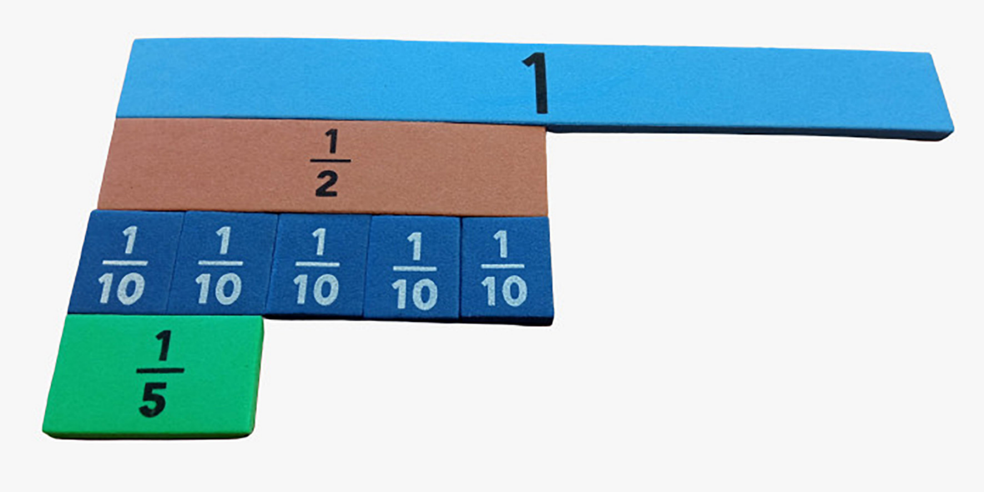
108

2021



épsilon

Revista de Educación Matemática

Editada por la S.A.E.M. "THALES"

epsilon 108

Revista de Educación Matemática

Página de la revista: http://thales.cica.es/epsilon
Revista: epsilon@thales.cica.es

Sociedad Andaluza de Educación Matemática "Thales"

Edita
Sociedad Andaluza de
Educación Matemática "Thales"
Centro Documentación "Thales"
Universidad de Cádiz
C.A.S.E.M.
Facultad de Ciencias
Departamento de Matemáticas
Campus del Río San Pedro
Torre Central, 4ª planta
11510 Puerto Real (Cádiz)
Teléfono: 956012833
Email: thales.matematicas@uca.es

Maquetación
referencias.maquetacion@gmail.com

Depósito Legal
SE-421-1984

ISSN
2340-714X

Período
2021
Suscripción
Anual

SUMARIO / CONTENTS

7 **INVESTIGACIÓN**

7 **Simulación de una enfermedad infecciosa, prácticas virtuales en tiempos de crisis con apoyo de Tecnología** / Simulation of an infectious disease, virtual practices in times of pandemic with support of technology
Luis E. Montero-Moguel, Universidad de Guadalajara, México
Verónica Vargas-Alejo, Universidad de Guadalajara, México

27 **Categorización de errores en geometría 3D en estudiantes de nivel superior** / Categorization of errors in 3D geometry in higher level students
Marcela Götte, Universidad Nacional del Litoral. Argentina
Ana María Mántica, Universidad Nacional del Litoral. Argentina

45 **EXPERIENCIAS**

45 **Veracruz educando a distancia. Utilizando Microsoft Teams para producir materiales didácticos durante la pandemia COVID-19** / Veracruz educating at a distance. Using Microsoft Teams to produce didactic materials during the COVID-19 pandemic
Ernesto Efrén Del Moral Ventura, Instituto Politécnico Nacional / CICATA-Legaria, Mexico

55 **Se abre el telón** / The curtain opens
María del Carmen Galán Mata, IES Averroes, Córdoba, España
José María Figueroa Caballero, IES Averroes, Córdoba, España

63 **Explorando propiedades de los cuadriláteros** / Exploring properties of quadrilaterals
Alexander Maz-Machado, Universidad de Córdoba, España
María Rodríguez, Universidad de Córdoba, España
Cistina Pedrosa-Jesús, Universidad de Granada, España
Astrid Cuida, Universidad de Valladolid, España

69 IDEAS PARA EL AULA

69 **Pensamiento matemático a través de la Educación Plástica: una perspectiva interdisciplinar en una propuesta educativa** / Mathematical thinking through Plastic Education: An interdisciplinary perspective in an educational proposal.
Marina Arnal Ferrandiz, Universidad de Córdoba, España.

77 MISCELÁNEA

77 **Una unidad didáctica transversal sobre Topología básica y sus relaciones con los nudos marineros** / Transversal didactic unit on basic topology and its links to marine knots
José Manuel de los Santos Castro, I.E.S. Punta del Verde, Sevilla
Silvia González Galindo, Universidad de Sevilla, España.
Enrique Martín García Martín, Universidad de Sevilla, España.
María Teresa Moyano Dávila, Universidad de Sevilla, España.
Juan Núñez Valdés, Universidad de Sevilla, España.

Épsilon - *Revista de Educación Matemática* *2021, nº 108, 7-26*

Simulación de una enfermedad infecciosa, prácticas virtuales en tiempos de crisis con apoyo de Tecnología

Luis E. Montero-Moguel
Verónica Vargas-Alejo
Universidad de Guadalajara

Resumen: *En este artículo se reportan resultados de un estudio cuyo objetivo fue propiciar la comprensión de la propagación de una enfermedad como COVID-19, mediante el entendimiento de gráficas asociadas a la simulación con NetLogo. La investigación fue de tipo cualitativo. La población de estudio fueron estudiantes universitarios de primer semestre de licenciatura. El marco conceptual se fundamenta en la perspectiva de modelos y modelación. Se discute cómo el uso de NetLogo y Microsoft Teams apoyaron la interpretación, descripción, explicación y predicción de la diseminación de una enfermedad infecciosa, y el entendimiento de gráficas asociadas a la simulación del fenómeno.*
Palabras clave: *Propagación de una enfermedad infecciosa, NetLogo, Microsoft Teams, Gráficas.*

Simulation of an infectious disease, virtual practices in times of pandemic with support of technology

This article reports the results of a study whose objective was to promote the understanding of the spread of a disease such as COVID-19, through the understanding of graphs associated with the simulation with NetLogo. The research was qualitative. The study population were first-semester undergraduate university students. The conceptual framework is based on the models and modeling perspective. It is discussed how the use of NetLogo and Microsoft Teams supported the interpretation, description, explanation and prediction of the spread of an infectious disease, and the understanding of graphics associated with the simulation of the phenomenon.
Key Word: *Spread of an infectious disease, NetLogo, Microsoft Teams, Graphics.*

1. INTRODUCCIÓN

Nos encontramos en una época sin precedentes en México y, en general, en todo el mundo. La educación, en todos los niveles, ha migrado de ambientes presenciales hacia ambientes virtuales (Juárez-Pineda, 2020; https://learningrevolution.com). La tecnología como las computadoras de escritorio, laptops, los teléfonos celulares y las tablets son el medio de comunicación entre profesores y estudiantes, quienes a través de diversos medios como Google Classroom, Moodle, Blackboard, Discord, Microsoft Teams, Google Meet, Zoom y Skype, hacen todo lo posible para dar continuidad a la educación tanto en modalidad sincrónica como asincrónica (Badillo, 2020). Varias interrogantes han surgido, entre ellas: ¿qué es lo prioritario que los estudiantes deberían conocer y aprender en estos momentos? (Hernández-Navarro, 2020), ¿deberíamos reorientar los objetivos de la educación? (Álvarez-Mendiola, 2020).

Las preguntas tienen sentido, en tanto que en el país y en varias partes del mundo se ha enfrentado la propagación de enfermedades como el VIH, H1N1 y Dengue. A pesar de que las epidemias no son nuevas y han sido frecuentes en esta era de globalización, debido a la gran facilidad de los individuos para viajar de un lugar del mundo a otro (Saldaña, 2018), incluso, aún cuando circula una gran cantidad de información en redes sociales y periódicos (Rodríguez-Calva, 2020; World Health Organization, 2020), se observa que no ha sido claro el fenómeno de diseminación de una enfermedad por los ciudadanos (Ortiz, Miranda, Espino y Rodríguez, 2020). Las preguntas que emergen naturalmente son: ¿se han utilizado estos fenómenos en el salón de clases para aprender y para concientizar a los ciudadanos?, ¿Se ha preparado a los estudiantes para que puedan responder a la situación que están viviendo?, ¿en qué momento debieron los estudiantes aprender las bases matemáticas para entender el comportamiento de fenómenos como la diseminación de una enfermedad?

Es necesario tener propuestas educativas para todos los niveles educativos que posibiliten la formación de los ciudadanos. Se requiere prepararlos para enfrentar con conocimiento situaciones de crisis política, económica y de salud como la que enfrentamos actualmente; de tal manera que puedan tomar decisiones adecuadas en beneficio propio y de la sociedad en la que viven. Se necesita formar individuos para la vida y para el trabajo sobre bases incluyentes y solidarias. Se requiere preparar a los individuos para interpretar, describir, predecir y tener control de situaciones del entorno diario (Lesh, 2010), para que las personas actúen con responsabilidad ante los fenómenos que impactan a la sociedad. ¿Se puede hacer algo al respecto en sesiones virtuales de matemáticas?

En este artículo se responde la pregunta ¿Cómo pueden NetLogo y Microsoft Teams apoyar el entendimiento de la diseminación de una enfermedad? ¿Cómo puede fomentar la comprensión de las gráficas asociadas a la propagación de una enfermedad? Se describen resultados de una investigación que se implementó en México de manera virtual, sincrónica. El objetivo del estudio fue apoyar la comprensión por estudiantes de nivel universitario sobre función, variación y crecimiento exponencial. Las aportaciones de la Perspectiva de Modelos y Modelación (se describe en la siguiente sección) [PMM] se utilizaron para diseñar e implementar la secuencia de actividades. Por cuestiones de espacio sólo se describen los resultados obtenidos al implementar una de las actividades [MXA] que se utilizó: Diseminación de enfermedades (https://ccl.northwestern.edu/

netlogo/) de NetLogo. Ello permitió que los estudiantes analizaran de manera dinámica el fenómeno y dieran más sentido a las representaciones gráficas, medio actual de información sobre la situación de propagación del COVID-19 en diversos noticieros nacionales (Secretaría de Salud, 2020).

2. MARCO CONCEPTUAL

Una mirada a nuestro alrededor es suficiente para detectar que están sucediendo varios fenómenos políticos, económicos y del medio ambiente cuya constante es el cambio: el crecimiento de los organismos y las poblaciones (Steen, 2003). Debido a que nuestro entorno está cambiando, es importante que ayudemos a los estudiantes a aprender a interpretar, describir y predecir fenómenos del mundo (Lesh, 2010). Ello les permitirá entender y colaborar con acciones o comportamientos ante fenómenos como el brote de enfermedades, el cambio climático, la desaparición de especies, la pobreza, la migración humana y muchos otros temas prioritarios como los que se enuncian en la agenda 2030 (http://www.onu.org.mx/agenda-2030/).

La educación matemática, incluso desde edades tempranas, debe ir más allá de sólo promover la memorización de definiciones, y la mecanización de algoritmos (Kaput, 1999; Stroup, 2005). Los estudiantes deben tener oportunidades para desarrollar conocimiento y, además, la flexibilidad para utilizarlo para interpretar, describir y predecir situaciones-problema. Se requiere que los estudiantes aprendan a descubrir patrones de cambio, representarlos, comprender diferentes tipos de cambio, reconocerlos cuando ocurren, tener habilidades para identificarlos en su entorno y aprender a predecir y controlarlos en beneficio de ellos mismos y la humanidad (Steen, 2003). Además, es necesario que aprendan a elaborar conjeturas, comunicarlas y evaluarlas.

Variación y función son conceptos fundamentales de la matemática del cambio (Steen, 2003). En varios estudios se ha encontrado que existen dificultades para aprender conceptos como función, aún en el nivel universitario (Ärlebäck y Doerr, 2018). El entendimiento de las gráficas asociadas al comportamiento de distintos fenómenos es complicado para los estudiantes (Thompson y Carlson, 2017), por la dificultad de entender la variación y la covariación entre las variables, lo cual se observa cuando tienen que interpretar información dada en tablas de datos, gráficas y representaciones algebraicas. En esta investigación se toma a la PMM dentro del marco conceptual (Lesh y Doerr, 2003ª).

2.1. La Perspectiva de Modelos y Modelación [PMM]

La PMM (Doerr, 2016; Lesh y Doerr, 2003a; Lesh, 2010) señala que aprender matemáticas involucra la construcción de modelos; es un proceso de desarrollo de sistemas conceptuales, que se modifican de manera continua, extienden y refinan a partir de las interacciones del estudiante con su entorno y al resolver problemas.

> Los modelos son sistemas conceptuales (que consisten en elementos, relaciones, operaciones y reglas que gobiernan las interacciones) que se expresan mediante sistemas de notación

> externa, y se usan para construir, describir o explicar los comportamientos de otros sistemas – Quizás de tal forma que otro sistema pueda ser manipulado o predicho de manera inteligente.
>
> Un modelo matemático se enfoca en las características estructurales (más que por ejemplo, en características físicas o musicales) de sistemas relevantes. (Lesh y Doerr, 2003a, p. 10)

Los modelos y constructos relevantes "se desarrollan a lo largo de dimensiones tales como de lo concreto-a-lo abstracto, de lo particular-a-lo general, de lo situado-a-lo descontextualizado, de lo intuitivo-a-lo analítico-a-lo axiomático, de lo indiferenciado-a-lo refinado, y de lo fragmentado-a-lo integrado" (Lesh y Doerr, 2003a, p. 32). Los modelos más útiles no siempre son los más abstractos, generales, descontextualizados, formales o complejos. "La evolución [del conocimiento] involucra diferenciación, integración y refinamiento de sistemas inestables. Involucra discontinuidades y reorganizaciones conceptuales -los estudiantes van más allá de pensar con el modelo a pensar en éste" (Lesh y Doerr, 2003a, p. 32).

Los modelos pueden ser internos (sistemas conceptuales) y externos (representaciones). Como mencionan Lesh y Doerr (2003b) en la PMM, debido a que se "pone énfasis tanto en los sistemas conceptuales internos como en los medios externos en los cuales éstos se expresan, se enfatiza (por ejemplo) en el papel del desarrollo del lenguaje, y la creciente fluidez representacional" (p. 540).

El conocimiento, por lo tanto, se considera como un sistema complejo y dinámico, que se autorregula y está en constante adaptación. Las interpretaciones iniciales de los fenómenos tienden a ser burdas comparadas con las interpretaciones finales. (Lesh y Doerr, 2003a).

El aprendizaje es social, emerge de comunidades de aprendizaje; es el resultado de construcciones humanas mediante procesos que implican fases de diferenciación, integración y refinamiento. La PMM (Doerr, 2016) sugiere posibilitar la construcción, comunicación y reutilización de formas de pensar en el aula. Propone para ello, el uso de secuencias de desarrollo de modelos que se estructuren con Actividades provocadoras de Modelos [MEA por sus siglas en inglés: Models eliciting activity], Actividades exploradoras de Modelos [MXA por sus siglas en inglés Models Exploration Activity] y Actividades de Adaptación de Modelos [MAA por sus siglas en inglés Models Adaptation Activity]. Cada actividad propicia que los estudiantes desarrollen "múltiples ciclos de descripciones, interpretaciones, conjeturas y explicaciones que son revisadas y refinadas mientras trabajan con otros estudiantes" (Doerr, 2016, p. 200). Es decir, los modelos que construyen los estudiantes, gradualmente se modifican, extienden y refinan.

