87

Vol. 31 (2)
2014

epsilon

Revista de Educación Matemática

Editada por la S.A.E.M. "THALES"

Portada: Fotos ganadores VII CONCURSO DE FOTOGRAFÍA MATEMÁTICA 2014.
SOCIEDAD ANDALUZA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA THALES
(Delegación Provincial de Almería) 1er Ciclo SECUNDARIA (1º, 2º)

Círculos y óvalos, Elena Galera Fernández.
IES Cura Valera (Huércal-Overa)

Lemniscatas vegetales, Isabel Leonor Suárez Fernández.
IES Cura Valera (Huércal-Overa)

Huracán numérico, Daniel Cortés García
IES Mediterráneo (Garrucha)

La revista Epsilon está reseñada en:
IN-RECS, Dialnet, Latindex, RESH, DICE, MathEduc
y Base de Datos del Centro de Documentación Thales.

epsilon 87

Revista de Educación Matemática

Sociedad Andaluza de Educación Matemática "Thales"

Página de la revista: http://thales.cica.es/epsilon
Revista: epsilon@thales.cica.es

Edita
Sociedad Andaluza de
Educación Matemática "Thales"
Centro Documentación "Thales"
Universidad de Cádiz
C.A.S.E.M.
11510 PUERTO REAL (Cádiz)

Maquetación e impresión
Utrerana de Ediciones, s.l.
Cristóbal Colón, 12
41710 Utrera (Sevilla)

Depósito Legal
SE-421-1984

ISSN:
2340-714X

Período
2er cuatrimestre 2014

Suscripción
ESPAÑA: 42,00 euros
PAÍSES DEL EURO: 63,00 euros
RESTO DE PAÍSES: 90 $ USA
(3 NÚMEROS AL AÑO)

S.A.E.M. THALES

Sixto Romero Sánchez
Presidente
Francisco España Pérez
Vicepresidente
Mª Belén Sepúlveda Lucena
Secretaría General
José María Vázquez de la Torre Prieto
Secretario de Administración y Tesorería

SEDE

Facultad de Matemáticas
Edif. de la E.S.I. Informática. Ala L2
Avda. Reina Mercedes, s/n.
Aptdo. 1160
41080 SEVILLA
Tlfno. 954 62 36 58 - Fax: 954 236 378
e-mail: **thales@cica.es**

SEDE ADMINISTRATIVA DE LA SOCIEDAD Y REVISTA

Centro de Documentación THALES
Facultad de Ciencias. Departamento de Matemáticas
Campus del Río San Pedro, s/n
Torre Central, 4ª Planta
11510 Puerto Real (Cádiz)
Tlf. y Fax: 956 012 833
e-mail: **thales.matematicas@uca.es**

ALMERÍA

Juan Guirado Granados
Delegado Provincial

CÁDIZ

Paloma Pascual Albarrán
Delegada Provincial

CÓRDOBA

Marina A. Toledano Hidalgo (provis.). *Delegado provincial*

GRANADA

Margarita García Schiaffino
Delegado Provincial

HUELVA

Mª Rocío Benítez Cambra (provis.). *Delegada provincial*

JAÉN

Mª Eugenia Ruiz Ruiz
Delegada provincial

MÁLAGA

Salvador Guerrero Hidalgo
Delegado provincial

SEVILLA

Ana Mª Martín Caraballo
Delegada Provincial

SUMARIO / CONTENTS

EDITORIAL

En la revista Epsilon hemos tratado de mantener un equilibrio en la orientación de los artículos que se publican, dando cabida tanto a la investigación como a las experiencias y actividades de aula porque ambas son importantes en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas; esto sin dejar de lado las reflexiones y otros tipo de artículos que si bien no tratan de la enseñanza, sí tienen relación con la propia matemática. Sin embargo, son las colaboraciones sobre investigación las que más se envían a la revista. Son escasos los artículos que sobre las demás líneas llegan a Epsilon. El profesorado, que es nuestro principal lector y quien está en contacto directo con el alumnado, utilizando ingentes recursos y estrategias en sus clases, es un tanto reticente a compartir sus experiencias. Desde estas líneas quiero hacer un llamado a lo socios de THALES y a los demás profesores de matemáticas para que difundan sus experiencias con materiales, metodologías o innovaciones a través de la revista Epsilon.

Alexander Maz
Director

Épsilon - *Revista de Educación Matemática* *2014, Vol. 31(2), nº 87, 9-24*

"+ $\overline{\text{X}}$" y las matemáticas. Su relación en el currículo de educación primaria

Antonia Ramírez García
Facultad de Ciencias de la Educación
Universidad de Córdoba (España)
Paula Renés Arellano
Facultad de Educación
Universidad de Cantabria (España)
Sonsoles Guerra Liaño
European Center for Disease Prevention and Control
(Estocolmo, Suecia)

Resumen: *Las Matemáticas constituye un pilar fundamental del currículo de los sistemas educativos. El desarrollo de las competencias básicas para la educación obligatoria recoge entre otras, la necesidad de trabajar en el aula la comunicación lingüística, matemática, tratamiento de la información y competencia digital. En el presente trabajo se analiza el currículo de Matemáticas en Educación Primaria en las dicecisiete comunidades autónomas y la presencia de la competencia mediática en el mismo. El objetivo es identificar en los objetivos, contenidos y criterios de evaluación del área la presencia de la competencia digital. En el análisis se han empleado seis dimensiones de la competencia mediática: lenguajes, tecnología, procesos de interacción, procesos de producción y difusión, ideología y valores y estética en Educación Primaria. Los resultados indican la presencia de la competencia mediática en dicho currículo y un tratamiento desigual entre comunidades autónomas.*

Palabras clave: *Competencia mediática, medios de comunicación, currículo, matemáticas, educación primaria.*

“+ $\overline{X}$” and Mathematics. Relationship in Primary Education curriculum

Abstract: *Mathematics is a important column of the curriculum of educational systems. The development of basic skills for compulsory education includes among others, the need to work in the classroom linguistic communication, mathematics, information processing and digital competence. This paper analyzes the Mathematics curriculum in primary education and the presence of media competence in it. The aim is to identify the objectives, content and assessment criteria area the presence of digital competition. In the analysis it was used six dimensions of media competence: language, technology, processes of interaction, production and distribution processes, ideology and aesthetic values and Primary Education. The results indicate the presence of media competence through the descriptors indicated in the curriculum of Mathematics in Primary Education.*
Keywords: *Media literacy, mass media, curriculum, mathematics, educational background.*

1. INTRODUCCIÓN

Desde hace décadas el escuchar la palabra Matemáticas en el colegio nos hacía temblar. A cualquier niño o niña que se le preguntara por esta asignatura, la respuesta era siempre la misma: “las Matemáticas no me gustan, son difíciles, no las entiendo, se me dan mal”. Si ahora volviésemos a indagar sobre el tema, ¿las respuestas serían iguales? Pensamos que sí.

La actitud del alumnado de educación primaria hacia las matemáticas ha sido estudiada recientemente por Teser y Karasel (2010) en el Norte de Chipre, destacando que los niños se sienten felices realizándolas, pero que no se dedicarían a ellas en su tiempo libre, preferirían practicar deporte, jugar a videojuegos o ver la televisión. En contrapartida, Yook-Kin Loong y Herbert (2012) han apreciado la disminución de matriculaciones en asignaturas de Matemáticas cuando éstas se convierten en una propuesta opcional, algunos motivos que el alumnado aduce para explicarla es la escasa presencia de las matemáticas en su vida cotidiana. Estudios como este y los resultados de las pruebas PISA (2012) o TIMMS (2011) son un claro ejemplo de que algo se está haciendo mal.

Por otro lado, si preguntamos a las familias por las matemáticas (Díez-Palomar y Molina, 2010), la mayoría coincidirían en afirmar que es importante trabajar coordinadamente tanto la familia como la escuela en el aprendizaje de este área curricular y que, además, junto con el área de Lengua se convierten en los ejes fundamentales del currículo (Rico, 2007). Una opinión idéntica podrían tener muchos docentes, quienes abogan por una enseñanza de las matemáticas adaptada a cada colectivo, atractiva y sustentada en procesos de comprensión e interiorización (Cantoral, 2010; Valdemoros, 2010).

Sin embargo, esta importancia curricular de las matemáticas no se transfiere a la vida diaria, “ a pesar de que la sociedad en que vivimos, una sociedad del conocimiento, cada vez tiene un componente mayor de matemáticas, del que no siempre nos damos cuenta” (Corbalán y Salar, 2009, p. 42).

El estudio de Yook-Kin Loong y Herbert (2012) pone de relieve que la inclusión de la Web en las clases de matemáticas constituye un revulsivo para el alumnado, puesto que en su día a día este medio de comunicación es utilizado para obtener e intercambiar todo tipo de información. ¿Es necesario, pues, incorporar nuevos recursos al proceso de enseñanza y aprendizaje de un área como las Matemáticas?

El cine no es ajeno a las Matemáticas, numerosas películas las han utilizado como recurso para escribir un guión de éxito, algunos ejemplos recientes son *Los crímenes de Oxford* (Álex de la Iglesia, 2008), *La habitación de Fermat* (Luis Piedrahita, 2007), *La verdad oculta* (John Madden, 2006) *Una mente maravillosa* (Ron Howard, 2001), otros más lejanos han sido *Perros de paja* (Sam Peckinpah, 1971), *Galileo, Galilei* (Joseph Losey, 1974), *Cube* (Vincenzo Natali, 1997) o *Pi, fe en el caos* (Darren Aronofsky, 1998). ¿Es ahora el momento de que las Matemáticas usen a los mass media como recurso para la enseñanza y aprendizaje de las mismas?

2. COMPETENCIAS, MASS MEDIA Y MATEMÁTICAS

La Ley Orgánica 2/2006, de 3 de mayo, de Educación (LOE, 2006) incorpora las competencias básicas como nuevo término que los docentes han de emplear en todo el estado español. A partir de esta norma legal surgió el Real Decreto 1513/06, de 7 de diciembre, que refleja las enseñanzas mínimas de la etapa de Educación Primaria que han de ser aplicadas en todas las comunidades autónomas. Es por ello, que progresivamente los diversos sectores de la comunidad educativa han ido familiarizándose con ocho competencias básicas reflejadas en ambos documentos y que han de desarrollar el alumnado al finalizar su escolarización obligatoria. Las citadas competencias son las siguientes: comunicación lingüística, matemática, conocimiento y la interacción con el mundo físico, tratamiento de la información y competencia digital, social y ciudadana, cultural y artística, aprender a aprender y autonomía e iniciativa personal.

De todas estas competencias podemos destacar la relativa a la competencia digital. En torno a ella, Monereo (2005, p. 6) explica que "Internet es un escenario apropiado para enseñar esas competencias porque, dado el estado actual de crecimiento y expansión entre los jóvenes, se está convirtiendo en el medio de socialización «natural» y, con toda seguridad, en un medio privilegiado para su desarrollo profesional". Sin embargo, esta sociedad global no se encuentra solo representada en las Tecnologías de la Información y la Comunicación (TIC), sino también en la evolución que han sufrido los medios de comunicación bajo el desarrollo de aquellas. Como hemos mencionado, el currículo escolar en nuestro sistema educativo contempla ocho competencias básicas, entre las que no se incluye la competencia mediática. Sin embargo, el artículo 37 de la Directiva 2007/65/CE propone a los Estados una alfabetización en medios que favorezca la capacitación de las personas (http://eur-ex.europa.eu/LexUriServ/LexUriServ.do?uri=OJ:L:2007:332:0027:0045:ES:PDF). A partir de esta resolución enmarcamos y justificamos el estudio de la competencia mediática en el alumnado de educación primaria.

La competencia en comunicación audiovisual ha sido definida como "la capacidad del individuo para interpretar y analizar desde la reflexión crítica las imágenes y los mensajes audiovisuales y para expresar con una mínima corrección en el ámbito comunicativo"

(Ferrés, 2007, p. 102). Por su parte, González, Sedeño y Gozálvez (2012, p. 122) afirman que "la competencia audiovisual está íntimamente relacionada con la competencia mediática, de modo que pueden incluso identificarse ambas categorías en un entorno en el que es fundamental el conocimiento de los medios de comunicación y de las tecnologías multimedia".

La importancia de los medios y de las TIC ha sido evidenciado por la asesora técnica del IFFIE, Natalia Bernabeu (2010), quien afirma que la representación de los medios de comunicación en el currículo educativo permite su implementación a través de tres perspectivas: la educación con medios, la educación en medios y la educación ante los medios. En la Tabla 1 se ofrecen los usos más frecuentes de los medios de acuerdo con este triple enfoque, así como las competencias básicas con las que se vinculan.

Tabla 1. Usos frecuentes de los medios de comunicación.
Fuente: Adaptado de Bernabeu (2010).

Enfoque	Usos	Competencias relacionadas
Educación con medios	– Utilización de los medios como fuente de información y documentación en las distintas áreas: búsquedas en Internet, investigación en bibliotecas o hemerotecas, creación de bibliotecas o hemerotecas escolares –reales o digitales–, realización de ficheros y monografías, adquisición de técnicas de trabajo científico y recogida, selección, archivo, transmisión y recuperación de la información	– Todas, en especial, tratamiento de la información y competencia digital y competencia de aprender a aprender.
Educación en medios	– Aprendizaje de los conceptos básicos de la educación mediática. – Los medios son objeto de estudio en las distintas áreas.	– Competencia en comunicación lingüística. – Competencia cultural y artística.
Educación ante los medios	– Uso reflexivo de los medios. – Desarrollo de actitudes críticas ante sus mensajes. – Fomento de una postura activa ante ellos. – Trabajo de los valores de una ciudadanía global a partir del análisis de la actualidad.	– Competencia social y ciudadana. – Autonomía e iniciativa personal.

Al abordar el estudio de las competencias, hemos podido contabilizar más de cien definiciones de este término, entre ellas la de Goñi (2009, p. 36), quien expresa que una competencia es un "uso eficiente y responsable del conocimiento para hacer frente a situaciones problemáticas relevantes". En torno a esta definición concluye que no se puede separar el "uso del conocimiento" del "contexto de uso". Para explicar esta idea recurre a diferentes símiles matemáticos, por ejemplo, a través del currículo de matemáticas, el alumnado de educación primaria aprende a sustituir variables en una fórmula, como es el caso del siguiente problema: "Averigua el área de un cuadrado de 12 cm de lado, sabiendo que la fórmula es $A=l^2$". Si el estudiante consigue responder que el resultado es 144 cm^2, podremos afirmar que en este contexto el alumno es competente, pero, ¿lo será en otro? A su juicio, en los centros educativos se enseña matemáticas para saber más matemáticas y saber usarlas en contextos académicos. Esto supone una limitación del contexto de uso, excluyendo otros propuestos por el proyecto PISA como el personal, educativo, profesional, público y científico (académico).

En esta misma dirección apuntaba Zanocco (2006, p. 139) al revisar los principios y estándares de las matemáticas escolares y las cifras de la OCDE, manifestando que: "el 11% de los alumnos de la OCDE no es capaz de resolver ni siquiera ejercicios de nivel 1. Dichos alumnos saben realizar operaciones matemáticas elementales, pero son incapaces de utilizar las destrezas matemáticas en una situación determinada (…)".

Por ello, Goñi (2009, p. 43) plantea la inclusión de los contextos de uso en el currículo, de tal forma que se aborden todos ellos desde la escuela. Así, propone diferentes contextos como el personal-familiar, social, profesional, escolar y académico.

Nuestra línea de investigación, enfocada al estudio y aplicación de la competencia mediática, y en este caso, su importante relación con la competencia matemática, encuentra en estos supuestos teóricos una fundamentación justificada y sustentada para apoyar nuestros planteamientos científicos en el estudio. Por ello, de los contextos expuestos por Goñi (2009), vamos a ejemplificar los dos primeros, puesto que se relacionan en mayor medida con el currículo de la etapa que hemos analizado en nuestra investigación.

a) Contexto personal-familiar. Desde este escenario, vamos a plantear un problema en el que nos encontremos ante una competencia matemática no académica. En el periódico he visto que a las 18:00 horas se emitirá por televisión la película que quería ver. El film finalizará a las 19:50. Ese día tengo entrenamiento de fútbol y no salgo hasta las 18:45, tendré que visualizar en videostreaming la película en mi nueva Smart TV. ¿Con cuánto tiempo de retraso llegaría a ver la película? ¿Puedo estimar cuánto durará la película en función de la información que me da el periódico? ¿A qué hora programaré el televisor para que se grabe la película desde el principio? ¿Tendré que estimar adelantos o retrasos en la hora de emisión?
b) Contexto social. En cualquier noticia de la radio, televisión, periódico o Internet encontramos referencias numéricas como las que ofrece el Diario Córdoba. En la imagen podemos observar cómo de diez noticias destacadas, siete contienen números. A modo de ejemplos, la noticia seleccionada para este ejercicio, en la que se manejan cifras con respecto al número de aparcamientos para coches y cantidades de plazas para ubicar los automóviles, u otras informaciones incluidas en el periódico


Diario Córdoba | Martes, 23 de abril de 2013 | Edición impresa
Córdoba 11/23ºC | Zona Usuarios

CÓRDOBA Local

Titulares | Boletín | Hemeroteca | Versión Móvil | Buscar

Noticias | Opinión | Deportes | Crónicas | Multimedia | Más actualidad | Servicios | Canales | Participa

Córdoba | Provincia | Andalucía | Contra | Cuadernos del Sur | España | Internacional | Economía | Cultura | Sociedad | Toros | Última Hora

ENCARNACIÓN 11, FUERA DE CONCURSO

Los patios de Alcázar Viejo y la Judería acaparan más reservas

Hasta la fecha, la plataforma ha apartado unos 13.000 pases . Nueve recintos de los catorce excluidos han presentado reclamación

Twittear | Me gusta 0 | 3 Comentarios | añade a tu blog | valorar | imprimir | enviar

Araceli R. Arjona 23/04/2013

El Alcázar Viejo, la Judería y Santa Marina son las tres zonas hasta la fecha más demandadas por las personas que han solicitado reserva para entrar en los patios de Córdoba durante alguno de los dos fines de semana del concurso, que se prolongará entre el 8 y el 19 de mayo, para los cuales la plataforma que gestiona la web entradaspatioscordoba.com ha reservado ya casi 13.000 pases. Las personas interesadas en conseguir entradas pueden hacerlo en internet, hasta un máximo de 10 pases. La visita dura una media de entre 1,5 y 2 horas.

Mientras tanto, los preparativos para el concurso siguen adelante. Fuentes municipales informaron ayer de que esta semana, a partir del miércoles, tendrán lugar una serie de reuniones con los propietarios de recintos para explicarles todo lo relativo al sistema de reservas y cómo se gestionará el acceso a los patios durante los fines de semana. Un sistema que, según se puede leer en la web, no evitará las colas, aunque se prevé "minimizarlas".

La web para la reserva es entradaspatioscordoba.com.
SÁNCHEZ MORENO

Noticias relacionadas

Las noticias más...

Leídas | Valoradas | Comentadas | Enviadas

1. Una firma invertirá 2,7 millones en construir un centro deportivo
2. Muere un hombre de 39 años atropellado en Espiel
3. Las preguntas del cordobesismo
4. Proponen un nuevo diseño de recinto ferial más dinámico
5. CÓRDOBA sortea 15 entradas dobles para el I Like Festival
6. Muere un hombre de 39 años atropellado en la N-432
7. Exdirector general de Unicaja, nuevo presidente de Cajasur
8. Pastrana dice adiós tras 15 años y en un momento difícil para UGT-A
9. La población de Córdoba baja por segundo año consecutivo
10. Se enfrenta a 8 años de cárcel por abusar de su sobrina

Figura 1. Noticia.
Fuente: http://www.diariocordoba.com/noticias/cordobalocal/los-patios-de alcazar-viejo-y-juderia-acaparan-mas-reservas_799061.html

como la temperatura máxima y mínima que tendrá la ciudad. Todas estas informaciones son susceptibles de abordarse desde la competencia matemática. Para Goñi (2009, p. 45) "la comprensión de esta información tiene una importancia social porque todas las personas deben ser capaces de comprender lo que se presenta en los medios de comunicación. Es una condición de acceso a la información, a la formación de opinión, al empleo, al desarrollo cultural, al disfrute del ocio, etc.".

A través de estos planteamientos puede implementarse en el currículo del área de matemáticas la educación mediática como elemento integrador. Concretamente, O'Farrill (2000, p. 105) indicó algunas de las posibilidades que ofrecían los productos multimedia y de su potencial relación con las Matemáticas; manifestando que "la información de un producto multimedia llega al destinatario en tres formas básicas: texto, imágenes (estáticas y animadas) y sonido”, aunque todas ellas se combinen entre sí, prevalece una sobre otra, en la mayoría de las ocasiones la componente visual predomina sobre las demás formas y esta produce “un mayor efecto sobre el receptor”, sobre todo, si las imágenes son animadas. A su juicio, la relación entre los multimedia y las matemáticas se puede ejemplificar como “en la expresión de los enunciados de los problemas como enunciados hipermedia”, puesto que contribuye a enriquecer la comprensión del alumnado sobre los problemas y a minimizar el nivel de ambigüedad presente casi siempre en las distintas frases de los problemas.

Como muestra de investigaciones recientes del ámbito educativo que indaguen sobre la temática que nos ocupa, encontramos el estudio realizado por Climent, Romero, Carrillo Muñoz y Contreras (2013) en el que se emplea el vídeo en el aula universitaria como un recurso para comprobar el desarrollo del pensamiento crítico entre los futuros maestros en torno a las actuaciones del alumnado de educación primaria ante la introducción del concepto de división. En esta línea, encontramos también al alumnado del instituto Euclides Pineda del Mar, en Barcelona (Rodón, 2010) que utilizan desde el curso 2007/08 el Canal Euclides Televisión para desarrollar las diferentes competencias básicas, entre ellas, la matemática (http://www. livestream.com/euclides_televisio). Por su parte, en la comunidad autónoma de Aragón se ha puesto en marcha la iniciativa *Matemática Vital* (www.matematicavital.com) para acercar el área a la comunidad educativa a través de talleres audiovisuales (Corbalán y Salar, 2009).

Otro estudio reciente que fundamenta nuestro trabajo es el realizado por Lozano (2011, p. 5), quien publica un estudio sobre el desarrollo de la competencia matemática a través de la interdisciplinariedad de otras competencias basándose en la aplicación de una webquest dirigida al alumnado de sexto de educación primaria. En ella se planteaba al alumnado “situaciones de medida que no podían resolver con un instrumento de medida (cinta métrica, rodómetro,..) y los alumnos tenían que buscar, a través de los recursos que se les adjuntaban, una estrategia diferente para medir”.

En esta misma línea, Pilli y Aksu (2013) han comprobado como el empleo de software educativo para Matemáticas como *Frizbi Mathematics 4* contribuye a mejorar los rendimientos en el área, las actitudes hacia las Matemáticas y hacia el aprendizaje asistido por ordenador.

Un paso más lo ha dado Tsuei (2012), quien ha puesto de manifiesto la efectividad para el desarrollo de destrezas matemáticas el empleo de la tutorización por pares a través de Internet. Este sistema ha posibilitado que niños de 11 y 12 años aumenten sus destrezas en aritmética y la aplicación de diferentes tipos de preguntas, así como un incremento de su autoestima.

Las conclusiones son claras: los elementos multimedia facilitan el aprendizaje y las nuevas formas de comunicación resultan una herramienta eficaz para desarrollar la competencia matemática.

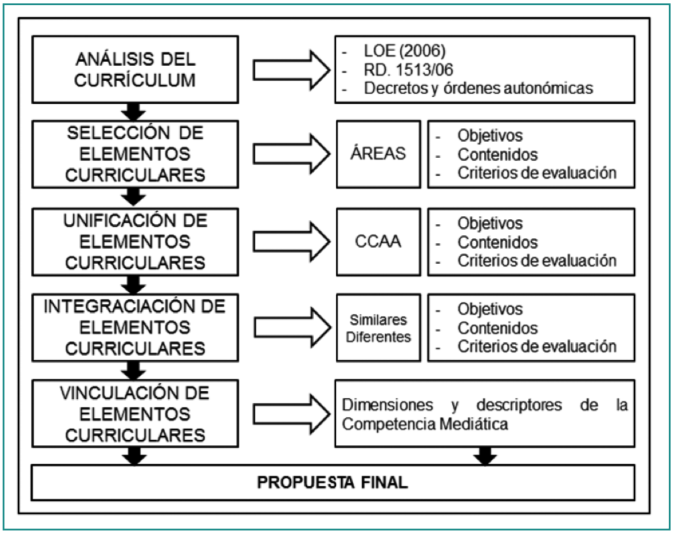


Figura 2. Proceso de vinculación. *Fuente: Elaboración propia.*

3. OBJETIVOS Y PLANTEAMIENTO METODOLÓGICO

Esta investigación comienza tomando como pilar esencial la referencia a las seis dimensiones propuestas por Ferrés (2007) -lenguajes, tecnología, procesos de interacción, procesos de producción y difusión, ideología y valores y estética- y sus correspondientes subdimensiones e indicadores (Ferrés y Pisticelli, 2012).

El segundo referente lo constituye el currículo escolar del alumnado de Educación Primaria de todas las comunidades autónomas en España, concretamente el referido al área de matemáticas.

El objetivo planteado en el estudio va más allá, ya que consiste en determinar la presencia o ausencia de la competencia mediática en el currículo de la etapa de Educación Primaria, concretamente en el segundo ciclo de la etapa. Asimismo, el interrogante de investigación que se deriva de este objetivo tiene presente una serie de afirmaciones realizadas por distintos autores (Aparici, Campuzano, Ferrés y García, 2010; Camps, 2009 y Tucho, 2008) sobre la escasa presencia de la competencia mediática en el currículo de las etapas de enseñanza obligatoria. Desde esta premisa, las investigadoras se plantean una serie de interrogantes sobre la relación entre la Competencia Mediática y Matemática. Algunas de estas preguntas son: ¿cuál es la presencia real de la competencia mediática en las áreas curriculares que el alumnado de educación primaria ha de cursar? ¿el área de Matemáticas contribuye al desarrollo de la competencia mediática?

Esta revisión se ubica en el marco del Proyecto I+D EDU2010-21395-C03-03 como fase previa al diseño de un cuestionario destinado a medir la competencia mediática del alumnado de cuarto de educación primaria. En este Proyecto han participado las comunidades autónomas de Andalucía, Cantabria, Galicia, La Rioja, Murcia y Valencia.

El método empleado en este estudio ha sido el análisis documental, ya empleado por Koliopoulos, Adúriz-Bravo y Ravanis (2011) en los currículos y programas de ciencias. El proceso seguido se expone en la Figura 2.

Todas estas fases se han seguido de manera sistemática y rigurosa, en la tercera fase se unificaron todos los currículos de las distintas comunidades autónomas para poder establecer las relaciones más claramente, asimismo, la última fase es la que ha presentando una mayor dificultad, puesto que era necesario establecer una relación cuantitativa entre los elementos curriculares y los descriptores de la competencia mediática en sus seis dimensiones.

La inclusión del área de matemáticas en este análisis ha obedecido a su vinculación con el ocio mediático. Las cuatro primeras fases se han desarrollado por parte de las autoras del artículo, especialistas en medios de comunicación y pedagogía, así como vinculadas de manera directa con el ámbito educativo. En la quinta fase, referida a la *vinculación de elementos curriculares*, junto a las mismas, han intervenido diez maestros y maestras de educación primaria en ejercicio. Su tarea se ha centrado en establecer la relación existente entre los descriptores de la competencia mediática y los contenidos del currículo de Matemáticas, tras una primera propuesta del equipo de investigación. En el análisis de los resultados se ha considerado que la vinculación entre ambos elementos se produjera, al menos, en el 70% de las respuestas dadas por los participantes.

4. RESULTADOS

Si procedemos al análisis de investigaciones sobre la competencia mediática en el campo educativo, cabría destacar dos aspectos principalmente: la baja presencia de los propios estudios y la escasa presencia de la competencia mediática en los currículos (Aparici, Campuzano, Ferrés y García, 2010; Camps, 2009 y Tucho, 2008). A pesar de ello, la competencia mediática en el currículo escolar es precisa manifestarla de forma explícita, con evidencias específicas, aspectos que analizaremos a continuación.

Los resultados que presentamos posteriormente siguen un orden concreto; en primera instancia, se reflejan resultados globales; en segundo término, se marca la vinculación existente en los objetivos de etapa y área de Matemáticas; en los contenidos curriculares de la misma y, finalmente, en los criterios de evaluación.

Destacar que la competencia mediática se define en torno a 55 descriptores, estructurados en diferentes dimensiones. En cuanto al área de Matemáticas, la relación de los mismos con los elementos curriculares se aprecia en la Tabla 2.

Cabe destacar que la competencia mediática en los objetivos del área de Matemáticas se cifran en un 5,45%, mientras que este aumenta hasta un 12,72% en los contenidos del segundo ciclo y hasta un 16,36% en los criterios de evaluación del mismo.

En lo referente a la distribución de esta presencia entre las diferentes dimensiones y subdimensiones de la competencia mediática, cabe destacar que los elementos curriculares del área de Matemáticas se vinculan con las dimensiones *Lenguajes*, *Tecnología*, *Procesos de producción y difusión* e *Ideología y valores*. En las dos primeras se identifican procesos de análisis y expresión, mientras que en la tercera solo de expresión y en la cuarta de análisis (ver Tabla 3). La ausencia de la competencia mediática se pone de manifiesto en las dimensiones *Procesos de interacción* y *Estética*.

Tabla 2. Presencia de las dimensiones de la competencia mediática en los elementos curriculares del area de Matemáticas. Fuente: Elaboración propia.

Dimensiones competencia mediática		**Área de Matemáticas**		
		Objetivos	Contenidos	Criterios de evaluación
Lenguajes	7	1	5	4
Tecnología	7	1	2	4
Procesos de interacción	12	0	0	0
Procesos de producción y difusión	11	1	0	0
Ideología y valores	12	0	0	1
Estética	6	0	0	0
Total	55	3	7	9

A continuación, ejemplificaremos estas relaciones en los diferentes elementos curriculares. Así, en cuanto a los *objetivos de área* establecemos los siguientes:

- Emplear el ordenador y las TIC para llevar a cabo diferentes cálculos matemáticos y realizar un adecuado tratamiento de la información (L2e).
- Emplear el ordenador y las TIC para llevar a cabo diferentes cálculos matemáticos y para aprender y compartir conocimientos (Navarra)(T2e)
- Utilizar el conocimiento matemático para comprender, valorar y producir informaciones y mensajes sobre hechos y situaciones de la vida cotidiana y reconocer su carácter instrumental para otros campos de conocimiento (P4e).

En lo que concierne a los contenidos, los ejemplos registrados son los siguientes:

- Interés por utilizar con cuidado y precisión los instrumentos de medida y las herramientas tecnológicas (Aragón, Asturias y Castilla León) (T1a).
- Utilización de ordenadores, de recursos TIC, medios informáticos, para el registro de datos reales en tablas, visualizar diferentes tipos de gráficas estadísticas que ofrecen los programas informáticos y elección del más apropiado (Aragón, Cataluña, Extremadura y País Vasco) (T2b).
- Interés por utilizar las herramientas tecnológicas en la representación de datos estadísticos y en la comprensión de los contenidos funcionales (Aragón, Navarra y País Vasco) (L3a).
- Uso de las TIC como recurso didáctico para la representación de diferentes tipos de números y la realización de operaciones de forma gráfica, para el cálculo (…) (Asturias, Cataluña, Galicia, País Vasco y Cataluña) (L2e).
- Uso de las TIC como recurso didáctico para ampliar la capacidad de razonamiento espacial, para obtener imágenes de figuras geométricas, para orientarse a través de laberintos y planos, para girar, reducir y deformar figuras de 2 y 3 dimensiones, para crear figuras tridimensionales (Cataluña) (L2e).

