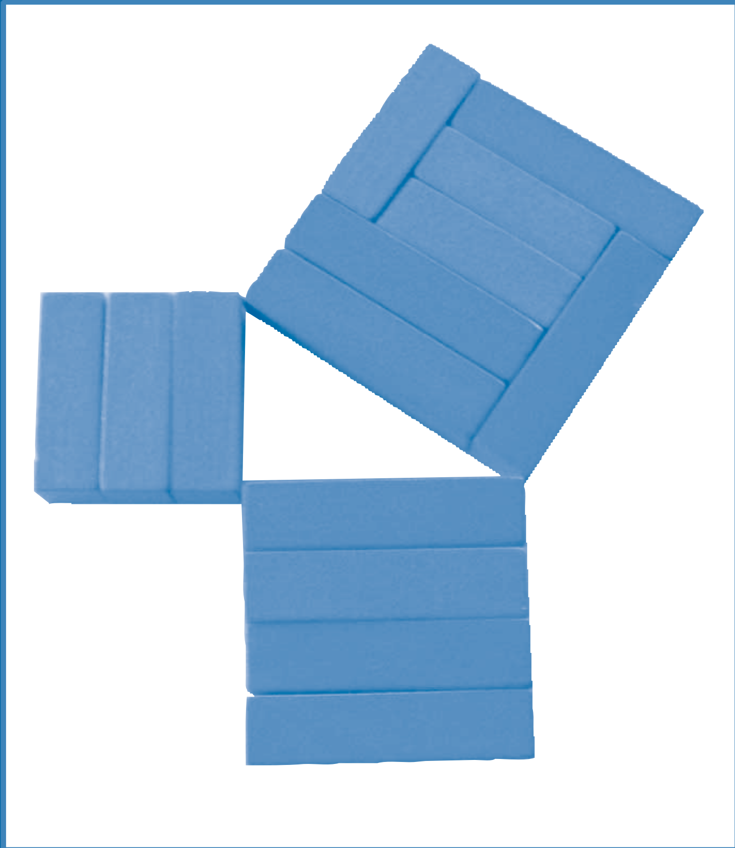
78

Vol. 28 (2)
2011



épsilon

Revista de Educación Matemática

Editada por la S.A.E.M. "THALES"

La revista Epsilon está reseñada en:
IN-RECS, Dialnet y Base de Datos del Centro de Documentación Thales.

epsilon 78

Revista de Educación Matemática

Sociedad Andaluza de Educación Matemática "Thales"

Página de la revista: http://thales.cica.es/epsilon
Revista: epsilon@thales.cica.es

Edita
Sociedad Andaluza de
Educación Matemática "Thales"
Centro Documentación "Thales"
Universidad de Cádiz
C.A.S.E.M.
11510 PUERTO REAL (Cádiz)

Maquetación e impresión
Utrerana de Ediciones, s.l.
Cristóbal Colón, 12
41710 Utrera (Sevilla)

Depósito Legal
SE-421-1984

I.S.S.N.
1131-9321

Período
2º cuatrimestre 2011

Suscripción
ESPAÑA: 42,00 euros
PAÍSES DEL EURO: 63,00 euros
RESTO DE PAÍSES: 90 $ USA
(3 NÚMEROS AL AÑO)

ÍNDICE

INVESTIGACIÓN

EXPERIENCIAS

Epsilón - Revista de Educación Matemática 2011, Vol. 28(2), nº 78, pp. 7-17

La paradoja de la caja de Bertrand: algunas formulaciones y cuestiones didácticas

José Miguel Contreras García, Carmen Batanero Bernabeu, Pedro Arteaga Cezón y Gustavo Cañadas de la Fuente
Departamento de Didáctica de la Matemática
Universidad de Granada

Resumen: *En el campo de la probabilidad encontramos diferentes paradojas, de solución asequible a los estudiantes, que permiten organizar actividades didácticas en la enseñanza y aprendizaje de conceptos probabilísticos. En este trabajo describimos la paradoja de la caja de Bertrand y algunas de sus variantes, analizando los contenidos trabajados en su solución, posibles razonamientos erróneos de los estudiantes e idoneidad didáctica para el estudio de la probabilidad.*

Abstract: *In the field of probability different paradoxes offer affordable solutions for students that to organize educational activities in teaching and learning of probabilistic concepts. This paper describes the Bertrand box paradox and some variations of the same, by analyzing the contents worked in its solution, the possible students' false reasoning and its educational suitability in the study of probability.*

INTRODUCCIÓN

Aunque la enseñanza de la probabilidad en secundaria tiene ya una gran tradición, algunos profesores pudieran sentirse inseguros con enfoques más informales, basados en la experimentación y simulación (Stohl, 2005). Es importante apoyarlos y proporcionarles actividades que les sirvan para motivar a sus alumnos y ayudarles a enfrentarse con algunas de sus intuiciones erróneas, al tiempo que les informamos de las posibles dificultades de los alumnos.

Algunos autores sugieren el interés de utilizar algunas paradojas sencillas de probabilidad para plantear situaciones motivadoras en el aula. Lesser (1998) indica que el uso inteligente de paradojas en la clase de matemáticas apoya una pedagogía constructivista, promoviendo un aprendizaje profundo a partir de las creencias previas y dando al profesor el papel de facilitador del aprendizaje. Falk y Konold (1992), sugieren que la solución de estas paradojas implica por parte del resolutor una consciencia de sus propios pensamientos que es un paso vital para alcanzar la capacidad matemática abstracta. Konold (1994) destaca el efecto motivador de los resultados sorprendentes, que anima a los estudiantes a explorar el problema más formalmente. León (2009) indica que la historia de la probabilidad presenta situaciones muy atractivas que pueden conducir a reflexionar sobre la presencia del azar en la cotidianidad además de servir de motivación hacia el estudio por parte de los alumnos. En el mismo sentido se expresan Basulto y Camuñez (2007).

En lo que sigue describimos la paradoja de la caja de Bertrand y algunas de sus variantes, mostrando una formulación intuitiva de las soluciones correctas y analizando las posibles dificultades de los estudiantes. Finalmente analizamos los objetos matemáticos que se trabajan en la solución de esta paradoja y su idoneidad didáctica para la clase de probabilidad.

La Paradoja de la Caja de Bertrand

Esta paradoja fue formulada por Joseph Bertrand (1822-1900) matemático francés conocido por sus trabajos en Teoría de Números, Geometría Diferencial, y Teoría de las Probabilidades. En su libro "Calcul des probabilités" (Bertrand, 1888), incluye el siguiente problema, conocido como la "Paradoja de la caja de Bertrand":

> Tenemos tres cajas y cada caja tiene dos cajones con una moneda cada uno: una caja contiene dos monedas de oro, otra caja dos monedas de plata, y la caja final con una de cada tipo. Después de elegir una caja al azar se toma un cajón al azar, y resulta por ejemplo que contiene una moneda de oro. ¿Cuál es la probabilidad de que la otra también sea de oro?

Muchos estudiantes seguirían el siguiente razonamiento: Después de elegir una caja al azar y retirar una moneda también al azar, si esta resultase ser una moneda de oro, sólo tenemos dos opciones: (a) que hayamos elegido la caja con dos monedas de oro; o (b) que hayamos elegido la caja con una moneda de oro y otra de plata. Por tanto, la probabilidad de que la otra moneda también fuese de oro es igual 1/2. Esta solución es incorrecta, ya que de hecho, la probabilidad de que la segunda moneda sea de oro es, como veremos, en realidad de 2/3.

Solución intuitiva correcta

Una solución correcta del problema se obtiene intuitivamente con ayuda de un diagrama en árbol y una adecuada notación a la hora de representar el espacio muestral (ver Figura 1). Un primer experimento es elegir al azar una de tres cajas con la siguiente composición Caja 1: (ORO, ORO), Caja 2: (ORO, PLATA), Caja 3: (PLATA, PLATA). El segundo experimento consiste en abrir uno de los cajones, donde se pueden encontrar los casos representados en la segunda división en ramas del árbol. El tercer experimento (última rama) es el tipo de moneda que queda en la caja, cuando se ha abierto uno de los cajones.

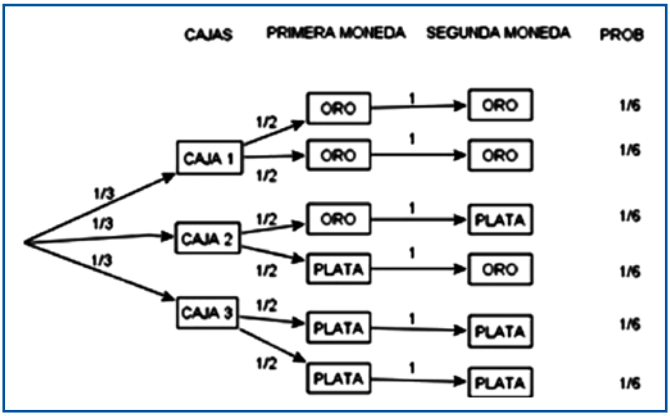


Figura 1
Solución intuitiva al problema de la caja de bertrand

El enunciado nos pone una condición (una de las monedas es de oro), por tanto nos pide una probabilidad condicional. Por tanto, quedan tres posibilidades equiprobables (como observamos en las ramas finales del árbol):

- Que hayamos tomado la única moneda de oro en la caja (ORO, PLATA); en este caso, la otra moneda que queda en la caja es la de plata.
- Que hayamos tomado la primera moneda de oro en la caja con dos monedas de oro; en este caso, la otra moneda es de oro.
- Que hayamos tomado la segunda moneda de oro en la caja con dos monedas de oro; en este caso, la otra moneda también es de oro.

Dicho de otro modo, tenemos dos casos en que la caja elegida sea la (ORO; ORO) si la moneda observada es de oro y solo uno de que la caja sea (ORO; PLATA). En consecuencia, sabiendo que una moneda es de oro, la probabilidad de que la otra sea de oro es el doble (2/3) que la probabilidad de que sea de plata (1/3).

Dificultades posibles de los estudiantes

En la literatura relacionada con este problema se han descrito varias soluciones erróneas, relacionadas con una deficiente intuición sobre la probabilidad, que comentamos a continuación.

- *No percepción de la independencia.* Un primer problema se produce porque *no se percibe la dependencia de los sucesivos experimentos* (elegir una caja) y (elegir una moneda). Es decir, o bien no se visualiza la estructura del experimento compuesto, o se suponen los sucesivos experimentos como independientes. Este error de razonamiento es explicado por Falk (1986), mediante la "falacia del eje de tiempos" que consiste en que las personas creen erróneamente que una información actual (la moneda mostrada) no puede afectar a un suceso que ocurrió con anterioridad a la misma (caja elegida). Esta falacia puede estar causada, en parte, por la confusión entre condicionamiento y causalidad.

- *Incorrecta percepción del espacio muestral.* Otra posibilidad de error en este problema es una incorrecta enumeración del espacio muestral, sesgo descrito por Gras y Totohasina (1995) en otros problemas de probabilidad condicional. La intuición nos dice que, una vez elegida la caja, y quitando la (PLATA, PLATA), sólo quedan dos casos equiprobables y, por tanto, hay un 50% de posibilidad de que la moneda sea de oro o de plata. Ello es debido a que no se diferencia el orden de colocación de las dos monedas de oro en la caja (ORO; ORO).

ALGUNAS VARIANTES DE LA PARADOJA

Son múltiples las variantes de la paradoja de la caja de Bertrand y el cambio de formulación hace, que en ocasiones, no se reconozca y de nuevo aparezcan dificultades en la solución. Al igual que en el problema de la caja de Bertrand las soluciones erróneas se deben a la no percepción de la independencia y a la incorrecta percepción del espacio muestral. A continuación analizamos algunas de las más conocidas.

Dilema del prisionero

El "dilema del prisionero" (Hardin, 1968)**,** que tiene el siguiente enunciado:

> Tres prisioneros esperan encarcelados su juicio sabiendo que sólo uno de ellos morirá. El juez le dice al primer preso que el tercero se salva y le pregunta si quiere intercambiar su suerte con el segundo. ¿Qué debe hacer el primer prisionero?

A priori la probabilidad de morir que tiene cada prisionero es 1/3. Un razonamiento intuitivo que lleva a una solución errónea sería pensar que como el tercer preso se salva, aparentemente solo quedan dos opciones y por tanto el preso 1 como el 2 tienen la misma probabilidad (1/2) de morir. En consecuencia al primer preso no le merece la pena intercambiar su futuro por el preso segundo.

Solución correcta

La solución correcta se obtendría comparando las probabilidades de que mueran el 1º y 2º preso, sabiendo que se salva el 3º. Aplicando la fórmula de la probabilidad condicional:

$$P((1^{o}\ muera)|(3^{o}\ se\ salve))=\frac{P((1^{o}\ muera)\cap(3^{o}\ se\ salve))}{P(3^{o}\ se\ salve))}.$$

Como sabemos que el tercer prisionero se salva, el denominador es igual a 1. Por otro lado:

$$P((1^{o}\ muera)\cap(3^{o}\ se\ salve))=P((1^{o}\ muera)\cdot\ P(3^{o}\ se\ salve|\ 1^{o}\ muera).$$

Al salvarse siempre el tercer prisionero, tenemos:

$$P((1^{o}\ muera)\cap(3^{o}\ se\ salve))=P((1^{o}\ muera)=\ 1/3$$

Aplicando la fórmula de la probabilidad condicional, tenemos:

$$P((1^{o}\ muera)|(3^{o}\ se\ salve))=\frac{P((1^{o}\ muera)\cap(3^{o}\ se\ salve))}{P(3^{o}\ se\ salve))}=\frac{1/3}{1}=1/3$$

La probabilidad de que muera el segundo preso sabiendo que se salva el tercero, sería la complementaria de la anterior, pues sabemos que o bien el segundo o el tercero han de morir, por lo que la probabilidad sería:

$$P((2^{o}\ muera)|(3^{o}\ se\ salve))=1-P((1^{o}\ muera)|(3^{o}\ se\ salve)=2/3$$

Luego al primer preso no le conviene intercambiar su suerte con el segundo ya que así tendría el doble de posibilidades de morir, lo cual es paradójico.

Paradoja del niño o niña

Otra variante de la paradoja de Bertrand y de gran importancia por el número de investigaciones pedagógicas que la tratan es la paradoja del niño o niña, también conocida como el problema de los dos hijos, los niños de Smith o el problema de la señora Smith (Gadner, 1959). El enunciado de la paradoja se describió mediante dos preguntas de la siguiente manera:

A. El Sr. Jones tiene dos hijos. Él hijo mayor es una niña. ¿Cuál es la probabilidad de que ambos sean niñas?
B. El Sr. Smith tiene dos hijos. Al menos uno de ellos es un niño. ¿Cuál es la probabilidad de que ambos hijos sean niños?

Esta paradoja tiene valor pedagógico, ya que ilustra una aplicación interesante del comportamiento de la probabilidad condicional. Fox y Levav (2004) utilizaron el problema para analizar como los alumnos estiman las probabilidades condicionales. La respuesta intuitiva es 1/2 para ambas, pues la segunda pregunta lleva al lector a creer que hay dos posibilidades igualmente probables para el sexo del segundo hijo (es decir, niño y niña), y que la probabilidad de que ambos sean niños, no condiciona a la información dada.

Otro razonamiento erróneo es suponer que la familia fuese seleccionada al azar y se pidiese calcular la probabilidad de que los dos hijos fuesen niños, es decir, no se tiene en cuenta la información de que uno es chico, dándose en este caso, la respuesta errónea 1/4. El estudio de Fox y Levav encontró que el 85% de los participantes respondieron correctamente 1/2 al primer problema, mientras que sólo el 39% respondió de esa manera a la segunda pregunta.

Solución correcta

Para resolver esta paradoja conviene enumerar el espacio muestral de todos los eventos posibles: (HH, HM, MH, MM), utilizando la primera letra para representar a los niños mayores. Al considerar la pregunta A, vemos que dos de los posibles sucesos no cumplen la condición (el hijo mayor es niña). El espacio muestral queda restringido a dos sucesos (MH, MM) igualmente probables, y sólo uno de los dos incluye dos niñas. Por tanto, la probabilidad de que el hijo más pequeño sea también una chica es 1/2.

En la segunda cuestión, se indica que el Sr. Smith tiene dos hijos y al menos uno de ellos es un niño y se pregunta la probabilidad de que ambos hijos sean niños. En principio esta cuestión es idéntica a la cuestión primera, excepto que en lugar de especificar que el hijo mayor es un niño, se dice que al menos uno de ellos es un niño.

La solución correcta parte de observar que en el espacio muestral hay tres familias que reúnen la condición de tener al menos un niño (HM, MH, HH). Por tanto, vemos que hay un caso favorable de tres y la probabilidad pedida es 1/3.

PARADOJA DE MONTY HALL

Esta es posiblemente la variante más conocida de la paradoja de la caja de Bertrand. Su formulación está inspirada en un concurso de la televisión americana "Let's Make a Deal" (Hagamos un trato) y su nombre proviene del presentador del concurso, Monty Hall. Este concurso generó bastante polémica en relación a posibles soluciones del problema matemático latente y muestra las intuiciones incorrectas en relación a la probabilidad condicional. La formulación más conocida de dicho problema proviene de una carta a la columna de Marilyn vos Savant en Parade Magazine (Bohl, Liberatore, y Nydick, 1995) y se reproduce a continuación.

> Supón que estás en un concurso, y se te ofrece escoger entre tres puertas. Detrás de una de ellas hay un coche, y detrás de cada una de las otras, una cabra. Escoges una puerta, digamos la nº 1, y el presentador, que sabe lo que hay detrás de las puertas, abre otra, que contiene una cabra. Si el presentador te pregunta si prefieres cambiar de puerta. ¿Es mejor para ti cambiar o deberías mantener tu elección inicial?

Aunque intuitivamente pensamos que es lo mismo cambiar de puerta o mantener la opción inicial, pues la probabilidad de que el coche esté detrás de la puerta elegida inicialmente es igual a 1/2, ya que quedan dos puertas por abrir y el coche ha de estar detrás de una de ellas, este razonamiento es incorrecto. La solución correcta más sencilla consiste en reconocer que la probabilidad inicial de elegir el premio es 1/3 pues hay tres puertas y un solo coche. Por tanto, la probabilidad de que ganar si cambio de puerta ha de ser igual a 2/3. Esta es una solución contra intuitiva, y la mayoría de las personas prefiere continuar con la puerta elegida inicialmente en este juego. Para convencerlas se pueden dar soluciones matemáticas más formales, e incluso comprobar empíricamente que es mejor cambiar de puerta jugando a este juego un número grande de veces.

Un análisis detallado de esta paradoja, y de varias soluciones correctas a la misma, lo encontramos en Batanero, Contreras, Fernandes (2009).

PARADOJA DE LAS TRES TARJETAS

Shannon y Weaver (1949) introdujeron un juego, donde las cajas son sustituidas por tarjetas y las monedas de oro y plata se sustituyen por marcas de color rojo y negro. Tomando como base este problema, Batanero, Godino y Roa (2004) describen una actividad que sirve para comparar la concepción frecuentista y Laplaciana de la probabilidad, y para reflexionar sobre los conceptos de experimento dependiente y probabilidad condicional. Utilizan el siguiente enunciado:

> Tomamos tres tarjetas de la misma forma y tamaño. Una es de color azul en ambos lados, la segunda es de color rojo en ambos lados y la tercera es azul de un lado y roja por el otro. Ponemos las tres tarjetas en una caja, y seleccionamos una tarjeta al azar. Después de seleccionar la tarjeta se muestra uno de los lados y se pregunta a los jugadores por el color de la cara oculta.
>
> Repetimos el proceso, poniendo la tarjeta de nuevo en la caja antes de cada nueva extracción. Hacemos predicciones sobre el color del lado oculto y se gana un punto cada vez que nuestra predicción es correcta. ¿Cuál sería la mejor estrategia para ganar en este juego?

Intuitivamente tiende a pensarse que no hay estrategia posible, o que podríamos apostar al azar pues la probabilidad de acertar el color de la cara oculta es igual a 1/2 y no depende del color de la cara mostrada. Este razonamiento es incorrecto, pues si se apuesta al mismo color mostrado en la cara, la probabilidad de acertar el color de la cara oculta sería igual a 2/3. La demostración de esta solución, la descripción de posibles razonamientos incorrectos en el juego y un estudio empírico de las dificultades experimentadas en un taller basado en este juego se describen en Contreras**,** Batanero, Fernandes y Ojeda (2010).

Objetos y procesos matemáticos en el trabajo con paradojas

En el trabajo en el aula con esta paradoja se usarán implícita o explícitamente los siguientes objetos matemáticos (en la clasificación de Godino, Font y Wilhelmi, 2008):

- Lenguaje matemático: Se utilizan expresiones verbales, simbólicas y numéricas de la probabilidad, el experimento y los sucesos implicados, así como el diagrama en árbol (lenguaje gráfico).
- Conceptos: En esta paradoja los alumnos trabajan la idea de experimento aleatorio, suceso, espacio muestral, complementario, los axiomas de probabilidad, probabilidad condicional, dependencia e independencia y convergencia, en caso de simular la situación y estimar la probabilidad a partir de la frecuencia.
- Propiedades: Algunas propiedades que aparecen en la resolución de estos problemas son: diferencia entre probabilidad condicionada y simple, relación entre probabilidad condicionada, conjunta y simple, complementario, regla de la unión, del producto, e independencia.
- Procedimientos: Algunos procedimientos que podemos encontrar en la resolución de estas paradojas son: cálculo de probabilidades simples, compuestas y condicionadas, estimación de la probabilidad a partir de la frecuencia y elaboración de un diagrama en árbol.
- Argumentos: La actividad permite combinar el razonamiento deductivo y empírico.

También podemos observar los siguientes procesos matemáticos:

- Procesos de materialización - idealización (pasar de algo que se percibe a algo que no se percibe): Por ejemplo, los objetos a los que hacen referencia las paradojas (cajas, sobres, monedas para el reparto, prisioneros…) e incluso las acciones que realizamos con ellos (abrir una caja, hacer una tirada, etc.) son objetos o acciones imaginarios, que podemos materializar en una simulación del experimento. El diagrama en árbol de las soluciones intuitivas representa, por un lado la estructura del experimento (por pasos) y en cada paso, los resultados del experimento y sus probabilidades. Pero el experimento y los pasos son imaginarios.
- Procesos de particularización – generalización: Es cuando pasamos de un caso particular, generalizando a una propiedad de un conjunto o viceversa, cuando una propiedad que sabemos es general, la aplicamos a un caso particular. Por ejemplo, sabemos que la suma total de todas las probabilidades de los sucesos en un experimento es la unidad. En cada ejemplo, particularizando llegamos a las probabilidades de los sucesos dados. Por ejemplo, en el problema del chico chica deducimos que la probabilidad inicial de tener una chica es 1/2.

- Procesos de representación – significación. Los procesos de representación y significación aparecen continuamente en el trabajo matemático, pues como no podemos operar directamente con objetos ideales, representamos las operaciones sobre los mismos por medio de símbolos o por medio de otros objetos. Por ejemplo, el objeto "probabilidad" lo representamos por la letra P; la probabilidad de un suceso que denominamos A lo representamos mediante $P(A)$.
- Procesos de descomposición – reificación: El alumno que trata de resolver el problema tiene que pasar constantemente de considerar objetos elementales (unitarios) a considerar objetos compuestos de varios objetos elementales (sistémico): Por ejemplo, cada suceso de un experimento aleatorio es elemental, pero el espacio muestral del experimento es sistémico; cada rama del diagrama en árbol es elemental, mientras que todo el diagrama en árbol es sistémico.

CONCLUSIONES

Observamos que el trabajo con este tipo de problemas, es abordable en la educación secundaria y permite trabajar con objetos matemáticos ligados a la probabilidad, ilustrando algunos principios básicos de la enseñanza de la teoría de probabilidades, entre ellos los axiomas de Kolmogorov.

Una forma de actuar sería que los alumnos primero realicen algunas simulaciones de la situación, y a continuación traten de hallar la solución. Debido al carácter contra-intuitivo de la paradoja, surgirá más de una solución (algunas incorrectas). El profesor organizará en la clase un debate para decidir cuál es la mejor solución, de modo que el debate permitirá revelar y corregir los razonamientos erróneos.

En el trabajo con paradojas se pueden observar los componentes de idoneidad didáctica definidos por Godino, Contreras y Font (2006).

- *Idoneidad epistémica o matemática:* Se trata de ver si los contenidos matemáticos trabajados en el aula (significado institucional implementado) son representativos respecto a un contenido fijado en la enseñanza (significado institucional pretendido). Como se ha analizado, las paradojas podrían tener una idoneidad matemática en el estudio de los conceptos de: experimento aleatorio, suceso, probabilidad condicional, experimento compuesto, dependencia e independencia y experimentos dependientes e independientes.
- *Idoneidad cognitiva:* Si el contenido trabajado es asequible a los alumnos, así como si se produce el aprendizaje pretendido por el profesor. Pensamos que la situación es asequible para alumnos de los últimos cursos de secundaria o Bachillerato, pues los razonamientos descritos están al alcance de los alumnos. Asimismo, trabajadas adecuadamente, permite al alumno confrontar y superar algunas de sus intuiciones incorrectas sobre probabilidad.

- *Idoneidad interaccional*: Grado en que la organización de la enseñanza permite identificar las dificultades de los estudiantes y resolverlos durante el proceso de instrucción. Este tipo de idoneidad dependerá de cómo organiza el profesor el trabajo en el aula. Será importante que los estudiantes trabajen en grupos para que surja el conflicto y se explicite. Será importante también organizar una solución colectiva de las soluciones para que los mismos alumnos ayuden a sus compañeros a detectar los puntos equivocados.
- *Idoneidad mediacional:* Disponibilidad y adecuación de los recursos necesarios para el desarrollo del proceso de enseñanza-aprendizaje. Como hemos visto en la descripción no se precisa de muchos recursos, pues incluso podría hacerse una simulación con objetos físicos, como cajas o tarjetas o bien usar la tecnología.
- *Idoneidad emocional:* Interés y motivación del alumnado en el proceso de estudio. Pensamos que esta es la más alta de todas con estas paradojas, ya que sin duda intrigan e interesan a todo el que trata de resolverlas.

Para finalizar pensamos que actividades como las analizadas podrían usarse también en cursos de formación dirigidos al profesorado pues pueden servir al mismo tiempo para aumentar los conocimientos de probabilidad en los docentes y sus conocimientos profesionales.

Agradecimientos: Proyecto EDU2010-14947 (MCIN), beca FPI BES-2008-003573 (MEC-FEDER), becas FPU-AP2009-2807 y FPU-AP2007-03222 y al grupo FQM126 (Junta de Andalucía).

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Basulto, J. y Camuñez, J. A. (2007). El problema de los dados del caballero de Méré: soluciones publicadas en el siglo XVII. *Suma, 56,* 43-54.

Batanero, C., Contreras J. M. y Fernandes, J. A. (2009). Un análisis semiótico del problema de Monty Hall e implicaciones didácticas. *Suma, 62,* 11-18.

Batanero, C., Godino, J. D. y Roa, R. (2004). Training teachers to teach probability. *Journal of Statistics Education, 12*(1). Online: http://www.amstat.org/publications/jse/.

Bertrand, J. (1888). *Calcul des probabilités.* Paris (Francia): Gauthier Villars.

Bohl, A. H., Liberatore, M. J., y Nydick, R.L. (1995). A tale of two goats... and a car, or the importance of assumptions in problem solutions. *Journal of Recreational Mathematics, 1,* 1–9.

Contreras, J. M., Batanero, C., Fernandes, J. A. y Ojeda, M. M. (2010). Análisis de una experiencia de formación de profesores en diferentes contextos. *Actas de las XXXII Congreso Nacional de Estadística e Investigación Operativa y de las VI Jornadas de Estadística Pública.* [CD-ROM]. A Coruña: SEIO.

Falk, R. (1986). Conditional Probabilities: insights and difficulties. En R. Davidson y J. Swift (Eds.), *Proceedings of the Second International Conference on Teaching Statistics* (pp. 292 – 297). Victoria, Canada: IASE.

Falk, R., y Konold, C. (1992). *The pshycology of learning probability.* En F. Gordon y S. Gordon (Eds.), Statistics for the twuenty-first century, MAA Notes 26 (pp. 151-164). Washington, DC: Mathematical Association of America.

Fox, C. R. y Levav J. (2004). Partition–Edit–Count: Naive Extensional Reasoning in Judgment of Conditional Probability. *Journal of Experimental Psychology, 133*(4), 626–642.

Gardner, M. (1959). Mathematical games. *Scientific American,* 219, 180–182.

Gras, R. y Totohasina, A. (1995). Chronologie et causalité, conceptions sources d'obstacles épistémologiques à la notion de probabilité conditionnelle. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 15*(1), 49-95.

Godino, J. D., Contreras, A. y Font, V. (2006). Análisis de procesos de instrucción basado en el enfoque ontológico-semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactiques des Mathematiques, 26* (1), 39-88.

Godino, J. D., Font, V. y Wilhelmi, M. R. (2008). Análisis didáctico de procesos de estudio matemático basado en el enfoque ontosemiótico. *Publicaciones, 38*, 25-48.

Hardin, G. (1968). The Tragedy of the Commons. *Science, 162,* 1243-1248.

Konold, C. (1994). Teaching probability through modeling real problems. *The Mathematics Teacher, 87*(4), 232-235.

León, N. (2009). La historia como elemento motivador hacia el estudio de la probabilidad: el problema de la apuesta interrumpida. *Sapiens: Revista Universitaria de Investigación, 10*, 69-87.

Lesser, L. M. (1998). Countering indifference: Using counterintuitive examples. *Teaching Statistics, 20*(1), 10-12.

Shannon, C. E. y Warren, W. (1949). *A mathematical model of communication*. Urbana, IL: University of Illinois Press.

Stohl, H. (2005). Probability in teacher education and development. En G. Jones (Ed.). *Exploring probability in schools: Challenges for teaching and learning* (345-366). New York: Springer.

V CONCURSO DE FOTOGRAFÍA MATEMÁTICA THALES DE ALMERÍA – 2012

Usamos las Matemáticas todos los días en nuestras vidas; en el trabajo, en el supermercado, en el ocio… ¿Por qué no fotografiarlas?, esa es la clave fundamental de este Concurso. La SAEM Thales de Almería os invita a dar rienda suelta a vuestra creatividad para compartir fotografía y Matemáticas; se puede decir más alto, pero no más claro. Si están ahí las "Mates", que sí que están, sácalas para que las vea todo el mundo; bajo tu perspectiva, claro está.

Participantes

Alumnado de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato de la provincia de Almería.

Tema

Cualquier situación de nuestras vidas en las que estén presentes las Matemáticas: Números, Álgebra, Estadística, Probabilidad y juegos de Azar, Análisis, Topología, Geometría, etc. No lo des más vueltas y deja volar a tu imaginación.

Envío de las imágenes

EXCLUSIVAMENTE registrándose en http://thales.cica.es/fotografia.almeria

(Se entra así Usuario: concurso; Contraseña: thales)

1. **Es imprescindible que haya un profesor responsable por Centro que deberá registrarse** poniendo como Usuario el nombre del centro (Ejemplo: **iesgaviota, si es del IES Gaviota**) con la contraseña que desee y especificando una cuenta de correo electrónico válida (**imprescindible para posibles contactos**).
2. 2 fotografías por participante, **como máximo**, con suficiente resolución (mínimo 0,5 Mb; máximo 2 Mb). Formatos aceptados: jpg, tif, png, bmp.
3. Cada fotografía deberá nombrarse así: curso_nombre y apellidos_título de la foto (Ejemplo: **si Carmelo Cotón Arias, de 3º de ESO, envía una foto con el título espirales en la hierba, el fichero se nombraría así: 3eso_carmelocotonarias_espiralesenlahierba**); eso sí, sin tildes, ni eñes, ni símbolos raros.