Las MXA son actividades que se enfocan en la estructura matemática subyacente de las MEAs. Dado que se implementan después de las actividades provocadoras de modelos, su diseño puede incluir representaciones y actividades interactivas que permitan a los estudiantes profundizar en los sistemas de representación y lenguaje relacionados con los modelos que emergieron al realizar la MEA. La interacción entre los alumnos y el docente se centra "en las fortalezas de varias representaciones, las relaciones entre representaciones, las similitudes y diferencias estructurales entre representaciones y en formas de usar las representaciones productivamente" (Ärlebäck, Doerr y O'Neil, 2013, p. 317). Tienen como objetivo estudiar la naturaleza de los niveles y los tipos de comprensión que los estudiantes aún deben desarrollar después de haber completado las MEA (Lesh et al., 2003 y Lesh, 2010).

Las estructuras de las MXA "a menudo incluyen gráficos por computadora, diagramas o animaciones" (Lesh y Doerr, 2003a, p. 46). Ello puede apoyar una mejor comprensión del crecimiento exponencial (Doerr, 2006). La tecnología en la educación matemática tiene un papel fundamental, por su carácter dinámico. En particular, los sistemas de simulación y modelación permiten a los alumnos abstraer y reproducir la experiencia de un fenómeno y tener la oportunidad de explicar y describir las relaciones de los comportamientos inmersos en la simulación (Schwartz, 2007). Son "simplificaciones e idealizaciones que intentan capturar las características esenciales de esos aspectos del mundo físico y social que describen" (Schwartz, 2007, p. 161). Dentro de los softwares que permiten que los alumnos reproduzcan el comportamiento de un fenómeno está el entorno de modelación programable multi-agente NetLogo.

2.2. La Tecnología

NetLogo es un ambiente de *modelación programable multi-agente,* de libre acceso (Tisue y Wilensky, 2004). NetLogo permite la exploración del comportamiento de fenómenos naturales y sociales, mediante la *simulación individual* (para un jugador: http://ccl.northwestern.edu/netlogo/models/DiseaseSolo) y la *simulación participativa* (para un grupo de jugadores: http://ccl.northwestern.edu/netlogo/models/DiseaseHubNet). Los estudiantes pueden observar la construcción de gráficas y, de manera simultánea, el comportamiento del fenómeno simulado. En este artículo se utiliza para crear una MXA, la cual se implementó posterior a una MEA. La característica programable de NetLogo permite construir y adaptar los modelos de la biblioteca. En esta investigación se adaptó el modelo "Disease Solo" para crear un modelo propio que se denominó "*Diseminación de una enfermedad en el área metropolitana de Guadalajara* [*DG*]" (Figura 1).

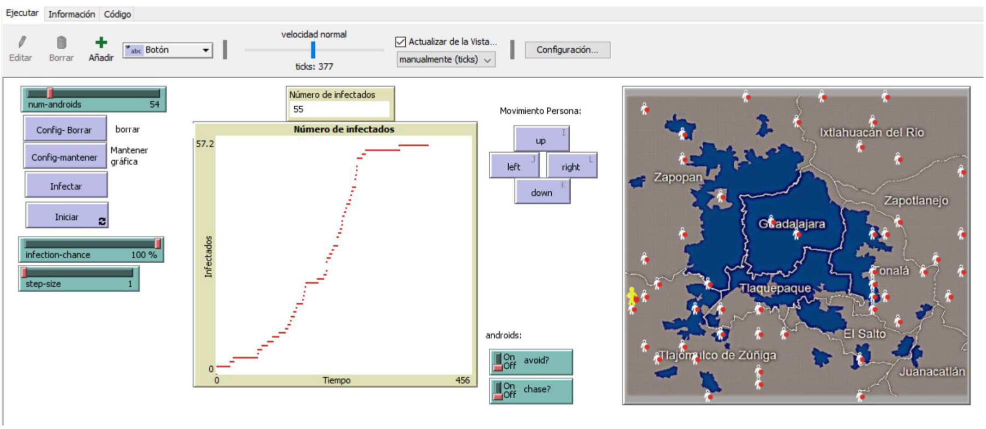


Figura 1. Entorno de la actividad: *DG*

Microsoft Teams por su parte es un espacio de trabajo en Office 365, diseñado para la colaboración y comunicación entre grupos de trabajo. Permite generar reuniones, mantener videoconferencias privadas o grupales, almacenar y compartir archivos y acceder a Word, Excel y PowerPoint. Este espacio puede utilizarse para propiciar procesos de aprendizaje en el aula; su acceso es libre para estudiantes y profesores de instituciones educativas registradas en Microsoft. En este espacio de trabajo, es posible conectar a varios estudiantes de manera sincrónica y asincrónica. Pero, como toda plataforma el uso que puede hacerse de la misma depende de varios aspectos, entre ellos la concepción del docente sobre aprender matemáticas.

Las recomendaciones para el uso de la tecnología en educación virtual son diversas, por ejemplo, se sugiere la organización de sesiones de una hora y media máximo; la incorporación de videos de uno a tres minutos, apoyados de preguntas abiertas o de opción múltiple, que el estudiante deba contestar; el uso de actividades interactivas, donde se defina el tipo de participación que se espera de los estudiantes (https://learningrevolution.com). Importa la flexibilidad, la inclusión, pero sobre todo la interacción continua entre estudiantes y profesor. Los contenidos deben estar organizados de tal manera que el estudiante pueda avanzar de acuerdo con su ritmo, la interacción con sus pares y el maestro.

El estudio que se describe en este artículo se desarrolló en la plataforma Microsoft Teams. Las aportaciones de la PMM se utilizaron para diseñar e implementar la secuencia de actividades MEA-MXA-MAA. Se describen los resultados obtenidos al implementar la MXA, con la cual se apoyó la comprensión por los estudiantes del fenómeno de propagación de enfermedades infecciosas y conceptos matemáticos como variación al hacer uso de NetLogo.

3. METODOLOGÍA

La investigación fue de tipo cualitativa. Se realizó con un grupo de 18 alumnos del primer semestre de la licenciatura en administración de empresas (los denominaremos E_i), quienes estaban cursando la materia de matemáticas aplicadas a los negocios. Sus edades variaban entre 18 y 40 años. Forman parte de un programa de licenciatura dirigido a estudiantes adultos-trabajadores. Los estudiantes habían resuelto una MEA sobre crecimiento de bacterias en ambiente sincrónico. Habían desarrollado modelos que incluían tablas y gráficas de funciones lineales y exponenciales para describir la situación.

3.1. Actividad

La actividad MXA es parte de una secuencia de actividades (MEA, MXA, MAA) diseñada con base en las sugerencias de Lesh, Cramer, Doerr, Post, y Zawojeswski (2003) y Doerr (2016). Consiste en la actividad *DG* (Figura 1) y hojas de trabajo que se utilizaron con los estudiantes para promover el entendimiento del crecimiento exponencial, asociado a la simulación de la propagación de una enfermedad.

La actividad consiste en simular una población compuesta por agentes (controlados por el software) y un individuo (controlado por el alumno), se selecciona el número de agentes infectados (*infectar,* Figura 1) con un virus de alguna enfermedad contagiosa. El o los agentes infectados pueden contagiar a otros agentes o al individuo al tocarlos. Al correr el software (*iniciar*, Figura 1) los agentes y el individuo pueden moverse y ello permite simular el proceso de contagio. De manera simultánea el software genera una gráfica con la cantidad de agentes contagiados (*número de infectados,* Figura 1) en función del tiempo.

3.2. Proceso de implementación

El proceso de implementación de la MXA se desarrolló en los ambientes de Microsoft Teams y NetLogo. Los alumnos recibieron, mediante la plataforma de Microsoft Teams, los archivos de la actividad *DG*. Esta experimentación se llevó a cabo en abril de 2020, cuando la cuarentena por COVID-19 en México tenía tan sólo tres semanas en proceso.

Fase 1. Los alumnos y el docente se conectaron en una sesión sincrónica por medio del Software de Microsoft Teams. La actividad inició con una breve plática de aproximadamente cinco minutos por parte del docente sobre la importancia de las matemáticas para describir y comprender los fenómenos que nos rodean como por ejemplo la propagación de las enfermedades, en particular COVID-19 —en la PMM es importante que las actividades que realicen los estudiantes estén contextualizadas en alguna situación cercana al estudiante (Lesh y Doerr, 2003a). Posteriormente, el profesor introdujo brevemente el software.

Fase 2. Se hizo una simulación con un agente infectado. Se pidió a los estudiantes que observaran la simulación. Después de la simulación los alumnos explicaron el comportamiento de la propagación de la enfermedad y su gráfica asociada. El docente puso énfasis en los conceptos matemáticos que emergieron.

Fase 3. Se hizo una simulación con dos agentes infectados. Antes de la simulación, el docente propuso de nuevo que los alumnos hicieran conjeturas respecto a lo que sucedería. Después de la simulación los alumnos explicaron el comportamiento de la propagación de la enfermedad y su gráfica asociada. El docente puso énfasis en más conceptos matemáticos que emergieron.

Fase 4. Se hizo una simulación con cinco agentes infectados. Antes de la simulación el docente propuso de nuevo que los alumnos hicieran conjeturas respecto a lo que sucedería. Después de la simulación los alumnos explicaron el comportamiento de la propagación de la enfermedad y su gráfica asociada. El docente puso énfasis en los conceptos matemáticos que emergieron en cada simulación, por ejemplo, variables, variación, tasa de crecimiento, ordenada al origen, entre otros.

Ocho de los 18 alumnos instalaron NetLogo y la actividad en sus computadoras, por lo tanto pudieron realizar sus propias simulaciones. Los otros diez observaron las simulaciones por medio de la pantalla compartida del docente.

3.3. Papel del profesor

Durante toda la sesión, el profesor fue orquestador de la discusión, mediante el planteamiento de preguntas que permitieran a los estudiantes comprender el fenómeno, interpretar las gráficas (asociarlas al crecimiento exponencial) y desarrollar conocimiento y habilidades como: la observación, el planteamiento de conjeturas, el análisis, la verificación de casos particulares, a través de la exploración con el software y la generalización. El docente propició la interacción social entre los estudiantes para promover una comunidad de aprendizaje desde la implementación de la MEA. El profesor tenía experiencia en el desarrollo de actividades (sustentadas en la PMM) con estudiantes en ambientes presenciales.

3.4. Acopio de datos

El acopio de datos fue mediante las videograbaciones de las interacciones [estudiante-estudiante y estudiante-profesor] durante toda la experimentación de la MXA, el registro escrito de las respuestas de los estudiantes en las hojas de trabajo al realizar las simulaciones y la bitácora del docente. Los estudiantes usaron Word y lápiz y papel para desarrollar las actividades de las hojas de trabajo, tomaron fotos de imágenes de las simulaciones y las pegaron en sus hojas de trabajo para complementar sus respuestas.

4. RESULTADOS

Se describe cómo al ser implementada la MXA (basada en NetLogo) en la plataforma Microsoft Teams permitió tal como Doerr (2016) lo señala: el surgimiento de ciclos de descripciones, interpretaciones, conjeturas y explicaciones que fueron revisadas y refinadas mientras los estudiantes trabajaron con otros estudiantes y con el profesor.

De tal manera, que los estudiantes revelaron sus concepciones matemáticas previas y del fenómeno de propagación de enfermedades infecciosas.

4.1. Episodio 1. Contextualización de la situación (Actividad en Microsoft Teams)

La plataforma permitió que el docente y los 18 estudiantes se lograran conectar desde su casa de manera sincrónica para atender la sesión. Microsoft Teams facilitó la comunicación e interacción del grupo [estudiante-estudiante y estudiantes-profesor], inclusive asesoría técnica.

4.1.1. El contexto

El docente inició la sesión con la introducción siguiente para contextualizar la actividad en el fenómeno COVID-19.

[1] *Docente*: Estar estudiando matemáticas no quiere decir que dejemos, nada más, a las matemáticas en el salón de clases, o en las clases que tenemos. Sino que realmente, como hemos platicado, las matemáticas nos ayudan en la vida cotidiana; y, pues un problema que tenemos, que ahorita se detonó es el coronavirus. Pero realmente siempre hay infecciones que tienen ciertos comportamientos. Es por eso que este software [*se refiere a NetLogo*] y esta actividad [*diseminación de enfermedades*] que les mandé [*se refiere a que les entregó la actividad mediante Microsoft Teams*] está en ese sentido.

La intervención del docente se justifica en su conocimiento sobre la importancia del contexto para motivar a los estudiantes, lo cual se deriva de sus lecturas sobre la PMM propuesta por Lesh y Doerr (2003a) y su experiencia al trabajar en ambientes presenciales basados es esta perspectiva.

4.1.2. Aspectos técnicos

El docente apoyó también mediante asesoría técnica a los estudiantes, que habían logrado descargar la actividad *DG* de NetLogo, para que junto con él realizaran las simulaciones en sus equipos. Destinó poco tiempo, de la siguiente manera, para resolver inquietudes sobre la descarga de la actividad y uso de comandos, botones y controles del software.

[2] *Docente*: Ustedes están marcados con el color amarillo: ¿si se vieron en color amarillo? [*promovió que los estudiantes observaran que estaban inmersos como parte de la población de individuos en la simulación*]
[3] *E1*: Sí.
[4] *E2*: Sí.
[5] *E3:* Sí profe.
[6] *Docente*: Ok. ¿y si vieron cómo se mueven ustedes? Ahí. Dentro de... Dentro del software. Dentro del programa

Investigadores como Haspekian (2005) señalan que el uso de la tecnología puede aprenderse simultáneo al aprendizaje de las matemáticas. No siempre es necesario desarrollar sesiones de aprendizaje de software separadas de las sesiones de aprendizaje de matemáticas. En este caso, debido a lo amigable del software, se consideró que podía aprenderse el uso básico del mismo a la par de apoyar la comprensión de las gráficas asociadas al fenómeno

4.2. Episodio 2. Desarrollo de conocimiento matemático [G] y sobre el fenómeno de propagación de enfermedades [C] a través de la simulación y gráfica en NetLogo (Microsoft Teams y NetLogo)

Se analizó el proceso de evolución de ideas de los estudiantes respecto a:

a) la comprensión de gráficas —y conceptos matemáticos como variación, tasa de cambio, ordenada al origen [*G*].

b) la asociación de la gráfica al contexto de propagación de enfermedades infecciosas como COVID-19 [*C*] y por lo tanto, comprensión del fenómeno.

4.2.1. Primera simulación: la simulación un juego; variables, variación y tasa de cambio

El docente solicitó la observación de la simulación llevada a cabo con un agente y la descripción e interpretación del fenómeno.

[7] *Docente*: Lo que necesito es que ustedes... bueno, todos los que no tienen ahorita el software para usarlo, nos platiquen qué es lo que estamos viendo [*con esta frase el docente trató de promover que los estudiantes exploraran, describieran, y analizaran la situación*]. ¿De acuerdo? Bueno, entonces, vamos a iniciar ya con esto. La idea es que todos o los que puedan, van a darle iniciar y van a tratar de moverse para que no sean infectados. ¿De acuerdo? Muy bien... empezamos entonces.

