

*La revista Epsilon está reseñada en:
IN-RECS, Dialnet y Base de Datos del Centro de Documentación Thales.*

epsilon 79

Revista de Educación Matemática

Director

Alexander Maz

Comité Editor

Damián Aranda

Rafael Bracho

José M^a Chacón

Francisco España

José Galo

Manuel Gómez

Inmaculada Serrano

Comité Científico

Evelio Bedoya,

Universidad del Valle, Colombia.

Matías Camacho,

Universidad de la Laguna, España.

José Carrillo,

Universidad de Huelva, España.

M^a Mar Moreno,

Universidad de Lleida, España.

José Ortiz,

Universidad de Carabobo, Venezuela.

Modesto Sierra,

Universidad de Salamanca, España.

Liliana Mabel Tauber,

*Universidad Nacional del Litoral,
Argentina.*

Página de la revista: <http://thales.cica.es/epsilon>

Revista: epsilon@thales.cica.es

epsilon79

Sociedad Andaluza de Educación Matemática “Thales”

Edita

Sociedad Andaluza de
Educación Matemática “Thales”

Centro Documentación “Thales”

Universidad de Cádiz

C.A.S.E.M.

11510 PUERTO REAL (Cádiz)

Maquetación e impresión

Utrerana de Ediciones, s.l.

Cristóbal Colón, 12

41710 Utrera (Sevilla)

Foto portada

Primer Premio del Concurso
de Fotografía Matemática 2011,

Delegación de Almería.

Depósito Legal

SE-421-1984

I.S.S.N.

1131-9321

Período

3º cuatrimestre 2011

Suscripción

ESPAÑA: 42,00 euros

PAÍSES DEL EURO: 63,00 euros

RESTO DE PAÍSES: 90 \$ USA

(3 NÚMEROS AL AÑO)

S.A.E.M. THALES

MANUEL TORRALBO RODRÍGUEZ

Presidente

RAFAEL BRACHO LÓPEZ

Vicepresidente

AGUSTÍN CARRILLO DE ALBORNOZ TORRES

Secretario General

ENCARNACIÓN AMARO PARRADO

Secretaria de Administración y Tesorería

SEDE

FACULTAD DE MATEMÁTICAS

Edif. de la E.S.I. Informática. Ala L2

Avda. Reina Mercedes, s/n.

Aptdo. 1160

41080 SEVILLA

Tlfno. 954 62 36 58

SEDE ADMINISTRATIVA DE LA SOCIEDAD Y REVISTA

CENTRO DE DOCUMENTACIÓN THALES

Universidad de Cádiz

CASEM. Campus del Río San Pedro

11510 - PUERTO REAL (Cádiz)

Tlf. y Fax: 956 01 60 50

Email: thales.matematicas@uca.es

ALMERÍA

JUAN GUIRADO GRANADOS

Delegado Provincial

IES Río Aguas. Sorbas.

04270 ALMERÍA

CÁDIZ

PALOMA PASCUAL ALBARRÁN

Delegada Provincial

Departamento de Matemáticas

Universidad de Cádiz

CASEM. Campus del Río San Pedro

Telf.: 956 016 050

11510 - PUERTO REAL (Cádiz)

CÓRDOBA

MANUEL T. CASTRO ALBERCA

Delegado Provincial

GRANADA

MARÍA PEÑAS TROYANO

Delegado Provincial

Aptdo. 673

18080 - GRANADA

HUELVA

SIXTO ROMERO SÁNCHEZ

Delegado Provincial

Aptdo. 1209

21080 - HUELVA

JAÉN

AGUSTÍN CARRILLO DE ALBORNOZ TORRES

Delegado Provincial

MÁLAGA

SALVADOR GUERRERO HIDALGO

Delegado Provincial

Tlfno.: 952 358 710

Fax: 952 334 092

SEVILLA

ANA M^a MARTÍN CARABALLO

Delegada Provincial

Tlfno.: 954 623 658

Sede: Facultad de Matemáticas

Apdo. 1160

41080 SEVILLA

EDITORIAL INVESTIGACIÓN

- 9 Diagnóstico de la competencia interpretativa en el significado de fracción y su aplicación en una situación particular de la vida cotidiana**
Alberto Gómez-Lozano (Univ. Cooperativa de Colombia Sede Ibagué)
Oneida Muñoz-Ñungo (Univ. Cooperativa de Colombia Sede Ibagué.)
- 27 Importancia del libro de texto en la producción de conocimientos**
Martha E. Guzmán (Univ. Nac. de Rosario, Argentina)
Mónica Caserio (Univ. Nac. de Rosario, Argentina)
Ana María Vozzi (Univ. Nac. de Rosario, Argentina)
- 47 Localiza con ayuda de las cónicas y Geogebra**
Miguel de la Fuente Martos (I.E.S. El Tablero, Córdoba)

EXPERIENCIAS

- 61 Paseos matemáticos por Alcalá la Real. Una idea de trabajo para el proyecto integrado de matemáticas**
José Luis Ruiz-Fernández (IES Alfonso XI, Priego de Córdoba).
- 67 Una experiencia heurística en 1º de Bachillerato de Ciencias**
Enrique Hoyos Jiménez (Jubilado del Instituto Alcaria. La Puebla del Río, Sevilla).
- 81 Escalera hacia el cielo**
Miguel Ángel Pérez-García (I.E.S. Las Espeñetas).
Pascual Márquez-Navarro (I.E.S. Las Espeñetas).
Juan Roldán-Zafra (I.E.S. Thader).

IDEAS PARA EL AULA

93 Probabilidad condicional: exploración y visualización mediante recursos en Internet

José Miguel Contreras (Univ de Granada)

Carmen Díaz Batanero (Univ de Huelva)

Pedro Arteaga Cesón (Univ de Granada)

Margherita Gonzato (Univ de Granada)

Gustavo Cañadas (Univ de Granada)

103

RECENSIONES

105

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

107

AGRADECIMIENTO A ÁRBITROS

109

NORMAS PARA LA PUBLICACIÓN

Al cerrar este volumen 28 del año 2011, aprovechamos para hacer relación de las personas que han participado en el proceso de evaluación de los artículos durante los años 2010 y 2011, asimismo para agradecerles su desinteresada colaboración con la revista porque su trabajo facilita el nuestro, ayuda a imprimir claridad y calidad a las publicaciones de Epsilon.

Con este número cerramos los ejemplares correspondientes al año 2011. En el Comité editorial continuamos trabajando con el propósito de ir normalizando la publicación de los números de Epsilon y poco a poco lo vamos alcanzando. Esperamos que en este año se alcance nuestro propósito.

La revista esta manteniendo un equilibrio en los artículos publicados en cuanto a sus autores, investigadores y profesorado de matemáticas, como en sus contenidos de tal forma que resulten atractivos para un variado y amplio espectro de lectores.

El acceso abierto a uno de los artículos publicados en cada número a través de la Web <http://thales.cica.es/epsilon/>, permite darle más visibilidad a nuestra revista Epsilon.

Debo señalar que en el reporte del índice de impacto de las revistas españolas de Ciencias Sociales (IN-RECS) para el año 2010, Epsilon tiene un índice de 0.026, ocupando el lugar 58 de las 166 revistas que conforman la población de la categoría de Educación, representando esto una mejoría respecto al año 2009. Es un primer paso en la mejora del impacto de la revista pero estamos seguros de que no será el último, pero se requiere que los autores citen los artículos de Epsilon.

Por otra parte, hemos conocido que recientemente la International Commission on Mathematical Instruction (ICMI) acaba de anunciar la concesión de los Premios Félix Klein y Hans Freudenthal correspondientes a 2011. En esta ocasión los galardonados fueron Alan Schoenfeld con la medalla Félix Klein y Luis Radford con la medalla Hans Freudenthal.

Finalmente aprovecho para invitar a los lectores, investigadores y profesores a que envíen sus manuscritos para el próximo monográfico sobre geometría.

ALEXANDER MAZ MACHADO
Director

XIV CONGRESO DE ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS

Título: DIVERSIDAD Y MATEMÁTICAS

Fechas: 4 al 6 de Julio de 2012.

Lugar: Faculta de la Universidad de Málaga.

Teléfonos de contacto:

Comité de Programa: 608 918 680

Comité Organizador: 608 918 680

e-mail: ceamthalesmalaga@gmail.com

web: <http://xiv.thalesceam.es/>

Bloques Temáticos: El congreso se estructurará en los siguientes bloques temáticos:

- B1)** Matemáticas para la diversidad.
- B2)** Matemáticas y Competencias Básicas.
- B3)** Matemáticas, TICs y Diversidad.
- B4)** Recursos y materiales en Matemáticas.
- B5)** Diversas Matemáticas para la enseñanza y el aprendizaje.

Conferencias plenarias: Se celebrarán 5 conferencias Plenarias girando en torno a la temática del congreso.

Exposiciones: Relacionadas con el mundo de las Matemáticas.

Comunicaciones, Talleres, Pósteres y Zoco:

- **Fecha límite de recepción:** 15 de abril de 2012
- **Confirmación de aceptaciones:** 15 de mayo de 2012
- **Formatos y modo de envío:** Según modelos y normas disponibles en la Web del Congreso.

Inscripciones: On-line a través de la Web del Congreso, con las siguientes cuotas:

	Hasta el 30/5/2012	Después del 30/5/2012
Socios (de THALES o de la FESPM)	80 €	120 €
No socios	120 €	160 €
Estudiantes	40 €	40 €

Certificación: 24 horas. Se ha solicitado la homologación de la actividad a la Consejería de Educación de la Junta de Andalucía.

DIAGNÓSTICO DE LA COMPETENCIA INTERPRETATIVA EN EL SIGNIFICADO DE FRACCIÓN Y SU APLICACIÓN EN UNA SITUACIÓN PARTICULAR DE LA VIDA COTIDIANA

Alberto Gómez-Lozano

Universidad Cooperativa de Colombia Sede Ibagué

Oneida Muñoz-Ñungo

Universidad Cooperativa de Colombia Sede Ibagué.

oneida.munoz@campusucc.edu.co

Resumen: *Las competencias matemáticas requieren de ambientes de aprendizaje enriquecidos por situaciones problemas significativos y comprensivos, que posibiliten avanzar a niveles de competencia más y más complejos, entre ellas la interpretativa. Por consiguiente cada institución en su currículo debe buscar de acuerdo a los estándares integrar los distintos pensamientos matemáticos llevándonos a admitir que un concepto puede tener diversas interpretaciones como por ejemplo el concepto de fracción.*

Nuestro interés nos llevó a analizar el problema de la conceptualización y de la competencia interpretativa que tienen los estudiantes de básica secundaria en la Institución Educativa Técnica Joaquín París de Ibagué (Tolima-Colombia), en el área de matemáticas con el concepto de fracción y su aplicación en diferentes contextos, donde participaron 81 estudiantes de los grados 6°, 7° y 11° seleccionados aleatoriamente, equivalente al 22% de la población estudiantil de los grados encuestados. Los resultados encontrados indican que el 66.67% de los estudiantes encuestados presentan dificultad en la competencia interpretativa de los diferentes conceptos de fracción.

Palabras Claves: *Competencias en matemáticas; competencia interpretativa; significado de fracción; acciones en la vida diaria.*

Abstract: *The mathematical competences needs of apprenticeship environments enriched by significant and comprehensive problem situations that possibility to advances to competence levels more complex, beetwen there the interpretative level. Therefore*

every institution in there curriculum must search in agreement to the standards to integrate the differents mathematical thoughts to take us to admit that a concept can have many interpretations for example the traction concept.

Our interest took us to analyze the problem of the conceptualization and of the interpretative competence that the secondary basic students have in the technic educative institution Joaquín París of Ibagué (Tolima-Colombia) in the mathematics area with the fraction concept and the application in differents contexts, which involved 81 students in grades 6°, 7° and 11° randomly selected, equivalent to 22% of the student population in grades survered. The results indicate that 66.67% of the students competition have difficulty in interpreting the different fraction concepts.

Keywords: *Mathematical, competence, interpretative competence, fraction significaction, fraction in the daily life.*

INTRODUCCIÓN

De acuerdo a los estándares Básicos en matemáticas dados por el Ministerio de Educación Nacional de Colombia, la formación matemática de los estudiantes debe contribuir eficazmente a las metas, propósitos y fines de la educación. Por tal motivo esta formación debe responder a nuevas demandas globales y nacionales como las relacionadas con una educación para todos, la atención a la diversidad y a la interculturalidad y la formación de ciudadanos con las competencias necesarias para el ejercicio de sus derechos y deberes democráticos.

De esta manera la noción general de competencia ha venido siendo objeto de interés en muchas de las investigaciones y reflexiones que adelanta la comunidad de investigadores en educación matemática (p. e. Rico y Lupiañez (2008).

Por otro lado el aprendizaje con comprensión es fundamental en matemáticas, lo cual nos ha motivado a analizar el nivel en la competencia interpretativa que tienen los estudiantes en cuanto al concepto de fracción, cuando es aplicado en una situación particular de la vida cotidiana.

La investigación se realizó en la Institución Educativa Técnica Joaquín París, ubicada en el municipio de Ibagué, departamento del Tolima, fue aprobada por el Ministerio de Educación Nacional de Colombia en el año 2003; es de naturaleza oficial, de carácter técnico, de género mixto, atendiendo estudiantes de estrato uno (1) y dos (2). Está conformada por cuatro (4) sedes en donde funcionan los niveles de preescolar, básica primaria, secundaria y media técnica, en dos jornadas (mañana y tarde). En la actualidad cuenta con mil ochocientos (1800) estudiantes; en donde se aplicó un test a los estudiantes de los grados 6°, 7° y 11° de la Institución, debido a que se viene notando dificultad en esta población para aplicar los diferentes conceptos de fracción vistos en clase, en un contexto diferente a la misma.

En este artículo se presentan los resultados del test y el análisis de los mismos, cuando los participantes utilizan a la fracción en situaciones distintas.

EL PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

El aprendizaje con comprensión es fundamental en matemáticas, el desarrollo de procesos educativos orientados a la comprensión, plantea retos significativos a las investigaciones en matemática educativa en cuanto a la competencia interpretativa, sobresaliendo el relacionado a la fracción como parte-todo, cociente, medida, razón y operador, cuando es aplicado en una situación particular de la vida cotidiana.

Además, en Colombia la formación en matemáticas debe ser orientada de acuerdo a los estándares básicos y la evaluación por competencias necesarias para el ejercicio de sus derechos y deberes democráticos. Es notoria la dificultad que tienen los estudiantes en el desarrollo de la competencia interpretativa cuando debe aplicarla en un contexto diferente a la clase, tal como una situación de la vida cotidiana.

Por consiguiente, ante esta observación nos planteamos la siguiente pregunta:

¿Cuál es el nivel de la competencia interpretativa de los estudiantes de los grados 6°, 7° y 11° de la Institución Educativa Técnica Joaquín París de Ibagué en el significado de fracción aplicándolo en un contexto particular de la vida cotidiana?

En consecuencia el problema de investigación se enmarca en el desarrollo de la competencia interpretativa que deben tener los estudiantes de básica secundaria para cumplir con los estándares básicos en matemáticas de acuerdo al Ministerio de Educación Nacional de Colombia.

El objetivo que nos planteamos fue analizar la competencia interpretativa que tienen los estudiantes en cuanto al concepto de fracción, cuando es aplicado en una situación particular de la vida cotidiana. Para lograr este objetivo nos propusimos los siguientes objetivos específicos:

- Identificar cuál de los significados de fracción crea mayor dificultad en los estudiantes.
- Establecer si los estudiantes aplican el significado de fracción en un contexto diferente al trabajo en clase.

MARCO TEÓRICO

El conocimiento matemático distingue dos tipos básicos: el conocimiento conceptual (formal)¹ y el conocimiento procedimental (la práctica)². El primero está más cercano a la reflexión y se caracteriza por ser un conocimiento teórico (el saber cognitivo), muy rico en relaciones entre sus componentes y con otros conocimientos; tiene un carácter declarativo y se asocia con el saber qué y el saber por qué. El segundo está más cercano a la acción (el saber hacer) y se relaciona con las técnicas y las estrategias para representar conceptos y transformar dichas representaciones; el conocimiento procedimental ayuda a la construcción del

conocimiento conceptual y permite el uso eficaz, flexible y en contexto de los conceptos, proposiciones, teorías y modelos matemáticos, por tanto, está asociado con el saber cómo. Lo anterior permite precisar algunos procesos generales presentes en toda actividad matemática que explicitan lo que significa ser matemáticamente competente.

COMPETENCIAS

La noción general de competencia ha venido siendo objeto de interés en muchas de las investigaciones y reflexiones que adelanta la comunidad de investigadores en educación matemática. De ahí que, la adopción de un modelo epistemológico coherente para dar sentido a la expresión ser matemáticamente competente requiere que los docentes, con base en las nuevas tendencias de la filosofía de las matemáticas, reflexionen, exploren y se apropien de supuestos sobre las matemáticas.

La Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico OCDE³, considera que “El dominio sobre matemáticas que se estudia en el Programme For International Student Assessment, denominado proyecto PISA⁴ 2003, se conoce como “Alfabetización matemática” también como “Competencia Matemática” (citado en Rico, 2006). Este dominio se refiere a las capacidades de los estudiantes para analizar, razonar y comunicar eficazmente cuando enuncian, formulan y resuelven problemas matemáticos en una variedad de dominios y situaciones.

En muchas ocasiones hay inconsistencia y falta de claridad en la estructura conceptual del término competencias, por lo cual se confunde con otros conceptos similares tales como inteligencia, funciones, capacidades, calificaciones, habilidades, actitudes, aptitudes, destrezas, indicadores de logros y estándares.

De ahí que, la noción de competencia está vinculada con un componente práctico: “Aplicar lo que se sabe para desempeñarse en una situación” (Estándares básicos de calidad en matemáticas y lenguaje). Para el caso particular de las matemáticas, ser competente está relacionado con ser capaz de realizar tareas matemáticas, además de comprender y argumentar por qué pueden ser utilizadas algunas nociones y procesos para resolverlas. Esto es, utilizar el saber matemático para resolver problemas, adaptarlo a situaciones nuevas, establecer relaciones o aprender nuevos conceptos matemáticos. Así, la competencia matemática se vincula al desarrollo de diferentes aspectos, presentes en toda la actividad matemática de manera integrada (Ministerio de Educación Nacional de Colombia, 2008).

Asimismo, la competencia es una capacidad para el desempeño de tareas relativamente nuevas, en el sentido de que son distintas a las tareas de rutina que se hicieron en clase o que se plantean en contextos distintos de aquellos en los que se enseñaron (Vasco, 2003).

Otro significado del término competencias, se refiere a los procesos que deben activarse para conectar el mundo real, donde surgen los problemas con las matemáticas y resolver entonces la cuestión planteada, lo cual permite concretar el sig-

nificado general mediante diversos tipos de capacidades de análisis, razonamiento y comunicación que los estudiantes ponen en juego cuando resuelven o formulan problemas matemáticos en una variedad de dominios y situaciones. Las competencias o procesos establecen los distintos valores de la tercera dimensión del modelo funcional, aquella que afecta a los modos en que el sujeto se enfrenta a un problema. En un caso el foco de atención está en los propios procesos, mientras que en el otro parece destacarse el sujeto que los pone en práctica (Rico, 2005c).

Desde esta perspectiva, las competencias se pueden clasificar en competencias básicas, competencias genéricas y competencias específicas (Vargas, 1999a, 1999b). Las básicas son las competencias fundamentales para vivir en sociedad y desenvolverse en cualquier ámbito laboral. Estas competencias se caracterizan por: Primero: constituyen la base sobre la cual se forma los demás tipos de competencias. Segundo: se forman en la educación básica y media. Tercero: posibilitan analizar, comprender y resolver problemas de la vida cotidiana. Cuarto: constituyen un eje central en el procesamiento de la información de cualquier tipo. Entre estas competencias se encuentran: la comunicativa, la matemática, autogestión del proyecto ético de vida, manejo de las TICs, afrontamiento del cambio y liderazgo.

De acuerdo a Tobón (2004), dentro de las competencias básicas hay un tipo especial que son las competencias cognitivas de procesamiento de información. En Colombia por ejemplo, este es el modelo que predomina en la educación. Al respecto, se han establecido tres competencias básicas: interpretativa, argumentativa, propositiva. La competencia interpretativa se fundamenta en la comprensión de la información buscando determinar su sentido y significación a partir del análisis de textos, graficas, expresiones musicales, esquemas, teatro, gestos y expresiones orales. Este modelo surgió a partir de la transformación de los exámenes de estado requeridos para el ingreso de la educación superior por medio del enfoque de las competencias (Hernández, Rocha & Verano, 1998). El manejo de este enfoque consiste en relacionar los contenidos disciplinares y transdisciplinares con cada una de estas competencias básicas.

Por ejemplo cuando un estudiante de educación básica secundaria muestra esta competencia en el concepto de fracciones cuando es capaz de comprender los problemas cotidianos y el tipo de razonamiento matemático que es preciso llevar a cabo para resolverlos. Involucra procesos de pensamiento tales como observación y atención, comprensión, procesos de aplicación, clasificación y codificación. Esto se logra cuando el estudiante encuentra el sentido de una situación problémica de la vida diaria, una gráfica, un texto y una proposición.

SIGNIFICADO DE FRACCIÓN

De acuerdo a Centeno (2002) “La fracción es la división indicada de la forma $\frac{a}{b}$, a es el numerador y b el denominador, con la condición de que el denominador no puede ser cero. Se simboliza así: Para todo $a, b \in \mathbb{N}$, con $b \neq 0$, $\frac{a}{b}$ es una fracción. El

denominador, indica el número de partes en que se ha dividido la unidad y el numerador, indica el número de unidades fraccionarias elegidas.

En estudios referentes a fracciones realizados por Kieren y Streefland, mencionados por Llinares, y Sánchez (1988), se afirma que la “La aproximación de los niños a las fracciones debe realizarse valiéndose de muchas de las diferente interpretaciones sino que interactúan unas con otras y además, muy frecuentemente, después de realizar experiencias bajo una sola interpretación, los niños no logran trasladarlas a otras”.

De acuerdo al contexto en donde se emplee el término fracción tiene un significado diferente tal como se indica en el gráfico 1.

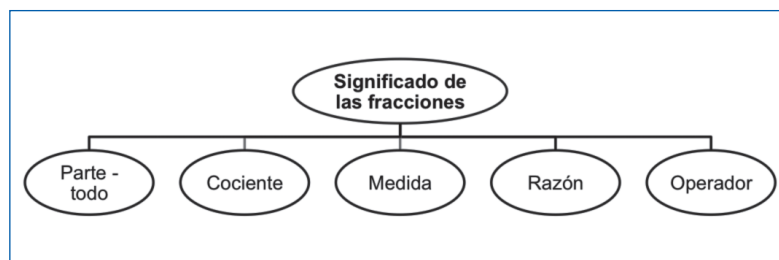


Gráfico 1. Significados de fracción

El conocimiento de que la fracción manifiesta distintos significados se reporta desde investigaciones sistemáticas (Kieren, 1976, 1988, 1993; Behr, Harel, Post & Lesh, 1992; Gairín, 1998; Escolano & Gairín, 2005), en las que distinguen los siguientes:

- **Parte-todo:** Significado que se manifiesta al concebir a la fracción como la relación existente entre dos cantidades específicas: un “todo” o unidad b (continua o discreta), representando un número total de partes iguales, y una “parte” a , destacando un número particular de esas partes iguales tomadas del total.
- **Cociente:** Significado que enfatiza la fracción $\frac{a}{b}$ como la operación de dividir un número natural entre otro no nulo. En este caso, la fracción es el resultado de una situación de reparto donde se busca conocer el tamaño de cada una de las partes resultantes al distribuir a unidades en b partes iguales.
- **Medida:** Significado que tiene su origen en medir cantidades de magnitudes que, siendo conmensurables, no se corresponden con un múltiplo entero de la unidad de medida. La fracción $\frac{a}{b}$ emerge entonces de la necesidad natural de dividir la unidad de medida en b subunidades iguales y de tomar a de ellas hasta completar la cantidad exacta deseada.
- **Razón:** Este significado muestra a la fracción como índice comparativo entre dos cantidades o conjuntos de unidades. La fracción $\frac{a}{b}$ como razón

evidencia la comparación bidireccional entre los valores a y b , siendo esencial el orden en el que se citan las magnitudes comparadas: si la relación de A respecto de B es $\frac{a}{b}$, entonces B es $\frac{a}{b}$ respecto de A .

- **Operador:** Significado que hace actuar a la fracción como transformador o función de cambio de un determinado estado inicial. Así, la fracción $\frac{a}{b}$ empleada como operador es el número que modifica un valor particular n multiplicándolo por a y dividiéndolo por b . Los porcentajes, por ejemplo, son un caso particular de fracción como operador.

Estos significados forman parte de la propia naturaleza compleja del número racional positivo y se contemplan como organizadores de los contextos y situaciones donde tiene sentido el empleo de la fracción (Freudenthal, 1983; Puig, 1997). Las características epistemológicas y fenomenológicas de estos significados se reflejan también a nivel cognitivo, al mostrarse como condicionantes de la comprensión que los estudiantes poseen de la fracción. Respecto del aprendizaje y la comprensión de las fracciones se conocen particularidades como las señaladas en Post, Cramer, Behr, Lesh & Harel (1993), Lamon (2001), Gairín & Sancho (2002), Valdemoros (2004), Dos Santos (2005), y en Clarke & Sukenik (2006):

- La comprensión de la fracción exige la identificación y el dominio de sus distintos significados.
- La comprensión de los significados de la fracción genera dificultades intrínsecas de distinta índole si bien algunos de ellos (por ejemplo, parte-todo) suelen mostrarse más asequibles que otros (p.ej., medida).
- El predominio en el aprendizaje de unos determinados significados llega a interferir u obstaculizar el uso y la comprensión del resto de significados.
- La comprensión de la fracción se ve perjudicada por aquellas propuestas curriculares que priorizan el aprendizaje de ciertos significados (p.ej., parte-todo, cociente) en detrimento de otros (p. ej., medida, razón, operador).
- La valoración y el desarrollo de la comprensión de la fracción demanda que las tareas matemáticas en el aula abarquen la mayor diversidad posible de situaciones y fenómenos diferentes en los que se requiera o tenga sentido el uso de todos los significados de la fracción (Gallardo, 2008, p.p. 362-363).

LA FRACCIÓN EN LA VIDA DIARIA

Hay que tener presente que al empezar a trabajar un tema matemático es posible que los conceptos que se van a desarrollar estén vinculados a un lenguaje cotidiano, es decir, el que usamos generalmente.

En ese sentido, Freudenthal (1983) asienta que las fracciones deben ser acercadas al alumno mediante un lenguaje que él entienda. Así surge la idea de que, considerando los conocimientos que de las fracciones se tengan, el inicio para un adecuado aprendizaje se puede hacer partiendo de los términos más usuales. Por ejemplo: La mitad de, un tercio de, un cuarto de..., describen una cantidad o un valor de una magnitud por medio de otra, y son expresiones de uso cotidiano.

De una u otra forma, se percibe que el estudiante está influido por el uso que se les da a las fracciones en la vida diaria. Es por eso que en el ámbito escolar la palabra fracción forma parte de un lenguaje relativamente familiar. A pesar de eso, al oír las pláticas de los estudiantes dentro y fuera de clase se aprecia que utilizan esporádicamente pocas expresiones en las que aparecen las fracciones, por ejemplo: dos tercios, un quinto, un octavo (Clemente, 2001).

Por este motivo en el campo de aplicación de cada fracción se va reduciendo considerablemente, a excepción de un medio, que es de uso casi universal; por ejemplo: media entrada, a mitad de camino, a mitad de precio; en las recetas de cocina, fraccionamos los ingredientes; cuando vamos al supermercado y queremos adquirir algún alimento como por ejemplo: medio litro de jugo 12, un cuarto de kilo de café 14, tres cuartos de kilo de queso 34 estamos utilizando la noción de fracción; cuando están en rebaja en un almacén, todas las faldas al 50%.

METODOLOGÍA

La investigación tiene un enfoque cuantitativo de tipo descriptivo, ya que se buscó establecer la frecuencia de una respuesta correcta a cada uno de los conceptos de fracción presentados en el test con el fin de identificar en cuál de ellos los estudiantes tienen mayor dificultad para su interpretación y aplicación. Es de tipo descriptiva porque no se tiene una hipótesis explícita pero nos permitió analizar y establecer el nivel en la competencia interpretativa que tienen los estudiantes en cuanto al mismo concepto cuando es aplicado para solucionar una situación particular de la vida cotidiana, además nos permitió ordenar el resultado de las observaciones de acuerdo a las características y los procedimientos.

Para realizar la investigación se elaboró un test presentando una situación de la vida cotidiana y de acuerdo a ella se elaboraron las preguntas teniendo en cuenta los diferentes significados de fracción tal como parte-todo, cociente, operador, medida y razón, validado por dos pares académicos de la facultad de educación de la Universidad del Tolima.

En el estudio participaron 81 estudiantes de los grados 6º, 7º y 11º de la Institución Educativa Técnica Joaquín París de Ibagué (Tolima-Colombia), que equivalen

aproximadamente al 22% de la población estudiantil de los grados encuestados, y quienes fueron seleccionados aleatoriamente teniendo en cuenta los resultados en el área de matemáticas, de acuerdo a los desempeños establecidos por el Ministerio de Educación Nacional Colombiano (superior, alto, básico y bajo), con el objeto de identificar en cuál de los conceptos de fracción indicados en los estándares básicos curriculares presentan dificultad.

El contexto en el cual se aplicó el test a los estudiantes seleccionados fue el siguiente: primero (1), se reunieron en la biblioteca de la Institución sin la presencia del docente de matemáticas; segundo (2), se les dio una explicación acerca de la investigación que se estaba realizando y de la forma como fueron seleccionados; tercero (3), se les indicó que tenían dos (2) horas para contestar.

A continuación se presenta el test aplicado y en la tabla la relación entre el número total de estudiantes por curso y el número que fue seleccionado, es decir se describe la población objeto de estudio.