Premios

<u>1º CICLO ESO (1º y 2º)</u>

1º Lote de libros matemáticos + Juego de Ingenio + Póster + Diploma + Revista + Conserva
2º Lote de libros matemáticos + Juego de Ingenio + Póster + Diploma + Revista + Conserva
3º Lote de libros matemáticos + Juego de Ingenio + Póster + Diploma + Revista + Conserva

<u>2º CICLO ESO (3º y 4º)</u>

1º Lote de libros matemáticos + Juego de Ingenio + Póster + Diploma + Revista + Conserva
2º Lote de libros matemáticos + Juego de Ingenio + Póster + Diploma + Revista + Conserva
3º Lote de libros matemáticos + Juego de Ingenio + Póster + Diploma + Revista + Conserva

<u>BACHILLERATO (1º y 2º)</u>

1º Lote de libros matemáticos + Juego de Ingenio + Póster + Diploma + Revista + Conserva
2º Lote de libros matemáticos + Juego de Ingenio + Póster + Diploma + Revista + Conserva
3º Lote de libros matemáticos + Juego de Ingenio + Póster + Diploma + Revista + Conserva

Jurado

Nueve personas (maestros, profesores, artistas, etc) elegidas por SAEM Thales Almería

Recepción de Fotografías

Del 23 de Enero al 24 de Febrero de 2012

Advertencias importantes

1. **Las fotografías deberán ser originales y hechas desde el 1 de enero de 2012**. No se admitirán fotografías que hayan sido premiadas en otros concursos o estén participando actualmente en otros eventos similares, exceptuando Concursos de Fotografía convocados en los centros educativos que participan en este concurso.
2. Las fotos quedarán en propiedad de SAEM Thales Almería que se reserva el derecho de editarlas y utilizarlas, sin afán de lucro, haciendo siempre mención del autor de las mismas.
3. La SAEM Thales no se hace responsable de las reclamaciones que se produjeran por derechos de imagen por parte de terceros.
4. El fallo del concurso se hará público en Mayo de 2012 a través de la página web de SAEM Thales Almería http://thales.cica.es/almeria y se comunicará individualmente a los premiados. Este fallo será inapelable. Si el jurado así lo estimase, todos o algunos de los premios, podrían quedar desiertos.
5. El lugar y fecha de la entrega de premios será anunciada con suficiente antelación. **La no presentación a este acto supondrá la exclusión del Concurso.**
6. **INSCRIPCIÓN GRATUÍTA.**
7. La participación en el Concurso implica la aceptación de las presentes bases.
8. Los participantes que no se atengan a las condiciones establecidas en esta convocatoria quedarán excluidos del Concurso.
9. Para cualquier duda o consulta, deben dirigirse a la siguiente dirección de correo-e: fotografia.almeria@thales.cica.es **especificando claramente** los datos de quién hace la consulta.
10. El profesor/a del alumno/a ganador recibirá un bono para el Circuito de SPA del Hotel Envía Almería, Wellness & Golf

Organiza

SAEM Thales Almería

Colaboradores y Patrocinadores

Delegación de Educación de Almería
Diputación de Almería
Instituto de Estudios Almerienses
Museo de Almería
Facultad de Ciencias Experimentales – Universidad de Almería
Centro de Formación del Profesorado de El Ejido
Editorial SM
Editorial ANAYA
IES Mediterráneo de Garrucha
IES Río Aguas de Sorbas
Conservas la Gergaleña
Centro de Enseñanza PITÁGORAS

Una tipología y clasificación de los ejercicios de matemáticas de selectividad

Josu Ruiz de Gauna Gorostiza
Escuela de Magisterio de Bilbao. Universidad del País Vasco
Joxemari Sarasua Fernández
Escuela de Magisterio de Vitoria-Gasteiz
Jesús Miguel García Iturrioz
Escuela de Magisterio de Bilbao. Universidad del País Vasco

Resumen: *Se estudian los ejercicios puestos en las Pruebas de Acceso a la Universidad del País Vasco (UPV-EHU) desde el año 1994 al 2008 en las asignaturas de Matemáticas II y Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II.*

Se aporta una tipología de los ejercicios en base a unos criterios establecidos. Se clasifican los problemas de cada parte del examen de selectividad y se les asigna su tipología. Se pone en relación la tipología de los ejercicios con los resultados de la convocatoria y se extraen conclusiones.

Palabras clave: Matemáticas, Pruebas de acceso a la Universidad, Resultados, Tipología de ejercicios.

Abstract: *We carried out a comprehensive study of the entrance tests set at The University of the Basque Country (UPV-EHU) from 1994 until 2008 for the subjects Mathematics II and Mathematics Applied for the Social Sciences II. Exercises are typified on the basis of some criteria that we enclose. We classified the problems of each part of entrance examination and set their typology. We* establish a relation between the typology of exercises and the results of the exam. Finally we draw some conclusions.

Key Words: Mathematics, Entrance Tests to University, Results, Typology of exercises.

INTRODUCCIÓN

El examen denominado “Prueba de Acceso a la Universidad” (PAU), popularmente conocido como “Examen de Selectividad”, era la única prueba externa que nuestros alumnos pasaban mientras estaban en el sistema educativo no universitario. A partir del año 2007 los alumnos pasan también las Pruebas de Diagnóstico instauradas por la LOE.

Es conocida la importancia que el examen tiene como regulador del saber y, a la vez, tal y como afirma Morales (2005), "lo que más influye en cómo estudia el alumno es la evaluación esperada" (UPM, 2008, p.10). También Alsina señala algunas de las influencias que las PAU pueden tener sobre la forma de enseñar las matemáticas del bachillerato: "enseñar lo que sale puede permitir a las PAU un efecto tremendamente positivo: marcando en los exámenes temas importantes, induciendo a la necesidad de razonar, planteando cuestiones clave curriculares… las PAU pueden inducir a centrar mejor la docencia buscando un desarrollo curricular adecuado" (Alsina, 2001, p. 66).

Por lo tanto es evidente que el tipo de prueba de acceso influye en la metodología de enseñanza utilizada en el último curso de Bachillerato; también influye en la elaboración de los libros de texto, –pues estos contienen secciones específicas que preparan para la prueba–, y en la elección y la utilización que de los textos se hace por parte de los equipos docentes. También influye en la forma y en el tiempo de preparación de la prueba, e incluso tiene influencia sobre los estilos de enseñanza que los profesores utilizan en las asignaturas.

Las PAU han sido analizadas desde múltiples puntos de vista: se han analizado en su conjunto, se han realizado estudios comparados entre universidades, se han estudiado los modos de corrección, etc. Son estudios de tipo general, estadísticos, descriptivos de resultados, comparativos, de homogeneización de notas etc. Pero en los últimos años vienen publicándose estudios relacionados con las PAU desde la perspectiva de las metodologías didácticas. Aun así, son escasos los artículos que tratan de la prueba de acceso de Matemáticas desde la perspectiva de su interrelación con la metodología empleada en la asignatura; por citar algunos podemos mencionar el que trata sobre errores cometidos en la resolución de problemas en las PAU de Matemáticas (Nortes, 2007), en el que se clasifican los tipos de errores cometidos por los alumnos en la resolución de algunos de los problemas propuestos en las PAU; o el estudio que sobre las habilidades matemáticas evaluadas en las PAU aborda la resolución de problemas, la ortografía matemática y la comunicación matemática (Bueno, 2008) en las dos asignaturas de Matemáticas, concluyendo que el número de problemas de las PAU que describen situaciones contextualizadas es escaso, que no se penalizan los errores de ortografía matemática y que la comunicación matemática se logra mejor, aunque a bajo nivel, en Matemáticas II, también concluyen diciendo que las Matemáticas se tratan de manera muy superficial en el bachillerato; o el estudio que tiene como tema la influencia que las pruebas de acceso ejercen en la enseñanza de la integral definida en el bachillerato (Wilhelmi, 2010). En él, se comprueba que tanto en los libros de texto, como en las PAU de Matemáticas, el tratamiento que se le da a la integral definida no abarca más que un aspecto parcial de las posibilidades didácticas que existen para la presentación de este concepto. Dentro de esta línea de investigación nosotros hemos elegido analizar los ejercicios propuestos en las Pruebas de Acceso a la Universidad en las asignaturas de Matemáticas II y Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II, clasificarlos, estudiar su grado de dificultad y relacionarlo con los resultados obtenidos en selectividad y con la percepción sobre la dificultad de las partes del examen que tiene el profesorado. Existen unas pautas de regularidad en las pruebas que hacen posible establecer una clasificación de los ejercicios de cada una de las partes que componen el examen, que como toda clasificación lo que pretende es aportar un poco de luz sobre las características de los ejercicios que conforman la prueba. Son características tales como: establecer problemas-tipo análogos en cuanto a su método de resolución, analizar cuáles de las partes de la prueba tienen una mayor diversidad de problemas, establecer en función de algunos criterios su nivel de dificultad y relacionar éste con los resultados obtenidos en la prueba.

El análisis de ejemplos ha sido objeto de estudio de algunas investigaciones, como por ejemplo la realizada por Watson y Mason (2005) que definen el proceso de ejemplificación como "cualquier situación en la cual se ofrece algo específico para representar una clase general con la cual el estudiante debe familiarizarse". Definen lo que es un espacio de ejemplos y nos dicen que "los ejemplos, por lo general, no son aislados; más bien son percibidos como casos de una clase de ejemplos potenciales. Como tales, constituyen lo que llamamos un espacio de ejemplos", para continuar diciendo que "los espacios de ejemplos no son solamente listas; tienen una estructura interna, idiosincrática…y es por esa estructura que los espacios de ejemplos se producen" (González, 2009, p. 74). Estas consideraciones nos demuestran que el análisis de ejemplos de cada una de las clases en las que vamos a dividir las partes que constituyen los exámenes de Matemáticas de selectividad puede tener unas implicaciones didácticas que faciliten tanto la labor del alumno como la del profesor. Van a ser ejemplos con una estructura común a otros de la misma clase, que tienen un modo de resolución mediante técnicas semejantes y que, por lo tanto, pueden en potencia capacitar para afrontar problemas del mismo espacio de ejemplos y de otros paralelos.

Estableceremos unos criterios para poder catalogar los problemas como estándar (E) o difícil (D), porque aun sabiendo que uno de los objetivos que las pruebas persiguen es la homogeneidad, hay una buena diversidad de situaciones en los problemas que forman parte de ellas que hacen que no se perciban como de igual dificultad, bien por los alumnos o por los profesores de Matemáticas.

Hay que tener en cuenta que las Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II es la asignatura que mayor índice de suspensos[1] tiene en el conjunto de todas las PAU, tanto a nivel de la Universidad del País Vasco como del conjunto de España. Aunque las causas de esta situación son múltiples, creemos que la clasificación de los problemas que usualmente han formado parte del examen, así como el análisis de la tipología de esos ejercicios, pueden ayudar a comprender y superar algunas de las razones inmediatas de este elevado fracaso.

1. En el estudio de Muñoz-Repiso y otros (1997), El sistema de acceso a la universidad en España, se dice en la página 156 que "*en las Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales ni siquiera la mitad de los matriculados alcanza el 5 (55% de suspensos)*". También lo es en la UPV-EHU, donde el porcentaje de suspensos del periodo 1994-2008 es del 52%.

METODOLOGÍA

Objetivo

"Establecer en función de varios criterios una tipología dicotómica de ejercicios y clasificar los problemas y ejercicios incluidos en las PAU de Matemáticas en función de su pertenencia a varias clases de ejercicios semejantes. Relacionar la tipología de los ejercicios con los resultados obtenidos en la prueba"

Diseño y Muestra

Hemos efectuado un estudio longitudinal de análisis de las pruebas propuestas en la Universidad del País Vasco, desde el curso 1994-1995 hasta el curso 2008-2009, en las dos asignaturas de Matemáticas. Se han analizado todos los ejercicios propuestos y se han clasificado los ejercicios que componen cada una de las partes de los exámenes como pertenecientes a clases homogéneas entre sí. Se proponen unos criterios que permitan establecer, mediante el grado de dificultad asignado al ejercicio, su tipología, calificándolos como ejercicios estándar (E) o difíciles (D), categorías que luego definiremos.

La tipología utilizada es dicotómica porque, aunque es seguro que se podrían establecer más categorías, discriminar entre ellas habría introducido una mayor subjetividad en la clasificación y un mayor sesgo en las conclusiones.

Clasificación estadística del año en base a los resultados:

Se presentan los resultados de las PAU para las dos matemáticas y para cada convocatoria, clasificando cada año en cinco categorías como: MM (muy malo), M (malo), R (regular), B (bueno) y MB (muy bueno). La clasificación se realiza principalmente en función de la media obtenida en la asignatura y en esa convocatoria y comparando esa media con la media global de la asignatura a lo largo del periodo total (1995-2009). Si la media de la convocatoria está muy por encima de la media global en el periodo, la convocatoria se clasifica como MB; si está por encima de la media global se clasifica como B; si está próxima a la media global se clasifica como R; y sí el resultado es peor que la media global se clasifica como M o MM. Por ejemplo la media global del periodo fue en Matemáticas II, media= 5,67 y en Matemáticas de CCSS, media=4,66, por lo que si tomamos un año concreto, por ejemplo el 2006, donde las medias obtenidas han sido para Matemáticas II, media= 5,08 y para Matemáticas de CCSS, media= 3,86 y las comparamos con las medias globales del periodo obtenemos que el año 2006 en Matemáticas II ha sido malo (M) y en Matemáticas de CCSS ha sido muy malo (MM).

Por último hemos relacionado para cada convocatoria el número de ejercicios E y D que nosotros hemos obtenido con la clasificación estadística de la convocatoria en base a sus resultados. Ello nos llevará a establecer unas relaciones que, por simples e intuitivas, dan consistencia al modelo. Por ejemplo, por seguir con el mismo año 2006, asociamos la clasificación estadística del año en Matemáticas II (M, malo) con la tipología de ejercicios de esa convocatoria que ha sido (5D/5E); estableciendo este tipo de asociaciones a lo largo de la serie de años podremos extraer conclusiones.

Describamos los dos exámenes de Matemáticas, tal y como están establecidos en la Universidad del País Vasco.

Examen de Matemáticas II

Consta de cinco bloques correspondientes a las diferentes partes del programa, y dentro de cada bloque se plantean una cuestión y un problema, entre los que el estudiante elige uno. El bloque A corresponde al Álgebra, el bloque B a la Geometría, el bloque C al Análisis de Funciones, el D al Cálculo Integral y el E a la Resolución de Problemas. Cada ejercicio es valorado entre 0 y 2 puntos y la duración de la prueba es de hora y media.

Examen de Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II

Consta de cuatro apartados A, B, C y D, cada uno de los cuales tiene dos ejercicios. El apartado A corresponde al Álgebra y Programación Lineal, el apartado B corresponde al Análisis, el apartado C corresponde a la Probabilidad y el apartado D corresponde a la Estadística. El estudiante elige para cada apartado uno solo de los dos ejercicios propuestos. La valoración del ejercicio de los apartados A y B es de 0 a 3 puntos y la del ejercicio de los apartados C y D es de 0 a 2 puntos. La duración de la prueba es de hora y media.

TIPOLOGÍA DE LOS EJERCICIOS

Hemos fijado varios criterios que nos sirven de guía para establecer la categoría asignada al problema. Aunque nos hemos guiado por esos criterios, cada problema, al hacerlo, y dependiendo, si hay más de uno, del método seguido, da lugar a una forma de resolución que lleva pareja unas dificultades concretas que ayudan a evaluarlo como E o D. Es por ello que en la categoría asignada a un problema hay siempre un nivel alto de subjetividad, pues aunque se apliquen los criterios establecidos para su calificación como E o D, los diferentes métodos de resolución del problema (el contexto de la resolución y el solucionador, experto o novato, que Perales (2000) los define como dos de las variables que pueden influir en la resolución del problema[2]) pueden dar lugar a diferentes vías de resolución más o menos difíciles y por lo tanto a catalogar el ejercicio de forma diferente. Ya se sabe que entra dentro de la pericia para resolver un problema el elegir una buena forma de abordarlo.

Además se han tenido en cuenta algunos de los principales errores que los alumnos cometen en la resolución de problemas como consecuencia de diversos tipos de dificultades inherentes al proceso de resolución (Juidías, 2007). En general los criterios que se han seguido para catalogar un ejercicio como estándar, (E), o como difícil, (D), han sido:

ESTÁNDAR (E)	DIFÍCIL (D)
La comprensión del texto del ejercicio es sencilla. No contiene dobles negaciones, datos superfluos o preguntas que no aparecen explícitamente.	El texto del ejercicio es difícil de comprender; es largo y farragoso, contiene una sintaxis que es expresión de conceptos lógicos redactados según el estilo tradicional de los textos de matemáticas, o lo que se pregunta no está señalado explícitamente.
El ejercicio es identificable con una parte del programa y con su técnica de resolución.	La ó las técnicas de resolución que permiten abordar el ejercicio no son claramente identificables.
La resolución es directa. Quiere esto decir, que para llegar a la solución no hay que resolver cuestiones colaterales, ni cuestiones concatenadas, sin las cuales sea imposible llegar a la solución.	Para su resolución se requiere de soluciones intermedias, sin las cuales no se puede llegar a resolver la pregunta clave del ejercicio.
La resolución no da lugar a cálculos largos y complicados.	Los cálculos a que da lugar pueden llevar al alumno a cometer errores que invaliden la solución del ejercicio e incluso a realizar un buen planteamiento del mismo.
El problema no contiene parámetros de los cuales dependa la solución.	El problema presenta un cierto aspecto teórico o de tipo general, por contener letras en lugar de números o parámetros que aparecen en los cálculos y de los cuales depende la solución.
	No está asociado con una parte concreta del programa, o requiere de conceptos estudiados en otros cursos e incluso de conceptos transversales asociados a otras asignaturas.

Tabla 1
Criterios para establecer una Tipología de problemas

2. Citado en Nortes (2010), p. 320.

Apliquemos estos criterios a algunos ejemplos[3]:

- *Ejemplo 1*: "Dada la función objetivo z=5x+4y, calcular su mejor valor condicionado a las siguientes inecuaciones (2y-x>=0, y<=2x-3)". (ejercicio A2 de junio de 1995 de Matemáticas de CCSS).
  Este ejercicio se asocia directamente con un problema de programación lineal del cual se conoce una única técnica de resolución, tipología E.
- *Ejemplo 2*: "Entre todos los rectángulos de área 1600 metros cuadrados, ¿cuál sería el más barato para rodearlo por una valla?". (ejercicio B1 de junio de 1999 de Matemáticas de CCSS).
  Se identifica con un problema de máximos y mínimos y una vez planteado los cálculos son sencillos, tipología E.
- *Ejemplo 3*: "En una ciudad, el 45% de los habitantes son hombres, el 80% mayores de edad, y el 30% hombres y mayores de edad. Si se elige una persona al azar, calcular: a) la probabilidad de ser mujer y menor de edad; b) sabiendo que es mujer, la probabilidad de que sea mayor de edad; c) la probabilidad de ser hombre o menor de edad". (ejercicio C2 de junio de 2003 de Matemáticas de CCSS).
  Es la sintaxis del problema la que esconde conceptos lógicos cuya comprensión es difícil de trasladar a fórmulas y tablas, tipología D.
- *Ejemplo 4*: "Sean las rectas R1 y R2 de ecuaciones: R1 (x+y-2z=0, 2x-3y+z=1), R2 (x=3t, y=1-2t, z=2+t). Encontrar la ecuación del plano que contiene a la recta R1 y que pasa por el punto de intersección de la recta R2 con el plano π: x-3y-2z+7=0". (problema B de junio de 2000 Matemáticas II).
  Son varias técnicas y conceptos interrelacionados que hay que saber elegir, tipología D. Es decir aplicamos el criterio de que "La o las técnicas de resolución que permiten abordar el ejercicio no son claramente identificables". No quiere esto decir que la técnica de resolución deba aparecer claramente ante los ojos del alumno (que es el caso de numerosos ejercicios), sino que no sea asociable a una o más técnicas de la parte del programa en el que está colocado. (Por ejemplo, una integral puede no estar asociada a un método concreto de resolución, pero lo está a las técnicas de integración; sin embargo un problema de geometría suele presentar numerosas posibilidades de abordaje que no consisten en la aplicación de técnicas mecánicas de resolución).
- *Ejemplo 5:* "La curva de ecuación y=$2x^2$ divide al cuadrado de vértices V1=(0,0), V2=(1,0), V3=(1,1) y V4=(0,1) en dos partes; se pide dibujarlas y calcular su área". (problema D de junio de 2002 de Matemáticas II).

3. El estudio es el resultado de una investigación más amplia que ha constituido a su vez una parte de una Tesis Doctoral de título: "La Enseñanza de las Matemáticas del Bachillerato, los libros de texto y las Pruebas de Acceso a la UPV-EHU (1970-2008)", que está en vías de publicación en la Universidad del País Vasco. En ella pueden consultarse más ejemplos de tipologías de ejercicios y de su clasificación.

Con este problema se inicia una serie que se ha prorrogado, con algunas variaciones, durante cuatro convocatorias. Los cálculos a que da lugar son largos y por lo tanto susceptibles de equivocación, tipología D.

ANÁLISIS DEL CONTENIDO DE LAS PRUEBAS Y CLASES DE EJERCICIOS

Vamos a establecer para cada una de las partes de la prueba una ejemplificación de las clases de ejercicios propuestos. En algunos casos damos criterios adicionales para establecer la tipología de los problemas pertenecientes a una clase y en otros proponemos algún ejemplo concreto, pero sin ánimo de ser exhaustivos.

a) Matemáticas II

Álgebra

De los dos ejercicios de álgebra, uno de ellos siempre es de:

- *Sistema de ecuaciones*: cuando el sistema de ecuaciones es 3x3, con un parámetro en uno de los lados del sistema, que da lugar a una sola solución, el sistema se califica como E. Si el número de ecuaciones e incógnitas difiere, el parámetro se presenta en los dos lados del sistema y estas dos circunstancias dan lugar a que la resolución se complique: se cataloga como D (si no se complica, E). Cuando para el parámetro, o parámetros, se presentan dos posibles soluciones, se cataloga como D.

El otro ejercicio presenta una mayor variedad, que vamos a intentar clasificar[4].

- *Sistema matricial*: ejercicios en los que hay un sistema matricial, simple, en el que se pide el cálculo de dos o más matrices, suelen ser del tipo E.
- *Propiedades de las matrices: e*jercicios en los que se pide calcular una matriz, en general de orden 2x2, que conmuta con una dada; normalmente dan lugar a una resolución sencilla y se clasifican como E.
- *Cálculo de rangos: e*jercicios en los que se pide calcular el rango de alguna matriz que tiene uno o más parámetros, pero en la que es visible una combinación lineal entre filas o columnas; se catalogan como E.
- *Potencias enésimas: c*uando en el ejercicio se pide el cálculo de la potencia enésima de una matriz 2x2 ó 3x3, que tiene una regla de formación sencilla, se califica como E.

4. Dentro de cada clase de problemas damos un criterio para cuando el ejercicio creemos que puede ser catalogado como de una determinada tipología, pero puede haber ejercicios que pertenezcan a la misma clase y que tengan una tipología diferente. Es decir la tipología de los problemas de una misma clase no es unívoca.

Geometría

En Geometría resulta difícil estandarizar los ejercicios. Salvo algún tipo de ellos que se presentan más de una vez, la mayoría tienen pequeñas diferencias entre sí.

- *Posiciones relativas:* hay varias cuestiones y ejercicios de posiciones relativas, tanto de rectas, como de rectas y planos, en general clasificados como E.
- *Perpendicularidad*
- *Puntos simétricos:* problemas de cálculo de puntos simétricos, que siempre ha habido en selectividad. Unos con respecto a un plano, otros con respecto a una recta.
- *Ejemplo 6*: “Sean el punto P=(1, 2, a), $a \neq 0$, y el plano $\pi \equiv x+y+2z - 3 = 0$. Calcular las coordenadas del punto simétrico de P con respecto al plano π”. (junio de 2001, matemáticas II).

Es un problema clásico que pide el punto simétrico de uno dado con respecto a un plano; pero tiene una dificultad añadida, y es que el punto tiene una coordenada desconocida; es esto lo que lo hace D.

Análisis

En este apartado se incluyen ejercicios que tienen que ver con la derivación y sus propiedades.

- *Problemas de rectas tangentes a una curva*
- *Cálculo de límites (L`Hôpital) (no entran en la selectividad actual)*
- *Condiciones de derivabilidad*
- *Semiteóricos, con definiciones o teoremas y propiedades*
- *Asociar una función a su gráfica*
- *Dibujo de funciones* (ó no) mediante ciertos cálculos (dominio, asíntotas, crecimiento,…)
- *Ejemplo 7:* “Sea la siguiente función:

$$f(x)=\frac{x^3}{4x^2+1}$$

Calcular sus asíntotas oblicuas”. (septiembre 99 problema C)

Da lugar a cálculos largos en los que se pueden cometer equivocaciones que invaliden el problema: tipología D.

- *Problemas clásicos de cálculo de máximos y mínimos*

Ejemplo 8: “Una ventana se compone de una parte rectangular y de un semicírculo colocado sobre la parte rectangular. Si el perímetro total de la ventana es de 12 m, ¿cuáles deben ser las dimensiones de la ventana para que pueda entrar la mayor cantidad de luz posible?”. (julio 2000 problema C)

Relaciona diferentes conceptos y fórmulas, además de dos variables puestas en el dibujo (H y R) no usuales o asociables a x e y, lo que dificulta su identificación como problema y su derivación y manejo: tipología D.

– *Derivabilidad de funciones compuestas o de ciertas funciones construidas a partir de otras*

Ejemplo 9: “De una función f se sabe que es derivable en todos los puntos de la recta real. Además se sabe que $f(0)=2$ y $f'(0)=-2$. Definimos las dos funciones siguientes:

$$g(x) = e^{f(x)} \qquad \text{y} \qquad h(x) = f(e^x)$$

¿Tenemos suficientes datos para calcular $g'(0)$? ¿Y para calcular $h'(0)$? Si la respuesta es positiva calcula los valores y si es negativa, di por qué no es posible. (julio de 2001 cuestión C)

Hay que utilizar la derivada de la función compuesta y relacionar varios conceptos: tipología D.

– *Determinación de la expresión analítica de una función, conociendo algunas de sus propiedades*

– *Estrategias de pensamiento*

Integrales

– *Cálculo de Primitivas*

– *Semiteóricas o propiedades*

Ejemplo 10: “Describir el método de integración por partes”. (septiembre de 95 cuestión D). No se pide demostrar: tipología E.

– *Cálculo de Áreas*

– *Determinación de los coeficientes de una función*

– *Sumas superiores e Inferiores, Particiones*

– *Otros*

Ejemplo 11: “Sea la siguiente función:

$$g(x)=\begin{cases} x^2 & si \quad -2 \le x < 0 \\ 2x & si \quad 0 \le x \le 2 \\ 10-3x & si \quad 2 < x \le 4 \end{cases}$$

Dibujar (esquemáticamente) la función f y calcular los valores de las siguientes integrales definidas:

$$I = \int_{-2}^{1} g(x)dx \qquad J = \int_{-1}^{4} g(x)dx \qquad K = \int_{-1}^{4} g(x)dx$$ ” (junio de 99 problema D)

Se deben calcular tres integrales definidas cuyos límites de integración no coinciden con los de cada trozo de la función, por ello cada una de las integrales a calcular hay que descomponerla en sumas; nos parece que son dos dificultades que despistarán a muchos alumnos: tipología D.

Resolución de problemas

Es esta parte donde resulta más difícil agrupar los ejercicios por tipos, aunque algunos de ellos son similares y los agruparemos.

– *Problemas que se resuelven por el método de inducción*

  El método de inducción contiene en el paso de n-1 a n una generalización y, a veces, exige unos cálculos con letras difíciles de realizar.

  Ejemplo 12: Demostrar la fórmula de la suma de los cuadrados de los n primeros números naturales, *tipología D*. (junio de 95 problema E).

– *Problemas relacionados directamente con alguna de las partes del programa*

– *Problemas de Combinatoria*

– *Problemas de regularidades o que tienen pautas de formación*

  La detección de las regularidades supone la realización de sucesivos intentos y un ápice de inspiración, que hace que si el problema es nuevo para el alumno resulte difícil de abordar en las condiciones de estrés y tiempo limitado en el que se le presentan. Tipología D.

  Ejemplo 13: “Encontrar la última cifra de una expresión numérica ($2^{257}+5$)”. (septiembre de 95 cuestión E)

– *Cuestiones de teoría*

– *Problemas de letra*

  Ejemplo 14: Es un clásico de la literatura, “Dos amigos tienen el uno 5 panes y el otro 3, se encuentran con un tercero que tiene ocho monedas y que se las entrega a cambio de repartir con él los panes, ¿cómo se debe hacer el reparto de las monedas?”. (junio de 97 problema 5)

  La solución lleva implícita un razonamiento lógico que no es trivial: tipología D.

– *Problemas relacionados con la Física*

– *Problemas de Geometría*

– *Problemas de Propiedades de los Números (múltiplos, divisores, etc.)*

Ejemplo 15: “Se pide comprobar que $n^2–1$ es múltiplo de 8 cuando n es mayor que 3”. (junio de 97 cuestión 5)

Exige una demostración de tipo general a la que hay que llegar por tanteos sucesivos de forma que el punto de inspiración final puede que no llegue. Si no se ha trabajado este tipo de ejercicio en clase es difícil de resolver y además no está en la zona de desarrollo próximo de los alumnos en relación con la materia estudiada: tipología D.

– *Juegos o Problemas de Lógica*

b) Matemáticas de CCSS

Álgebra

– *Programación Lineal:* de los dos ejercicios que se proponen casi siempre uno de ellos es de Programación Lineal. Cuando el problema no contiene letra, sino que se refiere a la resolución de un problema ya planteado de P.L., cosa que sólo suele ocurrir en la convocatoria extraordinaria, lo hemos clasificado como E (excepción: cuando el dibujo de la región representa alguna dificultad añadida). Si el problema es usual, con letra, y las restricciones son desigualdades que son fácilmente obtenibles a través de la tabla que el alumno debe elaborar conteniendo la información del problema, también se han clasificado como E (excepción: cuándo la región sea difícil de dibujar). Si el problema da lugar a restricciones difíciles de plantear o el problema es de difícil comprensión o no es usual, se ha clasificado como D.

– *Problemas de letra clásicos*: el otro problema de álgebra presenta una mayor variedad. Hay varios ejercicios de letra, problemas clásicos que dan lugar al planteamiento de un sistema de dos o tres ecuaciones, más usuales en la convocatoria extraordinaria, que hemos clasificado como E (excepción: cuando la comprensión del problema tiene alguna dificultad añadida).

Ejemplo 16: “Durante los D días que han durado las vacaciones de un alumno han ocurrido los siguientes hechos:

a) Ha llovido en siete ocasiones ya sea por la mañana o por la tarde

b) En cada una de las mañanas o tardes lluviosa, ha llovido una sola vez

c) Los días en los que ha llovido por la mañana no ha llovido por la tarde

d) El cielo ha estado sin nubes seis mañanas y cinco tardes

¿Calcular, razonándolo, cuál ha sido el número de días D que ha estado de vacaciones?”. (junio del año 96 problema A1)

Es un problema de lógica no usual que requiere estrategias de pensamiento y movilizar destrezas que nos llevan a clasificarlo como tipología D.