Tabla 3. Distribución de la presencia de los elementos curriculares del área de Matemáticas en las dimensiones y subdimensiones de la competencia mediática. *Fuente: Elaboración propia*.

Dimensiones y subdimensiones		**Descriptores**	**Objetivos**	**Contenidos**	**Criterios de evaluación**
Lenguajes	Análisis	L1a. Capacidad de interpretar y de valorar los diversos códigos de representación y la función que cumplen en un mensaje.			x
		L2a. Capacidad de analizar y de valorar los mensajes desde la perspectiva del significado y del sentido, de las estructuras narrativas y de las convenciones de género y de formato.		x	x
		L3a. Capacidad de comprender el flujo de historias y de informaciones procedentes de múltiples medios, soportes, plataformas y modos de expresión.		x	x
		L4a. Capacidad de establecer relaciones entre textos –intertextualidad–, códigos y medios, elaborando conocimientos abiertos, sistematizados e interrelacionados.		x	
	Expresión	L1e. Capacidad de expresarse mediante una amplia gama de sistemas de representación y de significación.		x	
		L2e. Capacidad de elegir entre distintos sistemas de representación y distintos estilos en función de la situación comunicativa, del tipo de contenido que hay que transmitir y del tipo de interlocutor.	x	x	
Tecnología	Análisis	T1a. Comprensión del papel que desempeñan en la sociedad las tecnologías de la información y de la comunicación y de sus posibles efectos.		x	
	Expresión	T1e. Capacidad de manejar con corrección herramientas comunicativas en un entorno multimedial y multimodal.			x
		T2e. Capacidad de adecuar las herramientas tecnológicas a los objetivos comunicativos que se persiguen.	x	x	x

Dimensiones y subdimensiones		Descriptores	Objetivos	Contenidos	Criterios de evaluación
Procesos de producción y difusión	Expresión	P4e. Capacidad de compartir y diseminar información, a través de los medios tradicionales y de las redes sociales, incrementando la visibilidad de los mensajes, en interacción con comunidades cada vez más amplias.	x	x	
Ideología y valores	Análisis	V2a. Habilidad para buscar, organizar, contrastar, priorizar y sintetizar informaciones procedentes de distintos sistemas y de diferentes entornos.		x	x
		V3a. Capacidad de detectar las intenciones o intereses que subyacen tanto en las producciones corporativas como en las populares, así como su ideología y valores, explícitos o latentes, adoptando una actitud crítica ante ellos.		x	

- Lectura, interpretación y análisis crítico de mensajes que contengan informaciones sobre relaciones espaciales, gráficos estadísticos, pictogramas,… extraídos de distintos medios (incluidos los medios de comunicación), libros, diarios, Internet y otros (Asturias, Cantabria, Canarias, Castilla La Mancha, Castilla y León, Cataluña, Extremadura, Galicia, Madrid y Navarra) (L1a y L2a).
- Utilización de recursos digitales para comprobar realidades matemáticas de forma gráfica y compartir información y resultados en formato textual y/o audiovisual (Cantabria) (P4e).
- Análisis y uso crítico de la información obtenida en la red, para realizar investigaciones y proyectos, y para expresarse y comunicarse, utilizando recursos y programas informáticos adecuados a cada finalidad, con autonomía personal y grupal (Cantabria y Galicia) (V3a).
- Obtención y utilización de información para la realización de gráficos (Castilla y León) (L3a y L4a).
- Realización, interpretación y uso de planos de itinerarios conocidos utilizando diferentes soportes (Cataluña) (L3a y L4a).
- Búsqueda y recogida de información sobre temas del área (Galicia) (V2a).
- La comunicación y los números. Interpretación de textos numéricos sencillos de la vida cotidiana: escaparates con precios, folletos publicitarios,… (País Vasco) (L4a).

Respecto a los **criterios de evaluación** que se interrelacionan con la competencia mediática podemos destacar los siguientes:

- Representar los datos de un problema mediante gráficos, flechas, diagramas o tablas de doble entrada (Asturias) (L1e).
- Realizar, construir, leer e interpretar representaciones gráficas de un conjunto de datos relativos al entorno inmediato para: recoger y registrar información cuantificable en tablas, utilizar gráficos, interpretar y comunicar, oralmente y/o por escrito, la influencia de tablas de datos y gráficos, valorar datos estadísticos recogidos en la prensa e Internet (Asturias, Castilla y león, Cataluña, Madrid, Región de Murcia y Valencia) (L1a).
- Aplicar herramientas tecnológicas conocidas a nuevas tareas en el proceso de aprendizaje: editores gráficos, aplicaciones del portal educativo, TIC, Internet (Canarias y Castilla La Mancha y País Vasco) (T1a).
- Conocer las estrategias de comprensión lectora en los mensajes transmitidos por distintos textos (Castilla y León y Madrid) (L2a).
- Dibujar y construir figuras geométricas en diferentes soportes y con distintos instrumentos. Utilizar las TIC para representar modelos geométricos, interpretar y realizar representaciones espaciales (planos, mapas, maquetas, itinerarios,…) (Castilla y León y Cataluña) (T2e).
- Uso de las TIC para calcular y buscar propiedades de los números y operaciones (Cataluña) (T2e).
- Resolver problemas diversos relacionados con el entorno aplicando las TIC (Galicia) (T2e).
- Interpretar diversas informaciones estadísticas provenientes de los medios de comunicación (País Vasco) (V2a).

5. DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

Anteriormente, se ha señalado la ausencia de estudios sobre competencia mediática y su implicación metodológica. Por dicho motivo, a través del análisis de este estudio presentamos una panorámica más específica de la vinculación que existe entre la competencia mediática y el currículo de Matemáticas regulado en la normativa que lo aplica en las distintas comunidades autónomas.

A pesar de partir de un currículo común para todo el estado español, marcado en el Real Decreto 1513/06, de 7 de septiembre, entre estas comunidades autónomas se aprecian diferencias en cuanto a los objetivos y criterios de evaluación vinculados con la competencia mediática, pero son los contenidos el elemento curricular que no se incorpora del mismo modo en los currículos autonómicos. Esta situación ya la puso de manifiesto Sierra y López (2012) al expresar la descentraliación que había sufrido el currículo de matemáticas en la última década del siglo XX. Por tanto, se hace evidente la necesidad de implementar a nivel nacional una política educativa en medios común y compartida, que no genere inestabilidades regionales y que favorezca la implementación de la competencia mediática en la enseñanza obligatoria. De esta manera, se podrá alcanzar la capacidad crítica, pilar sustancial de la ciudadanía mediática responsable. En este sentido, Goñi (2009, p. 45) afirma que "la competencia matemática aplicada al medio social debiera ser el referente fundamental a la hora de organizar el currículo de la enseñanza básica y obligatoria por razones de interés social general". Las Matemáticas pueden ser el área que contribuya de manera decidida, no sólo al avance de los medios en cuanto a su componente técnico, sino también al desarrollo social. En esta misma dirección apuntan los estudios de Sahinkaya, Aladag y Aladag (2012) en el curriculum turco; estos señalan que el alumnado ve las áreas curriculares como piezas de un puzzle que no terminan de encajar, igualmente sucede con el currículo de Matemáticas, los conocimientos "están ahí", pero "¿qué se hace con ellos? En este sentido, muestran los avances que se pueden producir en la competencia matemática si esos conocimientos se interrelacionan con aspectos de la vida cotidiana del alumnado.

Asimismo, el estudio de Yook-Kin y Herbert (2012) concluye que el uso de Internet en el aprendizaje de determinadas destrezas matemáticas constituye un recurso de gran potencial para que el alumnado "siga enganchado" a las Matemáticas a lo largo de su vida. Los estudios de Gómez-Chacón (2010) también muestran esta predisposición del alumnado hacia las nuevas tecnologías.

Aunque se ha mostrado que la presencia de la competencia mediática en los objetivos del área de Matemáticas son muy bajos (5,45%), aumentando solamente en los contenidos con un 12,72% y un porcentaje ligeramente superior del 16,36% en los criterios de evaluación, la presencia de la competencia mediática en el área de Matemáticas es un hecho. Esta presencia puede garantizar el empleo de los medios de comunicación como ese recurso necesario para que las Matemáticas "salten" al espacio público, a la vida cotidiana de alumnado y docentes.

Asimismo, la relación del área curricular analizada y las dimensiones de la competencia mediática indica que existe una identificación de los procesos de análisis y de expresión en las dimensiones de *Lenguajes*, *Tecnología, Procesos de producción y difusión* e *Ideología y valores*; sin embargo, dicha identificación no se hace patente en la dimensión de *Ideología y valores*. Aunque en las dimensiones de *Procesos de interacción* y *Estética* no aparece evidencia alguna de la presencia de la competencia mediática en el currículo de Matemáticas del segundo ciclo de educación primaria, ésta podría encontrarse en el correspondiente al tercer ciclo. Los procesos analíticos y expresivos de estas dimensiones contribuirían, de igual modo, al desarrollo de diferentes destrezas matemáticas.

En este sentido, cabría señalar los principios propuestos por Zanocco (2006, p. 145) para la enseñanza de las Matemáticas, estos son: contextualización, acción-reflexiva, realístico, significatividad, metacognición y comunicación. A través de este último, el alumnado debe "verbalizar sus aprendizajes matemáticos a través de diversos lenguajes: icónicos, simbólicos, verbales, entre otros". Todos estos lenguajes quedan recogidos en la primera dimensión, que precisamente ha sido designada con el nombre de "Lenguajes".

Por su parte, Marta (2008) manifiesta en un estudio realizado que las familias no se encuentran capacitadas para enseñar a sus hijos cómo hay que "ver" la televisión al tiempo que afirman que ha de ser la escuela la institución que debe "enseñar" a ver la televisión. El currículo escolar incorpora este reto y desde el área de Matemáticas esto es posible, al igual que "aprender" Matemáticas desde los **"+ $\overline{X}$".**

6. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Aparici, R., Campuzano, A., Ferrés, J. y García, A. (2010). La educación mediática en la escuela 2.0. Recuperado de http://ntic.educacion.es/w3/web_ 20/informes/educacion_mediatica_e20_julio20010.pdf en 23 de enero de 2013.

Bernabéu, N. (2010). La educación mediática en el currículo de la LOE: aportaciones de este ámbito de conocimiento a la educación por competencias básicas. En J.M Pérez-Tornero. *Alfabetización mediática y culturas digitales.* Sevilla: Universidad de Sevilla.

Camps, V. (2009). La educación en medios, más allá de la escuela. *Comunicar*, 32, 139-145.

Cantoral, R. (2010). Matemática Educativa: una disciplina de múltiples perspectivas. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, 13(2), 123-128.

Climent, N., Romero, J.M., Carrillo, J., Muñoz, M.C. y Contreras, L.C. (2013). ¿Qué conocimientos y concepciones movilizan futuros maestros analizando un vídeo de aula? *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, *16*(1), 2013.

Corbalán, F. y Salar, Á. (2009). El programa Matemática Vital. Aula de Innovación Educativa, 181, pp. 41-42. En Díez-Palomar, J. y Molina, S. (2010). Contribuciones de la educación matemática de las familias a la formación del profesorado. *PNA*, *4*(2), 63-72.

Directiva 2007/65/CE propone a los Estados una alfabetización en medios que bien de manera directa o indirecta, disciplinar o interdisciplinarmente posibilite la capacitación del futuro ciudadano. Recuperado de http://eur-ex.europa.eu/LexUriServ/LexUriServ.do?uri=OJ:L:-2007:332:0027:0045:ES:PDF en 18 de febrero de 2012.

Ferrés, J. (2007). La competencia en comunicación audiovisual: dimensiones e indicadores. *Comunicar*, 29, 100-107.

Ferrés, J. y Piscitelli, A. (2012). La competencia en educación mediática: dimensiones e indicadores. *Comunicar*, 38, 75-82.

Gómez-Chacón, I.M. (2010). Actitudes de los estudiantes en el aprendizaje de las matemáticas con tecnología. *Revista Enseñanza de* las *Ciencias*, 28(2), 227-244.

González, N., Sedeño, M. y Gozálvez, V. (2012). Diseño de un focus group para valorar la competencia mediática en escenarios familiares. *Icono 14*, *10*(3), 116-133.

Goñi, J.M. (2009). El desarrollo de la competencia matemática en el currículo escolar de la Educación Básica. *Educatio Siglo XXI*, *27*(1), 33-58.

Koliopoulos, D., Adúriz-Bravo, A. y Ravanis, K. (2011). El “análisis del contenido conceptual” de los currículos y programas de ciencias: una posible herramienta de mediación entre la didáctica y la enseñanza de las ciencias. *Revista Enseñanza de las Ciencias*, *29*(3), 315-324.

Ley Orgánica 2/2006, de 3 de mayo, de Educación. Boletín Oficial del Estado número 106, de 4 de mayo de 2006.

Lozano, A. (2011). La webquest como herramienta didáctica en el desarrollo de la competencia matemática en ciencias sociales. *Clío*, 37, 1-111.

Marta, C. (2008). La competencia televisiva en el currículo escolar. *Zer*, *13*(25), 107-120.

Ministerio de educación, cultura y deporte (2012). Informe del Programa para la Evaluación Internacional de Alumnos (PISA). Recuperado de http://www.mecd.gob.es/inee/estudios/pisa.html en 02 de mayo de 2013.

Ministerio de educación, cultura y deporte (2011). Estudio Internacional de progreso en comprensión lectora, matemáticas y ciencias. Recuperado de http://www.mecd.gob.es/inee/Ultimos_informes/PIRLS-TIMSS.html en 02 de mayo de 2013.

Monereo. C. (2005). Internet un espacio idóneo para desarrollar las competencias básicas. En C. Monereo et al. *Internet y competencias básicas. Aprender a colaborar, a comunicarse, a participar, a aprender* (pp. 5-25). México: Graó.

O'Farrill, Y. de J. (2000). Sistema Entrenador Inteligente con tecnología multimedia. Óptima-Geometría. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, *3*(2), 99-129.

Pilli, O. y Aksu, M. (2013). The effects of computer-assisted instruction on the achievement, attitudes and retention of fourth grade mathematics students in North Cyprus. *Computers and Education*, 62, 62-71.

Real Decreto 1513/06, de 7 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas de educación primaria. Boletín Oficial del Estado número 293, de 8 de diciembre de 2006.

Rico, L. (2007). La competencia matemática en PISA. *PNA*, *1*(2), 47-66.

Rodón, A. (2011). Euclides tv: La televisión en el aula, el aula en la televisión. *Bits*, 18, 70-78

Sahinkaya, N. Aladag, E. y Aladag, S. (2012). Determining relationship between life studies and mathematics lectures in Turkish life studies curriculum. *Procedia Social and Behavioral Sciences*, 46, 538-542.

Sierra, M. y López, C. (2012). La descentralización del currículo de Matemáticas en la educación obligatoria en España durante la década 1990-2000. *Revista Enseñanza de las Ciencias*, *30*(2), 219-239.

Teser, M. y Karasel, N. (2010). Attitudes of primary school 2nd and 3rd grade students towards mathematics course. *Procedia Social and Behavioral Sciences*, 2, 5808–5812.

Tsuei, M. (2012). Using synchronous peer tutoring system to promote elementary students' learning in mathematics. *Computers and Education*, 58, 171-1182.

Tucho, F. (2008) La educación en comunicación en la LOE y sus decretos de Enseñanzas Mínimas. *Comunicar*, 31, 547-553.

Valdemoros, M. (2010). Dificultades experimentadas por el maestro de primaria en la enseñanza de fracciones. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, *13*(4), 423-440.

Yook-Kin, E. y Herbert, S. (2012). Student perspectives of Web-based mathematics. *International Journal of Educational Research*, 53, 117-126.

Zanocco, P. (2006). La matemática en el programa "Aprendizaje inicial de la lectura, escritura y matemática (AILEM)". *Revista Pensamiento Educativo*, *39*(2), 137-152.

Épsilon - *Revista de Educación Matemática* *2014, Vol. 31(2), nº 87, 25-42*

Procedimientos probabilísticos en libros de texto de matemáticas para educación primaria en España[1]

Emilse Gómez-Torres
Universidad Nacional de Colombia (Colombia)
Carmen Batanero
José Miguel Contreras
Universidad de Granada (España)

Resumen: *En este artículo se analizan los procedimientos asociados a la probabilidad en dos series de libros de texto de educación primaria, observando la introducción de procedimientos básicos ligados a los enfoques intuitivo, clásico, frecuencial y subjetivo. Al comparar las dos series, es notable el diferente tratamiento del enfoque frecuencial, ya que una sólo presenta el punto de vista estadístico; mientras que la otra, además, desarrolla el punto de vista probabilístico. Respecto a los enfoques de la probabilidad, el intuitivo está presente en todos los ciclos y los demás en los dos últimos; el subjetivo únicamente se menciona tangencialmente.*
Palabras clave: *Libros de texto, significados de la probabilidad, procedimientos.*

Probabilistic procedures in Spanish primary school mathematics textbooks

Abstract: *In this paper we analyses probabilistic procedures in two series of primary school textbooks and observe that they include basic procedures linked to the intuitive, classical, frequentist and subjective approaches. In comparing the two series we noticed a difference in the frequentist approach, since one publisher only focus on the statistical point of view, while the other also presents the probabilistic approach. While the intuitive approach is developed at all the cycles, the remaining meanings appear only*

1. Proyecto EDU2013-41141-P (MEC) y Grupo PAI FQM-125.

at the second and third cycle; moreover the, subjective approach is only taken into account implicitly.
Keywords: *Textbooks, meanings of probability, procedures.*

INTRODUCCIÓN

En los últimos años se ha reconocido la necesidad de formar el conocimiento y razonamiento probabilístico desde la infancia, para que el ciudadano pueda desenvolverse con éxito en las situaciones inciertas. La importancia de la probabilidad en la vida diaria y en el currículo es visible en diversas publicaciones (por ejemplo NCTM, 2000; Jones, 2005; Jones, Langrall, y Mooney, 2007; Batanero, Burril, y Reading, 2011).

Como consecuencia, en España, siguiendo la tendencia internacional, se ha incluido recientemente la enseñanza de la probabilidad desde los primeros niveles educativos. El decreto de enseñanzas mínimas para la educación primaria (MEC, 2006) sugiere, para los tres ciclos, contenidos referidos al carácter aleatorio de experiencias en las que interviene el azar (Bloque 4. *Tratamiento de la información, azar y probabilidad*).

Este documento curricular, analizado en Gómez y Contreras (2013, 2014), así como el currículo básico promulgado recientemente (MECD, 2014), promueven iniciar al niño en los conceptos y procedimientos probabilísticos elementales, mediante juegos, experimentos y observación de fenómenos naturales; para que aprenda a identificar las situaciones aleatorias y llegue, al final de la etapa, a asignar algunas probabilidades sencillas.

En este trabajo analizamos la introducción de procedimientos probabilísticos en dos series completas de libros de texto de educación primaria en España, utilizando el enfoque ontosemiótico de la cognición e instrucción matemática (Godino, Batanero, y Font, 2007), con el propósito de orientar al profesor en su uso y alertarle de posibles problemas de comprensión por parte de los niños. Una vez expuesto brevemente el marco teórico y el método utilizado, se aportan los resultados obtenidos, resaltando los diferentes significados que subyacen y comparando las dos series en cada ciclo de la educación primaria. Se finaliza con unas implicaciones para la enseñanza y la formación de profesores.

FUNDAMENTOS

Marco teórico

La importancia de los libros de texto en el aula ha sido reconocida por diversos autores (por ejemplo Lowe y Pimm, 1996; Herbel, 2007). Los libros son un proceso de la transposición didáctica, descrita por Chevallard (1991), y que consiste en la adaptación del conocimiento matemático formal que se ha adaptado para convertirlo en conocimiento matemático para ser enseñado. El análisis de libros de texto es un componente del análisis curricular, dado que el currículo escrito y la forma en que lo interpretan los profesores es un paso entre el currículo pretendido y el implementado en el aula (Herbel, 2007).

Por otro lado, conocimiento conceptual y procedimental son dos partes de un continuo y están relacionados (Rittle-Johnson y Alibali, 1999; Rittle-Johnson, Siegler y Alibali, 2001), siendo de interés trabajar en ambas partes. En tal sentido, este artículo completa otros previos sobre la probabilidad en la educación primaria, más concretamente, sobre el análisis de orientaciones curriculares (Gómez y Contreras, 2013, 2014), el lenguaje en los libros de texto (Gómez, Ortiz, Batanero, y Contreras, 2013), y los conceptos y propiedades (Gómez, Ortiz, y Gea, 2014). En lo que sigue se profundiza en la parte procedimental y en sus relaciones con la conceptual.

Los procedimientos cobran gran importancia en el Enfoque Onto-Semiótico (EOS), donde los objetos matemáticos emergen de las prácticas de un sujeto (persona o institución) al resolver problemas (Godino, Batanero, y Font, 2007). En consecuencia, cuándo se quiere caracterizar el significado de un objeto para una persona o para una institución (por ejemplo, los libros de texto), las prácticas observables son los indicadores empíricos que nos permiten esta caracterización. Dentro de estas prácticas, cobran un papel fundamental en la enseñanza los procedimientos, donde incluimos todos los algoritmos, operaciones y técnicas de cálculo que se enseña a los estudiantes para resolver los problemas.

Asimismo, los autores mencionan que al analizar las prácticas matemáticas (por ejemplo, los procedimientos incluidos en los textos) se pueden reconocer posibles conflictos semióticos, entendiendo por tales "*cualquier disparidad o discordancia entre los significados atribuidos a una expresión por dos sujetos (personas o instituciones)*" (Godino, Batanero, y Font, 2007, p.133). En nuestro caso, serían las posibles disparidades entre el significado matemático de un procedimiento y el significado presentado en el texto.

Significados de la probabilidad

Dada la diferenciación entre significados atribuidos a la probabilidad a lo largo de su historia (Batanero, 2005; Batanero y Díaz, 2007), analizaremos en el trabajo cuáles procedimientos están ligados a los significados de la probabilidad más relevantes para la enseñanza escolar. Estos significados se describen a continuación.

Significado intuitivo. Las primeras ideas intuitivas sobre probabilidad surgen ligadas a las apuestas. Este significado intuitivo utiliza la probabilidad sin formalización y sin llegar a una asignación numérica, es decir, en forma cualitativa. Es muy adecuado en la educación primaria, pues el interés de los niños por los juegos puede usarse en la enseñanza para introducir la noción de probabilidad. Reconociendo la impredecibilidad de los resultados, los niños pueden percibir que algunos sucesos merecen más confianza que otros, en función de su experiencia. La asignación de probabilidades, desde este significado, se puede hacer comparando la verosimilitud de sucesos con palabras del lenguaje habitual.

Significado clásico. La teoría de la probabilidad tiene su origen formal en el siglo XVII. Esta acepción se asocia a la definición de probabilidad dada por Laplace, donde la probabilidad de un suceso es el cociente entre el número de casos favorables al mismo y el número de casos posibles (considerando todos los casos como equiprobables). A pesar de que sólo puede aplicarse a experimentos aleatorios con un número finito de posibilidades, este significado ha primado en la escuela durante muchos años. La razón es que puede utilizarse para calcular probabilidades en juegos de azar (ej., con dados, monedas, urnas) que forman parte de la vida cotidiana del niño. Sin embargo, en cuanto tratamos de calcular la probabilidad en experimentos compuestos, el cálculo se complica, pues se requiere razonamiento combinatorio, que es difícil para los estudiantes. Por otra parte, la ausencia de contraste con otros significados de la probabilidad promueve el sesgo de equiprobabilidad (Lecoutre, 1992), donde se consideran equiprobables todos los resultados aleatorios, incluso aquellos que no lo son, y que es persistente con la edad.

Significado frecuencial. La observación de que las frecuencias relativas de los sucesos aleatorios parecen tener un límite fijo cuando se repite el experimento un gran número de veces y la demostración por Bernoulli de la primera ley de los grandes números llevó al significado frecuencial. En esta acepción la probabilidad se define como el límite hacia el cual tiende la frecuencia relativa, en un gran número de ensayos repetidos en las mismas condiciones. El significado frecuencial es adecuado en la enseñanza, porque tiene una aplicación más amplia que el clásico en muchos fenómenos de la vida real y conecta la estadística con la probabilidad. Además, las posibilidades actuales de simulación facilitan el tratamiento de este enfoque (Fernandes, Batanero, Contreras, y Díaz, 2009).

Significado subjetivo. En los anteriores significados, la probabilidad es un valor objetivo, independiente de la persona que la asigna. Esta acepción desaparece y la probabilidad se convierte en un valor subjetivo mediante el teorema de Bayes. El significado subjetivo de la probabilidad donde todas las probabilidades se asumen como condicionadas a un sistema de creencias es apropiado en situaciones como el diagnóstico médico o la evaluación de un estudiante. En estas situaciones, el que asigna la probabilidad (médico o profesor) puede tener una información sobre el suceso que le permite mejorar su asignación de probabilidades. Está basada en el teorema de Bayes, que permite transformar probabilidades a priori en probabilidades a posteriori, utilizando la información de los datos observados. Desde el punto de vista de la enseñanza, Borovcnik (2012) señala su escasa presencia, en currículos vigentes. Aunque la probabilidad condicional y el teorema de Bayes se retrasan a la educación secundaria, Godino, Batanero y Cañizares (1987) sugieren usar en forma intuitiva este enfoque, en la educación primaria, con situaciones cotidianas del niño; se comenzaría asignando valores por parte del niño a las probabilidades, que se revisarían posteriormente con nuevas experiencias.

Investigaciones previas

La presentación de la probabilidad en libros de texto ha recibido baja atención en la investigación; debido a que hasta la última década estaba ausente en la educación primaria, los estudios previos se habían concentrado en la educación secundaria.

Ortiz (2002) analizó los procedimientos asociados a la probabilidad en dos libros de texto españoles para alumnos de 14-15 años, abarcando el período 1975-1991. El autor observó escasez de procedimientos ligados a conceptos como espacio muestral, frecuencia relativa, probabilidad estimada, dependencia e independencia. Sus resultados muestran un predominio de procedimientos algorítmicos como el cálculo de la regla de Laplace y que apenas aparecen procedimientos relacionados con los significados frecuencial y subjetivo, que teóricamente sí se presentan. Asimismo, el autor ilustra algunos sesgos observados en estos libros, indicando que, para evitar su transmisión a los alumnos, el uso de textos debe estar acompañado de una vigilancia epistemológica por parte del profesor.

Azcárate y Serradó (2006) y Serradó, Azcárate y Cardeñoso (2006) analizaron el contenido de probabilidad en cuatro series de libros de texto de educación secundaria obligatoria. Encontraron diferencias en su desarrollo: mientras dos editoriales presentan los contenidos de forma lineal, comenzando con nociones teóricas y actividades de aplicación; las otras dos organizan de forma helicoidal, alternan nociones teóricas con actividades basadas en recursos manipulativos y trabajo cooperativo. Los autores concluyen que hay diferenciación en el nivel de desarrollo de los significados según editoriales, en unas predomina el clásico y en otras el frecuencial; además, notaron ausencia de relación entre la experimentación y las nociones teóricas.

Teniendo en cuenta estos antecedentes, el objetivo de este trabajo es describir todos los procedimientos presentados en las dos series de texto analizadas sobre la probabilidad y clasificarlos por ciclo y según el significado de la probabilidad al que estén asociados. Esta información puede ser de utilidad para profesores en ejercicio en la preparación de sus clases o para complementar o modificar los libros de texto, y para los formadores de profesores, quienes la pueden utilizar en dicha formación. En lo que sigue se presentan el método y resultados del estudio.

METODOLOGÍA

Las series de los libros de texto analizados se eligieron por ser las más utilizadas en Andalucía en el curso 2011-2012 (según datos de la web de la Consejería de Educación). Cada editorial tiene varios proyectos vigentes, dependiendo del ciclo. Nuestra muestra intencional está constituida por diez libros de texto (ver Anexo). Se revisaron las series completas tomando los textos en que aparecía probabilidad.

El análisis fue cualitativo y adapta la metodología de Cobo (2003):

1) En los libros de texto se identifican páginas o capítulos que incluyen temas de azar o probabilidad. De ellas se toman los párrafos que incluyen procedimientos, que serán las unidades de análisis.
2) Se clasifican los procedimientos según estén ligados a los significados intuitivo, clásico, frecuencial y subjetivo.
3) A través de un proceso cíclico e inductivo, de lectura de los libros y de discusión y revisión por los autores, se fijan las categorías de análisis para cada significado. Nos basamos en los documentos curriculares y trabajos previos (Ortiz, 2002; Batanero, 2005; Batanero, Henry, y Parzysz, 2005; Batanero y Díaz, 2007).
4) Las categorías observadas se ilustran con ejemplos seleccionados de los textos analizados. También se organizan en tablas, cuya lectura facilite concluir con respecto a la presentación de procedimientos probabilísticos en estas dos series.

RESULTADOS

Observamos una amplia variedad de algoritmos, operaciones y técnicas de cálculo básicos que se aplican para resolver problemas probabilísticos, en los que se utiliza terminología informal. A continuación presentamos los procedimientos que observamos, clasificados de acuerdo con el significado de la probabilidad al que correspondan.

Figura 1.Distinción de fenómenos aleatorios y deterministas ([T3], p. 205)

Procedimientos relacionados con el significado intuitivo

Consideramos en este apartado todos aquellos procedimientos en que la asignación de probabilidades es objetiva, pero no se pide al niño el valor numérico, sino sólo una graduación cualitativa.

PRI1. *Distinguir fenómenos aleatorios y deterministas*. Los textos analizados evocan situaciones conocidas por el niño, e invitan a la reflexión sobre la presencia del azar en tales situaciones. El reconocimiento de este tipo de experiencias fortalece la comprensión de los conceptos de aleatoriedad y experimento aleatorio. Un ejemplo se presenta en la Figura 1.

PRI2. *Reconocer la impredecibilidad de un resultado*. Los textos analizados piden al niño decidir si se puede predecir o no el resultado que se obtendrá, antes de la experimentación, en situaciones conocidas. Esta reflexión conlleva al reconocimiento de la variabilidad en los resultados y de la propiedad de impredecibilidad; por ejemplo al niño de primer ciclo se presenta una ruleta hexagonal de seis colores y se pregunta "*Antes de girar la ruleta, ¿podemos saber qué color saldrá? __ Sí __ No*" ([T6], p. 165).

PRI3. *Reconocer tipos de sucesos* (posibles, imposibles, seguros). Los textos analizados plantean este procedimiento con dos clases de situación didáctica: presentan a la vez varios sucesos, cada uno ligado a un experimento diferente (como en la Figura 2), o presentan un experimento y definen varios sucesos referidos a éste (como en la Figura 3).

PRI4. *Valorar cualitativamente posibilidades*. Los textos presentan situaciones didácticas para que el niño distinga niveles de posibilidad de ocurrencia de un suceso asociado a un cierto experimento aleatorio por medio de expresiones verbales, como "muy probable" o "poco probable".

PRI5. *Comparar cualitativamente probabilidades*. Dados dos o más sucesos, se pide elegir el que parece más (o menos) probable. Este tipo de actividades aparecen en el ejemplo mostrado en la Figura 3.