TEST: aplico mis conocimientos solucionando problemas

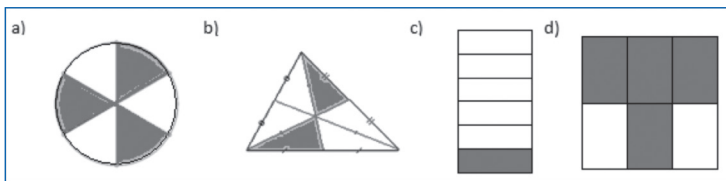
Un padre y una madre de familia ganan entre los dos \$ 2.400.000 al mes. De esa cantidad, ellos invierten la cuarta parte en mercado; de lo que queda, la quinta parte la destinan para pagar la mensualidad escolar de sus dos hijos, y con la mitad de lo restante pagan la cuota de la casa. El fin de semana deciden gastar la cuarta parte de lo queda.

Teniendo en cuenta la situación descrita, podemos afirmar que:

- 1) Si esta familia decide destinar solo 25 de sus ingresos mensuales en mercado, la cantidad de dinero que puede ahorrar al final del mes es:

a) \$540.000	b) \$144.000	c) \$432.000	d) No ahorra
--------------	--------------	--------------	--------------

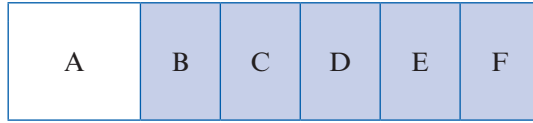
- 2) Si cada uno de los gráficos representa los ingresos mensuales de la familia, la región sombreada que corresponde a la tercera parte es:



- 3) Si los hijos estudian en colegios diferentes y uno de ellos tiene que pagar la cuarta parte de la quinta parte de lo que queda después de invertir en el mercado, esa cantidad es:

a) \$180.00	b) \$90.000	c) \$72.000	d) \$360.000
-------------	-------------	-------------	--------------

Observe el siguiente gráfico y analiza



Si las regiones A, B, C, D, E, F representan los ingresos mensuales de la familia y la región A, la parte que se gasta en mercado.

Se puede afirmar que:

- 4) Cada una de las regiones B, C, D, E, F representa lo que la familia invierte en la pensión de los hijos, esto en dinero equivale a:

a) \$360.000	b) \$720.000	c) \$180.000	d) \$540.000
--------------	--------------	--------------	--------------

- 5) Cada una de las regiones sombreadas B, C, D, E, F, comparada con la región A equivale al:

a) 50%	b) 16.67%	c) 60%	d) 30%
--------	-----------	--------	--------

- 6) Dos de las regiones sombreadas equivalen a:

a) 15 de los ingresos mensuales	b) 120 de los ingresos mensuales	c) 620 de los ingresos mensuales	d) 14 de los ingresos mensuales
---------------------------------	----------------------------------	----------------------------------	---------------------------------

Como ya se han gastado 14 del total y la quinta parte de lo que queda, es decir la región no sombreada.



Podemos afirmar que:

- 7) La región sombreada C, en pesos equivale a:

a) \$360.000	b) \$1.440.000	c) \$720.000	d) \$600.000
--------------	----------------	--------------	--------------

- 8) La región sombreada C corresponde a:

a) El dinero que queda después de pagar el mercado y la cuota de la casa	b) El dinero que queda después de pagar el colegio y la cuota de la casa	c) El dinero que ahorran al final del mes.	d) El dinero que queda después de pagar el mercado y el colegio.
--	--	--	--

- 9) Las regiones no sombreadas A y B, equivalen a:

a) 15 de los ingresos mensuales	b) 25 de los ingresos mensuales	c) 1220 de los ingresos mensuales	d) 820 de los ingresos mensuales
---------------------------------	---------------------------------	-----------------------------------	----------------------------------

- 10) Supongamos que los padres decidieran invertir la tercera parte de lo que ahorran al final del mes en la compra de un carro de \$10.000.000 pagando \$4.600.000 de cuota inicial y el resto en cuotas fijas, los meses que tardarían en cancelar la deuda son?

a) 6	b) 10	c) 12	d) 8
------	-------	-------	------

601		602		603		701		702		703		1101		1102		1103	
A	B	A	B	A	B	A	B	A	B	A	B	A	B	A	B	A	B
9	50	9	48	9	48	9	42	9	43	9	38	9	35	9	30	9	41

Nota: A Número de estudiantes que se les aplico el test. B Número de estudiantes en el curso.

Tabla 1: Descripción de la población objeto de estudio

De acuerdo al concepto de fracción, las preguntas del test se clasificaron tal como aparecen en la tabla 2.

CONCEPTO DE FRACCION	PREGUNTAS									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Parte - Todo		X				X		X	X	
Cociente			X							X
Operador	X						X			
Medidor				X						
Razón					X					

Tabla 2: Clasificación de preguntas de acuerdo al concepto de fracción

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

Después de haber aplicado el test a los estudiantes seleccionados se organizó la información en tablas teniendo en cuenta cada uno de los conceptos de fracción en los cuales se pretendía analizar la competencia interpretativa, separando los resultados de acuerdo al grado que cursaban y al número de respuestas correctas o erradas.

Los resultados obtenidos en las respuestas del test aplicado en el concepto de fracción como parte -todo se pueden observar en la tabla 3, como cociente en la tabla 4, como operador en la tabla 5, como medidor en la tabla 6 y como razón en la tabla 7.

CONCEPTO DE FRACCION	P	GRADO											
		6°				7°				11°			
		C	%	E	%	C	%	E	%	C	%	E	%
Parte – Todo	2	2	7.4	25	92.6	3		24		1		26	
	6	1	4.2	26	95.8	3		24		3		24	
	8	12	44.44	15	55.56	9		18		24		6	
	9	12	44.44	15		15		12	44.44	18		9	
Promedio		7	25.93	20	74.07	8	29.63	19	70.37	12	44.44	15	55.56

P: Numero de pregunta del test.

C: Respuestas correctas

E: Respuestas erróneas

Tabla 3: *Concepto de Fracción como Parte-Todo*

CONCEPTO DE FRACCION	P	GRADO											
		6°				7°				11°			
		C	%	E	%	C	%	E	%	C	%	E	%
Cociente	3	7		26		9		18		6		21	
	10	12		15		1		26		6		21	
Promedio		10	37.04	17	62.96	5	18.52	22	81.48	6	22.22	21	77.78

P: Numero de pregunta del test.

C: Respuestas correctas

E: Respuestas erróneas

Tabla 4: *Concepto de Fracción como Cociente*

CONCEPTO DE FRACCION	P	GRADO											
		6°				7°				11°			
		C	%	E	%	C	%	E	%	C	%	E	%
Operador	1	7		21		3		24		6		21	
	7	12		15		12		15		15		12	
TOTAL		10	37.04	17	62.96	8	29.63	19	70.37	11	40.74	16	59.26

P: Numero de pregunta del test.

C: Respuestas correctas

E: Respuestas erróneas

Tabla 5: *Concepto de Fracción como Operador*

CONCEPTO DE FRACCION	P	GRADO											
		6°				7°				11°			
		C	%	E	%	C	%	E	%	C	%	E	%
Medidor	4	15		12		9		18		12		15	
		15	55.56	12	44.44	9	33.33	18	66.67	12	44.44	15	55.56

P: Numero de pregunta del test.

C: Respuestas correctas

E: Respuestas erróneas

Tabla 6: *Concepto de Fracción como Medidor*

CONCEPTO DE FRACCION	P	GRADO											
		6°				7°				11°			
		C	%	E	%	C	%	E	%	C	%	E	%
Razón	5	10		17		6		21		15		12	
		10	37.04	17	62.96	6	22.22	21	77.78	15	55.56	12	44.44

P: Numero de pregunta del test.

C: Respuestas correctas

E: Respuestas erróneas

Tabla 7: *Concepto de Fracción como Razón*

En el concepto parte-todo, la tercera parte de los estudiantes contestó correctamente las preguntas correspondientes a este significado. Esto quiere decir que se tiene un 66.67% de la población objeto de estudio con dificultades en la competencia interpretativa de la fracción como parte –todo.

En el concepto de fracción como cociente, solo el 25.93% de los estudiantes contestó correctamente las preguntas correspondientes a este significado. Esto quiere decir que se tiene un 74.07% de la muestra seleccionada con dificultades en la competencia interpretativa de la fracción como cociente.

Solo el 35.80% de los estudiantes que se les aplicó el test, tienen claro el concepto de fracción como operador, dejando ver que el 64.20% tienen dificultad en la competencia interpretativa para esta situación.

Analizando los datos de la tabla 6 se puede decir que solamente el 44.44% de los estudiantes en nuestro estudio, aplican correctamente el concepto de fracción como medidor y el 55.56% no aplica de manera correcta este concepto en un contexto fuera de la clase, es decir tienen dificultad en la competencia interpretativa en este tema de matemáticas.

Analizando los datos de la tabla 7 se puede decir que solamente el 38.27% de los estudiantes estudiados, aplican correctamente el concepto de fracción como razón y el 61.73% tiene dificultad en la competencia interpretativa de este concepto de fracción cuando tiene que aplicarlo para resolver una situación de la vida diaria.

CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

Se presentó mayor dificultad en el concepto de la fracción como cociente, ya que solo 19 de los 81 estudiantes a los que se les aplicó el test, contestó acertadamente a las preguntas con las que se pretendía analizar el nivel de competencia interpretativa en este concepto. En ellas se ve claramente que los estudiantes no comprenden el resultado de una situación de reparto donde se busca conocer el tamaño de cada una de las partes resultantes al distribuir en partes iguales una fracción en otra.

Comparando los resultados obtenidos entre los estudiantes en el concepto de fracción como cociente, se puede decir que los estudiantes del grado 11° que están

a punto de culminar su ciclo de educación media, presentan mayor dificultad que los del grado 6° que están iniciando su educación básica secundaria.

Además, en los datos obtenidos, se observa que el concepto de fracción como medidor es en el que los estudiantes tienen menor dificultad, representado en un 44.44% de estudiantes que contestaron de manera correcta a la pregunta 4, en donde se debía medir cantidades de magnitudes que no correspondían con un múltiplo entero de la unidad de medida.

De acuerdo a la teoría del desarrollo cognitivo de Piaget, al comparar los resultados obtenidos por los estudiantes en las diferentes interpretaciones del concepto de fracción, no existe diferencia cognitiva en el desarrollo del pensamiento operatorio de los estudiantes de grado 11 con respecto a los de grado 6, destacándose que los de grado 11 aún se encuentran en el estadio de las operaciones concretas.

Los resultados indican que el aprendizaje de los números fraccionarios en matemáticas, mostrado por los estudiantes, no es muy significativo, por tal motivo en la enseñanza de las matemáticas se debería enfatizar tanto en el aspecto conceptual y procedimental como en el establecimiento de conexiones que dicho conocimiento tiene con la información relevante para resolver un problema de la vida cotidiana.

En esta investigación se puede decir que la competencia interpretativa en matemáticas en cuanto al concepto de fracción que tienen los estudiantes no la fundamentaron en la comprensión de la información suministrada, buscando determinar su sentido y significación a partir del análisis de un texto. También se puede establecer que los estudiantes tienen dificultad en aplicar la fracción en un contexto diferente al de la clase, en este caso, en una situación de la vida cotidiana. Por tanto, las fracciones deberían ser acercadas al estudiante mediante un lenguaje que él entienda, en el momento que se aborda este tema en clase. Esto implica que para lograr una comprensión adecuada de los conceptos relacionados con las fracciones, es necesario proporcionar a los estudiantes experiencias con mayor número de interpretaciones y representaciones posibles.

Se debe considerar que la mecanización de procedimientos por encima de la comprensión de conceptos conlleva a desvirtuar los aspectos matemáticos que se deben trabajar con los estudiantes en los diferentes significados de fracción, para lograr que el estudiante desarrolle la competencia interpretativa. Esta mecanización se convierte en un obstáculo, puesto que impide a los docentes asumir nuevas perspectivas de enseñanza, donde la construcción de lo conceptual y lo significativo sea el propósito de la matemática en la educación básica y media.

Los estándares Básicos en matemáticas dados por el Ministerio de Educación Nacional de Colombia (2008), al terminar quinto grado el estudiante en el desarrollo del pensamiento numérico y sistemas numéricos debe interpretar las fracciones en diferentes contextos: situaciones de medición, relaciones parte todo, cociente, razones y proporciones. De acuerdo a los resultados obtenidos en la prueba aplicada no se evidencia el conocimiento que se debe adquirir en el tema de fracciones para aplicarlo en otros contextos. Es preocupante la situación de los estudiantes de grado undécimo en el tema de estudio ya que no se ve mucha dife-

rencia con respecto a los estudiantes de grado sexto y séptimo en el dominio y desarrollo de la competencia interpretativa.

Como posibles causas de este fenómeno que se presenta en el concepto de fracción en los estudiantes encuestados es: falta de capacitación por parte del Ministerio de Educación Nacional de Colombia a los docente que orientan esta área tan importante del conocimiento; el sistema de evaluación que tiene la educación en Colombia desde el año 2002 inicialmente con el decreto 0230 y desde el 2009 el decreto 1290.

Como recomendaciones para mejorar el desarrollo de la competencia interpretativa en el pensamiento matemático se sugiere incrementar la capacitación de los docentes en conocimientos de didáctica de las matemáticas, donde se muestre la relevancia de la conexión de las matemáticas con el entorno de los estudiantes, específicamente en el tema de fracciones y la solución de problemas de la vida cotidiana.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Behr, M., Harel, G., Post, T. y Lesh, R. (1992). Rational number, ratio and proportion. En D. A.Grouws (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 233-296). New York: MacMillan Publishing Company.
- Centeno, G. y Jiménez, N. (2002). *Pensamiento Matemático*. Bogotá D.C.: Libros & Libros.
- Clarke, D. M. y Sukenik, M. (2006). *Assessing fraction understanding using task-based interviews*. En J. Novotná, H. Moraová, M. Krátká y N. Stehlíková (Eds.), *Proceedings 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, (Vol. 2, pp. 337-344). Praga: PME.
- Clemente G. D., Ayala G. F., Favila J. J. y López E.E. (2001). Las fracciones: Una propuesta Constructivista para su enseñanza-aprendizaje. *Revista: Correo del Maestro*, 5 (56), 8-19.
- Colombia, Ministerio de Educación Nacional (2008). *Estándares Básicos en Competencias en Matemáticas*. Recuperado de http://www.colombiaaprende.edu.co/html/mediateca/1607/articles-167733_archivo.pdf
- Dos Santos, A. (2005). *O conceito de fração em seus diferentes significados: Um estudo diagnóstico junto a professores que atuam no ensino fundamental* (Tesis de Maestría). Sao Paulo, Brasil: Pontificia Universidad Católica de Sao Paulo.
- Escolano, R. y Gairín, J. M. (2005). Modelos de medida para la enseñanza de números racionales en educación primaria. *UNIÓN Revista Latinoamericana de Educación Matemática* 1, 17-35.
- Freudenthal, H. (1983). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*. Dordrecht: Reidel. (Traducción de Luis Puig). *Publicado en Fenomenología didáctica de las estructuras matemáticas*. Textos seleccionados. México: CINVESTAV, 2001.

- Gairín, J. M. (1998). *Sistemas de representación de números racionales positivos. Un estudio con maestros en formación* (Tesis de doctorado no publicada). Universidad de Zaragoza, España.
- Gairín, J. M., Sancho, J. (2002). *Números y algoritmos*. Madrid: Síntesis.
- Gallardo, J., González, J.L. y Quispe, W. (2008). Interpretando la comprensión matemática en escenarios básicos de valoración. Un estudio sobre las interferencias en el uso de los significados de la fracción. *Revista: Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 2 (3), 362-363.
- Hernández, C.A., Rocha, A. y Verano, L. (1998). *Exámenes de estado: Una propuesta de evaluación por competencias*. Bogotá D.C.: ICFES.
- Kieren, T. E. (1976). On the Mathematical, Cognitive and Instructional Foundations of Rational Numbers. En R. A. Lesh (Ed.), *Number and Measurement: Papers from a Research Workshop* (pp. 101-144). Columbus, OH: ERIC/SMEAC.
- Kieren, T. (1988). Personal Knowledge of rational numbers: Its intuitive and formal development. En Hiebert, J. y Behr, M. J. (Eds.) *Number concepts and operations in the middle grades* (pp. 162-181). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Kieren, T. (1993). *Rational and fractional numbers: From quotient fields to recursive understanding*. En T. P. Carpenter, E. Fennema y T. A. Romberg (Eds.), *Rational numbers: An integration of research* (pp. 49-84). New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.
- Lamon, S. J. (2001). Presenting and representing: from fractions to rational numbers. En A. Couco y F. R. Curcio (Eds.), *The roles of representation on school mathematics* (pp. 146-165). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Levy-Leboyer, C. (2000). *Gestión de las competencias*. Barcelona: Gestión.
- Llinares, S. y Sánchez, M. V. (1988). *Fracciones: La relación parte todo* (Primera ed.). Madrid: Editorial Síntesis.
- Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico (OCDE) (2005a). *The PISA 2003 Assessment Framework. Mathematics, Reading, Science and Problem Solving Knowledge and Skills*. París, OCDE.
- Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico (OCDE) (2005b). *Informe PISA 2003. Aprender para el mundo de mañana*. Madrid, Santillana.
- Post, T., Cramer, K., Behr, M., Lesh, R. y Harel, G. (1993). Curriculum implications of research on the learning, teaching and assessing of rational number concepts. En T. P. Carpenter, E. Fennema. y T. A. Romberg (Eds.), *Rational numbers: An integration of research* (pp. 327-361). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates
- Puig, L. (1997). *Análisis Fenomenológico*. En L. Rico (Coord.), *La Educación Matemática en la Enseñanza Secundaria* (pp. 61-94). Barcelona, España: Horsori.
- Rico, L (2005c). *La enseñanza de las Matemáticas y el Informe PISA. Actas VI Seminario del Primavera*. Madrid: Fundación Santillana.

- Rico, L (2006). Marco teórico de evaluación en PISA sobre matemáticas y resolución de problemas. *Revista de educación*, extraordinario 2006, 275-294.
- Rico, L. y Lupiañez, J.L. (2008). *Competencias matemáticas desde una perspectiva curricular*. Madrid: Alianza Editorial.
- Tobón, S. (2004). *Formación Basada en Competencias*. Bogotá : Ecoes, Ediciones.
- Valdemoros, M. (2004). Lenguaje, fracciones y reparto. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 7 (3), 235-256.
- Vargas, F. (1999a). *La formación de competencias: Una opción para mejorar la capacitación*. Bogotá: ANDI.
- Vargas, C.E. (1999b). *Las cuarenta preguntas más frecuentes sobre competencia laboral*. Montevideo: Cinterfor/OIT.
- Vasco, C.E. (2003). *Objetivos específicos, indicadores de logros y competencias ¿y ahora estándares?* Bogotá: Educación y Cultura.

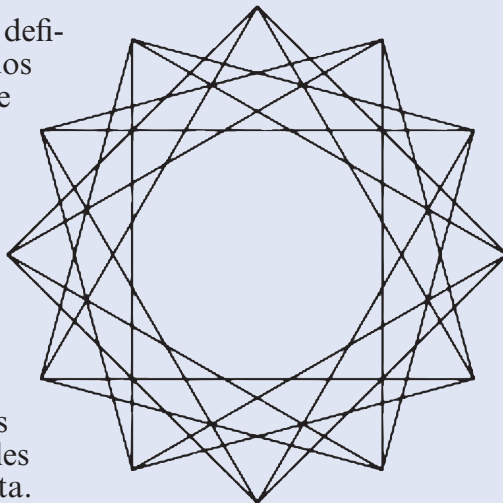
NOTES

1. La formal, constituida por los sistemas matemáticos y sus justificaciones la cual se expresa a través del lenguaje propio de las matemáticas en su diversos registros de representación.
2. La práctica, que expresa condiciones sociales de relación de la persona con su entorno y contribuye a mejorar su calidad de vida y su desempeño como ciudadano.
3. La Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico (OCDE), es una organización de cooperación internacional, compuesta por 34 estados, cuyo objetivo es coordinar sus políticas económicas y sociales. Fue fundada en 1960 y su sede central se encuentra en el Château de la Muette en la ciudad de Paris, Francia.
4. La noción de competencia es central en el proyecto PISA y hace referencia al objeto de la evaluación. Esta noción se utiliza en distintos momentos, con distintos usos e interpretaciones, y responden al modelo funcional de las matemáticas escolares.

CONVOCATORIA DE ARTICULOS/CALL FOR PAPERS

La revista Epsilon. Revista de Educación Matemática abre su convocatoria a propuestas de artículos para el Dossier central de un próximo número sobre *Geometría*.

Los textos en versión definitiva deberán ser enviados antes del 30 de junio de 2012. Los artículos serán aprobados de forma anónima por el Consejo de Redacción y seleccionados para este Dossier (en caso de exceso de materiales se editarán en siguientes números), tal y como recomiendan los índices de prestigio y bases de datos en ciencias sociales a los que pertenece la revista.



Todos los artículos tienen que cumplir estrictamente las normas para colaboraciones publicadas en la versión impresa de la revista.

Los artículos deberán tener relación con las secciones de la revista: investigación, ideas para el aula y experiencias. Las notas históricas no se tomarán en consideración.

IMPORTANCIA DEL LIBRO DE TEXTO EN LA PRODUCCIÓN DE CONOCIMIENTOS

Mónica Caserio

Marta Guzmán

Ana Maria Vozzi

Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura

Universidad Nacional de Rosario, Argentina

amvozzi@fceia.unr.edu.ar

Resumen: *En el trabajo que se presenta delineamos el Proyecto “El libro de texto factor coadyuvante en la producción de los conocimientos”. Mostramos algunas experiencias realizadas en los cursos donde desempeñamos nuestra tarea docente. A partir de análisis y reflexiones sobre las dificultades que presentan los alumnos en el aprendizaje de la matemática, entendemos que el “texto” es un elemento positivo para ello y para la formación del futuro profesional. Al respecto proponemos generar un debate en nuestra comunidad académica, que permita, entre otras cosas, aportar inquietudes que enriquezcan el trabajo áulico, la actividad docente, con el objetivo de mejorar las condiciones de aprendizaje de nuestros alumnos.*

Palabras Clave: *Aprendizaje; Lectura; Comprensión; Libro de Texto*

INTRODUCCIÓN

Matemática es una asignatura que se estudia en todos los países del mundo y en todos los niveles educativos. Supone un pilar básico de la enseñanza en todos ellos. La causa fundamental de esa presencia universal se encuentra en que las matemáticas constituyen un idioma poderoso, conciso y sin ambigüedades. La utilización de ese idioma requiere de unos conocimientos mínimos para poder desarrollarse, pero sobre todo se necesitan situaciones que inviten a comunicarse por medio de ese idioma, a esforzarse en lograrlo, y, desde luego, de unas técnicas para hacerlo.

El aprendizaje de matemática en carreras de ingeniería, involucra elementos múltiples y complejos, razón por la que creemos pertinente profundizar en algunos factores que rescatamos de numerosas investigaciones y que nos llevan a plantear:

- ¿Cómo acortar la distancia entre los conocimientos previos y los mínimos necesarios para abordar la carrera?
- ¿Cómo revertir un status quo adquirido en las anteriores etapas de su formación?
- ¿Cómo ayudar a los alumnos para que asuman el compromiso de un aprendizaje autónomo?

Por lo tanto es necesario abocarnos al análisis de los elementos que pueden incidir favorablemente en la actitud de los estudiantes de ingeniería hacia el estudio de las asignaturas de matemática y de manera positiva en la formación profesional del Ingeniero.

En este trabajo hacemos referencia a constataciones y posterior análisis y reflexiones que aportan al avance del Proyecto de Investigación “El libro de texto factor coadyuvante en la producción de los conocimientos” que continúa la línea del Proyecto “Dificultades en la Enseñanza de la Matemática Básica en Carreras de Ingeniería” que desarrollamos durante en el período 2006/2009, ambos radicados en la unidad Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura (FCEIA) dependiente de la Universidad Nacional de Rosario (UNR), Argentina.

LAS LINEAS RECTORAS DEL TRABAJO

En las conclusiones del Proyecto “Dificultades en la Enseñanza de la Matemática Básica en Carreras de Ingeniería” señalamos como un factor de importancia en la enseñanza-aprendizaje de matemática en carreras de ingeniería, el vínculo entre Estudiantes-Libro de Texto-Docentes. Entonces, valorar la utilización del libro de texto, se convirtió en un problema de interés pedagógico.

Es así que surgió el Proyecto “El libro de texto factor coadyuvante en la producción de los conocimientos”, el cual partió del reconocimiento de la necesidad de ampliar nuestros conocimientos acerca de los factores cognitivos, afectivos, actitudinales y motivacionales que inciden en el desempeño de los alumnos y por lo tanto nos interesa indagar respecto del texto como un factor que posibilite al estudiante “aprender a aprender”, lo que nos obliga a:

- Asumir, como docentes, la responsabilidad de apoyar el tránsito de los estudiantes del nivel Medio-Superior al Básico-Profesional.
- Innovar y evaluar los distintos proyectos con la intención de mejorar nuestro desempeño profesional.
- Promover instancias de encuentro y difusión, en las que podamos poner en común experiencias, proyectos y expectativas.

Además, se propuso y se generaron un debate en la comunidad académica, que permitiera, entre otras cosas, aportar inquietudes y reflexiones que enriquecieran

la actividad docente, el trabajo áulico, de modo que el uso del libro de texto en la clase se convierta en un factor coadyuvante en la apropiación de los conocimientos de nuestros alumnos.

A partir de esta propuesta surgieron algunos interrogantes que operaron como hipótesis de trabajo, siendo la búsqueda de respuestas el objetivo del proyecto:

- ¿De qué forma se utiliza el libro de texto en la clase?
- ¿Qué condiciones y situaciones didácticas deberían cumplirse para la formación de lectores autónomos?

Respecto al Profesor:

- ¿Conoce o advierte la complejidad de los procesos involucrados en la lectura de un texto académico superior?
- ¿Es consciente del uso de estrategias cognitivas en su propio proceso como lector?
- ¿Reconoce en los estudiantes la construcción de sentido en el abordaje de un texto escrito?

Es en este contexto que tiene importancia relevante mejorar el vínculo Estudiante –Libro de Texto– Docente (E-LT-D) a fin de facilitar el desarrollo de competencias de manera explícita durante el proceso de formación, lo cual supone revisar las estrategias de enseñanzas y aprendizajes de manera de garantizar que los estudiantes puedan realizar en forma autónoma, actividades que le permitan avanzar en su desarrollo.

CONCEPTOS DIRECTORES

Objetivos de la acción

Siendo que las ciencias en general y la matemática en particular se expresan y se difunden a través de los textos, es importante desarrollar la comprensión lectora –entendida como un proceso transaccional entre el texto y el lector– que involucra operaciones cognitivas y un complejo de conocimientos y que además supone un conjunto de saberes (discursivos, enciclopédicos, lingüísticos, semióticos) y un saber-hacer (procedimientos de diferente nivel de complejidad).

Así mismo existe consenso en que el ingeniero no solo debe saber, sino también saber hacer en el contexto del ejercicio de su profesión. El saber hacer no surge de la mera adquisición de conocimientos sino que es el resultado de la puesta en funciones de una compleja estructura de conocimientos, habilidades, destrezas, etc., que requiere ser reconocida expresamente en el proceso de aprendizaje para que la propuesta pedagógica incluya las actividades que permitan su desarrollo.

En la búsqueda de respuestas a los interrogantes antes señalados, creemos primordial desarrollar acciones que susciten en los estudiantes, la apropiación de

nuevas prácticas lingüísticas y discursivas (o reconstruyan las que poseen para adecuarlas y emplearlas en nuevos contenidos disciplinares) promoviendo la incorporación de aquellas habilidades específicas, que les permitan avanzar en su vida académica para encontrar nuevas propuestas que lo acompañen en el proceso de asumir un lugar autónomo y crítico, tanto en su futura profesión como en la sociedad.

En síntesis, el eje del proyecto recae sobre la investigación de alternativas didácticas con la intención de:

- 1) Acortar distancias entre niveles educativos
- 2) Disminuir el número de alumnos recursantes
- 3) Introducir al estudiante universitario en el autoper aprendizaje
- 4) Comprometer al estudiante en su formación, incentivando su independencia y creatividad
- 5) Comprometer a los docentes en el abordaje e implementación de alternativas didácticas más eficaces

Para el desarrollo de ésta investigación hemos tomado de la bibliografía utilizada las siguientes definiciones sobre los conceptos directores:

- **Aprendizaje:** proceso de adquisición de conocimientos, habilidades, valores y actitudes, posibilitado mediante el estudio, la enseñanza o la experiencia
- **Lectura:** es el proceso de la recuperación y comprensión de algún tipo de información o ideas almacenadas en un soporte y transmitidas mediante algún tipo de código. En definitiva, leer, más que un simple acto mecánico de descifrado de signos gráficos, es por encima de todo un acto de razonamiento, ya que de lo que se trata es de saber guiar una serie de razonamientos hacia la construcción de una interpretación del mensaje escrito a partir de la información que proporcionen el texto y los conocimientos del lector, y, a la vez, iniciar otra serie de razonamientos para controlar el progreso de esa interpretación de tal forma que se puedan detectar las posibles incomprensiones producidas durante la lectura.
- **Comprensión:** es el proceso de elaborar el significado por la vía de aprender las ideas relevantes de un texto y relacionarlas con las ideas que ya tienen un significado. Es el proceso a través del cual el lector “interactúa” con el texto. Sin importar la longitud o brevedad del párrafo. La lectura es un proceso de interacción entre el pensamiento y el lenguaje, el lector necesita reconocer las letras, las palabras, las frases, sin embargo cuando se lee no siempre se logra comprender el mensaje que encierra el texto, es posible incluso que se comprenda mal. Como habilidad intelectual, comprender implica captar los significados que otros han transmitido mediante sonidos, imágenes, colores y movimientos. La comprensión lectora es un proceso más complejo que identificar palabras y significados, esta es la diferencia entre lectura y comprensión, la cual es un proceso de creación mental por el que, partiendo de ciertos datos

aportados por un emisor, el receptor crea una imagen del mensaje que se le quiere transmitir.

- **Texto:** es una composición de signos codificado en un sistema de escritura (como un alfabeto) que forma una unidad de sentido. Su tamaño puede ser variable. También es texto una composición de caracteres imprimibles (con grafema) generados por un algoritmo de cifrado que, aunque no tienen sentido para cualquier persona, si puede ser descifrado por su destinatario original. En otras palabras un texto es un entramado de signos con una intención comunicativa que adquiere sentido en determinado contexto.