En la convocatoria ordinaria del 97 hay un problema de mezclas, que por no ser usual, también lo hemos clasificado como tipología D.

- *Ecuaciones con matrices*: los problemas con ecuaciones matriciales, que son muchos, generalmente los hemos clasificado como E, salvo algunos en los que hay que hallar más de una matriz inversa de orden 3 para su resolución.
- *Potencia enésima de una matriz*

Análisis

- *Cálculo de áreas*: cuando se trata de calcular el área de un recinto comprendido entre dos curvas simples, se ha calificado como E. Si el recinto presenta más de dos funciones, o es un recinto mixto donde deben calcular alguna ecuación, o la integral hay que dividirla en dos trozos, los hemos clasificado como D.
- *Extremos de una función*: los de cálculo de los extremos de una función en general se clasifican como E, salvo que la función sea complicada. Los problemas clásicos de máximos y mínimos en general se han clasificado también como E, salvo que el planteamiento no sea evidente, o contengan conceptos de economía o de otras ciencias y no sean de fácil comprensión para la generalidad de los alumnos.
- *Primitivas de una función*
- *Rectas tangentes:* los problemas que implican el cálculo de rectas tangentes se clasifican como E, siempre que sean directos y no incluyan parámetros o el cálculo de la recta tangente sea un elemento auxiliar para resolver el fondo del problema.
- *Propiedades de funciones*: cuando se trata de construir o definir alguna función a través de diversas propiedades de la misma, normalmente se han clasificado como D, porque contienen varios conceptos de diferente nivel de dificultad implicados en la resolución y que además están encadenados.

Probabilidad

Son más los problemas de probabilidad que se clasifican como D que como E, por gran diferencia. Estos problemas requieren en general del uso de fórmulas y conceptos previos para su resolución; así mismo, es necesario realizar diagramas en árbol, tablas etc. que facilitan la comprensión del problema y su resolución. Es por esto que para muchos alumnos presentan una dificultad añadida.

- *Problema variado de probabilidad*: suele haber un problema de probabilidad, digamos variado, que puede ser resuelto de varias formas distintas, con fórmulas o sin ellas. Cuando este problema tiene un enunciado simple y claro que da lugar a una resolución más o menos directa, con fórmulas o sin ellas, se han clasificado como tipología E. Cuando implican el cálculo de un parámetro esto supone un nivel superior de conceptualización y también se han clasificado como tipología D.

– *Fórmula de Bayes*: el segundo ejercicio suele ser un cálculo de probabilidades mediante la fórmula de Bayes, problema que ha aparecido en muchas convocatorias. Cuando el problema se entiende con facilidad y se pueden trasladar directamente los datos a un árbol y los cálculos no son complicados, la tipología es E. En los demás casos es D.

Estadística

Los dos ejercicios de Estadística son mucho más típicos que los de las demás partes.

– *Distribución Normal*: el primero es de la distribución normal y el segundo es de intervalos de confianza, estimación e inferencia.

  El problema de la distribución normal, si tiene una lectura fácil y da lugar a un cálculo directo o a un manejo directo de las tablas, se ha clasificado como de tipología E. Esto ha sido así en la mayoría de los ejercicios.

  Cuando la distribución que aparece en el problema es la binomial, la comprensión del problema tiene alguna dificultad y los cálculos se hacen aproximando por la normal, la tipología del ejercicio es D.

  Ejemplo 17: "Un examen tipo test contiene 100 preguntas, cada una de las cuales admite cuatro respuestas, una correcta y las otras tres falsas. Si un alumno ha respondido al azar, ¿cuál es la probabilidad de que acierte más de 30 preguntas? ¿Y la de acertar menos de 15?". (problema D1 de c. extraordinaria de 2002)

  Cuando la comprensión del problema es fácil e inmediatamente se identifica con la distribución binomial, la tipología es E.

  Si la distribución es normal, pero para el cálculo de alguno de sus parámetros se dan datos que hacen que el problema no sea directo, sino que a través de una probabilidad dada se deduce el parámetro que falta, la tipología es D.

– *Inferencia:* el segundo de los ejercicios de Inferencia suele ser sencillo, fácil de asociar a las técnicas de la inferencia y fácil de comprensión. Por estas razones han sido, en general, clasificados como de tipología E. Pero hay que reconocer que en algunos centros esta materia no se estudia, por falta de tiempo, con el necesario detalle y por ello a los alumnos no les resulta fácil de elegir este ejercicio, eliminándolo automáticamente.

TIPOLOGÍA DE LOS PROBLEMAS Y RESULTADOS DE LA SELECTIVIDAD

Tenemos un índice de la percepción de la dificultad de las partes de la prueba de Matemáticas II y Matemáticas Aplicadas a las CCSS II, en base a una encuesta de opinión[5] enviada en el curso 2009-2010 a todos los centros de enseñanza del País Vasco. Esa percepción de la dificultad y la tipología de ejercicios de cada parte del examen de selectividad se recogen en las tablas siguientes:

	Álgebra	Geometría	Análisis	Integrales	Resolución de Problemas
Tipología	6D / 22E	8D / 20E	13D / 15E	11D / 17E	14D / 14E
Ratio (D/E)	0,27	0,4	0,87	0,65	1
Percepción de la dificultad	2,67	3,15	3,38	3,36	3,76

Tabla 2
Matemáticas II. Percepción de la dificultad y Tipología de problemas

	Álgebra y Programación Lineal	Análisis (incluye Integrales)	Probabilidad	Estadística
Tipología	7D / 21E	16D /12E	15D / 13E	7D / 21E
Ratio (D/E)	0,33	1,33	1,15	0,33
Percepción de la dificultad	3,18	3,91	3,61	3,54

Tabla 3
Matemáticas Aplicadas a las CCSS. Percepción de la dificultad y Tipología de problemas

Como se deduce de las tablas, la percepción de la dificultad de las partes manifestada por los seminarios de profesores de Matemáticas prácticamente coincide con la ratio que se deriva de la tipología de ejercicios que hemos efectuado. En los centros se perciben como más fáciles las partes del examen con ratios D/E menores y la percepción de la dificultad aumenta en el mismo sentido que la ratio de problemas D/E.

Comparando los resultados de cada año con la tipología de problemas de ese año se concluye que:

"Los años MM están asociados a un número alto de ejercicios difíciles (>=7D), al igual que los años M (>=4D), es decir llevan asociados más ejercicios D que E; los años R llevan asociados más ejercicios E que D y los años B ó MB llevan asociados un número muy bajo de ejercicios D (<=3D)"

5. Forma parte de la Tesis Doctoral mencionada anteriormente.

RESUMEN Y CONCLUSIONES

1. Se han propuesto unos criterios para establecer una tipología de los problemas de Matemáticas que han aparecido en las pruebas de acceso de la UPV-EHU. Para ello se han establecido dos tipos: problemas estándar o problemas difíciles. En esos criterios se recogen algunas de las dificultades que en la literatura sobre el tema se señalan como comunes para la mayoría de los estudiantes. Con la aplicación de esos criterios se ha intentado reducir la subjetividad que las tipologías de este tipo tienen. Aun así, el contexto y el carácter del solucionador (experto o novel) hacen imposible que la tipología sea unívoca.

La tipología propuesta por nosotros se ha contrastado mediante dos pruebas:

- Primero se ha contrastado la tipología de problemas resultante para cada convocatoria con los resultados obtenidos en las Matemáticas en esa convocatoria y se ha visto que un número alto de problemas de tipología difícil (D) estaba asociado con una calificación de los resultados de la convocatoria como de malos (M) y a la inversa, un número alto de problemas de tipología estándar (E) estaba asociado con unos buenos resultados en la convocatoria que era calificada como de buena (B).
- Segundo se han establecido para cada una de las partes que constituyen el examen de matemáticas las ratios globales de problemas tipificados como (D) entre los problemas tipificados como (E); ordenadas esas ratios de menor a mayor, se ha visto que la dificultad inherente a cada una de las partes se corresponde de manera casi perfecta con la percepción de la dificultad de cada una de las partes del examen que el profesorado tiene (manifestada a través de una encuesta al profesorado realizada por nosotros en el curso 2008-2009).

Por lo tanto esas dos pruebas nos permiten concluir que los criterios utilizados y la tipología de problemas que se deriva de ellos tienen validez.

2. Se han establecido para cada una de las partes en las que se descomponen los exámenes de Selectividad, las clases de problemas que suelen aparecer en esa parte. Se ha comprobado que en las Matemáticas II hay muchas más clases de problemas que en las Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II. Solamente en la parte de Álgebra se estipula que el primer problema será un sistema de ecuaciones. En la parte de Análisis han resultado 10 clases de problemas y en la de Resolución de Problemas 11 clases. Estas dos son las partes consideradas como más difíciles por el profesorado.

En Matemáticas de CCSS las clases establecidas son menores. Además tres de las cuatro partes del examen tienen establecido que el primer problema pertenezca a una clase, y el segundo a otra distinta: en Álgebra y Programación Lineal el primer problema es de Programación lineal y el segundo de Álgebra; en Probabilidad el primer problema es variado y el segundo suele ser de tablas de contingencia, diagramas de árbol o Bayes; en Estadística el primer problema es una distribución y el segundo es de inferencia. La parte de Análisis de Matemáticas Aplicadas a las CCSS es considerada como la más difícil de las dos matemáticas y presenta cinco clases de problemas, menos que la correspondiente parte de Análisis de las Matemáticas II. Es decir la estandarización existente en Matemáticas Aplicadas a las CCSS es mucho mayor que la de Matemáticas II, pero aun así eso no basta para mejorar los resultados de esta asignatura.

3. Se ha ejemplificado con arreglo a los criterios establecidos una propuesta de tipología para los problemas de esas clases. Hemos visto que la tipología resultante para la serie total de años analizados es consistente con la percepción que tiene el profesorado sobre la dificultad de las partes de la prueba y también lo es con los resultados obtenidos en la prueba.

4. Relacionando la clasificación estadística del año en base a los resultados medios obtenidos en la asignatura, con la tipología de los problemas propuestos ese año, hemos concluido que:

- En la convocatoria ordinaria un número alto de ejercicios E da lugar a unos buenos resultados en las dos Matemáticas.
- En las dos asignaturas un número alto de ejercicios D da lugar a unos malos resultados.
- En las dos asignaturas cuando el número de ejercicios estándar es parecido al de difíciles, no se pueden predecir los resultados.

Se han dado, por lo tanto, unas pautas que pueden servir de guía para los responsables de las pruebas "y que tal vez" permitan ajustar mejor la tipología del examen con los resultados esperados. Esto es especialmente relevante para la asignatura de Matemáticas de CCSS, donde una tipología con más problemas estándar E seguramente haría que los resultados mejorasen.

Esperamos, por lo tanto, que nuestra clasificación pueda contribuir a aumentar el grado de homogeneidad de las citadas pruebas y también a su preparación, tanto por parte de los responsables de confeccionarlas, como de alumnos y profesores.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Alvarado, A. y González, M.T. (2009). La implicación lógica en el proceso de demostración matemática: estudio de un caso. *Enseñanza de las Ciencias*, *28*(1), 73-84.

Alsina, C. (2001). Las pruebas de acceso a la universidad (PAU) como brújula curricular. *Aula de Innovación educativa*, 105, 66-70.

Boal, N., Bueno, C. y Leris, M. D. (2008). Las habilidades matemáticas evaluadas en las pruebas de acceso a la Universidad: un estudio en varias universidades públicas españolas. *Revista de Investigación Educativa, RIE*, 26, 1, 11-24.

Contreras, A., Ordóñez, L. y Wilhelmi, M. (2010). Influencia de las pruebas de acceso a la Universidad en la enseñanza de la integral definida en el bachillerato. *Enseñanza de las ciencias*, 28, 3, 367-384.

Espinel, M. C. y otros (2006). La inferencia estadística en la PAU. En *Actas XXIX Congreso Nacional de Estadística e Investigación Operativa*. Tenerife: SEIO.

Etxeberria, J. e Ibabe, I. (2005): *Análisis descriptivo de datos en Educación.* Madrid: La Muralla.

Fernández, J. (2001). Una propuesta de problemas en las pruebas de acceso a la Universidad. *Epsilón*, 51, 583-590.

García, I. y García, J. A. (2005). Algunos resultados sobre la actuación de los alumnos en las cuestiones de estadística en la P.A.U. En *Actas de las XI Jornadas para el Aprendizaje y Enseñanza de las Matemáticas*, 733-738. Gobierno de Canarias.

Jiménez, F., Ollero, J. y Sánchez, B. (2000). Las probabilidades en las pruebas de acceso a la universidad. *Jornadas: matemáticos y matemáticas para el tercer milenio, de la abstracción a la realidad*. San Fernando.

Juidías, J. y Rodríguez, I. (2007). Dificultades de aprendizaje e intervención psicopedagógica en la resolución de problemas matemáticos. *Revista de Educación 342*, 357-286.

Miralles, I. (2009). Dificultad subjetiva de la prueba de Matemáticas de las PAU. ¿Qué eligen los alumnos?". Recuperado el 30 de octubre de 2009, de http://www.xivjaem.org

Nortes, A. y Nortes, R. (2010). Resolución de problemas de matemáticas en las pruebas de acceso a la Universidad: errores significativos. *Educación siglo XXI*, 28, 1, 317-342

Ruiz de Gauna, J. (2010). *La Enseñanza de las Matemáticas del Bachillerato, los Libros de Texto y las Pruebas de Acceso a la UPV-EHU (1970 – 2008)*. Tesis Doctoral.

Universidad Politécnica de Madrid. (1008). *Aprendizaje Orientado a Proyectos*. Madrid: Servicio de Innovación Educativa UPM.

La matemática moderna en la España de principios del siglo XX. Contexto histórico

Juan Manuel García Navarro
IES Los Alcores, Mairena del Alcor, Sevilla

Resumen: *La teoría de conjuntos es un elemento nuclear de la matemática moderna. Esta teoría ha estado en el centro de procesos que tuvieron lugar principalmente en Alemania entre la segunda mitad del siglo XIX y la primera década del siglo XX, que supusieron una nueva manera de hacer matemáticas, no exenta de grandes polémicas y enfrentamientos. Estas ideas llegaron a España durante la segunda década del siglo XX de la mano de Julio Rey Pastor en una de las escasas épocas de bonanza científica que se han producido en este país.*

Términos clave: *Matemáticas en España, matemática moderna, crisis de los fundamentos, teoría de conjuntos, Julio Rey Pastor.*

Abstract: *Set theory is a core element of modern mathematics. This theory has been at the center of processes that took place mainly in Germany between the second half of the nineteenth century and the first decade of the twentieth century, which represented a new way of doing math, not without great controversy and confrontation. These ideas came to Spain during the second decade of the twentieth century from the hand of Julio Rey Pastor, framed in one of the few good times of scientific prosperity in this country.*

Key words: *Matemathics in Spain, modern mathematics, crisis in the foundations, set theory, Julio Rey Pastor.*

INTRODUCCIÓN

El enfoque conjuntista en matemáticas y su componente principal, la teoría de conjuntos, han tenido una gran importancia como elemento sistematizador de la matemática moderna. Esta visión supuso una nueva manera de hacer matemáticas cuya aceptación y asimilación no estuvo exenta de grandes polémicas y enfrentamientos. El proceso por el cual las ideas científicas se asimilan (o rechazan) depende de varios factores, entre ellos, como es lógico, del grupo social receptor y de su ambiente y tradición cultural. En este artículo veremos la gestación de esta concepción de las matemáticas en Alemania junto con el contexto en el que surge y cómo en España habrá que esperar a que se den las condiciones idóneas, el caldo de cultivo propicio, para la recepción de estas ideas en medio de lo que se ha dado en llamar la Edad de Plata de la ciencia española.

EL NACIMIENTO DE LA TEORÍA DE CONJUNTOS

A nivel mundial, el origen de esta teoría esta basado principalmente en contribuciones de matemáticos alemanes, debido probablemente al peculiar ambiente intelectual que se vivía en aquella zona, y sobre todo, a la orientación generalizada hacia una matemática pura.

Para comprender cómo se llega a esa situación y por qué surge en Alemania, tenemos que retroceder hasta la invasión napoleónica de Alemania (es decir, Prusia). La liquidación del Sacro Imperio Romano-Germánico, la caída de Prusia en manos francesas así como la ocupación de Berlín en 1806 dejó un estado arruinado y en humillante sumisión a Napoleón. Para salir de esa situación, Alemania emprendió una serie de grandes y profundas transformaciones, entre ellas una reforma educativa, para adecuarse económica, militar y científicamente al nivel de Francia. Mientras que en Francia este proceso se llevó a cabo tras la revolución de 1789, en Alemania la transformación fue "desde arriba", es decir, no revolucionaria, con un importante impulso a la investigación científica por parte de las instituciones oficiales. En Alemania, además, surge el ideal de una ciencia pura por contraposición a Francia, que abogaba por una formación eminentemente práctica.

Podemos tomar 1809 como la fecha de inicio de la reforma educativa alemana, año de la fundación de la universidad de Berlín. En su facultad de Filosofía tenían cabida los estudios de Ciencias y de Matemáticas, aunque en un principio no contaron con muchos apoyos (algo más las Matemáticas, pues los humanistas las consideraban fundamentales para la formación de la lógica y el razonamiento). Esta situación mejoró con el nombramiento de nuevos profesores en Físicas y Matemáticas hasta tal punto que las matemáticas tuvieron una situación privilegiada en Berlín durante las década de los años 1830 y 1840 con la presencia en ella de Kronecker, Weierstrass, Jacobi, Dirichlet y Steiner, entre otros. Este panorama empezaría a cambiar a lo largo de los años 50 con la muerte de Jacobi (1851) y el paso de Dirichlet a Gotinga (1855). Cantor desarrolló su carrera como matemático en Berlín desde 1863 hasta 1869, fecha en la que aceptó una plaza en la universidad de Halle, donde permaneció el resto de su vida.

El grupo de Berlín estableció un enfoque en la manera de hacer matemáticas muy distinto al que imperaba en Gotinga, el otro núcleo matemático alemán de la época. Kronecker y Weierstrass, sobre todo este último, eran partidarios de una fundamentación rigurosa de las matemáticas, en particular del análisis, sobre nociones estrictamente aritméticas. Junto a esto era común la insatisfacción de los planteamientos de las teorías generalistas que no atendían a la variedad de casos particulares que podían presentarse. En Berlín, Cantor tuvo la posibilidad de desarrollar una teoría de conjuntos rigurosa sobre la base del análisis de Weierstrass y en un principio contó con el apoyo de éste. Pero cuando Cantor quiso ir más allá de los límites impuestos por los berlineses provocó reacciones muy negativas de varios colegas, con lo que Cantor se vio inmerso en medio de fricciones con todos ellos. La obra de Cantor se fue orientando poco a poco en un sentido más abstracto, en un proceso para el que resultó fundamental la influencia de Riemann y Dedekind desde Gotinga. En consecuencia, Cantor llegó a sentirse enfrentado a la escuela de Berlín en los años 1880.

Aunque la universidad de Gotinga estuvo en una posición retrasada hasta esas fechas a pesar de la presencia en ella de Gauss (toda una celebridad, aunque era poco accesible e impartía sólo algunos cursos elementales), es allí donde se sitúan los orígenes del enfoque conjuntista, debido, principalmente a las contribuciones de Riemann y Dedekind (doctorados en 1851 y 1852, respectivamente, bajo la dirección de Gauss). La presencia de Gauss junto con otros hechos (por ejemplo, allí se fundó el primer observatorio de magnetismo terrestre y fue allí donde se instaló el primer telégrafo) aseguró a esta universidad una fama que se mantuvo posteriormente, pero la presencia simultánea de Dirichlet, Riemann y Dedekind a partir de 1855 (año de la muerte de Gauss) convirtió a Gotinga en uno de los centros matemáticos más importantes del momento, comparable sólo con Berlín y París. Se trataba además de matemáticos que impulsaron una concepción de las matemáticas fuertemente abstractas. Éstos, junto a Cantor son los más destacables por la impronta que dejaron.

Cronológicamente, la primera contribución es de Riemann con una serie de trabajos (*Sobre las hipótesis en que se basa la geometría*) que realizó para su habilitación como profesor en 1854 y que fueron publicados por su amigo Dedekind en 1868. Le siguen aportaciones del propio Dedekind (en 1871 publicó su teoría de los números algebraicos, trabajando con conjuntos de números en lugar de con los números directamente) y Cantor (a partir de 1868, utilizando el lenguaje conjuntista en obras de Geometría, Álgebra, Teoría de funciones, Teoría de números,…). La generalidad que encierra el concepto de conjunto es evidente y Klein pronunció una famosa disertación cuando accedió a su puesto de profesor en Erlangen –*Erlangen Programm*– en 1872 en la que mostró cómo podría ser aplicado este concepto como un medio para clasificar las diversas geometrías que habían ido apareciendo.

El punto de partida del desarrollo de la teoría de conjuntos cantoriana se sitúa en 1873, cuando Cantor se plantea una pregunta genial y le da una respuesta sorprendente. La pregunta era: ¿es posible correlacionar biunívocamente los números reales y los naturales?, o en otros términos, ¿hay la misma cantidad de números en N y en R? La respuesta resultó ser no, y con ella adquirió sentido la noción de cardinalidad de un conjunto infinito, ya que se había probado que existen conjuntos infinitos de diferentes “tamaños”.

Sin embargo, en el proceso de difusión de la teoría de conjuntos se iba a generar una crisis que socavaba los cimientos mismos de la Matemática, como nos muestra Ferreirós (2004). Hilbert había hecho mención del teorema de buen orden en su conferencia de París en 1900. Cantor notificó a Hilbert, a la sazón redactor de la *Mathematische Annalen*, el propósito de escribir una obra en la que se demostraba el teorema. El resultado esencial utilizado para la demostración era el carácter antinómico del conjunto de todos los ordinales transfinitos. Aunque en un principio Hilbert no aceptó la idea de que fuese antinómico, acabó tomando conciencia de la naturaleza del problema. Otros matemáticos fueron descubriendo las antinomias pero el proceso de asimilación por parte de la comunidad matemática distó de ser simple ni se supo dar una interpretación adecuada. Russell dio a conocer otra antinomia más elemental en su obra *The Principles of Mathematics* (1903): mientras las anteriores hacían uso de unas nociones sofisticadas de la teoría cantoriana, Russell sólo empleaba nociones simples que se consideraban puramente lógicas[1].

La otra gran polémica de la época estaba situada en el axioma de elección. La cuestión del teorema del buen orden volvió a centrar la atención en el congreso de 1904 y un mes después de su celebración, Zermelo envió una carta a Hilbert para que publicara en los *Mathematischen Annalen* una demostración del teorema basada en el axioma de elección. El axioma venía siendo utilizado implícitamente por Cantor y Dedekind en sus investigaciones. Sin embargo, había sido rechazado por Peano o Levi. La novedad era que Zermelo lo definió claramente y lo situaba en el centro de la atención de su trabajo. La demostración constituye un ejemplo del lado más discutible y radical de la teoría de conjuntos: se trata de un axioma puramente existencial y de una demostración de existencia de órdenes imposibles de determinar concretamente. Esto fue justamente lo que originó las grandes polémicas de la época, más aún que las antinomias: las objeciones constructivistas al tipo de matemática abstracta que caracterizaba a la teoría de conjuntos (a pesar de que muchos de los autores que criticaran esta manera de proceder hubiesen empleado razonamientos similares en sus trabajos).

Las principales posiciones en este enfrentamiento se tomaron entre los años 1900 y 1910, aunque los medios técnicos para analizarlas y medir sus consecuencias se refinaron sobre todo en los 20. A final, después de mucho tiempo sin una resolución completamente satisfactoria, se llegó al triunfo del conjuntismo, en buena medida bajo la autoridad de Hilbert. Por entonces, la teoría de conjuntos recibía apoyo tras apoyo: Peano, Jordan y Borel la empleaban en sus textos de análisis, mientras dos matemáticos de primera fila, Hadamard y Hurwitz, ya la ensalzaban desde sus conferencias estelares del I Congreso Internacional (1898). Y también en el campo de la geometría se hacían sentir los nuevos tiempos: las ideas del *Programa de Erlangen* de Klein, publicado de nuevo en 1893, y las axiomatizaciones propuestas por miembros de la escuela de Peano y por Hilbert, se basaban todas ellas en una aproximación conjuntista. Los dos primeros problemas de Hilbert en su famosa conferencia *Mathematische Probleme* de 1900 guardan relación con la teoría de conjuntos[2].

1. En las etapas iniciales, el empleo de la noción de conjunto estaba basado en el *principio de comprehensión*: si tenemos una propiedad P, podemos construir el conjunto {x: x cumple P}. Resumiendo, a Russell le bastó considerar el concepto de conjunto que no pertenece a sí mismo, usando la propiedad *x pertenece a x*. Así pues, el conjunto R = {x: x no pertenece a x} nos lleva a una contradicción ya que R pertenece a R sí y sólo si R no pertenece a R. En este principio se basan numerosos acertijos-paradoja muy populares, del tipo: “El barbero de un pueblo afeita a todos los que no se afeitan a sí mismos. ¿Debe afeitarse a sí mismo el propio barbero?”.

2. El primero trata sobre la hipótesis del continuo: probar que no existe un conjunto cuyo tamaño

Gracias a la obra de Zermelo con su axiomatización (1908) se alcanzó el periodo de madurez de la teoría de conjuntos que permite reducir toda la teoría creada por Cantor y Dedekind a algunas definiciones y axiomas. Se completó así la teoría elemental cantoriana y se superó la situación creada por las antinomias. Entonces empezaron a aparecer los primeros manuales y a partir de 1905, con la publicación de varios artículos de Borel, el debate dejó de ser exclusivamente alemán para pasar a internacionalizarse.

LA SITUACIÓN EN ESPAÑA

A finales del siglo XVIII se estaba realizando un gran esfuerzo de renovación científica que se interrumpió bruscamente durante la Guerra de la Independencia[3]. Sin embargo, el final de la guerra no significó la vuelta a la situación anterior de la Ilustración. Para dificultar aún más la recuperación durante los años siguientes, tal y como nos ilustra González (2002), cabe destacar la presencia de ingenieros, científicos, catedráticos universitarios y demás personal del mundo científico en puestos políticos: diputados, senadores, altos cargos de las administraciones, etc., debido en buena parte al clima de inestabilidad política de la época. El precio es el abandono de sus labores científicas (caso de los matemáticos José Echegaray y Manuel María Azafra[4]). Sólo después de la revolución de 1868 se logró alcanzar cierta continuidad en los esfuerzos para la recuperación científica con el estímulo de la liberalización ideológica. Con el pronunciamiento del general Martínez Campos en 1874 se restauró en el poder a la dinastía de los Borbones en la persona del príncipe Alfonso cuyo gobierno impuso los criterios del sector más intransigente del catolicismo español, terminando así el llamado Sexenio Democrático, uno de los momentos de mayor esplendor cultural del siglo XIX. Sin embargo, es en este régimen, (como reacción frente a él, de hecho) donde tuvo su origen la *Institución Libre de Enseñanza*, pilar fundamental para el desarrollo de la cultura y la ciencia en la España. El 28 de febrero de 1875 apareció un real decreto que incluía una circular dirigida a todos los rectores de las universidades según la cual, ningún profesor podía hacer manifestación alguna que fuese en contra de la monarquía recién instaurada o las doctrinas o creencias de la religión católica, única confesión religiosa aceptada por el Estado. Asimismo, se imponían otras cuestiones como la asistencia obligatoria a clase por parte de los alumnos o que el profesor debía seguir como libro de texto sólo aquéllos impuestos desde el ministerio. El contenido de esas leyes fue rechazado por algunos catedráticos y profesores y el gobierno reaccionó sancionando a varios de los profesores que protestaron, deteniendo a unos (entre ellos a Giner de los Ríos, futuro fundador y director de la Institución), desterrando y trasladando a otros. Como consecuencia

esté estrictamente entre el de los enteros y los reales. El segundo consistía en demostrar la consistencia de los axiomas de la aritmética.

3. Como anécdota, recordemos lo que le ocurrió al Real Observatorio de Madrid: fue transformado en cuartel por los franceses; su excelente telescopio fue desmontado para aprovechar la madera y su archivo saqueado y utilizado para encender fuego para calentar a los soldados durante el invierno.

4. Echegaray (1832-1936) llegó a ser Director general de Obras Públicas, ministro de Hacienda –en tres ocasiones– y de Fomento. Azafra (1813-1879) fue director general de Industria y Comercio.

de la situación, tras desechar la idea de crear una "universidad libre" española en Gibraltar, tomó forma un proyecto más modesto, fuera del ámbito universitario, dentro de la enseñanza secundaria pero que tendría una gran influencia en la historia española: la creación de la *Institución Libre de Enseñanza*, en la que la ciencia jugó un papel muy importante. De hecho, durante la primera década de la Restauración, muchos de los más eminentes científicos de Madrid mantuvieron relaciones con la Institución: Salvador Calderón (geólogo), Luís Simarro (neurólogo), Ramón y Cajal,…De esta manera, durante buena parte de la segunda mitad del siglo XIX la ciencia experimentó una cierta recuperación, aunque llevada de la mano fundamentalmente de las ciencias naturales y médicas[5]. Al mismo tiempo, las ciencias matemáticas y físico-químicas languidecían.

Ya en el primer tercio del siglo XX, la ciencia, y también las matemáticas experimentaron un notable progreso. En las universidades, desde 1900 el plan de estudios de la licenciatura se equiparó al de otras naciones europeas y las facultades de ciencias fueron tomando el protagonismo en los estudios de matemáticas (sobre los centros militares, institutos de enseñanzas medias, escuelas normales,...). Por esta razón los grupos de matemáticos con mayor relevancia se localizaron en Madrid, Barcelona y Zaragoza, únicas ciudades donde se encontraban secciones de Exactas

Una de las iniciativas más interesantes para mejorar la situación educativa y científica en nuestro país es la creación, en 1907, de la *Junta para la Ampliación de Estudios e Investigaciones Científicas* (JAE). La JAE fue una institución autónoma aunque dependiente del ministerio de Instrucción Pública, inspirada en la ideología que caracterizó a la *Institución Libre de Enseñanza*, con la que es fácil encontrar evidencias de conexión, por ejemplo, al repasar la lista de los nombres que intervinieron en la creación de la Junta[6]. En el Real Decreto que informaba de su fundación se enumeraban de manera explícita las funciones que tendría a su cargo la JAE:

- El servicio de ampliación de estudios dentro y fuera de España.
- Las Delegaciones en Congresos Científicos.
- El servicio de información extranjera y relaciones internacionales en materia de enseñanza.
- El fomento de los trabajos de investigación científica.
- la protección de las instituciones educativas en la enseñanza secundaria y superior.

5. Esto puede explicarse por el hecho de que existían en España instituciones consolidadas y con una larga tradición, como el Museo de Ciencias Naturales y El Jardín botánico en Madrid, cuyas actividades se remontan al siglo XVIII. Igualmente, existían facultades de Medicina en prácticamente todas las universidades españolas.

6. Fue creada por en Real Decreto el 11 de enero de 1907. Al acto de constitución asistieron como vocales Echegaray, Menéndez Pidal, Torres Quevedo, Ramón y Cajal, entre otros. Éste último fue elegido presidente, cargo que desempeñó hasta su muerte, en 1934.

Frente a la penuria general que dominaba a la universidad española, para este proyecto se dedicaron unos presupuestos bastante más elevados que los dedicados a la investigación científica (tanto en ciencias como en humanidades) fuera de la JAE.