La simulación tomada como un juego

Ocho estudiantes simularon el fenómeno de manera individual, mientras que 10 observaron en la plataforma la simulación realizada por el docente. Uno de los ocho estudiantes, que simularon de manera individual, percibió la actividad como una actividad lúdica con reglas que quizás debían aclararse durante la clase. Es decir, no lo asoció con el contexto de una situación real, como COVID-19. Por lo tanto, no tuvo claro cómo comportarse.

[8] *Docente*: Traten de moverse para no ser infectados. ¿De acuerdo?

[9] *E3*: ¿Y si nos infectan profe? ¿voy a infectar a los demás o qué hago? [*No C*]

[10] *Docente*: ¿Tú qué harías? [*El docente pregunta para que los alumnos se concienticen respecto al fenómeno*]

Descripción cualitativa de la forma de la gráfica

Posterior a la simulación (Figura 1). Antes de borrar la gráfica obtenida. El docente propició reflexión sobre la gráfica.

[11] *Docente*: ¿Me pueden mencionar qué observan de la gráfica por favor ? Me van diciendo quién participa para irlo apuntando como siempre [*el profesor trató de promover la interacción docente-estudiantes*].

[12] *E4*: Pues que...

[13] *Docente*: Ajá… Dime

[14] *E3*: que va ascendiendo [*G*].

Los estudiantes describieron la gráfica de manera cualitativa [14]. Pero no mencionaron que era una gráfica creciente, como podría esperarse en una clase de matemáticas, tampoco describieron el tipo de crecimiento exponencial (conocimiento que emergió en la MEA).

Descripción cualitativa de la forma de la gráfica con base en el contexto

Incluyeron el contexto de la epidemia en sus descripciones.

[15] *E4*: Va ascendiendo de una manera bastante rápida por el alto contagio de la epidemia [*epidemia para los estudiantes era COVID-19*]. [*G*, *C*]

[16] *E5*: por la epidemia. [*G*, *C*]

[17] *Docente*: Ok. E4 menciona: que va… va aumentando rápidamente por el caso de la epidemia. Alguien más intervino y no alcancé a escuchar. ¿Quién era?

[18] *E5*: Sí maestro. Este…

[19] *Docente*: ¿E5?

[20] *E5*: Sí. Se observa, pues que va aumentando la epidemia ¿no? rápidamente. [*G*, *C*]

Un par de estudiantes hicieron una descripción más formal de la forma de la gráfica; ello se debió a que observaron líneas en la gráfica (Figura 1).

[21] *E9*: Es que se ve que [*se refiere a la forma de la gráfica*]... en los primeros contagios, es primero lineal un poquito [*G*].

[22] *Docente*: Ajá. Ok.

[23] *E9*: y ya, posterior a eso se empiezan a… empieza a ascender [*se refiere a la forma de la gráfica*], pues en base a los contagiados. [*G*, *C*]

Descripción cuantitativa de la gráfica

El docente preguntó: ¿qué más observan?

[24] *E6*: En la gráfica aparece el tiempo.

[25] *E10*: Tiempo.

[26] *Docente*: Ajá

[27] *E6*: que tardan en infectarse.

[28] *Docente*: Ok

[29] *E6*: En un… en una línea [*se refiere a la abscisa de la gráfica*] y en la otra [*se refiere a la ordenada*] aparece el número de infectados [*mencionó las variables graficadas*]

[30] *Docente*: Ok

[31] *E6*: Que 57.2 y 456. Pero, no sé a qué se refiere aquí, 456 [*no sabe si son segundos*].

Se observa en el diálogo cómo el estudiante E6 identificó las variables y cómo estaban relacionadas, aunque no utilizó lenguaje formal matemático; También, se nota cómo incluyeron datos en sus descripciones, lo cual se aprecia en el último comentario de E6. De acuerdo con resultados obtenidos por Lesh y Yoon (2004) es natural que los estudiantes suelan interpretar y describir, primero de manera cualitativa, algunos fenómenos o actividades, y posteriormente amplíen sus descripciones para introducir análisis cuantitativos.

Observaciones

Al principio un estudiante tomó, inicialmente, como juego –quizás con ciertas reglas– la simulación que realizaron en el aula. El fenómeno de COVID-19 no se mencionó explícitamente en las descripciones, a pesar de ser utilizado como un contexto inicial por el profesor; sin embargo, la gráfica fue contextualizada por los estudiantes en términos de la propagación de una enfermedad.

En términos de la PMM (Lesh, 2010) se observa cómo el sistema conceptual de los alumnos evolucionó, las interpretaciones y descripciones iniciales cualitativas se ampliaron para incluir cuantitativas. Se identificaron variables, la relación entre las mismas y los estudiantes empezaron a dar sentido a las cantidades numéricas que aparecían en la gráfica. Podría decirse que el sistema conceptual de los alumnos progresó de forma gradual por las dimensiones: sencillo-complejo (dimensiones tomadas de Lesh, 2010).

Debido a las dificultades de conexión de red wifi, varios estudiantes mantuvieron sus videos apagados. Esto impidió observar el lenguaje corporal al que se tiene acceso en un ambiente presencial. Sin duda, esta puede ser una limitante cuando se usan plataformas, ya que la observación del lenguaje corporal puede apoyar al docente para saber cuándo es necesario retroalimentar las actividades. En este estudio el docente se basó en el contenido y entonación de las participaciones verbales de los estudiantes para identificar si había entendimiento de la situación.

4.2.2. Segunda simulación. Involucramiento en la simulación; construcción, exploración y verificación de conjeturas

En esta simulación el docente fomentó que los estudiantes desarrollaran conjeturas, las describieran, exploraran y verificaran. Con este objetivo, puso énfasis en la comparación de las gráficas obtenidas al final de la simulación y en los conceptos matemáticos como variables, variación y rapidez (asociada a tasa de crecimiento).

Conjeturas

El docente, antes de la simulación con dos infectados, solicitó a los estudiantes que desarrollaran conjeturas respecto a la posible forma de la gráfica. Las respuestas de los estudiantes fueron variadas, aunque todos pensaron que la infección debía ser más rápida.

[32] *E5*: si yo creo que va a ser sobre esta [encima de la gráfica anterior] profesor, pero creo que no va a llegar hasta arriba.
[33] *Docente*: Ok.
[34] *E5*: yo creo.
[35] *Docente*: No crees que llegue hasta arriba. Perfecto
[36] *E5*: No. Creo que si se va a elevar, pero…no. Como son dos, pues va a ser más rápido el contagio, yo creo. [*G*, *C*]

[37] *Docente*: Ok. Muy bien.
[38] *E6*: Yo creo que el número de infectados disminuiría, no?
[39] *Docente*: El número de infectados disminuiría
[40] *E6*: Porque se supone que la van a curar, no? [*C*]

La comunicación, de acuerdo con la PMM (Lesh, 2010) es un aspecto que se debe cuidar en estos ambientes porque permiten que el estudiante revele su conocimiento, modifique, amplíe y refine su forma de pensar. Por lo tanto, el docente cuidó sus intervenciones [35, 37, 39] para apoyar que los estudiantes fueran quienes describieran lo que ocurriría, sin evaluar de antemano sus conjeturas.

Exploración de conjeturas

La simulación del fenómeno fue interesante para los estudiantes, pero más cuando la realizaron de manera individual, ya que no sólo permitió explorar las conjeturas, sino que el hecho de mover su propio individuo los hizo sentirse parte de la población donde se propagaba la infección; *E7* es un ejemplo cuya intervención se describe enseguida, mencionó de manera explícita el fenómeno COVID-19 y en sus expresiones denota su involucramiento en la actividad [43].
[41] *E7*: ¡Ya se infectaron todos y yo sigo sin infectar! [*Los estudiantes cuidaron que su individuo no se infectara en esta simulación, igual que el docente*] [*C*]
[42] *Docente*: ¡Eso!, ¡muy bien! A ver.
[43] *E7*: ¡Ya soy inmune al coronavirus! Ah, no. ¡Ya me infectó! ¡Ya valió madre! [*C*]
[44] *Docente*: Ok.
[45] *E7*: Pero sí se ve un cambio radical en la rapidez con la que se infectaron [*G*]

Verificación de conjeturas

Una vez terminada la simulación (Figura 2), el profesor promovió que los estudiantes revisaran las conjeturas.
[46] *E5*: No. [*la gráfica*] no llegó hasta el mismo nivel.
[47] *Docente*: En la gráfica que tengo aquí se ve como llega al mismo nivel ¿por qué llegará al mismo nivel si fueron diferente número de infectados al inicio?
[48] *E7*: Es por el tiempo no?
[49] *E1*: Porque al final son… es la misma cantidad de personas. ¿no?

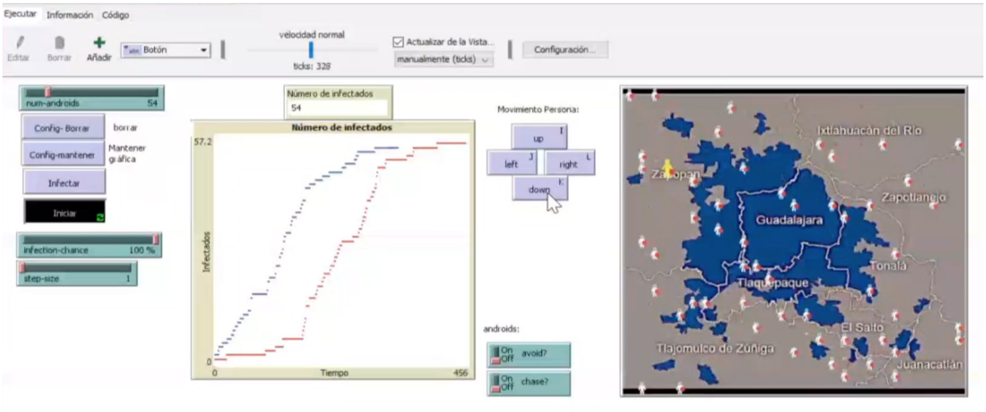


Figura 2. Segunda simulación de la actividad *DG* en NetLogo

Observaciones

En este nuevo ciclo de descripciones e interpretaciones, el docente conocedor de la importancia de las conjeturas y explicaciones en la PMM, promovió que los estudiantes las realizaran. La descripción de la gráfica fue cualitativa, le dieron más sentido [45, 49] al mencionar cómo la cantidad de población estaba representada en la misma. Por primera vez, el fenómeno COVID-19 emergió de manera explícita por los estudiantes [43].

4.2.3. Tercera simulación. Estrategias para evitar el contagio; variables, variación, tasa de cambio y ordenada al origen

En esta simulación el docente además de promover que los estudiantes desarrollaran, de nuevo, conjeturas, exploraran, describieran, analizaran y verificaran las mismas, puso énfasis en ¿cuál sería la mejor estrategia para no contagiarse? En las descripciones de los estudiantes volvieron a emerger frases asociadas a la identificación de variables, variación y tasa de crecimiento (asociada a rapidez de contagio). El docente posibilitó que los estudiantes dieran significado a la ordenada al origen en la gráfica, en términos del contexto.

Conjeturas

Las conjeturas iniciales fueron las siguientes

[50] *E6*: Que la infección va a ser más rápida. ¿no?
[51] *Docente*: Más rápida.
[52] *E2*: Más rápida.
[53] *Docente*: ajá.
[54] *E7*: cinco veces más rápida al parecer.

[55] *Docente*: Ok.
[56] *E1*: Quizás la gráfica vaya más lineal para arriba.

Ningún estudiante corrigió la observación de E7 [54]. En lugar de pensar de asociar la cantidad inicial de personas infectadas (cinco) a la ordenada al origen de la gráfica, los estudiantes como E7, la asociaron a la rapidez del contagio.

Exploración de conjeturas

La simulación del fenómeno permitió, además de explorar las conjeturas, percibir que podían encontrar estrategias para no contagiarse [57]. Los estudiantes platicaron sus estrategias para evitar el contagio de la infección, lo cual relacionaron con Covid-19 [60].
[57] *E4*: Ah, qué buena estrategia esa de la esquina.
[58] *E7*: Esconderse.
[59] *Docente*: Muy bien. Ok. Quiero que observen...
[60] *E7*: Es que sí obedeció de quedarse en cuarentena. [C]

Verificación de conjeturas

Una vez terminada la simulación (Figura 3), el profesor promovió que los estudiantes revisaran las conjeturas. La discusión fue similar a la que se dio al término de la segunda simulación. Pero, en esta discusión, el docente puso énfasis en que los estudiantes analizaran la ordenada al origen de la gráfica.
[61] *Docente*: ¿por qué esta línea empezó aquí, y por qué ésta aquí, y por qué ésta aquí? [*el docente se apoyó del cursor para indicar la ordenada al origen de cada gráfica*]
[62] *E6*: Porque empezó con más números [inaudible].
[63] *E8*: Los números cinco y…[inaudible].
[64] *E7*: La cantidad de infectados con la que comenzó.

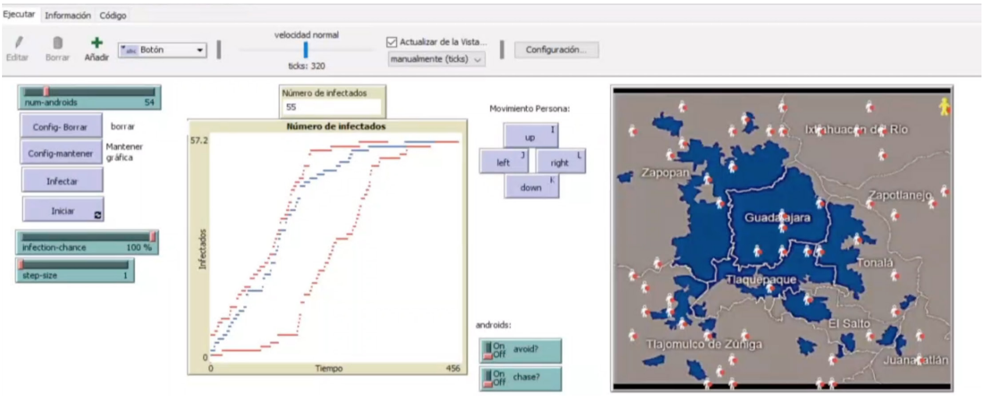


Figura 3. Tercera simulación de la actividad *DG* en NetLogo

Observaciones

Esta tercera simulación posibilitó que los estudiantes evaluaran sus conjeturas y le dieran más sentido a la gráfica al discutir lo que significaba ordenada al origen. Identificaron que esconderse en una esquina, podía ser útil para no contagiarse, lo que implicó que le dieran sentido a la cuarentena solicitada por las autoridades gubernamentales para evitar el contagio por COVID-19. Ello es importante como parte de la formación de los estudiantes no solo en la escuela, sino también para la vida y es parte de los objetivos de la PMM la cual pone énfasis en que se debería fomentar en clases que los estudiantes aprendieran a tomar decisiones con base en sus experiencias y conocimiento (Lesh y Doerr, 2003a).

4.3. Episodio 3. Profundización individual en el conocimiento matemático [G] y el comportamiento del fenómeno de propagación de enfermedades a través de hojas de trabajo (Microsoft Teams)

En las hojas de trabajo que 15 estudiantes entregaron resueltas (como tarea extraclase) se nota cómo de manera individual lograron identificar las variables, comparar la tasa de infección y dar sentido a la ordenada al origen. Se incluyó la pregunta: ¿Que aprendí? Las respuestas fueron variadas, pero en cuanto al entendimiento de la propagación de enfermedades infecciosas se observó lo siguiente.