Figura 2 Reconocimiento de tipos de sucesos ([T1], p. 188)

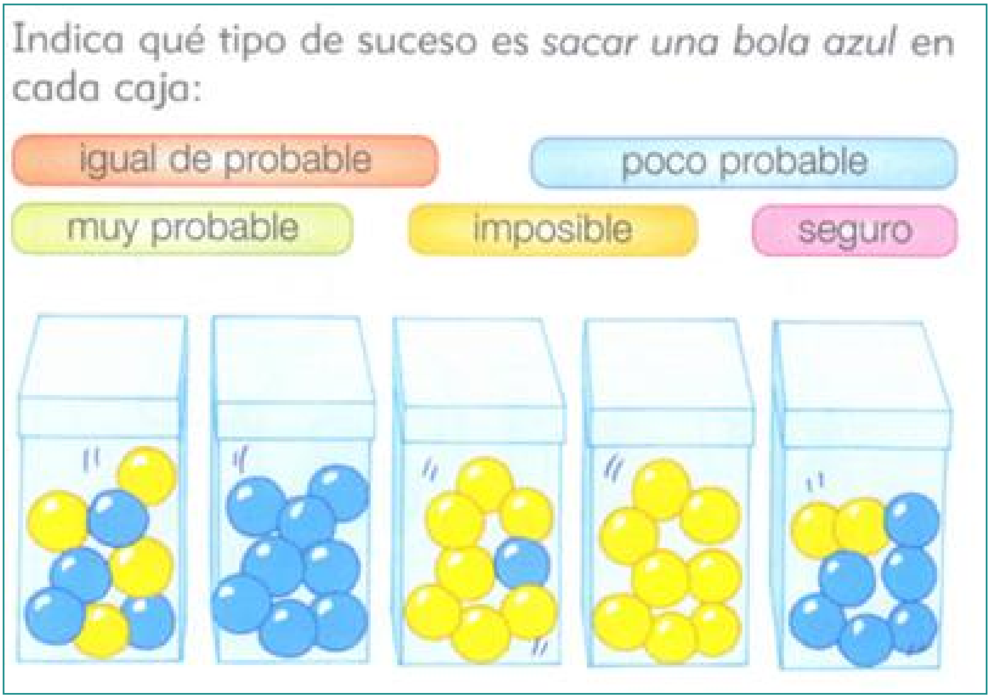


Figura 3. Comparación cualitativa de probabilidades ([T8], p. 125)

Procedimientos relacionados con el significado clásico

Son aquellas situaciones en que el espacio muestral del experimento es finito con sucesos equiprobables y se pide al niño estimar o calcular la probabilidad o bien analizar los experimentos o sucesos implicados.

PRC1. *Analizar diferentes juegos de azar.* Los textos analizados evocan juegos conocidos por el niño, como el parchís o los sorteos, y proponen comparar (o calcular) la probabilidad de algunos sucesos relacionados con estos juegos, más que la reflexión sobre sus características.

Figura 4. Enumeración del espacio muestral ([T5], p.205)

PRC2. *Enumerar o contar casos favorables y posibles.* En los textos analizados identificamos dos niveles para este procedimiento, de acuerdo con la complejidad del experimento. El primer nivel trata de enumeración en experimentos simples, donde se pide la lista de posibles resultados sin una técnica, como en la Figura 4.

El segundo nivel de enumeración en experimentos compuestos potencia el interés de los niños para buscar procedimientos de enumeración sistemática, apoyados de gráficos como el diagrama en árbol, pues las técnicas de combinatoria no se desarrollan formalmente en educación primaria. Un ejemplo sencillo es el siguiente: *"Copia y completa todos los resultados posibles (cara-cruz), en la experiencia "tirar dos monedas al aire", una de 50 céntimos y otra de 10 céntimos"* ([T5], p.205).

PRC3. *Diferenciar casos favorables y no favorables.* Los textos analizados se enfocan en identificar o enumerar casos favorables y posibles, previo a la aplicación de la regla de Laplace, tanto en experimentos simples como compuestos. El reconocimiento de casos desfavorables está también implícito y es un paso previo a la noción de suceso complementario.

PRC4. *Distinguir sucesos elementales equiprobables.* La mayoría de situaciones didácticas asumen la equiprobabilidad de los sucesos elementales, sin hacerlo explícito; en tales casos sería labor del profesor hacer notar esta propiedad y explicar las situaciones bajo las cuales es válida para evitar en sus alumnos el sesgo de equiprobabilidad (Lecoutre, 1992). Aunque las situaciones con sucesos elementales equiprobables aparecen desde primer ciclo, más adelante aparecen preguntas para diferenciar si los sucesos son o no equiprobables.

PRC5. *Comparar probabilidades con razonamiento proporcional.* Antes de la introducción de la asignación numérica de probabilidades, algunas actividades proponen comparar la probabilidad de un suceso en dos o más situaciones. El objetivo principal es la comparación; la respuesta puede darse en términos de la relación de orden sin asignación numérica de estas probabilidades (Figura 5).

PRC6. *Aplicar la regla de Laplace en experimentos simples.* La Serie 1 introduce la asignación numérica de probabilidades con el significado clásico en segundo ciclo y la Serie 2 en tercero. Este procedimiento es muy frecuente en esta muestra de textos, que presentan la forma de cálculo sin mención a sucesos elementales o compuestos, los cuales tampoco se definen, como es de esperar para la edad de los niños:

Figura 5. Comparación de probabilidades con razonamiento proporcional ([T3], p. 213)

La probabilidad de un suceso mide la posibilidad de que un suceso ocurra. Para calcularla utilizamos una fracción

$$\text{Probabilidad} = \frac{\text{Número de casos favorables}}{\text{Número de casos posibles}} \quad \text{([T10], p. 215).}$$

PRC7. *Decidir si un juego es equitativo o no.* Los textos analizados rara vez proponen reflexionar acerca de las condiciones globales del juego de azar que están analizando los niños; en general, preguntan por probabilidades de resultados particulares o de que gane algún niño específico. Decidir si un juego es equitativo en las situaciones planteadas en estos textos sólo requiere la comparación de las probabilidades de ganar de los jugadores, pues son juegos sencillos que no incluyen valores de apuesta. La única situación encontrada donde se pregunta si un juego es equitativo es la siguiente:

> Rosa, Iria y Esteban no se ponen de acuerdo en qué película ver en el cine. Deciden lanzar dos monedas: si salen dos caras elige Rosa; si sale cara y cruz elige Iria. Si no, elige Esteban. ¿Es justo? Ayúdate de un dibujo, y explica tu respuesta. ([T9], p. 219).

Otros procedimientos donde se espera una asignación de probabilidad con regla de Laplace son los siguientes:

PRC8. *Asignar probabilidad conjunta en un experimento compuesto de dos etapas independientes.* Como ya se ha indicado, los textos analizados no hacen distinción entre experimentos simples y compuestos, de modo que los niños tratan experimentos compuestos y calculan algunas probabilidades conjuntas sin utilizar lenguaje formal. Hay pocas situaciones didácticas de este tipo, en ellas los sucesos conjuntos elementales son equiprobables y el procedimiento seguido por los textos es aplicar la regla de Laplace. Un ejemplo es el siguiente.

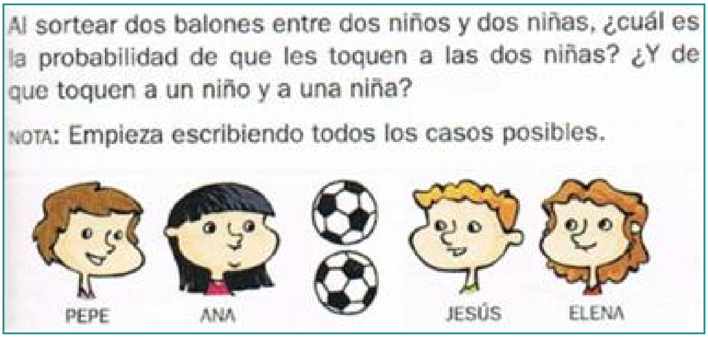


Figura 6. Asignación de probabilidad conjunta en experimentos dependientes ([T5], p. 209)

> En la experiencia "tirar dos monedas":
> a) ¿Cuál es la probabilidad de obtener dos cruces?
> b) ¿Y la de obtener una cara y una cruz? ([T5], p. 209).

PRC9. *Asignar probabilidad conjunta en un experimento compuesto de dos etapas dependientes.* El análisis de experimentos compuestos de dos etapas dependientes constituye un avance importante en el desarrollo del razonamiento probabilístico del niño, pues requiere, por ejemplo, que el niño reconozca la intersección de sucesos, la importancia que puede tener el orden y la dependencia (sin conocer aún la probabilidad condicional). Hay muy pocas situaciones didácticas de este tipo; un ejemplo se observa en la Figura 6.

Procedimientos relacionados con el significado frecuencial

En este apartado consideramos los procedimientos en que se estima la probabilidad, en base a la frecuencia relativa, y los previos para hacer esta estimación, como clasificación de atributos o cálculo de frecuencias relativas.

PRF1. *Enumerar o discriminar atributos en un colectivo.* La recolección de datos es poco frecuente en estos textos; la discriminación de atributos en un colectivo aparece pocas veces y se realiza a partir de una lista de datos disponible en el mismo enunciado. El siguiente ejemplo propone la construcción de la tabla para una variable, que implica identificar y enumerar los diferentes atributos observados:

> Al preguntar a un grupo de chicos y chicas por su postre preferido se obtuvieron las respuestas siguientes:
> helado – flan – fruta – fruta – helado – natillas – yogur – natillas – helado – fruta – flan – yogur – fruta – helado – yogur – fruta – flan
> a) Construye la tabla de frecuencias de los datos e indica cuáles son la frecuencia absoluta y relativa del helado. ([T5], p. 199)

PRF2. *Calcular la frecuencia relativa (de atributos) a partir de observaciones o datos.* En la Serie 1, todas las actividades dedicadas a estadística descriptiva del 6º curso, se orientan a calcular frecuencias relativas de valores observados de una variable

Estas son las notas que ha obtenido un grupo de alumnos en la última evaluación:

5	9	8	9	7	4	6	3
6	3	4	10	6	5	6	7
5	3	7	8	5	4	6	7

Con esos datos, construye la tabla de frecuencias y responde.

- ¿Qué nota tiene mayor frecuencia absoluta? ¿Y mayor frecuencia relativa? ¿Qué observas?

Figura 7. Representación tabular de una distribución ([T5], p. 192)

estadística a partir del listado de datos, de un gráfico o la tabla de recuentos. Hay pocas actividades en las que el niño calcule la frecuencia relativa a partir de los datos o de la observación; un ejemplo se observa en la Figura 7.

PRF3. *Representar una distribución de frecuencias en forma tabular o gráfica.* Este procedimiento solo se asocia a la estadística y no a la probabilidad en nuestra muestra de textos. La representación de una distribución de frecuencias es el último paso en la evolución del uso de lenguaje tabular y es un paso previo a la estimación de probabilidades. Un ejemplo se muestra en la Figura 7 donde a partir de una lista de datos de una variable se propone la construcción de la tabla. La representación gráfica de las frecuencias absolutas se realiza desde primer ciclo informalmente. Este nivel de representación es más accesible a los niños que la representación gráfica de frecuencias relativas, que no se propone en estos textos, suponemos que debido a la dificultad del cambio de escalas con números enteros a escalas con decimales o fraccionarios. Hacemos notar, sin embargo, que para el nuevo currículo (MECD, 2014) se espera que los niños al final de la primaria trabajen tablas de frecuencias relativas.

PRF4. *Leer e interpretar tablas de doble entrada (experimentos compuestos).* El uso de lenguaje tabular para experimentos compuestos es poco frecuente; algunas tablas de doble entrada se encuentran en la parte de tratamiento de datos, ninguna en la parte de probabilidad.

PRF5. *Estimar la probabilidad a partir de ensayos repetidos.* Todas las situaciones didácticas, en la sección de "probabilidad a partir de datos" de la Serie 1 en cuarto y sexto curso, se orientan a proporcionar una estimación para una probabilidad; en la mayoría de casos, a partir del listado de datos o la tabla de recuentos (Figura 10), en pocas situaciones, proponiendo la experimentación por parte del niño (Figura 8).

PRF6. *Reconocer el carácter aproximado de la estimación del valor de probabilidad.* En estos textos no hay mención explícita a la diferencia entre el valor teórico de la probabilidad y su estimación; queda en manos del profesor hacer esta aclaración, así como explicar la diferencia entre "calcular la probabilidad", del significado clásico, y "estimar la probabilidad", del significado frecuencial. Solo una situación didáctica permite reflexionar acerca del carácter aproximado de la estimación de probabilidades (Figura 9). Esta actividad también permitiría contrastar el valor teórico con el estimado, que dejaría en evidencia la calidad de la aproximación.

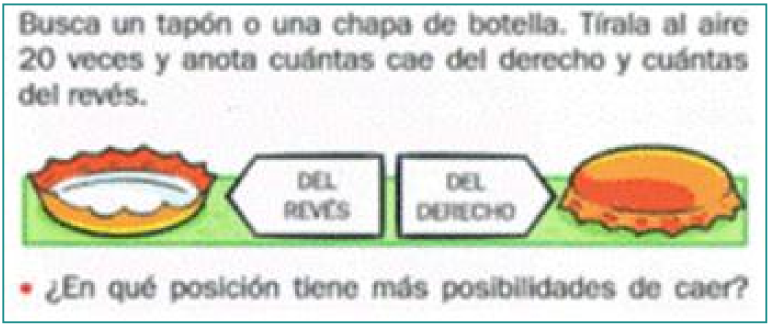


Figura 8. Estimación de una probabilidad teórica ([T3], p. 211)

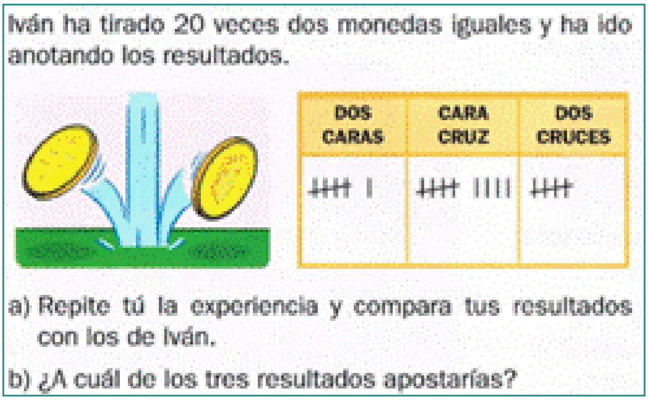


Figura 9.Variabilidad de las frecuencias en dos series de 20 ensayos ([T3], p. 211).

PRF7. *Análisis de experimentos en los que puede aplicarse el significado frecuencial.* Los textos presentan diversidad de situaciones adecuadas para la aplicación del significado frecuencial, sin analizar las razones que justifican esta aplicación. En la mayoría de casos no se dispone de suficiente información de tipo estadístico, para que la asignación frecuencial de probabilidades sea suficientemente precisa, pues el tamaño de muestra es pequeño.

PRF8. *Reflexionar sobre la fiabilidad.* Los textos sólo hacen mención a la fiabilidad en dos ocasiones, cuando se enuncia la propiedad y en la actividad de la Figura 10.

PROCEDIMIENTOS RELACIONADOS CON EL SIGNIFICADO SUBJETIVO

El único procedimiento relacionado con el significado subjetivo está presente de forma implícita en los textos analizados.

PRS1. *Analizar experimentos donde la probabilidad depende de información personal.* Se presentan algunos experimentos aleatorios ligados a fenómenos naturales, situaciones cotidianas o a juegos de destreza que se pueden analizar con el significado subjetivo dependiendo de la disponibilidad de información o del conocimiento previo. En el siguiente ejemplo, el conocimiento del niño puede llevar a respuestas parcialmente

Figura 10. Reflexión sobre la fiabilidad de una estimación de probabilidad ([T5], p. 210)

diferentes para la misma pregunta: "*Escribe todos los resultados posibles en la experiencia "lanzar tres tiros libres""* ([T5], p. 214).

Para resumir los hallazgos se presentan las Tablas 1 y 2. En la primera se observa que ambas editoriales atienden las directrices curriculares al incluir procedimientos de cada uno de los significados, aunque con diferente intensidad. La presencia del significado intuitivo es notable en toda la educación primaria, donde los procedimientos de reconocimiento aparecen desde el primer ciclo y los de valoración y comparación desde segundo ciclo. El ciclo en que se introducen procedimientos del significado clásico varía de una editorial a otra. En el significado frecuencial, el foco de atención varía de una editorial a otra, solo la Serie 1 incluye procedimientos de naturaleza probabilística; ambas incluyen procedimientos de naturaleza estadística, y ninguna incluye procedimientos de simulación, que están sugeridos en los documentos curriculares (MEC, 2006; MECD, 2014). Los procedimientos del significado subjetivo están implícitos en otros, y tienen baja presencia en estos textos.

En la Tabla 2 se observa que ambas editoriales mencionan en el último ciclo procedimientos importantes de los significados clásico y frecuencial que no se identificaron en el análisis de los documentos curriculares (Gómez y Contreras, 2013). En la Serie 1, observamos la inclusión de dos procedimientos, enmarcados en situaciones del significado clásico, que son trasversales a los cuatro significados (PRC8 y PRC9), con respecto al desarrollo del significado axiomático. Por otra parte, resaltamos que la Serie 2 incluye procedimientos que implican creatividad, en los dos últimos ciclos pregunta al niño por su propia ejemplificación de conceptos.

Ortiz (2002) identificó en su estudio, con baja frecuencia, procedimientos de mayor complejidad, por ejemplo el cálculo de probabilidades de sucesos compuestos con experimentos compuestos dependientes, o con más formalidad, como determinar la distribución de una variable aleatoria. Es razonable que no aparezcan en nuestro estudio, al ser libros de educación primaria. Al igual que este autor, observamos el predominio de procedimientos algorítmicos sobre los interpretativos, y que una de las editoriales presenta pocos procedimientos del significado frecuencial, y únicamente en el contexto estadístico.

Tabla 1. Procedimientos presentes en los libros de texto y en los documentos curriculares

	Primer ciclo		Segundo ciclo		Tercer ciclo	
Serie	1	2	1	2	1	2
Intuitivo						
PRI1. Distinguir fenómenos aleatorios y deterministas	x	x	x	x	x	x
PRI2. Reconocer la impredicibilidad de un resultado	x	x	x	x	x	x
PRI3. Reconocer tipos de sucesos	x	x	x	x	x	x
PRI4. Valorar cualitativamente posibilidades			x	x	x	x
PRI5. Comparar cualitativamente posibilidades			x	x	x	x
Clásico						
PRC1. Analizar juegos de azar	x	x	x	x	x	x
PRC2. Enumerar o contar casos favorables y posibles			x	x	x	x
PRC3. Diferenciar casos favorables y no favorables						
PRC4. Distinguir sucesos elementales equiprobables			x		x	x
PRC5. Comparar con razonamiento proporcional			x		x	x
PRC6. Aplicar regla de Laplace en experimentos simples			x		x	x
Frecuencial						
PRF1. Enumerar o discriminar atributos	x	x	x	x	x	x
PRF2. Calcular frecuencias relativas a partir de observaciones o datos					x	x
PRF3. Representar distribución de frecuencias en forma tabular o gráfica	x	x	x	x	x	x
PRF4. Leer e interpretar tablas de doble entrada			x			
PRF5. Estimar la probabilidad a partir de ensayos repetidos			x		x	
PRF6. Reconocer el carácter aproximado de la estimación			x		x	
Subjetivo						
PRS1. Analizar experimentos donde la probabilidad depende de información personal			x	x	x	x

Tabla 2. Procedimientos presentes en los libros y ausentes en los documentos curriculares

	Primer ciclo		Segundo ciclo		Tercer ciclo	
Serie	1	2	1	2	1	2
Clásico						
PRC7. Decidir si un juego es equitativo						x
PRC8. Asignar probabilidad conjunta en experimentos independientes					x	
PRC9. Asignar probabilidad conjunta en experimentos dependientes					x	
Frecuencial						
PRF7. Analizar experimentos donde pueda aplicarse el significado frecuencial			x		x	
PRF8. Reflexionar sobre la fiabilidad de la estimación					x	

CONCLUSIONES

En este trabajo hemos mostrado la diversidad de procedimientos relacionados con la probabilidad que se introducen, de forma implícita o explícita, en las series analizadas de libros de texto de educación primaria. Además, identificamos el significado de la probabilidad en las actividades propuestas en estos libros de texto.

En general, ambas editoriales desarrollan los procedimientos ligados a los diferentes significados sugeridos en las orientaciones curriculares. Asimismo, se presentan procedimientos que no aparecen en los documentos curriculares y que han sido consideradas por las editoriales, como se observó en la Tabla 2.

En ambas editoriales, los procedimientos propios del significado intuitivo de la probabilidad se presentan desde el primer ciclo, y los del significado clásico desde el segundo. Mientras que los del significado subjetivo prácticamente se omiten; algunas situaciones que podrían promover el análisis de situaciones donde la probabilidad depende de información complementaria son tratadas desde otro enfoque o su tratamiento se deja en manos del profesor.

Con relación al significado frecuencial se reconocen dos tipos de procedimientos los de naturaleza probabilística y los de naturaleza estadística; las editoriales analizadas hacen un trato diferenciado de éstos. Ambas series exponen procedimientos estadísticos en todos los cursos; pero solo la Serie 1 presenta los probabilísticos, en los dos últimos ciclos. Hay también en las dos series escasa atención a la experimentación y nula a la simulación (que podría desarrollarse con ayuda de material manipulativo o tecnología). Creemos que la omisión del significado frecuencial en la Serie 2 puede favorecer la aparición del sesgo de equiprobabilidad en los niños; si extienden la aplicación de la regla de Laplace a todas las situaciones probabilísticas que enfrentan, ya que no conocerían otras alternativas para asignar o aproximar numéricamente probabilidades. Por otra parte, el número de ensayos presentados en la Serie 1 es siempre menor que 30, lo que puede favorecer la creencia en la convergencia en pequeñas muestras.

El tratamiento dado al significado subjetivo sigue las sugerencias de Godino, Batanero y Cañizares (1987) con respecto a usar en forma intuitiva este enfoque con situaciones cotidianas del niño, en la educación primaria. Sería labor del profesor comenzar a sugerir la asignación, por parte del niño, de valores numéricos a las probabilidades, así como proponer la revisión de estas probabilidades asignadas, después de nuevas experiencias.

Asimismo se observa el tratamiento inicial de cuatro de los cinco tipos de conocimiento que forman parte de la alfabetización probabilística, según Gal (2005): ideas probabilísticas, asignación de probabilidades, uso de lenguaje probabilístico y capacidad de contextualizar, aunque no se hace énfasis en la evaluación de la calidad de la información disponible.

Este análisis puede ser de interés a profesores y formadores de profesores, por cuanto les alerta sobre posibles razonamientos errados, heurísticas y sesgos que se estén promoviendo en los niños, a través del libro de forma inconsciente. También puede usarse para desarrollar mejor el currículo, ya que hemos puesto de manifiesto la transversalidad de algunos procedimientos presentes en los tres ciclos formativos y su progresión en el tiempo. Además mostramos ejemplos de situaciones que pueden ser desarrolladas con diferentes significados de la probabilidad.

El impacto de un libro de texto depende de múltiples factores externos al libro, entre ellos el estudiante, el profesor, su uso en el aula y el material complementario (Lowe y Pimm, 1996). En este sentido, reconocemos que al profesor corresponde un importante papel no sólo al decidir el libro de texto que recomienda a sus alumnos, sino también las partes de éste a usar en la enseñanza, así como los recursos con que debe ser complementado. Asimismo, es el profesor quien busca estrategias para que los estudiantes progresen desde un enfoque intuitivo a los enfoques clásico, frecuencial y subjetivo.

Esperamos con este trabajo contribuir a la mejora de la enseñanza de las matemáticas, en particular de la probabilidad, en la educación primaria, así como facilitar la labor del profesorado en el aula.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Azcárate, P. y Serradó, A. (2006). Tendencias didácticas en los libros de texto de matemáticas para la ESO. *Revista de Educación*, *340*, 341-378.

Batanero, C. (2005). Significados de la probabilidad en la educación secundaria. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa, 8*(3), 247-264.

Batanero, C., Burrill, G. y Reading, C. (Eds.) (2011). *Teaching statistics in school mathematics. Challenges for teaching and teacher education. A joint ICMI and IASE study.* New York: Springer.

Batanero, C. y Díaz, C. (2007). Meaning and understanding of mathematics. The case of probability. En J.P Van Bendegen y K. François (Eds.), *Philosophical dimmensions in mathematics education* (pp. 107-127). Nueva York: Springer.

Batanero, C., Henry, M. y Parzysz, B. (2005). The nature of chance and probability. En G. Jones (Ed.), *Exploring probability in school: Challenges for teaching and learning* (pp. 15-37). Nueva York: Springer.

Borovcnik, M. (2012). Multiple perspectives on the concept of conditional probability. *Avances de Investigación en Didáctica de la Matemática*, *2*, 5-27.

Cobo, B. (2003). *Significado de las medidas de posición central para los estudiantes de secundaria* (Tesis doctoral no publicada). Universidad de Granada.

Chevallard, Y. (1991). *La transposición didáctica. Del saber sabio al saber enseñado*. Buenos Aires: Aique.

Fernandes, J. A., Batanero, C., Contreras, J. M. y Díaz, C. (2009). A simulação em Probabilidades e Estatística: potencialidades e limitações. *Quadrante, XVIII* (1 y 2), 161-183.

Gal, I. (2005). Towards "probability literacy" for all citizens: Building blocks and instructional dilemmas. En G. Jones (Ed.), *Exploring probability in school: Challenges for teaching and learning* (pp. 39-63). New York: Springer.

Godino, J. D., Batanero, C. y Cañizares, M. J. (1987). *Azar y probabilidad. Fundamentos didácticos y propuestas curriculares.* Madrid: Síntesis.

Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education*, *39*(1-2), 127-135.

Gómez, E. y Contreras, J. M. (2013). Significados de la probabilidad en el currículo español para la educación primaria. *Actas de las I Jornadas Virtuales de Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria*. Granada: SEIEM.

Gómez, E. y Contreras, J. M. (2014). Meanings of probability in Spanish curriculum for primary school. En *Proceedings of 9th International Conference of the Teaching Statistics*. Flagstaff, Arizona: IASE.

Gómez, E., Ortiz, J. J., Batanero, C. y Contreras, J. M. (2013). El lenguaje de probabilidad en los libros de texto de Educación Primaria. *Unión*, *35*, 75-91.

Gómez, E., Ortiz, J. J. y Gea, M. (en prensa). Conceptos y propiedades de probabilidad en textos españoles de educación primaria. *Avances de Investigación en Educación Matemática*.

Herbel, B. A. (2007). From intended curriculum to written curriculum: Examining the "voice" of a mathematics textbook. *Journal for Research in Mathematics Education*, *38* (4), 344-369.

Jones, G. A. (Ed.) (2005). *Exploring probability in school: Challenges for teaching and learning* (pp. 15-37). New York: Springer.

Jones, G., Langrall, C. y Mooney, E. (2007). Research in probability: responding to classroom realities. In F. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* Vol. 2 (pp. 909-955). Greenwich, CT: Information Age Publishing y NCTM.

Lecoutre, M. P. (1992). Cognitive models and problem spaces in "purely random" situations. *Educational Studies in Mathematics, 23*, 557-568.

Lowe, E. y Pimm, D. (1996). 'This is so': a text on texts. En A. Bishop, K. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick, y C. Laborde (Eds.) *International Handbook of Mathematics Education* (pp. 371-410). Dordrecht: Kluwer.

MEC (2006). *Real Decreto 1513/2006, de 7 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas de la educación primaria*. Madrid: Autor.

MECD (2014). *Real Decreto 126/2014, de 28 de febrero, por el que se establece el currículo básico de la educación primaria*. Madrid: Autor.

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston: VA, NCTM.

Ortiz, J. J. (2002). *La probabilidad en los libros de texto*. Universidad de Granada.

Rittle-Johnson, B. y Alibali, M. W. (1999). Conceptual and procedural knowledge of mathematics: Does one lead to the other? *Journal of Educational Psychology, 91*(1), 175- 189

Rittle-Johnson, B., Siegler, R. S. y Alibali, M. W. (2001). Developing conceptual understanding and procedural skill in mathematics: An iterative process, *Journal of Educational Psychology*, *93*(2), 343-362.

Serradó, A., Azcárate, P. y Cardeñoso, J. M. (2006). La caracterización escolar de la noción de probabilidad en libros de texto de la ESO. *Tarbiya. Revista de Investigación e Innovación Educativa*, *38*, 91-112.

ANEXO

Los libros de texto utilizados en el análisis fueron los siguientes:

Serie 1: Editorial Anaya:

[T1]. Pérez, E., Marsá, M., Díaz, C., Ferri, T., y Cid, O. (2011). *Matemáticas 2*. Proyecto Una a una.

[T2]. Ferrero, L., Gaztelu, I., Martín, P., y Martínez, L. (2008). *Matemáticas 3*. Proyecto Abre la puerta, reedición 2011.

[T3]. Ferrero, L., Gaztelu, I., Martín, P., y Martínez, L. (2008). *Matemáticas 4*. Proyecto Abre la puerta, reedición 2011.

[T4]. Ferrero, L., Gaztelu, I., y Martín, P. (2009). *Matemáticas 5*. Proyecto Abre la puerta.

[T5]. Ferrero, L., Gaztelu, I., y Martín, P. (2009). *Matemáticas 6*. Proyecto Abre la puerta.

Serie 2: Editorial S.M.

[T6]. Labarta, P., Santaolalla, E., Ferrandíz, B., y Galve, R. (2011). *Matemáticas. 2º*. Primaria. Conecta con Pupi, reedición 2012.

[T7]. Peña, M., Aranzubía, V., y Santaolalla, E. (2008). *Matemáticas 3º*. Proyecto Tirolina, reedición 2011.

[T8]. Peña, M., Aranzubía, V., y Santaolalla, E. (2008). *Matemáticas 4°*. Proyecto Tirolina, reedición 2011.

[T9]. Peña, M., Santaolalla, E., Aranzubía, V., y Sanz, B. (2009). *Matemáticas 6º*. Proyecto Timonel, reedición 2010.

[T10]. Aranzubía, V., Santaolalla, E., Roldán, J., y Pérez, E. (2009). *Matemáticas 6º*. Nuevo proyecto Planeta Amigo.

Épsilon - *Revista de Educación Matemática* **2014, Vol. 31(2), nº 87, 43-54**

Comparación de razones: "¿qué es mejor, dos pizzas medianas o una familiar?"

Bernardo Gómez Alfonso
Amparo García Nadal
Universidad de Valencia

Resumen: *En este trabajo se presenta una propuesta para evaluar situaciones de desproporción dentro del tema de razón y proporción. Las tareas diseñadas para el cuestionario son realistas extraídas de folletos de ofertas comerciales. Se analizan las tareas señalando sus componentes críticas y los patrones de respuesta de los estudiantes.*
Palabras clave: *razón y proporción, resolución de problemas, normalizar y relativamente*

Ratio comparisons: "what is better, two regular pizzas or a large pizza?"

Abstract: *This study presents a proposal to evaluate not proportion in ratio and proportion situations. The tasks realized for the test are real and drawn from brochures of commercial offers. Tasks are analyzed indicating its critical components and the students' responses patterns.*
Keywords: *ratio and proportion, problem solving, norming and relatively*

INTRODUCCIÓN

El concepto de razón es muy complejo y requiere un proceso de aprendizaje a largo plazo, donde es necesario que los estudiantes se vean confrontados con tantos aspectos de la razón como sea posible, y emparejados a tantos fenómenos como se pueda. Aunque se trata de una relación de equivalencia, definida por la igualdad: $a{:}b=c{:}d$ si el par (a, b) es equivalente a (c, d), su significado propio, lo que hace valiosa a la razón no es su valor numérico, sino hablar sobre igualdad o desigualdad de razones, sin conocer el tamaño de la razón (Freudenthal, 2001, p.67). Otro aspecto importante es que una razón es una relación invariante y que cualquier cambio en el antecedente (numerador) producirá un cambio en el consecuente (denominador); y que a diferencia de lo que ocurre con las fracciones no se necesita conocer el "todo", porque la relación no cambia de valor cuando cambia la cantidad total.

