natural, y Sphera, y Astrolabio, y Nauegacion, y Reloxes*. Salamanca, Iuan de Canoua, 1568.

---

1. Rodríguez Vidal (1987, pp. 10-11), refiriéndose al número de ediciones de la *Arithmetica practica, y specvlatiua*, afirma:

> «Es claro que cuando un libro ha tenido durante más de doscientos años sucesivas ediciones para utilizarlo como texto, no puede ser un libro indiferente a ningún estudioso de la historia de nuestra cultura. Este es el caso singular que ocurre con la *Arithmetica practica, y specvlatiua* del Bachiller Pérez de Moya».

2. Sobre este manuscrito de la Real Biblioteca del Monasterio de San Lorenzo de El Escorial, J. A. Sánchez Pérez (1929) afirma:

> «Son unos apuntes, no completos, atribuidos a Pérez de Moya, escritos en 1564. Parecen la preparación de una obra que no terminó».

7) *Tratado de Mathematicas en qve se contienen cosas de Arithmetica, Geometria, Cosmographia, y Philosophia natural. Con otras varias materias, necessarias a todas artes Liberales y Mechanicas*. Alcalá, Iuan Gracian, 1573.
8) *Tratado de Geometria Practica, y Speculatiua*. Alcalá, Ivan Gracian, 1573.
9) *Tratado de cosas de Astronomia,y Cosmographia, y Philosophia Natural*. Alcalá, Ivan Gracian, 1573.
10) *Arithmetica de Moya, intitvlada manual de contadores. En que se pone en suma lo que vn contador ha menester saber, y vn orden para los que no saben escreuir, con oyrlo leer, sepan contar, y conuertir de memoria vnas monedas en otras. Co(n) vnas tablas al fin en Guarismo, y Castellano para aueriguar con facilidad las cue(n)tas de los reditos de los ce(n)sos, y juros, segu(n) vsança de España, y otros reynos*. Alcalá, Iuan Gracian, 1582.
11) *Principios de Geometria, de que se pod(r)an aprouechar los estudiosos de artes liberales, y todo hombre que su officio le necessitare a tomar la regla y co(m)pas en la mano. Con el orden de medir, y diuidir tierras.* Madrid, Francisco Sanchez, 1584.

2. EL TRATADO DE MATHEMATICAS

Al referirse al *Tratado de Mathematicas en qve se contienen cosas de Arithmetica, Geometria, Cosmographia, y Philosophia natural*, Picatoste (1891) se expresa en los siguientes términos:

> *«Esta obra suele estar encuadernada en dos o tres tomos con distinta portada,* dedicatoria y prólogos, por lo cual se consideran como obras distintas y de esta manera las vamos a examinar.»

El primer tomo se consagra a la Aritmética[3], se desarrolla en setecientas cincuenta y dos páginas y se estructura en diez libros[4]. El libro quinto (pp. 323 – 396), al que

3. Como indica el título, el tomo segundo se dedica a la Geometría y el tercero se ocupa de la Astronomía, Cosmografía y Filosofía natural.

4. Los tópicos matemáticos a los que se consagra cada uno de ellos se indican al comienzo de la obra:
«**Lo** que se contiene en el primero tratado de Arithmetica
- I) **Arithmetica,** y Musica Speculatiua.
- II) **Las** reglas, o Problemas generales del Arithmetica Practica.
- III) **Quebrados,** o Fracciones Comunes, y Astronomicas.
- IV) **Reglas** de tres, y compañias, y falsas posiciones, y finezas de Oro, y Plata, y reglas de testamentos, y aprecios de joyas, &c.
- V) **Rayzes** de numeros.
- VI) **Prueuas** de las Problemas, o reglas generales de Arithmetica.
- VII) **Reglas** de Algebra, o de la Cosa, o arte mayor.
- VIII) **Demandas,** o questiones, y secretos, o experiencias de numeros.
- IX) **Cuentas** de memoria, para los que no saben escreuir, y reduziones de vnas monedas en otras.
- X) **Monedas,** y pesos antiguos, y characteres de numeros, y cosas de Reportorios de tiempo, y Computo.»

dedicaremos nuestra atención en los parágrafos siguientes, trata de las raíces de números y se divide en doce capítulos[5].

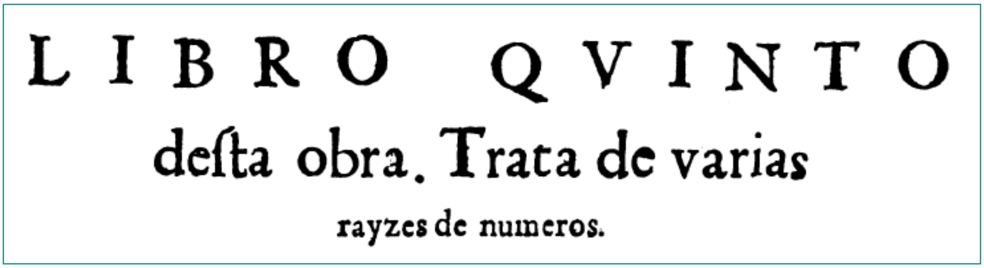

LIBRO QVINTO
desta obra. Trata de varias
rayzes de numeros.

Fig. 1. Título del libro quinto.

3. LAS FUENTES DEL LIBRO QUINTO

Antes de entrar en el análisis de los contenidos matemáticos del libro quinto, nos parece oportuno presentar el catálogo de autores y obras citadas por Pérez de Moya al referirse a determinados asuntos de carácter aritmético y geométrico. En la tabla siguiente se recogen los autores citados por Pérez de Moya junto con la página en la que lo hace. También se incluye la obra en la que, posiblemente, se apoyó para realizar la referencia.

Autor	Obra	Páginas en que se cita
Ptolomeo	*Almagesto*	328
Euclides	*Elementos de Geometría*	334, 338, 339, 341
Oroncio Fineo	*Protomathesis* *Arithmetica practica, libri quatuor*	334, 335
Nicolas Tartaglia	*General trattato di numeri, et misure*	334, 335, 395
Michael Stifel	*Arithmetica integra*	395

5. Los asuntos tratados en cada uno de ellos se detallan en el «Summario de los capitulos, y articulos que se contienen en el quinto libro desta obra que trata de rayzes de numeros» (pp. 323 – 325):
«Capitulo primero. En que se dize que cosa son rayzes en los numeros, y de varias differencias de rayzes.
Cap. 2. Trata de la rayz quadrada, tiene nueue articulos.
Capit. 3. Trata de numero Cubo, o Cubico, y de su rayz Cubica, tiene onze articulos.
Cap. 4. Trata de rayz quadrada, de rayz quadrada, tiene ocho articulos.
Capitulo 5. Trata de rayz relata, tiene seys articulos.
Cap. 6. Trata de rayz censicubica, tiene ocho articulos.
Capitulo 7. Trata de segundo relato, y de su rayz segunda relata, tiene seys articulos.
Capitulo 8. Trata del censo, de censo, de censo, y de su rayz, tiene seys articulos.
Capit. 9. Trata de numero Cubo de Cubo, tiene seys articulos.
Cap. 10. Trata de censo relato, y de su rayz, tiene seys articulos.
Capit. 11. Trata del numero tercero relato, tiene seys articulos.
Capit. 12. Muestra sacar rayz quadrada, y cubica, y las demás, de fraciones Astronomicas.»

A continuación analizamos con algo más de detenimiento estas referencias.

1) Ptlomeo.
La única cita relativa a Ptolomeo (*Almagesto*, libro I, cap. 9) se encuentra en la página 328 y se refiere a la utilidad de las raíces en el campo de la Geometría y Cosmografía.

2) Euclides.
En la página 334 del libro quinto, al hablar de la extracción de la raíz cuadrada de números naturales, Pérez de Moya cita a Euclides y hace alusión a la cuarta proposición del libro segundo de los *Elementos*:

> «Si se divide de un modo cualquiera una recta por un punto, el cuadrado de la recta entera equivale a los cuadrados de las partes más el doble del rectángulo comprendido por las partes.»

En la página 338 encontramos dos citas más. La primera, que concierne al resto de la raíz cuadrada, no señala la proposición de los *Elementos* involucrada en el asunto. La segunda, relativa a la extracción geométrica de la raíz cuadrada, alude a la novena proposición del libro sexto de Euclides:

> «Construir una media proporcional entre dos rectas dadas.»

En la página 339 también contabilizamos dos notas relacionadas con cuestiones geométricas utilizadas para la demostración de la proposición 9 del libro VI. La primera hace referencia al corolario de la octava proposición del libro sexto de los *Elementos*:

> «En un triángulo rectángulo la perpendicular trazada desde el vértice del ángulo recto a la base es media proporcional entre los segmentos de la base.»

La segunda se refiere a la penúltima proposición del libro sexto de Euclides:

> «En los triángulos rectángulos el cuadrado sobre el lado opuesto al ángulo recto es equivalente a los cuadrados sobre los lados que forman ese ángulo recto.»

En la página 341, al hablar de la semejanza de números sólidos, el bachiller santistebeño aconseja la lectura de la proposición vigesimoquinta del libro octavo de los *Elementos*:

> «Los números sólidos semejantes tienen entre sí la misma razón que dos números cubos.»

Atendiendo a la numeración de las proposiciones mencionadas, podemos sospechar que Pérez de Moya consultó la obra: *Evclidis Megarensis mathematici clarissimi Elementorum Geometricorum. Lib. XV. Cum expositione Theonis in prioris XIII a Bartholomaeo Veneto latinitate donate, Campani in omnes, & Hypsiclis Alexandrini in duos postremos* (1537).

3) Oroncio Fineo.
En las páginas 334 y 335, al hablar de las aproximaciones de la raíz cuadrada de números sordos, el canónigo de la Catedral de Granada se refiere a Oroncio Fineo pero no indica la fuente documental. Pérez de Moya debió consultar los capítulos

consagrados a la extracción de la raíz cuadrada en la *Protomathesis* (1532)[6] o en alguna edición de la *Arithmetica practica, libri quatuor* (1542, 1544, 1555)[7].

4) Nicolo Tartaglia.
En las páginas 334 y 335 se alude a Tartaglia en relación a las aproximaciones de las raíces cuadradas. Dado que no se indican los textos consultados y teniendo en cuenta que el libro segundo de la segunda parte del *General trattato di numeri, et misure* (1556-1560) se dedica íntegramente a la extracción de raíces, sospechamos que Pérez de Moya debió examinar esta obra.
Por otro lado, en la página 395, el bachiller aconseja la lectura de Tartaglia en lo que se refiere a la extracción de la raíz tercera relata (raíz de índice once) de entero y quebrado.

5) Michael Stifel.
La única mención referente a Michael Stifel se encuentra en la página 395 y alude a la extracción de la raíz tercera relata de entero y quebrado. Como en otras ocasiones, Pérez de Moya oculta el texto consultado. En este caso, creemos que se trata de la *Arithmetica integra* (1544)[8].

4. LA EXTRACCIÓN DE RAÍCES DE NÚMEROS NATURALES

El capítulo I del libro quinto del primer tomo del *Tratado de Mathematicas*, apoyándose en las nociones de número cuadrado, cubo, censo de censo, y relato, declara los conceptos de raíz cuadrada, cúbica, cuadrada de cuadrada (cuarta) y relata (quinta). Llegando a este punto, Pérez de Moya comenta:

> «Segu(n) esto infinitas differencias ay de rayzes segu(n) el orden q(u)e vno le paresciere de multiplicar a los numeros muchas, o pocas vezes.»

También se consideran los números prónicos[9], las raíces prónicas[10] y las raíces compuestas (ligadas[11] y universales[12]).

6. La extracción de la raíz cuadrada de números naturales se estudia en la parte consagrada a la Aritmética Práctica (*Liber primus, cap. VII. De inuentione radicis quadratorum numerorum*).

7. En la edición de 1555 que hemos consultado, la extracción de la raíz cuadrada de números naturales se estudia en el capítulo 7 (*De inuentione quadratae radicis in numerus integris*) del libro primero.

8. La extracción de raíces se contempla en el capítulo 5 (*De extractionibus radicum*) del primer libro.

9. Utilizando el simbolismo moderno, un número prónico según Pérez de Moya es del tipo , donde a es un cuadrado perfecto. Así, $18 = 4^2 + \sqrt{4}$ es prónico.

10. Dado un número prónico $a^2 + \sqrt{a}$, su raíz prónica es a. Así, 4 es la raíz prónica de 18.

Encontramos el concepto de raíz prónica en la *Suma de Arithmetica pratica y de todas mercaderias con la horden de contadores* (1546) de Gaspar de Texeda.

11. En notación simbólica moderna algunos ejemplos de raíces ligadas propuestos por Pérez de Moya son:

$$\sqrt{4} + \sqrt{1} = 3 \quad , \quad \sqrt{9} + \sqrt{5} = 3 + \sqrt{5}$$

12. En notación simbólica moderna algunos ejemplos de raíces universales propuestos por Pérez de Moya son:

$$\sqrt{13 + \sqrt{144}} = \sqrt{13 + 12} = \sqrt{25} = 5$$

$$\sqrt{4} + \sqrt{1} + \sqrt{10 + \sqrt{36}} = 7$$

A la hora de justificar la utilidad de las raíces, el bachiller se expresa en los siguientes términos (p. 328):

> «Destas rayzes q(ue) se ha dicho, la quadrada sirue para Geometria, y Cosmographia, y para el arte militar, y para sacar vn medio proporcional entre dos estremos, y para el arte mayor. La cubica sirue para sacar dos medios proporcionales entre dos estremos, y para sacar la quantidad de los Diametros en los cuerpos solidos, y para otras varias cosas. Y esta, con todas las demas que aqui tratamos generalmente, siruen para la regla de la cosa, o arte mayor, como en el proceso desta obra se vera.»

En los diez capítulos siguientes el discurso de Pérez de Moya, en lo que a la extracción de raíces de números naturales se refiere, transita por las siguientes etapas:

- Definición-descripción de potencias y raíces.
- Tablas de potencias de números dígitos: caracteres de exclusión.
- Algoritmos para la extracción de raíces.
- Aproximaciones de raíces.
- Pruebas de las raíces.

En lo que sigue, utilizaremos este guión para el análisis de los contenidos matemáticos.

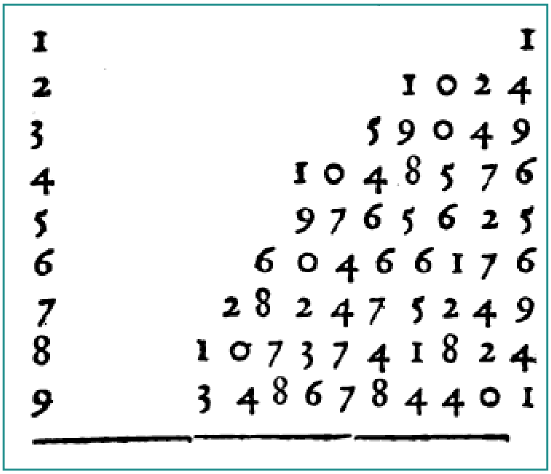
4.1. Definición-descripción de potencias y raíces

Apoyándose en la descripción de las potencias de base natural y exponentes entre 2 y 11, Moya introduce la noción de raíz cuadrada, cúbica, etc. Así, por ejemplo, en el caso de la raíz quinta [= *raíz relata*] el bachiller comenta (p. 356):

> «La quarta especie de rayz en orden, es la que dizen relata, y assi por numero relato se entie(n)de el vltimo producto que sale de la multiplicacion de cinco numeros yguales en quantidad, y genero, assi como estos 2. 2. 2. 2. 2. (o otros mayores) los quales, multiplicados todos, vnos por otros, hacen treynta y dos, este treynta y dos, se dize numero relato, y el vno de los cinco doses, se dize rayz relata deste numero treynta y dos.»

Las denominaciones de las raíces de distintos índices, que coinciden con las de las potencias de que provienen, se detallan en el cuadro siguiente:

Denominaciones de Pérez de Moya	Denominaciones Actuales
Rayz quadrada	Raíz cuadrada
Rayz cubica	Raíz cúbica
Rayz quadrada de rayz quadrada o Rayz de censo de censo	Raíz cuarta
Rayz relata	Raíz quinta
Rayz censicuba	Raíz sexta
Rayz segunda relata	Raíz séptima
Rayz quadrada de quadrada de quadrada o Rayz de censo de censo de censo	Raíz octava



1	1
2	1024
3	59049
4	1048576
5	9765625
6	60466176
7	282475249
8	1073741824
9	3486784401

Fig. 4. Potencias de exponente diez de los números dígitos.

Denominaciones de Pérez de Moya	Denominaciones Actuales
Rayz cubica de rayz cubica	Raíz novena
Rayz censirelata	Raíz décima
Rayz tercera relata	Raíz undécima

Los nombres utilizados por Pérez de Moya para describir las raíces, que están relacionados con el simbolismo algebraico de la época (Meavilla y Oller, 2014), fueron comunes en muchos impresos europeos del XVI[13]. No obstante, en la mayoría de ellos el catálogo propuesto por el canónigo jienense se limitaba a las raíces cuadradas y cúbicas[14].

4.2. Tablas de potencias de números dígitos: caracteres de exclusión

En el estudio de cada uno de los diez tipos de raíces precedentes, se presenta una tabla de las potencias de los números dígitos cuyos exponentes son, en cada caso, el índice correspondiente a la raíz que se esté considerando. Cuando existen, se añaden los caracteres de exclusión.

Por ejemplo, en el estudio de la *raíz censirelata* [= raíz décima], se ofrece la tabla siguiente (figura 4):

A esta lista, el bachiller añade (p. 384):

> «Desta tabla se manifiesta, que los números que fenescieren en 2. 3. 7. 8. seran irracionales, y los que fenescieren en 1. 4. 5. 6. 9. 0. podran ser, o no ser racionales.»

13. En la *Arithmetica integra* (1544) de Stifel y en el *General tratatto* (1556 – 1560) de Tartaglia encontramos denominaciones casi idénticas.

14. Esto sucede, por ejemplo, en las obras de Juan de Ortega (1512), Juan Andrés (1515), Joan Ventallol (1521), Petrus Apianus (1527), Oroncio Fineo (1532), Girolamo Cardano (1539), Gaspar Nicolas (1541) y Oroncio Fineo (1555).

4.3. Algoritmos para la extracción de raíces

Para la extracción de raíces, Pérez de Moya aborda en primer lugar el cálculo del número de cifras de la raíz pedida para, a continuación, proponer procedimientos para el cálculo de dichas cifras.

4.3.1. Número de cifras de la raíz

Para determinar el número de cifras de cualquier raíz, el bachiller propone las dos técnicas siguientes:

- Se ponen puntos debajo de las cifras del radicando (empezando por las unidades) de modo que entre dos puntos consecutivos quede una cifra sin puntuar (raíz cuadrada), dos cifras sin puntuar (raíz cúbica), tres cifras sin puntuar (raíz cuarta) etc. El número de puntos coincide con el número de cifras de la raíz correspondiente[15].
- Contando de derecha a izquierda y mediante barras verticales se separan las cifras del radicando en grupos de dos cifras (raíz cuadrada), tres cifras (raíz cúbica), cuatro cifras (raíz cuarta), etc. El número de grupos coincide con el número de cifras de la raíz.

El método señalado en el punto i. ya fue utilizado, entre otros, por: Luca Pacioli (1494), Juan Andrés (1515)[16], Joan Ventallol (1521), Girolamo Cardano (1539)[17], Gaspar de Texeda (1546) y Marco Aurel (1552). Por su parte, el método del punto ii. puede encontrarse en la obra de, entre otros: Nicolas Chuquet (1484), Juan de Ortega (1512), Estienne de la Roche (1521), Oroncio Fineo (1532 y 1555) y Juan de Ycíar (1549).

4.3.2. Cálculo de las cifras de la raíz

Para el cálculo de las cifras de las raíces de índices entre 2 y 11, Pérez de Moya debió estar familiarizado con los «coeficientes binomiales» que Michael Stifel estudió en su *Arithmetica integra* (1544) y Tartaglia en su *General trattato* (1556 – 1560) (figura 5).

Para las raíces cuadradas y cúbicas, el bachiller pone de manifiesto el conocimiento de dichos coeficientes:

> «La razo(n) de todo lo que en el sacar de rayz [cuadrada] se ha dicho sale d(e) la quarta proposicion del segundo de Euclides[18].» (p. 334).

---

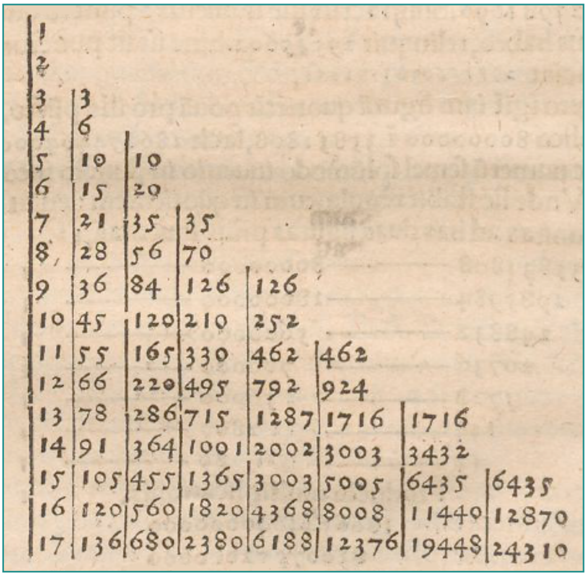
15. Este procedimiento se apoya en la expresión del radicando como suma de potencias de (raíz cuadrada), (raíz cúbica), (raíz cuarta) etc.

16. Juan Andrés también utilizó puntos entre las cifras del radicando a modo de barras verticales.

17. Cardano también utilizó puntos encima de las cifras del radicando. La misma técnica fue utilizada por Petrus Apianus (1527), Michael Stifel (1544) y Nicolás Tartaglia (1556-1560).

18. En lenguaje simbólico moderno dicha proposición equivale a la identidad:

$$(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$$



1							
2							
3	3						
4	6						
5	10	10					
6	15	20					
7	21	35	35				
8	28	56	70				
9	36	84	126	126			
10	45	120	210	252			
11	55	165	330	462	462		
12	66	220	495	792	924		
13	78	286	715	1287	1716	1716	
14	91	364	1001	2002	3003	3432	
15	105	455	1365	3003	5005	6435	6435
16	120	560	1820	4368	8008	11440	12870
17	136	680	2380	6188	12376	19448	24310

Fig. 5. Coeficientes binomiales en la *Arithmetica integra* (1544) de Michel Stifel.

«Para ente(n)der la razon de lo que se ha hecho en el sacar de la rayz Cubica, considera q(ue) si vna linea fuere diuidida en dos qualesquiera partes, el Cubo de toda la linea sera ygual, al Cubo de la primera parte, y al triplo del quadrado de la dicha primera parte, multiplicada por la segu(n)da, y al triplo del quadrado de la segunda parte, mutiplicada por la primera, y al Cubo de la segunda.» (p.350)[19].

Los procedimientos de extracción sólo difieren de los actuales en la disposición de los cálculos (figura 6).

A lo largo del libro quinto del primer tomo del *Tratado de Mathematicas*, el matemático santistebeño calcula las siguientes raíces exactas[20] (ver tabla).

Además de los aspectos aritmético-algebraicos de la extracción de raíces, Pérez de Moya también considera su componente geométrica. Así, al referirse a las raíces cuadradas y cúbicas, afirma:

19. En el libro segundo de la segunda parte del *General trattato di numeri, et misure*, Tartaglia describe de forma retórica el desarrollo de distintas potencias del binomio. Así, para el exponente 7, se expresa en los siguientes términos:

> **«Se** vna quantita sara diuisa in due parti, come si voglia, il secondo relato di tutta la detta quantita sempre sara eguale a questi otto principali produtti, cioe al produtto del secondo relato della prima parte. Et al produtto del settuplo del cubo censo della detta prima parte fia la seconda parte, & al produtto del 21 uplo del relato della detta prima parte fia il censo della seconda, & al produtto del 35 uplo del cen. cen. della detta prima fia il cubo della seconda, & al produtto del 35 uplo del cen. cen. della seconda fia il cubo della prima, & al produtto del settuplo del censo cubo della detta seconda fia la prima (simplice) & finalmente al produtto del secondo relato della detta seconda parte.» (fol. 51r).

20. Hemos utilizado el simbolismo moderno para radicales, desconocido por Pérez de Moya.

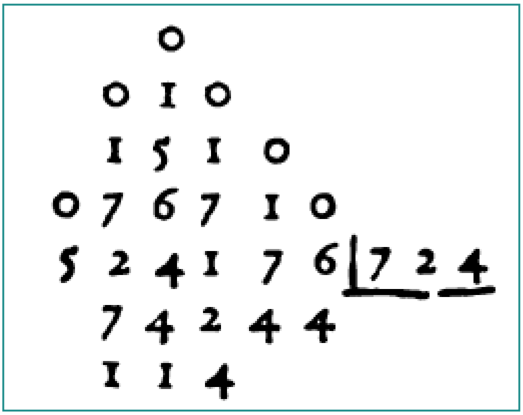


Fig. 6. Extracción de la raíz cuadrada de 524176 (p. 332).

$\sqrt{524176}$	$\sqrt{92524}$
$\sqrt[3]{15625}$	$\sqrt[3]{70444997}$
$\sqrt[3]{130323843}$	$\sqrt[3]{19683}$
$\sqrt[4]{279841}$	$\sqrt[5]{147008443}$
$\sqrt[6]{1073741824}$	$\sqrt[7]{2494357888}$
$\sqrt[8]{1099511627776}$	$\sqrt[9]{1801152661463}$
$\sqrt[10]{16679880978201}$	$\sqrt[11]{350277500542221}$

«… buscar la rayz quadrada de vn numero, no es otra cosa sino buscar vna quantidad media proporcional entre la vnidad, y el tal numero p(ro)puesto.» (p. 329).

«Nota, quando te piden que saques rayz [cuadrada] de vna qualquiera qua(n)tidad, entenderas que la tal quantidad es area de vn quadrado, y saber sacar su rayz es querer saber el lado, o principio d(e) do el tal quadrado procedio. Y si dixessen rayz Cubica, la tal quantidad entenderas ser cuerpo Cubo.» (p. 330).

Además, el bachiller determina geométricamente la raíz cuadrada y la raíz cúbica de dos números concretos [= segmentos rectilíneos].

En el primer caso, calcula la raíz cuadrada de 12 sirviéndose de un método clásico contenido en los *Elementos* de Euclides (Libro VI, prop. 9). El bachiller describe el procedimiento como sigue (p. 339):

«…queriendo sacar la rayz de doze, tomaras doze, y la vnidad, o dos, y seys, o tres, y quatro, porque qualquiera destas par de quantidades multiplicadas, hacen doze, y assi no importara mas tomar vnas q(ue) otras, y por causa de exemplificar, siruamonos de quatro y tres. Toma agora vna linea de 4 tamaños yguales, y otra de tres, assi como la linea a. b. y la c. d. entre las quales buscaras vna linea media proporcional […] y para hallar esta linea, juntaras la a.b. y c.d. a la larga, y quedara de ambas hecha la linea e.f. sobre la qual haras medio circulo, de modo que toda la e.f. quede por diametro, como paresce en la figura l.h.m. luego del punto. i. del diámetro (que es do se junto la linea a.b. con la c.d.) saca vna perpendicular hasta

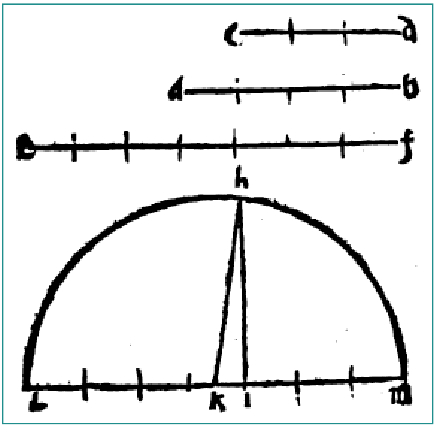


Fig. 7. Ilustración que acompaña a la extracción geométrica de $\sqrt{12}$

la circunferencia del semicirculo, como muestra la línea. h.i. y esta sera la línea proporcional, la potencia de la qual valdra doze, y por consiguiente sera la rayz del dicho doze.» (figura 7).

Pérez de Moya justifica este procedimiento con la ayuda de Euclides (corolario de la proposición 8 del libro VI y penúltima proposición del libro VI).

En cuanto a la construcción geométrica de la raíz cúbica, Moya utiliza una antigua técnica para intercalar dos medias proporcionales entre dos segmentos rectilíneos dados[21] que encontramos en la *Summa* (1494) de Luca Pacioli y en el libro segundo de la segunda parte del *General trattato di numeri, et misure* de Tartaglia. El bachiller describe la construcción pero no la demuestra[22] (p. 351):

«Si por via de linea quisieres sacar rayz Cubica de algun numero, como si dixessen. Dame la rayz Cubica deste numero, o linea de ocho tamaños, haz della vna superficie, o figura Parallelograma, que tenga por lado vn tamaño de los ocho, que es la linea larga, como muestra a.b.c.d. con las otras lineas largas que se toquen en el angulo. b. del Parallelogramo, luego para sacar el ce(n)tro deste paralelogramo, echa vna linea del punto. b. hasta el punto. c. y otra desde el punto. a. hasta el pu(n)to. d. las quales se cortaran en el pu(n)to. g. y este sera el centro deste Parallelogramo. Luego asienta el vn pie del compas en este punto, o ce(n)tro. g. y estiende lo tanto en las lineas. a.f. y en la. d.e. que hagas dos pu(n)tos en ellas, de modo que echando vna linea del vno al otro, passe por el punto, o angulo. c. como haze la linea h.c.i. y lo que esta linea cortare de la línea. d.e. (que es lo que ay entre la. i. y la. d.) sera la rayz Cubica de la línea. b.d. que se diuidio en ocho tamaños. Y assi como la rayz Cubica de ocho, es dos, assi esta quantidad. i.d. (que dezimos ser la rayz) es dos tamaños, yguales a los ocho de la dada línea b.d. Y deste modo se sacara rayz Cubica de qualquiera numero.» Figura 8.

4.4. La aproximación de raíces

4.4.1. Aproximación de raíces cuadradas

Pérez de Moya inicia el estudio de las aproximaciones de raíces cuadradas con las palabras siguientes (p. 334):

«Algunos, como Oroncio, quieren que sacando rayz [cuadrada] de numero sordo, que lo que sobrare se po(n)ga sobre vna raya, y la rayz que ouiere salido se doble y añada vn punto, y se ponga por denominacio(n) a lo que sobro.»

21. Siguiendo a Heath (1981), esta técnica fue utilizada por Apolonio, Herón y Filón de Bizancio.
22. En los textos de Pacioli y Tartaglia que hemos citado se ofrecen las demostraciones pertinentes.

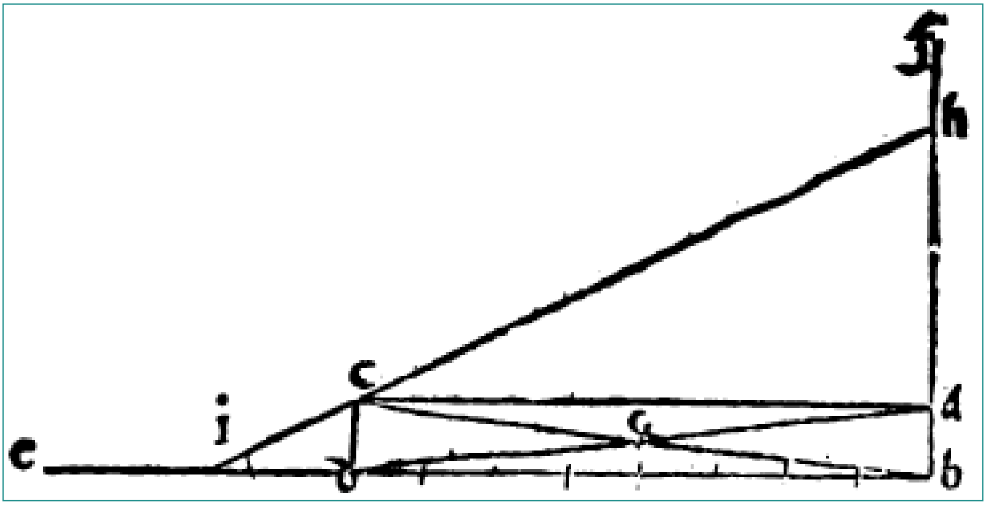


Fig. 8. Ilustración que acompaña a la extracción geométrica de $\sqrt[3]{8}$

En lenguaje simbólico moderno, la aproximación que el canónigo de la Catedral de Granada atribuye a Oroncio Fineo equivale a:

$$\sqrt{N} = \sqrt{a^2 + r} \cong a + \frac{r}{2a+1},$$

donde a^2 es el mayor cuadrado contenido en N [23].

Consultando los ejemplos de aproximaciones de raíces cuadradas contenidos en la *Arithmetica practica*[24] de Fineo, se observa que la aproximación utilizada por Oroncio es:

$$\sqrt{N} = \sqrt{a^2 + r} \cong a + \frac{r}{2a}$$

En consecuencia, la información facilitada por el bachiller es incierta.

Pérez de Moya también se refiere al tipo de aproximación del que se sirvió Tartaglia en los siguientes términos (p. 334):

23. En el *Libro Segundo de Arithmetica* (1557, fol. 22v), Pérez de Moya enuncia dicha regla, sin referirse a Oroncio Fineo, en los siguientes términos:

> «**Qvando** hauiendo sacada la rayz de algun numero sobrare algo pondras lo que sobrare sobre vna raya, y doblaras la rayz del tal numero y añadille vno y ponerlo has debaxo por denominador.»

24. En lenguaje simbólico moderno, los ejemplos de aproximaciones ofrecidos por Oroncio Fineo (fol. 11v) son:

$$\sqrt{204315} = \sqrt{452^2 + 11} \cong 452 + \frac{11}{904}$$
$$\sqrt{291612} = \sqrt{540^2 + 12} \cong 540 + \frac{12}{1080} = 540 + \frac{1}{90}$$

«Nicolas Tartalla quiere que al duplo de la rayz [cuadrada] no se añada vno, sino que solamente se doble la rayz que ouiere venido, y se ponga debaxo de lo que sobrare por denominacion.»

Siendo cierto que Tartaglia en su *General trattato* (Libro segundo de la segunda parte, fol. 25r) hace uso de esta aproximación[25], también lo es que, en raíces cuadradas del tipo $\sqrt{N} = \sqrt{a^2 + 2a}$,, el matemático italiano aconseja esta otra:

$$\sqrt{N} = \sqrt{a^2 + 2a} = \sqrt{a^2 + r} \cong a + \frac{r}{2a + 1}$$

A continuación, el bachiller propone otra regla de Tartaglia (*General trattato.* Libro segundo de la segunda parte, fols.25v-26r), consistente en la aplicación reiterada de aproximaciones del tipo

$$\sqrt{a^2 \pm r} \cong a \pm \frac{r}{2a},$$

y la aplica al cálculo aproximado de la raíz cuadrada de 3. En esencia, las operaciones efectuadas, expresadas en el lenguaje simbólico moderno, son:

- Primera aproximación:

$$\sqrt{3} = \sqrt{1^2 + 2} \cong 1 + \frac{2}{2 \times 1} = 1 + 1 = 2$$

- Segunda aproximación

$$2^2 = 3 + 1 \Rightarrow 3 = 2^2 - 1 \Rightarrow \sqrt{3} = \sqrt{2^2 - 1} \cong 2 - \frac{1}{2 \times 2} = 2 - \frac{1}{4} = \frac{7}{4}$$

- Tercera aproximación

$$\left(\frac{7}{4}\right)^2 = \frac{49}{16} = 3 + \frac{1}{16} \Rightarrow 3 = \left(\frac{7}{4}\right)^2 - \frac{1}{16} \Rightarrow \sqrt{3} = \sqrt{\left(\frac{7}{4}\right)^2 - \frac{1}{16}} \cong \frac{7}{4} - \frac{1/16}{2(7/4)}$$
$$= \frac{7}{4} - \frac{1/16}{7/2} = \frac{97}{56}$$

El matemático andaluz concluye (p. 335):

«Y deste modo podras proceder aproximando tanto, que quasi no sea sensible el error, mas al justo nunca llegaras, porque por tanto se dize vn numero sordo, porque quando del se saca rayz, ni quanto, ni qual sea se oye.» (p. 335).

25. «Laqual regola e di questa sorte, che pongono quel tal auanzano sopra vna vírgola, & il doppio della prima radice (gia trouata) di sotto, et tal rotto lo accompagnano con la detta prima radice sana, & tal summa concludeno esser la radice propinqua di detta prima quantita proposta.»

Después de esto, el matemático jienense calcula el valor aproximado de la raíz cuadrada de 5 utilizando un procedimiento similar al de Nicolas Chuquet (*Triparty*, 1484)[26], consistente en acotar el valor de dicha raíz mediante intervalos abiertos encajados cuyos extremos se obtienen sucesivamente a partir de la «propiedad de los valores intermedios»:

$$\frac{a}{b} < \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d} \quad (^{27})$$

Pérez de Moya pudo conocer este método a través de Etienne de la Roche (*Larismethique nouuellement composee*, 1520)[27] o de Joan Ventallol (*Pratica mercantíuol*, 1521)[28].

Por último, el bachiller propone «otra orden de sacar rayz de numeros sordos» que admite la siguiente traducción al simbolismo moderno:

$$\sqrt{N} = \frac{\sqrt{10^{2k} \cdot N}}{10^k}$$

Esta forma de aproximar se encuentra la «Aritmética práctica» de Oroncio (1555*,* fol. 12v) y Moya ya la utilizó en el *Libro Segundo de Arithmetica* (1557, fol. 23v). Advirtamos que la aplicación esta regla incluye el uso de fracciones decimales.

4.4.2. Aproximación de raíces cúbicas

En cuanto a la aproximación de las raíces cúbicas se refiere, el bachiller presenta las dos reglas siguientes:

$$\sqrt[3]{N} = \sqrt[3]{a^3 + r} \cong a + \frac{r}{3a(a+1)+1} \quad ; \quad \sqrt[3]{N} = \sqrt[3]{a^3 + r} \cong a + \frac{r}{3a^2 + 3a}$$

La segunda se describe en el *General trattato* (fols. 27v-28r) de Nicolo Tartaglia del modo siguiente:

> «Per cauare adonque la propinqua radice cuba delli numeri non cubi, caua prima la radice cuba del maggior numero cubo, che sia in quel tal numero non cubo, & quel che soprarestara a tal operatione poneralo sopra vna virgola, o vuoi dir sopra di vna leneetta, & fatto questo per formar il denominator da mettere sotto di quella trippla sempre quella radice gia cauata, e quel triplato multiplicalo per la medesima radice, & a tal multiplicatione aggiongiui il detto triplato, & tal summa ponila sotto a quella lineetta per denominator, & questo tal rotto aggiongilo alla prima radice, & tal qua(n)tita cosi co(m)posta sara la radice propinqua cuba di quel proposto numero non cubo.»

26. La *Triparty* se escribió en 1484 pero su manuscrito no fue conocido hasta que Aristide Marré lo publicó en 1881. Afortunadamente, parte de la obra de Chuquet fue plagiada por Estienne de la Roche en *Larismethique nouellement composee* (1520).

27. En los folios 32r y 32v, Estienne de la Roche propone el método de aproximación de raíces de Chuquet.

28. En el folio CXXr, Ventallol resuelve dos ecuaciones de segundo grado con una incógnita utilizando el método de aproximación de Chuquet.

Refiriéndose a estas dos aproximaciones de la raíz cúbica, Simon Stevin (1585, p. 125) dice:

> «NOTA Nicolas Tartalia traictant curieusement de ceste reste, n'aiouste poinct ce dernier 1, comme nous (auec Iuan Peris de Moya) auons faict…»

4.4.3. Aproximación de raíces de índices superiores

Para las raíces de índices entre 4 y 11, Pérez de Moya se sirve de aproximaciones que admiten la siguiente generalización

$$\sqrt[n]{N} = \sqrt[n]{a^n + r} \cong a + \frac{r}{\binom{n}{1} a^{n-1} + \binom{n}{2} a^{n-2} + \cdots \binom{n}{n-1} a}$$

Tartaglia utiliza este tipo de aproximaciones en su *General trattato*.

4.5. Las pruebas de las raíces

En todos los casos en que se aplica (raíces de índices 2, 3, 4, 5 y 6), la prueba de la extracción de la raíz enésima de un número natural consiste en elevar a la enésima potencia la raíz hallada y añadir el resto al resultado obtenido. En el caso de la raíz censicuba [= raíz sexta], el bachiller puntualiza (p. 366):

> «La prueba destas rayces, sera conuertir la tal rayz censicuba, multiplicando seys numeros yguales, a la tal rayz, vnos por otros, y si el vltimo producto, añadiendo lo que sobrare (si sobrare algo) fuere tanto como el numero de quien se ouiere sacado la tal rayz estara buena, y si no fuere tanto, sera falsa, y sera necessario hazer la otra vez, o otras, hasta q(ue) salga deste modo.»

5. CONCLUSIONES

A la luz de lo expuesto en los parágrafos precedentes, podemos afirmar que el libro quinto (*Trata de varias rayzes de numeros*) del primer tomo del *Tratado de Mathematicas* presenta las siguientes mejoras o retrocesos en relación a las aritméticas españolas y extranjeras del siglo XVI que hemos examinado.

1) La explicación detallada de la extracción de las raíces de índices entre 2 y 11, no la hemos encontrado en las aritméticas consultadas, excepción hecha del *General trattato di numeri et misure* (1556 – 1560) de Tartaglia. En consecuencia, podemos concluir que, en cuanto al detalle y al número de casos estudiados, la exposición de Pérez de Moya es superior a la que aparece en la mayoría de los manuales del siglo XVI.
2) El bachiller sólo presenta la justificación del procedimiento utilizado para la extracción numérica de la raíz cuadrada y la raíz cúbica (cuadrado del binomio y cubo del binomio). En esto el tratamiento de Pérez de Moya es inferior al de

Tartaglia que, en forma retórica, enuncia el desarrollo de todas las potencias del binomio relacionadas con la extracción de las raíces de índices entre 2 y 11.

3) La construcción geométrica de la raíz cúbica que Pérez de Moya presenta, sin demostración alguna, no es frecuente en los manuales renacentistas y no aparece en las aritméticas españolas del XVI que hemos consultado. En el *General trattato di numeri et misure*, Tartaglia ofrece una prueba de dicha construcción.

4) El método de Chuquet para la proximación de la raíz cuadrada, que Pérez de Moya incluye en su obra, no aparece en forma explícita, salvo en la *Larismethique nouellement compose* (1520) de Estienne de la Roche y la *Pratica mercantíuol* (1521) de Joan Ventallol, en ninguna de las aritméticas españolas y extranjeras del XVI que hemos consultado.

5) Las aproximaciones de las raíces de índices entre 4 y 11, que el bachiller debió tomar prestadas de Tartaglia, no las encontramos en las aritméticas españolas del XVI que hemos estudiado.

A partir de las consideraciones anteriores establecemos las dos conclusiones siguientes:

a) El tratamiento que hace Juan Pérez de Moya de la extracción numérica de raíces es superior al que se encuentra en las aritméticas españolas del XVI, anteriores a 1573.

b) El tratamiento que hace Juan Pérez de Moya de la extracción numérica de raíces es inferior al que Tartaglia desarrolla en su *General trattato di numeri et misure*. Sin duda alguna, el bachiller se inspiró en dicha obra para escribir el libro quinto del primer tomo del *Tratado de Mathematicas*.

6. AGRADECIMIENTOS

El presente trabajo se ha realizado dentro del proyecto “La difusión del conocimiento matemático en el nacimiento de la imprenta: descripción y análisis comparado de aritméticas del siglo XVI escritas en castellano” EDU2011-27168 financiado por en Ministerio de Economía y Competitividad de España.

REFERENCIAS

Andres, J. (1515). *Sumario breue d(e)la pratica dela Arithmetica d(e) todo el curso de larte merca(n)tiuol bien declarado: el qual se llamamaestro de cuento.* Valencia: Juan Joffre.

Apianus, P. (1527). *Eyn newe und wolgegründte underweysung aller Kauffmanss Rechnung in dreyen Büchern.* Ingolstadt.

Aurel, M. (1552). *Libro primero, de Arithmetica Algebratica.* Valencia: Ioan de Mey.

Cardano, G. (1539). *Practica Arithmetice, & Mensurandi singularis.* Mediolani: Bernardini Calusci

Chuquet, N. (1881). *Le Triparty en la Science des nombres, par maistre Nicolas Chuquet, Parisien, publié d'après le manuscrit fonds français nº1346 de la Bibliothèque Nationale*

de Paris et precédé d'une notice par M. Aristide Marré. Rome: Imprimerie des Sciences Mathématiques et Physiques.

Euclides (1537). *Evclidis Megarensis mathematici clarissimi Elementorum Geometricorum. Lib. XV. Cum expositione Theonis in prioris XIII a Bartholomaeo Veneto latinitate donate, Campani in omnes,& Hypsiclis Alexandrini in duos postremos.* Basilea: Iohannem Hervagivm.

Fineo, O. (1532). *Protomathesis: Opus uarium, ac scitu non minus utile quam iucundum, nunc primum in lucem foeliciter emissum.* París: (sin editor).

Fineo, O. (1555). *De Arithmetica practica, libri quatuor.* París: Michaelem Vascosanum.

Heath, T. (1981). *A history of Greek Mathematics* (Volume I). New York: Dover.

Meavilla, V. (2005). Historia de la Educación Matemática en España: el contenido algebraico de la *Arithmetica practica, y specvlatiua* de Juan Pérez de Moya (ca. 1512 – 1596). *Revista Brasileira de História da matemática.* Vol. 5, nº 9, pp. 19-35.

Meavilla, V. y Oller, A.M. (2014). El simbolismo algebraico en tres álgebras españolas del siglo XVI. *NÚMEROS*. 87, pp. 59-68.

Nicolas, G. (1541). *Tratado da pratica Darismetica*. (sin lugar): Luis Rodriguez.

Ortega, J. de (1512). *Conpusicion de la arte de la arismetica y juntamente de geometria: fecha por…* León: en casa de Maistro Nicolau de Benedictis: por Joannnes Trinxer librero de Barcelona.

Pacioli, L. (1494). *Summa de Arithmetica,Geometria, Proportioni et Proportionalita.*Veneza: Paganini.

Pérez De Moya, J. (1557). *Libro Segundo de Arithmetica*. Salamanca: Iuan de Canoua.

Pérez De Moya, J. (1562). *Arithmetica practica, y specvlatiua*. Salamanca: Mathias Gast.

Pérez De Moya, J. (1573). *Tratado de Mathematicas en qve se contienen cosas de Arithmetica, Geometria, Cosmographia, y Philosophia natural. Con otras varias materias, necessarias a todas artes Liberales y Mechanicas.* Alcalá: Iuan Gracian.

Picatoste y Rodríguez, F. (1891). *Apuntes para una biblioteca científica española del siglo XVI.* Madrid: Imprenta y fundición de Manuel Tello.

Roche, E. de la (1520). *Larismethique nouellement composee*. Lyon: Constantin Fradin.

Sánchez, J. A. (1929). *Las Matemáticas en la Biblioteca del Escorial.* Madrid: Imprenta de Estanislao Maestre.

Stevin, S. (1585). *L'Arithmetique.* Leyde: Christophe Plantin.

Stifel, M. (1544). *Arithmetica integra.* Norimbergae: Iohan Petreium.

Tartaglia, N. (1556–1560). *General trattato di numeri et misure.* Vinegia: Curtio Troiano.

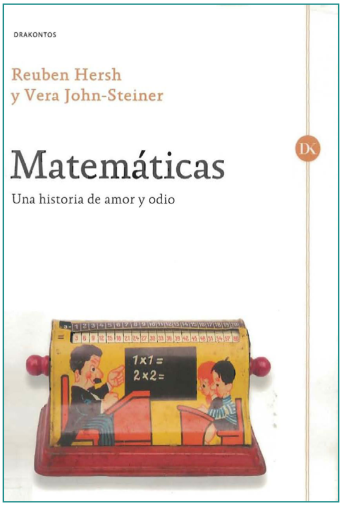
Texeda, G. de (1546). *Suma de Arithmetica pratica y de todas mercaderias con la horden de contadores*. Valladolid: Francisco Fernandez de Cordova.

Ventallol, J. (1521). *Pratica mercantíuol.* Lyo: Joan de la Place.

Ycíar, J. (1549). *Libro intitulado Arithmetica practica/ muy vtil y prouechoso para toda persona que quisiere exercitar se en aprender a contar.* Zaragoza: Pedro Bernuz.

Épsilon - *Revista de Educación Matemática* *2014, Vol. 31(3), nº 88, 89-90*

MATEMÁTICAS. Una historia de amor y odio



Reuben Hersch
Vera John-Steiner
Editorial: Crítica
Marzo 2012 (primera edición)
ISBN: 978-84-989229-8-1
463 páginas

La colaboración entre un matemático, Reuben Hersch, y una experta en lingüística y educación, Vera John-Steiner, permitió la creación de este libro, que pretende dar una visión más social y emocional de las matemáticas y su estudio.

Entre sus páginas, los autores abordan una amplia variedad de mitos sobre esta disciplina y sus participantes, siempre a través de anécdotas, comentarios y biografías de reputados matemáticos.

En concreto, desde esta perspectiva, el libro indaga sobre los jóvenes matemáticos y el origen de su talento, la cultura matemática, el apoyo que esta disciplina supuso para muchos matemáticos en sus peores momentos, la adicción a las matemáticas y los peligros que esta ha podido conllevar, las amistades entre los matemáticos y las comunidades

que se han formado a lo largo de los años, el papel de las mujeres en matemáticas y la importancia o no de la edad para investigar en esta materia.

Finalmente, plantea las matemáticas en el contexto educativo; primero desde el punto de vista de dos profesores con modelos de enseñanza contrarios, y después desde el de los alumnos y el frecuente amor u odio que se produce en sus relaciones con esta asignatura.

En definitiva, el libro aporta un gran número de curiosidades y detalles interesantes, e incluso divertidos, tanto sobre las matemáticas como sobre aquellos que han trabajado en este campo. Convirtiéndose en una obra altamente recomendable para todo aquel que quiera conocer más sobre las matemáticas en un tono informal y anecdótico, y especialmente para los docentes, que podrán utilizarla en el aula para ayudar a sus alumnos a conocer y conectar mejor con esta materia y con las personas que dedicaron o dedican su vida al estudio de ella.

María José Madrid
Universidad de Salamanca

Épsilon - Revista de Educación Matemática *2014, Vol. 31(3), nº 88, 91-91*

Agradecimientos a los evaluadores

En este último número del año 2014, desde Epsilon, Revista de Educación Matemática, agradecemos la colaboración de aquellos colegas que aportaron su conocimiento y tiempo en la revisión y arbitraje de los manuscritos propuestos a la revista. Mediante sus comentarios y sugerencias ayudan a obtener y mantener una calidad de los artículos publicados durante el año 2014.

- Agustín Carrillo
- Alexander Maz
- Bernardo Gómez
- Carlos de Castro
- Carmen León
- Carolina Carrillo
- Francisco España
- Francisco Juan Y Ribaya
- Inmaculada Serrano
- Isidoro Segovia
- Jesús Salinas
- José Galo
- José Mª Pavia
- José Ortiz
- Liliana Mabel Tauber
- Mª José González
- Mª Jesús Salinas
- Miguel Villaraga
- Noelia Noemí Jiménez
- Nora Gatica
- Rafael Bracho
- Rafael Rubio
- Roberto Vidal
- Verónica Albanese

Portada:

La revista Epsilon está reseñada en:
IN-RECS, Dialnet, Latindex, RESH, DICE, MathEduc
y Base de Datos del Centro de Documentación Thales.

epsilon 88

Revista de Educación Matemática

Página de la revista: http://thales.cica.es/epsilon
Revista: epsilon@thales.cica.es

Sociedad Andaluza de Educación Matemática "Thales"

Edita
Sociedad Andaluza de
Educación Matemática "Thales"
Centro Documentación "Thales"
Universidad de Cádiz
C.A.S.E.M.
11510 PUERTO REAL (Cádiz)

Maquetación e impresión
Utrerana de Ediciones, s.l.
Cristóbal Colón, 12
41710 Utrera (Sevilla)

Depósito Legal
SE-421-1984

ISSN:
2340-714X

Período
3er cuatrimestre 2014

Suscripción
ESPAÑA: 42,00 euros
PAÍSES DEL EURO: 63,00 euros
RESTO DE PAÍSES: 90 $ USA
(3 NÚMEROS AL AÑO)

SUMARIO / CONTENTS

Épsilon - *Revista de Educación Matemática* *2014, Vol. 31(3), nº 88, 7-20*

Sobre la naturaleza de las matemáticas en la formación inicial de maestros: los procesos matemáticos en el sistema de creencias de los estudiantes

Ángel Alsina y Paula López
Universidad de Girona

Resumen: *Se analizan las creencias de 142 futuros maestros sobre la naturaleza de las matemáticas y, de forma más concreta, su visión sobre los procesos matemáticos. Los datos obtenidos a través de un cuestionario muestran que no se consideran suficientemente las formas de adquisición y uso de los contenidos matemáticos. Estos resultados ponen de manifiesto la necesidad de trabajar los procesos matemáticos durante la formación inicial y permanente del profesorado para favorecer la adquisición de la competencia matemática.*
Palabras clave: *naturaleza de las matemáticas, procesos matemáticos, dominio afectivo, sistema de creencias, formación de maestros, identidad profesional del maestro de matemáticas.*

About the nature of mathematics in initial teacher training: The mathematical processes in the belief systems of students

Abstract: *We analysed 142 pre-service teachers' beliefs about the nature of mathematics and, more specifically, their view of mathematical processes. The data obtained by questionnaire demonstrate that the ways of acquiring and using mathematical contents are not adequately considered. These results reveal the need to work the mathematical processes during the training teacher to promote mathematical competence.*
Keywords: *nature of mathematics, mathematical processes, affective domain, belief system, teacher training, professional identity of mathematics teachers.*

INTRODUCCIÓN

La formación inicial que reciben los futuros maestros tiene una gran repercusión en el desempeño de la profesión de maestro. La institución universitaria, pues, tiene la misión de preparar a maestros competentes, es decir, maestros que además de tener conocimientos y habilidades que permitan resolver adecuadamente los problemas profesionales, sientan y reflexionen acerca de la necesidad y el compromiso de actuar en correspondencia con sus conocimientos, habilidades, motivos y valores -con flexibilidad, dedicación y perseverancia-, en la solución de los problemas que de él demanda la práctica profesional (Esteve y Alsina, 2010). De acuerdo con las directrices estatales sobre las competencias profesionales que debe aprender un estudiante para maestro durante su formación inicial (MEC, 2007a; MEC, 2007b), de forma muy sintética los futuros maestros deberían construir y co-construir de manera autorregulada nuevos conocimientos disciplinares y didácticos, y reconstruir los conocimientos, experiencias y creencias previas que pueden suponer un obstáculo para su identidad profesional (Beijaard, Meijer y Verloop, 2004; Bauchamp y Thomas, 2009).

El argumento que se acaba de exponer es probablemente una de las principales razones por las que, en el contexto de la investigación en torno al dominio afectivo en educación matemática, los estudios acerca de las creencias de los futuros maestros tienen un peso importante. Caballero, Blanco y Guerrero (2008) señalan que el estudio de las creencias en educación matemática incluye cuatro dimensiones: creencias sobre la naturaleza de las matemáticas y de su enseñanza y aprendizaje; creencias sobre uno mismo como aprendiz de matemáticas; creencias acerca del papel del profesorado de matemáticas; y creencias suscitadas por el contexto socio-familiar. Todas ellas, como se ha indicado, ejercen un papel importante en la configuración progresiva de la identidad profesional del maestro de matemáticas, un término recientemente acuñado por Lutovac y Kaasila (2011, 2013) para referirse a un proceso narrativo que incluye una interacción entre el contexto matemático individual y social y un proceso de auto-reflexión en el que la identidad matemática pasada, presente y futura entran en diálogo. Considerando esta conceptualización, algo implícita, en este trabajo se considera que la identidad profesional del maestro de matemáticas se modela a lo largo de toda su trayectoria como aprendiz de matemáticas durante su formación no universitaria, y como aprendiz de didáctica de las matemáticas durante su formación universitaria. Las experiencias personales y los conocimientos teóricos y prácticos interiorizados durante toda la trayectoria como estudiante dan lugar a un complejo sistema de creencias que incluye creencias sobre las matemáticas, creencias como aprendiz de matemáticas, creencias acerca del funcionamiento de la clase de matemáticas y creencias sobre el contexto social en relación a las matemáticas.

En este trabajo se analizan las creencias de los estudiantes para maestro sobre la naturaleza de las matemáticas, y de forma más concreta su visión acerca de los procesos de pensamiento matemático en el aprendizaje de la disciplina, tomando en consideración las orientaciones de diversos organismos internacionales que en los últimos años han enfatizado la importancia de los procesos para un aprendizaje competencial de las matemáticas (NCTM, 2000; OCDE, 2001, 2004). En esta misma línea, en el reciente "Real Decreto 126/2014, de 28 de febrero, por el que se establece el currículo básico de la Educación

Primaria" (BOE, 2014) aparece un nuevo bloque de contenidos llamado "Procesos, métodos y actitudes en matemáticas", lo cual pone de manifiesto la importancia creciente de este tipo de conocimientos y destrezas.

Coincidiendo con el inicio del Siglo XXI, el *National Council of Teachers of Mathematics* publicó unos nuevos estándares que pretenden ser un recurso y una guía para todos los que toman decisiones que afectan a la educación matemática: los principios y estándares para la educación matemática (NCTM, 2000). La visión de la educación matemática de estos estándares es sumamente ambiciosa, y busca sobre todo asegurar que todos los estudiantes reciban una educación matemática de calidad que garantice el aprendizaje con comprensión de nociones matemáticas importantes. En otras palabras, se pretende romper con un currículo de matemáticas orientado exclusivamente a la adquisición de contenidos y dirigir la mirada hacia un currículo orientado a la adquisición de la competencia matemática, es decir, se insta a dejar de instruir a los alumnos exclusivamente para obtener un buen rendimiento académico y, en su lugar, educarlos para que comprendan y usen las matemáticas en situaciones significativas. Para conseguir este propósito sitúan a los procesos matemáticos como los conocimientos clave para aprender a usar los contenidos matemáticos de forma comprensiva y eficaz en diferentes contextos: "los estándares de proceso (resolución de problemas, razonamiento y prueba, comunicación, conexiones y representación) ponen de relieve las formas de adquisición y uso de dichos contenidos" (NCTM, p. 31).

Es desde esta perspectiva que se ha desarrollado el presente estudio con un grupo de 142 futuros maestros en el que se analizan las consideraciones que tienen acerca de los procesos matemáticos.

LA NATURALEZA DE LAS MATEMÁTICAS: EL PAPEL DE LOS PROCESOS MATEMÁTICOS

Hace ya más de una década, Niss (2002) propuso abandonar el planteamiento curricular focalizado en los contenidos matemáticos, puesto que se centra exclusivamente en la adquisición de símbolos y de técnicas y no tanto en su uso significativo. Ello le llevó a plantear ocho competencias matemáticas clasificadas en dos grupos: el primer grupo tiene que ver con la capacidad de preguntar y responder preguntas dentro de y con las matemáticas, y el segundo grupo con la capacidad de hacer frente y de gestionar el lenguaje matemático y sus herramientas. Estas competencias, centradas en lo que las personas pueden hacer, tienen que ver con procesos mentales o físicos, actividades y comportamientos (Alsina, 2014):

Cuadro 1. Preguntar y responder preguntas dentro de y con las matemáticas

Pensar matemáticamente (dominio de modos matemáticos de pensamiento), como por ejemplo: – Plantear preguntas que son propias de las matemáticas y conocer el tipo de respuestas que las matemáticas pueden ofrecer; – Comprender y manejar las posibilidades y limitaciones de un determinado concepto; – Ampliar las posibilidades de un concepto extrayendo algunas de sus propiedades o generalizando resultados; – Diferenciar los diferentes niveles de las matemáticas (afirmaciones condicionadas del tipo “si-entonces”, hipótesis, definiciones, teoremas, conjeturas o casos).
Plantear y resolver problemas matemáticos, como por ejemplo: – Identificar, plantear y especificar diferentes tipos de problemas matemáticos: puros o aplicados; abiertos o cerrados; – Resolver diferentes tipos de problemas matemáticos, planteados por otros o por uno mismo, de diferentes maneras cuando sea necesario.
Modelización matemática (es decir, análisis y construcción de modelos), como por ejemplo: – Analizar los fundamentos y las propiedades de los modelos existentes, incluida la evaluación de sus posibilidades y de su validez; – Decodificación de los modelos existentes; – Realización de actividades de modelización en un determinado contexto: estructurar el campo; matematizar; trabajar con el modelo, incluyendo la solución de los problemas a que da lugar; validar el modelo, interna y externamente; analizar y criticar el modelo; comunicar sobre el modelo y sus resultados; vigilar y controlar todo el proceso de modelización.
Razonamiento matemático, como por ejemplo: – Seguir y evaluar cadenas de argumentos; – Conocer qué es una demostración matemática (y qué no es) y en qué se diferencia de otros tipos de razonamiento matemático, como por ejemplo el heurístico; – Descubrir las ideas básicas en una determinada línea de argumento (sobre todo en una prueba), incluyendo la distinción de las líneas principales de los detalles, las ideas de los tecnicismos; – Elaborar formal e informalmente argumentos matemáticos y demostrar declaraciones.

Cuadro 2. Gestionar el lenguaje matemático y las herramientas matemáticas

Representación de las entidades matemáticas (los objetos y situaciones), como por ejemplo:

- Comprensión y utilización (decodificación, interpretación, distinción entre) diferentes tipos de representaciones de objetos matemáticos, fenómenos y situaciones;
- Comprensión y utilización de las relaciones entre las distintas representaciones de la misma entidad, y conocer sus puntos fuertes y sus limitaciones;
- Elegir y cambiar entre las diferentes representaciones.

Manejo de símbolos matemáticos y formalismos, como por ejemplo:

- Decodificación e interpretación simbólica y formal del lenguaje matemático, así como la comprensión de sus relaciones con el lenguaje natural;
- Comprender la naturaleza y las normas de los sistemas matemáticos formales (tanto la sintaxis como la semántica);
- Traducción del lenguaje natural al formal y simbólico;
- Manejo y manipulación de las declaraciones y expresiones que contengan símbolos y fórmulas.

La comunicación en, con, y acerca de las matemáticas, como por ejemplo:

- Comprensión de textos escritos, visuales o orales que tengan un contenido matemático, en una variedad de registros lingüísticos;
- Expresar estas cuestiones de forma escrita, visual o oral, con diferentes niveles de precisión teórica y técnica.

Hacer uso de los recursos y herramientas, como por ejemplo:

- Conocer la existencia y propiedades de los diversos instrumentos y recursos disponibles para la actividad matemática, y conocer sus posibilidades y limitaciones;
- Ser capaces de utilizar reflexivamente dichos recursos y herramientas.

Ésta es la base a partir de la cual la OCDE, en el marco del Proyecto DeSeCo, indica diversas competencias matemáticas necesarias para formar a ciudadanos que puedan identificar y comprender el papel que desempeñan las matemáticas en el mundo, emitir juicios bien fundados, utilizar las matemáticas y comprometerse con ellas, y satisfacer las necesidades de la vida personal como ciudadano constructivo, comprometido y reflexivo (OCDE, 2004).

En el cuadro 3 se presenta un análisis comparativo entre los estándares de procesos del NCTM (2000) y las competencias matemáticas (Niss, 2002; OCDE, 2004):

Cuadro 3. Comparación entre los estándares de procesos y las competencias matemáticas.

Estándares de procesos matemáticos (NCTM, 2000)	Competencias matemáticas (Niss, 2002)	Competencias matemáticas (OCDE, 2004)
Resolución de problemas	Planteamiento y resolución de problemas matemáticos	Planteamiento y resolución de problemas
	Uso de recursos y herramientas	
Razonamiento y prueba	Dominio de modos de pensamiento matemático	Pensamiento y razonamiento
	Razonamiento matemático	Argumentación
Comunicación	Comunicación en, con y acerca de las matemáticas	Comunicación
Conexiones	-	-
Representación	Representación de entidades matemáticas	Representación y uso de operaciones y lenguaje técnico, simbólico y formal
	Análisis y construcción de modelos	Construcción de modelos
	Manejo de símbolos matemáticos y formalismos	

Los procesos matemáticos y las competencias matemáticas que se exponen en el cuadro anterior subrayan una misma visión que enfatiza la capacidad de usar de forma comprensiva y eficaz las matemáticas que se aprenden en la escuela en una variedad de contextos, además del escolar. Se trata de un nuevo enfoque que de Guzmán (2001, p. 9) sintetizó de forma muy clara:

> "En la situación de transformación vertiginosa de la civilización en la cual nos encontramos, está claro que los procesos verdaderamente eficaces de pensamiento, que no se vuelven obsoletos con tanta rapidez, es lo más valioso que podemos enseñar a nuestros jóvenes. En nuestro mundo científico e intelectual tan rápidamente mutante vale mucho más proveerse de procesos de pensamiento útiles que de contenidos que rápidamente se convierten en ideas inertes ..."

Los procesos matemáticos y las competencias matemáticas permiten ampliar la perspectiva acerca de la naturaleza de las matemáticas como disciplina. En el estudio TEDS-M 2008 (el primer estudio comparativo a nivel internacional y a gran escala, sobre educación superior, centrado en la formación inicial de los profesores de matemáticas) se presentan dos visiones contrapuestas: a) las matemáticas como un conjunto de reglas y

procedimientos, y b) las matemáticas como un proceso de indagación. En la primera visión se tienden a ver las matemáticas como un conjunto de procedimientos que hay que aprender, con normas estrictas acerca de lo que es correcto o no, mientras que en la segunda visión se valoran las matemáticas como un instrumento para responder a preguntas y resolver problemas, en la que los procesos matemáticos se consideran herramientas de indagación, es decir, medios para un fin y no el fin en sí mismo. En el cuadro 4 se presentan algunas afirmaciones de ambas visiones:

Cuadro 4. Visiones acerca de la naturaleza de las matemáticas como disciplina (Ministerio de Educación, Cultura y Deporte, 2012).

Matemáticas como un conjunto de reglas y procedimientos	Matemáticas como un proceso de indagación
Las matemáticas son una colección de normas y procedimientos que determinan cómo se resuelve un problema. Saber matemáticas implica recordar y aplicar definiciones, fórmulas, hechos matemáticos y procedimientos. Para resolver una tarea matemática es necesario conocer el procedimiento correcto. En caso contrario uno está perdido. El rigor lógico y la precisión son fundamentales para las matemáticas. Para hacer matemáticas se requiere mucha práctica, la aplicación correcta de procedimientos rutinarios y estrategias de resolución de problemas. Las matemáticas significan aprender, recordar y aplicar.	Las matemáticas implican creatividad y nuevas ideas. En matemáticas uno puede descubrir y ensayar muchas cosas por sí mismo. Si uno se involucra en las tareas matemáticas, puede hacer descubrimientos (p. ej., conexiones, reglas y conceptos). Los problemas de matemáticas se pueden resolver de maneras diferentes. Muchos aspectos de las matemáticas tienen notable valor práctico. Las matemáticas ayudan a resolver problemas y tareas de la vida cotidiana.

La visión de las matemáticas como un conjunto de reglas y procedimientos, pues, se asocia a la instrucción matemática, es decir, se interpreta el proceso de enseñanza-aprendizaje de la disciplina como un conjunto de reglas y procedimientos que se adquieren a través de la ejercitación, mientras que la visión de las matemáticas como un proceso de indagación se corresponde con un enfoque más competencial, en el que se ofrecen a los aprendices diversas herramientas para que progresivamente aprendan a usar las matemáticas en su vida cotidiana. En el informe español del TEDS-M 2008 (Ministerio de Educación, Cultura y Deporte, 2012) los futuros maestros españoles muestran un mayor acuerdo en interpretar las matemáticas como un proceso de indagación (73,4% de respuestas de acuerdo) que en considerarlas como un conjunto de reglas y procedimientos (50% de respuestas de respaldo). Ruiz de Gauna, García y Sarausa (2013), en un estudio realizado con estudiantes de primer curso del grado de maestro, analizan las actitudes hacia la materia (un 40% admiten que les gustan las matemáticas) junto con otras

consideraciones referentes a los contenidos matemáticos que forman parte del currículo (se destaca sobre todo la geometría, con un 91% de acuerdo), o la utilidad y el sentido de las matemáticas (un 66% admiten que sirven para razonar y pensar). Aunque implícitamente se hace alusión a algunos procesos matemáticos, en dicho estudio no se analiza con detalle la opinión de los estudiantes en relación a este tipo de conocimientos matemáticos.

A partir de estos datos previos, en este estudio se quiere analizar con mayor detalle cuales son las consideraciones de los futuros maestros acerca de los procesos matemáticos. En este contexto, nuestra pregunta de investigación es:

- ¿Cuáles son las opiniones de los estudiantes para maestro sobre los aspectos que mejor definen a las matemáticas?

Particularmente, el objetivo de nuestro estudio es identificar qué lugar ocupan los procesos matemáticos en el sistema de creencias de los estudiantes para maestro sobre las matemáticas como disciplina.

METODOLOGÍA

Participantes

La muestra está formada por 142 estudiantes, 72 pertenecientes al Grado de Educación Infantil y 70 del Grado de Educación Primaria. Todos los estudiantes, en el momento que se realizó el estudio, estaban cursando primero en la Universidad de Girona.

La edad media de los estudiantes del Grado de Educación Infantil es de 21,2 años, y de los de Educación Primaria es de 20,3 años. El porcentaje de hombres en Educación Infantil es de 4,35% y en Educación Primaria es de 12,04%. El 56,5% de los estudiantes de Infantil provienen del ciclo formativo de grado superior en Educación Infantil, y el 29,8% de estudiantes de Primaria provienen de ciclos formativos de grado superior. De los estudiantes que provienen de bachillerato, el 14,28% de Infantil y el 16,13% de Primaria provienen de un bachillerato científico-tecnológico. Por lo tanto, de la muestra del estudio, solo el 4,4% en Educación Infantil y el 6,8% en Primaria, han cursado matemáticas en los dos últimos años antes de empezar los estudios universitarios.

Diseño y procedimiento

En el primer semestre de primero, antes de iniciar cualquier asignatura o módulo formativo relacionado con las matemáticas y su didáctica se administró un cuestionario a todos los participantes para identificar diversas creencias acerca de la educación matemática centradas en las diversas dimensiones indicadas por Caballero, Blanco y Guerrero (2008). En una de estas cuestiones se les solicitaba que indicaran tres aspectos clave (de mayor a menor importancia) que asociaban con las matemáticas, puesto que se consideró que implícitamente iba a aportar datos acerca de la visión de los estudiantes acerca de la naturaleza de las matemáticas como disciplina.

Para la categorización de las respuestas dadas se ha combinado la categorización deductiva y la inductiva (Bonilla y Rodríguez, 1995), es decir, en un primer momento se ha

partido de unidades de significado identificadas en marcos teóricos existentes (categorización deductiva) pero, posteriormente, con la revisión cuidadosa de todo el material, se han identificado subcategorías que emergen de la misma información (categorización inductiva).

Las tres categorías principales que se han considerado para clasificar las respuestas han sido: *Factores Cognitivos*, *Factores Procedimentales* y *Factores Actitudinales*. Estas tres categorías se han establecido a partir de la revisión de la literatura (NCTM, 2000; Caballero, Guerrero y Blanco, 2007; Guirado, Olivera, Mazzitelli y Aguilar, 2010; Ministerio de Educación, Cultura y Deporte, 2012; Ruiz de Gauna, García y Sarasua, 2013) y a partir de las definiciones y clasificaciones dadas por la OCDE en su Proyecto DeSeCo (OCDE, 2001) sobre las competencias básicas, donde considera la competencia como una combinación de conocimientos, destrezas y actitudes.

Los *Factores Cognitivos* incluyen elementos que ayudan al estudiante a "saber conocer". Esta categoría se ha subdividido en cuatro subcategorías definidas a partir de las respuestas dadas por los estudiantes y a partir de las categorías del trabajo de Guirado, Olivera, Mazzitelli y Aguilar (2010): *Inteligencia, memoria, comprensión y cálculo mental y escrito.* Los *Factores Procedimentales* permiten "saber hacer". En esta categoría, basándonos en los estándares de procesos definidos por el NCTM (2000), se han considerado las subcategorías: *resolución de problemas, razonamiento, comunicación y conexiones.* Por último, los *Factores Actitudinales* se conciben como el conjunto de aspectos que ayudan al alumno a "saber ser". A partir del trabajo de Guirado, Olivera, Mazzitelli y Aguilar (2010) y de las respuestas dadas por los estudiantes se han considerado cuatro subcategorías: *interés, esfuerzo, participación y autoconcepto*. En el cuadro 5 se presenta una síntesis de las categorías y subcategorías consideradas:

Cuadro 5. Categorías y subcategorías sobre la naturaleza de las matemáticas

Factores Cognitivos	Factores Procedimentales	Factores Actitudinales
Inteligencia Memoria Comprensión Cálculo mental y escrito	Resolución de problemas Razonamiento Comunicación y representación Conexiones	Interés Esfuerzo Participación Autoconcepto

Dado el tipo de población y de datos analizados, aunque la pregunta a analizar sea una variable cualitativa, la metodología que se ha utilizado para su análisis y discusión ha sido de tipo cuantitativo. Para tener en cuenta el orden de los tres aspectos clave que los estudiantes asocian con las matemáticas (de mayor a menor importancia), se han ponderado sus respuestas dando un peso de 0,5 al primer factor, de 0,3 al segundo y de 0,2 al factor que indican en tercera posición.

RESULTADOS

Para la exposición de los resultados, en primer lugar se muestran los datos obtenidos acerca de los tres aspectos clave que los estudiantes asocian con las matemáticas. Al haber ponderado las respuestas según el orden de los aspectos indicados (0,5; 0,3; 0,2), el número de estudiantes que se indican en las tablas de resultados de cada categoría no es un número natural.

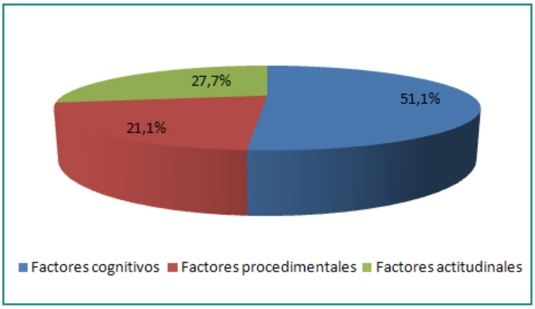


Figura 1. Gráfico comparativo entre las tres categorías.

Tabla 1. Resultados obtenidos en las tres categorías

	Nº estudiantes	Porcentaje
Factores cognitivos	72,6	51,1%
Factores procedimentales	30	21,1%
Factores actitudinales	39,4	27,7%
Total	142	100 %

Los resultados anteriores muestran que más de la mitad de los estudiantes para maestro (un 51,1%), considera que los aspectos cognitivos son los que mejor definen a las matemáticas. En segundo lugar consideran los factores actitudinales (un 27,7%), mientras que los aspectos que vinculan menos con las matemáticas son los procedimentales (21,1%).

A continuación se presentan los resultados de forma más detallada, diferenciando cuatro subcategorías dentro de cada categoría.

Tabla 2. Resultados obtenidos en las distintas subcategorías

		Nº estudiantes	Porcentaje	Media entre los factores
Factores cognitivos	Inteligencia	26,8	18,9%	18,55
	Memoria	3,8	2,7%	
	Comprensión	12,4	8,7%	
	Cálculo mental y escrito	31,2	22%	

		Nº estudiantes	Porcentaje	Media entre los factores
Factores procedimentales	Razonamiento	5,2	3,7%	7,65
	Comunicación	2,2	1,5%	
	Conexiones	6,1	4,3%	
	Resolución de problemas	17,1	12%	
Factores actitudinales	Interés	19,5	13,7%	9,3
	Esfuerzo	14,6	10,3%	
	Participación	0,7	0,5%	
	Autoconcepto	2,4	1,7%	
	Total	142	100%	

Estos datos indican que, en relación a los factores cognitivos, los aspectos que los estudiantes identifican más con las matemáticas son el cálculo mental y escrito (22%) y la inteligencia (18,9%). Dentro de los factores actitudinales, los aspectos más destacados son el interés (13,7%) y el esfuerzo (10,3%). Y respecto a los factores procedimentales, el aspecto que asocian más a las matemáticas es la resolución de problemas (12%). El factor cognitivo que menos asocian con las matemáticas es la memoria (2,7%), el factor actitudinal menos relevante es la participación (0,5%) y el factor procedimental que menos consideran es la comunicación (1,5%).

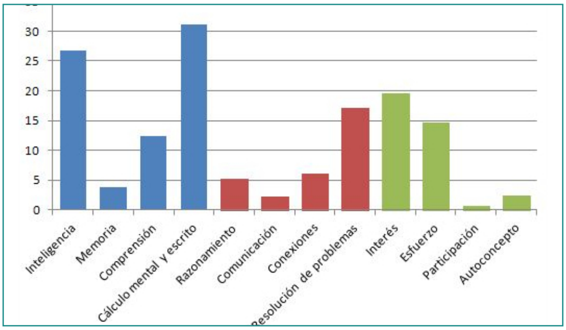


Figura 2. Gráfico comparativo entre las sub-categorías.

DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

En este estudio se han identificado las creencias de los estudiantes para maestro sobre la naturaleza de las matemáticas. Una primera interpretación de los resultados obtenidos confirma la presencia de tres categorías de factores: cognitivos, actitudinales y procedimentales, en contraposición a diversos estudios preliminares que subrayan exclusivamente factores cognitivos y actitudinales, incluidos en la agenda *Creencias y dominio afectivo: actitudes y cognición* (Llinares, 2008). En otras palabras, en estos estudios previos se consideran únicamente los factores de las matemáticas que permiten a los alumnos "saber conocer" y "saber ser", de acuerdo con la terminología de la OCDE para

definir las competencias clave (OCDE, 2001). Consideramos que la incorporación de factores procedimentales, en la línea ya iniciada por algunos trabajos (NCTM, 2000; Guirado, Olivera, Mazzitelli y Aguilar, 2010), contribuye a comprender con mayor precisión el conjunto de creencias que acaban configurando la identidad profesional del maestro de matemáticas acerca de la naturaleza de las matemáticas. Estos factores responden al "saber hacer" (OCDE, 2001), e incluyen las formas de pensar propias de las matemáticas, como resolver problemas, razonar y demostrar, comunicar y representar o hacer conexiones (NCTM, 2000).

Una segunda interpretación de los resultados obtenidos es el escaso peso de los factores procedimentales en el conjunto de creencias acerca de la naturaleza de las matemáticas. Los datos obtenidos han puesto en evidencia que los futuros maestros no consideran suficientemente las formas de adquisición y uso de los contenidos matemáticos. Estos datos ponen de manifiesto una construcción de la identidad profesional del maestro de matemáticas que deja de lado algunas de las tendencias contemporáneas en educación matemática (NCTM, 2000; Niss, 2002; OCDE, 2004), en las que se destaca la importancia de los procesos de pensamiento matemático para el aprendizaje de las matemáticas en general y para la adquisición de la competencia matemática en particular. A la vez, los resultados de nuestro trabajo muestran algunas contradicciones con los datos del estudio internacional TEDS-M (Ministerio de Educación, Cultura y Deporte, 2012). Como se ha indicado, en dicho estudio los futuros maestros españoles muestran un mayor acuerdo en interpretar las matemáticas como un proceso de indagación (73,4% de respuestas de acuerdo), lo que significa que mayoritariamente asocian las matemáticas con una visión competencial que incluye la actividad heurística, la resolución de problemas o las conexiones con la vida cotidiana. Sin embargo, en nuestro estudio, cuando se les pregunta acerca de los factores que asocian con las matemáticas, estos aspectos procedimentales son los que tienden a ocupar las últimas posiciones en su escala de creencias. En una línea similar al TEDS-M, en el estudio de Ruíz de Gauna, García y Sarausa (2013), los factores procedimentales (y en concreto las acciones de "razonar" y "pensar") tienen una alta valoración entre los estudiantes (66%), mientras que en nuestro estudio el 3,7% de los estudiantes asocian el razonamiento a las matemáticas, y un 12% a la resolución de problemas. Una posible explicación es que las características de los participantes de ambos estudios son diferentes: en nuestro caso, se trata de estudiantes de primer curso de los Grados de Educación Infantil y Educación Primaria, mientras que el estudio TEDS-M se realizó con estudiantes de tercer curso de primaria de la antigua diplomatura de magisterio que ya habían recibido una formación en didáctica de las matemáticas.

De estos datos se desprenden algunas posibles implicaciones didácticas que deberían considerarse tanto en la formación inicial como en la formación permanente del profesorado. La consideración de los procesos matemáticos implica partir de un planteamiento curricular mucho más globalizado que no se limite a los contenidos de una única área, sino trabajar de forma integrada, explorando como se potencian unos y otros y usándolos sin prejuicios. Además, exige trabajar para favorecer la autonomía mental del alumnado, potenciando la elaboración de hipótesis, las estrategias creativas de resolución de problemas, la discusión, el contraste, la negociación de significados, la construcción conjunta de soluciones y la búsqueda de formas para comunicar planteamientos y resultados. En definitiva, pues, se trata de ayudar a gestionar el conocimiento, las habilidades y las

emociones pera conseguir un objetivo. En los últimos años son muchos los profesionales que han ido incorporando los procesos matemáticos en sus prácticas docentes (para una revisión más exhaustiva, consultar Alsina 2011, 2014), y es de esperar que vaya en aumento en el futuro dada la relevancia que actualmente se da a los procesos.

En cualquier caso, de acuerdo con Kaasila, Hannula y Laine (2012), los estudios acerca de la visión de las matemáticas de los futuros maestros tienen un papel importante porque revelan cómo van construyendo su identidad profesional, y desde este marco consideran que es necesario que los formadores de maestros comprendan sobre todo los puntos de vista negativos. La identificación y toma de conciencia de estas creencias es el requisito necesario para poder promover procesos de cambio durante la formación inicial (Kaasila, Hannula, Laine y Pehkonen, 2006, 2008), y evitar así que los futuros maestros accedan a la práctica profesional con unas creencias acerca de la naturaleza de las matemáticas que conlleven omisiones importantes durante el proceso de enseñanza-aprendizaje de la disciplina, como por ejemplo dejar de lado los procesos de pensamiento matemático.

Por esta razón va a ser necesario diseñar nuevos estudios que analicen con instrumentos más detallados las creencias de los futuros maestros acerca de los procesos matemáticos, ya que consideramos que el hecho de haber planteado una única pregunta sobre los aspectos clave que los estudiantes asocian con las matemáticas puede haber sido una limitación importante en el diseño de nuestro estudio. Paralelamente, sobre todo si en futuras investigaciones se confirman los resultados reveladores de este estudio, va a ser necesario diseñar programas de intervención que promuevan la incorporación de los conocimientos disciplinares y didácticos referentes a los procesos de pensamiento matemático en los módulos y asignaturas de didáctica de las matemáticas de los estudios del Grado de Maestro.

REFERENCIAS

Alsina, Á. (2011). *Educación matemática en contexto de 3 a 6 años.* Barcelona: ICE-Horsori

Alsina, Á. (2014). Matemáticas en la educación primaria. En N. Planas y Á. Alsina (2014). *Educación matemática y buenas prácticas.* (pp. 93-144). Barcelona: Editorial Graó (2ª edición).

Beauchamp, C. y Thomas, L. (2009). Understanding teacher identity: an overview of issues in the literature and implications for teacher education. *Cambridge Journal of Education, 39*(2), 175-189.

Beijaard, D., Meijer, P.C. y Verloop, N. (2004). Reconsidering research on teachers' professional identity. *Teaching and Teacher Education, 20,* 107-128.

BOE (2014). Real Decreto 126/2014, de 28 de febrero, por el que se establece el currículo básico de la Educación Primaria. Recuperado de: http://www.boe.es/buscar/pdf/2014/BOE-A-2014-2222-consolidado.pdf.

Bonilla, E. y Rodríguez, P. (2005). *Más allá del dilema de los métodos.* Colombia: Editorial Nomos.

Caballero, A., Blanco, L.J. y Guerrero, E. (2008). El dominio afectivo en futuros maestros de matemáticas en la Universidad de Extremadura. *PARADIGMA, XXIX* (2), 157-171.

Caballero, A., Guerrero, E. y Blanco, L.J. (2007), Las actitudes y emociones ante las Matemáticas de los estudiantes para Maestros de la Facultad de Educación de la Universidad de Extremadura. En M. Camacho, P. Bolea, P. Flores, B. Gómez, J. Murillo y Mª. T.

González (Eds.), *Investigación en Educación Matemática. Comunicaciones de los grupos de investigación. XI Simposio de la SEIEM* (pp. 41-42). Tenerefie: SEIEM.

De Guzmán, M. (2001). Tendencias actuales de la educación matemática. *Sigma,* 19, 5-25.

Esteve, O. y Alsina, Á. (2010). Hacia el desarrollo de la competencia profesional del profesorado. En O. Esteve, K. Melief y Á. Alsina (Eds.), *Creando mi profesión. Una propuesta para el desarrollo profesional del profesorado* (pp. 7-18). Barcelona: Editorial Octaedro.

Guirado, A.Mª, Olivera, A.C., Mazzitelli, C.A. y Aguilar, S.B. (2010). ¿Cuál es la representación que tienen los docentes acerca de ser un buen alumno de física y aprender física? *Revista Electrónica de Enseñanza de las Ciencias, 9*(3), 618-632.

Kaasila, R., Hannula, M. y Laine, A. (1012). "My personal relationship towards mathematics has necessarily not changed but…" Analyzing pre-service teachers' mathematical identity talk. *International Journal of Science and Mathematics Education 10,* 975-995.

Kaasila, R., Hannula, M., Laine, A. y Pehkonen, E. (2006). Facilitators for change of elementary teacher students' view of mathematics. En J. Novotaná, H. Moraová, M. Krátká, y N. Stehliková (Eds.), *Proceedings of the 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 385-392). Praga: PME.

Kaasila, R., Hannula, M., Laine, A. y Pehkonen, E. (2008). Socio-emotional orientations and teacher change. *Educational Studies in Mathematics, 67,* 111-123.

Llinares, S. (2008). Agendas de investigación en educación matemática en España: una aproximación desde "ISI-web of knowledge" y ERIH". En R. Luengo, B. Gómez, M. Camacho y L. Blanco (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XII* (pp. 25-54). Badajoz: SEIEM.

Lutovac, S. y Kaasila, R. (2011). Beginning a pre-service teacher's mathematical identity work through narrative rehabilitation and bibliotherapy. *Teaching in Higher Education, 16*(2), 225–236.

Lutovac, S. y Kaasila, R. (2013). Pre-service teacher's possible mathematical identities. Recuperado de: http://blogs.helsinki.fi/mavi-2012/files/2012/09/LutovacKaasila_MAVI-2012_revised-for-the-web2.doc.

MEC (2007a). ORDEN ECI/3854/2007, de 27 de diciembre, por la que se establecen los requisitos para la verificación de los títulos universitarios oficiales que habiliten para el ejercicio de la profesión de Maestro en Educación Infantil. *Boletín Oficial del Estado 312,* 53735-53738.

MEC (2007b). ORDEN ECI/3857/2007, de 27 de diciembre, por la que se establecen los requisitos para la verificación de los títulos universitarios oficiales que habiliten para el ejercicio de la profesión de Maestro en Educación Primaria. *Boletín Oficial del Estado 312,* 53747-53750.

Ministerio de Educación, Cultura y Deporte (2012). *TEDS-M. Informe español. Estudio internacional sobre la formación inicial en matemáticas de los maestros.* Madrid: Secretaría General Técnica. Subdirección General de Documentación y Publicaciones.

NCTM (2000). *Principles and standards for school mathematics.* Reston, Va.: NCTM.

Niss, M. (2002). *Mathematical competencies and the learning of mathematics: The Danish KOM Project.* Roskilde: Roskilde University.

OCDE (2001). *Defining and selecting key competencies.* Bruselas: OCDE.

OCDE (2004). *Informe PISA 2003. Aprender para el mundo de mañana.* Recuperado de: http://www.oecd.org/pisa/39732493.pdf.

Ruiz de Gauna, J., García, J. y Sarasua, J. (2013). Perspectiva de los alumnos de Grado de Educación Primaria sobre las Matemáticas y su enseñanza. *Números, 82,* 5-15.