- Diez estudiantes manifestaron que la actividad les había permitido entender el fenómeno de COVID-19 y por qué debían tomar tantas precauciones.
- Tres más, no mencionaron COVID -19, pero señalaron que habían aprendido sobre la diseminación de enfermedades.
- Dos estudiantes no entregaron la respuesta a esta pregunta.

En las respuestas a la pregunta ¿qué aprendí?, once estudiantes, a pesar de que no se les preguntó, manifestaron que había sido divertida la actividad (Figura 4). El resto no escribió algo al respecto.

A mí en lo personal fue un programa que las veces que lo utilice me mostraba un juego bastante entretenido, pero también una fórmula matemática, al igual que te crea conciencia y estrategia mental.

Aprendí que el mayor número número de contagios se ve claramente cuando empiezan nuevos brotes en distintas partes, por lo que de ahí se va formando una especie de circunferencia donde cada vez hay menos espacio solo o bien sin (Contagios).

A partir de ello claramente nos muestro en la gráfica la inclinación que empieza a tener por un contigo masivo diario.

Realmente esto también nos señala , una parte muy importante que es tomar las medidas necesarias , como los muestran las gráficas , entre menos personas se encuentren cerca y no hagan alguna actividad que no sea de mayor importancia esto disminuirá y la gráfica se tornara con menor volumen y un índice de crecimiento bajo. Es un aplicación muy buena que nos enseña el valor matemático y la importancia del balance para que no haya un incremento mayor y claramente esto lo van denotando las gráficas.

Si bien agradezco mucho la enseñanza y me quedo con los valores y las medidas enseñadas que nos muestra (Netlogo), seguido de implementarlo y hacerlo real.

Figura 4. Reporte de estudiante E14

- Los 15 estudiantes identificaron las variables, la variación no constante y aunque no cuantificaron la tasa de cambio promedio, describieron la rapidez del contagio.

Observaciones

Las hojas de trabajo apoyaron el tránsito de descripciones cualitativas a cuantitativas en términos de describir, cantidades de agentes infectados en función del tiempo, la ordenada al origen, el tiempo total de contagio. La descripción de la rapidez del contagio se quedó en un nivel cualitativo.

5. CONCLUSIONES

Respecto a las preguntas de investigación planteadas: ¿Cómo pueden NetLogo y Microsoft Teams apoyar el entendimiento de la diseminación de una enfermedad? ¿Cómo puede NetLogo fomentar la comprensión de las gráficas asociadas a la propagación de una enfermedad? Se puede contestar lo siguiente. Microsoft Teams permitió la gestión de recursos, la conexión sincrónica mediante videollamada y la grabación del video. Los estudiantes tuvieron la posibilidad de interpretar, describir, explicar y predecir el fenómeno de diseminación de enfermedades gracias al uso de NetLogo. La gráfica asociada a la simulación fue fundamental para dar significado al comportamiento del fenómeno. Los estudiantes entendieron que la rapidez de propagación dependía de cómo se movieran los agentes y el individuo, cómo se acercaran unos a otros, y de la cantidad inicial de infectados; lograron verse como parte de la población que podía ser infectada y por lo tanto establecieron estrategias para evitar el contagio. Los estudiantes desarrollaron conjeturas, las describieron, exploraron, analizaron y verificaron.

La actividad posibilitó que ampliaran su forma de pensar sobre el comportamiento de la propagación de enfermedades infecciosas como COVID-19 y refinaran su entendimiento sobre las gráficas al interactuar con NetLogo y el carácter dinámico de la herramienta. Los estudiantes manifestaron que entendieron el fenómeno, las recomendaciones de salud pública y que les gustó la actividad de NetLogo. Con ello consideramos que se aportó en la preparación de estos estudiantes para comprender la situación de crisis global y para actuar de manera informada.

La simulación en el contexto de propagación de enfermedades permitió que los estudiantes ampliaran, refinaran y asociaran sus conocimientos matemáticos con el fenómeno de pandemia COVID-19, el cual ha sido difícil de entender desde su inicio por la población, aunque circule mucha información en los noticieros y redes sociales. Consideramos que experiencias de este tipo se deberían llevar a cabo en el aula en estos tiempos de pandemia donde continuar con la mecanización de algoritmos y la definición de conceptos no debería ser el único centro de atención en cuanto al aprendizaje de las matemáticas.

Existen limitantes asociadas a la implementación de la MXA en ambientes sincrónicos, si comparamos con una implementación en ambientes presenciales. Por ejemplo, los estudiantes no pueden participar en la misma simulación como lo permite HubNet de NetLogo exclusivo para computadoras en red. Queda pendiente para una siguiente implementación apoyar más la reflexión sobre la tasa de cambio promedio.

6. AGRADECIMIENTOS

Expresamos un agradecimiento al Proyecto Campus Viviente (http://campusviviente.org), en particular a la Dra. Carmona por compartir su experiencia académica sobre el uso de NetLogo; a CONACYT por su apoyo a través de las becas de posgrado y al Dr. René Luna García del CIC /IPN por la asesoría para la adaptación de la actividad *DG* en NetLogo. Cualquier opinión y conclusiones expresadas en este artículo son únicamente de los autores de este artículo.

7. REFERENCIAS

Ärlebäck, J.B., Doerr, H.M. (2018). Students' interpretations and reasoning about phenomena with negative rates of change throughout a model development sequence. *ZDM, 50*, 187–200.

Ärlebäck, J. B., Doerr, H., y O'Neil, A. (2013). A modeling perspective on interpreting rates of change in context. *Mathematical Thinking and Learning*, *15*(4), 314-336.

Badillo, D. (2020). SEP implementa clases a distancia durante emergencia sanitaria. *El economista*. Recuperado el 13 de abril de 2020, de https://www.eleconomista.com.mx/politica/SEP-implementaclases-a-distancia-durante-emergencia-sanitaria-20200413-0100.html

Doerr, H. M. (2006). Teachers' ways of listening and responding to students' emerging mathematical models. *ZDM*, *38*(3), 255-268.

Doerr, H. M. (2016). Designing sequences of model development tasks. En C. R. Hirsch y A. R. McDuffie (Eds.) *Annual Perspectives in Mathematics Education 2016: Mathematical modeling and modeling mathematics* (pp. 197-205). Reston, Va: National Council of Teachers of Mathematics.

Haspekian, A. (2005). An «Instrumental approach» to study the integration of a computer tool into mathematics teaching: the case of spreadsheets. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 10, pp. 109-141.

Hernández-Navarro, L. (2020). Coronavirus y educación. *La Jornada*. Recuperado el 14 de abril de 2020, de https://www.jornada.com.mx/2020/04/14/opinion/018a1pol

Juárez-Pineda, E. (2020). Universidades lanzan plataforma de innovación de la docencia frente al Covid-19. *Educación futura*. Recuperado el 3 de abril de 2020, de http://www.educacionfutura.org/universidades-lanzan-plataforma-de-innovacion-de-la-docencia-frente-al-covid-19/

Kaput, J.J. (1999). Teaching and learning a new algebra. En *Mathematics classrooms that* promote understanding (pp. 145-168). Routledge.

Lesh, R., Cramer, K., Doerr, H. M., Post, T. y Zawojeswski, J. S. (2003). Model Development Sequences. En R. Lesh y H. M. Doerr (Eds.) *Beyond Constructivism. Models and modeling perspectives on mathematics problem solving, learning, and teaching* (pp. 35-58). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Lesh, R. y Doerr, H. M. (2003a). Foundations of a Models and Modeling Perspective on Mathematics Teaching, Learning, and Problem Solving. En R. Lesh y H. M. Doerr (Eds.) *Beyond Constructivism. Models and modeling perspectives on mathematics problem solving, learning, and teaching* (pp. 3-34). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Lesh, R. y Doerr, H. M. (2003b). In What Ways Does a Models and Modeling Perspective Move Beyond Constructivism? En R. Lesh y H. M. Doerr (Eds.) *Beyond Constructivism. Models and modeling perspectives on mathematics problem solving, learning, and teaching* (pp. 519-556). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Lesh, R. (2010). Tools, researchable issues and conjectures for investigating what it means to understand statistics (or other topics) meaningfully. *Journal of Mathematical Modeling and Application, 1*(2), 16-48.

Lesh, R. y Yoon, C. (2004). Evolving Communities of Mind in which development involves several interacting and simultaneously developing strands. *Mathematical Thinking and learning*, 6(2), 205-226.

Mendiola- Álvarez, G. (2020). Covid-19. Cambiar de paradigma educativo. *Comie.* Recuperado el 16 de abril de 2020, de http://www.comie.org.mx/v5/sitio/2020/04/16/covid-19-cambiar-de-paradigma-educativo/

Ortiz, A., Miranda, P., Espino, M. y Rodríguez, K. (2020). Las 2 caras de la etapa más crítica de la pandemia en México. *El universal.* Recuperado el 9 de mayo de 2020, de https://www.eluniversal.com.mx/nacion/las-2-caras-de-la-etapa-mas-critica-de-la-pandemia-en-mexico

Rodríguez-Calva, P. (2020). Hasta que se contagie 80% de la población, pandemia estará controlada. *Excelsior*. Recuperado el 8 de mayo de 2020, de https://www.excelsior.com.mx/nacional/hasta-que-se-contagie-80-de-la-poblacion-pandemia-estara-controlada/1380796

Saldaña, J. (2018). Modelos de propagación de enfermedades. *Investigación y Ciencia*, 94. Recuperado el 8 de mayo de 2020, de https://www.investigacionyciencia.es/revistas/temas/salud-global-755/modelos-de-propagacin-de-enfermedades-11457

Secretaría de Salud. (2020). *Informe diario por coronavirus en México* [video]. Recuperado el 8 de mayo de 2020, de Youtube. https://www.youtube.com/watch?v=vvjhy2X8R2I

Steen, L. A. (2003). La enseñanza agradable de las matemáticas. En R. García (Trad.), *On the shoulders of giants: New approaches to numeracy*. D.F. México: Limusa. (Trabajo original publicado en 1990).

Stroup, W. (2005). Learning the basics with calculus. *Journal of Computers in Mathematics and Science Teaching*, *24*(2), 179-196.

Tisue, S. y Wilensky, U. (2004). *NetLogo: A simple environment for modeling complexity. International conference on complex systems*. http://profs.hut.ac.ir/~bashiri/files/netlogo.pdf

Thompson, P. W., y Carlson, M. P. (2017). Variation, covariation, and functions: Foundational ways of thinking mathematically. En J. Cai (Ed.) *Compendium for research in mathematics education* (pp. 421-456). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

World Health Organization. (2020). *Coronavirus disease (COVID-19) pandemic*. Recuperado el 31 de mayo de 2020, de https://www.who.int/es/emergencies/diseases/novel-coronavirus-2019

Épsilon - *Revista de Educación Matemática* *2021, nº 108, 27-44*

Categorización de errores en geometría 3D en estudiantes de nivel superior

Marcela Götte
Ana María Mántica
Facultad de Humanidades y Ciencias.
Universidad Nacional del Litoral.
Santa Fe, Argentina.

Resumen: *Se presenta una categorización de errores en estudiantes universitarios de profesorado en matemática al realizar demostraciones en el contexto de la geometría 3D, particularmente focalizada en conceptos de paralelismo y perpendicularidad. En el marco de una investigación cualitativa a partir de artefactos escritos disponibles, se esboza una categorización. Se establecen dos grandes tipos de errores: los generales, que pueden ser de cualquier área de la matemática, y los particulares, referidos específicamente a la geometría del espacio. A partir de esta categorización y de aportes de referentes teóricos se establece una nueva tipología que cuenta con siete tipos de errores.*
Palabras clave: *geometría 3D; paralelismo; perpendicularidad; tipología de errores*

Categorization of errors in 3D geometry in higher level students

Abstract: *We present a categorization of errors in university prospective mathematics teachers when demonstrating in the context of 3D geometry, particularly focused on concepts of parallelism and perpendicularity. From a qualitative research based on available written artifacts we outline a categorization. We set two major types of errors, the general ones that can be from any area of mathematics and individuals specifically referring to the geometry of space. From this categorization and contributions from theoretical references we establish a new typology that has seven types of errors.*
Keywords: *3D geometry, parallelism, perpendicularity, errors typology*

Un tópico presente en la agenda de investigación en educación matemática es el concerniente a errores. Esta temática es estudiada desde diferentes enfoques y referida a distintas áreas de la matemática.

El objetivo del estudio que se presenta es exponer la producción de una categorización de errores en alumnos del profesorado en matemática, de la facultad de Humanidades y Ciencias de la Universidad Nacional del Litoral, al realizar demostraciones en el contexto de la geometría euclídea tridimensional.

El error es considerado por Rico (1995) como uno de los puntos en los que se establece una línea divisoria entre dos estereotipos de profesor de matemáticas, por un lado, el que considera que el error es un dato objetivo que muestra el desconocimiento de un alumno o de un grupo de alumnos y que debe ser controlado, corregido o, en su defecto, penalizado; y por otro, el que sostiene que el error es la muestra de un conocimiento parcialmente construido, resultado de un proceso en curso a cuya evolución el profesor debe contribuir, cuando ello sea posible, evitando provocar bloqueos, rechazos o sanciones. Propone una alternativa a la primera postura, sosteniendo que los errores y las ideas imprecisas de los alumnos tienen una dimensión positiva. El conflicto entre sus conocimientos anteriores y determinadas situaciones que no encajan con ellos es un paso necesario para reorganizarlos, enriquecerlos y ajustarlos, es decir que se produzca un aprendizaje significativo.

El documento regulatorio del Ministerio de Educación, Cultura, Ciencia y Tecnología de la Nación (2018) plantea en sintonía con lo anterior, que un error estaría mostrando una forma de pensar provisoria.

> Frente a los "errores" descubiertos será necesario analizarlos, intentar comprender cómo y por qué se producen y plantear actividades de distinto tipo para desafiar esa comprensión y promover la aparición de nuevos significados. Habrá entonces que volver sobre la noción involucrada, cuestionándola con contraejemplos e interrogantes que ayuden a los/as estudiantes a volver sobre sus ideas y reformularlas. No es evitando los "errores" como se acorta el proceso de aprendizaje, sino que al trabajar sobre ellos y debatirlos, es como se lo enriquece (p. 48).

El análisis de los errores de los alumnos en su proceso de aprendizaje de la matemática puede proveer de información acerca de cómo se construye el conocimiento, imprescindible para realimentar los procesos de enseñanza y de aprendizaje con el fin de mejorar los resultados.

Este estudio se enfoca particularmente en la geometría euclídea, la que se funda en las siguientes normas: enunciar, sin definición los conceptos primeros; admitir, sin demostración, ciertas propiedades que relacionan estos conceptos enunciando los axiomas correspondientes y a partir de éstas, demostrar las restantes propiedades o teoremas. En el Proyecto de mejora para la formación inicial de profesores para el nivel secundario (2010) se expresa que una particularidad de esta geometría es su eje vertebrador (el sistema axiomático euclídeo para la organización y comunicación de los conocimientos geométricos) y se plantea su relevancia en trabajarlo en la formación del profesor de matemática. Lo propio de la Geometría Euclídea Espacial (GEE), marco en el que se desarrolla este estudio, son los problemas de demostraciones de propiedades que se deducen de los axiomas o de otras propiedades demostradas anteriormente, espacio propicio para esta investigación.