Los estudios sobre razón y proporción han estado influidos por el papel central asignado al razonamiento proporcional. Se distinguen dos tipos principales de estudios: los que se centran en el desarrollo cognitivo y los que se orientan a la estructura y caracterización del contenido matemático. Los primeros, se fijan en el estudio de las competencias en el sentido de Fernández, Figueras, Gómez, Monzó y Puig (2009), es decir, lo que el alumno puede o no puede hacer (Tourniaire y Pulos, 1985); los segundos, se centran en el contenido matemático, como hace Freudenthal (2001) en su punto de vista fenomenológico, donde propone que en vez de empezar por el concepto "y andar buscando materiales que hagan concreto ese concepto se debería buscar primero fenómenos que pudieran compelir al estudiante a constituir el objeto mental que está siendo matematizado por el concepto". Las aportaciones de estos autores son pues los antecedentes de este trabajo.

LA INVESTIGACIÓN PRECEDENTE Y LAS PREGUNTAS DE INVESTIGACIÓN

A lo largo de los últimos años se han usado diferentes tipos de tareas para evaluar el razonamiento proporcional: *Valor perdido, Comparación numérica* y *Comparación y predicción cualitativa*, *Proporciones que implican conversión de razones a razones de cambio o fracciones* y *Problemas de traslación*, (Cramer y Post, 1993; Lesh, Post y Behr, 1988). A partir del análisis de las respuestas a estas tareas se ha obtenido la descripción de estrategias correctas: *razón unitaria, factor de cambio, fracción* y *producto cruzado*; e incorrectas: *construcción progresiva, operaciones aleatorias y diferencia constante* (Cramer y Post, 1993; Hart, 1981).

Además, se han identificado variables que influyen en las decisiones de los estudiantes, unas son de tipo estructural y otras referentes al contexto. Entre las variables estructurales, se distinguen dos tipos de comparaciones denominadas "interna" y "externa" por Freudenthal (2001) o "dentro" y "entre" por Noelting (1980).

Ligados a estos fenómenos, se señala la importancia de ideas tales como *relativamente* o *comparativamente*. Estas ideas permiten comparar cantidades con referentes diferentes transformando el referente.

A menudo hay razones que en principio son difíciles de imaginar o visualizar. En esos casos, Freudenthal (2001) hace uso de un conjunto de técnicas a las que denomina *normalizar*. La *normalización* es un proceso de reconceptualización de un sistema en relación con alguna unidad fijada o estándar (Lamon, 1994, p.94).

Se asume la precariedad de la enseñanza tradicional de la razón, que se construye con objetos matemáticos desconectados de la realidad y no da cuenta de la riqueza fenomenológica de ese concepto. Así, el objetivo de este trabajo es aportar tareas relevantes tomadas de la vida diaria para la enseñanza de la razón que pongan en juego el objeto mental "relativamente", las técnicas de normalización, las relaciones entre cantidades y la comparación de razones desiguales.

Con el fin de organizar el estudio planteado se formulan las siguientes preguntas de investigación:

- ¿Cuáles son las componentes críticas de las tareas diseñadas?
- ¿Qué características comunes y no comunes que se pueden identificar en las respuestas de los estudiantes al intentar resolverlas: patrones de respuestas y perfiles de los estudiantes?

METODOLOGÍA

La investigación es de tipo cualitativo y se basa en el "análisis de las tareas" teórico y empírico. Para ello se diseña un cuestionario ex-profeso. El trabajo previo de Fernández, Figueras, Gómez, Monzó y Puig (2009) es el referente de la metodología.

En este apartado se especifica cómo se implementó el cuestionario, la muestra tomada para el estudio, cómo se diseñaron las tareas, sus componentes críticas y un esquema de clasificación de las respuestas de los estudiantes por categorías y subcategorías.

Diseño, muestra e implementación

Las tareas elegidas son realistas ya que han sido tomadas de la vida diaria, concretamente de los folletos de ofertas comerciales corrientes en los establecimientos.

Son tareas que involucran el objeto mental *relativament*e y las técnicas de *normalización*. Son tareas de *comparación numérica* (Cramer y Post, 1993) en situaciones de *desproporción*, porque hay que juzgar cuál de dos razones es mayor o menor, o tal vez iguales: A/B (<, =, >) C/D, y esto se puede hacer de modo grosero o preciso.

Además, en estos problemas suele ser conveniente que se requiera efectuar una *traslación entre o conversión de normalizaciones* para homogeneizar las razones cuando vienen normalizadas de modo diferente.

El cuestionario inicial que se diseñó consta de 7 tareas, denominadas: "pizzas", "cervezas", "antimosquitos", "arroz", "fairy", "papel higiénico 1" y "papel higiénico 2".

Se implementó en tres niveles educativos: 1º bachillerato, 2º magisterio y máster de profesorado, mediante hojas individuales. En los tres grupos la actitud fue participativa e interesada.

ANÁLISIS DE TAREAS

Con el fin de ilustrar el trabajo realizado, se ofrece a continuación el análisis de una tarea. Se señalan sus componentes críticas y se muestra cómo dichas componentes sustentan los procesos de resolución de la tarea.

Tarea "Pizzas"

Se presenta a los estudiantes una imagen que corresponde a una oferta de pizzas. El texto dice: ¿Qué es mejor, dos pizzas medianas de 30cm de diámetro y 14,95€ cada una, o una pizza familiar de 50cm de diámetro y 27.95€?

Figura 1.Tarea Pizzas.

Objetivo cognitivo

El objetivo de esta tarea no reside en responder qué pizza es más barata en términos absolutos, sino relativos, es decir, qué pizza es más barata en relación con la cantidad ofrecida.

Se trata de una tarea de comparación numérica en un contexto cotidiano (ofertas comerciales) y la respuesta no tiene porqué ser precisa, puede ser grosera, en el sentido de Freudenthal (2001, p.125). La relación entre cantidades que permite resolver la tarea puede ser interna o externa, según la estrategia elegida.

La respuesta que se espera de los alumnos es la que contesta a qué oferta ofrece más cantidad de comida al menor precio.

Componentes críticas de la tarea "pizzas"

Como se ha dicho previamente, el objetivo de la tarea no es contestar qué pizza es más barata en términos absolutos, sino qué pizza es más barata en relación con la cantidad ofrecida. Esto sitúa la componente crítica de la tarea en los procesos de *relativizar*. Para ello es necesario:

C.C.1. Calcular:

a) El área de las pizzas (de la familiar y de las dos medianas).

b) El coste de las dos pizzas medianas.

C.C.2. Comparar:

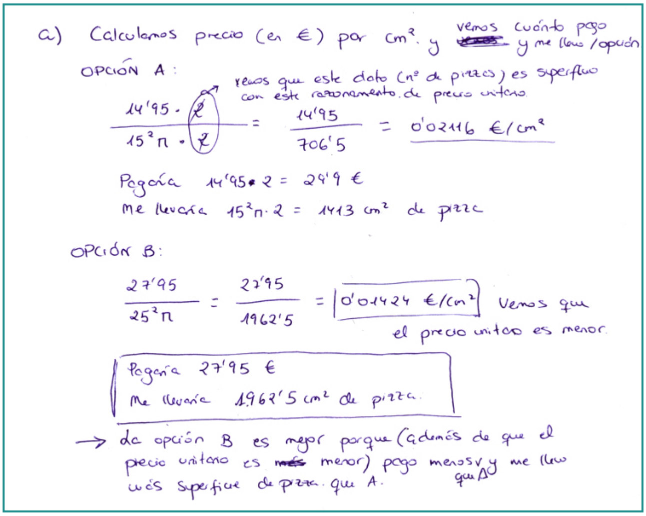
c) Internamente: áreas (¿dónde hay más cantidad?), precios (¿cuál es más barata?), y luego comparar ambas comparaciones.

d) Externamente: precios con áreas (*relativizar*), obteniendo así los costes unitarios (o la relación inversa) de cada oferta y luego compararlos.

Soluciones aportadas por los expertos

Con el fin de conocer a priori qué estrategias se puede esperar de los estudiantes y tener información sobre los procesos de resolución se implementó el cuestionario con 4 expertos. Se considera experto a todo profesor experimentado y/o con sólida formación matemática.

Como ejemplo, se presenta la resolución aportada por la experta X que utiliza las dos opciones, C.C.2.a y C.C.2.b.


a) Calculamos precio (en €) por cm². y vemos cuánto pago y me llevo / opción

OPCIÓN A:

vemos que este dato (nº de pizzas) es superfluo con este razonamiento de precio unitario

$\frac{14'95 \cdot 2}{15^2\pi \cdot 2} = \frac{14'95}{706'5} = 0'02116$ €/cm²

Pagaría 14'95·2 = 29'9 €

me llevaría 15²π·2 = 1413 cm² de pizza

OPCIÓN B:

$\frac{27'95}{25^2\pi} = \frac{27'95}{1962'5} = \boxed{0'01424 \text{ €/cm}^2}$ Vemos que el precio unitario es menor.

Pagaría 27'95 €
Me llevaría 1962'5 cm² de pizza.

→ la opción B es mejor porque (además de que el precio unitario es ~~más~~ menor) pago menos que A y me llevo más superficie de pizza que A.

Figura 2. Experta x.

Esta experta calcula el coste (C_m) y el área (S_m) de las pizzas medianas ($C_m = 2 \cdot 14{,}95 = 29.9$€ y $S_m = 2 \cdot \pi \cdot 15^2 = 1413 cm^2$) y el área ($S_f$) de la pizza familiar ($S_f = \pi \cdot 25^2 = 1962.5 cm^2$) ya que el coste individual viene dado como dato (C.C.1). Luego calcula los valores unitarios ($C_m/S_m = 0.02116$€/cm^2 y $C_f/S_f = 0.01424$€/cm^2) en cada caso y los compara (C.C.2.b). Finalmente apoya su conclusión con que "la opción B es mejor porque [...] pago menos que A y me llevo más superficie de pizza que A" (C.C.2.a).

Esta profesora percibe la invariancia de la razón: "vemos que este dato (nº pizzas) es superfluo con este razonamiento de precio unitario".

Los expertos han mostrado dos tipos de respuestas: una que se basa en el cálculo del coste unitario de las pizzas y otra que se centra en la idea de qué oferta proporciona más cantidad a menor precio. De los 4 expertos, 2 de ellos usan las dos estrategias y de los otros 2, uno hace C.C.2.a y otro C.C.2.b. Se debe señalar que de los expertos que responden mediante dos razonamientos diferentes, la primera reacción que se observa es la de buscar el coste unitario que es una respuesta típicamente escolar y poco flexible.

Soluciones de los estudiantes

Para clasificar las respuestas de los estudiantes e identificar los patrones de respuestas, los datos se organizan atendiendo a tres criterios principales:

- Perspectiva absoluta versus relativa (relativiza o no relativiza).
- Razones internas o externas (comparadas de forma grosera o precisa).
- Estrategias observadas.

De aquí se sigue un esquema de clasificación con las siguientes categorías:

1. Relativiza
- **1.1.** Compara razones adecuadas: internas o externas
  - **1.1.a.** Precisa
  - **1.1.b.** Grosera
- **1.2.** No compara razones adecuadas
  - **1.2.a.** Precisa
  - **1.2.b.** Grosera

2. No relativiza
- **2.1.** Cualitativa
- **2.2.** Cuantitativa/absoluta

3. No identificados

De acuerdo con las preguntas de investigación, entre las que se busca identificar patrones de respuesta en los estudiantes, se presentan a continuación algunos ejemplos que ilustran y explican las categorías y subcategorías definidas para ello. Cabe señalar que del esquema general que organiza esas categorías para todas las tareas del cuestionario, solamente se extrae la parte referente a la tarea de las pizzas.

Categoría 1: Relativiza

Aquí se incluyen respuestas en las que los alumnos realizan comparaciones con datos relativos para dar solución a la tarea.

Subcategoría 1.1. Compara razones adecuadas: internas o externas

Se han identificado los dos tipos de respuestas diferentes, C.C.2.a y C.C.2.b. En la primera se usan relaciones entre cantidades internas y en la otra externas. Hay que señalar que las respuestas incluidas en esta subcategoría son todas correctas.

Clase 1.1.a. Precisa

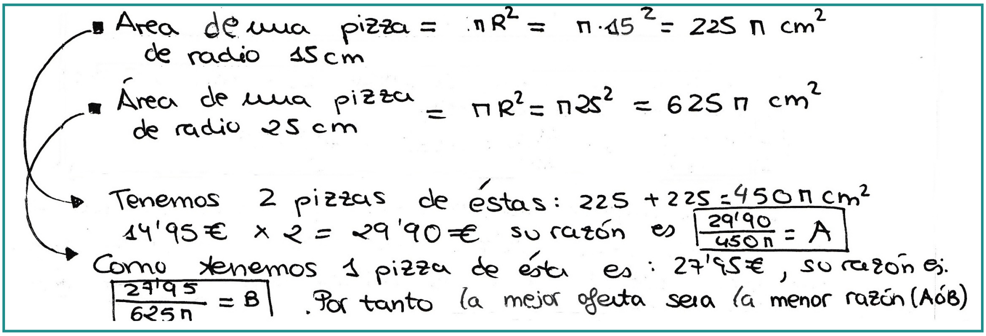


Figura 3. Alumno 14 Máster.

Como se observa en la figura 3, el alumno calcula el coste unitario de cada opción (Medianas: A = 29.90/450π; Familiar: B = 27.95/625π). Concluye que "la mejor oferta será la menor razón A ó B".

Las comparaciones realizadas por este alumno son externas y la estrategia, como ya se ha visto anteriormente, es adecuada.

Clase 1.1.b. Grosera

El alumno calcula el área y el coste de las medianas (C_m = 29.9€ y S_m = 1413cm^2) y el área de la familiar (S_f = 1963,49cm^2). Con estos datos, concluye que "es mucho más económica la pizza de 50cm de diámetro".

Este estudiante no necesita realizar los cálculos para obtener los costes unitarios, le basta con calcular las áreas y los costes y compararlos de forma interna.

Señalar que de los dos ejemplos de respuestas que se presentan dentro de esta subcategoría, la primera es una solución más formal que la proporcionada por el alumno de la figura 4.

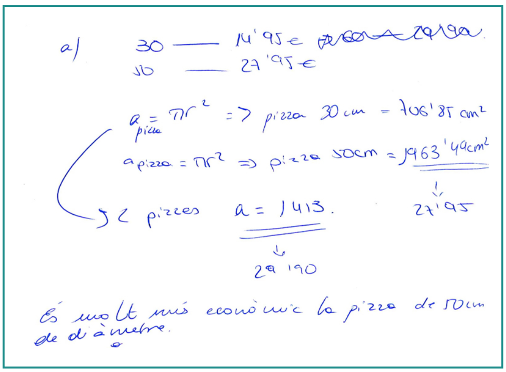
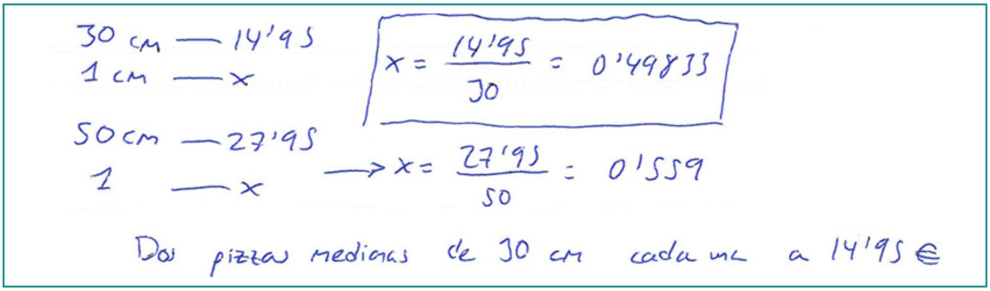


Figura 4. Alumno 1 Bachillerato (CCSS).

Subcategoría 1.2. No compara razones adecuadas

Se recogen tres tipos de respuestas, similares a las de la subcategoría anterior, que principalmente, muestran un centramiento en la linealidad (De Bock et al. 1998). Ninguna respuesta aquí incluida es correcta.

Clase 1.2.a. Precisa


30 cm — 14'95
1 cm — x

$\boxed{x = \frac{14'95}{30} = 0'49833}$

50cm — 27'95
1 — x

$\rightarrow x = \frac{27'95}{50} = 0'559$

Dos pizzas medianas de 30 cm cada una a 14'95 €

Figura 5. Alumno 7 Máster.

Este alumno del máster calcula costes unitarios (precio/diámetro) mediante una regla de 3 (Mediana: 30cm → 14.95; 1cm → x; x = 14,95/30 = 0,49833; Familiar: 50cm → 27.95; 1cm → x; x = 27,95/50 = 0,559). Concluye que es mejor "dos pizzas medianas de 30cm cada una a 14.95" ya que observa que el coste unitario (comparación externa) es menor que en la familiar.

Una justificación visual de porqué no es adecuada es la de la figura 6, donde se ve que a igualdad de diámetros entre la familiar y las dos medianas, la familiar tiene mucha más área que las dos medianas juntas.

Otro ejemplo de problemas con la linealidad es la siguiente estrategia:

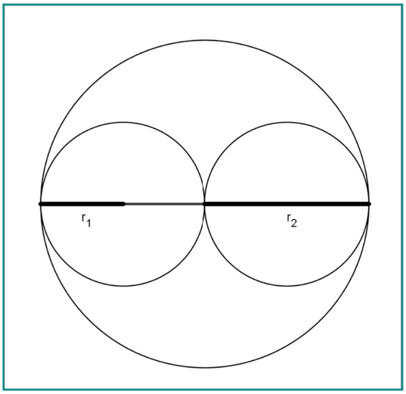
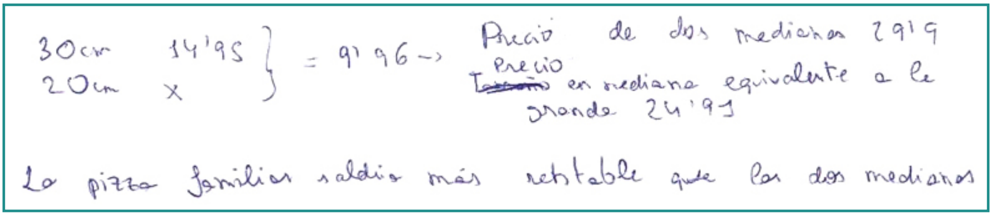


Figura 6.


30cm 14'95
20cm x
= 9'96 → Precio de dos medianas 19'9
Precio ~~Tamaño~~ en mediana equivalente a la grande 24'91

La pizza familiar saldría más rentable que las dos medianas

Figura 7. Alumno 4 Magisterio.

El estudiante, tras calcular la diferencia de diámetros (50 - 30 = 20), plantea una regla de 3 (30/20 = 14.95/x ó 30/14.95 = 20/x → x = 9.96) para hallar lo que costarían los 20cm de más que tiene la pizza familiar en proporción al coste de una mediana, y de aquí obtiene, por adición, lo que debería costar la pizza familiar. Compara este coste con el de la oferta y concluye que la pizza familiar saldría más rentable que las dos medianas.

Al igual que el anterior, si en lugar de calcularlo respecto de los diámetros, lo calculase respecto de las áreas, la solución sería correcta y se habría encontrado otra estrategia adecuada para resolver la tarea.

Clase 1.2.b. Grosera

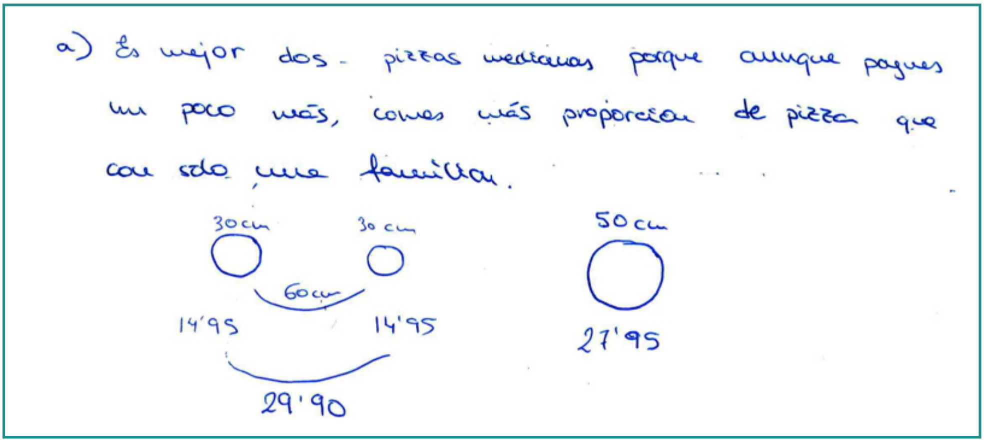


Figura 8. Alumno 3 Bachillerato (CCSS).

Este alumno procede de manera similar al de la figura 4 pero, en lugar de comparar áreas, ahora compara diámetros por un lado y precios por otro (Familiar: 50cm a 27,95€; Medianas: 60cm a 29,90€). Concluye que "es mejor dos pizzas medianas porque aunque pagues un poco más, comes más proporción de pizza que con una familiar".

Notar que, aunque no se calculan costes unitarios o razones internas de áreas entre sí y costes entre sí, este tipo de estrategia sería correcta si hubiera calculado áreas.

Categoría 2: No relativiza

En esta categoría se engloban respuestas en las que no se comparan cantidades relativas, sino absolutas u otro tipo de respuestas.

Subcategoría 2.1. Cualitativa

Una respuesta habitual es la de tipo cualitativo. Esto significa que no se centra en datos numéricos de la oferta sino que se centra en aspectos superficiales.

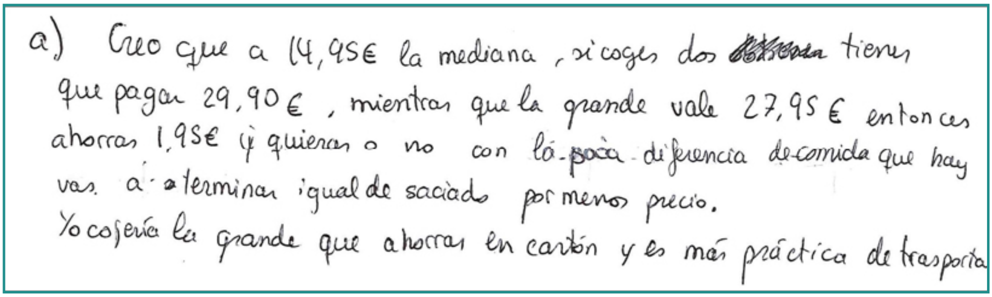

a) Creo que a 14,95€ la mediana, si coges dos tienes que pagar 29,90 €, mientras que la grande vale 27,95 € entonces ahorras 1,95€ y quieras o no con lo poca diferencia de comida que hay vas a terminar igual de saciado por menos precio.
Yo cogería la grande que ahorras en cartón y es más práctica de trasporta

Figura 9. Alumno 37 Bachillerato (CC).

Este alumno inicia su respuesta haciendo cálculos aditivos pero finalmente concluye que "cogería la grande que ahorras en cartón y es más práctica de transportar". Está claro que esto no es suficiente ya que no tiene en cuenta los datos numéricos de la oferta.

Subcategoría 2.2. Cuantitativa/absoluta

Se muestran respuestas en las que se realizan cálculos aditivos que en ocasiones no contemplan la totalidad de los datos del enunciado.

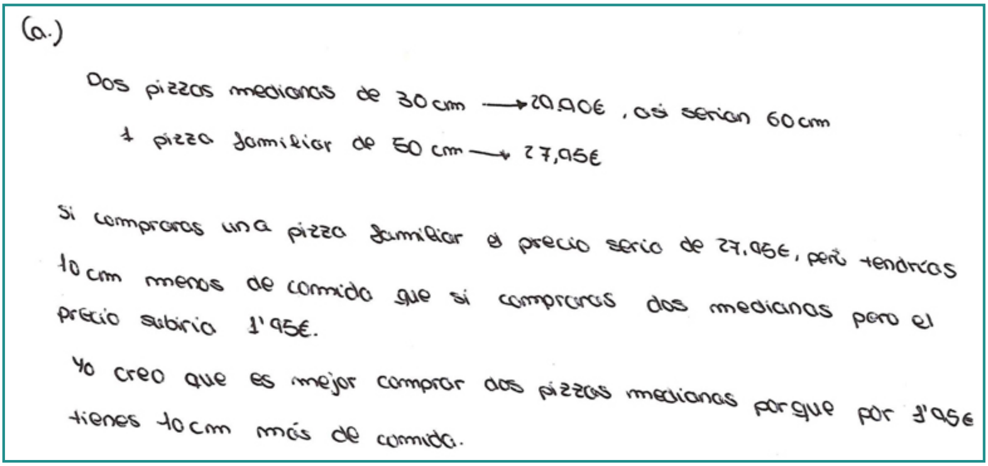

(a.)
Dos pizzas medianas de 30 cm → 29,90€, así serían 60 cm
1 pizza familiar de 50 cm → 27,95€
Si compraras una pizza familiar el precio sería de 27,95€, pero tendrías 10 cm menos de comida que si compraras dos medianas pero el precio subiría 1'95€.
Yo creo que es mejor comprar dos pizzas medianas porque por 1'95€ tienes 10 cm más de comida.

Figura 10. Alumno 40 Bachillerato (CC).

Este alumno compara aditivamente diámetros y precios (60 - 50 = 10cm y 29,90 - 27,95 = 1,95€). Concluye que "es mejor comprar dos pizzas medianas porque por 1,95€ tienes 10cm más de comida".

Categoría 3: No identificados

En esta categoría se clasifican respuestas de estudiantes que no se entienden, que no están justificadas mediante ningún cálculo ni ningún razonamiento, respuestas en blanco, etc.

CONCLUSIONES

En síntesis, del trabajo realizado en tareas de comparación numérica con razones desiguales, se pueden extraer las siguientes conclusiones:

1) Se observa una tendencia a usar la estrategia del coste unitario, que es una estrategia escolar que puede ser indicativa de poca flexibilidad y poca disponibilidad de estrategias alternativas. El uso de esta estrategia aumenta a medida que avanza el nivel educativo.
2) Esto concuerda con que los estudiantes prefieren usar la relación externa, pero preferentemente en el sentido euros por cm^2 o por cm y no en el sentido inverso: cm^2 por €. Esto es un indicativo de falta de percepción de la reversibilidad en la razón externa, como se puede observar también en otras tareas. Un ejemplo de esta falta de reversibilidad se observa al referirse al rendimiento de un coche, que la preferencia es darlo en litros/km y no en el sentido inverso: km/litro. Esto hace que aparezcan dificultades para asociar, por ejemplo, un rendimiento de 5l/100km con otro 20km/l, siendo ambos equivalentes.
3) Ningún estudiante manifiesta percibir la invariancia de la razón externa al calcular el coste unitario de las pizzas medianas porque utilizan el número de ítems que luego cancelan: $\dfrac{14.95 \cdot 2}{15^2 \pi \cdot 2}$
4) Aunque la estrategia del cálculo del valor unitario es adecuada, la respuesta en la que se realiza una comparación grosera ("a más de esto, menos de esto otro") es más eficiente ya que no necesita calcular razones y, simplemente obteniendo el área total de cada oferta y el coste de las medianas (el de la familiar es un dato del enunciado), puede proporcionar una respuesta correcta.
5) Aunque los estudiantes del máster de profesorado tienen una base matemática más amplia que los otros dos grupos, es relevante destacar que tropiezan con las mismas dificultades que en los cursos anteriores, aunque en menor medida. Siguen usando cálculos aditivos y algunos de ellos se centran en la linealidad.

Por último, algunas dificultades previsibles en esta tarea pueden ser que los alumnos no recuerden la fórmula del área del círculo y que el uso de la palabra "mejor" en la pregunta genere algún tipo de valoración subjetiva, ya que es un término no definido.

REFERENCIAS

Cramer, K. and Post, T. (1993). Proportional Reasoning, *The Mathematics Teachers, vol. 86*, pp. 404-407.

De Bock, D., Verschaffel, L. and Janssens, D. (1998). The predominance of the linear model in secondary school students' solutions of word problems involving length and area of similar plane figures, *Educational Studies in Mathematics, vol. 35*, pp. 65-83.

Fernández, A., Figueras, O., Gómez, B., Monzó, O. y Puig, L. (2009). *Competencias en razón y proporción en la Escuela Primaria.* Valencia: Departament de Didàctica de la Matemàtica, Universitat de València.

Freudenthal, H. (2001). *Fenomenología didáctica de las estructuras matemáticas.* (Textos seleccionados: El Método, Fracciones, el lenguaje algebraico, Razón y Proporcionalidad. Traducción, notas e introducción de Didactical Phenomenology of Mathematical Structures. Dordrecht: D. Reidel. 1983 por Luis Puig. Valencia. Dpt. Didáctica de la Matemática). México, D. F. Departamento de Matemática Educativa. CINVESTAV.

Hart, K.M. (1981). Ratio and Proportion. *Children´s Understandings of Mathematics, 11-16,* John Murray Ltd., London.

Lamon, S.J. (1994). Ratio and Proportion: Cognitive Foundations in Unitizing and Norming. In G. Harel and J. Confrey (eds.), *The Development of Multiplicative Reasoning in the learning of mathematics,* pp. 89-120, SUNNY Press, Albany, N.Y.

Lesh, R., Post, T. and Behr, M. (1988). Proportional reasoning, in J. Hiebert y M. Behr (eds.), *Number Concepts and Operations in the Middle Grades*, pp. 93-118, Reston, VA: NCTM.

Noelting, G. (1980). The Development of Proportional Reasoning and the Ratio Concept: Part I – Differentiation of Stages', *Educational Studies in Mathematics*, *vol. 11*, pp. 217-253.

Tourniaire, F. and Pulos, S. (1985). Proportional Reasoning: a Review of the Literature, *Educational Studies in Mathematics, vol. 16,* pp. 181-204.

Épsilon - *Revista de Educación Matemática* *2014, Vol. 31(2), nº 87, 55-70*

Dificultades, conflictos, errores y obstáculos epistemológicos en la identificación visual del resto de la división con números decimales

Ana Belén Cabello Pardos
Mª Isabel Rodríguez Cartagena
Martín M. Garbayo Moreno
Mercedes Hidalgo Herrero
Facultad de Educación Universidad Complutense de Madrid

Resumen: *En este trabajo se muestra que la identificación visual del resto de la división de números decimales, como si se tratase de una división de números naturales, constituye un obstáculo epistemológico. La investigación se ha realizado con una muestra de 151 alumnos de Secundaria y Bachillerato en la Comunidad de Madrid. En primer lugar se han analizado las dificultades, errores y conflictos que manifiestan los alumnos en la tarea de identificación del resto y en la realización de la prueba de la división. A partir de dicho análisis, se han verificado las características que definen el obstáculo epistemológico. Finalmente, se realiza una propuesta metodológica para franquear el obstáculo basada en imágenes conceptuales correctas.*
Palabras clave: *dificultad, error, conflicto, obstáculo epistemológico, resto de la división, número decimal.*

Difficulties, conflicts, errors and epistemological obstacles in the visual identification of the remainder of the division with decimal numbers

Abstract: *In this paper we show that visual identification of the remainder in the division of decimal numbers, as if it were a division of natural numbers, is an epistemological*

obstacle. The research was conducted with a sample of 151 students from 7th to 12th degree in the Community of Madrid. First we have analyzed the difficulties, errors and conflicts showed by students in the task of identifying the remainder and in checking the proof of division. From this analysis, we have verified the characteristics that define the epistemological obstacle. Finally, a methodological proposal is made to cross the obstacle based on correct conceptual images.
Keywords: *difficulty, error, conflict, epistemological obstacle, remainder of the division, decimal number*

INTRODUCCIÓN

El enfoque de esta investigación es el tratamiento didáctico del error como parte del proceso de construcción del conocimiento (Rico, 1997). En concreto, en este trabajo se muestra el origen del error detectado en la identificación del resto de la división con números decimales, se analiza en detalle la formación del concepto (las dificultades y los conflictos) y se realiza una propuesta metodológica de corrección de dicho error.