Épsilon - *Revista de Educación Matemática* 2014, Vol. 31(3), nº 88, 21-38

Dificultades de los estudiantes de once grado al hacer transformaciones de representaciones de una función

Tulio Amaya De Armas
Corporación Universitaria del Caribe (Colombia)
Universidad Nacional de Educación a Distancia (UNED)
Natalia Sgreccia
Universidad Nacional de Rosario y Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas (Argentina)

Resumen: *Tradicionalmente, ha sido problemático el aprendizaje del concepto de función. En este trabajo se reportan los hallazgos de una investigación en donde se analizaron las dificultades presentadas por estudiantes de once grado al hacer transformaciones de representaciones de una función, con el registro tabular como registro principal. Para recoger la información se aplicó un cuestionario, con una situación que involucra el concepto de función. Las dificultades estuvieron relacionadas con la identificación del contenido de las representaciones, el funcionamiento de los registros y la coordinación entre ellos. Fue posible apreciar que los estudiantes no reconocen el registro tabular como apoyo válido para sustentar sus respuestas.*

Palabras clave: *registros semióticos de representación, coordinación entre registros, conversión, tratamiento, función.*

Difficulties of students from elevend grade to make changes of representations of a function

Abstract: *Traditionally, the learning of the concept of function has been problematic. In this paper we report the findings of an investigation which analyzed the difficulties presented by grade eleven students to make transformations of representations of a function, with tabular register as primordial one. To collect the information a questionnaire was applied with a situation involving the concept of function. The difficulties were related to the identification of the content of the representations, the operation of registers and the coordination between them. It was possible to identify that students do not recognize as a valid support the tabular register to support their answers.*

Keywords: *semiotic registers of representation, coordination between registers, conversion, treatment, function.*

INTRODUCCIÓN

Al analizar lo propuesto en los estándares del *National Council of Teachers of Mathematics* (2000) y del Ministerio de Educación Nacional de Colombia (2005) frente a los resultados de las investigaciones respecto a la conceptualización de la noción de función (Cordero, 1997; Dolores, 2004; Gatica et al., 2010; Hitt, 2000, 2003a, 2003b), se evidencia una descompensación en el abordaje dado a este concepto a través de diferentes registros semióticos de representación, lo que podría dificultar el desarrollo de pensamiento variacional en los estudiantes. Esta descompensación lleva al alumno a cometer errores y los errores, si no son resignificados apropiadamente, pueden conducir el proceso de aprendizaje por un camino equivocado, ya que los estudiantes se pueden acostumbrar a ellos y no distinguir lo adecuado de lo inadecuado. Incluso, por acumulación de malas experiencias, pueden llevar a los sujetos a no permitirse conflictos cognitivos, por lo que en estas condiciones sería difícil la adquisición de conocimientos (Amaya, 2010).

Además, uno de los conceptos básicos relacionados a la enseñanza y el aprendizaje del cálculo es, sin duda, el de función. Asimismo, numerosas investigaciones en el campo de la Educación Matemática (Benítez, 2010; D'Amore, 2006; Ochoviet y Oktaç, 2011; Sánchez-Matamoros, García y Llinares, 2008) han puesto de manifiesto que existen dificultades persistentes en los estudiantes, ligadas a la construcción de este concepto (Del Castillo, 2003). Una de estas dificultades, según Duval (2004), es el tránsito entre diferentes registros de representación; esto es, identificar elementos en un registro de partida y encontrar su equivalente en un registro de llegada. En particular, Duval (2012a) considera que, a diferencia de otras ciencias, el acceso al objeto de estudio en matemáticas es exclusivamente semiótico y que toda actividad matemática consiste en la transformación de representaciones semióticas –producciones constituidas por signos que pertenecen a un sistema de referencia, el cual tiene sus propias reglas de significación y de funcionamiento–.

De lo anterior se puede deducir que este proceso de transformación de representaciones es esencial en el aprendizaje de las matemáticas, ya que la única forma de acceder a los conocimientos matemáticos es a través de las representaciones semióticas (Hitt, 2003a). Las representaciones en diferentes registros se complementan, es decir, ningún sistema de representación puede producir una representación cuyo contenido sea del todo completo y adecuado al objeto representado, por lo que el recurso a varios registros se considera condición necesaria para la conceptualización (Del Castillo, 2003). Esto se debe, según Duval (1999), a que no hay conocimiento que un sujeto pueda movilizar sin una actividad de representación, es decir, no es posible estudiar los fenómenos relativos al conocimiento sin recurrir a las representaciones semióticas. En este sentido se ha fortalecido la idea de que cuando se usan en la enseñanza de las matemáticas actividades didácticas que favorecen la utilización y articulación entre diferentes registros, el aprendizaje resulta beneficiado.

Se evidencia así que un sistema de representación coopera en la construcción de objetos matemáticos, relaciones y procesos mediante la creación de un ambiente en el cual

se comparten los artefactos culturales lingüísticos que pueden expresarse en la comunidad (Kaput, 1989). También pone en evidencia la importancia de que los alumnos conecten los diferentes sistemas semióticos de representación con los elementos del medio sociocultural donde se desempeñan.

El presente estudio se centra en el análisis de las transformaciones entre representaciones que realizan estudiantes colombianos de 15-17 años de edad. Se caracterizan sus dificultades, tanto con la identificación del contenido de la representación de partida como con el funcionamiento de los registros en los que se hacen las representaciones y la coordinación entre ellos, en el tema funciones.

FUNDAMENTACIÓN TEÓRICA

En las últimas décadas las investigaciones en Educación Matemática han tenido un importante desarrollo, presentándose algunos acuerdos entre administradores educativos y grupos de investigadores, quienes a su vez han sentado algunas sugerencias sobre el tipo de problemas que se debe utilizar en matemáticas -que despierten el interés de los alumnos y favorezcan su aprendizaje-, la forma de organizar las secuencias de actividades utilizadas en clase de matemáticas y la necesidad de analizar las producciones de los estudiantes -para utilizar sus dificultades de comprensión en beneficio de su propio aprendizaje-. Este trabajo se encuadra en esto último.

En particular, los contextos de representación usados en la actividad matemática surgen como hilo de enlace que permite proponer problemas interesantes a través de los cuales analizar las dificultades de comprensión de los estudiantes –a través de, por ejemplo, sus errores conceptuales– y usarlos para mejorar sus procesos de aprendizaje.

En relación con el tipo de actividades para favorecer el desarrollo del pensamiento matemático de los estudiantes, el *National Council of Teachers of Mathematics* (2000) considera fundamental que se los enfrente a actividades que constituyan un reto para su curiosidad, que los estimulen a usar sus presaberes, a investigar lo que desconozcan y a analizar los contenidos estudiados. Específicamente, el Ministerio de Educación Nacional (2005) considera indispensable el estudio de patrones, nociones y conceptos propios del pensamiento variacional, el cual tiene que ver con el reconocimiento, la percepción, la identificación y la caracterización de la variación y el cambio en diferentes contextos, así como con su descripción, modelación y representación en distintos sistemas o registros simbólicos, ya sean verbales, icónicos, tabulares, gráficos o algebraicos. Tiene como propósito construir distintos acercamientos significativos para la comprensión y uso de los conceptos y procedimientos de las funciones y sus sistemas analíticos así como del cálculo numérico y algebraico. Además, cumple un papel preponderante en la resolución de problemas sustentados en el estudio de la variación y el cambio, y en la modelación de procesos de la vida cotidiana. Su estudio se inicia con la detección de los criterios que rigen regularidades o reglas de formación, para identificar la unidad que se repite periódicamente dando lugar a un patrón.

El tipo de actividades sugeridas por el *National Council of Teachers of Mathematics* (2000) y el análisis de secuencias y patrones recomendado por el Ministerio de Educación Nacional (2005) pueden desarrollar en los estudiantes la capacidad para identificar o construir un patrón de regularidad y la capacidad para reproducirlo en diferentes

registros, por medio de un cierto procedimiento, algoritmo o fórmula. Según Del Castillo (2003), este proceso de establecer congruencias es condición necesaria para la comprensión de un concepto matemático.

El análisis de las dificultades de comprensión de los estudiantes invocando sus concepciones es indispensable para ayudarlos a entender el tema que se esté estudiando, para lo que es necesario analizar sus errores conceptuales. Al respecto, Godino, Font y Batanero (2003) mencionan:

> (…) hablamos de error cuando el alumno realiza una práctica (acción, argumentación, etc.) que no es válida desde el punto de vista de la institución matemática escolar. El término dificultad indica el mayor o menor grado de éxito de los alumnos ante una tarea o tema de estudio. Si el porcentaje de respuestas incorrectas (índice de dificultad) es elevado se dice que la dificultad es alta, mientras que si dicho porcentaje es bajo, la dificultad es baja (p.69).

Este planteamiento implica concebir la práctica curricular y evaluativa como un seguimiento permanente al proceso de adquisición de conocimientos. El error se constituye en una vía natural de acceso al conocimiento, una manifestación de un proceso constructivo que se debe encauzar y orientar de tal manera que el que aprende se termine beneficiando.

Por otro lado están los contextos de representación usados en la actividad matemática. Duval (2004) considera prioritarias las posibilidades de transformar una representación semiótica en otra representación semiótica, como base en un proceso de comunicación que busca saber cómo puede ser codificado/decodificado un objeto matemático para poder ser comprendido por alguien. Según este autor, todo progreso de conocimiento en matemáticas pasa por este trabajo de transformación. Distingue dos tipos de transformaciones: el *tratamiento*, que es una transformación estrictamente interna en un registro determinado, con cierta homogeneidad en las representaciones producidas, donde la producción se hace como si cada representación fuera autosuficiente, y la *conversión*, que es una transformación de un objeto de un registro a otro, es decir, es aquella en la que la representación se pone en paralelo con otra representación de otro registro.

La conversión de un registro a otro puede resultar congruente o no; es decir, el pasaje entre dos representaciones de un mismo objeto puede hacerse en un sentido y no hacerse en el otro. Además, las representaciones de un mismo objeto pueden resultar heterogéneas; esto es, el contenido de una representación en un registro dado puede ser sustancialmente diferente al contenido de otra representación en otro registro. Para Duval (2004), si se quieren comprender los procesos de aprendizaje de las matemáticas, es necesario tomar en cuenta muy seriamente esta heterogeneidad, estableciéndose así la necesidad de utilizar más de una representación para acceder al conocimiento matemático y de conocer la proveniencia de las transformaciones; es decir, si provienen de un tratamiento o de una conversión, que permita un análisis cognitivo de las dificultades en la adquisición de los conocimientos matemáticos.

Las representaciones matemáticas o sistemas simbólicos matemáticos son sistemas de representaciones especiales en los que el mundo representado es una estructura matemática y el mundo representante es un esquema de símbolos que contiene correspondencias especiales (Kaput, 1987). Los sistemas simbólicos matemáticos, de la misma

manera que el lenguaje natural y los sistemas pictóricos, controlan el influjo de experiencias al separarlos en pedazos, asignando los símbolos a dichos pedazos y coordinando estas notaciones en un entorno adecuado de matices y referentes complejos. El sistema de símbolos matemáticos y sus conexiones puede formar una estructura que actúa para representar otro sistema de símbolos que exhibe una autosimilitud cuando se amplifica (Meel, 2003). Es así que, a través de las representaciones externas de un objeto matemático y las relaciones entre ellas, es posible estructurar nuevas representaciones que pueden tener connotaciones diferentes a las que les dieron origen.

Entre las tantas representaciones que permite una función, está la representación analítica, la cual a su vez puede asumir varias formas: *algebraica*, consistente en una fórmula que permite modelar la situación en juego; *polinomio aritmético*, como resultado de reemplazar un valor numérico en un registro algebraico; *secuencia*, que permite determinar el patrón de regularidad o de crecimiento de una función. Otra de las representaciones semióticas de una función es la *tabular*, en la que se parte de una tabla y se ubican las entradas de tal forma que el número de columnas (o filas, según se ordenen) corresponde al total o gran parte de las cantidades que intervienen en la situación, que vienen a ser los elementos que constituyen la función en ese registro.

Al respecto, diversas investigaciones (Amaya, 2010; Carrión, 2007; Dolores, 2004; León y Corredor, 2003) han tratado de identificar los problemas más comunes en el aprendizaje de las matemáticas, a través del análisis de las producciones de los estudiantes, sus procedimientos espontáneos, sus errores y sus incomprensiones. Han intentado dilucidar elementos acerca de su funcionamiento cognitivo y proponer formas para mejorar la adquisición de habilidades que permitan a los alumnos acceder con mayor facilidad a los conceptos. Comprender matemáticas se manifiesta a través de habilidades a disposición y transferibles a diversos espacios de razonamiento en y sobre la realidad. Para Meel (2003), comprender en matemáticas significa saber qué hacer y por qué se debe hacer algo con un concepto matemático en el momento que se requiera utilizarlo, lo que proporciona vías para la transferencia y extracción de información desde la memoria del estudiante. Esta idea está relacionada con la manera como se construyen conceptos o redes conceptuales, vinculados a una serie de procesos cognitivos en relación con representaciones simbólicas; esto es, a la significación que un individuo le atribuye a un objeto matemático al vincular las representaciones internas y externas con una situación contextual.

Según Hitt (2000), una idea matemática -o procedimiento o hecho- es entendida si su representación mental es parte de una red de representaciones. El grado de entendimiento es determinado por el número y la fuerza de las conexiones. En este sentido, la adquisición de un concepto por parte de un individuo se dará cuando coordine por lo menos dos de sus representaciones. Esto tiene que ver, según Duval (1999), con la articulación entre sus representaciones semióticas. U*n concepto matemático visto en sus diferentes representaciones proporcionará información específica, dando solidez al concepto.* Para Meel (2003), estos mecanismos producen significados y, por lo tanto, desarrollan comprensión para el estudiante por medio de la creación de nuevos vínculos entre los sistemas de representación o los elementos de reorganización dentro de un sistema de representación.

De lo anterior se reconoce que la comprensión de un objeto matemático se hace por medio de las representaciones semióticas, lo cual se basa en la ley fundamental del funcionamiento cognitivo de Duval (1999): no hay noesis sin semiosis. Se manifiesta a través de la soltura en la actividad cognitiva de conversión. De aquí cabe destacar el papel de las representaciones semióticas como andamio en la adquisición de los conocimientos matemáticos. Se basan en tratamientos y conversiones entre registros, que permiten conexiones entre los elementos de una red (el concepto) así como de la estructura cognitiva (como un todo). Según Duval (2004), en matemáticas, poder cambiar de sistema de representación es una exigencia cognitiva absolutamente necesaria y fundamental, porque el acceso a los conocimientos matemáticos requiere la integración en una arquitectura cognitiva de los sistemas semióticos de representación. De hecho "se cree que la familiarización progresiva con un nuevo tipo de representación provoca de manera casi natural el pasaje de este tipo de representación a los tipos de representación anteriormente utilizados" (Duval, 2004, p.30).

Además, Duval (2012b) considera que las diferencias que separan las matemáticas de otros campos del conocimiento provienen del modo de acceso a los objetos estudiados: en matemáticas se hace por medio de la producción de representaciones semióticas y no por la percepción o la utilización de instrumentos, como ocurre en otras ciencias.

> Esto nos permitirá inferir tres ideas clave para describir el modo de funcionamiento cognitivo que caracteriza al pensamiento matemático. (1) Los registros son los sistemas productores de representaciones semióticas. (2) La comprensión en matemáticas moviliza siempre implícita o explícitamente al menos dos registros; dicho de otra manera, la comprensión en matemáticas requiere la coordinación y el funcionamiento en sinergia de varios registros. (3) Cada registro abre un campo de transformación de las representaciones, y por lo tanto, posibilidades de tratamiento matemático que le son propias (p.15).

Duval (2004) considera que el reto de la enseñanza para la formación inicial no es tanto la adquisición de tal o cual conocimiento matemático, sino -a través de ello- el desarrollo de las capacidades de pensamiento del alumno. El desarrollo de estas capacidades depende de adquisiciones funcionales de diferentes sistemas que se requieren para la comprensión de todos los conocimientos que él deberá adquirir, no solamente en la escuela, sino después de ella. Por estar en un mundo en el cual ningún individuo puede aprender de antemano lo que le será profesional o humanamente útil, el reto de la enseñanza en la formación inicial es dar al estudiante los medios para comprender y aprender por él mismo. Al respecto, la UNESCO (2005) considera que la escuela, como responsable tradicional de la educación de los miembros de una sociedad, debe bregar para que estos adquieran una formación básica que les permita aprender a aprender, y hacerlo continua, sistemática y permanentemente. Lo que está en juego, según Duval (2012a), es el desarrollo de la autonomía intelectual de los estudiantes. Desde esta perspectiva es que las matemáticas pueden aportar una gran contribución a la formación de los alumnos.

METODOLOGÍA

Se asume un estudio descriptivo de casos (Servan y Servan, 2010), bajo un enfoque cualitativo de tipo empírico (Bravin y Pievi, 2008). Las transformaciones entre registros, tanto tratamientos como conversiones, se constituyeron en las categorías de análisis de la investigación. Se desarrolló en tres etapas fundamentales:

a) Revisión documental: consistió en una búsqueda bibliográfica a fin de obtener antecedentes de investigaciones y fundamentar a nivel teórico lo relativo a las dificultades de los estudiantes con las transformaciones de representaciones del concepto de función.

b) Diseño y aplicación de instrumentos: se elaboraron, adecuaron y pusieron en marcha los protocolos empleados en la investigación.

c) Obtención y análisis interpretativo de resultados: teniendo en cuenta el desempeño estudiantil en las transformaciones entre registros del contenido función, se procesó la información recabada y se avanzó hacia la discusión de los hallazgos.

Los informantes fueron 50 estudiantes (E_n, con n = 1, 2, 3, …, 50) de undécimo grado de la media académica de una escuela pública colombiana, con edades entre 15 y 17 años, en un curso ordinario de pre-cálculo previo al ingreso a la universidad. Para este trabajo el desempeño fue de manera individual.

En una investigación más amplia, en la que se inscribe este trabajo, se utilizaron cuatro tipos de técnicas: cuestionarios escritos con preguntas abiertas, observación participante, entrevistas semiestructuradas y grupos de discusión. En cuanto a los cuestionarios, cabe señalar que se aplicó un total de seis, cada uno involucrando una situación problemática. Aquí se comparten los resultados relativos a una de las situaciones, en la que se consideró al registro tabular como registro principal. Los contenidos matemáticos requeridos ya habían sido desarrollados en el curso.

La situación presentada está constituida por ocho cuestiones a resolver:

En la siguiente tabla se muestran los costos de producción de una empresa de discos compactos.

Número de discos	*Costo (en dólares)*
1000	*116000*
2000	*128000*
3000	*140000*
5000	
6100	
	224000
15000	
72000	

1) *Termina de llenar la tabla.*
2) *Determina el costo de 5500 discos y de 14500 discos respectivamente.*
3) *Explica cómo obtuviste la respuesta a la pregunta 2).*
4) *¿Qué cantidades intervienen en la situación? ¿Cuáles varían y cuáles son constantes o permanecen fijas?*
5) *¿Qué relación de dependencia hay entre las variables?*
6) *Si se sabe que el costo de producción fue de 314000 dólares, ¿cuántos discos se produjeron?*
7) *Obtén una expresión matemática que permita calcular los costos de producción para cualquier cantidad de discos compactos.*
8) *Realiza una gráfica que represente esta situación.*

Para procesar la información se analizaron las resoluciones de los estudiantes para cada categoría de análisis, atendiendo tanto a los tratamientos como a las conversiones empleadas. Se empleó la técnica de análisis del contenido (Ander-Egg, 2003) para estudiar el contenido manifiesto de las producciones escritas al abordar las cuestiones planteadas. Se agruparon las resoluciones con respuestas similares y se fue registrando en una matriz de datos el porcentaje de alumnos de cada grupo así como las características de los procedimientos llevados a cabo, ejemplificando en algunos casos con el de algún estudiante en particular.

RESULTADOS

En lo que sigue se describen algunas características de los desempeños estudiantiles al realizar transformaciones de registros en la resolución de la situación planteada.

Cuestión 1. "Termina de llenar la tabla".

Una característica de las resoluciones del 92% de los estudiantes fue el paso previo al registro analítico-aritmético, donde realizaron las operaciones que consideraron pertinentes, para el llenado de la tabla. Es decir, primero hicieron una conversión, utilizando el registro analítico-aritmético como registro auxiliar. Realizadas las operaciones (transformaciones tipo tratamientos) en este registro, volvieron a hacer otra conversión, al registro tabular como registro principal, y entonces procedieron a llenar la tabla (Fig. 1). Realizaron un tratamiento en cierto sentido sin autosuficiencia, necesitando de la articulación con el registro analítico-aritmético como registro auxiliar para poder funcionar. Sin embargo, teniendo en cuenta que ningún sistema de representación produce una representación cuyo contenido sea del todo completo y adecuado al objeto representado (Del Castillo, 2003), el recurso a otros registros podría considerarse oportuno y hasta conveniente, quedando la inquietud acerca de las reglas compartidas entre los registros en juego.

Número de discos	Costo (en dólares)
1000	116000
2000	128000
3000	140000
5000	152.000
6100	164.000
14.250	224000
15000	236.000
72000	60.000

116.000
−128.000
12.000
+140.000
152.000

Figura 1. Tabla completada por el estudiante E_8

Particularmente E_8 parece asumir de inmediato un modelo lineal afín de la situación. Encuentra la diferencia entre las dos primeras entradas (omitiendo signos) para conocer la constante de proporcionalidad directa (12000) cada 1000 unidades (discos). Procede a adicionar 12000 a filas consecutivas posteriores de la columna "costo", sin detenerse demasiado a observar el incremento correspondiente en la cantidad de discos (pues en las tres primeras filas el incremento de discos es de a 1000 unidades, pero en la cuarta fila el incremento es de 2000 discos y en la siguiente es de 1100). En concordancia con lo planteado por Carrión (2007), en la resolución de E_8 se advierten errores tanto en la ubicación de las cantidades con las que se opera como en la escritura matemática implicada.

Cuestión 2. "Determina el costo de 5500 discos y de 14500 discos respectivamente".

En su mayoría los estudiantes se percataron de que el incremento en el costo de producción era un múltiplo de 12. Sin embargo, al variarles el incremento en la cantidad de discos de 1000 a 100, no hicieron el cambio de 12000 a 1200 en los costos. Esto les impidió seguir un patrón para cualquier cantidad de discos.

Precisamente el 72% de los estudiantes identificó el patrón de regularidad y de crecimiento de la situación; sin embargo solo el 8% lo utilizó adecuadamente. El 12% empleó los datos de la tabla y los modificó con información que se puede deducir de la situación, pero que no aparece explícita en la tabla que se les pide llenar. El 6% de los estudiantes encontró el costo para producir cada disco si no se tuvieran costos fijos y lo utilizó para dar su respuesta. El resto trató de encontrar este valor, pero haciendo una regla de tres simple directa, sin excluir los costos fijos de producción y sin llegar a la respuesta pedida. Es así que se evidencian múltiples interpretaciones de la situación, y aunque no todas ellas son adaptadas a esta, sí muestran rasgos característicos genuinos del concepto de función; lo que según Gallardo, González y Quintanilla (2013) es un indicio claro de que algo se ha comprendido del concepto.

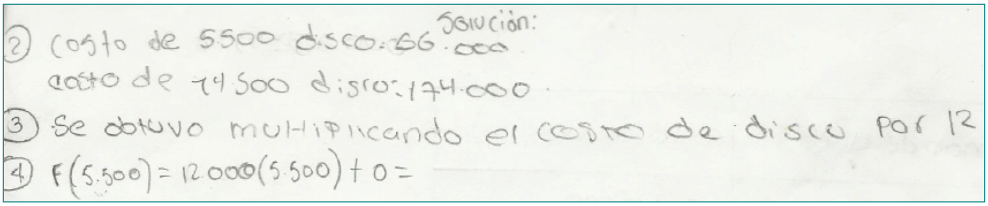


Figura 2. Descripción del procedimiento efectuado por el estudiante E12

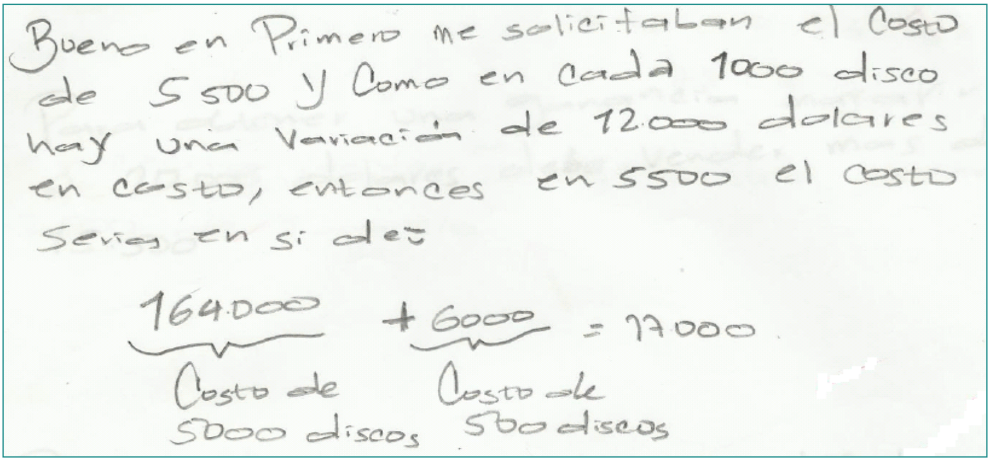
Cuestión 3. "Explica cómo obtuviste la respuesta a la pregunta 2)".

Fueron notorias las dificultades de los estudiantes al intentar describir los procesos realizados: el 36% realizó de manera adecuada los procedimientos y solo el 16% los describió correctamente, el 32% describió correctamente un procedimiento errado y los restantes (32%) no pudieron ni con el proceso ni con su descripción. Al tratar de explicar los procedimientos que siguieron para obtener sus respuestas, lo que hicieron fue repetir lo realizado anteriormente, acorde a lo reportado por Amaya y Barrera (2009). En las explicaciones dadas por los estudiantes se evidencian dificultades al pasar de cualquier registro de representación al del lenguaje materno (coloquial); es decir, esta conversión le resultó problemática a un grupo considerable de estudiantes. Esto coincide con los hallazgos de Caligaris, Schivo, Romiti y Sgreccia (2013), en este caso, en el ingreso a la universidad.

Un ejemplo de esta situación se muestra en la Fig. 2, donde el estudiante E_{12} manifestó que hizo algo que en realidad no es lo que se ve que hizo. Al resolver un polinomio aritmético dice que multiplicó por 12, cuando en realidad lo hizo por 12000. Los resultados de su resolución no coinciden con lo que le daría haciendo lo que dice que hizo (cuyos resultados sí serían válidos).

Sin embargo, al validar esta respuesta en un grupo de discusión, el estudiante da muestra de que su comunicación escrita fue la inadecuada, porque en su oralidad fue bien explícito aclarando adecuadamente lo que realizó. En general los estudiantes dan la cifra de cualquier cantidad sin decir los miles, incluso a veces también así lo escriben. Pero al cuestionárseles sobre la incoherencia de los valores, hicieron la aclaración que era 12000, acotando "todo el mundo dice 12". Fue prácticamente una constante en este grupo de estudiantes: ser más explícitos y precisos en su comunicación oral que en la escrita.

En la conversión al registro coloquial parece que los estudiantes dejaron el proceso de asimilación -en el sentido de Piaget- a medias, al quedarse solo en el manejo de datos, estableciendo pocos vínculos entre la nueva información y su estructura mental constituida (Meel, 2003). Es decir, lograron establecer pocas conexiones entre el contenido de los registros que los ayudara en la comprensión de la situación y el proceso de conexión entre las representaciones. Esto requiere un manejo adecuado de la relación entre el conocimiento y los elementos de la red, así como de la estructura como un todo. Acorde con estas ideas, el progreso matemático -lograr generalizar y justificar los procedimientos de solución a tipos de problemas cada vez más amplios (Godino et al, 2003)- fue logrado por pocos estudiantes (16%) en esta investigación. Y este proceso de establecer



Bueno en Primero me solicitaban el Costo de 5500 y Como en cada 1000 disco hay una Variación de 12.000 dolares en costo, entonces en 5500 el costo Serias en si de:

$$\underbrace{164.000}_{\text{Costo de 5000 discos}} + \underbrace{6000}_{\text{Costo de 500 discos}} = 17.000$$

Figura 3. Descripción del procedimiento efectuado por el estudiante E21

congruencias es, según Del Castillo (2003), condición necesaria para la comprensión en matemáticas.

En el manuscrito que se muestra en la Fig. 3 se evidencia que el estudiante E_{21} reconoció algunos elementos significativos de la función, teniendo en cuenta que para Tall (1985) el propósito de toda función es mostrar cómo varía algo. El hecho de que un alumno reconozca que en la situación se da el proceso de variación es de gran relevancia para este estudio, por cuanto el hecho de llevarlos a realizar transformaciones de registros se convirtió en una intervención para la mejora en la comprensión del tema.

Cuestión 4. "¿Qué cantidades intervienen en la situación? ¿Cuáles varían y cuáles son constantes o permanecen fijas?".

Los estudiantes (64%) presentaron serias dificultades relacionadas con el reconocimiento de los elementos de la función y con el manejo de las operaciones; es decir, con la identificación del contenido de las representaciones y con el funcionamiento del registro, en términos de Duval (2004). Sin embargo, el 48% de ellos identificó ciertos elementos de la función, pero no alcanzó a dar respuestas del todo acertadas, por omitir otros. Por ejemplo, se dieron cuenta que por cada incremento de 1000 en la cantidad de discos se presentaba un incremento de 12000 dólares en el costo de producción, pero al dar su respuesta no tuvieron en cuenta que en la cuarta fila hubo un salto en la secuencia de número de discos (se omitió el 4000), por lo que en la primera entrada que llenaron de la tabla (correspondiente al costo para 5000 discos), en lugar de 164000 (140000+12000+12000) colocaron 152000, que era el valor correspondiente a 4000.

Otra de las dificultades fue relacionar los elementos de la función con su significado contextual. Por ejemplo, les costó aceptar que los valores de la función correspondieran con los costos de producción, que los costos fijos por unidad fueran 12 y no 12000, y que los costos fijos de producción fueran 104000 y no 116000, evidenciándose lo que Benítez (2010) llama interpretación local de la situación.

Cuestión 5. "¿Qué relación de dependencia hay entre las variables?".

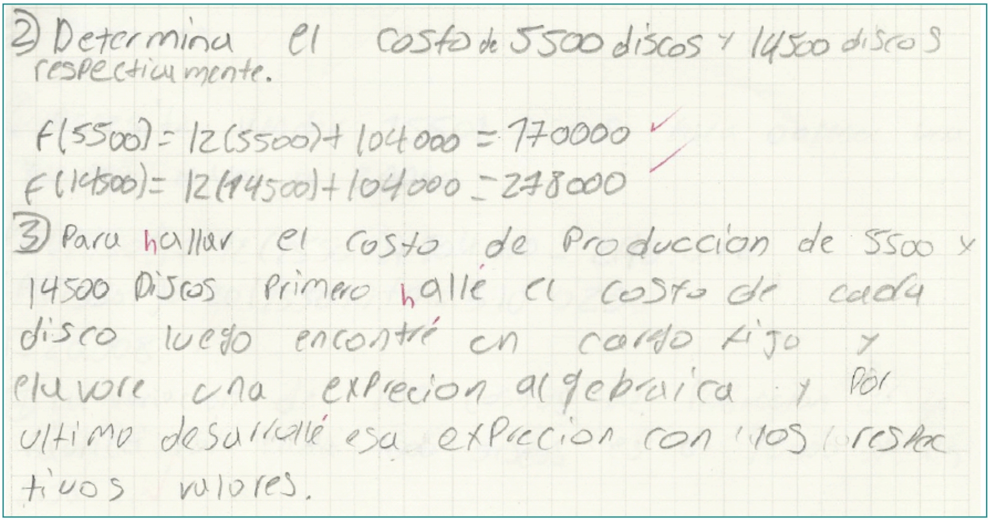
Un alto porcentaje de estudiantes (76%) presentó dificultades para relacionar los elementos de la función en una transformación tipo conversión. En cada registro pudieron identificar solo algunos elementos. Por ejemplo, ignoraron los costos fijos de producción y trabajaron con la función lineal como si fuera una función afín, evidenciándose un obstáculo en el sentido de Brousseau (1999). Aquellos que identificaron los elementos de la función (24%) también pudieron clasificarlos y establecer relaciones de dependencia entre ellos. Además, cabe advertir que el 16% de los estudiantes utilizó un registro auxiliar analítico-aritmético para dar respuesta a la consigna; mostrándose nuevamente que el proceso de hacer transformaciones entre registros no es una cuestión sencilla ni espontánea, es decir, estos procesos ontosemióticos de identificación de aspectos comunes en distintos registros suelen resultar complejos.

Cuestión 6: "Si se sabe que el costo de producción fue de 314000 dólares, ¿cuántos discos se produjeron?".

Ningún estudiante utilizó el concepto de ecuación para encontrar la incógnita solicitada, ni en la entrada de la tabla que implicaba un tratamiento, ni en la pregunta que implicaba una conversión al registro algebraico, coincidiendo en este sentido con lo reportado por Ochoviet y Oktaç (2011). Los que dieron con la respuesta, lo hicieron por tanteo (24%) o utilizando el patrón deducido en la secuencia (16%). Es decir, a los estudiantes se les dificultó más encontrar el número de discos cuando se les dio previamente el costo de producción para una cierta cantidad de discos, que el proceso inverso: hallar el costo de producción para una determinada cantidad dada de discos. El primer caso es un proceso que lleva implícito el concepto de ecuación, que no fue utilizado por ningún estudiante para dar respuesta a esta pregunta. El segundo caso parece ser más familiar a los estudiantes, ya que es dar solución a un polinomio aritmético -como el mostrado en la Fig. 4, con el que se trabaja con frecuencia en cursos anteriores y en asignaturas como Física y Química- o seguir el patrón de regularidad hasta dar con la respuesta.

Sin embargo resulta curioso que un grupo de estudiantes haya encontrado y utilizado una expresión algebraica que modelara la situación y no la hubieran utilizado para encontrar una incógnita. Aquí los estudiantes no pudieron concebir la letra como número generalizado, lo que les pudo impedir usar el concepto de ecuación para encontrar la incógnita solicitada. Esto es, establecer la equivalencia entre la expresión algebraica y el valor dado para los costos de producción que lo llevaría a plantear una ecuación y, de resolverla, a encontrar el número de discos correspondientes a esos costos de producción (fig. 4).

Además, cabe señalar que el 80% de los estudiantes no utilizó la información que había consignado en su tabla para responder otras preguntas, en concordancia con lo reportado por Amaya y Barrera (2009), donde la mayoría de los alumnos realizó nuevos procedimientos para responder una pregunta, cuya respuesta ya había obtenido al llenar la tabla.


2) Determina el costo de 5500 discos y 14500 discos respectivamente.

$f(5500) = 12(5500) + 104000 = 170000$
$f(14500) = 12(14500) + 104000 = 278000$

3) Para hallar el costo de Produccion de 5500 y 14500 Discos Primero hallé el costo de cada disco luego encontré en cargo fijo y elavoré una exprecion algebraica y por ultimo desarrollé esa exprecion con los respectivos valores.

Figura 4. Descripción del procedimiento efectuado por el estudiante E18

Se evidencia en los estudiantes dificultades para conectar las representaciones en los registros tabular, analítico y del lenguaje materno, en sintonía con lo reportado por Sánchez-Matamoros et al. (2008), lo que según Hitt (2000) podría utilizarse como indicio de si se comprende o no la situación.

Cuestión 7. "Obtén una expresión matemática que permita calcular los costos de producción para cualquier cantidad de discos compactos".

El mismo grupo de estudiantes que pudo relacionar los elementos de la función modeló la situación funcional, recurriendo y sin recurrir a un registro auxiliar. De salida escribieron una expresión analítica y la utilizaron para obtener otras respuestas, como se muestra en la Fig. 4. El estudiante E_{18} presenta claras evidencias de haber encontrado una expresión algebraica y utilizarla para obtener algunas de las respuestas que se le solicitaron. Este resultado corrobora una vieja creencia popular según la cual es más fácil el trabajo con funciones partiendo del registro algebraico como registro principal. Además, hay una creencia generalizada entre los estudiantes que al solicitárseles una expresión matemática que modele la situación, se les está pidiendo que escriban una fórmula. De hecho, aquí un reducido grupo de estudiantes (4%) propuso como modelo una tabla. En general, no conciben como un modelo matemático otra representación que no sea la algebraica.

Cuestión 8. "Realiza una gráfica que represente esta situación".

En la conversión al registro gráfico también presentaron dificultades relacionadas específicamente con la congruencia entre los ejes y el sistema de unidades utilizado para demarcarlos. Colocaron en los ejes la secuencia de números en el orden en que los iban

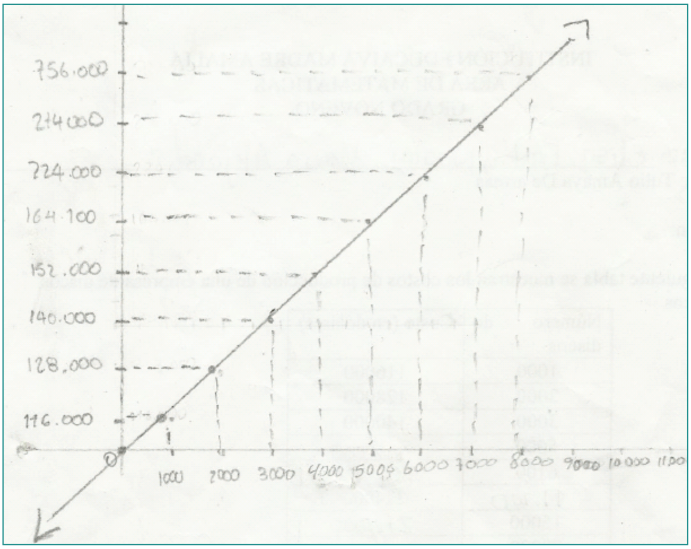


Figura 5. Gráfica realizada por el estudiante E5

encontrando al ir resolviendo el polinomio aritmético, sin tener en cuenta el orden y cardinal en la variable independiente. Algo similar fue reportado por Dolores (2004), quien encontró que los estudiantes asociaban el comportamiento de las imágenes en las gráficas con el comportamiento de sus abscisas, sin importarles el signo de sus ordenadas.

En el caso presente, los estudiantes sí tuvieron en cuenta el signo de las ordenadas, pero no la ubicación en los ejes. La dificultad estuvo asociada al funcionamiento del registro gráfico y a la coordinación con el tabular (Duval, 2004). En la Fig. 5 se puede ver que el estudiante E_5 asignó longitudes similares a los segmentos 0-116000 y 116000-128000; es decir, la secuencia que siguió en la marcación de los ejes no corresponde a una progresión aritmética como habría de esperarse. Además, en la resolución de este alumno se evidencia el uso de la función afín en lugar de la lineal. Los estudiantes tienen tendencia a hacer "pasar por el origen" a las representaciones gráficas de rectas.

Otro aspecto que cabe destacar es el relacionado con la continuidad de la gráfica. Aunque los valores del dominio son discretos, el estudiante E_5 los asumió como continuos, uniendo los puntos marcados hasta obtener una función continua como se muestra en la Fig. 5, quizás por esa "rara tendencia" que tienen los alumnos a unir todos los puntos de una función (Gatica, Tauber y Ruiz, 2002). Según estos autores, la graficación comprende acciones de interpretación y construcción. La interpretación se refiere a la habilidad de los estudiantes para leer y darle significado a una gráfica, mientras que la construcción se refiere a crear algo nuevo, elaborando una gráfica a partir de una regla funcional dada. En este caso, parece que ambas acciones se realizaron parcialmente: la interpretación porque no pudieron relacionar elementos de la función del registro tabular con sus equivalentes en el registro gráfico, confundiendo por ejemplo dominio con rango; la construcción porque no ubicaron los elementos que encontraron en el registro tabular en el lugar correspondiente en el registro gráfico. De esta manera las dos representaciones, tabular y gráfica, no resultaron congruentes. Además, para los estudiantes, la gráfica de la función depende de los puntos que se tomen para graficarla.

CONCLUSIONES

Los resultados de la investigación muestran que la transformación de registros de representación de una función es una actividad compleja para estudiantes de la media académica, a pesar de que en dos cursos previos habían trabajado con funciones. La misma no es espontánea y requiere una enseñanza intencionada que, en concordancia con Romiti, Sgreccia y Caligaris (2012), procure atender de manera equitativa a los diversos registros, tanto en actividades de tratamiento como de conversión.

Las dificultades de los estudiantes estuvieron relacionadas con la identificación del contenido de las representaciones, la utilización del concepto de ecuación para encontrar una incógnita, el funcionamiento de los registros y la coordinación o conversión entre dichos registros.

En cuanto a la identificación del contenido de una función en el registro tabular, como registro de partida, la mayoría de los estudiantes pudo identificar algunos elementos, pero no los suficientes para hacer transformaciones acordes a las cuestiones solicitadas. Por ejemplo, muchos se dieron cuenta que la secuencia para los costos iba de 12000 en 12000 cuando el número de discos cambiaba de 1000 en 1000. Sin embargo, esto no fue suficiente para determinar el patrón de crecimiento de la situación. Trabajaron la función lineal como si fuera una función afín y para encontrar los resultados solicitados realizaron una regla de tres simple directa. Este hecho les impidió llenar correctamente la tabla, dar respuestas acertadas a las cuestiones planteadas, y realizar correctamente la gráfica. No obstante, los estudiantes identificaron en la situación rasgos característicos genuinos del concepto de función, lo que es un gran avance en su desarrollo de pensamiento variacional y un indicio claro de que algo se ha comprendido del concepto. Pero dio la impresión que fue una comprensión parcial, que se evidenció solo en algunas de las cuestiones planteadas, como si de una pregunta a otra se hubiera cambiado la muestra de estudiantes.

Teniendo en cuenta lo anterior se plantea como una posibilidad de trabajo en el aula, para contribuir a mejorar estos desempeños estudiantiles, formular preguntas intermedias del tipo: *¿cómo está constituido el costo de producción de discos?, ¿hay costos fijos (independientes de la cantidad a producir) y costos variables (según la cantidad de discos que se produzcan)?, ¿podrías identificarlos: costo fijo:….; costo de 1000 discos:…, de 500 discos:…, de 100 discos:…, de 1 disco:…?*

En la utilización del concepto de ecuación para encontrar una incógnita, la dificultad estuvo en que la mayoría no pudo hallar una expresión algebraica que representara la situación, y los que la obtuvieron no establecieron la equivalencia entre esta y el valor numérico dado para los costos de producción, lo que los llevaría a la ecuación requerida. Teniendo en cuenta la dificultad al hacer conversiones entre los registros algebraico y coloquial -en ambos sentidos-, una posible guía para ello es: *sabemos que el costo fijo es 104000 dólares, que el costo por unidad es de 12 dólares y que se gastaron 314000 dólares en producción de discos:*

104000	+	*12*	*x*	=	*314000*
costo fijo		*costo de cada unidad*	*cantidad de discos producidos*		*lo que se gastó*

¿Puedes obtener la cantidad de discos producidos? Hazlo e indica otra/s forma/s posible/s de hallar dicha cantidad.

En el funcionamiento de los registros y la coordinación entre ellos fue posible apreciar que los estudiantes no reconocieron el registro tabular como apoyo válido para sustentar sus respuestas; necesitaron verificar sus respuestas en el registro algebraico analítico antes de darlas. Para fortalecer este aspecto (y sin ignorar el recurso de cálculos mentales) una propuesta es: *explicitar en la consigna "solo empleando la tabla"; solicitar "explicar con tus propias palabras qué información aporta la tabla"; ¿le agregarías o quitarías filas/columnas a la tabla?, ¿sí/no por qué?; ¿con qué prefieren trabajar las funciones: tablas, fórmulas, gráficos?, ¿por qué?*

En las transformaciones tipo conversión utilizaron como andamio el registro algebraico-analítico como paso previo hacia cualquier otro registro; incluso hasta en las transformaciones tipo tratamiento siempre acudieron al registro algebraico-analítico como paso obligado. Es decir, no se dieron tratamientos puros, siempre acudieron a este registro auxiliar para hacer modificaciones o verificar cualquier cuestión por la que se les indagara. Utilizando el registro tabular como registro principal hicieron las operaciones en el registro algebraico-analítico y volvieron a hacer otra conversión de regreso al tabular como registro principal, donde terminaron el tratamiento. Aquí surge la duda de si se violó el principio de autosuficiencia de los registros ante una transformación tipo tratamiento (Duval, 2004) o es que estos dos registros comparten algunas reglas.

Finalmente, coincidimos con D'Amore (2006) en que el uso de distintas representaciones y su progresiva articulación enriquecen el significado, conocimiento, comprensión del objeto así como su complejidad. Por ello robustecer el trabajo escolar en este sentido es una de nuestras tareas.

REFERENCIAS

Amaya, T. (2010). Errores de los estudiantes de octavo grado en el trabajo pre-algebraico. *Revista de la Escuela de Ciencias de la Educación, 6*(5), 225-244.

Amaya, T. y Barrera, J. (2009). Un estudio de la variación utilizando funciones en estudiantes de la media académica. En P. Lestón (Ed.). *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, 22* (pp.93-99). México DF: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Ander-Egg, E. (2003). *Métodos y Técnicas de Investigación Social IV. Técnicas para la recogida de datos e información.* Buenos Aires: Lumen.

Benítez, A. (2010). Estudio numérico de la gráfica para construir su expresión algebraica. El caso de los polinomios de grado 2 y 3. *Educación Matemática, 22*(1), 5-29.

Bravin, C. y Pievi, N. (2008). *Documento metodológico orientador para la investigación educativa*. Buenos Aires: Ministerio de Educación.

Brousseau, G. (1999). Los Obstáculos Epistemológicos y los Problemas en Matemáticas. Traducido por Hernández y Villalba del original: Brousseau, G. (1983). Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *4*(2), 165-198.

Caligaris, M., Schivo, M.E., Romiti, M.R. y Sgreccia, N. (2013). *Naturalmente difícil*. Ponencia presentada en la XXXVI Reunión de Educación Matemática. Rosario, septiembre.

Carrión, V. (2007). Análisis de errores de estudiantes y profesores en expresiones combinadas con números naturales. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, (11), 19-57.

Cordero, F. (1997). El entendimiento de algunas categorías del conocimiento del cálculo y análisis: el caso del comportamiento tendencial de las funciones. *Revista Latinoamericana de Investigación en Educación Matemática*, *1*(1), 56-74.

D'Amore, B. (2006). Objetos, significados, representaciones semióticas y sentido. *Revista Latinoamericana de Investigación en Educación Matemática, 9*(1), 177-195.

Del Castillo, A. (2003). *La articulación de los registros gráfico, analítico y de la lengua natural*. Recuperado el 9 de marzo de 2013, de http://www.semana.mat.uson.mx/Memorias/pupi.pdf.

Dolores, C. (2004). Acerca del análisis de funciones a través de sus gráficas: concepciones alternativas de estudiantes de bachillerato. *Revista Latinoamericana de Investigación en Educación Matemática, 7*(3), 195-218.

Duval, R. (1999). *Semiosis y pensamiento humano. Registros semióticos y aprendizajes intelectuales*. Cali: Universidad del Valle.

Duval, R. (2004). *Los problemas fundamentales en el aprendizaje de las matemáticas y las formas superiores del conocimiento*. Cali: Universidad del Valle.

Duval, R. (2012a). Preguntas y desafíos de la enseñanza de las matemáticas para todos: implicaciones para la investigación en didáctica. En U. Malaspina (Coord.). *Resúmenes del VI Coloquio Internacional de Didáctica de las Matemáticas: avances y desafíos actuales* (pp.3-6). Lima: Pontificia Universidad Católica del Perú.

Duval, R. (2012b). Lo esencial de los procesos cognitivos de comprensión en matemáticas: los registros de representación semiótica. En U. Malaspina (Coord.). *Resúmenes del VI Coloquio Internacional de Didáctica de las Matemáticas: avances y desafíos actuales* (pp.14-17). Lima: Pontificia Universidad Católica del Perú.

Gallardo, J., González, J. y Quintanilla, V. (2013). Tareas, textos y usos del conocimiento matemático: apuntes a la interpretación de la comprensión desde el cálculo aritmético elemental. *Revista Educación Matemática, 25*(2), 61- 88.

Gatica, N., Maz-Machado, A., May, G., Cosci, C., Echevarría, G. y Renaudo, J. (2010). Un acercamiento a la idea de continuidad de funciones en estudiantes de Ciencias Económicas. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, (22), 121-131.

Gatica, N., Tauber, L. y Ruiz, F. (2002). Registros de representación puestos en juego en el concepto de función: un estudio en estudiantes ingresantes a la carrera de ingeniería. En M. Penalva, G. Torregrosa y J. Valls (Eds.). *Aportaciones de la didáctica de la matemática a diferentes perfiles profesionales* (pp.417-430). Alicante: Universidad de Alicante.

Godino, J., Font, V. y Batanero, C. (2003). *Fundamentos de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas para maestros*. Granada: Universidad de Granada.

Hitt, F. (2000). Representations and mathematics visualization. En M.L. Fernández (Ed.). *Proceedings, PME-NA 22* (pp.131-147). Tucson: ERIC Publications.

Hitt, F. (2003a). Una Reflexión Sobre la Construcción de Conceptos Matemáticos en Ambientes con Tecnología. *Boletín de la Asociación Matemática Venezolana*, *10*(2), 213-223.

Hitt, F. (2003b). *Dificultades en el aprendizaje del cálculo. Décimo primer Encuentro de Profesores de Matemáticas del Nivel Medio Superior*. Morelia: Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo.

Kaput, J. (1987). Representation and mathematics. En C. Janvier (Ed.). *Problems of representation in mathematics learning and problem solving* (pp.19-26). Hillsdale: Erlbaum.

Kaput, J. (1989). Linking representations in the symbol systems of algebra. En C.Kieran & S. Wagner (Eds.). *A research agenda for the learning and teaching of algebra* (pp.167-194). Reston: NCTM.

León, O. y Corredor, D. (2003). *Argumentar y validar en matemáticas ¿una relación necesaria? Hacía una comprensión del desarrollo de competencias argumentativas en matemáticas*. Bogotá: Colciencias y Universidad de Valle.

Meel, D. (2003). Modelos y teorías de la comprensión matemática: Comparación de los modelos de Pirie y Kieren sobre el crecimiento de la comprensión matemática y la Teoría APOE. *Revista Latinoamericana de Investigación en Educación Matemática, 6*(3), 221-271.

Ministerio de Educación Nacional. (2005). *Potenciar el pensamiento matemático: un reto escolar. Estándares básicos de competencias en matemáticas*. Bogotá: Ministerio de Educación Nacional.

National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principios y Estándares para la Educación Matemática*. Traducción al español, Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales. Sevilla: Proyecto Sur.

Ochoviet, C. y Oktaç, A. (2011). Algunos aspectos del desarrollo del pensamiento algebraico: el concepto de raíz y de variable en ecuaciones polinómicas de segundo grado. Un estudio de casos realizado con estudiantes uruguayos de enseñanza secundaria. *Revista Educación Matemática, 23*(3), 91-121.

Romiti, M.R., Sgreccia, N. y Caligaris, M. (2012). *Propuesta de mejora en el aprendizaje del concepto de límite de una función real*. X Conferencia Argentina de Educación Matemática. Buenos Aires, septiembre.

Sánchez-Matamoros, G., García, M. y Llinares, S. (2008). La comprensión de la derivada como objeto de investigación en didáctica de la matemática. *Revista Latinoamericana de Investigación en Educación Matemática, 11*(2), 267-296.

Servan, P. y Servan, I. (2010). Intervención en la familia. Estudio de casos. En G. Serrano (Coord.). *Modelo de investigación cualitativa en educación social y animación sociocultural: animaciones prácticas* (pp.221-252). Madrid: Narcea.

Tall, D. (1985). Understanding the calculus. *Mathematics Teaching, 1*(10), 49-53.

UNESCO. (2005). *Hacia las sociedades del conocimiento. Informe mundial de la UNESCO*. Recuperado el 7 de enero de 2013, de http://unesdoc.unesco.org/images/0014/001419/141908s.pdf.

Épsilon - *Revista de Educación Matemática* *2014, Vol. 31(3), nº 88, 39-54*

Trayectorias de aprendizaje de la multiplicación y la división de cuatro a siete años

Mónica Ramírez García
monica.ramirez@edu.ucm.es
Universidad Complutense de Madrid
Carlos de Castro Hernández
carlos.decastro@uam.es
Universidad Autónoma de Madrid

Resumen: *Describimos una trayectoria de aprendizaje de la multiplicación y la división con niños de 4 a 7 años. Para ello, definimos las trayectorias de aprendizaje y valoramos la importancia de su consideración en los primeros años. Después, mostramos las trayectorias a través de una experiencia desarrollada en un colegio con niños de 4 a 7 años. Los niños desarrollan estrategias informales de modelización directa para resolver problemas de multiplicación y división de complejidad creciente, mostrando su evolución en el uso de representaciones, materiales manipulativos y en el proceso de simbolización.*
Palabras clave: *Educación infantil, división, multiplicación, resolución de problemas, trayectorias de aprendizaje.*

Learning trajectories for multiplication and division from four to seven years

Abstract: *We describe a learning trajectory for multiplication and division with children from four to seven years. To this end, we define learning trajectories and value the importance of reflecting on them in the early years. Then we show the trajectories through an experience developed in a school with children from four to seven years. Children develop informal direct modeling strategies to solve multiplication and division problems of increasing complexity, showing their evolution in the use of representations, manipulatives and in the process of symbolization.*
Keywords: *Early childhood, division, multiplication, problem solving, learning trajectories.*

1. INTRODUCCIÓN

Este artículo trata sobre el aprendizaje de la multiplicación y la división de un modo algo diferente al habitual, pues se centra en el aprendizaje informal de dichas operaciones que tiene lugar (o podría tenerlo) entre los 4 y los 7 años, antes de comenzar con el estudio formal de las mismas. Para comenzar, parece oportuno establecer un marco curricular de referencia que centramos, por brevedad, en la multiplicación. Con respecto a esta operación, en el currículo de educación primaria de la Ley Orgánica de Educación (LOE) (MEC, 2007) se proponía la "construcción de las tablas de multiplicar del 2, 5 y 10" (p. 31557) para el primer ciclo de primaria (primer y segundo cursos) y la "construcción y memorización de las tablas de multiplicar" (p. 31559) para el segundo ciclo (tercero y cuarto cursos de primaria). La reciente orden que establece el nuevo currículo de primaria para el ámbito de gestión del Ministerio de Educación, Cultura y Deporte incluye la "iniciación a la construcción de las tablas de multiplicar" (MEC, 2014, p. 34069) en primer curso. Precisando más el contenido de esta "iniciación", el borrador del currículo de la Comunidad de Madrid propone la memorización de las tablas de multiplicar del 0, 1, 2 y 5 en primer curso de educación primaria (Consejería de Educación, Cultura y Deporte de la Comunidad de Madrid, 2014). Resumiendo, la línea que marcan los actuales cambios legislativos es la de adelantar un año la memorización de algunas de las tablas de multiplicar. Esta opción puede resultar polémica, puesto que resulta antitética con otros planteamientos curriculares recientes de gran prestigio, como la propuesta de los *Focos Curriculares* (CCSSI, 2010), donde se recomienda para el cuarto grado de primaria que "los estudiantes usen su comprensión de la multiplicación para desarrollar una recuperación rápida [de la memoria] de las tablas de multiplicar" (p. 16).

Castro, Cañadas y Castro-Rodríguez (2013) indican que los niños son capaces de resolver situaciones aritméticas sencillas desde los 3 años, y que la resistencia a presentarles estas situaciones en esta edad, puede provocar que no consigan dotar de significado, más adelante, al algoritmo que aprenderán en primaria (p. 9). Así, los niños deberían tener la oportunidad de construir significados propios de las operaciones aritméticas sin necesidad de (previamente a su) instrucción formal. En línea con este planteamiento, en este artículo describimos una *trayectoria de aprendizaje* que los maestros y maestras de educación infantil y de primer curso de primaria podrán seguir con sus alumnos para que construyan significados de la multiplicación y la división previamente al aprendizaje formal de dichas operaciones en segundo y tercer cursos.

Trayectorias de aprendizaje en educación matemática

Una trayectoria de aprendizaje tiene tres componentes: un objetivo, una progresión a través de la cual los niños van evolucionando hasta lograr dicho objetivo, y una serie de actividades de enseñanza o tareas vinculadas a cada nivel de pensamiento que ayudan a los niños a desarrollar niveles superiores de pensamiento y a alcanzar el objetivo propuesto (Clements y Sarama, 2009). El objetivo, en una trayectoria de aprendizaje, es una de las *grandes ideas matemáticas*, que ocupan un lugar privilegiado en el aprendizaje de las matemáticas, y se describen en importantes documentos curriculares (NAEYC y NCTM, 2013; NCTM, 2003, OCDE, 2005). Por ejemplo, "una gran idea matemática es

que el conteo puede usarse para determinar cuántos hay en una colección" (Clements y Sarama, 2009, p. 3). Las progresiones evolutivas describen los pasos que los niños suelen seguir para lograr destreza y comprensión de un determinado tema matemático. Por ejemplo, para resolver problemas aritméticos verbales de estructura aditiva, los niños suelen pasar por estrategias de modelización directa, después de conteo y, finalmente, de uso de hechos numéricos básicos o derivados (Carpenter, Fennema, Franke, Levi y Empson, 1999). Se puede establecer una correspondencia entre estos tipos de estrategias y los niveles evolutivos en el aprendizaje de la adición establecidos por Fuson (1992). Clements y Sarama (2009) se refieren a estas progresiones como *caminos de aprendizaje*. Por último, ligadas estrechamente a los niveles de pensamiento, hay conjuntos de tareas que conformarían un *camino de enseñanza* establecido con el fin de facilitar la progresión de los niños a lo largo del correspondiente *camino de aprendizaje*.

El concepto de trayectoria de aprendizaje ha tenido un largo recorrido en la educación matemática desde su origen en 1995. Se puede profundizar en esta idea, su origen, y sus diferentes acepciones y usos en los trabajos de Gómez, González y Romero (2014) y de Gómez y Lupiáñez (2007).

En la posición conjunta sobre el aprendizaje de las matemáticas en los primeros años (NAEYC y NCTM, 2013, p. 7), entre las orientaciones que se dan para las propuestas para el aula está "asegurar que el currículo sea coherente y compatible con las relaciones y secuencias conocidas de las ideas matemáticas fundamentales". En este punto del documento se hace referencia explícita a la importancia de las trayectorias de aprendizaje como referencia para guiar la enseñanza.

Las trayectorias de aprendizaje y su fundamentación en la investigación

En este apartado queremos incidir en una idea que nos parece relevante: las trayectorias de aprendizaje deben estar sólidamente basadas en la investigación en sus tres componentes (objetivo, camino de aprendizaje y camino de enseñanza). Daro, Mosher y Corcoran (2011) proponen ejemplos de trayectorias de aprendizaje entre las cuales figura un marco para el aprendizaje de la multiplicación (p. 81). En este trabajo, por brevedad, tomamos, a modo de ejemplo, la división para ilustrar la conexión de las trayectorias con los resultados de investigación. Se puede constatar que la experiencia que relataremos en el apartado siguiente está basada en estas referencias teóricas.

Clements (2004) indica que el *particionamiento*, operación de descomponer un conjunto de objetos en varios conjuntos de igual tamaño, es una idea fácilmente comprensible para los niños, que surge en situaciones de reparto alrededor de los 3 años de edad. También a los tres años pueden dividir una colección en conjuntos iguales de un cardinal dado, si los subconjuntos son muy pequeños (división medida). Muchos niños de 4 o 5 años pueden trabajar con números mayores inventando una estrategia de correspondencia uno a uno para dividir la colección inicial en subconjuntos iguales. La idea es fundacional para todos los tipos de situaciones multiplicativas y de división medida (donde se conoce el número de objetos en cada grupo) y de división partitiva (donde se conoce el número de grupos). Pero las complejidades de encontrar soluciones exactas con números mayores, excepto mediante ensayo y error y a través de la reflexión sobre una serie de acciones repetidas, hacen que esta idea sea mejor captada en detalle en cursos superiores

(Clements, 2004, pp. 24-25). Precisando acerca del tamaño de las cantidades en los problemas, Clements (2004, p. 36) indica que a los 4 años los niños pueden utilizar estrategias informales para repartir hasta 10 objetos entre dos niños y que a los 5 años son capaces de repartir hasta 20 objetos en partes iguales entre 3, 4 o 5 personas, y de formar, con hasta 20 objetos, grupos iguales de 2 a 5 objetos, determinando el número total de grupos. Con 6 años, manejan cantidades superiores, de hasta 100, repartiéndolas entre hasta 10 personas y agrupándolas en grupos iguales de hasta 10 objetos.

Dentro de nuestra línea de trabajo sobre resolución de problemas aritméticos verbales en educación infantil, hemos observado en trabajos anteriores cómo los niños resuelven problemas de estructura multiplicativa, de multiplicación y división medida (De Castro, Molina, Gutiérrez, Martínez y Escorial, 2012), problemas de reparto igualatorio (López y De Castro, 2014), de comparación multiplicativa, de multiplicación y división (De Castro, Walsh, Del Coso, Salvador, González y Escorial, 2009) y de descomposición factorial (De Castro y Hernández, 2014). Todos estos trabajos se han realizado con niños de 5-6 años, en último curso de educación infantil. Recomendamos su lectura como complemento a este artículo, por versar sobre problemas de tipos diferentes a los del presente trabajo, que no se plantean habitualmente en educación infantil. En este artículo, nuestro objetivo es mostrar una panorámica más amplia en cuanto al rango de edad, sobre los problemas de estructura multiplicativa, abarcando desde los 4 a los 7 años, e incluyendo en primer curso de primaria problemas de multiplicación y división agrupamiento con grupos de diez, para vincular los problemas de estructura multiplicativa con el concepto de decena (Carpenter, Franke, Jacobs, Fennema y Empson, 1997; Ramírez y De Castro, 2014).

2. DESCRIPCIÓN DE LAS TRAYECTORIAS A LO LARGO DE TRES CURSOS: 4-5, 5-6 Y 6-7 AÑOS

En este apartado, describimos el desarrollo de varias sesiones de talleres de resolución de problemas, realizadas en el CEIP Virgen de Peña Sacra, de Manzanares el Real (Madrid), con niños pertenecientes a tres cursos diferentes, con edades comprendidas entre los cuatro y los siete años. La metodología que seguimos en estos talleres está descrita en trabajos anteriores (De Castro y otros, 2009; De Castro y otros, 2012). De un modo muy sucinto, planteamos problemas aritméticos basados en la lectura de un cuento (para favorecer la comprensión del enunciado), sin enseñanza previa, y dando una libertad absoluta en el uso de materiales para resolver los problemas razonando con la ayuda de objetos (cubos encajables, materiales manipulativos, dibujos, etc.). Al comentar el trabajo de los alumnos, nos hemos centrado en mostrar la evolución que se observa a lo largo de estos tres cursos, de las estrategias, uso de materiales y representaciones para los problemas de multiplicación y división.

Multiplicación en un aula de 4-5 años

En la resolución de problemas con niños de 4 y 5 años es importante que el tamaño de los números sea bajo, para adaptarnos a la capacidad de conteo de los pequeños

Figura 1. Lectura del cuento y momento de explicación de Óscar.

(Clements, 2004). La referencia que tomamos es que, hasta mitad de curso, no superemos los 6 objetos. En nuestra experimentación, uno de los primeros problemas está basado en la lectura del cuento "Chivos chivones" (González y Fernández, 2007). A lo largo del cuento, los tres chivos, y sus cuernos, aparecen y son mencionados continuamente. La lectura repetida del cuento (en varios días diferentes) permite a los niños imaginar la situación descrita en el enunciado del problema. Así, a partir del cuento, planteamos a los niños el siguiente problema: Si había tres chivos, y cada uno tiene dos cuernos. ¿Cuántos cuernos tienen en total entre los tres? Al trabajar con cantidades tan bajas, que pueden representarse con los dedos, algunos niños resuelven ya el problema en el momento de la lectura y el planteamiento del problema, todavía en la "asamblea" (Figura 1a). Algunos niños resuelven el problema mediante un dibujo. Guillermo representa los cuernos de los chivos utilizando tres colores diferentes para diferenciar qué cuernos corresponden a cada chivo (Figura 1c). En la Figura 1b, vemos cómo la maestra sujeta la hoja de trabajo a Guillermo y le va preguntando sobre el significado de sus representaciones. Con este apoyo, Guillermo va explicando cómo ha resuelto el problema.

Algunos niños dan el resultado, pero la maestra está interesada en que todos comprendan la situación, y que los que creen que han resuelto el problema, lo comprueben en el trabajo individual, y le expliquen cómo lo han hecho. Se produce la siguiente conversación:

- Bea: A ver, ¿alguien se acuerda de cómo era el problema?
- Óscar: Éstos [Pone con los dedos seis, que es el resultado].
- Bea: Sí. Esa es la solución que tú crees. Seis, ¿no? Pero, ¿cuál era el problema?
- Mario: Seis. El problema es seis [De nuevo, se refiere al resultado].
- Guillermo: Dos cuernos en cada chivo.
- Bea: En cada chivo y, ¿cuántos chivos hay?
- Nerea: Seis.
- Guillermo: Tres [Corrige a Nerea y lo indica poniendo tres con los dedos].
- Bea: Tres, con dos cuernos en cada chivo, ¿cuántos cuernos hay en total entre los tres?
- Nerea: Seis [Pone seis con los dedos].
- Guillermo: Seis.
- Bea: Ahora me decís por qué pensáis que son seis [Con "ahora", la maestra se refiere al momento en que, durante el trabajo individual, pase preguntando a cada niño cómo lo ha hecho].

Óscar resuelve el problema con el rekenrek. Este es un ábaco holandés, inventado en 1991 por Adrian Treffers, del Instituto Freudenthal, que se utiliza como modelo visual para la iniciación al cálculo. Óscar utiliza las cuentas de la varilla superior para representar los cuernos, y las cuentas de la varilla inferior para los chivos. En las dos primeras imágenes de la Figura 2, vemos que levanta dos dedos (cuernos) en su mano derecha y el pulgar de su mano izquierda (chivo). Interpretamos estos gestos con los dedos como una "segunda" representación, que refuerza la representación con el ábaco, y que Óscar hace para comprobar su procedimiento. Después, va añadiendo dos cuentas en la varilla de arriba por cada una en la varilla de abajo. Finalmente, cuando Beatriz (la maestra) pasa a su lado, Óscar separar las cuentas de la varilla inferior, que representan a los tres chivos, para enfatizar y explicar a la maestra la correspondencia dos a uno entre cuernos y chivos (Figura 2d).

División en un aula de 4-5 años

Basándonos en la lectura del cuento "¿A qué sabe la luna?" (Grejniec, 2004), planteamos el siguiente problema en el aula de 4-5 años: Si el ratón reparte seis trocitos de luna entre el zorro y la cebra, ¿cuántos trozos le puede dar a cada uno? En este problema damos por válida cualquier descomposición del seis, aunque observaremos ya la tendencia a los repartos equitativos. Enseguida empezamos a oír: "Ocho", "Siete". Beatriz repite el enunciado y de nuevo los niños dan estimaciones o intentan "adivinar el resultado": "Siete, "Dos", "Ocho", "No, no. Seis".

En la Figura 3, vemos el proceso de resolución de Nerea y de Diego. Los dos alumnos, y todos los que resolvieron este problema lo hicieron con cubos encajables, utilizando una estrategia de modelización directa: el "reparto" por unidades. Comienza por la representación del zorro y la cebra con los cubos negro y morado de la Figura 3b (Nerea), y el verde y naranja en la Figura 3d (Diego). A partir de ahí, se representan los trozos de luna con 6 cubos encajables y se van repartiendo uno a uno colocándose alternativamente junto a los cubos que representan al zorro y la cebra. Finalmente, se cuentan los cubos (trozos de luna) que hay junto a cada animal. En la Figura 3d, observamos cómo Diego mantiene ligeramente separados los cubos iniciales, que representan a los animales, de los cubos restantes, que representan trozos de luna, a fin de no confundirlos en el recuento final.

Multiplicación en un aula de 5-6 años

En el aula de 5-6 años, se plantea el problema de multiplicación: "¿Cuántos sándwiches de miel tiene que preparar mamá oso si hay seis osos y cada uno quiere dos sándwiches?". Al igual que ocurre en el caso de la división, los niños utilizan la misma estrategia básica que en 4-5 años, pero con números mayores, mayor variedad de materiales, y con presencia de representaciones simbólicas. Un aspecto que destacamos es que, en ausencia de instrucción sobre el proceso de resolución, algunas representaciones tienen un marcado acento personal, que dificulta que las personas que las ven puedan interpretarlas de forma sencilla. Así, en la Figura 4a, Joshua representa los 12 sándwiches

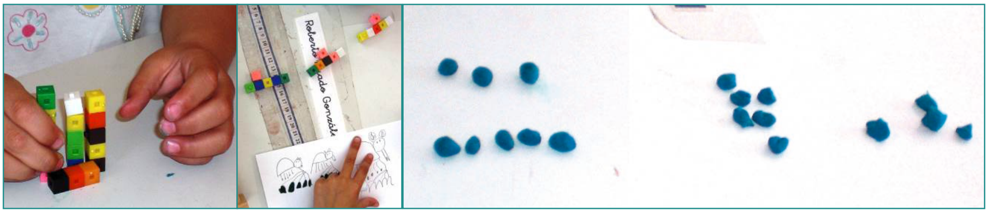


Figura 6. Evolución de las estrategias infantiles en problemas de división-reparto en 5-6 años (I).

y los 6 osos con tres filas de 6 cubos, donde la primera fila representa los osos y las restantes los sándwiches. Por el contrario, en el dibujo de Noelia (Figura 4b), se diferencian perfectamente las representaciones de ambas cantidades, y se aprecia el paso a la representación simbólica, con numerales escritos, de las cantidades.

Eloy utiliza cuentas con las que va formando un collar de 18 cuentas (Figura 5). Las 12 de la izquierda representan los sándwiches, y las 6 de la derecha representan los osos. En la Figura 5b, se observa la separación entre unas cuentas y otras. En la Figura 5a, Eloy va señalando, por cada cuenta de la derecha (un oso), dos cuentas a la izquierda (sándwiches). En la imagen se ve cómo señala la cuarta cuenta por la derecha con el índice, mientras que abarca las cuentas 7 y 8 con dos dedos. Al igual que en la estrategia de Joshua, observando el collar no resulta fácil imaginar, antes de la explicación de Joshua, cómo se ha utilizado esta representación para resolver el problema.

División en un aula de 5-6 años

En el aula de 5-6 años, planteamos el problema: "Si hay 15 montones de hierba, y 3 chivos, ¿Cuántos montones de hierba se come cada chivo?". Si en 4-5 años repartíamos 6 objetos entre 2, en este caso, el tamaño de dividendo y divisor van aumentando. De nuevo, el enunciado puede interpretarse como problema de división (reparto equitativo) o como problema de descomposición aditiva en tres sumandos. En la Figura 6a, observamos la misma estrategia que vimos en 4-5 años. Los niños tienen, durante dos cursos, varias ocasiones de adquirir el esquema básico de reparto de objetos, representando ambas cantidades que aparecen en el enunciado. No obstante, más allá de esta estrategia básica, comenzamos a ver variaciones interesantes, que dan cuenta del desarrollo infantil en estas edades. Por ejemplo, Lía (Figura 6b), tras aplicar la estrategia de modelización directa de reparto, representa el reparto con un dibujo, cosa que no suele ocurrir con 4 años. Empiezan a surgir soluciones en las que solo se representa una de las dos cantidades del enunciado, el dividendo o cantidad a repartir, formando una barra con 15 cubos y fraccionándola después en 3 barras iguales de 5 cubos. También surgen repartos no equitativos. Shakira representa los tres chivos en la esquina superior izquierda (Figura 6c), y luego da a los chivos mediano, grande y pequeño, cinco, seis y cuatro montones de hierba respectivamente.

A pesar de que la estrategia básica sigue siendo el reparto de objetos, otros materiales comienzan a usarse. Hugo no es capaz de realizar el reparto con la banda numérica (Figura 7a), pero al escuchar a Lía que da la solución de 5, lo comprueba contando 5

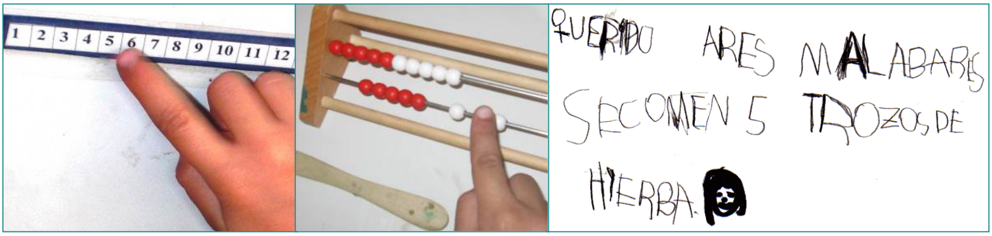


Figura 7. Evolución de las estrategias infantiles en problemas de división-reparto en 5-6 años (II).

Figura 8. Agrupamiento según el número de grupos.

casillas, tres veces, hasta llegar a 15. En la Figura 7b, Roberto, tras resolver el problema con los cubos encajables, representa la solución (los tres grupos de 5) en el rekenrek. Más que un proceso de resolución, se trata de una traducción entre sistemas diferentes de representación para escribir el resultado. En la Figura 7c, aparece una carta de un alumno al final del taller a Ares (maestro en prácticas y malabarista, llamado por los pequeños "Ares malabares"). Esta carta muestra cómo el conocimiento de la lectoescritura propio del último curso de educación infantil se une a la capacidad de articular el propio pensamiento, para producir este mensaje escrito.

Multiplicación en primer curso de primaria (6-7 años)

Ya dentro de la educación primaria, basándonos en el cuento "El gato tragón" (Núñez y Dumas, 2005), el problema planteado es: El gato tragón se comió 7 niñas. Si cada niña tiene 2 brazos, ¿Cuántos brazos se comió el gato? La estrategia básica en este problema es de modelización directa (estrategia de *agrupamiento*). En el enunciado se habla de 7 grupos (cada niña cuenta como un "grupo" de dos brazos) con 2 elementos en cada grupo (los brazos). Los niños forman 7 grupos con 2 objetos en cada una y luego cuentan de uno en uno los objetos. Esta estrategia ya la hemos visto desde educación infantil (Figura 4), pero en la Figura 8 podemos observar variaciones de interés que muestran la evolución. Por ejemplo, separar claramente las representaciones de las dos cantidades (de niñas y de brazos) para facilitar el conteo del resultado (Figura 8a) o la escritura de números de dos cifras con la aparición del valor posicional. En la Figura 8b, vemos que el alumno escribe primero 41, que aparece tachado dos veces, para al final escribir el resultado correcto de 14.

Figura 9. Agrupamiento según el número de grupos con dedos.

Figura 10. Agrupamiento según el número de grupos con Tabla 100.

Hay niños que utilizan los dedos para ir construyendo los grupos, añadiendo el número de elementos por grupo cada vez que se considera un grupo. En la Figura 9, un niño va añadiendo 2 dedos cada vez que cuenta una niña hasta completar las siete niñas. Podemos ver, de izquierda a derecha, cómo el alumno pone el dos de los brazos de la primera niña, después va añadiendo dos por cada niña, con lo que tendrá cuatro dedos, acción que no se ve en la secuencia de la Figura 9, y así sucesivamente, seis (otros dos brazos de otra niña), ocho, diez y, ya en la imagen, el doce (para lo cual tiene que quitar los cinco dedos de la mano izquierda), y el catorce, resultado final.

También vemos esta estrategia en la tabla 100. Por cada niña, se van tapando con dos dedos dos numerales que representan los dos brazos de la niña. Tras repetir esta operación siete veces, el último numeral tapado (14) indica la solución del problema. En la Figura 10 observamos los tres primeros pasos de esta estrategia. El uso de la tabla 100 es un instrumento que facilita la transición de estrategias de modelización directa a estrategias de conteo basadas en la secuencia de numerales.

Las representaciones gráficas infantiles van evolucionando, incluyendo una mezcla de representaciones icónicas y simbólicas (con numerales) para el proceso de resolución. En la Figura 11a, Sergio representa las niñas con numerales y los brazos con puntos y resuelve el problema contando los puntos. En la derecha, mostramos el trabajo de otro niño donde la representación de las niñas posee un grado mayor de iconicidad. Los brazos aparecen numerados, de modo que el último numeral (14) indica el resultado (Figura 11b).

Otra variedad de esta estrategia consiste en representar con un objeto cada grupo y contar cada objeto el número de veces que indica el número de elementos por grupo. En este problema, algunos niños representaron con 7 objetos el número de grupos (las

Figura 11. Estrategia de agrupamiento, gráfica, con símbolos escritos.

Figura 12. Reparto de objetos de uno en uno contando inicialmente la cantidad total.

niñas) y contaron cada uno de ellos dos veces (una por cada brazo) para alcanzar el resultado final.

Algunos alumnos han resuelto este problema mediante modelización directa haciendo 2 grupos de 7. En este problema hay 7 grupos (las niñas) con 2 elementos en cada grupo (los brazos), pero varios niños han representado un grupo de 7 por uno de los brazos de las 7 niñas y otro grupo de 7 por el otro brazo. Esta estrategia la hemos visto aplicada con el rekenrek, poniendo 7 cuentas en cada varilla, y en la tabla 100, saltando de la casilla del 7 a la del 14.

Un problema de división en primer curso de educación primaria

En primer curso de primaria se plantea un problema de estructura multiplicativa, de grupos iguales, de división partitiva. Basado en el cuento "Un regalo diferente", el enunciado es: Marcel y Tristán se comieron 18 buñuelos de crema. ¿Cuántos se comió cada uno? Todos los niños intentaron repartir de forma equitativa los buñuelos, aún sin que el enunciado lo indicase. La estrategia básica es la de *reparto*, de modelización directa (Figura 12).

Esta estrategia se aplica con diferentes variaciones. Algunos niños cuentan primero los objetos a repartir, pero otros reparten sin contar inicialmente esta cantidad, y van comprobando, a cada paso del reparto, el total de lo repartido hasta alcanzar el total a repartir. Otra variación es el reparto en grupos, por ejemplo, de dos en dos o de tres en tres y, posteriormente, ajustando el reparto con los objetos sobrantes. Al ser un problema en el que se divide en dos grupos, muchos niños elaboraban una barra con 18 cubos,

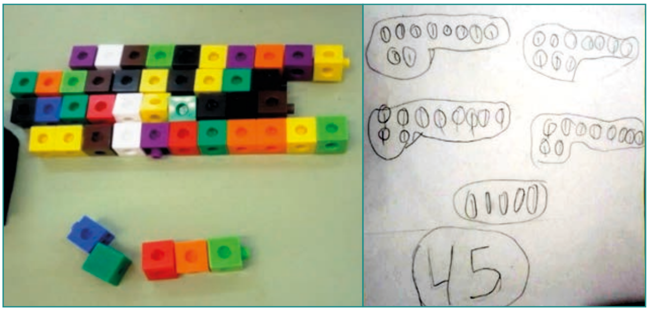


Figura 13. Representación de la estrategia de agrupamiento y juntar todos.

Figura 14. Agrupamiento y juntar todos con bloques de base 10.

estimaban el punto medio para partirla en dos partes aproximadamente iguales, y luego comprobaban que en las dos partes resultantes hubiese el mismo número de cubos, comparando la longitud de las barras.

Un problema de multiplicación con grupos de diez en educación primaria

En primer curso de primaria planteamos problemas aritméticos de operaciones combinadas (multiplicación y suma) en los que nos dan el número de decenas y de unidades sueltas y debemos calcular el número total de unidades. Un problema de este tipo es: Si tenemos 4 decenas de huevos y 5 huevos más, ¿cuántos huevos tenemos en total? La estrategia básica para abordar este tipo de problemas consiste en formar con objetos tantos grupos de diez y unidades sueltas como se indica en el enunciado y después contar uno por uno los objetos. En la Figura 13, vemos la representación manipulativa y gráfica correspondiente a dicha estrategia. En un nivel más avanzado, los niños cuentan de diez en diez los grupos de diez, y luego de uno en uno las unidades sueltas: “10, 20, 30, 40, 41, 42, 43, 44, 45”.

Una variante de esta estrategia consiste en representar las cantidades con bloques de base 10. En la Figura 14a un niño ha representado 45 con 4 barras y 5 unidades. Igual que en el caso anterior, inicialmente los niños necesitan contar de uno en uno todas las unidades que componen las decenas como está haciendo el niño de la Figura 14b para saber la cantidad total. Más tarde, los niños cuentan de 10 en 10 las barras y de uno en uno las unidades. Con la ayuda de la tabla 100, los niños cuentan de 10 en 10 (Figura 14c) el

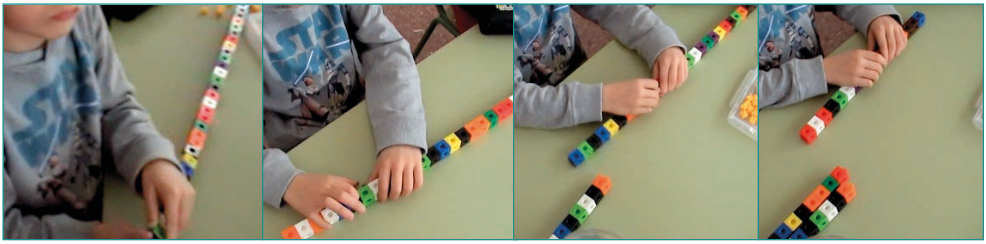


Figura 15. Medida contando primero el total de elementos con objetos.

Figura 16. Estrategia de *medida* con cajas de huevos de 10.

número de grupos que se indica en el problema, para después avanzar por unidades. Finalmente, las estrategias van evolucionando hasta mostrar un conocimiento del valor posicional y del concepto de decena. Cuatro grupos de 10, y 5 unidades sueltas son 45. Esta es la estrategia óptima esperada en este tipo de problemas que, como vemos, no se aplica desde el principio, sino que es el resultado de una larga evolución.

Un problema de división con grupos de diez en Educación Primaria

Para terminar, planteamos problemas de división agrupamiento, con grupos de diez, y con resto. Uno de estos problemas es: Si tenemos 37 huevos, ¿cuántas cajas de 10 huevos podemos llenar y cuántos huevos sobran? La estrategia básica se llama estrategia de medida. Es una estrategia de modelización directa que consiste en tomar 37 objetos, formar grupos de diez, contarlos, y contar después los objetos que quedan sin agrupar. En la Figura 15 seguimos todo el proceso.

Dentro del material de aula que ofrecemos a los alumnos suelen estar las cajas de huevos de diez. Los niños utilizan espontáneamente las cajas para resolver el problema introduciendo un cubo en cada huevo. Esto facilita la formación, el conteo de los grupos, y la visualización del concepto de decena (Figura 16). La misma estrategia se puede llevar a cabo con bloques de base 10, de modo que la solución del problema estará dada por el número de barras (grupos de 10, decenas) y cubos (unidades). Dado que el uso de materiales no está dirigido por los profesores, también se ven soluciones “mixtas”, con uso simultáneo de cajas de huevos y bloques de base 10 (Figura 16c).

Otras estrategias para este tipo de problemas se apoyan en la tabla 100, donde se busca el número objetivo (37) y las filas completas representan decenas y las casillas

individuales cuentan como unidades sobrantes. Finalmente, como estrategias más avanzadas, hay niños que utilizan el conteo a saltos de diez en diez y el conteo por unidades, sin ayuda de objetos. Para llegar a 37 huevos, cuentan 10, 20, 30, que son 3 cajas, y después 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, que son 7 huevos sueltos, llevando la cuenta de decenas y unidades sueltas con los dedos. La estrategia óptima, igual que en el apartado anterior, consiste en la aplicación directa del conocimiento del valor posicional, para determinar que 37 unidades son 3 decenas y 7 unidades sin agrupar.

REFLEXIONES FINALES

En los talleres realizados se ha observado que, desde los 4 a los 7 años, la mayoría de los niños resuelven problemas de multiplicación y división utilizando estrategias informales de modelización directa, inventadas por ellos mismos, sin tener ningún conocimiento formal sobre dichas operaciones aritméticas. A través de la resolución de problemas hemos conseguido que los niños razonen y modelicen, y articulen sus ideas para comunicarlas al resto de la clase, pudiendo establecer así relaciones entre los conocimientos que tienen con los de los compañeros.

Los niños siguen, a lo largo de la trayectoria que hemos descrito para el aprendizaje de la multiplicación y la división, un *camino de aprendizaje* jalonado por estrategias de modelización directa, estrategias de conteo y uso del valor posicional (en los problemas con grupos de diez). A través de problemas, en los que se utilizan recursos (como el rekenrek, la tabla 100, las cajas de huevos de 10, o los bloques de base 10), se cuida el tamaño de los números, y se introducen elementos especiales (como los grupos de 10 en los problemas de estructura multiplicativa), se va conformando el *camino de enseñanza* que promueve la evolución de los niños a través del correspondiente camino de aprendizaje. El objetivo final es proporcionar la base informal de conocimiento adecuada para el aprendizaje de la multiplicación y la división, y la comprensión del concepto de decena (Ramírez y De Castro, 2014).

Volviendo a la introducción del artículo, en nuestra línea metodológica, pensamos que es preferible adelantar en el currículo experiencias que ayuden a desarrollar los conocimientos informales, más que anticipar conocimientos formales. Así, más que adelantar la memorización de las tablas de multiplicar a primero de educación primaria, abogamos por introducir situaciones en las de los niños puedan construir significados para la multiplicación y la división, desde los 4 años, para favorecer su posterior comprensión, como las que hemos mostrado en este artículo.

Dentro de los principios del NCTM (2003), el principio de enseñanza señala que "Una enseñanza eficaz requiere conocer lo que los alumnos saben y lo que necesitan aprender, y luego estimularlos y ayudarlos para que lo aprendan bien" (NCTM, 2003, p. 17). Este "conocer lo que los alumnos saben" como punto de partida, evocador de la idea de aprendizaje significativo, puede interpretarse de formas diversas. Cuando un maestro está en tercer curso de educación primaria, iniciando a los alumnos en la multiplicación, puede plantearse cuáles son los conocimientos previos sobre los cuales construir el aprendizaje formal de la división. Sin embargo, a nuestro parecer, el ideal sería que desde los 4 años, e incluso antes, todavía en la educación infantil, los maestros puedan ayudar a los niños a recorrer las trayectorias de aprendizaje de la multiplicación y la división que

hemos descrito en este trabajo. En este sentido, pensamos que la idea de *trayectoria de aprendizaje*, que hemos tratado de ejemplificar en este artículo, supone una de las aportaciones fundamentales de la didáctica de la matemática en los últimos 20 años, pues permite enfocar el trabajo del aula hacia las ideas matemáticas nucleares, abordándolas de un modo informal, tiempo antes de tener que afrontar su aprendizaje formal, favoreciendo así su aprendizaje significativo.

REFERENCIAS

Arriba, M. y Osuna, R. (2005). *Un regalo diferente*. Pontevedra: Kalandraka.

Carpenter, T. P., Fennema, E., Franke, M. L., Levi, L. y Empson, S. B. (1999). *Children's mathematics: Cognitively guided instruction*. Portsmouth: Heinemann.

Carpenter, T. P., Franke, M. L., Jacobs, V., Fennema, E. y Empson, S. B. (1997). A Longitudinal Study of Intervention and Understanding in Children's Multidigit Addition and Subtraction. *Journal for Research in Mathematics Education, 29*, 3-30.

Castro, E., Cañadas, M. C. Y Castro-Rodríguez, E. (2013). Pensamiento numérico en edades tempranas. *Edma 0-6: Educación Matemática en el Infancia, 2*(2), 1-11.

CCSSI (2010). *Common Core State Standards for Mathematics*. Washington, DC: Common Core State Standards Initiative. Recuperado el 15/11/2014 de: http://www.corestandards.org/assets/CCSSI_Math%20Standards.pdf

Clements, D. H. (2004). Major themes and recommendations. In D. H. Clements, J. Sarama, & A. M. DiBiase (eds.), *Engaging young children in mathematics: Standards for early childhood mathematics education* (pp. 7-72). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Clements, D. H. y Sarama, J. (2004). Learning trajectories in mathematics education. *Mathematical Thinking and Learning, 6*(2), 81-89.