1. MARCO TEÓRICO

Se exponen clasificaciones de errores que aportan de manera significativa a la categorización fruto de este trabajo.

Franchi y Hernández de Rincón (2004) realizan una investigación exploratoria, con alumnos de Geometría de la Facultad de ingeniería de LUZ, Venezuela, donde proponen una tipología de errores en el área de la geometría plana. La tipología consta de ocho categorías:

- Errores de pre-requisitos referidos al uso inadecuado de las notaciones del álgebra.
- Errores propios del lenguaje geométrico, el uso inadecuado de notaciones de figuras y elementos geométricos; demostración de proposición en discordancia con el enunciado de un problema o descripción defectuosa de la construcción de figuras geométricas.
- Errores gráficos: dibujo de una figura geométrica que no corresponde con el enunciado del problema propuesto, mal uso de datos de una figura.
- Errores de razonamiento: añaden hipótesis que no están dadas en la solución de un problema; demuestran o resuelven un problema sin utilizar algún dato; usan un axioma, teorema o corolario sin que se tengan las hipótesis requeridas para su aplicación; interpretan o usan inadecuadamente una definición; usan el recíproco de una implicación como verdadera o una implicación que no es verdadera.
- Errores de transferencia: aplican defectuosamente conocimientos propios de otras asignaturas en un problema planteado.
- Errores de técnica: enuncian proposiciones ciertas sin justificaciones o mal justificadas o utilizan un algoritmo adecuado, pero no llegan a la solución.
- Errores de tecnología: seleccionan un procedimiento, algoritmo o ecuación en forma incorrecta o violentan las reglas de la lógica.
- Errores azarosos: manipulan inadecuadamente los signos algebraicos o ejecutan mal operaciones aritméticas.

Radillo Enríquez (2011) centra su investigación en los errores relacionados con la traducción entre los códigos lingüísticos de la geometría euclídea que presentan los estudiantes del Centro Universitario de Ciencias Exactas e Ingeniería de la Universidad de Guadalajara en México. Sostiene que “[…] el planteamiento de una demostración requiere un *proceso de traducción* de la representación verbal a sus correspondientes representaciones gráfica y simbólica” (p. 431). Plantea tres tipos de errores en la solución de problemas de la geometría euclídea, no excluyentes entre sí y pudiendo cada tipo de error tener consecuencias en los otros. El primer tipo incumbe al factor lingüístico y los otros dos a las particularidades de la asignatura. Los tipos de errores son:

- Errores de representación, ya sea verbal, gráfica y/o simbólica, así como los procesos de traducción entre éstas;

- Errores deductivos o de razonamiento, en cuanto a la lógica seguida para solucionar un problema dado;
- Errores axiomáticos o de aplicación de teoría, relativos a la disponibilidad funcional de los conocimientos previos necesarios para resolver el problema.

Selden y Selden (2003) realizan un estudio con alumnos de álgebra abstracta, en universidades de los Estados Unidos, Turquía y Nigeria. Proponen una clasificación de los errores que cometen los estudiantes al realizar una prueba, en dos grandes tipos: los que se basan en conceptos erróneos subyacentes y otros que son de naturaleza técnica que se observan repetidamente.

Respecto a los primeros consideran los siguientes subtipos:

- Comenzar la prueba por la tesis: consideran un error de este tipo cuando los estudiantes empiezan la demostración con la conclusión y llegan a una verdad obvia sosteniendo que la prueba está completa.
- Los nombres confieren existencia: este error ocurre cuando un estudiante intenta resolver una ecuación, sin cuestionar si existe una solución.
- Las diferencias aparentes, son reales: la idea errónea subyacente es que hay una correspondencia uno a uno entre los nombres y los objetos matemáticos.
- Usar el inverso de un teorema: la idea errónea consiste en equiparar una implicación y su inversa.
- Las leyes de los números reales son universales: aplican las reglas de los números reales sin discriminar el contexto.
- Conservación de las relaciones: la idea subyacente es que hacer lo mismo a ambos lados de cualquier ecuación preserva la ecuación.
- Interpretación indistinta entre elementos y conjuntos: los estudiantes entienden las proposiciones que involucran elementos más fácilmente que las proposiciones equivalentes sobre conjuntos.
- Respecto a los errores de naturaleza técnica consideran los siguientes subtipos:
- Símbolos sobre extendidos: este error ocurre cuando se usa un símbolo para dos conceptos distintos.
- Debilitar un teorema: este error ocurre cuando lo que se usa es más fuerte que la hipótesis o cuando lo que se prueba es más débil que la conclusión.
- Inflexibilidad de notación: este error surge de la incapacidad de adaptar la notación de un contexto a otro.
- Uso indebido de teoremas: un error de este tipo surge de la incomprensión o el descuido parcial de la hipótesis o la interpretación errónea de la conclusión.
- Circularidad: este error consiste en utilizar en la demostración de un teorema una proposición equivalente a la que se está probando.
- Prueba localmente ininteligible: en este error, no se pueden entender ni la prueba en su conjunto ni la mayoría de las oraciones individuales.
- Sustituir sin justificar: este error consiste en obtener una proposición de otra utilizando una sustitución injustificable.
- Ignorar cuantificadores: este error resulta de no notar restricciones en las variables, se piensa que una variable se cuantifica universalmente cuando no es así.

- Agujeros: este tipo de error consiste en afirmar que una proposición se deriva inmediatamente de resultados previamente establecidos cuando en realidad se requiere un argumento considerable.
- Uso de información fuera de contexto: se usa un argumento de un contexto incorrectamente en otro porque aparecen símbolos idénticos en ambos escenarios.

Ramírez Uclés (2012) en el marco del programa de Estímulo del Talento Matemático en Andalucía realiza un estudio que se propone diseñar buenas prácticas docentes para la mejora de la visualización, con estudiantes entre 14 y 16 años. Para delimitar los errores y dificultades a considerar en el diseño de intervención de la investigación realiza una contrastación entre los errores detectados en una prueba piloto y la revisión bibliográfica realizada. Presenta así los siguientes tipos de errores y dificultades.

- Error al relacionar plano y espacio: falsa analogía plano-espacio. Confunden propiedades en el plano con las correspondientes en el espacio.
- Error al generalizar: no discutir todos los casos posibles y razonar limitándose a ejemplos concretos.
- Errores en los contenidos de enriquecimiento: Confunden los elementos matemáticos de razonamiento y los elementos de contenido matemático.
- Dificultades para la comunicación de las argumentaciones visuales. complicaciones para comprender el razonamiento espacial.
- Dificultad en la terminología. desconocimiento de la terminología adecuada y uso del lenguaje no-convencional.
- Dificultad en la necesidad de utilizar movimientos o elementos del entorno.
- Dificultad para verbalizar los procesos mentales.
- Dificultad para describir las representaciones visuales. muestran carencias de habilidades de reconocimiento de posiciones en el espacio y de relaciones espaciales.

Las investigaciones referenciadas anteriormente se proponen en contextos diferentes, sea por el nivel académico de los estudiantes o por los conceptos matemáticos estudiados, al de este trabajo. No obstante, estos aportes se consideran fundamentales para realizar la categorización que se presenta en este artículo.

2. MARCO METODOLÓGICO

Como se mencionó, en este trabajo se pretenden investigar los errores de los alumnos al resolver los problemas planteados en la cátedra de GEE del Profesorado en Matemática de la Universidad Nacional del Litoral, Argentina. Respecto a la prueba, Weber (2013) la presenta como un problema a resolver por los estudiantes universitarios, sostiene que éstos necesitan estrategias y heurísticas que les ayuden a decidir cómo encararlas. Esta noción sobre la prueba sintoniza con lo que Pólya (1970) considera problemas de demostrar y es el modo de trabajar con demostraciones en la propuesta de la cátedra.

Se procura detectar, analizar y clasificar los errores de los alumnos, futuros docentes, en el trabajo con demostraciones geométricas con el fin de contar con aportes para optimizar el abordaje de la geometría 3D (particularmente las relaciones de paralelismo y perpendicularidad) y de los procesos de demostración inherentes al método axiomático deductivo.

Esta es una investigación cualitativa pues se ocupa de "la comprensión de los fenómenos sociales desde la perspectiva de los participantes. Esto ocurre a través de la participación, hasta cierto punto, del investigador en la vida de los sujetos durante la investigación" (McMillan y Schumacher, 2005: 19). Una característica de este tipo de investigación es que los datos estudiados están expresados en palabras, frases y afirmaciones antes que datos numéricos. Un empleo cuidadoso, de estos datos, proporcionará resultados replicables e información válida de los fenómenos estudiados (Mc Knight, Magid, Murphy y Mc Knigt, 2000).

El alcance del estudio es exploratorio. Según Hernández Sampieri, Fernández Collado y Baptista Lucio (2003) "Los estudios exploratorios se efectúan normalmente, cuando el objetivo es examinar un tema o problema de investigación poco estudiado, del cual se tienen muchas dudas o no se ha abordado antes" (p. 115). Si bien existen estudios sobre errores y dificultades, la mayoría no se refieren a errores geométricos. Aquellas investigaciones, a las cuales se tuvo acceso, que abordan el tema de errores geométricos no refieren específicamente a errores que involucran las relaciones de paralelismo y perpendicularidad en 3D ni en contextos similares al de este trabajo con estudiantes de profesorado en Matemática. Según estos autores, el valor de este tipo de estudios consiste en que permiten "establecer prioridades para investigaciones futuras o sugerir afirmaciones y postulados" (p. 116).

En la primera etapa de esta investigación se procesan parciales disponibles, archivados en el departamento de matemática, de una cohorte de estudiantes de la cátedra GEE. La asignatura GEE se ofrece en el primer cuatrimestre de tercer año, la carrera se estructura en cinco años. Tiene como correlativas a Geometría Euclídea Plana y a Taller Informático. Además de estas dos asignaturas, los alumnos tienen el cursado de las materias Matemática Básica (donde, además de otros contenidos, se desarrollan conceptos de lógica), Taller de Métodos de Demostración en Matemática, Cálculo I y II; Álgebra Lineal I y II, entre otras. Así, los alumnos tienen además del bagaje de sus estudios de la escuela obligatoria, experiencias en este nivel en temas de geometría Euclídea y en métodos de demostraciones deductivas al momento de cursar esta asignatura.

A partir de un estudio exploratorio se esboza una tipología de errores considerando los aportes de diversos estudios, entre otros los de Franchi y Hernández de Rincón (2004), Selden y Selden (2003) y Ramírez Uclés (2012) y registros sistemáticos obtenidos por experiencia de las investigadoras. El énfasis está puesto en detectar los errores lo más objetivamente posible poniendo el acento no en las causas del error sino en lo que hace el estudiante. No se busca en esta instancia evitar solapamientos ni establecer el menor número de categorías. Se propone un formato de presentación que haga accesible la interpretación de las demostraciones y de los errores.

El parcial de la asignatura GEE al que se accede consta de los siguientes tres problemas:

1. a) Determinar una condición necesaria y suficiente para que una recta sea paralela a un plano. Demostrar.
   b) Demostrar que dos rectas son perpendiculares si por una de ellas se puede trazar un plano perpendicular a la otra.
2. Dada la proposición: "Por un punto A del espacio puede trazarse uno y sólo un plano paralelo a dos rectas a y b cualesquiera.
   a) Determinar si es verdadera o falsa.
   b) Si es verdadera demostrarla y si es falsa determinar las condiciones para que sea verdadera y demostrarla.
3. a) Obtener y demostrar que transformación se obtiene al componer una simetría especular por una traslación de vector perpendicular al plano de simetría.
   b) Determinar los elementos de la transformación resultante.

Consignas del parcial

Se decide considerar para el análisis los problemas 1.b) y 2 los cuales incluyen los conceptos de paralelismo y perpendicularidad en 3D. Sólo se escogen las pruebas que tienen por los menos uno de estos dos problemas resueltos.

En una primera instancia se leen varias veces las demostraciones y luego se desglosan en fragmentos y se organizan las producciones en tablas.

Tablas utilizadas para organizar las resoluciones de los estudiantes

Frag.	Descripción de la resolución	Comentarios
1		

La columna "Frag." contiene los números de fragmentos de la resolución del problema descripto en la fila correspondiente. Estos fragmentos, que respetan el orden de las argumentaciones, son tomados por el investigador para facilitar la descripción de "tramos" de las producciones de los estudiantes. La columna "Descripción de la resolución" contiene un resumen de la resolución del alumno, o en algunos casos transcripciones de párrafos significativos (los que se encuentran entre comillas) y el dibujo realizado, si existe. La columna "Comentarios" contiene acotaciones o aclaraciones referentes a los pasos correspondientes por parte de las investigadoras.

Se analiza la demostración por más que se detecte un error que la invalida, como por ejemplo que no se pruebe lo que se pide o que esté incompleta o que se considere otra propiedad que no es la dada, entre otras. En todos los casos, se analiza la propiedad que el estudiante propone.

El parcial de la cohorte seleccionada lo realizan 21 estudiantes de los cuales 14 cumplen la condición de haber realizado al menos uno de los problemas a analizar. Se enumeran correlativamente del 01 al 14 dichos artefactos escritos.

3. DISCUSIONES Y RESULTADOS

En este apartado se expone la categorización producida a partir del análisis de los parciales analizados y de los referentes teóricos.

3.1. Primera categorización de errores

En esta etapa se estudian artefactos escritos, parciales de estudiantes, y se esboza una primera categorización. Se establecen dos grandes tipos de errores: los generales, que pueden ser de cualquier área de la matemática, y los particulares, referidos específicamente a la geometría del espacio. En esta instancia no se pretende establecer el menor número de categorías por lo cual pueden presentarse solapamientos entre ellas.

Respecto a los errores generales se proponen los siguientes tipos:

G1- *Demuestra otra proposición distinta a la pedida.*

G2- *Escribe mal la tesis, la hipótesis o ambas.*

G3- *Hace un dibujo que no representa la situación planteada.*

G4- *Para la demostración emplea elementos que están en la representación.*

G5- *Usa en la demostración una proposición posterior a la que prueba.*

G6- *Demuestra algo que tiene por construcción o hipótesis.*

G7- *Contradice la hipótesis o un paso anterior de la demostración. Deduce incorrectamente información, no justifica todos los pasos o inventa datos.*

G8- *Emplea incorrectamente equivalencias lógicas entre proposiciones: recíproco o inversa.*

G9- *Considera mal el antecedente de una proposición (agrega, quita o considera el consecuente como el antecedente). No verifica las condiciones de aplicabilidad de teoremas, definiciones, etc.*

G10- *Usa el lenguaje o escritura geométrica de manera imprecisa.*

G11- *Realiza mal uso de axiomas: los demuestra, los modifica, los contradice. Tratamiento incorrecto de axiomas.*

Respecto a los errores particulares de la Geometría Euclídea Espacial se proponen los siguientes:

P1- *Si una recta tiene un punto en un plano, está incluida en dicho plano.*
Se ignora el axioma que exige que dos puntos de una recta estén en el plano para asegurar que la recta lo está.

P2- *Dos rectas alabeadas están incluidas en un plano o dos rectas determinan un plano.*
En el desarrollo de la demostración se llega a que dos rectas alabeadas están incluidas en un plano o que dos rectas siempre determinan un plano

P3- *Si una recta es perpendicular a una recta de un plano, es perpendicular a ese plano.*
Se considera erróneamente la perpendicularidad entre una recta y un plano a partir de la perpendicularidad con sólo una recta de ese plano.