Esta elección de las definiciones de los conceptos antes citados se sostiene también en las reflexiones propias respecto a nuestra tarea como docentes, ya que es nuestra propia práctica la que nos retroalimenta.

Metodología del proyecto

Pretende dar cuenta de la problemática resultante de la utilización del libro de texto en las clases de matemática en los primeros años de las carreras de ingeniería. El contexto investigativo está limitado a docentes de la FCEIA y de la Universidad Tecnológica Nacional (UTN), Facultad Regional Rosario (FRO). A través de entrevistas y encuestas, indagando sobre las formas de utilización y repercusiones sobre el aprendizaje con libros de textos. En esta instancia, el área que nos compete es la utilización del libro de texto en matemática en los primeros años de las carreras de ingeniería. El desarrollo de la investigación no modifica el funcionamiento habitual de las cátedras en cuanto a carga horaria y distribución semanal de sus actividades.

La población, en estudio, está constituida por los alumnos de primer año de Carreras de Ingeniería y del último año del nivel medio que asisten al curso de ingreso de FCEIA así como por docentes del área matemática que dictan sus materias en esos cursos.

El marco metodológico elegido es el de una investigación activa, por entender que ella se dirige a su aplicación inmediata y no al desarrollo de teorías. Su propósito es el de mejorar la práctica educativa y al mismo tiempo perfeccionar a quienes han de mejorar sus métodos. Apela a los docentes que tienen problemas por resolver y le corresponde comprometer e implicar al docente proporcionándole un camino para el progreso profesional y la mejora del plan de estudios. Por ese sentido, nos ubicamos tanto a nivel didáctico como a nivel de investigación, en el cuadro de la Ingeniería Didáctica, puesto que consideramos que en el contexto de un paradigma cualitativo el “saber a enseñar” y el “caso a investigar” son susceptibles de ser tratados a través de ella. Por otra parte esta posición es compatible con la aproximación cognitiva desarrollada alrededor de los trabajos de Vergnaud (Teoría de los campos conceptuales) y a la aproximación didáctica a través de la “teoría de situaciones” de Brousseau y los obstáculos que clasifica. La metodología de la Ingeniería didáctica se caracteriza, en comparación con otros tipos de investigación basados en la experimentación en clase, por el registro en el cual se ubica y por las formas de validación a las que está asociada. En general,

las investigaciones que recurren a la experimentación en clase emplean un enfoque comparativo con evaluación externa, basada en la comparación estadística del rendimiento de los grupos experimentales y grupos de control, mientras que la Ingeniería Didáctica, en la que basamos nuestras experiencias, se ubica en el registro de los estudios de caso y cuya validación es interna, como resultado de la confrontación entre el análisis a priori y a posteriori.

El proceso de aplicación de la Ingeniería Didáctica sigue cuatro fases o momentos descritos por Artigue (1995) como:

- Los análisis preliminares
- La concepción y el análisis a priori.
- Experimentación.
- Análisis a posteriori.

1. En la primera fase se ubica:

- El análisis de la enseñanza con la utilización del libro de texto en el aula.
- El análisis de las concepciones y la relación con el texto
- Las restricciones donde se va a situar la realización didáctica.

2. En la segunda fase:

- Se centra la atención en la descripción de las características de la población a estudiar y de las situaciones áulicas que se diseñarán para ser ejecutadas.
- Se analizan las posibilidades de acción del estudiante, una vez puesto en práctica el funcionamiento de la situación elaborada.
- Se prevén los comportamientos esperados y se tratará de probar, en la próxima fase, que ellos son el resultado de la puesta en acción del conocimiento aprendido y las habilidades adquiridas como resultado del aprendizaje, objeto de la situación.

3. Es la instancia de la puesta en acción de la situación elaborada.

4. El análisis a posteriori está basado en los datos provistos por la experimentación, las observaciones y las producciones de los estudiantes. Podrán complementarse estos datos, con cuestionarios, encuestas o entrevistas individuales o grupales.

Finalmente, la confrontación entre los análisis a priori y a posteriori se constituye en la validación de la investigación.

Este proceso de validación es interna y no recurre, en general a evaluaciones de tipo estadístico inferencial. A partir de la confrontación entre los análisis a priori y a posteriori se elaborarán conclusiones. Estas serán emergentes para mejorar tanto el proceso de articulación entre docentes de escuela media y universidad,

generando espacios para un trabajo de enriquecimiento mutuo en el logro de objetivos comunes, así como el desarrollo en nuestros estudiantes de los primeros años de las carreras de ingeniería, de aptitudes que les faciliten el tránsito en sus estudios y en su futura profesión.

Aportes al avance de la investigación

En lo que sigue nos referimos a experiencias relatadas en diferentes congresos de educación matemática, que remiten al proyecto.

1. Una cuestión a debate: El texto de Matemática, uso y abuso

A partir de reuniones con docentes que se desempeñan en el primer año de las carreras de ingeniería en el área de matemática indagamos y exponemos algunas reflexiones que refieren a la utilización de un texto en el aula, las formas de utilización y las repercusiones sobre el aprendizaje de nuestros alumnos.

En el análisis del trabajo áulico con la utilización del libro de texto en el aula nos preguntamos:

- ¿La forma en que utilizamos un texto puede convertirlo en un facilitador del aprendizaje o en un obstáculo?
- ¿Los docentes, tomamos en cuenta este factor cuando utilizamos un texto en el desarrollo de una asignatura?

En el trabajo de clase incorporamos la utilización del libro de texto como elemento de organización y continuidad de la tarea, con el fin de fomentar la internalización del hábito de lectura en los alumnos. Para implementar ésta modalidad realizamos reuniones previas con los docentes de la asignatura, en las cuales se puso de manifiesto la visión de numerosos profesores del área sobre el vínculo que perciben entre los estudiantes y los textos:

- “...los alumnos saben leer, pero leen poco”;
- “... no comprenden lo que leen”;
- “...los alumnos deberían llegar al nivel superior sabiendo estudiar y escribir mejor”;
- “los alumnos tienen dificultad para razonar sobre lo que leen”;
- “...están acostumbrados a memorizar el texto”;
- “falta de hábito de lectura”.

En esas expresiones subyace cierto supuesto acerca de que las destrezas del alumno-lector formarían parte de un proceso cerrado y acabado en los niveles de escolarización previos.

Es entonces que los interrogantes con relevancia para el debate son:

- ¿el profesor conoce o advierte la complejidad de los procesos involucrados en la lectura de un texto académico superior?
- ¿es consciente del uso de estrategias cognitivas en su propio proceso como lector?

Sabemos que el saber científico, el saber sabio, según Chevalard (1997), debe sufrir adaptaciones y restricciones para ser transformado en un “saber a enseñar”, que no se pueden considerar sólo como una simplificación del saber científico sino, ajustes efectuados sobre él en el marco del contrato didáctico establecido, como señala el autor: “Transposición didáctica es el pasaje de un contenido de saber preciso a una versión didáctica de este objeto de saber”.

Entre las adaptaciones y restricciones referidas, se encuentra la selección de materiales, textos y contenidos que se enseñan, así como la impronta que el docente pone en los elementos que selecciona, hecho que origina una nueva currícula que es la que se transmite.

Es hoy incuestionable la poderosa influencia del texto en el trabajo áulico, tanto para los profesores como para los alumnos, constituyéndose como el referente exclusivo del saber científico (Perales y Jiménez, 2002). En la enseñanza de las ciencias, en todos los niveles educativos, el libro de texto es el material curricular más utilizado, según Otero (1997; p.15-22): “El libro de texto es una de las herramientas de enseñanza y aprendizaje más extendido”.

Si bien uno de los pilares básicos en los que se sustenta la acción docente en cualquier nivel educativo es el libro de texto junto con la manera en que se lo utiliza, cobra importancia entonces la siguiente cuestión: ¿de qué forma utilizamos el libro de texto en la clase?

Al respecto, pudimos notar, durante los encuentros con los docentes, que son pocos quienes relacionan en la clase, frente a los alumnos las diferencias y/o similitudes entre lo desarrollado por él y lo escrito en el libro.

Mostramos en el debate que en las instancias de evaluaciones, notamos que el alumno, en numerosas ocasiones, repite lo que leyó en el texto, no resuelve con las herramientas dadas por el docente, y otras veces hacen una “mezcla explosiva” entre lo que leyeron del texto y las explicaciones dadas por el docente.

Advertimos que un gran número de estudiantes no compatibiliza los discursos sino que es como si los consideraran contrapuestos. Las dificultades de los estudiantes universitarios para entender lo que leen se deben a que se enfrentan por primera vez con textos que no están dirigidos a ellos sino a los académicos. O bien, si están dirigidos a ellos, no se desarrolla en el aula, bien por rasgos didácticos como por factores de tiempo, todo lo que contienen (ya que es inevitable que

los textos tengan una “figura”, que destaca y desenvuelve algunos conceptos, y un “fondo” de nociones secundarias).

Observamos también que en los alumnos que se presentan a rendir la materia inmediatamente terminado el cursado, tiene mayor influencia el discurso del docente, mientras que en aquellos que lo hacen posteriormente, prevalece el discurso del libro.

En los encuentros de docentes, cuando discutimos sobre el desarrollo de los distintos temas, surgieron algunos comentarios, entre los cuales podemos citar:

[...] en éste libro no me gusta como desarrolla tal tema, creo que es muy complicado para que mis alumnos lo entiendan, yo lo reformulo de una manera más sencilla [...].

[...] En la unidad tal, no estoy de acuerdo con el orden que establece el libro, yo lo altero considerablemente, porque así es más claro para los alumnos [...]

[...] Los ejemplos que presenta no me parecen útiles para el mejor aprendizaje, yo los cambio por otros más interesantes [...]

En consecuencia con estas posturas aparecen algunos interrogantes que se formulan los alumnos. En las consultas y entrevistas con ellos, recogemos opiniones tales como:

[...] Tengo que aprenderlo como en la clase o cómo en el libro? [...]

[...] Los ejercicios del examen se parecen a los del libro o a los de la clase? [...]

[...] Las demostraciones de los teoremas, cómo las hace el libro o cómo las hizo el profesor? [...]

[...] Hay que estudiar los teoremas del libro o los de clase? [...]

El hecho de utilizar el libro de texto en el aula implica una serie de cambios en el formato tradicional de la clase, con el consiguiente debate sobre las ventajas y desventajas de ésta práctica.

Entre las desventajas, mencionamos:

- Fomentan la actitud pasiva de los alumnos, ya que impiden que participen tanto en el proceso de aprendizaje como en la determinación de los contenidos.
- No facilitan el contraste entre la realidad y las enseñanzas escolares.-No respetan la forma ni el ritmo de aprendizaje de los alumnos.
- Fomentan unas estrategias didácticas basadas primordialmente en aprendizajes por memorización mecánica.
- La mayoría de los libros trata los contenidos de forma unidireccional. Están mediados por una infinidad de intereses.

- Con frecuencia las opciones que se postulan se transmiten de forma dogmática, etc.

Entre las ventajas:

- El texto escrito ejerce un papel muy importante siempre que no se quede en una mera lectura y memorización.
- Los materiales para los conocimientos procedimentales ofrecen gran cantidad de ejercicios concretos.
- La reiteración y la convenientemente secuenciación, promueven la relación de conceptos.
- Dan lugar de forma progresiva a la adquisición de los requisitos previos necesarios para su completo dominio.

Sin entrar en la discusión respecto de la calidad de tal o cual texto, pensamos que es la forma en la que se lo utiliza la que se constituye en una cuestión pertinente en esta investigación.

Según Basil Bernstein (1993-p.63) “los conocimientos son transformados en contenidos, materias, textos”, sostiene que:

[...] el mensaje pedagógico es no solo el producto de un **recorte**, sino también la creación de un nuevo producto cultural. El contenido educativo no es un fragmento del discurso científico, es algo esencialmente diferente, y poco o nada tiene que ver con las teorías científicas, ya que al pasar por un proceso selectivo son *descontextualizados, modificados y simplificados para su transmisión en las aulas.*

Aunque el currículo fija, organiza y ordena el contenido a enseñar, los libros de textos seleccionados para una asignatura son una referencia muy fuerte, tanto para los docentes, como para los alumnos. Marcan una gran influencia en el contenido enseñado por los docentes y consecuentemente en el estudiante.

Entendemos también que los libros de texto de matemática deberían representar una contribución en el aprendizaje de los estudiantes, sin embargo, observamos que éstos tropiezan con serios obstáculos cuando se enfrentan con ellos.

Según Sánchez Miguel, E.,1997, las dificultades que, para el estudiante, presentan los textos pueden agruparse en torno a cuatro dimensiones:

- A) Presuponen un conocimiento previo sobre la temática que en general el aprendiz no posee.
- B) Requieren por parte del aprendiz una contribución excesiva para garantizar la coherencia.
- C) Carecen de metas claras y de un plan para alcanzarlas.

- D)** Están redactados de tal manera que resultan opacos respecto a cómo unir unas ideas con otras, cómo diferenciar su grado de importancia y cómo articularlas entre sí.

En relación con las prácticas de lectura en el ámbito universitario Carlino (2002) fundamenta la complejidad y la fuerza del concepto, *alfabetización académica*, al poner de manifiesto que los modos de leer y escribir son específicos de cada ámbito: "Advierte contra la tendencia a considerar que la alfabetización es una habilidad básica, que se logra de una vez y para siempre". Cuestiona la idea de que aprender a interpretar lenguaje escrito es un asunto concluido al ingresar en la educación superior (Carlino, 2002, p.2).

2. Que leen nuestros alumnos en el texto de matemática

Los docentes del nivel educativo superior atribuimos generalmente los fracasos de los estudiantes en el desempeño universitario, a sus prácticas previas:

[...] en la identificación de dificultades, fundamentalmente las que se refieren a habilidades intelectuales, aparecen enunciadas y no siempre percibidas como posibles consecuencias de la interacción áulica. En general se observa una tendencia a atribuir a los alumnos sus éxitos o fracasos, o a buscar causas externas que expliquen los bajos rendimientos. Esto es un indicador de la dificultad de advertir la pertinencia de las variables pedagógicas en las instancias de formación universitaria, al menos en cuanto a su incidencia en las potenciales dificultades en la apropiación de conocimientos en el nivel universitario (Baquero y otros, 1996, p. 110)

Entendemos que las estrategias de trabajo del alumno en la Universidad son construidas durante el paso por el sistema y que de su construcción depende en gran medida el éxito o el fracaso académico. La generación de estrategias y procedimientos de trabajo académico tienen en este sentido un rol preponderante relacionado con lo social, lo organizacional y lo cognitivo; no se enseñan específicamente pues se construyen durante el proceso de inserción y se mejoran y/o modifican en el transcurso de la vida de las personas en la organización, pero de su conocimiento y dominio depende principalmente el éxito en el aprendizaje "oficial" explicitado en objetivos y dominios curriculares y evaluados a través de mecanismos diseñados a tal efecto".

La responsabilidad en la elaboración de las estrategias de trabajo del ámbito universitario, en este caso en la construcción de sentido en la práctica de lectura es de nosotros, los docente, de otra manera ¿quiénes podrán asumir este compromiso?

Lerner (2002) plantea **dos condiciones** básicas para que los alumnos puedan ejercer como lectores autónomos en el aula:

- Poder operar sobre la relación tiempo-saber, la idea es que el alumno conociendo los propósitos hacia los cuales se orientan las actividades, pueda anticipar lo que va a suceder.
- Construir y conservar la **memoria de la clase**, que le permita registrar, recuperar lo aprendido y relacionarlo con lo que se está aprendiendo.

Por lo tanto, creemos que si tomamos la decisión de enseñar a nuestros estudiantes a leer, escribir y estudiar en la disciplina que nos compete, habremos de planificar actividades que le den sentido a tales prácticas de lectura y escritura.

En esta ocasión intentamos conocer las interpretaciones que realizan nuestros alumnos respecto de algunos conceptos inherentes al álgebra lineal, de modo que el hecho de conocerlas nos brinde la oportunidad de diseñar estrategias didácticas que contribuyan, entre otras cosas, a colaborar con ellos en el proceso de formarse como lectores autónomos.

Para ello, elaboramos un cuestionario para que fuera respondido por alumnos de la asignatura Álgebra II de las carreras de ingeniería de la FCEIA-UNR, donde se presentaba un párrafo extraído del texto y se ofrecían opciones sobre su interpretación. Es dable aclarar que el texto utilizado para la extracción de los párrafos es el que usa la cátedra en la clase y por lo tanto es el que mayoritariamente utilizan nuestros alumnos

CUESTIONARIO

Respondieron 126 alumnos

1) El texto enuncia (Pag. 21) : “primero se separan las variables en **delanteras** y **libres**. Las variables delanteras son las que corresponden a posiciones pivote. Las variables restantes, si las hay, son libres”

Se refiere a:

- a) las incógnitas de un SEL
- b) los valores de los coeficientes de un SEL
- c) la matriz ampliada de un SEL
- d) que el SEL tiene infinitas soluciones siempre
- e) Ninguna de estas opciones.

2) En el texto (Pag. 29) “Demuestre que si el tamaño de una matriz es $m \times n$, la cantidad de columnas pivote en su forma escalonada es menor o igual a m y menor o igual a n ”

Significa que:

- la matriz tiene el mismo número de columnas que de renglones

- el n° de columnas pivote es menor o igual al número de renglones
- el n° de columnas pivote es mayor o igual al número de renglones
- el SEL, cuya matriz es la referida siempre tiene variables libres
- el SEL, cuya matriz es la referida siempre tiene solución única
- Ninguna de estas opciones.

3) En el texto (Pag. 70): “Sea A una matriz de $m \times n$ y el sistema $[A: b]$ es consistente... Todo vector $b \in \mathfrak{R}^m$ es una combinación lineal de las columnas de A”

Significa que:

- el vector nulo no es combinación de las columnas de A.
- Existen vectores de \mathfrak{R}^m que son combinación lineal de las columnas de A.
- Existen vectores de \mathfrak{R}^m que son combinación lineal de las columnas de A.
- Hay algunos vectores de \mathfrak{R}^m que son combinación lineal de las columnas de A y otros que no lo son.
- No existen vectores en \mathfrak{R}^m que no sean combinación lineal de las columnas de A.

4) En el texto (Pag.105): “El producto matricial $A \cdot x$ es el vector m expresado como la combinación lineal $A \cdot x = x_1 a_1 + x_2 a_2 + \dots + x_n a_n$ ”

Se entiende que:

- los coeficiente de la combinación lineal son x_1, x_2, \dots, x_n
- el resultado de esta operación es una matriz B
- los vectores de la combinación lineal son los renglones de A
- siempre las columnas de A son no nulas
- cada vector renglón tiene m componentes

	Aceptable	%	No aceptable	%
1°	61	48.4	65	51.6
2°	64	50.7	62	49.2
3°	29	23	97	77
4°	49	38.8	77	61.2

Tabla 1. Respuestas al cuestionario

El análisis posterior muestra que algunos alumnos todavía no han alcanzado el nivel de lectura comprensiva, que De Zubiría (1997) define como *lectura elemental de decodificación terciaria*. Tenemos clara evidencia aquí que la comprensión no es un proceso de todo o nada, los alumnos pueden comprender parcialmente, en diferentes grados, o totalmente.

Nos muestra, asimismo, el error del supuesto subyacente de los profesores universitarios que sobreentienden que sus estudiantes “deben comprender” los contenidos disciplinares específicos en los textos científicos.

El alumno, en el nivel medio, realiza sus tareas acercándose a libros de texto copiando contenidos, pero no logra adquirir nueva información, se queda en repetir y retener memorísticamente lo estudiado. En este nivel como en otros de estudios superiores se enseña apoyándose en una clase magistral, pronunciada por el profesor y encomendando al alumno la misión de buscar en el libro de texto los temas desarrollados. El estudiante se limita a leer y aprender de memoria, posteriormente se hacen preguntas acerca de su contenido, esto no presume un aprendizaje significativo.

Sabemos que lo que un lector obtiene de la lectura depende de sus conocimientos previos y de lo que ha aprendido a buscar en los textos, por lo cual, es tarea del profesor:

- Ofrecer categorías de análisis para interpretar los textos.
- Tomar conciencia de aquello que realiza él mismo, como miembro de una comunidad disciplinar.
- Desarrollar los contenidos condensados de los textos.
- Explicar refiriendo al texto, para que los estudiantes puedan conectar lo que leen con lo que se enseña en el aula.

La responsabilidad por cómo se leen los textos científicos y académicos en la educación superior no puede seguir quedando a cargo de los alumnos exclusivamente.

Creemos que ha de ser una responsabilidad compartida entre estudiantes, profesores e instituciones. También pensamos que lo que presenta obstáculos a la comprensión de muchos estudiantes es el supuesto implícito de las prácticas lectoras universitarias y la naturaleza tácita del conocimiento contenido en los textos que se les da para leer. Los textos académicos que los alumnos han de leer en este nivel educativo suelen ser derivados de textos científicos no escritos para ellos sino para concedores de cada campo de estudios. Son textos que dan por sabido que los estudiantes saben, lo que no saben en realidad. Puede ser entonces que el carácter implícito tanto del conocimiento contenido en los textos como de las prácticas lectoras, que los docentes consideramos naturales (y no culturales) un factor determinante en su desempeño.

Los problemas referidos a la comprensión de textos son (Benito, 2000).

- Las dificultades para operar con la información del texto. El lector inmaduro suele procesarla en forma lineal y tiene inconvenientes para identificar los aspectos globales que encierra el texto.
- Las deficiencias para evaluar y regular su propia comprensión. Un control inadecuado imposibilita al lector identificar las discrepancias entre la infor-

mación científica que le proporciona un texto y los conceptos inapropiados que éste posee.

Es innegable el aporte del docente para contribuir a que el alumno-lector organice la información que proporciona el texto de una manera coherente y con ello facilitar la elaboración de un modelo sobre los contenidos presentados, permitiendo así abordar con éxito aprendizajes significativos.

3. Lectura y aprendizaje. Un compromiso docente.

En la segunda experiencia relatada tuvimos clara evidencia que la comprensión no es un proceso de todo o nada; los alumnos pueden comprender parcialmente, en diferentes grados, o totalmente.

Destacamos que en aquella instancia el abordaje de la lectura por parte de los estudiantes se realizó en forma autónoma.

Los textos disciplinares en la educación superior, a diferencia de los textos escolares elementales, están escritos en lenguajes muy específicos, son difíciles de leer y están redactados, en general, sin atender al nivel de capacidades genéricas de los posibles lectores en el nivel, donde serán aplicados. La habilidad de los sujetos para realizar con éxito esta tarea puede verse facilitada u obstaculizada por las características de los textos. Por ejemplo, la organización lógica (coherencia de la secuencia de ideas) y la presencia de conectores y señalizaciones sobre lo relevante, son factores que facilitan la construcción de representaciones.

Pensamos en la necesidad de generar formas de enseñar a los estudiantes estrategias que les permitan mejorar su desempeño en la compleja tarea de dialogar con los textos.

“La relación entre un soporte y su lectura reposa sobre lo que llamaremos el contrato de lectura, el discurso del soporte por una parte y sus lectores por la otra, constituyen las dos partes entre las cuales se establece un nexo, el de la lectura” (Eliseo Verón, 1985). Este autor distingue, a partir de clases de enunciador, dos tipos de contratos, a saber:

- Enunciador objetivo e impersonal, habla la verdad: la combinación de aserciones moralizadas, de preguntas en tercera persona, de cuantificaciones de consejos en un discurso donde ni el enunciador ni el destinatario está explícitamente marcados.
- Enunciador pedagógico: el que se construye entre un “nos” y un “ustedes” explicitado y el nexo se hará entre dos partes desiguales, una que aconseja, informa, propone, advierte, la otra que no sabe y es definido como destinatario receptivo o más o menos pasivo, que aprovecha.

Tomando la perspectiva de contrato de lectura enunciada por Eliseo Verón, podemos decir que hemos utilizado los dos tipos de enunciadores.

En la 2° experiencia utilizamos el enunciador objetivo, hecho que podemos describir como la lectura directa por parte del alumno, sin la mediación explícita del docente.

En esta experiencia, apelamos al enunciador pedagógico, el que se evidencia en la mediación explícita del docente en el abordaje de la lectura del texto.

En esta ocasión utilizamos como estrategia didáctica la lectura en conjunto (alumno-profesor), utilizando las pausas, la puntuación, intentando promover “el dialogo con el texto”.

Para llevar adelante esta tarea, hicimos una presentación con power point a fin de orientar la lectura y facilitar el diálogo con el texto. En esta se ponía de manifiesto la importancia de algunos aspectos a tener en cuenta cuando abordamos la lectura de un texto específico de una disciplina (en nuestro caso un texto de álgebra lineal).

Para el diseño de la presentación seleccionamos un tema que el libro desarrolla en 4 páginas, suprimimos los ejemplos, y añadimos preguntas que referían tanto a cuestiones propias de la disciplina así como de los párrafos (los signos de puntuación, espacios, títulos, etc.). A modo de muestra:

FCEIA
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y INGENIERÍA
RODRÍGUEZ Y AGUIRRE 281

TEOREMA 9: (Reducción del conjunto generador)

Si uno de los vectores $m \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$ es una combinación lineal del resto, el generador permanece igual si se elimina ese vector.

DEMOSTRACIÓN: Para comodidad en la notación podemos suponer que \mathbf{v}_k es una combinación lineal de $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{k-1}$ (si es necesario renombrando los vectores). Entonces

$$\mathbf{v}_k = c_1 \mathbf{v}_1 + \dots + c_{k-1} \mathbf{v}_{k-1}$$

Para algunos escalares c_1, \dots, c_{k-1} . Sean V y V' los espacios generados correspondientes a $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$ y de $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{k-1}$. Es preciso comprobar que $V = V'$. Como cualquier combinación lineal de $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{k-1}$ es una combinación lineal de $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$ (sumándole $0\mathbf{v}_k$), entonces $V' \subseteq V$. Basta demostrar que $V \subseteq V'$. Sea $\mathbf{u} \in V$. Entonces

$$\mathbf{u} = d_1 \mathbf{v}_1 + \dots + d_k \mathbf{v}_k \text{ para algunos } d_1, \dots, d_k. \text{ Se tiene}$$

$$\mathbf{u} = d_1 \mathbf{v}_1 + \dots + d_k (c_1 \mathbf{v}_1 + \dots + c_{k-1} \mathbf{v}_{k-1}) = (d_1 + d_k c_1) \mathbf{v}_1 + \dots + (d_{k-1} + d_k c_{k-1}) \mathbf{v}_{k-1}$$

¿cómo se obtuvo esta expresión?
que es una combinación lineal de $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{k-1}$. Por consiguiente $\mathbf{u} \in V'$. Y entonces $V \subseteq V'$ como se afirmaba.

UNIVERSIDAD NACIONAL DE ROSARIO

Figura 1. Ejemplo de una presentación

Luego de la lectura y los debates suscitados, cerramos con una aplicación práctica (ejemplo) realizada en conjunto con los alumnos y una serie de preguntas respecto a los conceptos abordados.

Algunas semanas después de haber realizado esta práctica, les dimos a los alumnos el mismo cuestionario que utilizamos en la experiencia anterior.

Si bien los conceptos involucrados en el cuestionario no fueron necesariamente los mismos que tratamos en la clase utilizada para la experiencia, notamos que

las respuestas evidenciaron una amplia mejoría en la comprensión de los significados, inclusive en la interrelación entre ellos. Lo que da muestras que, si bien comprender un texto es una actividad controlada por el propio lector, rara vez la construcción de conocimientos se manifiesta como una determinación propia, se requiere la intervención del docente para el acercamiento del alumno al libro (Macías, 1999).

Las estrategias de lectura son procedimientos complejos que involucran a lo cognitivo y lo metacognitivo, en la enseñanza no pueden considerarse como técnicas precisas, recetas infalibles o habilidades específicas. Lo que caracteriza a la mentalidad estratégica es la capacidad para representarse y analizar los problemas y la flexibilidad para dar con las soluciones. Es que al proponer estrategias de comprensión lectora se debe priorizar la construcción y uso por parte de los alumnos de estrategias generales que pueden ser transferidos sin mayores dificultades a otras situaciones de lectura. Ya que al abordar estos contenidos y al asegurar su aprendizaje significativo se contribuye al desarrollo del individuo, más allá de promover sus habilidades como lector.

REFLEXIONES Y CONCLUSIONES

Aprender a leer se constituye en un proceso que se continúa desarrollando en la vida adulta y que, en consecuencia, en el contexto universitario sigue requiriendo de la intervención docente en cada dominio de conocimientos. En la actualidad, la utilización del libro en la clase, se reduce a la disponibilidad de un cronograma temático que incluye el desarrollo de casi todos los temas del programa de la asignatura. El estudiante asiste a clase con su libro y mientras el docente explica el tema de ese día, él va buscando en el libro el mismo título, una vez ubicado, escucha al docente, toma nota (en algunos casos). Este hecho se pone en evidencia cuando el alumno observa o acota: “esto no está en el libro”, ¿esto dónde está? ¿En qué página?

En múltiples oportunidades, el lugar del libro es ocupado por la fotocopia de algunos capítulos, lo que implica un recorte de los contenidos con la consecuente parcialización de los conceptos.

La responsabilidad por cómo se leen los textos científicos y académicos en los primeros cursos de la educación superior no puede recaer exclusivamente en los alumnos, pues es habitual el suponer que leer es encontrar en el texto la información que pareciera ofrecer, desconociendo si tal información sólo puede ser apreciada por aquellos que disponen de ciertos marcos cognitivos que ellos aún no han elaborado, solemos exigirles que interpreten o inferan de lo escrito en el texto y no lo que allí está escrito, lo que hace necesario que dispongan de conocimientos previos que le permitan tal acción.

Ha de ser una responsabilidad compartida entre estudiantes, profesores e instituciones. Un desafío que los docentes deberán aceptar es dar la posibilidad a los alumnos para que sean capaces de afrontar las demandas del discurso académico, de desarrollar habilidades cognitivas y metacognitivas para comprender la

información que obtienen de la lectura de textos científicos y así, concretar sus aprendizajes.

Creemos necesario cambiar la premisa “terminar el programa” y ocuparnos de afianzar metodologías que ayuden al estudiante a “aprender a aprender”, que posibiliten el aprendizaje significativo de los conceptos, que superen los obstáculos que se interponen, reconociendo en ellos una oportunidad para la consecución del objetivo principal de la enseñanza en el nivel superior, cual es brindar al estudiante las herramientas necesarias para que pueda convertirse en su propio instructor para toda la vida.