Consejería de Educación, Juventud y Deporte de la Comunidad de Madrid (2014). Borrador del Currículo de Educación Primaria. Recuperado de: http://www.feccoo-madrid.org/comunes/recursos/15708/1823565Borrador_de_Curriculum_de_Educacion_Primaria.pdf

Daro, P., Mosher, F., & Corcoran, T. (2011). *Learning trajectories in mathematics: A foundation for standards, curriculum, assessment, and instruction*. CPRE Research Report #RR-68. Philadelphia: Consortium for Policy Research in Education. DOI: 10.12698/cpre.2011.rr68

De Castro C. y Hernández, E. (2014). Problemas verbales de descomposición multiplicativa de cantidades en educación infantil. *PNA, 8*(3), 99-114.

De Castro, C., Molina, E., Gutiérrez, M. L., Martínez, S., Escorial, B. (2012). Resolución de problemas para el desarrollo de la competencia matemática en Educación Infantil. *Números. Revista de Didáctica de las Matemáticas, 80*, 53-70.

De Castro, C., Walsh, J., Del Coso, E., Salvador, C., González, V. y Escorial, B. (2009). "Dos de todo": El cuento chino de los problemas de comparación multiplicativa en la Educación Infantil. *Epsilon: Revista de la Sociedad Andaluza de Educación Matemática "Thales" 73*(3), 33-42.

Fuson, K. C. (1992). Research on whole number addition and subtraction. En D. C. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 243-275). Nueva York, NY: Macmillan.

Gómez, P. y Lupiáñez, J. L. (2007). Trayectorias hipotéticas de aprendizaje en la formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria. *PNA, 1*(2), 79-98.

Gómez, P., González, M.J. y Romero, I. (2014). Caminos de aprendizaje en la formación de profesores de matemáticas: objetivos, tareas y evaluación. Profesorado. Revista de Currículum y Formación de Profesorado, 18(3), 319-338. Disponible en: http://www.ugr.es/local/recfpro/rev183COL7.pdf

González, O. y Fernández, F. (2007). *Chivos chivones*. Pontevedra: Kalandraka.

Grejniec, M. (2004). *¿A qué sabe la luna?* Pontevedra: Kalandraka.

López, M.E. y De Castro, C. (2014). Iniciación a los problemas de reparto igualatorio en educación infantil. *Épsilon, 31*(2), nº 87, 83-98.

Ministerio de Educación y Ciencia (2007, 20 de julio). ORDEN ECI/2211/2007, de 12 de julio, por la que se establece el currículo y se regula la ordenación de la Educación primaria. *BOE, 173*, pp. 31487-31566.

Ministerio de Educación, Cultura y Deporte (2014, 1 de marzo). Real Decreto 126/2014, de 28 de febrero, por la que se establece el currículo de Educación primaria. *BOE, 52*, pp. 19349-19420.

Ministerio de Educación, Cultura y Deporte (2014, 1 de mayo). Orden ECD/686/2014, de 23 de abril, por la que se establece el currículo de la Educación Primaria para el ámbito de gestión del Ministerio de Educación, Cultura y deporte y se regula su implantación, así como la evaluación y determinados aspectos organizativos de la etapa. *BOE, 106*, pp. 33827-34369.

NAEYC y NCTM (2013). Matemáticas en la Educación Infantil: Facilitando un buen inicio. Declaración conjunta de posición. *Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia, 2*(1), 1-23.

NCTM (2003). *Principios y Estándares para la Educación Matemática*. Sevilla: Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales.

Núñez, M. y Dumas, O. (2005). *El gato tragón*. Pontevedra: Kalandraka.

OCDE (2005). *Informe PISA 2003: Aprender para el mundo del mañana*. Madrid: Santillana.

Ramírez, M. y De Castro, C. (2014). Descubrimiento del valor posicional a través de la resolución de problemas. *Revista de Didácticas Específicas, 11,* 40-66.

Ramos, M. (2004). *¡Mamá!* Barcelona: Corimbo.

Épsilon - *Revista de Educación Matemática* *2014, Vol. 31(3), nº 88, 55-66*

Utilizando gráficas y tablas para comparar distintos procesos de elección

Alberto Arnal-Bailera
Universidad de Zaragoza

RESUMEN: *Analizamos un problema aparentemente sencillo: un grupo de vecinos deciden entre una de tres opciones posibles para pintar la escalera. Se propone un proceso en el que introduce dos preguntas para efectuar la decisión. Realizamos un análisis matemático de la equidad de este proceso y las diferencias con el proceso de una sola pregunta.*
PALABRAS CLAVE: *Toma de decisiones, matemáticas electorales, representaciones gráficas.*

Using graphics and tables to compare different processes of choice

ABSTRACT : *We analyze a seemingly simple problem: the process for a group of neighbors for deciding between one of three options to paint the stairs. However, the president of the community proposes a process that introduces two questions rather than one to make the decision. We perform a mathematical analysis of the equity of this process and the differences with one question process.*
KEYWORDS: *decision making, electoral mathematics, graphic representations.*

INTRODUCCIÓN

Se admite comunmente que la educación matemática tiene tres finalidades principales: Formativa (contribuyendo al desarrollo de capacidades generales y de razonamiento lógico de los estudiantes), funcional (por ejemplo contribuyendo a responder a situaciones de la vida diaria como consumidor o futuro elector) e instrumental (contribuyendo al desarrollo y a la formalización de las ciencias experimentales, tecnológicas y sociales).

La Orden de 9 de mayo de 2007, del Departamento de Educación, Cultura y Deporte del Gobierno de Aragón, por la que se prueba el currículo de la Educación secundaria obligatoria, resume la persecución de estas finalidades en la intención de desarrollar la competencia matemática, esto es promover el uso la argumentación y el lenguaje preciso y riguroso propio de las matemáticas así como las herramientas propias de esta ciencia, como las representaciones gráficas, para resolver problemas cotidianos que tengan de que ver con su vida personal o social y también con otros ámbitos del conocimiento.

Entre los procesos de toma de decisión más estudiados están los referidos a procesos electorales (Álvarez y Alonso, 2010; Álvaro, 2001; Girón y Bernardo, 2007; Hernández, 2001). Apenas hemos encontrado sobre las distintas posibilidades que se plantean en elecciones directas entre varias opciones, a pesar de que también se presentan en el contexto electoral español en la elección de senadores. Fernández y Fernández (1999) analizan un texto histórico que describe un proceso de elección entre varios candidatos a un mismo puesto. La razón podría estar en la simplicidad con la que habitualmente se desarrolla un proceso de elección entre varias opciones. Por ejemplo en Suiza durante los últimos 170 años se han realizado numerosas consultas a la población sobre reformas de leyes y la disyuntiva que se plantea es "sí" o "no". Si la estructura de la consulta es una pregunta con varias respuestas, se puede actuar de varios modos, entre ellos: la opción más votada es la elegida (elección de senadores en España, listas abiertas…) o bien asignar un determinado valor a la opción preferida y valores inferiores a la segunda y sucesivas, al modo de los concursos televisivos de Eurovisión por ejemplo o el descrito en Fernández y Fernández (1999).

Nos ocupamos aquí del análisis comparativo de los procesos para tomar una decisión en una comunidad de vecinos en la que quieren pintar la escalera debiendo los vecinos elegir entre tres colores posibles. Hay dos propuestas sobre cómo desarrollar el proceso de toma de la decisión, una votación con tres opciones, eligiéndose la más votada, y una votación más compleja con dos preguntas, en la primera de las cuales se vota sí o no a un determinado color y en la segunda solo votan los que no querían el primero, eligiendo entre los otros dos. A primera vista ya vemos que la falta de simetría del proceso afectará de algún modo a su ecuanimidad. Propondremos distintas representaciones gráficas y tablas que contribuirán a poner de relieve las diferencias entre las dos propuestas y cómo en muchas ocasiones la decisión está muy influenciada por el propio proceso.

PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Consideramos un problema típico en una comunidad de vecinos: Hace ya varios años que se pintó la escalera por última vez y parece razonable volver a pintarla. Los colores entre los que tienen que elegir son el amarillo, el verde y el naranja. Se proponen dos procesos para tomar la decisión sobre el color:

- Primera: Un vecino propone que se hagan papeletas con tres opciones, pintar de amarillo, de verde y de naranja. Cada vecino marca qué color prefiere se meten en una caja y se cuentan las papeletas favorables a cada opción.
- Segunda: El presidente de la comunidad de propietarios alega que el naranja es muy distinto de los otros dos colores al ser un color cálido y los otros dos fríos. Por ello propone un proceso distinto mediante dos preguntas:

- 1ª pregunta: ¿Quiere Vd. que se pinte la escalera de naranja?
- 2ª Responda solo en caso de que haya respondido de modo negativo a la primera pregunta, ¿Prefiere que se pinte de amarillo o de verde?

Vamos ahora a realizar un análisis exhaustivo de las posibles distribuciones de las opiniones de los vecinos y cómo se traducen en una decisión u otra en función del proceso empleado.

Consideramos primero una pequeña comunidad de vecinos de 19 vecinos (caso discreto) y veremos después si las conclusiones extraídas son extrapolables cuando el proceso se planteara a un número grande de personas, para este caso trabajaremos con los porcentajes de vecinos (caso continuo).

UN NÚMERO PEQUEÑO DE VECINOS, EL CASO DISCRETO

En la comunidad de vecinos de nuestro ejemplo hay 19 vecinos. Nadie es indiferente y todo el mundo toma partido por una u otra opción. Estas distintas formas de pensamiento las podemos representar en una tabla de doble entrada (ver Tabla 1), poniendo en las columnas las distintas cantidades de vecinos que quieren pintar de verde, y en las filas las de los que quieren pintar de amarillo. El resto hasta 19 son los que quieren pintar de naranja. Así en la celda (i,j) podemos identificar el número de vecinos a favor de pintar de naranja cuando hay i vecinos a favor de pintar de verde y j a favor de pintar de amarillo.

Vamos a llamar distribución de votos a la terna formada por los votos recibidos por cada color, expresados estos en número o en porcentaje.

En la intersección de la columna 7 (vecinos favorables al verde) con la fila 5 (vecinos favorables al amarillo), hay un 8 que señala que el resto de los vecinos hasta 19 quieren pintar de naranja. Las celdas sombreadas en gris son distribuciones imposibles ya que sumarían más de los 19 votos totales.

Estas distintas distribuciones de las opiniones de los vecinos son previas al comienzo del proceso de decisión, pero no se van a interpretar de un mismo modo según sea el proceso de toma de decisiones (tabla 1).

Veamos ahora cómo queda la tabla anterior, en la que vamos a sustituir en cada celda el número de personas que quieren pintar de naranja por el resultado final de la decisión tomada por la comunidad según sea el proceso que se siga para la toma de decisiones.

Primer proceso de elección, elección simultánea entre las tres opciones:

En esta primera forma de elección, la propuesta por el vecino, gana la opción más votada, por ejemplo en la casilla donde confluyen la columna 3 y la fila 7 observamos un número 9 (ver Tabla 1) o una letra N (ver Tabla 2). Esto quiere decir que cuando hay 3 vecinos a favor de pintar de verde y 7 a favor de pintar de amarillo, quedan 9 a favor de pintar de naranja y esta es la decisión adoptada por la comunidad (tabla 2).

Tabla 3. Color elegido según las distribuciones de votos. Segunda forma de elección.

Vecinos favorables al color amarillo \ Vecinos favorables al color verde	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
19	A																			
18	A	A																		
17	A	A	A																	
16	A	A	A	A																
15	A	A	A	A	A															
14	A	A	A	A	A	A														
13	A	A	A	A	A	A	A													
12	A	A	A	A	A	A	A	A												
11	A	A	A	A	A	A	A	A	A											
10	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A										
9	N	A	A	A	A	A	A	A	A		V									
8	N	N	A	A	A	A	A	A		V	V	V								
7	N	N	N	A	A	A	A		V	V	V	V	V							
6	N	N	N	N	A	A		V	V	V	V	V	V	V						
5	N	N	N	N	N		V	V	V	V	V	V	V	V	V					
4	N	N	N	N	N	N	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V				
3	N	N	N	N	N	N	N	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V			
2	N	N	N	N	N	N	N	N	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V		
1	N	N	N	N	N	N	N	N	N	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	
0	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V

En total hay 210 distribuciones posibles de los votos acerca de las tres opciones. En 9 de ellas que hay empate entre dos opciones (en blanco). Hay 67 distribuciones de los votos que hacen ganadora a cada una de las tres opciones.

Se observa la confirmación matemática de lo se intuía a partir de la pregunta, ninguna de las tres opciones recibe un trato diferente de las otras dos.

Segundo proceso de elección, doble pregunta.

En esta segunda forma de elección, la propuesta por el presidente, hay dos preguntas, por lo que hay que hacer un análisis un poco más pausado para ver cuál es la opción elegida en cada caso. Por ejemplo en la casilla donde confluyen la columna rotulada con un ‘3’ y la fila rotulada con un ‘7’ observamos un número 9 (ver Tabla 1) o una letra N (ver Tabla 2). Esto quiere decir que cuando hay 3 vecinos a favor de pintar de verde y 7 a favor de pintar de amarillo, quedan 9 a favor de pintar de naranja. Por tanto en la primera pregunta hay 9 vecinos a favor de pintar de naranja y 10 en contra, con lo que este color se desecha. En la segunda pregunta solo votan los contrarios al naranja, ganando los partidarios del color amarillo y esta es la decisión adoptada por la comunidad. Notar que el color de la pintura finalmente elegida es apoyada solo por 7 vecinos frente a 9 que apoyaban el naranja.

Cabe destacar que en casos como el anterior varía la decisión de la comunidad según cuál sea la forma de elección, hay 18 casos similares a este, en los que en ganaba la opción ‘color naranja’ en la primera forma de elección para pasar a ganar el amarillo o el verde en la segunda forma de elección. Estos casos están remarcados en las Tablas 1 y 2.

También ahora hay 210 distribuciones posibles de los votos acerca de las tres opciones, aunque ahora solo hay empate en 5 de ellas. La opción naranja solo gana cuando tiene 10 votos o más en la primera elección, lo que ocurre en 55 de las distribuciones.

Las opciones amarillo y verde tienen cada una 75 distribuciones favorables y presentan una simetría entre ambas. Cada uno de los dos conjuntos de 75 distribuciones se puede descomponer en dos subconjuntos, 55 de ellas corresponden a situaciones en las que la mayoría de los vecinos están a favor del color amarillo o verde respectivamente, como en el caso de la opción naranja. El resto de las distribuciones corresponden a situaciones en las que, sin tener mayoría absoluta ninguno de los colores, unidos los partidarios de amarillo y verde superan a los partidarios del naranja en la primera pregunta para luego decidir en la segunda pregunta solamente entre estas dos opciones.

Se observa la confirmación matemática de lo se intuía a partir de las dos preguntas, la opción naranja recibe un trato diferente de las otras dos, un trato mucho peor ya que solamente puede ganar en caso de obtener la mayoría absoluta de los votos en la primera pregunta.

Observamos (ver Tabla 4) como la primera forma de elección guarda una simetría perfecta entre las tres opciones a elegir, mientras que la segunda "quita" algunas distribuciones favorables a la opción naranja para aumentar las de verde y amarillo.

Tabla 4. Comparación entre las dos formas de elección-discreto

Formas de elección → ↓ Distribuciones	Primera	Segunda
Favorables a verde	67	75
Favorables a amarillo	67	75
Favorables a naranja	67	55
Empates	9	5
Totales	210	210

UN NÚMERO GRANDE DE VECINOS, EL CASO CONTINUO

¿Cómo quedaría este análisis si el número fuera mucho mayor? Consideraremos ahora como variables los porcentajes de votos para cada color.

Vamos a hacer representaciones gráficas en dos ejes cartesianos de la relación entre el porcentaje de población favorable a pintar de amarillo en el eje x y porcentaje de población favorable a pintar de verde en el eje y. Dado el supuesto de no abstención, el resto hasta el 100% de participación en el proceso estará a favor de pintar de naranja. Para simplificar la notación, llamamos V, A o N a las variables que representan el porcentaje de población favorable a pintar de verde, amarillo o naranja, respectivamente.

Notar que podemos utilizar un gráfico en dos dimensiones para representar lo que en realidad son tres variables ya que están unidas por la ecuación V+A+N=100, lo que hace

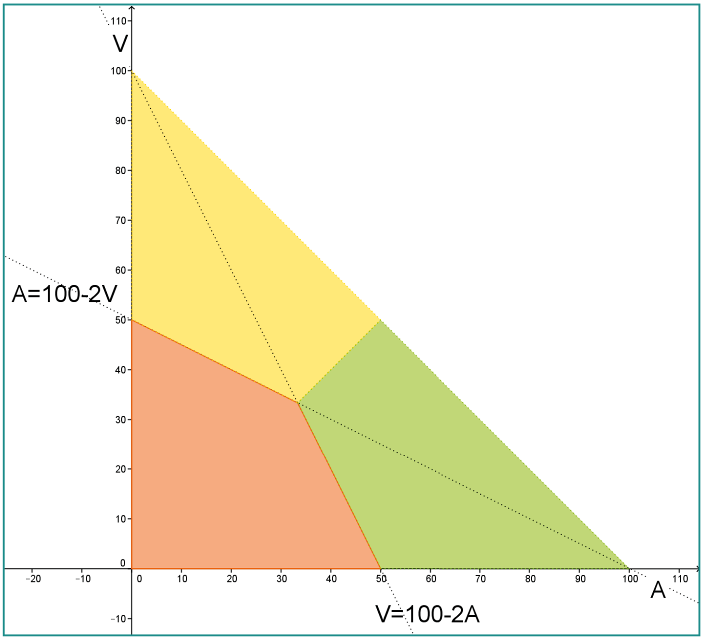


Figura 1. Opción elegida – primera forma de elección.

que si conocemos V y A podamos conocer N y por tanto saber cuál es el color elegido por la comunidad en cada sistema de elección.

La primera representación corresponde a la opción que proponía el vecino, en la que se elegía simultáneamente entre los tres colores. Marcamos con los tres colores las regiones donde gana cada opción. Vamos a representar estas regiones teniendo en cuenta primero que V≥0, A≥0 y que A+V≤100. Además:

- Para ganar la opción V, se tiene que cumplir que V>A y además que V>N. Como N=100-A-V, nos queda que V>100-A-V, simplificando: A>100-2V.
- Para ganar la opción A, se tiene que cumplir que A>V y además que A>N. Como N=100-A-V, nos queda que A>100-A-V, simplificando: V>100-2A.
- Para ganar la opción N, se tiene que cumplir N>A y N>V, aplicando que N=100-A-V, simplificando tenemos: A<100-2V y V<100-2A.

Así, podríamos dibujar un gráfico análogo a la Tabla 2 (figura 1).

Observamos, ver figura 1, que la simetría en la formulación de la pregunta, en la que las tres posibles respuestas tienen papeles simétricos, hace que las áreas de las tres regiones en que queda dividido el triángulo tengan la misma área (5000/3 u^2)

La segunda representación corresponde a la opción que proponía el presidente, en la que se respondía sucesivamente a dos preguntas. Marcamos con los tres colores las regiones donde gana cada opción:

- Para ganar la opción V, se tiene que cumplir que V>A y N<50. Como N=100-A-V, nos queda que 100-A-V<50, simplificando: 50<A+V.

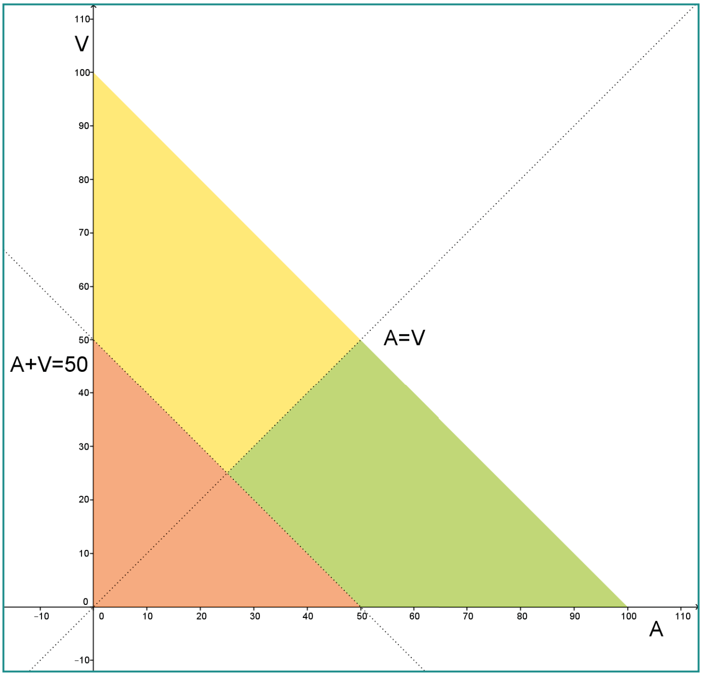


Figura 2. Opción elegida – segunda forma de elección.

- Para ganar la opción A, se tiene que cumplir que V<A y N<50. Como N=100-A-V, nos queda que 100-A-V<50, simplificando: 50<A+V.
- Para ganar la opción N, se tiene que cumplir N>50. Como N=100-A-V, nos queda que 100-A-V<50, simplificando: 50>A+V.

Así, podemos dibujar un gráfico análogo a la Tabla 3 en el que observamos, ver Figura 2, que el hecho de que para ganar la opción color naranja deba obtener mayoría en la primera pregunta se traduce gráficamente en que el área que representa su región asociada ha perdido área, quedando ahora en 1250 u^2. Las otras dos regiones tienen áreas iguales, 1875 u^2 cada una. Estas áreas han sido calculadas directamente por el programa de geometría dinámica GeoGebra.

Las zonas amarilla o verde (ver Figura 3) corresponden respectivamente a distribuciones de voto que con el primer proceso de elección daban como resultado pintar de naranja y con la segunda forma dan como resultado pintar de amarillo o verde:

Las diferencias entre un gráfico y otro permiten describir de modo cualitativo y cuantitativo las diferencias entre un tipo y otro de formas de elección de la pintura (ver Figura 3): por un lado es injusto que una de las opciones (color naranja) tenga que tener mayoría absoluta para poder ser elegida, por otro la diferencia de áreas entre las regiones verdes o amarillas de uno y otro gráfico (ver Tabla 5) darían una primera aproximación al tamaño de la injusticia de la segunda forma de elección y de la simetría de la primera. Aunque esta injusticia es mucho mayor si tenemos en cuenta que es previsible que las distintas distribuciones de % entre unas opciones y otras no sean uniformes y la mayor

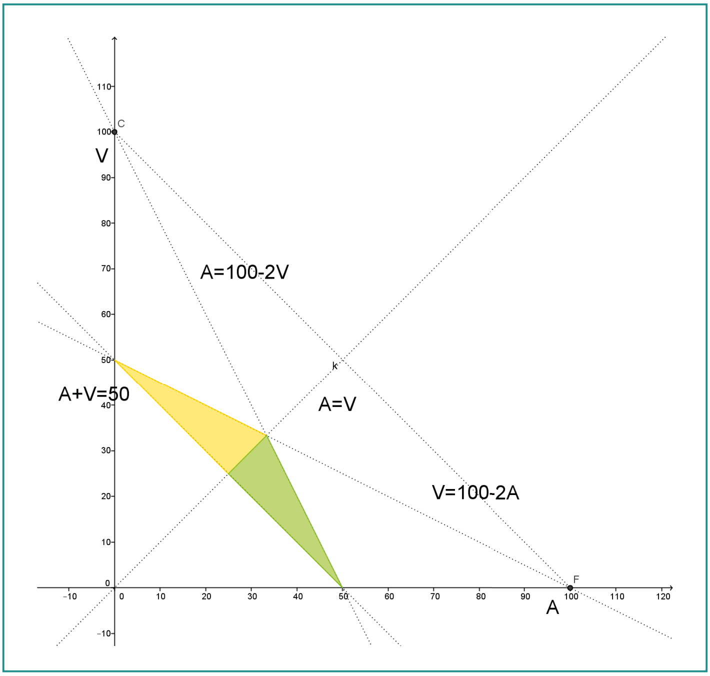


Figura 3. Diferencia entre la primera y segunda formas de elección.

parte de las ocasiones haya una cierta disputa entre unos colores y otros, lo que en términos de probabilidad se expresaría dando mayor probabilidad a la región que cambia de color que la que le correspondería exclusivamente en razón de su área.

Tabla 5. Comparación entre las dos formas de elección – continuo.

Formas de elección → ↓ Áreas	Primera	Segunda
Favorables a verde	$1666,\hat{6}$ u^2	1875 u^2
Favorables a amarillo	$1666,\hat{6}$ u^2	1875 u^2
Favorables a naranja	$1666,\hat{6}$ u^2	1250 u^2
Totales	5000 u^2	5000 u^2

Aunque resulta claro, hay que explicitar que el papel jugado por cada color podría ser intercambiado en la opción del presidente y perjudicar así las opciones de ganar de los partidarios del verde o del amarillo en lugar de las opciones de los partidarios del naranja, por ejemplo planteando:

– 1ª pregunta: ¿Quiere Vd. que se pinte la escalera de verde?
– 2ª en caso de que haya respondido de modo negativo a la primera pregunta, ¿Prefiere que se pinte de amarillo o de naranja?

CONCLUSIONES Y APLICACIÓN EN EL AULA

Hacemos notar en este artículo la posibilidad de complicar un proceso a priori sencillo y la necesidad en ese caso de hacer una reflexión pausada de los efectos matemáticos de esa complicación y cómo afecta a la oportunidad de ser elegida cada opción posible.

Aunque en general no podemos ordenar los procesos de elección entre varias opciones hasta el punto de llegar a decir si uno es mejor o peor que otro, en este caso sí resulta claro que la propuesta del Presidente de la Comunidad de vecinos es directamente injusta puesto que no es simétrica, dando mayor número de posibilidades de ganar a unos colores que a otros.

Hemos mostrado además, cómo esta falta de simetría afecta a la justicia del proceso también en el caso de un número elevado de electores, aprovechando así para mostrar un ejemplo de la relación entre un problema discreto y su equivalente continuo y las claras similitudes entre las representaciones gráficas y las tablas que aparecen en un caso y otro.

Las matemáticas, atendiendo a su finalidad funcional, deben apoyar el proceso de toma de decisiones de los futuros electores –tanto en sus elecciones políticas como en las de contextos más cotidianos como este–, dotándoles de herramientas matemáticas y capacidades argumentativas contribuyendo así a la formación de un espíritu crítico que les permita comprender situaciones en las que se plantean elecciones. Para ello, debemos mostrar a los alumnos situaciones de la vida cotidiana relacionadas con los procesos de elección, sean o no de tipo político, promoviendo un análisis matemático detallado de la justicia o injusticia de los mismos.

Nuestra propuesta didáctica en torno a las matemáticas electorales, a desarrollar en futuros artículos, incluiría:

1) Estudio de los efectos de la vigente Ley d´Hont sobre la diferente representación de los electores según si su opción es o no mayoritaria. Estudio de otras leyes de reparto de representantes y comparación entre ambas. Ambos estudios podrían contextualizarse fácilmente considerando las últimas elecciones del municipio del Centro que se trate.
2) Estudio de cómo otros procesos de elección más simples son también susceptibles de ser enfocados de diversos modos y que el utilizar uno u otro no es inocente en absoluto.

REFERENCIAS

Álvarez, M. y Alonso, J.M. (2010). Las elecciones generales de 2008 y el juego del parlamento. *Suma,* 63, 7-15.

Alvaro, M. (2001) Los sistemas de votación y su problemática. *Epsilon: Revista de la Sociedad Andaluza de Educación Matemática “Thales”*, 50, 293-300.

Confédération suisse. Initiatives populaires. Recuperado el 1 de agosto de 2014, de http://www.bk.admin.ch/themen/pore/vi/index.html?lang=fr

Hernández, E. (2001). Matemáticas y sistemas electorales. En Hernández, J. (coord.) *La enseñanza de las matemáticas a debate: referentes europeos* (pags. 69-85). Madrid: Subdirección General de Información y Publicaciones.

Fernández, E. y Fernández, F. (1999) La teoría de votación y la "memoria matemática sobre el cálculo de la opinión en las elecciones" del Dr. D. Joseph Isidoro Morales. *Epsilon: Revista de la Sociedad Andaluza de Educación Matemática "Thales",* 45, 295-310.

Girón, F. J. y Bernardo, J. M. (2007). Las matemáticas de los sistemas electorales. *Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales*, 1, 21-34.

Estudiando probabilidad con el juego Chinesenspiel

Carmen León-Mantero
José Carlos Casas
Universidad de Córdoba

Resumen: *Cuando los conceptos se presentan de foma lúdica no solo se logra captar la atención de los alumnos sino que también su comprensión es mayor y más rápica. Presentamos una actividad para introducir conceptos de probabilidad a los alumnos de educación primaria a través de un juego matemático conocido como Chinesenspiel.*
Palabras Clave: *Probabilidad, juego matemático, educación primaria, matemáticas*

Studying probability with the Chinesenspiel game

Abstract: *When we present the concepts to students in a playful way , we get more attention and understanding is higher and faster. We present an activity to introduce concepts of probability to the primary school students through a mathematic game known as Chinesenspiel.*
Keywords: *Probability, mathematics games, primary school students, mathematics*

INTRODUCCIÓN

En diferentes ocasiones, la emersión de nuevos modos de pensar en matemáticas ha sido fruto del trabajo realizado fuera del contexto científico, y es que a menudo ocurre que cuando somos capaces de plantear y responder cuestiones en un ambiente relajado o lúdico surgen nuevas vías de pensamiento matemático. Por tanto, el uso de juegos matemáticos al iniciar el estudio de un tema puede aportar a alumnos de cualquier nivel, entre otros beneficios, motivación, interés, una aproximación inicial adecuada y la adquisición de algunas de las habilidades matemáticas que las matemáticas requieren (De Guzmán, 1989).

Un ejemplo de juego matemático es el denominado Chinesenspiel. Se trata de una adaptación del juego del parchís, clasificado como juego de persecución, que por su simpleza resulta muy útil para introducir el concepto de probabilidad en los niveles de educación primaria.

El Real Decreto 1513/2006 de Educación Primaria, así como el currículo de Educación Primaria de Andalucía recogen en el bloque 4 y el núcleo temático 6 respectivamente del área de matemáticas, denominado Tratamiento de la información, azar y probabilidad, los siguientes contenidos resumidos para el tercer ciclo:

Carácter aleatorio de algunas experiencias

- Presencia del azar en la vida cotidiana. Estimación del grado de probabilidad de un suceso.
- Valoración de la necesidad de reflexión, razonamiento y perseverancia para superar las dificultades implícitas en la resolución de problemas.

Desde las instituciones se recomienda promocionar el aprendizaje de la estadística y la probabilidad de una manera natural desde la educación primaria con la finalidad de ayudar a los niños a relacionar estos conocimientos con los fenómenos que les rodean (MEC, 2006). Para ello, presentamos una actividad que podemos realizar con alumnos de tercer ciclo de primaria para introducir los conceptos de aleatoriedad, probabilidad y espacio muestral.

ACTIVIDADES

El material necesario para el desarrollo del juego es un tablero como el que mostramos en la figura 1, cuatro fichas (una para cada jugador) de colores rojo, verde, azul y amarillo, y un gran dado con dos caras blancas y las cuatro caras restantes con los colores de los jugadores: rojo, verde, azul y amarillo. El número de jugadores puede variar de 2 a 4.

Es posible que los alumnos no conozcan las reglas del juego, por tanto antes de comenzar a jugar, procederemos a explicárselas:

- Para empezar, cada jugador debe colocar su ficha en la esquina del tablero con el mismo color que ésta.
- Uno de los jugadores lanza el dado hasta que aparezca uno de los colores que aparecen en el tablero, lo que permitirá al jugador que tenga la ficha del mismo color iniciar el juego.
- El juego comienza cuando el jugador seleccionado lanza el dado. Si el resultado de éste es una cara blanca, el jugador repite lanzamiento. Si el color obtenido es el mismo que el del jugador que ha lanzado, avanza una casilla (en sentido contrario a las agujas del reloj) y vuelve a lanzar el dado. Si el color obtenido es cualquiera de los otros 3,se acaba su turno y le pasa el dado al jugador de su derecha.

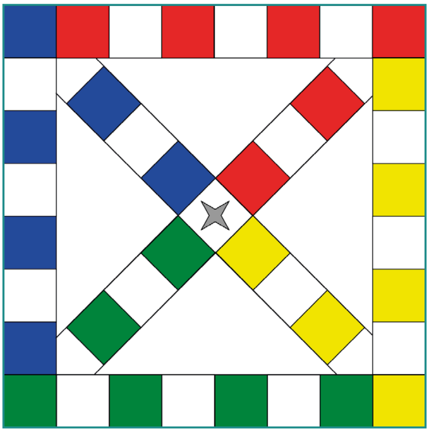


Figura 1. Tablero de Chinesenspiel.

- Cuando al mover ficha un jugador, éste se encuentra con otra en la casilla de destino, el jugador que se encontraba en esta posición tendrá que mover su ficha a la casilla de inicio.
- Cuando un jugador da la vuelta completa al tablero volviendo a la casilla inicial, enfilará en diagonal el último recorrido hasta la casilla central.
- Gana la partida el primero que logre llegar a la casilla central.

Tras preguntar a los alumnos si han entendido las reglas básicas, se les pide que hagan grupos de cuatro y se entrega a cada grupo un tablero y un dado para que comiencen a jugar de forma libre mientras el profesor comprueba que todos los alumnos han comprendido las reglas del juego y se han familiarizado con el tablero y el tipo de dado.

Como comentábamos anteriormente, vamos a proponer a nuestros alumnos actividades para trabajar los conceptos de aleatoriedad, espacio muestral y probabilidad. Para ello, les pediremos que pongan en común de forma reflexiva sus respuestas a las siguientes actividades:

Actividad 1

Proponemos a los alumnos las diferentes cuestiones sobre situaciones aleatorias:

- ¿Sabemos de antemano qué jugador va a comenzar el juego?
- ¿Influye el color elegido en el resultado del juego?

Actividad 2

Pedimos a los alumnos que indiquen el espacio muestral del experimento: una vez que conozcamos el jugador que comienza a jugar,

- ¿Qué resultados puede obtener cuando lance el dado?
- ¿En qué casillas podría quedarse cuando acabe su turno?

Actividad 3

Pedimos a los alumnos que intuyan los diferentes grados de probabilidad de las situaciones,

– ¿Qué situación es más fácil que ocurra? ¿que pierda turno, que vuelva a tirar moviendo ficha o que vuelva a tirar sin moverla?

Actividad 4

Proponemos a los estudiantes la situación “comerse la ficha de otro jugador” y les preguntamos:

- ¿Un jugador puede comerse la ficha de cualquiera de los otros jugadores?

- Si ponemos una ficha justo delante del jugador que tiene el turno, indicar algunas combinaciones con las que el jugador se come la ficha del otro. ¿Hay muchas combinaciones posibles? ¿Sabrías decir todas?
- Repetir la propuesta anterior con dos celdas de distancia.

Actividad 5

Colocamos las fichas a una distancia de una casilla del final respectivamente. Si le toca jugar al jugador con la ficha de color rojo,

- ¿Quiénes pueden ganar?
- ¿Qué tiene que salir para que gane el rojo?
- ¿Y el azul?
- ¿Y el verde?
- ¿Y el amarillo?
- ¿Quién es más fácil que gane?
- ¿Quién lo tiene más difícil?
- Si hubiese una ficha de color blanco, ¿tendría ventaja? ¿Por qué?

REFLEXIONES FINALES

Para profundizar más en el concepto de aleatoriedad podemos cambiar una regla del juego, por ejemplo, cuando un jugador pierde el turno, el dado pasa al jugador con el color resultante en el dado, en lugar de pasar al de su derecha. Para ello se podría elegir a un alumno para lanzar siempre el dado y otros ocho que fuesen los jugadores de dos tableros. En uno de los tableros se cambia de turno de forma convencional y en el otro según el color del dado. Transcurrido un tiempo, y si la partida es suficientemente larga, los jugadores con el mismo color deberían estar situados en lugares parecidos.

Tras la familiarización de los conceptos anteriores podemos introducir el concepto de probabilidad a través de la regla de Laplace e intentar que asignen probabilidades a cada uno de los sucesos del dado. Incluso podemos añadir el concepto de independencia de sucesos pidiendo a los alumnos que calculen la probabilidad de que se repita el mismo resultado en el dado después de haber obtenido, por ejemplo la cara blanca.

REFERENCIAS

De Guzmán, M. (1989). Juegos y Matemáticas. *Suma, 4*, 61-64.

MEC. (2006). *Real Decreto 1513/2006, de 7 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas de la Educación Primaria (BOE del 8 de diciembre)*.

Épsilon - *Revista de Educación Matemática* 2014, Vol. 31(3), nº 88, 71-88

La extracción de raíces en el *Tratado de Mathematicas* (1573) del bachiller Juan Pérez de Moya

Vicente Meavilla Seguí
Licenciado en Matemáticas, Doctor en Filosofía (Pedagogía)
vmeavill@hotmail.com
Antonio M. Oller Marcén
Centro Universitario de la Defensa de Zaragoza
oller@unizar.es

RESUMEN: *Si se atiende al número de ediciones de algunas de sus obras y al volumen de su producción, no cabe duda de que el bachiller Juan Pérez de Moya es el matemático español más notable del siglo XVI. En este artículo se analizan los contenidos concernientes al tópico «extracción de raíces» propuestos por el bachiller en el Tratado de Mathematicas (1573) y se comparan con los que se desarrollan en textos de la misma época. A la luz de esta comparación, se pretende situar al matemático jienense (en cuanto al estudio de las raíces de números naturales se refiere) en el lugar que le corresponde dentro de la Matemática renacentista.*

Palabras *clave: Juan Pérez de Moya; siglo XVI; extracción de raíces; Aritmética; Tratado de Mathematicas.*

The extraction of roots in the *Tratado de Mathematicas* (1573) of the bachelor Juan Pérez de Moya

ABSTRACT: *According to the number of editions of some of his works and to the volume of its production it is clear that the Bachelor Juan Pérez de Moya is the most outstanding Spanish mathematician of the sixteenth century. In this paper we analyze the contents concerning the topic «extraction of roots» (Tratado de Mathematicas, 1573) and we compare them with those developed in texts from the same period of time. In*

light of this comparison, it is expected to place the Spanish mathematician (as for the study of the roots of natural numbers is concerned) in his right place within Renaissance Mathematics.
Keywords: *Juan Pérez de Moya; Sixteenth century; extraction of roots; Arithmetic; Tratado de Mathematicas.*

1. INTRODUCCIÓN

Los datos biográficos sobre el bachiller Juan Pérez de Moya son escasos e inciertos (Meavilla, 2005). Nació antes del 1513, probablemente en 1512, en Santisteban del Puerto (Jaén), tal como se indica en la portada de algunos de sus libros. Estudió en Salamanca y Alcalá de Henares. En 1536 obtuvo una capellanía en su pueblo natal y, ya muy mayor, fue canónigo de la Catedral de Granada, ciudad en la que murió allá por el 1596.

Además de algunas obras de carácter religioso y mitológico, el bachiller escribió varios libros de contenido científico-matemático en los que procuró divulgar los conocimientos de su época utilizando un lenguaje cercano, claro, preciso y compresible. La temática de dichos textos transita desde los «libros de cuentas» hasta el álgebra simbólica («regla de la cosa»), pasando por la aritmética, geometría, filosofía natural, navegación, geografía, astronomía y cosmografía.

A continuación enumeramos sus obras de contenido científico:

1) *Libro de cuenta, que trata de las quatro Reglas generales de Arithmetica practica, por numerosos enteros y quebrados y de reducciones de monedas destos Reynos de Castilla, con un razonamiento sobre la misma facultad*. Toledo, Juan Ferrer,1554.
2) *Libro Segundo de Arithmetica, Que trata de proporcion, y regla de tres, y monedas, pesos antiguos, con otras cosas tocantes al arte menor y mayor*. Salamanca, Iuan Canoua, 1557.
3) *Compendio de la regla de la cosa, o arte mayor*. Burgos, Martin de Bitoria, 1558.
4) *Arithmetica practica, y specvlatiua*. Salamanca, Mathias Gast, 1562[1].
5) *Arte de marear*[2], 1564.
6) *Obra intitvlada fragmentos mathematicos. En que se tratan cosas de Geometria, y Astronomia, y Geographia, y Philosophia natural, y Sphera, y Astrolabio, y Nauegacion, y Reloxes*. Salamanca, Iuan de Canoua, 1568.

1. Rodríguez Vidal (1987, pp. 10-11), refiriéndose al número de ediciones de la *Arithmetica practica, y specvlatiua*, afirma:

> «Es claro que cuando un libro ha tenido durante más de doscientos años sucesivas ediciones para utilizarlo como texto, no puede ser un libro indiferente a ningún estudioso de la historia de nuestra cultura. Este es el caso singular que ocurre con la *Arithmetica practica, y specvlatiua* del Bachiller Pérez de Moya».

2. Sobre este manuscrito de la Real Biblioteca del Monasterio de San Lorenzo de El Escorial, J. A. Sánchez Pérez (1929) afirma:

> **«Son** unos apuntes, no completos, atribuidos a Pérez de Moya, escritos en 1564. Parecen la preparación de una obra que no terminó».

7) *Tratado de Mathematicas en qve se contienen cosas de Arithmetica, Geometria, Cosmographia, y Philosophia natural. Con otras varias materias, necessarias a todas artes Liberales y Mechanicas*. Alcalá, Iuan Gracian, 1573.
8) *Tratado de Geometria Practica, y Speculatiua*. Alcalá, Ivan Gracian, 1573.
9) *Tratado de cosas de Astronomia,y Cosmographia, y Philosophia Natural*. Alcalá, Ivan Gracian, 1573.
10) *Arithmetica de Moya, intitvlada manual de contadores. En que se pone en suma lo que vn contador ha menester saber, y vn orden para los que no saben escreuir, con oyrlo leer, sepan contar, y conuertir de memoria vnas monedas en otras. Co(n) vnas tablas al fin en Guarismo, y Castellano para aueriguar con facilidad las cue(n)tas de los reditos de los ce(n)sos, y juros, segu(n) vsança de España, y otros reynos*. Alcalá, Iuan Gracian, 1582.
11) *Principios de Geometria, de que se pod(r)an aprouechar los estudiosos de artes liberales, y todo hombre que su officio le necessitare a tomar la regla y co(m)pas en la mano. Con el orden de medir, y diuidir tierras.* Madrid, Francisco Sanchez, 1584.

2. EL TRATADO DE MATHEMATICAS

Al referirse al *Tratado de Mathematicas en qve se contienen cosas de Arithmetica, Geometria, Cosmographia, y Philosophia natural*, Picatoste (1891) se expresa en los siguientes términos:

> *«Esta obra suele estar encuadernada en dos o tres tomos con distinta portada,* dedicatoria y prólogos, por lo cual se consideran como obras distintas y de esta manera las vamos a examinar.»

El primer tomo se consagra a la Aritmética[3], se desarrolla en setecientas cincuenta y dos páginas y se estructura en diez libros[4]. El libro quinto (pp. 323 – 396), al que

3. Como indica el título, el tomo segundo se dedica a la Geometría y el tercero se ocupa de la Astronomía, Cosmografía y Filosofía natural.

4. Los tópicos matemáticos a los que se consagra cada uno de ellos se indican al comienzo de la obra:
«Lo que se contiene en el primero tratado de Arithmetica
I) **Arithmetica,** y Musica Speculatiua.
II) **Las** reglas, o Problemas generales del Arithmetica Practica.
III) **Quebrados,** o Fracciones Comunes, y Astronomicas.
IV) **Reglas** de tres, y compañias, y falsas posiciones, y finezas de Oro, y Plata, y reglas de testamentos, y aprecios de joyas, &c.
V) **Rayzes** de numeros.
VI) **Prueuas** de las Problemas, o reglas generales de Arithmetica.
VII) **Reglas** de Algebra, o de la Cosa, o arte mayor.
VIII) **Demandas,** o questiones, y secretos, o experiencias de numeros.
IX) **Cuentas** de memoria, para los que no saben escreuir, y reduziones de vnas monedas en otras.
X) **Monedas,** y pesos antiguos, y characteres de numeros, y cosas de Reportorios de tiempo, y Computo.»

dedicaremos nuestra atención en los parágrafos siguientes, trata de las raíces de números y se divide en doce capítulos[5].

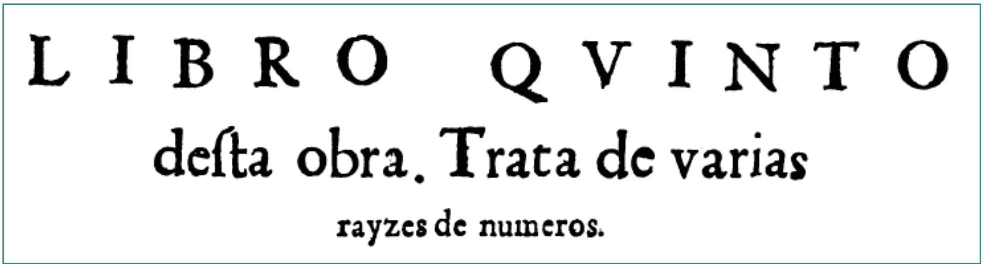

LIBRO QVINTO
deſta obra. Trata de varias
rayzes de numeros.

Fig. 1. Título del libro quinto.

3. LAS FUENTES DEL LIBRO QUINTO

Antes de entrar en el análisis de los contenidos matemáticos del libro quinto, nos parece oportuno presentar el catálogo de autores y obras citadas por Pérez de Moya al referirse a determinados asuntos de carácter aritmético y geométrico. En la tabla siguiente se recogen los autores citados por Pérez de Moya junto con la página en la que lo hace. También se incluye la obra en la que, posiblemente, se apoyó para realizar la referencia.

Autor	Obra	Páginas en que se cita
Ptolomeo	*Almagesto*	328
Euclides	*Elementos de Geometría*	334, 338, 339, 341
Oroncio Fineo	*Protomathesis* *Arithmetica practica, libri quatuor*	334, 335
Nicolas Tartaglia	*General trattato di numeri, et misure*	334, 335, 395
Michael Stifel	*Arithmetica integra*	395

5. Los asuntos tratados en cada uno de ellos se detallan en el «Summario de los capitulos, y articulos que se contienen en el quinto libro desta obra que trata de rayzes de numeros» (pp. 323 – 325):

«Capitulo primero. En que se dize que cosa son rayzes en los numeros, y de varias differencias de rayzes.
Cap. 2. Trata de la rayz quadrada, tiene nueue articulos.
Capit. 3. Trata de numero Cubo, o Cubico, y de su rayz Cubica, tiene onze articulos.
Cap. 4. Trata de rayz quadrada, de rayz quadrada, tiene ocho articulos.
Capitulo 5. Trata de rayz relata, tiene seys articulos.
Cap. 6. Trata de rayz censicubica, tiene ocho articulos.
Capitulo 7. Trata de segundo relato, y de su rayz segunda relata, tiene seys articulos.
Capitulo 8. Trata del censo, de censo, de censo, y de su rayz, tiene seys articulos.
Capit. 9. Trata de numero Cubo de Cubo, tiene seys articulos.
Cap. 10. Trata de censo relato, y de su rayz, tiene seys articulos.
Capit. 11. Trata del numero tercero relato, tiene seys articulos.
Capit. 12. Muestra sacar rayz quadrada, y cubica, y las demás, de fraciones Astronomicas.»

A continuación analizamos con algo más de detenimiento estas referencias.

1) Ptlomeo.
La única cita relativa a Ptolomeo (*Almagesto*, libro I, cap. 9) se encuentra en la página 328 y se refiere a la utilidad de las raíces en el campo de la Geometría y Cosmografía.

2) Euclides.
En la página 334 del libro quinto, al hablar de la extracción de la raíz cuadrada de números naturales, Pérez de Moya cita a Euclides y hace alusión a la cuarta proposición del libro segundo de los *Elementos*:

> «Si se divide de un modo cualquiera una recta por un punto, el cuadrado de la recta entera equivale a los cuadrados de las partes más el doble del rectángulo comprendido por las partes.»

En la página 338 encontramos dos citas más. La primera, que concierne al resto de la raíz cuadrada, no señala la proposición de los *Elementos* involucrada en el asunto. La segunda, relativa a la extracción geométrica de la raíz cuadrada, alude a la novena proposición del libro sexto de Euclides:

> «Construir una media proporcional entre dos rectas dadas.»

En la página 339 también contabilizamos dos notas relacionadas con cuestiones geométricas utilizadas para la demostración de la proposición 9 del libro VI. La primera hace referencia al corolario de la octava proposición del libro sexto de los *Elementos*:

> «En un triángulo rectángulo la perpendicular trazada desde el vértice del ángulo recto a la base es media proporcional entre los segmentos de la base.»

La segunda se refiere a la penúltima proposición del libro sexto de Euclides:

> «En los triángulos rectángulos el cuadrado sobre el lado opuesto al ángulo recto es equivalente a los cuadrados sobre los lados que forman ese ángulo recto.»

En la página 341, al hablar de la semejanza de números sólidos, el bachiller santistebeño aconseja la lectura de la proposición vigesimoquinta del libro octavo de los *Elementos*:

> «Los números sólidos semejantes tienen entre sí la misma razón que dos números cubos.»

Atendiendo a la numeración de las proposiciones mencionadas, podemos sospechar que Pérez de Moya consultó la obra: *Evclidis Megarensis mathematici clarissimi Elementorum Geometricorum. Lib. XV. Cum expositione Theonis in prioris XIII a Bartholomaeo Veneto latinitate donate, Campani in omnes, & Hypsiclis Alexandrini in duos postremos* (1537).

3) Oroncio Fineo.
En las páginas 334 y 335, al hablar de las aproximaciones de la raíz cuadrada de números sordos, el canónigo de la Catedral de Granada se refiere a Oroncio Fineo pero no indica la fuente documental. Pérez de Moya debió consultar los capítulos

consagrados a la extracción de la raíz cuadrada en la *Protomathesis* (1532)[6] o en alguna edición de la *Arithmetica practica, libri quatuor* (1542, 1544, 1555)[7].

4) Nicolo Tartaglia.
En las páginas 334 y 335 se alude a Tartaglia en relación a las aproximaciones de las raíces cuadradas. Dado que no se indican los textos consultados y teniendo en cuenta que el libro segundo de la segunda parte del *General trattato di numeri, et misure* (1556-1560) se dedica íntegramente a la extracción de raíces, sospechamos que Pérez de Moya debió examinar esta obra.
Por otro lado, en la página 395, el bachiller aconseja la lectura de Tartaglia en lo que se refiere a la extracción de la raíz tercera relata (raíz de índice once) de entero y quebrado.

5) Michael Stifel.
La única mención referente a Michael Stifel se encuentra en la página 395 y alude a la extracción de la raíz tercera relata de entero y quebrado. Como en otras ocasiones, Pérez de Moya oculta el texto consultado. En este caso, creemos que se trata de la *Arithmetica integra* (1544)[8].

4. LA EXTRACCIÓN DE RAÍCES DE NÚMEROS NATURALES

El capítulo I del libro quinto del primer tomo del *Tratado de Mathematicas*, apoyándose en las nociones de número cuadrado, cubo, censo de censo, y relato, declara los conceptos de raíz cuadrada, cúbica, cuadrada de cuadrada (cuarta) y relata (quinta). Llegando a este punto, Pérez de Moya comenta:

> «Segu(n) esto infinitas differencias ay de rayzes segu(n) el orden q(u)e vno le paresciere de multiplicar a los numeros muchas, o pocas vezes.»

También se consideran los números prónicos[9], las raíces prónicas[10] y las raíces compuestas (ligadas[11] y universales[12]).

6. La extracción de la raíz cuadrada de números naturales se estudia en la parte consagrada a la Aritmética Práctica (*Liber primus, cap. VII. De inuentione radicis quadratorum numerorum*).

7. En la edición de 1555 que hemos consultado, la extracción de la raíz cuadrada de números naturales se estudia en el capítulo 7 (*De inuentione quadratae radicis in numerus integris*) del libro primero.

8. La extracción de raíces se contempla en el capítulo 5 (*De extractionibus radicum*) del primer libro.

9. Utilizando el simbolismo moderno, un número prónico según Pérez de Moya es del tipo , donde a es un cuadrado perfecto. Así, $18 = 4^2 + \sqrt{4}$ es prónico.

10. Dado un número prónico $a^2 + \sqrt{a}$, su raíz prónica es a. Así, 4 es la raíz prónica de 18.

Encontramos el concepto de raíz prónica en la *Suma de Arithmetica pratica y de todas mercaderias con la horden de contadores* (1546) de Gaspar de Texeda.

11. En notación simbólica moderna algunos ejemplos de raíces ligadas propuestos por Pérez de Moya son:

$$\sqrt{4} + \sqrt{1} = 3 \quad , \quad \sqrt{9} + \sqrt{5} = 3 + \sqrt{5}$$

12. En notación simbólica moderna algunos ejemplos de raíces universales propuestos por Pérez de Moya son:

$$\sqrt{13 + \sqrt{144}} = \sqrt{13 + 12} = \sqrt{25} = 5$$

$$\sqrt{4} + \sqrt{1} + \sqrt{10 + \sqrt{36}} = 7$$

A la hora de justificar la utilidad de las raíces, el bachiller se expresa en los siguientes términos (p. 328):

> «Destas rayzes q(ue) se ha dicho, la quadrada sirue para Geometria, y Cosmographia, y para el arte militar, y para sacar vn medio proporcional entre dos estremos, y para el arte mayor. La cubica sirue para sacar dos medios proporcionales entre dos estremos, y para sacar la quantidad de los Diametros en los cuerpos solidos, y para otras varias cosas. Y esta, con todas las demas que aqui tratamos generalmente, siruen para la regla de la cosa, o arte mayor, como en el proceso desta obra se vera.»

En los diez capítulos siguientes el discurso de Pérez de Moya, en lo que a la extracción de raíces de números naturales se refiere, transita por las siguientes etapas:

- Definición-descripción de potencias y raíces.
- Tablas de potencias de números dígitos: caracteres de exclusión.
- Algoritmos para la extracción de raíces.
- Aproximaciones de raíces.
- Pruebas de las raíces.

En lo que sigue, utilizaremos este guión para el análisis de los contenidos matemáticos.

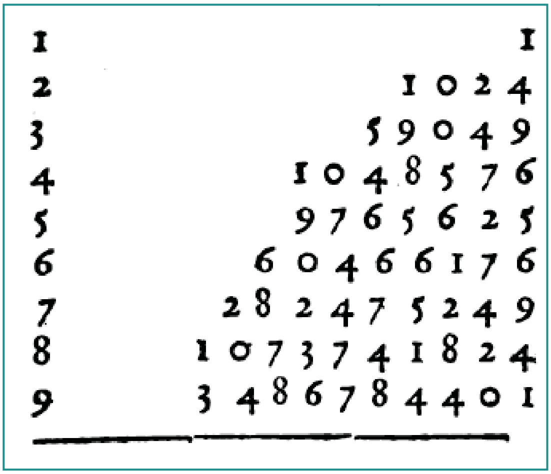
4.1. Definición-descripción de potencias y raíces

Apoyándose en la descripción de las potencias de base natural y exponentes entre 2 y 11, Moya introduce la noción de raíz cuadrada, cúbica, etc. Así, por ejemplo, en el caso de la raíz quinta [= *raíz relata*] el bachiller comenta (p. 356):

> «La quarta especie de rayz en orden, es la que dizen relata, y assi por numero relato se entie(n)de el vltimo producto que sale de la multiplicacion de cinco numeros yguales en quantidad, y genero, assi como estos 2. 2. 2. 2. 2. (o otros mayores) los quales, multiplicados todos, vnos por otros, hacen treynta y dos, este treynta y dos, se dize numero relato, y el vno de los cinco doses, se dize rayz relata deste numero treynta y dos.»

Las denominaciones de las raíces de distintos índices, que coinciden con las de las potencias de que provienen, se detallan en el cuadro siguiente:

Denominaciones de Pérez de Moya	Denominaciones Actuales
Rayz quadrada	Raíz cuadrada
Rayz cubica	Raíz cúbica
Rayz quadrada de rayz quadrada o Rayz de censo de censo	Raíz cuarta
Rayz relata	Raíz quinta
Rayz censicuba	Raíz sexta
Rayz segunda relata	Raíz séptima
Rayz quadrada de quadrada de quadrada o Rayz de censo de censo de censo	Raíz octava



1	1
2	1024
3	59049
4	1048576
5	9765625
6	60466176
7	282475249
8	1073741824
9	3486784401

Fig. 4. Potencias de exponente diez de los números dígitos.

Denominaciones de Pérez de Moya	Denominaciones Actuales
Rayz cubica de rayz cubica	Raíz novena
Rayz censirelata	Raíz décima
Rayz tercera relata	Raíz undécima

Los nombres utilizados por Pérez de Moya para describir las raíces, que están relacionados con el simbolismo algebraico de la época (Meavilla y Oller, 2014), fueron comunes en muchos impresos europeos del XVI[13]. No obstante, en la mayoría de ellos el catálogo propuesto por el canónigo jienense se limitaba a las raíces cuadradas y cúbicas[14].

4.2. Tablas de potencias de números dígitos: caracteres de exclusión

En el estudio de cada uno de los diez tipos de raíces precedentes, se presenta una tabla de las potencias de los números dígitos cuyos exponentes son, en cada caso, el índice correspondiente a la raíz que se esté considerando. Cuando existen, se añaden los caracteres de exclusión.

Por ejemplo, en el estudio de la *raíz censirelata* [= raíz décima], se ofrece la tabla siguiente (figura 4):

A esta lista, el bachiller añade (p. 384):

> «Desta tabla se manifiesta, que los números que fenescieren en 2. 3. 7. 8. seran irracionales, y los que fenescieren en 1. 4. 5. 6. 9. 0. podran ser, o no ser racionales.»

13. En la *Arithmetica integra* (1544) de Stifel y en el *General tratatto* (1556 – 1560) de Tartaglia encontramos denominaciones casi idénticas.

14. Esto sucede, por ejemplo, en las obras de Juan de Ortega (1512), Juan Andrés (1515), Joan Ventallol (1521), Petrus Apianus (1527), Oroncio Fineo (1532), Girolamo Cardano (1539), Gaspar Nicolas (1541) y Oroncio Fineo (1555).

4.3. Algoritmos para la extracción de raíces

Para la extracción de raíces, Pérez de Moya aborda en primer lugar el cálculo del número de cifras de la raíz pedida para, a continuación, proponer procedimientos para el cálculo de dichas cifras.

4.3.1. Número de cifras de la raíz

Para determinar el número de cifras de cualquier raíz, el bachiller propone las dos técnicas siguientes:

- Se ponen puntos debajo de las cifras del radicando (empezando por las unidades) de modo que entre dos puntos consecutivos quede una cifra sin puntuar (raíz cuadrada), dos cifras sin puntuar (raíz cúbica), tres cifras sin puntuar (raíz cuarta) etc. El número de puntos coincide con el número de cifras de la raíz correspondiente[15].
- Contando de derecha a izquierda y mediante barras verticales se separan las cifras del radicando en grupos de dos cifras (raíz cuadrada), tres cifras (raíz cúbica), cuatro cifras (raíz cuarta), etc. El número de grupos coincide con el número de cifras de la raíz.

El método señalado en el punto i. ya fue utilizado, entre otros, por: Luca Pacioli (1494), Juan Andrés (1515)[16], Joan Ventallol (1521), Girolamo Cardano (1539)[17], Gaspar de Texeda (1546) y Marco Aurel (1552). Por su parte, el método del punto ii. puede encontrarse en la obra de, entre otros: Nicolas Chuquet (1484), Juan de Ortega (1512), Estienne de la Roche (1521), Oroncio Fineo (1532 y 1555) y Juan de Ycíar (1549).

4.3.2. Cálculo de las cifras de la raíz

Para el cálculo de las cifras de las raíces de índices entre 2 y 11, Pérez de Moya debió estar familiarizado con los «coeficientes binomiales» que Michael Stifel estudió en su *Arithmetica integra* (1544) y Tartaglia en su *General trattato* (1556 – 1560) (figura 5).

Para las raíces cuadradas y cúbicas, el bachiller pone de manifiesto el conocimiento de dichos coeficientes:

> «La razo(n) de todo lo que en el sacar de rayz [cuadrada] se ha dicho sale d(e) la quarta proposicion del segundo de Euclides[18].» (p. 334).

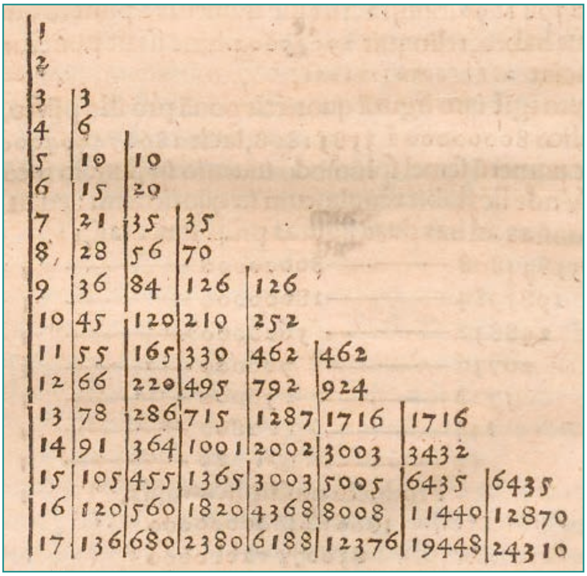
15. Este procedimiento se apoya en la expresión del radicando como suma de potencias de (raíz cuadrada), (raíz cúbica), (raíz cuarta) etc.

16. Juan Andrés también utilizó puntos entre las cifras del radicando a modo de barras verticales.

17. Cardano también utilizó puntos encima de las cifras del radicando. La misma técnica fue utilizada por Petrus Apianus (1527), Michael Stifel (1544) y Nicolás Tartaglia (1556-1560).

18. En lenguaje simbólico moderno dicha proposición equivale a la identidad:

$$(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$$



1							
2							
3	3						
4	6						
5	10	10					
6	15	20					
7	21	35	35				
8	28	56	70				
9	36	84	126	126			
10	45	120	210	252			
11	55	165	330	462	462		
12	66	220	495	792	924		
13	78	286	715	1287	1716	1716	
14	91	364	1001	2002	3003	3432	
15	105	455	1365	3003	5005	6435	6435
16	120	560	1820	4368	8008	11440	12870
17	136	680	2380	6188	12376	19448	24310

Fig. 5. Coeficientes binomiales en la *Arithmetica integra* (1544) de Michel Stifel.

«Para ente(n)der la razon de lo que se ha hecho en el sacar de la rayz Cubica, considera q(ue) si vna linea fuere diuidida en dos qualesquiera partes, el Cubo de toda la linea sera ygual, al Cubo de la primera parte, y al triplo del quadrado de la dicha primera parte, multiplicada por la segu(n)da, y al triplo del quadrado de la segunda parte, mutiplicada por la primera, y al Cubo de la segunda.» (p.350)[19].

Los procedimientos de extracción sólo difieren de los actuales en la disposición de los cálculos (figura 6).

A lo largo del libro quinto del primer tomo del *Tratado de Mathematicas*, el matemático santistebeño calcula las siguientes raíces exactas[20] (ver tabla).

Además de los aspectos aritmético-algebraicos de la extracción de raíces, Pérez de Moya también considera su componente geométrica. Así, al referirse a las raíces cuadradas y cúbicas, afirma:

19. En el libro segundo de la segunda parte del *General trattato di numeri, et misure*, Tartaglia describe de forma retórica el desarrollo de distintas potencias del binomio. Así, para el exponente 7, se expresa en los siguientes términos:

> **«Se** vna quantita sara diuisa in due parti, come si voglia, il secondo relato di tutta la detta quantita sempre sara eguale a questi otto principali produtti, cioe al produtto del secondo relato della prima parte. Et al produtto del settuplo del cubo censo della detta prima parte fia la seconda parte, & al produtto del 21 uplo del relato della detta prima parte fia il censo della seconda, & al produtto del 35 uplo del cen. cen. della detta prima fia il cubo della seconda, & al produtto del 35 uplo del cen. cen. della seconda fia il cubo della prima, & al produtto del settuplo del censo cubo della detta seconda fia la prima (simplice) & finalmente al produtto del secondo relato della detta seconda parte.» (fol. 51r).

20. Hemos utilizado el simbolismo moderno para radicales, desconocido por Pérez de Moya.

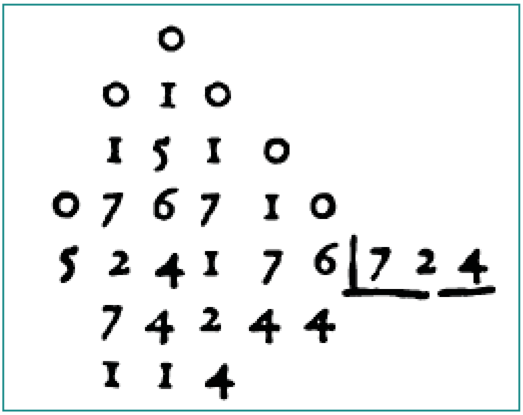


Fig. 6. Extracción de la raíz cuadrada de 524176 (p. 332).

$\sqrt{524176}$	$\sqrt{92524}$
$\sqrt[3]{15625}$	$\sqrt[3]{70444997}$
$\sqrt[3]{130323843}$	$\sqrt[3]{19683}$
$\sqrt[4]{279841}$	$\sqrt[5]{147008443}$
$\sqrt[6]{1073741824}$	$\sqrt[7]{2494357888}$
$\sqrt[8]{1099511627776}$	$\sqrt[9]{1801152661463}$
$\sqrt[10]{16679880978201}$	$\sqrt[11]{350277500542221}$

«… buscar la rayz quadrada de vn numero, no es otra cosa sino buscar vna quantidad media proporcional entre la vnidad, y el tal numero p(ro)puesto.» (p. 329).

«Nota, quando te piden que saques rayz [cuadrada] de vna qualquiera qua(n)tidad, entenderas que la tal quantidad es area de vn quadrado, y saber sacar su rayz es querer saber el lado, o principio d(e) do el tal quadrado procedio. Y si dixessen rayz Cubica, la tal quantidad entenderas ser cuerpo Cubo.» (p. 330).

Además, el bachiller determina geométricamente la raíz cuadrada y la raíz cúbica de dos números concretos [= segmentos rectilíneos].

En el primer caso, calcula la raíz cuadrada de 12 sirviéndose de un método clásico contenido en los *Elementos* de Euclides (Libro VI, prop. 9). El bachiller describe el procedimiento como sigue (p. 339):

«…queriendo sacar la rayz de doze, tomaras doze, y la vnidad, o dos, y seys, o tres, y quatro, porque qualquiera destas par de quantidades multiplicadas, hacen doze, y assi no importara mas tomar vnas q(ue) otras, y por causa de exemplificar, siruamonos de quatro y tres. Toma agora vna linea de 4 tamaños yguales, y otra de tres, assi como la linea a. b. y la c. d. entre las quales buscaras vna linea media proporcional […] y para hallar esta linea, juntaras la a.b. y c.d. a la larga, y quedara de ambas hecha la linea e.f. sobre la qual haras medio circulo, de modo que toda la e.f. quede por diametro, como paresce en la figura l.h.m. luego del punto. i. del diámetro (que es do se junto la linea a.b. con la c.d.) saca vna perpendicular hasta

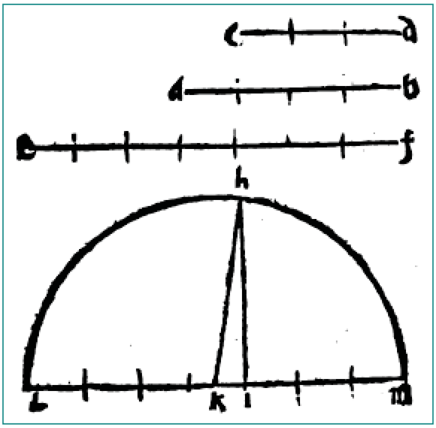


Fig. 7. Ilustración que acompaña a la extracción geométrica de $\sqrt{12}$

la circunferencia del semicirculo, como muestra la línea. h.i. y esta sera la línea proporcional, la potencia de la qual valdra doze, y por consiguiente sera la rayz del dicho doze.» (figura 7).

Pérez de Moya justifica este procedimiento con la ayuda de Euclides (corolario de la proposición 8 del libro VI y penúltima proposición del libro VI).

En cuanto a la construcción geométrica de la raíz cúbica, Moya utiliza una antigua técnica para intercalar dos medias proporcionales entre dos segmentos rectilíneos dados[21] que encontramos en la *Summa* (1494) de Luca Pacioli y en el libro segundo de la segunda parte del *General trattato di numeri, et misure* de Tartaglia. El bachiller describe la construcción pero no la demuestra[22] (p. 351):

«Si por via de linea quisieres sacar rayz Cubica de algun numero, como si dixessen. Dame la rayz Cubica deste numero, o linea de ocho tamaños, haz della vna superficie, o figura Parallelograma, que tenga por lado vn tamaño de los ocho, que es la linea larga, como muestra a.b.c.d. con las otras lineas largas que se toquen en el angulo. b. del Parallelogramo, luego para sacar el ce(n)tro deste paralelogramo, echa vna linea del punto. b. hasta el punto. c. y otra desde el punto. a. hasta el pu(n)to. d. las quales se cortaran en el pu(n)to. g. y este sera el centro deste Parallelogramo. Luego asienta el vn pie del compas en este punto, o ce(n)tro. g. y estiende lo tanto en las lineas. a.f. y en la. d.e. que hagas dos pu(n)tos en ellas, de modo que echando vna linea del vno al otro, passe por el punto, o angulo. c. como haze la linea h.c.i. y lo que esta linea cortare de la línea. d.e. (que es lo que ay entre la. i. y la. d.) sera la rayz Cubica de la línea. b.d. que se diuidio en ocho tamaños. Y assi como la rayz Cubica de ocho, es dos, assi esta quantidad. i.d. (que dezimos ser la rayz) es dos tamaños, yguales a los ocho de la dada línea b.d. Y deste modo se sacara rayz Cubica de qualquiera numero.» Figura 8.

4.4. La aproximación de raíces

4.4.1. Aproximación de raíces cuadradas

Pérez de Moya inicia el estudio de las aproximaciones de raíces cuadradas con las palabras siguientes (p. 334):

«Algunos, como Oroncio, quieren que sacando rayz [cuadrada] de numero sordo, que lo que sobrare se po(n)ga sobre vna raya, y la rayz que ouiere salido se doble y añada vn punto, y se ponga por denominacio(n) a lo que sobro.»

21. Siguiendo a Heath (1981), esta técnica fue utilizada por Apolonio, Herón y Filón de Bizancio.
22. En los textos de Pacioli y Tartaglia que hemos citado se ofrecen las demostraciones pertinentes.

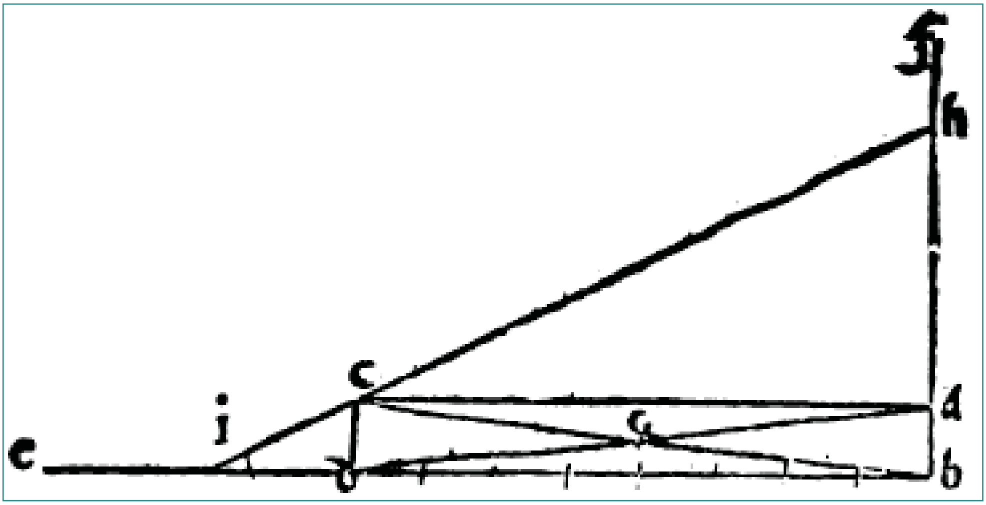


Fig. 8. Ilustración que acompaña a la extracción geométrica de $\sqrt[3]{8}$

En lenguaje simbólico moderno, la aproximación que el canónigo de la Catedral de Granada atribuye a Oroncio Fineo equivale a:

$$\sqrt{N} = \sqrt{a^2 + r} \cong a + \frac{r}{2a+1},$$

donde a^2 es el mayor cuadrado contenido en N[23].

Consultando los ejemplos de aproximaciones de raíces cuadradas contenidos en la *Arithmetica practica*[24] de Fineo, se observa que la aproximación utilizada por Oroncio es:

$$\sqrt{N} = \sqrt{a^2 + r} \cong a + \frac{r}{2a}$$

En consecuencia, la información facilitada por el bachiller es incierta.

Pérez de Moya también se refiere al tipo de aproximación del que se sirvió Tartaglia en los siguientes términos (p. 334):

23. En el *Libro Segundo de Arithmetica* (1557, fol. 22v), Pérez de Moya enuncia dicha regla, sin referirse a Oroncio Fineo, en los siguientes términos:

> «**Qvando** hauiendo sacada la rayz de algun numero sobrare algo pondras lo que sobrare sobre vna raya, y doblaras la rayz del tal numero y añadille vno y ponerlo has debaxo por denominador.»

24. En lenguaje simbólico moderno, los ejemplos de aproximaciones ofrecidos por Oroncio Fineo (fol. 11v) son:

$$\sqrt{204315} = \sqrt{452^2 + 11} \cong 452 + \frac{11}{904}$$
$$\sqrt{291612} = \sqrt{540^2 + 12} \cong 540 + \frac{12}{1080} = 540 + \frac{1}{90}$$

«Nicolas Tartalla quiere que al duplo de la rayz [cuadrada] no se añada vno, sino que solamente se doble la rayz que ouiere venido, y se ponga debaxo de lo que sobrare por denominacion.»

Siendo cierto que Tartaglia en su *General trattato* (Libro segundo de la segunda parte, fol. 25r) hace uso de esta aproximación[25], también lo es que, en raíces cuadradas del tipo $\sqrt{N} = \sqrt{a^2 + 2a}$,, el matemático italiano aconseja esta otra:

$$\sqrt{N} = \sqrt{a^2 + 2a} = \sqrt{a^2 + r} \cong a + \frac{r}{2a + 1}$$

A continuación, el bachiller propone otra regla de Tartaglia (*General trattato.* Libro segundo de la segunda parte, fols.25v-26r), consistente en la aplicación reiterada de aproximaciones del tipo

$$\sqrt{a^2 \pm r} \cong a \pm \frac{r}{2a},$$

y la aplica al cálculo aproximado de la raíz cuadrada de 3. En esencia, las operaciones efectuadas, expresadas en el lenguaje simbólico moderno, son:

- Primera aproximación:

$$\sqrt{3} = \sqrt{1^2 + 2} \cong 1 + \frac{2}{2 \times 1} = 1 + 1 = 2$$

- Segunda aproximación

$$2^2 = 3 + 1 \Rightarrow 3 = 2^2 - 1 \Rightarrow \sqrt{3} = \sqrt{2^2 - 1} \cong 2 - \frac{1}{2 \times 2} = 2 - \frac{1}{4} = \frac{7}{4}$$

- Tercera aproximación

$$\left(\frac{7}{4}\right)^2 = \frac{49}{16} = 3 + \frac{1}{16} \Rightarrow 3 = \left(\frac{7}{4}\right)^2 - \frac{1}{16} \Rightarrow \sqrt{3} = \sqrt{\left(\frac{7}{4}\right)^2 - \frac{1}{16}} \cong \frac{7}{4} - \frac{1/16}{2(7/4)}$$
$$= \frac{7}{4} - \frac{1/16}{7/2} = \frac{97}{56}$$

El matemático andaluz concluye (p. 335):

«Y deste modo podras proceder aproximando tanto, que quasi no sea sensible el error, mas al justo nunca llegaras, porque por tanto se dize vn numero sordo, porque quando del se saca rayz, ni quanto, ni qual sea se oye.» (p. 335).

25. «Laqual regola e di questa sorte, che pongono quel tal auanzano sopra vna vírgola, & il doppio della prima radice (gia trouata) di sotto, et tal rotto lo accompagnano con la detta prima radice sana, & tal summa concludeno esser la radice propinqua di detta prima quantita proposta.»

Después de esto, el matemático jienense calcula el valor aproximado de la raíz cuadrada de 5 utilizando un procedimiento similar al de Nicolas Chuquet (*Triparty*, 1484)[26], consistente en acotar el valor de dicha raíz mediante intervalos abiertos encajados cuyos extremos se obtienen sucesivamente a partir de la «propiedad de los valores intermedios»:

$$\frac{a}{b} < \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d} \quad (^{27})$$

Pérez de Moya pudo conocer este método a través de Etienne de la Roche (*Larismethique nouuellement composee*, 1520)[27] o de Joan Ventallol (*Pratica mercantíuol*, 1521)[28].

Por último, el bachiller propone «otra orden de sacar rayz de numeros sordos» que admite la siguiente traducción al simbolismo moderno:

$$\sqrt{N} = \frac{\sqrt{10^{2k} \cdot N}}{10^k}$$

Esta forma de aproximar se encuentra la «Aritmética práctica» de Oroncio (1555*,* fol. 12v) y Moya ya la utilizó en el *Libro Segundo de Arithmetica* (1557, fol. 23v). Advirtamos que la aplicación esta regla incluye el uso de fracciones decimales.

4.4.2. Aproximación de raíces cúbicas

En cuanto a la aproximación de las raíces cúbicas se refiere, el bachiller presenta las dos reglas siguientes:

$$\sqrt[3]{N} = \sqrt[3]{a^3 + r} \cong a + \frac{r}{3a(a+1)+1} \quad ; \quad \sqrt[3]{N} = \sqrt[3]{a^3 + r} \cong a + \frac{r}{3a^2 + 3a}$$

La segunda se describe en el *General trattato* (fols. 27v-28r) de Nicolo Tartaglia del modo siguiente:

> «Per cauare adonque la propinqua radice cuba delli numeri non cubi, caua prima la radice cuba del maggior numero cubo, che sia in quel tal numero non cubo, & quel che soprarestara a tal operatione poneralo sopra vna virgola, o vuoi dir sopra di vna leneetta, & fatto questo per formar il denominator da mettere sotto di quella trippla sempre quella radice gia cauata, e quel triplato multiplicalo per la medesima radice, & a tal multiplicatione aggiongiui il detto triplato, & tal summa ponila sotto a quella lineetta per denominator, & questo tal rotto aggiongilo alla prima radice, & tal qua(n)tita cosi co(m)posta sara la radice propinqua cuba di quel proposto numero non cubo.»

26. La *Triparty* se escribió en 1484 pero su manuscrito no fue conocido hasta que Aristide Marré lo publicó en 1881. Afortunadamente, parte de la obra de Chuquet fue plagiada por Estienne de la Roche en *Larismethique nouellement composee* (1520).

27. En los folios 32r y 32v, Estienne de la Roche propone el método de aproximación de raíces de Chuquet.

28. En el folio CXXr, Ventallol resuelve dos ecuaciones de segundo grado con una incógnita utilizando el método de aproximación de Chuquet.

Refiriéndose a estas dos aproximaciones de la raíz cúbica, Simon Stevin (1585, p. 125) dice:

> «NOTA Nicolas Tartalia traictant curieusement de ceste reste, n'aiouste poinct ce dernier 1, comme nous (auec Iuan Peris de Moya) auons faict…»

4.4.3. Aproximación de raíces de índices superiores

Para las raíces de índices entre 4 y 11, Pérez de Moya se sirve de aproximaciones que admiten la siguiente generalización

$$\sqrt[n]{N} = \sqrt[n]{a^n + r} \cong a + \frac{r}{\binom{n}{1} a^{n-1} + \binom{n}{2} a^{n-2} + \cdots \binom{n}{n-1} a}$$

Tartaglia utiliza este tipo de aproximaciones en su *General trattato*.

4.5. Las pruebas de las raíces

En todos los casos en que se aplica (raíces de índices 2, 3, 4, 5 y 6), la prueba de la extracción de la raíz enésima de un número natural consiste en elevar a la enésima potencia la raíz hallada y añadir el resto al resultado obtenido. En el caso de la raíz censicuba [= raíz sexta], el bachiller puntualiza (p. 366):

> «La prueba destas rayces, sera conuertir la tal rayz censicuba, multiplicando seys numeros yguales, a la tal rayz, vnos por otros, y si el vltimo producto, añadiendo lo que sobrare (si sobrare algo) fuere tanto como el numero de quien se ouiere sacado la tal rayz estara buena, y si no fuere tanto, sera falsa, y sera necessario hazer la otra vez, o otras, hasta q(ue) salga deste modo.»

5. CONCLUSIONES

A la luz de lo expuesto en los parágrafos precedentes, podemos afirmar que el libro quinto (*Trata de varias rayzes de numeros*) del primer tomo del *Tratado de Mathematicas* presenta las siguientes mejoras o retrocesos en relación a las aritméticas españolas y extranjeras del siglo XVI que hemos examinado.

1) La explicación detallada de la extracción de las raíces de índices entre 2 y 11, no la hemos encontrado en las aritméticas consultadas, excepción hecha del *General trattato di numeri et misure* (1556 – 1560) de Tartaglia. En consecuencia, podemos concluir que, en cuanto al detalle y al número de casos estudiados, la exposición de Pérez de Moya es superior a la que aparece en la mayoría de los manuales del siglo XVI.
2) El bachiller sólo presenta la justificación del procedimiento utilizado para la extracción numérica de la raíz cuadrada y la raíz cúbica (cuadrado del binomio y cubo del binomio). En esto el tratamiento de Pérez de Moya es inferior al de

Tartaglia que, en forma retórica, enuncia el desarrollo de todas las potencias del binomio relacionadas con la extracción de las raíces de índices entre 2 y 11.

3) La construcción geométrica de la raíz cúbica que Pérez de Moya presenta, sin demostración alguna, no es frecuente en los manuales renacentistas y no aparece en las aritméticas españolas del XVI que hemos consultado. En el *General trattato di numeri et misure*, Tartaglia ofrece una prueba de dicha construcción.
4) El método de Chuquet para la proximación de la raíz cuadrada, que Pérez de Moya incluye en su obra, no aparece en forma explícita, salvo en la *Larismethique nouellement compose* (1520) de Estienne de la Roche y la *Pratica mercantíuol* (1521) de Joan Ventallol, en ninguna de las aritméticas españolas y extranjeras del XVI que hemos consultado.
5) Las aproximaciones de las raíces de índices entre 4 y 11, que el bachiller debió tomar prestadas de Tartaglia, no las encontramos en las aritméticas españolas del XVI que hemos estudiado.

A partir de las consideraciones anteriores establecemos las dos conclusiones siguientes:

a) El tratamiento que hace Juan Pérez de Moya de la extracción numérica de raíces es superior al que se encuentra en las aritméticas españolas del XVI, anteriores a 1573.
b) El tratamiento que hace Juan Pérez de Moya de la extracción numérica de raíces es inferior al que Tartaglia desarrolla en su *General trattato di numeri et misure*. Sin duda alguna, el bachiller se inspiró en dicha obra para escribir el libro quinto del primer tomo del *Tratado de Mathematicas*.

6. AGRADECIMIENTOS

El presente trabajo se ha realizado dentro del proyecto “La difusión del conocimiento matemático en el nacimiento de la imprenta: descripción y análisis comparado de aritméticas del siglo XVI escritas en castellano” EDU2011-27168 financiado por en Ministerio de Economía y Competitividad de España.

REFERENCIAS

Andres, J. (1515). *Sumario breue d(e)la pratica dela Arithmetica d(e) todo el curso de larte merca(n)tiuol bien declarado: el qual se llamamaestro de cuento.* Valencia: Juan Joffre.

Apianus, P. (1527). *Eyn newe und wolgegründte underweysung aller Kauffmanss Rechnung in dreyen Büchern.* Ingolstadt.

Aurel, M. (1552). *Libro primero, de Arithmetica Algebratica.* Valencia: Ioan de Mey.

Cardano, G. (1539). *Practica Arithmetice, & Mensurandi singularis.* Mediolani: Bernardini Calusci

Chuquet, N. (1881). *Le Triparty en la Science des nombres, par maistre Nicolas Chuquet, Parisien, publié d'après le manuscrit fonds français nº1346 de la Bibliothèque Nationale*

de Paris et precédé d'une notice par M. Aristide Marré. Rome: Imprimerie des Sciences Mathématiques et Physiques.

Euclides (1537). *Evclidis Megarensis mathematici clarissimi Elementorum Geometricorum. Lib. XV. Cum expositione Theonis in prioris XIII a Bartholomaeo Veneto latinitate donate, Campani in omnes,& Hypsiclis Alexandrini in duos postremos.* Basilea: Iohannem Hervagivm.

Fineo, O. (1532). *Protomathesis: Opus uarium, ac scitu non minus utile quam iucundum, nunc primum in lucem foeliciter emissum.* París: (sin editor).

Fineo, O. (1555). *De Arithmetica practica, libri quatuor.* París: Michaelem Vascosanum.

Heath, T. (1981). *A history of Greek Mathematics* (Volume I). New York: Dover.

Meavilla, V. (2005). Historia de la Educación Matemática en España: el contenido algebraico de la *Arithmetica practica, y specvlatiua* de Juan Pérez de Moya (ca. 1512 – 1596). *Revista Brasileira de História da matemática.* Vol. 5, nº 9, pp. 19-35.

Meavilla, V. y Oller, A.M. (2014). El simbolismo algebraico en tres álgebras españolas del siglo XVI. *NÚMEROS*. 87, pp. 59-68.

Nicolas, G. (1541). *Tratado da pratica Darismetica*. (sin lugar): Luis Rodriguez.

Ortega, J. de (1512). *Conpusicion de la arte de la arismetica y juntamente de geometria: fecha por…* León: en casa de Maistro Nicolau de Benedictis: por Joannnes Trinxer librero de Barcelona.

Pacioli, L. (1494). *Summa de Arithmetica,Geometria, Proportioni et Proportionalita.*Veneza: Paganini.

Pérez De Moya, J. (1557). *Libro Segundo de Arithmetica*. Salamanca: Iuan de Canoua.

Pérez De Moya, J. (1562). *Arithmetica practica, y specvlatiua*. Salamanca: Mathias Gast.

Pérez De Moya, J. (1573). *Tratado de Mathematicas en qve se contienen cosas de Arithmetica, Geometria, Cosmographia, y Philosophia natural. Con otras varias materias, necessarias a todas artes Liberales y Mechanicas.* Alcalá: Iuan Gracian.

Picatoste y Rodríguez, F. (1891). *Apuntes para una biblioteca científica española del siglo XVI.* Madrid: Imprenta y fundición de Manuel Tello.

Roche, E. de la (1520). *Larismethique nouellement composee*. Lyon: Constantin Fradin.

Sánchez, J. A. (1929). *Las Matemáticas en la Biblioteca del Escorial.* Madrid: Imprenta de Estanislao Maestre.

Stevin, S. (1585). *L'Arithmetique.* Leyde: Christophe Plantin.

Stifel, M. (1544). *Arithmetica integra.* Norimbergae: Iohan Petreium.

Tartaglia, N. (1556–1560). *General trattato di numeri et misure.* Vinegia: Curtio Troiano.

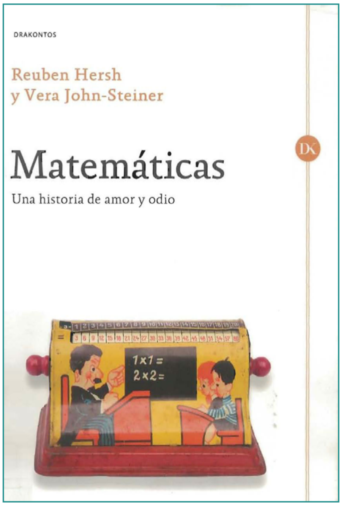
Texeda, G. de (1546). *Suma de Arithmetica pratica y de todas mercaderias con la horden de contadores*. Valladolid: Francisco Fernandez de Cordova.

Ventallol, J. (1521). *Pratica mercantíuol.* Lyo: Joan de la Place.

Ycíar, J. (1549). *Libro intitulado Arithmetica practica/ muy vtil y prouechoso para toda persona que quisiere exercitar se en aprender a contar.* Zaragoza: Pedro Bernuz.