P4- *Dos rectas alabeadas son siempre perpendiculares.*

Se encuentra en las demostraciones que los estudiantes parten de dos rectas con la condición de ser alabeadas y se concluye que son perpendiculares.

P5- *Dos puntos determinan un plano o el plano determinado por dos puntos es único.*
Tres puntos no alineados o dos rectas secantes o dos rectas paralelas determinan un plano. Se alega erróneamente que un plano queda determinado por sólo una recta.

P6- *Dos rectas cruzadas se cortan en sus prolongaciones.*
Se concluye que las rectas cruzadas se cortan en un punto. Se visualiza en la prolongación de la representación gráfica de las rectas cruzadas en dos dimensiones que éstas se intersecan.

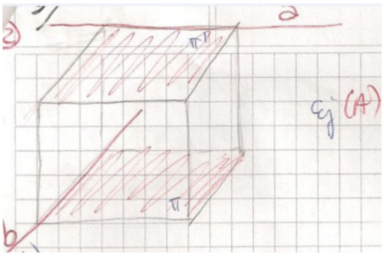
P7- *Empleo incorrecto del concepto de perpendicularidad.*
Se considera que dos rectas perpendiculares son secantes o que existe una única perpendicular a otra recta o que dos rectas perpendiculares a una tercera son paralelas entre sí. Estas afirmaciones son verdaderas en 2D pero no en 3D.

Se presentan ejemplos de los errores detectados a partir de los problemas analizados en las producciones correspondientes a dos estudiantes.

La siguiente tabla corresponde al alumno 02 al resolver el problema: "Dada la proposición: Por un punto A del espacio puede trazarse uno y sólo un plano paralelo a dos rectas a y b cualesquiera. a) Determinar si es verdadera o falsa. b) Si es verdadera demostrarla y si es falsa determinar las condiciones para que sea verdadera y demostrarla".

Tabla del ejercicio 2 correspondiente al alumno 02

Frag.	Descripción de la resolución	Comentarios
1	"Si **a** y **b** son //→**a** y **b** determinan un plano π → por un punto del espacio exterior a dicho plano π pueden trazarse un solo plano // a ambas, ya que el lugar geométrico de todas las // a un plano por un punto exterior P es otro plano // → podemos trazar por A una recta // a, por ejemplo la recta **a** → esa recta estará contenida en un plano // a π, en este caso es verdadera → solo puede trazarse un solo plano"	*Agrega la condición que el punto sea exterior al plano que las rectas determinan. G1.* *Parece considerar que existe sólo un plano que pasa por una recta ya que el plano que pasa por la paralela a **a** por A coincide con el del lugar geométrico de las paralelas al plano π por A. P5. No justifica que el plano paralelo a π por A sea paralelo a las rectas dadas. G7.*
2	"Si **a** y **b** son secantes → **a** y **b** también determinan un plano π → como en el caso anterior, por un punto del espacio exterior a dicho plano π se puede trazar solo un plano, el que pasa por una recta // a una recta del plano por el punto A → también en este caso es verdadero"	*La misma consideración que en el caso de rectas paralelas.*

Frag.	Descripción de la resolución	Comentarios
3	"Si **a** y **b** son cruzadas → ambas están contenidas en planos // (ver Ej. (A))→ si el punto A no pertenece ni a las rectas ni a los planos // → por ese punto A podemos trazar solo un plano paralelo a ambas, dicho plano será 1 plano paralelo a los 2 planos // entre sí, en que están contenidas las rectas **a** y **b**" 	*Justifica a partir del dibujo. G4.*

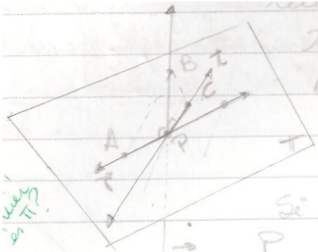
En el fragmento 1 se considera que se presenta un error tipo **G1** ya que al agregar la condición de que el punto sea exterior al plano que las rectas determinan, cuestión que resalta el estudiante con el doble subrayado, se convierte en otra propiedad distinta a la dada, en la que el punto es exterior a dichas rectas. Además, se presenta también un error tipo **P5**, el estudiante parece considerar que existe sólo un plano que pasa por una recta puesto que el plano que pasa por la paralela a **a** por A coincide con el del lugar geométrico de las paralelas al plano π por A. Además, aparece un ejemplo de error tipo **G7** ya que no justifica que el plano paralelo a π por A sea paralelo a las rectas dadas.

En el fragmento 3, aparece un error tipo **G4** dado que el estudiante justifica sólo a partir del dibujo realizado, considera como único plano el que contiene a la recta que incluye a la cara del cubo representado.

La siguiente tabla corresponde al alumno 05 al resolver el problema: "Demostrar que dos rectas son perpendiculares si por una de ellas se puede trazar un plano perpendicular a la otra".

Tabla del ejercicio 1 correspondiente al alumno 05

Frag.	Descripción de la resolución	Comentarios
1	"Hipótesis) **r** y **s** perpendiculares Tesis) Demostrar que por **r** se puede trazar un plano π perpendicular a **s**"	*Considera el recíproco de la propiedad a demostrar. G8*

Frag.	Descripción de la resolución	Comentarios
2	Considera que si **r** y **s** son perpendiculares, pueden ser secantes o cruzadas. 	—
3	"Si las rectas se cortan en un punto P y siendo A un punto perteneciente a π y **r** y B otro punto perteneciente a **s**; estos tres puntos APB me determinan un triángulo recto por ser $\hat{P}$ recto	*El plano π está en la tesis como el que se tiene que determinar. ¿Quién es π? G7 Debería decir triángulo rectángulo. G10*
4	"Luego tomo otra recta secante a **r**, **t** tal que se intersectan en P y que contiene al punto C, a igual distancia de P que A y a igual distancia de B que A"	*No determina la existencia de C. G7*
5	Concluye que los triángulos BPC y APB son congruentes por tener respectivamente los tres lados iguales.	*Esta afirmación no es correcta en todos los casos. G7*
6	"Por ser el triángulo BPC congruente con APB y $A\hat{P}B = C\hat{P}B$ rectos, quiere decir que A y C estarán alineados "	*A y C están alineados, por axioma, no por este argumento. G11- G7*
7	"de donde A y C están en el mismo plano determinado por las rectas secantes **r** y **t** y éste es único"	*A y C están en el mismo plano que el que contiene a las rectas **r** y **t**. Que este plano sea único es falso, pues si A, P y C están alineados, existen infinitos planos G6 y G7*
8	"Luego por ser **s** perpendicular a **r** y como **r** y **t** determinan al plano π, el cual será perpendicular a **s** por ser **r** y **t** perpendiculares a **s**. **t** será perpendicular a **s** por construcción"	*El plano π queda determinado aquí, pero con los datos que tomó no está bien. Hay infinitos planos que cumplen esta condición. **r**, **s** y **t** podrían ser coplanarias y de esta forma no es perpendicular a **s**. G7. Falta justificar que $\pi \perp$ **s**. G7.*
9	"Si las rectas **r** y **s** fueran cruzadas por propiedad sus prolongaciones se cortarían y estaríamos en el caso anterior"	*¿Cuál es la propiedad que menciona? Parece que esto lo determina del dibujo de rectas cruzadas. P6*

En el fragmento 1 de esta resolución se considera que se presenta un error tipo **G8** ya que considera el recíproco de la propiedad a demostrar lo cual se evidencia en cómo escribe la hipótesis y tesis y un error **G2** ya que al explicitar la tesis emplea la palabra *demostrar*.

En el fragmento 3 aparece un error que se cataloga como **G7** dado que el plano π está en la tesis como el que se tiene que determinar. También se presenta en este fragmento un error tipo **G10** pues debería decir triángulo rectángulo en lugar de triángulo recto.

Por otro lado, en el fragmento 4, no determina la existencia del punto C. C podría ser cualquiera de los infinitos puntos que están en la intersección de la superficie esférica de centro P y radio PA y la superficie esférica de centro B y radio BA. Considerando a C en el plano que **r** y **s** determinan, **t** coincide con **r**, pues A, P y C están alineados con lo cual se considera que es un ejemplo de un error tipo **G7**.

La afirmación del fragmento 5 es correcta en el caso que C no pertenezca al plano que **r** y **s** determinan, por lo cual se considera que manifiesta un error tipo **G7**.

En el fragmento 6, afirma que los puntos A y C están alineados debido a la congruencia de dos triángulos que tienen vértices en esos puntos, desatendiendo que por axioma dos puntos determinan una única recta. Se cataloga este error como **G11**.

En el fragmento 7, A y C están en el mismo plano que el que contiene a las rectas **r** y **t** porque A está en **r** y C está en **t**, no porque estén alineados. No es correcto afirmar que este plano es único, pues si A, P y C están alineados, existen infinitos planos que contienen a la recta AP= **r** y PC= **t** pues son coincidentes. Se considera que es un error de tipo **G6**.

En el fragmento 8 deduce incorrectamente que $\pi \perp$ **s**, lo cual se cataloga como error tipo **G7**.

En el fragmento 9 afirma que las rectas cruzadas se cortan en las prolongaciones, lo cual se considera error tipo **P6**.

Este trabajo que se muestra en estos dos ejemplos se realiza en todos los artefactos de la cohorte mencionada y la tipología propuesta surge de este análisis exploratorio.

3.2. Comparación de conceptos en 2D y 3D

De acuerdo a los errores hallados en las demostraciones, particularmente referidos a la geometría, y observando que en varios casos se consideran cuestiones que en la geometría del plano son propiedades, es que se realiza la siguiente comparación entre la geometría Euclídea plana y la espacial, referida específicamente a los conceptos de paralelismo y perpendicularidad con el fin de comprender con mayor claridad las extrapolaciones realizadas por los estudiantes.

En la geometría euclídea plana los conceptos de paralelismo y de perpendicularidad se definen entre rectas, en cambio en la espacial se definen entre rectas, entre planos y rectas y entre planos, es decir, se amplía la variedad de posibles relaciones. En el plano las rectas perpendiculares son siempre secantes en cambio en el espacio pueden ser secantes o alabeadas. Por otra parte en el plano por un punto pasa una única perpendicular a una recta pero en el espacio por un punto pasan infinitas rectas perpendiculares a una dada. En el plano dos rectas perpendiculares a otra son paralelas o coincidentes y en el espacio tridimensional además de paralelas o coincidentes pueden ser también secantes o alabeadas. En 2D si una recta corta a otra corta a todas sus paralelas, esto no es así en 3D. Lo que se mantiene en ambas es que por un punto exterior a una recta pasa una única paralela a ella, cuestión distintiva de la geometría euclídea.

Son particularidades de la geometría 3D las siguientes proposiciones en las que se consideran elementos que exceden las dos dimensiones: rectas incluidas en planos perpendiculares son paralelas, oblicuas o perpendiculares; por un punto exterior a un plano pasan infinitas rectas paralelas a él; si un plano corta a otro, corta a todos sus paralelos; si un plano corta a una recta, corta a todas sus paralelas y, existe una única recta perpendicular a un plano por un punto.

Estas particularidades aportan especialmente a la identificación de los errores concernientes a la extrapolación de propiedades de estos conceptos de 2D a 3D.

4. CONCLUSIONES Y PERSPECTIVAS

A partir del análisis de las categorías presentadas, de las particularidades referidas a los conceptos de paralelismo y perpendicularidad en 3D y de los aportes de los referentes teóricos se realiza un ajuste de la tipología con la intención de reducir el número de tipo de errores, examinar solapamientos y lograr mayor precisión en la descripción de los errores. Esta categorización cuenta con siete tipos de errores: tres que refieren a la imprecisión en el empleo del lenguaje matemático y de las definiciones, axiomas y propiedades geométricas. Dos que refieren a la acción de demostrar; uno que apunta al empleo de representaciones gráficas y otro referido a la extrapolación de propiedades.

La tipología producida queda de la siguiente forma:

Tipo I (TI) Imprecisión en la redacción de la demostración o notación matemática o geométrica en particular: se tipifican así a los errores cuando se redactan incorrectamente los pasos de una demostración o se utilizan símbolos o relaciones de la teoría de conjunto en forma incorrecta o se utiliza simbología propia. Se considera también el uso incorrecto de los cuantificadores lógicos.

Ampliación: Se utilizan expresiones del lenguaje común que no son correctas en una demostración. Los símbolos de la teoría de conjunto se utilizan sin respetar sus especificaciones y con respecto a los cuantificadores, suele suceder que no se explicitan cuando es necesario hacerlo. Esta categoría incluye a la **G10** de la clasificación anterior además de errores azarosos, de técnica (Franchi y Hernández de Rincón, 2004) y referidos a prueba localmente ininteligible o de ignorar cuantificadores (Selden y Selden, 2003).

Tipo II (TII) Determinación incorrecta de la hipótesis o tesis de una proposición: se explicitan incorrectamente la tesis o la hipótesis de una proposición.

Ampliación: Aunque no es requisito de la consigna del instrumento utilizado discriminar explícitamente la hipótesis y tesis de una propiedad, en algunos casos los estudiantes lo hacen y en ese caso se determina si es correcta o no. Esta categoría incluye a las **G1** y **G2** de la clasificación anterior y también el uso indebido de teoremas (Selden y Selden, 2003).

Tipo III (TIII) Tratamiento incorrecto de teoremas o propiedades: se tipifican así a los errores lógicos, casos en que se utiliza un teorema ya probado, pero se debilitan las condiciones del mismo agregando hipótesis que no se tienen. También cuando se considera el recíproco o la inversa de la propiedad que se debería utilizar o se establece un *círculo vicioso*. Se afirma que una proposición es verdadera y falsa sin trabajar con reducción al absurdo.

Ampliación: Esta categoría incluye a **G1**, **G5**, **G8** y **G9** y a **P3** y **P4** de la clasificación anterior. También a errores de razonamiento (Franchi y Hernández de Rincón, 2004), de circularidad y debilitamiento de un teorema o uso del inverso (Selden y Selden, 2003).

Tipo IV (TIV) Tratamiento incorrecto de axiomas o definiciones: este tipo de errores se evidencia cuando se intenta demostrar un axioma, se lo modifica o se lo contradice o no se respeta una definición acordada.

Ampliación: las definiciones acordadas que pueden diferir, según el texto utilizado, y que hacen a este trabajo se detallan en el cuadro que se presenta a continuación. Por ejemplo, Garguichevich (2007), denomina ortogonales a las rectas que aquí se nombran como alabeadas perpendiculares y las define ortogonales si por un punto de una de ellas se puede trazar una recta paralela a la otra de modo que estas resulten perpendiculares. Esta autora considera la relación de paralelismo cuando los elementos (rectas o planos) no tienen puntos en común o todos los puntos de uno están en el otro.

Esta categoría incluye a **G9** y **G11** y también a **P1**, **P2** y **P5** de la clasificación anterior, además a errores de razonamiento (Franchi y Hernández de Rincón, 2004).

Definición de rectas alabeadas perpendiculares: Dos rectas alabeadas son perpendiculares si por una de ellas se puede trazar un plano perpendicular a la otra.
Definición de rectas paralelas: Dos rectas son paralelas si no tienen puntos en común.
Definición de planos paralelos: Dos planos son paralelos si no tienen puntos en común.