El objetivo fundacional de la JAE era el de "por todos los medios posibles, formar el personal docente futuro y dar al actual medios y facilidades para seguir de cerca el movimiento científico y pedagógico de las naciones más cultas". El principal medio escogido para llevar acabo esa tarea fue el de las pensiones (becas, como se conocen en la actualidad; hasta el punto en que la Junta era más conocida como *Junta de Pensiones*). Eran consideradas una herramienta fundamental para el desarrollo cultural y científico de España. Se concedían de manera individual y en grupo, para trabajos en el país y fuera de él. Las pensiones en el extranjero se hallaban implantadas entonces en numerosas naciones, incluso en algunas poco desarrolladas de la época, como Rumania, China o Turquía. Con respecto a las europeas, en ese momento España estaba a la cola en cuanto a la colonia de estudiantes en el extranjero, sólo por delante de Portugal y Montenegro.

Durante las primeras décadas del siglo XX se produjo también un hecho curioso. En una apuesta que marcará el futuro de la ciencia española en el primer tercio de siglo, se auparon a Cátedras (algunas creadas ex profeso) a varios jóvenes recién doctorados en diversas disciplinas, prometedores, pero que aún no habían demostrado nada ya que no habían tenido tiempo. De esta manera, Julio Rey Pastor, licenciado en 1908, doctor en 1909, obtuvo la Cátedra de Análisis Matemático de la universidad de Oviedo en 1911 y la de igual denominación en Madrid en 1913. Además, todos esos nuevos Catedráticos recibieron pensiones de la JAE, lo que permitió a Rey Pastor trabajar en Alemania y tomar contacto con las corrientes punteras en investigación matemática.

LA MATEMÁTICA MODERNA EN ESPAÑA

Los primeros contactos de Julio Rey Pastor con la JAE fueron muy precoces. Recién licenciado, aún no doctor, solicitó a la JAE en 1909 un pensionado con el propósito de estudiar Geometría Proyectiva con Theodor Reye en Estrasburgo. Le fue concedida una estancia de nueve meses, aún sin doctorar, pero Rey Pastor tuvo que renunciar a ella por problemas burocráticos (debido a su condición de recluta). El siguiente intento, ya definitivo, por lograr una de las pensiones en el extranjero tuvo lugar en 1911. Se le concedió por una estancia de once meses en la Universidad de Berlín, donde realizó trabajos de investigación y asistió a clases de Schwarz, Schottky y Frobenius. En las cartas que envió al presidente de la JAE a modo de memoria de su estancia, Rey Pastor se refería a lo que ya era (y seguiría siendo a lo largo de su vida) uno de sus temas preferidos: la implantación en España de los estudios y métodos de investigación matemática que destacaban en el resto del mundo, en particular el sistema que conoció en Berlín, para salvar la distancia que nos separaba de Alemania, Francia e Italia. Además, en estas primeras comunicaciones, hizo mención al Seminario Matemático que había frecuentado en

Alemania, cuya implantación en España veía muy conveniente para despertar el espíritu investigador entre los estudiantes de matemáticas. De esta manera se empezó a gestar el *Laboratorio y Seminario de Matemática*, que la JAE crearía a su vuelta a España (1915), para que Rey Pastor diseñara, coordinara y dirigiese los designios de las nuevas generaciones de matemáticos españoles según los modelos que había conocido durante su pensión en el extranjero.

Su siguiente contacto con la JAE tuvo lugar en 1913, siendo ya catedrático de Análisis Matemático de la Facultad de Ciencias de la Universidad de Oviedo, cuando solicitó, y le fue concedida, en 1914, una pensión por diez meses. En esta ocasión estuvo en Munich en una primera etapa y luego en Gotinga, donde siguió cursos de Caratheodory, Courant, Hilbert, Hölder, Rohn, Koebe y Landau y donde conoció las ideas del Erlangen Programm de Klein.

Así pues, con las pensiones de la JAE, Rey Pastor fue el primer matemático español que tuvo la oportunidad de trabajar en Berlín y Gotinga, los dos focos en los que se centraron los debates sobre los fundamentos de las matemáticas; además, con los personajes principales que participaron en ellos y en una época en la que aún resonaban sus ecos. Todo esto, unido a su afán renovador, hacen de Rey Pastor la persona indicada de introducir en España la matemática moderna que se hacía en Europa y con ella la teoría de conjuntos.

LAS OBRAS PIONERAS

Fundamentos de la Geometría Proyectiva Superior (1916)

Rey Pastor evidenció a lo largo de todo su trabajo una gran formación geométrica. Estando de viaje por Alemania, presentó un trabajo (que resultó ganador frente a siete candidatos más) para optar al premio instituido en memoria de la Duquesa de Alba en conmemoración del tercer centenario del Quijote, dirigido a obras "de tema científico cualquiera, siempre que no se refiera a inventos de medios de destrucción". El trabajo premiado, mejorado y ampliado, fue publicado en forma de libro por la JAE en 1916 con el título *Fundamentos de la Geometría Proyectiva Superior*. En él se aprecia el enfoque sistematizador del Programa de Erlangen de Félix Klein.

Se trata de la obra más importante de Rey Pastor en Geometría. Incorpora grandes aspectos de modernidad pero sin dejar de tener el carácter de matemáticas del siglo XIX. La característica esencial de la obra es que intenta fundamentar correcta y rigurosamente, a partir de la axiomática, el desarrollo sintético de la geometría proyectiva, aspectos que ocuparon a los matemáticos de finales del siglo XIX, principalmente a italianos y alemanes.

En la obra se nota la frenética importación de las novedades matemáticas europeas desconocidas en España. Así aparece en sus páginas mucha información, acompañada de amplia bibliografía, y expone temas novedosos con suma diligencia.

Sin embargo, el tamaño del esfuerzo no se correspondió con la duración de la influencia dejada por la obra, que nació cuando la geometría sintética se retiraba. Rey Pastor trabajó solo y sin competencia en un edificio cuya construcción había sido abandonada. Con los *Fundamentos*, Rey Pastor pretendía presentar "a los jóvenes matemáticos españoles un cuadro del estado actual de esta ciencia, señalándoles los campos que aún están por cultivar, y donde pueden cosecharse frutos importantes". Aunque su libro fue reseñado en varias revistas con juicios favorables y había realizado una magnífica puesta a punto del "estado actual de esta ciencia" –la geometría sintética, o la geometría en general–, las tendencias matemáticas del momento, que conoció en Berlín y Gotinga, no iban por ese camino.

Así pues, la actividad investigadora y creativa de rey Pastor en geometría está limitada en el tiempo: desde la realización de su Tesis Doctoral durante el curso 1908-1909 (*Correspondencia de figuras elementales*, trabajo sobre geometría sintética de curvas y superficies en espacios proyectivos) hasta los *Fundamentos de la Geometría Proyectiva Superior* en 1916. A partir de entonces su actividad se decantó hacia el análisis matemático que estudió en profundidad en Alemania.

Introducción a la Matemática Superior (1916)

De febrero a abril de 1915 se celebró en el Ateneo de Madrid[7] un ciclo de conferencias sobre el "Estado actual, métodos y problemas de la ciencia". En la sección de Matemáticas, Rey Pastor dictó una serie de seis conferencias que se publicaron en 1916 en forma de libro bajo el título de *Introducción a la Matemática Superior. Estado actual, métodos y problemas*. En el contenido de estas conferencias Rey Pastor expuso los conocimientos adquiridos en su estrecho contacto con el movimiento matemático alemán durante su pensionado. Esta obra marca la separación entre la etapa de Rey Pastor como geómetra y el giro que toma su actividad hacia el análisis matemático.

En esta obra, además de hacer referencia a la crisis de los fundamentos sufridos pocos años antes, "como todas las ciencias", se muestra el entusiasmo de Rey Pastor por el enfoque conjuntista desde las primeras líneas del pequeño prólogo:

> "Pedir una definición de la disciplina que se llama hoy Matemática moderna, equivale a preguntar cuál es la última radical renovación que esta ciencia ha sufrido. […] la posterior a Riemann y Weierstrass. De ella nos ocupamos en estas páginas, agrupando sus variadas teorías en torno a tres ideas capitales: conjuntos, funciones, grupos".

En resumen, justamente los elementos en los que se basa la visión conjuntista.

El libro está articulado en seis capítulos coincidiendo con las seis conferencias impartidas. En concreto fueron:

7. Desde su fundación en 1835, el Ateneo se subtitulaba "científico" (y literario). Fue unos de los foros impulsores y renovadores de la ciencia del siglo XIX.

1. Fundamentos de la aritmética y del análisis. Rey Pastor comienza el capítulo con la definición de matemáticas del futuro como las matemáticas de los conjuntos. Aquí se observa su total entusiasmo por el enfoque conjuntista. La primera cuestión que aborda es la definición del concepto de conjunto, separando su significado del de la lengua vulgar. A continuación nos conduce luego al concepto de numero natural, a la recién creada teoría de conjuntos (potencia de un conjunto, conjuntos numerables, cardinal del continuo, Cantor, Peano...) y a la aritmética transfinita.
2. Los fundamentos de la geometría. Revisa las geometrías no euclídeas (Gauss, Lobachevski, Bolyai), las nuevas concepciones del espacio curvo (Riemann), y analizaba los peligros de la intuición (aun sin dejar de considerar su importancia en el proceso creativo) y la importancia del método axiomático de Klein y de sus implicaciones con la lógica.
3. Funciones de variable real. Aquí se analizan los conceptos de función, curva e integral. El capítulo comienza reconociendo el concepto de función como fundamental para toda la matemática. Introduce diversas concepciones de función (Euler, Fourier, Dirichlet, Riemann, Weierstrass), de curva analítica y dimensión y de los diversos enfoques del calculo integral (Euler, Cauchy, Riemann, Lebesgue, Baire) y de cómo la coincidencia entre la función con la derivada de su primitiva desaparece con las nuevas definiciones. Se trata también el problema de la medida de conjuntos.
4. En la cuarta conferencia se estudia el problema del paso al límite y, en particular, las series de Fourier, las series divergentes (Euler, Abel, Cauchy, Stieljes, Poincaré y Cesaro), los sistemas de infinitas ecuaciones lineales (Poincaré, Hilbert) y las ecuaciones integrales (Fredholm, Hilbert)
5. La quinta conferencia la dedica al estudio de las funciones de variable compleja (Cauchy, Weierstrass, Riemann).
6. Termina la obra con una sistematización de la matemática (Álgebra, Análisis, Geometría) por medio de la Teoría de Grupos.

Llama la atención la modernidad de las 80 referencias bibliográficas[8] que incluye en el texto, casi todas posteriores a 1900, y más de la mitad de ellas posteriores a 1910.

Introducción a la Matemática Superior (1951)

Años más tarde, en 1951, Rey Pastor hizo una revisión de la obra, con el mismo título. En ella, con la perspectiva que da la lejanía en el tiempo, nos presenta

8. Rey Pastor consideraba crucial el conocimiento bibliográfico para la mejora del nivel matemático. Recomendaba consultar la *Encyklopädie* impulsada por Klein desde Gotinga o al *Repertorio* de Pascal para completar el conocimiento de la matemática del XIX que faltaba en España, al mismo tiempo que no dudaba en acusar a los colegas de leer sólo unos pocos libros en los que basaban sus cursos e ignorar la matemática que se publicaba en las revistas de investigación (González, 2006).

un claro resumen del progreso experimentado por las matemáticas gracias a la implantación de todos esos mecanismos en las primeras décadas del siglo.

La reedición de la *Introducción* apareció también dividido esta vez en siete capítulos, pero modernizadas y ampliadas, especialmente dedicada a los profesionales que realizaban cálculos y que se consideraban matemáticos pero que no estaban informados todavía de la revolución que supuso la matemática moderna.

Los títulos de los capítulos del libro son:

1. Aritmética y lógica matemática.
2. Fundamentos de la Geometría.
3. Aritmética y Álgebra. Geometría algebraica.
4. Funciones reales o Geometría diferencial e integral.
5. El paso a límite y la Correlación en el Análisis.
6. Funciones de variable compleja.
7. Sistematización de la Matemática.

En el prólogo, mucho más amplio que en la anterior edición, Rey Pastor recuerda el germen del libro como conferencias en el Ateneo y a continuación hace un pequeño balance de la cultura matemática en los países de habla hispana a lo largo de los años transcurridos. Reconoce que se ha elevado mucho durante ese tercio de siglo y que no sólo se conocen a fondo las modernas teorías sino que también las nuevas generaciones investigan en ellas y colaboran en revistas internacionales, tarea que por aquel entonces se le antojaba fabulosa e inverosímil. Sin embargo, se puede contrastar el planteamiento que sigue Rey Pastor treinta y cinco años después y cómo va decayendo su inicial entusiasmo por el enfoque conjuntista, dejando paso a un cierto desencanto[9]. Aunque vuelve a centrar las matemáticas modernas en torno a tres "etapas", conjuntos, funciones, y familias de funciones (en 1916 aparecían los grupos en tercer lugar), mientras antes eran símbolos de modernidad, ahora considera la arbitrariedad[10] como la característica fundamental de la nueva matemática, de la que, según intenta denunciar Rey Pastor, se abusa hasta el punto de sufrir un curioso cambio de valores: los mediocres, que antaño debían conformarse con la resolución de problemas mientras que los grandes creaban teorías, se dedican ahora a la fácil tarea de fabricar teorías o generalizarlas, con una simple combinación de postulados. Critica con sarcasmo también la maraña de espacios abstractos y subíndices (ya que fácilmente se agotan las letras del alfabeto) y cómo los jóvenes matemáticos se mueven sin rumbo por un terreno que ven infinito y deshabitado.

9. Al igual que en la edición de 1916, define la Matemática del futuro como la *Ciencia de los Conjuntos*, aunque no de manera tan rotunda como entonces. Se puede notar en el matiz de que escoge esa definición "eligiendo entre las muchas que se han propuesto" y que toma esa "por ejemplo".

10. "las construcciones arbitrarias, los postulados arbitrarios y las funciones arbitrarias; suma de arbitrariedades que horrorizaban a Poincaré" (Rey Pastor, 1951).

A modo de conclusión: ¿qué matemática es la que defiende Rey Pastor? Para él, aunque la Matemática es la ciencia de las estructuras abstractas, los felices hallazgos de los postnewtonianos durante el siglo XVII se debieron a que esas estructuras explicaban fenómenos naturales. El éxito de la Matemática es que consigue librarse de las trabas de la experiencia pasando de lo real a lo posible, pero sin desconectarse de la realidad. En definitiva, la utilidad de la Matemática en cuanto consigue explicar la realidad. Rey Pastor considera que ese abuso en la creación de nuevos entes sin los frenos que se imponían en otros tiempos (ya fuera por el fin de representar una entidad natural o de resolver un problema en concreto) enreda el universo de las teorías matemáticas. El arte del matemático no debe estar en añadir más hilos a la maraña, sino en desatar nudos y convertirlo en tejido ordenado.

EL FIN DE UNA ÉPOCA

En junio de 1921 Rey Pastor marchó a Buenos Aires, terminando así una primera etapa[11] intensa y fructífera. El *Laboratorio* continuaría sus actividades hasta la llegada de la Guerra Civil e incluso durante la contienda[12].

La guerra civil frenó en seco los embriones de un sistema científico en España. Las bases ideológicas y culturales de la dictadura del general Franco representaron un retroceso de alcance histórico para el frágil entramado científico español. La represión emprendida tras el fin de la guerra por los vencedores sobre los vencidos golpeó con extremada dureza al sistema educativo y científico español. Las depuraciones de maestros, profesores universitarios y científicos excluyeron de la práctica profesional a miles de personas capacitadas, condenadas a un duro y amargo exilio, interior o exterior, provocando una descapitalización que tardó decenios en ser solventada y cuyo coste no ha sido suficientemente mensurado para el desarrollo educativo, la formación y cualificación de la sociedad española tras la larga posguerra.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Español, L. (2006) Julio rey Pastor. Primeros años españoles. Hasta 1920. *La Gaceta de la RSME*. 9 (2), 545-585.

Español, L. (1990). Algunas cuestiones sobre los “Fundamentos de la Geometría Proyectiva Superior”. *Estudios sobre Julio Rey Pastor* (1888-1962). Logroño. Instituto de estudios Riojanos. 379-397.

Ferreirós, J. (1993). *El nacimiento de la teoría de conjuntos, 1854-1908*. Madrid. Ediciones de la Universidad Autónoma de Madrid.

11. Durante los años 1947 a 1962 alternaría su estancia entre Argentina y España, pero con una actividad en este último país más bien institucional, impartiendo cursos y conferencias.

12. Sobre la base organizativa de la JAE se creará, en 1939, el Consejo Superior de Investigaciones.

Ferreirós, J. (1998). El enfoque conjuntista en matemáticas. *La Gaceta de la RSME*, *1*(1), 389-412.

Ferreirós, J. (2004). Un episodio en la crisis de los fundamentos: 1904. *La Gaceta de la RSME*, *7*(2), 449-467.

González, F. A. (2002). La matemática en el panorama de la Ciencia española, 1852-1945. *La Gaceta de la RSME*, *5*(3), 779-809.

González, F. A., de Vicente, L. y Fernández, R. E., (2008). La organización de la educación matemática en la Junta para Ampliación de Estudios: el Laboratorio y Seminario Matemático. *Revista Complutense de Educación, 19*(1), 137-153.

Hormigón, M. (1985). Rey Pastor y las matemáticas en España. *Actas del I simposio sobre Julio Rey Pastor* (pp. 41-58). Logroño. Instituto de Estudios Riojanos.

Otero Carvajal, L. E. (2001). La destrucción de la ciencia en España. Las consecuencias del triunfo militar de la España franquista. *Historia y Comunicación Social*. 6, 149-186.

Peralta Coronado, F. J. (1999) *La matemática española y la crisis de finales del siglo XIX*. Madrid. Nivola. Colección Ciencia abierta.

Rey Pastor, J. (1916). *Fundamentos de la geometría proyectiva superior. Introducción a la Matemática Superior*. Madrid. Junta para la Ampliación de Estudios.

Rey Pastor, J. (1916). *Introducción a la Matemática Superior. Estado actual, métodos y problemas*. Madrid. Biblioteca Corona. (Edición facsímil de 1983).

Rey Pastor, J. (1951). *Introducción a la Matemática Superior. Estado actual, métodos y problemas*. Madrid y Buenos Aires. Editorial iberoamericana.

Sánchez Ron, J. M. (1990) Julio Rey Pastor y la Junta para la Ampliación de Estudios. *Estudios sobre Julio Rey Pastor* (1888-1962). Logroño. Instituto de estudios Riojanos. 9-41.

Epsilón - Revista de Educación Matemática 2011, Vol. 28(2), nº 78, pp. 53-58

Paseo matemático-bilingüe por arcos

Paloma Pascual Albarrán,
I.E.S. Guadalpeña, Arcos de la Frontera, Cádiz
María Dolores Segura Manzano,
I.E.S. Guadalpeña, Arcos de la Frontera, Cádiz

Resumen: *En esta comunicación presentamos una experiencia realizada en el IES Guadalpeña con motivo de una visita de estudiantes holandeses en el marco de un proyecto bilateral Comenius. Esta actividad pretende por una parte, que el alumnado holandés conozca el pueblo que visita, no a través de una visita guiada, sino que lo descubran mediante la resolución de problemas matemáticos. Por otra parte, pretende que el alumnado español aplique los conocimientos matemáticos adquiridos a lo largo del curso en un entorno distinto del aula y que conocen perfectamente.*

Nivel educativo: *Las actividades se podrán adaptar para cualquier nivel de Secundaria Obligatoria o incluso de Bachillerato.*

INTRODUCCIÓN

Contexto del centro

El centro en el que trabajamos, IES Guadalpeña, está ubicado en el Barrio Bajo en la localidad de Arcos de la Frontera. En él estudian alrededor de 900 alumnos y alumnas y trabajan 72 profesores y profesoras. Existen seis líneas de primer ciclo de la ESO, cinco de tercero y cuatro de cuarto, se pueden estudiar distintas modalidades de Bachillerato, el ciclo de formación profesional de grado medio de sistemas microinformáticos y redes y el de grado superior de administración de sistemas informáticos. El centro recibe la casi totalidad de su alumnado de dos barrios muy distintos de la localidad: del Barrio Bajo, uno de los barrios más deprimidos socialmente del pueblo, y del Santiscal, donde el nivel cultural y económico de las familias coincide con un barrio de clase media.

Para mejorar la atención a la diversidad de nuestro alumnado y a sus necesidades, en el centro se desarrollan diversos planes y proyectos.

Esta actividad queda enmarcada en dos de ellos: el Plan Bilingüe y un Proyecto Comunius Bilateral con Holanda.

El Plan Bilingüe implantado en dos líneas de la ESO y el Proyecto Comenius aprobado para los cursos 2009-10 y 2010-11.

Antecedentes de la actividad

Durante el curso 2007/2008 con motivo del día escolar de las matemáticas organizamos una gymkana matemática por el pueblo de Arcos de la Frontera, en el que está ubicado nuestro instituto. Esta actividad se organizó para el alumnado de 1º de Bachillerato y 4º de ESO de la opción B. Aunque fue un éxito, por distintos motivos no hemos podido llevarla a cabo en cursos posteriores.

Nuestro centro es Bilingüe y además participa en varios proyectos Comenius; nosotras colaboramos en uno bilateral con Holanda. Este año al saber que venían los alumnos y alumnas holandeses de intercambio, nos pareció interesante retomar esta actividad pero dándole otros enfoques; matemático, bilingüe, de conocimiento de la ciudad a visitar, de comunicación con sus recién conocidos compañeros y compañeras.

Esta actividad fue la primera que realizaron conjuntamente los veinte estudiantes holandeses y los veinte españoles.

A través de esta actividad pretendíamos:

Con respecto a nuestro alumnado: motivarlos frente al aprendizaje de las matemáticas, haciéndoles ver la importancia de éstas, y de su utilidad a la hora de resolver problemas que se pueden encontrar en la vida cotidiana. Junto con esto pretendemos que nuestros estudiantes vean su pueblo desde otra óptica y sean capaces de observar matemáticamente alguno de sus monumentos, calles, parques, etc.

Con respecto al alumnado holandés: nuestro primer objetivo es que conocieran el pueblo en el que iban a vivir durante los próximos diez días; además queríamos conocer el nivel matemático de este alumnado del nivel correspondiente a 3º de ESO en Holanda.

Con respecto a todo el alumnado participante: fomentar el acercamiento y conocimiento entre ambos grupos, las relaciones lingüísticas y personales. Además de favorecer el trabajo cooperativo y poder descubrir distintas formas de resolver problemas matemáticos provenientes de distintos sistemas educativos.

1. DESARROLLO DE LA ACTIVIDAD.

1.1. El profesorado conoce el entorno. Para poder empezar a organizar esta actividad lo primero que deben plantearse las personas que quieran organizar algo semejante es que deben darse algunas vueltas por el pueblo y hacer una visita con ojos matemáticos, buscando rincones, mosaicos, edificios, fuentes, etc. Sin olvidarnos de nuestra cámara fotográfica. Ahora tenemos una herramienta muy útil, en google maps podemos pasearnos virtualmente por casi todos los rincones de nuestras ciudades. Desgraciadamente de Arcos no tenemos paseo virtual por la mayor parte del casco antiguo.

1.2. Diseñando las pruebas o ejercicios. Podemos decir que esta es la parte más importante y también más gratificante para las personas que preparan esta actividad.

Consiste lógicamente en idear problemas que tengan como base los lugares seleccionados del pueblo.

A modo de ejemplo os mostramos alguno de los que pusimos en este caso. (páginas 5 y 6).

El nivel de las pruebas se puede ajustar al curso al que dirijamos la actividad. En cualquier caso conviene que haya pruebas que tengan poca dificultad para que todo el alumnado se motive, nosotras en este caso elegimos una para hacer una compra en el mercado, con un doble objetivo el matemático y el que el alumnado extranjero viera como era un mercado en Arcos. También propusimos algunas que no tenían ningún carácter matemático, como ir a la pinacoteca y rellenar una tabla con datos de cuadros y autores o autoras.

1.3. El día de la prueba. Estábamos expectantes de como transcurriría la actividad, tanto ellos como ellas casi acababan de conocerse, habían llegado la noche anterior, y no lo habían pasado bien, para muchos de ellos y de ellas era su primera noche fuera de su país, en otra casa y con personas que no conocían. Un rato antes del comienzo nos habían dicho que la mayor parte del alumnado holandés había pasado la noche llorando. Todo esto suponía un inconveniente más a la realización de la prueba. De todos modos había que comenzar y el profesorado acompañó a los cuarenta estudiantes hasta la Plaza del Cabildo, una de las más célebres del casco antiguo de Arcos. Una vez allí se formaron los equipos formados por dos estudiantes españoles y otros dos holandeses. A cada componente del grupo se le hizo entrega de una camiseta, que debía llevar puesta durante toda la prueba y el número del grupo al que pertenecía. Además se les entregó una cinta métrica a cada equipo. Ya se les había avisado que tenían que llevar calculadora, útiles de dibujo etc.

A continuación se les dan las orientaciones necesarias:

- Deben pedir un mapa de la ciudad en la oficina de turismo más próxima.
- Se les hace entrega de un sobre en el que aparecen todas las pruebas que deber realizar.
- Se les indica que las pruebas están distribuidas por todo el casco antiguo de la ciudad y que serán los componentes de cada equipo los que decidan en que orden van a realizar las pruebas. Se insiste en que no empiecen todos en el mismo sitio y que antes de empezar le dediquen unos minutos en determinar el orden en que van a realizarlas.
- La gymkhana finalizará a la hora fijada. Todos los grupos deberán estar a esa hora en la Plaza del Cabildo. Allí entregarán todas las pruebas que hayan resuelto, en un sobre cerrado, escribiendo el grupo al que pertenecen.

1.4. Manos a la obra. Ha llegado la hora de la verdad, los estudiantes holandeses están un poco reacios, además no se comunicaban bien en inglés, cosa que nos sorprendió creíamos que lo dominaban, de español no sabían nada. Era doble de dura la prueba, entenderse en el idioma y entender los ejercicios, pero había que trabajar.

1.5. Recogiendo las pruebas y comentando la experiencia. Llegada la hora fijada todo el alumnado se dirigió al sitio fijado. Las caras de algunos y algunas eran un poema, las de los holandeses porque no se habían enterado de casi nada, su nivel de matemáticas era menor del esperado, los españoles porque todo lo tuvieron que hacer ellos y ellas, según decían.

1.6. Algunas de las pruebas fueron:

CABILDO SQUARE - I

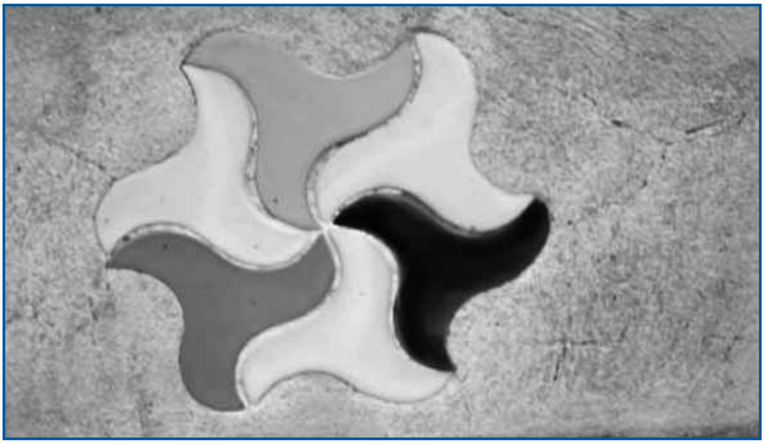
Find the stone column next to the church, as you can see in the photograph Nº1. Calculate the estimated volume of the column. You have to approximate to units and express the result in cm^3.

Fotografía Nº 1

ANDALUSÍ GARDEN

In the garden, look for the tile shown in the photograph Nº2. You get this figure if you turn and move part of it. Can you obtain the minimum shape that generates the figure? (The minimum shape is not one of the coloured doves, it is smaller).

Explain how you obtain the final figure from the original minimum shape.



Fotografía Nº 2

St PETER'S CHURCH - II

The irrational number $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ is called *the golden ratio*. Calculate the value of that number using your calculator. Calculate to five decimal points.

Golden rectangles are those in which if you divide the base by the height, you get the golden ratio. Check if the stone rectangles in the façade of the church are golden or not (check at least five rectangles and write their location and measures).

Fotografía Nº 3

LOCATION	BASE	HEIGHT	QUOTIENT	GOLDEN?

CONCLUSIONES

Primeramente supone una gran experiencia pasear por las calles del casco antiguo de Arcos, con todo su encanto, buscando posibles problemas en los que el alumnado pueda aplicar los conocimientos matemáticos que tiene. Para nosotras mismas, ha supuesto un cambio en la forma de observar nuestro entorno. No sólo paseamos viendo la belleza de los elementos arquitectónicos, sino que añadimos otro componente, que consiste en ver matemáticas en todo lo que nos rodea. Muchas veces cuando damos clases nos dejamos atrapar por los aspectos más académicos y distantes de ellas, y esta experiencia ha significado una brisa de frescura.

Con la ayuda del Google maps, la localización de los lugares en los que el alumnado debía realizar las pruebas fue más sencilla. La elección de las pruebas también requiere de bastante tiempo de dedicación, pues desconocíamos si nuestro alumnado era capaz de enfrentarse a determinadas situaciones.

El día de las pruebas el comportamiento de alumnado fue ejemplar, no así el interés mostrado, pues fue muy desigual en los equipos, sobre todo observamos grandes diferencias entre el alumnado español y el holandés. Muchas veces no queremos arriesgarnos a realizar actividades con nuestro alumnado fuera del aula, pues pensamos que no vamos a ser capaces de controlarlo y que su comportamiento será malo, sin embargo hemos de decir que más bien todo lo contrario.

La experiencia ha sido por tanto muy positiva, para nosotras y para el alumnado. Y desde aquí animamos a todas y todos a realizar actividades de este tipo.

REFERENCIAS

Carmen Arese Oliva, María Dolores Bogeat Ferreira, Mª Guadalupe Buendía Castiñeira, Pilar Cazenave Bernal, Wenceslao Delgado Esteban, Pilar Escutia Basart, Dolores Pereira Figueroa, Manuel Sánchez Vázquez, *Geometría en los Reales Alcázares de Sevilla*. Epsilon: Revista de la Sociedd Andaluza de Educación Matemática "Thales", ISSN 1131-9321, Nº 69, 2008, pags. 223-230.

Rafael Bracho López. *Matemáticas en la calle.* Epsilon: Revista de la Sociedd Andaluza de Educación Matemática "Thales", ISSN 1131-9321, Nº 64, 2006, pags. 125-142.

Web del ayuntamiento de Arcos de la Frontera: http://www.arcosdelafrontera.es/

Google maps

La enseñanza para la comprensión en el nivel inicial: una experiencia que deviene y llega a la web

Mariela Leguizamón
Escuela Primaria José de San Martín. Santa Fe, Argentina
Instituto Particular Incorporado Nº 4023 de Santo Domingo, Argentina
Sonia Pastorelli
Facultad Regional Santa Fe. Universidad Tecnológica Nacional, Argentina

Resumen: *La búsqueda de soluciones a problemas de gestión y calidad en educación, debe ser abordada con alternativas múltiples, que trascienden al aula. Es así que en la Escuela José de San Martín de Santo Domingo (Santa Fe) se desarrolló una experiencia con alumnos del tercer grado del nivel primario.*

El reto inicial fue desarrollar un proyecto en donde las áreas ciencias sociales, lengua y tecnología se articulen con la de matemática, con el objetivo de colaborar en la construcción de un conocimiento más profundo, haciendo uso de inteligencias múltiples (Gardner, 1994). Luego, y sobre la base de esta experiencia, se planteó como desafío, diseñar un instrumento de valoración de los niveles de comprensión exhibidos por los niños durante el desarrollo del proyecto, proceso que a su vez permite refinar la comprensión de los docentes sobre los mecanismos de desarrollo de la de los alumnos.