Épsilon - *Revista de Educación Matemática* *2014, Vol. 31(3), nº 88, 89-90*

MATEMÁTICAS. Una historia de amor y odio



Reuben Hersch
Vera John-Steiner
Editorial: Crítica
Marzo 2012 (primera edición)
ISBN: 978-84-989229-8-1
463 páginas

La colaboración entre un matemático, Reuben Hersch, y una experta en lingüística y educación, Vera John-Steiner, permitió la creación de este libro, que pretende dar una visión más social y emocional de las matemáticas y su estudio.

Entre sus páginas, los autores abordan una amplia variedad de mitos sobre esta disciplina y sus participantes, siempre a través de anécdotas, comentarios y biografías de reputados matemáticos.

En concreto, desde esta perspectiva, el libro indaga sobre los jóvenes matemáticos y el origen de su talento, la cultura matemática, el apoyo que esta disciplina supuso para muchos matemáticos en sus peores momentos, la adicción a las matemáticas y los peligros que esta ha podido conllevar, las amistades entre los matemáticos y las comunidades

que se han formado a lo largo de los años, el papel de las mujeres en matemáticas y la importancia o no de la edad para investigar en esta materia.

Finalmente, plantea las matemáticas en el contexto educativo; primero desde el punto de vista de dos profesores con modelos de enseñanza contrarios, y después desde el de los alumnos y el frecuente amor u odio que se produce en sus relaciones con esta asignatura.

En definitiva, el libro aporta un gran número de curiosidades y detalles interesantes, e incluso divertidos, tanto sobre las matemáticas como sobre aquellos que han trabajado en este campo. Convirtiéndose en una obra altamente recomendable para todo aquel que quiera conocer más sobre las matemáticas en un tono informal y anecdótico, y especialmente para los docentes, que podrán utilizarla en el aula para ayudar a sus alumnos a conocer y conectar mejor con esta materia y con las personas que dedicaron o dedican su vida al estudio de ella.

María José Madrid
Universidad de Salamanca

Épsilon - *Revista de Educación Matemática* *2014, Vol. 31(3), nº 88, 91-91*

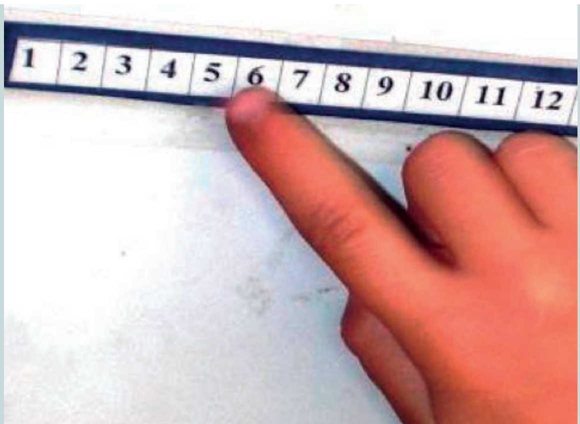
Agradecimientos a los evaluadores

En este último número del año 2014, desde Epsilon, Revista de Educación Matemática, agradecemos la colaboración de aquellos colegas que aportaron su conocimiento y tiempo en la revisión y arbitraje de los manuscritos propuestos a la revista. Mediante sus comentarios y sugerencias ayudan a obtener y mantener una calidad de los artículos publicados durante el año 2014.

- Agustín Carrillo
- Alexander Maz
- Bernardo Gómez
- Carlos de Castro
- Carmen León
- Carolina Carrillo
- Francisco España
- Francisco Juan Y Ribaya
- Inmaculada Serrano
- Isidoro Segovia
- Jesús Salinas
- José Galo
- José Mª Pavia
- José Ortiz
- Liliana Mabel Tauber
- Mª José González
- Mª Jesús Salinas
- Miguel Villaraga
- Noelia Noemí Jiménez
- Nora Gatica
- Rafael Bracho
- Rafael Rubio
- Roberto Vidal
- Verónica Albanese

88

Vol. 31 (3)
2014



epsilon

Revista de Educación Matemática

Editada por la S.A.E.M. "THALES"

Portada:

La revista Epsilon está reseñada en:
IN-RECS, Dialnet, Latindex, RESH, DICE, MathEduc
y Base de Datos del Centro de Documentación Thales.

epsilon 88

Revista de Educación Matemática

Sociedad Andaluza de Educación Matemática "Thales"

Página de la revista: http://thales.cica.es/epsilon
Revista: epsilon@thales.cica.es

Edita
Sociedad Andaluza de
Educación Matemática "Thales"
Centro Documentación "Thales"
Universidad de Cádiz
C.A.S.E.M.
11510 PUERTO REAL (Cádiz)

Maquetación e impresión
Utrerana de Ediciones, s.l.
Cristóbal Colón, 12
41710 Utrera (Sevilla)

Depósito Legal
SE-421-1984

ISSN:
2340-714X

Período
3er cuatrimestre 2014

Suscripción
ESPAÑA: 42,00 euros
PAÍSES DEL EURO: 63,00 euros
RESTO DE PAÍSES: 90 $ USA
(3 NÚMEROS AL AÑO)

S.A.E.M. THALES

Sixto Romero Sánchez
Presidente
Francisco España Pérez
Vicepresidente
Mª Belén Sepúlveda Lucena
Secretaría General
José María Vázquez de la Torre Prieto
Secretario de Administración y Tesorería

SEDE

Facultad de Matemáticas
Edif. de la E.S.I. Informática. Ala L2
Avda. Reina Mercedes, s/n.
Aptdo. 1160
41080 SEVILLA
Tlfno. 954 62 36 58 - Fax: 954 236 378
e-mail: **thales@cica.es**

SEDE ADMINISTRATIVA DE LA SOCIEDAD Y REVISTA

Centro de Documentación THALES
Facultad de Ciencias. Departamento de Matemáticas
Campus del Río San Pedro, s/n
Torre Central, 4ª Planta
11510 Puerto Real (Cádiz)
Tlf. y Fax: 956 012 833
e-mail: **thales.matematicas@uca.es**

ALMERÍA

Juan Guirado Granados
Delegado Provincial

CÁDIZ

Paloma Pascual Albarrán
Delegada Provincial

CÓRDOBA

Marina A. Toledano Hidalgo (provis.). *Delegado provincial*

GRANADA

Margarita García Schiaffino
Delegado Provincial

HUELVA

Mª Rocío Benítez Cambra (provis.). *Delegada provincial*

JAÉN

Mª Eugenia Ruiz Ruiz
Delegada provincial

MÁLAGA

Salvador Guerrero Hidalgo
Delegado provincial

SEVILLA

Ana Mª Martín Caraballo
Delegada Provincial

SUMARIO / CONTENTS

Épsilon - *Revista de Educación Matemática* 2014, Vol. 31(3), nº 88, 7-20

Sobre la naturaleza de las matemáticas en la formación inicial de maestros: los procesos matemáticos en el sistema de creencias de los estudiantes

Ángel Alsina y Paula López
Universidad de Girona

Resumen: *Se analizan las creencias de 142 futuros maestros sobre la naturaleza de las matemáticas y, de forma más concreta, su visión sobre los procesos matemáticos. Los datos obtenidos a través de un cuestionario muestran que no se consideran suficientemente las formas de adquisición y uso de los contenidos matemáticos. Estos resultados ponen de manifiesto la necesidad de trabajar los procesos matemáticos durante la formación inicial y permanente del profesorado para favorecer la adquisición de la competencia matemática.*
Palabras clave: *naturaleza de las matemáticas, procesos matemáticos, dominio afectivo, sistema de creencias, formación de maestros, identidad profesional del maestro de matemáticas.*

About the nature of mathematics in initial teacher training: The mathematical processes in the belief systems of students

Abstract: *We analysed 142 pre-service teachers' beliefs about the nature of mathematics and, more specifically, their view of mathematical processes. The data obtained by questionnaire demonstrate that the ways of acquiring and using mathematical contents are not adequately considered. These results reveal the need to work the mathematical processes during the training teacher to promote mathematical competence.*
Keywords: *nature of mathematics, mathematical processes, affective domain, belief system, teacher training, professional identity of mathematics teachers.*

INTRODUCCIÓN

La formación inicial que reciben los futuros maestros tiene una gran repercusión en el desempeño de la profesión de maestro. La institución universitaria, pues, tiene la misión de preparar a maestros competentes, es decir, maestros que además de tener conocimientos y habilidades que permitan resolver adecuadamente los problemas profesionales, sientan y reflexionen acerca de la necesidad y el compromiso de actuar en correspondencia con sus conocimientos, habilidades, motivos y valores -con flexibilidad, dedicación y perseverancia-, en la solución de los problemas que de él demanda la práctica profesional (Esteve y Alsina, 2010). De acuerdo con las directrices estatales sobre las competencias profesionales que debe aprender un estudiante para maestro durante su formación inicial (MEC, 2007a; MEC, 2007b), de forma muy sintética los futuros maestros deberían construir y co-construir de manera autorregulada nuevos conocimientos disciplinares y didácticos, y reconstruir los conocimientos, experiencias y creencias previas que pueden suponer un obstáculo para su identidad profesional (Beijaard, Meijer y Verloop, 2004; Bauchamp y Thomas, 2009).

El argumento que se acaba de exponer es probablemente una de las principales razones por las que, en el contexto de la investigación en torno al dominio afectivo en educación matemática, los estudios acerca de las creencias de los futuros maestros tienen un peso importante. Caballero, Blanco y Guerrero (2008) señalan que el estudio de las creencias en educación matemática incluye cuatro dimensiones: creencias sobre la naturaleza de las matemáticas y de su enseñanza y aprendizaje; creencias sobre uno mismo como aprendiz de matemáticas; creencias acerca del papel del profesorado de matemáticas; y creencias suscitadas por el contexto socio-familiar. Todas ellas, como se ha indicado, ejercen un papel importante en la configuración progresiva de la identidad profesional del maestro de matemáticas, un término recientemente acuñado por Lutovac y Kaasila (2011, 2013) para referirse a un proceso narrativo que incluye una interacción entre el contexto matemático individual y social y un proceso de auto-reflexión en el que la identidad matemática pasada, presente y futura entran en diálogo. Considerando esta conceptualización, algo implícita, en este trabajo se considera que la identidad profesional del maestro de matemáticas se modela a lo largo de toda su trayectoria como aprendiz de matemáticas durante su formación no universitaria, y como aprendiz de didáctica de las matemáticas durante su formación universitaria. Las experiencias personales y los conocimientos teóricos y prácticos interiorizados durante toda la trayectoria como estudiante dan lugar a un complejo sistema de creencias que incluye creencias sobre las matemáticas, creencias como aprendiz de matemáticas, creencias acerca del funcionamiento de la clase de matemáticas y creencias sobre el contexto social en relación a las matemáticas.

En este trabajo se analizan las creencias de los estudiantes para maestro sobre la naturaleza de las matemáticas, y de forma más concreta su visión acerca de los procesos de pensamiento matemático en el aprendizaje de la disciplina, tomando en consideración las orientaciones de diversos organismos internacionales que en los últimos años han enfatizado la importancia de los procesos para un aprendizaje competencial de las matemáticas (NCTM, 2000; OCDE, 2001, 2004). En esta misma línea, en el reciente "Real Decreto 126/2014, de 28 de febrero, por el que se establece el currículo básico de la Educación

Primaria" (BOE, 2014) aparece un nuevo bloque de contenidos llamado "Procesos, métodos y actitudes en matemáticas", lo cual pone de manifiesto la importancia creciente de este tipo de conocimientos y destrezas.

Coincidiendo con el inicio del Siglo XXI, el *National Council of Teachers of Mathematics* publicó unos nuevos estándares que pretenden ser un recurso y una guía para todos los que toman decisiones que afectan a la educación matemática: los principios y estándares para la educación matemática (NCTM, 2000). La visión de la educación matemática de estos estándares es sumamente ambiciosa, y busca sobre todo asegurar que todos los estudiantes reciban una educación matemática de calidad que garantice el aprendizaje con comprensión de nociones matemáticas importantes. En otras palabras, se pretende romper con un currículo de matemáticas orientado exclusivamente a la adquisición de contenidos y dirigir la mirada hacia un currículo orientado a la adquisición de la competencia matemática, es decir, se insta a dejar de instruir a los alumnos exclusivamente para obtener un buen rendimiento académico y, en su lugar, educarlos para que comprendan y usen las matemáticas en situaciones significativas. Para conseguir este propósito sitúan a los procesos matemáticos como los conocimientos clave para aprender a usar los contenidos matemáticos de forma comprensiva y eficaz en diferentes contextos: "los estándares de proceso (resolución de problemas, razonamiento y prueba, comunicación, conexiones y representación) ponen de relieve las formas de adquisición y uso de dichos contenidos" (NCTM, p. 31).

Es desde esta perspectiva que se ha desarrollado el presente estudio con un grupo de 142 futuros maestros en el que se analizan las consideraciones que tienen acerca de los procesos matemáticos.

LA NATURALEZA DE LAS MATEMÁTICAS: EL PAPEL DE LOS PROCESOS MATEMÁTICOS

Hace ya más de una década, Niss (2002) propuso abandonar el planteamiento curricular focalizado en los contenidos matemáticos, puesto que se centra exclusivamente en la adquisición de símbolos y de técnicas y no tanto en su uso significativo. Ello le llevó a plantear ocho competencias matemáticas clasificadas en dos grupos: el primer grupo tiene que ver con la capacidad de preguntar y responder preguntas dentro de y con las matemáticas, y el segundo grupo con la capacidad de hacer frente y de gestionar el lenguaje matemático y sus herramientas. Estas competencias, centradas en lo que las personas pueden hacer, tienen que ver con procesos mentales o físicos, actividades y comportamientos (Alsina, 2014):

Cuadro 1. Preguntar y responder preguntas dentro de y con las matemáticas

Pensar matemáticamente (dominio de modos matemáticos de pensamiento), como por ejemplo:

- Plantear preguntas que son propias de las matemáticas y conocer el tipo de respuestas que las matemáticas pueden ofrecer;
- Comprender y manejar las posibilidades y limitaciones de un determinado concepto;
- Ampliar las posibilidades de un concepto extrayendo algunas de sus propiedades o generalizando resultados;
- Diferenciar los diferentes niveles de las matemáticas (afirmaciones condicionadas del tipo "si-entonces", hipótesis, definiciones, teoremas, conjeturas o casos).

Plantear y resolver problemas matemáticos, como por ejemplo:

- Identificar, plantear y especificar diferentes tipos de problemas matemáticos: puros o aplicados; abiertos o cerrados;
- Resolver diferentes tipos de problemas matemáticos, planteados por otros o por uno mismo, de diferentes maneras cuando sea necesario.

Modelización matemática (es decir, análisis y construcción de modelos), como por ejemplo:

- Analizar los fundamentos y las propiedades de los modelos existentes, incluida la evaluación de sus posibilidades y de su validez;
- Decodificación de los modelos existentes;
- Realización de actividades de modelización en un determinado contexto: estructurar el campo; matematizar; trabajar con el modelo, incluyendo la solución de los problemas a que da lugar; validar el modelo, interna y externamente; analizar y criticar el modelo; comunicar sobre el modelo y sus resultados; vigilar y controlar todo el proceso de modelización.

Razonamiento matemático, como por ejemplo:

- Seguir y evaluar cadenas de argumentos;
- Conocer qué es una demostración matemática (y qué no es) y en qué se diferencia de otros tipos de razonamiento matemático, como por ejemplo el heurístico;
- Descubrir las ideas básicas en una determinada línea de argumento (sobre todo en una prueba), incluyendo la distinción de las líneas principales de los detalles, las ideas de los tecnicismos;
- Elaborar formal e informalmente argumentos matemáticos y demostrar declaraciones.

Cuadro 2. Gestionar el lenguaje matemático y las herramientas matemáticas

Representación de las entidades matemáticas (los objetos y situaciones), como por ejemplo: – Comprensión y utilización (decodificación, interpretación, distinción entre) diferentes tipos de representaciones de objetos matemáticos, fenómenos y situaciones; – Comprensión y utilización de las relaciones entre las distintas representaciones de la misma entidad, y conocer sus puntos fuertes y sus limitaciones; – Elegir y cambiar entre las diferentes representaciones.
Manejo de símbolos matemáticos y formalismos, como por ejemplo: – Decodificación e interpretación simbólica y formal del lenguaje matemático, así como la comprensión de sus relaciones con el lenguaje natural; – Comprender la naturaleza y las normas de los sistemas matemáticos formales (tanto la sintaxis como la semántica); – Traducción del lenguaje natural al formal y simbólico; – Manejo y manipulación de las declaraciones y expresiones que contengan símbolos y fórmulas.
La comunicación en, con, y acerca de las matemáticas, como por ejemplo: – Comprensión de textos escritos, visuales o orales que tengan un contenido matemático, en una variedad de registros lingüísticos; – Expresar estas cuestiones de forma escrita, visual o oral, con diferentes niveles de precisión teórica y técnica.
Hacer uso de los recursos y herramientas, como por ejemplo: – Conocer la existencia y propiedades de los diversos instrumentos y recursos disponibles para la actividad matemática, y conocer sus posibilidades y limitaciones; – Ser capaces de utilizar reflexivamente dichos recursos y herramientas.

Ésta es la base a partir de la cual la OCDE, en el marco del Proyecto DeSeCo, indica diversas competencias matemáticas necesarias para formar a ciudadanos que puedan identificar y comprender el papel que desempeñan las matemáticas en el mundo, emitir juicios bien fundados, utilizar las matemáticas y comprometerse con ellas, y satisfacer las necesidades de la vida personal como ciudadano constructivo, comprometido y reflexivo (OCDE, 2004).

En el cuadro 3 se presenta un análisis comparativo entre los estándares de procesos del NCTM (2000) y las competencias matemáticas (Niss, 2002; OCDE, 2004):

Cuadro 3. Comparación entre los estándares de procesos y las competencias matemáticas.

Estándares de procesos matemáticos (NCTM, 2000)	Competencias matemáticas (Niss, 2002)	Competencias matemáticas (OCDE, 2004)
Resolución de problemas	Planteamiento y resolución de problemas matemáticos	Planteamiento y resolución de problemas
	Uso de recursos y herramientas	
Razonamiento y prueba	Dominio de modos de pensamiento matemático	Pensamiento y razonamiento
	Razonamiento matemático	Argumentación
Comunicación	Comunicación en, con y acerca de las matemáticas	Comunicación
Conexiones	-	-
Representación	Representación de entidades matemáticas	Representación y uso de operaciones y lenguaje técnico, simbólico y formal
	Análisis y construcción de modelos	Construcción de modelos
	Manejo de símbolos matemáticos y formalismos	

Los procesos matemáticos y las competencias matemáticas que se exponen en el cuadro anterior subrayan una misma visión que enfatiza la capacidad de usar de forma comprensiva y eficaz las matemáticas que se aprenden en la escuela en una variedad de contextos, además del escolar. Se trata de un nuevo enfoque que de Guzmán (2001, p. 9) sintetizó de forma muy clara:

> "En la situación de transformación vertiginosa de la civilización en la cual nos encontramos, está claro que los procesos verdaderamente eficaces de pensamiento, que no se vuelven obsoletos con tanta rapidez, es lo más valioso que podemos enseñar a nuestros jóvenes. En nuestro mundo científico e intelectual tan rápidamente mutante vale mucho más proveerse de procesos de pensamiento útiles que de contenidos que rápidamente se convierten en ideas inertes ..."

Los procesos matemáticos y las competencias matemáticas permiten ampliar la perspectiva acerca de la naturaleza de las matemáticas como disciplina. En el estudio TEDS-M 2008 (el primer estudio comparativo a nivel internacional y a gran escala, sobre educación superior, centrado en la formación inicial de los profesores de matemáticas) se presentan dos visiones contrapuestas: a) las matemáticas como un conjunto de reglas y

procedimientos, y b) las matemáticas como un proceso de indagación. En la primera visión se tienden a ver las matemáticas como un conjunto de procedimientos que hay que aprender, con normas estrictas acerca de lo que es correcto o no, mientras que en la segunda visión se valoran las matemáticas como un instrumento para responder a preguntas y resolver problemas, en la que los procesos matemáticos se consideran herramientas de indagación, es decir, medios para un fin y no el fin en sí mismo. En el cuadro 4 se presentan algunas afirmaciones de ambas visiones:

Cuadro 4. Visiones acerca de la naturaleza de las matemáticas como disciplina (Ministerio de Educación, Cultura y Deporte, 2012).

Matemáticas como un conjunto de reglas y procedimientos	Matemáticas como un proceso de indagación
Las matemáticas son una colección de normas y procedimientos que determinan cómo se resuelve un problema. Saber matemáticas implica recordar y aplicar definiciones, fórmulas, hechos matemáticos y procedimientos. Para resolver una tarea matemática es necesario conocer el procedimiento correcto. En caso contrario uno está perdido. El rigor lógico y la precisión son fundamentales para las matemáticas. Para hacer matemáticas se requiere mucha práctica, la aplicación correcta de procedimientos rutinarios y estrategias de resolución de problemas. Las matemáticas significan aprender, recordar y aplicar.	Las matemáticas implican creatividad y nuevas ideas. En matemáticas uno puede descubrir y ensayar muchas cosas por sí mismo. Si uno se involucra en las tareas matemáticas, puede hacer descubrimientos (p. ej., conexiones, reglas y conceptos). Los problemas de matemáticas se pueden resolver de maneras diferentes. Muchos aspectos de las matemáticas tienen notable valor práctico. Las matemáticas ayudan a resolver problemas y tareas de la vida cotidiana.

La visión de las matemáticas como un conjunto de reglas y procedimientos, pues, se asocia a la instrucción matemática, es decir, se interpreta el proceso de enseñanza-aprendizaje de la disciplina como un conjunto de reglas y procedimientos que se adquieren a través de la ejercitación, mientras que la visión de las matemáticas como un proceso de indagación se corresponde con un enfoque más competencial, en el que se ofrecen a los aprendices diversas herramientas para que progresivamente aprendan a usar las matemáticas en su vida cotidiana. En el informe español del TEDS-M 2008 (Ministerio de Educación, Cultura y Deporte, 2012) los futuros maestros españoles muestran un mayor acuerdo en interpretar las matemáticas como un proceso de indagación (73,4% de respuestas de acuerdo) que en considerarlas como un conjunto de reglas y procedimientos (50% de respuestas de respaldo). Ruiz de Gauna, García y Sarausa (2013), en un estudio realizado con estudiantes de primer curso del grado de maestro, analizan las actitudes hacia la materia (un 40% admiten que les gustan las matemáticas) junto con otras

consideraciones referentes a los contenidos matemáticos que forman parte del currículo (se destaca sobre todo la geometría, con un 91% de acuerdo), o la utilidad y el sentido de las matemáticas (un 66% admiten que sirven para razonar y pensar). Aunque implícitamente se hace alusión a algunos procesos matemáticos, en dicho estudio no se analiza con detalle la opinión de los estudiantes en relación a este tipo de conocimientos matemáticos.

A partir de estos datos previos, en este estudio se quiere analizar con mayor detalle cuales son las consideraciones de los futuros maestros acerca de los procesos matemáticos. En este contexto, nuestra pregunta de investigación es:

- ¿Cuáles son las opiniones de los estudiantes para maestro sobre los aspectos que mejor definen a las matemáticas?

Particularmente, el objetivo de nuestro estudio es identificar qué lugar ocupan los procesos matemáticos en el sistema de creencias de los estudiantes para maestro sobre las matemáticas como disciplina.

METODOLOGÍA

Participantes

La muestra está formada por 142 estudiantes, 72 pertenecientes al Grado de Educación Infantil y 70 del Grado de Educación Primaria. Todos los estudiantes, en el momento que se realizó el estudio, estaban cursando primero en la Universidad de Girona.

La edad media de los estudiantes del Grado de Educación Infantil es de 21,2 años, y de los de Educación Primaria es de 20,3 años. El porcentaje de hombres en Educación Infantil es de 4,35% y en Educación Primaria es de 12,04%. El 56,5% de los estudiantes de Infantil provienen del ciclo formativo de grado superior en Educación Infantil, y el 29,8% de estudiantes de Primaria provienen de ciclos formativos de grado superior. De los estudiantes que provienen de bachillerato, el 14,28% de Infantil y el 16,13% de Primaria provienen de un bachillerato científico-tecnológico. Por lo tanto, de la muestra del estudio, solo el 4,4% en Educación Infantil y el 6,8% en Primaria, han cursado matemáticas en los dos últimos años antes de empezar los estudios universitarios.

Diseño y procedimiento

En el primer semestre de primero, antes de iniciar cualquier asignatura o módulo formativo relacionado con las matemáticas y su didáctica se administró un cuestionario a todos los participantes para identificar diversas creencias acerca de la educación matemática centradas en las diversas dimensiones indicadas por Caballero, Blanco y Guerrero (2008). En una de estas cuestiones se les solicitaba que indicaran tres aspectos clave (de mayor a menor importancia) que asociaban con las matemáticas, puesto que se consideró que implícitamente iba a aportar datos acerca de la visión de los estudiantes acerca de la naturaleza de las matemáticas como disciplina.

Para la categorización de las respuestas dadas se ha combinado la categorización deductiva y la inductiva (Bonilla y Rodríguez, 1995), es decir, en un primer momento se ha

partido de unidades de significado identificadas en marcos teóricos existentes (categorización deductiva) pero, posteriormente, con la revisión cuidadosa de todo el material, se han identificado subcategorías que emergen de la misma información (categorización inductiva).

Las tres categorías principales que se han considerado para clasificar las respuestas han sido: *Factores Cognitivos*, *Factores Procedimentales* y *Factores Actitudinales*. Estas tres categorías se han establecido a partir de la revisión de la literatura (NCTM, 2000; Caballero, Guerrero y Blanco, 2007; Guirado, Olivera, Mazzitelli y Aguilar, 2010; Ministerio de Educación, Cultura y Deporte, 2012; Ruiz de Gauna, García y Sarasua, 2013) y a partir de las definiciones y clasificaciones dadas por la OCDE en su Proyecto DeSeCo (OCDE, 2001) sobre las competencias básicas, donde considera la competencia como una combinación de conocimientos, destrezas y actitudes.

Los *Factores Cognitivos* incluyen elementos que ayudan al estudiante a "saber conocer". Esta categoría se ha subdividido en cuatro subcategorías definidas a partir de las respuestas dadas por los estudiantes y a partir de las categorías del trabajo de Guirado, Olivera, Mazzitelli y Aguilar (2010): *Inteligencia, memoria, comprensión y cálculo mental y escrito.* Los *Factores Procedimentales* permiten "saber hacer". En esta categoría, basándonos en los estándares de procesos definidos por el NCTM (2000), se han considerado las subcategorías: *resolución de problemas, razonamiento, comunicación y conexiones.* Por último, los *Factores Actitudinales* se conciben como el conjunto de aspectos que ayudan al alumno a "saber ser". A partir del trabajo de Guirado, Olivera, Mazzitelli y Aguilar (2010) y de las respuestas dadas por los estudiantes se han considerado cuatro subcategorías: *interés, esfuerzo, participación y autoconcepto*. En el cuadro 5 se presenta una síntesis de las categorías y subcategorías consideradas:

Cuadro 5. Categorías y subcategorías sobre la naturaleza de las matemáticas

Factores Cognitivos	Factores Procedimentales	Factores Actitudinales
Inteligencia Memoria Comprensión Cálculo mental y escrito	Resolución de problemas Razonamiento Comunicación y representación Conexiones	Interés Esfuerzo Participación Autoconcepto

Dado el tipo de población y de datos analizados, aunque la pregunta a analizar sea una variable cualitativa, la metodología que se ha utilizado para su análisis y discusión ha sido de tipo cuantitativo. Para tener en cuenta el orden de los tres aspectos clave que los estudiantes asocian con las matemáticas (de mayor a menor importancia), se han ponderado sus respuestas dando un peso de 0,5 al primer factor, de 0,3 al segundo y de 0,2 al factor que indican en tercera posición.

RESULTADOS

Para la exposición de los resultados, en primer lugar se muestran los datos obtenidos acerca de los tres aspectos clave que los estudiantes asocian con las matemáticas. Al haber ponderado las respuestas según el orden de los aspectos indicados (0,5; 0,3; 0,2), el número de estudiantes que se indican en las tablas de resultados de cada categoría no es un número natural.

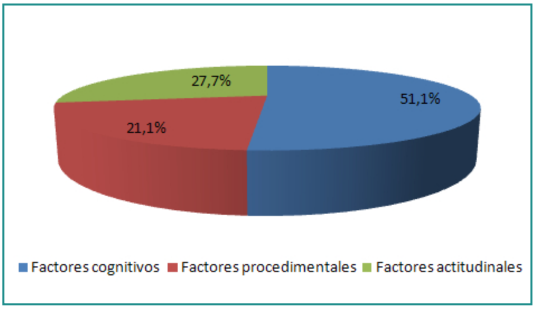


Figura 1. Gráfico comparativo entre las tres categorías.

Tabla 1. Resultados obtenidos en las tres categorías

	Nº estudiantes	Porcentaje
Factores cognitivos	72,6	51,1%
Factores procedimentales	30	21,1%
Factores actitudinales	39,4	27,7%
Total	142	100 %

Los resultados anteriores muestran que más de la mitad de los estudiantes para maestro (un 51,1%), considera que los aspectos cognitivos son los que mejor definen a las matemáticas. En segundo lugar consideran los factores actitudinales (un 27,7%), mientras que los aspectos que vinculan menos con las matemáticas son los procedimentales (21,1%).

A continuación se presentan los resultados de forma más detallada, diferenciando cuatro subcategorías dentro de cada categoría.

Tabla 2. Resultados obtenidos en las distintas subcategorías

		Nº estudiantes	Porcentaje	Media entre los factores
Factores cognitivos	Inteligencia	26,8	18,9%	18,55
	Memoria	3,8	2,7%	
	Comprensión	12,4	8,7%	
	Cálculo mental y escrito	31,2	22%	

		Nº estudiantes	Porcentaje	Media entre los factores
Factores procedimentales	Razonamiento	5,2	3,7%	7,65
	Comunicación	2,2	1,5%	
	Conexiones	6,1	4,3%	
	Resolución de problemas	17,1	12%	
Factores actitudinales	Interés	19,5	13,7%	9,3
	Esfuerzo	14,6	10,3%	
	Participación	0,7	0,5%	
	Autoconcepto	2,4	1,7%	
	Total	142	100%	

Estos datos indican que, en relación a los factores cognitivos, los aspectos que los estudiantes identifican más con las matemáticas son el cálculo mental y escrito (22%) y la inteligencia (18,9%). Dentro de los factores actitudinales, los aspectos más destacados son el interés (13,7%) y el esfuerzo (10,3%). Y respecto a los factores procedimentales, el aspecto que asocian más a las matemáticas es la resolución de problemas (12%). El factor cognitivo que menos asocian con las matemáticas es la memoria (2,7%), el factor actitudinal menos relevante es la participación (0,5%) y el factor procedimental que menos consideran es la comunicación (1,5%).

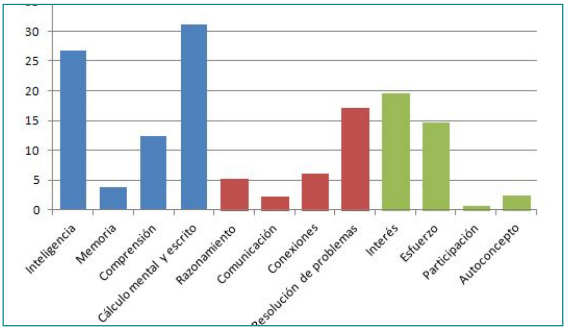


Figura 2. Gráfico comparativo entre las sub-categorías.

DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

En este estudio se han identificado las creencias de los estudiantes para maestro sobre la naturaleza de las matemáticas. Una primera interpretación de los resultados obtenidos confirma la presencia de tres categorías de factores: cognitivos, actitudinales y procedimentales, en contraposición a diversos estudios preliminares que subrayan exclusivamente factores cognitivos y actitudinales, incluidos en la agenda *Creencias y dominio afectivo: actitudes y cognición* (Llinares, 2008). En otras palabras, en estos estudios previos se consideran únicamente los factores de las matemáticas que permiten a los alumnos “saber conocer” y “saber ser”, de acuerdo con la terminología de la OCDE para

definir las competencias clave (OCDE, 2001). Consideramos que la incorporación de factores procedimentales, en la línea ya iniciada por algunos trabajos (NCTM, 2000; Guirado, Olivera, Mazzitelli y Aguilar, 2010), contribuye a comprender con mayor precisión el conjunto de creencias que acaban configurando la identidad profesional del maestro de matemáticas acerca de la naturaleza de las matemáticas. Estos factores responden al "saber hacer" (OCDE, 2001), e incluyen las formas de pensar propias de las matemáticas, como resolver problemas, razonar y demostrar, comunicar y representar o hacer conexiones (NCTM, 2000).

Una segunda interpretación de los resultados obtenidos es el escaso peso de los factores procedimentales en el conjunto de creencias acerca de la naturaleza de las matemáticas. Los datos obtenidos han puesto en evidencia que los futuros maestros no consideran suficientemente las formas de adquisición y uso de los contenidos matemáticos. Estos datos ponen de manifiesto una construcción de la identidad profesional del maestro de matemáticas que deja de lado algunas de las tendencias contemporáneas en educación matemática (NCTM, 2000; Niss, 2002; OCDE, 2004), en las que se destaca la importancia de los procesos de pensamiento matemático para el aprendizaje de las matemáticas en general y para la adquisición de la competencia matemática en particular. A la vez, los resultados de nuestro trabajo muestran algunas contradicciones con los datos del estudio internacional TEDS-M (Ministerio de Educación, Cultura y Deporte, 2012). Como se ha indicado, en dicho estudio los futuros maestros españoles muestran un mayor acuerdo en interpretar las matemáticas como un proceso de indagación (73,4% de respuestas de acuerdo), lo que significa que mayoritariamente asocian las matemáticas con una visión competencial que incluye la actividad heurística, la resolución de problemas o las conexiones con la vida cotidiana. Sin embargo, en nuestro estudio, cuando se les pregunta acerca de los factores que asocian con las matemáticas, estos aspectos procedimentales son los que tienden a ocupar las últimas posiciones en su escala de creencias. En una línea similar al TEDS-M, en el estudio de Ruíz de Gauna, García y Sarausa (2013), los factores procedimentales (y en concreto las acciones de "razonar" y "pensar") tienen una alta valoración entre los estudiantes (66%), mientras que en nuestro estudio el 3,7% de los estudiantes asocian el razonamiento a las matemáticas, y un 12% a la resolución de problemas. Una posible explicación es que las características de los participantes de ambos estudios son diferentes: en nuestro caso, se trata de estudiantes de primer curso de los Grados de Educación Infantil y Educación Primaria, mientras que el estudio TEDS-M se realizó con estudiantes de tercer curso de primaria de la antigua diplomatura de magisterio que ya habían recibido una formación en didáctica de las matemáticas.

De estos datos se desprenden algunas posibles implicaciones didácticas que deberían considerarse tanto en la formación inicial como en la formación permanente del profesorado. La consideración de los procesos matemáticos implica partir de un planteamiento curricular mucho más globalizado que no se limite a los contenidos de una única área, sino trabajar de forma integrada, explorando como se potencian unos y otros y usándolos sin prejuicios. Además, exige trabajar para favorecer la autonomía mental del alumnado, potenciando la elaboración de hipótesis, las estrategias creativas de resolución de problemas, la discusión, el contraste, la negociación de significados, la construcción conjunta de soluciones y la búsqueda de formas para comunicar planteamientos y resultados. En definitiva, pues, se trata de ayudar a gestionar el conocimiento, las habilidades y las

emociones pera conseguir un objetivo. En los últimos años son muchos los profesionales que han ido incorporando los procesos matemáticos en sus prácticas docentes (para una revisión más exhaustiva, consultar Alsina 2011, 2014), y es de esperar que vaya en aumento en el futuro dada la relevancia que actualmente se da a los procesos.

En cualquier caso, de acuerdo con Kaasila, Hannula y Laine (2012), los estudios acerca de la visión de las matemáticas de los futuros maestros tienen un papel importante porque revelan cómo van construyendo su identidad profesional, y desde este marco consideran que es necesario que los formadores de maestros comprendan sobre todo los puntos de vista negativos. La identificación y toma de conciencia de estas creencias es el requisito necesario para poder promover procesos de cambio durante la formación inicial (Kaasila, Hannula, Laine y Pehkonen, 2006, 2008), y evitar así que los futuros maestros accedan a la práctica profesional con unas creencias acerca de la naturaleza de las matemáticas que conlleven omisiones importantes durante el proceso de enseñanza-aprendizaje de la disciplina, como por ejemplo dejar de lado los procesos de pensamiento matemático.

Por esta razón va a ser necesario diseñar nuevos estudios que analicen con instrumentos más detallados las creencias de los futuros maestros acerca de los procesos matemáticos, ya que consideramos que el hecho de haber planteado una única pregunta sobre los aspectos clave que los estudiantes asocian con las matemáticas puede haber sido una limitación importante en el diseño de nuestro estudio. Paralelamente, sobre todo si en futuras investigaciones se confirman los resultados reveladores de este estudio, va a ser necesario diseñar programas de intervención que promuevan la incorporación de los conocimientos disciplinares y didácticos referentes a los procesos de pensamiento matemático en los módulos y asignaturas de didáctica de las matemáticas de los estudios del Grado de Maestro.

REFERENCIAS

Alsina, Á. (2011). *Educación matemática en contexto de 3 a 6 años.* Barcelona: ICE-Horsori

Alsina, Á. (2014). Matemáticas en la educación primaria. En N. Planas y Á. Alsina (2014). *Educación matemática y buenas prácticas.* (pp. 93-144). Barcelona: Editorial Graó (2ª edición).

Beauchamp, C. y Thomas, L. (2009). Understanding teacher identity: an overview of issues in the literature and implications for teacher education. *Cambridge Journal of Education, 39*(2), 175-189.

Beijaard, D., Meijer, P.C. y Verloop, N. (2004). Reconsidering research on teachers' professional identity. *Teaching and Teacher Education, 20,* 107-128.

BOE (2014). Real Decreto 126/2014, de 28 de febrero, por el que se establece el currículo básico de la Educación Primaria. Recuperado de: http://www.boe.es/buscar/pdf/2014/BOE-A-2014-2222-consolidado.pdf.

Bonilla, E. y Rodríguez, P. (2005). *Más allá del dilema de los métodos.* Colombia: Editorial Nomos.

Caballero, A., Blanco, L.J. y Guerrero, E. (2008). El dominio afectivo en futuros maestros de matemáticas en la Universidad de Extremadura. *PARADIGMA, XXIX* (2), 157-171.

Caballero, A., Guerrero, E. y Blanco, L.J. (2007), Las actitudes y emociones ante las Matemáticas de los estudiantes para Maestros de la Facultad de Educación de la Universidad de Extremadura. En M. Camacho, P. Bolea, P. Flores, B. Gómez, J. Murillo y Mª. T.

González (Eds.), *Investigación en Educación Matemática. Comunicaciones de los grupos de investigación. XI Simposio de la SEIEM* (pp. 41-42). Tenerefie: SEIEM.

De Guzmán, M. (2001). Tendencias actuales de la educación matemática. *Sigma,* 19, 5-25.

Esteve, O. y Alsina, Á. (2010). Hacia el desarrollo de la competencia profesional del profesorado. En O. Esteve, K. Melief y Á. Alsina (Eds.), *Creando mi profesión. Una propuesta para el desarrollo profesional del profesorado* (pp. 7-18). Barcelona: Editorial Octaedro.

Guirado, A.Mª, Olivera, A.C., Mazzitelli, C.A. y Aguilar, S.B. (2010). ¿Cuál es la representación que tienen los docentes acerca de ser un buen alumno de física y aprender física? *Revista Electrónica de Enseñanza de las Ciencias, 9*(3), 618-632.

Kaasila, R., Hannula, M. y Laine, A. (1012). "My personal relationship towards mathematics has necessarily not changed but…" Analyzing pre-service teachers' mathematical identity talk. *International Journal of Science and Mathematics Education 10,* 975-995.

Kaasila, R., Hannula, M., Laine, A. y Pehkonen, E. (2006). Facilitators for change of elementary teacher students' view of mathematics. En J. Novotaná, H. Moraová, M. Krátká, y N. Stehliková (Eds.), *Proceedings of the 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 385-392). Praga: PME.

Kaasila, R., Hannula, M., Laine, A. y Pehkonen, E. (2008). Socio-emotional orientations and teacher change. *Educational Studies in Mathematics, 67,* 111-123.

Llinares, S. (2008). Agendas de investigación en educación matemática en España: una aproximación desde "ISI-web of knowledge" y ERIH". En R. Luengo, B. Gómez, M. Camacho y L. Blanco (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XII* (pp. 25-54). Badajoz: SEIEM.

Lutovac, S. y Kaasila, R. (2011). Beginning a pre-service teacher's mathematical identity work through narrative rehabilitation and bibliotherapy. *Teaching in Higher Education, 16*(2), 225–236.

Lutovac, S. y Kaasila, R. (2013). Pre-service teacher's possible mathematical identities. Recuperado de: http://blogs.helsinki.fi/mavi-2012/files/2012/09/LutovacKaasila_MAVI-2012_revised-for-the-web2.doc.

MEC (2007a). ORDEN ECI/3854/2007, de 27 de diciembre, por la que se establecen los requisitos para la verificación de los títulos universitarios oficiales que habiliten para el ejercicio de la profesión de Maestro en Educación Infantil. *Boletín Oficial del Estado 312,* 53735-53738.

MEC (2007b). ORDEN ECI/3857/2007, de 27 de diciembre, por la que se establecen los requisitos para la verificación de los títulos universitarios oficiales que habiliten para el ejercicio de la profesión de Maestro en Educación Primaria. *Boletín Oficial del Estado 312,* 53747-53750.

Ministerio de Educación, Cultura y Deporte (2012). *TEDS-M. Informe español. Estudio internacional sobre la formación inicial en matemáticas de los maestros.* Madrid: Secretaría General Técnica. Subdirección General de Documentación y Publicaciones.

NCTM (2000). *Principles and standards for school mathematics.* Reston, Va.: NCTM.

Niss, M. (2002). *Mathematical competencies and the learning of mathematics: The Danish KOM Project.* Roskilde: Roskilde University.

OCDE (2001). *Defining and selecting key competencies.* Bruselas: OCDE.

OCDE (2004). *Informe PISA 2003. Aprender para el mundo de mañana.* Recuperado de: http://www.oecd.org/pisa/39732493.pdf.

Ruiz de Gauna, J., García, J. y Sarasua, J. (2013). Perspectiva de los alumnos de Grado de Educación Primaria sobre las Matemáticas y su enseñanza. *Números, 82,* 5-15.

Épsilon - *Revista de Educación Matemática* 2014, Vol. 31(3), nº 88, 21-38

Dificultades de los estudiantes de once grado al hacer transformaciones de representaciones de una función

Tulio Amaya De Armas
Corporación Universitaria del Caribe (Colombia)
Universidad Nacional de Educación a Distancia (UNED)
Natalia Sgreccia
Universidad Nacional de Rosario y Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas (Argentina)

Resumen: *Tradicionalmente, ha sido problemático el aprendizaje del concepto de función. En este trabajo se reportan los hallazgos de una investigación en donde se analizaron las dificultades presentadas por estudiantes de once grado al hacer transformaciones de representaciones de una función, con el registro tabular como registro principal. Para recoger la información se aplicó un cuestionario, con una situación que involucra el concepto de función. Las dificultades estuvieron relacionadas con la identificación del contenido de las representaciones, el funcionamiento de los registros y la coordinación entre ellos. Fue posible apreciar que los estudiantes no reconocen el registro tabular como apoyo válido para sustentar sus respuestas.*

Palabras clave: *registros semióticos de representación, coordinación entre registros, conversión, tratamiento, función.*

Difficulties of students from elevend grade to make changes of representations of a function

Abstract: *Traditionally, the learning of the concept of function has been problematic. In this paper we report the findings of an investigation which analyzed the difficulties presented by grade eleven students to make transformations of representations of a function, with tabular register as primordial one. To collect the information a questionnaire was applied with a situation involving the concept of function. The difficulties were related to the identification of the content of the representations, the operation of registers and the coordination between them. It was possible to identify that students do not recognize as a valid support the tabular register to support their answers.*

Keywords: *semiotic registers of representation, coordination between registers, conversion, treatment, function.*

INTRODUCCIÓN

Al analizar lo propuesto en los estándares del *National Council of Teachers of Mathematics* (2000) y del Ministerio de Educación Nacional de Colombia (2005) frente a los resultados de las investigaciones respecto a la conceptualización de la noción de función (Cordero, 1997; Dolores, 2004; Gatica et al., 2010; Hitt, 2000, 2003a, 2003b), se evidencia una descompensación en el abordaje dado a este concepto a través de diferentes registros semióticos de representación, lo que podría dificultar el desarrollo de pensamiento variacional en los estudiantes. Esta descompensación lleva al alumno a cometer errores y los errores, si no son resignificados apropiadamente, pueden conducir el proceso de aprendizaje por un camino equivocado, ya que los estudiantes se pueden acostumbrar a ellos y no distinguir lo adecuado de lo inadecuado. Incluso, por acumulación de malas experiencias, pueden llevar a los sujetos a no permitirse conflictos cognitivos, por lo que en estas condiciones sería difícil la adquisición de conocimientos (Amaya, 2010).

Además, uno de los conceptos básicos relacionados a la enseñanza y el aprendizaje del cálculo es, sin duda, el de función. Asimismo, numerosas investigaciones en el campo de la Educación Matemática (Benítez, 2010; D'Amore, 2006; Ochoviet y Oktaç, 2011; Sánchez-Matamoros, García y Llinares, 2008) han puesto de manifiesto que existen dificultades persistentes en los estudiantes, ligadas a la construcción de este concepto (Del Castillo, 2003). Una de estas dificultades, según Duval (2004), es el tránsito entre diferentes registros de representación; esto es, identificar elementos en un registro de partida y encontrar su equivalente en un registro de llegada. En particular, Duval (2012a) considera que, a diferencia de otras ciencias, el acceso al objeto de estudio en matemáticas es exclusivamente semiótico y que toda actividad matemática consiste en la transformación de representaciones semióticas –producciones constituidas por signos que pertenecen a un sistema de referencia, el cual tiene sus propias reglas de significación y de funcionamiento–.

De lo anterior se puede deducir que este proceso de transformación de representaciones es esencial en el aprendizaje de las matemáticas, ya que la única forma de acceder a los conocimientos matemáticos es a través de las representaciones semióticas (Hitt, 2003a). Las representaciones en diferentes registros se complementan, es decir, ningún sistema de representación puede producir una representación cuyo contenido sea del todo completo y adecuado al objeto representado, por lo que el recurso a varios registros se considera condición necesaria para la conceptualización (Del Castillo, 2003). Esto se debe, según Duval (1999), a que no hay conocimiento que un sujeto pueda movilizar sin una actividad de representación, es decir, no es posible estudiar los fenómenos relativos al conocimiento sin recurrir a las representaciones semióticas. En este sentido se ha fortalecido la idea de que cuando se usan en la enseñanza de las matemáticas actividades didácticas que favorecen la utilización y articulación entre diferentes registros, el aprendizaje resulta beneficiado.

Se evidencia así que un sistema de representación coopera en la construcción de objetos matemáticos, relaciones y procesos mediante la creación de un ambiente en el cual

se comparten los artefactos culturales lingüísticos que pueden expresarse en la comunidad (Kaput, 1989). También pone en evidencia la importancia de que los alumnos conecten los diferentes sistemas semióticos de representación con los elementos del medio sociocultural donde se desempeñan.

El presente estudio se centra en el análisis de las transformaciones entre representaciones que realizan estudiantes colombianos de 15-17 años de edad. Se caracterizan sus dificultades, tanto con la identificación del contenido de la representación de partida como con el funcionamiento de los registros en los que se hacen las representaciones y la coordinación entre ellos, en el tema funciones.

FUNDAMENTACIÓN TEÓRICA

En las últimas décadas las investigaciones en Educación Matemática han tenido un importante desarrollo, presentándose algunos acuerdos entre administradores educativos y grupos de investigadores, quienes a su vez han sentado algunas sugerencias sobre el tipo de problemas que se debe utilizar en matemáticas -que despierten el interés de los alumnos y favorezcan su aprendizaje-, la forma de organizar las secuencias de actividades utilizadas en clase de matemáticas y la necesidad de analizar las producciones de los estudiantes -para utilizar sus dificultades de comprensión en beneficio de su propio aprendizaje-. Este trabajo se encuadra en esto último.

En particular, los contextos de representación usados en la actividad matemática surgen como hilo de enlace que permite proponer problemas interesantes a través de los cuales analizar las dificultades de comprensión de los estudiantes –a través de, por ejemplo, sus errores conceptuales– y usarlos para mejorar sus procesos de aprendizaje.

En relación con el tipo de actividades para favorecer el desarrollo del pensamiento matemático de los estudiantes, el *National Council of Teachers of Mathematics* (2000) considera fundamental que se los enfrente a actividades que constituyan un reto para su curiosidad, que los estimulen a usar sus presaberes, a investigar lo que desconozcan y a analizar los contenidos estudiados. Específicamente, el Ministerio de Educación Nacional (2005) considera indispensable el estudio de patrones, nociones y conceptos propios del pensamiento variacional, el cual tiene que ver con el reconocimiento, la percepción, la identificación y la caracterización de la variación y el cambio en diferentes contextos, así como con su descripción, modelación y representación en distintos sistemas o registros simbólicos, ya sean verbales, icónicos, tabulares, gráficos o algebraicos. Tiene como propósito construir distintos acercamientos significativos para la comprensión y uso de los conceptos y procedimientos de las funciones y sus sistemas analíticos así como del cálculo numérico y algebraico. Además, cumple un papel preponderante en la resolución de problemas sustentados en el estudio de la variación y el cambio, y en la modelación de procesos de la vida cotidiana. Su estudio se inicia con la detección de los criterios que rigen regularidades o reglas de formación, para identificar la unidad que se repite periódicamente dando lugar a un patrón.

El tipo de actividades sugeridas por el *National Council of Teachers of Mathematics* (2000) y el análisis de secuencias y patrones recomendado por el Ministerio de Educación Nacional (2005) pueden desarrollar en los estudiantes la capacidad para identificar o construir un patrón de regularidad y la capacidad para reproducirlo en diferentes

registros, por medio de un cierto procedimiento, algoritmo o fórmula. Según Del Castillo (2003), este proceso de establecer congruencias es condición necesaria para la comprensión de un concepto matemático.

El análisis de las dificultades de comprensión de los estudiantes invocando sus concepciones es indispensable para ayudarlos a entender el tema que se esté estudiando, para lo que es necesario analizar sus errores conceptuales. Al respecto, Godino, Font y Batanero (2003) mencionan:

> (…) hablamos de error cuando el alumno realiza una práctica (acción, argumentación, etc.) que no es válida desde el punto de vista de la institución matemática escolar. El término dificultad indica el mayor o menor grado de éxito de los alumnos ante una tarea o tema de estudio. Si el porcentaje de respuestas incorrectas (índice de dificultad) es elevado se dice que la dificultad es alta, mientras que si dicho porcentaje es bajo, la dificultad es baja (p.69).

Este planteamiento implica concebir la práctica curricular y evaluativa como un seguimiento permanente al proceso de adquisición de conocimientos. El error se constituye en una vía natural de acceso al conocimiento, una manifestación de un proceso constructivo que se debe encauzar y orientar de tal manera que el que aprende se termine beneficiando.

Por otro lado están los contextos de representación usados en la actividad matemática. Duval (2004) considera prioritarias las posibilidades de transformar una representación semiótica en otra representación semiótica, como base en un proceso de comunicación que busca saber cómo puede ser codificado/decodificado un objeto matemático para poder ser comprendido por alguien. Según este autor, todo progreso de conocimiento en matemáticas pasa por este trabajo de transformación. Distingue dos tipos de transformaciones: el *tratamiento*, que es una transformación estrictamente interna en un registro determinado, con cierta homogeneidad en las representaciones producidas, donde la producción se hace como si cada representación fuera autosuficiente, y la *conversión*, que es una transformación de un objeto de un registro a otro, es decir, es aquella en la que la representación se pone en paralelo con otra representación de otro registro.

La conversión de un registro a otro puede resultar congruente o no; es decir, el pasaje entre dos representaciones de un mismo objeto puede hacerse en un sentido y no hacerse en el otro. Además, las representaciones de un mismo objeto pueden resultar heterogéneas; esto es, el contenido de una representación en un registro dado puede ser sustancialmente diferente al contenido de otra representación en otro registro. Para Duval (2004), si se quieren comprender los procesos de aprendizaje de las matemáticas, es necesario tomar en cuenta muy seriamente esta heterogeneidad, estableciéndose así la necesidad de utilizar más de una representación para acceder al conocimiento matemático y de conocer la proveniencia de las transformaciones; es decir, si provienen de un tratamiento o de una conversión, que permita un análisis cognitivo de las dificultades en la adquisición de los conocimientos matemáticos.

Las representaciones matemáticas o sistemas simbólicos matemáticos son sistemas de representaciones especiales en los que el mundo representado es una estructura matemática y el mundo representante es un esquema de símbolos que contiene correspondencias especiales (Kaput, 1987). Los sistemas simbólicos matemáticos, de la misma

manera que el lenguaje natural y los sistemas pictóricos, controlan el influjo de experiencias al separarlos en pedazos, asignando los símbolos a dichos pedazos y coordinando estas notaciones en un entorno adecuado de matices y referentes complejos. El sistema de símbolos matemáticos y sus conexiones puede formar una estructura que actúa para representar otro sistema de símbolos que exhibe una autosimilitud cuando se amplifica (Meel, 2003). Es así que, a través de las representaciones externas de un objeto matemático y las relaciones entre ellas, es posible estructurar nuevas representaciones que pueden tener connotaciones diferentes a las que les dieron origen.

Entre las tantas representaciones que permite una función, está la representación analítica, la cual a su vez puede asumir varias formas: *algebraica*, consistente en una fórmula que permite modelar la situación en juego; *polinomio aritmético*, como resultado de reemplazar un valor numérico en un registro algebraico; *secuencia*, que permite determinar el patrón de regularidad o de crecimiento de una función. Otra de las representaciones semióticas de una función es la *tabular*, en la que se parte de una tabla y se ubican las entradas de tal forma que el número de columnas (o filas, según se ordenen) corresponde al total o gran parte de las cantidades que intervienen en la situación, que vienen a ser los elementos que constituyen la función en ese registro.

Al respecto, diversas investigaciones (Amaya, 2010; Carrión, 2007; Dolores, 2004; León y Corredor, 2003) han tratado de identificar los problemas más comunes en el aprendizaje de las matemáticas, a través del análisis de las producciones de los estudiantes, sus procedimientos espontáneos, sus errores y sus incomprensiones. Han intentado dilucidar elementos acerca de su funcionamiento cognitivo y proponer formas para mejorar la adquisición de habilidades que permitan a los alumnos acceder con mayor facilidad a los conceptos. Comprender matemáticas se manifiesta a través de habilidades a disposición y transferibles a diversos espacios de razonamiento en y sobre la realidad. Para Meel (2003), comprender en matemáticas significa saber qué hacer y por qué se debe hacer algo con un concepto matemático en el momento que se requiera utilizarlo, lo que proporciona vías para la transferencia y extracción de información desde la memoria del estudiante. Esta idea está relacionada con la manera como se construyen conceptos o redes conceptuales, vinculados a una serie de procesos cognitivos en relación con representaciones simbólicas; esto es, a la significación que un individuo le atribuye a un objeto matemático al vincular las representaciones internas y externas con una situación contextual.

Según Hitt (2000), una idea matemática -o procedimiento o hecho- es entendida si su representación mental es parte de una red de representaciones. El grado de entendimiento es determinado por el número y la fuerza de las conexiones. En este sentido, la adquisición de un concepto por parte de un individuo se dará cuando coordine por lo menos dos de sus representaciones. Esto tiene que ver, según Duval (1999), con la articulación entre sus representaciones semióticas. U*n concepto matemático visto en sus diferentes representaciones proporcionará información específica, dando solidez al concepto.* Para Meel (2003), estos mecanismos producen significados y, por lo tanto, desarrollan comprensión para el estudiante por medio de la creación de nuevos vínculos entre los sistemas de representación o los elementos de reorganización dentro de un sistema de representación.

De lo anterior se reconoce que la comprensión de un objeto matemático se hace por medio de las representaciones semióticas, lo cual se basa en la ley fundamental del funcionamiento cognitivo de Duval (1999): no hay noesis sin semiosis. Se manifiesta a través de la soltura en la actividad cognitiva de conversión. De aquí cabe destacar el papel de las representaciones semióticas como andamio en la adquisición de los conocimientos matemáticos. Se basan en tratamientos y conversiones entre registros, que permiten conexiones entre los elementos de una red (el concepto) así como de la estructura cognitiva (como un todo). Según Duval (2004), en matemáticas, poder cambiar de sistema de representación es una exigencia cognitiva absolutamente necesaria y fundamental, porque el acceso a los conocimientos matemáticos requiere la integración en una arquitectura cognitiva de los sistemas semióticos de representación. De hecho "se cree que la familiarización progresiva con un nuevo tipo de representación provoca de manera casi natural el pasaje de este tipo de representación a los tipos de representación anteriormente utilizados" (Duval, 2004, p.30).

Además, Duval (2012b) considera que las diferencias que separan las matemáticas de otros campos del conocimiento provienen del modo de acceso a los objetos estudiados: en matemáticas se hace por medio de la producción de representaciones semióticas y no por la percepción o la utilización de instrumentos, como ocurre en otras ciencias.

> Esto nos permitirá inferir tres ideas clave para describir el modo de funcionamiento cognitivo que caracteriza al pensamiento matemático. (1) Los registros son los sistemas productores de representaciones semióticas. (2) La comprensión en matemáticas moviliza siempre implícita o explícitamente al menos dos registros; dicho de otra manera, la comprensión en matemáticas requiere la coordinación y el funcionamiento en sinergia de varios registros. (3) Cada registro abre un campo de transformación de las representaciones, y por lo tanto, posibilidades de tratamiento matemático que le son propias (p.15).

Duval (2004) considera que el reto de la enseñanza para la formación inicial no es tanto la adquisición de tal o cual conocimiento matemático, sino -a través de ello- el desarrollo de las capacidades de pensamiento del alumno. El desarrollo de estas capacidades depende de adquisiciones funcionales de diferentes sistemas que se requieren para la comprensión de todos los conocimientos que él deberá adquirir, no solamente en la escuela, sino después de ella. Por estar en un mundo en el cual ningún individuo puede aprender de antemano lo que le será profesional o humanamente útil, el reto de la enseñanza en la formación inicial es dar al estudiante los medios para comprender y aprender por él mismo. Al respecto, la UNESCO (2005) considera que la escuela, como responsable tradicional de la educación de los miembros de una sociedad, debe bregar para que estos adquieran una formación básica que les permita aprender a aprender, y hacerlo continua, sistemática y permanentemente. Lo que está en juego, según Duval (2012a), es el desarrollo de la autonomía intelectual de los estudiantes. Desde esta perspectiva es que las matemáticas pueden aportar una gran contribución a la formación de los alumnos.

METODOLOGÍA

Se asume un estudio descriptivo de casos (Servan y Servan, 2010), bajo un enfoque cualitativo de tipo empírico (Bravin y Pievi, 2008). Las transformaciones entre registros, tanto tratamientos como conversiones, se constituyeron en las categorías de análisis de la investigación. Se desarrolló en tres etapas fundamentales:

a) Revisión documental: consistió en una búsqueda bibliográfica a fin de obtener antecedentes de investigaciones y fundamentar a nivel teórico lo relativo a las dificultades de los estudiantes con las transformaciones de representaciones del concepto de función.

b) Diseño y aplicación de instrumentos: se elaboraron, adecuaron y pusieron en marcha los protocolos empleados en la investigación.

c) Obtención y análisis interpretativo de resultados: teniendo en cuenta el desempeño estudiantil en las transformaciones entre registros del contenido función, se procesó la información recabada y se avanzó hacia la discusión de los hallazgos.

Los informantes fueron 50 estudiantes (E_n, con n = 1, 2, 3, …, 50) de undécimo grado de la media académica de una escuela pública colombiana, con edades entre 15 y 17 años, en un curso ordinario de pre-cálculo previo al ingreso a la universidad. Para este trabajo el desempeño fue de manera individual.

En una investigación más amplia, en la que se inscribe este trabajo, se utilizaron cuatro tipos de técnicas: cuestionarios escritos con preguntas abiertas, observación participante, entrevistas semiestructuradas y grupos de discusión. En cuanto a los cuestionarios, cabe señalar que se aplicó un total de seis, cada uno involucrando una situación problemática. Aquí se comparten los resultados relativos a una de las situaciones, en la que se consideró al registro tabular como registro principal. Los contenidos matemáticos requeridos ya habían sido desarrollados en el curso.

La situación presentada está constituida por ocho cuestiones a resolver:

En la siguiente tabla se muestran los costos de producción de una empresa de discos compactos.

Número de discos	*Costo (en dólares)*
1000	*116000*
2000	*128000*
3000	*140000*
5000	
6100	
	224000
15000	
72000	

1) *Termina de llenar la tabla.*
2) *Determina el costo de 5500 discos y de 14500 discos respectivamente.*
3) *Explica cómo obtuviste la respuesta a la pregunta 2).*
4) *¿Qué cantidades intervienen en la situación? ¿Cuáles varían y cuáles son constantes o permanecen fijas?*
5) *¿Qué relación de dependencia hay entre las variables?*
6) *Si se sabe que el costo de producción fue de 314000 dólares, ¿cuántos discos se produjeron?*
7) *Obtén una expresión matemática que permita calcular los costos de producción para cualquier cantidad de discos compactos.*
8) *Realiza una gráfica que represente esta situación.*

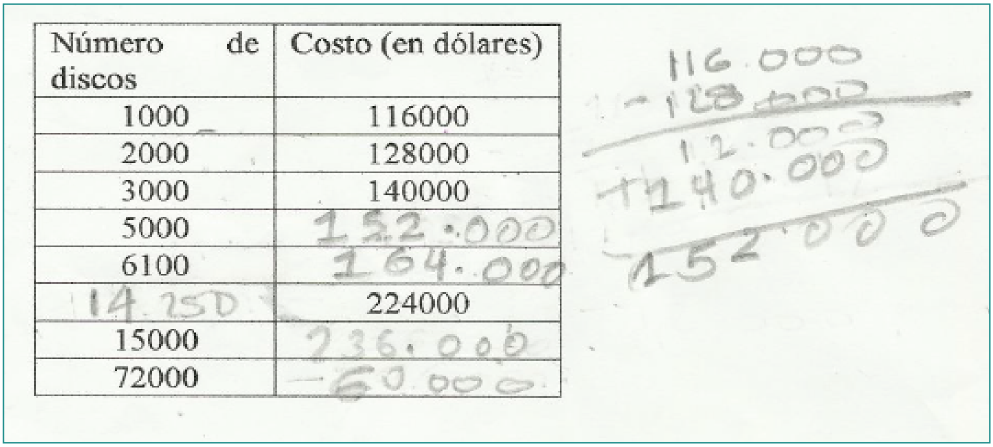
Para procesar la información se analizaron las resoluciones de los estudiantes para cada categoría de análisis, atendiendo tanto a los tratamientos como a las conversiones empleadas. Se empleó la técnica de análisis del contenido (Ander-Egg, 2003) para estudiar el contenido manifiesto de las producciones escritas al abordar las cuestiones planteadas. Se agruparon las resoluciones con respuestas similares y se fue registrando en una matriz de datos el porcentaje de alumnos de cada grupo así como las características de los procedimientos llevados a cabo, ejemplificando en algunos casos con el de algún estudiante en particular.

RESULTADOS

En lo que sigue se describen algunas características de los desempeños estudiantiles al realizar transformaciones de registros en la resolución de la situación planteada.

Cuestión 1. “Termina de llenar la tabla”.

Una característica de las resoluciones del 92% de los estudiantes fue el paso previo al registro analítico-aritmético, donde realizaron las operaciones que consideraron pertinentes, para el llenado de la tabla. Es decir, primero hicieron una conversión, utilizando el registro analítico-aritmético como registro auxiliar. Realizadas las operaciones (transformaciones tipo tratamientos) en este registro, volvieron a hacer otra conversión, al registro tabular como registro principal, y entonces procedieron a llenar la tabla (Fig. 1). Realizaron un tratamiento en cierto sentido sin autosuficiencia, necesitando de la articulación con el registro analítico-aritmético como registro auxiliar para poder funcionar. Sin embargo, teniendo en cuenta que ningún sistema de representación produce una representación cuyo contenido sea del todo completo y adecuado al objeto representado (Del Castillo, 2003), el recurso a otros registros podría considerarse oportuno y hasta conveniente, quedando la inquietud acerca de las reglas compartidas entre los registros en juego.



Número de discos	Costo (en dólares)
1000	116000
2000	128000
3000	140000
5000	152.000
6100	164.000
14.250	224000
15000	236.000
72000	60.000

Figura 1. Tabla completada por el estudiante E_8

Particularmente E_8 parece asumir de inmediato un modelo lineal afín de la situación. Encuentra la diferencia entre las dos primeras entradas (omitiendo signos) para conocer la constante de proporcionalidad directa (12000) cada 1000 unidades (discos). Procede a adicionar 12000 a filas consecutivas posteriores de la columna "costo", sin detenerse demasiado a observar el incremento correspondiente en la cantidad de discos (pues en las tres primeras filas el incremento de discos es de a 1000 unidades, pero en la cuarta fila el incremento es de 2000 discos y en la siguiente es de 1100). En concordancia con lo planteado por Carrión (2007), en la resolución de E_8 se advierten errores tanto en la ubicación de las cantidades con las que se opera como en la escritura matemática implicada.

Cuestión 2. "Determina el costo de 5500 discos y de 14500 discos respectivamente".

En su mayoría los estudiantes se percataron de que el incremento en el costo de producción era un múltiplo de 12. Sin embargo, al variarles el incremento en la cantidad de discos de 1000 a 100, no hicieron el cambio de 12000 a 1200 en los costos. Esto les impidió seguir un patrón para cualquier cantidad de discos.

Precisamente el 72% de los estudiantes identificó el patrón de regularidad y de crecimiento de la situación; sin embargo solo el 8% lo utilizó adecuadamente. El 12% empleó los datos de la tabla y los modificó con información que se puede deducir de la situación, pero que no aparece explícita en la tabla que se les pide llenar. El 6% de los estudiantes encontró el costo para producir cada disco si no se tuvieran costos fijos y lo utilizó para dar su respuesta. El resto trató de encontrar este valor, pero haciendo una regla de tres simple directa, sin excluir los costos fijos de producción y sin llegar a la respuesta pedida. Es así que se evidencian múltiples interpretaciones de la situación, y aunque no todas ellas son adaptadas a esta, sí muestran rasgos característicos genuinos del concepto de función; lo que según Gallardo, González y Quintanilla (2013) es un indicio claro de que algo se ha comprendido del concepto.

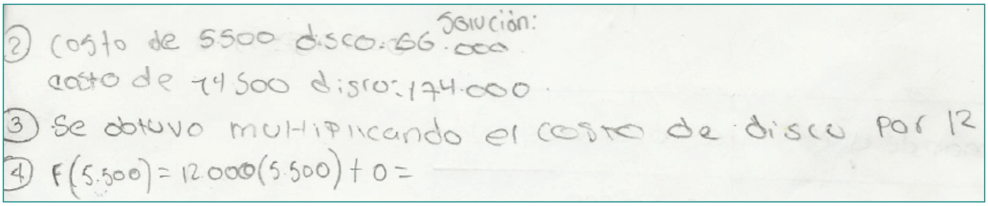

2) costo de 5500 disco: 66.000 Solución:
costo de 14500 disco: 174.000
3) Se obtuvo multiplicando el costo de disco por 12
4) F(5.500) = 12.000(5.500) + 0 =

Figura 2. Descripción del procedimiento efectuado por el estudiante E12

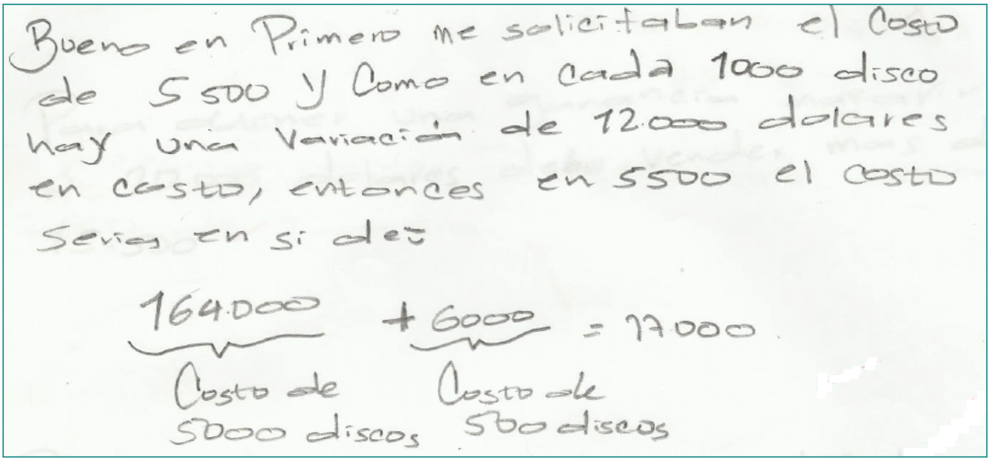
Cuestión 3. "Explica cómo obtuviste la respuesta a la pregunta 2)".

Fueron notorias las dificultades de los estudiantes al intentar describir los procesos realizados: el 36% realizó de manera adecuada los procedimientos y solo el 16% los describió correctamente, el 32% describió correctamente un procedimiento errado y los restantes (32%) no pudieron ni con el proceso ni con su descripción. Al tratar de explicar los procedimientos que siguieron para obtener sus respuestas, lo que hicieron fue repetir lo realizado anteriormente, acorde a lo reportado por Amaya y Barrera (2009). En las explicaciones dadas por los estudiantes se evidencian dificultades al pasar de cualquier registro de representación al del lenguaje materno (coloquial); es decir, esta conversión le resultó problemática a un grupo considerable de estudiantes. Esto coincide con los hallazgos de Caligaris, Schivo, Romiti y Sgreccia (2013), en este caso, en el ingreso a la universidad.

Un ejemplo de esta situación se muestra en la Fig. 2, donde el estudiante E_{12} manifestó que hizo algo que en realidad no es lo que se ve que hizo. Al resolver un polinomio aritmético dice que multiplicó por 12, cuando en realidad lo hizo por 12000. Los resultados de su resolución no coinciden con lo que le daría haciendo lo que dice que hizo (cuyos resultados sí serían válidos).

Sin embargo, al validar esta respuesta en un grupo de discusión, el estudiante da muestra de que su comunicación escrita fue la inadecuada, porque en su oralidad fue bien explícito aclarando adecuadamente lo que realizó. En general los estudiantes dan la cifra de cualquier cantidad sin decir los miles, incluso a veces también así lo escriben. Pero al cuestionárseles sobre la incoherencia de los valores, hicieron la aclaración que era 12000, acotando "todo el mundo dice 12". Fue prácticamente una constante en este grupo de estudiantes: ser más explícitos y precisos en su comunicación oral que en la escrita.

En la conversión al registro coloquial parece que los estudiantes dejaron el proceso de asimilación -en el sentido de Piaget- a medias, al quedarse solo en el manejo de datos, estableciendo pocos vínculos entre la nueva información y su estructura mental constituida (Meel, 2003). Es decir, lograron establecer pocas conexiones entre el contenido de los registros que los ayudara en la comprensión de la situación y el proceso de conexión entre las representaciones. Esto requiere un manejo adecuado de la relación entre el conocimiento y los elementos de la red, así como de la estructura como un todo. Acorde con estas ideas, el progreso matemático -lograr generalizar y justificar los procedimientos de solución a tipos de problemas cada vez más amplios (Godino et al, 2003)- fue logrado por pocos estudiantes (16%) en esta investigación. Y este proceso de establecer



Bueno en Primero me solicitaban el Costo de 5500 y Como en cada 1000 disco hay una Variación de 12.000 dólares en costo, entonces en 5500 el costo seria en si de:

$\underbrace{164.000}_{\text{Costo de 5000 discos}} + \underbrace{6000}_{\text{Costo de 500 discos}} = 17.000$

Figura 3. Descripción del procedimiento efectuado por el estudiante E21

congruencias es, según Del Castillo (2003), condición necesaria para la comprensión en matemáticas.

En el manuscrito que se muestra en la Fig. 3 se evidencia que el estudiante E_{21} reconoció algunos elementos significativos de la función, teniendo en cuenta que para Tall (1985) el propósito de toda función es mostrar cómo varía algo. El hecho de que un alumno reconozca que en la situación se da el proceso de variación es de gran relevancia para este estudio, por cuanto el hecho de llevarlos a realizar transformaciones de registros se convirtió en una intervención para la mejora en la comprensión del tema.

Cuestión 4. "¿Qué cantidades intervienen en la situación? ¿Cuáles varían y cuáles son constantes o permanecen fijas?".

Los estudiantes (64%) presentaron serias dificultades relacionadas con el reconocimiento de los elementos de la función y con el manejo de las operaciones; es decir, con la identificación del contenido de las representaciones y con el funcionamiento del registro, en términos de Duval (2004). Sin embargo, el 48% de ellos identificó ciertos elementos de la función, pero no alcanzó a dar respuestas del todo acertadas, por omitir otros. Por ejemplo, se dieron cuenta que por cada incremento de 1000 en la cantidad de discos se presentaba un incremento de 12000 dólares en el costo de producción, pero al dar su respuesta no tuvieron en cuenta que en la cuarta fila hubo un salto en la secuencia de número de discos (se omitió el 4000), por lo que en la primera entrada que llenaron de la tabla (correspondiente al costo para 5000 discos), en lugar de 164000 (140000+12000+12000) colocaron 152000, que era el valor correspondiente a 4000.

Otra de las dificultades fue relacionar los elementos de la función con su significado contextual. Por ejemplo, les costó aceptar que los valores de la función correspondieran con los costos de producción, que los costos fijos por unidad fueran 12 y no 12000, y que los costos fijos de producción fueran 104000 y no 116000, evidenciándose lo que Benítez (2010) llama interpretación local de la situación.

Cuestión 5. "¿Qué relación de dependencia hay entre las variables?".

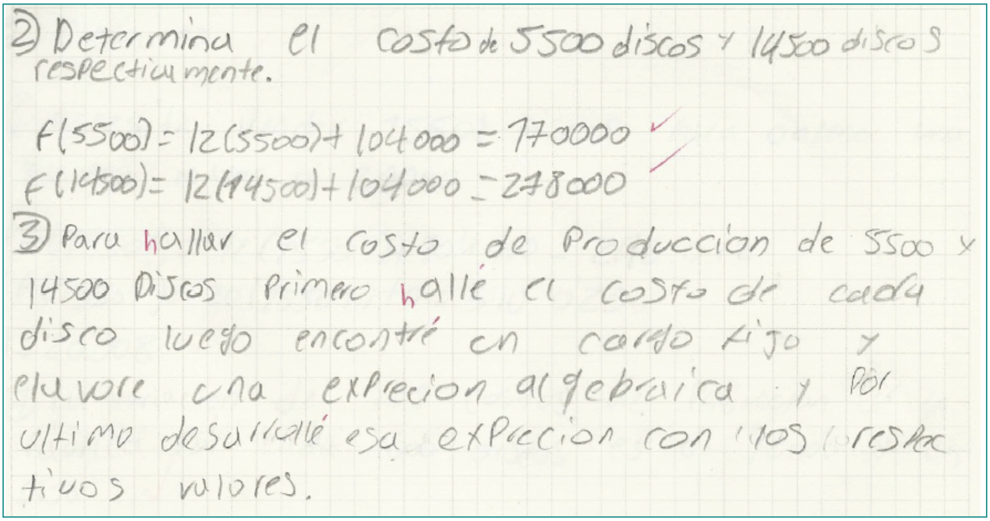
Un alto porcentaje de estudiantes (76%) presentó dificultades para relacionar los elementos de la función en una transformación tipo conversión. En cada registro pudieron identificar solo algunos elementos. Por ejemplo, ignoraron los costos fijos de producción y trabajaron con la función lineal como si fuera una función afín, evidenciándose un obstáculo en el sentido de Brousseau (1999). Aquellos que identificaron los elementos de la función (24%) también pudieron clasificarlos y establecer relaciones de dependencia entre ellos. Además, cabe advertir que el 16% de los estudiantes utilizó un registro auxiliar analítico-aritmético para dar respuesta a la consigna; mostrándose nuevamente que el proceso de hacer transformaciones entre registros no es una cuestión sencilla ni espontánea, es decir, estos procesos ontosemióticos de identificación de aspectos comunes en distintos registros suelen resultar complejos.

Cuestión 6: "Si se sabe que el costo de producción fue de 314000 dólares, ¿cuántos discos se produjeron?".

Ningún estudiante utilizó el concepto de ecuación para encontrar la incógnita solicitada, ni en la entrada de la tabla que implicaba un tratamiento, ni en la pregunta que implicaba una conversión al registro algebraico, coincidiendo en este sentido con lo reportado por Ochoviet y Oktaç (2011). Los que dieron con la respuesta, lo hicieron por tanteo (24%) o utilizando el patrón deducido en la secuencia (16%). Es decir, a los estudiantes se les dificultó más encontrar el número de discos cuando se les dio previamente el costo de producción para una cierta cantidad de discos, que el proceso inverso: hallar el costo de producción para una determinada cantidad dada de discos. El primer caso es un proceso que lleva implícito el concepto de ecuación, que no fue utilizado por ningún estudiante para dar respuesta a esta pregunta. El segundo caso parece ser más familiar a los estudiantes, ya que es dar solución a un polinomio aritmético -como el mostrado en la Fig. 4, con el que se trabaja con frecuencia en cursos anteriores y en asignaturas como Física y Química- o seguir el patrón de regularidad hasta dar con la respuesta.

Sin embargo resulta curioso que un grupo de estudiantes haya encontrado y utilizado una expresión algebraica que modelara la situación y no la hubieran utilizado para encontrar una incógnita. Aquí los estudiantes no pudieron concebir la letra como número generalizado, lo que les pudo impedir usar el concepto de ecuación para encontrar la incógnita solicitada. Esto es, establecer la equivalencia entre la expresión algebraica y el valor dado para los costos de producción que lo llevaría a plantear una ecuación y, de resolverla, a encontrar el número de discos correspondientes a esos costos de producción (fig. 4).

Además, cabe señalar que el 80% de los estudiantes no utilizó la información que había consignado en su tabla para responder otras preguntas, en concordancia con lo reportado por Amaya y Barrera (2009), donde la mayoría de los alumnos realizó nuevos procedimientos para responder una pregunta, cuya respuesta ya había obtenido al llenar la tabla.


2) Determina el costo de 5500 discos y 14500 discos respectivamente.

$f(5500) = 12(5500) + 104000 = 170000$
$f(14500) = 12(14500) + 104000 = 278000$

3) Para hallar el costo de produccion de 5500 y 14500 Discos primero hallé el costo de cada disco luego encontré en cargo fijo y elavore una exprecion algebraica y por ultimo desarrollé esa exprecion con los respectivos valores.

Figura 4. Descripción del procedimiento efectuado por el estudiante E18

Se evidencia en los estudiantes dificultades para conectar las representaciones en los registros tabular, analítico y del lenguaje materno, en sintonía con lo reportado por Sánchez-Matamoros et al. (2008), lo que según Hitt (2000) podría utilizarse como indicio de si se comprende o no la situación.

Cuestión 7. "Obtén una expresión matemática que permita calcular los costos de producción para cualquier cantidad de discos compactos".

El mismo grupo de estudiantes que pudo relacionar los elementos de la función modeló la situación funcional, recurriendo y sin recurrir a un registro auxiliar. De salida escribieron una expresión analítica y la utilizaron para obtener otras respuestas, como se muestra en la Fig. 4. El estudiante E_{18} presenta claras evidencias de haber encontrado una expresión algebraica y utilizarla para obtener algunas de las respuestas que se le solicitaron. Este resultado corrobora una vieja creencia popular según la cual es más fácil el trabajo con funciones partiendo del registro algebraico como registro principal. Además, hay una creencia generalizada entre los estudiantes que al solicitárseles una expresión matemática que modele la situación, se les está pidiendo que escriban una fórmula. De hecho, aquí un reducido grupo de estudiantes (4%) propuso como modelo una tabla. En general, no conciben como un modelo matemático otra representación que no sea la algebraica.

Cuestión 8. "Realiza una gráfica que represente esta situación".

En la conversión al registro gráfico también presentaron dificultades relacionadas específicamente con la congruencia entre los ejes y el sistema de unidades utilizado para demarcarlos. Colocaron en los ejes la secuencia de números en el orden en que los iban

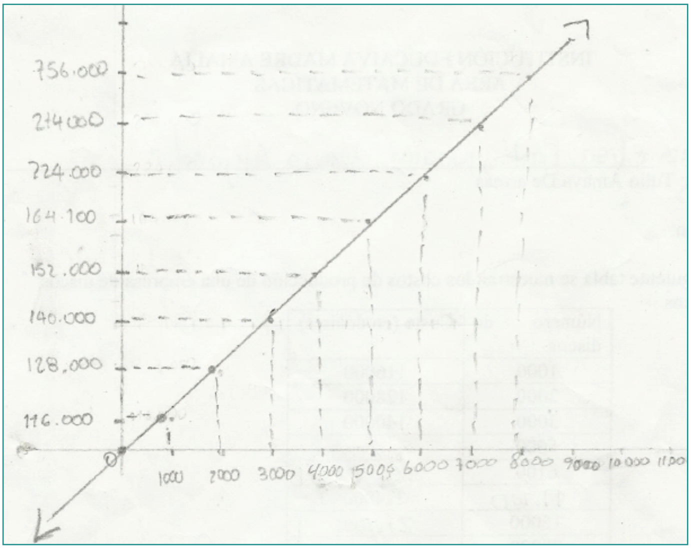


Figura 5. Gráfica realizada por el estudiante E5

encontrando al ir resolviendo el polinomio aritmético, sin tener en cuenta el orden y cardinal en la variable independiente. Algo similar fue reportado por Dolores (2004), quien encontró que los estudiantes asociaban el comportamiento de las imágenes en las gráficas con el comportamiento de sus abscisas, sin importarles el signo de sus ordenadas.

En el caso presente, los estudiantes sí tuvieron en cuenta el signo de las ordenadas, pero no la ubicación en los ejes. La dificultad estuvo asociada al funcionamiento del registro gráfico y a la coordinación con el tabular (Duval, 2004). En la Fig. 5 se puede ver que el estudiante E_5 asignó longitudes similares a los segmentos 0-116000 y 116000-128000; es decir, la secuencia que siguió en la marcación de los ejes no corresponde a una progresión aritmética como habría de esperarse. Además, en la resolución de este alumno se evidencia el uso de la función afín en lugar de la lineal. Los estudiantes tienen tendencia a hacer "pasar por el origen" a las representaciones gráficas de rectas.

Otro aspecto que cabe destacar es el relacionado con la continuidad de la gráfica. Aunque los valores del dominio son discretos, el estudiante E_5 los asumió como continuos, uniendo los puntos marcados hasta obtener una función continua como se muestra en la Fig. 5, quizás por esa "rara tendencia" que tienen los alumnos a unir todos los puntos de una función (Gatica, Tauber y Ruiz, 2002). Según estos autores, la graficación comprende acciones de interpretación y construcción. La interpretación se refiere a la habilidad de los estudiantes para leer y darle significado a una gráfica, mientras que la construcción se refiere a crear algo nuevo, elaborando una gráfica a partir de una regla funcional dada. En este caso, parece que ambas acciones se realizaron parcialmente: la interpretación porque no pudieron relacionar elementos de la función del registro tabular con sus equivalentes en el registro gráfico, confundiendo por ejemplo dominio con rango; la construcción porque no ubicaron los elementos que encontraron en el registro tabular en el lugar correspondiente en el registro gráfico. De esta manera las dos representaciones, tabular y gráfica, no resultaron congruentes. Además, para los estudiantes, la gráfica de la función depende de los puntos que se tomen para graficarla.

CONCLUSIONES

Los resultados de la investigación muestran que la transformación de registros de representación de una función es una actividad compleja para estudiantes de la media académica, a pesar de que en dos cursos previos habían trabajado con funciones. La misma no es espontánea y requiere una enseñanza intencionada que, en concordancia con Romiti, Sgreccia y Caligaris (2012), procure atender de manera equitativa a los diversos registros, tanto en actividades de tratamiento como de conversión.

Las dificultades de los estudiantes estuvieron relacionadas con la identificación del contenido de las representaciones, la utilización del concepto de ecuación para encontrar una incógnita, el funcionamiento de los registros y la coordinación o conversión entre dichos registros.

En cuanto a la identificación del contenido de una función en el registro tabular, como registro de partida, la mayoría de los estudiantes pudo identificar algunos elementos, pero no los suficientes para hacer transformaciones acordes a las cuestiones solicitadas. Por ejemplo, muchos se dieron cuenta que la secuencia para los costos iba de 12000 en 12000 cuando el número de discos cambiaba de 1000 en 1000. Sin embargo, esto no fue suficiente para determinar el patrón de crecimiento de la situación. Trabajaron la función lineal como si fuera una función afín y para encontrar los resultados solicitados realizaron una regla de tres simple directa. Este hecho les impidió llenar correctamente la tabla, dar respuestas acertadas a las cuestiones planteadas, y realizar correctamente la gráfica. No obstante, los estudiantes identificaron en la situación rasgos característicos genuinos del concepto de función, lo que es un gran avance en su desarrollo de pensamiento variacional y un indicio claro de que algo se ha comprendido del concepto. Pero dio la impresión que fue una comprensión parcial, que se evidenció solo en algunas de las cuestiones planteadas, como si de una pregunta a otra se hubiera cambiado la muestra de estudiantes.

Teniendo en cuenta lo anterior se plantea como una posibilidad de trabajo en el aula, para contribuir a mejorar estos desempeños estudiantiles, formular preguntas intermedias del tipo: *¿cómo está constituido el costo de producción de discos?, ¿hay costos fijos (independientes de la cantidad a producir) y costos variables (según la cantidad de discos que se produzcan)?, ¿podrías identificarlos: costo fijo:….; costo de 1000 discos:…, de 500 discos:…, de 100 discos:…, de 1 disco:…?*

En la utilización del concepto de ecuación para encontrar una incógnita, la dificultad estuvo en que la mayoría no pudo hallar una expresión algebraica que representara la situación, y los que la obtuvieron no establecieron la equivalencia entre esta y el valor numérico dado para los costos de producción, lo que los llevaría a la ecuación requerida. Teniendo en cuenta la dificultad al hacer conversiones entre los registros algebraico y coloquial -en ambos sentidos-, una posible guía para ello es: *sabemos que el costo fijo es 104000 dólares, que el costo por unidad es de 12 dólares y que se gastaron 314000 dólares en producción de discos:*

104000	+	*12*		*x*	=	*314000*
costo fijo		*costo de cada unidad*		*cantidad de discos producidos*		*lo que se gastó*

¿Puedes obtener la cantidad de discos producidos? Hazlo e indica otra/s forma/s posible/s de hallar dicha cantidad.

En el funcionamiento de los registros y la coordinación entre ellos fue posible apreciar que los estudiantes no reconocieron el registro tabular como apoyo válido para sustentar sus respuestas; necesitaron verificar sus respuestas en el registro algebraico analítico antes de darlas. Para fortalecer este aspecto (y sin ignorar el recurso de cálculos mentales) una propuesta es: *explicitar en la consigna "solo empleando la tabla"; solicitar "explicar con tus propias palabras qué información aporta la tabla"; ¿le agregarías o quitarías filas/columnas a la tabla?, ¿sí/no por qué?; ¿con qué prefieren trabajar las funciones: tablas, fórmulas, gráficos?, ¿por qué?*

En las transformaciones tipo conversión utilizaron como andamio el registro algebraico-analítico como paso previo hacia cualquier otro registro; incluso hasta en las transformaciones tipo tratamiento siempre acudieron al registro algebraico-analítico como paso obligado. Es decir, no se dieron tratamientos puros, siempre acudieron a este registro auxiliar para hacer modificaciones o verificar cualquier cuestión por la que se les indagara. Utilizando el registro tabular como registro principal hicieron las operaciones en el registro algebraico-analítico y volvieron a hacer otra conversión de regreso al tabular como registro principal, donde terminaron el tratamiento. Aquí surge la duda de si se violó el principio de autosuficiencia de los registros ante una transformación tipo tratamiento (Duval, 2004) o es que estos dos registros comparten algunas reglas.