Definiciones acordadas

Tipo V (TV) Demostraciones incompletas: se tipifica así a un error si no se justifica un paso de la demostración (agujeros); en el caso de tener que demostrar la existencia y unicidad, sólo se considera la existencia, por ejemplo; se consideran casos accidentales o extremos sin considerar la situación general en las demostraciones; se agregan condiciones a los elementos que no se tienen por hipótesis o, se justifica que un objeto no existe porque no se puede hallar por el método por el que se está tratando de construir. “Si no se puede encontrar un objeto que se está buscando, mediante un método determinado, esto no significa que el objeto no existe" (Fetisov, 1973, p. 39)

Ampliación: En el caso de TIII se agregan condiciones a un teorema que se tiene dentro de los trabajados en la cátedra y aquí se agregan condiciones a los elementos (puntos, rectas, planos, etc.) que no están dados en la proposición. Esta categoría incluye a **G6** y **G7** de la clasificación anterior, además a agujeros o sustitución sin justificar (Selden y Selden, 2003), a errores de generalizar y de razonamiento (Ramírez Uclés, 2012), y a errores deductivos o de razonamiento (Radillo Enríquez, 2011)

Tipo VI (TVI) Uso defectuoso de representaciones gráficas en las demostraciones: se considera a un error de este tipo cuando se extraen relaciones o emplean elementos de una representación gráfica en la demostración sin justificación o se realiza un dibujo que no representa la situación planteada.

Ampliación: Aunque no se pide explícitamente una representación en la consigna, algunos alumnos la realizan y es en este caso en que se valora su corrección. Esta categoría incluye a **G3** y **G4** y también a **P6** de la clasificación anterior, a errores de representación (Radillo Enríquez, 2011), a errores gráficos y a errores propios del lenguaje geométrico (Franchi y Hernández de Rincón, 2004).

Tipo VII (TVII) Extrapolación de relaciones a distintos conceptos o de propiedades a distintos contextos: se consideran errores de este tipo cuando se sacan de contexto propiedades válidas en el plano pero que no lo son cuando los elementos que intervienen no están en un plano. También cuando se mantienen las relaciones (paralelismo, perpendicularidad, incidencia, etc.) que establece un teorema pero se modifican los elementos (punto, recta, plano) entre los que se establecen esas relaciones.

Ampliación: Extrapolar significa, según la enciclopedia Espasa, "aplicar las conclusiones obtenidas en un determinado campo del saber a otro dominio distinto, para deducir consecuencias". Por ejemplo la proposición (falsa para rectas que no son coplanares): "Dos rectas perpendiculares a otra son paralelas entre sí", puede entenderse en el plano o también extrapolarse del teorema "dos planos perpendiculares a otro son paralelos entre sí", sustituyendo planos por rectas. También se puede considerar la propiedad "Si una recta corta a otra, corta a todas sus paralelas" que puede pensarse en el plano o de la propiedad de planos "si un plano corta a una recta, corta a todas sus paralelas". Esta categoría incluye a **P7** de la clasificación anterior, a errores al relacionar plano y espacio (Ramírez Uclés, 2012), a errores axiomáticos o de aplicación de la teoría (Radillo Enríquez, 2011) o a errores de transferencia (Franchi y Hernández de Rincón, 2004).

Esta nueva tipología agrupa las categorías de la anterior, de modo de hacer más eficaz la clasificación y tratar que no haya solapamientos en las mismas. Se adjunta la siguiente tabla la que contribuye a visualizar la relación de ambas tipologías.

	GENERALES											PARTICULARES						
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	1	2	3	4	5	6	7
TI										X								
TII	X	X																
TIII	X				X			X	X					X	X			
TIV									X		X	X	X			X		
TV						X	X											
TVI			X	X													X	
TVII																		X

Esta nueva categorización se utilizará para tipificar los errores en los artefactos escritos con los que se cuenta.

5. REFERENCIAS

Enciclopedia Espasa en línea: http://espasa.planetasaber.com/search/results.asp?txt=extra/polar

Franchi, L. y Hernández de Rincón, A. (2004). Tipología de errores en el área de la geometría plana. *Educere*, *8* (24), 63- 71.

Franchi, L. y Hernández de Rincón, A. (2004). Tipología de errores en el área de la geometría plana. Parte II. *Educere*, *8* (25), 196- 204.

Hernández Sampieri, R., Fernández Collado, C. y Baptista Lucio, P. (2003). *Metodología de la investigación*. México: McGraw-Hill.

Mc Knight, C., Magid, T., Murphy, E. y Mc Knigt, M. (2000). *Mathematics Education Research: A Guide for the Research Mathematician*. Rhode Island: American Mathematical Society.

McMillan, J. y Schumacher, S. (2005). *Investigación educativa. Una introducción conceptual*. Madrid: Pearson Educación.

Ministerio de Educación. (2010). Proyecto de mejora para la formación inicial de profesores para el nivel secundario. Áreas: Biología, Física, Matemática y Química. Recuperado 12 de noviembre de 2018 de https://cedoc.infd.edu.ar/upload/Matematica.pdf

Ministerio de Educación, Cultura, Ciencia y Tecnología de la Nación. (2018) *Marco nacional para la mejora del aprendizaje en Matemática.* Recuperado el 3 de marzo de 2019 de http://www.bnm.me.gov.ar/giga1/documentos/EL006588.pdf

Pólya, G. (1970). *Cómo plantear y resolver problemas*. México D.F.: Trillas.

Radillo Enríquez, M. (2011). Obstáculos y errores en el aprendizaje de la geometría euclideana, relacionados con la traducción entre códigos del lenguaje matemático, en el nivel licenciatura. *ALME 24*, 429- 437. Recuperado el 15 de noviembre de 2018.

Ramírez Uclés, R. (2012). *Habilidades de visualización de los alumnos con talento matemático* (tesis doctoral). Universidad de Granada, Granada, España.

Rico, L. (1995). Errores en el aprendizaje de las matemáticas. En J. Kilpatrick, L. Rico y P. Gómez (Eds.), *Educación Matemática. Errores y dificultades de los estudiantes. Resolución de problemas. Evaluación. Historia*, 69-108. México D.F.: Bogotá: "una empresa docente" y Grupo Editorial Iberoamérica.

Selden, A. y Selden, J. (2003). Errors and misconceptions in college level theorem proving. Tennessee Technological University Department of Mathematics Tech Report No. 2003-3. Recuperado el 12 de agosto de 2018 de http://math.tntech.edu/techreports/TR_2003_3.pdf

Weber, K. (2013). Students' difficulties with proof. MAA Research sampler 8 recuperado el 12 de febrero de 2016 de https://www.maa.org/programs/faculty-and-departments/curriculum-department-guidelines-recommendations/teaching-and-learning/research-sampler-8-students-difficulties-with-proof

Épsilon - *Revista de Educación Matemática* *2021, nº 108, 45-54*

Veracruz educando a distancia. Utilizando Microsoft Teams para producir materiales didácticos durante la pandemia COVID-19

Ernesto Efrén Del Moral Ventura
Instituto Politécnico Nacional/CICATA-Legaria

Resumen: *En el presente trabajo se relata la experiencia de producir materiales didácticos de matemáticas del nivel básico de forma colaborativa entre docentes de secundaria, durante la etapa de confinamiento COVID-19 enfatizando la producción de escaletas de radio, para su posterior grabación y difusión. Tales escaletas se crearon a través de plataformas virtuales, utilizando principalmente MICROSOFT TEAMS, y como auxiliares ZOOM y Whatsapp. Las escaletas de radio se crearon con el fin de brindar recursos a profesores y estudiantes de escuelas secundarias de Veracruz, con difícil acceso a las tecnologías de la información, dando continuidad al servicio educativo.*
Palabras clave: *COVID-19, Educación a Distancia, Matemáticas, Materiales didácticos, Colaboración entre maestros, Microsoft Teams.*

Veracruz educating at a distance. Using Microsoft Teams to produce didactic materials during the COVID-19 pandemic

Abstract: *This paper presents the experience of creating basic level math didactic materials by secondary school teachers during the COVID-19 confinement. For this project, we wrote, recorded the radio running orders. The radio running orders were created through virtual platforms, mainly MICROSOFT TEAMS and as auxiliary ZOOM and WhatsApp. These were created to provide resources to teachers and students at secondary school in Veracruz, with difficult access to information technologies and allowing to continue with educational service.*
Keywords: *COVID-19, distance education, Mathematics, instructional materials, teacher collaboration, Microsoft Teams.*

1. INTRODUCCIÓN

En el mes de marzo de 2020 la Organización Mundial de la Salud (OMS) determinó que el COVID-19 pasa de ser una epidemia a una pandemia. Como en muchas naciones, México decidió adoptar diversas acciones para contener la propagación del COVID-19, entre ellas la suspensión de clases en el Sistema Educativo Nacional (Secretaría de Gobernación, 2020), incluyendo a las escuelas del estado de Veracruz. Debido a lo anterior, el Gobierno del Estado de Veracruz, a través de la Secretaría de Educación, decidió implementar una estrategia a la que llamó: "Veracruz Educando a Distancia" (Secretaría de Educación de Veracruz [SEV], n.d.), con el fin de coadyuvar a la continuidad del servicio educativo durante el periodo de confinamiento.

En la estrategia "Veracruz Educando a Distancia", se crearon y se pusieron a disposición de estudiantes y profesores diversos recursos físicos y tecnológicos que permitieron el acceso a la educación, como lo son: plataformas virtuales, clases televisivas, cuadernillos impresos y digitales y clases por radio (SEV, n.d.).

1.1. El proyecto "Matemáticas para todos" dentro de la estrategia Veracruz Educando a Distancia

El proyecto "Matemáticas para todos" es una iniciativa de la Secretaría de Educación de Veracruz, que surgió en 2019, con el fin de mejorar los niveles de aprendizaje de las matemáticas en la educación básica de dicho estado implementando capacitaciones presenciales y materiales para docentes, sobre conocimiento disciplinar y didáctico de las matemáticas (Secretaría de Educación de Veracruz, 2019).

Con la suspensión de clases presenciales debido al COVID-19, el proyecto "Matemáticas para todos" cambió su modo de operación y se integró a la estrategia "Veracruz Educando a Distancia", donde produjo recursos didácticos en formato audiovisual, digitales e impresos. Dentro de los recursos generados por "Matemáticas para todos" se encuentran clases televisivas, cuadernillos para alumnos y clases por radio abordando contenidos de la asignatura de matemáticas la asignatura de matemáticas, del nivel primaria o secundaria. Dichos materiales han sido construidos "en línea" utilizando plataformas virtuales, principalmente Microsoft Teams. En el presente artículo mostraremos de manera particular la experiencia de la construcción de las escaletas de radio de forma colaborativa por un grupo de maestros.

1.2. Colaboración entre maestros y desarrollo de materiales didácticos

Por colaboración entre docentes se puede entender, de manera general, cualquier situación donde los maestros trabajen en conjunto. La colaboración entre maestros puede aparecer de diversas maneras, una de estas son las *Comunidades de aprendizaje profesional*, las cuales tienen, según DuFour y Eaker (en Rintoul , 2017):

Misión, visión y valores compartidos, se involucran en la investigación colectiva, trabajan en equipos colaborativos, están orientados a la acción y la experimentación, y están enfocados en la mejora continua y los resultados (p.42).

Para implementar una *Comunidad de aprendizaje profesional*, Kotter (en Rintoul, 2017) identifica un proceso de ocho etapas:

1. Establecer un sentido de urgencia.
2. Crear una coalición orientadora.
3. Desarrollar una visión y una estrategia.
4. Comunicar la visión del cambio.
5. Empoderar la acción de base amplia.
6. Generar logros a corto plazo.
7. Consolidar los logros y producir más cambios.
8. Anclar los nuevos enfoques en la cultura (pág.47).

De acuerdo a Cochran-Smith y Lytle (1999), las *Comunidades de aprendizaje profesional*, implementadas adecuadamente, se basan en la generación de conocimiento de la práctica a diferencia de los modelos tradicionales de desarrollo profesional, donde persiste el principio de transmitir conocimiento a los maestros para su práctica.

Uno de los resultados de las *Comunidades de aprendizaje profesional* es la creación de materiales didácticos. Para Padron et al. (2005) los materiales didácticos son un conjunto de contenidos y diseño instruccional que ayudan en el proceso de enseñanza y aprendizaje.

Padron et al. (2005) concluyen, basado en su análisis del proceso de desarrollo de material didáctico con soporte tecnológico, que no es una tarea trivial y requiere el apoyo de una metodología de desarrollo y un entorno de autoría de alta calidad.

1.3. Descripción de la experiencia

1.3.1. Organización didáctica de las escaletas de radio:

Por parte del equipo académico *Matemáticas para todos*, se diseñaron los materiales necesarios para la producción de programas de radio, para ello se requirió de una **escaleta** y un **documento guía** para la elaboración de las escaletas.

La escaleta diseñada está constituida por una entrada, seis momentos didácticos y la despedida. Los momentos didácticos son *presentación del tema, para empezar, manos a la obra, a lo que llegamos y para saber más*; los momentos para las escaletas los cuales fueron retomados de la organización didáctica contenida en los libros *Matemáticas I, Matemáticas II y Matemáticas III* de la modalidad telesecundaria. Por lo tanto, dichos momentos conservaron los nombres de los libros de Telesecundaria, con algunas adaptaciones, mismas que se describen a continuación:

- **Entrada.** Bienvenida al programa
- **Presentación del tema.** Se indica el tema a abordar y se introduce a través de preguntas, además de que se mencionan los materiales a utilizar durante la sesión (Fig. 1).

- **Para empezar.** Se conforma por dos bloques "Sabías que" y "Contexto histórico", en el bloque "sabías que" se introduce el tema a través de un dato interesante con relación al contenido matemático y en "contexto histórico" se incluye una nota histórica se aborda el origen y desarrollo del concepto matemático, o algún dato histórico de relevancia.
- **Manos a la obra.** Se desarrolla el tema a través de una actividad interactiva donde se ocupan materiales concretos que los estudiantes pueden manipular para la contrucción de la noción matemática en turno. Cabe señalar que los materiales concretos solicitados para la sesión son de fácil acceso, de manera que puedan estar a disposición de la población estudiantil (Fig. 2).

  En esta sección, para cumplir el objetivo de construir la noción o concepto matemático, se estableció que las indicaciones fueran claras y cortas, de tal manera que los estudiantes pudieran seguir el proceso,haciendo uso del modo verbal *imperativo*. También se consideró relevante plantear preguntas reflexivas que apoyaran a los estudiantes en la comprensión del tema e incluir expresiones de motivación, tales como: *¡Exacto!, ¡Muy bien! ¡Lo has logrado!*

  En conclusión, es de interacción con el estudiante, similar al que se establece con el profesor en el salón de clases.
- **A lo que llegamos.** Se brinda un breve recapitulación de lo aprendido en el programa, concluyendo las ideas obtenidas de la sección "Manos a la obra" a través de mostrar un ejercicio que consolide al concepto desarrollado en el momento didáctico anterior.
- **Para saber más.** La finalidad de este momento es brindar un espacio para la divulgación de las matemáticas, en este caso, a través de presentar la reseña de algún libro perteneciente a dicha temática, como recomendación de lectura.
- **Despedida:** Se informa acerca de los materiales necesarios para la siguiente emisión y finalmente se despide del programa.

Presentación al tema

LOC 1: El día de hoy en una emisión más de "El Reto Es", conoceremos más acerca de los **Polígonos semejantes**.

LOC 2: ¿Te has preguntado por qué son tan importantes las representaciones a escala? ¿Te gustaría conocer la importancia de las escalas en la vida cotidiana? Pues el día de hoy conoceremos más de este tema.