Del debate de ésta cuestión, se podrían generar conclusiones que nos posibiliten diseñar situaciones pertinentes. Es relevante, entonces, desarrollar acciones que susciten en los estudiantes la apropiación de nuevas prácticas lingüísticas y discursivas (o reconstruyan las que poseen para adecuarlas y emplearlas en nuevos contenidos disciplinares) promoviendo la incorporación de aquellas prácticas específicas que les permitan avanzar en su vida académica para encontrar, así, nuevas propuestas que lo acompañen en el proceso de asumir un lugar autónomo y crítico tanto en su futura profesión como en la sociedad.

Es posible que modifiquemos nuestra propia práctica en busca de estrategias que contemplen estas realidades y sólo entonces sean útiles para *modificar la realidad*, que es una de las tareas más importante que conlleva la tarea docente. En ello estamos trabajando.

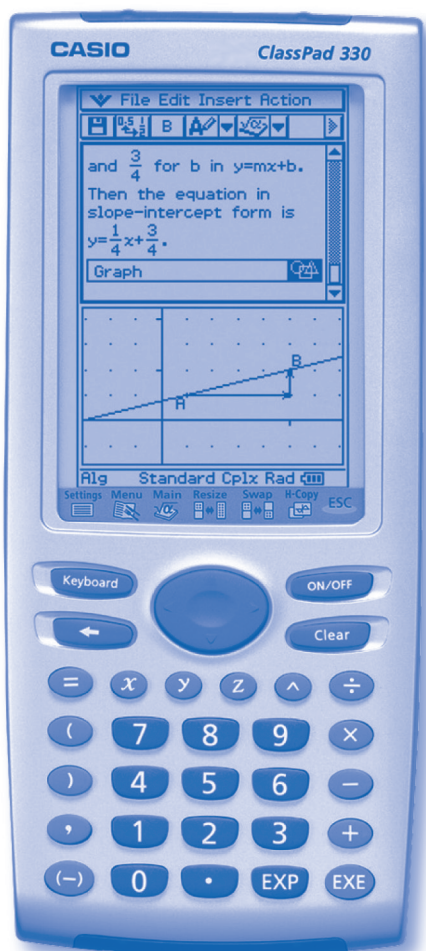
REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Areiza, R. y Henao, L. M. (1999). Metacognición y estrategias lectoras. *Revista de Ciencias Humanas*, 19. <http://www.utp.edu.co/~chumanas/revistas/revistas/rev19/areiza.htm>
- Artigüé, M, Douady, R.y Moreno, L. (1995). Ingeniería didáctica en educación matemática. Bogotá: Grupo Editorial Iberoamérica.
- Baquero & otros (1996) El alumno ingresante a la Universidad. Un abordaje psico-educativo. *Revista Espacios en Blanco. Serie Indagaciones* N° 3-4,p.99-117. Departamento de Ciencias de la Educación, Facultad de Ciencias Humanas, Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires: Editorial Cuadernos.
- Bernstein, Basil. (1993). *La estructura del discurso pedagógico*. Morata: Madrid.
- Carlino, P. (2002) *Evaluación y corrección de escritos académicos: para qué y cómo*, ponencia presentada en el 9° Congreso Nacional de Lingüística en la Universidad Nacional de Córdoba (pp. 1-8).
- Carlino, P. (2002). Enseñar a escribir en todas las materias: cómo hacerlo en la universidad. Ponencia Cátedra UNESCO Lectura y escritura: nuevos desafíos. Mendoza: Facultad de Educación, UNC.

- Chevallard, Y. (1997). *La transposición didáctica: del saber sabio al saber enseñado*. P.45. Buenos Aires, Editorial Aique.
- De Zubiría, M. (1997). *Teoría de las seis lecturas* (Tomos I y II). Santa Fe de Bogotá: Fondo de publicaciones Bernardo Herrera Marín.
- Guzmán, M, Caserio, M. y Vozzi, A. M (2011). *Una evaluación sobre la importancia del texto de matemática en el aprender a aprender*. XIII Conferencia Interamericana de Educación Matemática. Recife, Brasil.
- Guzmán, M, Caserio, M. y Vozzi, A. M. y otros. (2010-2012) Proyecto de investigación “*El libro de texto como factor coadyuvante en la producción de los conocimientos*” –ING 332– directora: Prof. Martha Guzmán UNR, Rosario, Argentina
- Guzmán, M., Caserio, M. y Vozzi, A. M. (2009). *Conclusiones del Proyecto “Dificultades de la enseñanza y el aprendizaje de matemática en carreras de ingeniería”* UNR, Rosario, Argentina.
- Guzmán, M., Caserio, M. y Vozzi, A. M. (2010). “*Lectura y aprendizaje*” *Un compromiso docente*. Congreso Iberoamericano de Educación – Buenos Aires, Argentina.
- Lerner, Delia. (2001). La autonomía del lector. Un análisis didáctico. *Revista Lectura y Vida*, 23(3), <http://abc.gov.ar/lainstitucion/organismos/lecturayescritura/recomendados/23-3Lerner.pdf>
- Macías, A, Castro, J. y Maturano, C. (1999). Estudio de algunas variables que afectan la comprensión de textos de física. Instituto de Investigaciones en Educación en las Ciencias Experimentales (IIECE). Facultad de Filosofía, Humanidades y Artes. Universidad Nacional de San Juan. <http://ddd.uab.cat/pub/edlc/02124521v17n3p431.pdf>
- Otero, J. (1997). El conocimiento de la falta de conocimiento de un texto científico. *Alambique. Didáctica de las Ciencias Experimentales*, 4(11), 15-22.
- Sánchez, E., Rosales, J. y García, R. (2004). Interacción profesor-alumnos y comprensión de textos. El papel del profesor en la organización de la responsabilidad conjunta. *Revista de Educación* N°334, 347-360.
- Vergnaud, G – (1993). La teoría de los campos conceptuales. En *Lecturas en Didácticas Matemáticas escuela Francesa*. Sección de matemática educativa del CINVESTAV – IPN (Pp 88-117). México: CINVESTAV.
- Verón, E. (1985). El análisis del “Contrato de Lectura”, un nuevo método para los estudios de posicionamiento de los soportes de los media, en “*Les Medias: Experiences, recherches actuelles, applications*”, IREP, París.
- Zabala, A. (n. d.). La práctica educativa. Cómo enseñar. <http://andrea.didacticaintvng.blogspot.com/2007/09/la-practica-educativa-como-enseñar-zabala.html>.



¡Atrévete a ponerle nota!



CASIO ClassPad 330.
La calculadora número 1
de su promoción.

Más de 500 aplicaciones gratuitas
disponibles en internet.

Gran pantalla LCD con lápiz-táctil y menú de iconos + sistema CAS para álgebra simbólica + e-actividades como hojas de trabajo electrónicas y otras aplicaciones + rotación de gráficos 3-D + memoria flash de 5,4Mb.

CASIO®
www.aulacasio.com

Entra en www.aulacasio.com

El aula donde más se aprende sobre las calculadoras CASIO: con información, descargas, actividades, publicaciones, ofertas, etc.



LOCALIZA CON AYUDA DE LAS CÓNICAS Y GEOGEBRA

Miguel de la Fuente Martos

I.E.S. El Tablero (Córdoba)

Resumen: *La posibilidad de interacción entre imágenes bitmap (mapas, fotos, etc.) y fórmulas o gráficas en Geogebra, permite aplicar ciertas nociones matemáticas para resolver algunos problemas relacionados con la localización en mapas: Las cónicas nos permiten hallar en un mapa puntos que cumplen determinadas condiciones, ¿dónde estaba el fotógrafo cuando hizo esta fotografía? o ¿dónde estamos perdidos en el campo? son algunos de los problemas que se resuelven con cierta facilidad usando Geogebra y muestran contextos de nuestro entorno donde las matemáticas son útiles.*

INTRODUCCIÓN

Entre 2005 y 2010 se proyectaron en algunas cadenas de televisión españolas los capítulos de la serie estadounidense **Numb3rs**, que mostraba como las matemáticas podían ayudar a luchar contra la delincuencia. En Estados Unidos tuvo un gran éxito de audiencia durante sus 4 primeras temporadas. Su capítulo piloto consiguió un record de audiencia con unos 25 millones de espectadores.

A partir de la emisión de esta serie la prestigiosa MAA (Mathematical Association of America) está patrocinando el eslogan: “Numb3rs gets the math right” (Numb3rs consigue lo mejor de las Mates)¹ y el Consejo Nacional de Profesores de Matemáticas (NCTM) creó expresamente el programa educativo “We all use Math every day”², es decir “Todos utilizamos las Mates cada día”, que además es también una frase de la introducción de la serie³. En este programa matemáticos de todo el país se dedicaban a preparar actividades para que posteriormente pudiesen ser tratadas en los siguientes episodios.

Como puede leerse en alguna de las múltiples páginas Web que surgieron a raíz de la serie, ésta no profundiza en temas matemáticos, sino que los deja “caer”, dando el fundamento científico y utilizando en muchas ocasiones hábiles comparaciones que tratan de que el espectador entienda lo que se hace, buscando siempre el dinamismo de una serie de acción. También es muy común ver al matemático protagonista llenar pizarras... repletas de demostraciones... mientras pasan

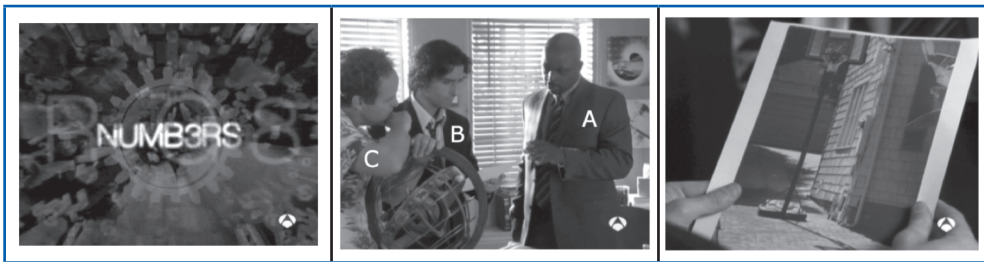
por la pantalla numerosos gráficos matemáticos, fórmulas, etc., que de manera subliminal tratan de inculcar en el espectador la idea de exactitud y “magia”.

Yo he usado en mis clases de Bachillerato fragmentos más o menos largos de algunos capítulos de la serie, observando que una vez pasada la impresión inicial de “la magia de las matemáticas” los alumnos se centraban en la intriga, más que en el uso de las matemáticas (que yo había supuesto entendibles para ellos, y en base a lo cual había seleccionado los fragmentos).

Me propuse entonces usar algún fragmento como motivación y desarrollar alguna actividad paralela “parecida”, que estuviese más en consonancia con lo que tratamos en la clase.

A continuación transcribo los diálogos de un par de minutos de un capítulo de la segunda temporada a partir del que surgió la idea de lo que desarrollo posteriormente.

Intervienen tres personajes: A policía y los otros dos matemáticos (B el matemático protagonista):



http://www.maa.org/devlin/devlin_02_05.html

A: Larry, ¿qué tal?, ¿cómo lleváis lo de la foto.

B: El programa ha estado trabajando con la imagen de la videocámara. Esto es lo que tenemos hasta ahora.

A: No es suficiente para una identificación.

B: El proceso continúa.

A: Me alegro. Tienes que analizar otra cosa. Es del mismo caso. Verás, no sabemos dónde está ese sitio y necesitamos averiguarlo. La canasta de baloncesto proyecta una sombra. Creo que leí en alguna parte que puedes localizar el sitio basándote en las sombras.

B+C: Astronomía Esférica

A: ¿Qué es eso?

C: Una metodología de observación del cosmos para averiguar la posición de la Tierra.

B: Los marineros la usan cuando se pierden en el mar-

C: Y los cosmólogos cuando estamos perdidos, sin más.

B: Está basada en las mismas operaciones que se usan en los relojes de sol. Agente Sinclair está usted en presencia de dos miembros de la Sociedad Americana de Relojes de Sol.

A: ¡Ah! Menuda juerga.

C: Claro, que para hacerlo vamos a necesitar más de una foto.

A: ¡Ah!. Casualmente tengo más

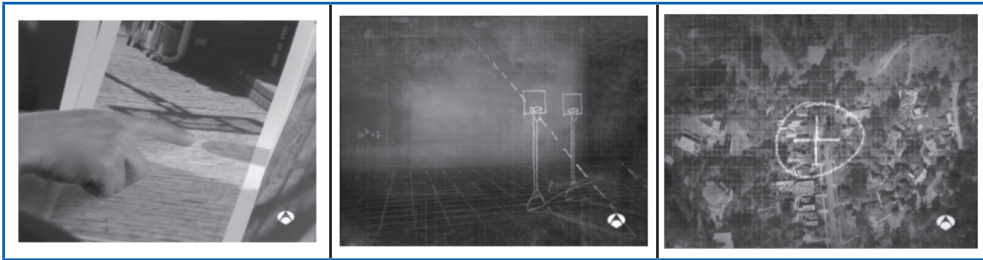
B: ¿La hora que marca es correcta?

A: Creo que sí

B: Tenemos que medir la longitud del poste además de estas sombras.

A: La canasta de baloncesto parece tener la altura estándar.

B: 3 metros



C: Y esos ladrillos son de una acera.

A: ¡Ladrillos!. ¿Eso aporta algo?

B: Son del mismo tamaño, lo que permite medir el movimiento de las sombras. Si medimos la longitud de las sombras sobre los ladrillos e incluimos las horas exactas a las que se tomaron esas dos fotos, la ecuación puede determinar la altitud del sol; y con un análisis más profundo de esas imágenes puedo darte la longitud y latitud con un error de una centésima de grado...

Lo que trataremos aquí, sin usar la trigonometría esférica a que se refieren los personajes anteriores, es resolver dos problemas de localización en un mapa de un punto que cumple unas ciertas relaciones geométricas con otros puntos conocidos. La matemática que usaremos no pasará del nivel de Bachillerato, aunque lo más interesante es la aplicación en contexto de ciertas nociones matemáticas: bastantes cálculos y toda la representación lo dejamos para Geogebra.

¿DÓNDE ESTABA?

Vayamos directamente a las cónicas y a la geometría donde estas juegan un papel fundamental: la geometría proyectiva.

Cuando se hace una fotografía se está proyectando desde un punto (el lugar desde donde está situada la cámara fotográfica) una escena tridimensional. Esta proyección es sobre un plano, el sensor de la cámara; pero podemos imaginar toda la situación vista desde arriba (cenitalmente) y entonces suponer que se ha proyectado una escena desde un punto y sobre una recta.

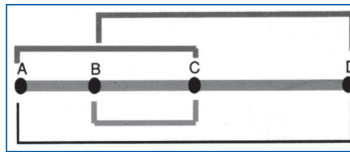
Dada, por ejemplo, una fotografía panorámica de una ciudad, ¿podemos averiguar dónde estaba el fotógrafo en el momento del disparo? La respuesta, afirmativa, nos viene de la mano de la geometría proyectiva y de una aplicación poco usual de las cónicas, que podemos incorporar como otra más en nuestras clases.

Recordando algo de Geometría Proyectiva Básica en el Plano

Aunque algunas ideas ya fueron usadas por los griegos, los orígenes de la geometría proyectiva pueden situarse en el trabajo de los artistas del renacimiento (siglo XV) y quizás en la pregunta que en su obra “Della Pintura” (1435) se hace Leone Battista Alberti (1404-1472): ¿Qué se mantiene en una proyección, si no lo hacen ni los ángulos ni las proporciones simples?. La respuesta vendría de la mano de Desargues (1591-1661) a principios del siglo XVII, quien demostró que en una proyección lo que se mantiene es la razón doble de 4 puntos alineados, teniéndose así el primer invariante proyectivo.

Recordemos que la razón doble de 4 puntos alineados⁴ A, B, C y D se define como el cociente de dos razones simples:

$$\text{RazónDoble } (A, B, C, D) = r(A, B, C, D) = \frac{\overline{AC}}{\overline{AD}} : \frac{\overline{BC}}{\overline{BD}} = \frac{\overline{AC} \cdot \overline{BD}}{\overline{AD} \cdot \overline{BC}}$$



Cuando proyectamos los puntos A, B, C y D desde P (Figura 5) y cortamos el haz de las cuatro rectas que parten de P hacia ellos con otras rectas secantes al haz, se obtienen cuaternas de puntos alineados que tienen la misma razón doble:

$$r(A_1, B_1, C_1, D_1) = r(A_2, B_2, C_2, D_2).$$

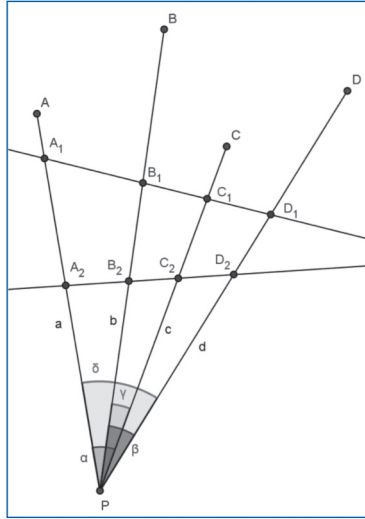


Figura 5. Mantenimiento de la razón doble por proyección desde P.

Usando simplemente las fórmulas trigonométricas de los senos podemos extender este invariante al haz de las 4 semirectas a, b, c y d que parten de P, de modo que:

$$r(A_1, B_1, C_1, D_1) = r(A_2, B_2, C_2, D_2) =$$

$$\frac{\text{sen}(\widehat{APC}) \cdot \text{sen}(\widehat{BPD})}{\text{sen}(\widehat{BPC}) \cdot \text{sen}(\widehat{APD})} = \frac{\text{sen}\alpha \cdot \text{sen}\beta}{\text{sen}\gamma \cdot \text{sen}\delta} = r(a, b, c, d), \text{ por lo que este mismo valor}$$

$r(a, b, c, d)$, de la razón doble del haz de 4 semirectas que salen de P hacia A, B, C y D puede servirnos como definición valor de la razón doble de A, B, C y D **vis-tos desde P**, aunque estos puntos no estén alineados.

Justifiquemos este hecho, que ya quedó probado por Desargues:

En la figura 6 sean $\overline{PA_1} = a$; $\overline{PB_1} = b$; $\overline{PC_1} = c$ y $\overline{PD_1} = d$.

Por el teorema de los senos, tenemos que

$$\frac{\overline{A_1C_1}}{\text{sen}\alpha} = \frac{c}{\text{sen}\epsilon}; \quad \frac{\overline{B_1D_1}}{\text{sen}\beta} = \frac{d}{\text{sen}\theta};$$

$$\frac{\overline{A_1D_1}}{\text{sen}\delta} = \frac{d}{\text{sen}\epsilon} \text{ y } \frac{\overline{B_1C_1}}{\text{sen}\gamma} = \frac{c}{\text{sen}\theta}$$

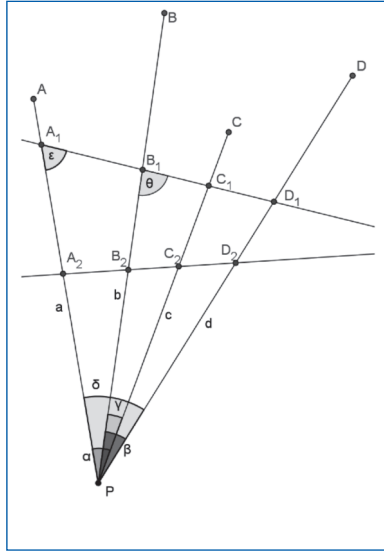


Figura 6

Entonces

$$r(A_1, B_1, C_1, D_1) = \frac{A_1 C_1 \cdot B_1 D_1}{A_1 D_1 \cdot B_1 C_1} = \frac{c \operatorname{sen} \alpha \cdot d \operatorname{sen} \beta}{d \operatorname{sen} \delta \cdot c \operatorname{sen} \gamma} = \frac{\operatorname{sen} \alpha \cdot \operatorname{sen} \beta}{\operatorname{sen} \delta \cdot \operatorname{sen} \gamma} =$$

$$= \frac{\widehat{\operatorname{sen}(APC)} \cdot \widehat{\operatorname{sen}(BPD)}}{\widehat{\operatorname{sen}(APD)} \cdot \widehat{\operatorname{sen}(BPC)}} = r(A_2, B_2, C_2, D_2) = r(a, b, c, d)$$

Uno de los resultados más conocidos del francés Michel Chasles (1793-1880) se refiere a la invarianza de la razón doble sobre las cónicas, esto es:

En cualquier cónica la razón doble de los haces de 4 rectas que parten de un punto P de ella hacia otros cuatro puntos fijos A, B, C y D de la misma, es constante e independiente de P.

Y recíprocamente:

El lugar geométrico de los puntos desde los que se ven cuatro puntos bajo la misma razón doble es una cónica.

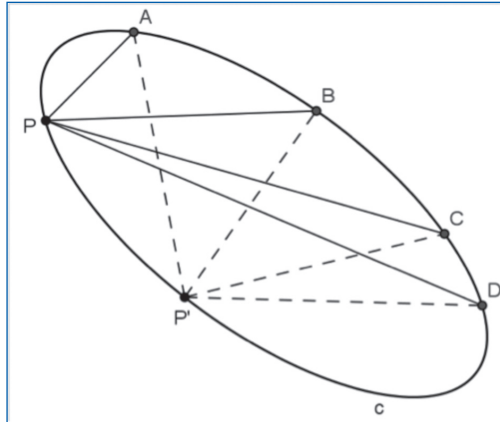


Figura 7. Los haces de semirectas que parten de P y P' tienen la misma razón doble

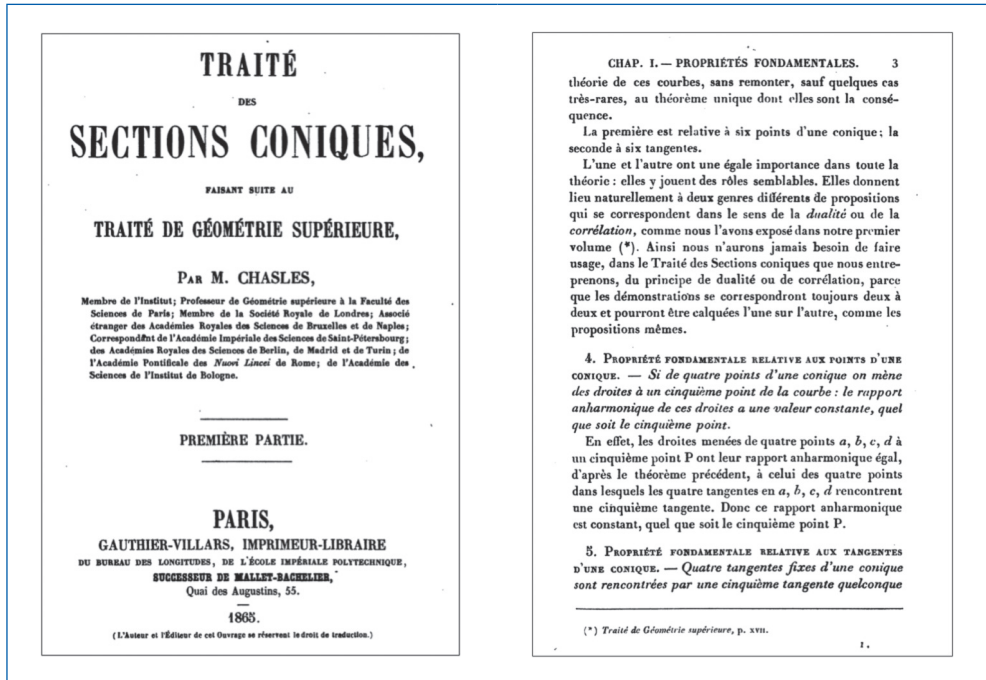


Figura 8. Dos páginas de un libro de M. Chasles en el que se trata la propiedad de las cónicas y la razón doble.

Ya tenemos entonces la solución a nuestro problema: En la fotografía debemos localizar 4 puntos claves A, B, C, D y determinar su razón doble, luego los localizamos en un mapa de la ciudad y con la razón doble y las coordenadas de los 4 puntos determinamos la cónica correspondiente. Ahora bien, así no precisamos

el punto P desde donde se tiró la foto, pero si trabajamos con otro quinto punto E de la fotografía podremos determinar más de una razón doble y más de una cónica, por lo que en la intersección de ellas estará la solución.

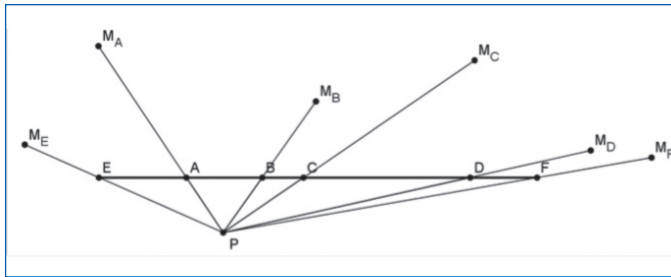


Figura 9

Supongamos una situación de partida como la que se ve en la figura 9, donde se representa una posible imagen cenital de la misma. En la fotografía EF se recoge una zona que va desde el extremo M_E del mapa hasta el otro extremo M_F .

P no tiene por qué estar en la mediatriz del segmento EF, ya que la fotografía podría haberse recortado lateralmente. Nos fijamos en los puntos reconocidos A, B, C y D de la foto que corresponden a los puntos M_A , M_B , M_C y M_D , en el plano de la ciudad (que desde ahora también llamaremos A, B, C y D, mientras no haya confusión).

Como suponemos una vista cenital (proyección ortogonal de los puntos reales sobre en el plano de la ciudad), hemos de tomar la razón doble de las proyecciones de los puntos de la fotografía sobre el borde inferior de la misma (que supondremos será el eje X o una paralela al mismo).

RESOLUCIÓN DEL PROBLEMA CON GEOGEBRA

- Tomamos la fotografía panorámica digitalizada y la insertamos y fijamos en la ventana gráfica de Geogebra de forma que su borde inferior quede paralelo al eje X (Figura 10).
- Marcamos en la foto 5 puntos claves A, B, C, D y E que posteriormente sean fácilmente localizables en el plano de la ciudad.
- Determinamos la razón doble de dos cuaternas de puntos, elegidas entre el conjunto de los 5 puntos, por ejemplo $r_1 = r(A,B,C,D)$ y $r_2 = r(B,C,D,E)$ ⁵.
- Insertamos, en una nueva ventana o capa de Geogebra, un plano de la ciudad donde puedan localizarse los puntos A, B, C, D y E de la fotografía y marcamos sobre ellos los puntos A, B, C, D y E. (Figura 11)
- A partir de las coordenadas de 4 de los puntos $A=(x(A),y(A))$, $B=(x(B),y(B))$, $C=(x(C),y(C))$ y $D=(x(D),y(D))$ y la razón doble r_1 hallada antes, tenemos

que determinar la cónica correspondiente⁶. Igualmente con las coordenadas de B, C, D, E y la razón doble r_2 , determinamos una segunda cónica. En la intersección de ambas, que no es ni B ni C ni D (puntos comunes en ambas cuaternas elegidas) estaba el fotógrafo.



Figura 10. Determinación de la razón doble de 2 cuaternas de puntos sobre la fotografía



Figura 11. Trazado de las cónicas correspondientes. En el punto de intersección, señalado por la flecha blanca inferior, estaba el fotógrafo.

Ahora bien; la determinación de las ecuaciones de las cónicas supone un proceso algebraico más tedioso que la determinación de otro punto de las mismas. Como Geogebra traza las cónicas que pasan por cinco puntos dados, nos dispondremos entonces a calcular las coordenadas de un quinto punto y en particular, por comodidad, las de otro punto que esté sobre alguno de los ejes de coordenadas⁷.

Veamos el proceso a seguir para determinar, por ejemplo, los posibles cortes de nuestra cónica con el eje X:

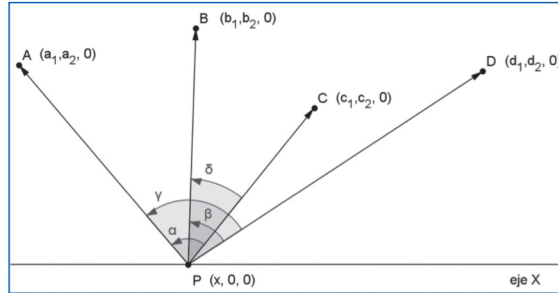


Figura 12

Trabajemos en el espacio tridimensional sobre el plano $z=0$ y así podremos usar el producto vectorial (\times) de vectores para hallar el seno de los correspondientes ángulos implicados en la razón doble (Figura 12).

$$\begin{aligned} \text{Sean } \overrightarrow{PA} &= \vec{a} = (a_1 - x, a_2, 0) \\ \overrightarrow{PB} &= \vec{b} = (b_1 - x, b_2, 0) \\ \overrightarrow{PC} &= \vec{c} = (c_1 - x, c_2, 0) \\ \overrightarrow{PD} &= \vec{d} = (d_1 - x, d_2, 0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r(A, B, C, D) &= r = \frac{\text{sen}\alpha \cdot \text{sen}\beta}{\text{sen}\delta \cdot \text{sen}\gamma} = \frac{\frac{|\vec{c} \times \vec{a}|}{|\vec{c}| \cdot |\vec{a}|} \cdot \frac{|\vec{d} \times \vec{b}|}{|\vec{d}| \cdot |\vec{b}|}}{\frac{|\vec{c} \times \vec{b}|}{|\vec{c}| \cdot |\vec{b}|} \cdot \frac{|\vec{d} \times \vec{a}|}{|\vec{d}| \cdot |\vec{a}|}} = \frac{|\vec{c} \times \vec{a}| \cdot |\vec{d} \times \vec{b}|}{|\vec{c} \times \vec{b}| \cdot |\vec{d} \times \vec{a}|} \\ &= \frac{[a_2(c_1 - x) - c_2(a_1 - x)] \cdot [b_2(d_1 - x) - d_2(b_1 - x)]}{[b_2(c_1 - x) - c_2(b_1 - x)] \cdot [a_2(d_1 - x) - d_2(a_1 - x)]} = \frac{x^2 T_1 + x T_2 + T_3}{x^2 U_1 + x U_2 + U_3} \end{aligned}$$

$$T_1 = a_2b_2 + c_2d_2 - c_2b_2 - a_2d_2$$

$$T_2 = c_2b_2a_1 + c_2b_2d_1 + a_2d_2b_1 + a_2d_2c_1 - a_2b_2c_1 - a_2b_2d_1 - c_2d_2a_1 - c_2d_2b_1$$

$$T_3 = a_2b_2c_1d_1 + c_2d_2a_1b_1 - c_2b_2a_1d_1 - a_2d_2c_1b_1$$

$$U_1 = b_2a_2 + c_2d_2 - b_2d_2 - c_2a_2$$

$$U_2 = b_2d_2c_1 + b_2d_2a_1 + c_2a_2b_1 + c_2a_2d_1 - b_2a_2c_1 - b_2a_2d_1 - c_2d_2b_1 - c_2d_2a_1$$

$$U_3 = b_2a_2c_1d_1 + c_2d_2b_1a_1 - b_2d_2c_1a_1 - c_2a_2b_1d_1$$

Así los posibles valores de x para el punto buscado $P=(x,0,0)$ se obtienen de la resolución de la ecuación de segundo grado $(rU_1-T_1)x_2+(rU_2-T_2)x+(rU_3-T_3)=0$.