Finalmente, coincidimos con D'Amore (2006) en que el uso de distintas representaciones y su progresiva articulación enriquecen el significado, conocimiento, comprensión del objeto así como su complejidad. Por ello robustecer el trabajo escolar en este sentido es una de nuestras tareas.

REFERENCIAS

Amaya, T. (2010). Errores de los estudiantes de octavo grado en el trabajo pre-algebraico. *Revista de la Escuela de Ciencias de la Educación, 6*(5), 225-244.

Amaya, T. y Barrera, J. (2009). Un estudio de la variación utilizando funciones en estudiantes de la media académica. En P. Lestón (Ed.). *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, 22* (pp.93-99). México DF: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Ander-Egg, E. (2003). *Métodos y Técnicas de Investigación Social IV. Técnicas para la recogida de datos e información.* Buenos Aires: Lumen.

Benítez, A. (2010). Estudio numérico de la gráfica para construir su expresión algebraica. El caso de los polinomios de grado 2 y 3. *Educación Matemática, 22*(1), 5-29.

Bravin, C. y Pievi, N. (2008). *Documento metodológico orientador para la investigación educativa*. Buenos Aires: Ministerio de Educación.

Brousseau, G. (1999). Los Obstáculos Epistemológicos y los Problemas en Matemáticas. Traducido por Hernández y Villalba del original: Brousseau, G. (1983). Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *4*(2), 165-198.

Caligaris, M., Schivo, M.E., Romiti, M.R. y Sgreccia, N. (2013). *Naturalmente difícil*. Ponencia presentada en la XXXVI Reunión de Educación Matemática. Rosario, septiembre.

Carrión, V. (2007). Análisis de errores de estudiantes y profesores en expresiones combinadas con números naturales. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, (11), 19-57.

Cordero, F. (1997). El entendimiento de algunas categorías del conocimiento del cálculo y análisis: el caso del comportamiento tendencial de las funciones. *Revista Latinoamericana de Investigación en Educación Matemática*, *1*(1), 56-74.

D'Amore, B. (2006). Objetos, significados, representaciones semióticas y sentido. *Revista Latinoamericana de Investigación en Educación Matemática, 9*(1), 177-195.

Del Castillo, A. (2003). *La articulación de los registros gráfico, analítico y de la lengua natural*. Recuperado el 9 de marzo de 2013, de http://www.semana.mat.uson.mx/Memorias/pupi.pdf.

Dolores, C. (2004). Acerca del análisis de funciones a través de sus gráficas: concepciones alternativas de estudiantes de bachillerato. *Revista Latinoamericana de Investigación en Educación Matemática, 7*(3), 195-218.

Duval, R. (1999). *Semiosis y pensamiento humano. Registros semióticos y aprendizajes intelectuales*. Cali: Universidad del Valle.

Duval, R. (2004). *Los problemas fundamentales en el aprendizaje de las matemáticas y las formas superiores del conocimiento*. Cali: Universidad del Valle.

Duval, R. (2012a). Preguntas y desafíos de la enseñanza de las matemáticas para todos: implicaciones para la investigación en didáctica. En U. Malaspina (Coord.). *Resúmenes del VI Coloquio Internacional de Didáctica de las Matemáticas: avances y desafíos actuales* (pp.3-6). Lima: Pontificia Universidad Católica del Perú.

Duval, R. (2012b). Lo esencial de los procesos cognitivos de comprensión en matemáticas: los registros de representación semiótica. En U. Malaspina (Coord.). *Resúmenes del VI Coloquio Internacional de Didáctica de las Matemáticas: avances y desafíos actuales* (pp.14-17). Lima: Pontificia Universidad Católica del Perú.

Gallardo, J., González, J. y Quintanilla, V. (2013). Tareas, textos y usos del conocimiento matemático: apuntes a la interpretación de la comprensión desde el cálculo aritmético elemental. *Revista Educación Matemática, 25*(2), 61- 88.

Gatica, N., Maz-Machado, A., May, G., Cosci, C., Echevarría, G. y Renaudo, J. (2010). Un acercamiento a la idea de continuidad de funciones en estudiantes de Ciencias Económicas. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, (22), 121-131.

Gatica, N., Tauber, L. y Ruiz, F. (2002). Registros de representación puestos en juego en el concepto de función: un estudio en estudiantes ingresantes a la carrera de ingeniería. En M. Penalva, G. Torregrosa y J. Valls (Eds.). *Aportaciones de la didáctica de la matemática a diferentes perfiles profesionales* (pp.417-430). Alicante: Universidad de Alicante.

Godino, J., Font, V. y Batanero, C. (2003). *Fundamentos de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas para maestros*. Granada: Universidad de Granada.

Hitt, F. (2000). Representations and mathematics visualization. En M.L. Fernández (Ed.). *Proceedings, PME-NA 22* (pp.131-147). Tucson: ERIC Publications.

Hitt, F. (2003a). Una Reflexión Sobre la Construcción de Conceptos Matemáticos en Ambientes con Tecnología. *Boletín de la Asociación Matemática Venezolana*, *10*(2), 213-223.

Hitt, F. (2003b). *Dificultades en el aprendizaje del cálculo. Décimo primer Encuentro de Profesores de Matemáticas del Nivel Medio Superior*. Morelia: Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo.

Kaput, J. (1987). Representation and mathematics. En C. Janvier (Ed.). *Problems of representation in mathematics learning and problem solving* (pp.19-26). Hillsdale: Erlbaum.

Kaput, J. (1989). Linking representations in the symbol systems of algebra. En C.Kieran & S. Wagner (Eds.). *A research agenda for the learning and teaching of algebra* (pp.167-194). Reston: NCTM.

León, O. y Corredor, D. (2003). *Argumentar y validar en matemáticas ¿una relación necesaria? Hacía una comprensión del desarrollo de competencias argumentativas en matemáticas*. Bogotá: Colciencias y Universidad de Valle.

Meel, D. (2003). Modelos y teorías de la comprensión matemática: Comparación de los modelos de Pirie y Kieren sobre el crecimiento de la comprensión matemática y la Teoría APOE. *Revista Latinoamericana de Investigación en Educación Matemática, 6*(3), 221-271.

Ministerio de Educación Nacional. (2005). *Potenciar el pensamiento matemático: un reto escolar. Estándares básicos de competencias en matemáticas*. Bogotá: Ministerio de Educación Nacional.

National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principios y Estándares para la Educación Matemática*. Traducción al español, Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales. Sevilla: Proyecto Sur.

Ochoviet, C. y Oktaç, A. (2011). Algunos aspectos del desarrollo del pensamiento algebraico: el concepto de raíz y de variable en ecuaciones polinómicas de segundo grado. Un estudio de casos realizado con estudiantes uruguayos de enseñanza secundaria. *Revista Educación Matemática, 23*(3), 91-121.

Romiti, M.R., Sgreccia, N. y Caligaris, M. (2012). *Propuesta de mejora en el aprendizaje del concepto de límite de una función real*. X Conferencia Argentina de Educación Matemática. Buenos Aires, septiembre.

Sánchez-Matamoros, G., García, M. y Llinares, S. (2008). La comprensión de la derivada como objeto de investigación en didáctica de la matemática. *Revista Latinoamericana de Investigación en Educación Matemática, 11*(2), 267-296.

Servan, P. y Servan, I. (2010). Intervención en la familia. Estudio de casos. En G. Serrano (Coord.). *Modelo de investigación cualitativa en educación social y animación sociocultural: animaciones prácticas* (pp.221-252). Madrid: Narcea.

Tall, D. (1985). Understanding the calculus. *Mathematics Teaching, 1*(10), 49-53.

UNESCO. (2005). *Hacia las sociedades del conocimiento. Informe mundial de la UNESCO*. Recuperado el 7 de enero de 2013, de http://unesdoc.unesco.org/images/0014/001419/141908s.pdf.

Épsilon - *Revista de Educación Matemática* 2014, Vol. 31(3), nº 88, 39-54

Trayectorias de aprendizaje de la multiplicación y la división de cuatro a siete años

Mónica Ramírez García
monica.ramirez@edu.ucm.es
Universidad Complutense de Madrid
Carlos de Castro Hernández
carlos.decastro@uam.es
Universidad Autónoma de Madrid

Resumen: *Describimos una trayectoria de aprendizaje de la multiplicación y la división con niños de 4 a 7 años. Para ello, definimos las trayectorias de aprendizaje y valoramos la importancia de su consideración en los primeros años. Después, mostramos las trayectorias a través de una experiencia desarrollada en un colegio con niños de 4 a 7 años. Los niños desarrollan estrategias informales de modelización directa para resolver problemas de multiplicación y división de complejidad creciente, mostrando su evolución en el uso de representaciones, materiales manipulativos y en el proceso de simbolización.*
Palabras clave: *Educación infantil, división, multiplicación, resolución de problemas, trayectorias de aprendizaje.*

Learning trajectories for multiplication and division from four to seven years

Abstract: *We describe a learning trajectory for multiplication and division with children from four to seven years. To this end, we define learning trajectories and value the importance of reflecting on them in the early years. Then we show the trajectories through an experience developed in a school with children from four to seven years. Children develop informal direct modeling strategies to solve multiplication and division problems of increasing complexity, showing their evolution in the use of representations, manipulatives and in the process of symbolization.*
Keywords: *Early childhood, division, multiplication, problem solving, learning trajectories.*

1. INTRODUCCIÓN

Este artículo trata sobre el aprendizaje de la multiplicación y la división de un modo algo diferente al habitual, pues se centra en el aprendizaje informal de dichas operaciones que tiene lugar (o podría tenerlo) entre los 4 y los 7 años, antes de comenzar con el estudio formal de las mismas. Para comenzar, parece oportuno establecer un marco curricular de referencia que centramos, por brevedad, en la multiplicación. Con respecto a esta operación, en el currículo de educación primaria de la Ley Orgánica de Educación (LOE) (MEC, 2007) se proponía la "construcción de las tablas de multiplicar del 2, 5 y 10" (p. 31557) para el primer ciclo de primaria (primer y segundo cursos) y la "construcción y memorización de las tablas de multiplicar" (p. 31559) para el segundo ciclo (tercero y cuarto cursos de primaria). La reciente orden que establece el nuevo currículo de primaria para el ámbito de gestión del Ministerio de Educación, Cultura y Deporte incluye la "iniciación a la construcción de las tablas de multiplicar" (MEC, 2014, p. 34069) en primer curso. Precisando más el contenido de esta "iniciación", el borrador del currículo de la Comunidad de Madrid propone la memorización de las tablas de multiplicar del 0, 1, 2 y 5 en primer curso de educación primaria (Consejería de Educación, Cultura y Deporte de la Comunidad de Madrid, 2014). Resumiendo, la línea que marcan los actuales cambios legislativos es la de adelantar un año la memorización de algunas de las tablas de multiplicar. Esta opción puede resultar polémica, puesto que resulta antitética con otros planteamientos curriculares recientes de gran prestigio, como la propuesta de los *Focos Curriculares* (CCSSI, 2010), donde se recomienda para el cuarto grado de primaria que "los estudiantes usen su comprensión de la multiplicación para desarrollar una recuperación rápida [de la memoria] de las tablas de multiplicar" (p. 16).

Castro, Cañadas y Castro-Rodríguez (2013) indican que los niños son capaces de resolver situaciones aritméticas sencillas desde los 3 años, y que la resistencia a presentarles estas situaciones en esta edad, puede provocar que no consigan dotar de significado, más adelante, al algoritmo que aprenderán en primaria (p. 9). Así, los niños deberían tener la oportunidad de construir significados propios de las operaciones aritméticas sin necesidad de (previamente a su) instrucción formal. En línea con este planteamiento, en este artículo describimos una *trayectoria de aprendizaje* que los maestros y maestras de educación infantil y de primer curso de primaria podrán seguir con sus alumnos para que construyan significados de la multiplicación y la división previamente al aprendizaje formal de dichas operaciones en segundo y tercer cursos.

Trayectorias de aprendizaje en educación matemática

Una trayectoria de aprendizaje tiene tres componentes: un objetivo, una progresión a través de la cual los niños van evolucionando hasta lograr dicho objetivo, y una serie de actividades de enseñanza o tareas vinculadas a cada nivel de pensamiento que ayudan a los niños a desarrollar niveles superiores de pensamiento y a alcanzar el objetivo propuesto (Clements y Sarama, 2009). El objetivo, en una trayectoria de aprendizaje, es una de las *grandes ideas matemáticas*, que ocupan un lugar privilegiado en el aprendizaje de las matemáticas, y se describen en importantes documentos curriculares (NAEYC y NCTM, 2013; NCTM, 2003, OCDE, 2005). Por ejemplo, "una gran idea matemática es

que el conteo puede usarse para determinar cuántos hay en una colección" (Clements y Sarama, 2009, p. 3). Las progresiones evolutivas describen los pasos que los niños suelen seguir para lograr destreza y comprensión de un determinado tema matemático. Por ejemplo, para resolver problemas aritméticos verbales de estructura aditiva, los niños suelen pasar por estrategias de modelización directa, después de conteo y, finalmente, de uso de hechos numéricos básicos o derivados (Carpenter, Fennema, Franke, Levi y Empson, 1999). Se puede establecer una correspondencia entre estos tipos de estrategias y los niveles evolutivos en el aprendizaje de la adición establecidos por Fuson (1992). Clements y Sarama (2009) se refieren a estas progresiones como *caminos de aprendizaje*. Por último, ligadas estrechamente a los niveles de pensamiento, hay conjuntos de tareas que conformarían un *camino de enseñanza* establecido con el fin de facilitar la progresión de los niños a lo largo del correspondiente *camino de aprendizaje*.

El concepto de trayectoria de aprendizaje ha tenido un largo recorrido en la educación matemática desde su origen en 1995. Se puede profundizar en esta idea, su origen, y sus diferentes acepciones y usos en los trabajos de Gómez, González y Romero (2014) y de Gómez y Lupiáñez (2007).

En la posición conjunta sobre el aprendizaje de las matemáticas en los primeros años (NAEYC y NCTM, 2013, p. 7), entre las orientaciones que se dan para las propuestas para el aula está "asegurar que el currículo sea coherente y compatible con las relaciones y secuencias conocidas de las ideas matemáticas fundamentales". En este punto del documento se hace referencia explícita a la importancia de las trayectorias de aprendizaje como referencia para guiar la enseñanza.

Las trayectorias de aprendizaje y su fundamentación en la investigación

En este apartado queremos incidir en una idea que nos parece relevante: las trayectorias de aprendizaje deben estar sólidamente basadas en la investigación en sus tres componentes (objetivo, camino de aprendizaje y camino de enseñanza). Daro, Mosher y Corcoran (2011) proponen ejemplos de trayectorias de aprendizaje entre las cuales figura un marco para el aprendizaje de la multiplicación (p. 81). En este trabajo, por brevedad, tomamos, a modo de ejemplo, la división para ilustrar la conexión de las trayectorias con los resultados de investigación. Se puede constatar que la experiencia que relataremos en el apartado siguiente está basada en estas referencias teóricas.

Clements (2004) indica que el *particionamiento*, operación de descomponer un conjunto de objetos en varios conjuntos de igual tamaño, es una idea fácilmente comprensible para los niños, que surge en situaciones de reparto alrededor de los 3 años de edad. También a los tres años pueden dividir una colección en conjuntos iguales de un cardinal dado, si los subconjuntos son muy pequeños (división medida). Muchos niños de 4 o 5 años pueden trabajar con números mayores inventando una estrategia de correspondencia uno a uno para dividir la colección inicial en subconjuntos iguales. La idea es fundacional para todos los tipos de situaciones multiplicativas y de división medida (donde se conoce el número de objetos en cada grupo) y de división partitiva (donde se conoce el número de grupos). Pero las complejidades de encontrar soluciones exactas con números mayores, excepto mediante ensayo y error y a través de la reflexión sobre una serie de acciones repetidas, hacen que esta idea sea mejor captada en detalle en cursos superiores

(Clements, 2004, pp. 24-25). Precisando acerca del tamaño de las cantidades en los problemas, Clements (2004, p. 36) indica que a los 4 años los niños pueden utilizar estrategias informales para repartir hasta 10 objetos entre dos niños y que a los 5 años son capaces de repartir hasta 20 objetos en partes iguales entre 3, 4 o 5 personas, y de formar, con hasta 20 objetos, grupos iguales de 2 a 5 objetos, determinando el número total de grupos. Con 6 años, manejan cantidades superiores, de hasta 100, repartiéndolas entre hasta 10 personas y agrupándolas en grupos iguales de hasta 10 objetos.

Dentro de nuestra línea de trabajo sobre resolución de problemas aritméticos verbales en educación infantil, hemos observado en trabajos anteriores cómo los niños resuelven problemas de estructura multiplicativa, de multiplicación y división medida (De Castro, Molina, Gutiérrez, Martínez y Escorial, 2012), problemas de reparto igualatorio (López y De Castro, 2014), de comparación multiplicativa, de multiplicación y división (De Castro, Walsh, Del Coso, Salvador, González y Escorial, 2009) y de descomposición factorial (De Castro y Hernández, 2014). Todos estos trabajos se han realizado con niños de 5-6 años, en último curso de educación infantil. Recomendamos su lectura como complemento a este artículo, por versar sobre problemas de tipos diferentes a los del presente trabajo, que no se plantean habitualmente en educación infantil. En este artículo, nuestro objetivo es mostrar una panorámica más amplia en cuanto al rango de edad, sobre los problemas de estructura multiplicativa, abarcando desde los 4 a los 7 años, e incluyendo en primer curso de primaria problemas de multiplicación y división agrupamiento con grupos de diez, para vincular los problemas de estructura multiplicativa con el concepto de decena (Carpenter, Franke, Jacobs, Fennema y Empson, 1997; Ramírez y De Castro, 2014).

2. DESCRIPCIÓN DE LAS TRAYECTORIAS A LO LARGO DE TRES CURSOS: 4-5, 5-6 Y 6-7 AÑOS

En este apartado, describimos el desarrollo de varias sesiones de talleres de resolución de problemas, realizadas en el CEIP Virgen de Peña Sacra, de Manzanares el Real (Madrid), con niños pertenecientes a tres cursos diferentes, con edades comprendidas entre los cuatro y los siete años. La metodología que seguimos en estos talleres está descrita en trabajos anteriores (De Castro y otros, 2009; De Castro y otros, 2012). De un modo muy sucinto, planteamos problemas aritméticos basados en la lectura de un cuento (para favorecer la comprensión del enunciado), sin enseñanza previa, y dando una libertad absoluta en el uso de materiales para resolver los problemas razonando con la ayuda de objetos (cubos encajables, materiales manipulativos, dibujos, etc.). Al comentar el trabajo de los alumnos, nos hemos centrado en mostrar la evolución que se observa a lo largo de estos tres cursos, de las estrategias, uso de materiales y representaciones para los problemas de multiplicación y división.

Multiplicación en un aula de 4-5 años

En la resolución de problemas con niños de 4 y 5 años es importante que el tamaño de los números sea bajo, para adaptarnos a la capacidad de conteo de los pequeños

Figura 1. Lectura del cuento y momento de explicación de Óscar.

(Clements, 2004). La referencia que tomamos es que, hasta mitad de curso, no superemos los 6 objetos. En nuestra experimentación, uno de los primeros problemas está basado en la lectura del cuento "Chivos chivones" (González y Fernández, 2007). A lo largo del cuento, los tres chivos, y sus cuernos, aparecen y son mencionados continuamente. La lectura repetida del cuento (en varios días diferentes) permite a los niños imaginar la situación descrita en el enunciado del problema. Así, a partir del cuento, planteamos a los niños el siguiente problema: Si había tres chivos, y cada uno tiene dos cuernos. ¿Cuántos cuernos tienen en total entre los tres? Al trabajar con cantidades tan bajas, que pueden representarse con los dedos, algunos niños resuelven ya el problema en el momento de la lectura y el planteamiento del problema, todavía en la "asamblea" (Figura 1a). Algunos niños resuelven el problema mediante un dibujo. Guillermo representa los cuernos de los chivos utilizando tres colores diferentes para diferenciar qué cuernos corresponden a cada chivo (Figura 1c). En la Figura 1b, vemos cómo la maestra sujeta la hoja de trabajo a Guillermo y le va preguntando sobre el significado de sus representaciones. Con este apoyo, Guillermo va explicando cómo ha resuelto el problema.

Algunos niños dan el resultado, pero la maestra está interesada en que todos comprendan la situación, y que los que creen que han resuelto el problema, lo comprueben en el trabajo individual, y le expliquen cómo lo han hecho. Se produce la siguiente conversación:

- Bea: A ver, ¿alguien se acuerda de cómo era el problema?
- Óscar: Éstos [Pone con los dedos seis, que es el resultado].
- Bea: Sí. Esa es la solución que tú crees. Seis, ¿no? Pero, ¿cuál era el problema?
- Mario: Seis. El problema es seis [De nuevo, se refiere al resultado].
- Guillermo: Dos cuernos en cada chivo.
- Bea: En cada chivo y, ¿cuántos chivos hay?
- Nerea: Seis.
- Guillermo: Tres [Corrige a Nerea y lo indica poniendo tres con los dedos].
- Bea: Tres, con dos cuernos en cada chivo, ¿cuántos cuernos hay en total entre los tres?
- Nerea: Seis [Pone seis con los dedos].
- Guillermo: Seis.
- Bea: Ahora me decís por qué pensáis que son seis [Con "ahora", la maestra se refiere al momento en que, durante el trabajo individual, pase preguntando a cada niño cómo lo ha hecho].

Óscar resuelve el problema con el rekenrek. Este es un ábaco holandés, inventado en 1991 por Adrian Treffers, del Instituto Freudenthal, que se utiliza como modelo visual para la iniciación al cálculo. Óscar utiliza las cuentas de la varilla superior para representar los cuernos, y las cuentas de la varilla inferior para los chivos. En las dos primeras imágenes de la Figura 2, vemos que levanta dos dedos (cuernos) en su mano derecha y el pulgar de su mano izquierda (chivo). Interpretamos estos gestos con los dedos como una "segunda" representación, que refuerza la representación con el ábaco, y que Óscar hace para comprobar su procedimiento. Después, va añadiendo dos cuentas en la varilla de arriba por cada una en la varilla de abajo. Finalmente, cuando Beatriz (la maestra) pasa a su lado, Óscar separar las cuentas de la varilla inferior, que representan a los tres chivos, para enfatizar y explicar a la maestra la correspondencia dos a uno entre cuernos y chivos (Figura 2d).

División en un aula de 4-5 años

Basándonos en la lectura del cuento "¿A qué sabe la luna?" (Grejniec, 2004), planteamos el siguiente problema en el aula de 4-5 años: Si el ratón reparte seis trocitos de luna entre el zorro y la cebra, ¿cuántos trozos le puede dar a cada uno? En este problema damos por válida cualquier descomposición del seis, aunque observaremos ya la tendencia a los repartos equitativos. Enseguida empezamos a oír: "Ocho", "Siete". Beatriz repite el enunciado y de nuevo los niños dan estimaciones o intentan "adivinar el resultado": "Siete, "Dos", "Ocho", "No, no. Seis".

En la Figura 3, vemos el proceso de resolución de Nerea y de Diego. Los dos alumnos, y todos los que resolvieron este problema lo hicieron con cubos encajables, utilizando una estrategia de modelización directa: el "reparto" por unidades. Comienza por la representación del zorro y la cebra con los cubos negro y morado de la Figura 3b (Nerea), y el verde y naranja en la Figura 3d (Diego). A partir de ahí, se representan los trozos de luna con 6 cubos encajables y se van repartiendo uno a uno colocándose alternativamente junto a los cubos que representan al zorro y la cebra. Finalmente, se cuentan los cubos (trozos de luna) que hay junto a cada animal. En la Figura 3d, observamos cómo Diego mantiene ligeramente separados los cubos iniciales, que representan a los animales, de los cubos restantes, que representan trozos de luna, a fin de no confundirlos en el recuento final.

Multiplicación en un aula de 5-6 años

En el aula de 5-6 años, se plantea el problema de multiplicación: "¿Cuántos sándwiches de miel tiene que preparar mamá oso si hay seis osos y cada uno quiere dos sándwiches?". Al igual que ocurre en el caso de la división, los niños utilizan la misma estrategia básica que en 4-5 años, pero con números mayores, mayor variedad de materiales, y con presencia de representaciones simbólicas. Un aspecto que destacamos es que, en ausencia de instrucción sobre el proceso de resolución, algunas representaciones tienen un marcado acento personal, que dificulta que las personas que las ven puedan interpretarlas de forma sencilla. Así, en la Figura 4a, Joshua representa los 12 sándwiches

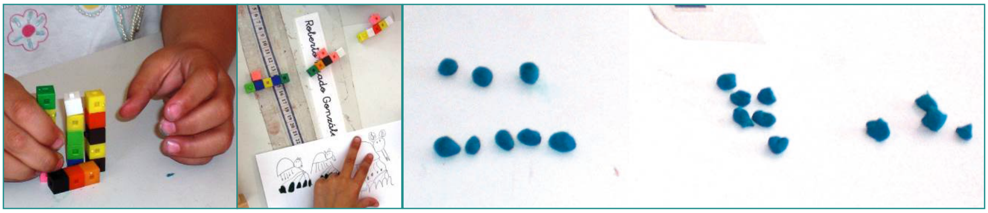


Figura 6. Evolución de las estrategias infantiles en problemas de división-reparto en 5-6 años (I).

y los 6 osos con tres filas de 6 cubos, donde la primera fila representa los osos y las restantes los sándwiches. Por el contrario, en el dibujo de Noelia (Figura 4b), se diferencian perfectamente las representaciones de ambas cantidades, y se aprecia el paso a la representación simbólica, con numerales escritos, de las cantidades.

Eloy utiliza cuentas con las que va formando un collar de 18 cuentas (Figura 5). Las 12 de la izquierda representan los sándwiches, y las 6 de la derecha representan los osos. En la Figura 5b, se observa la separación entre unas cuentas y otras. En la Figura 5a, Eloy va señalando, por cada cuenta de la derecha (un oso), dos cuentas a la izquierda (sándwiches). En la imagen se ve cómo señala la cuarta cuenta por la derecha con el índice, mientras que abarca las cuentas 7 y 8 con dos dedos. Al igual que en la estrategia de Joshua, observando el collar no resulta fácil imaginar, antes de la explicación de Joshua, cómo se ha utilizado esta representación para resolver el problema.

División en un aula de 5-6 años

En el aula de 5-6 años, planteamos el problema: "Si hay 15 montones de hierba, y 3 chivos, ¿Cuántos montones de hierba se come cada chivo?". Si en 4-5 años repartíamos 6 objetos entre 2, en este caso, el tamaño de dividendo y divisor van aumentando. De nuevo, el enunciado puede interpretarse como problema de división (reparto equitativo) o como problema de descomposición aditiva en tres sumandos. En la Figura 6a, observamos la misma estrategia que vimos en 4-5 años. Los niños tienen, durante dos cursos, varias ocasiones de adquirir el esquema básico de reparto de objetos, representando ambas cantidades que aparecen en el enunciado. No obstante, más allá de esta estrategia básica, comenzamos a ver variaciones interesantes, que dan cuenta del desarrollo infantil en estas edades. Por ejemplo, Lía (Figura 6b), tras aplicar la estrategia de modelización directa de reparto, representa el reparto con un dibujo, cosa que no suele ocurrir con 4 años. Empiezan a surgir soluciones en las que solo se representa una de las dos cantidades del enunciado, el dividendo o cantidad a repartir, formando una barra con 15 cubos y fraccionándola después en 3 barras iguales de 5 cubos. También surgen repartos no equitativos. Shakira representa los tres chivos en la esquina superior izquierda (Figura 6c), y luego da a los chivos mediano, grande y pequeño, cinco, seis y cuatro montones de hierba respectivamente.

A pesar de que la estrategia básica sigue siendo el reparto de objetos, otros materiales comienzan a usarse. Hugo no es capaz de realizar el reparto con la banda numérica (Figura 7a), pero al escuchar a Lía que da la solución de 5, lo comprueba contando 5

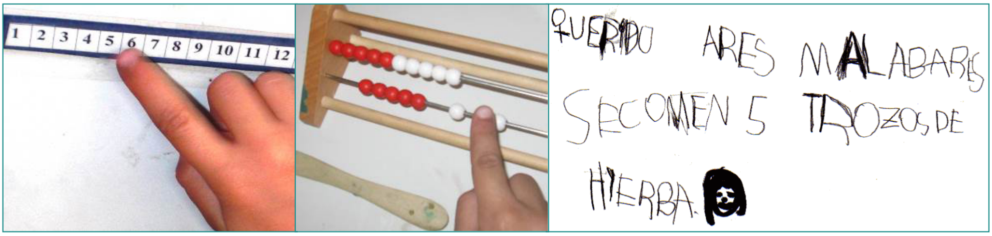


Figura 7. Evolución de las estrategias infantiles en problemas de división-reparto en 5-6 años (II).

Figura 8. Agrupamiento según el número de grupos.

casillas, tres veces, hasta llegar a 15. En la Figura 7b, Roberto, tras resolver el problema con los cubos encajables, representa la solución (los tres grupos de 5) en el rekenrek. Más que un proceso de resolución, se trata de una traducción entre sistemas diferentes de representación para escribir el resultado. En la Figura 7c, aparece una carta de un alumno al final del taller a Ares (maestro en prácticas y malabarista, llamado por los pequeños "Ares malabares"). Esta carta muestra cómo el conocimiento de la lectoescritura propio del último curso de educación infantil se une a la capacidad de articular el propio pensamiento, para producir este mensaje escrito.

Multiplicación en primer curso de primaria (6-7 años)

Ya dentro de la educación primaria, basándonos en el cuento "El gato tragón" (Núñez y Dumas, 2005), el problema planteado es: El gato tragón se comió 7 niñas. Si cada niña tiene 2 brazos, ¿Cuántos brazos se comió el gato? La estrategia básica en este problema es de modelización directa (estrategia de *agrupamiento*). En el enunciado se habla de 7 grupos (cada niña cuenta como un "grupo" de dos brazos) con 2 elementos en cada grupo (los brazos). Los niños forman 7 grupos con 2 objetos en cada una y luego cuentan de uno en uno los objetos. Esta estrategia ya la hemos visto desde educación infantil (Figura 4), pero en la Figura 8 podemos observar variaciones de interés que muestran la evolución. Por ejemplo, separar claramente las representaciones de las dos cantidades (de niñas y de brazos) para facilitar el conteo del resultado (Figura 8a) o la escritura de números de dos cifras con la aparición del valor posicional. En la Figura 8b, vemos que el alumno escribe primero 41, que aparece tachado dos veces, para al final escribir el resultado correcto de 14.

Figura 9. Agrupamiento según el número de grupos con dedos.

Figura 10. Agrupamiento según el número de grupos con Tabla 100.

Hay niños que utilizan los dedos para ir construyendo los grupos, añadiendo el número de elementos por grupo cada vez que se considera un grupo. En la Figura 9, un niño va añadiendo 2 dedos cada vez que cuenta una niña hasta completar las siete niñas. Podemos ver, de izquierda a derecha, cómo el alumno pone el dos de los brazos de la primera niña, después va añadiendo dos por cada niña, con lo que tendrá cuatro dedos, acción que no se ve en la secuencia de la Figura 9, y así sucesivamente, seis (otros dos brazos de otra niña), ocho, diez y, ya en la imagen, el doce (para lo cual tiene que quitar los cinco dedos de la mano izquierda), y el catorce, resultado final.

También vemos esta estrategia en la tabla 100. Por cada niña, se van tapando con dos dedos dos numerales que representan los dos brazos de la niña. Tras repetir esta operación siete veces, el último numeral tapado (14) indica la solución del problema. En la Figura 10 observamos los tres primeros pasos de esta estrategia. El uso de la tabla 100 es un instrumento que facilita la transición de estrategias de modelización directa a estrategias de conteo basadas en la secuencia de numerales.

Las representaciones gráficas infantiles van evolucionando, incluyendo una mezcla de representaciones icónicas y simbólicas (con numerales) para el proceso de resolución. En la Figura 11a, Sergio representa las niñas con numerales y los brazos con puntos y resuelve el problema contando los puntos. En la derecha, mostramos el trabajo de otro niño donde la representación de las niñas posee un grado mayor de iconicidad. Los brazos aparecen numerados, de modo que el último numeral (14) indica el resultado (Figura 11b).

Otra variedad de esta estrategia consiste en representar con un objeto cada grupo y contar cada objeto el número de veces que indica el número de elementos por grupo. En este problema, algunos niños representaron con 7 objetos el número de grupos (las

Figura 11. Estrategia de agrupamiento, gráfica, con símbolos escritos.

Figura 12. Reparto de objetos de uno en uno contando inicialmente la cantidad total.

niñas) y contaron cada uno de ellos dos veces (una por cada brazo) para alcanzar el resultado final.

Algunos alumnos han resuelto este problema mediante modelización directa haciendo 2 grupos de 7. En este problema hay 7 grupos (las niñas) con 2 elementos en cada grupo (los brazos), pero varios niños han representado un grupo de 7 por uno de los brazos de las 7 niñas y otro grupo de 7 por el otro brazo. Esta estrategia la hemos visto aplicada con el rekenrek, poniendo 7 cuentas en cada varilla, y en la tabla 100, saltando de la casilla del 7 a la del 14.

Un problema de división en primer curso de educación primaria

En primer curso de primaria se plantea un problema de estructura multiplicativa, de grupos iguales, de división partitiva. Basado en el cuento "Un regalo diferente", el enunciado es: Marcel y Tristán se comieron 18 buñuelos de crema. ¿Cuántos se comió cada uno? Todos los niños intentaron repartir de forma equitativa los buñuelos, aún sin que el enunciado lo indicase. La estrategia básica es la de *reparto*, de modelización directa (Figura 12).

Esta estrategia se aplica con diferentes variaciones. Algunos niños cuentan primero los objetos a repartir, pero otros reparten sin contar inicialmente esta cantidad, y van comprobando, a cada paso del reparto, el total de lo repartido hasta alcanzar el total a repartir. Otra variación es el reparto en grupos, por ejemplo, de dos en dos o de tres en tres y, posteriormente, ajustando el reparto con los objetos sobrantes. Al ser un problema en el que se divide en dos grupos, muchos niños elaboraban una barra con 18 cubos,

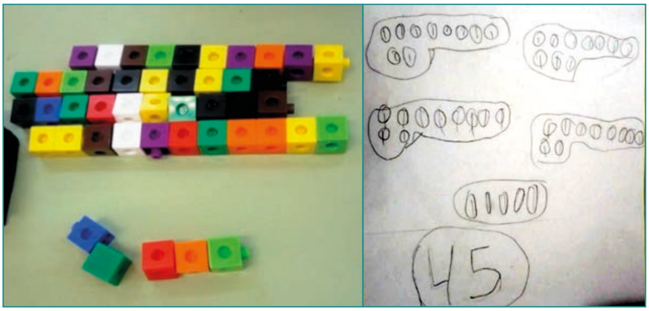


Figura 13. Representación de la estrategia de agrupamiento y juntar todos.

Figura 14. Agrupamiento y juntar todos con bloques de base 10.

estimaban el punto medio para partirla en dos partes aproximadamente iguales, y luego comprobaban que en las dos partes resultantes hubiese el mismo número de cubos, comparando la longitud de las barras.

Un problema de multiplicación con grupos de diez en educación primaria

En primer curso de primaria planteamos problemas aritméticos de operaciones combinadas (multiplicación y suma) en los que nos dan el número de decenas y de unidades sueltas y debemos calcular el número total de unidades. Un problema de este tipo es: Si tenemos 4 decenas de huevos y 5 huevos más, ¿cuántos huevos tenemos en total? La estrategia básica para abordar este tipo de problemas consiste en formar con objetos tantos grupos de diez y unidades sueltas como se indica en el enunciado y después contar uno por uno los objetos. En la Figura 13, vemos la representación manipulativa y gráfica correspondiente a dicha estrategia. En un nivel más avanzado, los niños cuentan de diez en diez los grupos de diez, y luego de uno en uno las unidades sueltas: “10, 20, 30, 40, 41, 42, 43, 44, 45”.

Una variante de esta estrategia consiste en representar las cantidades con bloques de base 10. En la Figura 14a un niño ha representado 45 con 4 barras y 5 unidades. Igual que en el caso anterior, inicialmente los niños necesitan contar de uno en uno todas las unidades que componen las decenas como está haciendo el niño de la Figura 14b para saber la cantidad total. Más tarde, los niños cuentan de 10 en 10 las barras y de uno en uno las unidades. Con la ayuda de la tabla 100, los niños cuentan de 10 en 10 (Figura 14c) el

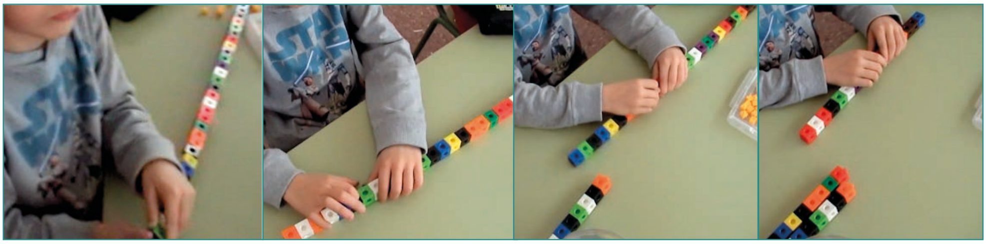


Figura 15. Medida contando primero el total de elementos con objetos.

Figura 16. Estrategia de *medida* con cajas de huevos de 10.

número de grupos que se indica en el problema, para después avanzar por unidades. Finalmente, las estrategias van evolucionando hasta mostrar un conocimiento del valor posicional y del concepto de decena. Cuatro grupos de 10, y 5 unidades sueltas son 45. Esta es la estrategia óptima esperada en este tipo de problemas que, como vemos, no se aplica desde el principio, sino que es el resultado de una larga evolución.

Un problema de división con grupos de diez en Educación Primaria

Para terminar, planteamos problemas de división agrupamiento, con grupos de diez, y con resto. Uno de estos problemas es: Si tenemos 37 huevos, ¿cuántas cajas de 10 huevos podemos llenar y cuántos huevos sobran? La estrategia básica se llama estrategia de medida. Es una estrategia de modelización directa que consiste en tomar 37 objetos, formar grupos de diez, contarlos, y contar después los objetos que quedan sin agrupar. En la Figura 15 seguimos todo el proceso.

Dentro del material de aula que ofrecemos a los alumnos suelen estar las cajas de huevos de diez. Los niños utilizan espontáneamente las cajas para resolver el problema introduciendo un cubo en cada huevo. Esto facilita la formación, el conteo de los grupos, y la visualización del concepto de decena (Figura 16). La misma estrategia se puede llevar a cabo con bloques de base 10, de modo que la solución del problema estará dada por el número de barras (grupos de 10, decenas) y cubos (unidades). Dado que el uso de materiales no está dirigido por los profesores, también se ven soluciones “mixtas”, con uso simultáneo de cajas de huevos y bloques de base 10 (Figura 16c).

Otras estrategias para este tipo de problemas se apoyan en la tabla 100, donde se busca el número objetivo (37) y las filas completas representan decenas y las casillas

individuales cuentan como unidades sobrantes. Finalmente, como estrategias más avanzadas, hay niños que utilizan el conteo a saltos de diez en diez y el conteo por unidades, sin ayuda de objetos. Para llegar a 37 huevos, cuentan 10, 20, 30, que son 3 cajas, y después 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, que son 7 huevos sueltos, llevando la cuenta de decenas y unidades sueltas con los dedos. La estrategia óptima, igual que en el apartado anterior, consiste en la aplicación directa del conocimiento del valor posicional, para determinar que 37 unidades son 3 decenas y 7 unidades sin agrupar.

REFLEXIONES FINALES

En los talleres realizados se ha observado que, desde los 4 a los 7 años, la mayoría de los niños resuelven problemas de multiplicación y división utilizando estrategias informales de modelización directa, inventadas por ellos mismos, sin tener ningún conocimiento formal sobre dichas operaciones aritméticas. A través de la resolución de problemas hemos conseguido que los niños razonen y modelicen, y articulen sus ideas para comunicarlas al resto de la clase, pudiendo establecer así relaciones entre los conocimientos que tienen con los de los compañeros.

Los niños siguen, a lo largo de la trayectoria que hemos descrito para el aprendizaje de la multiplicación y la división, un *camino de aprendizaje* jalonado por estrategias de modelización directa, estrategias de conteo y uso del valor posicional (en los problemas con grupos de diez). A través de problemas, en los que se utilizan recursos (como el rekenrek, la tabla 100, las cajas de huevos de 10, o los bloques de base 10), se cuida el tamaño de los números, y se introducen elementos especiales (como los grupos de 10 en los problemas de estructura multiplicativa), se va conformando el *camino de enseñanza* que promueve la evolución de los niños a través del correspondiente camino de aprendizaje. El objetivo final es proporcionar la base informal de conocimiento adecuada para el aprendizaje de la multiplicación y la división, y la comprensión del concepto de decena (Ramírez y De Castro, 2014).

Volviendo a la introducción del artículo, en nuestra línea metodológica, pensamos que es preferible adelantar en el currículo experiencias que ayuden a desarrollar los conocimientos informales, más que anticipar conocimientos formales. Así, más que adelantar la memorización de las tablas de multiplicar a primero de educación primaria, abogamos por introducir situaciones en las de los niños puedan construir significados para la multiplicación y la división, desde los 4 años, para favorecer su posterior comprensión, como las que hemos mostrado en este artículo.

Dentro de los principios del NCTM (2003), el principio de enseñanza señala que "Una enseñanza eficaz requiere conocer lo que los alumnos saben y lo que necesitan aprender, y luego estimularlos y ayudarlos para que lo aprendan bien" (NCTM, 2003, p. 17). Este "conocer lo que los alumnos saben" como punto de partida, evocador de la idea de aprendizaje significativo, puede interpretarse de formas diversas. Cuando un maestro está en tercer curso de educación primaria, iniciando a los alumnos en la multiplicación, puede plantearse cuáles son los conocimientos previos sobre los cuales construir el aprendizaje formal de la división. Sin embargo, a nuestro parecer, el ideal sería que desde los 4 años, e incluso antes, todavía en la educación infantil, los maestros puedan ayudar a los niños a recorrer las trayectorias de aprendizaje de la multiplicación y la división que

hemos descrito en este trabajo. En este sentido, pensamos que la idea de *trayectoria de aprendizaje*, que hemos tratado de ejemplificar en este artículo, supone una de las aportaciones fundamentales de la didáctica de la matemática en los últimos 20 años, pues permite enfocar el trabajo del aula hacia las ideas matemáticas nucleares, abordándolas de un modo informal, tiempo antes de tener que afrontar su aprendizaje formal, favoreciendo así su aprendizaje significativo.

REFERENCIAS

Arriba, M. y Osuna, R. (2005). *Un regalo diferente*. Pontevedra: Kalandraka.

Carpenter, T. P., Fennema, E., Franke, M. L., Levi, L. y Empson, S. B. (1999). *Children's mathematics: Cognitively guided instruction*. Portsmouth: Heinemann.

Carpenter, T. P., Franke, M. L., Jacobs, V., Fennema, E. y Empson, S. B. (1997). A Longitudinal Study of Intervention and Understanding in Children's Multidigit Addition and Subtraction. *Journal for Research in Mathematics Education, 29*, 3-30.

Castro, E., Cañadas, M. C. Y Castro-Rodríguez, E. (2013). Pensamiento numérico en edades tempranas. *Edma 0-6: Educación Matemática en el Infancia, 2*(2), 1-11.

CCSSI (2010). *Common Core State Standards for Mathematics*. Washington, DC: Common Core State Standards Initiative. Recuperado el 15/11/2014 de: http://www.corestandards.org/assets/CCSSI_Math%20Standards.pdf

Clements, D. H. (2004). Major themes and recommendations. In D. H. Clements, J. Sarama, & A. M. DiBiase (eds.), *Engaging young children in mathematics: Standards for early childhood mathematics education* (pp. 7-72). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Clements, D. H. y Sarama, J. (2004). Learning trajectories in mathematics education. *Mathematical Thinking and Learning, 6*(2), 81-89.

Consejería de Educación, Juventud y Deporte de la Comunidad de Madrid (2014). Borrador del Currículo de Educación Primaria. Recuperado de: http://www.feccoo-madrid.org/comunes/recursos/15708/1823565Borrador_de_Curriculum_de_Educacion_Primaria.pdf

Daro, P., Mosher, F., & Corcoran, T. (2011). *Learning trajectories in mathematics: A foundation for standards, curriculum, assessment, and instruction*. CPRE Research Report #RR-68. Philadelphia: Consortium for Policy Research in Education. DOI: 10.12698/cpre.2011.rr68

De Castro C. y Hernández, E. (2014). Problemas verbales de descomposición multiplicativa de cantidades en educación infantil. *PNA, 8*(3), 99-114.

De Castro, C., Molina, E., Gutiérrez, M. L., Martínez, S., Escorial, B. (2012). Resolución de problemas para el desarrollo de la competencia matemática en Educación Infantil. *Números. Revista de Didáctica de las Matemáticas, 80*, 53-70.

De Castro, C., Walsh, J., Del Coso, E., Salvador, C., González, V. y Escorial, B. (2009). "Dos de todo": El cuento chino de los problemas de comparación multiplicativa en la Educación Infantil. *Epsilon: Revista de la Sociedad Andaluza de Educación Matemática "Thales" 73*(3), 33-42.

Fuson, K. C. (1992). Research on whole number addition and subtraction. En D. C. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 243-275). Nueva York, NY: Macmillan.

Gómez, P. y Lupiáñez, J. L. (2007). Trayectorias hipotéticas de aprendizaje en la formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria. *PNA, 1*(2), 79-98.

Gómez, P., González, M.J. y Romero, I. (2014). Caminos de aprendizaje en la formación de profesores de matemáticas: objetivos, tareas y evaluación. Profesorado. Revista de Currículum y Formación de Profesorado, 18(3), 319-338. Disponible en: http://www.ugr.es/local/recfpro/rev183COL7.pdf

González, O. y Fernández, F. (2007). *Chivos chivones*. Pontevedra: Kalandraka.

Grejniec, M. (2004). *¿A qué sabe la luna?* Pontevedra: Kalandraka.

López, M.E. y De Castro, C. (2014). Iniciación a los problemas de reparto igualatorio en educación infantil. *Épsilon, 31*(2), nº 87, 83-98.

Ministerio de Educación y Ciencia (2007, 20 de julio). ORDEN ECI/2211/2007, de 12 de julio, por la que se establece el currículo y se regula la ordenación de la Educación primaria. *BOE, 173*, pp. 31487-31566.

Ministerio de Educación, Cultura y Deporte (2014, 1 de marzo). Real Decreto 126/2014, de 28 de febrero, por la que se establece el currículo de Educación primaria. *BOE, 52*, pp. 19349-19420.

Ministerio de Educación, Cultura y Deporte (2014, 1 de mayo). Orden ECD/686/2014, de 23 de abril, por la que se establece el currículo de la Educación Primaria para el ámbito de gestión del Ministerio de Educación, Cultura y deporte y se regula su implantación, así como la evaluación y determinados aspectos organizativos de la etapa. *BOE, 106*, pp. 33827-34369.

NAEYC y NCTM (2013). Matemáticas en la Educación Infantil: Facilitando un buen inicio. Declaración conjunta de posición. *Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia, 2*(1), 1-23.

NCTM (2003). *Principios y Estándares para la Educación Matemática*. Sevilla: Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales.

Núñez, M. y Dumas, O. (2005). *El gato tragón*. Pontevedra: Kalandraka.

OCDE (2005). *Informe PISA 2003: Aprender para el mundo del mañana*. Madrid: Santillana.

Ramírez, M. y De Castro, C. (2014). Descubrimiento del valor posicional a través de la resolución de problemas. *Revista de Didácticas Específicas, 11,* 40-66.

Ramos, M. (2004). *¡Mamá!* Barcelona: Corimbo.

Épsilon - *Revista de Educación Matemática* **2014, Vol. 31(3), nº 88, 55-66**

Utilizando gráficas y tablas para comparar distintos procesos de elección

Alberto Arnal-Bailera
Universidad de Zaragoza

RESUMEN: *Analizamos un problema aparentemente sencillo: un grupo de vecinos deciden entre una de tres opciones posibles para pintar la escalera. Se propone un proceso en el que introduce dos preguntas para efectuar la decisión. Realizamos un análisis matemático de la equidad de este proceso y las diferencias con el proceso de una sola pregunta.*
PALABRAS CLAVE: *Toma de decisiones, matemáticas electorales, representaciones gráficas.*

Using graphics and tables to compare different processes of choice

ABSTRACT : *We analyze a seemingly simple problem: the process for a group of neighbors for deciding between one of three options to paint the stairs. However, the president of the community proposes a process that introduces two questions rather than one to make the decision. We perform a mathematical analysis of the equity of this process and the differences with one question process.*
KEYWORDS: *decision making, electoral mathematics, graphic representations.*

INTRODUCCIÓN

Se admite comunmente que la educación matemática tiene tres finalidades principales: Formativa (contribuyendo al desarrollo de capacidades generales y de razonamiento lógico de los estudiantes), funcional (por ejemplo contribuyendo a responder a situaciones de la vida diaria como consumidor o futuro elector) e instrumental (contribuyendo al desarrollo y a la formalización de las ciencias experimentales, tecnológicas y sociales).

La Orden de 9 de mayo de 2007, del Departamento de Educación, Cultura y Deporte del Gobierno de Aragón, por la que se prueba el currículo de la Educación secundaria obligatoria, resume la persecución de estas finalidades en la intención de desarrollar la competencia matemática, esto es promover el uso la argumentación y el lenguaje preciso y riguroso propio de las matemáticas así como las herramientas propias de esta ciencia, como las representaciones gráficas, para resolver problemas cotidianos que tengan de que ver con su vida personal o social y también con otros ámbitos del conocimiento.

Entre los procesos de toma de decisión más estudiados están los referidos a procesos electorales (Álvarez y Alonso, 2010; Álvaro, 2001; Girón y Bernardo, 2007; Hernández, 2001). Apenas hemos encontrado sobre las distintas posibilidades que se plantean en elecciones directas entre varias opciones, a pesar de que también se presentan en el contexto electoral español en la elección de senadores. Fernández y Fernández (1999) analizan un texto histórico que describe un proceso de elección entre varios candidatos a un mismo puesto. La razón podría estar en la simplicidad con la que habitualmente se desarrolla un proceso de elección entre varias opciones. Por ejemplo en Suiza durante los últimos 170 años se han realizado numerosas consultas a la población sobre reformas de leyes y la disyuntiva que se plantea es "sí" o "no". Si la estructura de la consulta es una pregunta con varias respuestas, se puede actuar de varios modos, entre ellos: la opción más votada es la elegida (elección de senadores en España, listas abiertas…) o bien asignar un determinado valor a la opción preferida y valores inferiores a la segunda y sucesivas, al modo de los concursos televisivos de Eurovisión por ejemplo o el descrito en Fernández y Fernández (1999).

Nos ocupamos aquí del análisis comparativo de los procesos para tomar una decisión en una comunidad de vecinos en la que quieren pintar la escalera debiendo los vecinos elegir entre tres colores posibles. Hay dos propuestas sobre cómo desarrollar el proceso de toma de la decisión, una votación con tres opciones, eligiéndose la más votada, y una votación más compleja con dos preguntas, en la primera de las cuales se vota sí o no a un determinado color y en la segunda solo votan los que no querían el primero, eligiendo entre los otros dos. A primera vista ya vemos que la falta de simetría del proceso afectará de algún modo a su ecuanimidad. Propondremos distintas representaciones gráficas y tablas que contribuirán a poner de relieve las diferencias entre las dos propuestas y cómo en muchas ocasiones la decisión está muy influenciada por el propio proceso.

PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Consideramos un problema típico en una comunidad de vecinos: Hace ya varios años que se pintó la escalera por última vez y parece razonable volver a pintarla. Los colores entre los que tienen que elegir son el amarillo, el verde y el naranja. Se proponen dos procesos para tomar la decisión sobre el color:

- Primera: Un vecino propone que se hagan papeletas con tres opciones, pintar de amarillo, de verde y de naranja. Cada vecino marca qué color prefiere se meten en una caja y se cuentan las papeletas favorables a cada opción.
- Segunda: El presidente de la comunidad de propietarios alega que el naranja es muy distinto de los otros dos colores al ser un color cálido y los otros dos fríos. Por ello propone un proceso distinto mediante dos preguntas:

- 1ª pregunta: ¿Quiere Vd. que se pinte la escalera de naranja?
- 2ª Responda solo en caso de que haya respondido de modo negativo a la primera pregunta, ¿Prefiere que se pinte de amarillo o de verde?

Vamos ahora a realizar un análisis exhaustivo de las posibles distribuciones de las opiniones de los vecinos y cómo se traducen en una decisión u otra en función del proceso empleado.

Consideramos primero una pequeña comunidad de vecinos de 19 vecinos (caso discreto) y veremos después si las conclusiones extraídas son extrapolables cuando el proceso se planteara a un número grande de personas, para este caso trabajaremos con los porcentajes de vecinos (caso continuo).

UN NÚMERO PEQUEÑO DE VECINOS, EL CASO DISCRETO

En la comunidad de vecinos de nuestro ejemplo hay 19 vecinos. Nadie es indiferente y todo el mundo toma partido por una u otra opción. Estas distintas formas de pensamiento las podemos representar en una tabla de doble entrada (ver Tabla 1), poniendo en las columnas las distintas cantidades de vecinos que quieren pintar de verde, y en las filas las de los que quieren pintar de amarillo. El resto hasta 19 son los que quieren pintar de naranja. Así en la celda (i,j) podemos identificar el número de vecinos a favor de pintar de naranja cuando hay i vecinos a favor de pintar de verde y j a favor de pintar de amarillo.

Vamos a llamar distribución de votos a la terna formada por los votos recibidos por cada color, expresados estos en número o en porcentaje.

En la intersección de la columna 7 (vecinos favorables al verde) con la fila 5 (vecinos favorables al amarillo), hay un 8 que señala que el resto de los vecinos hasta 19 quieren pintar de naranja. Las celdas sombreadas en gris son distribuciones imposibles ya que sumarían más de los 19 votos totales.

Estas distintas distribuciones de las opiniones de los vecinos son previas al comienzo del proceso de decisión, pero no se van a interpretar de un mismo modo según sea el proceso de toma de decisiones (tabla 1).

Veamos ahora cómo queda la tabla anterior, en la que vamos a sustituir en cada celda el número de personas que quieren pintar de naranja por el resultado final de la decisión tomada por la comunidad según sea el proceso que se siga para la toma de decisiones.

Primer proceso de elección, elección simultánea entre las tres opciones:

En esta primera forma de elección, la propuesta por el vecino, gana la opción más votada, por ejemplo en la casilla donde confluyen la columna 3 y la fila 7 observamos un número 9 (ver Tabla 1) o una letra N (ver Tabla 2). Esto quiere decir que cuando hay 3 vecinos a favor de pintar de verde y 7 a favor de pintar de amarillo, quedan 9 a favor de pintar de naranja y esta es la decisión adoptada por la comunidad (tabla 2).

Tabla 3. Color elegido según las distribuciones de votos. Segunda forma de elección.

Vecinos favorables al color amarillo \ Vecinos favorables al color verde	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
19	A																			
18	A	A																		
17	A	A	A																	
16	A	A	A	A																
15	A	A	A	A	A															
14	A	A	A	A	A	A														
13	A	A	A	A	A	A	A													
12	A	A	A	A	A	A	A	A												
11	A	A	A	A	A	A	A	A	A											
10	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A										
9	N	A	A	A	A	A	A	A	A		V									
8	N	N	A	A	A	A	A	A		V	V	V								
7	N	N	N	A	A	A	A		V	V	V	V	V							
6	N	N	N	N	A	A		V	V	V	V	V	V	V						
5	N	N	N	N	N		V	V	V	V	V	V	V	V	V					
4	N	N	N	N	N	N	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V				
3	N	N	N	N	N	N	N	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V			
2	N	N	N	N	N	N	N	N	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V		
1	N	N	N	N	N	N	N	N	N	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	
0	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V

En total hay 210 distribuciones posibles de los votos acerca de las tres opciones. En 9 de ellas que hay empate entre dos opciones (en blanco). Hay 67 distribuciones de los votos que hacen ganadora a cada una de las tres opciones.

Se observa la confirmación matemática de lo se intuía a partir de la pregunta, ninguna de las tres opciones recibe un trato diferente de las otras dos.

Segundo proceso de elección, doble pregunta.

En esta segunda forma de elección, la propuesta por el presidente, hay dos preguntas, por lo que hay que hacer un análisis un poco más pausado para ver cuál es la opción elegida en cada caso. Por ejemplo en la casilla donde confluyen la columna rotulada con un ‘3’ y la fila rotulada con un ‘7’ observamos un número 9 (ver Tabla 1) o una letra N (ver Tabla 2). Esto quiere decir que cuando hay 3 vecinos a favor de pintar de verde y 7 a favor de pintar de amarillo, quedan 9 a favor de pintar de naranja. Por tanto en la primera pregunta hay 9 vecinos a favor de pintar de naranja y 10 en contra, con lo que este color se desecha. En la segunda pregunta solo votan los contrarios al naranja, ganando los partidarios del color amarillo y esta es la decisión adoptada por la comunidad. Notar que el color de la pintura finalmente elegida es apoyada solo por 7 vecinos frente a 9 que apoyaban el naranja.

Cabe destacar que en casos como el anterior varía la decisión de la comunidad según cuál sea la forma de elección, hay 18 casos similares a este, en los que en ganaba la opción ‘color naranja’ en la primera forma de elección para pasar a ganar el amarillo o el verde en la segunda forma de elección. Estos casos están remarcados en las Tablas 1 y 2.

También ahora hay 210 distribuciones posibles de los votos acerca de las tres opciones, aunque ahora solo hay empate en 5 de ellas. La opción naranja solo gana cuando tiene 10 votos o más en la primera elección, lo que ocurre en 55 de las distribuciones.

Las opciones amarillo y verde tienen cada una 75 distribuciones favorables y presentan una simetría entre ambas. Cada uno de los dos conjuntos de 75 distribuciones se puede descomponer en dos subconjuntos, 55 de ellas corresponden a situaciones en las que la mayoría de los vecinos están a favor del color amarillo o verde respectivamente, como en el caso de la opción naranja. El resto de las distribuciones corresponden a situaciones en las que, sin tener mayoría absoluta ninguno de los colores, unidos los partidarios de amarillo y verde superan a los partidarios del naranja en la primera pregunta para luego decidir en la segunda pregunta solamente entre estas dos opciones.

Se observa la confirmación matemática de lo se intuía a partir de las dos preguntas, la opción naranja recibe un trato diferente de las otras dos, un trato mucho peor ya que solamente puede ganar en caso de obtener la mayoría absoluta de los votos en la primera pregunta.

Observamos (ver Tabla 4) como la primera forma de elección guarda una simetría perfecta entre las tres opciones a elegir, mientras que la segunda "quita" algunas distribuciones favorables a la opción naranja para aumentar las de verde y amarillo.

Tabla 4. Comparación entre las dos formas de elección-discreto

Formas de elección → ↓ Distribuciones	Primera	Segunda
Favorables a verde	67	75
Favorables a amarillo	67	75
Favorables a naranja	67	55
Empates	9	5
Totales	210	210

UN NÚMERO GRANDE DE VECINOS, EL CASO CONTINUO

¿Cómo quedaría este análisis si el número fuera mucho mayor? Consideraremos ahora como variables los porcentajes de votos para cada color.

Vamos a hacer representaciones gráficas en dos ejes cartesianos de la relación entre el porcentaje de población favorable a pintar de amarillo en el eje x y porcentaje de población favorable a pintar de verde en el eje y. Dado el supuesto de no abstención, el resto hasta el 100% de participación en el proceso estará a favor de pintar de naranja. Para simplificar la notación, llamamos V, A o N a las variables que representan el porcentaje de población favorable a pintar de verde, amarillo o naranja, respectivamente.

Notar que podemos utilizar un gráfico en dos dimensiones para representar lo que en realidad son tres variables ya que están unidas por la ecuación V+A+N=100, lo que hace

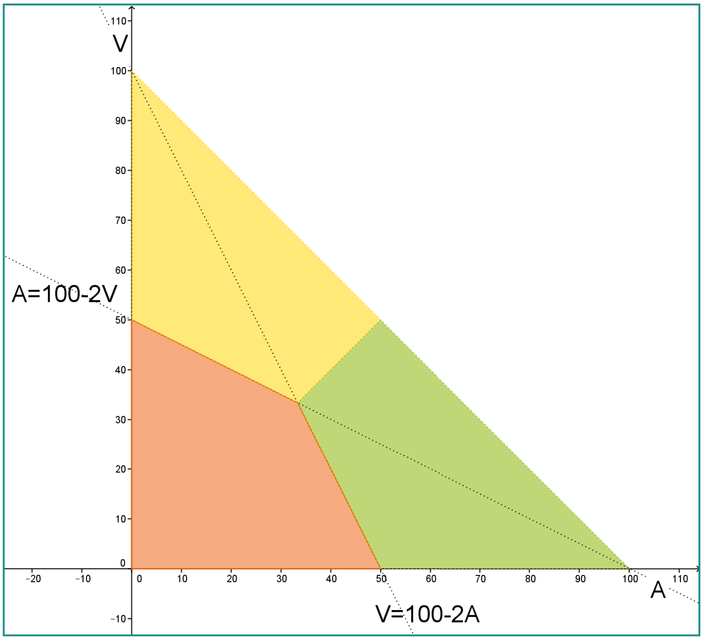


Figura 1. Opción elegida – primera forma de elección.

que si conocemos V y A podamos conocer N y por tanto saber cuál es el color elegido por la comunidad en cada sistema de elección.

La primera representación corresponde a la opción que proponía el vecino, en la que se elegía simultáneamente entre los tres colores. Marcamos con los tres colores las regiones donde gana cada opción. Vamos a representar estas regiones teniendo en cuenta primero que V≥0, A≥0 y que A+V≤100. Además:

- Para ganar la opción V, se tiene que cumplir que V>A y además que V>N. Como N=100-A-V, nos queda que V>100-A-V, simplificando: A>100-2V.
- Para ganar la opción A, se tiene que cumplir que A>V y además que A>N. Como N=100-A-V, nos queda que A>100-A-V, simplificando: V>100-2A.
- Para ganar la opción N, se tiene que cumplir N>A y N>V, aplicando que N=100-A-V, simplificando tenemos: A<100-2V y V<100-2A.

Así, podríamos dibujar un gráfico análogo a la Tabla 2 (figura 1).

Observamos, ver figura 1, que la simetría en la formulación de la pregunta, en la que las tres posibles respuestas tienen papeles simétricos, hace que las áreas de las tres regiones en que queda dividido el triángulo tengan la misma área (5000/3 u^2)

La segunda representación corresponde a la opción que proponía el presidente, en la que se respondía sucesivamente a dos preguntas. Marcamos con los tres colores las regiones donde gana cada opción:

- Para ganar la opción V, se tiene que cumplir que V>A y N<50. Como N=100-A-V, nos queda que 100-A-V<50, simplificando: 50<A+V.

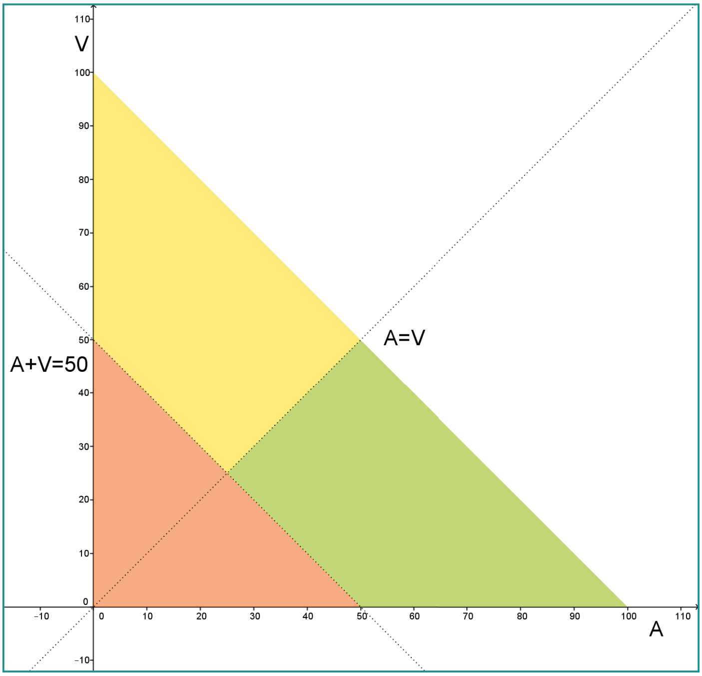


Figura 2. Opción elegida – segunda forma de elección.

- Para ganar la opción A, se tiene que cumplir que V<A y N<50. Como N=100-A-V, nos queda que 100-A-V<50, simplificando: 50<A+V.
- Para ganar la opción N, se tiene que cumplir N>50. Como N=100-A-V, nos queda que 100-A-V<50, simplificando: 50>A+V.

Así, podemos dibujar un gráfico análogo a la Tabla 3 en el que observamos, ver Figura 2, que el hecho de que para ganar la opción color naranja deba obtener mayoría en la primera pregunta se traduce gráficamente en que el área que representa su región asociada ha perdido área, quedando ahora en 1250 u^2. Las otras dos regiones tienen áreas iguales, 1875 u^2 cada una. Estas áreas han sido calculadas directamente por el programa de geometría dinámica GeoGebra.

Las zonas amarilla o verde (ver Figura 3) corresponden respectivamente a distribuciones de voto que con el primer proceso de elección daban como resultado pintar de naranja y con la segunda forma dan como resultado pintar de amarillo o verde:

Las diferencias entre un gráfico y otro permiten describir de modo cualitativo y cuantitativo las diferencias entre un tipo y otro de formas de elección de la pintura (ver Figura 3): por un lado es injusto que una de las opciones (color naranja) tenga que tener mayoría absoluta para poder ser elegida, por otro la diferencia de áreas entre las regiones verdes o amarillas de uno y otro gráfico (ver Tabla 5) darían una primera aproximación al tamaño de la injusticia de la segunda forma de elección y de la simetría de la primera. Aunque esta injusticia es mucho mayor si tenemos en cuenta que es previsible que las distintas distribuciones de % entre unas opciones y otras no sean uniformes y la mayor

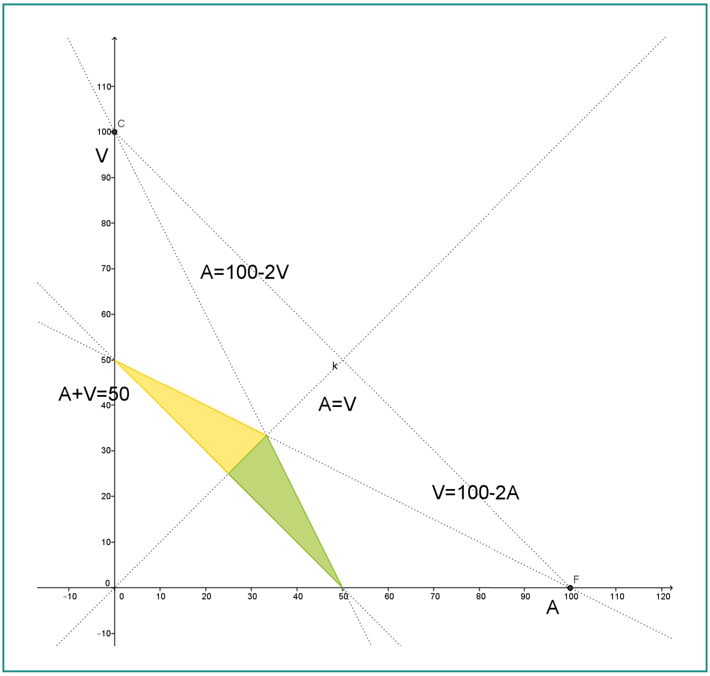


Figura 3. Diferencia entre la primera y segunda formas de elección.

parte de las ocasiones haya una cierta disputa entre unos colores y otros, lo que en términos de probabilidad se expresaría dando mayor probabilidad a la región que cambia de color que la que le correspondería exclusivamente en razón de su área.

Tabla 5. Comparación entre las dos formas de elección – continuo.

Formas de elección → ↓ Áreas	Primera	Segunda
Favorables a verde	$1666,\hat{6}$ u^2	1875 u^2
Favorables a amarillo	$1666,\hat{6}$ u^2	1875 u^2
Favorables a naranja	$1666,\hat{6}$ u^2	1250 u^2
Totales	5000 u^2	5000 u^2

Aunque resulta claro, hay que explicitar que el papel jugado por cada color podría ser intercambiado en la opción del presidente y perjudicar así las opciones de ganar de los partidarios del verde o del amarillo en lugar de las opciones de los partidarios del naranja, por ejemplo planteando:

– 1ª pregunta: ¿Quiere Vd. que se pinte la escalera de verde?
– 2ª en caso de que haya respondido de modo negativo a la primera pregunta, ¿Prefiere que se pinte de amarillo o de naranja?

CONCLUSIONES Y APLICACIÓN EN EL AULA

Hacemos notar en este artículo la posibilidad de complicar un proceso a priori sencillo y la necesidad en ese caso de hacer una reflexión pausada de los efectos matemáticos de esa complicación y cómo afecta a la oportunidad de ser elegida cada opción posible.

Aunque en general no podemos ordenar los procesos de elección entre varias opciones hasta el punto de llegar a decir si uno es mejor o peor que otro, en este caso sí resulta claro que la propuesta del Presidente de la Comunidad de vecinos es directamente injusta puesto que no es simétrica, dando mayor número de posibilidades de ganar a unos colores que a otros.

Hemos mostrado además, cómo esta falta de simetría afecta a la justicia del proceso también en el caso de un número elevado de electores, aprovechando así para mostrar un ejemplo de la relación entre un problema discreto y su equivalente continuo y las claras similitudes entre las representaciones gráficas y las tablas que aparecen en un caso y otro.

Las matemáticas, atendiendo a su finalidad funcional, deben apoyar el proceso de toma de decisiones de los futuros electores –tanto en sus elecciones políticas como en las de contextos más cotidianos como este–, dotándoles de herramientas matemáticas y capacidades argumentativas contribuyendo así a la formación de un espíritu crítico que les permita comprender situaciones en las que se plantean elecciones. Para ello, debemos mostrar a los alumnos situaciones de la vida cotidiana relacionadas con los procesos de elección, sean o no de tipo político, promoviendo un análisis matemático detallado de la justicia o injusticia de los mismos.

Nuestra propuesta didáctica en torno a las matemáticas electorales, a desarrollar en futuros artículos, incluiría:

1) Estudio de los efectos de la vigente Ley d´Hont sobre la diferente representación de los electores según si su opción es o no mayoritaria. Estudio de otras leyes de reparto de representantes y comparación entre ambas. Ambos estudios podrían contextualizarse fácilmente considerando las últimas elecciones del municipio del Centro que se trate.
2) Estudio de cómo otros procesos de elección más simples son también susceptibles de ser enfocados de diversos modos y que el utilizar uno u otro no es inocente en absoluto.

REFERENCIAS

Álvarez, M. y Alonso, J.M. (2010). Las elecciones generales de 2008 y el juego del parlamento. *Suma,* 63, 7-15.

Alvaro, M. (2001) Los sistemas de votación y su problemática. *Epsilon: Revista de la Sociedad Andaluza de Educación Matemática "Thales"*, 50, 293-300.

Confédération suisse. Initiatives populaires. Recuperado el 1 de agosto de 2014, de http://www.bk.admin.ch/themen/pore/vi/index.html?lang=fr

Hernández, E. (2001). Matemáticas y sistemas electorales. En Hernández, J. (coord.) *La enseñanza de las matemáticas a debate: referentes europeos* (pags. 69-85). Madrid: Subdirección General de Información y Publicaciones.

Fernández, E. y Fernández, F. (1999) La teoría de votación y la "memoria matemática sobre el cálculo de la opinión en las elecciones" del Dr. D. Joseph Isidoro Morales. *Epsilon: Revista de la Sociedad Andaluza de Educación Matemática "Thales",* 45, 295-310.

Girón, F. J. y Bernardo, J. M. (2007). Las matemáticas de los sistemas electorales. *Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales*, 1, 21-34.

Estudiando probabilidad con el juego Chinesenspiel

Carmen León-Mantero
José Carlos Casas
Universidad de Córdoba

Resumen: *Cuando los conceptos se presentan de foma lúdica no solo se logra captar la atención de los alumnos sino que también su comprensión es mayor y más rápica. Presentamos una actividad para introducir conceptos de probabilidad a los alumnos de educación primaria a través de un juego matemático conocido como Chinesenspiel.*
Palabras Clave: *Probabilidad, juego matemático, educación primaria, matemáticas*

Studying probability with the Chinesenspiel game

Abstract: *When we present the concepts to students in a playful way , we get more attention and understanding is higher and faster. We present an activity to introduce concepts of probability to the primary school students through a mathematic game known as Chinesenspiel.*
Keywords: *Probability, mathematics games, primary school students, mathematics*

INTRODUCCIÓN

En diferentes ocasiones, la emersión de nuevos modos de pensar en matemáticas ha sido fruto del trabajo realizado fuera del contexto científico, y es que a menudo ocurre que cuando somos capaces de plantear y responder cuestiones en un ambiente relajado o lúdico surgen nuevas vías de pensamiento matemático. Por tanto, el uso de juegos matemáticos al iniciar el estudio de un tema puede aportar a alumnos de cualquier nivel, entre otros beneficios, motivación, interés, una aproximación inicial adecuada y la adquisición de algunas de las habilidades matemáticas que las matemáticas requieren (De Guzmán, 1989).

Un ejemplo de juego matemático es el denominado Chinesenspiel. Se trata de una adaptación del juego del parchís, clasificado como juego de persecución, que por su simpleza resulta muy útil para introducir el concepto de probabilidad en los niveles de educación primaria.

El Real Decreto 1513/2006 de Educación Primaria, así como el currículo de Educación Primaria de Andalucía recogen en el bloque 4 y el núcleo temático 6 respectivamente del área de matemáticas, denominado Tratamiento de la información, azar y probabilidad, los siguientes contenidos resumidos para el tercer ciclo:

Carácter aleatorio de algunas experiencias

- Presencia del azar en la vida cotidiana. Estimación del grado de probabilidad de un suceso.
- Valoración de la necesidad de reflexión, razonamiento y perseverancia para superar las dificultades implícitas en la resolución de problemas.

Desde las instituciones se recomienda promocionar el aprendizaje de la estadística y la probabilidad de una manera natural desde la educación primaria con la finalidad de ayudar a los niños a relacionar estos conocimientos con los fenómenos que les rodean (MEC, 2006). Para ello, presentamos una actividad que podemos realizar con alumnos de tercer ciclo de primaria para introducir los conceptos de aleatoriedad, probabilidad y espacio muestral.

ACTIVIDADES

El material necesario para el desarrollo del juego es un tablero como el que mostramos en la figura 1, cuatro fichas (una para cada jugador) de colores rojo, verde, azul y amarillo, y un gran dado con dos caras blancas y las cuatro caras restantes con los colores de los jugadores: rojo, verde, azul y amarillo. El número de jugadores puede variar de 2 a 4.

Es posible que los alumnos no conozcan las reglas del juego, por tanto antes de comenzar a jugar, procederemos a explicárselas:

- Para empezar, cada jugador debe colocar su ficha en la esquina del tablero con el mismo color que ésta.
- Uno de los jugadores lanza el dado hasta que aparezca uno de los colores que aparecen en el tablero, lo que permitirá al jugador que tenga la ficha del mismo color iniciar el juego.
- El juego comienza cuando el jugador seleccionado lanza el dado. Si el resultado de éste es una cara blanca, el jugador repite lanzamiento. Si el color obtenido es el mismo que el del jugador que ha lanzado, avanza una casilla (en sentido contrario a las agujas del reloj) y vuelve a lanzar el dado. Si el color obtenido es cualquiera de los otros 3,se acaba su turno y le pasa el dado al jugador de su derecha.

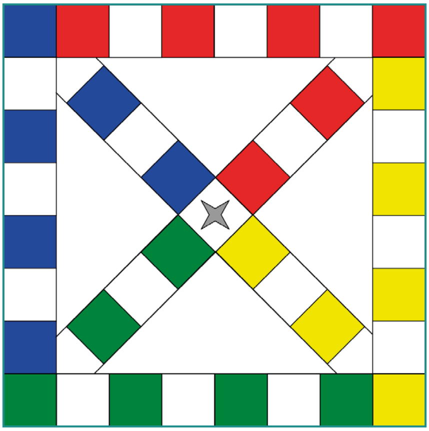


Figura 1. Tablero de Chinesenspiel.

- Cuando al mover ficha un jugador, éste se encuentra con otra en la casilla de destino, el jugador que se encontraba en esta posición tendrá que mover su ficha a la casilla de inicio.
- Cuando un jugador da la vuelta completa al tablero volviendo a la casilla inicial, enfilará en diagonal el último recorrido hasta la casilla central.
- Gana la partida el primero que logre llegar a la casilla central.

Tras preguntar a los alumnos si han entendido las reglas básicas, se les pide que hagan grupos de cuatro y se entrega a cada grupo un tablero y un dado para que comiencen a jugar de forma libre mientras el profesor comprueba que todos los alumnos han comprendido las reglas del juego y se han familiarizado con el tablero y el tipo de dado.

Como comentábamos anteriormente, vamos a proponer a nuestros alumnos actividades para trabajar los conceptos de aleatoriedad, espacio muestral y probabilidad. Para ello, les pediremos que pongan en común de forma reflexiva sus respuestas a las siguientes actividades:

Actividad 1

Proponemos a los alumnos las diferentes cuestiones sobre situaciones aleatorias:

- ¿Sabemos de antemano qué jugador va a comenzar el juego?
- ¿Influye el color elegido en el resultado del juego?

Actividad 2

Pedimos a los alumnos que indiquen el espacio muestral del experimento: una vez que conozcamos el jugador que comienza a jugar,

- ¿Qué resultados puede obtener cuando lance el dado?
- ¿En qué casillas podría quedarse cuando acabe su turno?

Actividad 3

Pedimos a los alumnos que intuyan los diferentes grados de probabilidad de las situaciones,

– ¿Qué situación es más fácil que ocurra? ¿que pierda turno, que vuelva a tirar moviendo ficha o que vuelva a tirar sin moverla?

Actividad 4

Proponemos a los estudiantes la situación “comerse la ficha de otro jugador” y les preguntamos:

- ¿Un jugador puede comerse la ficha de cualquiera de los otros jugadores?

– Si ponemos una ficha justo delante del jugador que tiene el turno, indicar algunas combinaciones con las que el jugador se come la ficha del otro. ¿Hay muchas combinaciones posibles? ¿Sabrías decir todas?
– Repetir la propuesta anterior con dos celdas de distancia.

Actividad 5

Colocamos las fichas a una distancia de una casilla del final respectivamente. Si le toca jugar al jugador con la ficha de color rojo,

– ¿Quiénes pueden ganar?
– ¿Qué tiene que salir para que gane el rojo?
– ¿Y el azul?
– ¿Y el verde?
– ¿Y el amarillo?
– ¿Quién es más fácil que gane?
– ¿Quién lo tiene más difícil?
– Si hubiese una ficha de color blanco, ¿tendría ventaja? ¿Por qué?

REFLEXIONES FINALES

Para profundizar más en el concepto de aleatoriedad podemos cambiar una regla del juego, por ejemplo, cuando un jugador pierde el turno, el dado pasa al jugador con el color resultante en el dado, en lugar de pasar al de su derecha. Para ello se podría elegir a un alumno para lanzar siempre el dado y otros ocho que fuesen los jugadores de dos tableros. En uno de los tableros se cambia de turno de forma convencional y en el otro según el color del dado. Transcurrido un tiempo, y si la partida es suficientemente larga, los jugadores con el mismo color deberían estar situados en lugares parecidos.

Tras la familiarización de los conceptos anteriores podemos introducir el concepto de probabilidad a través de la regla de Laplace e intentar que asignen probabilidades a cada uno de los sucesos del dado. Incluso podemos añadir el concepto de independencia de sucesos pidiendo a los alumnos que calculen la probabilidad de que se repita el mismo resultado en el dado después de haber obtenido, por ejemplo la cara blanca.

REFERENCIAS

De Guzmán, M. (1989). Juegos y Matemáticas. *Suma, 4*, 61-64.
MEC. (2006). *Real Decreto 1513/2006, de 7 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas de la Educación Primaria (BOE del 8 de diciembre)*.

Épsilon - *Revista de Educación Matemática* 2014, Vol. 31(3), nº 88, 71-88

La extracción de raíces en el *Tratado de Mathematicas* (1573) del bachiller Juan Pérez de Moya

Vicente Meavilla Seguí
Licenciado en Matemáticas, Doctor en Filosofía (Pedagogía)
vmeavill@hotmail.com
Antonio M. Oller Marcén
Centro Universitario de la Defensa de Zaragoza
oller@unizar.es

RESUMEN: *Si se atiende al número de ediciones de algunas de sus obras y al volumen de su producción, no cabe duda de que el bachiller Juan Pérez de Moya es el matemático español más notable del siglo XVI. En este artículo se analizan los contenidos concernientes al tópico «extracción de raíces» propuestos por el bachiller en el Tratado de Mathematicas (1573) y se comparan con los que se desarrollan en textos de la misma época. A la luz de esta comparación, se pretende situar al matemático jienense (en cuanto al estudio de las raíces de números naturales se refiere) en el lugar que le corresponde dentro de la Matemática renacentista.*
Palabras *clave: Juan Pérez de Moya; siglo XVI; extracción de raíces; Aritmética; Tratado de Mathematicas.*

The extraction of roots in the *Tratado de Mathematicas* (1573) of the bachelor Juan Pérez de Moya

ABSTRACT: *According to the number of editions of some of his works and to the volume of its production it is clear that the Bachelor Juan Pérez de Moya is the most outstanding Spanish mathematician of the sixteenth century. In this paper we analyze the contents concerning the topic «extraction of roots» (Tratado de Mathematicas, 1573) and we compare them with those developed in texts from the same period of time. In*

light of this comparison, it is expected to place the Spanish mathematician (as for the study of the roots of natural numbers is concerned) in his right place within Renaissance Mathematics.
Keywords: *Juan Pérez de Moya; Sixteenth century; extraction of roots; Arithmetic; Tratado de Mathematicas.*

1. INTRODUCCIÓN

Los datos biográficos sobre el bachiller Juan Pérez de Moya son escasos e inciertos (Meavilla, 2005). Nació antes del 1513, probablemente en 1512, en Santisteban del Puerto (Jaén), tal como se indica en la portada de algunos de sus libros. Estudió en Salamanca y Alcalá de Henares. En 1536 obtuvo una capellanía en su pueblo natal y, ya muy mayor, fue canónigo de la Catedral de Granada, ciudad en la que murió allá por el 1596.

Además de algunas obras de carácter religioso y mitológico, el bachiller escribió varios libros de contenido científico-matemático en los que procuró divulgar los conocimientos de su época utilizando un lenguaje cercano, claro, preciso y compresible. La temática de dichos textos transita desde los «libros de cuentas» hasta el álgebra simbólica («regla de la cosa»), pasando por la aritmética, geometría, filosofía natural, navegación, geografía, astronomía y cosmografía.

A continuación enumeramos sus obras de contenido científico:

1) *Libro de cuenta, que trata de las quatro Reglas generales de Arithmetica practica, por numerosos enteros y quebrados y de reducciones de monedas destos Reynos de Castilla, con un razonamiento sobre la misma facultad*. Toledo, Juan Ferrer,1554.
2) *Libro Segundo de Arithmetica, Que trata de proporcion, y regla de tres, y monedas, pesos antiguos, con otras cosas tocantes al arte menor y mayor*. Salamanca, Iuan Canoua, 1557.
3) *Compendio de la regla de la cosa, o arte mayor*. Burgos, Martin de Bitoria, 1558.
4) *Arithmetica practica, y specvlatiua*. Salamanca, Mathias Gast, 1562[1].
5) *Arte de marear*[2], 1564.
6) *Obra intitvlada fragmentos mathematicos. En que se tratan cosas de Geometria, y Astronomia, y Geographia, y Philosophia natural, y Sphera, y Astrolabio, y Nauegacion, y Reloxes*. Salamanca, Iuan de Canoua, 1568.

---

1. Rodríguez Vidal (1987, pp. 10-11), refiriéndose al número de ediciones de la *Arithmetica practica, y specvlatiua*, afirma:

> «Es claro que cuando un libro ha tenido durante más de doscientos años sucesivas ediciones para utilizarlo como texto, no puede ser un libro indiferente a ningún estudioso de la historia de nuestra cultura. Este es el caso singular que ocurre con la *Arithmetica practica, y specvlatiua* del Bachiller Pérez de Moya».

2. Sobre este manuscrito de la Real Biblioteca del Monasterio de San Lorenzo de El Escorial, J. A. Sánchez Pérez (1929) afirma:

> **«Son** unos apuntes, no completos, atribuidos a Pérez de Moya, escritos en 1564. Parecen la preparación de una obra que no terminó».

7) *Tratado de Mathematicas en qve se contienen cosas de Arithmetica, Geometria, Cosmographia, y Philosophia natural. Con otras varias materias, necessarias a todas artes Liberales y Mechanicas*. Alcalá, Iuan Gracian, 1573.
8) *Tratado de Geometria Practica, y Speculatiua*. Alcalá, Ivan Gracian, 1573.
9) *Tratado de cosas de Astronomia,y Cosmographia, y Philosophia Natural*. Alcalá, Ivan Gracian, 1573.
10) *Arithmetica de Moya, intitvlada manual de contadores. En que se pone en suma lo que vn contador ha menester saber, y vn orden para los que no saben escreuir, con oyrlo leer, sepan contar, y conuertir de memoria vnas monedas en otras. Co(n) vnas tablas al fin en Guarismo, y Castellano para aueriguar con facilidad las cue(n)tas de los reditos de los ce(n)sos, y juros, segu(n) vsança de España, y otros reynos*. Alcalá, Iuan Gracian, 1582.
11) *Principios de Geometria, de que se pod(r)an aprouechar los estudiosos de artes liberales, y todo hombre que su officio le necessitare a tomar la regla y co(m)pas en la mano. Con el orden de medir, y diuidir tierras.* Madrid, Francisco Sanchez, 1584.

2. EL TRATADO DE MATHEMATICAS

Al referirse al *Tratado de Mathematicas en qve se contienen cosas de Arithmetica, Geometria, Cosmographia, y Philosophia natural*, Picatoste (1891) se expresa en los siguientes términos:

> *«Esta obra suele estar encuadernada en dos o tres tomos con distinta portada,* dedicatoria y prólogos, por lo cual se consideran como obras distintas y de esta manera las vamos a examinar.»

El primer tomo se consagra a la Aritmética[3], se desarrolla en setecientas cincuenta y dos páginas y se estructura en diez libros[4]. El libro quinto (pp. 323 – 396), al que

---

3. Como indica el título, el tomo segundo se dedica a la Geometría y el tercero se ocupa de la Astronomía, Cosmografía y Filosofía natural.

4. Los tópicos matemáticos a los que se consagra cada uno de ellos se indican al comienzo de la obra:
«**Lo** que se contiene en el primero tratado de Arithmetica
- **I) Arithmetica,** y Musica Speculatiua.
- **II) Las** reglas, o Problemas generales del Arithmetica Practica.
- **III) Quebrados,** o Fracciones Comunes, y Astronomicas.
- **IV) Reglas** de tres, y compañias, y falsas posiciones, y finezas de Oro, y Plata, y reglas de testamentos, y aprecios de joyas, &c.
- **V) Rayzes** de numeros.
- **VI) Prueuas** de las Problemas, o reglas generales de Arithmetica.
- **VII) Reglas** de Algebra, o de la Cosa, o arte mayor.
- **VIII) Demandas,** o questiones, y secretos, o experiencias de numeros.
- **IX) Cuentas** de memoria, para los que no saben escreuir, y reduziones de vnas monedas en otras.
- **X) Monedas,** y pesos antiguos, y characteres de numeros, y cosas de Reportorios de tiempo, y Computo.»

dedicaremos nuestra atención en los parágrafos siguientes, trata de las raíces de números y se divide en doce capítulos[5].