La experiencia es valorada desde las perspectivas de los distintos actores: docentes, alumnos y comunidad educativa. Las docentes e investigadores intervinientes en la tarea mejoraron su comprensión al diseñar un instrumento para evaluar la de sus alumnos bajo la mirada de Enseñanza para la Comprensión (Stone Wiske, 1999; Blythe,1999; Perkins, 1995). La comunidad educativa (padres, directivos, gobernantes) valorizaron la práctica por la motivación despertada en los niños y por posibilidad de compartir la misma a través de la página web del pueblo.

Palabras claves: *Comprensión, motivación, TICS, integración educativa*

INTRODUCCIÓN

Perkins (1995), dentro de su noción de *Escuela Inteligente*, propone distintas pedagogías para que los docentes seamos capaces de utilizar, y para que los estudiantes puedan, no sólo entender los contenidos dentro del aula sino usarlos en cualquier ámbito de su vida; es decir, transferirlos. Así escuelas inteligentes son las que introducen todo posible progreso en el campo de la enseñanza y el aprendizaje para que los estudiantes no sólo conozcan, sino que piensen a partir de lo que conocen.

El NTCM (National Council of Teachers of Mathematics) postula:

> los alumnos de todos los niveles deberían entender la matemática como un campo de investigación plenamente integrado, que apunta a ayudarlos a resolver problemas, razonar y hacer conexiones. Los alumnos deberían estar expuestos a numerosas y diversas experiencias interrelacionadas que los alienten a valorar la empresa matemática, a desarrollar hábitos mentales y comprender y valorar el papel de la matemática en los asuntos humanos; que debería motivárselos para explorar, calcular y hasta cometer y corregir errores para que tengan confianza en su capacidad para resolver problemas complejos; que deberían leer, escribir y discutir y que deberían conjeturar, probar y construir argumentos sobre la validez de una conjetura [...] (Stone Wiske, 1999, p. 55).

Con esta premisa fue concebida la experiencia que se describirá a continuación. La misma resultó motivadora para los niños y docentes que intervinieron en la misma. Por ello resultó de interés recuperarla con el propósito relacionarla con la mejorara de los desempeños de comprensión de los niños.

En este sentido, y en el marco de un curso de capacitación “Enseñanza para la comprensión” dictado en Instituto Superior Incorporado Nº 4023 “Los Colonizadores” (Resolución Ministerial N° 1258/04, provincia Santa Fe) la práctica fue analizada con el objetivo de diseñar para la misma un instrumento que permita valorar la comprensión desarrollada por los niños. La experiencia y el diseño del instrumento es el eje del presente trabajo.

FUNDAMENTACIÓN

Una entrada posible para trabajar contextos significativos, que permitan la comprensión, es instalar interrogantes y trabajar con ellos. La clave está en proponer situaciones problemáticas que despierten su curiosidad, que permitan poner de manifiesto sus concepciones y que estimulen la búsqueda de caminos de resolución de problemas o conflictos planteados. Los desarrollos de proyectos son adecuados para este fin, ya que a la vez que permiten observar los desempeños de los estudiantes, posibilitan retroalimentar y andamiar el aprendizaje.

El desafío dl proyecto que se retrata en esta presentación, en donde ciencias sociales, lengua y tecnología se articulan con matemática, es colaborar en la construcción de un conocimiento más profundo de lo que aparece como más próximo y tratar de evitar simplificaciones que deriven en un abordaje esquemático y limitado al conocimiento que ya posee cada alumno.

Los conocimientos espaciales no se construyen por abstracción directa del espacio real, sino a partir de utilizar las propias conceptualizaciones en la resolución de problemas que plantea dicho espacio.

La situación diseñada y ensayada propone rescatar las experiencias de los niños con la intención de ampliarlas y lograr que otorguen significados cada vez más complejos a la realidad. El tratamiento simultáneo de contextos cercanos y lejanos y el entrecruzamiento los datos les ayudarán a conocer más lo propio por comparación y contraste de uno con otro.

El conocimiento del mundo social es una experiencia de construcción social gradual, en la que progresivamente se complejizan y profundizan múltiples nociones y conceptos. Se pretende revalorizar la enseñanza de la geometría proponiendo un análisis a priori de situaciones didácticas significativas que permitan al alumno ser sujeto competente, participante activo en la construcción de conocimientos, promoviendo en el trabajo diario, el uso de variados recursos didácticos que propicien el desarrollo del pensamiento espacial.

DESCRIPCIÓN DE LA EXPERIENCIA

La misma se desarrolló con alumnos del tercer grado del nivel inicial de la Escuela José de San Martín de Santo Domingo. Este pueblo de 2000 habitantes está ubicado en el centro de la provincia de Santa Fe, a 80 km de su capital. La misma se esquematiza en el siguiente gráfico.

Se usaron cuerpos geométricos de la plaza como inicio motivador del conocimiento de los mismos. La actividad comenzó entregando a los niños “fotos mal tomadas” (fotos recortadas de sectores de objetos o construcciones) que debían reconocer a qué parte del pueblo pertenecían. Esto provocó salir de la escuela a explorar y comprobar de dónde fueron tomadas, fundamentando sus respuestas.

Luego de buscar las similitudes entre las construcciones que aparecen en las fotos y los cuerpos geométricos, en un trabajo de investigación, se vuelve a la plaza a detectar más cuerpos geométricos.

De las actividades realizadas surgió la idea de investigar *"¿cómo fue nuestra plaza a través de los años?".* Por ello se entrevistaron abuelos y elaboraron textos descriptivos con la historia y otros de la actualidad de la plaza, destacando la presencia de la geometría.

Simultáneamente, desde Tecnología, confeccionaron maquetas de la plaza, representado objetos por medio del desarrollo de los cuerpos geométricos. Para ellos desarmaron envases y objetos descartables para obtener patrones.

Posteriormente los niños "pasearon" por el mundo por medio del GoogleEarth, buscando localidades argentinas que tengan plaza. Así surgió el interrogante *¿por qué lo pueblos tienen plaza?* En sucesivas búsquedas en el software, compararon plazas y ubicación de los edificios públicos, elaboraron la conclusión: "*los pueblos y ciudades de nuestro país tiene plaza porque responden al modelo español de fundación*".

En la etapa final del proyecto alumnos y docentes colaboraron en el trazado del trabajo del plano de la localidad, analizando sus características, cantidad y forma de las cuadras, de dónde proviene la única diagonal que tiene, conjeturando cómo sería la traza si se decidiese hacer diagonales desde la plaza. Se trató así los tópicos rectas paralelas, perpendiculares, oblicuas.

Una vez adquirido las nociones de cuerpos y figuras, por medio de situaciones problemáticas los niños trabajaron con perímetro y cubrimiento de plano (superficie).

Los contenidos a desarrollar se presentaron primeramente como herramientas para resolver problemas, lo cual construirá el sentido de dichos conocimientos. Luego, y a partir de su uso, se reflexionó para estudiarlos como objetos en sí mismos.

De este modo, hacer matemática implicó disponer de herramientas para resolver problemas y reorganizar, sucesivamente, los conocimientos en redes conceptuales de sostén que permitirán la resolución de situaciones problemáticas más complejas.

Esta modalidad implicó trabajo compartido, la imprescindible construcción de conocimientos individuales se vio enriquecida con la confrontación de ideas, la exploración y formulación de hipótesis de manera conjunta, la justificación y defensa de los procedimientos realizados, la presentación honesta de resultados y la valoración de ideas ajenas. Tomando esta base, subyace la consideración de la matemática como un bien cultural y social, que ostenta en los planos formativo, informativo e instrumental.

Las situaciones problemáticas presentadas provocaron la necesidad de ser resueltas de diferentes maneras, utilizando diferentes estrategias de modo que pueda dar lugar a la creatividad y la reflexión. En síntesis, este modo de trabajo permitió desplazar y superar aquella concepción "aplicacionista" de la matemática por una metodología de trabajo dentro del aula, en la que los alumnos investigan, construyen y consolidan su conocimiento. Las fotos siguientes los momentos y producciones capturadas durante la tarea.

EL MARCO PEDAGÓGICO: ENSEÑANZA PARA LA COMPRENSIÓN (EPC)

A menudo se refiere a alcanzar la comprensión como una cuestión de "captar" o que los conceptos "encajen". Esta visión encuadra a la comprensión como un todo o un nada, cuando en realidad el aprendizaje para la comprensión es esencialmente gradual. En un sentido Bruneriano, comprender implica ir más allá de la información dada. La comprensión no es una acumulación eficiente de información, ni una representación del mundo dentro de la mente, ni una colección de conductas irreflexivas. La comprensión es una unidad de habilidad, que toma cuerpo en la noción de acción reflexiva.

En la experiencia aquí se adhiere a que:

> Comprender es desempeñarse de un modo flexible en un área de conocimiento, es poder realizar una variada gama de actividades que requieren pensamiento en cuanto a un tema, por ejemplo explicarlo, encontrar evidencia y ejemplos, generalizarlo, aplicarlo, presentar analogías, y representarlo de una manera nueva (Blythe 1998, p. 39).

El proyecto de investigación colaborativa sobre EpC desarrollado por la Escuela de Graduados de Educación de Harvard establece un marco conceptual guía para llevar a la práctica este sistema de trabajo. Esta metodología de la enseñanza deriva, según Stone Whiske (1999), de cuatro preguntas claves que se realiza todo docente: ¿qué tópicos se deben comprender?, ¿qué aspectos de esos tópicos deben ser comprendidos?, ¿cómo podemos promover la comprensión? y ¿cómo podemos averiguar lo que comprenden los alumnos?

Las respuestas a estas preguntas son los pilares de la EpC y se denominan respectivamente Tópicos Generativos, Metas de Comprensión, Desempeños de Comprensión y Evaluación Diagnóstica Continua.

Los **Tópicos Generativos**, Son temas, cuestiones, conceptos, ideas, etc, que proporcionan hondura, significación, conexiones y variedad de perspectivas en un grado suficiente como para apoyar el desarrollo de comprensión profundas por parte del alumno. El grupo de trabajo que elaboró el proyecto de EpC luego de años de investigación llegó a la conclusión de que es probable que un tópico sea generativo si: es central para un dominio o disciplina, es rico en conexiones, es accesible e interesante para los alumnos y docentes. En esta experiencia el tópico trabajado “la presencia de la geometría en la construcción del espacio geográfico”.

Las **Metas de Comprensión** detallan los logros básicos a los que apuntan los docentes y los alumnos. Identifican conceptos, procesos y habilidades en torno de los cuales los alumnos desarrollan la comprensión. Las hay de distintos “tamaños”, hay metas de comprensión de la unidad de estudio y hay otras que atraviesan distintas unidades, estas se las denomina “hilos conductores”. El hilo conductor acá fue “la caracterización y construcción de figuras y cuerpos geométricos reales”.

Los **Desempeños de Comprensión** son actividades que desarrollan y demuestran la comprensión del alumno al exigirles usar lo que saben, de nuevas maneras. En esas actividades, los alumnos reconfiguran, expanden y aplican lo que saben y, además, extrapolan y construyen a partir de sus conocimientos previos. Dentro de los múltiples desempeños de comprensión utilizados se destacan:

- el análisis de distintos tipos de planos catastrales extraídos de documentos e imágenes satelitales extraídas de GoogleEarth (que suministraron información sobre los espacios urbanos),
- reconocimiento de similitudes y diferencias entre las figuras y cuerpos geométricos, a partir de los elementos que las/os componen,
- uso de relaciones espaciales al interpretar y describir en forma oral y gráfica trayectos y posiciones de objetos y personas,
- construcción las nociones de perímetro y área durante el desarrollo de maquetas.

La **Valoración Diagnóstica Continua** es integrar el desempeño y la realimentación. “No es más que el proceso de brindar información y respuestas claras a los desempeños de comprensión de los alumnos de modo tal que les permita mejorar sus próximos desempeños” (Blythe, Bondy, Kendall, 1999). Exige dos condiciones: que los desempeños de comprensión se ciñan a criterios de evaluación claros, públicos y pertinentes y que los alumnos tengan la posibilidad de recibir realimentación. La valoración debe provenir de distintas fuentes (propia, del docente o pares), permitir estimar el avance, mostrando no sólo los logros sino cómo pueden mejorarse y ser frecuente. En la experiencia descripta esta valoración tuvo su eje en la tutoría para el desarrollo de las maquetas y demás trabajos.

LA COMPRENSIÓN: UN CONSTRUCTO CON VARIAS ARISTAS

El concepto de comprensión en sí mismo supone múltiples interpretaciones. La EpC asume que comprender es poder llevar a cabo una diversidad de acciones (desempeños) que demuestre que uno entiende el tópico a la vez que amplía su conocimiento del mismo y lo utiliza de una forma innovadora. Notar que esto de-nota que la comprensión no es nunca acabada. Para describir las cualidades de la comprensión, de tal manera que sean respetuosas de la especificidad de la disciplina y a la vez válidas en diferentes dominios, el marco destaca cuatro dimensiones de este constructo:

- **Dimensión de los Contenidos**: evalúa el nivel hasta el cual los alumnos han trascendido las perspectivas intuitivas o no escolarizadas y el grado hasta el cual pueden moverse con flexibilidad entre ejemplos y generalizaciones en una red conceptual coherente y rica.
- **Dimensión de los Métodos**: evalúa la capacidad de los alumnos para mantener un sano escepticismo acerca de lo que conocen o lo que se les dice, así como el uso de métodos confiables para construir y validar afirmaciones y trabajos verdaderos.
- **Dimensión de los Propósitos**: evalúa la capacidad de los alumnos para reconocer los propósitos e intereses que orientan la construcción del conocimiento, su capacidad para usar este conocimiento en múltiples situaciones y las consecuencias de hacerlo.
- **Dimensión de las Formas de comunicación**: evalúa el dominio de los tipos de comunicación, el uso de sistemas de símbolos y la consideración del contexto para expresar lo que se sabe.

La EpC caracteriza en cuatro niveles los desempeños para cada una de las dimensiones:

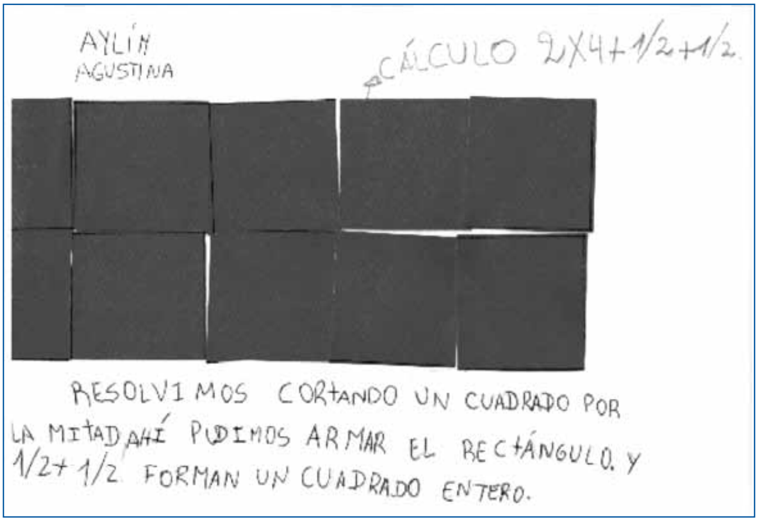
- Los **desempeños de comprensión ingenua:** basados en conocimientos intuitivos, como un proceso no problemático, generalmente poco reflexivos y no estructurados.
- Los **desempeños de comprensión de principiante:** basados en procedimientos ritualizados y mecanismos de prueba. La naturaleza y los objetivos de la construcción del conocimiento son descriptos como procedimientos mecánicos. La validación de un trabajo depende más de la autoridad externa.
- Los **desempeños de comprensión de aprendiz:** basados en conocimientos y modos de pensar disciplinarios y demuestran un uso flexible de conceptos. Con apoyo, pueden detectar la relación en situaciones cotidianas.
- Los **desempeños de comprensión de maestría:** son integradores, creativos, críticos y permiten usar los conocimientos para reinterpretar el mundo.

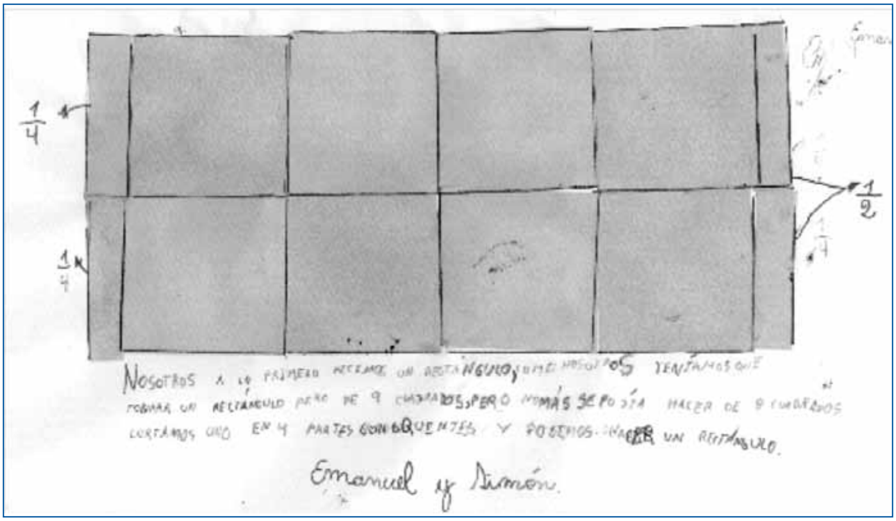
EL INSTRUMENTO PARA EVALUAR COMPRENSIÓN EN LA PROPUESTA

Como se dijo en la introducción, luego de desarrollada la práctica descripta (concebida originalmente para un mes, pero dado a la motivación despertada en niños y en la comunidad se extendió a lo largo del año), interesó elaborar un instrumento que refleje la comprensión de los alumnos que participaron en ella en base a las dimensiones y niveles que describe la EpC. El mismo se sintetiza, por razones de espacio, a continuación.

Dimensión	Criterio	Nivel	
De los Contenidos	¿Puede calcular la cantidad de cerámicas necesarias para cubrir una superficie regular?	**I**	Cuenta las unidades de cada fila para luego arribar al total mediante la suma
		P	Cuenta las baldosas de una fila y lo multiplica por la cantidad de columnas o viceversa.
		A	Reconoce la figura y realiza la multiplicación.
		M	Son capaces de hallar la superficie de figuras irregulares mediante la fragmentación de la misma en figuras regulares.
De los Métodos	¿Utilizan métodos, procedimientos, estrategias para construir conocimientos confiables?	**I**	Necesitan disparadores del docente y proceden por medio del ensayo y error
		P	Por medio del ensayo y error comienzan a comprender y descartan los procedimientos no válidos.
		A	Dimensiona y anticipa las consecuencias de sus procedimientos, es capaz de aplicar aprendizajes anteriores y/o modificarlos para construir el conocimiento.
		M	Desarrolla una posición personal de lo que aprende y lo puede transferir a nuevas situaciones.
De los Propósitos	¿Reconoce los cuerpos geométricos que pueden ser construidos ensamblando figuras planas?	**I**	Sólo reconoce los cuerpos que desarrollaron en tecnología (ejemplo cubo)
		P	Pueden realizar modificaciones a los desarrollados en tecnología (ejemplo pueden hacer un prisma, o usan tijera para trasformar algunos cuerpos, trabajando por ensayo y error. Pueden reconocer lo que no pueden hacer.
		A	Reforman plantillas, hacen hipótesis sobre como se deberían reformar adelantándose a los que obtendrán.
		M	Usan cuerpos complejos para copiar y diseñar plantillas.
De las Formas de Comunicación	¿Es capaz de expresar en forma oral y escrita los procedimientos utilizados para resolver los desafíos propuestos?	**I**	Suele resolver la situación, pero tiene limitaciones para explicar los procedimientos empleados.
		P	Mediante la demostración explica los procedimientos empleados.
		A	En forma oral o escrita puede dar a conocer los procedimientos utilizados, justificando las estrategias que ha descartado
		M	Fundamenta sus procedimientos en forma oral y/o escrita utilizando el vocabulario rico y pertinente.

Ejemplificando, en las figuras se muestran trabajos de grupos de alumnos. En ambos la consigna fue formar un rectángulo con un número impar de baldosas. En el trabajo de Agustina y Aylín (figura de la izquierda) se percibe nivel máximo de comprensión tanto en la dimensión de los contenidos como en la forma de comunicación (notar que economizaron procedimientos y utilizaron dos sistemas de símbolos para expresar su trabajo). Emanuel y Simón (figura de la derecha) demostraron comprensión de principiante en la dimensión de los contenidos al resolver la consigna, reproduciendo procedimientos de otros grupos (dividir baldosas) pero usando más pasos de los necesarios, buscando una simetría no necesaria. El mismo nivel alcanzaron en la dimensión de las formas de comunicación, ya que sólo se expresaron a través de la narración para justificar el uso de las 9 baldosas (aunque hay un intento de operar con las fracciones, pero dejan abierta la operación).





VALORACIÓN DE LA EXPERIENCIA DESDE LOS DISTINTOS PARTICIPANTES

Apreciación de la docente: las actividades propuestas en este proyecto crearon un clima de constante trabajo, investigación y manipulación de los objetos que permitieron la construcción significativa de los contenidos desarrollados, respetando el ritmo de aprendizaje de cada alumno y desarrollando en todos la creatividad para resolver las situaciones planteadas permitiendo fortalecer la su autoestima

Apreciación de los alumnos: alguna de las frases vertidas cuando se les pidió que criticaran la experiencia son:

> "… la seño siempre nos hace pensar mucho hasta que encontramos la manera de resolver los problemas….".
>
> "… primero se nos ponía difícil… luego a un compañero se le ocurrió una idea: ¡usar la tijera!"

Apreciación de la comunidad: Es de destacar que esta experiencia trascendió el espacio institucional, llegando a formar parte de un ciclo radial y del blog oficial del pueblo (figura 2). En el mismo, su mentora dice

> "Yo aún no había publicado esta historia y conversando con Mariela pensamos en la importancia de que los niños participen en este espacio. Entonces, acompañados por la docente, visitaron el Centro Tecnológico donde descubrieron el blog, escucharon la propuesta y la aceptaron. Se entusiasmaron y surgieron trabajos como los que se pueden apreciar en este post. Ellos siguen con las actividades... Y las publicaciones también continuarán"

Imagen de la página web donde se exhibe la experiencia.

Algunas de las opiniones de los visitantes del blog:

> "Muy buena iniciativa de la maestra y veo que los chicos se entusiasmaron con el tema de la geometría y la plaza, linda asociación: No me extraña, es Santo Domingo, "
>
> "Interesante combinación: Enseñar la geometría e involucrar a los niños en la investigación de la historia de tu pueblo."
>
> "Es la mejor manera para que las nuevas generaciones conserven la cultura y tradiciones, sin apartarse de la tecnología."
>
> "Chicos, hermosos los trabajos que realizaron y cuantas cosas que nos enseñaron... Felicitaciones a la seño por lo creativa que es al proponerles distintas actividades, y muchas gracias a Nidia por compartir este espacio con ustedes y darles esta oportunidad.
>
> "Qué magnífico trabajo, si me hubieran dado las matemáticas de esta manera a lo mejor hoy no sería Profesor de Historia, o sí, pero tal vez me hubiese dedicado a la Historia de las Matemáticas".

REFLEXIONES Y ACCIONES FUTURAS:

Es preciso que los docentes nos aseguremos que los alumnos pasen una amplia parte del tiempo utilizando y expandiendo activamente sus mentes y no recibiendo pasivamente lo que otros han creado. En tal sentido postulamos que la motivación de nuestros alumnos es un punto de partida para ello. Pero coincidiendo con *Stone Wiske* - *Hammerness y Gray Wilson* (en *Stone Wiske*,1999, p.128) la verdadera aspiración es "motivar a los alumnos a desempeños cada vez más sofisticados y a la comprensión de por lo menos una meta abardadora", que les permitan pensar avanzando más allá de lo que se les dice, confrontando sus ideas y actitudes desde una perspectiva más crítica y combinando y contrastando esas ideas de formas hasta el momento inexploradas.

Nuestro desafío futuro será validar y aplicar el instrumento diseñado no sólo para categorizar el nivel de comprensión exhibido por los niños y observar si todas las dimensiones de la comprensión evolucionan por igual durante la unidad diseñada, sino para refinar nuestra propia comprensión sobre metas y desempeños que ayuden a ajustar el currículo.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Blythe, T y colaboradores. et al (1999). *La enseñanza para la comprensión. Guía para el docente*. Buenos Aires. Paidós.

Bruner, J. S. (2000). *La educación, puerta de la cultura.* Madrid. Visor

Bruner, J. S. et al. (2001). *El Proceso mental en el aprendizaje*. Traducción de Jaime Vegas y Pablo Manzano. Madrid.. Narcea.

Gardner, H. (1994). *Estructuras de la mente. La teoría de las inteligencias múltiples*. México. Fondo de la Cultura.

Pastorelli, 2009. *EpC: Enseñanza para la Comprensión*. Material del curso dirigido a docentes del nivel inicial. "Instituto Superior Incorporado Nº 4023 "Los Colonizadores". Santo Domingo. Provincia de Santa Fe. Disposición del S.P.E.P Nº 0444/09 en el marco de la Resolución Ministerial N° 1258/04.

Perkins, D. (1995). *La Escuela Inteligente. Del adiestramiento de la memoria a la educación de la mente*. Barcelona. Gedisa.

Stone Wiske, M. (1999): *La enseñanza para la comprensión. Vinculación entre la investigación y la práctica.* Paidós. Buenos Aires.

Epsilón - *Revista de Educación Matemática* *2011, Vol. 28(2), nº 78, pp. 71-76*

Golosinas matemáticas. Reflejos dulces y apetitosos

Antonio Israel Mercado Hurtado
IES Sixto Marco, Elche

Resumen: *Paseando por una tienda de golosinas podemos observar gominolas, nubes, bolas de chicle, regaliz, botellas, melones, gajos de naranja, lenguas de pica-pica, patatas fritas, gusanitos,… Suculentos manjares que devoran sin parar nuestros alumnos desde una edad muy temprana.*

Si la mirada deja de ser golosa y se transforma en una mirada matemática podemos observar esferas, elipsoides, cilindros, espirales, círculos, hélices, prismas, pirámides, conos, paraboloides hiperbólicos,… Manjares, en principio, nada suculentos que iremos devorando a la vez que endulzamos nuestro conocimiento matemático.

RECONOCER

Ocho de la mañana. Dos adolescentes entran a clase. Uno de ellos va mascando chicle y el otro lleva una piruleta en la boca…

La importancia de los hábitos alimenticios es, sin lugar a dudas, un tema de actualidad que no puede dejarnos indiferentes.

¿Y si buscamos las matemáticas que aparecen en las golosinas que consumen nuestros alumnos, sin dejar de lado lo imprescindible de una buena alimentación, sobre todo en estas edades?

El reto estaba encima de la mesa: Buscar reflejos matemáticos en las golosinas.

(…unos días más tarde…) Ocho de la mañana. El profesor de matemáticas entra a clase con una bolsa de golosinas. Hoy haremos matemáticas con estas chucherías. De un plumazo hemos despertado a una clase de jóvenes adolescentes. Pero no sólo los hemos despertado físicamente. Sin que ellos lo sepan están a punto de adquirir cierta sensibilidad matemática. Usar las golosinas como reflejo matemático responde a la necesidad de acercar a un grupo de estudiantes de primer ciclo de ESO el hecho indiscutible de que las matemáticas nos rodean. Y no solo nos rodean a los profesores de matemáticas, también rodean a nuestro alumnado.

Este reflejo matemático busca la cercanía con el discente. Es una condición necesaria aunque no suficiente para descargar las matemáticas de su fría formalidad.

Trabajar a partir de golosinas causa sorpresa, pues se trata de una actividad inesperada. Los reflejos matemáticos son así, aparecen en los lugares más insospechados.

Bromeando un alumno dijo a otro: “No te comas ese cilindro de fresa”. En el fondo no era una broma. Era una mirada matemática adolescente.

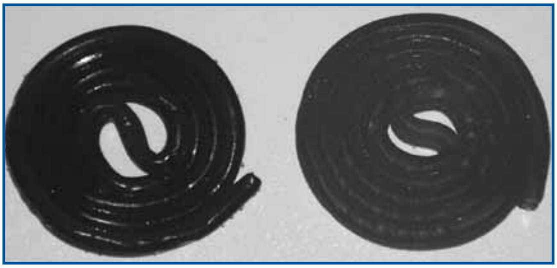
RELATAR Y ANALIZAR

En el mercado existen gran variedad de golosinas. Resulta complicado hacer una clasificación exhaustiva de ellas atendiendo a criterios puramente matemáticos. No obstante una primera clasificación podría versar sobre la forma que tienen las golosinas.

Ciertos caramelos o chicles tienen forma esférica. Es la manera de que al metérnoslos en la boca tengamos una sensación agradable (no tienen picos ni aristas que nos puedan molestar). Además hay un gran número de golosinas con forma esférica que son huecas. La esfera es la mínima superficie que encierra un volumen determinado.

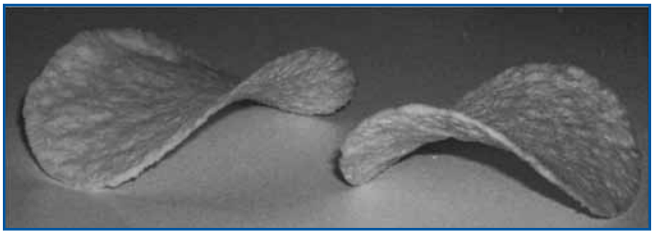
Fotografía 1: Esferas

Una buena forma de ocupar poco espacio es cuidando la presentación matemática de la golosina. En este caso la espiral se lleva el premio.



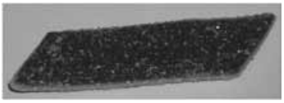
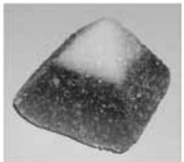
Fotografía 2: Espirales

En las patatas fritas podemos encontrar ejemplos de conceptos matemáticos difíciles de explicar. Es el caso del punto de silla: punto de una superficie que al mismo tiempo es máximo y mínimo.



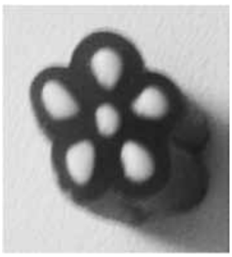
Fotografía 3: Paraboloides hiperbólicos

Algunas son bidimensionales y otras tridimensionales:

			
Fotografía 4: Golosinas cilíndricas	Fotografía 5: Paralelogramo dulce	Fotografía 6: Gominola piramidal	Fotografía 7: Ortoedro de caramelo

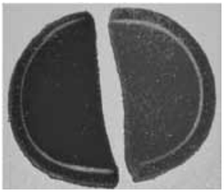
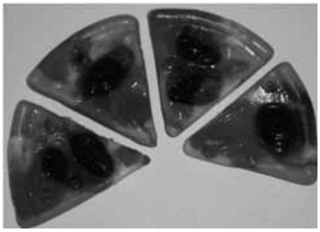
Una segunda clasificación podría ser numérica. Números naturales, racionales e incluso irracionales pueden encontrarse en el diseño de las golosinas:

Uso de los números naturales:

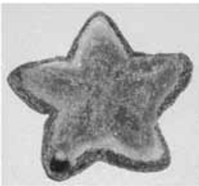


Fotografía 8:
Cinco de fresa

Uso de las fracciones:

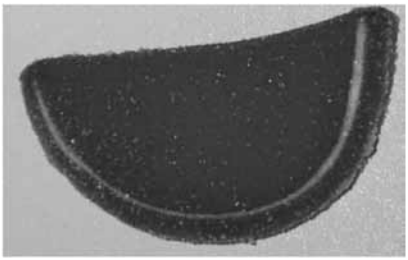
		
Fotografías 9 y 10: Uso de la fracción 1/2 en las golosinas		Fotografía 11: Uso de la fracción 1/6 en las golosinas

Uso de los números irracionales:

	
Fotografía 12: La proporción Áurea azucarada	Fotografía 13: El número π no pica

Una tercera clasificación matemática se puede basar en la utilización del color de las golosinas. Utilizando esta característica tan llamativa se pueden estudiar conceptos topológicos como interior, exterior y frontera de un conjunto.