Ahora hay que meter todas las fórmulas en Geogebra usando su notación:

$$T_1=y(A)*y(B)+y(C)*y(D)-y(C)*y(B)-y(A)*y(D), \text{ etc.}$$

Luego tenemos que despejar x en la ecuación de segundo grado anterior para introducir las dos posibles soluciones x_1 , x_2 y definir los dos posibles puntos de la cónica sobre el eje X, $P_1=(x_1,0)$ y $P_2=(x_2,0)$, que aparecerán, o no, según la existencia de las soluciones.

Igualmente podríamos calcular las coordenadas de los posibles puntos de la cónica con el eje Y.

Ya podremos diseñar la nueva herramienta para Geogebra que representa la cónica dados 4 puntos y la razón doble.

Por último tenemos que indicar que, como la solución es muy sensible a ligeras variaciones, la colocación de los puntos sobre la fotografía y el plano de la ciudad ha de ser lo más precisa posible y además, si las dos cónicas trazadas precisan poco el punto de corte, porque el ángulo de intersección es pequeño, puede optarse por elegir otras cuaternas de puntos diferentes que definan el punto de corte con mayor precisión.

UN CASO PARTICULAR: EL ARCO CAPAZ

La propiedad del arco capaz como lugar de los puntos bajo los que se ven otros dos fijos con un ángulo constante, supone una situación particular para los resultados de Chasles, en el caso en que se mantiene la razón doble porque se mantienen todos los ángulos o sus senos. O visto de otro modo: si consideramos la propiedad del arco capaz sobre los puntos de una circunferencia y proyectamos la situación, los resultados de Chasles resultan previsibles, ya que la proyección de una circunferencia es una cónica y las razones dobles también se mantienen aunque se desequilibren los senos de los ángulos.

Particularicemos también nuestro problema de búsqueda, lo que nos permitirá abordarlo en el segundo ciclo de la ESO:

¿Dónde Estoy?

Me encuentro en el campo algo perdido, con una brújula, un pobre mapa topográfico en el que tengo señalados tres lugares puntuales A, B y C, que observo a lo lejos y algunos instrumentos de dibujo rudimentarios: una pequeña regla, un cuadrerno en cuya portada puedo apoyarme para trazar perpendiculares y una cuerda que me permitiría trazar circunferencias. El GPS que llevo no me es útil porque mi mapa no tiene coordenadas geográficas, solo aparece la escala y curvas de nivel. Parece que el punto B está más cerca. ¿Puedo saber donde estoy y así calcular la distancia hasta B?. Ya me acuerdo, si mido ángulos puedo usar algo del arco capaz.

Simulemos este problema con Geogebra (Figura 13):

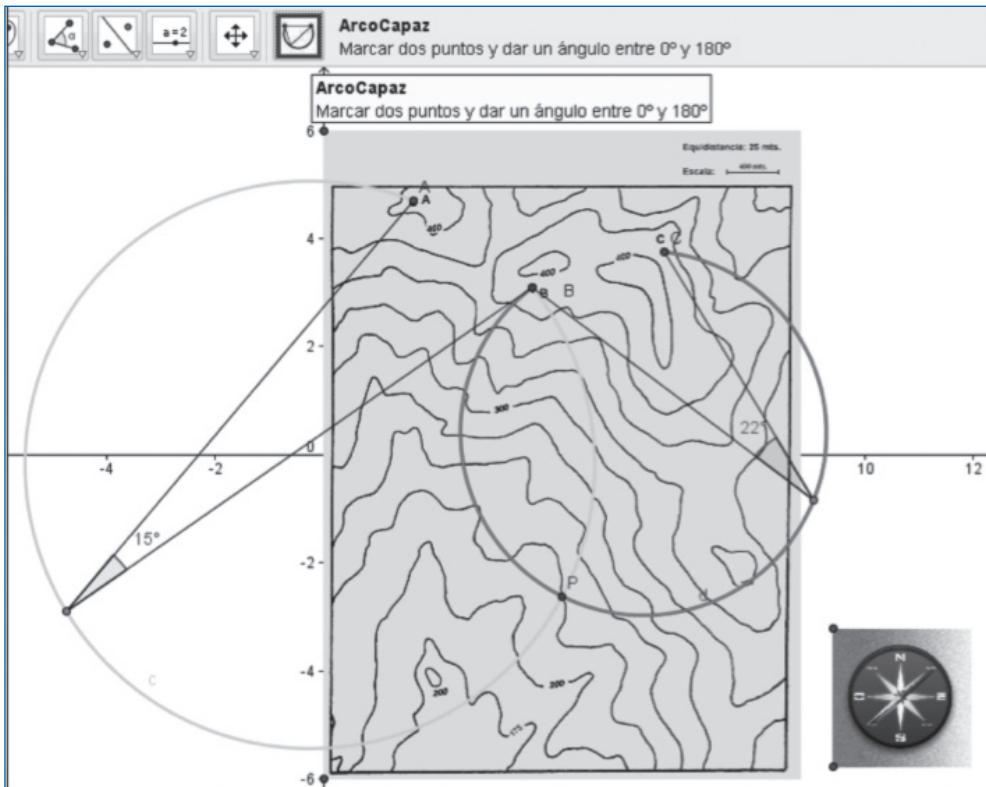


Figura 13. Determinación del punto P a partir de tres puntos y dos ángulos.

Para poder repetir cómodamente arcos capaces, creamos una nueva herramienta en Geogebra que me permite construirlos dados dos puntos y el ángulo bajo el que se ven.

Con mi brújula he medido los ángulos bajo los que veo A y B (unos 15°) así como B y C (unos 22°).

Inserto el mapa y lo fijo, coloco tres puntos A, B y C sobre los correspondientes del mapa y trazo ambos arcos capaces. En la intersección (P) estoy. Ahora se, por la escala del mapa, que me encuentro a unos 2'5 Kms. de B en línea recta.

La noción de arco capaz como lugar geométrico suele usarse las matemáticas de secundaria de forma restringida cuando decimos que desde cualquier punto de una semicircunferencia vemos el diámetro bajo un ángulo recto, pero no suele usarse en su versión general. Este problema, a veces llamado en topografía “problema de los cuatro puntos”, muestra uno de sus usos.

Piense el lector cómo se resolvería este problema en la Enseñanza Secundaria sin apelar a la noción de arco capaz.

Desde 3º de ESO el alumnado puede familiarizarse con esta idea particular de arco de una circunferencia como lugar geométrico en relación con los ángulos. Con Geogebra es fácil explorar que si en una circunferencia coloco un punto P y trazo una cuerda AB, el ángulo APB es fijo cuando P se mantiene a un lado de la cuerda y también es fijo (pero suplementario con el anterior) cuando P está al otro lado de la cuerda.

REFERENCIAS

- Coxeter, H. S. M. (1984). Fundamentos de geometría. Ed. Limusa. México.
- Del Río, J. (2004). Homo Mathematicus. SIGMA nº 24 (pp. 161 a 168). Departamento de Educación del Gobierno Vasco.
- Hohenwarter, M. y Hohenwarter, J. (2009). Manual de Geogebra 3.2. <http://www.geogebra.org/help/docues.pdf>
- Stewart, I (1990). Juegos Matemáticos. Investigación y Ciencia, Mayo (pp. 93 a 98). Prensa Científica. Barcelona.
- De La Fuente, M. (2012) ¿Dónde está?, ¿dónde estoy?, ¿dónde estaba?: Tres problemas de relaciones de las matemáticas y los mapas resueltos con Geogebra. Actas del XIII CEAM Thales (pp. 149 a 165). S.A.E.M. THALES

NOTES

1. http://www.maa.org/devlin/devlin_02_05.html.
2. <http://www.nctm.org/news/content.aspx?id=706>.
3. “Todos usamos los números y las matemáticas a diario, para predecir el tiempo, manejar el dinero,... Las Matemáticas son algo más que fórmulas y ecuaciones. Son lógica. Es utilizar la mente para resolver los mayores misterios que conocemos”.
4. La noción de razón doble ya había sido usada por Pappus y Menelao, pero no en contextos de proyecciones o secciones.
5. Como el comando RazónDoble[A,B,C,D] incorporado en Geogebra sólo funciona si los puntos está alineados se ha de calcular la razón doble de sus proyecciones sobre el eje X. (Se puede desarrollar una nueva herramienta de Geogebra para que realice este proceso).
6. Este trazado de la cónica a partir de las coordenadas de 4 puntos y la razón doble también se puede incorporar como nueva herramienta a Geogebra.
7. Si la cónica resultante no los tuviese bastaría reposicionar el mapa respecto de los ejes para que apareciesen.



TUTORMATES.

Si eres profesor
¡solicita tu
licencia gratuita!

Un nuevo paradigma en la enseñanza de las Matemáticas

TutorMates es una herramienta única para docencia de las Matemáticas en la Educación Secundaria. Se presenta como una aplicación completa para la enseñanza de las Matemáticas en el aula, integrando todos los contenidos curriculares vigentes en una plataforma que incorpora simuladores de matemáticas, geometría dinámica, ejemplos, ejercicios y tests de autoevaluación.

- TutorMates ya está en las aulas de 1º, 2º y 3º de la ESO.
- Material didáctico de apoyo a disposición de los docentes.
- Libreta Digital para tomar apuntes, resolver ejercicios y facilitar el intercambio de apuntes digital.
- No es imprescindible estar conectado a Internet para enseñar o trabajar con TutorMates.
- Disponible para los sistemas operativos Windows, Mac OSX y GNU/Linux.



Consulte la promoción especial para los lectores de Epsilon:

info@tutormates.es

PASEOS MATEMÁTICOS POR ALCALÁ LA REAL. UNA IDEA DE TRABAJO PARA EL PROYECTO INTEGRADO DE MATEMÁTICAS

José Luis Ruiz Fernández

IES Alfonso XI Alcalá la Real (Jaén)

Resumen: *Este artículo pretende por un lado, reivindicar la importancia que puede tener en el currículo el proyecto integrado de matemáticas. Cómo, esta materia se puede convertir en el lugar ideal para llevar a cabo proyectos que aporten otro punto de la vista de las matemáticas al alumnado y que, muchas veces, el currículo ajustado de la materia de matemáticas no permite realizar. Y por otro lado, el artículo cuenta, los entresijos de uno de los proyectos llevado a cabo en dicha materia, el proyecto titulado paseos matemáticos por Alcalá la Real.*

Palabras Clave: *Triple proyecto, paseos matemáticos, proyecto integrado de matemáticas, Alcalá la Real*

EL PROYECTO INTEGRADO

El decreto 416/2008 de 22 de julio establece la ordenación de las enseñanzas correspondientes al bachillerato en Andalucía. En particular, se indica que la materia optativa de proyecto integrado deberá tener carácter práctico y complementará la formación del alumnado en aspectos científicos relacionados con la modalidad por la que se opte. Dicho esto, cuando a principio de curso, y por vez primera, nos fue asignado a nuestro departamento el proyecto integrado de primero de bachillerato científico tecnológico, yo, como encargado de impartir dicha materia me choqué de bruces ante el siguiente dilema. Por un lado, qué bien, tengo la posibilidad de hacer algo distinto y por otro, qué hago, cómo lo enfoco para que resulte atractivo y provechoso.

LA NECESIDAD

“Profe”, todo esto está muy bonito pero... ¿Para qué lo usamos?. Esta frase, ya habitual entre nuestros alumnos, en particular a mi, me llega al alma, pero también es la chispa que hace encender la mecha de que no estamos haciendo

las cosas del todo bien. Muchas veces por la falta de tiempo ante currículos muy ajustados y densos, y otras por miedo a lo desconocido, a salirnos de lo establecido, a explorar mundos donde antes previamente no hemos estado. Los profesores “simplemente” y de la mejor manera posible, nos limitamos a cumplir con el guión establecido, con lo que nos sentimos tranquilos y seguros, con lo que siempre hemos hecho. Pero en los tiempos que corren, donde se pretende que el alumno adquiera una serie de competencias que le permitan aplicar lo aprendido a hipotéticas situaciones nuevas, si el profesor sigue escuchando en clase de matemáticas la frase anterior, alguna cosa está obligado a hacer.

EL TRIPLE PROYECTO

Después de pasar algunos días recopilando ideas que llevar a cabo durante el año en la materia, me decidí finalmente por desarrollar en él un triple proyecto. Esto es, un proyecto distinto para cada trimestre. Esto supuso, un trabajo de planificación y organización importante pero a la vez, hizo la materia más divertida, interesante y amena. Así, en el primer trimestre, realizamos un proyecto titulado “**Cine y matemáticas**”, en el segundo trimestre, un proyecto titulado “**Iniciación a la astronomía**” y en el tercer trimestre, el proyecto estrella, de título “**Paseos matemáticos por Alcalá la Real**” en el cual nos centraremos a partir de ahora. No obstante, os invitamos a visitar el portal diseñado para la materia donde podréis ver el trabajo llevado a cabo en cada uno de los proyectos en cada trimestre <https://sites.google.com/site/proyectointegradomates/>



Figura 1. WebProyectoIntegrado

LÍNEA DE TRABAJO Y RETOS A CUMPLIR CON LOS PASEOS MATEMÁTICOS

Los paseos matemáticos por Alcalá la Real pretenden

- Por un lado, varias cosas. Primero, usar las ventajas que aportan las nuevas tecnologías a la educación y demostrar como una buena planificación y el trabajo colaborativo entre los alumnos permiten afrontar cualquier reto. Y segundo, sensibilizar a los alumnos de la presencia constante de las matemáticas en nuestra vida cotidiana y hacerles ver con ello que los contenidos que se explican en clase son utilizados.
- Por otro lado, recogen la idea tomada de los magníficos trabajos de profesores como Fernando Corbalán en sus paseos matemáticos por Zaragoza y de Carlos Usón y Juan de Blas (2000) en sus paseos matemáticos por Logroño y que sirvieron para sentar las bases en este tipo de actividades.
- Y por último, pretenden acercarse un poquito al planteamiento metodológico que siguen los trabajos en proyectos (PBL y PjBL) y que con tanto éxito se está imponiendo en países que consiguen los mejores resultados según el informe PISA.

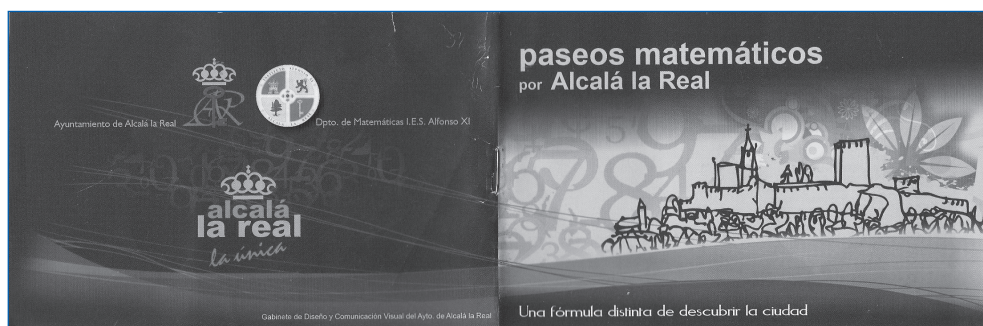


Figura 2. Cuadernillo de trabajo

LOS PASEOS MATEMÁTICOS POR ALCALÁ LA REAL

Un paseo matemático pretende acercar al paseante que recorre la ciudad a las matemáticas y busca mostrar su abundante y variada presencia en monumentos, parques, logotipos... Tomando esto como punto de partida, y teniendo en cuenta que un pueblo tan bonito y tan rico culturalmente como Alcalá la Real, se prestaba a ello, diseñamos 5 rutas que recorrían la ciudad pasando por sus lugares más emblemáticos. En cada ruta señalamos y explicamos los contenidos matemáticos que aparecían, realizamos fotografías, grabamos vídeos, planteamos y solucionamos desafíos matemáticos y recogimos distintos aspectos históricos en colaboración con el profesor de Latín del centro, gran conocedor de la ciudad. Pero también, y por último, aprovechando, la presencia en clase de una

alumna alemana que había venido de intercambio, el interés de un chica catalana y de las ganas de colaborar del profesor de inglés que impartía proyecto integrado de dicha materia nos decidimos a traducir nuestro trabajo, en su mayor parte, a varios idiomas. Todo lo comentando anteriormente se puede ver en la web que diseñamos y que se puede acceder desde la dirección <http://www.wix.com/proyintefonso11/paseosmaticos>

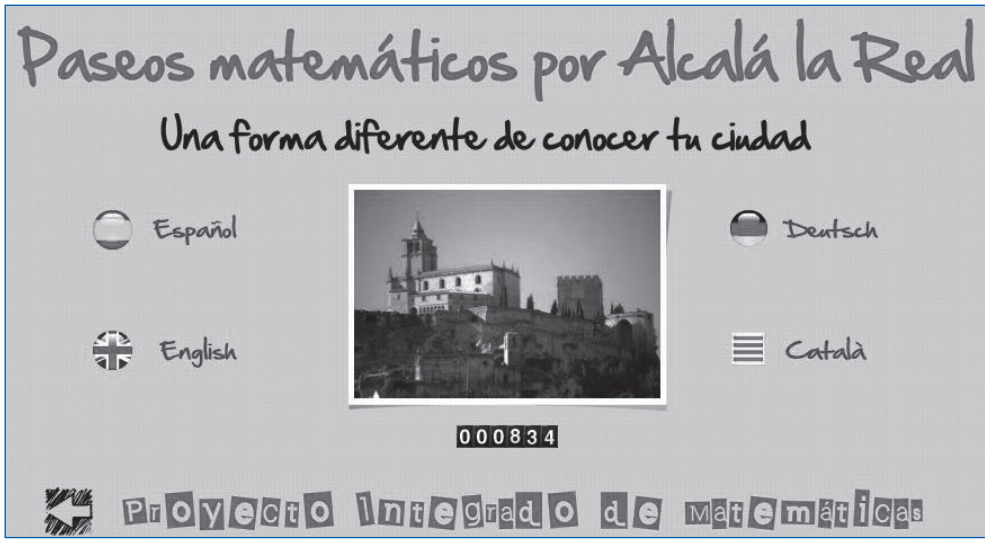


Figura 3. WebPaseos

LA COLABORACIÓN CON EL AYUNTAMIENTO

En el proyecto, era esencial la colaboración con el Ayuntamiento de la ciudad. Por una parte, mi idea era que, cualquier turista que visitara la ciudad tuviera la oportunidad de recorrerla desde el punto de vista matemático usando nuestro trabajo diseñado en la web. Pero esto, requería a su vez, un trabajo previo por parte del turista, que salvo en contadas excepciones seguro que no haría. Así que, decidimos realizar un cuadernillo que se pudiera adquirir gratuitamente en la oficina de turismo y que acompañara a nuestro paseante en su recorrido por la ciudad. El cuadernillo, maquetado por el departamento de Diseño e Imagen del Ayuntamiento de Alcalá la Real, contenía, para cada ruta, parte de la información que aparecía en la web y remitía a ésta para una mayor información. Así, todo sería más fácil para el turista y a nosotros nos podría conocer más gente. Y por otra parte, todo el trabajo de los alumnos, que era ya, trabajo provechoso para la ciudad, debía ser reconocido. Así, llegamos también a un acuerdo para que en un acto celebrado en el salón de plenos del Ayuntamiento los alumnos recibieran un diploma acreditativo por su participación y aprovechamiento en el proyecto y les hiciera, sino lo estaban ya, sentirse más orgullosos de todo su esfuerzo.

EL PROYECTO POR DENTRO

Contado así, todo parece sencillo, pero me gustaría explicar un poquito cómo lo llevamos a cabo, no sin antes mencionar, el hecho de que, el proyecto conllevó una labor de coordinación importante, supuso mucho trabajo previo por mi parte y tuvo realmente éxito por el gran trabajo que hicieron mis alumnos durante el proyecto ya que sin él, las ideas se hubieran simplemente en eso. Dicho esto decir que, la hora semanal de clase de proyecto integrado la aprovechábamos para tres cosas. Primero, para recorrer las 5 rutas por la ciudad siguiendo un pequeñas guías matemáticas a modo de cuestionario, que previamente había confeccionado y que íbamos resolviendo entre todos. Segundo, para plantear y resolver diferentes desafíos matemáticos que les había propuesto durante dichos recorridos. Y tercero, para resolver las dudas que iban apareciendo durante la realización el proyecto. Por otro lado, fuera de clase, los alumnos se autogestionaban entre ellos para repartirse el trabajo, que bien a través del correo electrónico, de la comunidad que creamos en facebook o al finalizar las clases les iba encomendando. Así, los alumnos organizaron la información sobre los aspectos históricos de cada una de las rutas, diseñaron las guías visuales matemáticas a partir de las que usamos durante los recorridos, recopilaron información de cada uno de los contenidos matemáticos que aparecían en las rutas usando internet y distintos libros de texto, solucionaron los desafíos matemáticos que se planteaban en ellas, grabaron los vídeos de cada una y por último subieron todo su trabajo a la web.

CONCLUSIONES

Cuando un profesor ve que sus alumnos están disfrutando y a la vez están aprendiendo matemáticas, todo el esfuerzo merece la pena. El trabajo desarrollado durante este año en el proyecto integrado de matemáticas y en especial, lo hecho en el proyecto de paseos matemáticos por Alcalá la Real, nació de la ilusión desmedida de un sencillo profesor de matemáticas y se desarrolló gracias al trabajo de unos excelentes alumnos, pienso que, sienta las bases para proyectos futuros, que desde mi punto de vista, abren nuevas puertas a la enseñanza de las matemáticas.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Corbalán F. (N. d). *Zaragoza con otros ojos*. Recuperado el 1 de Abril de 2011 de <http://www.zaragoza.es/ciudad/educacion/rutasmaticas.htm>
- Corbalán, F. (N. d.). *Las matemáticas en el centro de Utebo*. Recuperado el 1 de Abril de 2011 de <http://matematicavital.com/materialesimpresos/rutasmaticas/archivosrutas/rutautebo.pdf>
- Nd. (2010). *Un paseo matemático por Asturias*. Recuperado el 1 de Abril de 2011 de <http://mundomate2010.blogspot.com/2010/12/un-paseo-matematico-por-asturias.html>
- Usón, C. y De Blas J. (2000). *Paseos matemáticos por Logroño*. Logroño: Sociedad riojana de profesores de matemáticas.

CONVOCATORIA DE ASAMBLEA GENERAL ORDINARIA DE LA SOCIEDAD ANDALUZA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA THALES

La Sociedad Andaluza de Educación Matemática THALES convoca ASAMBLEA GENERAL ORDINARIA que tendrá lugar a las 9,30 horas del día 6 de julio de 2012, en Málaga, en el Salón de Actos de la Escuela Técnica Superior de Ingeniería en Telecomunicaciones, con el siguiente

ORDEN DEL DÍA

1. Lectura y aprobación si procede del acta de la asamblea anterior, celebrada en Cádiz el 24 de noviembre de 2011.
2. Información general por parte del presidente de la sociedad.
3. Aprobación si procede del balance económico del año 2011.
4. Aprobación si procede del presupuesto de ingresos y gastos correspondiente al año 2012.
5. Elección de cargos unipersonales de la Sociedad.
6. Ruegos y preguntas.

Mayo, 2012

El Secretario General de la SAEM THALES
Agustín Carrillo de Albornoz Torres

UNA EXPERIENCIA HEURÍSTICA EN 1º DE BACHILLERATO DE CIENCIAS

Enrique Hoyos Jiménez

IES Alcaría. La Puebla del Río, Sevilla (jubilado)

Resumen: *Esta experiencia de geometría analítica pretende estimular la capacidad de inventiva en el alumnado de 1º de Bachillerato en Ciencias. En este proyecto los alumnos utilizarán el método de Polya para resolver problemas.*

Palabras clave: *Polya, poligonal, polígono convexo, heurística.*

Summary: *This experience of analytic geometry is designed to develop the inventive capacity in students at 1st Bachelor of Science. In this project the students must use Polya's method to resolving problems.*

Keywords: *Polya, polygonal, convex polygon, heuristics.*

INTRODUCCIÓN

El modelo educativo impuesto legalmente hace difícil desarrollar a altos niveles las capacidades de razonamiento deductivo y formal en la Enseñanza Secundaria. Pese a ello es necesario abordar esta tarea, y una forma de hacerlo es comenzar por desarrollar la capacidad inventiva de los alumnos.

Al comienzo del Bachiller el alumno común aún utiliza más el pensamiento inductivo que el deductivo. Con esta actividad se trata de que los alumnos guíen su pensamiento según el esquema de G. Polya [Polya, G., 1981] para resolver un problema:

1. *Comprender el problema.*
2. *Concebir un plan:*
 - 2.a) *Determinar las relaciones entre datos e incógnitas.*
 - 2.b) *De no encontrarse de inmediato estas relaciones, descomponer el problema en varios, o abordar un problema semejante pero más sencillo.*
 - 2.c) *Elaborar tras ésto un plan de trabajo para la resolución.*
3. *Ejecutar el plan.*
4. *Examinar la solución y verificar si concuerda con el enunciado que formulamos para el problema.*

La actividad se plantea tras haber estudiado la geometría analítica de la recta en el plano, en particular el concepto y cálculo de la pendiente de una recta.

La actividad que se plantea la he efectuado con mis alumnos de 1º de Bachiller de Ciencias, en la clase de Matemáticas, en cursos pasados. Al final de este artículo planteo algunas posibles extensiones para alumnos de este nivel que cursen también Informática.

OBJETIVOS DE LA ACTIVIDAD

La actividad tiene como objetivo genérico desarrollar el pensamiento tanto inductivo como deductivo del alumnado. Para ello hacerles conocer y en lo posible *fixar en su mente* el esquema de Polya. La motivación del alumnado respecto a la matemática es un objetivo transversal, que se consigue en la medida de que el alumno descubre su propia capacidad de pensamiento, *ampliada* por este nuevo esquema de resolver problemas.

ENUNCIADO DE LA ACTIVIDAD

Se fija un recinto rectangular dentro del cual se esparce un número aleatorio de puntos, cada uno con coordenadas elegidas al azar. Se pide:

1. *Dibujar un polígono **convexo** que tenga como vértices el mayor número posible de estos puntos.*
2. *Enunciar una regla que permita generalizar el resultado, cuando en lugar de tener dibujados los puntos tan sólo se conocen sus coordenadas.*

METODOLOGÍA DE LA ACTIVIDAD

La actividad se va a desarrollar siguiendo el esquema de Polya.

- 1) *Para que los alumnos comprendan bien el problema conviene sugerirles que comiencen por resolverlo con pocos puntos (6 ó 7). Antes de pasar a la fase 2 conviene que resuelvan varias figuras en orden de dificultad creciente.*
- 2) *Cuando tengan resuelto el problema para 11 ó 12 puntos conviene dar un salto a figuras con 30 ó más puntos, para que perciban la dificultad en un caso general.*
- 3) *Con o sin ayuda conviene que descompongan el problema en al menos dos fases de resolución. Cada una la formularemos como un Problema (1º y 2º).*
- 4) *En la ejecución de cada fase se avanzará de forma progresiva (de menos a más puntos como en 1).*
- 5) *Cuando se llegue a formular una regla general para cada subproblema se **verificará** la misma en casos de complicación superior a los antes estudiados. **Si***

la regla falla se realizará una revisión del trabajo anterior (retroalimentación o interactividad con el problema)

- 6) *No se va a pedir en ningún momento a los alumnos que realicen una demostración formal de los resultados que obtengan, pues ésto supera en mucho el nivel en que se encuentran.*

Por experiencia podemos descartar que el alumno común sea capaz de **concebir un plan** cuando se trata de un problema de cierta envergadura, por lo que en esta fase especialmente se les proporcionará ayuda en forma de preguntas y sugerencias adecuadas a cada momento, además de invitarles a la discusión en pequeños grupos y en el grupo general.

También en las otras fases se recurrirá a estas ayudas. En cualquier caso cada alumno comenzará por trabajar individualmente.

PROBLEMA 1º.

Se fija un recinto rectangular y dentro de él se «esparcen» puntos aleatoriamente. El número de puntos esparcidos es también aleatorio. Se trata de:

- 1) *Dibujar un polígono que tenga a todos estos puntos como vértices (sin que dos lados se intersequen, salvo en los vértices).*
- 2) *Enunciar una regla general para resolver este problema.*

Según la capacidad del alumnado se les da normas de construcción de unas «plantillas» o se les facilitan las mismas ya confeccionadas. (Figura 1)

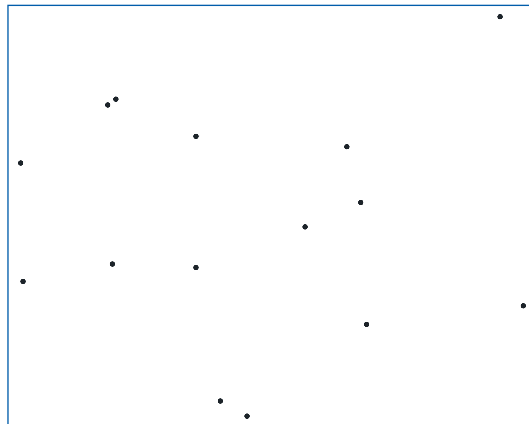


Figura 1.