Los errores más frecuentes relacionados con los números decimales, su escritura y sus operaciones, han sido ampliamente estudiados y, según Centeno (1988), se pueden clasificar en cuatro grupos:

a) Errores relacionados con la lectura y escritura de los números: valor de posición.
b) Errores relacionados con el cero.
c) Errores relacionados con el orden entre decimales.
d) Errores relacionados con las operaciones.

En este último grupo, no aparece mencionado el resto de la división sino el cociente. Tras el estudio realizado, la presente investigación sobre la formación del concepto "resto de la división con números decimales" supone una aportación novedosa en el ámbito de la Didáctica de los Números Decimales.

La particularidad que tiene la división es que es la única operación aritmética en la que se obtienen dos resultados, cociente y resto, a partir de dos números dados, dividendo y divisor. En el presente trabajo se ha estudiado la comprensión del resto, con un planteamiento descontextualizado, en el caso en el que el dividendo sea un número decimal y el divisor un número natural. El motivo de centrar la investigación en este aspecto es que cualquier división de números decimales se transforma en una división de números naturales o en una división de un número decimal entre un número natural.

Existen estudios que muestran que en las divisiones con números decimales los alumnos tienen dificultades en la identificación del resto de la división (Llinares, 2003; Rojas y Flores, 2010). En la presente investigación se muestra que dicha dificultad se debe a que los alumnos tienen imágenes conceptuales erróneas del resto en la división de un número decimal entre un número natural. Siguiendo el modelo cognitivo imagen del concepto-definición del concepto (Tall y Vinner, 1981; Vinner, 1975, 1983), se puede afirmar que, al realizar la tarea de identificación del resto, se activa solamente la celda de la imagen del concepto y los alumnos responden erróneamente. Este error es la manifestación

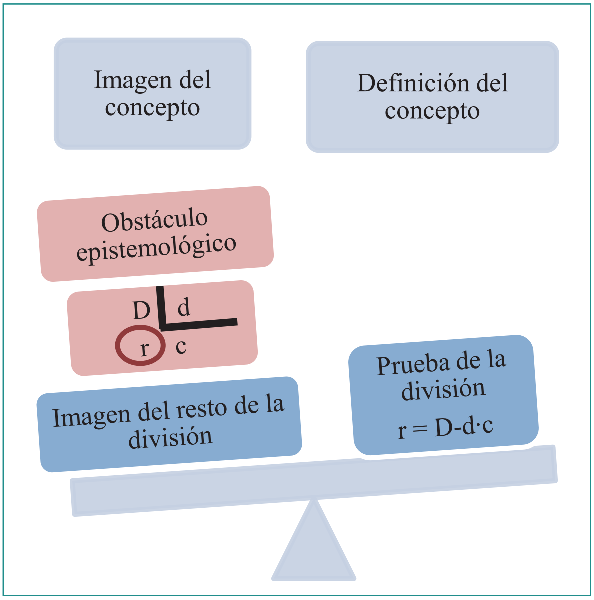


Figura 1. Conflicto planteado entre la imagen y la definición del concepto "resto de la división de un número decimal entre uno natural" (Cabello, Rodríguez, Garbayo, e Hidalgo, 2014)

de un obstáculo epistemológico (Brousseau, 1976, 1983, 1989, 2007) de fuerte componente visual, derivado de la división de números naturales. El poder que tiene la imagen errónea es tal que fuerza la prueba de la división, para obtener el resultado deseado cometiendo un error en la suma de números decimales, sin que se produzca una corrección de la imagen del concepto por la definición del mismo. La imagen conceptual y la definición conceptual entran en conflicto (Figura 1).

En este párrafo se han presentado los términos de la investigación, dificultad, conflicto, obstáculo epistemológico y error, que se definen en el epígrafe siguiente.

Con este planteamiento, en la presente investigación se propone corregir el error creando imágenes conceptuales correctas que permitan la explicitación de la resolución del conflicto planteado entre la imagen y la definición del concepto y, por otro lado, entre los dos ámbitos de trabajo (números naturales y números decimales) (Figura 2).

MARCO TEÓRICO

En este epígrafe, se exponen los dos referentes teóricos en los que se basa la investigación y se definen los términos que se utilizan.

Modelo cognitivo imagen del concepto-definición del concepto

El primer referente teórico de esta investigación es el modelo cognitivo imagen del concepto-definición del concepto (Tall y Vinner, 1981; Vinner, 1975, 1983).

Por un lado, se considera el dibujo (*picture*) mental de un concepto, es decir, el conjunto de todos los dibujos, representaciones visuales y símbolos que el alumno ha

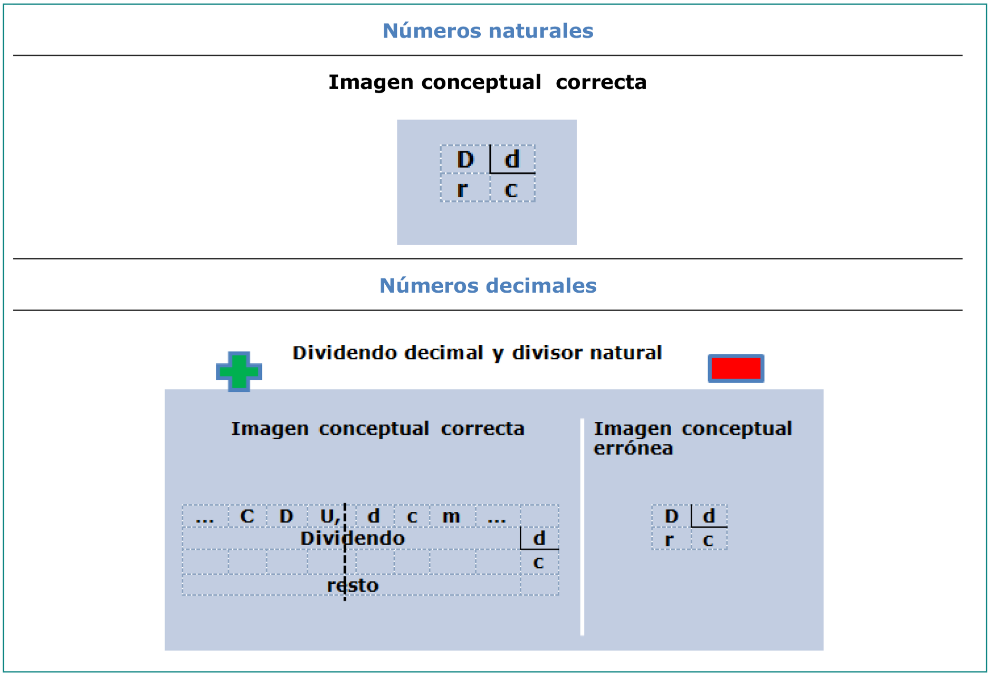


Figura 2. Imágenes conceptuales de la división en el ámbito de los números naturales y en el de los decimales (elaboración propia)

asociado con el concepto en su mente. Por otro lado, se consideran las propiedades y procedimientos que también ha asociado con el concepto.

Con estos elementos se define la imagen del concepto como el dibujo mental junto con dichas propiedades y procedimientos. La definición del concepto es una expresión verbal que lo explica con precisión.

Para cada concepto, se supone la existencia de dos celdas en la estructura cognitiva, una para la imagen y otra para la definición, que pueden interactuar tanto en la formación de conceptos como en la realización de tareas, pudiendo entrar ambas en conflicto.

En el modelo (Vinner, 1983) se analizan las tres modalidades de interacción que implícitamente asume la mayoría de los profesores cuando se realiza una tarea.

La primera modalidad es la interacción definición-imagen-definición (Figura 3), la segunda consiste en la activación de la definición del concepto (Figura 4) y la tercera es la interacción unidireccional imagen-definición (Figura 5). Las tres coinciden en que la respuesta pasa por la consulta de la definición conceptual.

Sin embargo, el modelo sostiene que no se puede forzar a la estructura cognitiva a utilizar definiciones y que, lo que ocurre es que, generalmente, la celda de la definición del concepto no se activa (Figura 6).

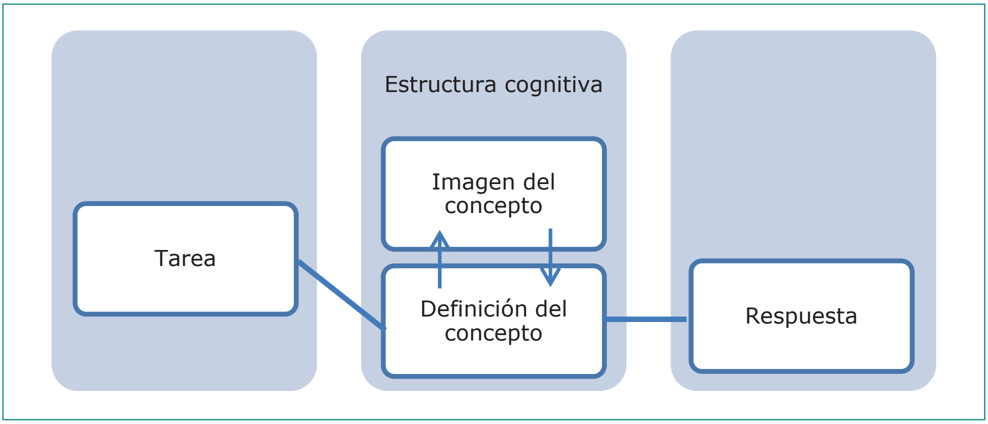


Figura 3. Modalidad definición-imagen-definición, basada en Vinner (1983)

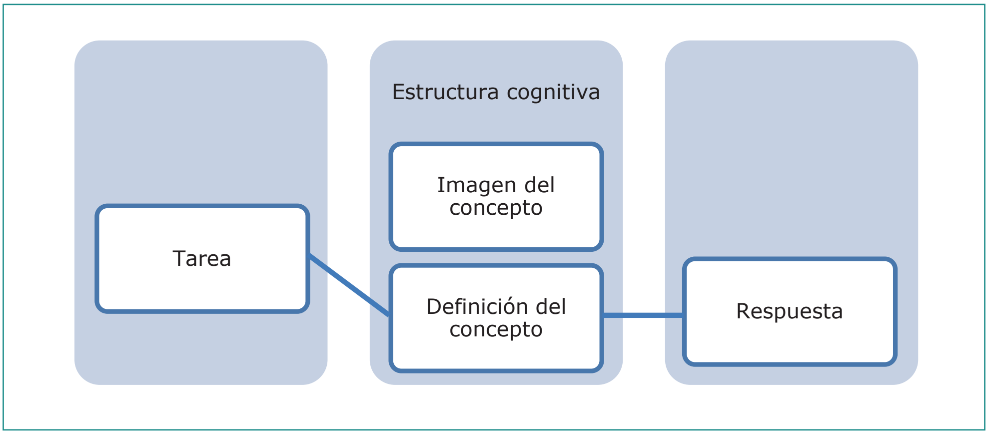


Figura 4. Activación de la definición del concepto, basada en Vinner (1983)

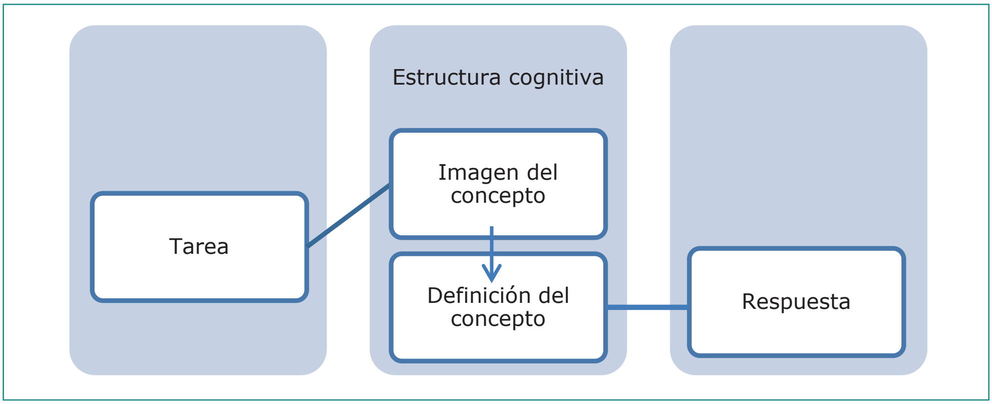


Figura 5. Interacción imagen-definición, basada en Vinner (1983)

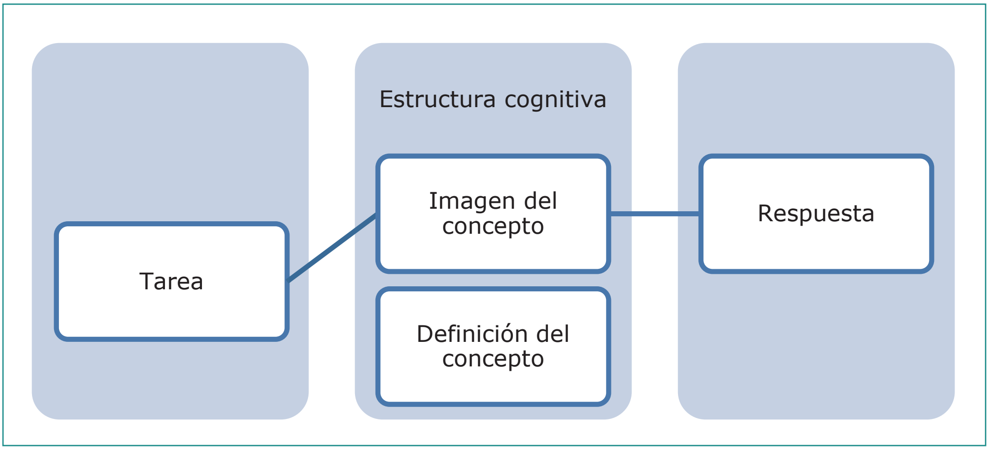


Figura 6. Activación de la imagen del concepto, basada en Vinner (1983)

Dificultades, conflictos y errores. Los obstáculos epistemológicos

El segundo referente teórico lo constituye el estudio de los obstáculos epistemológicos iniciado por Bachelard (1938) en el campo de las Ciencias Experimentales al plantear el problema del conocimiento científico en términos de obstáculos y propuesto por Brousseau (1976, 1983, 2007) en Matemáticas al pensar en la modelización de las situaciones didácticas.

Brousseau define un obstáculo (1976, 1983) como un conocimiento, que tiene su dominio de validez y eficacia y también un dominio donde a priori parece pertinente pero donde se revela falso, ineficaz y fuente de errores. Se manifiesta con errores persistentes, ofreciendo resistencia a su rechazo.

La definición de obstáculo de Brousseau ha sido utilizada por numerosos investigadores en Matemáticas para examinar las dificultades que encuentran los alumnos en distintas nociones matemáticas, aunque también hay autores que utilizan la palabra "obstáculo" en un sentido distinto (Vosniadou, 2013).

Brousseau establece una clasificación de obstáculos dependiendo de su origen (Figura 7), según esté situado en uno de los polos del sistema didáctico (alumno, profesor, saber), lo que permite definir obstáculos ontogenéticos, didácticos y epistemológicos (Cid, 2000).

Los obstáculos de origen ontogenético son los que proceden de las limitaciones del sujeto en el momento de su desarrollo (Brousseau, 1976).

Los obstáculos de origen didáctico son los que dependen de una elección o de un proyecto de sistema educativo (Brousseau, 1976).

Los obstáculos de origen epistemológico "son aquellos a los cuales uno no puede, ni debe escapar, del hecho mismo de su rol constitutivo en el conocimiento a que se apunta. Uno puede encontrarlos en la historia de los conceptos mismos. Eso no quiere decir que se deba amplificar su efecto ni que deban reproducirse en el medio escolar las condiciones históricas en las que han sido vencidos" (Brousseau, 1976).

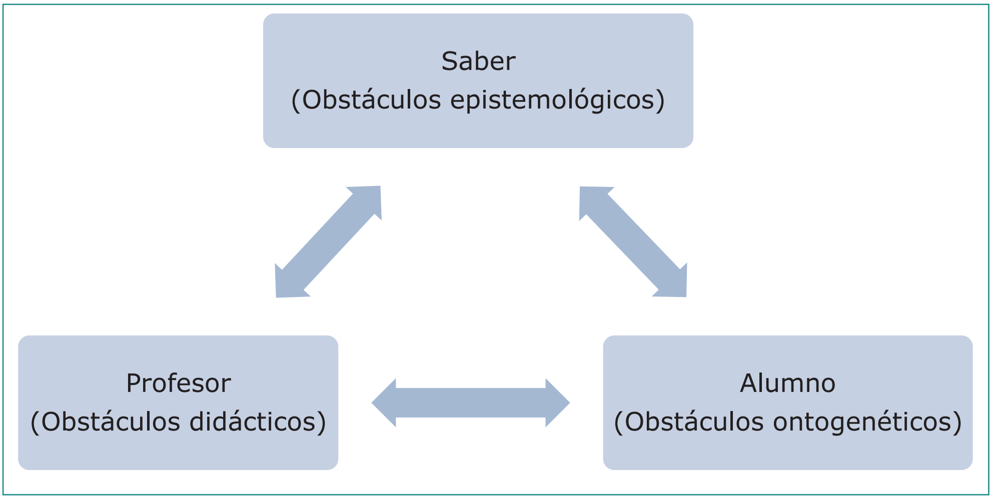


Figura 7. Clasificación de los obstáculos según Brousseau, (1976)

Un obstáculo epistemológico (Brousseau, 1976, 1983, 2007) es un conocimiento, válido en determinado ámbito, pero falso en un ámbito nuevo, que se manifiesta a través de errores, oponiendo resistencia a la adquisición del nuevo conocimiento y apareciendo de forma imprevista, siendo además, universal (no personal) y constitutivo del saber, es decir, que solo se puede rechazar explícitamente integrando su negación en el aprendizaje bajo la forma de contraejemplos (Figura 8).

Obstáculo epistemológico	Conocimiento, válido en determinado ámbito, pero falso en un ámbito nuevo.
	Se manifiesta a través de errores.
	Opone resistencia a la adquisición del nuevo conocimiento y aparece de forma imprevista.
	Universal (no personal).
	Constitutivo del saber: solo se puede rechazar explícitamente integrando su negación en el aprendizaje bajo la forma de contraejemplos

Figura 8. Características del obstáculo epistemológico según Brousseau, (1983), tomada de Cabello, Rodríguez, Garbayo, e Hidalgo, (2014)

En el marco epistemológico, se consideran los conceptos “dificultad”, “conflicto” y “error” según el lenguaje coloquial (Centeno, 1988). Conviene precisar su definición para no confundirlos. Una dificultad es lo que impide realizar y entender algo bien y pronto. Un conflicto es un choque o enfrentamiento como resultado de la coexistencia de tendencias contradictorias. Un error es un juicio falso que puede ser producido por una dificultad, un conflicto o un obstáculo.

Estas definiciones clarifican la relación entre los términos planteados en el epígrafe. El obstáculo se manifiesta a través de errores. El hecho de que haya una dificultad no significa que se trate de un obstáculo. El conflicto aparece al presentarse para un conocimiento, un dominio de validez y otro en el que es falso, o también, una imagen que no se corresponde con la definición del concepto.

Las investigaciones realizadas en el estudio de los obstáculos epistemológicos en el ámbito de los números decimales (Artigue, 1990; Brousseau, 1980, 1981, 1989; Castro, 2001; Centeno, 1988; Llinares, 2003; Ruiz, 2004; Ruiz y García, 2009), presentan el dominio de los números naturales como la fuente de los obstáculos epistemológicos detectados en los números decimales.

METODOLOGÍA

Esta investigación se plantea dentro de la línea de investigación sobre la formación de conceptos matemáticos, a partir de la detección de errores, mediante la indagación en las imágenes conceptuales y la determinación de los obstáculos epistemológicos que pueden producir dichos errores.

Tiene su origen en la detección generalizada del error de identificación del resto en las divisiones de números decimales, en un grupo de alumnos de 1º de ESO de un Instituto de la Comunidad de Madrid. Se planteó el objetivo de determinar las causas de dicho error y su incidencia en el alumnado con un amplio rango de edades.

La hipótesis de la investigación es que los alumnos tienen imágenes conceptuales erróneas del resto de la división de números decimales debido a un obstáculo epistemológico derivado del ámbito de los números naturales. Los alumnos tienen la imagen conceptual de una cuadrícula en la que el resto ocupa la celda inferior izquierda.

Esta imagen conceptual es correcta en el ámbito de los números naturales y, en este ámbito, es coherente con la definición conceptual de resto de la división (Figura 9). Rey Pastor (1981) define el resto de la división de números naturales como la diferencia entre el dividendo y el mayor múltiplo del divisor contenido en él.

Para corroborar dicha hipótesis se indaga en dichas imágenes conceptuales y se analizan las características del obstáculo epistemológico. Finalmente se realiza una propuesta metodológica de corrección del error basada en la creación de imágenes conceptuales adecuadas.

Objetivos

La investigación se planteó con dos objetivos.

- Analizar las imágenes conceptuales de los alumnos sobre el resto de la división con números decimales e identificar el error.
- Indagar en la causa de dicho error y determinar si está originado por un obstáculo epistemológico.

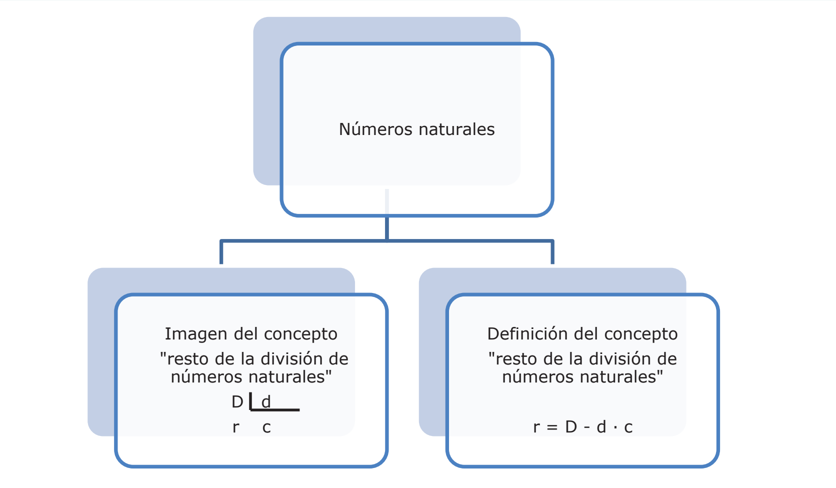


Figura 9. Conocimiento sobre el resto de la división, válido en el ámbito de los números naturales (elaboración propia)

Muestra

La muestra utilizada en la investigación es de carácter incidental ya que es la que se ha tenido a disposición en el momento de la investigación (Pereda, 1987). Está formada por alumnos de Secundaria y Bachillerato[1]. Consta de 151 unidades de ambos géneros (53% mujeres, 45,7% hombres y 1,3% no han contestado) distribuidos por cursos como se muestra en la siguiente tabla (Tabla 1).

Diseño metodológico

La investigación tiene un diseño metodológico experimental de carácter cuantitativo basado en el análisis de las tablas de porcentajes de las respuestas de los alumnos a las cuestiones planteadas.

Tabla 1. Muestra de la investigación

Curso	Mujeres	%	Hombres	%	nc	%	Total	%
1º ESO	32	51,1	24	42,9			56	37,1
4º ESO	18	39,1	28	60,9			46	30,5
1º Bach CCNN	16	69,6	7	30,4			23	15,2
2º Bach CCSS	14	53,8	10	38,5	2	7,7	26	17,2
Total	**80**	**53,0**	**69**	**45,7**	**2**	**1,3**	**151**	**100**

1. IES Narcís Monturiol (Parla), IES Joaquín Araújo (Fuenlabrada), IES Menendez Pelayo (Getafe).

```
2  7,  8  7 | 1   1
               -------
   5   8      2,  5  3
       3  7
          4
```

a) Al dividir 27,87 : 11 se obtiene 2,53 como cociente y ………….. como resto.

b) Realiza la prueba de la división.

Figura 10. División de un número decimal entre un número natural.
Identificación del resto y realización de la prueba de la división.

El instrumento diseñado consta de una división de un número decimal entre un número natural, ofreciendo la resolución. Se indica cuál es el cociente y se proponen dos tareas, identificar el resto y realizar la prueba de dicha división (Figura 10).

Para poder discriminar otro tipo de errores en la segunda tarea, se eligió una división con divisor 11 para que en la prueba de la división, al multiplicar el divisor por el cociente solo tuvieran que aplicar la tabla del 1. Además, con este diseño también se consigue que la suma que tienen que realizar, sea “sin llevadas”, con lo que se controlan otros posibles errores laterales. Finalmente, también se controla el error de confundir el resto con la primera cifra decimal del cociente.

El ítem “a”, permite conocer las imágenes conceptuales del resto mediante el análisis de los distintos tipos de respuesta (correcta, no respuesta, error típico y otros errores).

En el ítem “b” se analiza la utilización de la definición del concepto (correcta, no respuesta, error típico y otros errores).

El análisis de la “no respuesta” determina el grado de convencimiento que tienen los alumnos de sus respuestas.

El estudio conjunto de ambos ítems, permite conocer en detalle los conflictos entre la imagen y la definición conceptual.

RESULTADOS

Una vez tabulados los datos, se cuantificó el porcentaje de las respuestas de los alumnos a cada ítem. En el ítem “a” se ha podido identificar el “error típico” que consiste en responder “el resto es 4”, con un porcentaje de aparición del 90,1%. Solo un grupo reducido (8,6%) responde correctamente “el resto es 0,04”. La no respuesta es un caso aislado (0,7%) y lo mismo sucede con el error “el resto es 5” en el que considera como resto la primera cifra decimal del cociente (Tabla 2).

En el ítem “b” el “error típico” a la hora de realizar la prueba de la división, ha sido la alineación a la derecha que efectúan los alumnos al sumar el resto al resultado de multiplicar el divisor por el cociente (Figura 11), con un porcentaje de aparición del 75,5%.

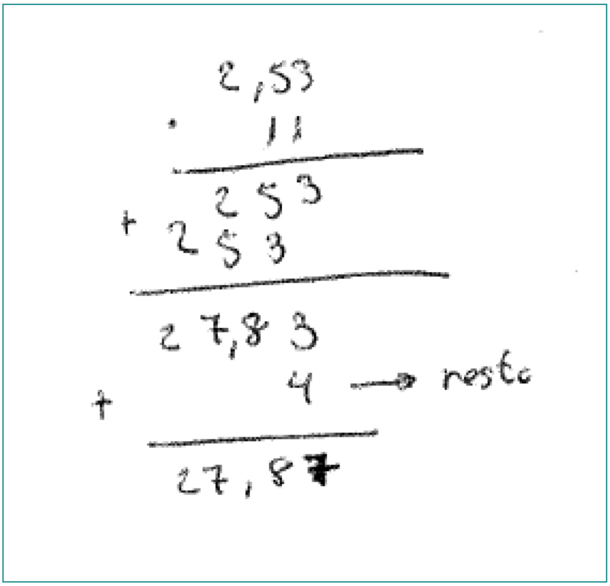


Figura 11. Prueba incorrecta de la división utilizando el resto 4 y sumando los números decimales alineados a la derecha

Tabla 2. Respuestas al ítem "a"

Ítem "a"	Frecuencia	Porcentaje
ns/nc	1	0,7
El resto es 4	136	90,1
El resto es 0,04	13	8,6
El resto es 5	1	0,7
Total	**151**	**100,0**

Un grupo reducido (14,6%) realiza correctamente la prueba de la división. También son pocos (5,3%) los que no terminan la prueba de la división pues solo multiplican el cociente por el divisor. En un caso aislado (0,7%) se realiza la prueba de la división utilizando 5 como resto. La no respuesta tiene muy poca presencia (1,3%). Además se presentan casos aislados de otros errores no reseñables (Tabla 3).

Los resultados conjuntos de ambos ítems se muestran en la siguiente tabla (Tabla 4), en la que se puede destacar el error típico que consiste en afirmar que el resto es 4 y "forzar" la prueba de la división para que se cumpla, alineando a la derecha la suma de decimales. Esto ocurre con un porcentaje del 74,17%. Por otro lado, también es destacable el hecho de que solo un 7,28% responde correctamente "el resto es 0,04" y además realiza correctamente la prueba de la división.

Tabla 3. Respuestas al ítem "b"

Ítem "b"	**Frecuencia**	**Porcentaje**
ns/nc	2	1,3
Alineación a la derecha	114	75,5
Realiza correctamente la prueba de la división	22	14,6
No termina la prueba de la división	8	5,3
Realiza la prueba de la división con el resto 4	2	1,3
Prueba de la división incorrecta con 0,4 como resto (en "a" ha escrito 4)	1	0,7
Prueba de la división incorrecta D · d + r	1	0,7
Indica la prueba de la división pero utilizando como resto el número 5	1	0,7
Total	**151**	**100,0**

Tabla 4. Respuestas a los ítems "a" y "b"

Ítem "a"	**Ítem "b"**	**Frecuencia**	**Porcentaje**
ns/nc	Prueba de la división correcta	1	0,66
El resto es 4	ns/nc	2	1,32
	Alineación a la derecha	112	74,17
	Realiza correctamente la prueba de la división	10	6,62
	No termina la prueba de la división	8	5,30
	Realiza la prueba de la división con el resto 4	2	1,32
	Prueba de la división incorrecta con 0,4 como resto (en "a" ha escrito 4)	1	0,66
	Prueba de la división incorrecta D · d + r	1	0,66
El resto es 0,04	Alineación a la derecha	2	1,32
	Realiza correctamente la prueba de la división	11	7,28
El resto es 5	Indica la prueba de la división pero utilizando como resto el número 5	1	0,66
Total		**151**	**100,0**

ANÁLISIS Y DISCUSIÓN DE LOS RESULTADOS

Una vez presentados los resultados, procede realizar un análisis y discusión de los mismos, previos a la obtención de las conclusiones.

Los alumnos no perciben dificultad en la identificación del resto de la división con números decimales.

El porcentaje prácticamente nulo de no respuesta en el ítem "a" (0,7%) significa que los alumnos están convencidos de su respuesta.

Los alumnos tienen imágenes conceptuales erróneas del resto de la división con números decimales.

El error típico ("el resto es 4") tiene un elevado porcentaje de aparición (90,1%), lo cual confirma la hipótesis de trabajo sobre la identificación visual del resto de la división. Los alumnos han dado como resultado del resto el valor que aparece en la cuadrícula inferior izquierda de la división sin tener en cuenta que es un número decimal.

En un caso aislado (0,7%) se toma como resto la primera cifra decimal del cociente.

Solo un 8,6% de los alumnos responden correctamente, sabiendo identificar el resto de la división.

Es decir, el 90,1% de los alumnos tiene una imagen conceptual errónea, en un caso aislado (0,7%) se muestra otra imagen errónea y solo el 8,6% tiene la imagen correcta.

La imagen y la definición conceptual están en conflicto

Resulta sorprendente ver cómo la imagen conceptual errónea fuerza la prueba de la división, apoyándose en el obstáculo epistemológico de la alineación a la derecha en la suma de decimales (Centeno, 1988), para que resulte correcta (74,17%).

Además, se presentan otros dos tipos de conflictos. Por un lado, los que responden que el resto es 4, pero realizan correctamente la prueba de la división utilizando como resto 0,04 (6,62%) y, al revés, los que responden que el resto es 0,04 pero realizan la prueba de la división con el resto 4 alineándolo a la derecha (1,32%).

Solo un grupo muy reducido de alumnos tiene la imagen conceptual correcta ("el resto es 0,04") y muestra coherencia entre la imagen y la definición del concepto, realizando correctamente la prueba de la división (7,28%).

CONCLUSIONES

Después de analizar los resultados obtenidos en la investigación, se puede afirmar que se han logrado los objetivos planteados.

Los alumnos tienen la imagen arraigada de que la división es una cuadricula en la que el resto es el número natural que ocupa la celda inferior izquierda.