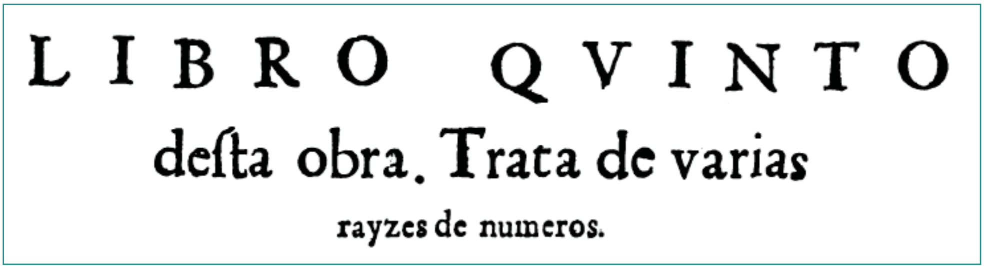

LIBRO QVINTO
deſta obra. Trata de varias
rayzes de numeros.

Fig. 1. Título del libro quinto.

3. LAS FUENTES DEL LIBRO QUINTO

Antes de entrar en el análisis de los contenidos matemáticos del libro quinto, nos parece oportuno presentar el catálogo de autores y obras citadas por Pérez de Moya al referirse a determinados asuntos de carácter aritmético y geométrico. En la tabla siguiente se recogen los autores citados por Pérez de Moya junto con la página en la que lo hace. También se incluye la obra en la que, posiblemente, se apoyó para realizar la referencia.

Autor	Obra	Páginas en que se cita
Ptolomeo	*Almagesto*	328
Euclides	*Elementos de Geometría*	334, 338, 339, 341
Oroncio Fineo	*Protomathesis* *Arithmetica practica, libri quatuor*	334, 335
Nicolas Tartaglia	*General trattato di numeri, et misure*	334, 335, 395
Michael Stifel	*Arithmetica integra*	395

5. Los asuntos tratados en cada uno de ellos se detallan en el «Summario de los capitulos, y articulos que se contienen en el quinto libro desta obra que trata de rayzes de numeros» (pp. 323 – 325):

«Capitulo primero. En que se dize que cosa son rayzes en los numeros, y de varias differencias de rayzes.
Cap. 2. Trata de la rayz quadrada, tiene nueue articulos.
Capit. 3. Trata de numero Cubo, o Cubico, y de su rayz Cubica, tiene onze articulos.
Cap. 4. Trata de rayz quadrada, de rayz quadrada, tiene ocho articulos.
Capitulo 5. Trata de rayz relata, tiene seys articulos.
Cap. 6. Trata de rayz censicubica, tiene ocho articulos.
Capitulo 7. Trata de segundo relato, y de su rayz segunda relata, tiene seys articulos.
Capitulo 8. Trata del censo, de censo, de censo, y de su rayz, tiene seys articulos.
Capit. 9. Trata de numero Cubo de Cubo, tiene seys articulos.
Cap. 10. Trata de censo relato, y de su rayz, tiene seys articulos.
Capit. 11. Trata del numero tercero relato, tiene seys articulos.
Capit. 12. Muestra sacar rayz quadrada, y cubica, y las demás, de fraciones Astronomicas.»

A continuación analizamos con algo más de detenimiento estas referencias.

1) Ptlomeo.
La única cita relativa a Ptolomeo (*Almagesto*, libro I, cap. 9) se encuentra en la página 328 y se refiere a la utilidad de las raíces en el campo de la Geometría y Cosmografía.

2) Euclides.
En la página 334 del libro quinto, al hablar de la extracción de la raíz cuadrada de números naturales, Pérez de Moya cita a Euclides y hace alusión a la cuarta proposición del libro segundo de los *Elementos*:

> «Si se divide de un modo cualquiera una recta por un punto, el cuadrado de la recta entera equivale a los cuadrados de las partes más el doble del rectángulo comprendido por las partes.»

En la página 338 encontramos dos citas más. La primera, que concierne al resto de la raíz cuadrada, no señala la proposición de los *Elementos* involucrada en el asunto. La segunda, relativa a la extracción geométrica de la raíz cuadrada, alude a la novena proposición del libro sexto de Euclides:

> «Construir una media proporcional entre dos rectas dadas.»

En la página 339 también contabilizamos dos notas relacionadas con cuestiones geométricas utilizadas para la demostración de la proposición 9 del libro VI. La primera hace referencia al corolario de la octava proposición del libro sexto de los *Elementos*:

> «En un triángulo rectángulo la perpendicular trazada desde el vértice del ángulo recto a la base es media proporcional entre los segmentos de la base.»

La segunda se refiere a la penúltima proposición del libro sexto de Euclides:

> «En los triángulos rectángulos el cuadrado sobre el lado opuesto al ángulo recto es equivalente a los cuadrados sobre los lados que forman ese ángulo recto.»

En la página 341, al hablar de la semejanza de números sólidos, el bachiller santistebeño aconseja la lectura de la proposición vigesimoquinta del libro octavo de los *Elementos*:

> «Los números sólidos semejantes tienen entre sí la misma razón que dos números cubos.»

Atendiendo a la numeración de las proposiciones mencionadas, podemos sospechar que Pérez de Moya consultó la obra: *Evclidis Megarensis mathematici clarissimi Elementorum Geometricorum. Lib. XV. Cum expositione Theonis in prioris XIII a Bartholomaeo Veneto latinitate donate, Campani in omnes, & Hypsiclis Alexandrini in duos postremos* (1537).

3) Oroncio Fineo.
En las páginas 334 y 335, al hablar de las aproximaciones de la raíz cuadrada de números sordos, el canónigo de la Catedral de Granada se refiere a Oroncio Fineo pero no indica la fuente documental. Pérez de Moya debió consultar los capítulos

consagrados a la extracción de la raíz cuadrada en la *Protomathesis* (1532)[6] o en alguna edición de la *Arithmetica practica, libri quatuor* (1542, 1544, 1555)[7].

4) Nicolo Tartaglia.
En las páginas 334 y 335 se alude a Tartaglia en relación a las aproximaciones de las raíces cuadradas. Dado que no se indican los textos consultados y teniendo en cuenta que el libro segundo de la segunda parte del *General trattato di numeri, et misure* (1556-1560) se dedica íntegramente a la extracción de raíces, sospechamos que Pérez de Moya debió examinar esta obra.
Por otro lado, en la página 395, el bachiller aconseja la lectura de Tartaglia en lo que se refiere a la extracción de la raíz tercera relata (raíz de índice once) de entero y quebrado.

5) Michael Stifel.
La única mención referente a Michael Stifel se encuentra en la página 395 y alude a la extracción de la raíz tercera relata de entero y quebrado. Como en otras ocasiones, Pérez de Moya oculta el texto consultado. En este caso, creemos que se trata de la *Arithmetica integra* (1544)[8].

4. LA EXTRACCIÓN DE RAÍCES DE NÚMEROS NATURALES

El capítulo I del libro quinto del primer tomo del *Tratado de Mathematicas*, apoyándose en las nociones de número cuadrado, cubo, censo de censo, y relato, declara los conceptos de raíz cuadrada, cúbica, cuadrada de cuadrada (cuarta) y relata (quinta). Llegando a este punto, Pérez de Moya comenta:

> «Segu(n) esto infinitas differencias ay de rayzes segu(n) el orden q(u)e vno le paresciere de multiplicar a los numeros muchas, o pocas vezes.»

También se consideran los números prónicos[9], las raíces prónicas[10] y las raíces compuestas (ligadas[11] y universales[12]).

6. La extracción de la raíz cuadrada de números naturales se estudia en la parte consagrada a la Aritmética Práctica (*Liber primus, cap. VII. De inuentione radicis quadratorum numerorum*).

7. En la edición de 1555 que hemos consultado, la extracción de la raíz cuadrada de números naturales se estudia en el capítulo 7 (*De inuentione quadratae radicis in numerus integris*) del libro primero.

8. La extracción de raíces se contempla en el capítulo 5 (*De extractionibus radicum*) del primer libro.

9. Utilizando el simbolismo moderno, un número prónico según Pérez de Moya es del tipo , donde a es un cuadrado perfecto. Así, $18 = 4^2 + \sqrt{4}$ es prónico.

10. Dado un número prónico $a^2 + \sqrt{a}$, su raíz prónica es a. Así, 4 es la raíz prónica de 18.

Encontramos el concepto de raíz prónica en la *Suma de Arithmetica pratica y de todas mercaderias con la horden de contadores* (1546) de Gaspar de Texeda.

11. En notación simbólica moderna algunos ejemplos de raíces ligadas propuestos por Pérez de Moya son:

$$\sqrt{4} + \sqrt{1} = 3 \quad , \quad \sqrt{9} + \sqrt{5} = 3 + \sqrt{5}$$

12. En notación simbólica moderna algunos ejemplos de raíces universales propuestos por Pérez de Moya son:

$$\sqrt{13 + \sqrt{144}} = \sqrt{13 + 12} = \sqrt{25} = 5$$

$$\sqrt{4} + \sqrt{1} + \sqrt{10 + \sqrt{36}} = 7$$

A la hora de justificar la utilidad de las raíces, el bachiller se expresa en los siguientes términos (p. 328):

> «Destas rayzes q(ue) se ha dicho, la quadrada sirue para Geometria, y Cosmographia, y para el arte militar, y para sacar vn medio proporcional entre dos estremos, y para el arte mayor. La cubica sirue para sacar dos medios proporcionales entre dos estremos, y para sacar la quantidad de los Diametros en los cuerpos solidos, y para otras varias cosas. Y esta, con todas las demas que aqui tratamos generalmente, siruen para la regla de la cosa, o arte mayor, como en el proceso desta obra se vera.»

En los diez capítulos siguientes el discurso de Pérez de Moya, en lo que a la extracción de raíces de números naturales se refiere, transita por las siguientes etapas:

- Definición-descripción de potencias y raíces.
- Tablas de potencias de números dígitos: caracteres de exclusión.
- Algoritmos para la extracción de raíces.
- Aproximaciones de raíces.
- Pruebas de las raíces.

En lo que sigue, utilizaremos este guión para el análisis de los contenidos matemáticos.

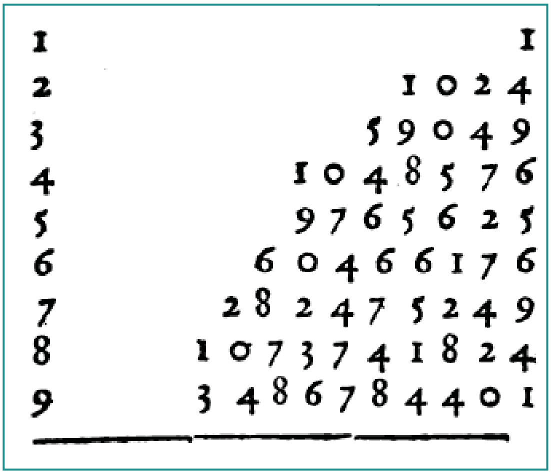
4.1. Definición-descripción de potencias y raíces

Apoyándose en la descripción de las potencias de base natural y exponentes entre 2 y 11, Moya introduce la noción de raíz cuadrada, cúbica, etc. Así, por ejemplo, en el caso de la raíz quinta [= *raíz relata*] el bachiller comenta (p. 356):

> «La quarta especie de rayz en orden, es la que dizen relata, y assi por numero relato se entie(n)de el vltimo producto que sale de la multiplicacion de cinco numeros yguales en quantidad, y genero, assi como estos 2. 2. 2. 2. 2. (o otros mayores) los quales, multiplicados todos, vnos por otros, hacen treynta y dos, este treynta y dos, se dize numero relato, y el vno de los cinco doses, se dize rayz relata deste numero treynta y dos.»

Las denominaciones de las raíces de distintos índices, que coinciden con las de las potencias de que provienen, se detallan en el cuadro siguiente:

Denominaciones de Pérez de Moya	Denominaciones Actuales
Rayz quadrada	Raíz cuadrada
Rayz cubica	Raíz cúbica
Rayz quadrada de rayz quadrada o Rayz de censo de censo	Raíz cuarta
Rayz relata	Raíz quinta
Rayz censicuba	Raíz sexta
Rayz segunda relata	Raíz séptima
Rayz quadrada de quadrada de quadrada o Rayz de censo de censo de censo	Raíz octava



1	1
2	1024
3	59049
4	1048576
5	9765625
6	60466176
7	282475249
8	1073741824
9	3486784401

Fig. 4. Potencias de exponente diez de los números dígitos.

Denominaciones de Pérez de Moya	Denominaciones Actuales
Rayz cubica de rayz cubica	Raíz novena
Rayz censirelata	Raíz décima
Rayz tercera relata	Raíz undécima

Los nombres utilizados por Pérez de Moya para describir las raíces, que están relacionados con el simbolismo algebraico de la época (Meavilla y Oller, 2014), fueron comunes en muchos impresos europeos del XVI[13]. No obstante, en la mayoría de ellos el catálogo propuesto por el canónigo jienense se limitaba a las raíces cuadradas y cúbicas[14].

4.2. Tablas de potencias de números dígitos: caracteres de exclusión

En el estudio de cada uno de los diez tipos de raíces precedentes, se presenta una tabla de las potencias de los números dígitos cuyos exponentes son, en cada caso, el índice correspondiente a la raíz que se esté considerando. Cuando existen, se añaden los caracteres de exclusión.

Por ejemplo, en el estudio de la *raíz censirelata* [= raíz décima], se ofrece la tabla siguiente (figura 4):

A esta lista, el bachiller añade (p. 384):

> «Desta tabla se manifiesta, que los números que fenescieren en 2. 3. 7. 8. seran irracionales, y los que fenescieren en 1. 4. 5. 6. 9. 0. podran ser, o no ser racionales.»

13. En la *Arithmetica integra* (1544) de Stifel y en el *General tratatto* (1556 – 1560) de Tartaglia encontramos denominaciones casi idénticas.

14. Esto sucede, por ejemplo, en las obras de Juan de Ortega (1512), Juan Andrés (1515), Joan Ventallol (1521), Petrus Apianus (1527), Oroncio Fineo (1532), Girolamo Cardano (1539), Gaspar Nicolas (1541) y Oroncio Fineo (1555).

4.3. Algoritmos para la extracción de raíces

Para la extracción de raíces, Pérez de Moya aborda en primer lugar el cálculo del número de cifras de la raíz pedida para, a continuación, proponer procedimientos para el cálculo de dichas cifras.

4.3.1. Número de cifras de la raíz

Para determinar el número de cifras de cualquier raíz, el bachiller propone las dos técnicas siguientes:

- Se ponen puntos debajo de las cifras del radicando (empezando por las unidades) de modo que entre dos puntos consecutivos quede una cifra sin puntuar (raíz cuadrada), dos cifras sin puntuar (raíz cúbica), tres cifras sin puntuar (raíz cuarta) etc. El número de puntos coincide con el número de cifras de la raíz correspondiente[15].
- Contando de derecha a izquierda y mediante barras verticales se separan las cifras del radicando en grupos de dos cifras (raíz cuadrada), tres cifras (raíz cúbica), cuatro cifras (raíz cuarta), etc. El número de grupos coincide con el número de cifras de la raíz.

El método señalado en el punto i. ya fue utilizado, entre otros, por: Luca Pacioli (1494), Juan Andrés (1515)[16], Joan Ventallol (1521), Girolamo Cardano (1539)[17], Gaspar de Texeda (1546) y Marco Aurel (1552). Por su parte, el método del punto ii. puede encontrarse en la obra de, entre otros: Nicolas Chuquet (1484), Juan de Ortega (1512), Estienne de la Roche (1521), Oroncio Fineo (1532 y 1555) y Juan de Ycíar (1549).

4.3.2. Cálculo de las cifras de la raíz

Para el cálculo de las cifras de las raíces de índices entre 2 y 11, Pérez de Moya debió estar familiarizado con los «coeficientes binomiales» que Michael Stifel estudió en su *Arithmetica integra* (1544) y Tartaglia en su *General trattato* (1556 – 1560) (figura 5).

Para las raíces cuadradas y cúbicas, el bachiller pone de manifiesto el conocimiento de dichos coeficientes:

> «La razo(n) de todo lo que en el sacar de rayz [cuadrada] se ha dicho sale d(e) la quarta proposicion del segundo de Euclides[18].» (p. 334).

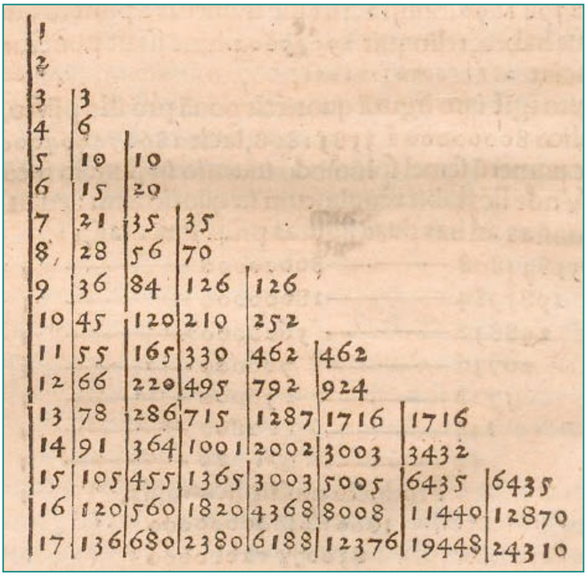
15. Este procedimiento se apoya en la expresión del radicando como suma de potencias de (raíz cuadrada), (raíz cúbica), (raíz cuarta) etc.

16. Juan Andrés también utilizó puntos entre las cifras del radicando a modo de barras verticales.

17. Cardano también utilizó puntos encima de las cifras del radicando. La misma técnica fue utilizada por Petrus Apianus (1527), Michael Stifel (1544) y Nicolás Tartaglia (1556-1560).

18. En lenguaje simbólico moderno dicha proposición equivale a la identidad:

$$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$$



1							
2							
3	3						
4	6						
5	10	10					
6	15	20					
7	21	35	35				
8	28	56	70				
9	36	84	126	126			
10	45	120	210	252			
11	55	165	330	462	462		
12	66	220	495	792	924		
13	78	286	715	1287	1716	1716	
14	91	364	1001	2002	3003	3432	
15	105	455	1365	3003	5005	6435	6435
16	120	560	1820	4368	8008	11440	12870
17	136	680	2380	6188	12376	19448	24310

Fig. 5. Coeficientes binomiales en la *Arithmetica integra* (1544) de Michel Stifel.

> «Para ente(n)der la razon de lo que se ha hecho en el sacar de la rayz Cubica, considera q(ue) si vna linea fuere diuidida en dos qualesquiera partes, el Cubo de toda la linea sera ygual, al Cubo de la primera parte, y al triplo del quadrado de la dicha primera parte, multiplicada por la segu(n)da, y al triplo del quadrado de la segunda parte, mutiplicada por la primera, y al Cubo de la segunda.» (p.350)[19].

Los procedimientos de extracción sólo difieren de los actuales en la disposición de los cálculos (figura 6).

A lo largo del libro quinto del primer tomo del *Tratado de Mathematicas*, el matemático santistebeño calcula las siguientes raíces exactas[20] (ver tabla).

Además de los aspectos aritmético-algebraicos de la extracción de raíces, Pérez de Moya también considera su componente geométrica. Así, al referirse a las raíces cuadradas y cúbicas, afirma:

19. En el libro segundo de la segunda parte del *General trattato di numeri, et misure*, Tartaglia describe de forma retórica el desarrollo de distintas potencias del binomio. Así, para el exponente 7, se expresa en los siguientes términos:

> «**Se** vna quantita sara diuisa in due parti, come si voglia, il secondo relato di tutta la detta quantita sempre sara eguale a questi otto principali produtti, cioe al produtto del secondo relato della prima parte. Et al produtto del settuplo del cubo censo della detta prima parte fia la seconda parte, & al produtto del 21 uplo del relato della detta prima parte fia il censo della seconda, & al produtto del 35 uplo del cen. cen. della detta prima fia il cubo della seconda, & al produtto del 35 uplo del cen. cen. della seconda fia il cubo della prima, & al produtto del settuplo del censo cubo della detta seconda fia la prima (simplice) & finalmente al produtto del secondo relato della detta seconda parte.» (fol. 51r).

20. Hemos utilizado el simbolismo moderno para radicales, desconocido por Pérez de Moya.

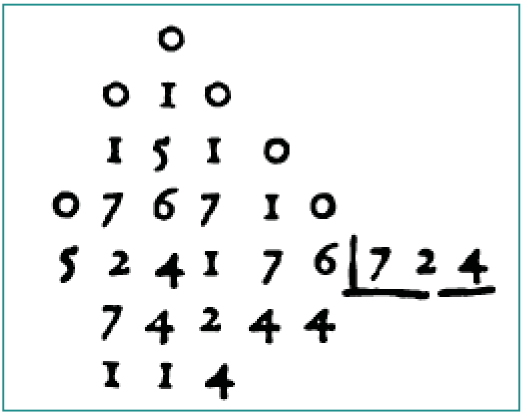


Fig. 6. Extracción de la raíz cuadrada de 524176 (p. 332).

$\sqrt{524176}$	$\sqrt{92524}$
$\sqrt[3]{15625}$	$\sqrt[3]{70444997}$
$\sqrt[3]{130323843}$	$\sqrt[3]{19683}$
$\sqrt[4]{279841}$	$\sqrt[5]{147008443}$
$\sqrt[6]{1073741824}$	$\sqrt[7]{2494357888}$
$\sqrt[8]{1099511627776}$	$\sqrt[9]{1801152661463}$
$\sqrt[10]{16679880978201}$	$\sqrt[11]{350277500542221}$

«… buscar la rayz quadrada de vn numero, no es otra cosa sino buscar vna quantidad media proporcional entre la vnidad, y el tal numero p(ro)puesto.» (p. 329).

«Nota, quando te piden que saques rayz [cuadrada] de vna qualquiera qua(n)tidad, entenderas que la tal quantidad es area de vn quadrado, y saber sacar su rayz es querer saber el lado, o principio d(e) do el tal quadrado procedio. Y si dixessen rayz Cubica, la tal quantidad entenderas ser cuerpo Cubo.» (p. 330).

Además, el bachiller determina geométricamente la raíz cuadrada y la raíz cúbica de dos números concretos [= segmentos rectilíneos].

En el primer caso, calcula la raíz cuadrada de 12 sirviéndose de un método clásico contenido en los *Elementos* de Euclides (Libro VI, prop. 9). El bachiller describe el procedimiento como sigue (p. 339):

«…queriendo sacar la rayz de doze, tomaras doze, y la vnidad, o dos, y seys, o tres, y quatro, porque qualquiera destas par de quantidades multiplicadas, hacen doze, y assi no importara mas tomar vnas q(ue) otras, y por causa de exemplificar, siruamonos de quatro y tres. Toma agora vna linea de 4 tamaños yguales, y otra de tres, assi como la linea a. b. y la c. d. entre las quales buscaras vna linea media proporcional […] y para hallar esta linea, juntaras la a.b. y c.d. a la larga, y quedara de ambas hecha la linea e.f. sobre la qual haras medio circulo, de modo que toda la e.f. quede por diametro, como paresce en la figura l.h.m. luego del punto. i. del diámetro (que es do se junto la linea a.b. con la c.d.) saca vna perpendicular hasta

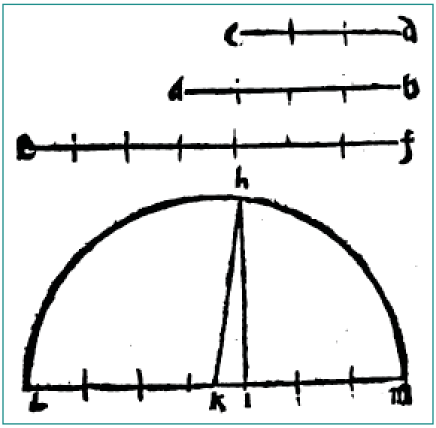


Fig. 7. Ilustración que acompaña a la extracción geométrica de $\sqrt{12}$

la circunferencia del semicirculo, como muestra la línea. h.i. y esta sera la línea proporcional, la potencia de la qual valdra doze, y por consiguiente sera la rayz del dicho doze.» (figura 7).

Pérez de Moya justifica este procedimiento con la ayuda de Euclides (corolario de la proposición 8 del libro VI y penúltima proposición del libro VI).

En cuanto a la construcción geométrica de la raíz cúbica, Moya utiliza una antigua técnica para intercalar dos medias proporcionales entre dos segmentos rectilíneos dados[21] que encontramos en la *Summa* (1494) de Luca Pacioli y en el libro segundo de la segunda parte del *General trattato di numeri, et misure* de Tartaglia. El bachiller describe la construcción pero no la demuestra[22] (p. 351):

> «Si por via de linea quisieres sacar rayz Cubica de algun numero, como si dixessen. Dame la rayz Cubica deste numero, o linea de ocho tamaños, haz della vna superficie, o figura Parallelograma, que tenga por lado vn tamaño de los ocho, que es la linea larga, como muestra a.b.c.d. con las otras lineas largas que se toquen en el angulo. b. del Parallelogramo, luego para sacar el ce(n)tro deste paralelogramo, echa vna linea del punto. b. hasta el punto. c. y otra desde el punto. a. hasta el pu(n)to. d. las quales se cortaran en el pu(n)to. g. y este sera el centro deste Parallelogramo. Luego asienta el vn pie del compas en este punto, o ce(n)tro. g. y estiende lo tanto en las lineas. a.f. y en la. d.e. que hagas dos pu(n)tos en ellas, de modo que echando vna linea del vno al otro, passe por el punto, o angulo. c. como haze la linea h.c.i. y lo que esta linea cortare de la línea. d.e. (que es lo que ay entre la. i. y la. d.) sera la rayz Cubica de la línea. b.d. que se diuidio en ocho tamaños. Y assi como la rayz Cubica de ocho, es dos, assi esta quantidad. i.d. (que dezimos ser la rayz) es dos tamaños, yguales a los ocho de la dada línea b.d. Y deste modo se sacara rayz Cubica de qualquiera numero.» Figura 8.

4.4. La aproximación de raíces

4.4.1. Aproximación de raíces cuadradas

Pérez de Moya inicia el estudio de las aproximaciones de raíces cuadradas con las palabras siguientes (p. 334):

> «Algunos, como Oroncio, quieren que sacando rayz [cuadrada] de numero sordo, que lo que sobrare se po(n)ga sobre vna raya, y la rayz que ouiere salido se doble y añada vn punto, y se ponga por denominacio(n) a lo que sobro.»

21. Siguiendo a Heath (1981), esta técnica fue utilizada por Apolonio, Herón y Filón de Bizancio.
22. En los textos de Pacioli y Tartaglia que hemos citado se ofrecen las demostraciones pertinentes.

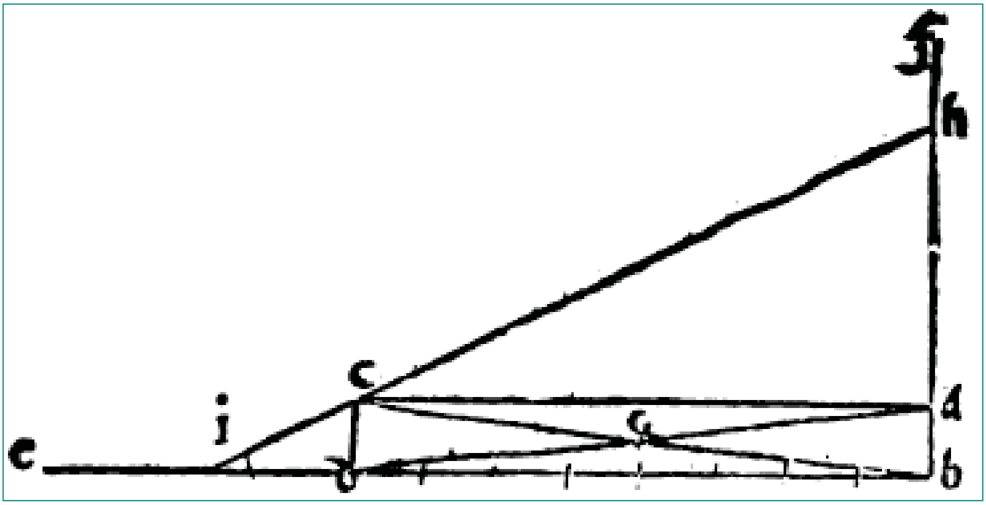


Fig. 8. Ilustración que acompaña a la extracción geométrica de $\sqrt[3]{8}$

En lenguaje simbólico moderno, la aproximación que el canónigo de la Catedral de Granada atribuye a Oroncio Fineo equivale a:

$$\sqrt{N} = \sqrt{a^2 + r} \cong a + \frac{r}{2a+1},$$

donde a^2 es el mayor cuadrado contenido en N [23].

Consultando los ejemplos de aproximaciones de raíces cuadradas contenidos en la *Arithmetica practica*[24] de Fineo, se observa que la aproximación utilizada por Oroncio es:

$$\sqrt{N} = \sqrt{a^2 + r} \cong a + \frac{r}{2a}$$

En consecuencia, la información facilitada por el bachiller es incierta.

Pérez de Moya también se refiere al tipo de aproximación del que se sirvió Tartaglia en los siguientes términos (p. 334):

23. En el *Libro Segundo de Arithmetica* (1557, fol. 22v), Pérez de Moya enuncia dicha regla, sin referirse a Oroncio Fineo, en los siguientes términos:

> **«Qvando** hauiendo sacada la rayz de algun numero sobrare algo pondras lo que sobrare sobre vna raya, y doblaras la rayz del tal numero y añadille vno y ponerlo has debaxo por denominador.»

24. En lenguaje simbólico moderno, los ejemplos de aproximaciones ofrecidos por Oroncio Fineo (fol. 11v) son:

$$\sqrt{204315} = \sqrt{452^2 + 11} \cong 452 + \frac{11}{904}$$
$$\sqrt{291612} = \sqrt{540^2 + 12} \cong 540 + \frac{12}{1080} = 540 + \frac{1}{90}$$

«Nicolas Tartalla quiere que al duplo de la rayz [cuadrada] no se añada vno, sino que solamente se doble la rayz que ouiere venido, y se ponga debaxo de lo que sobrare por denominacion.»

Siendo cierto que Tartaglia en su *General trattato* (Libro segundo de la segunda parte, fol. 25r) hace uso de esta aproximación[25], también lo es que, en raíces cuadradas del tipo $\sqrt{N} = \sqrt{a^2 + 2a}$,, el matemático italiano aconseja esta otra:

$$\sqrt{N} = \sqrt{a^2 + 2a} = \sqrt{a^2 + r} \cong a + \frac{r}{2a + 1}$$

A continuación, el bachiller propone otra regla de Tartaglia (*General trattato.* Libro segundo de la segunda parte, fols.25v-26r), consistente en la aplicación reiterada de aproximaciones del tipo

$$\sqrt{a^2 \pm r} \cong a \pm \frac{r}{2a},$$

y la aplica al cálculo aproximado de la raíz cuadrada de 3. En esencia, las operaciones efectuadas, expresadas en el lenguaje simbólico moderno, son:

- Primera aproximación:

$$\sqrt{3} = \sqrt{1^2 + 2} \cong 1 + \frac{2}{2 \times 1} = 1 + 1 = 2$$

- Segunda aproximación

$$2^2 = 3 + 1 \Rightarrow 3 = 2^2 - 1 \Rightarrow \sqrt{3} = \sqrt{2^2 - 1} \cong 2 - \frac{1}{2 \times 2} = 2 - \frac{1}{4} = \frac{7}{4}$$

- Tercera aproximación

$$\left(\frac{7}{4}\right)^2 = \frac{49}{16} = 3 + \frac{1}{16} \Rightarrow 3 = \left(\frac{7}{4}\right)^2 - \frac{1}{16} \Rightarrow \sqrt{3} = \sqrt{\left(\frac{7}{4}\right)^2 - \frac{1}{16}} \cong \frac{7}{4} - \frac{1/16}{2(7/4)}$$
$$= \frac{7}{4} - \frac{1/16}{7/2} = \frac{97}{56}$$

El matemático andaluz concluye (p. 335):

«Y deste modo podras proceder aproximando tanto, que quasi no sea sensible el error, mas al justo nunca llegaras, porque por tanto se dize vn numero sordo, porque quando del se saca rayz, ni quanto, ni qual sea se oye.» (p. 335).

25. «Laqual regola e di questa sorte, che pongono quel tal auanzano sopra vna vírgola, & il doppio della prima radice (gia trouata) di sotto, et tal rotto lo accompagnano con la detta prima radice sana, & tal summa concludeno esser la radice propinqua di detta prima quantita proposta.»

Después de esto, el matemático jienense calcula el valor aproximado de la raíz cuadrada de 5 utilizando un procedimiento similar al de Nicolas Chuquet (*Triparty*, 1484)[26], consistente en acotar el valor de dicha raíz mediante intervalos abiertos encajados cuyos extremos se obtienen sucesivamente a partir de la «propiedad de los valores intermedios»:

$$\frac{a}{b} < \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d} \quad (^{27})$$

Pérez de Moya pudo conocer este método a través de Etienne de la Roche (*Larismethique nouuellement composee*, 1520)[27] o de Joan Ventallol (*Pratica mercantíuol*, 1521)[28].

Por último, el bachiller propone «otra orden de sacar rayz de numeros sordos» que admite la siguiente traducción al simbolismo moderno:

$$\sqrt{N} = \frac{\sqrt{10^{2k} \cdot N}}{10^k}$$

Esta forma de aproximar se encuentra la «Aritmética práctica» de Oroncio (1555*,* fol. 12v) y Moya ya la utilizó en el *Libro Segundo de Arithmetica* (1557, fol. 23v). Advirtamos que la aplicación esta regla incluye el uso de fracciones decimales.

4.4.2. Aproximación de raíces cúbicas

En cuanto a la aproximación de las raíces cúbicas se refiere, el bachiller presenta las dos reglas siguientes:

$$\sqrt[3]{N} = \sqrt[3]{a^3 + r} \cong a + \frac{r}{3a(a+1)+1} \quad ; \quad \sqrt[3]{N} = \sqrt[3]{a^3 + r} \cong a + \frac{r}{3a^2 + 3a}$$

La segunda se describe en el *General trattato* (fols. 27v-28r) de Nicolo Tartaglia del modo siguiente:

> «Per cauare adonque la propinqua radice cuba delli numeri non cubi, caua prima la radice cuba del maggior numero cubo, che sia in quel tal numero non cubo, & quel che soprarestara a tal operatione poneralo sopra vna virgola, o vuoi dir sopra di vna leneetta, & fatto questo per formar il denominator da mettere sotto di quella trippla sempre quella radice gia cauata, e quel triplato multiplicalo per la medesima radice, & a tal multiplicatione aggiongiui il detto triplato, & tal summa ponila sotto a quella lineetta per denominator, & questo tal rotto aggiongilo alla prima radice, & tal qua(n)tita cosi co(m)posta sara la radice propinqua cuba di quel proposto numero non cubo.»

26. La *Triparty* se escribió en 1484 pero su manuscrito no fue conocido hasta que Aristide Marré lo publicó en 1881. Afortunadamente, parte de la obra de Chuquet fue plagiada por Estienne de la Roche en *Larismethique nouellement composee* (1520).

27. En los folios 32r y 32v, Estienne de la Roche propone el método de aproximación de raíces de Chuquet.

28. En el folio CXXr, Ventallol resuelve dos ecuaciones de segundo grado con una incógnita utilizando el método de aproximación de Chuquet.

Refiriéndose a estas dos aproximaciones de la raíz cúbica, Simon Stevin (1585, p. 125) dice:

> «NOTA Nicolas Tartalia traictant curieusement de ceste reste, n'aiouste poinct ce dernier 1, comme nous (auec Iuan Peris de Moya) auons faict…»

4.4.3. Aproximación de raíces de índices superiores

Para las raíces de índices entre 4 y 11, Pérez de Moya se sirve de aproximaciones que admiten la siguiente generalización

$$\sqrt[n]{N} = \sqrt[n]{a^n + r} \cong a + \frac{r}{\binom{n}{1} a^{n-1} + \binom{n}{2} a^{n-2} + \cdots \binom{n}{n-1} a}$$

Tartaglia utiliza este tipo de aproximaciones en su *General trattato*.

4.5. Las pruebas de las raíces

En todos los casos en que se aplica (raíces de índices 2, 3, 4, 5 y 6), la prueba de la extracción de la raíz enésima de un número natural consiste en elevar a la enésima potencia la raíz hallada y añadir el resto al resultado obtenido. En el caso de la raíz censicuba [= raíz sexta], el bachiller puntualiza (p. 366):

> «La prueba destas rayces, sera conuertir la tal rayz censicuba, multiplicando seys numeros yguales, a la tal rayz, vnos por otros, y si el vltimo producto, añadiendo lo que sobrare (si sobrare algo) fuere tanto como el numero de quien se ouiere sacado la tal rayz estara buena, y si no fuere tanto, sera falsa, y sera necessario hazer la otra vez, o otras, hasta q(ue) salga deste modo.»

5. CONCLUSIONES

A la luz de lo expuesto en los parágrafos precedentes, podemos afirmar que el libro quinto (*Trata de varias rayzes de numeros*) del primer tomo del *Tratado de Mathematicas* presenta las siguientes mejoras o retrocesos en relación a las aritméticas españolas y extranjeras del siglo XVI que hemos examinado.

1) La explicación detallada de la extracción de las raíces de índices entre 2 y 11, no la hemos encontrado en las aritméticas consultadas, excepción hecha del *General trattato di numeri et misure* (1556 – 1560) de Tartaglia. En consecuencia, podemos concluir que, en cuanto al detalle y al número de casos estudiados, la exposición de Pérez de Moya es superior a la que aparece en la mayoría de los manuales del siglo XVI.
2) El bachiller sólo presenta la justificación del procedimiento utilizado para la extracción numérica de la raíz cuadrada y la raíz cúbica (cuadrado del binomio y cubo del binomio). En esto el tratamiento de Pérez de Moya es inferior al de

Tartaglia que, en forma retórica, enuncia el desarrollo de todas las potencias del binomio relacionadas con la extracción de las raíces de índices entre 2 y 11.

3) La construcción geométrica de la raíz cúbica que Pérez de Moya presenta, sin demostración alguna, no es frecuente en los manuales renacentistas y no aparece en las aritméticas españolas del XVI que hemos consultado. En el *General trattato di numeri et misure*, Tartaglia ofrece una prueba de dicha construcción.
4) El método de Chuquet para la proximación de la raíz cuadrada, que Pérez de Moya incluye en su obra, no aparece en forma explícita, salvo en la *Larismethique nouellement compose* (1520) de Estienne de la Roche y la *Pratica mercantíuol* (1521) de Joan Ventallol, en ninguna de las aritméticas españolas y extranjeras del XVI que hemos consultado.
5) Las aproximaciones de las raíces de índices entre 4 y 11, que el bachiller debió tomar prestadas de Tartaglia, no las encontramos en las aritméticas españolas del XVI que hemos estudiado.

A partir de las consideraciones anteriores establecemos las dos conclusiones siguientes:

a) El tratamiento que hace Juan Pérez de Moya de la extracción numérica de raíces es superior al que se encuentra en las aritméticas españolas del XVI, anteriores a 1573.
b) El tratamiento que hace Juan Pérez de Moya de la extracción numérica de raíces es inferior al que Tartaglia desarrolla en su *General trattato di numeri et misure*. Sin duda alguna, el bachiller se inspiró en dicha obra para escribir el libro quinto del primer tomo del *Tratado de Mathematicas*.

6. AGRADECIMIENTOS

El presente trabajo se ha realizado dentro del proyecto "La difusión del conocimiento matemático en el nacimiento de la imprenta: descripción y análisis comparado de aritméticas del siglo XVI escritas en castellano" EDU2011-27168 financiado por en Ministerio de Economía y Competitividad de España.

REFERENCIAS

Andres, J. (1515). *Sumario breue d(e)la pratica dela Arithmetica d(e) todo el curso de larte merca(n)tiuol bien declarado: el qual se llamamaestro de cuento.* Valencia: Juan Joffre.

Apianus, P. (1527). *Eyn newe und wolgegründte underweysung aller Kauffmanss Rechnung in dreyen Büchern.* Ingolstadt.

Aurel, M. (1552). *Libro primero, de Arithmetica Algebratica.* Valencia: Ioan de Mey.

Cardano, G. (1539). *Practica Arithmetice, & Mensurandi singularis.* Mediolani: Bernardini Calusci

Chuquet, N. (1881). *Le Triparty en la Science des nombres, par maistre Nicolas Chuquet, Parisien, publié d'après le manuscrit fonds français nº1346 de la Bibliothèque Nationale*

de Paris et precédé d'une notice par M. Aristide Marré. Rome: Imprimerie des Sciences Mathématiques et Physiques.

Euclides (1537). *Evclidis Megarensis mathematici clarissimi Elementorum Geometricorum. Lib. XV. Cum expositione Theonis in prioris XIII a Bartholomaeo Veneto latinitate donate, Campani in omnes,& Hypsiclis Alexandrini in duos postremos.* Basilea: Iohannem Hervagivm.

Fineo, O. (1532). *Protomathesis: Opus uarium, ac scitu non minus utile quam iucundum, nunc primum in lucem foeliciter emissum.* París: (sin editor).

Fineo, O. (1555). *De Arithmetica practica, libri quatuor.* París: Michaelem Vascosanum.

Heath, T. (1981). *A history of Greek Mathematics* (Volume I). New York: Dover.

Meavilla, V. (2005). Historia de la Educación Matemática en España: el contenido algebraico de la *Arithmetica practica, y specvlatiua* de Juan Pérez de Moya (ca. 1512 – 1596). *Revista Brasileira de História da matemática.* Vol. 5, nº 9, pp. 19-35.

Meavilla, V. y Oller, A.M. (2014). El simbolismo algebraico en tres álgebras españolas del siglo XVI. *NÚMEROS*. 87, pp. 59-68.

Nicolas, G. (1541). *Tratado da pratica Darismetica*. (sin lugar): Luis Rodriguez.

Ortega, J. de (1512). *Conpusicion de la arte de la arismetica y juntamente de geometria: fecha por…* León: en casa de Maistro Nicolau de Benedictis: por Joannnes Trinxer librero de Barcelona.

Pacioli, L. (1494). *Summa de Arithmetica,Geometria, Proportioni et Proportionalita.*Veneza: Paganini.

Pérez De Moya, J. (1557). *Libro Segundo de Arithmetica*. Salamanca: Iuan de Canoua.

Pérez De Moya, J. (1562). *Arithmetica practica, y specvlatiua*. Salamanca: Mathias Gast.

Pérez De Moya, J. (1573). *Tratado de Mathematicas en qve se contienen cosas de Arithmetica, Geometria, Cosmographia, y Philosophia natural. Con otras varias materias, necessarias a todas artes Liberales y Mechanicas.* Alcalá: Iuan Gracian.

Picatoste y Rodríguez, F. (1891). *Apuntes para una biblioteca científica española del siglo XVI.* Madrid: Imprenta y fundición de Manuel Tello.

Roche, E. de la (1520). *Larismethique nouellement composee*. Lyon: Constantin Fradin.

Sánchez, J. A. (1929). *Las Matemáticas en la Biblioteca del Escorial.* Madrid: Imprenta de Estanislao Maestre.

Stevin, S. (1585). *L'Arithmetique.* Leyde: Christophe Plantin.

Stifel, M. (1544). *Arithmetica integra.* Norimbergae: Iohan Petreium.

Tartaglia, N. (1556–1560). *General trattato di numeri et misure.* Vinegia: Curtio Troiano.

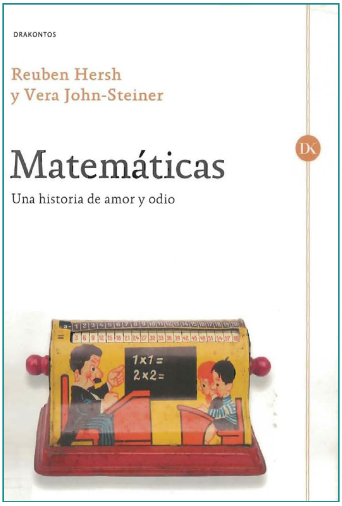
Texeda, G. de (1546). *Suma de Arithmetica pratica y de todas mercaderias con la horden de contadores*. Valladolid: Francisco Fernandez de Cordova.

Ventallol, J. (1521). *Pratica mercantíuol.* Lyo: Joan de la Place.

Ycíar, J. (1549). *Libro intitulado Arithmetica practica/ muy vtil y prouechoso para toda persona que quisiere exercitar se en aprender a contar.* Zaragoza: Pedro Bernuz.

Épsilon - Revista de Educación Matemática *2014, Vol. 31(3), nº 88, 89-90*

MATEMÁTICAS. Una historia de amor y odio



Reuben Hersch
Vera John-Steiner
Editorial: Crítica
Marzo 2012 (primera edición)
ISBN: 978-84-989229-8-1
463 páginas

La colaboración entre un matemático, Reuben Hersch, y una experta en lingüística y educación, Vera John-Steiner, permitió la creación de este libro, que pretende dar una visión más social y emocional de las matemáticas y su estudio.

Entre sus páginas, los autores abordan una amplia variedad de mitos sobre esta disciplina y sus participantes, siempre a través de anécdotas, comentarios y biografías de reputados matemáticos.

En concreto, desde esta perspectiva, el libro indaga sobre los jóvenes matemáticos y el origen de su talento, la cultura matemática, el apoyo que esta disciplina supuso para muchos matemáticos en sus peores momentos, la adicción a las matemáticas y los peligros que esta ha podido conllevar, las amistades entre los matemáticos y las comunidades

que se han formado a lo largo de los años, el papel de las mujeres en matemáticas y la importancia o no de la edad para investigar en esta materia.

Finalmente, plantea las matemáticas en el contexto educativo; primero desde el punto de vista de dos profesores con modelos de enseñanza contrarios, y después desde el de los alumnos y el frecuente amor u odio que se produce en sus relaciones con esta asignatura.

En definitiva, el libro aporta un gran número de curiosidades y detalles interesantes, e incluso divertidos, tanto sobre las matemáticas como sobre aquellos que han trabajado en este campo. Convirtiéndose en una obra altamente recomendable para todo aquel que quiera conocer más sobre las matemáticas en un tono informal y anecdótico, y especialmente para los docentes, que podrán utilizarla en el aula para ayudar a sus alumnos a conocer y conectar mejor con esta materia y con las personas que dedicaron o dedican su vida al estudio de ella.

María José Madrid
Universidad de Salamanca

Épsilon - Revista de Educación Matemática *2014, Vol. 31(3), nº 88, 91-91*

Agradecimientos a los evaluadores

En este último número del año 2014, desde Epsilon, Revista de Educación Matemática, agradecemos la colaboración de aquellos colegas que aportaron su conocimiento y tiempo en la revisión y arbitraje de los manuscritos propuestos a la revista. Mediante sus comentarios y sugerencias ayudan a obtener y mantener una calidad de los artículos publicados durante el año 2014.

- Agustín Carrillo
- Alexander Maz
- Bernardo Gómez
- Carlos de Castro
- Carmen León
- Carolina Carrillo
- Francisco España
- Francisco Juan Y Ribaya
- Inmaculada Serrano
- Isidoro Segovia
- Jesús Salinas
- José Galo
- José Mª Pavia
- José Ortiz
- Liliana Mabel Tauber
- Mª José González
- Mª Jesús Salinas
- Miguel Villaraga
- Noelia Noemí Jiménez
- Nora Gatica
- Rafael Bracho
- Rafael Rubio
- Roberto Vidal
- Verónica Albanese

Portada:

La revista Epsilon está reseñada en:
IN-RECS, Dialnet, Latindex, RESH, DICE, MathEduc
y Base de Datos del Centro de Documentación Thales.

epsilon 88

Revista de Educación Matemática

Sociedad Andaluza de Educación Matemática "Thales"

Página de la revista: http://thales.cica.es/epsilon
Revista: epsilon@thales.cica.es

Edita
Sociedad Andaluza de
Educación Matemática "Thales"
Centro Documentación "Thales"
Universidad de Cádiz
C.A.S.E.M.
11510 PUERTO REAL (Cádiz)

Maquetación e impresión
Utrerana de Ediciones, s.l.
Cristóbal Colón, 12
41710 Utrera (Sevilla)

Depósito Legal
SE-421-1984

ISSN:
2340-714X

Período
3er cuatrimestre 2014

Suscripción
ESPAÑA: 42,00 euros
PAÍSES DEL EURO: 63,00 euros
RESTO DE PAÍSES: 90 $ USA
(3 NÚMEROS AL AÑO)

SUMARIO / CONTENTS

Épsilon - *Revista de Educación Matemática* 2014, Vol. 31(3), nº 88, 7-20

Sobre la naturaleza de las matemáticas en la formación inicial de maestros: los procesos matemáticos en el sistema de creencias de los estudiantes

Ángel Alsina y Paula López
Universidad de Girona

Resumen: *Se analizan las creencias de 142 futuros maestros sobre la naturaleza de las matemáticas y, de forma más concreta, su visión sobre los procesos matemáticos. Los datos obtenidos a través de un cuestionario muestran que no se consideran suficientemente las formas de adquisición y uso de los contenidos matemáticos. Estos resultados ponen de manifiesto la necesidad de trabajar los procesos matemáticos durante la formación inicial y permanente del profesorado para favorecer la adquisición de la competencia matemática.*
Palabras clave: *naturaleza de las matemáticas, procesos matemáticos, dominio afectivo, sistema de creencias, formación de maestros, identidad profesional del maestro de matemáticas.*

About the nature of mathematics in initial teacher training: The mathematical processes in the belief systems of students

Abstract: *We analysed 142 pre-service teachers' beliefs about the nature of mathematics and, more specifically, their view of mathematical processes. The data obtained by questionnaire demonstrate that the ways of acquiring and using mathematical contents are not adequately considered. These results reveal the need to work the mathematical processes during the training teacher to promote mathematical competence.*
Keywords: *nature of mathematics, mathematical processes, affective domain, belief system, teacher training, professional identity of mathematics teachers.*

INTRODUCCIÓN

La formación inicial que reciben los futuros maestros tiene una gran repercusión en el desempeño de la profesión de maestro. La institución universitaria, pues, tiene la misión de preparar a maestros competentes, es decir, maestros que además de tener conocimientos y habilidades que permitan resolver adecuadamente los problemas profesionales, sientan y reflexionen acerca de la necesidad y el compromiso de actuar en correspondencia con sus conocimientos, habilidades, motivos y valores -con flexibilidad, dedicación y perseverancia-, en la solución de los problemas que de él demanda la práctica profesional (Esteve y Alsina, 2010). De acuerdo con las directrices estatales sobre las competencias profesionales que debe aprender un estudiante para maestro durante su formación inicial (MEC, 2007a; MEC, 2007b), de forma muy sintética los futuros maestros deberían construir y co-construir de manera autorregulada nuevos conocimientos disciplinares y didácticos, y reconstruir los conocimientos, experiencias y creencias previas que pueden suponer un obstáculo para su identidad profesional (Beijaard, Meijer y Verloop, 2004; Bauchamp y Thomas, 2009).

El argumento que se acaba de exponer es probablemente una de las principales razones por las que, en el contexto de la investigación en torno al dominio afectivo en educación matemática, los estudios acerca de las creencias de los futuros maestros tienen un peso importante. Caballero, Blanco y Guerrero (2008) señalan que el estudio de las creencias en educación matemática incluye cuatro dimensiones: creencias sobre la naturaleza de las matemáticas y de su enseñanza y aprendizaje; creencias sobre uno mismo como aprendiz de matemáticas; creencias acerca del papel del profesorado de matemáticas; y creencias suscitadas por el contexto socio-familiar. Todas ellas, como se ha indicado, ejercen un papel importante en la configuración progresiva de la identidad profesional del maestro de matemáticas, un término recientemente acuñado por Lutovac y Kaasila (2011, 2013) para referirse a un proceso narrativo que incluye una interacción entre el contexto matemático individual y social y un proceso de auto-reflexión en el que la identidad matemática pasada, presente y futura entran en diálogo. Considerando esta conceptualización, algo implícita, en este trabajo se considera que la identidad profesional del maestro de matemáticas se modela a lo largo de toda su trayectoria como aprendiz de matemáticas durante su formación no universitaria, y como aprendiz de didáctica de las matemáticas durante su formación universitaria. Las experiencias personales y los conocimientos teóricos y prácticos interiorizados durante toda la trayectoria como estudiante dan lugar a un complejo sistema de creencias que incluye creencias sobre las matemáticas, creencias como aprendiz de matemáticas, creencias acerca del funcionamiento de la clase de matemáticas y creencias sobre el contexto social en relación a las matemáticas.

En este trabajo se analizan las creencias de los estudiantes para maestro sobre la naturaleza de las matemáticas, y de forma más concreta su visión acerca de los procesos de pensamiento matemático en el aprendizaje de la disciplina, tomando en consideración las orientaciones de diversos organismos internacionales que en los últimos años han enfatizado la importancia de los procesos para un aprendizaje competencial de las matemáticas (NCTM, 2000; OCDE, 2001, 2004). En esta misma línea, en el reciente "Real Decreto 126/2014, de 28 de febrero, por el que se establece el currículo básico de la Educación

Primaria" (BOE, 2014) aparece un nuevo bloque de contenidos llamado "Procesos, métodos y actitudes en matemáticas", lo cual pone de manifiesto la importancia creciente de este tipo de conocimientos y destrezas.

Coincidiendo con el inicio del Siglo XXI, el *National Council of Teachers of Mathematics* publicó unos nuevos estándares que pretenden ser un recurso y una guía para todos los que toman decisiones que afectan a la educación matemática: los principios y estándares para la educación matemática (NCTM, 2000). La visión de la educación matemática de estos estándares es sumamente ambiciosa, y busca sobre todo asegurar que todos los estudiantes reciban una educación matemática de calidad que garantice el aprendizaje con comprensión de nociones matemáticas importantes. En otras palabras, se pretende romper con un currículo de matemáticas orientado exclusivamente a la adquisición de contenidos y dirigir la mirada hacia un currículo orientado a la adquisición de la competencia matemática, es decir, se insta a dejar de instruir a los alumnos exclusivamente para obtener un buen rendimiento académico y, en su lugar, educarlos para que comprendan y usen las matemáticas en situaciones significativas. Para conseguir este propósito sitúan a los procesos matemáticos como los conocimientos clave para aprender a usar los contenidos matemáticos de forma comprensiva y eficaz en diferentes contextos: "los estándares de proceso (resolución de problemas, razonamiento y prueba, comunicación, conexiones y representación) ponen de relieve las formas de adquisición y uso de dichos contenidos" (NCTM, p. 31).

Es desde esta perspectiva que se ha desarrollado el presente estudio con un grupo de 142 futuros maestros en el que se analizan las consideraciones que tienen acerca de los procesos matemáticos.

LA NATURALEZA DE LAS MATEMÁTICAS: EL PAPEL DE LOS PROCESOS MATEMÁTICOS

Hace ya más de una década, Niss (2002) propuso abandonar el planteamiento curricular focalizado en los contenidos matemáticos, puesto que se centra exclusivamente en la adquisición de símbolos y de técnicas y no tanto en su uso significativo. Ello le llevó a plantear ocho competencias matemáticas clasificadas en dos grupos: el primer grupo tiene que ver con la capacidad de preguntar y responder preguntas dentro de y con las matemáticas, y el segundo grupo con la capacidad de hacer frente y de gestionar el lenguaje matemático y sus herramientas. Estas competencias, centradas en lo que las personas pueden hacer, tienen que ver con procesos mentales o físicos, actividades y comportamientos (Alsina, 2014):

Cuadro 1. Preguntar y responder preguntas dentro de y con las matemáticas

Pensar matemáticamente (dominio de modos matemáticos de pensamiento), como por ejemplo:
- Plantear preguntas que son propias de las matemáticas y conocer el tipo de respuestas que las matemáticas pueden ofrecer;
- Comprender y manejar las posibilidades y limitaciones de un determinado concepto;
- Ampliar las posibilidades de un concepto extrayendo algunas de sus propiedades o generalizando resultados;
- Diferenciar los diferentes niveles de las matemáticas (afirmaciones condicionadas del tipo “si-entonces”, hipótesis, definiciones, teoremas, conjeturas o casos).

Plantear y resolver problemas matemáticos, como por ejemplo:
- Identificar, plantear y especificar diferentes tipos de problemas matemáticos: puros o aplicados; abiertos o cerrados;
- Resolver diferentes tipos de problemas matemáticos, planteados por otros o por uno mismo, de diferentes maneras cuando sea necesario.

Modelización matemática (es decir, análisis y construcción de modelos), como por ejemplo:
- Analizar los fundamentos y las propiedades de los modelos existentes, incluida la evaluación de sus posibilidades y de su validez;
- Decodificación de los modelos existentes;
- Realización de actividades de modelización en un determinado contexto: estructurar el campo; matematizar; trabajar con el modelo, incluyendo la solución de los problemas a que da lugar; validar el modelo, interna y externamente; analizar y criticar el modelo; comunicar sobre el modelo y sus resultados; vigilar y controlar todo el proceso de modelización.

Razonamiento matemático, como por ejemplo:
- Seguir y evaluar cadenas de argumentos;
- Conocer qué es una demostración matemática (y qué no es) y en qué se diferencia de otros tipos de razonamiento matemático, como por ejemplo el heurístico;
- Descubrir las ideas básicas en una determinada línea de argumento (sobre todo en una prueba), incluyendo la distinción de las líneas principales de los detalles, las ideas de los tecnicismos;
- Elaborar formal e informalmente argumentos matemáticos y demostrar declaraciones.

Cuadro 2. Gestionar el lenguaje matemático y las herramientas matemáticas

Representación de las entidades matemáticas (los objetos y situaciones), como por ejemplo: – Comprensión y utilización (decodificación, interpretación, distinción entre) diferentes tipos de representaciones de objetos matemáticos, fenómenos y situaciones; – Comprensión y utilización de las relaciones entre las distintas representaciones de la misma entidad, y conocer sus puntos fuertes y sus limitaciones; – Elegir y cambiar entre las diferentes representaciones.
Manejo de símbolos matemáticos y formalismos, como por ejemplo: – Decodificación e interpretación simbólica y formal del lenguaje matemático, así como la comprensión de sus relaciones con el lenguaje natural; – Comprender la naturaleza y las normas de los sistemas matemáticos formales (tanto la sintaxis como la semántica); – Traducción del lenguaje natural al formal y simbólico; – Manejo y manipulación de las declaraciones y expresiones que contengan símbolos y fórmulas.
La comunicación en, con, y acerca de las matemáticas, como por ejemplo: – Comprensión de textos escritos, visuales o orales que tengan un contenido matemático, en una variedad de registros lingüísticos; – Expresar estas cuestiones de forma escrita, visual o oral, con diferentes niveles de precisión teórica y técnica.
Hacer uso de los recursos y herramientas, como por ejemplo: – Conocer la existencia y propiedades de los diversos instrumentos y recursos disponibles para la actividad matemática, y conocer sus posibilidades y limitaciones; – Ser capaces de utilizar reflexivamente dichos recursos y herramientas.

Ésta es la base a partir de la cual la OCDE, en el marco del Proyecto DeSeCo, indica diversas competencias matemáticas necesarias para formar a ciudadanos que puedan identificar y comprender el papel que desempeñan las matemáticas en el mundo, emitir juicios bien fundados, utilizar las matemáticas y comprometerse con ellas, y satisfacer las necesidades de la vida personal como ciudadano constructivo, comprometido y reflexivo (OCDE, 2004).

En el cuadro 3 se presenta un análisis comparativo entre los estándares de procesos del NCTM (2000) y las competencias matemáticas (Niss, 2002; OCDE, 2004):

Cuadro 3. Comparación entre los estándares de procesos y las competencias matemáticas.

Estándares de procesos matemáticos (NCTM, 2000)	Competencias matemáticas (Niss, 2002)	Competencias matemáticas (OCDE, 2004)
Resolución de problemas	Planteamiento y resolución de problemas matemáticos	Planteamiento y resolución de problemas
	Uso de recursos y herramientas	
Razonamiento y prueba	Dominio de modos de pensamiento matemático	Pensamiento y razonamiento
	Razonamiento matemático	Argumentación
Comunicación	Comunicación en, con y acerca de las matemáticas	Comunicación
Conexiones	-	-
Representación	Representación de entidades matemáticas	Representación y uso de operaciones y lenguaje técnico, simbólico y formal
	Análisis y construcción de modelos	Construcción de modelos
	Manejo de símbolos matemáticos y formalismos	

Los procesos matemáticos y las competencias matemáticas que se exponen en el cuadro anterior subrayan una misma visión que enfatiza la capacidad de usar de forma comprensiva y eficaz las matemáticas que se aprenden en la escuela en una variedad de contextos, además del escolar. Se trata de un nuevo enfoque que de Guzmán (2001, p. 9) sintetizó de forma muy clara:

> "En la situación de transformación vertiginosa de la civilización en la cual nos encontramos, está claro que los procesos verdaderamente eficaces de pensamiento, que no se vuelven obsoletos con tanta rapidez, es lo más valioso que podemos enseñar a nuestros jóvenes. En nuestro mundo científico e intelectual tan rápidamente mutante vale mucho más proveerse de procesos de pensamiento útiles que de contenidos que rápidamente se convierten en ideas inertes ..."

Los procesos matemáticos y las competencias matemáticas permiten ampliar la perspectiva acerca de la naturaleza de las matemáticas como disciplina. En el estudio TEDS-M 2008 (el primer estudio comparativo a nivel internacional y a gran escala, sobre educación superior, centrado en la formación inicial de los profesores de matemáticas) se presentan dos visiones contrapuestas: a) las matemáticas como un conjunto de reglas y

procedimientos, y b) las matemáticas como un proceso de indagación. En la primera visión se tienden a ver las matemáticas como un conjunto de procedimientos que hay que aprender, con normas estrictas acerca de lo que es correcto o no, mientras que en la segunda visión se valoran las matemáticas como un instrumento para responder a preguntas y resolver problemas, en la que los procesos matemáticos se consideran herramientas de indagación, es decir, medios para un fin y no el fin en sí mismo. En el cuadro 4 se presentan algunas afirmaciones de ambas visiones:

Cuadro 4. Visiones acerca de la naturaleza de las matemáticas como disciplina (Ministerio de Educación, Cultura y Deporte, 2012).

Matemáticas como un conjunto de reglas y procedimientos	Matemáticas como un proceso de indagación
Las matemáticas son una colección de normas y procedimientos que determinan cómo se resuelve un problema. Saber matemáticas implica recordar y aplicar definiciones, fórmulas, hechos matemáticos y procedimientos. Para resolver una tarea matemática es necesario conocer el procedimiento correcto. En caso contrario uno está perdido. El rigor lógico y la precisión son fundamentales para las matemáticas. Para hacer matemáticas se requiere mucha práctica, la aplicación correcta de procedimientos rutinarios y estrategias de resolución de problemas. Las matemáticas significan aprender, recordar y aplicar.	Las matemáticas implican creatividad y nuevas ideas. En matemáticas uno puede descubrir y ensayar muchas cosas por sí mismo. Si uno se involucra en las tareas matemáticas, puede hacer descubrimientos (p. ej., conexiones, reglas y conceptos). Los problemas de matemáticas se pueden resolver de maneras diferentes. Muchos aspectos de las matemáticas tienen notable valor práctico. Las matemáticas ayudan a resolver problemas y tareas de la vida cotidiana.

La visión de las matemáticas como un conjunto de reglas y procedimientos, pues, se asocia a la instrucción matemática, es decir, se interpreta el proceso de enseñanza-aprendizaje de la disciplina como un conjunto de reglas y procedimientos que se adquieren a través de la ejercitación, mientras que la visión de las matemáticas como un proceso de indagación se corresponde con un enfoque más competencial, en el que se ofrecen a los aprendices diversas herramientas para que progresivamente aprendan a usar las matemáticas en su vida cotidiana. En el informe español del TEDS-M 2008 (Ministerio de Educación, Cultura y Deporte, 2012) los futuros maestros españoles muestran un mayor acuerdo en interpretar las matemáticas como un proceso de indagación (73,4% de respuestas de acuerdo) que en considerarlas como un conjunto de reglas y procedimientos (50% de respuestas de respaldo). Ruiz de Gauna, García y Sarausa (2013), en un estudio realizado con estudiantes de primer curso del grado de maestro, analizan las actitudes hacia la materia (un 40% admiten que les gustan las matemáticas) junto con otras

consideraciones referentes a los contenidos matemáticos que forman parte del currículo (se destaca sobre todo la geometría, con un 91% de acuerdo), o la utilidad y el sentido de las matemáticas (un 66% admiten que sirven para razonar y pensar). Aunque implícitamente se hace alusión a algunos procesos matemáticos, en dicho estudio no se analiza con detalle la opinión de los estudiantes en relación a este tipo de conocimientos matemáticos.

A partir de estos datos previos, en este estudio se quiere analizar con mayor detalle cuales son las consideraciones de los futuros maestros acerca de los procesos matemáticos. En este contexto, nuestra pregunta de investigación es:

- ¿Cuáles son las opiniones de los estudiantes para maestro sobre los aspectos que mejor definen a las matemáticas?

Particularmente, el objetivo de nuestro estudio es identificar qué lugar ocupan los procesos matemáticos en el sistema de creencias de los estudiantes para maestro sobre las matemáticas como disciplina.

METODOLOGÍA

Participantes

La muestra está formada por 142 estudiantes, 72 pertenecientes al Grado de Educación Infantil y 70 del Grado de Educación Primaria. Todos los estudiantes, en el momento que se realizó el estudio, estaban cursando primero en la Universidad de Girona.

La edad media de los estudiantes del Grado de Educación Infantil es de 21,2 años, y de los de Educación Primaria es de 20,3 años. El porcentaje de hombres en Educación Infantil es de 4,35% y en Educación Primaria es de 12,04%. El 56,5% de los estudiantes de Infantil provienen del ciclo formativo de grado superior en Educación Infantil, y el 29,8% de estudiantes de Primaria provienen de ciclos formativos de grado superior. De los estudiantes que provienen de bachillerato, el 14,28% de Infantil y el 16,13% de Primaria provienen de un bachillerato científico-tecnológico. Por lo tanto, de la muestra del estudio, solo el 4,4% en Educación Infantil y el 6,8% en Primaria, han cursado matemáticas en los dos últimos años antes de empezar los estudios universitarios.

Diseño y procedimiento

En el primer semestre de primero, antes de iniciar cualquier asignatura o módulo formativo relacionado con las matemáticas y su didáctica se administró un cuestionario a todos los participantes para identificar diversas creencias acerca de la educación matemática centradas en las diversas dimensiones indicadas por Caballero, Blanco y Guerrero (2008). En una de estas cuestiones se les solicitaba que indicaran tres aspectos clave (de mayor a menor importancia) que asociaban con las matemáticas, puesto que se consideró que implícitamente iba a aportar datos acerca de la visión de los estudiantes acerca de la naturaleza de las matemáticas como disciplina.

Para la categorización de las respuestas dadas se ha combinado la categorización deductiva y la inductiva (Bonilla y Rodríguez, 1995), es decir, en un primer momento se ha

partido de unidades de significado identificadas en marcos teóricos existentes (categorización deductiva) pero, posteriormente, con la revisión cuidadosa de todo el material, se han identificado subcategorías que emergen de la misma información (categorización inductiva).

Las tres categorías principales que se han considerado para clasificar las respuestas han sido: *Factores Cognitivos*, *Factores Procedimentales* y *Factores Actitudinales*. Estas tres categorías se han establecido a partir de la revisión de la literatura (NCTM, 2000; Caballero, Guerrero y Blanco, 2007; Guirado, Olivera, Mazzitelli y Aguilar, 2010; Ministerio de Educación, Cultura y Deporte, 2012; Ruiz de Gauna, García y Sarasua, 2013) y a partir de las definiciones y clasificaciones dadas por la OCDE en su Proyecto DeSeCo (OCDE, 2001) sobre las competencias básicas, donde considera la competencia como una combinación de conocimientos, destrezas y actitudes.

Los *Factores Cognitivos* incluyen elementos que ayudan al estudiante a "saber conocer". Esta categoría se ha subdividido en cuatro subcategorías definidas a partir de las respuestas dadas por los estudiantes y a partir de las categorías del trabajo de Guirado, Olivera, Mazzitelli y Aguilar (2010): *Inteligencia, memoria, comprensión y cálculo mental y escrito.* Los *Factores Procedimentales* permiten "saber hacer". En esta categoría, basándonos en los estándares de procesos definidos por el NCTM (2000), se han considerado las subcategorías: *resolución de problemas, razonamiento, comunicación y conexiones.* Por último, los *Factores Actitudinales* se conciben como el conjunto de aspectos que ayudan al alumno a "saber ser". A partir del trabajo de Guirado, Olivera, Mazzitelli y Aguilar (2010) y de las respuestas dadas por los estudiantes se han considerado cuatro subcategorías: *interés, esfuerzo, participación y autoconcepto*. En el cuadro 5 se presenta una síntesis de las categorías y subcategorías consideradas:

Cuadro 5. Categorías y subcategorías sobre la naturaleza de las matemáticas

Factores Cognitivos	Factores Procedimentales	Factores Actitudinales
Inteligencia Memoria Comprensión Cálculo mental y escrito	Resolución de problemas Razonamiento Comunicación y representación Conexiones	Interés Esfuerzo Participación Autoconcepto

Dado el tipo de población y de datos analizados, aunque la pregunta a analizar sea una variable cualitativa, la metodología que se ha utilizado para su análisis y discusión ha sido de tipo cuantitativo. Para tener en cuenta el orden de los tres aspectos clave que los estudiantes asocian con las matemáticas (de mayor a menor importancia), se han ponderado sus respuestas dando un peso de 0,5 al primer factor, de 0,3 al segundo y de 0,2 al factor que indican en tercera posición.

RESULTADOS

Para la exposición de los resultados, en primer lugar se muestran los datos obtenidos acerca de los tres aspectos clave que los estudiantes asocian con las matemáticas. Al haber ponderado las respuestas según el orden de los aspectos indicados (0,5; 0,3; 0,2), el número de estudiantes que se indican en las tablas de resultados de cada categoría no es un número natural.

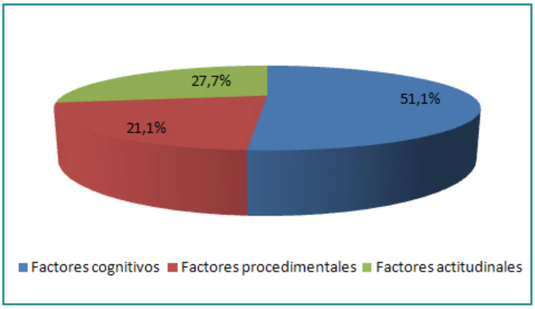


Figura 1. Gráfico comparativo entre las tres categorías.

Tabla 1. Resultados obtenidos en las tres categorías

	Nº estudiantes	Porcentaje
Factores cognitivos	72,6	51,1%
Factores procedimentales	30	21,1%
Factores actitudinales	39,4	27,7%
Total	142	100 %

Los resultados anteriores muestran que más de la mitad de los estudiantes para maestro (un 51,1%), considera que los aspectos cognitivos son los que mejor definen a las matemáticas. En segundo lugar consideran los factores actitudinales (un 27,7%), mientras que los aspectos que vinculan menos con las matemáticas son los procedimentales (21,1%).

A continuación se presentan los resultados de forma más detallada, diferenciando cuatro subcategorías dentro de cada categoría.

Tabla 2. Resultados obtenidos en las distintas subcategorías

		Nº estudiantes	Porcentaje	Media entre los factores
Factores cognitivos	Inteligencia	26,8	18,9%	18,55
	Memoria	3,8	2,7%	
	Comprensión	12,4	8,7%	
	Cálculo mental y escrito	31,2	22%	

		Nº estudiantes	Porcentaje	Media entre los factores
Factores procedimentales	Razonamiento	5,2	3,7%	7,65
	Comunicación	2,2	1,5%	
	Conexiones	6,1	4,3%	
	Resolución de problemas	17,1	12%	
Factores actitudinales	Interés	19,5	13,7%	9,3
	Esfuerzo	14,6	10,3%	
	Participación	0,7	0,5%	
	Autoconcepto	2,4	1,7%	
	Total	142	100%	

Estos datos indican que, en relación a los factores cognitivos, los aspectos que los estudiantes identifican más con las matemáticas son el cálculo mental y escrito (22%) y la inteligencia (18,9%). Dentro de los factores actitudinales, los aspectos más destacados son el interés (13,7%) y el esfuerzo (10,3%). Y respecto a los factores procedimentales, el aspecto que asocian más a las matemáticas es la resolución de problemas (12%). El factor cognitivo que menos asocian con las matemáticas es la memoria (2,7%), el factor actitudinal menos relevante es la participación (0,5%) y el factor procedimental que menos consideran es la comunicación (1,5%).

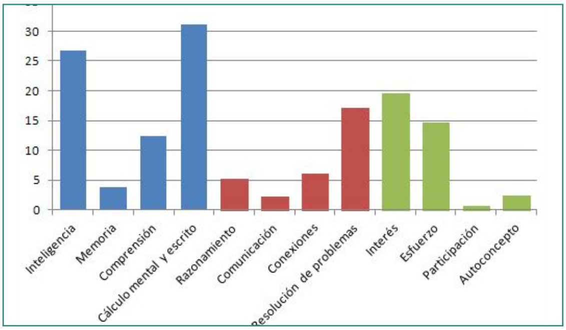


Figura 2. Gráfico comparativo entre las sub-categorías.

DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

En este estudio se han identificado las creencias de los estudiantes para maestro sobre la naturaleza de las matemáticas. Una primera interpretación de los resultados obtenidos confirma la presencia de tres categorías de factores: cognitivos, actitudinales y procedimentales, en contraposición a diversos estudios preliminares que subrayan exclusivamente factores cognitivos y actitudinales, incluidos en la agenda *Creencias y dominio afectivo: actitudes y cognición* (Llinares, 2008). En otras palabras, en estos estudios previos se consideran únicamente los factores de las matemáticas que permiten a los alumnos "saber conocer" y "saber ser", de acuerdo con la terminología de la OCDE para

definir las competencias clave (OCDE, 2001). Consideramos que la incorporación de factores procedimentales, en la línea ya iniciada por algunos trabajos (NCTM, 2000; Guirado, Olivera, Mazzitelli y Aguilar, 2010), contribuye a comprender con mayor precisión el conjunto de creencias que acaban configurando la identidad profesional del maestro de matemáticas acerca de la naturaleza de las matemáticas. Estos factores responden al "saber hacer" (OCDE, 2001), e incluyen las formas de pensar propias de las matemáticas, como resolver problemas, razonar y demostrar, comunicar y representar o hacer conexiones (NCTM, 2000).

Una segunda interpretación de los resultados obtenidos es el escaso peso de los factores procedimentales en el conjunto de creencias acerca de la naturaleza de las matemáticas. Los datos obtenidos han puesto en evidencia que los futuros maestros no consideran suficientemente las formas de adquisición y uso de los contenidos matemáticos. Estos datos ponen de manifiesto una construcción de la identidad profesional del maestro de matemáticas que deja de lado algunas de las tendencias contemporáneas en educación matemática (NCTM, 2000; Niss, 2002; OCDE, 2004), en las que se destaca la importancia de los procesos de pensamiento matemático para el aprendizaje de las matemáticas en general y para la adquisición de la competencia matemática en particular. A la vez, los resultados de nuestro trabajo muestran algunas contradicciones con los datos del estudio internacional TEDS-M (Ministerio de Educación, Cultura y Deporte, 2012). Como se ha indicado, en dicho estudio los futuros maestros españoles muestran un mayor acuerdo en interpretar las matemáticas como un proceso de indagación (73,4% de respuestas de acuerdo), lo que significa que mayoritariamente asocian las matemáticas con una visión competencial que incluye la actividad heurística, la resolución de problemas o las conexiones con la vida cotidiana. Sin embargo, en nuestro estudio, cuando se les pregunta acerca de los factores que asocian con las matemáticas, estos aspectos procedimentales son los que tienden a ocupar las últimas posiciones en su escala de creencias. En una línea similar al TEDS-M, en el estudio de Ruíz de Gauna, García y Sarausa (2013), los factores procedimentales (y en concreto las acciones de "razonar" y "pensar") tienen una alta valoración entre los estudiantes (66%), mientras que en nuestro estudio el 3,7% de los estudiantes asocian el razonamiento a las matemáticas, y un 12% a la resolución de problemas. Una posible explicación es que las características de los participantes de ambos estudios son diferentes: en nuestro caso, se trata de estudiantes de primer curso de los Grados de Educación Infantil y Educación Primaria, mientras que el estudio TEDS-M se realizó con estudiantes de tercer curso de primaria de la antigua diplomatura de magisterio que ya habían recibido una formación en didáctica de las matemáticas.

De estos datos se desprenden algunas posibles implicaciones didácticas que deberían considerarse tanto en la formación inicial como en la formación permanente del profesorado. La consideración de los procesos matemáticos implica partir de un planteamiento curricular mucho más globalizado que no se limite a los contenidos de una única área, sino trabajar de forma integrada, explorando como se potencian unos y otros y usándolos sin prejuicios. Además, exige trabajar para favorecer la autonomía mental del alumnado, potenciando la elaboración de hipótesis, las estrategias creativas de resolución de problemas, la discusión, el contraste, la negociación de significados, la construcción conjunta de soluciones y la búsqueda de formas para comunicar planteamientos y resultados. En definitiva, pues, se trata de ayudar a gestionar el conocimiento, las habilidades y las

emociones pera conseguir un objetivo. En los últimos años son muchos los profesionales que han ido incorporando los procesos matemáticos en sus prácticas docentes (para una revisión más exhaustiva, consultar Alsina 2011, 2014), y es de esperar que vaya en aumento en el futuro dada la relevancia que actualmente se da a los procesos.

En cualquier caso, de acuerdo con Kaasila, Hannula y Laine (2012), los estudios acerca de la visión de las matemáticas de los futuros maestros tienen un papel importante porque revelan cómo van construyendo su identidad profesional, y desde este marco consideran que es necesario que los formadores de maestros comprendan sobre todo los puntos de vista negativos. La identificación y toma de conciencia de estas creencias es el requisito necesario para poder promover procesos de cambio durante la formación inicial (Kaasila, Hannula, Laine y Pehkonen, 2006, 2008), y evitar así que los futuros maestros accedan a la práctica profesional con unas creencias acerca de la naturaleza de las matemáticas que conlleven omisiones importantes durante el proceso de enseñanza-aprendizaje de la disciplina, como por ejemplo dejar de lado los procesos de pensamiento matemático.

Por esta razón va a ser necesario diseñar nuevos estudios que analicen con instrumentos más detallados las creencias de los futuros maestros acerca de los procesos matemáticos, ya que consideramos que el hecho de haber planteado una única pregunta sobre los aspectos clave que los estudiantes asocian con las matemáticas puede haber sido una limitación importante en el diseño de nuestro estudio. Paralelamente, sobre todo si en futuras investigaciones se confirman los resultados reveladores de este estudio, va a ser necesario diseñar programas de intervención que promuevan la incorporación de los conocimientos disciplinares y didácticos referentes a los procesos de pensamiento matemático en los módulos y asignaturas de didáctica de las matemáticas de los estudios del Grado de Maestro.

REFERENCIAS

Alsina, Á. (2011). *Educación matemática en contexto de 3 a 6 años.* Barcelona: ICE-Horsori

Alsina, Á. (2014). Matemáticas en la educación primaria. En N. Planas y Á. Alsina (2014). *Educación matemática y buenas prácticas.* (pp. 93-144). Barcelona: Editorial Graó (2ª edición).

Beauchamp, C. y Thomas, L. (2009). Understanding teacher identity: an overview of issues in the literature and implications for teacher education. *Cambridge Journal of Education, 39*(2), 175-189.

Beijaard, D., Meijer, P.C. y Verloop, N. (2004). Reconsidering research on teachers' professional identity. *Teaching and Teacher Education, 20,* 107-128.

BOE (2014). Real Decreto 126/2014, de 28 de febrero, por el que se establece el currículo básico de la Educación Primaria. Recuperado de: http://www.boe.es/buscar/pdf/2014/BOE-A-2014-2222-consolidado.pdf.

Bonilla, E. y Rodríguez, P. (2005). *Más allá del dilema de los métodos.* Colombia: Editorial Nomos.

Caballero, A., Blanco, L.J. y Guerrero, E. (2008). El dominio afectivo en futuros maestros de matemáticas en la Universidad de Extremadura. *PARADIGMA, XXIX* (2), 157-171.

Caballero, A., Guerrero, E. y Blanco, L.J. (2007), Las actitudes y emociones ante las Matemáticas de los estudiantes para Maestros de la Facultad de Educación de la Universidad de Extremadura. En M. Camacho, P. Bolea, P. Flores, B. Gómez, J. Murillo y Mª. T.

González (Eds.), *Investigación en Educación Matemática. Comunicaciones de los grupos de investigación. XI Simposio de la SEIEM* (pp. 41-42). Tenerefie: SEIEM.

De Guzmán, M. (2001). Tendencias actuales de la educación matemática. *Sigma,* 19, 5-25.

Esteve, O. y Alsina, Á. (2010). Hacia el desarrollo de la competencia profesional del profesorado. En O. Esteve, K. Melief y Á. Alsina (Eds.), *Creando mi profesión. Una propuesta para el desarrollo profesional del profesorado* (pp. 7-18). Barcelona: Editorial Octaedro.

Guirado, A.Mª, Olivera, A.C., Mazzitelli, C.A. y Aguilar, S.B. (2010). ¿Cuál es la representación que tienen los docentes acerca de ser un buen alumno de física y aprender física? *Revista Electrónica de Enseñanza de las Ciencias, 9*(3), 618-632.

Kaasila, R., Hannula, M. y Laine, A. (1012). "My personal relationship towards mathematics has necessarily not changed but…" Analyzing pre-service teachers' mathematical identity talk. *International Journal of Science and Mathematics Education 10,* 975-995.

Kaasila, R., Hannula, M., Laine, A. y Pehkonen, E. (2006). Facilitators for change of elementary teacher students' view of mathematics. En J. Novotaná, H. Moraová, M. Krátká, y N. Stehliková (Eds.), *Proceedings of the 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 385-392). Praga: PME.

Kaasila, R., Hannula, M., Laine, A. y Pehkonen, E. (2008). Socio-emotional orientations and teacher change. *Educational Studies in Mathematics, 67,* 111-123.

Llinares, S. (2008). Agendas de investigación en educación matemática en España: una aproximación desde "ISI-web of knowledge" y ERIH". En R. Luengo, B. Gómez, M. Camacho y L. Blanco (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XII* (pp. 25-54). Badajoz: SEIEM.

Lutovac, S. y Kaasila, R. (2011). Beginning a pre-service teacher's mathematical identity work through narrative rehabilitation and bibliotherapy. *Teaching in Higher Education, 16*(2), 225–236.

Lutovac, S. y Kaasila, R. (2013). Pre-service teacher's possible mathematical identities. Recuperado de: http://blogs.helsinki.fi/mavi-2012/files/2012/09/LutovacKaasila_MAVI-2012_revised-for-the-web2.doc.

MEC (2007a). ORDEN ECI/3854/2007, de 27 de diciembre, por la que se establecen los requisitos para la verificación de los títulos universitarios oficiales que habiliten para el ejercicio de la profesión de Maestro en Educación Infantil. *Boletín Oficial del Estado 312,* 53735-53738.

MEC (2007b). ORDEN ECI/3857/2007, de 27 de diciembre, por la que se establecen los requisitos para la verificación de los títulos universitarios oficiales que habiliten para el ejercicio de la profesión de Maestro en Educación Primaria. *Boletín Oficial del Estado 312,* 53747-53750.

Ministerio de Educación, Cultura y Deporte (2012). *TEDS-M. Informe español. Estudio internacional sobre la formación inicial en matemáticas de los maestros.* Madrid: Secretaría General Técnica. Subdirección General de Documentación y Publicaciones.

NCTM (2000). *Principles and standards for school mathematics.* Reston, Va.: NCTM.

Niss, M. (2002). *Mathematical competencies and the learning of mathematics: The Danish KOM Project.* Roskilde: Roskilde University.

OCDE (2001). *Defining and selecting key competencies.* Bruselas: OCDE.

OCDE (2004). *Informe PISA 2003. Aprender para el mundo de mañana.* Recuperado de: http://www.oecd.org/pisa/39732493.pdf.

Ruiz de Gauna, J., García, J. y Sarasua, J. (2013). Perspectiva de los alumnos de Grado de Educación Primaria sobre las Matemáticas y su enseñanza. *Números, 82,* 5-15.

Épsilon - Revista de Educación Matemática *2014, Vol. 31(3), nº 88, 21-38*

Dificultades de los estudiantes de once grado al hacer transformaciones de representaciones de una función

Tulio Amaya De Armas
Corporación Universitaria del Caribe (Colombia)
Universidad Nacional de Educación a Distancia (UNED)
Natalia Sgreccia
Universidad Nacional de Rosario y Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas (Argentina)

Resumen: *Tradicionalmente, ha sido problemático el aprendizaje del concepto de función. En este trabajo se reportan los hallazgos de una investigación en donde se analizaron las dificultades presentadas por estudiantes de once grado al hacer transformaciones de representaciones de una función, con el registro tabular como registro principal. Para recoger la información se aplicó un cuestionario, con una situación que involucra el concepto de función. Las dificultades estuvieron relacionadas con la identificación del contenido de las representaciones, el funcionamiento de los registros y la coordinación entre ellos. Fue posible apreciar que los estudiantes no reconocen el registro tabular como apoyo válido para sustentar sus respuestas.*
Palabras clave: *registros semióticos de representación, coordinación entre registros, conversión, tratamiento, función.*

Difficulties of students from elevend grade to make changes of representations of a function

Abstract: *Traditionally, the learning of the concept of function has been problematic. In this paper we report the findings of an investigation which analyzed the difficulties presented by grade eleven students to make transformations of representations of a function, with tabular register as primordial one. To collect the information a questionnaire was applied with a situation involving the concept of function. The difficulties were related to the identification of the content of the representations, the operation of registers and the coordination between them. It was possible to identify that students do not recognize as a valid support the tabular register to support their answers.*

Keywords: *semiotic registers of representation, coordination between registers, conversion, treatment, function.*

INTRODUCCIÓN

Al analizar lo propuesto en los estándares del *National Council of Teachers of Mathematics* (2000) y del Ministerio de Educación Nacional de Colombia (2005) frente a los resultados de las investigaciones respecto a la conceptualización de la noción de función (Cordero, 1997; Dolores, 2004; Gatica et al., 2010; Hitt, 2000, 2003a, 2003b), se evidencia una descompensación en el abordaje dado a este concepto a través de diferentes registros semióticos de representación, lo que podría dificultar el desarrollo de pensamiento variacional en los estudiantes. Esta descompensación lleva al alumno a cometer errores y los errores, si no son resignificados apropiadamente, pueden conducir el proceso de aprendizaje por un camino equivocado, ya que los estudiantes se pueden acostumbrar a ellos y no distinguir lo adecuado de lo inadecuado. Incluso, por acumulación de malas experiencias, pueden llevar a los sujetos a no permitirse conflictos cognitivos, por lo que en estas condiciones sería difícil la adquisición de conocimientos (Amaya, 2010).

Además, uno de los conceptos básicos relacionados a la enseñanza y el aprendizaje del cálculo es, sin duda, el de función. Asimismo, numerosas investigaciones en el campo de la Educación Matemática (Benítez, 2010; D'Amore, 2006; Ochoviet y Oktaç, 2011; Sánchez-Matamoros, García y Llinares, 2008) han puesto de manifiesto que existen dificultades persistentes en los estudiantes, ligadas a la construcción de este concepto (Del Castillo, 2003). Una de estas dificultades, según Duval (2004), es el tránsito entre diferentes registros de representación; esto es, identificar elementos en un registro de partida y encontrar su equivalente en un registro de llegada. En particular, Duval (2012a) considera que, a diferencia de otras ciencias, el acceso al objeto de estudio en matemáticas es exclusivamente semiótico y que toda actividad matemática consiste en la transformación de representaciones semióticas –producciones constituidas por signos que pertenecen a un sistema de referencia, el cual tiene sus propias reglas de significación y de funcionamiento–.

De lo anterior se puede deducir que este proceso de transformación de representaciones es esencial en el aprendizaje de las matemáticas, ya que la única forma de acceder a los conocimientos matemáticos es a través de las representaciones semióticas (Hitt, 2003a). Las representaciones en diferentes registros se complementan, es decir, ningún sistema de representación puede producir una representación cuyo contenido sea del todo completo y adecuado al objeto representado, por lo que el recurso a varios registros se considera condición necesaria para la conceptualización (Del Castillo, 2003). Esto se debe, según Duval (1999), a que no hay conocimiento que un sujeto pueda movilizar sin una actividad de representación, es decir, no es posible estudiar los fenómenos relativos al conocimiento sin recurrir a las representaciones semióticas. En este sentido se ha fortalecido la idea de que cuando se usan en la enseñanza de las matemáticas actividades didácticas que favorecen la utilización y articulación entre diferentes registros, el aprendizaje resulta beneficiado.