Es relativamente habitual observar alumnos que confunden el concepto de área y de perímetro cuando en las golosinas ambos conceptos están claramente diferenciados por el color.

	
Fotografía 14: Los colores diferencian claramente el interior, la frontera y el exterior de la golosina.	Fotografía 15: El perímetro es de color verde mientras que el área es roja.

EXPLOTAR DIDÁCTICAMENTE

La primera reflexión que cabe a la hora de explotar didácticamente este reflejo matemático es que puede utilizarse para edades muy variadas: desde niños de primaria hasta adolescentes de secundaria (especialmente los de primer ciclo). Este grupo tan variado tiene algo en común; cuando se hacen matemáticas utilizando golosinas, la motivación está asegurada.

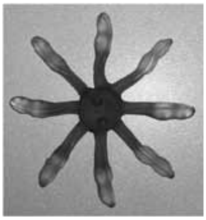
La toma de medidas en distintas golosinas puede dar pie a varias actividades. Resulta bastante interesante el cálculo de perímetros, áreas y volúmenes. También se puede realizar un estudio sobre la relación entre el radio y el lado de los polígonos regulares utilizando diferentes tipos de gollerías.

Para alumnos de primaria, la introducción al mundo de las fracciones utilizando las golosinas que comen habitualmente puede resultar de gran interés.

Los polígonos regulares y los estrellados están presentes en las formas de bastantes caramelos. Un uso de esta característica es el estudio de los ángulos. Concretamente resulta bastante interesante el cálculo del ángulo interior y el ángulo central de polígonos regulares con este material comestible.

Dentro del tema de movimientos isométricos se puede estudiar el conjunto de movimientos (giros, traslaciones y simetrías) que dejan invariante una golosina. El diseño de estas está plagado de centros, ejes y planos de simetría y de centros de giro.





Fotografías 16-17-18
Actividad: Indica los ejes de simetría, los centros y ángulos de giro y los centros de simetría que dejan invariantes estas golosinas.

En secundaria obligatoria se lleva a cabo el estudio de la recta. En bastantes ocasiones se realiza un estudio analítico y gráfico, pero no se dejan a un lado las aplicaciones a la física o incluso a las propias matemáticas. No debemos olvidar la recta como generadora de curvas (mediante envolventes lineales) o la recta como generadora de superficies (superficies regladas).

Fotografías 19-20-21
Actividad: La recta como generadora de superficies. Construcción de un paraboloide hiperbólico a partir de pliegues rectos en un papel.

La espiral de Arquímedes se puede utilizar para resolver (no con regla y compás) el problema de la trisección del ángulo. En la fotografía 2 aparece un ejemplo de espiral de Arquímedes que puede servir como aliciente para estudiar problemas clásicos de la matemática de forma gráfica, introduciendo curvas que desgraciadamente quedan fuera de los currículos establecidos en la Educación Secundaria Obligatoria.

CONCLUSIONES

La búsqueda de reflejos matemáticos significativos para nuestro alumnado ha de ser una tarea constante que llene de sentido nuestra labor docente.

Trabajar las matemáticas que aparecen en las golosinas resulta una tarea entretenida, motivadora y formativa. Al mismo tiempo, dada la importancia que requieren los temas relacionados con la alimentación, incluso puede tratarse de una actividad que plantee nexos de unión con el área de Biología.

El tipo de actividad que puede plantearse a partir del uso de las golosinas es muy variado. El mercado está lleno de infinidad de modelos que van cambiando continuamente.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Alsina, C. (2005). *Geometría cotidiana*. Barcelona. Rubes Editorial S.L.

Corbalán, F. (1998). *La matemática aplicada a la vida cotidiana*. Barcelona. Biblioteca de aula. Editorial Grao.

Fundación La Caixa (2003). *Y después fue la ¡la forma!* Barcelona: La Caixa.

Una propuesta didáctica utilizando las nuevas tecnologías para la enseñanza de la integral como límite de sucesiones

Nora Gatica y Oscar Ares
Facultad de Ingeniería y Ciencias Económico Sociales
Universidad Nacional de San Luis, Argentina

Resumen: *En este trabajo presentamos una propuesta didáctica para la enseñanza del tema Integral definida para alumnos de primer año de las carreras de Ingeniería en la asignatura Análisis Matemático I. En esta secuencia utilizamos la interfase gráfica de MATLAB, GUI (graphical user interface).*

El concepto de integral definida es utilizado, para determinar el valor del área limitada por curvas y rectas. Tradicionalmente, para comenzar a explicar este concepto, el profesor, dibuja en el pizarrón la zona a determinar su área, subdividiendo los intervalos y encontrando el área buscada, para lo cual introduce el concepto de integral definida. En la secuencia que presentamos, es el alumno, utilizando la computadora, quien va subdividiendo el intervalo, visualizando el área buscada.

Palabras Claves: *Alumnos de Ingeniería, integral definida, nuevas tecnologías, sucesiones.*

INTRODUCCIÓN

En la enseñanza de la asignatura Análisis Matemático I, el acercamiento didáctico que se sigue en los programas de estudio y en los libros de texto es en esencia "tradicional". Es decir, básicamente se exponen los métodos de resolución de los distintos conceptos mediante un procedimiento algorítmico y se continúa con ejercicios cuya complejidad crece en forma gradual. De acuerdo con Contreras (2000), al desarrollar un tema de Análisis, un profesor se enfrenta a conceptos que por su propia naturaleza, son problemáticos en sí mismos, lo que hace desplazarse hacia posturas algorítmicas más fáciles de gestionar y evaluar, dejando de lado los problemas característicos de dicha asignatura.

En efecto, en la enseñanza elemental del Análisis Matemático se otorga gran importancia a los tratamientos tipo cálculo: la composición de dos o más funciones, el cálculo de derivadas, el cálculo de integrales, etc. También se ha comprobado que la enseñanza tradicional tiende a centrarse en una práctica algorítmica y algebraica y a evaluar sobre las competencias adquiridas en este dominio (Artigue, 1995).

Esta situación, si bien en principio es aceptable, genera una serie de problemas en asignaturas de la especialidad, en donde el uso que se le da a los conceptos cumplen con objetivos muy diferentes. Diversas investigaciones han detectado importantes dificultades en los estudiantes en el campo conceptual del Análisis. Tal como asegura Hitt (1998), los alumnos de una carrera de Ingeniería, después de llevar un curso de Cálculo, no logran resolver problemas no rutinarios. Este autor sugiere que los métodos tradicionales de enseñanza del cálculo son insuficientes en la preparación de buenos estudiantes para aplicar el cálculo de manera creativa. Además, complementa esta afirmación estableciendo que el fracaso de estos estudiantes se debe a la carencia de articulación entre representaciones provocando, tal como él expresa: "*que el alumno camine a ciegas*" en el sistema algebraico desarrollando algoritmos sin una idea clara del objetivo final perseguido.

En cuanto al concepto de integral definida, desde su origen, esta noción ha respondido a la necesidad de mejorar los métodos de medición de áreas subtendidas bajo líneas y superficies curvas. La técnica de integración se desarrolló sobre todo a partir del siglo XVII, paralelamente a los avances que tuvieron lugar en las teorías sobre derivadas y en el cálculo diferencial.

En la docencia, la integral definida es un concepto utilizado para determinar el valor de las áreas limitadas por curvas y rectas.

Para la enseñanza de este concepto, hace tiempo que se viene constatando que los aspectos teóricos relacionados con esta noción, tal como aparecen por ejemplo en la mayoría de textos resultan demasiados complejos para muchos de nuestros alumnos, la mayoría de los cuales no entiende el porque del enorme esfuerzo deductivo al que, de pronto se les somete. Por otro lado, fuera de las aplicaciones directas del cálculo de áreas y volúmenes, no aprenden a reconocer cuándo el cálculo de una magnitud requiere de una integración.

Llorens y Santoja (1997) analizan los errores de los alumnos las que encuadran en tres categorías:

1. Los estudiantes identifican "integral" con "primitiva".
2. Las integrales definidas se identifican con la regla de Barrow, incluso cuando esta no se puede aplicar.
3. No se integra el concepto de área con el de integral.

Diversas investigaciones (Llorens y Santoja, 1997; Contreras, 2000) muestran que los estudiantes no realizan una unión adecuada entre el concepto de área y el de integral definida. En ellos persiste una interpretación algebraica de la integral, por lo que la regla de Barrow se les presenta como una interpretación geométrica de la integral como si fuera igual que el caso de la tangente como interpretación geométrica de la derivada. Posiblemente este hecho se deba a que en los libros de texto se abusa del formalismo cuando se refiere al concepto de integral.

Como uno de los aspectos más importantes en las investigaciones en didáctica de la matemática es el análisis de las deficiencias que detectamos como profesores universitarios en los estudiantes, el presente trabajo se refiere a este aspecto a tener en cuenta, en los distintos registros de representación semiótica (Duval, 1998), al momento de elaborar propuestas didácticas que contribuyan a superarlos.

PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

El desarrollo de este trabajo tiene que ver con el interés por comprender y ayudar a resolver los problemas de formación matemática que presentan los estudiantes en cálculo diferencial e integral. En este contexto, las dificultades en la comprensión del concepto de integración como límite de una sucesión de sumas parciales son particularmente notables.

MARCO TEORICO

Durante el desarrollo de las ciencias matemáticas se han formalizado los conceptos matemáticos en definiciones rigurosas sin tener en cuenta las representaciones gráficas o las definiciones informales, en la mayoría de los casos.

Sin embargo, de acuerdo a Duval (1998), para favorecer el aprendizaje, los profesores deben proponer actividades de conversiones entre diferentes registros de representación semiótica.

Diversas investigaciones (Hitt, 1998a, 1998b; Duval, 1998; Fabra y Deulofeu, 2000; Gatica,Tauber y Ruíz, 2002; Villalobos y Farfan, 2001; etc.) han comprobado la importancia de la articulación entre diferentes registros de representación. Pero también estos estudios manifiestan que los alumnos, tanto de escuela secundaria como universitaria, no son capaces de lograr estas relaciones entre varios registros de representación.

Esta situación se agudiza en los alumnos de Ingeniería, ya que en las materias de la especialidad, el uso que se le da a los conceptos como modelos matemáticos, cumplen con objetivos muy diferentes; por un lado, en los procesos de resolución, se requiere de implementar métodos numéricos y gráficos y por otro, cuando se tiene una solución algebraica el principal interés reside en estudiar el comportamiento (por ejemplo de funciones) por medio de su representación gráfica identificando los parámetros involucrados en la misma.

En la mayoría de los casos, estas actividades resultan ser difíciles para los alumnos, ya que para poder realizar estas articulaciones, los estudiantes necesitan recurrir a la visualización. La visualización no puede ser entendida como el simple acto de ver, sino como "*la habilidad para representar, transformar, generar, comunicar, documentar y reflejar información visual en el pensamiento y el lenguaje del que aprende*" (Cantoral y Montiel, 2001, p.24).

En la visualización se utilizan matemáticas relacionadas con el campo de lo numérico, gráfico, algebraico, verbal y también de lo gestual. De esta manera, la visualización opera con el funcionamiento de las estructuras cognitivas, las relaciones entre las diversas representaciones de un objeto matemático y además intervienen en una determinada cultura.

La visualización no es más que un medio con el que cuenta el alumno para poder realizar un mejor entendimiento. Cuando nos referimos a visualizar un concepto, estamos hablando de comprender un concepto a través de una imagen visual.

Los profesores debemos ser conscientes de esta problemática por lo que en la organización de las clases, deberíamos priorizar actividades en los que los alumnos deban realizar conversiones entre registros (principalmente entre el gráfico y simbólico).

Pero muchas veces, necesitamos de herramientas que ayuden a la visualización de los conceptos, como es el caso del uso de la computadora para aprovechar el dinamismo que ofrece y favorecer actividades de manipulación.

Spicer (2000) define Manipulables **Virtuales** como representaciones digitales de la realidad posibilitadas por los computadores, y que el estudiante puede también manipular con el mismo objetivo de los primeros. *Los manipulables virtuales tienen además la capacidad de hacer visible lo que es difícil de ver e imposible de imaginar*" (Spicer, 2000, p.7). Estas herramientas ayudan al estudiante a construir su propio conocimiento y a la vez posibilita la conversión entre registros (simbólico y gráfico).

Desde otra perspectiva la noción de concep-image, inicialmente introducida por Tall y Vinner (1981), establece que el estudiante decide sobre la base de la imagen conceptual que ha construida y que es la estructura cognitiva total que es asociada con el concepto, el cual incluye todas las imágenes mentales y propiedades y procesos asociados.

Desde la distinción entre la imagen del concepto y la definición del concepto de Tall y Vinner (1981), Tall (1991) considera que la causa de muchos obstáculos responde al principio de extensión genérica, el cual justifica sobradamente la necesidad de diseñar cuidadosamente un currículo que evite la aparición de estos obstáculos.

Ahora bien, la práctica educativa nos dice que es posible que la estructura subyacente en un esquema no siempre sea coherente y, por el contrario, coexistan, inconsciente o conscientemente, ideas inconsistentes (considerar compatible una proposición y su negación), incoherentes (respuestas en diferentes sistemas de representación contradictorias entre sí), pobres y conflictivas. Esto conduce a esquemas tematizados que no siempre funcionan de la mejor manera posible. Por ejemplo, Tall y Vinner (1981), proponen las nociones de "*concept image*" y "*concept definition*" para referirse y explicar los conflictos que existen entre los conceptos matemáticos definidos formalmente y los procesos cognitivos individuales utilizados para concebirlos. Y para ensanchar los límites de competencia de los estudiantes, la estructura subyacente de un esquema deben ser detectada, corregida y enriquecida. Así pues, el esquema tiene que ser desequilibrado y reconstruido.

OBJETIVOS

El análisis del presente estudio se focaliza más en los fenómenos ligados al aprendizaje. Nos centramos específicamente en mostrar una propuesta didáctica de este tema, utilizando manipulables virtuales, donde los alumnos puedan visualizar la conversión entre dos sistemas de representación, el gráfico y el algebraico.

De acuerdo a Duval (1998) consideramos que es fundamental para la comprensión de los objetos matemáticos distinguir un objeto matemático y su representación. Desde esta perspectiva, la comprensión de un concepto se logra si se utilizan diferentes registros de representación.

Se recurre a un nuevo registro, un *registro gráfico con animación* que permita comprender el concepto de integral definida y sumarle interactividad, puesto que el alumno ingresará una función de una variable y un intervalo [a, b] arbitrario y observa, con animación gráfica, la aplicación algorítmica y la comprensión del concepto de integral definida como límite de una sucesión de sumas parciales.

En la implementación de la secuencia didáctica, nos proponemos el cumplimiento de los siguientes objetivos:

Comprender el concepto de integral como limite de una sucesión de sumas parciales. Tratar que adherir el concepto de integral a un conjunto de imágenes conceptuales.

Relacionar el teorema fundamental de sucesiones, como uno de los ejes de la fundamentación teórica de la definición de integral. Construir el concept-image de una sucesión monótona y acotada que por lo tanto converge.

Validar empíricamente una aproximación didáctica para la enseñanza del concepto de integral, apoyada en la visualización, que facilite al alumno adquirir una comprensión básica de integración.

Visualizar la sucesión $(S_n - s_n)$ que tiende a cero sii la función es integrable.

Para cumplir estos objetivos, utilizando la interfase gráfica de MATLAB, GUI (graphical user interface), diseñamos una secuencia para los alumnos de primer año que cursan Análisis Matemático I en las carreras de Ingeniería.

Presentamos las pantallas que se presentan cuando comenzamos con la secuencia:

PANTALLA PARA INTRODUCIR LOS DATOS

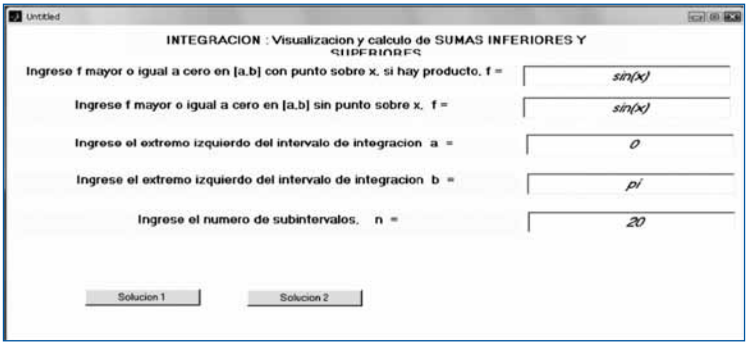


Figura 1
Pantalla de ingreso de datos

Pantallas de una secuencia de imágenes de la sucesión de sumas superiores e inferiores correspondiente a 7 subintervalos de la función sin(x) en el intervalo [0 pi].

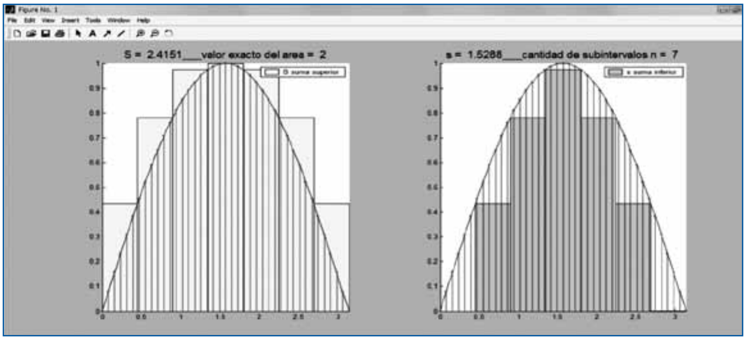


Figura 2
Áreas dadas por sumas superiores y
sumas inferiores con la función sin (x) con n=7

Pantallas de una secuencia de imágenes de la sucesión de sumas superiores e inferiores correspondiente a 13 subintervalos de la función sin(x) en el intervalo [0 pi].

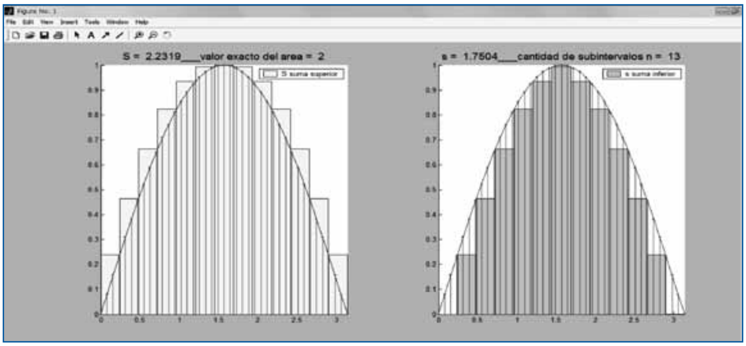


Figura 3
Áreas dadas por sumas superiores e inferiores con mayor número de intervalos

Al cambiar el número de intervalos, los alumnos pueden observar en las pantallas en la parte de arriba, las sumas superiores, inferiores y el valor exacto de la integral. De esta manera pueden concluir sobre el acercamiento de estas áreas al valor 2.

En la siguiente pantalla se han cambiado las funciones y el número de intervalos.

Pantalla que ilustra la Suma Superior y la Suma inferior de la función exp(-x) con n=5, n=13 subintervalos en el intervalo [0 4].

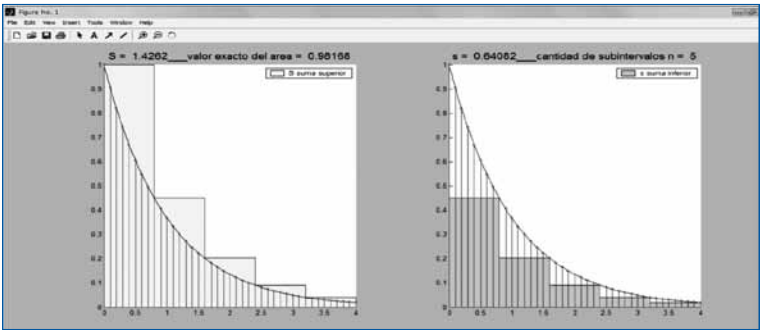


Figura 4

Áreas dadas por sumas superiores e inferiores con la función exp(-x) con n = 5

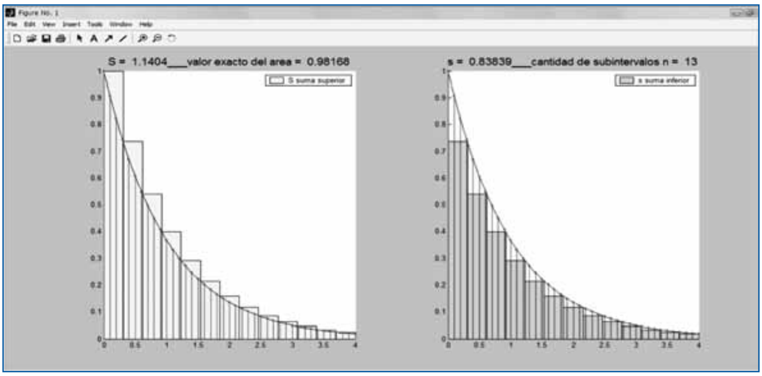


Figura 5

Áreas dadas por sumas superiores e inferiores con la función exp(-x) con n = 13

Pantallas de una secuencia de imágenes de la sucesión de sumas superiores e inferiores y la diferencia (Sn – sn) correspondiente a 7 y 13 subintervalos de la función sin(x) en el intervalo [0 pi]. Idem para la función exp(-x) para 5 y 13 subintervalos.

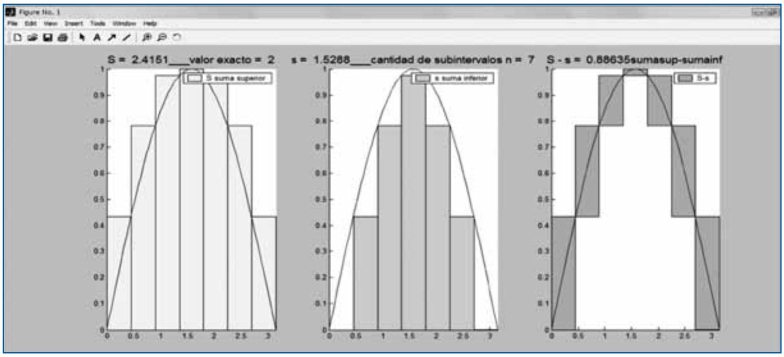


Figura 6
Sumas superiores e inferiores y la diferencia ($S_n - s_n$)
con n=7 de la función sin(x)

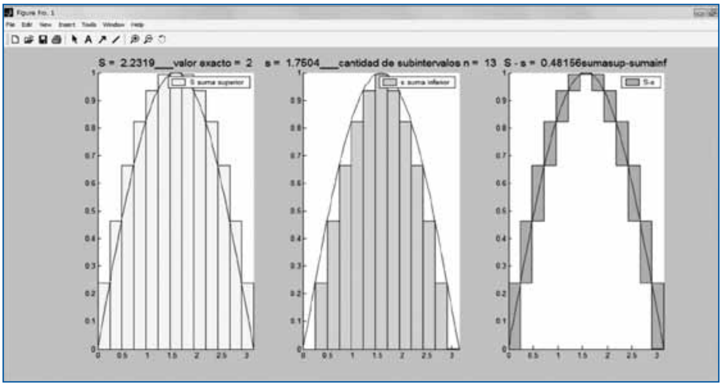


Figura 7.
Sumas superiores e inferiores y la diferencia ($S_n - s_n$)
con n=13 de la función sin(x)

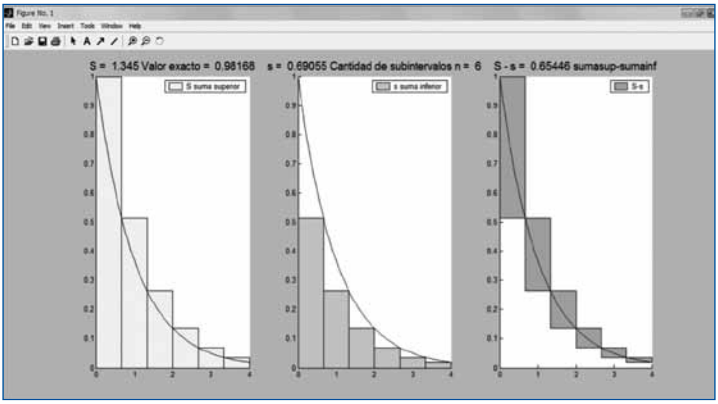


Figura 8
Sumas superiores e inferiores y la diferencia ($S_n - s_n$)
con n=7 de la función exp(-x)

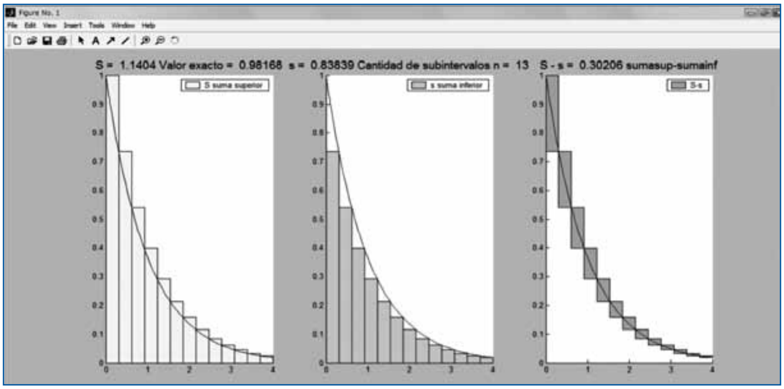


Figura 9
Sumas superiores e inferiores y la diferencia ($S_n - s_n$)
con n=13 de la función exp(-x)

ACTIVIDADES

La hoja de actividades que deben realizar es la que se transcribe a continuación:

A partir de la proyección de la interface gráfica de MATLAB, referida al <u>tema integración</u>, se solicita al alumno ingresar datos a la interface grafica y responder al siguiente cuestionario, que persigue como finalidad construir una **imagen conceptual:**

a) Ingresar la función $f(x) = e^{-x}$.

b) Ingresar el intervalo de integración [a, b] = [0, 4].

c) Ingrese la cantidad de subintervalos n=10. Inicie el proceso y registre los valores de la suma superior y suma inferior.

d) Ingrese la cantidad de subintervalos n=20. Inicie el proceso y registre los valores de la suma superior y suma inferior.

e) Ingrese la cantidad de subintervalos n=30. Inicie el proceso y registre los valores de la suma superior y suma inferior.

f) Ingresar la función f(x) = sin(x) y observar las sucesivas pantallas sin registrar los datos.

A partir de las actividades que deben realizar los alumnos, se les solicitará que respondan al siguiente cuestionario:

CUESTIONARIO

1. La altura de cada rectángulo correspondiente a una suma superior, esta dado por, el valor máximo (dentro del subintervalo) de f(x), por el valor medio o por el valor mínimo?.

2. La altura de cada rectángulo correspondiente a una suma inferior, esta dado por, el valor mínimo (dentro del subintervalo) de f(x), por el valor medio o por el valor máximo?.

3. Sea f(x) continua y positiva en [a,b]. A medida que el numero de subintervalos aumenta los valores numéricos correspondiente a la sucesión de sumas superiores, aumenta,isminuye, permanece constante u oscila? ¿Se aproxima al algún valor?.Ídem para las sumas superiores.

4. La sucesión numérica de sumas superiores es una sucesión monótona ……………………………………

5. La sucesión numérica de sumas inferiores es una sucesión monótona……………………………

6. La sucesión numérica de sumas superiores esta ACOTADA, ver la GUI, no desciende debajo de cierto valor o desciende indefinidamente?. ¿por ejemplo, debajo de que valor no desciende?.

7. La sucesión numérica de sumas inferiores esta ACOTADA, ver la GUI, no supera cierto valor o asciende indefinidamente?. ¿por ejemplo, que valor menor que no sobrepasa?.

8. EL TEOREMA FUNDAMENTAL DE SUCESIONES dice, toda sucesión monótona creciente (o decreciente) y acotada converge.

Si este es el caso en estudio, ¿estamos en presencia de un límite?. ¿Cómo se llama este limite?

Obtenga la diferencia entre la suma superior y la suma inferior, esto es, $S_n - s_n$.

Hacia donde tiende esta diferencia, para valores crecientes de n.?

9. Del último ítem, y a partir de la imágenes de la visualización interactiva ¿Cómo se formaliza el límite cuando n tiende a infinito?

CONCLUSIONES

Con la secuencia que presentamos, consideramos que los alumnos pueden visualizar de una manera sencilla, el acercamiento de las áreas calculadas al área real.

Creemos que el poder someter a la verificación interactiva los resultados predichos por la teoría, permiten afianzar la comprensión y fijar el concepto.

La explicación a estos resultados, hipotéticamente, es que el conocimiento definitivamente se aprehende cuando ha sido puesto en juego.

La poca frecuencia con que se recurre al registro gráfico en las actividades áulicas impide que, a menudo, los alumnos no puedan visualizar ni interpretar los resultados, lo que dificulta ser consciente de algunos resultados a los que se arribe. Los estudiantes se apoyan en el registro algebraico en los que confían plenamente sin llegar a saber que representación gráfica tienen los resultados obtenidos.

Es primordial que los profesores, aunque ya sea en un nivel universitario avanzado, utilicemos estas herramientas para ayudar a los alumnos a visualizar los conceptos y a comprobar los resultados obtenidos en la realización de sus trabajos prácticos. El uso reflexivo y creativo de las nuevas tecnologías permite dar un significado concreto a las nociones matemáticas por lo que el diseño de nuevos materiales utilizando esta nueva metodología, donde muestren el uso efectivo en el aula, es sumamente importante.

REFERENCIAS BIBLIOGÁFICAS

Artigue, M. (1995). La enseñanza de los principios del cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos. En P. Gómez (Ed.). *Ingeniería didáctica en educación matemática: Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas* (pp. 97-140). México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Cantoral, R. y Montiel, G. (2001). *Funciones: visualización y pensamiento matemático.* México: Prentice Hall & Pearson Educación.

Contreras, A. (2000). La enseñanza del Análisis Matemático en el Bachillerato y primer curso de Universidad. Una perspectiva desde la teoría de los obstáculos epistemológicos y los actos de comprensión. *Actas del IV Simposio de la SEIEM.* Huelva: SEIEM

Duval, R. (1998). Registros de Representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento. En F. Hitt (Ed.), *Investigaciones en Matemática Educativa II* (pp. 173-201). México: Departamento de Matemática Educativa. Cinvestav.

Fabra M. y Deulofeu J. (2000): *Construcción de gráficos de funciones: "Continuidad y prototipos". RELIME. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 3(*2), 207-230.