En primer lugar, se concluye que las imágenes conceptuales del resto de la división con números decimales son erróneas en su mayoría (90,1%). La imagen del resto es "la cuadrícula inferior izquierda". Para dicho porcentaje de alumnos, el resto es el número natural (es decir, sin tener en cuenta el valor posicional de las cifras), que aparece en la cuadrícula inferior izquierda.

Se ha visto la fuerza que tiene esta imagen conceptual a la hora de realizar la prueba de la división porque se apoya en otro obstáculo epistemológico (alineación a la derecha en la suma de decimales, por extensión del algoritmo con números naturales).

Además los alumnos no son conscientes de su error pues aunque realicen la prueba de la división, no modifican su imagen conceptual. Esto dificulta la corrección del error y sugiere la creación de imágenes conceptuales correctas.

La identificación visual del resto de la división de números decimales como si se tratase del resto de la división de números naturales, es un obstáculo epistemológico.

En efecto, analizando las respuestas de los alumnos, se constata que dicha interpretación cumple las características de los obstáculos epistemológicos.

- **La "identificación visual del resto" es un conocimiento válido en el ámbito de los números naturales, pero falso en el ámbito de los números decimales.**
  Si se tratase de realizar la división 2787:11, el cociente sería 253 y el resto sería 4 (Figura 12).

- **El error manifestado consiste en no tener en cuenta el valor posicional de las cifras del resto.**
  Al realizar la división, los alumnos que han respondido erróneamente "el resto es 4" (90,1%) no han tenido en cuenta que el 4 ocupa el lugar de las centésimas (Figura 13).

- **Opone resistencia a la adquisición del nuevo conocimiento.**
  El error se mantiene aunque se realice la prueba de la división y a pesar de haber sido instruidos los alumnos en la división con números decimales.
  Se ha podido constatar que los alumnos (74,17%) fuerzan la prueba de la división cometiendo el error de sumar números decimales alineándolos a la derecha, para que resulte la división correcta (Figura 10).

- **La "identificación visual del resto" es universal (no personal).**
  Se ha identificado de manera generalizada en un amplio grupo de alumnos de diversas edades (desde 1º de ESO hasta 2º de Bachillerato).

- **Es constitutivo del saber, es decir, solo se puede rechazar explícitamente mediante su integración en el aprendizaje por medio de contraejemplos.**
  Según el modelo cognitivo imagen del concepto-definición del concepto (Tall y Vinner, 1981; Vinner, 1975, 1983), lo que ocurre en la práctica es que se razona a partir de las imágenes conceptuales, como se ha podido constatar en esta investigación. Por tanto, conviene incidir en la creación de imágenes conceptuales correctas.
  Con la propuesta metodológica de trazar una línea vertical en el lugar de la coma (Figura 2, Figura 12 y Figura 13) el alumno crea imágenes conceptuales adecuadas que le permiten producir un razonamiento correcto.

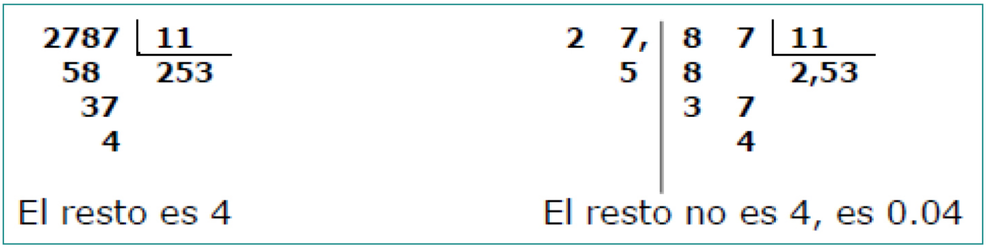


Figura 12. Identificación visual del resto en la división con números naturales y con decimales

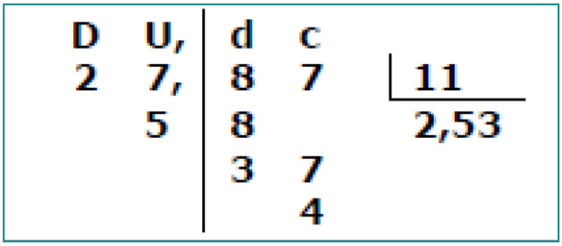


Figura 13. División con números decimales teniendo en cuenta las unidades

REFERENCIAS

Artigue, M. (1990). Epistémologie et didactique. *Reserches en Didactique des Mathématiques, 10 (23)*, 241-286.

Bachelard, G. (1938). *La formation de l'esprit scientifique.* Paris: Vrin.

Brousseau, G. (1976). Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques. *Comptes-rendus de la XXVIII rencontre de la CIEAEM, Belgique*, 101-107.

Brousseau, G. (1980). Problèmes de l'enseignement des décimaux. *Reserches en Didactique des Mathématiques, 1 (1)*, 11-59.

Brousseau, G. (1981). Problèmes de didactique des décimaux. *Reserches en Didactique des Mathématiques, 2 (1)*, 37-127.

Brousseau, G. (1983). Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques . *Reserches en Didactique des Mathématiques, 4 (2)*, 165-198.

Brousseau, G. (1989). Les obstacles épistémologiques et la didactique des mathématiques. En N. Bednarz, & C. Garnier, *Construction des savoirs, Obstacles et Conflits* (págs. 41-63). Montréal: CIRADE Les éditions Agence d'Arc inc.

Brousseau, G. (2007). *Iniciación al estudio de la teoría de las situaciones didácticas.* Buenos Aires: Libros del Zorzal.

Cabello, A. B., Rodríguez, M. I., Garbayo, M. M., e Hidalgo, M. (2014). La identificación visual del resto de la división de números decimales como obstáculo epistemológico. *XV Congreso de Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas.* Baeza: (Pendiente de edición).

Castro, E. (2001). Números decimales. En E. Castro, *Didáctica de la Matemática en la Educación Primaria* (págs. 315-345). Madrid: Síntesis.

Centeno, J. (1988). *Números decimales. ¿Por qué? ¿Para qué?* Madrid: Síntesis.

Cid, E. (2000). Obstáculos epistemológicos en la enseñanza de los números negativos. *ACTAS DEL XIV SEMINARIO INTERUNIVERSITARIO DE INVESTIGACIÓN EN DIDÁCTICA*

DE LAS MATEMÁTICAS (SIIDM). Pontevedra. Obtenido de http://www.ugr.es/~jgodino/siidm/boletin10.htm

Llinares, S. (2003). Matemáticas escolares y competencia matemática. En M. C. Chamorro, *Didáctica de las Matemáticas* (págs. 3-29). Madrid: Pearson Educación.

Pereda, S. (1987). *Psicología Experimental. I Metodología.* Madrid: Pirámide.

Rey-Pastor, J. (1981). *Elementos del Análisis Algebraico.* Madrid: Euler libros-Gómez Puig Ediciones.

Rico, L. (1997). Reivindicación del Error en el Aprendizaje de las Matemáticas. *Revista Épsilon, 38*, 185- 198.

Rojas, N., y Flores, P. (2010). Experiencia de reflexión docente: el resto de la división. En J. Berral, M. De la Fuente, & F. España, *Actas del XIII Congreso de Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas: Matemáticas para observar y actuar* (págs. 522-529). Córdoba: Sociedad Andaluza de Educación Matemática THALES.

Ruiz, L. (2004). Construcción de los números decimales en la Escuela Primaria. De las fracciones a la notación decimal. *Números, formas y volúmenes en el entorno del niño* (págs. 189-232). Madrid: MEC.

Ruiz, L., y García, F. (2009). Arithmetica Practica y Specvlativa de J. Pérez de Moya (1513-1596). Análisis epistemológico y didáctico. *Llull: Revista de la Sociedad Española de Historia de las Ciencias y de las Técnicas*, 103-134.

Tall, D., and Vinner, S. (1981). Concept Image and Concept Definition in Mathematics with particular reference to Limits and Continuity. *Educational Studies in Mathematics, 12*, 151–169.

Vinner, S. (1975). The Naive Platonic Approach as a Teaching Strategy in Arithmetics. *Educational Studies in Mathematics, 6*, 339-350.

Vinner, S. (1983). Concept definition, concept image and the notion of function. *International Journal of Mathematical Education in Science an d Technology Vol 14*, 293-305.

Vosniadou, S. (2013). *International Handbook of Research on Conceptual Change.* New York: Routledge.

Épsilon - *Revista de Educación Matemática* **2014, Vol. 31(2), nº 87, 71-82**

Estadística aplicada a la Ingeniería: Una experiencia con alumnos universitarios

Nora Gatica
Jorge Leporati
Juan Renaudo
Graciela Echevarria
Facultad de Ingeniería y Ciencias Agropecuarias
Universidad Nacional de San Luis - Argentina
nimberti@fices.unsl.edu.ar,jlepo@fices.unsl.edu.ar

Resumen: *La regresión y la correlación así como también el control estadístico de calidad son dos técnicas estadísticas que se pueden utilizar para solucionar problemas comunes tanto en los negocios como en la empresa. Sin embargo en la enseñanza tradicional se pone mayor énfasis en el desarrollo matemático sin tener en cuenta la importancia de la aplicación de estos temas. El objetivo de este trabajo es dar a conocer una nueva metodología de enseñanza en temas de Estadística, con alumnos de Ingeniería. Se argumenta la importancia de introducir casos reales, buscados por los propios alumnos, que contribuyan a deconstruir e interpretar la clase, desde la doble perspectiva de los contenidos de estadística y de la interacción social.*
Palabras claves: *Regresión y correlación, control de calidad enseñanza estadística, alumnos universitarios, motivación.*

Applied to Engineering Statistics: An experience with university students

Abstract: *The regression and correlation as well as statistical quality control are two techniques that can be used to solve common problems in business and in the company. However, in traditional education greater emphasis is placed on the mathematical development without taking into account the importance of applying these themes. The aim*

of this paper is to present a new methodology for teaching Statistical issues with engineering students. The importance of introducing real case is argued, sought after by the students themselves, contributing to deconstruct and interpret the class, from the dual perspective of the contents of statistics and social interaction.
Keywords: *Regression and correlation, quality control, statistical training, university students, motivation.*

INTRODUCCIÓN

La estadística a pesar de contar con una axiomática satisfactoria, es quizás la única rama de la matemática donde prosiguen hoy día las discusiones sobre la interpretación de conceptos básicos, es decir si el profesor no es consciente de esta problemática, difícilmente pueda comprender algunas dificultades de sus estudiantes, quienes necesitan materializar en ejemplos concretos los conceptos y modelos matemáticos (Batanero 2001, p. 9). Desde otra perspectiva, la estadística es un área naciente de la educación matemática que tiene como elementos centrales a la teoría del constructivismo y la resolución de problemas. (Lavalle, Micheli y Rubio, 2006). En muchas situaciones de la vida real, tanto en el análisis exploratorio como confirmatorio de datos, se presentan problemas en los cuales existe una relación, asociación o dependencia estadística entre dos o más variables y se hace necesario encontrar la naturaleza de esa relación. Lo mismo ocurre con la concepción del control estadístico de calidad en donde el ingrediente básico es la utilización masiva del método científico y en concreto de la estadística en la planificación de recogida y análisis de los datos necesarios para la toma de decisiones tendientes a mejorar todos los procesos. La regresión, la correlación lineal y el control estadístico de la calidad, son contenidos de la Estadística que ya forman parte del currículo de enseñanza obligatoria en las carreras de Ingeniería. Su inclusión en el nivel universitario posibilita el tratamiento estadístico de datos bivariados como así también el análisis de calidad de los productos y o servicios. En el análisis de regresión estudiamos la relación que hay entre una variable dependiente y otra independiente, es decir estudiamos si una variables es un buen predictor de la otra variable, la medida de intensidad (si esta es numérica) de la relación existente entre una variable dependiente y otra variable independiente está determinada por lo que se denomina coeficiente de correlación. En el control de calidad, se trata, esencialmente, de minimizar la producción de unidades defectuosas reduciendo el tiempo que transcurre entre la ocurrencia y la detección de algún desajuste en el proceso de fabricación, así como la identificación de las causas del mismo a fin de evitar su repetición

FUNDAMENTACIÓN

Regresión es una palabra un tanto rara, la utilizan los biólogos, los médicos los psicólogos,… y suena como "ir hacia atrás" y realmente este es el verdadero significado del vocablo. Los primeros trabajos referidas con el estudio de regresión y se remontan al siglo XIX, cuando Sir Francis Galton (1822-1917) imbricó sus dos grandes aficiones; el estudio de la herencia y la expresión matemática de los fenómenos vinculados a ella. Él fue el primero en trabajar con un conjunto de variables y designar a la relación entre dos variables un número para así obtener una medida tocante a su grado de relación. Sostenía la idea de que personas excepcionalmente altas solían tener hijos de estatura menor, mientras que personas muy bajas tenían hijos muy altos; este hecho fue enunciado por Galton como la regresión a la media, aplicable a las tallas de una generación respecto de las siguientes. La justificación que se da hoy día a esta situación es que los valores extremos de una distribución se deben en gran parte al azar (Lavalle, Micheli y Rubio, 2006).

En cuanto al otro tema que nos ocupamos, control de calidad, desde sus orígenes, probablemente el ser humano ha considerado de vital importancia el disponer de productos de alta calidad. Es de suponer que el cazador que disponía de mejores flechas obtenía más y mejores presas y que este hecho no debió pasar inadvertido a nuestros antepasados. La organización del trabajo en la era industrial ha añadido otros puntos de vista acerca del producto tales como costos, plazo de entrega, servicio postventa, seguridad, fiabilidad, etc. La prioridad asignada a los diversos conceptos ha ido evolucionando con el tiempo. Así, por ejemplo, en situaciones en las que la demanda de productos ha sido muy superior a la capacidad de oferta, la gestión empresarial se ha orientado hacia la producción y ha dado alta prioridad a la productividad, mientras que, cuando la demanda de ciertos productos ha sido menor que la capacidad de oferta, la gestión se ha orientado hacia el cliente y la calidad ha sido altamente prioritaria. En la actualidad pocos discuten la importancia estratégica de la calidad como factor de competitividad industrial en una situación de fuerte saturación y globalización de los mercados. Paralelamente, también ha ido evolucionando la etapa del desarrollo de un producto en la que se ha intentado asegurar su calidad.

LA EXPERIENCIA

Con la intención de que los alumnos de segundo año de la carrera de Ingeniería (en total 75 alumnos), al estudiar los temas de regresión, correlación y control de calidad, pudieran relacionar la teoría y la práctica con la realidad, y que además comprendieran la importancia de trabajar con datos reales, se les solicitó que desarrollaran estos temas con conjuntos de datos obtenidos por ellos mismos. Las fuentes de los mismos podían ser: datos observados por ellos, obtenidos de Internet o libros de textos o que realizaran el trabajo con datos extraídos en la producción de fábricas de la zona. Como la ciudad donde está ubicada la Facultad de Ingeniería es zona de promoción industrial, los alumnos, en general tienen relación con ellas por lo que no se les presentaría mayores inconvenientes, para poder obtener los datos.

El trabajo que debían presentar, consistía en una carátula, introducción y explicación teórica del tema, como y de que fuente extrajeron los datos, la aplicación a los datos de la técnica usando el paquete estadístico statgraphics y las conclusiones pertinentes. El mismo debía ser elaborado individualmente o en grupo con no más de dos personas por grupo. Dicho trabajo debía estar escrito en Word y grabado en un soporte informático como un CD o disquete. A medida que los alumnos iban trabajando, las dudas o problemas que se les presentaban eran consultadas por ellos mismos al docente responsable mediante correo electrónico o en forma personalizada. De esta manera el trabajo era presentado y el alumno promocionaba la materia.

Entre tantos trabajos recibidos mencionamos los siguientes, extrayendo de ellos como obtuvieron los datos y las conclusiones a las que arribaron. No es nuestra intención exponer el desarrollo de las técnicas estadísticas desarrolladas por los alumnos, sino mostrar como obtuvieron los datos y los ejemplos que utilizaron en el trabajo.

Según las fuentes utilizadas, dividimos los trabajos en distintos grupos:

Grupo 1. Los datos fueron obtenidos de los Proyectos de Investigación de la Facultad. Los integrantes de los proyectos proporcionaron a los alumnos los elementos para que ellos realizaran el trabajo

Ejemplo 1 Tema: Regresión y correlación (alumnas: Jenifer y Mariana)

Este grupo de alumnas presentó un trabajo realizado en la Facultad de Ingeniería y Ciencias Agropecuarias de la Universidad Nacional de San Luis. Un grupo de investigadores pertenecientes al proyecto "*Estudio de reacciones catalíticas heterogéneas y de productos naturales*" estudia la actividad de catalizadores para la combustión de material particulado (carbón eliminado con los gases efluentes producido por la combustión interna de los motores diesel), a fin de lograr un dispositivo que elimine el dióxido de carbono despedidos por los caños de escape. Para realizar las medidas de actividad y proponer un modelo cinético que ajuste los datos experimentales se utiliza un reactor termogravimétrico, en dicho reactor se programa una velocidad de calentamiento lineal. El encargado del equipo les brindó la ayuda necesaria para la obtención de los datos de la termobalanza y les solicitó que verificaran si al variar la velocidad de calentamiento se mantenía la linealidad.

Partiendo de lo anterior, las alumnas plantearon como hipótesis que trabajando con bajas velocidades de calentamiento, la reacción es menos exotérmica, es decir que hay menor liberación de calor.

En una balanza termogravimétrica se carga una determinada masa, compuesta por carbón y catalizador, en una cápsula. Se programa para que aumente cada 1 minuto 10 y una cierta velocidad de calentamiento.

Se ejecuta el programa y comienza el calentamiento. De este modo, la balanza toma cada 1 segundo el peso de la cápsula, en función de la temperatura y el tiempo. Cuando se llega a una cierta temperatura, la masa empieza a consumirse y cuando lo hace por completo, es decir, hay un desplazamiento de la reacción hacia la derecha, entonces se detiene la ejecución del programa ya que no hay más materia prima.

La balanza brinda la lectura de los datos a partir de un tiempo cero, en este trabajo se tomaron en cuenta los datos en la primera experiencia a partir de los 60 minutos de haber comenzado la ejecución del programa y en la segunda experiencia a partir de los 15 minutos, debido a que observaron durante las experiencias que desde esos tiempos hay una mayor variación de los valores, que en períodos anteriores no se observaron, a fin de elaborar una conclusión más específica sobre la actividad catalítica.

Una de las fotos que acompañaron este trabajo fueron:

Balanza termogravimétrica con las compuertas abiertas, donde se colocan las muestras de carbón.

Conclusión a la que arribaron: *Recomendamos a los técnicos del equipo utilizar para las mismas masas cargadas en la balanza termogravimétrica trabajar con velocidades de calentamiento bajas para mantener la linealidad de temperatura vs tiempo, ya que con velocidades altas la reacción de combustión es más exotérmica y no se conserva dicha linealidad.*

Grupo 2: Datos provenientes de empresas dedicadas a la explotación minera de recursos naturales tales como piedra, metales, áridos, etc.

Ejemplo 2. Tema: Regresión y correlación (alumnos: Jorge y Alberto)

Un grupo de alumnos presentó un trabajo cuyos datos corresponden a la evolución del comportamiento lineal entre las variables profundidad Vs rendimiento en una cantera ubicada en Nogolí – San Luis (Argentina). El análisis se llevó a cabo bajo la hipótesis que a medida que se avanza en profundidad, en excavaciones sobre los cúmulos de sedimentos de cantos rodados, se encuentra cada vez menos baches y más suelo arenoso, por consiguiente disminuye el rendimiento de la piedra triturada (adjuntan una fotografía que evidencia éste supuesto al observarse los estratos rocosos bien diferenciados.) Cabe aclarar que el rendimiento, medido en porcentaje, se toma con respecto a la cantidad en gramos de piedra útil (mayores a 6mm) sobre el peso en gramos de la muestra (una palada) por cien. Los datos fueron provistos por el sector de laboratorio de la Empresa Rovella Carranza S.A., de los registros de granulometría de la Cantera Nogolí.

Conclusión a la que arribaron: *Como dijimos en un comienzo, el modelo de regresión lineal es útil para determinar valores de una variable a partir de valores que toma la variable de la cual depende; remitiéndonos al análisis hecho podemos concluir que* *éste nos permite predecir el rendimiento de la roca útil mientras avanzamos en profundidad, siempre que éstos valores se encuentren dentro del rango que responde a dicho comportamiento, entonces podemos decir que en éste caso nos serviría hasta 20 o 30 metros de profundidad, hondura máxima de excavación que se ha realizado en ésta cantera, de modo que no podemos predecir que sucede al exceder ésta profundidad ya que no existen muestras extraídas. De todas formas, teniendo en cuenta la evidencia del modelo, a la empresa no le serviría, puesto que seguir excavando cada vez mas implica tener cada vez menos rendimiento.* Se presentan una de las fotos obtenida por ellos durante la investigación:

Grupo 3. Datos obtenidos experimentalmente por los mismos alumnos

Ejemplo 3. Tema: Regresión y correlación (alumnas: Daniela y Marisa)

Este grupo presentó un trabajo cuyos datos fueron obtenidos experimentalmente de un proceso de deshidratado de manzana, la cual se encontraba pelada, limpia y cortada en mitades que fue colocada en un horno eléctrico específico. En este análisis se quiere observar la relación del peso (gr) de la manzana con respecto al tiempo (min) de deshidratado, para ello se utilizó un diagrama de dispersión para determinar luego el modelo de regresión adecuado.

Conclusión a la que arribaron: *El primer análisis que realizamos fue en base a un gráfico de dispersión en el cual observamos que la relación entre las dos variables era similar a una línea recta. Debido a esto, nos referimos a la misma como una* *correlación lineal simple, a partir del software statgraphics. Una vez que ingresamos los datos a dicho programa, rescatamos la información útil para el análisis (tabla y gráficos).De la tabla pudimos concluir: Dado que el p-valor en la tabla es inferior a 0.01, existe relación estadísticamente significativa entre las variables para un nivel de confianza del 99%.El estadístico R-cuadrado indica que el modelo explica un 98,6087% de la variabilidad en Peso. El error estándar de la estimación muestra la desviación típica de los residuos que es 0,0453904. Este valor puede usarse para construir límites de la predicción para las nuevas observaciones. Como la correlación mide el grado de asociación entre dos variables y el coeficiente de correlación (-0.993019) nos dio en este caso cercano a menos uno, entonces se puede concluir que hay una correlación perfectamente negativa entre el peso y el tiempo de deshidratado, es decir indica una relación relativamente fuerte entre las variables. Como se puede observar, el modelo se ajusta a la realidad planteada a partir de estos datos. Como la grafica residual no presenta estructura sino que los valores están por debajo y por encima de cero en forma aleatoria, entonces aseguramos que los residuos se distribuyen en forma normal con media cero y la misma variabilidad. El modelo ajustados es: Peso = 1,93857 - 0,000952916*Tiempo*.

Grupo 4: Datos obtenidos por aquellos alumnos que tuvieron acceso y colaboración en fábricas del medio.

Ejemplo 4. Tema: Control de calidad (alumnos Carlos y Gabriel)

Para realizar el análisis de Control de calidad se necesita elegir el sujeto o producto y su respectiva característica. En este caso el producto elegido fueron bobinas de "*Film Stretch de Polietileno*" utilizadas para empaquetamiento industrial, y la característica el coeficiente de fricción estático y dinámico. Se eligió esta característica debido a que es muy requerida por los clientes. Es muy útil a la hora del transporte, sobre todo cuando debe recorrer grandes distancias pues la misma puede caerse y dañarse provocando perdidas tanto para la fabrica como para el cliente.

- Producto: Bobinas de "Film Stretch de Polietileno".
- Característica: Coeficiente estático y dinámico.

La experiencia fue realizada en la fabrica ALTAPLASTICA S.A. donde los alumnos pudieron acceder a todo el equipamiento necesario, las instalaciones y máquinas de prueba del laboratorio. De esta forma pudieron apreciar y realizar la prueba de coeficiente de rozamiento estático y dinámico (c.o.f).

Las muestras de las bobinas fueron obtenidas de forma aleatoria con cierta diferencia horaria. Luego de tener todos los datos realizaron el análisis de control de calidad haciendo uso de la herramienta STATGRAPHICS.

Conclusión a la que arribaron: *Como podemos observar los datos se encuentran dentro de los parámetros estimados sin variaciones abruptas o que se aproximen demasiado a alguno de los límites superiores e inferiores, por lo tanto concluimos que el proceso se encuentra bajo control, y la producción puede continuar sin mayores percances (ver imágenes página siguiente).*

Imágenes de la maquina utilizada para las pruebas y recoleccion de datos: Plataforma de prueba donde se colocan las muestras de "Film Stretch de Polietileno", se colocan dos retazos de la muestra y se hacen deslizar una sobre la otra, y el dispositivo obtiene los resultados buscados. Imágenes del proceso de obtención de datos en el laboratorio.

Ejemplo 5. Tema: Control de calidad. Alumno Alejandro

Para realizar el análisis de control de calidad se debe elegir el sujeto o producto y sus respectivas características a analizar.

En este caso el producto es un pañal para niños, las variables a analizar son:

1) La distribución del AGM (peso total y seccionales)
2) El Patch (es el componente que ayuda a la distribución uniforme del orín en el pañal)

Estas variables afectan directamente la absorción del pañal y se pueden medir por lo tanto realizaron el análisis de los mismos.

La experiencia fue realizada en la fabrica Procter & Gamble S.A.. El alumno pudo acceder a las instalaciones y maquinas de prueba en la línea de producción, donde se realizo la sección del pañal y se obtuvieron las muestras que son parte vital de este trabajo.

Las pruebas se realizaron mediante un proceso manual en el cual la fábrica le provee al operario todos los intervalos en los cuales puede oscilar la calidad del pañal y sus componentes.

Las muestras del pañal fueron obtenidas de forma aleatoria, dicho muestreo se realizó cada dos horas.

Luego de obtener todos los datos necesarios, realizó un análisis de control de calidad haciendo uso de la herramienta STATGRAPHICS.

Conclusión a la que arribó: *Como podemos observar en el caso de la distribución del AGM, el proceso se encuentra bajo control dentro de los parámetros de cada zona. Cabe destacar que las Zonas 1 y 2 son las Zonas frontales del pañal en las que el AGM se tiene que encontrar en mayor proporción para evitar el traspaso del orín a la ropa. Este aditivo de forma cristalina similar al azúcar cumple una función vital en el pañal la cual es transformarse en un gel gelatinoso al entrar en contacto con el orín.*

Para el caso del Patch los datos se encuentran dentro de los parámetros sin variaciones que indiquen la detención del proceso de producción. El Patch, es uno de los elementos mas comunes que se pueden encontrar en un pañal, si bien su función es distribuir el orín uniformemente en todo el pañal, no es ni más ni menos que 100% cartón molido.

Con este análisis de variables podemos decir que el proceso se encuentra bajo control y la producción puede continuar sin problemas (ver imágenes página siguiente).

Grupo 5: Son aquellos trabajos donde los datos se obtuvieron recurriendo a Internet. Por ejemplo:

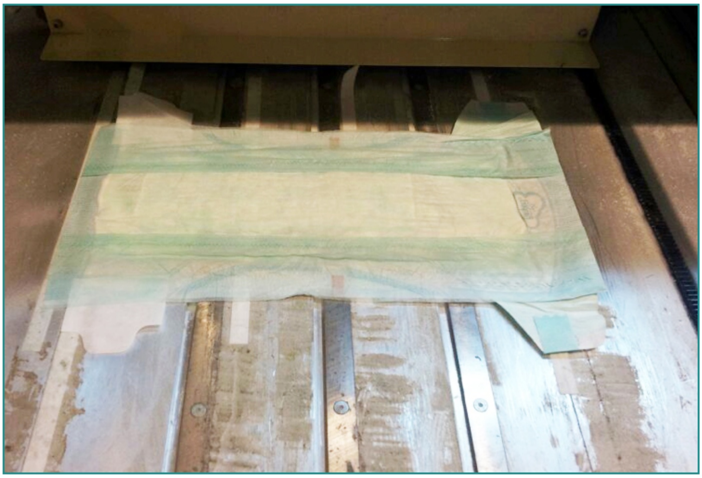
Ejemplo 6. Tema: regresión y correlación. Alumno Javier

Un alumno de Ingeniería Química presentó el siguiente trabajo: Se consideró un inóculo (pequeña cantidad de un producto que contiene bacterias) de *Lactobacillus casei* de 60 ml de volumen y se lo dejó incubar por 3 horas a temperatura, humedad y acidez normales. Finalizado este período, se realizó el recuento de células cada 1 hora, por un lapso de 10 horas, sin aplicar agitación, y relacionó tiempo de incubación (hs.) con crecimiento de células (cel/ml). Los datos fueron extraídos de la siguiente página web **http://sites.google.com/site/enalcahe/microbiologia-predictiva**

Grupo 6: En este grupo se encuentran los trabajos cuyos datos son extraídos de libros de texto.

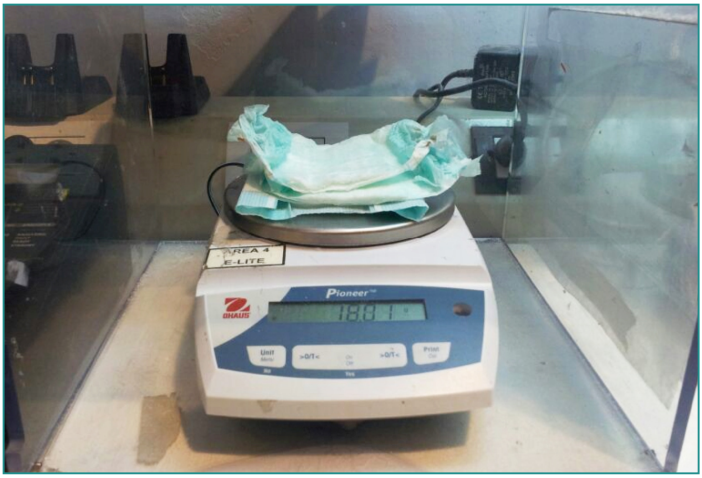
Ejemplo 7. Tema: regresión y correlación. Alumna: Laura

Esta alumna presentó un trabajo donde los datos resultan de 10 mediciones extraídos de una empresa que fabrica productos químicos. Se estudió la influencia del tiempo de extracción en la eficiencia de una operación de extracción. Los datos fueron extraídos del libro *Probabilidad y Estadística para Ingenieros* de Miller y Freud . Quinta Edición. Ejercicio 11.1 página 343.



Estiramiento en
la zona de cuchillas.

Seccionamiento.



Zona de
pesado de pañales

CONCLUSIONES

Los alumnos se sintieron entusiasmados y motivados por esta nueva metodología (de acuerdo a sus respuestas a un cuestionario que desarrollaron posteriormente donde se les preguntó sobre el trabajo realizado).

Con ayuda de bibliografía, apoyo docente, soporte informático y software estadístico, los estudiantes fueron capaces de elegir y crear sus propios datos extraídos de distintas fuentes. Mediante esta metodología se sintieron atraídos a introducirse en la investigación dando lugar a que ellos con esmero, tesón y constancia, presentaran trabajos como los citados anteriormente

Cabe destacar que la mayoría de los trabajos se encuentran en el grupo 3 (60 %) donde los datos fueron obtenidos experimentalmente por los mismos alumnos. Hay dos trabajos en el grupo 5 y solo uno en el grupo 6, por lo que concluimos que los estudiantes prefieren encontrar los datos experimentalmente y no extraerlos de libros de texto o Internet.

REFERENCIAS

Batanero, C. (2001): *Didáctica de la Estadística.* Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada. Editorial de la Facultad de Ciencias. España.

Lavalle, A., Micheli, E. y Rubio, N. (2006): Análisis didáctico de regresión y correlación para enseñanza media. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa (Relime).* 9, 383–406.

Chillemi, M. y Morales, E. (2002): Enseñanza de correlación y regresión lineal simple. Una experiencia en carreras de Ingeniería. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*. 15, 477- 483. México.