Se evidencia así que un sistema de representación coopera en la construcción de objetos matemáticos, relaciones y procesos mediante la creación de un ambiente en el cual

se comparten los artefactos culturales lingüísticos que pueden expresarse en la comunidad (Kaput, 1989). También pone en evidencia la importancia de que los alumnos conecten los diferentes sistemas semióticos de representación con los elementos del medio sociocultural donde se desempeñan.

El presente estudio se centra en el análisis de las transformaciones entre representaciones que realizan estudiantes colombianos de 15-17 años de edad. Se caracterizan sus dificultades, tanto con la identificación del contenido de la representación de partida como con el funcionamiento de los registros en los que se hacen las representaciones y la coordinación entre ellos, en el tema funciones.

FUNDAMENTACIÓN TEÓRICA

En las últimas décadas las investigaciones en Educación Matemática han tenido un importante desarrollo, presentándose algunos acuerdos entre administradores educativos y grupos de investigadores, quienes a su vez han sentado algunas sugerencias sobre el tipo de problemas que se debe utilizar en matemáticas -que despierten el interés de los alumnos y favorezcan su aprendizaje-, la forma de organizar las secuencias de actividades utilizadas en clase de matemáticas y la necesidad de analizar las producciones de los estudiantes -para utilizar sus dificultades de comprensión en beneficio de su propio aprendizaje-. Este trabajo se encuadra en esto último.

En particular, los contextos de representación usados en la actividad matemática surgen como hilo de enlace que permite proponer problemas interesantes a través de los cuales analizar las dificultades de comprensión de los estudiantes –a través de, por ejemplo, sus errores conceptuales– y usarlos para mejorar sus procesos de aprendizaje.

En relación con el tipo de actividades para favorecer el desarrollo del pensamiento matemático de los estudiantes, el *National Council of Teachers of Mathematics* (2000) considera fundamental que se los enfrente a actividades que constituyan un reto para su curiosidad, que los estimulen a usar sus presaberes, a investigar lo que desconozcan y a analizar los contenidos estudiados. Específicamente, el Ministerio de Educación Nacional (2005) considera indispensable el estudio de patrones, nociones y conceptos propios del pensamiento variacional, el cual tiene que ver con el reconocimiento, la percepción, la identificación y la caracterización de la variación y el cambio en diferentes contextos, así como con su descripción, modelación y representación en distintos sistemas o registros simbólicos, ya sean verbales, icónicos, tabulares, gráficos o algebraicos. Tiene como propósito construir distintos acercamientos significativos para la comprensión y uso de los conceptos y procedimientos de las funciones y sus sistemas analíticos así como del cálculo numérico y algebraico. Además, cumple un papel preponderante en la resolución de problemas sustentados en el estudio de la variación y el cambio, y en la modelación de procesos de la vida cotidiana. Su estudio se inicia con la detección de los criterios que rigen regularidades o reglas de formación, para identificar la unidad que se repite periódicamente dando lugar a un patrón.

El tipo de actividades sugeridas por el *National Council of Teachers of Mathematics* (2000) y el análisis de secuencias y patrones recomendado por el Ministerio de Educación Nacional (2005) pueden desarrollar en los estudiantes la capacidad para identificar o construir un patrón de regularidad y la capacidad para reproducirlo en diferentes

registros, por medio de un cierto procedimiento, algoritmo o fórmula. Según Del Castillo (2003), este proceso de establecer congruencias es condición necesaria para la comprensión de un concepto matemático.

El análisis de las dificultades de comprensión de los estudiantes invocando sus concepciones es indispensable para ayudarlos a entender el tema que se esté estudiando, para lo que es necesario analizar sus errores conceptuales. Al respecto, Godino, Font y Batanero (2003) mencionan:

> (…) hablamos de error cuando el alumno realiza una práctica (acción, argumentación, etc.) que no es válida desde el punto de vista de la institución matemática escolar. El término dificultad indica el mayor o menor grado de éxito de los alumnos ante una tarea o tema de estudio. Si el porcentaje de respuestas incorrectas (índice de dificultad) es elevado se dice que la dificultad es alta, mientras que si dicho porcentaje es bajo, la dificultad es baja (p.69).

Este planteamiento implica concebir la práctica curricular y evaluativa como un seguimiento permanente al proceso de adquisición de conocimientos. El error se constituye en una vía natural de acceso al conocimiento, una manifestación de un proceso constructivo que se debe encauzar y orientar de tal manera que el que aprende se termine beneficiando.

Por otro lado están los contextos de representación usados en la actividad matemática. Duval (2004) considera prioritarias las posibilidades de transformar una representación semiótica en otra representación semiótica, como base en un proceso de comunicación que busca saber cómo puede ser codificado/decodificado un objeto matemático para poder ser comprendido por alguien. Según este autor, todo progreso de conocimiento en matemáticas pasa por este trabajo de transformación. Distingue dos tipos de transformaciones: el *tratamiento*, que es una transformación estrictamente interna en un registro determinado, con cierta homogeneidad en las representaciones producidas, donde la producción se hace como si cada representación fuera autosuficiente, y la *conversión*, que es una transformación de un objeto de un registro a otro, es decir, es aquella en la que la representación se pone en paralelo con otra representación de otro registro.

La conversión de un registro a otro puede resultar congruente o no; es decir, el pasaje entre dos representaciones de un mismo objeto puede hacerse en un sentido y no hacerse en el otro. Además, las representaciones de un mismo objeto pueden resultar heterogéneas; esto es, el contenido de una representación en un registro dado puede ser sustancialmente diferente al contenido de otra representación en otro registro. Para Duval (2004), si se quieren comprender los procesos de aprendizaje de las matemáticas, es necesario tomar en cuenta muy seriamente esta heterogeneidad, estableciéndose así la necesidad de utilizar más de una representación para acceder al conocimiento matemático y de conocer la proveniencia de las transformaciones; es decir, si provienen de un tratamiento o de una conversión, que permita un análisis cognitivo de las dificultades en la adquisición de los conocimientos matemáticos.

Las representaciones matemáticas o sistemas simbólicos matemáticos son sistemas de representaciones especiales en los que el mundo representado es una estructura matemática y el mundo representante es un esquema de símbolos que contiene correspondencias especiales (Kaput, 1987). Los sistemas simbólicos matemáticos, de la misma

manera que el lenguaje natural y los sistemas pictóricos, controlan el influjo de experiencias al separarlos en pedazos, asignando los símbolos a dichos pedazos y coordinando estas notaciones en un entorno adecuado de matices y referentes complejos. El sistema de símbolos matemáticos y sus conexiones puede formar una estructura que actúa para representar otro sistema de símbolos que exhibe una autosimilitud cuando se amplifica (Meel, 2003). Es así que, a través de las representaciones externas de un objeto matemático y las relaciones entre ellas, es posible estructurar nuevas representaciones que pueden tener connotaciones diferentes a las que les dieron origen.

Entre las tantas representaciones que permite una función, está la representación analítica, la cual a su vez puede asumir varias formas: *algebraica*, consistente en una fórmula que permite modelar la situación en juego; *polinomio aritmético*, como resultado de reemplazar un valor numérico en un registro algebraico; *secuencia*, que permite determinar el patrón de regularidad o de crecimiento de una función. Otra de las representaciones semióticas de una función es la *tabular*, en la que se parte de una tabla y se ubican las entradas de tal forma que el número de columnas (o filas, según se ordenen) corresponde al total o gran parte de las cantidades que intervienen en la situación, que vienen a ser los elementos que constituyen la función en ese registro.

Al respecto, diversas investigaciones (Amaya, 2010; Carrión, 2007; Dolores, 2004; León y Corredor, 2003) han tratado de identificar los problemas más comunes en el aprendizaje de las matemáticas, a través del análisis de las producciones de los estudiantes, sus procedimientos espontáneos, sus errores y sus incomprensiones. Han intentado dilucidar elementos acerca de su funcionamiento cognitivo y proponer formas para mejorar la adquisición de habilidades que permitan a los alumnos acceder con mayor facilidad a los conceptos. Comprender matemáticas se manifiesta a través de habilidades a disposición y transferibles a diversos espacios de razonamiento en y sobre la realidad. Para Meel (2003), comprender en matemáticas significa saber qué hacer y por qué se debe hacer algo con un concepto matemático en el momento que se requiera utilizarlo, lo que proporciona vías para la transferencia y extracción de información desde la memoria del estudiante. Esta idea está relacionada con la manera como se construyen conceptos o redes conceptuales, vinculados a una serie de procesos cognitivos en relación con representaciones simbólicas; esto es, a la significación que un individuo le atribuye a un objeto matemático al vincular las representaciones internas y externas con una situación contextual.

Según Hitt (2000), una idea matemática -o procedimiento o hecho- es entendida si su representación mental es parte de una red de representaciones. El grado de entendimiento es determinado por el número y la fuerza de las conexiones. En este sentido, la adquisición de un concepto por parte de un individuo se dará cuando coordine por lo menos dos de sus representaciones. Esto tiene que ver, según Duval (1999), con la articulación entre sus representaciones semióticas. U*n concepto matemático visto en sus diferentes representaciones proporcionará información específica, dando solidez al concepto.* Para Meel (2003), estos mecanismos producen significados y, por lo tanto, desarrollan comprensión para el estudiante por medio de la creación de nuevos vínculos entre los sistemas de representación o los elementos de reorganización dentro de un sistema de representación.

De lo anterior se reconoce que la comprensión de un objeto matemático se hace por medio de las representaciones semióticas, lo cual se basa en la ley fundamental del funcionamiento cognitivo de Duval (1999): no hay noesis sin semiosis. Se manifiesta a través de la soltura en la actividad cognitiva de conversión. De aquí cabe destacar el papel de las representaciones semióticas como andamio en la adquisición de los conocimientos matemáticos. Se basan en tratamientos y conversiones entre registros, que permiten conexiones entre los elementos de una red (el concepto) así como de la estructura cognitiva (como un todo). Según Duval (2004), en matemáticas, poder cambiar de sistema de representación es una exigencia cognitiva absolutamente necesaria y fundamental, porque el acceso a los conocimientos matemáticos requiere la integración en una arquitectura cognitiva de los sistemas semióticos de representación. De hecho "se cree que la familiarización progresiva con un nuevo tipo de representación provoca de manera casi natural el pasaje de este tipo de representación a los tipos de representación anteriormente utilizados" (Duval, 2004, p.30).

Además, Duval (2012b) considera que las diferencias que separan las matemáticas de otros campos del conocimiento provienen del modo de acceso a los objetos estudiados: en matemáticas se hace por medio de la producción de representaciones semióticas y no por la percepción o la utilización de instrumentos, como ocurre en otras ciencias.

> Esto nos permitirá inferir tres ideas clave para describir el modo de funcionamiento cognitivo que caracteriza al pensamiento matemático. (1) Los registros son los sistemas productores de representaciones semióticas. (2) La comprensión en matemáticas moviliza siempre implícita o explícitamente al menos dos registros; dicho de otra manera, la comprensión en matemáticas requiere la coordinación y el funcionamiento en sinergia de varios registros. (3) Cada registro abre un campo de transformación de las representaciones, y por lo tanto, posibilidades de tratamiento matemático que le son propias (p.15).

Duval (2004) considera que el reto de la enseñanza para la formación inicial no es tanto la adquisición de tal o cual conocimiento matemático, sino -a través de ello- el desarrollo de las capacidades de pensamiento del alumno. El desarrollo de estas capacidades depende de adquisiciones funcionales de diferentes sistemas que se requieren para la comprensión de todos los conocimientos que él deberá adquirir, no solamente en la escuela, sino después de ella. Por estar en un mundo en el cual ningún individuo puede aprender de antemano lo que le será profesional o humanamente útil, el reto de la enseñanza en la formación inicial es dar al estudiante los medios para comprender y aprender por él mismo. Al respecto, la UNESCO (2005) considera que la escuela, como responsable tradicional de la educación de los miembros de una sociedad, debe bregar para que estos adquieran una formación básica que les permita aprender a aprender, y hacerlo continua, sistemática y permanentemente. Lo que está en juego, según Duval (2012a), es el desarrollo de la autonomía intelectual de los estudiantes. Desde esta perspectiva es que las matemáticas pueden aportar una gran contribución a la formación de los alumnos.

METODOLOGÍA

Se asume un estudio descriptivo de casos (Servan y Servan, 2010), bajo un enfoque cualitativo de tipo empírico (Bravin y Pievi, 2008). Las transformaciones entre registros, tanto tratamientos como conversiones, se constituyeron en las categorías de análisis de la investigación. Se desarrolló en tres etapas fundamentales:

a) Revisión documental: consistió en una búsqueda bibliográfica a fin de obtener antecedentes de investigaciones y fundamentar a nivel teórico lo relativo a las dificultades de los estudiantes con las transformaciones de representaciones del concepto de función.

b) Diseño y aplicación de instrumentos: se elaboraron, adecuaron y pusieron en marcha los protocolos empleados en la investigación.

c) Obtención y análisis interpretativo de resultados: teniendo en cuenta el desempeño estudiantil en las transformaciones entre registros del contenido función, se procesó la información recabada y se avanzó hacia la discusión de los hallazgos.

Los informantes fueron 50 estudiantes (E_n, con n = 1, 2, 3, …, 50) de undécimo grado de la media académica de una escuela pública colombiana, con edades entre 15 y 17 años, en un curso ordinario de pre-cálculo previo al ingreso a la universidad. Para este trabajo el desempeño fue de manera individual.

En una investigación más amplia, en la que se inscribe este trabajo, se utilizaron cuatro tipos de técnicas: cuestionarios escritos con preguntas abiertas, observación participante, entrevistas semiestructuradas y grupos de discusión. En cuanto a los cuestionarios, cabe señalar que se aplicó un total de seis, cada uno involucrando una situación problemática. Aquí se comparten los resultados relativos a una de las situaciones, en la que se consideró al registro tabular como registro principal. Los contenidos matemáticos requeridos ya habían sido desarrollados en el curso.

La situación presentada está constituida por ocho cuestiones a resolver:

En la siguiente tabla se muestran los costos de producción de una empresa de discos compactos.

Número de discos	*Costo (en dólares)*
1000	*116000*
2000	*128000*
3000	*140000*
5000	
6100	
	224000
15000	
72000	

1) *Termina de llenar la tabla.*
2) *Determina el costo de 5500 discos y de 14500 discos respectivamente.*
3) *Explica cómo obtuviste la respuesta a la pregunta 2).*
4) *¿Qué cantidades intervienen en la situación? ¿Cuáles varían y cuáles son constantes o permanecen fijas?*
5) *¿Qué relación de dependencia hay entre las variables?*
6) *Si se sabe que el costo de producción fue de 314000 dólares, ¿cuántos discos se produjeron?*
7) *Obtén una expresión matemática que permita calcular los costos de producción para cualquier cantidad de discos compactos.*
8) *Realiza una gráfica que represente esta situación.*

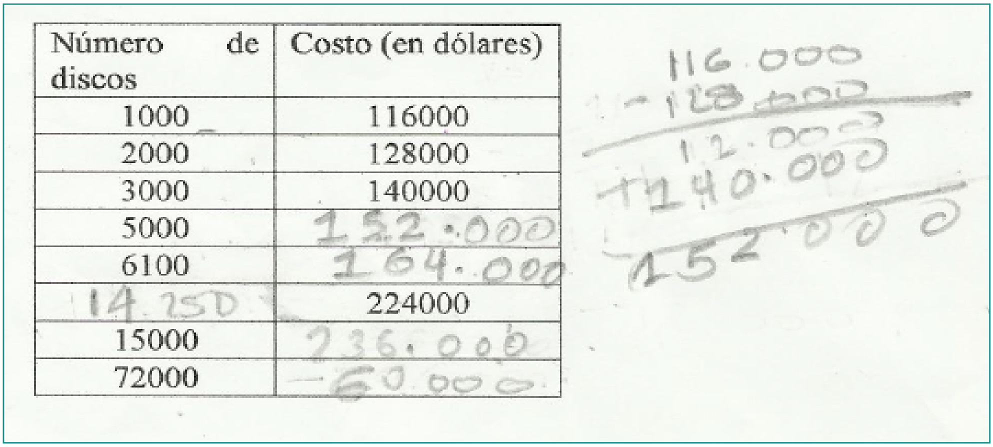
Para procesar la información se analizaron las resoluciones de los estudiantes para cada categoría de análisis, atendiendo tanto a los tratamientos como a las conversiones empleadas. Se empleó la técnica de análisis del contenido (Ander-Egg, 2003) para estudiar el contenido manifiesto de las producciones escritas al abordar las cuestiones planteadas. Se agruparon las resoluciones con respuestas similares y se fue registrando en una matriz de datos el porcentaje de alumnos de cada grupo así como las características de los procedimientos llevados a cabo, ejemplificando en algunos casos con el de algún estudiante en particular.

RESULTADOS

En lo que sigue se describen algunas características de los desempeños estudiantiles al realizar transformaciones de registros en la resolución de la situación planteada.

Cuestión 1. "Termina de llenar la tabla".

Una característica de las resoluciones del 92% de los estudiantes fue el paso previo al registro analítico-aritmético, donde realizaron las operaciones que consideraron pertinentes, para el llenado de la tabla. Es decir, primero hicieron una conversión, utilizando el registro analítico-aritmético como registro auxiliar. Realizadas las operaciones (transformaciones tipo tratamientos) en este registro, volvieron a hacer otra conversión, al registro tabular como registro principal, y entonces procedieron a llenar la tabla (Fig. 1). Realizaron un tratamiento en cierto sentido sin autosuficiencia, necesitando de la articulación con el registro analítico-aritmético como registro auxiliar para poder funcionar. Sin embargo, teniendo en cuenta que ningún sistema de representación produce una representación cuyo contenido sea del todo completo y adecuado al objeto representado (Del Castillo, 2003), el recurso a otros registros podría considerarse oportuno y hasta conveniente, quedando la inquietud acerca de las reglas compartidas entre los registros en juego.



Número de discos	Costo (en dólares)
1000	116000
2000	128000
3000	140000
5000	152.000
6100	164.000
14.250	224000
15000	236.000
72000	60.000

Figura 1. Tabla completada por el estudiante E_8

Particularmente E_8 parece asumir de inmediato un modelo lineal afín de la situación. Encuentra la diferencia entre las dos primeras entradas (omitiendo signos) para conocer la constante de proporcionalidad directa (12000) cada 1000 unidades (discos). Procede a adicionar 12000 a filas consecutivas posteriores de la columna "costo", sin detenerse demasiado a observar el incremento correspondiente en la cantidad de discos (pues en las tres primeras filas el incremento de discos es de a 1000 unidades, pero en la cuarta fila el incremento es de 2000 discos y en la siguiente es de 1100). En concordancia con lo planteado por Carrión (2007), en la resolución de E_8 se advierten errores tanto en la ubicación de las cantidades con las que se opera como en la escritura matemática implicada.

Cuestión 2. "Determina el costo de 5500 discos y de 14500 discos respectivamente".

En su mayoría los estudiantes se percataron de que el incremento en el costo de producción era un múltiplo de 12. Sin embargo, al variarles el incremento en la cantidad de discos de 1000 a 100, no hicieron el cambio de 12000 a 1200 en los costos. Esto les impidió seguir un patrón para cualquier cantidad de discos.

Precisamente el 72% de los estudiantes identificó el patrón de regularidad y de crecimiento de la situación; sin embargo solo el 8% lo utilizó adecuadamente. El 12% empleó los datos de la tabla y los modificó con información que se puede deducir de la situación, pero que no aparece explícita en la tabla que se les pide llenar. El 6% de los estudiantes encontró el costo para producir cada disco si no se tuvieran costos fijos y lo utilizó para dar su respuesta. El resto trató de encontrar este valor, pero haciendo una regla de tres simple directa, sin excluir los costos fijos de producción y sin llegar a la respuesta pedida. Es así que se evidencian múltiples interpretaciones de la situación, y aunque no todas ellas son adaptadas a esta, sí muestran rasgos característicos genuinos del concepto de función; lo que según Gallardo, González y Quintanilla (2013) es un indicio claro de que algo se ha comprendido del concepto.

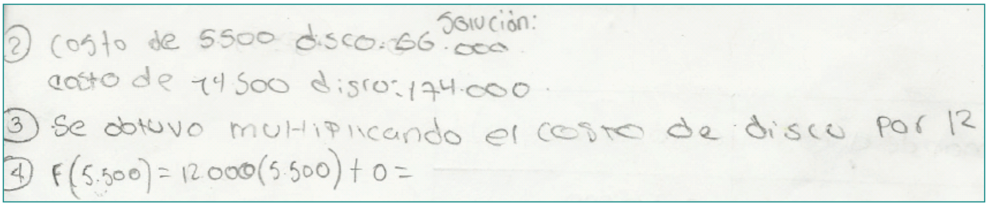


Figura 2. Descripción del procedimiento efectuado por el estudiante E12

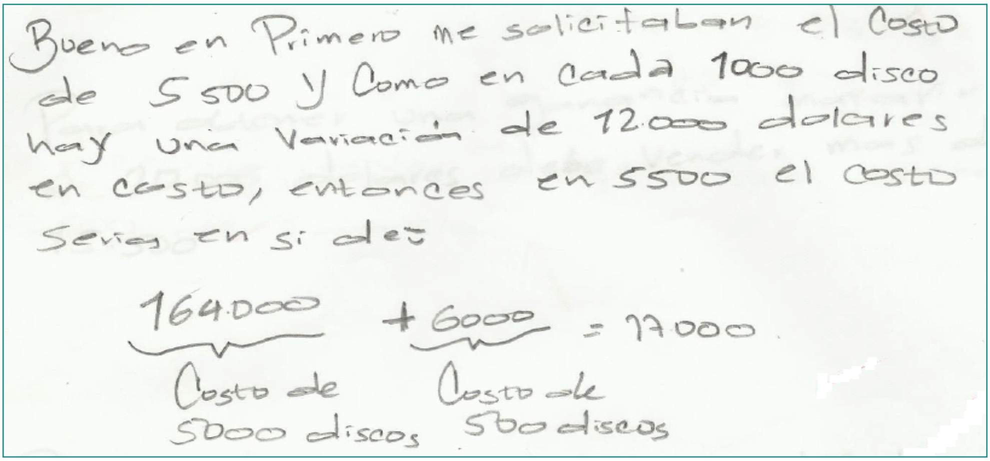
Cuestión 3. "Explica cómo obtuviste la respuesta a la pregunta 2)".

Fueron notorias las dificultades de los estudiantes al intentar describir los procesos realizados: el 36% realizó de manera adecuada los procedimientos y solo el 16% los describió correctamente, el 32% describió correctamente un procedimiento errado y los restantes (32%) no pudieron ni con el proceso ni con su descripción. Al tratar de explicar los procedimientos que siguieron para obtener sus respuestas, lo que hicieron fue repetir lo realizado anteriormente, acorde a lo reportado por Amaya y Barrera (2009). En las explicaciones dadas por los estudiantes se evidencian dificultades al pasar de cualquier registro de representación al del lenguaje materno (coloquial); es decir, esta conversión le resultó problemática a un grupo considerable de estudiantes. Esto coincide con los hallazgos de Caligaris, Schivo, Romiti y Sgreccia (2013), en este caso, en el ingreso a la universidad.

Un ejemplo de esta situación se muestra en la Fig. 2, donde el estudiante E_{12} manifestó que hizo algo que en realidad no es lo que se ve que hizo. Al resolver un polinomio aritmético dice que multiplicó por 12, cuando en realidad lo hizo por 12000. Los resultados de su resolución no coinciden con lo que le daría haciendo lo que dice que hizo (cuyos resultados sí serían válidos).

Sin embargo, al validar esta respuesta en un grupo de discusión, el estudiante da muestra de que su comunicación escrita fue la inadecuada, porque en su oralidad fue bien explícito aclarando adecuadamente lo que realizó. En general los estudiantes dan la cifra de cualquier cantidad sin decir los miles, incluso a veces también así lo escriben. Pero al cuestionárseles sobre la incoherencia de los valores, hicieron la aclaración que era 12000, acotando "todo el mundo dice 12". Fue prácticamente una constante en este grupo de estudiantes: ser más explícitos y precisos en su comunicación oral que en la escrita.

En la conversión al registro coloquial parece que los estudiantes dejaron el proceso de asimilación -en el sentido de Piaget- a medias, al quedarse solo en el manejo de datos, estableciendo pocos vínculos entre la nueva información y su estructura mental constituida (Meel, 2003). Es decir, lograron establecer pocas conexiones entre el contenido de los registros que los ayudara en la comprensión de la situación y el proceso de conexión entre las representaciones. Esto requiere un manejo adecuado de la relación entre el conocimiento y los elementos de la red, así como de la estructura como un todo. Acorde con estas ideas, el progreso matemático -lograr generalizar y justificar los procedimientos de solución a tipos de problemas cada vez más amplios (Godino et al, 2003)- fue logrado por pocos estudiantes (16%) en esta investigación. Y este proceso de establecer


Bueno en Primero me solicitaban el Costo de 5500 y Como en cada 1000 disco hay una Variación de 12.000 dolares en costo, entonces en 5500 el costo Seria en si de:

$$\underbrace{164.000}_{\text{Costo de 5000 discos}} + \underbrace{6000}_{\text{Costo de 500 discos}} = 17.000$$

Figura 3. Descripción del procedimiento efectuado por el estudiante E21

congruencias es, según Del Castillo (2003), condición necesaria para la comprensión en matemáticas.

En el manuscrito que se muestra en la Fig. 3 se evidencia que el estudiante E_{21} reconoció algunos elementos significativos de la función, teniendo en cuenta que para Tall (1985) el propósito de toda función es mostrar cómo varía algo. El hecho de que un alumno reconozca que en la situación se da el proceso de variación es de gran relevancia para este estudio, por cuanto el hecho de llevarlos a realizar transformaciones de registros se convirtió en una intervención para la mejora en la comprensión del tema.

Cuestión 4. "¿Qué cantidades intervienen en la situación? ¿Cuáles varían y cuáles son constantes o permanecen fijas?".

Los estudiantes (64%) presentaron serias dificultades relacionadas con el reconocimiento de los elementos de la función y con el manejo de las operaciones; es decir, con la identificación del contenido de las representaciones y con el funcionamiento del registro, en términos de Duval (2004). Sin embargo, el 48% de ellos identificó ciertos elementos de la función, pero no alcanzó a dar respuestas del todo acertadas, por omitir otros. Por ejemplo, se dieron cuenta que por cada incremento de 1000 en la cantidad de discos se presentaba un incremento de 12000 dólares en el costo de producción, pero al dar su respuesta no tuvieron en cuenta que en la cuarta fila hubo un salto en la secuencia de número de discos (se omitió el 4000), por lo que en la primera entrada que llenaron de la tabla (correspondiente al costo para 5000 discos), en lugar de 164000 (140000+12000+12000) colocaron 152000, que era el valor correspondiente a 4000.

Otra de las dificultades fue relacionar los elementos de la función con su significado contextual. Por ejemplo, les costó aceptar que los valores de la función correspondieran con los costos de producción, que los costos fijos por unidad fueran 12 y no 12000, y que los costos fijos de producción fueran 104000 y no 116000, evidenciándose lo que Benítez (2010) llama interpretación local de la situación.

Cuestión 5. "¿Qué relación de dependencia hay entre las variables?".

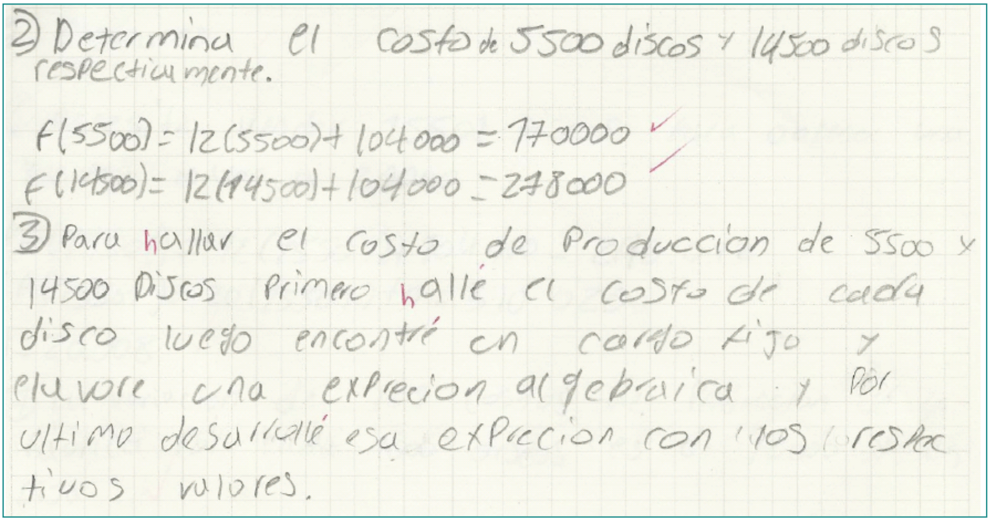
Un alto porcentaje de estudiantes (76%) presentó dificultades para relacionar los elementos de la función en una transformación tipo conversión. En cada registro pudieron identificar solo algunos elementos. Por ejemplo, ignoraron los costos fijos de producción y trabajaron con la función lineal como si fuera una función afín, evidenciándose un obstáculo en el sentido de Brousseau (1999). Aquellos que identificaron los elementos de la función (24%) también pudieron clasificarlos y establecer relaciones de dependencia entre ellos. Además, cabe advertir que el 16% de los estudiantes utilizó un registro auxiliar analítico-aritmético para dar respuesta a la consigna; mostrándose nuevamente que el proceso de hacer transformaciones entre registros no es una cuestión sencilla ni espontánea, es decir, estos procesos ontosemióticos de identificación de aspectos comunes en distintos registros suelen resultar complejos.

Cuestión 6: "Si se sabe que el costo de producción fue de 314000 dólares, ¿cuántos discos se produjeron?".

Ningún estudiante utilizó el concepto de ecuación para encontrar la incógnita solicitada, ni en la entrada de la tabla que implicaba un tratamiento, ni en la pregunta que implicaba una conversión al registro algebraico, coincidiendo en este sentido con lo reportado por Ochoviet y Oktaç (2011). Los que dieron con la respuesta, lo hicieron por tanteo (24%) o utilizando el patrón deducido en la secuencia (16%). Es decir, a los estudiantes se les dificultó más encontrar el número de discos cuando se les dio previamente el costo de producción para una cierta cantidad de discos, que el proceso inverso: hallar el costo de producción para una determinada cantidad dada de discos. El primer caso es un proceso que lleva implícito el concepto de ecuación, que no fue utilizado por ningún estudiante para dar respuesta a esta pregunta. El segundo caso parece ser más familiar a los estudiantes, ya que es dar solución a un polinomio aritmético -como el mostrado en la Fig. 4, con el que se trabaja con frecuencia en cursos anteriores y en asignaturas como Física y Química- o seguir el patrón de regularidad hasta dar con la respuesta.

Sin embargo resulta curioso que un grupo de estudiantes haya encontrado y utilizado una expresión algebraica que modelara la situación y no la hubieran utilizado para encontrar una incógnita. Aquí los estudiantes no pudieron concebir la letra como número generalizado, lo que les pudo impedir usar el concepto de ecuación para encontrar la incógnita solicitada. Esto es, establecer la equivalencia entre la expresión algebraica y el valor dado para los costos de producción que lo llevaría a plantear una ecuación y, de resolverla, a encontrar el número de discos correspondientes a esos costos de producción (fig. 4).

Además, cabe señalar que el 80% de los estudiantes no utilizó la información que había consignado en su tabla para responder otras preguntas, en concordancia con lo reportado por Amaya y Barrera (2009), donde la mayoría de los alumnos realizó nuevos procedimientos para responder una pregunta, cuya respuesta ya había obtenido al llenar la tabla.


2) Determina el costo de 5500 discos y 14500 discos respectivamente.

f(5500) = 12(5500) + 104000 = 170000
f(14500) = 12(14500) + 104000 = 278000

3) Para hallar el costo de produccion de 5500 y 14500 Discos primero hallé el costo de cada disco luego encontré en costo fijo y elavore una exprecion algebraica y por ultimo desarrollé esa exprecion con "los" respectivos valores.

Figura 4. Descripción del procedimiento efectuado por el estudiante E18

Se evidencia en los estudiantes dificultades para conectar las representaciones en los registros tabular, analítico y del lenguaje materno, en sintonía con lo reportado por Sánchez-Matamoros et al. (2008), lo que según Hitt (2000) podría utilizarse como indicio de si se comprende o no la situación.

Cuestión 7. "Obtén una expresión matemática que permita calcular los costos de producción para cualquier cantidad de discos compactos".

El mismo grupo de estudiantes que pudo relacionar los elementos de la función modeló la situación funcional, recurriendo y sin recurrir a un registro auxiliar. De salida escribieron una expresión analítica y la utilizaron para obtener otras respuestas, como se muestra en la Fig. 4. El estudiante E_{18} presenta claras evidencias de haber encontrado una expresión algebraica y utilizarla para obtener algunas de las respuestas que se le solicitaron. Este resultado corrobora una vieja creencia popular según la cual es más fácil el trabajo con funciones partiendo del registro algebraico como registro principal. Además, hay una creencia generalizada entre los estudiantes que al solicitárseles una expresión matemática que modele la situación, se les está pidiendo que escriban una fórmula. De hecho, aquí un reducido grupo de estudiantes (4%) propuso como modelo una tabla. En general, no conciben como un modelo matemático otra representación que no sea la algebraica.

Cuestión 8. "Realiza una gráfica que represente esta situación".

En la conversión al registro gráfico también presentaron dificultades relacionadas específicamente con la congruencia entre los ejes y el sistema de unidades utilizado para demarcarlos. Colocaron en los ejes la secuencia de números en el orden en que los iban

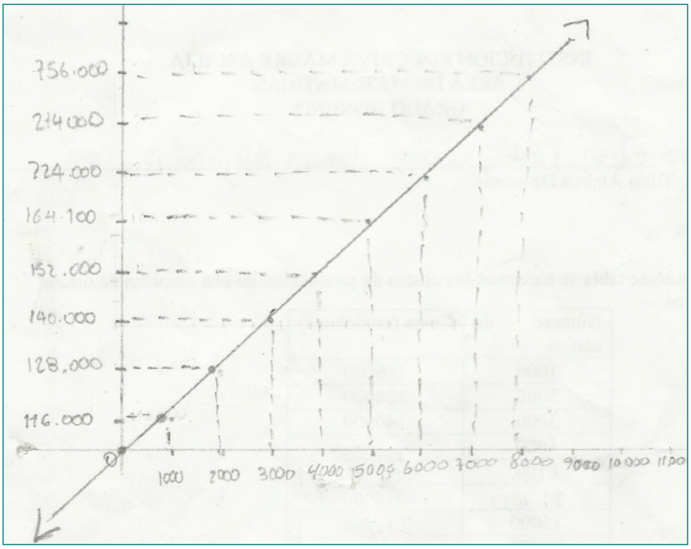


Figura 5. Gráfica realizada por el estudiante E5

encontrando al ir resolviendo el polinomio aritmético, sin tener en cuenta el orden y cardinal en la variable independiente. Algo similar fue reportado por Dolores (2004), quien encontró que los estudiantes asociaban el comportamiento de las imágenes en las gráficas con el comportamiento de sus abscisas, sin importarles el signo de sus ordenadas.

En el caso presente, los estudiantes sí tuvieron en cuenta el signo de las ordenadas, pero no la ubicación en los ejes. La dificultad estuvo asociada al funcionamiento del registro gráfico y a la coordinación con el tabular (Duval, 2004). En la Fig. 5 se puede ver que el estudiante E_5 asignó longitudes similares a los segmentos 0-116000 y 116000-128000; es decir, la secuencia que siguió en la marcación de los ejes no corresponde a una progresión aritmética como habría de esperarse. Además, en la resolución de este alumno se evidencia el uso de la función afín en lugar de la lineal. Los estudiantes tienen tendencia a hacer "pasar por el origen" a las representaciones gráficas de rectas.

Otro aspecto que cabe destacar es el relacionado con la continuidad de la gráfica. Aunque los valores del dominio son discretos, el estudiante E_5 los asumió como continuos, uniendo los puntos marcados hasta obtener una función continua como se muestra en la Fig. 5, quizás por esa "rara tendencia" que tienen los alumnos a unir todos los puntos de una función (Gatica, Tauber y Ruiz, 2002). Según estos autores, la graficación comprende acciones de interpretación y construcción. La interpretación se refiere a la habilidad de los estudiantes para leer y darle significado a una gráfica, mientras que la construcción se refiere a crear algo nuevo, elaborando una gráfica a partir de una regla funcional dada. En este caso, parece que ambas acciones se realizaron parcialmente: la interpretación porque no pudieron relacionar elementos de la función del registro tabular con sus equivalentes en el registro gráfico, confundiendo por ejemplo dominio con rango; la construcción porque no ubicaron los elementos que encontraron en el registro tabular en el lugar correspondiente en el registro gráfico. De esta manera las dos representaciones, tabular y gráfica, no resultaron congruentes. Además, para los estudiantes, la gráfica de la función depende de los puntos que se tomen para graficarla.

CONCLUSIONES

Los resultados de la investigación muestran que la transformación de registros de representación de una función es una actividad compleja para estudiantes de la media académica, a pesar de que en dos cursos previos habían trabajado con funciones. La misma no es espontánea y requiere una enseñanza intencionada que, en concordancia con Romiti, Sgreccia y Caligaris (2012), procure atender de manera equitativa a los diversos registros, tanto en actividades de tratamiento como de conversión.

Las dificultades de los estudiantes estuvieron relacionadas con la identificación del contenido de las representaciones, la utilización del concepto de ecuación para encontrar una incógnita, el funcionamiento de los registros y la coordinación o conversión entre dichos registros.

En cuanto a la identificación del contenido de una función en el registro tabular, como registro de partida, la mayoría de los estudiantes pudo identificar algunos elementos, pero no los suficientes para hacer transformaciones acordes a las cuestiones solicitadas. Por ejemplo, muchos se dieron cuenta que la secuencia para los costos iba de 12000 en 12000 cuando el número de discos cambiaba de 1000 en 1000. Sin embargo, esto no fue suficiente para determinar el patrón de crecimiento de la situación. Trabajaron la función lineal como si fuera una función afín y para encontrar los resultados solicitados realizaron una regla de tres simple directa. Este hecho les impidió llenar correctamente la tabla, dar respuestas acertadas a las cuestiones planteadas, y realizar correctamente la gráfica. No obstante, los estudiantes identificaron en la situación rasgos característicos genuinos del concepto de función, lo que es un gran avance en su desarrollo de pensamiento variacional y un indicio claro de que algo se ha comprendido del concepto. Pero dio la impresión que fue una comprensión parcial, que se evidenció solo en algunas de las cuestiones planteadas, como si de una pregunta a otra se hubiera cambiado la muestra de estudiantes.

Teniendo en cuenta lo anterior se plantea como una posibilidad de trabajo en el aula, para contribuir a mejorar estos desempeños estudiantiles, formular preguntas intermedias del tipo: *¿cómo está constituido el costo de producción de discos?, ¿hay costos fijos (independientes de la cantidad a producir) y costos variables (según la cantidad de discos que se produzcan)?, ¿podrías identificarlos: costo fijo:….; costo de 1000 discos:…, de 500 discos:…, de 100 discos:…, de 1 disco:…?*

En la utilización del concepto de ecuación para encontrar una incógnita, la dificultad estuvo en que la mayoría no pudo hallar una expresión algebraica que representara la situación, y los que la obtuvieron no establecieron la equivalencia entre esta y el valor numérico dado para los costos de producción, lo que los llevaría a la ecuación requerida. Teniendo en cuenta la dificultad al hacer conversiones entre los registros algebraico y coloquial -en ambos sentidos-, una posible guía para ello es: *sabemos que el costo fijo es 104000 dólares, que el costo por unidad es de 12 dólares y que se gastaron 314000 dólares en producción de discos:*

104000	+	*12*		*x*	=	*314000*
costo fijo		*costo de cada unidad*		*cantidad de discos producidos*		*lo que se gastó*

¿Puedes obtener la cantidad de discos producidos? Hazlo e indica otra/s forma/s posible/s de hallar dicha cantidad.

En el funcionamiento de los registros y la coordinación entre ellos fue posible apreciar que los estudiantes no reconocieron el registro tabular como apoyo válido para sustentar sus respuestas; necesitaron verificar sus respuestas en el registro algebraico analítico antes de darlas. Para fortalecer este aspecto (y sin ignorar el recurso de cálculos mentales) una propuesta es: *explicitar en la consigna "solo empleando la tabla"; solicitar "explicar con tus propias palabras qué información aporta la tabla"; ¿le agregarías o quitarías filas/columnas a la tabla?, ¿sí/no por qué?; ¿con qué prefieren trabajar las funciones: tablas, fórmulas, gráficos?, ¿por qué?*

En las transformaciones tipo conversión utilizaron como andamio el registro algebraico-analítico como paso previo hacia cualquier otro registro; incluso hasta en las transformaciones tipo tratamiento siempre acudieron al registro algebraico-analítico como paso obligado. Es decir, no se dieron tratamientos puros, siempre acudieron a este registro auxiliar para hacer modificaciones o verificar cualquier cuestión por la que se les indagara. Utilizando el registro tabular como registro principal hicieron las operaciones en el registro algebraico-analítico y volvieron a hacer otra conversión de regreso al tabular como registro principal, donde terminaron el tratamiento. Aquí surge la duda de si se violó el principio de autosuficiencia de los registros ante una transformación tipo tratamiento (Duval, 2004) o es que estos dos registros comparten algunas reglas.

Finalmente, coincidimos con D'Amore (2006) en que el uso de distintas representaciones y su progresiva articulación enriquecen el significado, conocimiento, comprensión del objeto así como su complejidad. Por ello robustecer el trabajo escolar en este sentido es una de nuestras tareas.

REFERENCIAS

Amaya, T. (2010). Errores de los estudiantes de octavo grado en el trabajo pre-algebraico. *Revista de la Escuela de Ciencias de la Educación, 6*(5), 225-244.

Amaya, T. y Barrera, J. (2009). Un estudio de la variación utilizando funciones en estudiantes de la media académica. En P. Lestón (Ed.). *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, 22* (pp.93-99). México DF: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Ander-Egg, E. (2003). *Métodos y Técnicas de Investigación Social IV. Técnicas para la recogida de datos e información.* Buenos Aires: Lumen.

Benítez, A. (2010). Estudio numérico de la gráfica para construir su expresión algebraica. El caso de los polinomios de grado 2 y 3. *Educación Matemática, 22*(1), 5-29.

Bravin, C. y Pievi, N. (2008). *Documento metodológico orientador para la investigación educativa*. Buenos Aires: Ministerio de Educación.

Brousseau, G. (1999). Los Obstáculos Epistemológicos y los Problemas en Matemáticas. Traducido por Hernández y Villalba del original: Brousseau, G. (1983). Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *4*(2), 165-198.

Caligaris, M., Schivo, M.E., Romiti, M.R. y Sgreccia, N. (2013). *Naturalmente difícil*. Ponencia presentada en la XXXVI Reunión de Educación Matemática. Rosario, septiembre.

Carrión, V. (2007). Análisis de errores de estudiantes y profesores en expresiones combinadas con números naturales. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, (11), 19-57.

Cordero, F. (1997). El entendimiento de algunas categorías del conocimiento del cálculo y análisis: el caso del comportamiento tendencial de las funciones. *Revista Latinoamericana de Investigación en Educación Matemática*, *1*(1), 56-74.

D'Amore, B. (2006). Objetos, significados, representaciones semióticas y sentido. *Revista Latinoamericana de Investigación en Educación Matemática, 9*(1), 177-195.

Del Castillo, A. (2003). *La articulación de los registros gráfico, analítico y de la lengua natural*. Recuperado el 9 de marzo de 2013, de http://www.semana.mat.uson.mx/Memorias/pupi.pdf.

Dolores, C. (2004). Acerca del análisis de funciones a través de sus gráficas: concepciones alternativas de estudiantes de bachillerato. *Revista Latinoamericana de Investigación en Educación Matemática, 7*(3), 195-218.

Duval, R. (1999). *Semiosis y pensamiento humano. Registros semióticos y aprendizajes intelectuales*. Cali: Universidad del Valle.

Duval, R. (2004). *Los problemas fundamentales en el aprendizaje de las matemáticas y las formas superiores del conocimiento*. Cali: Universidad del Valle.

Duval, R. (2012a). Preguntas y desafíos de la enseñanza de las matemáticas para todos: implicaciones para la investigación en didáctica. En U. Malaspina (Coord.). *Resúmenes del VI Coloquio Internacional de Didáctica de las Matemáticas: avances y desafíos actuales* (pp.3-6). Lima: Pontificia Universidad Católica del Perú.

Duval, R. (2012b). Lo esencial de los procesos cognitivos de comprensión en matemáticas: los registros de representación semiótica. En U. Malaspina (Coord.). *Resúmenes del VI Coloquio Internacional de Didáctica de las Matemáticas: avances y desafíos actuales* (pp.14-17). Lima: Pontificia Universidad Católica del Perú.

Gallardo, J., González, J. y Quintanilla, V. (2013). Tareas, textos y usos del conocimiento matemático: apuntes a la interpretación de la comprensión desde el cálculo aritmético elemental. *Revista Educación Matemática, 25*(2), 61- 88.

Gatica, N., Maz-Machado, A., May, G., Cosci, C., Echevarría, G. y Renaudo, J. (2010). Un acercamiento a la idea de continuidad de funciones en estudiantes de Ciencias Económicas. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, (22), 121-131.

Gatica, N., Tauber, L. y Ruiz, F. (2002). Registros de representación puestos en juego en el concepto de función: un estudio en estudiantes ingresantes a la carrera de ingeniería. En M. Penalva, G. Torregrosa y J. Valls (Eds.). *Aportaciones de la didáctica de la matemática a diferentes perfiles profesionales* (pp.417-430). Alicante: Universidad de Alicante.

Godino, J., Font, V. y Batanero, C. (2003). *Fundamentos de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas para maestros*. Granada: Universidad de Granada.

Hitt, F. (2000). Representations and mathematics visualization. En M.L. Fernández (Ed.). *Proceedings, PME-NA 22* (pp.131-147). Tucson: ERIC Publications.

Hitt, F. (2003a). Una Reflexión Sobre la Construcción de Conceptos Matemáticos en Ambientes con Tecnología. *Boletín de la Asociación Matemática Venezolana*, *10*(2), 213-223.

Hitt, F. (2003b). *Dificultades en el aprendizaje del cálculo. Décimo primer Encuentro de Profesores de Matemáticas del Nivel Medio Superior*. Morelia: Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo.

Kaput, J. (1987). Representation and mathematics. En C. Janvier (Ed.). *Problems of representation in mathematics learning and problem solving* (pp.19-26). Hillsdale: Erlbaum.

Kaput, J. (1989). Linking representations in the symbol systems of algebra. En C.Kieran & S. Wagner (Eds.). *A research agenda for the learning and teaching of algebra* (pp.167-194). Reston: NCTM.

León, O. y Corredor, D. (2003). *Argumentar y validar en matemáticas ¿una relación necesaria? Hacía una comprensión del desarrollo de competencias argumentativas en matemáticas*. Bogotá: Colciencias y Universidad de Valle.

Meel, D. (2003). Modelos y teorías de la comprensión matemática: Comparación de los modelos de Pirie y Kieren sobre el crecimiento de la comprensión matemática y la Teoría APOE. *Revista Latinoamericana de Investigación en Educación Matemática, 6*(3), 221-271.

Ministerio de Educación Nacional. (2005). *Potenciar el pensamiento matemático: un reto escolar. Estándares básicos de competencias en matemáticas*. Bogotá: Ministerio de Educación Nacional.

National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principios y Estándares para la Educación Matemática*. Traducción al español, Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales. Sevilla: Proyecto Sur.

Ochoviet, C. y Oktaç, A. (2011). Algunos aspectos del desarrollo del pensamiento algebraico: el concepto de raíz y de variable en ecuaciones polinómicas de segundo grado. Un estudio de casos realizado con estudiantes uruguayos de enseñanza secundaria. *Revista Educación Matemática, 23*(3), 91-121.

Romiti, M.R., Sgreccia, N. y Caligaris, M. (2012). *Propuesta de mejora en el aprendizaje del concepto de límite de una función real*. X Conferencia Argentina de Educación Matemática. Buenos Aires, septiembre.

Sánchez-Matamoros, G., García, M. y Llinares, S. (2008). La comprensión de la derivada como objeto de investigación en didáctica de la matemática. *Revista Latinoamericana de Investigación en Educación Matemática, 11*(2), 267-296.

Servan, P. y Servan, I. (2010). Intervención en la familia. Estudio de casos. En G. Serrano (Coord.). *Modelo de investigación cualitativa en educación social y animación sociocultural: animaciones prácticas* (pp.221-252). Madrid: Narcea.

Tall, D. (1985). Understanding the calculus. *Mathematics Teaching, 1*(10), 49-53.

UNESCO. (2005). *Hacia las sociedades del conocimiento. Informe mundial de la UNESCO*. Recuperado el 7 de enero de 2013, de http://unesdoc.unesco.org/images/0014/001419/141908s.pdf.

Épsilon - *Revista de Educación Matemática* *2014, Vol. 31(3), nº 88, 39-54*

Trayectorias de aprendizaje de la multiplicación y la división de cuatro a siete años

Mónica Ramírez García
monica.ramirez@edu.ucm.es
Universidad Complutense de Madrid
Carlos de Castro Hernández
carlos.decastro@uam.es
Universidad Autónoma de Madrid

Resumen: *Describimos una trayectoria de aprendizaje de la multiplicación y la división con niños de 4 a 7 años. Para ello, definimos las trayectorias de aprendizaje y valoramos la importancia de su consideración en los primeros años. Después, mostramos las trayectorias a través de una experiencia desarrollada en un colegio con niños de 4 a 7 años. Los niños desarrollan estrategias informales de modelización directa para resolver problemas de multiplicación y división de complejidad creciente, mostrando su evolución en el uso de representaciones, materiales manipulativos y en el proceso de simbolización.*
Palabras clave: *Educación infantil, división, multiplicación, resolución de problemas, trayectorias de aprendizaje.*

Learning trajectories for multiplication and division from four to seven years

Abstract: *We describe a learning trajectory for multiplication and division with children from four to seven years. To this end, we define learning trajectories and value the importance of reflecting on them in the early years. Then we show the trajectories through an experience developed in a school with children from four to seven years. Children develop informal direct modeling strategies to solve multiplication and division problems of increasing complexity, showing their evolution in the use of representations, manipulatives and in the process of symbolization.*
Keywords: *Early childhood, division, multiplication, problem solving, learning trajectories.*

1. INTRODUCCIÓN

Este artículo trata sobre el aprendizaje de la multiplicación y la división de un modo algo diferente al habitual, pues se centra en el aprendizaje informal de dichas operaciones que tiene lugar (o podría tenerlo) entre los 4 y los 7 años, antes de comenzar con el estudio formal de las mismas. Para comenzar, parece oportuno establecer un marco curricular de referencia que centramos, por brevedad, en la multiplicación. Con respecto a esta operación, en el currículo de educación primaria de la Ley Orgánica de Educación (LOE) (MEC, 2007) se proponía la "construcción de las tablas de multiplicar del 2, 5 y 10" (p. 31557) para el primer ciclo de primaria (primer y segundo cursos) y la "construcción y memorización de las tablas de multiplicar" (p. 31559) para el segundo ciclo (tercero y cuarto cursos de primaria). La reciente orden que establece el nuevo currículo de primaria para el ámbito de gestión del Ministerio de Educación, Cultura y Deporte incluye la "iniciación a la construcción de las tablas de multiplicar" (MEC, 2014, p. 34069) en primer curso. Precisando más el contenido de esta "iniciación", el borrador del currículo de la Comunidad de Madrid propone la memorización de las tablas de multiplicar del 0, 1, 2 y 5 en primer curso de educación primaria (Consejería de Educación, Cultura y Deporte de la Comunidad de Madrid, 2014). Resumiendo, la línea que marcan los actuales cambios legislativos es la de adelantar un año la memorización de algunas de las tablas de multiplicar. Esta opción puede resultar polémica, puesto que resulta antitética con otros planteamientos curriculares recientes de gran prestigio, como la propuesta de los *Focos Curriculares* (CCSSI, 2010), donde se recomienda para el cuarto grado de primaria que "los estudiantes usen su comprensión de la multiplicación para desarrollar una recuperación rápida [de la memoria] de las tablas de multiplicar" (p. 16).

Castro, Cañadas y Castro-Rodríguez (2013) indican que los niños son capaces de resolver situaciones aritméticas sencillas desde los 3 años, y que la resistencia a presentarles estas situaciones en esta edad, puede provocar que no consigan dotar de significado, más adelante, al algoritmo que aprenderán en primaria (p. 9). Así, los niños deberían tener la oportunidad de construir significados propios de las operaciones aritméticas sin necesidad de (previamente a su) instrucción formal. En línea con este planteamiento, en este artículo describimos una *trayectoria de aprendizaje* que los maestros y maestras de educación infantil y de primer curso de primaria podrán seguir con sus alumnos para que construyan significados de la multiplicación y la división previamente al aprendizaje formal de dichas operaciones en segundo y tercer cursos.

Trayectorias de aprendizaje en educación matemática

Una trayectoria de aprendizaje tiene tres componentes: un objetivo, una progresión a través de la cual los niños van evolucionando hasta lograr dicho objetivo, y una serie de actividades de enseñanza o tareas vinculadas a cada nivel de pensamiento que ayudan a los niños a desarrollar niveles superiores de pensamiento y a alcanzar el objetivo propuesto (Clements y Sarama, 2009). El objetivo, en una trayectoria de aprendizaje, es una de las *grandes ideas matemáticas*, que ocupan un lugar privilegiado en el aprendizaje de las matemáticas, y se describen en importantes documentos curriculares (NAEYC y NCTM, 2013; NCTM, 2003, OCDE, 2005). Por ejemplo, "una gran idea matemática es

que el conteo puede usarse para determinar cuántos hay en una colección" (Clements y Sarama, 2009, p. 3). Las progresiones evolutivas describen los pasos que los niños suelen seguir para lograr destreza y comprensión de un determinado tema matemático. Por ejemplo, para resolver problemas aritméticos verbales de estructura aditiva, los niños suelen pasar por estrategias de modelización directa, después de conteo y, finalmente, de uso de hechos numéricos básicos o derivados (Carpenter, Fennema, Franke, Levi y Empson, 1999). Se puede establecer una correspondencia entre estos tipos de estrategias y los niveles evolutivos en el aprendizaje de la adición establecidos por Fuson (1992). Clements y Sarama (2009) se refieren a estas progresiones como *caminos de aprendizaje*. Por último, ligadas estrechamente a los niveles de pensamiento, hay conjuntos de tareas que conformarían un *camino de enseñanza* establecido con el fin de facilitar la progresión de los niños a lo largo del correspondiente *camino de aprendizaje*.

El concepto de trayectoria de aprendizaje ha tenido un largo recorrido en la educación matemática desde su origen en 1995. Se puede profundizar en esta idea, su origen, y sus diferentes acepciones y usos en los trabajos de Gómez, González y Romero (2014) y de Gómez y Lupiáñez (2007).

En la posición conjunta sobre el aprendizaje de las matemáticas en los primeros años (NAEYC y NCTM, 2013, p. 7), entre las orientaciones que se dan para las propuestas para el aula está "asegurar que el currículo sea coherente y compatible con las relaciones y secuencias conocidas de las ideas matemáticas fundamentales". En este punto del documento se hace referencia explícita a la importancia de las trayectorias de aprendizaje como referencia para guiar la enseñanza.

Las trayectorias de aprendizaje y su fundamentación en la investigación

En este apartado queremos incidir en una idea que nos parece relevante: las trayectorias de aprendizaje deben estar sólidamente basadas en la investigación en sus tres componentes (objetivo, camino de aprendizaje y camino de enseñanza). Daro, Mosher y Corcoran (2011) proponen ejemplos de trayectorias de aprendizaje entre las cuales figura un marco para el aprendizaje de la multiplicación (p. 81). En este trabajo, por brevedad, tomamos, a modo de ejemplo, la división para ilustrar la conexión de las trayectorias con los resultados de investigación. Se puede constatar que la experiencia que relataremos en el apartado siguiente está basada en estas referencias teóricas.

Clements (2004) indica que el *particionamiento*, operación de descomponer un conjunto de objetos en varios conjuntos de igual tamaño, es una idea fácilmente comprensible para los niños, que surge en situaciones de reparto alrededor de los 3 años de edad. También a los tres años pueden dividir una colección en conjuntos iguales de un cardinal dado, si los subconjuntos son muy pequeños (división medida). Muchos niños de 4 o 5 años pueden trabajar con números mayores inventando una estrategia de correspondencia uno a uno para dividir la colección inicial en subconjuntos iguales. La idea es fundacional para todos los tipos de situaciones multiplicativas y de división medida (donde se conoce el número de objetos en cada grupo) y de división partitiva (donde se conoce el número de grupos). Pero las complejidades de encontrar soluciones exactas con números mayores, excepto mediante ensayo y error y a través de la reflexión sobre una serie de acciones repetidas, hacen que esta idea sea mejor captada en detalle en cursos superiores

(Clements, 2004, pp. 24-25). Precisando acerca del tamaño de las cantidades en los problemas, Clements (2004, p. 36) indica que a los 4 años los niños pueden utilizar estrategias informales para repartir hasta 10 objetos entre dos niños y que a los 5 años son capaces de repartir hasta 20 objetos en partes iguales entre 3, 4 o 5 personas, y de formar, con hasta 20 objetos, grupos iguales de 2 a 5 objetos, determinando el número total de grupos. Con 6 años, manejan cantidades superiores, de hasta 100, repartiéndolas entre hasta 10 personas y agrupándolas en grupos iguales de hasta 10 objetos.

Dentro de nuestra línea de trabajo sobre resolución de problemas aritméticos verbales en educación infantil, hemos observado en trabajos anteriores cómo los niños resuelven problemas de estructura multiplicativa, de multiplicación y división medida (De Castro, Molina, Gutiérrez, Martínez y Escorial, 2012), problemas de reparto igualatorio (López y De Castro, 2014), de comparación multiplicativa, de multiplicación y división (De Castro, Walsh, Del Coso, Salvador, González y Escorial, 2009) y de descomposición factorial (De Castro y Hernández, 2014). Todos estos trabajos se han realizado con niños de 5-6 años, en último curso de educación infantil. Recomendamos su lectura como complemento a este artículo, por versar sobre problemas de tipos diferentes a los del presente trabajo, que no se plantean habitualmente en educación infantil. En este artículo, nuestro objetivo es mostrar una panorámica más amplia en cuanto al rango de edad, sobre los problemas de estructura multiplicativa, abarcando desde los 4 a los 7 años, e incluyendo en primer curso de primaria problemas de multiplicación y división agrupamiento con grupos de diez, para vincular los problemas de estructura multiplicativa con el concepto de decena (Carpenter, Franke, Jacobs, Fennema y Empson, 1997; Ramírez y De Castro, 2014).

2. DESCRIPCIÓN DE LAS TRAYECTORIAS A LO LARGO DE TRES CURSOS: 4-5, 5-6 Y 6-7 AÑOS

En este apartado, describimos el desarrollo de varias sesiones de talleres de resolución de problemas, realizadas en el CEIP Virgen de Peña Sacra, de Manzanares el Real (Madrid), con niños pertenecientes a tres cursos diferentes, con edades comprendidas entre los cuatro y los siete años. La metodología que seguimos en estos talleres está descrita en trabajos anteriores (De Castro y otros, 2009; De Castro y otros, 2012). De un modo muy sucinto, planteamos problemas aritméticos basados en la lectura de un cuento (para favorecer la comprensión del enunciado), sin enseñanza previa, y dando una libertad absoluta en el uso de materiales para resolver los problemas razonando con la ayuda de objetos (cubos encajables, materiales manipulativos, dibujos, etc.). Al comentar el trabajo de los alumnos, nos hemos centrado en mostrar la evolución que se observa a lo largo de estos tres cursos, de las estrategias, uso de materiales y representaciones para los problemas de multiplicación y división.

Multiplicación en un aula de 4-5 años

En la resolución de problemas con niños de 4 y 5 años es importante que el tamaño de los números sea bajo, para adaptarnos a la capacidad de conteo de los pequeños

Figura 1. Lectura del cuento y momento de explicación de Óscar.

(Clements, 2004). La referencia que tomamos es que, hasta mitad de curso, no superemos los 6 objetos. En nuestra experimentación, uno de los primeros problemas está basado en la lectura del cuento "Chivos chivones" (González y Fernández, 2007). A lo largo del cuento, los tres chivos, y sus cuernos, aparecen y son mencionados continuamente. La lectura repetida del cuento (en varios días diferentes) permite a los niños imaginar la situación descrita en el enunciado del problema. Así, a partir del cuento, planteamos a los niños el siguiente problema: Si había tres chivos, y cada uno tiene dos cuernos. ¿Cuántos cuernos tienen en total entre los tres? Al trabajar con cantidades tan bajas, que pueden representarse con los dedos, algunos niños resuelven ya el problema en el momento de la lectura y el planteamiento del problema, todavía en la "asamblea" (Figura 1a). Algunos niños resuelven el problema mediante un dibujo. Guillermo representa los cuernos de los chivos utilizando tres colores diferentes para diferenciar qué cuernos corresponden a cada chivo (Figura 1c). En la Figura 1b, vemos cómo la maestra sujeta la hoja de trabajo a Guillermo y le va preguntando sobre el significado de sus representaciones. Con este apoyo, Guillermo va explicando cómo ha resuelto el problema.

Algunos niños dan el resultado, pero la maestra está interesada en que todos comprendan la situación, y que los que creen que han resuelto el problema, lo comprueben en el trabajo individual, y le expliquen cómo lo han hecho. Se produce la siguiente conversación:

- Bea: A ver, ¿alguien se acuerda de cómo era el problema?
- Óscar: Éstos [Pone con los dedos seis, que es el resultado].
- Bea: Sí. Esa es la solución que tú crees. Seis, ¿no? Pero, ¿cuál era el problema?
- Mario: Seis. El problema es seis [De nuevo, se refiere al resultado].
- Guillermo: Dos cuernos en cada chivo.
- Bea: En cada chivo y, ¿cuántos chivos hay?
- Nerea: Seis.
- Guillermo: Tres [Corrige a Nerea y lo indica poniendo tres con los dedos].
- Bea: Tres, con dos cuernos en cada chivo, ¿cuántos cuernos hay en total entre los tres?
- Nerea: Seis [Pone seis con los dedos].
- Guillermo: Seis.
- Bea: Ahora me decís por qué pensáis que son seis [Con "ahora", la maestra se refiere al momento en que, durante el trabajo individual, pase preguntando a cada niño cómo lo ha hecho].

Óscar resuelve el problema con el rekenrek. Este es un ábaco holandés, inventado en 1991 por Adrian Treffers, del Instituto Freudenthal, que se utiliza como modelo visual para la iniciación al cálculo. Óscar utiliza las cuentas de la varilla superior para representar los cuernos, y las cuentas de la varilla inferior para los chivos. En las dos primeras imágenes de la Figura 2, vemos que levanta dos dedos (cuernos) en su mano derecha y el pulgar de su mano izquierda (chivo). Interpretamos estos gestos con los dedos como una "segunda" representación, que refuerza la representación con el ábaco, y que Óscar hace para comprobar su procedimiento. Después, va añadiendo dos cuentas en la varilla de arriba por cada una en la varilla de abajo. Finalmente, cuando Beatriz (la maestra) pasa a su lado, Óscar separar las cuentas de la varilla inferior, que representan a los tres chivos, para enfatizar y explicar a la maestra la correspondencia dos a uno entre cuernos y chivos (Figura 2d).

División en un aula de 4-5 años

Basándonos en la lectura del cuento "¿A qué sabe la luna?" (Grejniec, 2004), planteamos el siguiente problema en el aula de 4-5 años: Si el ratón reparte seis trocitos de luna entre el zorro y la cebra, ¿cuántos trozos le puede dar a cada uno? En este problema damos por válida cualquier descomposición del seis, aunque observaremos ya la tendencia a los repartos equitativos. Enseguida empezamos a oír: "Ocho", "Siete". Beatriz repite el enunciado y de nuevo los niños dan estimaciones o intentan "adivinar el resultado": "Siete, "Dos", "Ocho", "No, no. Seis".

En la Figura 3, vemos el proceso de resolución de Nerea y de Diego. Los dos alumnos, y todos los que resolvieron este problema lo hicieron con cubos encajables, utilizando una estrategia de modelización directa: el "reparto" por unidades. Comienza por la representación del zorro y la cebra con los cubos negro y morado de la Figura 3b (Nerea), y el verde y naranja en la Figura 3d (Diego). A partir de ahí, se representan los trozos de luna con 6 cubos encajables y se van repartiendo uno a uno colocándose alternativamente junto a los cubos que representan al zorro y la cebra. Finalmente, se cuentan los cubos (trozos de luna) que hay junto a cada animal. En la Figura 3d, observamos cómo Diego mantiene ligeramente separados los cubos iniciales, que representan a los animales, de los cubos restantes, que representan trozos de luna, a fin de no confundirlos en el recuento final.

Multiplicación en un aula de 5-6 años

En el aula de 5-6 años, se plantea el problema de multiplicación: "¿Cuántos sándwiches de miel tiene que preparar mamá oso si hay seis osos y cada uno quiere dos sándwiches?". Al igual que ocurre en el caso de la división, los niños utilizan la misma estrategia básica que en 4-5 años, pero con números mayores, mayor variedad de materiales, y con presencia de representaciones simbólicas. Un aspecto que destacamos es que, en ausencia de instrucción sobre el proceso de resolución, algunas representaciones tienen un marcado acento personal, que dificulta que las personas que las ven puedan interpretarlas de forma sencilla. Así, en la Figura 4a, Joshua representa los 12 sándwiches

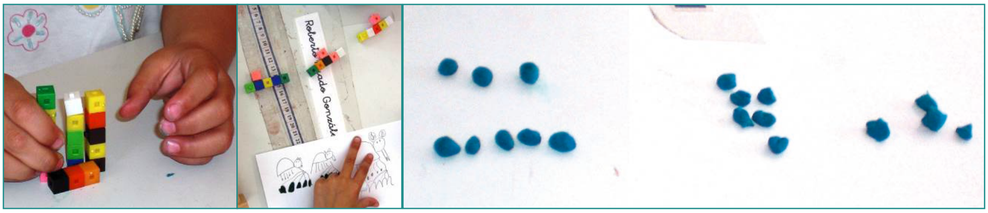


Figura 6. Evolución de las estrategias infantiles en problemas de división-reparto en 5-6 años (I).

y los 6 osos con tres filas de 6 cubos, donde la primera fila representa los osos y las restantes los sándwiches. Por el contrario, en el dibujo de Noelia (Figura 4b), se diferencian perfectamente las representaciones de ambas cantidades, y se aprecia el paso a la representación simbólica, con numerales escritos, de las cantidades.

Eloy utiliza cuentas con las que va formando un collar de 18 cuentas (Figura 5). Las 12 de la izquierda representan los sándwiches, y las 6 de la derecha representan los osos. En la Figura 5b, se observa la separación entre unas cuentas y otras. En la Figura 5a, Eloy va señalando, por cada cuenta de la derecha (un oso), dos cuentas a la izquierda (sándwiches). En la imagen se ve cómo señala la cuarta cuenta por la derecha con el índice, mientras que abarca las cuentas 7 y 8 con dos dedos. Al igual que en la estrategia de Joshua, observando el collar no resulta fácil imaginar, antes de la explicación de Joshua, cómo se ha utilizado esta representación para resolver el problema.

División en un aula de 5-6 años

En el aula de 5-6 años, planteamos el problema: “Si hay 15 montones de hierba, y 3 chivos, ¿Cuántos montones de hierba se come cada chivo?”. Si en 4-5 años repartíamos 6 objetos entre 2, en este caso, el tamaño de dividendo y divisor van aumentando. De nuevo, el enunciado puede interpretarse como problema de división (reparto equitativo) o como problema de descomposición aditiva en tres sumandos. En la Figura 6a, observamos la misma estrategia que vimos en 4-5 años. Los niños tienen, durante dos cursos, varias ocasiones de adquirir el esquema básico de reparto de objetos, representando ambas cantidades que aparecen en el enunciado. No obstante, más allá de esta estrategia básica, comenzamos a ver variaciones interesantes, que dan cuenta del desarrollo infantil en estas edades. Por ejemplo, Lía (Figura 6b), tras aplicar la estrategia de modelización directa de reparto, representa el reparto con un dibujo, cosa que no suele ocurrir con 4 años. Empiezan a surgir soluciones en las que solo se representa una de las dos cantidades del enunciado, el dividendo o cantidad a repartir, formando una barra con 15 cubos y fraccionándola después en 3 barras iguales de 5 cubos. También surgen repartos no equitativos. Shakira representa los tres chivos en la esquina superior izquierda (Figura 6c), y luego da a los chivos mediano, grande y pequeño, cinco, seis y cuatro montones de hierba respectivamente.

A pesar de que la estrategia básica sigue siendo el reparto de objetos, otros materiales comienzan a usarse. Hugo no es capaz de realizar el reparto con la banda numérica (Figura 7a), pero al escuchar a Lía que da la solución de 5, lo comprueba contando 5

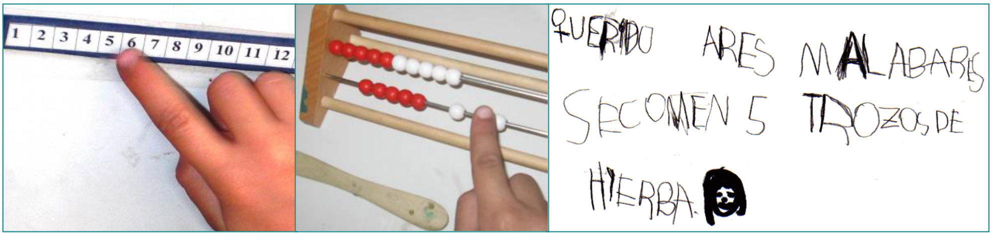


Figura 7. Evolución de las estrategias infantiles en problemas de división-reparto en 5-6 años (II).

Figura 8. Agrupamiento según el número de grupos.

casillas, tres veces, hasta llegar a 15. En la Figura 7b, Roberto, tras resolver el problema con los cubos encajables, representa la solución (los tres grupos de 5) en el rekenrek. Más que un proceso de resolución, se trata de una traducción entre sistemas diferentes de representación para escribir el resultado. En la Figura 7c, aparece una carta de un alumno al final del taller a Ares (maestro en prácticas y malabarista, llamado por los pequeños "Ares malabares"). Esta carta muestra cómo el conocimiento de la lectoescritura propio del último curso de educación infantil se une a la capacidad de articular el propio pensamiento, para producir este mensaje escrito.

Multiplicación en primer curso de primaria (6-7 años)

Ya dentro de la educación primaria, basándonos en el cuento "El gato tragón" (Núñez y Dumas, 2005), el problema planteado es: El gato tragón se comió 7 niñas. Si cada niña tiene 2 brazos, ¿Cuántos brazos se comió el gato? La estrategia básica en este problema es de modelización directa (estrategia de *agrupamiento*). En el enunciado se habla de 7 grupos (cada niña cuenta como un "grupo" de dos brazos) con 2 elementos en cada grupo (los brazos). Los niños forman 7 grupos con 2 objetos en cada una y luego cuentan de uno en uno los objetos. Esta estrategia ya la hemos visto desde educación infantil (Figura 4), pero en la Figura 8 podemos observar variaciones de interés que muestran la evolución. Por ejemplo, separar claramente las representaciones de las dos cantidades (de niñas y de brazos) para facilitar el conteo del resultado (Figura 8a) o la escritura de números de dos cifras con la aparición del valor posicional. En la Figura 8b, vemos que el alumno escribe primero 41, que aparece tachado dos veces, para al final escribir el resultado correcto de 14.

Figura 9. Agrupamiento según el número de grupos con dedos.

Figura 10. Agrupamiento según el número de grupos con Tabla 100.

Hay niños que utilizan los dedos para ir construyendo los grupos, añadiendo el número de elementos por grupo cada vez que se considera un grupo. En la Figura 9, un niño va añadiendo 2 dedos cada vez que cuenta una niña hasta completar las siete niñas. Podemos ver, de izquierda a derecha, cómo el alumno pone el dos de los brazos de la primera niña, después va añadiendo dos por cada niña, con lo que tendrá cuatro dedos, acción que no se ve en la secuencia de la Figura 9, y así sucesivamente, seis (otros dos brazos de otra niña), ocho, diez y, ya en la imagen, el doce (para lo cual tiene que quitar los cinco dedos de la mano izquierda), y el catorce, resultado final.

También vemos esta estrategia en la tabla 100. Por cada niña, se van tapando con dos dedos dos numerales que representan los dos brazos de la niña. Tras repetir esta operación siete veces, el último numeral tapado (14) indica la solución del problema. En la Figura 10 observamos los tres primeros pasos de esta estrategia. El uso de la tabla 100 es un instrumento que facilita la transición de estrategias de modelización directa a estrategias de conteo basadas en la secuencia de numerales.

Las representaciones gráficas infantiles van evolucionando, incluyendo una mezcla de representaciones icónicas y simbólicas (con numerales) para el proceso de resolución. En la Figura 11a, Sergio representa las niñas con numerales y los brazos con puntos y resuelve el problema contando los puntos. En la derecha, mostramos el trabajo de otro niño donde la representación de las niñas posee un grado mayor de iconicidad. Los brazos aparecen numerados, de modo que el último numeral (14) indica el resultado (Figura 11b).

Otra variedad de esta estrategia consiste en representar con un objeto cada grupo y contar cada objeto el número de veces que indica el número de elementos por grupo. En este problema, algunos niños representaron con 7 objetos el número de grupos (las

Figura 11. Estrategia de agrupamiento, gráfica, con símbolos escritos.

Figura 12. Reparto de objetos de uno en uno contando inicialmente la cantidad total.

niñas) y contaron cada uno de ellos dos veces (una por cada brazo) para alcanzar el resultado final.

Algunos alumnos han resuelto este problema mediante modelización directa haciendo 2 grupos de 7. En este problema hay 7 grupos (las niñas) con 2 elementos en cada grupo (los brazos), pero varios niños han representado un grupo de 7 por uno de los brazos de las 7 niñas y otro grupo de 7 por el otro brazo. Esta estrategia la hemos visto aplicada con el rekenrek, poniendo 7 cuentas en cada varilla, y en la tabla 100, saltando de la casilla del 7 a la del 14.

Un problema de división en primer curso de educación primaria

En primer curso de primaria se plantea un problema de estructura multiplicativa, de grupos iguales, de división partitiva. Basado en el cuento "Un regalo diferente", el enunciado es: Marcel y Tristán se comieron 18 buñuelos de crema. ¿Cuántos se comió cada uno? Todos los niños intentaron repartir de forma equitativa los buñuelos, aún sin que el enunciado lo indicase. La estrategia básica es la de *reparto*, de modelización directa (Figura 12).

Esta estrategia se aplica con diferentes variaciones. Algunos niños cuentan primero los objetos a repartir, pero otros reparten sin contar inicialmente esta cantidad, y van comprobando, a cada paso del reparto, el total de lo repartido hasta alcanzar el total a repartir. Otra variación es el reparto en grupos, por ejemplo, de dos en dos o de tres en tres y, posteriormente, ajustando el reparto con los objetos sobrantes. Al ser un problema en el que se divide en dos grupos, muchos niños elaboraban una barra con 18 cubos,

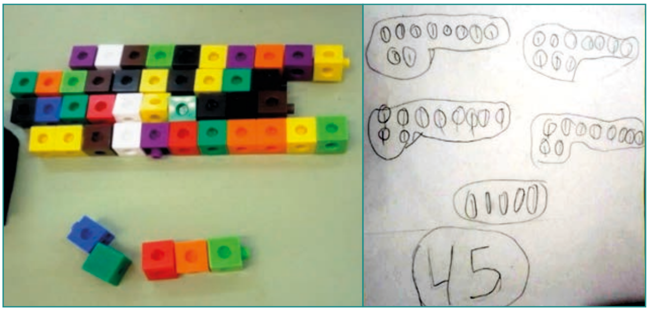


Figura 13. Representación de la estrategia de agrupamiento y juntar todos.

Figura 14. Agrupamiento y juntar todos con bloques de base 10.

estimaban el punto medio para partirla en dos partes aproximadamente iguales, y luego comprobaban que en las dos partes resultantes hubiese el mismo número de cubos, comparando la longitud de las barras.

Un problema de multiplicación con grupos de diez en educación primaria

En primer curso de primaria planteamos problemas aritméticos de operaciones combinadas (multiplicación y suma) en los que nos dan el número de decenas y de unidades sueltas y debemos calcular el número total de unidades. Un problema de este tipo es: Si tenemos 4 decenas de huevos y 5 huevos más, ¿cuántos huevos tenemos en total? La estrategia básica para abordar este tipo de problemas consiste en formar con objetos tantos grupos de diez y unidades sueltas como se indica en el enunciado y después contar uno por uno los objetos. En la Figura 13, vemos la representación manipulativa y gráfica correspondiente a dicha estrategia. En un nivel más avanzado, los niños cuentan de diez en diez los grupos de diez, y luego de uno en uno las unidades sueltas: "10, 20, 30, 40, 41, 42, 43, 44, 45".

Una variante de esta estrategia consiste en representar las cantidades con bloques de base 10. En la Figura 14a un niño ha representado 45 con 4 barras y 5 unidades. Igual que en el caso anterior, inicialmente los niños necesitan contar de uno en uno todas las unidades que componen las decenas como está haciendo el niño de la Figura 14b para saber la cantidad total. Más tarde, los niños cuentan de 10 en 10 las barras y de uno en uno las unidades. Con la ayuda de la tabla 100, los niños cuentan de 10 en 10 (Figura 14c) el

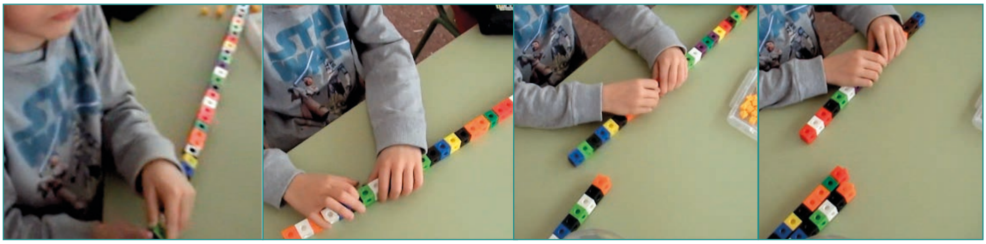


Figura 15. Medida contando primero el total de elementos con objetos.

Figura 16. Estrategia de *medida* con cajas de huevos de 10.

número de grupos que se indica en el problema, para después avanzar por unidades. Finalmente, las estrategias van evolucionando hasta mostrar un conocimiento del valor posicional y del concepto de decena. Cuatro grupos de 10, y 5 unidades sueltas son 45. Esta es la estrategia óptima esperada en este tipo de problemas que, como vemos, no se aplica desde el principio, sino que es el resultado de una larga evolución.

Un problema de división con grupos de diez en Educación Primaria

Para terminar, planteamos problemas de división agrupamiento, con grupos de diez, y con resto. Uno de estos problemas es: Si tenemos 37 huevos, ¿cuántas cajas de 10 huevos podemos llenar y cuántos huevos sobran? La estrategia básica se llama estrategia de medida. Es una estrategia de modelización directa que consiste en tomar 37 objetos, formar grupos de diez, contarlos, y contar después los objetos que quedan sin agrupar. En la Figura 15 seguimos todo el proceso.

Dentro del material de aula que ofrecemos a los alumnos suelen estar las cajas de huevos de diez. Los niños utilizan espontáneamente las cajas para resolver el problema introduciendo un cubo en cada huevo. Esto facilita la formación, el conteo de los grupos, y la visualización del concepto de decena (Figura 16). La misma estrategia se puede llevar a cabo con bloques de base 10, de modo que la solución del problema estará dada por el número de barras (grupos de 10, decenas) y cubos (unidades). Dado que el uso de materiales no está dirigido por los profesores, también se ven soluciones “mixtas”, con uso simultáneo de cajas de huevos y bloques de base 10 (Figura 16c).

Otras estrategias para este tipo de problemas se apoyan en la tabla 100, donde se busca el número objetivo (37) y las filas completas representan decenas y las casillas

individuales cuentan como unidades sobrantes. Finalmente, como estrategias más avanzadas, hay niños que utilizan el conteo a saltos de diez en diez y el conteo por unidades, sin ayuda de objetos. Para llegar a 37 huevos, cuentan 10, 20, 30, que son 3 cajas, y después 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, que son 7 huevos sueltos, llevando la cuenta de decenas y unidades sueltas con los dedos. La estrategia óptima, igual que en el apartado anterior, consiste en la aplicación directa del conocimiento del valor posicional, para determinar que 37 unidades son 3 decenas y 7 unidades sin agrupar.

REFLEXIONES FINALES

En los talleres realizados se ha observado que, desde los 4 a los 7 años, la mayoría de los niños resuelven problemas de multiplicación y división utilizando estrategias informales de modelización directa, inventadas por ellos mismos, sin tener ningún conocimiento formal sobre dichas operaciones aritméticas. A través de la resolución de problemas hemos conseguido que los niños razonen y modelicen, y articulen sus ideas para comunicarlas al resto de la clase, pudiendo establecer así relaciones entre los conocimientos que tienen con los de los compañeros.

Los niños siguen, a lo largo de la trayectoria que hemos descrito para el aprendizaje de la multiplicación y la división, un *camino de aprendizaje* jalonado por estrategias de modelización directa, estrategias de conteo y uso del valor posicional (en los problemas con grupos de diez). A través de problemas, en los que se utilizan recursos (como el rekenrek, la tabla 100, las cajas de huevos de 10, o los bloques de base 10), se cuida el tamaño de los números, y se introducen elementos especiales (como los grupos de 10 en los problemas de estructura multiplicativa), se va conformando el *camino de enseñanza* que promueve la evolución de los niños a través del correspondiente camino de aprendizaje. El objetivo final es proporcionar la base informal de conocimiento adecuada para el aprendizaje de la multiplicación y la división, y la comprensión del concepto de decena (Ramírez y De Castro, 2014).

Volviendo a la introducción del artículo, en nuestra línea metodológica, pensamos que es preferible adelantar en el currículo experiencias que ayuden a desarrollar los conocimientos informales, más que anticipar conocimientos formales. Así, más que adelantar la memorización de las tablas de multiplicar a primero de educación primaria, abogamos por introducir situaciones en las de los niños puedan construir significados para la multiplicación y la división, desde los 4 años, para favorecer su posterior comprensión, como las que hemos mostrado en este artículo.

Dentro de los principios del NCTM (2003), el principio de enseñanza señala que "Una enseñanza eficaz requiere conocer lo que los alumnos saben y lo que necesitan aprender, y luego estimularlos y ayudarlos para que lo aprendan bien" (NCTM, 2003, p. 17). Este "conocer lo que los alumnos saben" como punto de partida, evocador de la idea de aprendizaje significativo, puede interpretarse de formas diversas. Cuando un maestro está en tercer curso de educación primaria, iniciando a los alumnos en la multiplicación, puede plantearse cuáles son los conocimientos previos sobre los cuales construir el aprendizaje formal de la división. Sin embargo, a nuestro parecer, el ideal sería que desde los 4 años, e incluso antes, todavía en la educación infantil, los maestros puedan ayudar a los niños a recorrer las trayectorias de aprendizaje de la multiplicación y la división que

hemos descrito en este trabajo. En este sentido, pensamos que la idea de *trayectoria de aprendizaje*, que hemos tratado de ejemplificar en este artículo, supone una de las aportaciones fundamentales de la didáctica de la matemática en los últimos 20 años, pues permite enfocar el trabajo del aula hacia las ideas matemáticas nucleares, abordándolas de un modo informal, tiempo antes de tener que afrontar su aprendizaje formal, favoreciendo así su aprendizaje significativo.

REFERENCIAS

Arriba, M. y Osuna, R. (2005). *Un regalo diferente*. Pontevedra: Kalandraka.

Carpenter, T. P., Fennema, E., Franke, M. L., Levi, L. y Empson, S. B. (1999). *Children's mathematics: Cognitively guided instruction*. Portsmouth: Heinemann.

Carpenter, T. P., Franke, M. L., Jacobs, V., Fennema, E. y Empson, S. B. (1997). A Longitudinal Study of Intervention and Understanding in Children's Multidigit Addition and Subtraction. *Journal for Research in Mathematics Education, 29*, 3-30.

Castro, E., Cañadas, M. C. Y Castro-Rodríguez, E. (2013). Pensamiento numérico en edades tempranas. *Edma 0-6: Educación Matemática en el Infancia, 2*(2), 1-11.

CCSSI (2010). *Common Core State Standards for Mathematics*. Washington, DC: Common Core State Standards Initiative. Recuperado el 15/11/2014 de: http://www.corestandards.org/assets/CCSSI_Math%20Standards.pdf

Clements, D. H. (2004). Major themes and recommendations. In D. H. Clements, J. Sarama, & A. M. DiBiase (eds.), *Engaging young children in mathematics: Standards for early childhood mathematics education* (pp. 7-72). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Clements, D. H. y Sarama, J. (2004). Learning trajectories in mathematics education. *Mathematical Thinking and Learning, 6*(2), 81-89.

Consejería de Educación, Juventud y Deporte de la Comunidad de Madrid (2014). Borrador del Currículo de Educación Primaria. Recuperado de: http://www.feccoo-madrid.org/comunes/recursos/15708/1823565Borrador_de_Curriculum_de_Educacion_Primaria.pdf

Daro, P., Mosher, F., & Corcoran, T. (2011). *Learning trajectories in mathematics: A foundation for standards, curriculum, assessment, and instruction*. CPRE Research Report #RR-68. Philadelphia: Consortium for Policy Research in Education. DOI: 10.12698/cpre.2011.rr68

De Castro C. y Hernández, E. (2014). Problemas verbales de descomposición multiplicativa de cantidades en educación infantil. *PNA, 8*(3), 99-114.

De Castro, C., Molina, E., Gutiérrez, M. L., Martínez, S., Escorial, B. (2012). Resolución de problemas para el desarrollo de la competencia matemática en Educación Infantil. *Números. Revista de Didáctica de las Matemáticas, 80*, 53-70.

De Castro, C., Walsh, J., Del Coso, E., Salvador, C., González, V. y Escorial, B. (2009). "Dos de todo": El cuento chino de los problemas de comparación multiplicativa en la Educación Infantil. *Epsilon: Revista de la Sociedad Andaluza de Educación Matemática "Thales" 73*(3), 33-42.

Fuson, K. C. (1992). Research on whole number addition and subtraction. En D. C. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 243-275). Nueva York, NY: Macmillan.

Gómez, P. y Lupiáñez, J. L. (2007). Trayectorias hipotéticas de aprendizaje en la formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria. *PNA, 1*(2), 79-98.

Gómez, P., González, M.J. y Romero, I. (2014). Caminos de aprendizaje en la formación de profesores de matemáticas: objetivos, tareas y evaluación. Profesorado. Revista de Currículum y Formación de Profesorado, 18(3), 319-338. Disponible en: http://www.ugr.es/local/recfpro/rev183COL7.pdf

González, O. y Fernández, F. (2007). *Chivos chivones*. Pontevedra: Kalandraka.

Grejniec, M. (2004). *¿A qué sabe la luna?* Pontevedra: Kalandraka.

López, M.E. y De Castro, C. (2014). Iniciación a los problemas de reparto igualatorio en educación infantil. *Épsilon, 31*(2), nº 87, 83-98.

Ministerio de Educación y Ciencia (2007, 20 de julio). ORDEN ECI/2211/2007, de 12 de julio, por la que se establece el currículo y se regula la ordenación de la Educación primaria. *BOE, 173*, pp. 31487-31566.

Ministerio de Educación, Cultura y Deporte (2014, 1 de marzo). Real Decreto 126/2014, de 28 de febrero, por la que se establece el currículo de Educación primaria. *BOE, 52*, pp. 19349-19420.

Ministerio de Educación, Cultura y Deporte (2014, 1 de mayo). Orden ECD/686/2014, de 23 de abril, por la que se establece el currículo de la Educación Primaria para el ámbito de gestión del Ministerio de Educación, Cultura y deporte y se regula su implantación, así como la evaluación y determinados aspectos organizativos de la etapa. *BOE, 106*, pp. 33827-34369.