Gatica N., Tauber L. y Ruiz F. (2002). Registros de representación puestos en juego en el concepto de función: un estudio en estudiantes ingresantes a la carrera de ingeniería. En M. Penalva, G. Torregrosa y J. Valls (Eds.). *Aportaciones de la didáctica de la matemática a diferentes perfiles profesionales* (pp.417-430). Universidad de Alicante (España).

Hitt, F. (1998a). Sistemas semióticos de representación del concepto de función y su relación con problemas epistemológicos y didácticos. En F. Hitt (Ed.) *Investigaciones en Matemática Educativa* (pp.245-264). México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Hitt, F. (1998b). Visualización matemática, representaciones, nuevas tecnologías y currículo. *Educación Matemática*, 10(2), 23-45.

Llorens, J. L., Santonja, F. J. (1997). Una interpretación de las dificultades en el aprendizaje del concepto de integral. *Divulgaciones Matemáticas*, *5*(1/2), 61-76.

Tall, D. (1991). The Psychology of Advanced Mathematical Thinking. En D. Tall (ed.). *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 3-21). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Tall, D. y Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics,* 12, 151 – 169.

Spicer, J. (2000). Virtual Manipulatives: A New Tool for Hands-on Math. ENC Focus. Recuperable en http://www.eduteka.org/Manipulables.php. 7(4),14.

Villalobos A. y Farfan R. (2001): *Identificación de obstáculos en la construcción de gráfica de funciones.* Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, vol. 14, 396-399.

Epsilón - *Revista de Educación Matemática* *2011, Vol. 28(2), nº 78, pp. 89-96*

¡Papá, mamá, quiero comprarme una moto!

José Manuel Fernández Rodríguez
I.E.S. El Almijar, Cómpeta, Málaga
Encarnación López Fernández
I.E.S. Vega de Mar, San Pedro de Alcántara, Málaga

INTRODUCCIÓN

Básicamente, con esta actividad, pretendemos utilizar la calculadora Casio ClassPad 330 para realizar la tabla de amortización de un préstamo. Presentamos a nuestros alumnos y alumnas diversas cuestiones a las que tarde o temprano tendrán que dar respuesta. Intentaremos hacerles reflexionar sobre los distintos contenidos involucrados y dotarles de herramientas para obtener información que les ayude a tomar la decisión más adecuada a sus necesidades.

¡PAPÁ, MAMÁ, QUIERO COMPRARME UNA MOTO!

A Susana le apasionan las motos y, como pronto va a cumplir los dieciocho, no sabe cómo convencer a sus padres para que le ayuden a comprarse una. En la cuenta donde guarda el dinero que va ahorrando de sus cumpleaños y otras ocasiones, tiene 625 € y la moto que le gusta cuesta 2.989 €. Después de mucho batallar, y pasado el primer susto, consigue que sus padres acepten pero, a cambio, le ponen las siguientes condiciones:

a) Tiene que dar como entrada el dinero que tiene en su cuenta, ya que el resto lo van a financiar al 8,5% anual en doce meses.

b) Tiene que hacerse cargo del 35 % de cada cuota.

c) Si en los primeros ocho meses hace un uso responsable de la moto los padres pagarán el resto del préstamo.

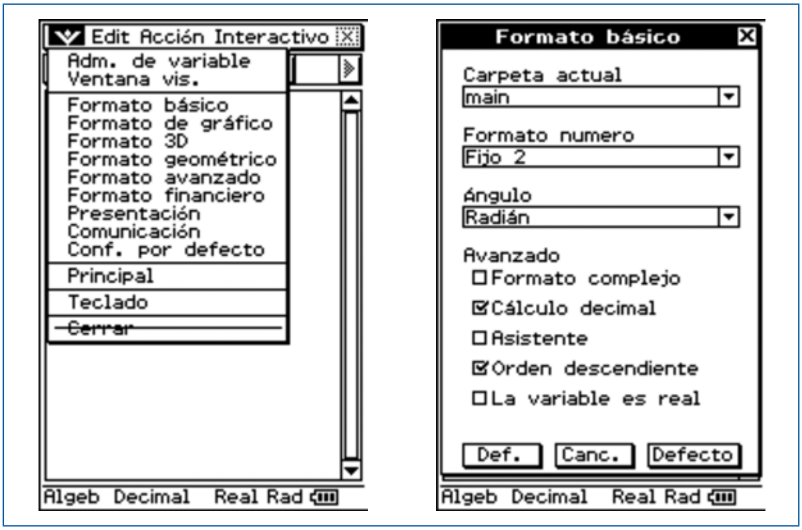
PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Susana toma su calculadora y se pone a hacer números para ver si puede asumir las condiciones que le ponen sus mayores.

Lo primero que necesita saber es cuánto va a tener que pagar cada mes. Desempolva su libro de matemáticas del año pasado porque le suena haber visto algo parecido el curso anterior. Al poco encuentra la fórmula que da el valor de la mensualidad (M) para amortizar un préstamo conocida la cantidad prestada (C), el rédito anual (r %) y el número de mensualidades en las que se va a saldar la deuda (n). A saber:

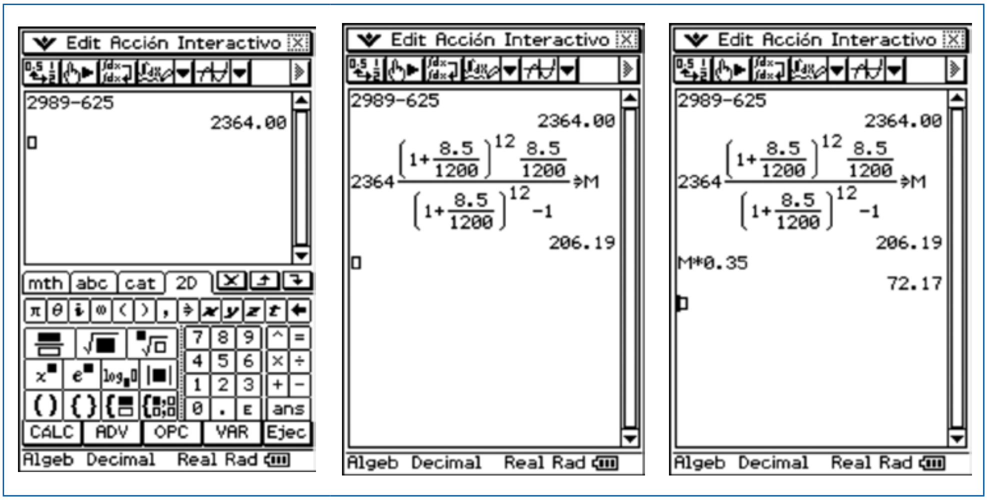
$$M = C_0 \cdot \frac{\left(1+\frac{r}{1200}\right)^n \cdot \frac{r}{1200}}{\left(1+\frac{r}{1200}\right)^n - 1}$$

Antes de comenzar con los cálculos fija dos decimales para los resultados. Para ello, en la pantalla del menú de inicio toca sobre el icono de la aplicación **Principal**.



Secuencia de pantallas nº 1: Eligiendo el número de decimales.

Sustituyendo los datos en la fórmula, Susana obtiene que la cuota mensual (M) será de 206.19 €, de la que tendrá que pagar de sus ingresos el 35% lo que supone 72.17 €.



Secuencia de pantallas nº 2: Cálculo de la mensualidad del préstamo.

Como está tan ilusionada, Susana piensa que con el dinero de la paga semanal, más lo que gana dando clases particulares, puede hacer frente a su parte de la mensualidad si recorta algunos gastos superfluos; además, como con la moto no tendrá que esperar al autobús para desplazarse, puede sacar tiempo para una clase particular más a la semana para pagar el combustible. Después de todo si hace un uso responsable de la moto sólo tendrá que pagar ocho cuotas.

CADA RESPUESTA LLEVA A UNA NUEVA PREGUNTA

Tanto piensa en la propuesta de sus padres que al final, Susana, se plantea algunas preguntas más:

- ¿Cuánto van a pagar en total por su moto?
- ¿Cuánto van a pagar de intereses?
- ¿Seguirán sus padres pagando las mensualidades o pagarán el resto de golpe?

Para responder a estas preguntas Susana decide pedirle consejo a su profesora de Matemáticas, ya que esta siempre les está haciendo hincapié en la aplicabilidad de los conceptos matemáticos, y ésta le dice que para conocer todos los detalles de un préstamo lo mejor es confeccionar la tabla de amortización del mismo.

Vamos a ayudar a nuestra protagonista.

Para confeccionar la tabla de amortización del préstamo hay que tener en cuenta que en cada mensualidad se están pagando, además de parte del capital que se debe, los intereses correspondientes al mes en curso del total del capital que queda pendiente de pago. A saber, para la primera mensualidad la parte que corresponde a intereses será:

$$I_1 = \frac{C_0 \cdot r}{1200} = \frac{2364 \cdot 8.5}{1200} = 16.75$$

ya que se calcula el interés en un año y se divide por 12 meses y así tendremos lo que le corresponde a un mes. De esta forma de la primera mensualidad 16.75 será para intereses y 189.44 para amortizar capital.

Si trasladamos estos cálculos sobre una tabla la forma que debe tener será similar a ésta:

Nº MES	CAPITAL PENDIENTE DE PAGO ANTES DE ABONAR LA MENSUALIDAD	MENSUALIDAD (fija)	INTERESES	CAPITAL APORTIZADO	CAPITAL PENDIENTE DE PAGO
1	2364	206.19	16.75	189.44	2174.56
2	2174.16	206.19	15.4	190.79	1983.77
...	...	...	...	...	...

Tabla nº 1: Tabla de amortización

CONSTRUCCIÓN DE LA TABLA DE AMORTIZACIÓN DEL PRÉSTAMO

Primeros pasos

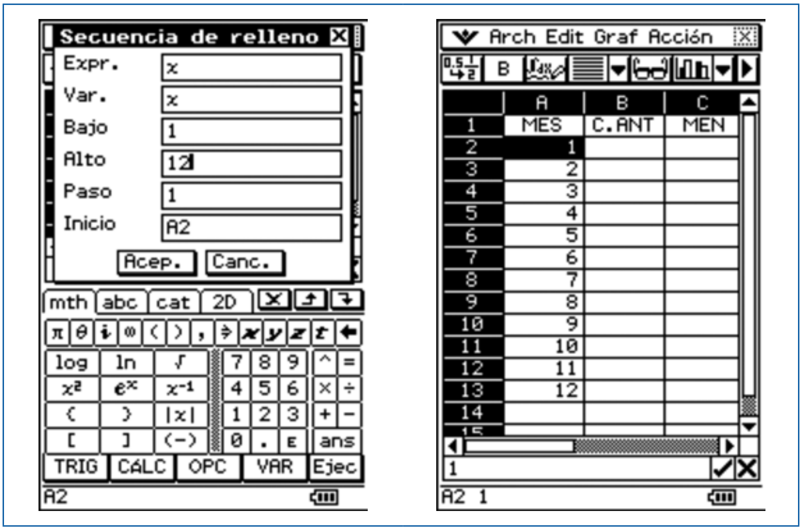
Para seleccionar la hoja de cálculo es suficiente con puntear sobre el icono correspondiente del menú principal.

Lo primero que vamos a hacer es introducir el texto de los encabezados. Por economía de espacios los textos serán más abreviados que en la tabla º1.

Para introducir los rótulos de la tabla en la ClassPad no es necesario añadir ningún carácter "especial", además se puede justificar el contenido de las celdas. En este caso podemos centrar los rótulos tocando sobre  .

Rellenando un rango de datos

Para no tener que introducir uno a uno los valores de la columna "MES", si en el menú de edición de la ClassPad seleccionamos **secuencia de relleno** nos aparece un cuadro de diálogo en el que le introduciremos los datos tal y como muestra la secuencia de pantallas nº 3. De esta forma hemos introducido una serie de valores de forma automática. A continuación seleccionamos los datos, los centramos y en el menú **edición**, en **formato número** elegimos **Normal 1** (los meses no quedan bien con decimales).



Secuencia de pantallas nº 3: Rellenando un rango de celdas.

Realizando los Cálculos

La forma de realizar los cálculos para construir la tabla es similar a como se haría en cualquier hoja de cálculo.

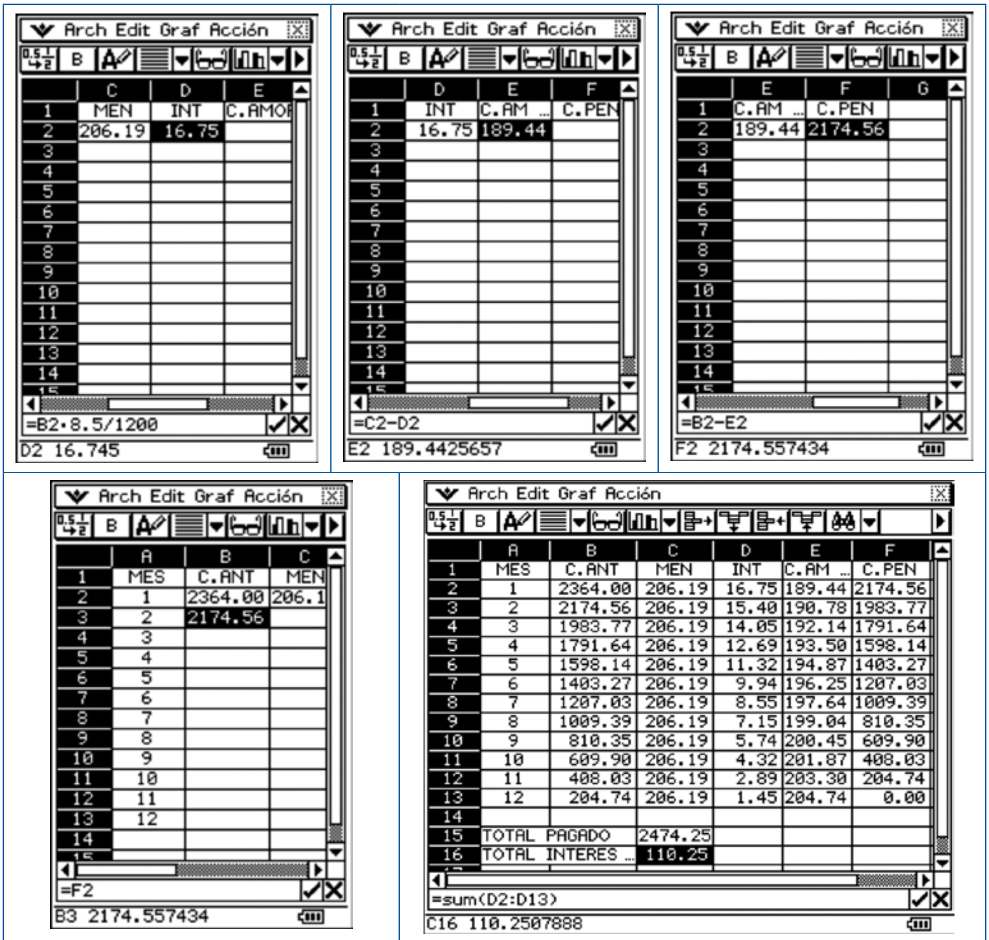
Tras introducir el importe del préstamo en B2 y el de la mensualidad (M) en C2, vamos a introducir las fórmulas para las celdas *D2, E2, F2 y B3:*

$D2 = B2 \cdot \frac{8.5}{120}$	Cantidad de la mensualidad que corresponde a intereses.
E2 = C2- D2	Cantidad de la mensualidad que corresponde a amortización de capital.
F2 = B2-E2	Capital que queda por pagar después de cada mensualidad.
B3=F2	Capital que se utiliza para el siguiente cálculo.

Para copiar las fórmulas anteriores a los rangos correspondientes, se selecciona la celda a copiar, en el menú de edición se elige copiar, se marca el rango donde se desea introducir la fórmula y se elige pegar del menú edición. Repitiéndose el proceso hasta tener la hoja completa.

Por último, utilizaremos la función sum(rango) para calcular lo que pagará la familia de Susana por la moto (aunque para esto no habría que haber montado este tinglado), y lo que suponen los intereses de esa cantidad. Haremos:

$$C15 = sum(C2{:}C13)$$
$$y$$
$$C16 = sum(D2{:}D13)$$



Secuencia de pantallas nº 4: Construyendo la hoja de cálculo.

El último misterio

De las tres preguntas que se había planteado Susana sólo le queda por saber si sus padres, si es responsable en el uso de la moto, seguirán pagando las mensualidades del préstamo o lo cancelarán de golpe a los ocho meses. Como en principio es una decisión que pueden tomar libremente, nuestra amiga decide preguntar a sus progenitores si tienen alguna idea al respecto, la respuesta es obvia:

¡¡¡Preocúpate de no tener problemas con la moto que nosotros nos preocuparemos del resto!!!

Herida en su amor propio Susana piensa en cómo encontrar una respuesta, si la hay. Le plantea la cuestión a su profesor de economía y este le comenta que todo depende de la comisión de cancelación que tenga el préstamo. Es decir, las entidades bancarias penalizan a con un tanto por ciento a los clientes que tienen un préstamo y quieren pagarlo (cancelarlo) antes de tiempo. Resulta que la comisión de cancelación del préstamo de su moto es del 2,5 %.

Aunque no ha perdido el sueño, después de unos días de pensar en tan ardua cuestión cree haber encontrado una solución. Será rentable cancelar el préstamo siempre que los intereses que queden por pagar superen al coste de la cancelación. A estas alturas ya os habréis dado cuenta que Susana no tiene ni un pelo de tonta.

Manos a la obra, Susana a introduce dos columnas más en su hoja de cálculo, la primera contendrá los intereses que queden por pagar después de abonar cada mensualidad y la segunda la comisión que se llevaría la entidad bancaria en concepto de comisión de cancelación. Comparando ambas columnas sabrá hasta cuando es rentable cancelar el préstamo.

Arch Edit Graf Acción

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	MES	C.ANT	MEN	INT	C.AM ...	C.PEN	I. PEND	CANC
2	1	2364.00	206.19	16.75	189.44	2174.56	93.51	54.36
3	2	2174.56	206.19	15.40	190.78	1983.77	78.10	49.59
4	3	1983.77	206.19	14.05	192.14	1791.64	64.05	44.79
5	4	1791.64	206.19	12.69	193.50	1598.14	51.36	39.95
6	5	1598.14	206.19	11.32	194.87	1403.27	40.04	35.08
7	6	1403.27	206.19	9.94	196.25	1207.03	30.10	30.18
8	7	1207.03	206.19	8.55	197.64	1009.39	21.55	25.23
9	8	1009.39	206.19	7.15	199.04	810.35	14.40	20.26
10	9	810.35	206.19	5.74	200.45	609.90	8.66	15.25
11	10	609.90	206.19	4.32	201.87	408.03	4.34	10.20
12	11	408.03	206.19	2.89	203.30	204.74	1.45	5.12
13	12	204.74	206.19	1.45	204.74	0.00		
14								
15	TOTAL PAGADO		2474.25					
16	TOTAL INTERES ...		110.25					

=$C$16-sum($D$2:D2)

G2 93.50578882

Tabla nº 2: Tabla ampliada.

En la columna I. PEND aparece en cada celda los interese que quedan por pagar después de cada mensualidad, se utiliza la fórmula *G2 = $C$16-sum($D$2:D2)* y luego se copia al resto de las celdas del rango G3:G12. El símbolo $ hace que fijemos la fila, la columna, o ambas (la celda) para que esa referencia no cambie al copiar la fórmula a otras celdas. De esta forma le quitamos a la suma total de los intereses que está en la celda C16 la acumulación de los intereses que se van pagando, quedando así los intereses que quedan por pagar.

En cada una de las celdas de la columna CANC, está el valor de la comisión de cancelación para el capital que queda después de cada mensualidad.

Su cálculo es un simple tanto por ciento $H2 = \frac{F2 \cdot 2.5}{100}$. Si miramos detenidamente las columnas G y H de la tabla nº 2, podemos observar que habría que cancelar el préstamo antes del sexto pago. En consecuencia, si los padres de Susana obraran según los datos obtenidos por su hija, seguirían pagando mensualidades hasta amortizar el préstamo.

6. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

González, C., Llorente,J. y Ruiz, M. J. (2008). *Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales I.* Madrid: Editex

Colera, J., Oliveira, M. J., García, R. y Santaella, E. (2008). *Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales I*, Madrid: Anaya

ClassPad 330, ClassPad OS Versión 3.03. Guía del usuario. http://www.support.casio-europe.com/es/manuals/calc/

Epsilon - *Revista de Educación Matemática* *2011, Vol. 28(2), nº78, pp. 97-98*

Métodos numéricos con software libre: Maxima

Rafael Bracho López

María Santos Bruzón Gallego
José Ramírez Labrador
Universidad de Cádiz. Servicio de Publicaciones
2011 Primera edición
ISBN: 978-84-9828-321-1
221 páginas

Hoy día resulta incuestionable la importancia de contar con aplicaciones informáticas específicas para adentrase en cada una de las ramas del conocimiento. En el área de Matemáticas y, más concretamente en el ámbito del Análisis Numérico, existen distintas alternativas comerciales de calidad, como pueden ser Mathematica, Maple o Matlab, entre otras. Sin embargo, a pesar de la existencia de licencias especiales para estudiantes, el coste de estos programas suele ser bastante alto.

Este manual que surge de la experiencia de los autores como profesores de métodos numéricos y modelización matemática en la Universidad de Cádiz y en el Campus Virtual Andaluz, está orientado al alumnado de ciencias en general o al de grado de matemáticas en particular, se ha optado por utilizar software libre por sus adecuadas características para el ámbito educativo universitario (posibilidad de utilización en cualquier sistema operativo y libertad para ejecutar, copiar, estudiar, modificar y distribuir y, generalmente, gratuidad). Más concretamente, este trabajo aborda los métodos numéricos usuales para la resolución de ecuaciones y sistemas, aproximación de funciones, derivación e integración numéricas y la resolución de ecuaciones diferenciales con el apoyo del programa MAXIMA.

Además de interesantes características numéricas y gráficas, MAXIMA posee capacidades simbólicas semejantes a las de otros lenguajes comerciales, frente a otras alternativas gratuitas como Octave, que están más orientadas a la computación pura, al estilo de Matlab. Por otro lado, este cúmulo de circunstancias hace que MAXIMA sea haya convertido en un software emergente que cuenta con una nutrida comunidad de desarrolladores que le augura un futuro prometedor.

En el plano expositivo, debe entenderse que los autores, más que pretender describir una deducción rigurosa de los métodos numéricos abordados, se han centrado en explicar la razón de ser de los procedimientos con idea de que se comprenda por qué y cómo funcionan, procurando que los programas que se facilitan sea simples y fáciles de entender.

En cuanto a la componente más práctica, se ha procurado ofrecer ejercicios de aplicación directa del método expuesto, de obtención del resultado a partir de instrucciones disponibles en MAXIMA y de programación con el software, de forma que se puedan elegir lo que más interesen.

Epsilón - *Revista de Educación Matemática* *2011, Vol. 28(2), nº 78, pp. 99-109*

Problemas divulgativos

F. Damian Aranda Ballesteros
Manuel Gómez Lara

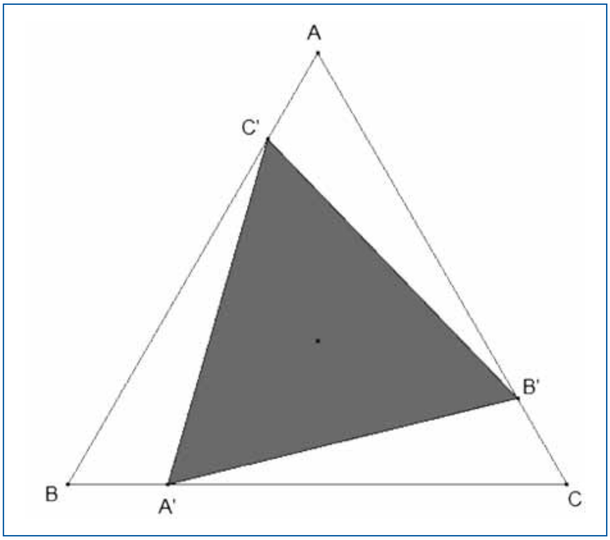
DI_003_EPSILON. *TRIÁNGULOS CEVIANOS, CUASICEVIANOS Y RESIDUALES.*

PROBLEMA MOTIVADOR

Sea el triángulo equilátero ABC de lado 1.

a) Sobre cada uno de los lados situamos los puntos A', B' y C' de modo que se verifique la condición vectorial, $k.\overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AB};\ k.\overrightarrow{BA'} = \overrightarrow{BC};\ k.\overrightarrow{CB'} = \overrightarrow{CA}.$

Determina la razón de áreas entre los triángulos equiláteros ABC y A'B'C'.



Sea la relación dada, $k.\overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AB};\ k.\overrightarrow{BA'} = \overrightarrow{BC};\ k.\overrightarrow{CB'} = \overrightarrow{CA}.$

Por el teorema del coseno, aplicado al triángulo A'B C',

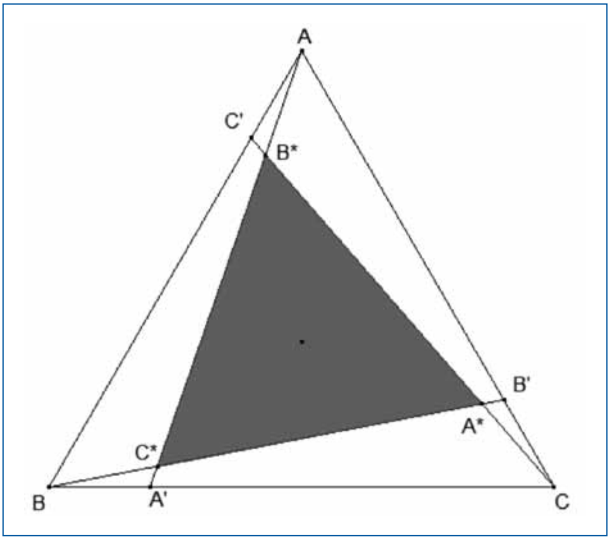
$$\begin{cases} A'C'^2 = A'B^2 + BC'^2 - 2.(A'B).(BC').cos\ 60^{\circ} \\ A'C'^2 = \dfrac{l^2}{k^2} + (l - \dfrac{l}{k})^2 - \dfrac{l}{k}.(l - \dfrac{l}{k}) = \dfrac{(k^2 - 3k + 3).l^2}{k^2} \end{cases}$$

La razón de áreas K, será igual al cuadrado de la razón de semejanza entre los lados de ambos triángulos equiláteros:

$$K = \frac{Area(A'B'C')}{Area\ (ABC)} = \frac{\dfrac{(k^2 - 3k + 3).l^2}{k^2}}{l^2} = \frac{k^2 - 3k + 3}{k^2}$$

b) Sobre cada uno de los lados situamos los puntos A', B' y C' de modo que se verifique la condición $k.\overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AB};\ k.\overrightarrow{BA'} = \overrightarrow{BC};\ k.\overrightarrow{CB'} = \overrightarrow{CA}$. Sean las cevianas AA', BB' y CC'. Las respectivas intersecciones entre ellas determinan los puntos A*, B* y C*, respectivamente.

Determina la razón de áreas entre los triángulos equiláteros ABC y A*B*C*.



Sea la relación dada, $k.\overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AB};\ k.\overrightarrow{BA'} = \overrightarrow{BC};\ k.\overrightarrow{CB'} = \overrightarrow{CA}$.

Por el teorema del coseno, aplicado al triángulo ACC',

$$\begin{cases} CC'^2 = AC'^2 + AC^2 - 2.(AC').(AC).\cos 60^{\circ} \\ CC'^2 = \dfrac{l^2}{k^2} + l^2 - \dfrac{l^2}{k} = \dfrac{(k^2 - k + 1).l^2}{k^2} \end{cases}$$

Por la semejanza que existe entre los triángulos ACC' y AB*C', se tiene que:

$$\frac{AC'}{CC'}=\frac{AB^*}{AC}=\frac{B^*C'}{AC'}\rightarrow\frac{AC'}{CC'}=\frac{A^*C}{l}=\frac{B^*C'}{AC'}\qquad \text{Por tanto,}\quad B^*C'=\frac{AC'^2}{CC'}\ \text{y}\ A^*C=\frac{AC'.l}{CC'}$$

Sustituyendo en las anteriores expresiones:

$$B^*C'=\frac{AC'^2}{CC'}=\frac{\frac{l^2}{k^2}}{\frac{\sqrt{k^2-k+1}.l}{k}}=\frac{l}{k.\sqrt{k^2-k+1}}\quad \text{y}\quad A^*C=\frac{AC'.l}{CC'}=\frac{\frac{l^2}{k}}{\frac{\sqrt{k^2-k+1}.l}{k}}=\frac{l}{\sqrt{k^2-k+1}}$$

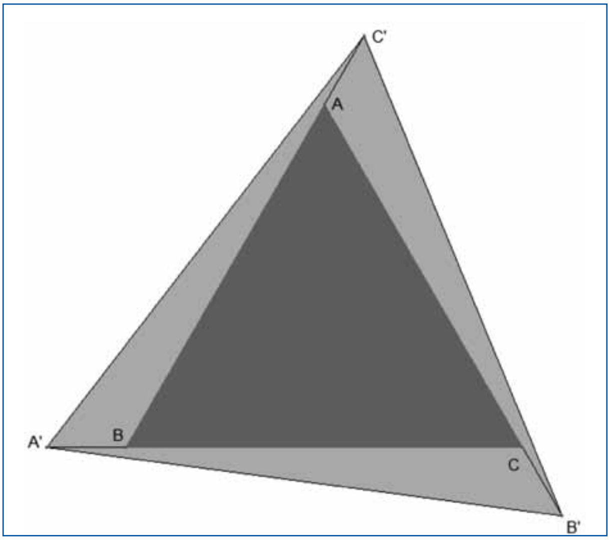
De este modo: $A^*B^*=CC'-B^*C'-A^*C=\frac{\sqrt{k^2-k+1}.l}{k}-\frac{l}{k.\sqrt{k^2-k+1}}-\frac{l}{\sqrt{k^2-k+1}}$

$$A^*B^*=\frac{((k^2-k+1)-1-k)l}{k.\sqrt{k^2-k+1}}=\frac{(k^2-2k)l}{k.\sqrt{k^2-k+1}}$$

La razón de áreas K, será igual al cuadrado de la razón de semejanza entre los lados de ambos triángulos equiláteros:

$$K=\frac{Area(A^*B^*C^*)}{Area(ABC)}=\frac{\frac{(k^2-2k)^2l^2}{k^2.(k^2-k+1)}}{l^2}=\frac{(k-2)^2}{k^2-k+1}$$

c) Sobre las prolongaciones de cada uno de los lados situamos los puntos A`, B' y C' de modo que se verifique la condición $k.\overrightarrow{AC'}=\overrightarrow{BA};\ k.\overrightarrow{BA'}=\overrightarrow{CB};\ k.\overrightarrow{CB'}=\overrightarrow{AC}$. Determina la razón de áreas entre los triángulos equiláteros ABC y A'B'C'.



Sea la relación dada, $k.\overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AB}$; $k.\overrightarrow{BA'} = \overrightarrow{BC}$; $k.\overrightarrow{CB'} = \overrightarrow{CA}$

Por el teorema del coseno, aplicado al triángulo AB'C',

$$\begin{cases} C'B'^2 = AB'^2 + AC'^2 - 2.(AB').(AC').\cos 120^\circ \\ C'B'^2 = (\frac{1}{k}+1)^2.l^2 + \frac{l^2}{k^2} + \frac{(k+1)l^2}{k^2} = \frac{[(k+1)^2+1+(k+1)].l^2}{k^2} = \frac{(k^2+3k+3).l^2}{k^2} \end{cases}$$

La razón de áreas K, será igual al cuadrado de la razón de semejanza entre los lados de ambos triángulos equiláteros:

$$K = \frac{Area(A'B'C')}{Area(ABC)} = \frac{\frac{(k^2+3k+3).l^2}{k^2}}{l^2} = \frac{k^2+3k+3}{k^2}$$

Conclusiones: Tras estos enunciados, merecería la pena intentar saber qué ocurriría en el caso de no ser el triángulo equilátero. Otra línea de resolución de problemas consistiría en observar lo que sucedería si los puntos A', B' y C' estuviesen dispuestos bajo otras condiciones de no regularidad. Esto nos motiva a presentar el siguiente estudio.