Barletta, B. y Cadoche, S. (2002): *Los malentendidos en las conclusiones estadísticas.* Acta Latinoamericana de Matemática Educativa. 15, 484- 488. México.

Franzini, D., Muñoz, N. y Sánchez, R. (2002): *Análisis de los errores metodológicos en trabajos escolares de Estadística.* Acta Latinoamericana de Matemática Educativa. 15, 459-464. México.

Vallecillos, A. (2002): *Análisis de aprendizajes en inferencia estadística a través de proyectos de investigación.* Acta Latinoamericana de Matemática Educativa. 15, 453-458. México.

Iniciación a los problemas de reparto igualatorio en educación infantil

María Elena López de la Fuente
Carlos de Castro Hernández
mariaelenalopezdelafuente@gmail.com
carlos.decastro@uam.es
Escuela Acesco, Parets del Vallés, Barcelona y
Universidad Autónoma de Madrid

Resumen: *En esta experiencia planteamos un taller de problemas en educación infantil, compuesto por ocho problemas, en el que se introducen dos problemas de reparto igualatorio a niños de 5-6 años. El objetivo es averiguar si los alumnos de estas edades son capaces de resolver este tipo de problemas y observar las estrategias que utilizan. Los problemas de reparto igualatorio parten de dos cantidades diferentes que se deben igualar pasando objetos de la mayor a la menor. Los niños han resuelto los problemas mediante variantes de una estrategia básica de modelización directa, que implica la representación de las cantidades a igualar y la redistribución de las mismas.*
Palabras clave: *Educación infantil, Resolución de problemas, Estrategias de modelización directa, Problemas de reparto igualatorio, Matemáticas.*

Initiation to equitable redistribution problems in kindergarten

Abstract: *In this experience, we propose a workshop on arithmetic problems in early childhood education, composed by eight problems, introducing two problems of equitable redistribution for children of 5-6 years old. We want to know if the students of these ages are capable of solving these kind of problems and to observe the strategies that children use. The problems of equitable redistribution start with two different quantities, which must be equated adding objects from the group with more objects to the group with*

less. Children have solved the problems using variants of a basic direct modeling strategy, using the representation of the quantities and their redistribution.
Keywords: *kindergarten, problem solving, direct modelling strategies, equitable redistribution, mathematics.*

1. INTRODUCCIÓN

La experiencia que presentamos en este artículo pertenece a una línea de trabajo sobre resolución de problemas en educación infantil que llevamos tiempo desarrollando con niños de 4-5 años (Molina, 2012) y 5-6 años (De Castro y Escorial, 2007). Basándonos en un modelo de enseñanza inspirado en la Instrucción Cognitivamente Guiada (Carpenter, Fennema, Franke, Levi, y Empson, 1999), planteamos problemas de muy diversos tipos a niños de educación infantil, sin enseñanza previa sobre cómo resolverlos. Los problemas están contextualizados, casi siempre basados en situaciones descritas en cuentos, para favorecer la comprensión. Los niños deben pensar los problemas ayudándose de objetos o representaciones gráficas, desarrollar modelos, razonar, comunicar las soluciones y sus estrategias. En definitiva, planteamos estos problemas en infantil para que los niños inicien el desarrollo de su competencia matemática (De Castro, Molina, Gutiérrez, Martínez y Escorial, 2012). Para ello, les planteamos problemas que, en principio, pueden no parecer nada adecuados para la educación infantil, como problemas de comparación multiplicativa (De Castro, Walsh, Del Coso, Salvador, González y Escorial, 2009), o problemas de descomposición factorial con varias soluciones (De Castro y Hernández, 2014). Al proponer este tipo de problemas, inusuales en educación infantil, deseamos propiciar un cambio en la visión que suele tenerse acerca de las primeras edades. En nuestros planteamientos, siempre destacamos las capacidades del pensamiento matemático infantil por encima de sus posibles limitaciones.

Los problemas de reparto igualatorio

Los problemas de reparto igualatorio parten de dos cantidades discretas diferentes (la *cantidad mayor* y la *cantidad menor*). Estas cantidades deben igualarse mediante el trasvase de cierto número de objetos (la *cantidad igualadora*) desde la cantidad mayor a la cantidad menor, hasta que ambas cantidades coincidan (*cantidad igualada*). Según la clasificación de Castro (2008) y de Nesher (1999), los problemas de reparto igualatorio son problemas de varios pasos.

Los problemas de reparto igualatorio resultan particularmente interesantes por admitir múltiples estrategias de resolución, dependiendo de la edad y otros factores, que ponen de manifiesto diferentes niveles en el pensamiento numérico. Estos problemas pueden plantearse en educación infantil, donde se resolverán mediante estrategias de modelización directa (De Castro, en prensa); también en los primeros cursos de educación primaria, en que se pueden resolver aplicando sumas y restas, como muestran Martínez y Sánchez (2013) en su trabajo con algoritmos ABN; por último, se pueden proponer a finales de primaria, para resolverse como problemas aritméticos verbales, en

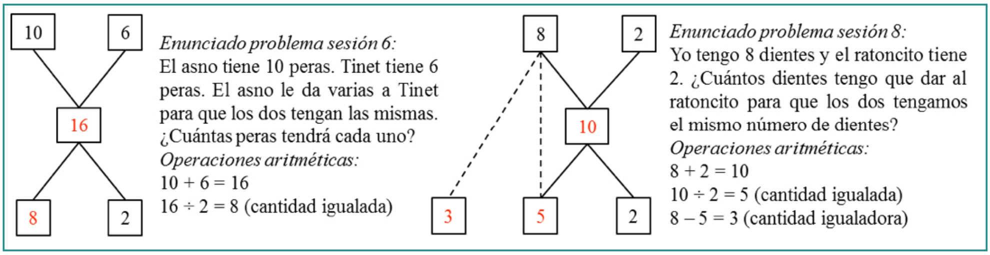


Figura 1. Esquemas y enunciados de los problemas de las sesiones 6 y 8

un enfoque tradicional, según se muestra en el análisis de la Figura 1. En el primer caso, se evidencia un pensamiento preaditivo (De Castro y Hernández, 2014); en el segundo, un pensamiento aditivo; en el tercero, un pensamiento multiplicativo (Castro y Castro-Rodríguez, 2010).

2. DISEÑO DEL TALLER DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

En este trabajo describimos dos sesiones de un taller de resolución de problemas, desarrollado en último curso de educación infantil (5-6 años), en un centro escolar de Parets del Vallés, Barcelona. En esta experiencia han participado 21 alumnos: 12 niñas y 9 niños.

El objetivo que teníamos al comenzar era estudiar cómo resuelven los niños de 5-6 años los problemas de reparto igualatorio. Por nuestra experiencia anterior en este tipo de talleres de resolución de problemas, los niños tardan entre 3 y 4 sesiones en entrar en la dinámica de trabajo que suponen los talleres. Por esta razón, diseñamos un taller en que los primeros problemas fueran sencillos, pero de complejidad creciente, y que requiriesen estrategias de modelización diversas. Esto se hace para fomentar en todo momento el razonamiento con la ayuda de objetos, y evitar que los niños afrontaran la resolución de forma mecánica (ver problemas en Tabla 1). Dado que cada semana dedicamos dos sesiones al taller, decidimos que, tras el proceso de adaptación de dos semanas (4 problemas), los problemas de reparto igualatorio se plantearían en las semanas tercera y cuarta, como segundo problema en ambas semanas.

En la Figura 1, empleamos el tipo de representación que usan Puig y Cerdán (1995) para los problemas de dos pasos. El problema 6 tiene la incógnita en la *cantidad igualada*, y está basado en el cuento "El cerezo que habla" (Díaz, 2013). Puede resolverse a través de una suma, seguida de una división (10 + 6 = 16; 16 ÷ 2 = 8); también mediante una resta, una división, y una suma o una resta (10 – 6 = 4; 4 ÷ 2 = 2; 6 + 2 = 8 o 10 – 2 = 8; ver Figura 1). Dado que los niños con los que desarrollamos el taller tienen 5 y 6 años, y no han recibido instrucción sobre operaciones aritméticas, esperamos que resuelvan estos problemas a través de la manipulación de objetos y el conteo, usando las llamadas "estrategias de modelización directa" (Carpenter y otros, 1999) que pueden aplicarse para resolver estos problemas tal como puede verse en De Castro (en prensa).

Tabla 1. Enunciados y tipos de problema para las 8 sesiones del taller

Sesión	Enunciado	Tipo de problema
1	Hansel tenía 6 golosinas y Gretel le da 5. ¿Cuántas golosinas tiene Hansel ahora?	Cambio creciente, con incógnita en la cantidad final
2	En un cesto había 12 maderas y Gretel coge 3. ¿Cuántas maderas quedan en el cesto?	Cambio decreciente, con incógnita en la cantidad final
3	Gretel tiene 4 maderas. ¿Cuántas maderas debe coger para tener 11?	Cambio creciente, con incógnita en la cantidad de cambio
4	Kim ha hecho 13 churros. 5 son churros normales. ¿Cuántos churros geniales ha hecho?	Combinación, con incógnita en una de las partes
5	Kim tiene 12 churros. Pone 3 en cada bolsa. ¿Cuántas bolsas puede llenar?	División agrupamiento
6	El asno tiene 10 peras. Tinet tiene 6 peras. El asno le da varias a Tinet para que los dos tengan las mismas. ¿Cuántas peras tendrá cada uno?	Reparto igualatorio 2, con incógnita en la cantidad igualada.
7	Tinet ha cogido 5 ramilletes de cerezas y cada ramillete tiene 2 cerezas. ¿Cuántas cerezas ha cogido Tinet?	Multiplicación
8	Yo tengo 8 dientes y el ratoncito tiene 2. ¿Cuántos dientes tengo que dar al ratoncito para que los dos tengamos el mismo número de dientes?	Reparto igualatorio 1, con incógnita en la cantidad igualadora.

El problema 8 se basa en el cuento de “El ratoncito Pérez” (Coloma, 2013/1894) y tiene por incógnita la *cantidad igualadora*. El problema se puede resolver aritméticamente de dos maneras: La primera opción es mediante una suma, una división (haciendo la media aritmética de las dos cantidades), y una resta ($8 + 2 = 10$; $10 \div 2 = 5$; $8 - 5 = 3$ o $5 - 2 = 3$). La segunda opción es mediante la resta y la división ($8 - 2 = 6$; $6 \div 2 = 3$).

Como vemos, tanto en el problema 6 como en el 8, son necesarias dos o tres operaciones aritméticas, mezclando además en ambos casos la estructura aditiva y multiplicativa. Con todo esto, si esperásemos una resolución aritmética, sería muy difícil obtenerla antes de cuarto de educación primaria, cuando se hayan visto la multiplicación y la división y se haya adquirido cierta soltura en la resolución de problemas de varias etapas que impliquen relaciones multiplicativas. Sin embargo, como hemos dicho al final de la sección anterior, mientras que las soluciones aritméticas esbozadas en párrafos anteriores denotan un tipo de pensamiento multiplicativo (Castro y Castro-Rodríguez, 2010), esperamos encontrarnos respuestas que ejemplifican un pensamiento preaditivo.

3. DESARROLLO DE LAS SESIONES DEL TALLER

Cada martes y jueves se realiza el taller en horario de 9:00 a 10:30. Las etapas de cada sesión son las siguientes: 1. Lectura del cuento; 2. Lectura de una carta en la que se nos plantea el problema; 3. Trabajo individual de cada niño para resolver el problema; 4. Puesta en común y consenso sobre resultados y estrategias; y 5. Escritura de la carta de respuesta. Esta metodología la hemos descrito en varios trabajos anteriores (De Castro, en prensa; De Castro y otros, 2009; De Castro y otros, 2012).

A continuación, vamos a describir con detalle las dos sesiones del taller centradas en los problemas de reparto igualatorio (sexta y octava). Estamos interesados en mostrar la estrategia base y todas sus variantes, incluyendo en ellas las características de los materiales empleados y de los dibujos que los niños elaboran para resolver los problemas o para ilustrar las soluciones de los mismos. Para documentar la actividad infantil y describir las sesiones, recogemos los trabajos de los pequeños, entrevistamos (preguntamos) a los niños y a la maestra durante la sesión, tomamos apuntes en hojas de registro, y realizamos fotografías de los procesos de resolución.

Desarrollo de la sesión 6

La sesión comienza con la lectura del cuento “El Cerezo que habla” (Díaz, 2013), tras la que se lee el enunciado del problema: “El asno tiene 10 peras. Tinet tiene 6 peras. El asno le da varias a Tinet para que los dos tengan las mismas. ¿Cuántas peras tendrá cada uno?” La mayoría de los niños han resuelto este problema mediante una estrategia de modelización directa que implica una redistribución de las dos cantidades (10 y 6 peras) en partes iguales entre los dos protagonistas de la historia. Esta estrategia consiste en representar las dos cantidades mencionadas en el enunciado e ir pasando objetos del grupo de 10 al de 6 hasta que ambos se igualan. Ahora bien, siendo esta la estrategia básica, se pueden apreciar variantes de la misma de gran interés, que ponen de manifiesto un uso inteligente y pertinente de ciertas características de la representación con los materiales empleados, como el color, la disposición espacial de los objetos, etc. Describimos a continuación, e ilustramos con imágenes, las diferentes variantes de la estrategia base.

Redistribución con correspondencia uno a uno y con objetos diferentes para cada cantidad

En la Figura 2 observamos la estrategia empleada por Jana. Coge 6 tapones negros para representar las peras de Tinet y 10 tapones de otros colores (verdes y azules) para representar las peras del asno. Jana coloca ambas cantidades en dos filas, una frente a otra, lo que permite compararlas mediante una correspondencia uno a uno. A partir de aquí, Jana comienza el proceso de igualación de las dos cantidades, lo que logra pasando primero un tapón azul de la cantidad mayor a la menor, y a continuación, pasando un segundo tapón (Figura 2, centro y derecha). Al haber dispuesto las cantidades emparejadas, evita tener que recontar ambas cantidades a cada paso que da para comprobar si son iguales y puede detener el proceso. Por otra parte, aunque en este problema no se pregunta por la *cantidad igualadora*, el uso de materiales de distinto color para las dos cantidades iniciales permite, tras el proceso de igualación, diferenciar perfectamente la *cantidad menor* de la *cantidad igualadora* (los 6 tapones negros de los 2 azules en la fila de abajo, Figura 2).

Figura 2. Estrategia de Jana en la que se aprecia la secuencia del paso de objetos de un grupo al otro

Noa utiliza pinzas para representar la cantidad mayor y tapones para la menor (Figura 3). La estrategia es completamente análoga a la descrita en el párrafo anterior, con la salvedad de que, en este caso, en lugar de utilizar colores diferentes para cada cantidad inicial, se utilizan materiales distintos. En este caso, se aprecia además que la comparación no se hace por la longitud de la fila (que es algo que cabría pensar en la Figura 2), sino mediante la correspondencia uno a uno.

Figura 3. Estrategia de Noa.

Redistribución con correspondencia uno a uno sin objetos diferentes para cada cantidad

En el ejemplo siguiente, se observa la misma correspondencia uno a uno realizada con palillos por Keyla (Figura 4). A diferencia de los casos anteriores, no utiliza el color ni el tipo de objetos para diferenciar las cantidades iniciales. Esto no supone ningún inconveniente para el proceso de igualación, pero sí para la distinción entre cantidad menor y cantidad igualadora, que en este problema no es necesario realizar.

Redistribución con comparación de longitudes

En algunos casos en que se han utilizado materiales de construcción encajables, como las piezas de Lego o los cubos encajables (y se encajan los materiales, no como en la Figura 6), el proceso de comparación se realiza sin necesidad de conteo, a través de las

Figura 4. Estrategia de Keyla.

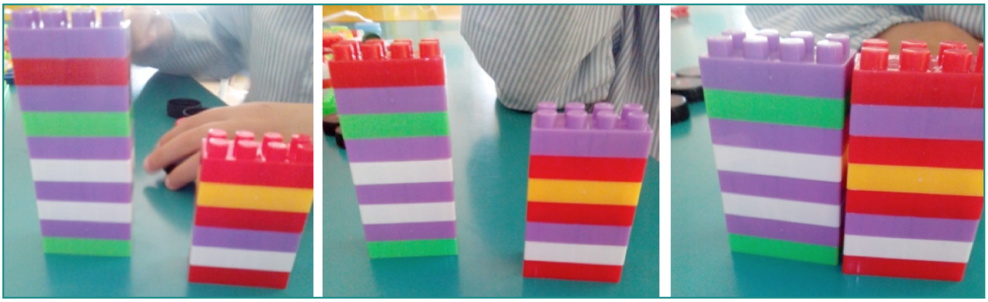


Figura 5. Estrategia de Unai.

longitudes, como observamos en la Figura 5. Unai va pasando piezas de un grupo a otro hasta que coinciden ambos en altura (Figura 5, a la derecha). En ese momento, tras conseguir la igualación, cuenta las piezas de una de las torres y responde que son 8. Esta variante tampoco permitiría diferenciar la cantidad menor de la igualadora.

Estrategia de redistribución sin correspondencia uno a uno

En algunos casos se representan las cantidades sin representar la relación de comparación entre ellas (ni con correspondencia uno a uno ni con modelo de longitud). Gisela forma los dos grupos, de 10 y 6 objetos, y va desplazando piezas del mayor al menor. A cada paso que da, debe comprobar a través del conteo si ha igualado o no ambas cantidades (Figura 6). Consideramos esta estrategia como igualmente válida aunque menos eficiente que las anteriores.

Del mismo tipo que la estrategia de Gisela es la de Lucía (Figura 7). Sin utilizar ninguna disposición que facilite la comparación, pasa los dos palillos de su derecha al extremo más alejado de la fila que tiene a su izquierda (Figura 7). Tras resolver el problema, lo representa gráficamente de un modo "más organizado" (Figura 7, derecha) más cercano a casos anteriores en que se emplea la correspondencia uno a uno. Un tercer ejemplo de esta variante de la estrategia base de redistribución, se presenta en la estrategia de Aina (Figura 8).

Figura 6. Estrategia de Gisela.

Figura 7. Estrategia de Lucía.

Figura 8. Estrategia de Aina.

Estrategia de redistribución sin correspondencia uno a uno y con objetos diferentes para cada cantidad

Para completar la panorámica ofrecida en esta sección, falta la estrategia en que se utilizan materiales diferentes para ambas cantidades, lo que permite diferenciar la cantidad menor de la igualadora, pero no se utiliza la correspondencia uno a uno, con lo que la comprobación de la posible igualdad nos remite al conteo. Ivet es la autora de esta estrategia implementada con tapones y palillos. Tras la resolución, en la representación gráfica (Figura 9, derecha), parece, como en el caso de Lucía (Figura 7, derecha) que va evolucionando hacia el uso de la correspondencia uno a uno, aspecto que merecería ser observado con más detalle en experiencias futuras.

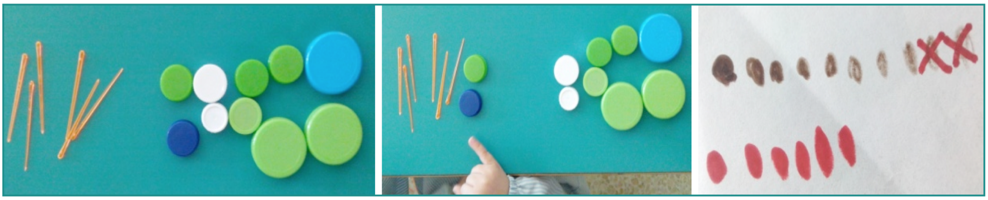


Figura 9. Estrategias de Ivet.

Por último, en la Figura 10 observamos la ejecución en papel de algunas de las variantes que hemos mostrado en esta sección. En los dos casos de la izquierda (dibujos de Ainhoa y Mar) aparecen perfectamente representadas las cantidades implicadas en el problema, como el proceso de igualación. En los otros dos casos (Noa y Gael), no se distingue adónde va la cantidad igualadora, aunque sí se aprecia de dónde parte, gracias a los dos objetos tachados en cada imagen.

Resumiendo, de los 21 alumnos que asistieron a esta sesión, todos han resuelto el problema mediante alguna de las estrategias descritas en este apartado. De ellos, 6 han necesitado ayuda o se han fijado en el trabajo de sus compañeros.

Figura 10. Estrategias de Ainhoa, Mar, Noa, y Gael.

Desarrollo de la sesión 8

La sesión comienza con el cuento "El Ratoncito Pérez" (Coloma, 2013/1894). El enunciado del problema es: "Yo tengo 8 dientes y el ratoncito tiene 2. ¿Cuántos dientes tengo que dar al ratoncito para que los dos tengamos el mismo número de dientes?" Se trata de un problema de reparto igualatorio, como en la sesión sexta del taller. La diferencia es que, en este caso, la incógnita es la cantidad igualadora en lugar de la cantidad igualada. En principio, los niños aplican el mismo tipo de estrategia de modelización directa, de redistribución. Sin embargo, en este caso es crucial que la ejecución de la estrategia permita diferenciar la cantidad menor de la cantidad igualadora. Pasamos a describir las soluciones encontradas por los alumnos.

Jana ha utilizado una estrategia de modelización directa con ayuda de los dedos. Comienza levantando 8 dedos para representar los dientes que tiene uno (Figura 11, izquierda) y luego levanta los otros 2 (Figura 11, centro). Con los 10 dedos extendidos se da cuenta de que, para que los dos tuvieran la misma cantidad, deben tener 5 dientes cada uno (la cantidad igualada). A continuación responde: "Me parece que son 3". Le pedimos que lo haga con otros materiales para comprobarlo.

Figura 11. Estrategia de Jana.

Redistribución con correspondencia uno a uno y con objetos diferentes para cada cantidad

Lia utiliza palos de color verde y naranja. Coloca en la parte superior 8 palos de color verde y en la inferior 2 de color naranja. Realiza el proceso de igualación pasando palos de la fila de arriba a la de abajo. En todo momento dispone los palos de ambas filas manteniendo una correspondencia uno a uno entre ambas cantidades, lo que supone una ayuda visual que hace innecesario el conteo para la comparación de las cantidades. Al finalizar la igualación, dice que hay 5 en cada uno. Al recordarle la pregunta del enunciado, responde inmediatamente que son 3 y los desplaza para mostrar la solución (Figura 12, derecha). Haber elegido dos colores diferentes para representar ambas cantidades, le permite controlar visualmente cuáles forman la *cantidad menor* (los 2 naranjas) y cuáles la *cantidad igualadora* (los 3 verdes que pasan de una fila a otra).

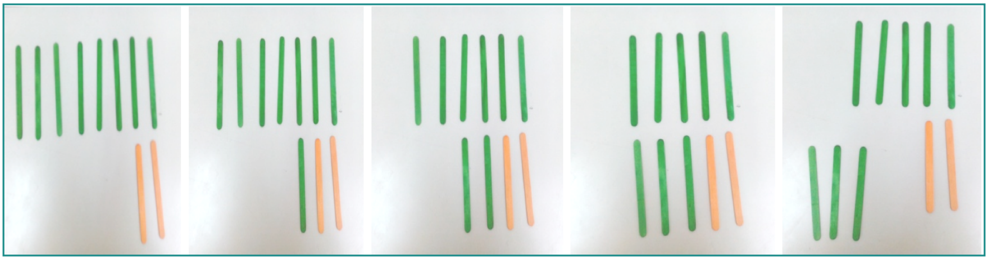


Figura 12. Estrategia de Lia.

Redistribución sin correspondencia uno a uno y con objetos diferentes para cada cantidad

Lucía emplea tapones y piezas de construcción. Forma una fila de 8 tapones y coloca en frente dos piezas sin marcar una correspondencia uno a uno (Figura 13). Después, va pasando tapones de la cantidad mayor a la menor hasta que se produce la igualación, que se comprueba a través del conteo. Cuenta el número de tapones que ha pasado a la fila de piezas de construcción y da la respuesta de 3. Haber utilizado material diferente para representar ambas cantidades le ha permitido diferenciar la cantidad menor de la igualadora y dar una respuesta inmediata al problema. A continuación, en la Figura 13 a la derecha, vemos como Lucía vuelve a resolver el problema sobre el papel. En este caso no distingue las dos cantidades con colores, pero el sistema que utiliza de tachar corazones y representar con una flecha dónde van, le ayuda a localizar la cantidad igualadora. Además, debemos advertir que está representando un problema previamente resuelto.

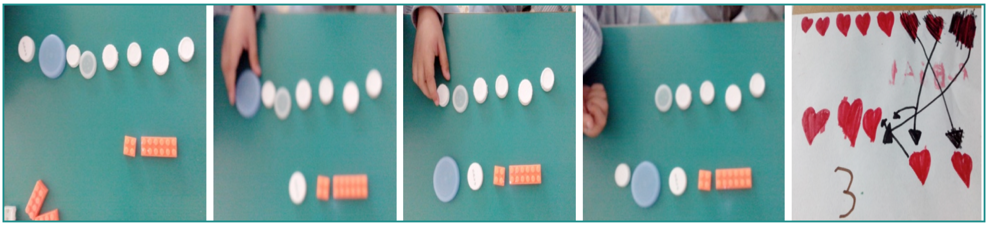


Figura 13. Estrategia de Lucía.

Inés forma un grupo con 8 tapones de color verde claro y otro con 2 tapones de color verde oscuro (Figura 14). Realiza el proceso de igualación y da como solución 5, pero al leerle el enunciado del problema de nuevo, responde que son 3 los dientes que le ha dado la ratoncita al ratoncito. Al haber elegido diferentes colores para cada grupo, le ha resultado fácil visualizar la respuesta, al distinguir, en los 5 objetos que quedan a su derecha, la cantidad menor (los 2 tapones verde oscuro) de la cantidad igualadora (los 3 verde claro). En su dibujo (Figura 14, derecha), Inés no representa el proceso de igualación, sino la situación de igualdad, enfatizando con colores la diferencia entre los 2 caramelos azules y los 3 rosa.

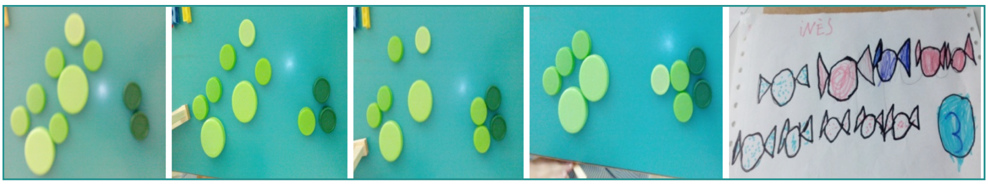


Figura 14. Estrategia de Inés.

Redistribución con comparación de longitudes y con objetos diferentes para cada cantidad

Aleix utiliza piezas de construcción y forma dos torres: una con 8 piezas y otra con 2 piezas. Completa el proceso de igualación comparando las alturas de las torres construidas (Figura 15). Su respuesta es 5 y no sabe continuar con el problema. Aina dibuja 8 dientes para formar un primer grupo y otros 2 dientes para formar el segundo grupo. A continuación, tacha 3 dientes de la cantidad mayor y con flechas marca los desplazamientos de dichos dientes al grupo con 2 dientes. Escribe un 3 para indicar la solución del problema (Figura 15, derecha).

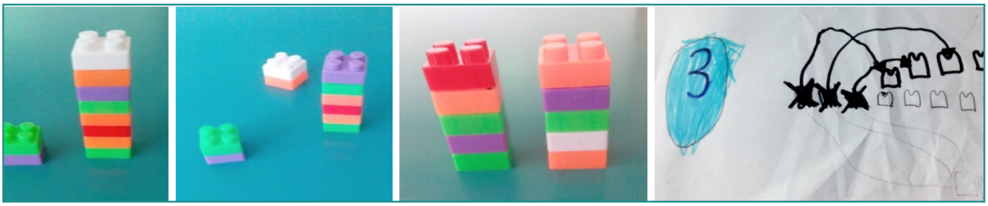


Figura 15. Estrategia de Aleix y dibujo de Aina.

Redistribución sin correspondencia uno a uno y sin objetos diferentes para cada cantidad

Jana coge 10 tapones con distintos tamaños y colores, forma grupos de 8 y 2 objetos, toma directamente 3 tapones del grupo de 10 y los añade al de 2, igualando las cantidades, y dice que hay 5 en cada grupo. Al preguntarle por el número de dientes que tiene que dar la ratoncita al ratoncito, responde que son 3 y los separa para que se vean. De nuevo, la representación gráfica (Figura 16, derecha) muestra un buen grado en la comprensión de la situación que describe el enunciado.

Figura 16. Estrategia de Jana.

Mar toma 10 piezas de construcción y forma dos colecciones: una de 8 y otra de 2. Pasa 3 piezas de uno a otro hasta igualarlos, pero no sabe continuar el problema (Figura 17, izquierda). Noa resuelve el problema en papel dibujando las dos cantidades con dientes de color verde. Después va tachando de uno en uno dientes de la cantidad mayor y pasándolos a la menor. Después colorea los dientes que quedan en cada grupo, tras la igualación, cuenta los que ha pasado de un grupo a otro (los tachados) y escribe la solución (3) en espejo (Figura 17, derecha).

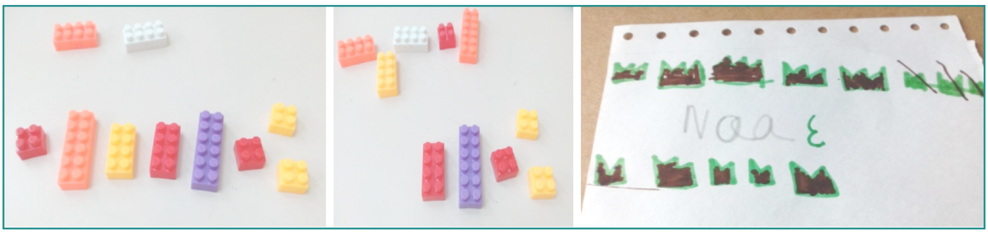


Figura 17. Estrategia de Mar y Noa.

Ivet hace un grupo con 8 palillos de plástico y otro con 2. Pasa un palillo y comprueba, contando, que hay 7 y 3 respectivamente en cada grupo; repite su acción una vez (para contar 6 y 4 palillos) y una vez más, hasta comprobar la igualación (Figura 18). Le volvemos a leer el enunciado del problema y da una solución de 3.

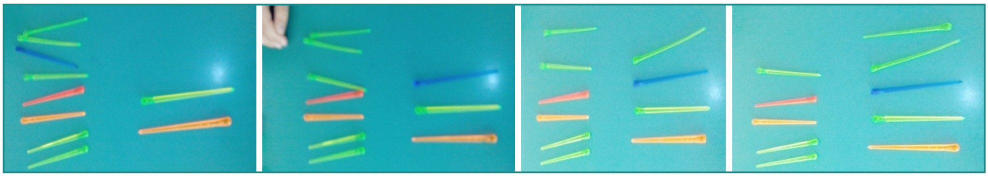


Figura 18. Estrategia de Ivet.

Gael resuelve el problema con palillos (Figura 19). Al llegar a la cantidad igualada, duda un poco. Se le vuelve a leer el enunciado y, después de pensar un rato, da la respuesta de 3. En el dibujo que elabora tras la resolución, queda clara su comprensión del proceso (Figura 19, derecha).

Figura 19. Estrategia de Gael.

Pau coge el ábaco, desplaza 8 cuentas rojas hacia su derecha, para representar el primer grupo, y deja las 2 cuentas rojas a su izquierda para representar el segundo grupo. Después, va pasando cuentas rojas de izquierda a derecha hasta que se produce la igualación (Figura 20), y da como respuesta 5. Al leerle de nuevo el enunciado, vuelve a pensar su respuesta y responde que son 3 los dientes que la ratoncita le da al ratoncito.