NAEYC y NCTM (2013). Matemáticas en la Educación Infantil: Facilitando un buen inicio. Declaración conjunta de posición. *Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia, 2*(1), 1-23.

NCTM (2003). *Principios y Estándares para la Educación Matemática*. Sevilla: Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales.

Núñez, M. y Dumas, O. (2005). *El gato tragón*. Pontevedra: Kalandraka.

OCDE (2005). *Informe PISA 2003: Aprender para el mundo del mañana*. Madrid: Santillana.

Ramírez, M. y De Castro, C. (2014). Descubrimiento del valor posicional a través de la resolución de problemas. *Revista de Didácticas Específicas, 11,* 40-66.

Ramos, M. (2004). *¡Mamá!* Barcelona: Corimbo.

Épsilon - *Revista de Educación Matemática* *2014, Vol. 31(3), nº 88, 55-66*

Utilizando gráficas y tablas para comparar distintos procesos de elección

Alberto Arnal-Bailera
Universidad de Zaragoza

RESUMEN: *Analizamos un problema aparentemente sencillo: un grupo de vecinos deciden entre una de tres opciones posibles para pintar la escalera. Se propone un proceso en el que introduce dos preguntas para efectuar la decisión. Realizamos un análisis matemático de la equidad de este proceso y las diferencias con el proceso de una sola pregunta.*
PALABRAS CLAVE: *Toma de decisiones, matemáticas electorales, representaciones gráficas.*

Using graphics and tables to compare different processes of choice

ABSTRACT : *We analyze a seemingly simple problem: the process for a group of neighbors for deciding between one of three options to paint the stairs. However, the president of the community proposes a process that introduces two questions rather than one to make the decision. We perform a mathematical analysis of the equity of this process and the differences with one question process.*
KEYWORDS: *decision making, electoral mathematics, graphic representations.*

INTRODUCCIÓN

Se admite comunmente que la educación matemática tiene tres finalidades principales: Formativa (contribuyendo al desarrollo de capacidades generales y de razonamiento lógico de los estudiantes), funcional (por ejemplo contribuyendo a responder a situaciones de la vida diaria como consumidor o futuro elector) e instrumental (contribuyendo al desarrollo y a la formalización de las ciencias experimentales, tecnológicas y sociales).

La Orden de 9 de mayo de 2007, del Departamento de Educación, Cultura y Deporte del Gobierno de Aragón, por la que se prueba el currículo de la Educación secundaria obligatoria, resume la persecución de estas finalidades en la intención de desarrollar la competencia matemática, esto es promover el uso la argumentación y el lenguaje preciso y riguroso propio de las matemáticas así como las herramientas propias de esta ciencia, como las representaciones gráficas, para resolver problemas cotidianos que tengan de que ver con su vida personal o social y también con otros ámbitos del conocimiento.

Entre los procesos de toma de decisión más estudiados están los referidos a procesos electorales (Álvarez y Alonso, 2010; Álvaro, 2001; Girón y Bernardo, 2007; Hernández, 2001). Apenas hemos encontrado sobre las distintas posibilidades que se plantean en elecciones directas entre varias opciones, a pesar de que también se presentan en el contexto electoral español en la elección de senadores. Fernández y Fernández (1999) analizan un texto histórico que describe un proceso de elección entre varios candidatos a un mismo puesto. La razón podría estar en la simplicidad con la que habitualmente se desarrolla un proceso de elección entre varias opciones. Por ejemplo en Suiza durante los últimos 170 años se han realizado numerosas consultas a la población sobre reformas de leyes y la disyuntiva que se plantea es "sí" o "no". Si la estructura de la consulta es una pregunta con varias respuestas, se puede actuar de varios modos, entre ellos: la opción más votada es la elegida (elección de senadores en España, listas abiertas…) o bien asignar un determinado valor a la opción preferida y valores inferiores a la segunda y sucesivas, al modo de los concursos televisivos de Eurovisión por ejemplo o el descrito en Fernández y Fernández (1999).

Nos ocupamos aquí del análisis comparativo de los procesos para tomar una decisión en una comunidad de vecinos en la que quieren pintar la escalera debiendo los vecinos elegir entre tres colores posibles. Hay dos propuestas sobre cómo desarrollar el proceso de toma de la decisión, una votación con tres opciones, eligiéndose la más votada, y una votación más compleja con dos preguntas, en la primera de las cuales se vota sí o no a un determinado color y en la segunda solo votan los que no querían el primero, eligiendo entre los otros dos. A primera vista ya vemos que la falta de simetría del proceso afectará de algún modo a su ecuanimidad. Propondremos distintas representaciones gráficas y tablas que contribuirán a poner de relieve las diferencias entre las dos propuestas y cómo en muchas ocasiones la decisión está muy influenciada por el propio proceso.

PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Consideramos un problema típico en una comunidad de vecinos: Hace ya varios años que se pintó la escalera por última vez y parece razonable volver a pintarla. Los colores entre los que tienen que elegir son el amarillo, el verde y el naranja. Se proponen dos procesos para tomar la decisión sobre el color:

- Primera: Un vecino propone que se hagan papeletas con tres opciones, pintar de amarillo, de verde y de naranja. Cada vecino marca qué color prefiere se meten en una caja y se cuentan las papeletas favorables a cada opción.
- Segunda: El presidente de la comunidad de propietarios alega que el naranja es muy distinto de los otros dos colores al ser un color cálido y los otros dos fríos. Por ello propone un proceso distinto mediante dos preguntas:

- 1ª pregunta: ¿Quiere Vd. que se pinte la escalera de naranja?
- 2ª Responda solo en caso de que haya respondido de modo negativo a la primera pregunta, ¿Prefiere que se pinte de amarillo o de verde?

Vamos ahora a realizar un análisis exhaustivo de las posibles distribuciones de las opiniones de los vecinos y cómo se traducen en una decisión u otra en función del proceso empleado.

Consideramos primero una pequeña comunidad de vecinos de 19 vecinos (caso discreto) y veremos después si las conclusiones extraídas son extrapolables cuando el proceso se planteara a un número grande de personas, para este caso trabajaremos con los porcentajes de vecinos (caso continuo).

UN NÚMERO PEQUEÑO DE VECINOS, EL CASO DISCRETO

En la comunidad de vecinos de nuestro ejemplo hay 19 vecinos. Nadie es indiferente y todo el mundo toma partido por una u otra opción. Estas distintas formas de pensamiento las podemos representar en una tabla de doble entrada (ver Tabla 1), poniendo en las columnas las distintas cantidades de vecinos que quieren pintar de verde, y en las filas las de los que quieren pintar de amarillo. El resto hasta 19 son los que quieren pintar de naranja. Así en la celda (i,j) podemos identificar el número de vecinos a favor de pintar de naranja cuando hay i vecinos a favor de pintar de verde y j a favor de pintar de amarillo.

Vamos a llamar distribución de votos a la terna formada por los votos recibidos por cada color, expresados estos en número o en porcentaje.

En la intersección de la columna 7 (vecinos favorables al verde) con la fila 5 (vecinos favorables al amarillo), hay un 8 que señala que el resto de los vecinos hasta 19 quieren pintar de naranja. Las celdas sombreadas en gris son distribuciones imposibles ya que sumarían más de los 19 votos totales.

Estas distintas distribuciones de las opiniones de los vecinos son previas al comienzo del proceso de decisión, pero no se van a interpretar de un mismo modo según sea el proceso de toma de decisiones (tabla 1).

Veamos ahora cómo queda la tabla anterior, en la que vamos a sustituir en cada celda el número de personas que quieren pintar de naranja por el resultado final de la decisión tomada por la comunidad según sea el proceso que se siga para la toma de decisiones.

Primer proceso de elección, elección simultánea entre las tres opciones:

En esta primera forma de elección, la propuesta por el vecino, gana la opción más votada, por ejemplo en la casilla donde confluyen la columna 3 y la fila 7 observamos un número 9 (ver Tabla 1) o una letra N (ver Tabla 2). Esto quiere decir que cuando hay 3 vecinos a favor de pintar de verde y 7 a favor de pintar de amarillo, quedan 9 a favor de pintar de naranja y esta es la decisión adoptada por la comunidad (tabla 2).

Tabla 3. Color elegido según las distribuciones de votos. Segunda forma de elección.

Vecinos favorables al color amarillo

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
19	A																			
18	A	A																		
17	A	A	A																	
16	A	A	A	A																
15	A	A	A	A	A															
14	A	A	A	A	A	A														
13	A	A	A	A	A	A	A													
12	A	A	A	A	A	A	A	A												
11	A	A	A	A	A	A	A	A	A											
10	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A										
9	N	A	A	A	A	A	A	A	A		V									
8	N	N	A	A	A	A	A	A		V	V	V								
7	N	N	N	A	A	A	A		V	V	V	V	V							
6	N	N	N	N	A	A		V	V	V	V	V	V	V						
5	N	N	N	N	N		V	V	V	V	V	V	V	V	V					
4	N	N	N	N	N	N	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V				
3	N	N	N	N	N	N	N	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V			
2	N	N	N	N	N	N	N	N	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V		
1	N	N	N	N	N	N	N	N	N	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	
0	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V

Vecinos favorables al color verde

En total hay 210 distribuciones posibles de los votos acerca de las tres opciones. En 9 de ellas que hay empate entre dos opciones (en blanco). Hay 67 distribuciones de los votos que hacen ganadora a cada una de las tres opciones.

Se observa la confirmación matemática de lo se intuía a partir de la pregunta, ninguna de las tres opciones recibe un trato diferente de las otras dos.

Segundo proceso de elección, doble pregunta.

En esta segunda forma de elección, la propuesta por el presidente, hay dos preguntas, por lo que hay que hacer un análisis un poco más pausado para ver cuál es la opción elegida en cada caso. Por ejemplo en la casilla donde confluyen la columna rotulada con un '3' y la fila rotulada con un '7' observamos un número 9 (ver Tabla 1) o una letra N (ver Tabla 2). Esto quiere decir que cuando hay 3 vecinos a favor de pintar de verde y 7 a favor de pintar de amarillo, quedan 9 a favor de pintar de naranja. Por tanto en la primera pregunta hay 9 vecinos a favor de pintar de naranja y 10 en contra, con lo que este color se desecha. En la segunda pregunta solo votan los contrarios al naranja, ganando los partidarios del color amarillo y esta es la decisión adoptada por la comunidad. Notar que el color de la pintura finalmente elegida es apoyada solo por 7 vecinos frente a 9 que apoyaban el naranja.

Cabe destacar que en casos como el anterior varía la decisión de la comunidad según cuál sea la forma de elección, hay 18 casos similares a este, en los que en ganaba la opción 'color naranja' en la primera forma de elección para pasar a ganar el amarillo o el verde en la segunda forma de elección. Estos casos están remarcados en las Tablas 1 y 2.

También ahora hay 210 distribuciones posibles de los votos acerca de las tres opciones, aunque ahora solo hay empate en 5 de ellas. La opción naranja solo gana cuando tiene 10 votos o más en la primera elección, lo que ocurre en 55 de las distribuciones.

Las opciones amarillo y verde tienen cada una 75 distribuciones favorables y presentan una simetría entre ambas. Cada uno de los dos conjuntos de 75 distribuciones se puede descomponer en dos subconjuntos, 55 de ellas corresponden a situaciones en las que la mayoría de los vecinos están a favor del color amarillo o verde respectivamente, como en el caso de la opción naranja. El resto de las distribuciones corresponden a situaciones en las que, sin tener mayoría absoluta ninguno de los colores, unidos los partidarios de amarillo y verde superan a los partidarios del naranja en la primera pregunta para luego decidir en la segunda pregunta solamente entre estas dos opciones.

Se observa la confirmación matemática de lo se intuía a partir de las dos preguntas, la opción naranja recibe un trato diferente de las otras dos, un trato mucho peor ya que solamente puede ganar en caso de obtener la mayoría absoluta de los votos en la primera pregunta.

Observamos (ver Tabla 4) como la primera forma de elección guarda una simetría perfecta entre las tres opciones a elegir, mientras que la segunda "quita" algunas distribuciones favorables a la opción naranja para aumentar las de verde y amarillo.

Tabla 4. Comparación entre las dos formas de elección-discreto

Formas de elección → ↓ Distribuciones	Primera	Segunda
Favorables a verde	67	75
Favorables a amarillo	67	75
Favorables a naranja	67	55
Empates	9	5
Totales	210	210

UN NÚMERO GRANDE DE VECINOS, EL CASO CONTINUO

¿Cómo quedaría este análisis si el número fuera mucho mayor? Consideraremos ahora como variables los porcentajes de votos para cada color.

Vamos a hacer representaciones gráficas en dos ejes cartesianos de la relación entre el porcentaje de población favorable a pintar de amarillo en el eje x y porcentaje de población favorable a pintar de verde en el eje y. Dado el supuesto de no abstención, el resto hasta el 100% de participación en el proceso estará a favor de pintar de naranja. Para simplificar la notación, llamamos V, A o N a las variables que representan el porcentaje de población favorable a pintar de verde, amarillo o naranja, respectivamente.

Notar que podemos utilizar un gráfico en dos dimensiones para representar lo que en realidad son tres variables ya que están unidas por la ecuación V+A+N=100, lo que hace

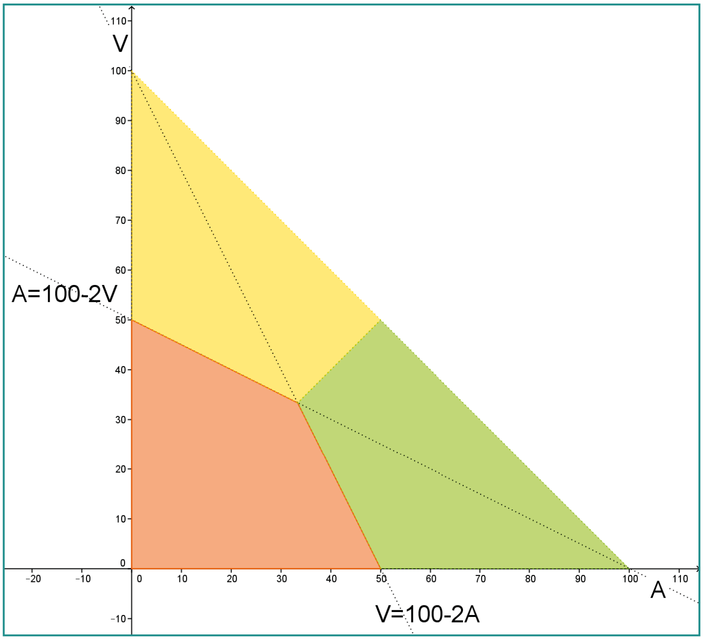


Figura 1. Opción elegida – primera forma de elección.

que si conocemos V y A podamos conocer N y por tanto saber cuál es el color elegido por la comunidad en cada sistema de elección.

La primera representación corresponde a la opción que proponía el vecino, en la que se elegía simultáneamente entre los tres colores. Marcamos con los tres colores las regiones donde gana cada opción. Vamos a representar estas regiones teniendo en cuenta primero que V≥0, A≥0 y que A+V≤100. Además:

- Para ganar la opción V, se tiene que cumplir que V>A y además que V>N. Como N=100-A-V, nos queda que V>100-A-V, simplificando: A>100-2V.
- Para ganar la opción A, se tiene que cumplir que A>V y además que A>N. Como N=100-A-V, nos queda que A>100-A-V, simplificando: V>100-2A.
- Para ganar la opción N, se tiene que cumplir N>A y N>V, aplicando que N=100-A-V, simplificando tenemos: A<100-2V y V<100-2A.

Así, podríamos dibujar un gráfico análogo a la Tabla 2 (figura 1).

Observamos, ver figura 1, que la simetría en la formulación de la pregunta, en la que las tres posibles respuestas tienen papeles simétricos, hace que las áreas de las tres regiones en que queda dividido el triángulo tengan la misma área (5000/3 u^2)

La segunda representación corresponde a la opción que proponía el presidente, en la que se respondía sucesivamente a dos preguntas. Marcamos con los tres colores las regiones donde gana cada opción:

- Para ganar la opción V, se tiene que cumplir que V>A y N<50. Como N=100-A-V, nos queda que 100-A-V<50, simplificando: 50<A+V.

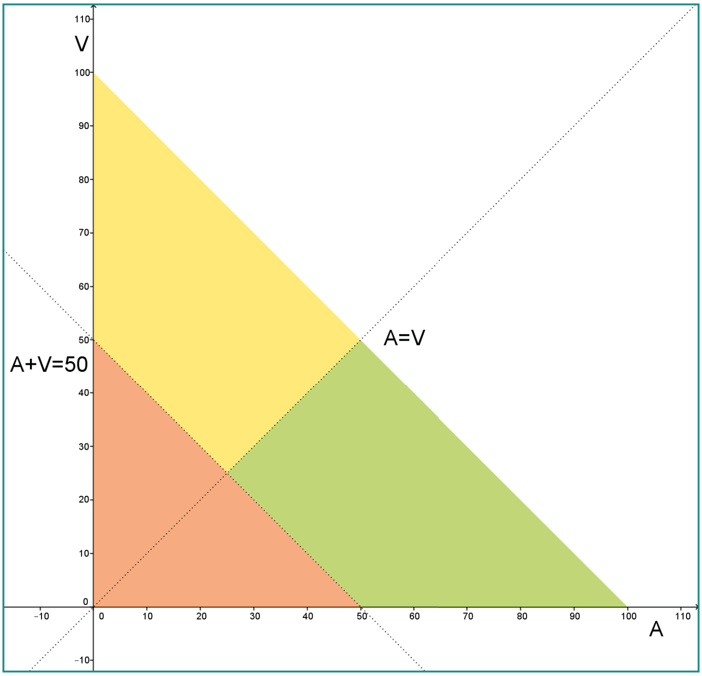


Figura 2. Opción elegida – segunda forma de elección.

- Para ganar la opción A, se tiene que cumplir que V<A y N<50. Como N=100-A-V, nos queda que 100-A-V<50, simplificando: 50<A+V.
- Para ganar la opción N, se tiene que cumplir N>50. Como N=100-A-V, nos queda que 100-A-V<50, simplificando: 50>A+V.

Así, podemos dibujar un gráfico análogo a la Tabla 3 en el que observamos, ver Figura 2, que el hecho de que para ganar la opción color naranja deba obtener mayoría en la primera pregunta se traduce gráficamente en que el área que representa su región asociada ha perdido área, quedando ahora en 1250 u^2. Las otras dos regiones tienen áreas iguales, 1875 u^2 cada una. Estas áreas han sido calculadas directamente por el programa de geometría dinámica GeoGebra.

Las zonas amarilla o verde (ver Figura 3) corresponden respectivamente a distribuciones de voto que con el primer proceso de elección daban como resultado pintar de naranja y con la segunda forma dan como resultado pintar de amarillo o verde:

Las diferencias entre un gráfico y otro permiten describir de modo cualitativo y cuantitativo las diferencias entre un tipo y otro de formas de elección de la pintura (ver Figura 3): por un lado es injusto que una de las opciones (color naranja) tenga que tener mayoría absoluta para poder ser elegida, por otro la diferencia de áreas entre las regiones verdes o amarillas de uno y otro gráfico (ver Tabla 5) darían una primera aproximación al tamaño de la injusticia de la segunda forma de elección y de la simetría de la primera. Aunque esta injusticia es mucho mayor si tenemos en cuenta que es previsible que las distintas distribuciones de % entre unas opciones y otras no sean uniformes y la mayor

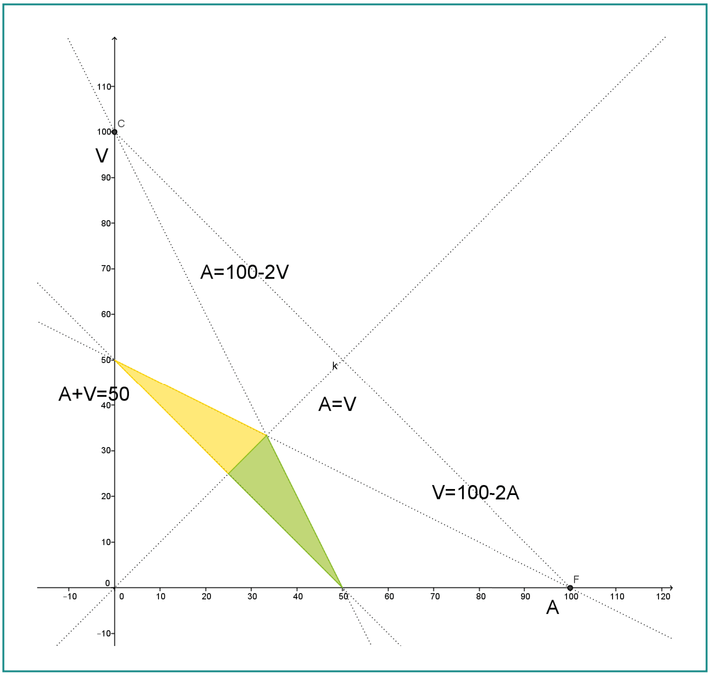


Figura 3. Diferencia entre la primera y segunda formas de elección.

parte de las ocasiones haya una cierta disputa entre unos colores y otros, lo que en términos de probabilidad se expresaría dando mayor probabilidad a la región que cambia de color que la que le correspondería exclusivamente en razón de su área.

Tabla 5. Comparación entre las dos formas de elección – continuo.

Formas de elección → ↓ Áreas	Primera	Segunda
Favorables a verde	$1666,\hat{6}$ u^2	1875 u^2
Favorables a amarillo	$1666,\hat{6}$ u^2	1875 u^2
Favorables a naranja	$1666,\hat{6}$ u^2	1250 u^2
Totales	5000 u^2	5000 u^2

Aunque resulta claro, hay que explicitar que el papel jugado por cada color podría ser intercambiado en la opción del presidente y perjudicar así las opciones de ganar de los partidarios del verde o del amarillo en lugar de las opciones de los partidarios del naranja, por ejemplo planteando:

- 1ª pregunta: ¿Quiere Vd. que se pinte la escalera de verde?
- 2ª en caso de que haya respondido de modo negativo a la primera pregunta, ¿Prefiere que se pinte de amarillo o de naranja?

CONCLUSIONES Y APLICACIÓN EN EL AULA

Hacemos notar en este artículo la posibilidad de complicar un proceso a priori sencillo y la necesidad en ese caso de hacer una reflexión pausada de los efectos matemáticos de esa complicación y cómo afecta a la oportunidad de ser elegida cada opción posible.

Aunque en general no podemos ordenar los procesos de elección entre varias opciones hasta el punto de llegar a decir si uno es mejor o peor que otro, en este caso sí resulta claro que la propuesta del Presidente de la Comunidad de vecinos es directamente injusta puesto que no es simétrica, dando mayor número de posibilidades de ganar a unos colores que a otros.

Hemos mostrado además, cómo esta falta de simetría afecta a la justicia del proceso también en el caso de un número elevado de electores, aprovechando así para mostrar un ejemplo de la relación entre un problema discreto y su equivalente continuo y las claras similitudes entre las representaciones gráficas y las tablas que aparecen en un caso y otro.

Las matemáticas, atendiendo a su finalidad funcional, deben apoyar el proceso de toma de decisiones de los futuros electores –tanto en sus elecciones políticas como en las de contextos más cotidianos como este–, dotándoles de herramientas matemáticas y capacidades argumentativas contribuyendo así a la formación de un espíritu crítico que les permita comprender situaciones en las que se plantean elecciones. Para ello, debemos mostrar a los alumnos situaciones de la vida cotidiana relacionadas con los procesos de elección, sean o no de tipo político, promoviendo un análisis matemático detallado de la justicia o injusticia de los mismos.

Nuestra propuesta didáctica en torno a las matemáticas electorales, a desarrollar en futuros artículos, incluiría:

1) Estudio de los efectos de la vigente Ley d´Hont sobre la diferente representación de los electores según si su opción es o no mayoritaria. Estudio de otras leyes de reparto de representantes y comparación entre ambas. Ambos estudios podrían contextualizarse fácilmente considerando las últimas elecciones del municipio del Centro que se trate.
2) Estudio de cómo otros procesos de elección más simples son también susceptibles de ser enfocados de diversos modos y que el utilizar uno u otro no es inocente en absoluto.

REFERENCIAS

Álvarez, M. y Alonso, J.M. (2010). Las elecciones generales de 2008 y el juego del parlamento. *Suma,* 63, 7-15.

Alvaro, M. (2001) Los sistemas de votación y su problemática. *Epsilon: Revista de la Sociedad Andaluza de Educación Matemática "Thales"*, 50, 293-300.

Confédération suisse. Initiatives populaires. Recuperado el 1 de agosto de 2014, de http://www.bk.admin.ch/themen/pore/vi/index.html?lang=fr

Hernández, E. (2001). Matemáticas y sistemas electorales. En Hernández, J. (coord.) *La enseñanza de las matemáticas a debate: referentes europeos* (pags. 69-85). Madrid: Subdirección General de Información y Publicaciones.

Fernández, E. y Fernández, F. (1999) La teoría de votación y la "memoria matemática sobre el cálculo de la opinión en las elecciones" del Dr. D. Joseph Isidoro Morales. *Epsilon: Revista de la Sociedad Andaluza de Educación Matemática "Thales",* 45, 295-310.

Girón, F. J. y Bernardo, J. M. (2007). Las matemáticas de los sistemas electorales. *Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales*, 1, 21-34.

Épsilon - *Revista de Educación Matemática* *2014, Vol. 31(3), nº 88, 67-70*

Estudiando probabilidad con el juego Chinesenspiel

Carmen León-Mantero
José Carlos Casas
Universidad de Córdoba

Resumen: *Cuando los conceptos se presentan de foma lúdica no solo se logra captar la atención de los alumnos sino que también su comprensión es mayor y más rápica. Presentamos una actividad para introducir conceptos de probabilidad a los alumnos de educación primaria a través de un juego matemático conocido como Chinesenspiel.*
Palabras Clave: *Probabilidad, juego matemático, educación primaria, matemáticas*

Studying probability with the Chinesenspiel game

Abstract: *When we present the concepts to students in a playful way , we get more attention and understanding is higher and faster. We present an activity to introduce concepts of probability to the primary school students through a mathematic game known as Chinesenspiel.*
Keywords: *Probability, mathematics games, primary school students, mathematics*

INTRODUCCIÓN

En diferentes ocasiones, la emersión de nuevos modos de pensar en matemáticas ha sido fruto del trabajo realizado fuera del contexto científico, y es que a menudo ocurre que cuando somos capaces de plantear y responder cuestiones en un ambiente relajado o lúdico surgen nuevas vías de pensamiento matemático. Por tanto, el uso de juegos matemáticos al iniciar el estudio de un tema puede aportar a alumnos de cualquier nivel, entre otros beneficios, motivación, interés, una aproximación inicial adecuada y la adquisición de algunas de las habilidades matemáticas que las matemáticas requieren (De Guzmán, 1989).

Un ejemplo de juego matemático es el denominado Chinesenspiel. Se trata de una adaptación del juego del parchís, clasificado como juego de persecución, que por su simpleza resulta muy útil para introducir el concepto de probabilidad en los niveles de educación primaria.

El Real Decreto 1513/2006 de Educación Primaria, así como el currículo de Educación Primaria de Andalucía recogen en el bloque 4 y el núcleo temático 6 respectivamente del área de matemáticas, denominado Tratamiento de la información, azar y probabilidad, los siguientes contenidos resumidos para el tercer ciclo:

Carácter aleatorio de algunas experiencias

- Presencia del azar en la vida cotidiana. Estimación del grado de probabilidad de un suceso.
- Valoración de la necesidad de reflexión, razonamiento y perseverancia para superar las dificultades implícitas en la resolución de problemas.

Desde las instituciones se recomienda promocionar el aprendizaje de la estadística y la probabilidad de una manera natural desde la educación primaria con la finalidad de ayudar a los niños a relacionar estos conocimientos con los fenómenos que les rodean (MEC, 2006). Para ello, presentamos una actividad que podemos realizar con alumnos de tercer ciclo de primaria para introducir los conceptos de aleatoriedad, probabilidad y espacio muestral.

ACTIVIDADES

El material necesario para el desarrollo del juego es un tablero como el que mostramos en la figura 1, cuatro fichas (una para cada jugador) de colores rojo, verde, azul y amarillo, y un gran dado con dos caras blancas y las cuatro caras restantes con los colores de los jugadores: rojo, verde, azul y amarillo. El número de jugadores puede variar de 2 a 4.

Es posible que los alumnos no conozcan las reglas del juego, por tanto antes de comenzar a jugar, procederemos a explicárselas:

- Para empezar, cada jugador debe colocar su ficha en la esquina del tablero con el mismo color que ésta.
- Uno de los jugadores lanza el dado hasta que aparezca uno de los colores que aparecen en el tablero, lo que permitirá al jugador que tenga la ficha del mismo color iniciar el juego.
- El juego comienza cuando el jugador seleccionado lanza el dado. Si el resultado de éste es una cara blanca, el jugador repite lanzamiento. Si el color obtenido es el mismo que el del jugador que ha lanzado, avanza una casilla (en sentido contrario a las agujas del reloj) y vuelve a lanzar el dado. Si el color obtenido es cualquiera de los otros 3,se acaba su turno y le pasa el dado al jugador de su derecha.

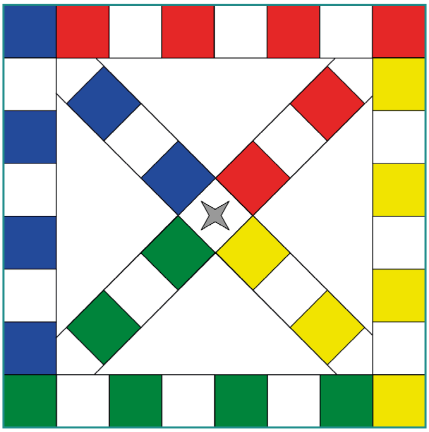


Figura 1. Tablero de Chinesenspiel.

- Cuando al mover ficha un jugador, éste se encuentra con otra en la casilla de destino, el jugador que se encontraba en esta posición tendrá que mover su ficha a la casilla de inicio.
- Cuando un jugador da la vuelta completa al tablero volviendo a la casilla inicial, enfilará en diagonal el último recorrido hasta la casilla central.
- Gana la partida el primero que logre llegar a la casilla central.

Tras preguntar a los alumnos si han entendido las reglas básicas, se les pide que hagan grupos de cuatro y se entrega a cada grupo un tablero y un dado para que comiencen a jugar de forma libre mientras el profesor comprueba que todos los alumnos han comprendido las reglas del juego y se han familiarizado con el tablero y el tipo de dado.

Como comentábamos anteriormente, vamos a proponer a nuestros alumnos actividades para trabajar los conceptos de aleatoriedad, espacio muestral y probabilidad. Para ello, les pediremos que pongan en común de forma reflexiva sus respuestas a las siguientes actividades:

Actividad 1

Proponemos a los alumnos las diferentes cuestiones sobre situaciones aleatorias:

- ¿Sabemos de antemano qué jugador va a comenzar el juego?
- ¿Influye el color elegido en el resultado del juego?

Actividad 2

Pedimos a los alumnos que indiquen el espacio muestral del experimento: una vez que conozcamos el jugador que comienza a jugar,

- ¿Qué resultados puede obtener cuando lance el dado?
- ¿En qué casillas podría quedarse cuando acabe su turno?

Actividad 3

Pedimos a los alumnos que intuyan los diferentes grados de probabilidad de las situaciones,

– ¿Qué situación es más fácil que ocurra? ¿que pierda turno, que vuelva a tirar moviendo ficha o que vuelva a tirar sin moverla?

Actividad 4

Proponemos a los estudiantes la situación “comerse la ficha de otro jugador” y les preguntamos:

- ¿Un jugador puede comerse la ficha de cualquiera de los otros jugadores?

- Si ponemos una ficha justo delante del jugador que tiene el turno, indicar algunas combinaciones con las que el jugador se come la ficha del otro. ¿Hay muchas combinaciones posibles? ¿Sabrías decir todas?
- Repetir la propuesta anterior con dos celdas de distancia.

Actividad 5

Colocamos las fichas a una distancia de una casilla del final respectivamente. Si le toca jugar al jugador con la ficha de color rojo,

- ¿Quiénes pueden ganar?
- ¿Qué tiene que salir para que gane el rojo?
- ¿Y el azul?
- ¿Y el verde?
- ¿Y el amarillo?
- ¿Quién es más fácil que gane?
- ¿Quién lo tiene más difícil?
- Si hubiese una ficha de color blanco, ¿tendría ventaja? ¿Por qué?

REFLEXIONES FINALES

Para profundizar más en el concepto de aleatoriedad podemos cambiar una regla del juego, por ejemplo, cuando un jugador pierde el turno, el dado pasa al jugador con el color resultante en el dado, en lugar de pasar al de su derecha. Para ello se podría elegir a un alumno para lanzar siempre el dado y otros ocho que fuesen los jugadores de dos tableros. En uno de los tableros se cambia de turno de forma convencional y en el otro según el color del dado. Transcurrido un tiempo, y si la partida es suficientemente larga, los jugadores con el mismo color deberían estar situados en lugares parecidos.

Tras la familiarización de los conceptos anteriores podemos introducir el concepto de probabilidad a través de la regla de Laplace e intentar que asignen probabilidades a cada uno de los sucesos del dado. Incluso podemos añadir el concepto de independencia de sucesos pidiendo a los alumnos que calculen la probabilidad de que se repita el mismo resultado en el dado después de haber obtenido, por ejemplo la cara blanca.

REFERENCIAS

De Guzmán, M. (1989). Juegos y Matemáticas. *Suma, 4*, 61-64.

MEC. (2006). *Real Decreto 1513/2006, de 7 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas de la Educación Primaria (BOE del 8 de diciembre)*.

Épsilon *- Revista de Educación Matemática* ***2014, Vol. 31(3), nº 88, 71-88***

La extracción de raíces en el *Tratado de Mathematicas* (1573) del bachiller Juan Pérez de Moya

Vicente Meavilla Seguí
Licenciado en Matemáticas, Doctor en Filosofía (Pedagogía)
vmeavill@hotmail.com
Antonio M. Oller Marcén
Centro Universitario de la Defensa de Zaragoza
oller@unizar.es

RESUMEN: *Si se atiende al número de ediciones de algunas de sus obras y al volumen de su producción, no cabe duda de que el bachiller Juan Pérez de Moya es el matemático español más notable del siglo XVI. En este artículo se analizan los contenidos concernientes al tópico «extracción de raíces» propuestos por el bachiller en el Tratado de Mathematicas (1573) y se comparan con los que se desarrollan en textos de la misma época. A la luz de esta comparación, se pretende situar al matemático jienense (en cuanto al estudio de las raíces de números naturales se refiere) en el lugar que le corresponde dentro de la Matemática renacentista.*

Palabras *clave: Juan Pérez de Moya; siglo XVI; extracción de raíces; Aritmética; Tratado de Mathematicas.*

The extraction of roots in the *Tratado de Mathematicas* (1573) of the bachelor Juan Pérez de Moya

ABSTRACT: *According to the number of editions of some of his works and to the volume of its production it is clear that the Bachelor Juan Pérez de Moya is the most outstanding Spanish mathematician of the sixteenth century. In this paper we analyze the contents concerning the topic «extraction of roots» (Tratado de Mathematicas, 1573) and we compare them with those developed in texts from the same period of time. In*

light of this comparison, it is expected to place the Spanish mathematician (as for the study of the roots of natural numbers is concerned) in his right place within Renaissance Mathematics.
Keywords: *Juan Pérez de Moya; Sixteenth century; extraction of roots; Arithmetic; Tratado de Mathematicas.*

1. INTRODUCCIÓN

Los datos biográficos sobre el bachiller Juan Pérez de Moya son escasos e inciertos (Meavilla, 2005). Nació antes del 1513, probablemente en 1512, en Santisteban del Puerto (Jaén), tal como se indica en la portada de algunos de sus libros. Estudió en Salamanca y Alcalá de Henares. En 1536 obtuvo una capellanía en su pueblo natal y, ya muy mayor, fue canónigo de la Catedral de Granada, ciudad en la que murió allá por el 1596.

Además de algunas obras de carácter religioso y mitológico, el bachiller escribió varios libros de contenido científico-matemático en los que procuró divulgar los conocimientos de su época utilizando un lenguaje cercano, claro, preciso y compresible. La temática de dichos textos transita desde los «libros de cuentas» hasta el álgebra simbólica («regla de la cosa»), pasando por la aritmética, geometría, filosofía natural, navegación, geografía, astronomía y cosmografía.

A continuación enumeramos sus obras de contenido científico:

1) *Libro de cuenta, que trata de las quatro Reglas generales de Arithmetica practica, por numerosos enteros y quebrados y de reducciones de monedas destos Reynos de Castilla, con un razonamiento sobre la misma facultad*. Toledo, Juan Ferrer,1554.
2) *Libro Segundo de Arithmetica, Que trata de proporcion, y regla de tres, y monedas, pesos antiguos, con otras cosas tocantes al arte menor y mayor*. Salamanca, Iuan Canoua, 1557.
3) *Compendio de la regla de la cosa, o arte mayor*. Burgos, Martin de Bitoria, 1558.
4) *Arithmetica practica, y specvlatiua*. Salamanca, Mathias Gast, 1562[1].
5) *Arte de marear*[2], 1564.
6) *Obra intitvlada fragmentos mathematicos. En que se tratan cosas de Geometria, y Astronomia, y Geographia, y Philosophia natural, y Sphera, y Astrolabio, y Nauegacion, y Reloxes*. Salamanca, Iuan de Canoua, 1568.

1. Rodríguez Vidal (1987, pp. 10-11), refiriéndose al número de ediciones de la *Arithmetica practica, y specvlatiua*, afirma:

> «Es claro que cuando un libro ha tenido durante más de doscientos años sucesivas ediciones para utilizarlo como texto, no puede ser un libro indiferente a ningún estudioso de la historia de nuestra cultura. Este es el caso singular que ocurre con la *Arithmetica practica, y specvlatiua* del Bachiller Pérez de Moya».

2. Sobre este manuscrito de la Real Biblioteca del Monasterio de San Lorenzo de El Escorial, J. A. Sánchez Pérez (1929) afirma:

> «Son unos apuntes, no completos, atribuidos a Pérez de Moya, escritos en 1564. Parecen la preparación de una obra que no terminó».

7) *Tratado de Mathematicas en qve se contienen cosas de Arithmetica, Geometria, Cosmographia, y Philosophia natural. Con otras varias materias, necessarias a todas artes Liberales y Mechanicas*. Alcalá, Iuan Gracian, 1573.
8) *Tratado de Geometria Practica, y Speculatiua*. Alcalá, Ivan Gracian, 1573.
9) *Tratado de cosas de Astronomia,y Cosmographia, y Philosophia Natural*. Alcalá, Ivan Gracian, 1573.
10) *Arithmetica de Moya, intitvlada manual de contadores. En que se pone en suma lo que vn contador ha menester saber, y vn orden para los que no saben escreuir, con oyrlo leer, sepan contar, y conuertir de memoria vnas monedas en otras. Co(n) vnas tablas al fin en Guarismo, y Castellano para aueriguar con facilidad las cue(n)tas de los reditos de los ce(n)sos, y juros, segu(n) vsança de España, y otros reynos*. Alcalá, Iuan Gracian, 1582.
11) *Principios de Geometria, de que se pod(r)an aprouechar los estudiosos de artes liberales, y todo hombre que su officio le necessitare a tomar la regla y co(m)pas en la mano. Con el orden de medir, y diuidir tierras.* Madrid, Francisco Sanchez, 1584.

2. EL TRATADO DE MATHEMATICAS

Al referirse al *Tratado de Mathematicas en qve se contienen cosas de Arithmetica, Geometria, Cosmographia, y Philosophia natural*, Picatoste (1891) se expresa en los siguientes términos:

> *«Esta obra suele estar encuadernada en dos o tres tomos con distinta portada,* dedicatoria y prólogos, por lo cual se consideran como obras distintas y de esta manera las vamos a examinar.»

El primer tomo se consagra a la Aritmética[3], se desarrolla en setecientas cincuenta y dos páginas y se estructura en diez libros[4]. El libro quinto (pp. 323 – 396), al que

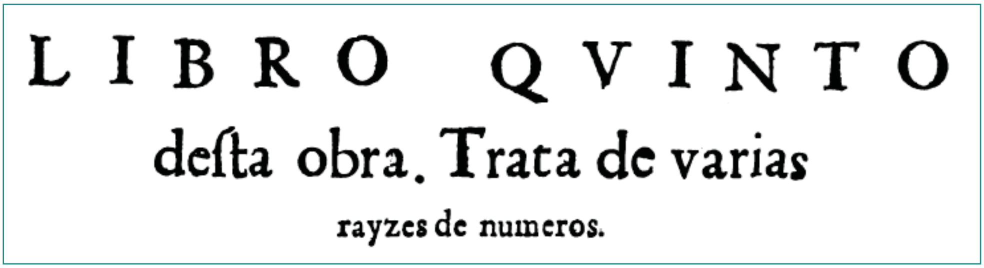
3. Como indica el título, el tomo segundo se dedica a la Geometría y el tercero se ocupa de la Astronomía, Cosmografía y Filosofía natural.

4. Los tópicos matemáticos a los que se consagra cada uno de ellos se indican al comienzo de la obra:

«**Lo** que se contiene en el primero tratado de Arithmetica

I) **Arithmetica,** y Musica Speculatiua.
II) **Las** reglas, o Problemas generales del Arithmetica Practica.
III) **Quebrados,** o Fracciones Comunes, y Astronomicas.
IV) **Reglas** de tres, y compañias, y falsas posiciones, y finezas de Oro, y Plata, y reglas de testamentos, y aprecios de joyas, &c.
V) **Rayzes** de numeros.
VI) **Prueuas** de las Problemas, o reglas generales de Arithmetica.
VII) **Reglas** de Algebra, o de la Cosa, o arte mayor.
VIII) **Demandas,** o questiones, y secretos, o experiencias de numeros.
IX) **Cuentas** de memoria, para los que no saben escreuir, y reduziones de vnas monedas en otras.
X) **Monedas,** y pesos antiguos, y characteres de numeros, y cosas de Reportorios de tiempo, y Computo.»

dedicaremos nuestra atención en los parágrafos siguientes, trata de las raíces de números y se divide en doce capítulos[5].



LIBRO QVINTO
deſta obra. Trata de varias
rayzes de numeros.

Fig. 1. Título del libro quinto.

3. LAS FUENTES DEL LIBRO QUINTO

Antes de entrar en el análisis de los contenidos matemáticos del libro quinto, nos parece oportuno presentar el catálogo de autores y obras citadas por Pérez de Moya al referirse a determinados asuntos de carácter aritmético y geométrico. En la tabla siguiente se recogen los autores citados por Pérez de Moya junto con la página en la que lo hace. También se incluye la obra en la que, posiblemente, se apoyó para realizar la referencia.

Autor	Obra	Páginas en que se cita
Ptolomeo	*Almagesto*	328
Euclides	*Elementos de Geometría*	334, 338, 339, 341
Oroncio Fineo	*Protomathesis* *Arithmetica practica, libri quatuor*	334, 335
Nicolas Tartaglia	*General trattato di numeri, et misure*	334, 335, 395
Michael Stifel	*Arithmetica integra*	395

5. Los asuntos tratados en cada uno de ellos se detallan en el «Summario de los capitulos, y articulos que se contienen en el quinto libro desta obra que trata de rayzes de numeros» (pp. 323 – 325):

«Capitulo primero. En que se dize que cosa son rayzes en los numeros, y de varias differencias de rayzes.
Cap. 2. Trata de la rayz quadrada, tiene nueue articulos.
Capit. 3. Trata de numero Cubo, o Cubico, y de su rayz Cubica, tiene onze articulos.
Cap. 4. Trata de rayz quadrada, de rayz quadrada, tiene ocho articulos.
Capitulo 5. Trata de rayz relata, tiene seys articulos.
Cap. 6. Trata de rayz censicubica, tiene ocho articulos.
Capitulo 7. Trata de segundo relato, y de su rayz segunda relata, tiene seys articulos.
Capitulo 8. Trata del censo, de censo, de censo, y de su rayz, tiene seys articulos.
Capit. 9. Trata de numero Cubo de Cubo, tiene seys articulos.
Cap. 10. Trata de censo relato, y de su rayz, tiene seys articulos.
Capit. 11. Trata del numero tercero relato, tiene seys articulos.
Capit. 12. Muestra sacar rayz quadrada, y cubica, y las demás, de fraciones Astronomicas.»

A continuación analizamos con algo más de detenimiento estas referencias.

1) Ptlomeo.
La única cita relativa a Ptolomeo (*Almagesto*, libro I, cap. 9) se encuentra en la página 328 y se refiere a la utilidad de las raíces en el campo de la Geometría y Cosmografía.

2) Euclides.
En la página 334 del libro quinto, al hablar de la extracción de la raíz cuadrada de números naturales, Pérez de Moya cita a Euclides y hace alusión a la cuarta proposición del libro segundo de los *Elementos*:

> «Si se divide de un modo cualquiera una recta por un punto, el cuadrado de la recta entera equivale a los cuadrados de las partes más el doble del rectángulo comprendido por las partes.»

En la página 338 encontramos dos citas más. La primera, que concierne al resto de la raíz cuadrada, no señala la proposición de los *Elementos* involucrada en el asunto. La segunda, relativa a la extracción geométrica de la raíz cuadrada, alude a la novena proposición del libro sexto de Euclides:

> «Construir una media proporcional entre dos rectas dadas.»

En la página 339 también contabilizamos dos notas relacionadas con cuestiones geométricas utilizadas para la demostración de la proposición 9 del libro VI. La primera hace referencia al corolario de la octava proposición del libro sexto de los *Elementos*:

> «En un triángulo rectángulo la perpendicular trazada desde el vértice del ángulo recto a la base es media proporcional entre los segmentos de la base.»

La segunda se refiere a la penúltima proposición del libro sexto de Euclides:

> «En los triángulos rectángulos el cuadrado sobre el lado opuesto al ángulo recto es equivalente a los cuadrados sobre los lados que forman ese ángulo recto.»

En la página 341, al hablar de la semejanza de números sólidos, el bachiller santistebeño aconseja la lectura de la proposición vigesimoquinta del libro octavo de los *Elementos*:

> «Los números sólidos semejantes tienen entre sí la misma razón que dos números cubos.»

Atendiendo a la numeración de las proposiciones mencionadas, podemos sospechar que Pérez de Moya consultó la obra: *Evclidis Megarensis mathematici clarissimi Elementorum Geometricorum. Lib. XV. Cum expositione Theonis in prioris XIII a Bartholomaeo Veneto latinitate donate, Campani in omnes, & Hypsiclis Alexandrini in duos postremos* (1537).

3) Oroncio Fineo.
En las páginas 334 y 335, al hablar de las aproximaciones de la raíz cuadrada de números sordos, el canónigo de la Catedral de Granada se refiere a Oroncio Fineo pero no indica la fuente documental. Pérez de Moya debió consultar los capítulos

consagrados a la extracción de la raíz cuadrada en la *Protomathesis* (1532)[6] o en alguna edición de la *Arithmetica practica, libri quatuor* (1542, 1544, 1555)[7].

4) Nicolo Tartaglia.
En las páginas 334 y 335 se alude a Tartaglia en relación a las aproximaciones de las raíces cuadradas. Dado que no se indican los textos consultados y teniendo en cuenta que el libro segundo de la segunda parte del *General trattato di numeri, et misure* (1556-1560) se dedica íntegramente a la extracción de raíces, sospechamos que Pérez de Moya debió examinar esta obra.
Por otro lado, en la página 395, el bachiller aconseja la lectura de Tartaglia en lo que se refiere a la extracción de la raíz tercera relata (raíz de índice once) de entero y quebrado.

5) Michael Stifel.
La única mención referente a Michael Stifel se encuentra en la página 395 y alude a la extracción de la raíz tercera relata de entero y quebrado. Como en otras ocasiones, Pérez de Moya oculta el texto consultado. En este caso, creemos que se trata de la *Arithmetica integra* (1544)[8].

4. LA EXTRACCIÓN DE RAÍCES DE NÚMEROS NATURALES

El capítulo I del libro quinto del primer tomo del *Tratado de Mathematicas*, apoyándose en las nociones de número cuadrado, cubo, censo de censo, y relato, declara los conceptos de raíz cuadrada, cúbica, cuadrada de cuadrada (cuarta) y relata (quinta). Llegando a este punto, Pérez de Moya comenta:

> «Segu(n) esto infinitas differencias ay de rayzes segu(n) el orden q(u)e vno le paresciere de multiplicar a los numeros muchas, o pocas vezes.»

También se consideran los números prónicos[9], las raíces prónicas[10] y las raíces compuestas (ligadas[11] y universales[12]).

---

6. La extracción de la raíz cuadrada de números naturales se estudia en la parte consagrada a la Aritmética Práctica (*Liber primus, cap. VII. De inuentione radicis quadratorum numerorum*).

7. En la edición de 1555 que hemos consultado, la extracción de la raíz cuadrada de números naturales se estudia en el capítulo 7 (*De inuentione quadratae radicis in numerus integris*) del libro primero.

8. La extracción de raíces se contempla en el capítulo 5 (*De extractionibus radicum*) del primer libro.

9. Utilizando el simbolismo moderno, un número prónico según Pérez de Moya es del tipo , donde a es un cuadrado perfecto. Así, $18 = 4^2 + \sqrt{4}$ es prónico.

10. Dado un número prónico $a^2 + \sqrt{a}$, su raíz prónica es a. Así, 4 es la raíz prónica de 18.

Encontramos el concepto de raíz prónica en la *Suma de Arithmetica pratica y de todas mercaderias con la horden de contadores* (1546) de Gaspar de Texeda.

11. En notación simbólica moderna algunos ejemplos de raíces ligadas propuestos por Pérez de Moya son:

$$\sqrt{4} + \sqrt{1} = 3 \quad , \quad \sqrt{9} + \sqrt{5} = 3 + \sqrt{5}$$

12. En notación simbólica moderna algunos ejemplos de raíces universales propuestos por Pérez de Moya son:

$$\sqrt{13 + \sqrt{144}} = \sqrt{13 + 12} = \sqrt{25} = 5$$

$$\sqrt{4} + \sqrt{1} + \sqrt{10 + \sqrt{36}} = 7$$

A la hora de justificar la utilidad de las raíces, el bachiller se expresa en los siguientes términos (p. 328):

> «Destas rayzes q(ue) se ha dicho, la quadrada sirue para Geometria, y Cosmographia, y para el arte militar, y para sacar vn medio proporcional entre dos estremos, y para el arte mayor. La cubica sirue para sacar dos medios proporcionales entre dos estremos, y para sacar la quantidad de los Diametros en los cuerpos solidos, y para otras varias cosas. Y esta, con todas las demas que aqui tratamos generalmente, siruen para la regla de la cosa, o arte mayor, como en el proceso desta obra se vera.»

En los diez capítulos siguientes el discurso de Pérez de Moya, en lo que a la extracción de raíces de números naturales se refiere, transita por las siguientes etapas:

- Definición-descripción de potencias y raíces.
- Tablas de potencias de números dígitos: caracteres de exclusión.
- Algoritmos para la extracción de raíces.
- Aproximaciones de raíces.
- Pruebas de las raíces.

En lo que sigue, utilizaremos este guión para el análisis de los contenidos matemáticos.

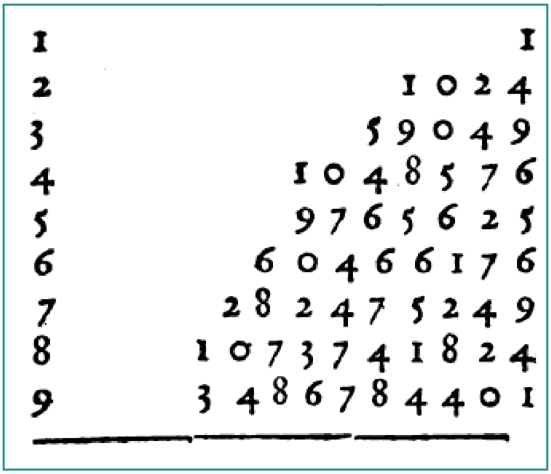
4.1. Definición-descripción de potencias y raíces

Apoyándose en la descripción de las potencias de base natural y exponentes entre 2 y 11, Moya introduce la noción de raíz cuadrada, cúbica, etc. Así, por ejemplo, en el caso de la raíz quinta [= *raíz relata*] el bachiller comenta (p. 356):

> «La quarta especie de rayz en orden, es la que dizen relata, y assi por numero relato se entie(n)de el vltimo producto que sale de la multiplicacion de cinco numeros yguales en quantidad, y genero, assi como estos 2. 2. 2. 2. 2. (o otros mayores) los quales, multiplicados todos, vnos por otros, hacen treynta y dos, este treynta y dos, se dize numero relato, y el vno de los cinco doses, se dize rayz relata deste numero treynta y dos.»

Las denominaciones de las raíces de distintos índices, que coinciden con las de las potencias de que provienen, se detallan en el cuadro siguiente:

Denominaciones de Pérez de Moya	Denominaciones Actuales
Rayz quadrada	Raíz cuadrada
Rayz cubica	Raíz cúbica
Rayz quadrada de rayz quadrada o Rayz de censo de censo	Raíz cuarta
Rayz relata	Raíz quinta
Rayz censicuba	Raíz sexta
Rayz segunda relata	Raíz séptima
Rayz quadrada de quadrada de quadrada o Rayz de censo de censo de censo	Raíz octava



1	1
2	1024
3	59049
4	1048576
5	9765625
6	60466176
7	282475249
8	1073741824
9	3486784401

Fig. 4. Potencias de exponente diez de los números dígitos.

Denominaciones de Pérez de Moya	Denominaciones Actuales
Rayz cubica de rayz cubica	Raíz novena
Rayz censirelata	Raíz décima
Rayz tercera relata	Raíz undécima

Los nombres utilizados por Pérez de Moya para describir las raíces, que están relacionados con el simbolismo algebraico de la época (Meavilla y Oller, 2014), fueron comunes en muchos impresos europeos del XVI[13]. No obstante, en la mayoría de ellos el catálogo propuesto por el canónigo jienense se limitaba a las raíces cuadradas y cúbicas[14].

4.2. Tablas de potencias de números dígitos: caracteres de exclusión

En el estudio de cada uno de los diez tipos de raíces precedentes, se presenta una tabla de las potencias de los números dígitos cuyos exponentes son, en cada caso, el índice correspondiente a la raíz que se esté considerando. Cuando existen, se añaden los caracteres de exclusión.

Por ejemplo, en el estudio de la *raíz censirelata* [= raíz décima], se ofrece la tabla siguiente (figura 4):

A esta lista, el bachiller añade (p. 384):

> «Desta tabla se manifiesta, que los números que fenescieren en 2. 3. 7. 8. seran irracionales, y los que fenescieren en 1. 4. 5. 6. 9. 0. podran ser, o no ser racionales.»

13. En la *Arithmetica integra* (1544) de Stifel y en el *General tratatto* (1556 – 1560) de Tartaglia encontramos denominaciones casi idénticas.

14. Esto sucede, por ejemplo, en las obras de Juan de Ortega (1512), Juan Andrés (1515), Joan Ventallol (1521), Petrus Apianus (1527), Oroncio Fineo (1532), Girolamo Cardano (1539), Gaspar Nicolas (1541) y Oroncio Fineo (1555).

4.3. Algoritmos para la extracción de raíces

Para la extracción de raíces, Pérez de Moya aborda en primer lugar el cálculo del número de cifras de la raíz pedida para, a continuación, proponer procedimientos para el cálculo de dichas cifras.

4.3.1. Número de cifras de la raíz

Para determinar el número de cifras de cualquier raíz, el bachiller propone las dos técnicas siguientes:

- Se ponen puntos debajo de las cifras del radicando (empezando por las unidades) de modo que entre dos puntos consecutivos quede una cifra sin puntuar (raíz cuadrada), dos cifras sin puntuar (raíz cúbica), tres cifras sin puntuar (raíz cuarta) etc. El número de puntos coincide con el número de cifras de la raíz correspondiente[15].
- Contando de derecha a izquierda y mediante barras verticales se separan las cifras del radicando en grupos de dos cifras (raíz cuadrada), tres cifras (raíz cúbica), cuatro cifras (raíz cuarta), etc. El número de grupos coincide con el número de cifras de la raíz.

El método señalado en el punto i. ya fue utilizado, entre otros, por: Luca Pacioli (1494), Juan Andrés (1515)[16], Joan Ventallol (1521), Girolamo Cardano (1539)[17], Gaspar de Texeda (1546) y Marco Aurel (1552). Por su parte, el método del punto ii. puede encontrarse en la obra de, entre otros: Nicolas Chuquet (1484), Juan de Ortega (1512), Estienne de la Roche (1521), Oroncio Fineo (1532 y 1555) y Juan de Ycíar (1549).

4.3.2. Cálculo de las cifras de la raíz

Para el cálculo de las cifras de las raíces de índices entre 2 y 11, Pérez de Moya debió estar familiarizado con los «coeficientes binomiales» que Michael Stifel estudió en su *Arithmetica integra* (1544) y Tartaglia en su *General trattato* (1556 – 1560) (figura 5).

Para las raíces cuadradas y cúbicas, el bachiller pone de manifiesto el conocimiento de dichos coeficientes:

> «La razo(n) de todo lo que en el sacar de rayz [cuadrada] se ha dicho sale d(e) la quarta proposicion del segundo de Euclides[18].» (p. 334).

---

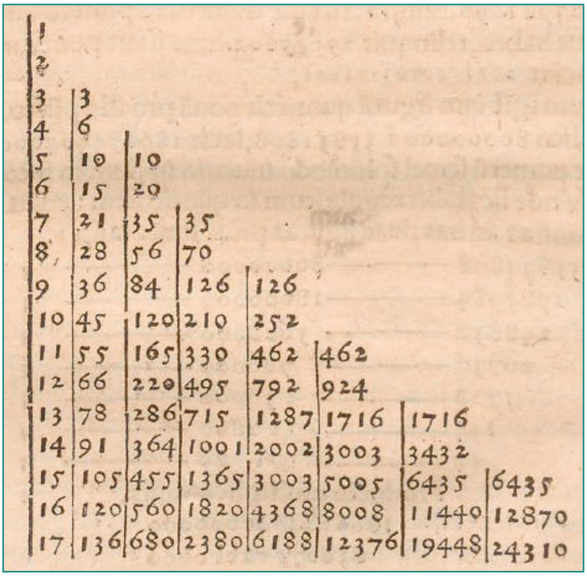
15. Este procedimiento se apoya en la expresión del radicando como suma de potencias de (raíz cuadrada), (raíz cúbica), (raíz cuarta) etc.

16. Juan Andrés también utilizó puntos entre las cifras del radicando a modo de barras verticales.

17. Cardano también utilizó puntos encima de las cifras del radicando. La misma técnica fue utilizada por Petrus Apianus (1527), Michael Stifel (1544) y Nicolás Tartaglia (1556-1560).

18. En lenguaje simbólico moderno dicha proposición equivale a la identidad:

$$(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$$



1							
2							
3	3						
4	6						
5	10	10					
6	15	20					
7	21	35	35				
8	28	56	70				
9	36	84	126	126			
10	45	120	210	252			
11	55	165	330	462	462		
12	66	220	495	792	924		
13	78	286	715	1287	1716	1716	
14	91	364	1001	2002	3003	3432	
15	105	455	1365	3003	5005	6435	6435
16	120	560	1820	4368	8008	11440	12870
17	136	680	2380	6188	12376	19448	24310

Fig. 5. Coeficientes binomiales en la *Arithmetica integra* (1544) de Michel Stifel.

«Para ente(n)der la razon de lo que se ha hecho en el sacar de la rayz Cubica, considera q(ue) si vna linea fuere diuidida en dos qualesquiera partes, el Cubo de toda la linea sera ygual, al Cubo de la primera parte, y al triplo del quadrado de la dicha primera parte, multiplicada por la segu(n)da, y al triplo del quadrado de la segunda parte, mutiplicada por la primera, y al Cubo de la segunda.» (p.350)[19].

Los procedimientos de extracción sólo difieren de los actuales en la disposición de los cálculos (figura 6).

A lo largo del libro quinto del primer tomo del *Tratado de Mathematicas*, el matemático santistebeño calcula las siguientes raíces exactas[20] (ver tabla).

Además de los aspectos aritmético-algebraicos de la extracción de raíces, Pérez de Moya también considera su componente geométrica. Así, al referirse a las raíces cuadradas y cúbicas, afirma:

19. En el libro segundo de la segunda parte del *General trattato di numeri, et misure*, Tartaglia describe de forma retórica el desarrollo de distintas potencias del binomio. Así, para el exponente 7, se expresa en los siguientes términos:

> «**Se** vna quantita sara diuisa in due parti, come si voglia, il secondo relato di tutta la detta quantita sempre sara eguale a questi otto principali produtti, cioe al produtto del secondo relato della prima parte. Et al produtto del settuplo del cubo censo della detta prima parte fia la seconda parte, & al produtto del 21 uplo del relato della detta prima parte fia il censo della seconda, & al produtto del 35 uplo del cen. cen. della detta prima fia il cubo della seconda, & al produtto del 35 uplo del cen. cen. della seconda fia il cubo della prima, & al produtto del settuplo del censo cubo della detta seconda fia la prima (simplice) & finalmente al produtto del secondo relato della detta seconda parte.» (fol. 51r).

20. Hemos utilizado el simbolismo moderno para radicales, desconocido por Pérez de Moya.

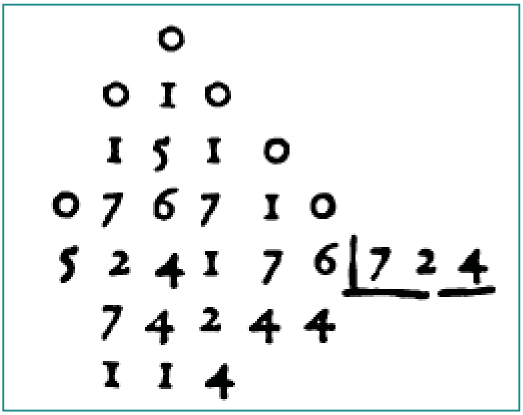


Fig. 6. Extracción de la raíz cuadrada de 524176 (p. 332).

$\sqrt{524176}$	$\sqrt{92524}$
$\sqrt[3]{15625}$	$\sqrt[3]{70444997}$
$\sqrt[3]{130323843}$	$\sqrt[3]{19683}$
$\sqrt[4]{279841}$	$\sqrt[5]{147008443}$
$\sqrt[6]{1073741824}$	$\sqrt[7]{2494357888}$
$\sqrt[8]{1099511627776}$	$\sqrt[9]{1801152661463}$
$\sqrt[10]{16679880978201}$	$\sqrt[11]{350277500542221}$

«… buscar la rayz quadrada de vn numero, no es otra cosa sino buscar vna quantidad media proporcional entre la vnidad, y el tal numero p(ro)puesto.» (p. 329).

«Nota, quando te piden que saques rayz [cuadrada] de vna qualquiera qua(n)tidad, entenderas que la tal quantidad es area de vn quadrado, y saber sacar su rayz es querer saber el lado, o principio d(e) do el tal quadrado procedio. Y si dixessen rayz Cubica, la tal quantidad entenderas ser cuerpo Cubo.» (p. 330).

Además, el bachiller determina geométricamente la raíz cuadrada y la raíz cúbica de dos números concretos [= segmentos rectilíneos].

En el primer caso, calcula la raíz cuadrada de 12 sirviéndose de un método clásico contenido en los *Elementos* de Euclides (Libro VI, prop. 9). El bachiller describe el procedimiento como sigue (p. 339):

«…queriendo sacar la rayz de doze, tomaras doze, y la vnidad, o dos, y seys, o tres, y quatro, porque qualquiera destas par de quantidades multiplicadas, hacen doze, y assi no importara mas tomar vnas q(ue) otras, y por causa de exemplificar, siruamonos de quatro y tres. Toma agora vna linea de 4 tamaños yguales, y otra de tres, assi como la linea a. b. y la c. d. entre las quales buscaras vna linea media proporcional […] y para hallar esta linea, juntaras la a.b. y c.d. a la larga, y quedara de ambas hecha la linea e.f. sobre la qual haras medio circulo, de modo que toda la e.f. quede por diametro, como paresce en la figura l.h.m. luego del punto. i. del diámetro (que es do se junto la linea a.b. con la c.d.) saca vna perpendicular hasta

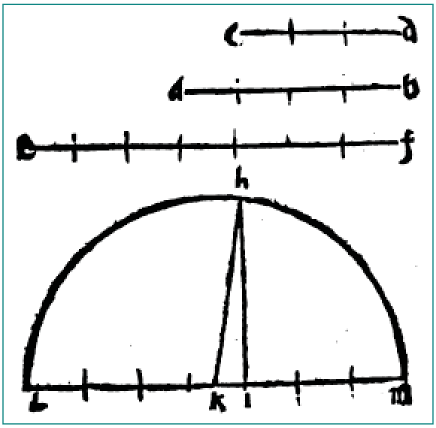


Fig. 7. Ilustración que acompaña a la extracción geométrica de $\sqrt{12}$

la circunferencia del semicirculo, como muestra la línea. h.i. y esta sera la línea proporcional, la potencia de la qual valdra doze, y por consiguiente sera la rayz del dicho doze.» (figura 7).

Pérez de Moya justifica este procedimiento con la ayuda de Euclides (corolario de la proposición 8 del libro VI y penúltima proposición del libro VI).

En cuanto a la construcción geométrica de la raíz cúbica, Moya utiliza una antigua técnica para intercalar dos medias proporcionales entre dos segmentos rectilíneos dados[21] que encontramos en la *Summa* (1494) de Luca Pacioli y en el libro segundo de la segunda parte del *General trattato di numeri, et misure* de Tartaglia. El bachiller describe la construcción pero no la demuestra[22] (p. 351):

> «Si por via de linea quisieres sacar rayz Cubica de algun numero, como si dixessen. Dame la rayz Cubica deste numero, o linea de ocho tamaños, haz della vna superficie, o figura Parallelograma, que tenga por lado vn tamaño de los ocho, que es la linea larga, como muestra a.b.c.d. con las otras lineas largas que se toquen en el angulo. b. del Parallelogramo, luego para sacar el ce(n)tro deste paralelogramo, echa vna linea del punto. b. hasta el punto. c. y otra desde el punto. a. hasta el pu(n)to. d. las quales se cortaran en el pu(n)to. g. y este sera el centro deste Parallelogramo. Luego asienta el vn pie del compas en este punto, o ce(n)tro. g. y estiende lo tanto en las lineas. a.f. y en la. d.e. que hagas dos pu(n)tos en ellas, de modo que echando vna linea del vno al otro, passe por el punto, o angulo. c. como haze la linea h.c.i. y lo que esta linea cortare de la línea. d.e. (que es lo que ay entre la. i. y la. d.) sera la rayz Cubica de la línea. b.d. que se diuidio en ocho tamaños. Y assi como la rayz Cubica de ocho, es dos, assi esta quantidad. i.d. (que dezimos ser la rayz) es dos tamaños, yguales a los ocho de la dada línea b.d. Y deste modo se sacara rayz Cubica de qualquiera numero.» Figura 8.

4.4. La aproximación de raíces

4.4.1. Aproximación de raíces cuadradas

Pérez de Moya inicia el estudio de las aproximaciones de raíces cuadradas con las palabras siguientes (p. 334):

> «Algunos, como Oroncio, quieren que sacando rayz [cuadrada] de numero sordo, que lo que sobrare se po(n)ga sobre vna raya, y la rayz que ouiere salido se doble y añada vn punto, y se ponga por denominacio(n) a lo que sobro.»

21. Siguiendo a Heath (1981), esta técnica fue utilizada por Apolonio, Herón y Filón de Bizancio.
22. En los textos de Pacioli y Tartaglia que hemos citado se ofrecen las demostraciones pertinentes.

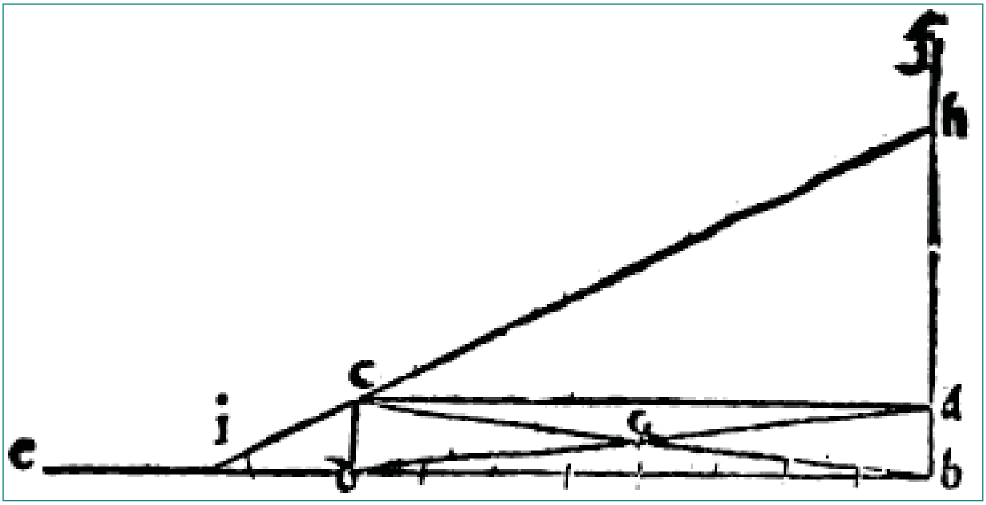


Fig. 8. Ilustración que acompaña a la extracción geométrica de $\sqrt[3]{8}$

En lenguaje simbólico moderno, la aproximación que el canónigo de la Catedral de Granada atribuye a Oroncio Fineo equivale a:

$$\sqrt{N}=\sqrt{a^2+r}\cong a+\frac{r}{2a+1},$$

donde a^2 es el mayor cuadrado contenido en N [23].

Consultando los ejemplos de aproximaciones de raíces cuadradas contenidos en la *Arithmetica practica*[24] de Fineo, se observa que la aproximación utilizada por Oroncio es:

$$\sqrt{N}=\sqrt{a^2+r}\cong a+\frac{r}{2a}$$

En consecuencia, la información facilitada por el bachiller es incierta.

Pérez de Moya también se refiere al tipo de aproximación del que se sirvió Tartaglia en los siguientes términos (p. 334):

23. En el *Libro Segundo de Arithmetica* (1557, fol. 22v), Pérez de Moya enuncia dicha regla, sin referirse a Oroncio Fineo, en los siguientes términos:

> **«Qvando** hauiendo sacada la rayz de algun numero sobrare algo pondras lo que sobrare sobre vna raya, y doblaras la rayz del tal numero y añadille vno y ponerlo has debaxo por denominador.»

24. En lenguaje simbólico moderno, los ejemplos de aproximaciones ofrecidos por Oroncio Fineo (fol. 11v) son:

$$\sqrt{204315}=\sqrt{452^2+11}\cong 452+\frac{11}{904}$$
$$\sqrt{291612}=\sqrt{540^2+12}\cong 540+\frac{12}{1080}=540+\frac{1}{90}$$

«Nicolas Tartalla quiere que al duplo de la rayz [cuadrada] no se añada vno, sino que solamente se doble la rayz que ouiere venido, y se ponga debaxo de lo que sobrare por denominacion.»

Siendo cierto que Tartaglia en su *General trattato* (Libro segundo de la segunda parte, fol. 25r) hace uso de esta aproximación[25], también lo es que, en raíces cuadradas del tipo $\sqrt{N} = \sqrt{a^2 + 2a}$,, el matemático italiano aconseja esta otra:

$$\sqrt{N} = \sqrt{a^2 + 2a} = \sqrt{a^2 + r} \cong a + \frac{r}{2a + 1}$$

A continuación, el bachiller propone otra regla de Tartaglia (*General trattato.* Libro segundo de la segunda parte, fols.25v-26r), consistente en la aplicación reiterada de aproximaciones del tipo

$$\sqrt{a^2 \pm r} \cong a \pm \frac{r}{2a},$$

y la aplica al cálculo aproximado de la raíz cuadrada de 3. En esencia, las operaciones efectuadas, expresadas en el lenguaje simbólico moderno, son:

- Primera aproximación:

$$\sqrt{3} = \sqrt{1^2 + 2} \cong 1 + \frac{2}{2 \times 1} = 1 + 1 = 2$$

- Segunda aproximación

$$2^2 = 3 + 1 \Rightarrow 3 = 2^2 - 1 \Rightarrow \sqrt{3} = \sqrt{2^2 - 1} \cong 2 - \frac{1}{2 \times 2} = 2 - \frac{1}{4} = \frac{7}{4}$$

- Tercera aproximación

$$\left(\frac{7}{4}\right)^2 = \frac{49}{16} = 3 + \frac{1}{16} \Rightarrow 3 = \left(\frac{7}{4}\right)^2 - \frac{1}{16} \Rightarrow \sqrt{3} = \sqrt{\left(\frac{7}{4}\right)^2 - \frac{1}{16}} \cong \frac{7}{4} - \frac{1/16}{2(7/4)}$$
$$= \frac{7}{4} - \frac{1/16}{7/2} = \frac{97}{56}$$

El matemático andaluz concluye (p. 335):

«Y deste modo podras proceder aproximando tanto, que quasi no sea sensible el error, mas al justo nunca llegaras, porque por tanto se dize vn numero sordo, porque quando del se saca rayz, ni quanto, ni qual sea se oye.» (p. 335).

25. «Laqual regola e di questa sorte, che pongono quel tal auanzano sopra vna vírgola, & il doppio della prima radice (gia trouata) di sotto, et tal rotto lo accompagnano con la detta prima radice sana, & tal summa concludeno esser la radice propinqua di detta prima quantita proposta.»

Después de esto, el matemático jienense calcula el valor aproximado de la raíz cuadrada de 5 utilizando un procedimiento similar al de Nicolas Chuquet (*Triparty*, 1484)[26], consistente en acotar el valor de dicha raíz mediante intervalos abiertos encajados cuyos extremos se obtienen sucesivamente a partir de la «propiedad de los valores intermedios»:

$$\frac{a}{b} < \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d} \quad (^{27})$$

Pérez de Moya pudo conocer este método a través de Etienne de la Roche (*Larismethique nouuellement composee*, 1520)[27] o de Joan Ventallol (*Pratica mercantíuol*, 1521)[28].

Por último, el bachiller propone «otra orden de sacar rayz de numeros sordos» que admite la siguiente traducción al simbolismo moderno:

$$\sqrt{N} = \frac{\sqrt{10^{2k} \cdot N}}{10^k}$$

Esta forma de aproximar se encuentra la «Aritmética práctica» de Oroncio (1555*,* fol. 12v) y Moya ya la utilizó en el *Libro Segundo de Arithmetica* (1557, fol. 23v). Advirtamos que la aplicación esta regla incluye el uso de fracciones decimales.

4.4.2. Aproximación de raíces cúbicas

En cuanto a la aproximación de las raíces cúbicas se refiere, el bachiller presenta las dos reglas siguientes:

$$\sqrt[3]{N} = \sqrt[3]{a^3 + r} \cong a + \frac{r}{3a(a+1)+1} \quad ; \quad \sqrt[3]{N} = \sqrt[3]{a^3 + r} \cong a + \frac{r}{3a^2 + 3a}$$

La segunda se describe en el *General trattato* (fols. 27v-28r) de Nicolo Tartaglia del modo siguiente:

> «Per cauare adonque la propinqua radice cuba delli numeri non cubi, caua prima la radice cuba del maggior numero cubo, che sia in quel tal numero non cubo, & quel che soprarestara a tal operatione poneralo sopra vna virgola, o vuoi dir sopra di vna leneetta, & fatto questo per formar il denominator da mettere sotto di quella trippla sempre quella radice gia cauata, e quel triplato multiplicalo per la medesima radice, & a tal multiplicatione aggiongiui il detto triplato, & tal summa ponila sotto a quella lineetta per denominator, & questo tal rotto aggiongilo alla prima radice, & tal qua(n)tita cosi co(m)posta sara la radice propinqua cuba di quel proposto numero non cubo.»

26. La *Triparty* se escribió en 1484 pero su manuscrito no fue conocido hasta que Aristide Marré lo publicó en 1881. Afortunadamente, parte de la obra de Chuquet fue plagiada por Estienne de la Roche en *Larismethique nouellement composee* (1520).

27. En los folios 32r y 32v, Estienne de la Roche propone el método de aproximación de raíces de Chuquet.

28. En el folio CXXr, Ventallol resuelve dos ecuaciones de segundo grado con una incógnita utilizando el método de aproximación de Chuquet.

Refiriéndose a estas dos aproximaciones de la raíz cúbica, Simon Stevin (1585, p. 125) dice:

> «NOTA Nicolas Tartalia traictant curieusement de ceste reste, n'aiouste poinct ce dernier 1, comme nous (auec Iuan Peris de Moya) auons faict…»

4.4.3. Aproximación de raíces de índices superiores

Para las raíces de índices entre 4 y 11, Pérez de Moya se sirve de aproximaciones que admiten la siguiente generalización

$$\sqrt[n]{N} = \sqrt[n]{a^n + r} \cong a + \frac{r}{\binom{n}{1} a^{n-1} + \binom{n}{2} a^{n-2} + \cdots \binom{n}{n-1} a}$$

Tartaglia utiliza este tipo de aproximaciones en su *General trattato*.

4.5. Las pruebas de las raíces

En todos los casos en que se aplica (raíces de índices 2, 3, 4, 5 y 6), la prueba de la extracción de la raíz enésima de un número natural consiste en elevar a la enésima potencia la raíz hallada y añadir el resto al resultado obtenido. En el caso de la raíz censicuba [= raíz sexta], el bachiller puntualiza (p. 366):

> «La prueba destas rayces, sera conuertir la tal rayz censicuba, multiplicando seys numeros yguales, a la tal rayz, vnos por otros, y si el vltimo producto, añadiendo lo que sobrare (si sobrare algo) fuere tanto como el numero de quien se ouiere sacado la tal rayz estara buena, y si no fuere tanto, sera falsa, y sera necessario hazer la otra vez, o otras, hasta q(ue) salga deste modo.»

5. CONCLUSIONES

A la luz de lo expuesto en los parágrafos precedentes, podemos afirmar que el libro quinto (*Trata de varias rayzes de numeros*) del primer tomo del *Tratado de Mathematicas* presenta las siguientes mejoras o retrocesos en relación a las aritméticas españolas y extranjeras del siglo XVI que hemos examinado.

1) La explicación detallada de la extracción de las raíces de índices entre 2 y 11, no la hemos encontrado en las aritméticas consultadas, excepción hecha del *General trattato di numeri et misure* (1556 – 1560) de Tartaglia. En consecuencia, podemos concluir que, en cuanto al detalle y al número de casos estudiados, la exposición de Pérez de Moya es superior a la que aparece en la mayoría de los manuales del siglo XVI.
2) El bachiller sólo presenta la justificación del procedimiento utilizado para la extracción numérica de la raíz cuadrada y la raíz cúbica (cuadrado del binomio y cubo del binomio). En esto el tratamiento de Pérez de Moya es inferior al de

Tartaglia que, en forma retórica, enuncia el desarrollo de todas las potencias del binomio relacionadas con la extracción de las raíces de índices entre 2 y 11.

3) La construcción geométrica de la raíz cúbica que Pérez de Moya presenta, sin demostración alguna, no es frecuente en los manuales renacentistas y no aparece en las aritméticas españolas del XVI que hemos consultado. En el *General trattato di numeri et misure*, Tartaglia ofrece una prueba de dicha construcción.
4) El método de Chuquet para la proximación de la raíz cuadrada, que Pérez de Moya incluye en su obra, no aparece en forma explícita, salvo en la *Larismethique nouellement compose* (1520) de Estienne de la Roche y la *Pratica mercantíuol* (1521) de Joan Ventallol, en ninguna de las aritméticas españolas y extranjeras del XVI que hemos consultado.
5) Las aproximaciones de las raíces de índices entre 4 y 11, que el bachiller debió tomar prestadas de Tartaglia, no las encontramos en las aritméticas españolas del XVI que hemos estudiado.

A partir de las consideraciones anteriores establecemos las dos conclusiones siguientes:

a) El tratamiento que hace Juan Pérez de Moya de la extracción numérica de raíces es superior al que se encuentra en las aritméticas españolas del XVI, anteriores a 1573.
b) El tratamiento que hace Juan Pérez de Moya de la extracción numérica de raíces es inferior al que Tartaglia desarrolla en su *General trattato di numeri et misure*. Sin duda alguna, el bachiller se inspiró en dicha obra para escribir el libro quinto del primer tomo del *Tratado de Mathematicas*.

6. AGRADECIMIENTOS

El presente trabajo se ha realizado dentro del proyecto "La difusión del conocimiento matemático en el nacimiento de la imprenta: descripción y análisis comparado de aritméticas del siglo XVI escritas en castellano" EDU2011-27168 financiado por en Ministerio de Economía y Competitividad de España.

REFERENCIAS

Andres, J. (1515). *Sumario breue d(e)la pratica dela Arithmetica d(e) todo el curso de larte merca(n)tiuol bien declarado: el qual se llamamaestro de cuento.* Valencia: Juan Joffre.

Apianus, P. (1527). *Eyn newe und wolgegründte underweysung aller Kauffmanss Rechnung in dreyen Büchern.* Ingolstadt.

Aurel, M. (1552). *Libro primero, de Arithmetica Algebratica.* Valencia: Ioan de Mey.

Cardano, G. (1539). *Practica Arithmetice, & Mensurandi singularis.* Mediolani: Bernardini Calusci

Chuquet, N. (1881). *Le Triparty en la Science des nombres, par maistre Nicolas Chuquet, Parisien, publié d'après le manuscrit fonds français nº1346 de la Bibliothèque Nationale*

de Paris et precédé d'une notice par M. Aristide Marré. Rome: Imprimerie des Sciences Mathématiques et Physiques.

Euclides (1537). *Evclidis Megarensis mathematici clarissimi Elementorum Geometricorum. Lib. XV. Cum expositione Theonis in prioris XIII a Bartholomaeo Veneto latinitate donate, Campani in omnes,& Hypsiclis Alexandrini in duos postremos.* Basilea: Iohannem Hervagivm.

Fineo, O. (1532). *Protomathesis: Opus uarium, ac scitu non minus utile quam iucundum, nunc primum in lucem foeliciter emissum.* París: (sin editor).

Fineo, O. (1555). *De Arithmetica practica, libri quatuor.* París: Michaelem Vascosanum.

Heath, T. (1981). *A history of Greek Mathematics* (Volume I). New York: Dover.

Meavilla, V. (2005). Historia de la Educación Matemática en España: el contenido algebraico de la *Arithmetica practica, y specvlatiua* de Juan Pérez de Moya (ca. 1512 – 1596). *Revista Brasileira de História da matemática.* Vol. 5, nº 9, pp. 19-35.

Meavilla, V. y Oller, A.M. (2014). El simbolismo algebraico en tres álgebras españolas del siglo XVI. *NÚMEROS*. 87, pp. 59-68.

Nicolas, G. (1541). *Tratado da pratica Darismetica*. (sin lugar): Luis Rodriguez.

Ortega, J. de (1512). *Conpusicion de la arte de la arismetica y juntamente de geometria: fecha por…* León: en casa de Maistro Nicolau de Benedictis: por Joannnes Trinxer librero de Barcelona.

Pacioli, L. (1494). *Summa de Arithmetica,Geometria, Proportioni et Proportionalita.*Veneza: Paganini.

Pérez De Moya, J. (1557). *Libro Segundo de Arithmetica*. Salamanca: Iuan de Canoua.

Pérez De Moya, J. (1562). *Arithmetica practica, y specvlatiua*. Salamanca: Mathias Gast.

Pérez De Moya, J. (1573). *Tratado de Mathematicas en qve se contienen cosas de Arithmetica, Geometria, Cosmographia, y Philosophia natural. Con otras varias materias, necessarias a todas artes Liberales y Mechanicas.* Alcalá: Iuan Gracian.

Picatoste y Rodríguez, F. (1891). *Apuntes para una biblioteca científica española del siglo XVI.* Madrid: Imprenta y fundición de Manuel Tello.

Roche, E. de la (1520). *Larismethique nouellement composee*. Lyon: Constantin Fradin.

Sánchez, J. A. (1929). *Las Matemáticas en la Biblioteca del Escorial.* Madrid: Imprenta de Estanislao Maestre.

Stevin, S. (1585). *L'Arithmetique.* Leyde: Christophe Plantin.

Stifel, M. (1544). *Arithmetica integra.* Norimbergae: Iohan Petreium.

Tartaglia, N. (1556–1560). *General trattato di numeri et misure.* Vinegia: Curtio Troiano.

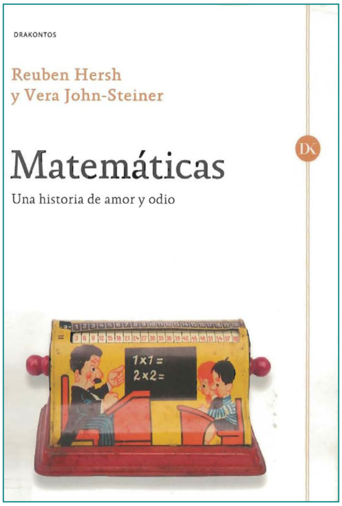
Texeda, G. de (1546). *Suma de Arithmetica pratica y de todas mercaderias con la horden de contadores*. Valladolid: Francisco Fernandez de Cordova.

Ventallol, J. (1521). *Pratica mercantíuol.* Lyo: Joan de la Place.

Ycíar, J. (1549). *Libro intitulado Arithmetica practica/ muy vtil y prouechoso para toda persona que quisiere exercitar se en aprender a contar.* Zaragoza: Pedro Bernuz.

Épsilon - *Revista de Educación Matemática* 2014, Vol. 31(3), nº 88, 89-90

MATEMÁTICAS. Una historia de amor y odio



Reuben Hersch
Vera John-Steiner
Editorial: Crítica
Marzo 2012 (primera edición)
ISBN: 978-84-989229-8-1
463 páginas

La colaboración entre un matemático, Reuben Hersch, y una experta en lingüística y educación, Vera John-Steiner, permitió la creación de este libro, que pretende dar una visión más social y emocional de las matemáticas y su estudio.

Entre sus páginas, los autores abordan una amplia variedad de mitos sobre esta disciplina y sus participantes, siempre a través de anécdotas, comentarios y biografías de reputados matemáticos.

En concreto, desde esta perspectiva, el libro indaga sobre los jóvenes matemáticos y el origen de su talento, la cultura matemática, el apoyo que esta disciplina supuso para muchos matemáticos en sus peores momentos, la adicción a las matemáticas y los peligros que esta ha podido conllevar, las amistades entre los matemáticos y las comunidades

que se han formado a lo largo de los años, el papel de las mujeres en matemáticas y la importancia o no de la edad para investigar en esta materia.

Finalmente, plantea las matemáticas en el contexto educativo; primero desde el punto de vista de dos profesores con modelos de enseñanza contrarios, y después desde el de los alumnos y el frecuente amor u odio que se produce en sus relaciones con esta asignatura.

En definitiva, el libro aporta un gran número de curiosidades y detalles interesantes, e incluso divertidos, tanto sobre las matemáticas como sobre aquellos que han trabajado en este campo. Convirtiéndose en una obra altamente recomendable para todo aquel que quiera conocer más sobre las matemáticas en un tono informal y anecdótico, y especialmente para los docentes, que podrán utilizarla en el aula para ayudar a sus alumnos a conocer y conectar mejor con esta materia y con las personas que dedicaron o dedican su vida al estudio de ella.

María José Madrid
Universidad de Salamanca

Épsilon - *Revista de Educación Matemática* *2014, Vol. 31(3), nº 88, 91-91*

Agradecimientos a los evaluadores

En este último número del año 2014, desde Epsilon, Revista de Educación Matemática, agradecemos la colaboración de aquellos colegas que aportaron su conocimiento y tiempo en la revisión y arbitraje de los manuscritos propuestos a la revista. Mediante sus comentarios y sugerencias ayudan a obtener y mantener una calidad de los artículos publicados durante el año 2014.

- Agustín Carrillo
- Alexander Maz
- Bernardo Gómez
- Carlos de Castro
- Carmen León
- Carolina Carrillo
- Francisco España
- Francisco Juan Y Ribaya
- Inmaculada Serrano
- Isidoro Segovia
- Jesús Salinas
- José Galo
- José Mª Pavia
- José Ortiz
- Liliana Mabel Tauber
- Mª José González
- Mª Jesús Salinas
- Miguel Villaraga
- Noelia Noemí Jiménez
- Nora Gatica
- Rafael Bracho
- Rafael Rubio
- Roberto Vidal
- Verónica Albanese