TEOREMA DE ROUTH
CONSECUENCIAS DERIVADAS: TEOREMAS DE CEVA Y MENELAO

Introducción

En 1891, Edward John Routh, en *A treatise on Analytical Statics, with numerous examples, vol.1, Cambridge U. Press, p. 82,* enunció sin demostración el teorema siguiente:

Sean AA_1, BB_1, CC_1 tres cevianas del triángulo ABC, que se cortan dos a dos en el triángulo A''B''C''.

Si se verifican las relaciones: $\alpha = \frac{AC_1}{C_1B}$, $\beta = \frac{BA_1}{A_1C}$ y $\lambda = \frac{CB_1}{B_1A}$, siendo S y S'' las áreas de los triángulos ABC y A''B''C'', respectivamente, se tiene que: .

$$\frac{S''}{S} = \frac{(1-\alpha\beta\lambda)^2}{(1+\alpha+\alpha\beta).(1+\beta+\beta\lambda).(1+\lambda+\lambda\alpha)}$$

Habitualmente, este resultado se conoce como Teorema de Routh, y ha sido estudiado extensamente. La demostración que presentamos, completamente elemental, se basa en un simple estudio de las relaciones vectoriales que se dan en el triángulo.

Nos basaremos para ello, en un hecho básico de la geometría vectorial plana.

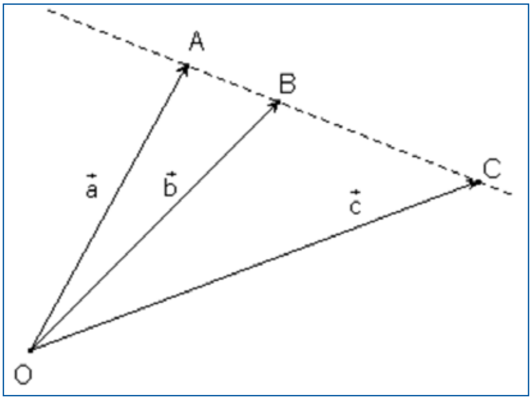
Proposición

1) Si los extremos de tres vectores distintos de origen común, $\vec{a}, \vec{b}$ y $\vec{c}$ son colineales, entonces se cumple la relación: $\begin{cases} \alpha\vec{a}+\beta\vec{b}+\lambda\vec{c}=\vec{0} \\ \alpha+\beta+\lambda=0 \end{cases}$, siendo α, β, λ escalares distintos de cero.

2) Recíprocamente, si tres vectores distintos cumplen la relación $\begin{cases} \alpha\vec{a}+\beta\vec{b}+\lambda\vec{c}=\vec{0} \\ \alpha+\beta+\lambda=0 \end{cases}$ y α, β, λ son escalares distintos de cero, entonces los extremos de los vectores serán colineales.

Dem

1) Sean tres vectores distintos, con extremos colineales y origen común. Se tiene que:



$$\vec{b}=\vec{a}+\overrightarrow{AB}=\vec{a}+\frac{AB}{AB+BC}\left(\vec{c}-\vec{a}\right);$$

$$\vec{b}=\frac{BC}{AB+BC}\vec{a}+\frac{AB}{AB+BC}\vec{c};$$

De este modo, podemos escribir:

$$\left(AB+BC\right)\vec{b}-BC\,\vec{a}-AB\,\vec{c}=\vec{0}$$

y así se verifica con

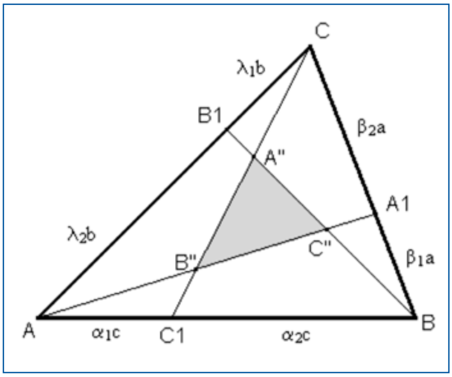
α=AB + BC, β= −AB, λ= −BC la relación α + β + λ = 0.

2) Si se cumple la relación $\begin{cases} \alpha\vec{a}+\beta\vec{b}+\lambda\vec{c}=\vec{0} \\ \alpha+\beta+\lambda=0 \end{cases}$, podemos escribir: β= − (α + λ) y así:

$\beta\vec{b}=-\alpha\vec{a}-\lambda\vec{c};$ $\qquad \vec{b}=-\frac{\alpha}{\beta}\vec{a}-\frac{\lambda}{\beta}\vec{c}=\vec{a}-\frac{\lambda}{\beta}.\left(\vec{c}-\vec{a}\right)$, lo que significa que el punto extremo B del vector $\vec{b}$ se encuentra en la recta que une A y C.

TEOREMA DE ROUTH

Con estos resultados, vamos a construir nuestra demostración del Teorema de Routh.



Establezcamos las siguientes notaciones para el triángulo ABC, de lados a, b y c y área S.

Las cevianas AA_1, BB_1 y CC_1, determinan el triángulo A"B"C" de área S".

Sean asimismo las siguientes expresiones, donde se habrán de tener en cuenta el signo de los segmentos orientados correspondientes:

$$\alpha_1 c = AC_1, \alpha_2 c = C_1B, \quad \alpha_1 + \alpha_2 = 1; \qquad \alpha = \frac{\alpha_1}{\alpha_2}$$

$$\beta_1 a = BA_1, \beta_2 a = A_1C, \quad \beta_1 + \beta_2 = 1; \qquad \beta = \frac{\beta_1}{\beta_2}$$

$$\lambda_1 b = CB_1, \lambda_2 b = B_1A, \quad \lambda_1 + \lambda_2 = 1; \qquad \lambda = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}$$

Como B, A_1 y C están alineados, consideramos sus vectores de posición, $\vec{b}, \vec{a_1}\, y\, \vec{c}$ con un origen común y extremos dichos puntos B, A_1 y C, respectivamente.

Por la proposición anterior, tenemos que: $\vec{a_1} = \beta_1 \vec{c} + \beta_2 \vec{b}$

Análogamente, escribimos las igualdades: $\vec{b_1} = \lambda_1 \vec{a} + \lambda_2 \vec{c}$ y $\vec{c_1} = \alpha_1 \vec{b} + \alpha_2 \vec{a}$.

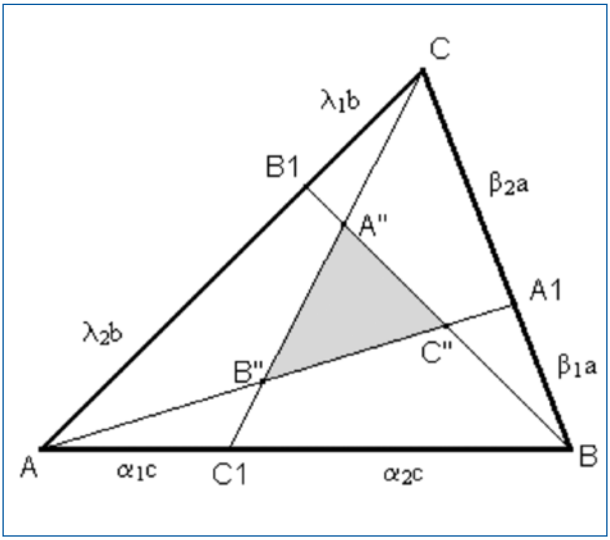
Igualamos las expresiones $\vec{b}, \vec{a_1}\, y\, \vec{c}$ de obtenidas en las anteriores igualdades.

$$\left\{\begin{array}{l} \vec{a} = \dfrac{1}{\lambda_1}\vec{b_1} - \dfrac{\lambda_2}{\lambda_1}\vec{c} \\ \vec{a} = \dfrac{1}{\alpha_2}\vec{c_1} - \dfrac{\alpha_1}{\alpha_2}\vec{b} \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l} \vec{b} = \dfrac{1}{\beta_2}\vec{a_1} - \dfrac{\beta_1}{\beta_2}\vec{c} \\ \vec{b} = \dfrac{1}{\alpha_1}\vec{c_1} - \dfrac{\alpha_2}{\alpha_1}\vec{a} \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l} \vec{c} = \dfrac{1}{\beta_1}\vec{a_1} - \dfrac{\beta_2}{\beta_1}\vec{b} \\ \vec{c} = \dfrac{1}{\lambda_2}\vec{b_1} - \dfrac{\lambda_1}{\lambda_2}\vec{a} \end{array}\right.$$

De cada grupo, podemos obtener la condición que nos asegura la existencia de los puntos A"=$BB_1 \cap CC_1$, B"=$BB_1 \cap CC_1$ y C"=$AA_1 \cap BB_1$.

Para ello, y en cada caso, establecemos según hemos visto, la condición necesaria y suficiente de la alineación de tres puntos.

Veámoslo con mayor detalle para el punto A".



$$\begin{cases} \vec{a} = \dfrac{1}{\lambda_1}\vec{b_1} - \dfrac{\lambda_2}{\lambda_1}\vec{c} \\ \vec{a} = \dfrac{1}{\alpha_2}\vec{c_1} - \dfrac{\alpha_1}{\alpha_2}\vec{b} \end{cases} ; \quad \frac{1}{\lambda_1}\vec{b_1} - \frac{\lambda_2}{\lambda_1}\vec{c} = \frac{1}{\alpha_2}\vec{c_1} - \frac{\alpha_1}{\alpha_2}\vec{b} \ ; \quad \left| \frac{1}{\lambda_1}\vec{b_1} + \frac{\alpha_1}{\alpha_2}\vec{b} = \frac{1}{\alpha_2}\vec{c_1} + \frac{\lambda_2}{\lambda_1}\vec{c} \right.$$

Si multiplicamos por $\dfrac{\lambda_1\alpha_2}{\alpha_2 + \lambda_1\alpha_1} = \dfrac{\lambda_1\alpha_2}{\lambda_1 + \lambda_2\alpha_2}$ obtenemos ahora:

$$\vec{a''} = \frac{\alpha_2}{\alpha_2 + \lambda_1\alpha_1}\vec{b_1} + \frac{\lambda_1.\alpha_1}{\alpha_2 + \lambda_1\alpha_1}\vec{b} = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2\alpha_2}\vec{c_1} + \frac{\alpha_2.\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2\alpha_2}\vec{c}$$

Lo que sin duda equivale a decir que las cevianas BB_1 y CC_1 se cortan en el punto A”, situado de manera que $\dfrac{BA''}{A''B_1} = \dfrac{\alpha_2}{\alpha_2 + \lambda_1\alpha_1}$; $\quad \dfrac{CA''}{A''C_1} = \dfrac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2\alpha_2}$.

De forma similar obtendríamos las expresiones:

$$\vec{b''} = \frac{\alpha_1}{\alpha_2\beta_2 + \alpha_1}\vec{a_1} + \frac{\beta_2.\alpha_2}{\alpha_2\beta_2 + \alpha_1}\vec{a} = \frac{\beta_1.\alpha_1}{\alpha_1\beta_1 + \beta_2}\vec{c} + \frac{\beta_2}{\alpha_1\beta_1 + \beta_2}\vec{c_1}$$

$$\vec{c''} = \frac{\lambda_2}{\beta_1\lambda_1 + \lambda_2}\vec{a_1} + \frac{\lambda_1.\beta_1}{\beta_1\lambda_1 + \lambda_2}\vec{a} = \frac{\beta_1}{\beta_2\lambda_2 + \beta_1}\vec{b_1} + \frac{\beta_2.\lambda_2}{\beta_2\lambda_2 + \beta_1}\vec{b}$$

Una vez establecidas estas relaciones vectoriales, podemos determinar el área de A”B”C”.

S” = [A”B”C”] = S×(1–[AC”B]–[BA”C]–[CB”A]).

$$[AC"B]=\frac{1}{2}c.h_{C"}=\frac{1}{2}c.h_c.\frac{\lambda_2\beta_1}{\lambda_1\beta_1+\lambda_2} \quad ; \qquad [AC"B]=\frac{\lambda_2\beta_1}{\lambda_1\beta_1+\lambda_2}S$$

Esto es así ya que: $\frac{h_{c"}}{h_{A_1}}=\frac{\lambda_2}{\lambda_1\beta_1+\lambda_2}$; $\frac{h_{A_1}}{h_c}=\beta_1$.

Ahora bien, $[AC"B]=\frac{\lambda_2\beta_1}{\lambda_1\beta_1+\lambda_2}S=\frac{\beta}{\beta\lambda+\beta+1}.S$

De forma análoga, tenemos que:

$$[BA"C]=\frac{\lambda}{\lambda\alpha+\lambda+1}S \qquad [CB"A]=\frac{\alpha}{\alpha\beta+\alpha+1}S$$

En definitiva, tenemos:

S” = [A”B”C”] = S×(1–[AC”B]–[BA”C]–[CB”A]) = $S\times(1-\frac{\beta}{\beta\lambda+\beta+1}-\frac{\lambda}{\lambda\alpha+\lambda+1}-\frac{\alpha}{\alpha\beta+\alpha+1})$

$$\boxed{S"=\frac{(\alpha\beta\lambda-1)^2}{(\beta\lambda+\beta+1).(\lambda\alpha+\lambda+1).(\alpha\beta+\alpha+1)}S}$$ **Teorema de ROUTH.**

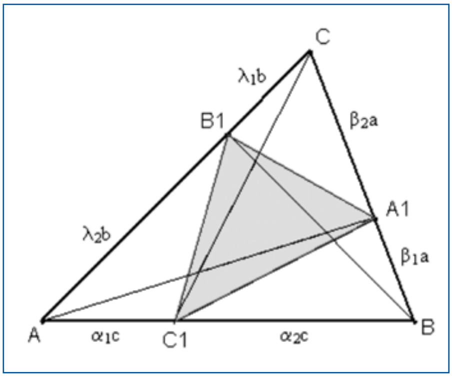
S” es nula si y solo si α×β×λ=1, de manera que la concurrencia de las tres cevianas corresponde a la condición α×β×λ=1, lo que equivale pues, al Teorema de Ceva.

Área del triángulo *cuasiceviano*

Llamaremos triángulo cuasiceviano del triángulo ABC al triángulo $A_1B_1C_1$, determinado por las cevianas AA_1, BB_1 y CC_1, respectivamente.

El valor de su área, $S_1 = [A_1\, B_1\, C_1]$ la relacionaremos, cómo no, con el área S del triángulo inicial ABC.

$S_1 = [A_1B_1C_1] = S\times(1-[AB_1C_1]-[BC_1A_1]-[CA_1B_1])$



Ahora bien:

$$[AB_1C_1] = \frac{1}{2}\alpha_1 c \lambda_2 b\,senA = \alpha_1\lambda_2 S$$

$$[BC_1A_1] = \frac{1}{2}\alpha_2 c.\beta_1 a\,senB = \alpha_2\beta_1 S$$

$$[CB_1A_1] = \frac{1}{2}\beta_2 a.\lambda_1 b\,senC = \beta_2\lambda_1 S$$

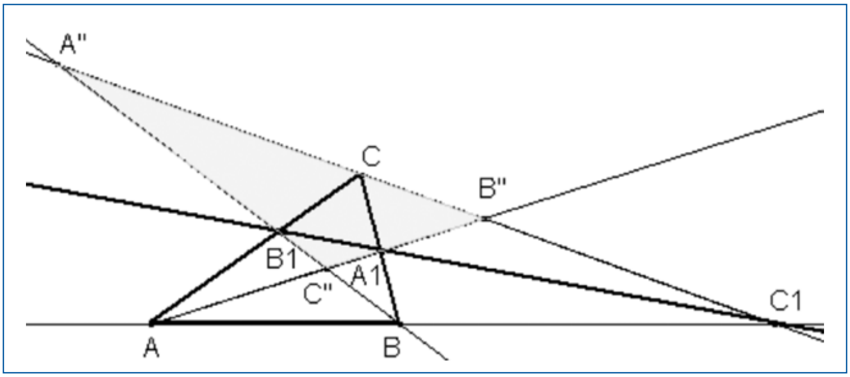
$S_1 = [A_1B_1C_1] = S\times(1-[AB_1C_1]-[BC_1A_1]-[CA_1B_1])$

$S_1 = [A_1B_1C_1] = S\times(1-\alpha_1\times\lambda_2 - \alpha_2\times\beta_1 - \beta_2\times\lambda_1)$

$$S_1 = S.(1-\frac{\alpha}{(\alpha+1).(\lambda+1)}-\frac{\beta}{(\beta+1).(\alpha+1)}-\frac{\lambda}{(\lambda+1).(\beta+1)})$$

$$\boxed{S_1 = S.\frac{\alpha.\beta\lambda+1}{(\alpha+1).(\beta+1).(\lambda+1)}}$$

En el caso en que los extremos de las tres cevianas sean colineales, entonces el triángulo $A_1B_1C_1$ es degenerado y su área S_1 es nula. Este hecho se corresponde con la condición $\alpha\times\beta\times\lambda=-1$, lo que equivale al Teorema de Menelao.



Área del triángulo ceviano. Triángulo ceviano de área máxima

Veamos cuál es el triángulo ceviano de área máxima. En estos triángulos, las cevianas concurren en un punto y así, $\alpha.\beta.\lambda.=1$ Por tanto, la expresión de su área será $S_1 = S.\frac{2}{(\alpha+1).(\beta+1).(\lambda+1)}$.

Para los triángulos cevianos, (: α.β.λ = 1), se verifica la igualdad

$$(\alpha+1).(\beta+1).(\lambda+1)=\left(\alpha+\frac{1}{\alpha}\right)+\left(\beta+\frac{1}{\beta}\right)+\left(\lambda+\frac{1}{\lambda}\right)+2$$

En virtud de la desigualdad aritmética-geométrica, tendremos que:

$$\frac{\alpha+\frac{1}{\alpha}+\beta+\frac{1}{\beta}+\lambda+\frac{1}{\lambda}}{6}\geq\sqrt[6]{\alpha.\frac{1}{\alpha}.\beta.\frac{1}{\beta}.\lambda.\frac{1}{\lambda}}=1$$

$$\alpha+\frac{1}{\alpha}+\beta+\frac{1}{\beta}+\lambda+\frac{1}{\lambda}\geq 6$$

$$(\alpha+1).(\beta+1).(\lambda+1)=\left(\alpha+\frac{1}{\alpha}\right)+\left(\beta+\frac{1}{\beta}\right)+\left(\lambda+\frac{1}{\lambda}\right)+2\geq 8$$

dándose la igualdad sólo cuando todos los términos coinciden, es decir:.

$$\alpha=\frac{1}{\alpha}=\beta=\frac{1}{\beta}=\lambda=\frac{1}{\lambda}\Rightarrow\alpha=\beta=\lambda=1$$

Así el triángulo de área máxima se obtendrá cuando las tres cevianas sean las medianas.

El valor de su área, como se sabe entonces, será igual a $S_1=\frac{1}{4}.S$

Área de los triángulos residuales

En este apartado, determinaremos el área de los triángulos AB”C_1, BC”A_1, CA”B_1, que llamaremos residuales. Nos centraremos en el primero de ellos.

$$[AB"C_1]=\frac{1}{2}.\alpha_1 c.h_{B"}=\frac{1}{2}.c.h_C.\frac{\alpha_1^2\beta_1}{\alpha_1\beta_1+\beta_2}=\frac{\alpha_1^2\beta_1}{\alpha_1\beta_1+\beta_2}.S$$

ya que: $\dfrac{h_{B"}}{h_{A_1}}=\dfrac{\alpha_1}{\alpha_1\beta_1+\beta_2}$; $\dfrac{h_{A_1}}{h_c}=\beta_1$.

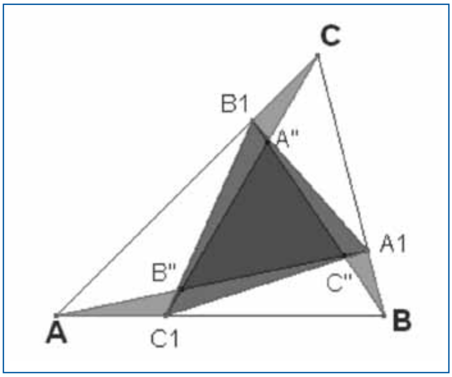
Ahora bien: $[AB"C_1]=\dfrac{\alpha_1^2\beta_1}{\alpha_1\beta_1+\beta_2}.S=\dfrac{\alpha^2\beta}{(\alpha\beta+\alpha+1).(\alpha+1)}.S$

Por analogía, obtenemos para los otros dos triángulos residuales, sus respectivas expresiones:

$$[BC"A_1]=\frac{\beta^2\lambda}{(\beta\lambda+\beta+1).(\beta+1)}.S\ ;\quad [CA"B_1]=\frac{\lambda^2\alpha}{(\lambda\alpha+\lambda+1).(\lambda+1)}.S$$

Algunos casos prácticos. Particularidades.

a) $\alpha = \beta = \lambda = 1/2$



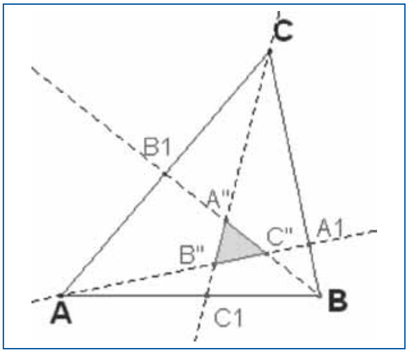
$$[A''B''C''] = \frac{1}{7}.S$$

$$[A'B'C'] = \frac{1}{3}.S$$

$$[A\,B''C_1] = [BC''A_1] = [CA''B_1] = \frac{1}{21}.S$$

b) AA_1= Altura, BB_1= Mediana, CC_1= Bisectriz interior.

$$\alpha = b/a,\ \beta = \frac{c.\cos B}{b.\cos C},\ \lambda = 1$$



$$[A''B''C''] = \frac{b.(c.\cos B - a.\cos C)^2}{a.(1+\cos C).(a+c.\cos B).(b+2a)}.S$$

$$[A'B'C'] = \frac{b.(c.\cos B + a.\cos C)}{2a.(a+b)}.S$$

$$[A\,B''C_1] = \frac{b.c.\cos B}{a.(1+\cos C).(a+b)}.S$$

$$[B\,C''A_1] = \frac{c^2.\cos^2 B}{a.(c.\cos B + a)}.S$$

$$[C\,A''B_1] = \frac{b}{2.(b+2.a)}.S$$

XIV CONGRESO DE ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS

Título: DIVERSIDAD Y MATEMÁTICAS

Fechas: 4 al 6 de Julio de 2012.

Lugar: Faculta de la Universidad de Málaga.

Teléfonos de contacto:
Comité de Programa: 608 918 680
Comité Organizador: 608 918 680

e-mail: ceamthalesmalaga@gmail.com
web: http://xiv.thalesceam.es/

Bloques Temáticos: El congreso se estructurará en los siguientes bloques temáticos:

B1) Matemáticas para la diversidad.
B2) Matemáticas y Competencias Básicas.
B3) Matemáticas, TICs y Diversidad.
B4) Recursos y materiales en Matemáticas.
B5) Diversas Matemáticas para la enseñanza y el aprendizaje.

Conferencias plenarias: Se celebrarán 5 conferencias Plenarias girando en torno a la temática del congreso.

Exposiciones: Relacionadas con el mundo de las Matemáticas.

Comunicaciones, Talleres, Pósteres y Zoco:

- **Fecha límite de recepción:** **15 de abril de 2012**
- **Confirmación de aceptaciones:** **15 de mayo de 2012**
- **Formatos y modo de envío:** Según modelos y normas disponibles en la Web del Congreso.

Inscripciones: On-line a través de la Web del Congreso, con las siguientes cuotas:

	Hasta el 30/5/2012	Después del 30/5/2012
Socios (de THALES o de la FESPM)	80 €	120 €
No socios	120 €	160 €
Estudiantes	40 €	40 €

Certificación: 24 horas. Se ha solicitado la homologación de la actividad a la Consejería de Educación de la Junta de Andalucía.

Soluciones recibidas

PROBLEMA; 006_EPSILON

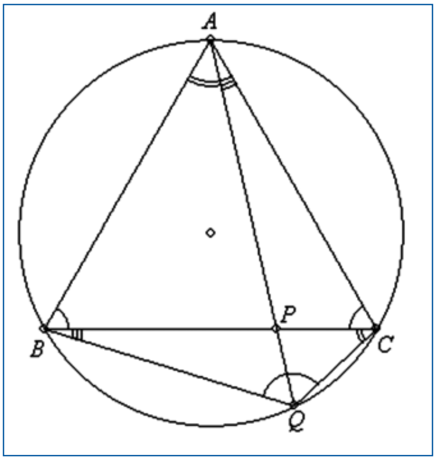
a) Una recta trazada desde el vértice A de un triángulo equilátero ABC corta al lado opuesto BC en un punto P y a la circunferencia circunscrita en el punto Q. Prueba que se verifica la igualdad

$$\frac{1}{PQ}=\frac{1}{BQ}+\frac{1}{CQ}.$$

b) Con la notación del apartado anterior, prueba que las siguientes sumas son constantes y halla el valor de las mismas:

$$AQ^2+BQ^2+CQ^2=K_1; \quad AQ^4+BQ^4+CQ^4=K_2.$$

Solución de Francisco Javier García Capitán, profesor de Matemáticas en el I.E.S. Álvarez Cubero de Priego de Córdoba (http://garciacapitan.99on.com).



Llamando $a = BC = CA = AB$ y usando los triángulos semejantes $PBQ \sim PAC$ y $PCQ \sim PAB$ tenemos $\frac{PQ}{BQ}+\frac{PQ}{CQ}=\frac{PC}{AC}+\frac{PB}{AB}=\frac{BP+PC}{a}=\frac{a}{a}=1$, que justifica el apartado a).

Para responder al apartado *b*), llamamos $x = AQ$, $y = BQ$, $z = CQ$. Aplicando el teorema del coseno al triángulo QBC, tenemos que

$$BC^2 = BQ^2 + CQ^2 - 2 \cdot BQ \cdot CQ \cdot \cos 120^{\circ} \Rightarrow a^2 = y^2 + z^2 + yz.$$

Por otro lado, el teorema de Ptolomeo, aplicando al cuadrilátero inscrito $ABQC$,

$$BC \cdot AQ = AB \cdot CQ + AC \cdot BQ \Rightarrow x = AQ = BQ + CQ = y + z.$$

Entonces,

$$AQ^2 + BQ^2 + CQ^2 = x^2 + y^2 + z^2 = (y+z)^2 + y^2 + z^2 = 2\left(y^2 + z^2 + yz\right) = 2a^2,$$

resultando que $K_1 = 2a^2$. De la misma forma,

$$\begin{aligned} x^4 + y^4 + z^4 &= \left(x^2 + y^2 + z^2\right)^2 - 2\left(x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2\right) \\ &= \left(2a^2\right)^2 - 2\left((y+z)^2(y^2+z^2) + y^2z^2\right) \\ &= 4a^4 - 2\left(y^2 + z^2 + yz\right)^2 \\ &= 4a^4 - 2\left(a^2\right)^2 = 2a^4 \Rightarrow K_2 = 2a^4. \end{aligned}$$

ENVÍO DE ARTÍCULOS

Los artículos enviados a la revista Epsilon pasan por un proceso de revisión por pares. Para enviar un artículo para su evaluación, siga las siguientes instrucciones:

1. Los trabajos deben ser de Educación Matemática. El artículo no debe haber sido publicado con anterioridad en una revista y los autores deben poseer los derechos de autor correspondientes.
2. Los artículos pueden ser: de investigación (experimental o un estudio teórico), de ideas para el aula, de experiencias. También se aceptan artículos para la sección de resolución de problemas.
3. Todo artículo debe estar escrito en castellano y debe incorporar referencias bibliográficas, en todo caso, deben seguir las normas del manual de publicación de la APA (quinta edición) de acuerdo con el siguiente modelo:

   Para artículo de revista: Leinhardt, G., Zaslavsky, O. y Stein, M. (1990). Functions, graphs and graphing: tasks. Learning and teaching. *Review of Educational Research, 60*(1), 1-64.

   Para libro: Fernández, A. y Rico, L. (1992). *Prensa y educación Matemática*. Madrid: Síntesis.

   Para capítulo de libro, actas de congreso o similar: Fuson, K. (1992). Research on whole number addition and subtraction. En Grouws, D. (ed.) *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, 243-275. MacMillan Publishing Company: New York.

   Para artículo de revista electrónica o información en Internet: Cutillas, L. (2008). Estímulo del talento precoz en matemáticas. *Números* [en línea], 69. Recuperado el 15 de febrero de 2009, de http://www.sinewton.org/numeros/

4. El artículo deberá tener una extensión máxima de 7.000 palabras, incluyendo las tablas y los anexos si es de investigación. Para las secciones experiencias e ideas para el aula la extensión máxima será de 3.000 palabras. El formato de párrafo debe ser: letra Times New Roman tamaño 12 e interlineado sencillo y sin sangrado. Párrafos con espaciado anterior de 6 ptos. Los subtítulos deben estar sin numeración.
5. El artículo debe incluir en español e inglés: (a) el título del trabajo, (b) un resumen con un máximo de 100 palabras, y (c) de tres a seis términos claves.

6. El archivo con el artículo debe enviarse en formato doc y pdf.
7. Los esquemas, dibujos, gráficas e imágenes deben enviarse por separado (en una carpeta aparte del documento de texto) en formato TIFF o JPG con una resolución mínima de 300 puntos por pulgada. Cada archivo debe estar claramente identificado y se debe indicar en el texto el lugar donde se ubica. Las fotos en las que aparezcan menores deberán estas pixeladas o tener autorización escrita del tutor (se adjuntara copia con el archivo).
8. Se debe enviar una segunda versión del artículo en la que no aparezcan los nombres de los autores, ni información relativa a ellos o que pueda servir para indentificarlos (e.g., institución a la que pertenecen, citas y referencias bibliográficas propias, agradecimientos, datos del proyecto en el que se enmarca el trabajo). En esta versión, reemplace las citas y referencias bibliográficas por "Autor, 2008" o "Autor et al., 2008". En las referencias bibliográficas propias se debe eliminar el título y el nombre de la revista o el título del libro donde se publica.
9. Los datos de los autores (nombre, institución a la que pertenecen, dirección de correo electrónico, dirección postal y número de teléfono y fax) deben incluirse en un archivo aparte. Utilice únicamente un apellido o los dos pero separados por un guión.
10. Los autores deben ser los dueños de los derechos de autor del documento que se envía y, en su caso, haber obtenido los derechos para publicar aquel material de otros autores que se incluya en el documento.
11. Cuando el artículo tenga más de un autor, éstos designarán a un autor de contacto quien se encargará de toda la comunicación con la revista Epsilon.
12. Los archivos se deben enviar al centro de documentación Thales thales.matematicas@uca.es señalando si es un trabajo de investigación, experiencias o ideas para el aula.
13. Una vez aceptado el artículo para su publicación, se solicitará al autor de contacto que firme una carta de cesión de derechos de autor en nombre de todos los autores del trabajo.

S.A.E.M. «THALES»