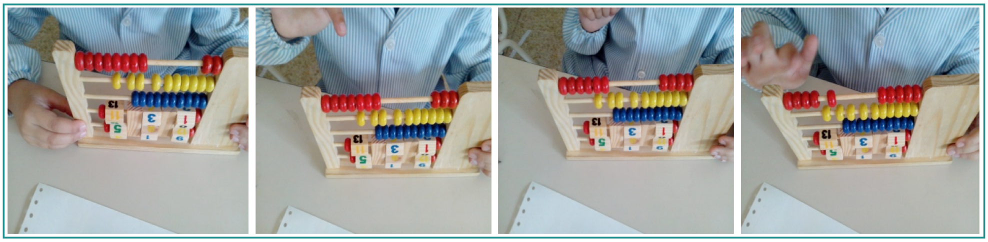


Figura 20. Estrategia de Pau.

Jana pide ayuda a Inés para representar con dedos el problema. Jana pone 8 dedos con las manos y pide a Inés que ponga 2 (Figura 21, izquierda). Jana va diciendo: "Yo te doy una. Ahora tú tienes 3 y yo tengo 7. Ahora te doy otra, Inés, y tú tienes 4 y yo 6. Te doy una más y ahora tú tienes 5 y yo tengo 5. Inés cierra la mano completa con los 5 dedos y peGunta a Inés: "¿cuántas te he dado?" Inés responde: "Tres" (Figura 21). Jana dirige todo el proceso de resolución, salvando la dificultad inicial de representar el problema con los dedos, pidiendo "prestados" dedos a su compañera. Inés sigue el proceso de Jana y contribuye a la solución del problema respondiendo a la pregunta final de Jana por la *cantidad igualadora* (3).

Figura 21. Estrategia de Jana e Inés.

En general, ha resultado más difícil el problema de la sesión octava que el de la sexta. En el primer caso, la incógnita era la *cantidad igualada*; en el segundo, la *cantidad igualadora*. En este último problema, hemos visto errores debidos a que los niños completaban el proceso de igualación, pero no eran capaces de diferenciar la *cantidad menor* de la *cantidad igualadora*. Esto solo lo hicieron de forma sencilla los niños que eligieron materiales diferentes (en color o tipo de objeto) para representar las cantidades iniciales del problema (la mayor y la menor).

CONCLUSIONES Y REFLEXIONES FINALES

Con respecto al diseño del taller, pensamos que la alternancia de tipos de problemas para evitar la mecanización ha resultado acertada. Al no haber dos problemas seguidos iguales, los alumnos han tenido que inventar estrategias diferentes para cada problema. En las primeras sesiones, los niños demostraban confusión e interferencias debidas a la metodología tradicional que empleaban en el aula. La mayoría de los niños decían que había que sumar, porque era la operación que habían trabajado en clase. Una niña comentó a la maestra: "Es que siempre hacemos problemas de añadir", a lo que la maestra respondió: "Ya, pero es que hay más tipos de problemas y no todos se resuelven siempre igual. No todos son de añadir". En este sentido, parece adecuado proponer varias sesiones de adaptación, para que los niños entren en una dinámica nueva de trabajo, antes de explorar con ellos un tipo particular de problemas de nuestro interés, como los de reparto igualatorio.

En estas reflexiones finales, queremos compartir nuestro aprendizaje sobre esta forma de trabajar desde que comenzamos (De Castro y Escorial, 2007). Algo que hemos aprendido es que en educación infantil es preferible trabajar con cantidades más manejables (de en torno a 10 objetos) que con cantidades mayores. En algunos problemas hemos utilizado cantidades mayores, por requerimiento del tipo de problema. Por ejemplo, en De

Castro y Hernández (2014), planteamos la descomposición factorial de 24 en filas iguales (1 fila de 24, 2 filas de 12, 3 filas de 8, etc.). Muchos niños de 5-6 años manejan bien cantidades de entre 20 y 30 objetos, y el 24 es un número muy interesante para este tipo de problemas por la cantidad de divisores que tiene. Sin embargo, encontrábamos niños que tenían dificultades para contar hasta 24 objetos; no tenían dificultad en comprender la situación, ni en representarla con objetos, pero la excesiva demanda de destreza en el conteo les impedía ejecutar una estrategia perfectamente planificada. Por esta razón, en esta experiencia, no hemos utilizado cantidades superiores a diez. Damos prioridad a la invención infantil de estrategias informales y entendemos que el rango de estrategias aplicables es mayor con cantidades menores.

Por otra parte, otro aprendizaje que hemos hecho es relativo a los materiales que pueden utilizar los niños en los talleres de problemas. Aunque el enfoque que seguimos es bastante flexible y abierto y, en principio, dejamos que los niños utilicen los materiales que ellos prefieran, el maestro no puede evitar tener sus propias preferencias sobre los materiales. Por ejemplo, los cubos encajables son materiales muy versátiles, que permiten muchas posibilidades y estrategias. Sin embargo, materiales de uso cotidiano no estructurados, como la plastilina, o las pinzas de la ropa, podrían no parecer tan interesantes a primera vista. Como hemos dicho, aunque se dé libertad a los niños para elegir material, el repertorio inicial de materiales que ponemos al alcance de los niños en la sesión es crucial. Algo que hemos aprendido sobre los materiales es que, cuanto más diversos sean estos, más amplia es la gama de estrategias, o de formas de aplicar las mismas. Además, las peculiaridades que muestran los niños en las elecciones de materiales nos ayudan más a los profesores a comprender cómo es el pensamiento infantil y, en definitiva, a ayudar a los niños a seguir desarrollando su competencia matemática, que es nuestro principal objetivo docente.

Con respecto a los problemas de reparto igualatorio, sabíamos que se podían utilizar en educación infantil (De Castro, en prensa), pero no conocíamos la variedad de estrategias que llegan a utilizar los niños de 5-6 años al abordar estos problemas. En esta experiencia nos ha sorprendido el uso espontáneo que hacen los niños de esquemas de comparación (mediante la comparación de longitudes, la correspondencia uno a uno, o el conteo) y también cómo los pequeños utilizan las características de los materiales, como el color o el tipo de material, para diferenciar la *cantidad menor* de la *cantidad igualadora*. Esto encaja con el uso similar que hacen los niños, cuando resuelven problemas de cambio creciente con incógnita en la cantidad de cambio. Al emplear la estrategia de "añadir hasta", añaden objetos diferentes a los que forman la cantidad inicial, hasta llegar a la cantidad final, pudiendo diferenciar en todo momento entre la cantidad inicial y la de cambio (Carpenter y otros, 1999; De Castro y Escorial, 2007).

Finalizamos el relato de esta experiencia expresando la convicción que tenemos de que "otra matemática es posible en la educación infantil". Es una matemática diferente a la tradicional en esta etapa educativa, pero perfectamente alineada con los planteamientos curriculares actuales sobre la competencia matemática (De Castro y otros, 2012), y con las recomendaciones de instituciones dedicadas a la enseñanza de las matemáticas en general (NCTM, 2003), y a las matemáticas en la educación infantil (NAEYC y NCTM, 2013). Animamos a los lectores a realizar experiencias en esta línea con sus alumnos de educación infantil.

REFERENCIAS

Carpenter, T. P., Fennema, E., Franke, M. L., Levi, L. y Empson, S. B. (1999). *Children's mathematics: Cognitively guided instruction*. Portsmouth: Heinemann.

Castro, E. (2008). Resolución de problemas: ideas, tendencias e influencias en España. En R. Luengo, B. Gómez, M. Camacho y L. Blanco (Eds.), *Investigación en educación matemática XII* (pp. 113-140). Badajoz: Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática, SEIEM.

Castro, E, y Castro-Rodríguez, E. (2010). El desarrollo del pensamiento multiplicativo. *Uno: Revista de didáctica de las matemáticas, 54*, 31-40.

Coloma, L. (2013/1894). *Ratoncito Pérez*. Barcelona: Santillana Educación.

De Castro, C. (En prensa). Problemas de fácil modelización y difícil resolución aritmética. En *Actas del XV Congreso de Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas. El sentido de las matemáticas: matemáticas con sentido*. Jaén: SAEM THALES.

De Castro, C. y Escorial, B. (2007). Resolución de problemas aritméticos verbales en la Educación Infantil: una experiencia de enfoque investigativo. *Indivisa. Boletín de Estudios e Investigación (Monografía IX)*, 23-48. Disponible en: http://eprints.ucm.es/12643/

De Castro C. y Hernández, E. (2014). Problemas verbales de descomposición multiplicativa de cantidades en educación infantil. *PNA, 8*(3), 99-114.

De Castro, C., Molina, E., Gutiérrez, M.L., Martínez, S. y Escorial, B. (2012). Resolución de problemas para el desarrollo de la competencia matemática en Educación Infantil. *Números. Revista de Didáctica de las Matemáticas, 80*, 53-70.

De Castro, C., Walsh, J., Del Coso, E., Salvador, C., González, V. y Escorial, B. (2009). "Dos de todo": El cuento chino de los problemas de comparación multiplicativa en la Educación Infantil. *Epsilon: Revista de la Sociedad Andaluza de Educación Matemática "Thales" 73*(3), 33-42.

Díaz, I. (2013). *El cerezo que habla*. Barcelona: Santillana Educación.

Martínez, J. y Sánchez, C. (2013). *Resolución de problemas y método ABN*. Madrid: Wolters Kluwer.

NAEYC y NCTM (2013). Matemáticas en la Educación Infantil: Facilitando un buen inicio. Declaración conjunta de posición. *Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia, 2*(1), 1-23.

NCTM (2003). *Principios y Estándares para la Educación Matemática*. Sevilla: Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales.

Nesher, P. (1999). El papel de los esquemas en la resolución de problemas de enunciado verbal. *Suma, 31*, 19-26. Recuperado de: http://revistasuma.es/IMG/pdf/31/019-026.pdf

Puig, L. y Cerdán, F. (1995). *Problemas aritméticos escolares*. Madrid: Síntesis.

Molina, E. (2012). Narración de un taller de resolución de problemas aritméticos con niños de 4 años. *Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia, 1*(1), 63-79. Recuperado de: http://www.edma0-6.es/index.php/edma0-6/article/download/5/18

Épsilon - *Revista de Educación Matemática* 2014, Vol. 31(2), nº 87, 99-102

Construcción de polígonos en Educación Primaria a partir de círculos de papel

Alexander Maz-Machado
Noelia Jiménez-Fanjul
Universidad de Córdoba

Resumen: *Presentamos una actividad manipulativa, con círculos de papel, para que los alumnos de educación primaria construyan algunos polígonos y refuercen el conocimiento y comprensión de sus propiedades.*
Palabras Clave: *Círculo, Material manipulativo, Matemáticas, Geometría plana, Polígonos.*

Construction of polygons in Primary Education with paper circles

Abstract: *We present a manipulative activity with paper circles so that primary school students build some polygons and reinforce knowledge and understanding of their properties.*
Keywords: *Circle, Manipulative materials, Mathematics, Plane geometry, Polygons.*

INTRODUCCIÓN

Durante la educación primaria el alumnado se encuentra en la etapa de desarrollo cognitivo que Piaget (Piaget e Inhelder, 1997) designó como de "operaciones concretas". Esta se caracteriza por desarrollar una mayor capacidad de razonamiento lógico, pero muy ligado a situaciones reales y determinadas, es decir a la realidad empírica. También requieren apoyo en materiales que les permitan manipular y observar patrones, características y propiedades de los conceptos matemáticos.

Es un hecho demostrado que la utilización de recursos y materiales didácticos en todos los niveles de enseñanza de las matemáticas, sobre todo en los niveles iniciales, aporta muchas ventajas a la hora de comprender conceptos de esta asignatura. Ayudan a los alumnos para la reflexión de lo que están haciendo, porque no sólo lo desarrollan mentalmente, sino que son capaces de ver y tocar lo que están aprendiendo. Por esta razón se produce un buen acomodamiento cognitivo de los conceptos y los recuerdan con mayor facilidad.

Asumimos por materiales la definición dada por Alsina, Burgués y Fortuny (1988, p. 13), “bajo la palabra <<material>> se agrupan todos aquellos objetos, aparatos o medios de comunicación que pueden ayudar a describir, entender y consolidar conceptos fundamentales en las diversas fases del aprendizaje”.

Sin embargo, Coriat (1997) cree necesario hacer referencia a la diferencia entre recursos y materiales didácticos. Afirma que los materiales didácticos son creados específicamente con fines educativos, por ejemplo las regletas de colores; en cambio, los recursos son aquellos materiales que son usados por el profesor para explicar un concepto o un procedimiento matemático, como puede ser el juego de dominó o una cuerda.

Si además los materiales permiten que las actividades en la clase de matemáticas adquieran carácter lúdico, se creará un ambiente favorable no sólo para la comprensión de los conceptos sino también para inculcar en los alumnos actitudes positivas y de empatía hacia las matemáticas (Maz-Machado y Jiménez-Fanjul, 2012).

Los temas de geometría son ideales para incorporar materiales en clase, por ello proponemos una actividad con círculos de papel para construir algunos polígonos.

ACTIVIDAD

Se pretende que a través de la manipulación de un círculo de papel los alumnos construyan diversos polígonos regulares. Para ello deben poner en juego conceptos geométricos como perpendicularidad, ángulos, propiedades de un triángulo equilátero y rombo. Los materiales a utilizar son papel o cartulina, tijeras, compás, transportador y regla.

1. Construcción de un cuadrado

Se pedirá a los alumnos que recorten un círculo en papel o cartulina. Como lo van a plegar, lo adecuado es que el diámetro no sea inferior a 10 cm. (Esto se aplica a todas las actividades); deberán trazar el diámetro, bien con un lápiz y regla o plegándolo por la mitad. Luego deben volver a trazar el diámetro de forma perpendicular al anterior (Fig. 1a). Plegar uno de los arcos de circunferencia que se forman entre los puntos de corte del diámetro y el borde del círculo como se muestra en la figura 1b. Luego se procede de igual forma con los otros tres arcos (Fig. 1c y 1d) y así se obtiene un cuadrado.

Luego se pregunta ¿Cómo podemos estar seguros de que es un cuadrado? Se pedirá que midan la longitud de cada lado y que utilicen el transportador para verificar que los cuatro ángulos son rectos.

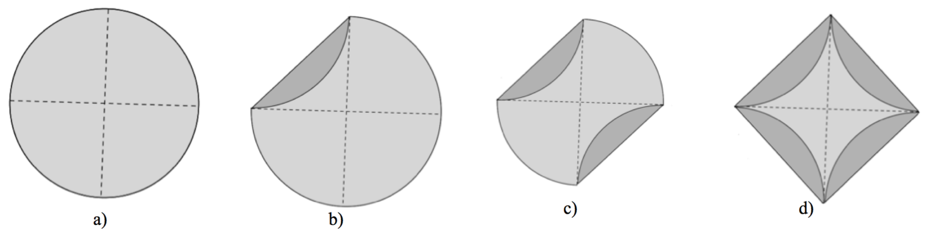


Figura 1.

2. Construcción de un triángulo equilátero

Se pedirá a los alumnos que recorten un círculo en papel o cartulina y que señalen el centro (Fig. 2a). Luego han de plegar la mitad del círculo sobre sí misma (Fig. 2b). El siguiente paso es repetir el anterior con una de la partes (derecha o izquierda) de forma que el pliegue coincida con el punto final de la recta que se ha formado (Fig. 2c). Finalmente se realiza el último plegado y se obtiene un triángulo equilátero (Fig. 2d).

Luego se pregunta ¿Cómo podemos estar seguros de que es un triángulo equilátero? ¿Cuánto mide cada uno de los ángulos? Se pedirá que midan la longitud de cada lado y que utilicen el transportador para verificar que los tres ángulos son iguales.

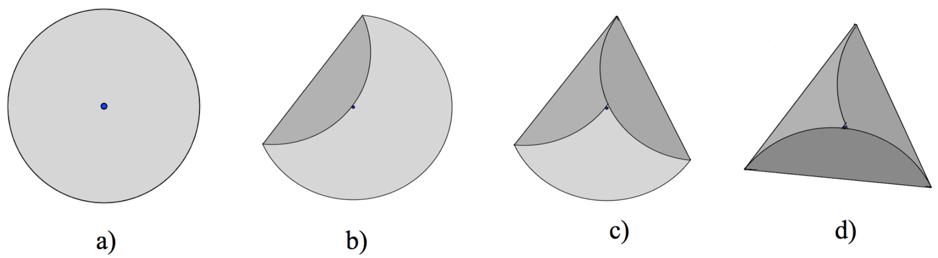


Figura 2.

3. Construcción de un rombo

Se siguen los tres primeros pasos que se establecieron para la construcción del triángulo. Una vez se tenga la figura 3a, se pliega el punto A hasta el centro del círculo (Fig. 3b). Luego se pliega el punto C hasta el centro y se obtiene el rombo (Fig. 3c).

Luego se pregunta ¿Cómo podemos estar seguros de que es un rombo? ¿Cuánto mide cada uno de los lados? ¿En qué se diferencia de un cuadrado? ¿En qué aspectos coinciden? ¿Cuánto mide cada uno de sus ángulos? Se pedirá que midan la longitud de cada lado y que utilicen el transportador para verificar que los ángulos son iguales dos a dos.

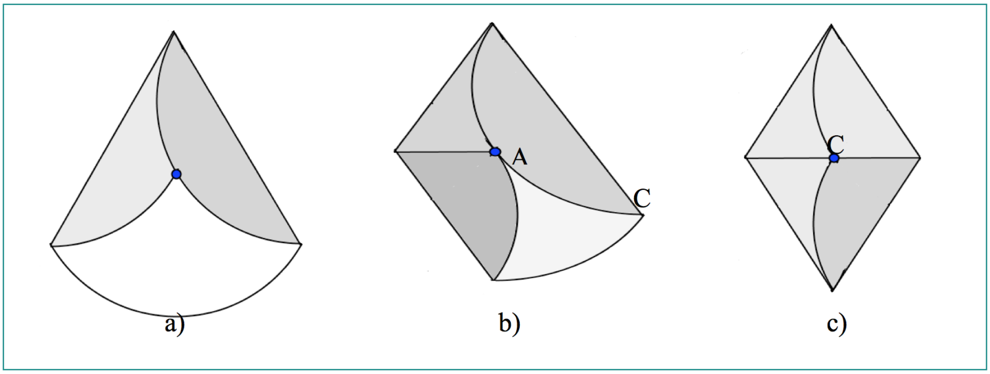


Figura 3.

REFLEXIONES

La utilización de recursos didácticos de fácil manipulación que están al alcance de todo profesor y alumno durante la clase de matemáticas, reforzados con preguntas que lleven a la reflexión y la comprobación de propiedades, reglas o patrones (en este caso para la geometría plana), no sólo imprimen dinamismo y rompen con las rutinas de papel, bolígrafo y pizarra, sino que facilitan a los alumnos experiencias prácticas que les permiten poner en juego sus conocimientos previos con los nuevos que les estén enseñando.

Con esta sencilla idea hemos pretendido mostrar que en muchas ocasiones no hay que preparar actividades demasiado grandiosas o con materiales sofisticados, bastan conceptos básicos y tener claro lo que se pretende trabajar en la clase para despertar la curiosidad, reforzar los conocimientos y crear ambientes de trabajo activos en el aula.

REFERENCIAS

Alsina, C., Burgués, C. y Fortuny, J. Mª. (1988). *Materiales para construir la geometría.* Madrid: Síntesis.

Coriat, M. (1997). Materiales, recursos y actividades: un panorama. En L. Rico (Coord.) *La Educación Matemática en la Enseñanza Secundaria.* Barcelona: Horsori.

Maz-Machado, A. y Jiménez-Fanjul, N. (2012). Ajedrez para trabajar patrones en matemáticas en educación primaria. *Epsilon. Revista de Educación Matemática,* 81, 105-112.

Piaget, J. e Inhelder, B.(1997). *Psicología del niño.* Madrid: Ediciones Morata.

Épsilon - *Revista de Educación Matemática* *2014, Vol. 31(2), nº 87, 103-110*

Crónica del XV Congreso sobre Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas

Agustín Carrillo de Albornoz Torres
Universidad de Córdoba
agustincarrillo@acta.es

Con el lema "El sentido de las matemáticas: matemáticas con sentido", la Sociedad Andaluza de Educación Matemática THALES ha celebrado una nueva edición, la número quince, del Congreso sobre Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas (CEAM), cuya organización ha recaído en la delegación de Jaén.

XV CEAM
Baeza, 2014

Esta XV edición del CEAM ha tenido lugar en la sede de Baeza de la Universidad Internacional de Andalucía (UNIA) durante los días 3 al 5 de julio de 2014, contando con un total de 226 participantes de los distintos niveles educativos y procedencia, que durante tres días han compartido experiencias y conocimientos con el objetivo de mejorar la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

Aunque costó trabajo, al final tuvimos un logo del congreso inspirado en el Palacio de Jabalquinto de Baeza en el que desarrollamos todas las actividades del CEAM.

El comienzo del congreso contó con la conferencia del Grupo Alquerque, como siempre interesante y entretenida. Pepe, Antonio y Juan Antonio nos deleitaron con su contar de los cantares en el que además de muchas matemáticas también tuvimos baile por sevillanas.

Las conferencias plenarias se completaron con la impartida por Rafael Ramírez Uclés (Universidad de Granada) y la impartida en la clausura por Clara Grima (Universidad de Sevilla). Las tres de un excelente nivel, como ha quedado reflejado por los resultados de las encuestas de evaluación que de manera online han respondido los participantes en el congreso.

En otro apartado de los contenidos, programamos ocho ponencias con temas diversos y sobre todo, pensadas para los distintos niveles educativos.

Música y matemáticas a cargo de Manuel Amaro Parrado, sentido numérico impartida por Mª Teresa García y Rafael Bracho, estadística con sentido haciendo referencia al lema del congreso a cargo de José Rodríguez Aví y matemáticas para la vida dirigida a Infantil, impartidas por Joaquina Chicharro y Soledad de la Blanca, componían el primer bloque de ponencias.

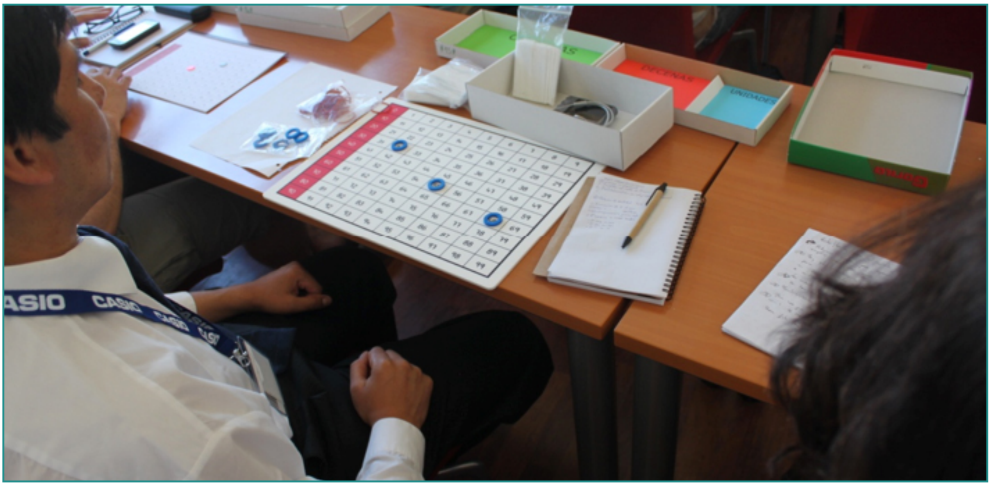
Para un segundo bloque programamos temas como cine y tv en matemáticas impartida por José Mª Sorando, la experiencia del método ABN contada por su autor, Jaime Martínez; matemáticas: reina y doncella fue el título de la ponencia de Manuel Martínez en la que trato sobre todo de interdisciplinaridad y matemáticas consentidas, ponencia de Tere Valdecantos con la que se cerraba el segundo bloque.

Los contenidos del congreso se completaron con cuarenta y seis comunicaciones, dieciséis talleres, tres comunidades virtuales, cinco posters y un zoco. Cifras que no están nada mal, aunque lo importante son los contenidos y sobre todo la variedad que ofrecieron todas estas experiencias contadas por los participantes en el CEAM de Baeza.

Además, se programó una mesa redonda en la que se debatió sobre las evaluaciones externas que los centros están "padeciendo" en los últimos años; contando con representación del INEE a través de Ismael Sanz (director general) y de la Agencia Andaluza de Educación Educativa (AGAEVE) representada por Sebastián Cárdenas.

Por si quedaban algunos huecos en el programa, aprovechamos para hacer algunas presentaciones de libros como fueron "Matemáticas para estimular el talento III" que recoge actividades del proyecto Estalmat y "Matemáticas con calculadora para 3º de ESO" publicado en colaboración con la División Educativa CASIO.

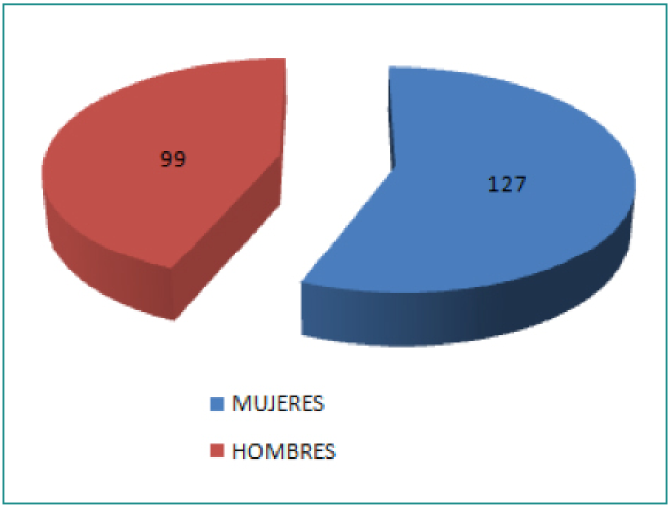
Aún quedó tiempo para que desde la División Educativa CASIO, colaborador habitual con THALES y con el CEAM, se presentara la nueva calculadora Classpad 400.



En todos los congresos, las exposiciones suponen una parte importante de las actividades que se desarrollan. Para esta ocasión hemos contado con tres: "¡Ríete con las mates!, cedida por el Departamento de matemáticas de la Universidad Complutense de Madrid; "La mujer innovadora en la ciencia" del fondo de la SAEM THALES y "Azulejos matemáticos" elaborada por Ángel Requena, al que agradecemos, al igual que Ana García Azcárate que en todo momento hayan estado presentes junto a la exposición para responder a cuantas preguntas le hacían los participantes.

En definitiva un programa que desde la organización consideramos muy completo por la diversidad de temas y sobre todo, al ofrecer contenidos para los distintos niveles educativos representados en el congreso.

Continuando con más datos del XV CEAM – Baeza 2014, destacamos que en los 226 participantes inscritos hubo mayoría de mujeres, tal y como aparece en el gráfico siguiente (ver página siguiente):



Sobre el origen de los participantes, aunque mayoritariamente fueron andaluces, destacamos que tuvimos representación de diez comunidades autónomas y de tres países iberoamericanos, tal y como aparece en la imagen siguiente (ver gráfico).

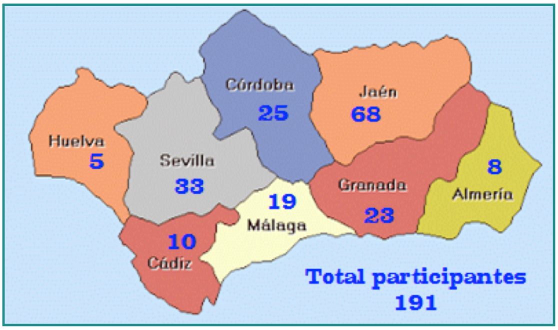
Como era de esperar, la mayoría de los participantes del congreso provenían de Andalucía (84,5 %), y como también era previsible, con mayoría de Jaén.

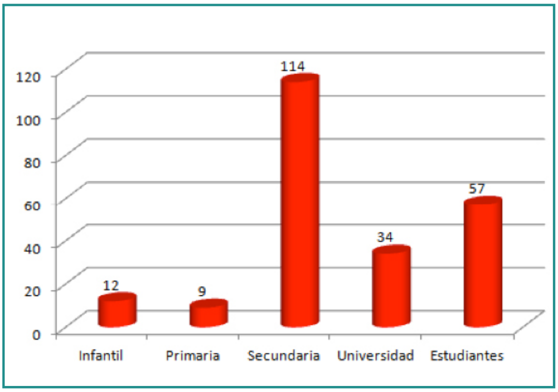
Otros datos de interés hacen referencia al nivel educativo de los participantes; aunque hay mayoría del profesorado de Educación Secundaria, estamos satisfechos al haber despertado el interés en el resto de niveles, destacando que muchos de los estudiantes que aparecen en el gráfico serán docentes de infantil y primaria en el futuro.

Para finalizar esta crónica no puedo olvidar el apartado de agradecimientos ya que sin los apoyos y ayudas que hemos recibido, a la delegación de Jaén de la SAEM THALES nos hubiera resultado imposible celebrar una nueva edición del CEAM.

Por tanto, nuestro agradecimiento a la Junta de Andalucía, a través de sus Consejerías de Economía, Innovación, Ciencia y Empleo, y de Educación, Cultura y Deporte; a las Universidades de Jaén, Córdoba e Internacional de Andalucía, a la Diputación de Jaén, al Ayuntamiento de Baeza; así como a los Centros de Profesorado de la provincia de Jaén, al Instituto Nacional de Evaluación Educativa y a las EE.PP. Sagrada Familia de Úbeda; sin olvidarnos de empresas como la División Educativa de CASIO, Oleocampo y Grupo Anaya que han hecho posible el CEAM de Baeza 2014.

Para terminar, como coordinador del CEAM, quiero destacar el trabajo del grupo de monitoras y monitores, todos estudiantes de las EE.PP. Sagrada Familia de Úbeda por





el interés y sobre todo por la ilusión con la que han ayudado para hacer fácil las tareas del día a día en el congreso.

No me he olvidado del comité organizador, solo que lo he dejado para el final.

Gracias a todos por vuestro trabajo y esfuerzo, no solo durante los días del congreso, sino durante todo el tiempo que hemos trabajado en los meses previos hasta llegar al 3 de julio con los nervios propios de cómo saldría todo.

Muchas gracias por todo y también por aguantarme.

Ahora le toca a la delegación de Cádiz para que nos volvamos a encontrar en el XVI CEAM en julio de 2016.

Nos vemos en Cádiz.

Retos matemáticos para Segundo Ciclo de Secundaria

José Carlos Casas

Juan Diego Sánchez
Editorial CSS, Madrid
2014. Primera edición.
ISBN: 978-84-9023-131-9
172 páginas

Los problemas de razonamiento matemático tienen como objetivo fundamental despertar en el lector motivación e interés por una asignatura, las matemáticas, que en general presenta gran resistencia. Si éstos se presentan como retos, su resolución puede infundir, además, en el lector gran satisfacción.

En este libro, el autor nos propone 110 retos con distintos niveles de dificultad, y en diferentes ramas de las matemáticas como son la probabilidad, la lógica, el álgebra o la geometría, como propuesta de diversión para chicos y chicas de 14 a 16 años. En la exposición de estos retos no hay una identificación ni un orden establecido para indicar el grado de dificultad. Eso hace que el lector se enfrente a todos los retos con la misma actitud y sin ideas preconcebidas.

El texto forma parte de la serie Ingenio, incluida dentro de la colección Ciudad de las Ciencias, que incluye un total de 11 títulos de matemáticas recreativas. El propio autor, en 2013 nos presentó el libro Retos matemáticos para Primer Ciclo de Secundaria con lo que se completa un extenso conjunto de retos dirigidos a los alumnos de todos los niveles de secundaria.

Todos los retos propuestos son resueltos por el autor en la segunda parte del libro, de una forma clara y detallada y con un lenguaje cercano, lo que refleja la experiencia docente de éste, como profesor de enseñanza secundaria.