El número de puntos de la plantilla que se proponga inicialmente no debe ser ni muy bajo (lo que hace irrelevante el problema) ni muy alto (lo que lo hace muy

intrincado y repelerá a la mayoría). Quince me ha parecido un número adecuado para presentar el problema en todos los cursos.

Para que alumnos más «avisados» no obvien la dificultad del problema, se puede presentar la figura resultante de unir los puntos en el orden en que se van «esparciendo» sobre el rectángulo. (Figura 2)

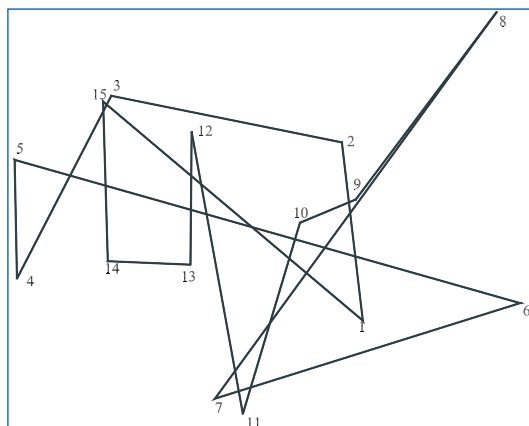


Figura 2.

Respuestas dadas por los alumnos

He tabulado los resultados obtenidos por los alumnos en siete años de experimentación. En total han sido 309 alumnos de los que me encargué (nueve grupos).

Las primeras reacciones de los alumnos pueden dividirse en dos clases:

- 1) Quienes se centran en la Figura 2 e intentan «deshacer la madeja». Aproximadamente un 65%.
- 2) Quienes comienzan a trabajar directamente sobre la Figura 1. (35% del total), que a su vez se divide en dos subclases:
 - 2.1) Alumnos que tratan directamente con los quince puntos. (20% del total)
 - 2.2) Alumnos que por iniciativa propia comienzan con menos puntos (por lo común cinco o seis puntos)

En la primera hora de clase tan sólo un alumno (en los siete años) resolvió el problema sobre la Figura 2.

De los que trabajaron directamente en la Figura 1 sobre los quince puntos el 3% consiguió un resultado válido.

Quienes comenzaron por el problema reducido (15% del total) todos lograron resultados válidos desde seis puntos hasta diez, en la primera hora, si bien el

porcentaje de alumnos que consiguió el decágono se redujo al 9% del total. (Se dieron por válidas tan sólo plantillas con puntos «rodeados» por otros)

Pedí a los alumnos que continuasen con el problema en casa y trajesen nuevos resultados el día siguiente.

En la 2ª hora el 9% de alumnos (en mayoría los que habían resuelto el decágono) traían una «regla general» coincidente en esencia:

- 1) *Se comienza por el punto de menor ordenada.*
- 2) *Se traza la vertical que pasa por este punto. Esta recta divide el recinto en dos partes.*
- 3) *Procediendo en «sentido antihorario»¹ se van uniendo los puntos de la parte derecha de menor a mayor ordenada («hacia arriba»). Figura 3.*
- 4) *Una vez alcanzado el vértice de mayor ordenada se siguen uniendo los puntos de la parte izquierda, pero ahora de mayor a menor ordenada, hasta volver al punto de partida. Figura 4.*

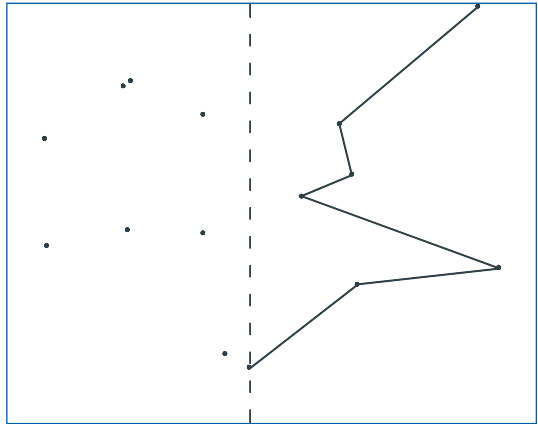


Figura 3.

Naturalmente se presentan las variantes de comenzar por el punto más alto ó por el más a la derecha ó el más a la izquierda, además de proceder en «sentido horario» en cualquiera de estas posibilidades.

Tras una breve discusión se llega al acuerdo de que las variantes son «equivalentes»², pues van a conducir al mismo resultado, y se decide aplicar la regla tal como está enunciada.

La llamaré en lo sucesivo **Regla P1**.

Expuesto este método en la pizarra, por alguno de los alumnos que lo han ideado, invito a los demás a que lo verifiquen con plantillas de quince a veinte puntos.

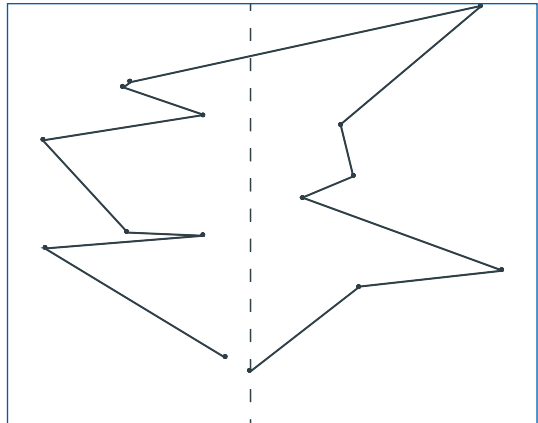


Figura 4.

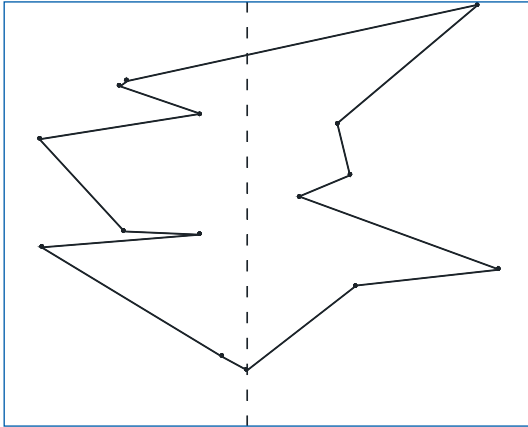


Figura 5.



Figura 6a.

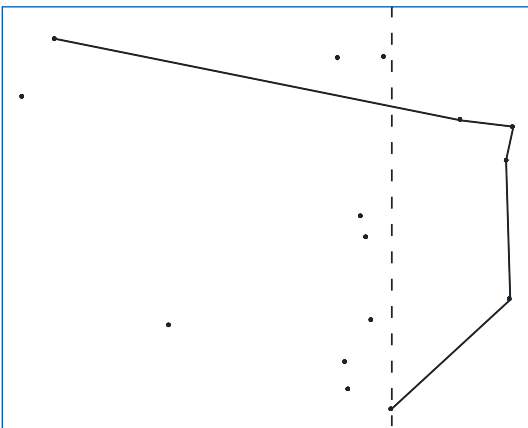


Figura 6b.

Tan sólo cuatro alumnos de los 309 formularon objeciones válidas en ese momento. (En dos años distintos)

En cualquier caso propuse la aplicación «literal» de la *Regla P1* a la plantilla de la Figura 6a.

Casi de inmediato la mayoría de alumnos caen en la cuenta del error en la *Regla P1*.

Conforme muestran las Figuras 6b y 6c, siempre que el punto más alto esté a la izquierda de la vertical trazada por el punto más bajo, cabe la posibilidad, al trazar los segmentos «hacia abajo», de que uno de ellos corte a otro ya trazado, con lo que no se obtiene un polígono.

Animo a los alumnos a perfeccionar la *Regla P1* para que sea aplicable también en estos casos. En casi todos los grupos se desarrolló una actividad febril en este momento.

Antes de finalizar la hora un 24% de alumnos había encontrado la solución:

Regla P2.

1) Trazar la recta que une el vértice de menor ordenada con el de mayor ordenada. Esta recta divide el recinto en dos partes.

2) A partir del punto de menor ordenada se van uniendo los puntos situados por encima de la recta, de menor a mayor ordenada, hasta alcanzar el punto de ordenada máxima.

3) A partir de este último se continúa uniendo puntos en sentido descendente, hasta cerrar el polígono.

Las Figuras 7a y 7b ilustran el proceso.

Invito entonces a los alumnos a la verificación con veinte puntos o más en el recinto.

Les recuerdo el enunciado original de la actividad y, tras algo de reflexión colectiva, aún con bastante intervención de mi parte, formulamos el siguiente problema:

PROBLEMA 2º.

Se fija un recinto rectangular dentro del cual se esparce un número aleatorio de puntos, cada uno con coordenadas elegidas al azar. Se pide:

- 1) Dibujar un polígono **convexo** que circunscriba al polígono formado por estos puntos.
- 2) Enunciar una regla que permita generalizar el resultado, cuando en lugar de tener dibujados los puntos tan sólo se conocen sus coordenadas.

Sobra a estas alturas presentar alguna «plantilla» al alumnado. No obstante tuve que aclarar para una parte de alumnos los conceptos de polígono convexo y polígono circunscrito de otro.

Les hice reflexionar sobre el resultado obtenido en el Problema 1º, en particular el hecho de tener que comparar ordenadas para determinar qué vértice sigue a otro, y habría que buscar algo semejante para resolver este nuevo problema. El problema quedaba, en casi todos los cursos, pospuesto para comenzar en casa y traer alguna solución al día siguiente.

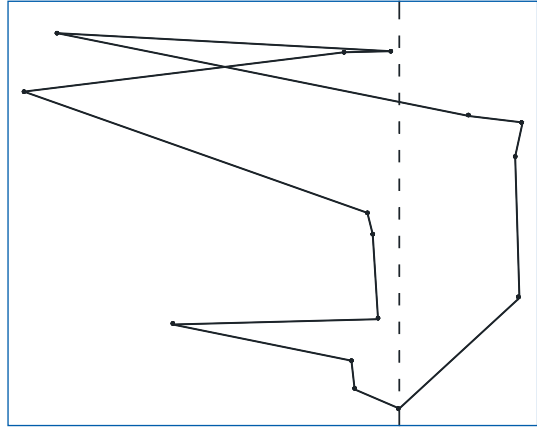


Figura 6c.

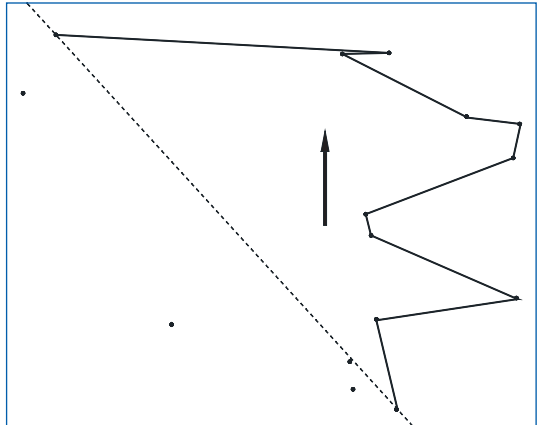


Figura 7a.

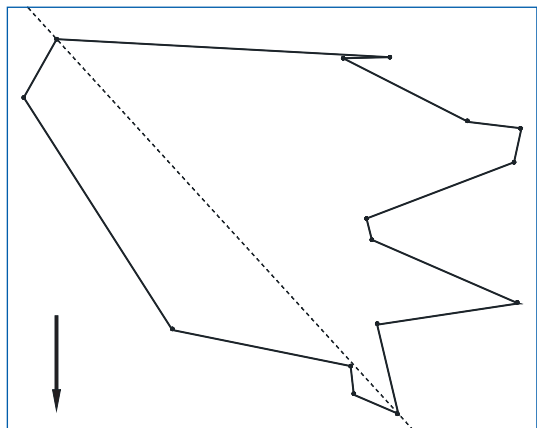


Figura 7b.

Al principio de la 3ª hora un 72% de alumnos me traía soluciones dibujadas válidas, pero tan sólo un 21% traía una propuesta de regla. Tras discusión para formalizarla se fija así:

Regla C1

- 1) *Comenzar trazando el polígono solución del Problema 1.*
- 2) *Siguiendo el sentido «antihorario», partir del vértice con menor ordenada y unir éste con el siguiente vértice.*
- 3) *Calcular la pendiente de este lado del polígono y compararla con la pendiente del siguiente lado.*
- 4) *Si la pendiente del lado siguiente es mayor o igual que la pendiente del primer lado, tomar este lado como lado del polígono convexo.*
- 5) *En caso contrario se desecha ese lado y se une el último vértice tomado para el polígono convexo con el siguiente vértice del polígono inicial, repitiendo el paso 3.*
- 6) *Se continúa del modo anterior hasta volver al punto inicial.*

Tan sólo un alumno (en los siete años) propuso una regla más elaborada, que veremos más adelante.

La *Regla C1* se comprueba es válida en algunos casos particulares sencillos (ejemplos que los alumnos se auto-plantearon), como se puede ver en la Figura 8a.

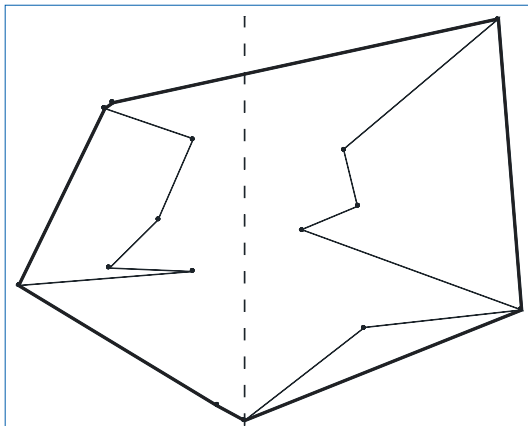


Figura 8a.

No obstante se descubren los fallos a poco que variemos la forma del polígono como se observa en las Figuras 8b y 8c.

Se impone sugerirles un cambio de perspectiva: «mirar la figura de izquierda a derecha en lugar de abajo hacia arriba».

El 26% de alumnos formularon entonces una regla que, salvo un refinamiento que les mostré posteriormente, se convirtió en la regla final. Muestro esta última por no alargar el artículo:

Regla C2

- 1) *Formar el polígono uniendo los puntos según la Regla P2.*

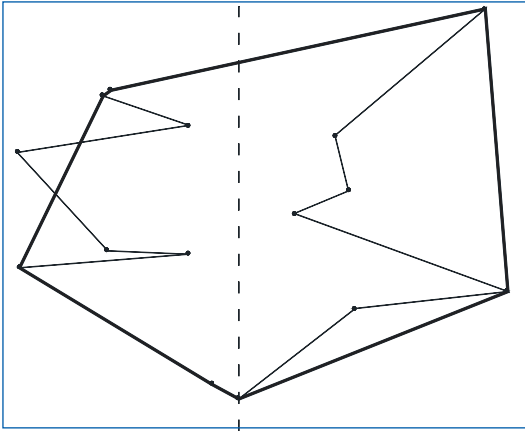


Figura 8b.

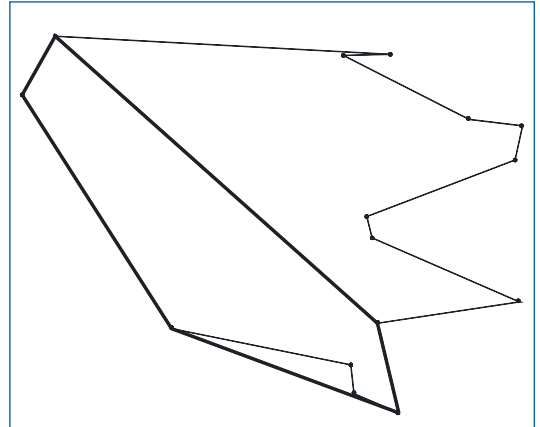


Figura 8c.

- 2) *Trazar la diagonal que une el vértice de menor abscisa con el vértice de mayor abscisa, y prolongarla hasta los lados del rectángulo. La llamaremos «diametral» por distinguirla de otras diagonales del polígono.*

Esta diametral divide el recinto en dos partes que llamaremos S, I, siendo S la parte formada por los puntos del recinto que tienen ordenada mayor que los de igual abscisa de la diametral. I es el complemento de S dentro del recinto.

Los extremos de la diametral se consideran que están tanto en S como en I.

- 3) *A partir del punto de mayor abscisa se trazan todos los segmentos que lo unen con los vértices en S. De éstos se calcula la pendiente y se elige el de menor pendiente (teniendo en cuenta el signo). Este segmento es un lado del polígono convexo.*
- 4) *Partiendo del 2º extremo del nuevo lado se repite el paso 3, hasta alcanzar el punto de menor abscisa.*
- 5) *A partir del punto de menor abscisa se repite el procedimiento anterior, eligiendo lados consecutivos según el criterio del paso 3, pero uniendo puntos de I.*
- 6) *Continuando se cerrará el polígono convexo al alcanzar el vértice de mayor abscisa.*

Las Figuras 9a a 9e ilustran el procedimiento.

EVALUACIÓN

Pasados dos o tres meses les pasaba a los alumnos un test sorpresa sobre este estudio. El test consistía en dibujar sobre una plantilla de quince puntos el polígono completo y el convexo envolvente del 1º.

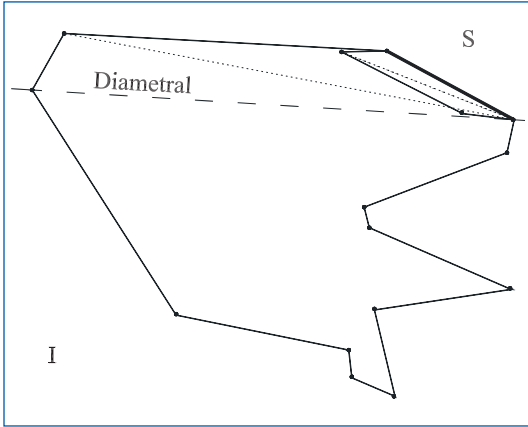


Figura 9a.

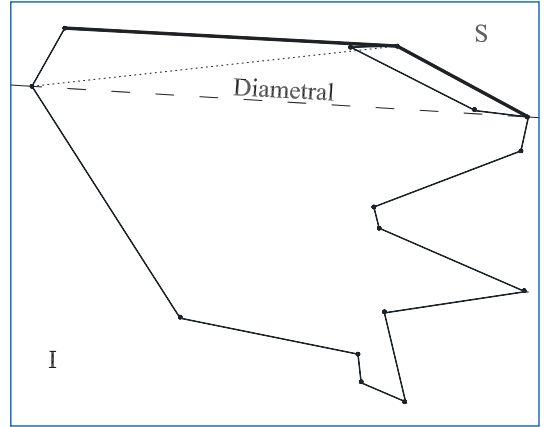


Figura 9b.

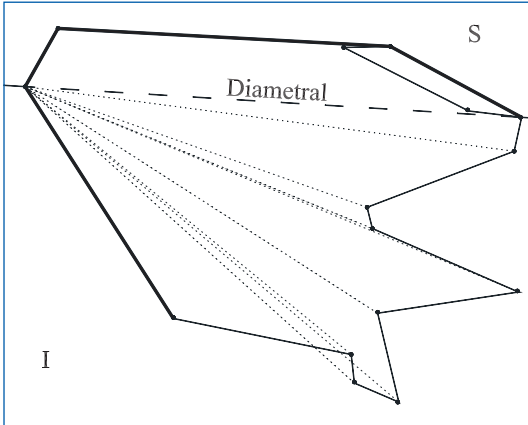


Figura 9c.

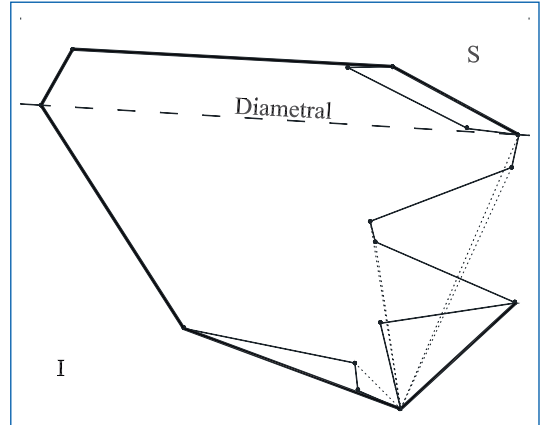


Figura 9d.

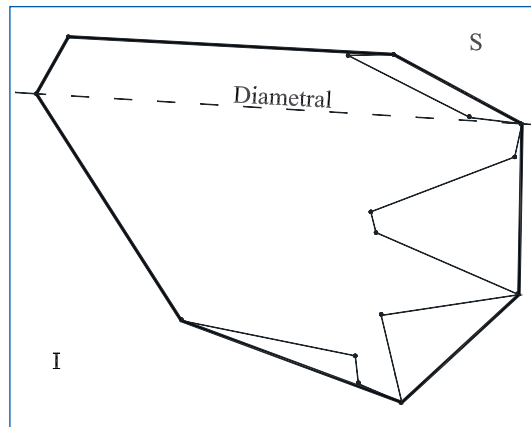


Figura 9e.

La plantilla era enrevesada, para impedirles lograr resultados válidos por mera intuición fortuita.

Los resultados del test están en la Tabla 1. La Tabla 2 resume los resultados durante el desarrollo de la actividad (del total de 309 alumnos 25 faltaron el respectivo día del test) .

Nº alumnos	% redondeado	Clasificación por etapas
66	23%	Construyen el polígono por la Regla P1 (con errores)
193	68%	Construyen el polígono por la Regla P2
25	9%	No utilizan bien las <i>Reglas P1 o P2</i> . Resultados erróneos
284	100%	Total 1ª Parte
14	5%	Se quedan estancados en la 1ª parte
73	26%	Construyen el polígono convexo por la Regla C1 (con errores)
182	64%	Construyen el polígono convexo por la Regla C2
15	5%	No utilizan bien las <i>Reglas C1 o C2</i> . Resultados erróneos
284	100%	Total 2ª Parte

Tabla 1. Test de construcción de un polígono y su envolvente convexo (Total de alumnos 284)

Nº alumnos	% redondeado	Clasificación por etapas
201	65%	Quienes se centran en la Figura 2 e intentan «deshacer la madeja»
62	20%	Tratan directamente con los quince puntos
46	15%	Por iniciativa propia comienzan con menos puntos
1	0,32%	Resolvió el problema sobre la Figura 2.
9	3%	Trabajaron directamente en la Figura 1 sobre los quince puntos, consiguiendo un resultado válido
28	9%	Consiguieron el decágono
28	9%	Trajeron una «regla general» (P1) al principio de la 2ª hora
74	24%	Antes de finalizar la hora habían encontrado la Regla P2
222	72%	Al principio de la 3ª hora traían soluciones dibujadas válidas
65	21%	Al principio de la 3ª hora traían Regla C1
81	26%	Formularon regla C2

Tabla 2 Resultados de la experiencia sobre polígonos convexos
(Total de alumnos 309)

A la vista de estas tablas se observa:

- 1) El porcentaje de alumnos que había asimilado la *Regla P2* pasó de ser un 24% quienes la «descubrieron» a un 68% .
- 2) Respecto a la *Regla C2*, de un 26% que la formuló, pasó al 64% quienes la asimilaron.
- 3) Marginalmente, entre aquellos que no resuelven el problema a la perfección, un 23% había asimilado la *Regla P1* (que da resultados en casos sencillos) y un 26% asimiló la *Regla C1* (válida también en algunos casos).
- 4) Sólo el 10% de alumnos no obtuvo resultados positivos de este estudio.

CONCLUSIONES

Esta forma de plantear actividades supone cambiar el rol del alumnado dentro del aula de matemáticas: de ser receptores de métodos y fórmulas para después aplicarlos pasan a ser «inventores» de procedimientos matemáticos.

La fijación de conceptos a largo plazo es superior con esta metodología a la que se consigue cuando el alumno tiene un rol pasivo.

El protagonismo adquirido por el alumnado ha hecho que (en los varios cursos con estas experiencias) aumentase la participación en clase, la discusión sobre métodos de resolución de problemas y la asimilación de conceptos.

La adquisición por el alumnado de las pautas de Polya les dota de un instrumento potente para el estudio de las matemáticas y otras ciencias.

EXTENSIONES DE LA ACTIVIDAD

Durante cinco de estos años aproveché la oportunidad de ser profesor de Informática de parte de estos alumnos para continuar con el desarrollo de algoritmos de ordenador para obtener el polígono convexo con mayor número de vértices. También para obtener el mayor número de cuadriláteros sin intersección con vértices aleatorios. Extendimos el estudio a la construcción de un autómata (algoritmo) capaz de identificar una forma poligonal convexa y hacer recorridos por su interior evitando choques.

BIBLIOGRAFÍA

- Polya, G. (1981) *Cómo plantear y resolver problemas*. México: Editorial Trillas..
- Mialaret, G. (1977) *Las Matemáticas: cómo se enseñan cómo se aprenden*. Madrid: Pablo del Río, Editor..
- Morris Kline (1978) *El fracaso de la Matemática moderna*. Madrid: Siglo XXI editores..
- Piaget, J., Choquet G., Dieudonné J., Thom, R. y otros (1978) *La enseñanza de las matemáticas modernas*. Madrid: Alianza Editorial S.A.:

REFERENCIA EN INTERNET

En mi página en Internet:

<https://sites.google.com/site/enriquehoyosjimenez/home/archivos>

Se puede encontrar el listado de una aplicación para la creación de un autómata capaz de reconocer recintos convexos (Automata_A.pdf).

NOTAS

1. Lo que no es cierto mas que en el decir de los alumnos.
2. No es cierto en todos los casos

CONVOCATORIA DE ELECCIONES DE CARGOS UNIPERSONALES DE LA SOCIEDAD ANDALUZA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA THALES

De acuerdo con los Estatutos de la Sociedad Andaluza de Educación Matemática THALES se convocan elecciones de cargos unipersonales regionales cuya elección se realizará en la asamblea general ordinaria que tendrá lugar a las 9,30 horas del día 6 de julio de 2012, en Málaga, en el de la Escuela Técnica Superior de Ingeniería en Telecomunicaciones.

Las candidaturas deberán incluir los nombres, apellidos y DNI de las personas propuestas para los cargos de Presidencia, Vicepresidencia, Secretaría General y Secretaría de Administración y Tesorería.

Las candidaturas se podrán presentar por correo postal, por FAX o por e-mail en la sede regional de la SAEM THALES en Sevilla o en el Centro de Documentación de la Sociedad en Cádiz.

El plazo de presentación de candidaturas finalizará a las 24 horas del día 30 de junio de 2012.

La relación de candidaturas presentadas se publicará en la Web de la SAEM THALES el día 3 de julio de 2012.

Mayo, 2012

El Secretario General de la SAEM THALES
Agustín Carrillo de Albornoz Torres

SAEM THALES SEDE REGIONAL

Facultad de Matemáticas.
Apdo. 1160
41080-SEVILLA
Tfno.: 954623658; Fax: 954236378
Correo-e: thales@cica.es

CENTRO DE DOCUMENTACIÓN SAEM THALES

Facultad de Ciencias Departamento de Matemáticas
Campus del Río San Pedro
Torre Central 4ª Planta. 11510-Puerto Real (Cádiz)
Tfno y FAX.: 956012833
Correo-e: thales.matematicas@uca.es

ESCALERA HACIA EL CIELO

Pérez-García, Miguel Á. (autor de contacto)

I.E.S. Las Espeñetas, (Orihuela)

Márquez-Navarro, Pascual

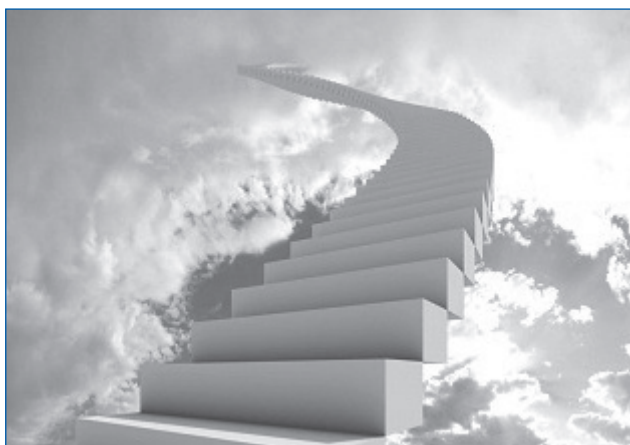
I.E.S Las Espeñetas

Roldán-Zafra, Juan

I.E.S. Thader, (Orihuela)

Resumen: *El presente artículo recoge la investigación científica que realizaron tres profesores de matemáticas y tecnología acerca de la estabilidad de estructuras crecientes. Durante la misma dedujeron la posibilidad de construir una escalera, simplemente apoyando peldaños uno encima de otro, que pueda unir dos puntos a diferente altura y desplazados horizontalmente cualquier distancia por grande que esta sea. El resultado está basado en el desplazamiento del centro de gravedad según la sucesión semiarmónica que da origen a una curva especial de gravedad. Esta investigación fue la base también para una experiencia realizada con alumnos de 1º Bachiller como aplicación del tema “Sucesiones”.*

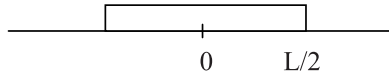
¿Es posible formar una escalera hasta el cielo simplemente colocando peldaños uno sobre otro sin ningún tipo de adherente?



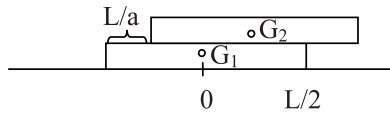
Seremos más modestos, ¿es posible formar una escalera sin adherente que nos permita subir a una torre de 12 metros de altura partiendo a unos 20 metros de distancia de la base de la torre?

¿Cómo hemos de colocar los peldaños para que la escalera se mantenga sola? La clave para que una escalera formada así se mantenga es que el centro de gravedad G de la estructura no salga nunca del primer peldaño. Sin embargo, está claro que cada vez que añadamos un nuevo peldaño el centro de gravedad se desplazará a la derecha. Y además llega un momento en que los peldaños salen totalmente fuera de la vertical del primero. Todo esto hace que la tarea parezca irrealizable.

Supongamos que tenemos peldaños rectangulares de longitud L y peso P perfectamente homogéneos y veamos que va ocurriendo con el centro de gravedad a medida que vamos añadiendo peldaños. Coloquemos el primero sobre una superficie perfectamente plana y gradúemos la línea sobre la que se apoya marcando el cero justo en la mitad del peldaño que es donde se encuentra su centro de gravedad.



Colocamos otro encima desplazado a la derecha una fracción $1/a$ de la longitud L

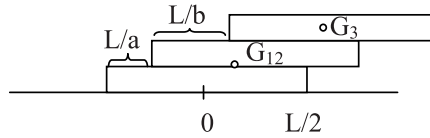


Horizontalmente, el centro de gravedad del primer peldaño está en $G_1=0$ y el del segundo en $G_2=L/a$. El nuevo centro de gravedad de la estructura formada por los dos se halla fácilmente como un problema de mezclas.

	Peso	G inicial	desplazamiento de G
Peldaño 1	P	0	$P \cdot 0$
Peldaño 2	P	L/a	$P \cdot L/a$
Sumas	$2P$		$P \cdot 0 + P \cdot L/a$

$$\text{Desplazamiento del centro G de la mezcla (estructura)} = \frac{P \cdot 0 + P \cdot L/a}{2P} = \frac{L/a}{2} = G_{12}$$

Supongamos que añadimos otro peldaño desplazado a la derecha una fracción $1/b$.



Realizamos el mismo proceso:

	Peso		desplazamiento de G
Estructura	2P	$\frac{L/a}{2}$	$2P \cdot \frac{L/a}{2}$
Peldaño 3	P	$(L/a)+(L/b)$	$P \cdot ((L/a)+(L/b))$
Sumas	3P		$2P \cdot \frac{L/a}{2} + P \cdot ((L/a)+(L/b))$

$$\text{Desplazamiento del centro G de la mezcla } \frac{2P \cdot \frac{L/a}{2} + P \cdot ((L/a)+(L/b))}{3P} =$$

$$= \frac{\frac{L}{a} + \frac{L}{a} + \frac{L}{b}}{3} = G_{13}$$

Añadamos otro peldaño desplazado una nueva fracción $1/c$ sobre el anterior que nos permita descubrir la ley de desplazamiento de G. Realizando el proceso anterior obtendremos que:

$$G_{14} = \frac{\frac{L}{a} + \frac{L}{a} + \frac{L}{a} + \frac{L}{b} + \frac{L}{b} + \frac{L}{c}}{4} \text{ o lo que es lo mismo } G_{14} = L \cdot \frac{\frac{1}{a} + \frac{1}{a} + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}}{4}$$

Descubrimos así la ley de desplazamiento del centro de gravedad.

Volviendo a nuestra pregunta inicial ocurre que si G_{14} es mayor que $L/2$ entonces estará fuera del primer peldaño y la escalera caerá. Es decir, para que se sostenga es

necesario que: $L \cdot \frac{\frac{1}{a} + \frac{1}{a} + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}}{4} \leq L/2$. Simplificando $(3/a)+(2/b)+(1/c) \leq 2$.

Por ejemplo, tomando $a=b=c=3$ el centro G estaría justo en $L/2$, en el borde justo del peldaño inferior y, por tanto, tan dentro como fuera de la estructura por

lo que en la práctica el equilibrio no se mantendría (Margarit, Joan. Cálculo de estructuras. 2005). Para evitar este tipo de contrariedades supondremos siempre que la suma ha de ser estrictamente menor que 2

Recordamos que nuestro objetivo es que la escalera pueda unir dos puntos a diferente altura y separados por cualquier distancia horizontal, es decir, que el peldaño superior se encuentre a la distancia horizontal del primero que sea necesario. En el caso anterior el último peldaño ni siquiera llegaría a salir una vez del peldaño base.

Eso nos dice que la suma de las fracciones que indican los desplazamientos ha de ser todo lo grande que sea necesario, en una palabra, que sea divergente. En nuestro ejemplo dando $a=4$, $b=3$, $c=2$ vemos que la suma es menor que 2. Esta sucesión de denominadores nos recuerda la sucesión armónica que además es divergente, la suma de todos sus términos es infinito. Hay varias demostraciones de este hecho. La más famosa corresponde a Johann Bernoulli (Pérez, Miguel A., “Una historia de las Matemáticas: retos y conquistas a través de sus personajes”, 2009).

$$\text{Sucesión armónica: } \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots, \frac{1}{n}, \dots$$

$$\text{Serie armónica: } \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{n} + \dots = \infty$$

Es el momento de preguntarse: ¿Será estable la escalera cuando vamos colocando muchas más piezas desplazadas una longitud igual a las fracciones de la serie armónica?

Supongamos que formamos una escalera con n peldaños desplazados el primero $1/n$, el segundo $1/(n-1)$, hasta el último que estará desplazado $1/2$. Obviando la longitud L de las fórmulas anteriores pues se cancelará al comparar con $L/2$, tendremos que:

$$G_{1n} = \frac{\frac{n-1}{n} + \frac{n-2}{n-1} + \dots + \frac{2}{3} + \frac{1}{2}}{n}$$

Hemos de comprobar que por muchos peldaños que coloquemos el centro G no sale fuera, es decir, es menor que $1/2$.

$$\text{Dicho de otra manera: } \lim_{n \rightarrow \infty} G_{1n} < \frac{1}{2}.$$

Sin embargo, en G_{1n} todas las $n-1$ fracciones del numerador son mayores que $1/2$ (salvo la última que es igual) por lo que $G_{1n} > \frac{(n-1) \frac{1}{2}}{n}$. Así que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} G_{1n} > \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n-1)\frac{1}{2}}{n} = \frac{1}{2}.$$

Esto echa abajo nuestra primera hipótesis, avanzando en cada peldaño un término de la serie armónica la escalera se desmoronaría.

Quizá hayamos corrido demasiado. ¿Y si damos los pasos más pequeños? Tomaremos la mitad de la serie armónica que, por supuesto, también es divergente.

$$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots, \frac{1}{n}, \dots \right) = \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{8}, \dots, \frac{1}{2n}, \dots : \text{Sucesión semiarmónica}$$

$$\text{Serie semiarmónica: } \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2n} + \dots = \frac{1}{2} \cdot \infty = \infty$$

Es decir, en cada peldaño avanzaremos $1/(2n), 1/(2(n-1)), \dots, 1/(2 \cdot 3), 1/(2 \cdot 2)$.

$$\text{Para ese caso tendremos que: } G_{1n} = \frac{\frac{n-1}{2n} + \frac{n-2}{2(n-1)} + \dots + \frac{2}{2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 2}}{n}$$

Vemos que todas las $n-1$ fracciones del numerador son menores que $\frac{1}{2}$ por lo

$$\text{que entonces: } G_{1n} < \frac{(n-1)\frac{1}{2}}{n}. \text{ Así que } \lim_{n \rightarrow \infty} G_{1n} < \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n-1)\frac{1}{2}}{n} = \frac{1}{2}.$$

¡Eureka! La escalera, incluso con infinitos peldaños, se mantendrá firme. Y avanzará hacia la derecha todo lo que sea necesario saliendo fuera del primer peldaño las veces que haga falta.

Hemos visto que $G_S < 1/2 < G_A$ donde G_S y G_A son los desplazamientos de los centros de gravedad en la sucesión semiarmónica y en la armónica respectivamente. Nos queda la duda de si entre la sucesión armónica y la semiarmónica hay otra que también nos sirva, es decir que el centro G quede antes de $\frac{1}{2}$ y que sea divergente. Por ejemplo, la sucesión $1/(1 \cdot 5n)$ se encuentra entre la $1/n$ (armónica) y la $1/2n$ (semiarmónica). En este caso:

$$G_{1n} = \frac{\frac{n-1}{1 \cdot 5n} + \frac{n-2}{1 \cdot 5(n-1)} + \dots + \frac{3}{1 \cdot 5 \cdot 4} + \frac{2}{1 \cdot 5 \cdot 3} + \frac{1}{1 \cdot 5 \cdot 2}}{n} = \frac{2 \left(\frac{n-1}{n} + \frac{n-2}{n-1} + \dots + \frac{3}{4} + \frac{2}{3} + \frac{1}{2} \right)}{n}$$

Vemos que las $n-3$ primeras fracciones del numerador son todas mayores que $\frac{3}{4}$, así que podemos sustituirlas para obtener un resultado más pequeño que G_{1n}

$$G_{1n} > \frac{2 \left(\left(\frac{3}{4} + \frac{3}{4} \dots + \frac{3}{4} \right) + \frac{2}{3} + \frac{1}{2} \right)}{n} = \frac{1}{2} \frac{(n-3) + \frac{4}{9} + \frac{1}{3}}{n}$$

Hallando los límites de los dos miembros como siempre:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} G_{1n} > \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \frac{(n-3) + \frac{4}{9} + \frac{1}{3}}{n} = \frac{1}{2}. \text{ Por tanto la escalera se desmoronaría.}$$

Pero además este razonamiento se puede aplicar para cualquier otra sucesión situada entre la armónica y la semiarmónica. Por ejemplo para la sucesión $\frac{1}{1'6 \cdot n}$

o lo que es lo mismo $3/5n$ buscaría cuando las fracciones del numerador de G_{1n} empiezan a ser todas mayores de $5/6$ (que serían las $n-6$ últimas). Multiplicadas por $3/5$ darían $1/2$ y estaríamos en la misma situación del ejemplo anterior.

En general para la sucesión $\frac{1}{k \cdot n}$ con $1 < k < 2$ habríamos de buscar una fracción

$\frac{a}{b} < \frac{1}{k}$ lo que implica que $a < b$ y buscar cuando todas las fracciones empiezan a

ser mayores que $\frac{b}{2a}$ la cual es mayor que $1/2$ seguro pues $a < b$.

La primera fracción a la que no se puede aplicar este proceso es la $1/2n$ pues

$$G_{1n} = \frac{1}{2} \left(\frac{n-1}{n} + \frac{n-2}{n-1} + \dots + \frac{2}{3} + \frac{1}{2} \right)$$

y no hay ninguna fracción en el numerador a partir de la cual, multiplicada por $1/2$ de mayor que $1/2$. Eso nos asegura que la sucesión semiarmónica es la primera de esa familia de sucesiones que cumple las condiciones exigidas, G_{1n} es siempre menor de $1/2$ y la serie correspondiente es convergente.

Para ilustrar todo lo expuesto hemos representado dos curvas, D_n y G_n . D_n es la curva que sigue la esquina superior izquierda de cada peldaño de la escalera al colocarlos según la sucesión semiarmónica, y G_n , la curva del centro de gravedad de la escalera a medida que aumenta el número de peldaños. En todos los ejemplos que veremos a continuación hemos considerado un peldaño de 25 cm de espesor y 160 cm de longitud.

Veamos las ecuaciones y representemos las curvas.

— Ecuación del desplazamiento de la escalera, D_n .

$$D_n = \sum_{i=2}^n \frac{1}{2i}$$

En la figura 1 tenemos la gráfica que representa una escalera de 11 peldaños. La escalera sobresale 161,59 cm, más de una vez la longitud del peldaño, que es de 160 cm; y tiene una altura total de 275 cm.

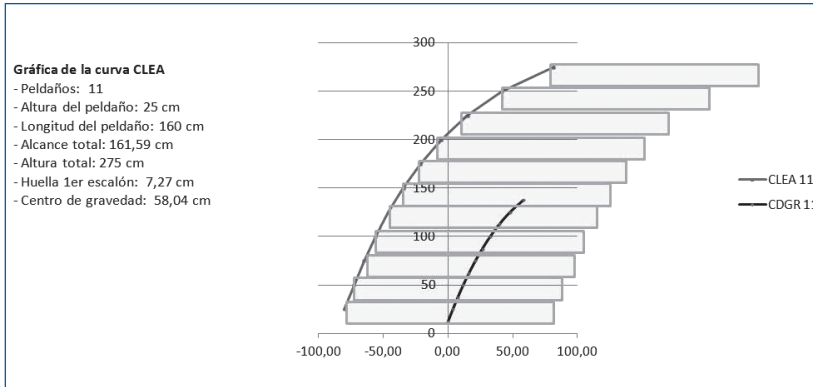


Figura 1

Se observa que, a medida que añadimos más escalones, la curva va inclinándose más cada vez, siguiendo la sucesión semiarmónica, y aumentando la huella.

— Ecuación del centro de gravedad de la escalera, G_n .

El centro de gravedad de la escalera de N peldaños se corresponde con el de un conjunto de N cuerpos desplazados entre sí horizontalmente según la serie semiarmónica. Para calcular el centro de gravedad se utiliza la expresión:

$$c.d.g. = \frac{\sum_{i=1}^n P_i X_i}{\sum_{i=1}^n P_i}$$

Donde P_i es el peso del escalón i . Puesto que todos los escalones son iguales, esta variable desaparece del cálculo. X_i es la distancia del c.d.g. del escalón i al eje vertical, y varía según la sucesión semiarmónica. La curva que nos proporciona el c.d.g. es:

$$G_n = \frac{1}{2n} \sum_{i=2}^n \frac{i-1}{i}$$

En la Figura 1 el centro de gravedad (curva corta) de la escalera completa queda sensiblemente por debajo del límite de estabilidad de la misma: a 21,96 cm del borde del primer peldaño. La huella más pequeña (del escalón más bajo) es de 7,27 cm. En general, a medida que aumenta el número de peldaños, la curva del c.d.g. se aproxima al borde del primer peldaño sin sobrepasarlo nunca.

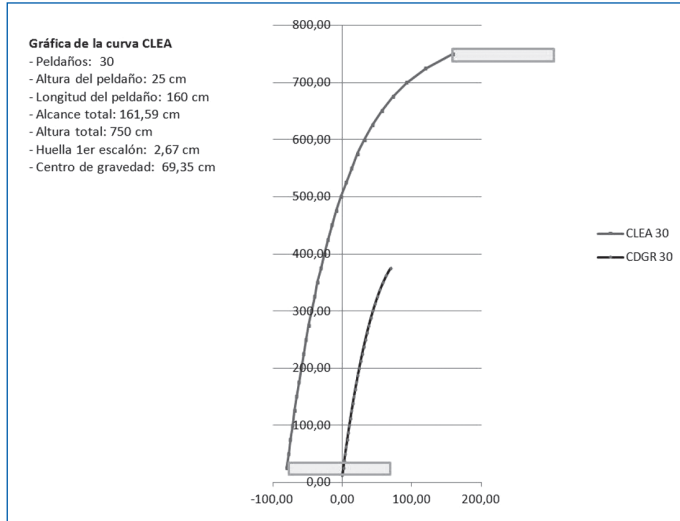


Figura 2

En la figura 2 observamos las curvas para una escalera de 30 peldaños.

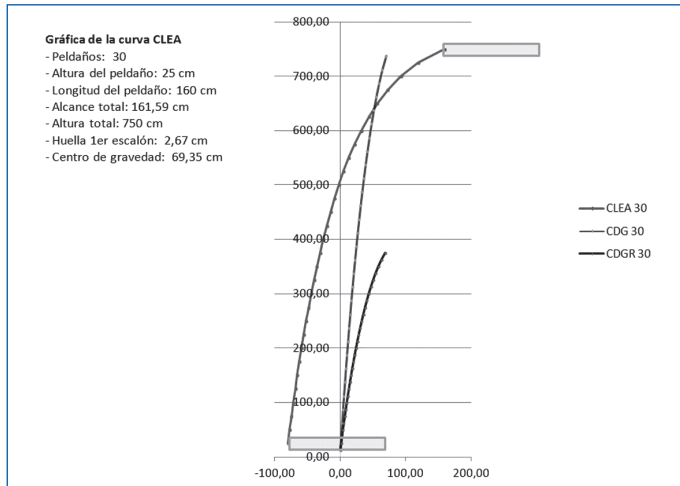


Figura 3

En la figura 3 se representan las dos escaleras en la misma gráfica para apreciar su diferencia.

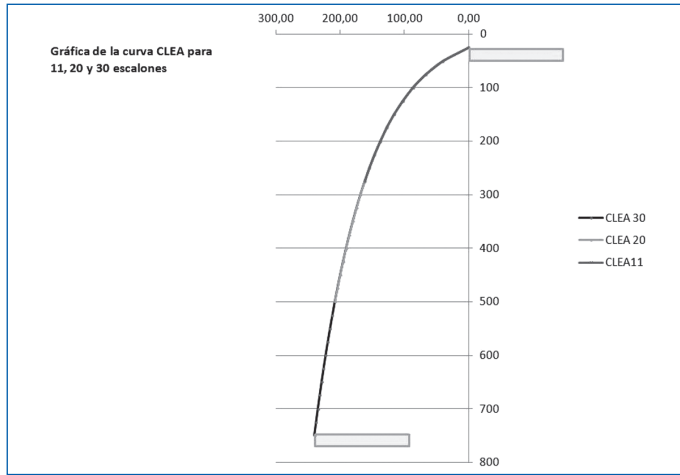


Figura 4

La gráfica de la figura 4 representa curvas para 11, 20 y 30 escalones en ejes invertidos, de forma que, para saber qué forma tendrá la escalera al aumentar indefinidamente el número de peldaños, sólo tenemos que ir prolongando el extremo inferior siguiendo la sucesión semiarmónica.

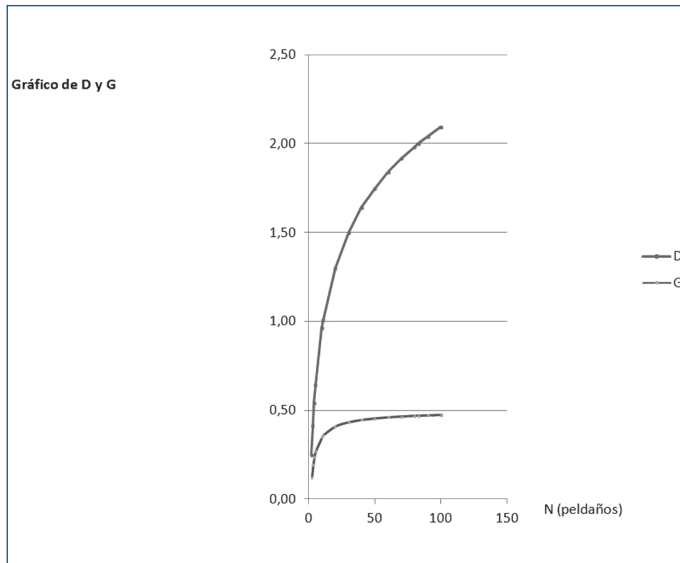


Figura 5

En la figura 5 se representa cómo varía el alcance de la escalera y su centro de gravedad a medida que usamos escaleras con mayor número de peldaños, N. El centro de gravedad, G, tiende asintóticamente a $\frac{1}{2} L$ (la mitad de la longitud del peldaño de la base) sin llegar a salir nunca; mientras que el alcance, D, aumenta indefinidamente aunque cada vez más lentamente:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} G_n < \frac{1}{2}; \lim_{n \rightarrow \infty} D_n = \infty$$

Para calcular el número de escalones necesarios para obtener alcances arbitrariamente largos podemos usar la aproximación de Euler-Mascheroni (Pérez, Miguel A. “Una historia de las Matemáticas: retos y conquistas a través de sus personajes”. 2009)

$$D_n \cong \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2n} + \ln(n) + \gamma \right)$$

Esta expresión aproxima el valor de la serie tanto más cuanto más términos consideremos siendo γ una constante de valor 0’5772... (la fórmula nos indica que nuestra curva es aproximadamente una logarítmica). Así, hemos obtenido la siguiente tabla, donde hemos puesto el interés en el número de escalones necesarios para que el desplazamiento horizontal de la escalera sea de 1, 2,... n veces la longitud de un escalón:

n veces	escalones	cálculo
1	11	Exacto
2	83	“
3	616	“
4	1.673	Aprox. de Euler-Mascheroni
5	12.367	“
6	91.353	“
7	675.071	“
8	4.988.968	“
9	36.820.263	“
10	272.297.583	“

Esta tabla, obviamente, es independiente de la longitud y espesor de los escalones.

LA EXPERIENCIA CON LOS ALUMNOS

Después de dar los conceptos básicos del tema de Sucesiones, se presentó la idea de centro de gravedad que ya conocían de Física y se animó a los alumnos al cálculo manual de los centros de gravedad para dos, tres y cuatro escalones que resolvieron como un **problema de mezclas** o utilizando la fórmula al respecto.

Tras orientaciones del profesor se establecieron las condiciones de estabilidad de la escalera. Después de conseguir un gran número (250) de pequeñas tablas de madera (medidas 10x12 cm) cortadas iguales por un carpintero, se les propuso **trabajar en grupo** construyendo escaleras cuyo último peldaño quedara fuera totalmente de la base. Probando consiguieron hacerlo incluso con 10 escalones (con la semiarmónica se necesitan 11). Se les propuso después sacarla 1'5 veces fuera de la base (se necesitan 33 escalones con la semiarmónica) lo que consiguieron con 33 exactamente.

Surgió la pregunta, ¿cuántas veces podremos sacarla fuera de la base?

Hubo distintas elucubraciones de los alumnos entre las que no se encontraba la respuesta correcta. El profesor apuntó la necesidad de llevar un orden en el crecimiento de la escalera (una **sucesión** de desplazamientos, así que el desplazamiento final sería la suma de todos los desplazamientos introduciendo la **idea de serie**) y las condiciones de dicho crecimiento (había de poder unir dos puntos por muy separados que estuvieran, introduciendo la idea de **serie convergente** y **serie divergente**).

Los alumnos propusieron algunas de las sucesiones geométricas recordando que sólo las de razón mayor que 1 son divergentes pero sin éxito en su construcción.

El profesor presentó entonces la **serie armónica** que cumplía estas condiciones (mostrando una de las demostraciones de su divergencia). Pronto las escaleras formadas en cada grupo de alumnos empezaron a desmoronarse. Dedujeron que ese crecimiento era demasiado rápido y preguntaron por otra sucesión más lenta. De nuevo es el profesor el que sugiere dividir por 2 y construyeron así la semiarmónica cuyas escaleras se mantienen.

La curiosidad les hizo preguntarse cuántos escalones se necesitan para salir fuera de la base una, dos, tres o más veces, pero tras intentos con calculadora en mano comprueban lo engorroso del cálculo y optan por crear un sencillo programa con EXCEL para dicho cálculo que funciona. Los resultados decepcionaron a algunos alumnos pues vieron que el crecimiento era muy lento necesiándose, por ejemplo, más de 12000 escalones para salir 5 veces de la base.

Es en ese momento cuando se trata de probar que en esa sucesión de desplazamientos el centro de gravedad no saldrá nunca del peldaño base y que por mucho que crezca la escalera nunca se caerá. Auxiliados por el profesor los alumnos comienzan a plantear la fórmula del centro de gravedad pero su dificultad para n escalones supone que sea el profesor quien la obtenga y calcule su límite probando que es menor que $\frac{1}{2}$. Las consecuencias de este resultado sorprendieron mucho a los alumnos.

El profesor presentó la fórmula de Euler-Mascheroni que inmediatamente aplicaron los alumnos comprobando cierto error y su disminución según crecía el número de términos. A partir de la expresión se relacionó la serie semiarmónica con la función logarítmica. Los alumnos manejaron entonces el programa wingraph para representar algunas de las gráficas que se han presentado como figuras 1, 2, 3, 4, 5, comprobando su forma logarítmica.

Pronto surgieron propuestas acerca del avance de los peldaños en dos direcciones al mismo tiempo (imagen 1) o girando a una determinada altura (imagen 2) fabricando ellos mismos las escaleras de las imágenes.

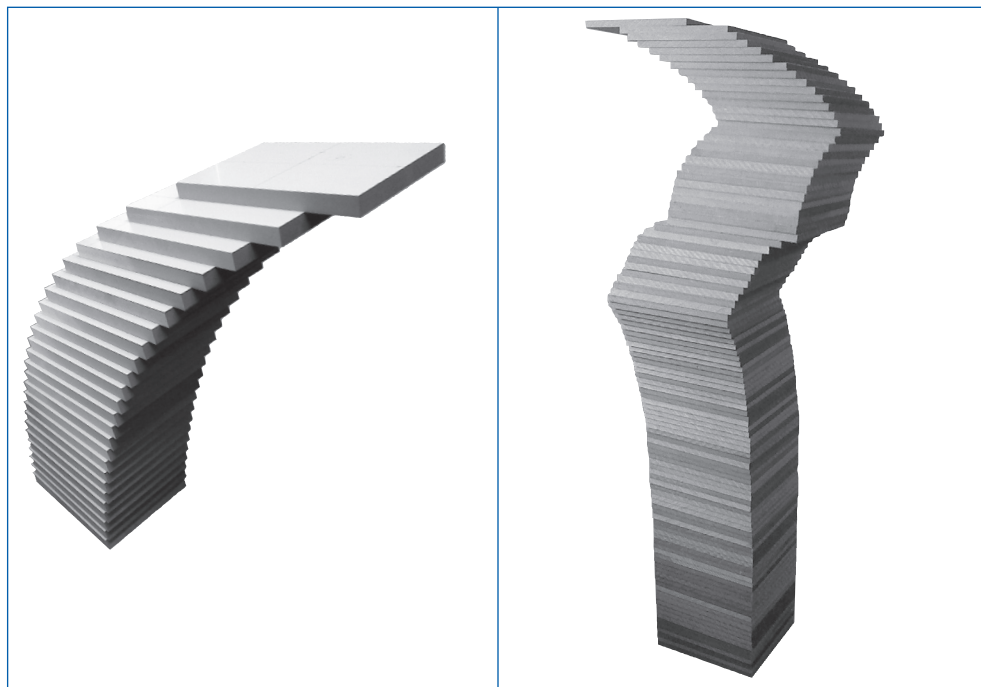


Imagen 1

Imagen 2

La valoración de esta actividad fue realmente positiva. La aceptación de los alumnos fue excelente si bien hay que decir que el alumno necesitó en exceso la intervención del profesor ante ciertas generalizaciones. Por otro lado se necesitan tres clases para su realización (quizás demasiado para lo apretado de la programación en 1º bachiller).

BIBLIOGRAFÍA

- Pérez, Miguel Ángel. (2009) “Una historia de las Matemáticas: Retos y conquistas a través de sus personajes”. Madrid. Visionnet
Margarit Joan. (2005) “Cálculo de estructuras”. Barcelona. Visor.

TÉRMINOS CLAVE:

- Stairs (escalera)
Center of gravity (centro de gravedad)
Serie armónica (harmonic series)

PROBABILIDAD CONDICIONAL: EXPLORACIÓN Y VISUALIZACIÓN MEDIANTE RECURSOS EN INTERNET

José Miguel Contreras García

Universidad de Granada

Carmen Díaz Batanero

Universidad de Huelva

Margherita Gonzato

Universidad de Granada

Gustavo Cañadas de la Fuente

Universidad de Granada

Pedro Arteaga Cezón

Universidad de Granada

Resumen: *En este trabajo analizamos la utilidad de algunos recursos relacionados con la enseñanza de la probabilidad condicional, tema en que se han descrito una variedad de posibles sesgos, y dificultades. Estos recursos nos ayudan a visualizar objetos matemáticos, propiedades o teoremas relacionados con dicho concepto, permitiendo al estudiante variar diferentes datos, tales como el número de sucesos o las probabilidades de los mismos y ver el efecto de dicho cambio sobre otros sucesos y probabilidades.*

Abstract: *In this paper we analyze the usefulness of some resources related to the teaching of conditional probability, the issue that some have described a variety of possible biases, and difficulties. These resources help us visualize mathematical objects, properties and theorems related to the concept, allowing the student to vary different data, such as the number of events or the odds of them and see the effect of that change on other events and probabilities.*

INTRODUCCIÓN

La probabilidad simple y condicional son conceptos requeridos en la construcción de la probabilidad producto, la inferencia estadística, clásica y bayesiana,

asociación entre variables, regresión, modelos lineales y toma de decisiones bajo incertidumbre. Sin embargo, en la investigación didáctica se han descrito numerosos sesgos de razonamiento, que continúan incluso después de la enseñanza (Díaz y de la Fuente, 2005). Los más importantes sesgos son los siguientes:

- Independencia y mutua exclusividad: Creer que dos sucesos son independientes si y sólo si son excluyentes, error muy extendido, y descrito anteriormente por Kelly y Zwiers (1986), quienes suponen que es debido a la imprecisión del lenguaje ordinario, en que “independiente” puede significar, a veces, separado. Esta creencia es errónea pues dos sucesos excluyentes son justamente dependientes pues uno no puede ocurrir a la vez que el otro.
- Confusión entre condicionamiento y causación: Mientras que la existencia de una relación causal implica la dependencia estadística entre las variables consideradas, lo contrario no es siempre cierto. Una relación condicional indica que una relación causal es posible, pero no segura. Sin embargo, la persona que evalúa una probabilidad condicional percibe en forma diferente las relaciones causales y diagnósticas, dando mayor peso a la causal e incluso considerando que todas las situaciones condicionales son causales (Tversky y Kahneman, 1982a). La relación de causalidad también se asocia, a menudo, con la secuencia temporal suponiendo que el suceso condicionante ha de suceder siempre antes que el condicionado (Falk, 1986; Gras y Totohasina, 1995).
- Intercambio de sucesos en la probabilidad condicional (Eddy, 1982; Falk, 1986). Son muchos los estudiantes que no diferencian $P(A/B)$ y $P(B/A)$, por ejemplo, probabilidad de que una prueba médica sea positiva si se está enfermo y la de estar enfermo si la prueba es positiva.
- Confusión de probabilidad condicional y conjunta (Pollatsek, Well, Konold y Hardiman, 1987; Ojeda, 1995; Tversky y Kahneman, 1982b).
- Situaciones sincrónicas y diacrónicas: Si el problema se plantea como una serie de experimentos secuenciales (situaciones diacrónicas) o simultáneos (sincrónicas) (Falk, 1989; Ojeda, 1995). Formalmente las dos situaciones son equivalentes, aunque los sujetos no siempre las perciben de este modo (Sánchez y Hernández, 2003).
- Razonamiento bayesiano: Las limitaciones en la comprensión de los enunciados de los problemas relativos al Teorema de Bayes, son debidas, entre otras razones, a la forma verbal en que están expresados y a la cantidad de datos y condiciones involucradas en los mismos. Tversky y Kahneman, (1982b) indican que la comprensión del teorema de Bayes exige esfuerzo cognitivo y no es fácil para los estudiantes la interpretación exacta de lo que se les pide. Gras y Totohasina (1995) suponen que los alumnos pueden encontrarse con dificultades en función del tipo de representación elegida para resolver el problema, que les es dado en formato verbal.

En la actualidad existen muchos recursos para la enseñanza de la estadística en Internet, que permiten explorar y simular procesos aleatorios y que podrían contribuir a la mejora de la intuición del alumno y por tanto a la superación de algunos de los sesgos descritos. Sería necesario, sin embargo, realizar análisis didácticos de estos recursos, así como de la forma de trabajo con ellos para orientar al profesorado. En este trabajo llevamos a cabo un estudio sobre algunos recursos que permiten explorar y visualizar la probabilidad simple y condicional y temas relacionados con ella, con el fin de prever su utilidad en la enseñanza y las posibles dificultades que se pueden encontrar a la hora de utilizar estos contenidos en el aula con estudiantes.

EXPLORACIÓN DE OPERACIONES ENTRE SUCESOS

En primer lugar analizamos un recurso (cuya pantalla principal se muestra en la figura 1) que aparece en la web Online Statistics: An Interactive Multimedia Course of Study (http://onlinestatbook.com/simulations/conditional_p/conditional_p.html) que permite explorar las operaciones entre dos sucesos. El recurso muestra un conjunto de 30 elementos $\{x, o\}$ de diferentes colores {azul, rojo y morado} que varían al azar para cada simulación. Seleccionando una probabilidad condicionada, el Applet nos muestra los elementos que forman el suceso condicionado a la condición lo que es de gran ayuda al alumno a la hora de la comprensión del comportamiento de la probabilidad condicionada. Por ejemplo, si se hace clic en $P(X|Red)$, “la probabilidad de X siendo Roja”, el recurso calcula la probabilidad condicional y muestra el número de casos favorables de entre todos los elementos rojos. La utilidad del Applet radica en que el alumno no solo ve el resultado sino que al mostrarle los elementos que forman los sucesos le ayuda a la comprensión de términos de difícil comprensión, por ejemplo, la probabilidad de X dado que es el rojo es el número de (nº de casillas X sombreadas de color rojo) dividido por el total de rojas.

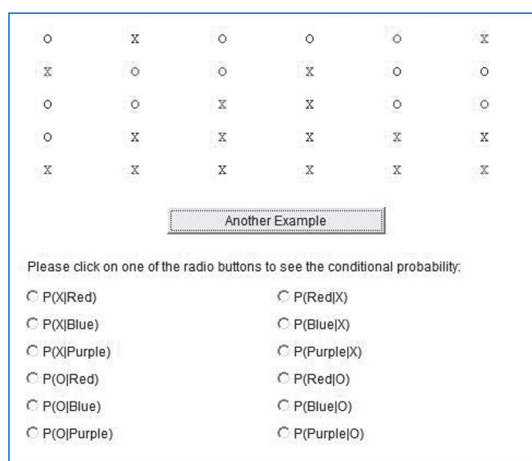


Figura 1. Pantalla del Conditional Probability Applet

En la Tabla 1 se analizan los objetos matemáticos implícitos en el recurso, que es básicamente una visualización de las diferentes operaciones que se pueden formar con los sucesos, y sus respectivas probabilidades condicionadas. A partir de los sucesos X, O, Red, Blue y Purple. El Applet nos muestra directamente las siguientes propiedades:

- Descomposición de la probabilidad de la unión:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

- Probabilidad del complementario:

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

- Leyes de Morgan que permite calcular la probabilidad del contrario de la unión e intersección:

$$P(\overline{A \cap B}) = P(\bar{A} \cup \bar{B}) \quad \text{o} \quad P(\overline{A \cup B}) = P(\bar{A} \cap \bar{B})$$

- Cálculo de la probabilidad condicional:

$$P(B / A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

- Teorema de Bayes:

$$P(B_i / A) = \frac{P(A / B_i)P(B_i)}{\sum_i P(B_i)P(A / B_i)} = \frac{P(A / B_i)P(B_i)}{P(A)}$$

Un primer objetivo es que el alumno perciba el significado de la intersección, la unión y los complementarios y de cómo cambian las probabilidades según la posición relativa de los sucesos. También permite observar la diferencia entre y , ya que muchos estudiantes confunden estas dos probabilidades o las consideran iguales, error que Falk (1986) denomina falacia de la condicional transpuesta. Otra posible aplicación sería comprobar que independencia no es lo mismo que mutua exclusividad. Moviendo los sucesos A y B hasta que no tengan intersección común (es decir sean mutuamente excluyentes) se observa claramente que tanto la probabilidad condicional como la de la intersección son nulas, aunque el producto de las probabilidades de los sucesos A y B no lo sea. También se puede trabajar el error denominado falacia de la conjunción (Tversky y Kahneman, 1982b) o creencia de que es más probable la intersección de dos sucesos que la de uno de ellos por separado o la de su unión.

Tipos	Objetos matemáticos en la situación	Significado en la situación
Situaciones-problemas	Exploración de las operaciones entre sucesos y sus probabilidades	Experimentación del cambio de probabilidades al cambiar la posición relativa de dos sucesos
Lenguaje	Gráfico: Visualización mediante rectángulos	Partición de un espacio muestral (A , no A ; B , no B) Intersección y unión de B con el suceso A El área de rectángulo total sería la probabilidad 1
	A , B	Sucesos
	A and B , not A and B	Intersección de sucesos e intersección de complementarios;
	Not A , not B	Complementarios de los sucesos A y B
	A or B , Not A or B	Unión de los sucesos A y B
	A given B , B given A	condición; hay una incorrección pues lo que se condiciona es la probabilidad no los sucesos
	$P(A)$, $P(B)$, ... P (Event)	Probabilidad de los sucesos
Verbal	Explicación de la situación	
Conceptos	Experimento aleatorio	Experimento abstracto, o, no se concreta
	Sucesos	Cuatro partes en el espacio muestral, sucesos disjuntos dos a dos
	Espacio muestral	Conjunto de posibilidades
	Complementarios	El espacio muestral menos el suceso
	Unión	Suceso formado por el conjunto de todos los elementos que forman parte de cada suceso por separado
	Intersección	Suceso formado por el conjunto de todos los elementos comunes a los todos los sucesos
	Partición	El área de cada rectángulo y su complementario es igual al del rectángulo mayor
	Probabilidad	Medida relativa del área de cada parte respecto al total
	Probabilidad condicional $P(B/A)$	Medida relativa del área de $B\bar{C}A$ respecto a cada parte A
Procedimientos	Cambio de posición relativa con el cursor	Se modifica el área de algunas regiones y su medida relativa respecto al total
	Cálculo de probabilidades condicionadas	Se aplicaría la fórmula; automático
	Comparación de probabilidades	Representación de las distintas probabilidades simples y condicionadas; visualmente las puede comparar el alumno
	Representación gráfica	Diagrama
Propiedades	La probabilidad condicional $P(A/B)$ puede ser diferente de la probabilidad condicional $P(B/A)$	Medida relativa del área de $B\bar{C}A$ respecto a cada parte A puede ser diferente a la medida relativa del área de $B\bar{C}A$ respecto a B
	Independencia	Cuando dos sucesos son independientes la probabilidad de B condicionado a A es igual a la probabilidad de B
	Incompatibilidad	Cuando dos sucesos son incompatibles se muestra que la probabilidad condicional de B condicionado a A es igual a cero
Argumentos	Visualizaciones	Definición visual de los distintos sucesos y su relación

Tabla 1. Objetos matemáticos implícitos en el recurso

Dificultades posibles de los estudiantes.

Una de las principales dificultades que pueden encontrar los estudiantes es la interpretación del lenguaje del Applet. En la columna de la izquierda aparecen diferentes operaciones con sucesos bajo la palabra “event” y las notaciones de las operaciones con sucesos, aunque intuitivas son correctas. Sin embargo, en la columna derecha sólo aparece mención a $P(\text{event})$, pero luego en cada fila no vuelve a aparecer la notación de probabilidad. Es por ello que los estudiantes podrían considerar todas las probabilidades listadas como probabilidades simples (en lugar de referirse a la probabilidad de la unión, intersección o contrario). La notación coloquial para los sucesos intersección y la probabilidad condicional puede también ocasionar el error pues Einhorn y Hogarth (1986) sugieren que los enunciados que usan la conjunción “y” pueden llevar a confundir la probabilidad conjunta y la probabilidad condicional. Por otro lado, como no se puede cambiar el tamaño relativo de los sucesos A y B, se puede interpretar que la probabilidad solo depende de la posición relativa de los sucesos, aunque en realidad también dependería del tamaño de los sucesos en relación al espacio muestral.

Exploración de otros conceptos

En la Figura 2 mostramos un recurso que puede servir para explorar la idea de independencia. Los estudiantes deben imaginar una baraja de cartas que contienen tarjetas de color rojo y negro y hacer predicciones sobre la ocurrencia de diferentes sucesos. El porcentaje de tarjetas rojas puede ser modificado. Se trata de hacer concienciar a los estudiantes de que la probabilidad de cada suceso no varía en función de los resultados obtenidos. Se les debe alentar a jugar el juego de varias maneras. En primer lugar, hacemos un ejercicio en el que la carta adivinada es la roja. De esta manera se puede estimar la proporción de tarjetas rojas encubiertas. El mismo ejercicio puede ser realizado por adivinar el porcentaje de cartas de color negro. Al final del ejercicio, los estudiantes deben ser animados a reflexionar sobre la idea de independencia y sobre la existencia de sesgos tales como la falacia del jugador. También se puede hacer observar la estabilización de las frecuencias relativas a la larga, pero hacer notar las fluctuaciones en las series cortas de ensayos. *Ver Figura 2 y 3.*

El recurso mostrado en la Figura 3 consta de un cuadrado de seis por seis que representa las 36 posibilidades a la hora de tirar dos dados de seis caras y nos permite investigar cómo se comportan las probabilidades condicionales. Podemos hacer una elección entre dos listas que aparecen en la pantalla para visualizar los diferentes sucesos que se presentan en el Applet y decidir cuál es el suceso condicionante. Cuando se haya elegido el suceso de cada lista, algunas de las celdas del cuadrado se colorearán de rojo o amarillo. Los cuadrados de color representan el número de combinaciones de los dados que satisfagan la condición B (la segunda condición de la derecha de la lista desplegable). De estas celdas de color, el rojo representa las combinaciones, que también cumplen la primera condición (A). Existen dos métodos para calcular , uno de ellos implica contar los cuadra-

dos de colores, el otro utiliza una fórmula. El Applet nos proporciona métodos para ver cómo se relacionan entre sí. Si pulsamos “Reverse”, se intercambian las declaraciones A y B. Con lo que debemos detectar rápidamente que no es, en general, igual a . Finalmente, en la Tabla 2 presentamos las direcciones de estos y otros recursos de exploración.

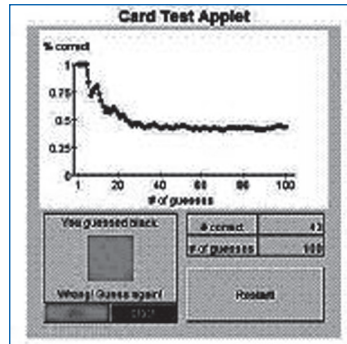


Figura 2. Card test Applet

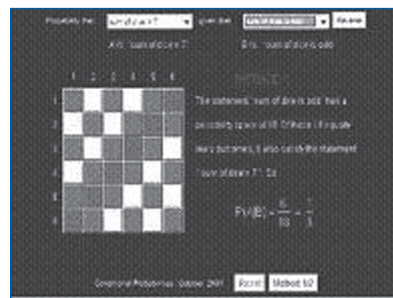


Figura 3. Conditional probability Applet

CONCLUSIONES

Hemos incluido en este análisis recursos que pueden servir para visualizar algunos de los objetos matemáticos que se relacionan tanto con la probabilidad simple, como con la probabilidad condicional, o algunas de las propiedades o teoremas relacionados con los mismos. En el trabajo en el aula, se plantearía el problema, dejando un tiempo para que los estudiantes lleguen a una posible solución. Seguidamente se discutirían con los estudiantes las soluciones correctas e incorrectas encontradas por los mismos, hasta lograr que se acepte alguna de las correctas. El profesor ayudaría a analizar las causas de los errores y haría un resumen de lo aprendido. En caso de resistencia a la solución, se dejaría confrontar las soluciones con la evidencia empírica producida por el Applet para que los estudiantes comprendan las causas de sus intuiciones erróneas y las revisen. Pensamos que en este juego se dan las condiciones de idoneidad didáctica, que Godino, Wilhelmi y Bencomo (2005) definen como la articulación de seis componentes:

Nombre	Dirección
Bayes Rule	www.bolderstats.com/gallery/prob/bayes.html
Birthday Demonstration	onlinestatbook.com/simulations/birthday/birthday.html
Cabri Java Applet	www.planetqhe.com/beta/compound%20events%20two/CabriJava%20Files/CAB.HTM
Card test Applet	http://www.stat.tamu.edu/~west/Applets/cardtest.html
Condicional probability demo	onlinestatbook.com/chapter5/conditional_demo.html
Conditional probability	www.rfbarrow.btinternet.co.uk/htmasa2/Prob2.htm
Conditional probability and independent events	www.cut-the-knot.org/Curriculum/Probability/ConditionalProbability.shtml
Conditional Probability and Multiplication Rule	www.spsu.edu/math/deng/m2260/stat/cond/cond.html
Conditional probability Applet	www.stat.tamu.edu/~west/Applets/Venn1.html
Conditional Probability Demo	onlinestatbook.com/simulations/conditional_p/conditional_p.html
Dice and conditional probability	www.math.fau.edu/Richman/Liberal/dice.htm
Dice Table	shodor.org/interactivate/activities/DiceTable/
Gamblers Fallacy Simulation	onlinestatbook.com/simulations/gambler_fallacy/gambler.html
Java Applets: TwoArm	www.dim.uchile.cl/~mkiwi/ma34a/libro/chapter4/TwoArm/TwoArm.html
Marbles	www.shodor.org/interactivate/activities/marbles/
Probabilty by Surprise	www-stat.stanford.edu/~susan/surprise/
Racing Game with One Die	www.shodor.org/interactivate/activities/RacingGameWithOneDie
Random Birthday Applet	www-stat.stanford.edu/~susan/surprise/Birthday.html
Two Events: Conditioning	www.stat.wvu.edu/SRS/Modules/ProbLaw/GivenProb.html
Venn Conditional	www.bolderstats.com/gallery/prob/conditional.html
Venn Diagram	www.bolderstats.com/gallery/prob/venn.html
Venn Diagram Applet	www.teachers.ash.org.au/miKemath/VennDiagramApplet/VennGame.html
Venn Diagram Shape Sorter	www.shodor.org/interactivate/activities/ShapeSorter/
Venn Diagrams	www.shodor.org/interactivate/activities/VennDiagrams/
Venn Diagrams and Probability	www.stat.berkeley.edu/~stark/Java/Html/Venn3.htm

Tabla 2. Recursos para visualización de la probabilidad condicional y conceptos relacionados

Idoneidad epistémica o matemática: Representatividad de los significados institucionales implementados (o pretendidos), respecto de un significado de referencia. El proceso descrito podría ser idóneo para el estudio de los conceptos de: probabilidad condicional, experimento compuesto, dependencia e independencia y experimentos dependientes e independientes, pero esta idoneidad depende del tipo

de solución encontrada. En general las soluciones formales tienen mayor idoneidad en un curso universitario y de formación de profesores, pero en un curso de secundaria las soluciones intuitivas podrían ser suficientes. La solución empírica, tiene, en general, baja idoneidad matemática, a menos que se complemente con una solución intuitiva o formal.

- **Idoneidad cognitiva:** Grado en que los significados pretendidos/ implementados son asequibles a los alumnos, así como si los significados personales logrados por los alumnos son los pretendidos por el profesor. La situación planteada tiene suficiente idoneidad en cursos de formación de profesores de secundaria y los últimos cursos de secundaria, pues los razonamientos descritos están al alcance de los alumnos.
- **Idoneidad interaccional:** Grado en que la organización de la enseñanza permite identificar conflictos semióticos y resolverlos durante el proceso de instrucción. Este tipo de idoneidad dependerá de cómo organiza el profesor el trabajo en el aula. Será importante que los estudiantes trabajen en grupos para que surja el conflicto y se explicita. Será importante también organizar una discusión colectiva de las soluciones para que los mismos alumnos ayuden a sus compañeros a detectar los puntos equivocados.
- **Idoneidad mediacional:** Disponibilidad y adecuación de los recursos necesarios para el desarrollo del proceso de enseñanza-aprendizaje. No se precisa de muchos recursos, pues incluso podría hacerse una simulación con objetos físicos o con un solo ordenador en el aula, donde los alumnos pueden jugar colectivamente.
- **Idoneidad emocional:** Interés y motivación del alumnado en el proceso de estudio. Pensamos que esta es la más alta de todas, pues el juego interesa a todo el que trata de resolverlo.

En los cursos de formación de profesores, el análisis didáctico, similar al descrito, sirve para aumentar el conocimiento de los profesores sobre probabilidad, metodología de la enseñanza de la probabilidad y algunos razonamientos erróneos de los estudiantes. Se podría mejorar el proceso si se dispone de soluciones dadas por alumnos reales que los profesores puedan analizar para detectar los errores descritos.

Nota: Este trabajo forma parte de los proyectos SEJ2007-60110 (MEC-FEDER) y EDU2010-14947 (EDUC), y beca FPI BES-2008-003573.

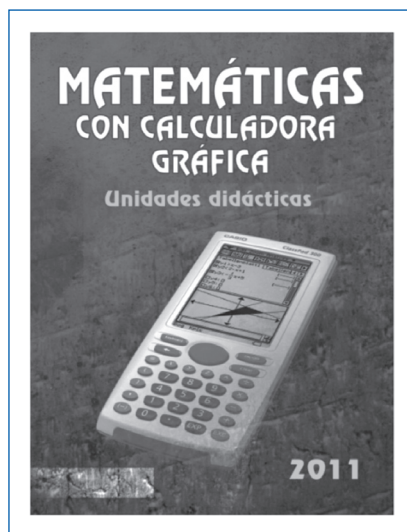
REFERENCIAS

EDDY, D. M. (1982). Probabilistic reasoning in clinical medicine: Problems and opportunities. En D. Kahneman, P. Slovic y Tversky (Eds.), *Judgement under uncertainty: Heuristics and biases*. New York: Cambridge University Press.

- EINHORN, H.J. y HOGART, R. M. (1986). "Judging probable cause". *Psychological Bulletin*, 99, 3–19.
- DÍAZ, C. y DE LA FUENTE, I. (2005). "Razonamiento sobre probabilidad condicional e implicaciones para la enseñanza de la estadística. Epsilon", 59, 245-260.
- FALK, R. (1986). Conditional Probabilities: insights and difficulties. En R. Davidson y J. Swift (Eds.), *Proceedings of the Second International Conference on Teaching Statistics*. (pp. 292–297). Victoria, Canada: International Statistical Institute.
- GODINO, J., WILHELMI, M. y BENCOMO, D. (2005). "Suitability criteria of a mathematical instruction process. A teaching experience of the function notion". *Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education*, 4(2), 1-26.
- GRAS, R. y TOTOHASINA, A. (1995). "Chronologie et causalité, conceptions sources d'obstacles épistémologiques à la notion de probabilité conditionnelle". *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 15(1), 49-95.
- KELLY, I.W. y ZWIERS, F. W. (1986). "Mutually exclusive and independence: Unravelling basic misconceptions in probability theory". *Teaching Statistics*, 8, 96–100.
- OJEDA, A.M. (1995). "Dificultades del alumnado respecto a la probabilidad condicional". *UNO*, N° 5, 37-55.
- POLLATSEK, A., WELL, A.D., KONOLD, C. y HARDIMAN, P. (1987). "Understanding conditional probabilities". *Organization, Behavior and Human Decision Processes*, 40, 255–269.
- SÁNCHEZ, E. y HERNÁNDEZ, R. (2003). Variables de tarea en problemas asociados a la regla del producto en probabilidad. En E. Filloy (Coord.), *Matemática educativa, aspectos de la investigación actual* (pp. 295–313). México: Fondo de Cultura Económica.
- TVERSKY, A. y KAHNEMAN, D. (1982a). Causal schemas in judgment under uncertainty. En D. Kahneman, P. Slovic y A. Tversky (Eds.), *Judgement under uncertainty: Heuristics and biases* (pp. 117–128). Cambridge, MA: Cambridge University Press.
- TVERSKY, A. y KAHNEMAN, D. (1982b). On the psychology of prediction. En D. Kahneman, P. Slovic y A. Tversky (Eds.), *Judgement under uncertainty: Heuristics and biases* (pp. 69–83). Cambridge, MA: Cambridge University Press.

MATEMÁTICAS CON CALCULADORA GRÁFICA. UNIDADES DIDÁCTICAS. GRAFICAL 2011

Manuel Torralbo Rodríguez
Agustín Carrillo de Albornoz Torres
(Editores)



Edita: Sociedad Andaluza de Educación Matemática THALES.

ISBN: 978-84-937577-8-6

175 páginas

En esta obra se recogen los trabajos ganadores del 5º Concurso de unidades didáctica “Matemáticas con calculadoras gráficas” convocado por la Sociedad THALES y la División Didáctica de CASIO-FLAMAGAS en el año 2011.

Los autores de los cuatro trabajos son profesores con años de experiencia en la enseñanza y aquí presentan una serie de propuestas didácticas para trabajar con las calculadoras gráficas en el aula en secundaria. En ellos se pone en evidencia que la calculadora sigue teniendo vigencia y actualidad como recurso didáctico al alcance de profesores y alumnos para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

Los temas abordados son la resolución numérica y gráfica de ecuaciones, las figuras planas, las matrices, determinantes y propiedades y, los polígonos regulares convexos y estrellados. Cada uno de ellos presenta de manera clara y concisa todos los elementos de una unidad didáctica, por lo que serán de gran ayuda a los profesores a la hora de diseñar nuevas unidades didácticas incorporando la calculadora gráfica. Su lectura invita a poner en práctica algunas de las actividades propuestas.

El libro es de interés para aquellos profesores de matemáticas que recién se incorporan a la actividad docente porque les brinda modelos y ejemplos prácticos. Asimismo, los profesores con más experiencia podrán contrastar estas unidades con las propias e incorporar algunos aspectos para complementarlas.

Alexander Maz Machado

SECCIÓN 1 (RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS)

F. Damián Aranda Ballesteros
Manuel Gómez Lara

RE_007_EPSILON

- a) Discuta y resuelva según el signo del parámetro k , el sistema:

$$\begin{cases} x_1x_2 + x_3x_4 = k \\ x_1x_3 + x_2x_4 = k \\ x_1x_4 + x_2x_3 = k \end{cases}$$

- b) Para los valores $k=4$, $k=-6$, halle las soluciones enteras de los correspondientes sistemas.

RE_008_EPSILON

Construya el triángulo ABC, si se conocen los datos siguientes:

- i) a , $b + c$ y r (Inradio). ii) a , $b - c$ y r (Inradio).

RE_009_EPSILON

Sean dadas dos circunferencias de centros O_1 y O_2 , y radios R_1 y R_2 , respectivamente ($R_1 < R_2$). Sea r una de las rectas tangentes y exterior común a ambas circunferencias y p el valor de la distancia entre los centros.

- a) Determine el valor de los radios r_1 y r_2 de las circunferencias que, siendo tangentes exteriores a ambas circunferencias, lo sea también a la recta r .
- b) Si ambas circunferencias son ahora tangentes ($p = R_1 + R_2$), deduzca en este caso, el valor de los radios r_1 y r_2 de las circunferencias tangentes.
- c) Indique cómo realizaría la construcción de ambas circunferencias.

- d) Pruebe que la relación $\frac{1}{\sqrt{R_1}} = \frac{1}{\sqrt{r_1}} + \frac{1}{\sqrt{r_2}}$ es condición necesaria y suficiente para que las dos circunferencias, solución del problema, sean también tangentes entre sí. Verifica esta situación para el caso de que $R_1 = \frac{1}{6}R_2$ y halla el valor p correspondiente.

RE_010_EPSILON

Sean dadas las dos parábolas de ecuaciones respectivas:

$$P_1 \equiv x^2 = 2qy \text{ y } P_2 \equiv y^2 = 2px.$$

- a) Determina los puntos A y B de P_1 y P_2 respectivamente, de modo que la recta AB sea la tangente común a ambas parábolas.
- b) Prueba que las otras dos rectas, tangentes en A y B a las parábolas P_2 y P_1 , se cortan en P, punto de intersección de P_1 y P_2 y distinto del vértice común de ambas.
- c) Prueba que para cualquier punto C de P_2 , exterior a P_1 y distinto de B, podemos construir el triángulo CDE, inscrito en P_2 y cuyos lados serán tangentes a la otra parábola P_1 .

Nota: La proposición anterior será igualmente válida para la parábola P_1 intercambiando los datos adecuadamente.

- d) Contesta a las mismas cuestiones anteriores, en el caso de las parábolas

$$P_1 \equiv x^2 = 6y \text{ y } P_2 \equiv y^2 = 8x \text{ y , siendo el punto } C = (8,8).$$

RE_011_EPSILON

Comprueba que las raíces complejas de la ecuación $(2z+1)^5 = (4z+5)^5$ se encuentran en la circunferencia de centro $C = \left(\frac{-3}{2}, 0\right)$ y de radio.

RE_0112_EPSILON

- 1) Sean $a, b, c \in \mathbb{R}$. Pruébese que si $a, b, c \geq 1$, entonces

$$4(abc + 1) \geq (a+1)(b+1)(c+1).$$

- 2) En general, sean $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n \in \mathbb{R}$. Pruébese que si $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n \geq 1$, entonces se verifica: $2^{n-1}(a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \dots \cdot a_n + 1) \geq (1+a_1) \cdot (1+a_2) \cdot (1+a_3) \cdot \dots \cdot (1+a_n)$

AGRADECIMIENTO A ÁRBITRO

En este último número del año 2011 de Epsilon, Revista de Educación Matemática, agradecemos la colaboración de aquellos colegas que aportaron su conocimiento y tiempo en la revisión y arbitraje de los manuscritos propuestos a la revista. Mediante sus comentarios y sugerencias ayudan a obtener y mantener una calidad de los artículos publicados durante los años 2010 y 2011.

Agustín Carrillo

Alexander Maz

Bernardo Gómez

Damian Aranda

Dolores Carrillo

Francisco España

Inmaculada Serrano

Jesús Salinas

José Ortiz

Juan Jesús Ortiz

Liliana Mabel Tauber

Manuel Gómez

Maryorie Benavides

Miguel Picado

Noelia Noemí Jiménez

Pablo Flores

Pedro Huerta

Rafael Bracho

Rafael Ramírez

Roberto Vidal

ENVÍO DE ARTÍCULOS

Los artículos enviados a la revista Epsilon pasan por un proceso de revisión por pares. Para enviar un artículo para su evaluación, siga las siguientes instrucciones:

1. Los trabajos deben ser de Educación Matemática. El artículo no debe haber sido publicado con anterioridad en una revista y los autores deben poseer los derechos de autor correspondientes.
2. Los artículos pueden ser: de investigación (experimental o un estudio teórico), de ideas para el aula, de experiencias. También se aceptan artículos para la sección de resolución de problemas.
3. Todo artículo debe estar escrito en castellano y debe incorporar referencias bibliográficas, en todo caso, deben seguir las normas del manual de publicación de la APA (quinta edición) de acuerdo con el siguiente modelo:

Para artículo de revista: Leinhardt, G., Zaslavsky, O. y Stein, M. (1990). Functions, graphs and graphing: tasks. Learning and teaching. *Review of Educational Research*, 60(1), 1-64.

Para libro: Fernández, A. y Rico, L. (1992). *Prensa y educación Matemática*. Madrid: Síntesis.

Para capítulo de libro, actas de congreso o similar: Fuson, K. (1992). Research on whole number addition and subtraction. En Grouws, D. (ed.) *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, 243-275. MacMillan Publishing Company: New York.

Para artículo de revista electrónica o información en Internet: Cutillas, L. (2008). Estímulo del talento precoz en matemáticas. *Números* [en línea], 69. Recuperado el 15 de febrero de 2009, de <http://www.sinewton.org/numeros/>

4. El artículo deberá tener una extensión máxima de 7.000 palabras, incluyendo las tablas y los anexos si es de investigación. Para las secciones experiencias e ideas para el aula la extensión máxima será de 3.000 palabras. El formato de párrafo debe ser: letra Times New Roman tamaño 12 e interlineado sencillo y sin sangrado. Párrafos con espaciado anterior de 6 pts. Los subtítulos deben estar sin numeración.
5. El artículo debe incluir en español e inglés: (a) el título del trabajo, (b) un resumen con un máximo de 100 palabras, y (c) de tres a seis términos claves.

6. El archivo con el artículo debe enviarse en formato doc y pdf.
7. Los esquemas, dibujos, gráficas e imágenes deben enviarse por separado (en una carpeta aparte del documento de texto) en formato TIFF o JPG con una resolución mínima de 300 puntos por pulgada. Cada archivo debe estar claramente identificado y se debe indicar en el texto el lugar donde se ubica. Las fotos en las que aparezcan menores deberán estar pixeladas o tener autorización escrita del tutor (se adjuntará copia con el archivo).
8. Se debe enviar una segunda versión del artículo en la que no aparezcan los nombres de los autores, ni información relativa a ellos o que pueda servir para identificarlos (e.g., institución a la que pertenecen, citas y referencias bibliográficas propias, agradecimientos, datos del proyecto en el que se enmarca el trabajo). En esta versión, reemplace las citas y referencias bibliográficas por “Autor, 2008” o “Autor et al., 2008”. En las referencias bibliográficas propias se debe eliminar el título y el nombre de la revista o el título del libro donde se publica.
9. Los datos de los autores (nombre, institución a la que pertenecen, dirección de correo electrónico, dirección postal y número de teléfono y fax) deben incluirse en un archivo aparte. Utilice únicamente un apellido o los dos pero separados por un guión.
10. Los autores deben ser los dueños de los derechos de autor del documento que se envía y, en su caso, haber obtenido los derechos para publicar aquel material de otros autores que se incluya en el documento.
11. Cuando el artículo tenga más de un autor, éstos designarán a un autor de contacto quien se encargará de toda la comunicación con la revista Epsilon.
12. Los archivos se deben enviar al centro de documentación Thales thales.matematicas@uca.es señalando si es un trabajo de investigación, experiencias o ideas para el aula.
13. Una vez aceptado el artículo para su publicación, se solicitará al autor de contacto que firme una carta de cesión de derechos de autor en nombre de todos los autores del trabajo.