LOC 1: Para este programa deberás tener listo los siguientes materiales:

- 40 palillos de madera del mismo tamaño
- Lápiz
- Libreta de notas

¿Listos? ¡Comencemos!

Manos a la obra

LOC 1: Continuando con **nuestra aventura,** llegó el momento de poner manos a la obra para aprender más acerca de las figuras semejantes.

Es hora de usar los palillos de madera ¿Estás listo?

Toma 6 palillos de madera y construyamos juntos un rectángulo.

Coloca 2 palillos para representar cada base… 1, 2 ¡Listo!

Ahora, **representa** la altura con un palillo, coloca uno en cada altura… ¡Excelente! Tenemos un rectángulo, que mide dos palillos de base y un palillo de altura. Esta será nuestra figura original.

Figuras 1 y 2

1.3.2. Selección de temas

Los temas seleccionados correspondieron a los aprendizajes esperados pertenecientes al plan de estudios 2017 del nivel secundaria, del programa de la asignatura de matemáticas, incluyendo a los tres grados, ubicados en el primero de los tres bloques según los libros de Telesecundaria Matemáticas I, II y III.

Cada escaleta abordó un solo tema o contenido que coadyuva a desarrollar cierto aprendizaje esperado, el número de temas fue de 54, igual al número de escaletas producidas.

1.3.3. Roles en la producción

Los profesores participantes pertenecen al nivel secundaria, casi en su totalidad a la modalidad telesecundaria. Existieron tres roles entre los participantes:

- **Autor.** Profesor encargado de elaborar el contenido de la escaleta, según el documento guía y los materiales proporcionados por el *Proyecto Matemáticas para todos.*
- **Revisor de lenguaje.** Profesor con función de revisión de los aspectos lingüísticos del texto, brindando recomendaciones al autor en este aspecto.
- **Coordinador de equipo.** Profesor encargado de acompañar en el proceso de producción al profesor autor, además de verificar la viabilidad del contenido disciplinar matemático de la escaleta y que se cumpliera con la organización didáctica de la misma. Otra de las funciones del coordinador de equipo era mantener la comunicación entre autor y revisor de lenguaje, garantizando que las fechas de entrega, revisión y modificación se cumplieran según lo establecido.
- **Jefe de coordinadores.** Profesor que revisaba las escaletas en su etapa final, tanto en contenido disciplinar, como en organización didáctica, y enviaba las escaletas culminadas al equipo de locución y grabación.

Los autores de las escaletas cumplen la función de asesor técnico pedagógico (ATP) del pensamiento matemático dentro del sistema educativo, en su mayoría, mientras que otra parte desempeña la función de docentes frente a grupo de telesecundaria. Un grupo conformado por ATP's de lenguaje y comunicación, y docentes frente a grupo con habilidades en lenguaje reconocidas por la comunidad educativa, fue el responsable de hacer la revisión de lenguaje. En cuanto a los coordinadores de equipo, fueron los integrantes del equipo académico del *Proyecto Matemáticas para Todos.*

Se conformaron cuatro equipos de trabajo, cada uno de ellos integrado por un coordinador de equipo, ocho a nueve autores, y cuatro revisores de lenguaje. Para cada equipo de trabajo se creó un equipo dentro de la plataforma **Microsoft Teams,** donde se llevó a cabo el proceso de producción, revisión, observación y modificación de escaletas.

En los equipos de Microsoft Teams, se colocaron carpetas que contenían el material de consulta y apoyo para la elaboración de escaletas; además de un archivo *modelo* o *plantilla* que utilizaron los autores para la producción de los textos. El siguiente esquema (Fig. 3), muestra el proceso de producción por parte de los participantes y sus distintas funciones:

Figura 3

Cuando la escaleta se concluía, se enviaba a otro equipo de trabajo en **Microsoft Teams,** donde todas las escaletas eran concentradas y revisadas por el **Jefe de coordinadores**. Si dichas escaletas cumplian con los aspectos adecuados en su diseño, entonces eran enviadas al equipo de grabación, de lo contrario, se establecía comunicación con los coordinadores de equipo para atender las observaciones realizadas.

Para realizar el proceso de revisión, se utilizó la función de agregar comentario en el procesador de texto Word, a través de esta función se generaba el diálogo académico y profesional (Fig. 4). En caso de ser necesario, se organizaba una videollamada entre el coordinador de equipo y el profesor autor, a través de la plataforma Zoom; si bien la plataforma Microsoft Teams también cuenta con esta función, los profesores del estado de Veracruz hacen uso constante de reuniones virtuales por Zoom, además de que Microsoft

Teams tiene mayores requerimientos tecnológicos para un funcionamiento adecuado en estas condiciones que Zoom. Otra manera de distribuir mensajes o información con menor relevancia fue a través de la mensajería instantanea Whatsapp.

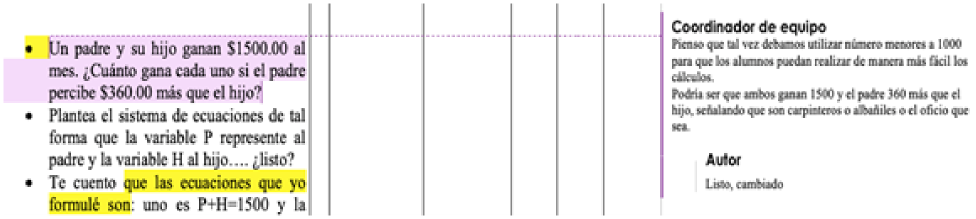


Figura 4

1.3.4. Tiempo para la elaboración

En este paso participaron 34 profesores autores y 16 revisores de lenguaje. Basados en el calendario de trabajo establecido en el Proyecto Matemáticas para Todos, se determinó un periodo de 5 días para que los profesores autores elaboraran las escaletas; al mismo tiempo que ellos trabajaban, los coordinadores de equipo realizaban un acompañamiento a los autores. Con este esquema se logró la elaboración de 54 escaletas.

Posterior a la elaboración de las escaletas, se permitió un plazo de tres días para que los coordinadores de equipo revisaran las escaletas y, en caso de considerarlo necesario, hicieran observaciones sobre los textos contenidos en las mismas. Si el coordinador consideraba que las observaciones eran menores, entonces él mismo le notificaba al revisor de lenguaje que podía la inspección de los elementos lingüísticos; y posteriormente el autor debía realizar los cambios solicitados por el coordinador. En el caso de que las observaciones fueran detalladas, el coordinador procedía a devolver la escaleta al profesor autor para su corrección.

1.3.5. Material de apoyo o consulta para la elaboración de las escaletas

Para desarrollar las secciones de la escaleta, el “Proyecto Matemáticas para todos” brindó a los docentes materiales de consulta para su elaboración, con el fin de que fuera más sencillo localizar los temas y el tiempo de producción se redujera por parte de los autores. Entre los materiales de apoyo se proporcionó un ejemplo de escaleta elaborado por el equipo académico del “Proyecto Matemáticas para todos”, los libros de la asignatura de Matemáticas I, Matemáticas II y Matemáticas III, pertenecientes a la modalidad de telesecundaria y una lista de libros de divulgación de las matemáticas.

2. CONCLUSIONES

La comunidad docente, autora de escaletas, y los revisores de lenguaje han aumentado por medio de invitaciones vía correo electrónico, por ello se ha duplicado **la producción** de escaletas y cápsulas de radio.

Actualmente, se han especificado y mejorado la guía de elaboración, el instrumento de revisión de aspectos lingüísticos, así como el proceso de revisión de contenido disciplinar y didáctico previo a la grabación.

Los docentes del nivel secundaria manifiestan en sus Consejos Técnicos Escolares la utilización de las cápsulas de radio como recurso didáctico; sin embargo, el proyecto de "Matemáticas para todos" no cuenta con una cifra concreta de la frecuencia de uso, ni de su efectividad, de ahí que se requiere a futuro realizar un estudio que aborde este aspecto.

Mientras persista la etapa de confinamiento, el "Proyecto Matemáticas para todos" continuará elaborando materiales didácticos a través de la plataforma *Microsoft Teams.*

Figura 5

3. REFERENCIAS

Cochran-Smith, M., y Lytle, S. L. (1999). Relationships of knowledge and practice: Teacher learning in communities. *Review of Research in Education*, 24, 249–305.

Gobierno del Estado de Veracruz. (2020). *Segundo informe de gobierno, tomo uno*. Autor. http://www.veracruz.gob.mx/segundo-informe/

Henderson, D., Woodcock, H., Mehta, J., Khan, N., Shivji, V., Richardson, C., Aya, H., Ziser, S., Pollara, G., y Burns, A. (2020). Keep calm and carry on learning: using Microsoft Teams to deliver a medical education programme during the COVID-19 pandemic. *Future Healthcare Journal, 7*(3), e67–e70. https://doi.org/10.7861/fhj.2020-0071

Miranda, I., y Gómez., A. L. (2018). La enseñanza de las matemáticas con el enfoque de la Teoría de Comunidades de Práctica. Educación Matemática, 30(3), 277-296.

Padron, C., Dodero, J., Diaz, P., y Aedo, I. (2005). The collaborative development of didactic materials. Computer Science and Information System, 2(2), 1-21. https://doi.org/10.2298/CSIS0502001P

Padron, C., Dodero, J., Diaz, P., Aedo, I., y Fernandez, C. (2003, sept. 1-5). CARLOS: a collaborative authoring tool for reusable learning objects. In V. Mařík, W. Retschitzegger, y O. Štěpánková (Eds.), 14th International Conference, DEXA 2003 (), Prague, Czech Republic. https://doi.org/10.1109/DEXA.2003.1232034

Pal, D., Vanijja, V. (2020). Perceived usability evaluation of Microsoft Teams as an online learning platform during COVID-19 using system usability scale and technology acceptance model in India. *Children and Youth Services Review, 119*, 1-12.

Pal, D., Vanijja, V., y Patra, S. (2020). Online Learning During COVID-19: Students' Perception of Multimedia Quality. In K. Porkaew, M. Chignell, S. Fong, y B. Watabapa (Eds.), *Proceedings of the 11th International Conference on Advances in Information Technology*. ACM. https://doi.org/10.1145/3406601.3406632

Rintoul, J. (2017). Middle School Teacher Collaboration: The Intersection of Teache Domain and Administrative Purview. Educational Studies Dissertations, 123. https://digitalcommons.lesley.edu/education_dissertations/123

Secretaría de Educación de Veracruz. (2019). Matemáticas para todos. Recuperado el 18 de diciembre de 2020 de http://www.sev.gob.mx/educando-a-distancia/

Secretaría de Educación de Veracruz. (n.d.). Veracruz Educando a Distancia. Recuperado el 13 de diciembre de 2020 de http://www.sev.gob.mx/educando-a-distancia/

Secretaría de Gobernación. (2020). ACUERDO número 02/03/20. *Diario Oficial de la Federación*. https://www.dof.gob.mx/nota_detalle.php?codigo=5589479yfecha=16/03/2020

Se abre el telón

María del Carmen Galán Mata
José María Figueroa Caballero
IES Averroes

Resumen: *Para conmemorar el día de la Mujer y la Niña en la Ciencia, este curso me disfracé de Sophie Germain, y de esa guisa les conté su historia en primera persona. Con ello trabajo algo que usualmente se nos escapa en el día a día: historia de las matemáticas, y pongo en valor el trabajo de grandes mujeres que tuvieron que superar numerosas dificultades por dedicarse a la ciencia, en una época en la que no estaba permitido o estaba mal visto.*
Palabras clave: *Matemáticas, teatro, historia de las matemáticas, enseñanza*

The curtain opens

Abstract: *To held the woman and girl science day, this academic year I've dressed up as Sophie Germain, and dressed that way I've told students her story in first person. With this method, I've worked on something we usually elude, history of maths, and I highlight the importance of bright women's work who had to overcome lots of difficulties to work as scientist in a time where it was forbidden or even and not approved.*
Keywords: *Mathematics, theater, history of mathematics, teaching*

1. INTRODUCCIÓN

La Orden del 14 de julio de 2016, por la que se desarrolla el currículo correspondiente a la Educación Secundaria Obligatoria en Andalucía, establece, como uno de los objetivos de la ESO dentro de la asignatura de Matemáticas:

> Valorar las matemáticas como parte integrante de la cultura andaluza, tanto desde un punto de vista histórico como desde la perspectiva de su papel en la sociedad actual, apreciar el conocimiento matemático acumulado por la humanidad y su aportación al desarrollo social, económico y cultural.

Además, dentro del bloque «Procesos, métodos y actitudes en matemáticas», que es un bloque común en todos los cursos y transversal, que debe desarrollarse simultáneamente al resto de bloques de contenido y es el eje fundamental de la asignatura, también hace referencia a la historia de las matemáticas, concretamente:

> En este bloque se puede introducir el conocimiento histórico, social y cultural de las Matemáticas que sirve para la comprensión de los conceptos a través de la perspectiva histórica, así como para contrastar las situaciones sociales de otros tiempos y culturas con las realidades actuales. Para ello, se deben realizar actividades de investigación que favorezcan el descubrimiento de personajes históricos y sus aportaciones y el reconocimiento de mujeres matemáticas y las dificultades que tuvieron que superar para acceder a la educación y a la ciencia.

¿Cómo podemos trabajar la historia de las matemáticas en el aula?

2. EL TEATRO

Los orígenes del teatro pueden encontrarse en ceremonias y ritos primitivos de las comunidades dedicadas a la agricultura o a la caza. El hombre empezó a comunicarse con la Naturaleza, el Sol, la Luna, el mar y algunos animales, a los que divinizó por considerar superiores. En estos ritos de agradecimiento o súplica a los dioses se fue introduciendo la música, la danza, las máscaras, etc.

El teatro, en clase de matemáticas, puede aparecer de multitud de formas. Por ejemplo, aparece en la escena XII, Acto primero de *Don Juan Tenorio*, de José de Zorrilla (1817-1893), cuando Don Juan hace una cuenta de las mujeres burladas:

(…)

L: Y yo sumo en vuestras listas setenta y dos.

J: Pues perdéis.

L: ¡Es increíble, don Juan!

J: Si lo dudáis, apuntados los testigos ahí están, que si fueren preguntados os lo testificarán.

L: ¡Oh! y vuestra lista es cabal.

J: Desde una princesa real a la hija de un pescador, ¡oh! ha recorrido mi amor toda la escala social. ¿Tenéis algo que tachar?

L: Sólo una os falta en justicia.

J: ¿Me la podéis señalar?

L: Sí, por cierto, una novicia que esté para profesar.

J: ¡Bah! pues yo os complaceré doblemente, porque os digo que a la novicia uniré la dama de algún amigo que para casarse esté.

L: ¡Pardiez que sois atrevido!

J: Yo os lo apuesto si queréis.

L: Digo que acepto el partido. ¿Para darlo por perdido queréis veinte días?

J: Seis.

L: ¡Por Dios que sois hombre extraño! ¿Cuántos días empleáis en cada mujer que amáis?

J: Partid los días del año entre las que ahí encontráis. Uno para enamorarlas, otro para conseguirlas, otro para abandonarlas, dos para sustituirlas, y una hora para olvidarlas. Pero, la verdad a hablaros, pedir más no se me antoja porque, pues vais a casaros, mañana pienso quitaros a doña Ana de Pantoja.

Según sus cuentas, Don Juan necesita **363 días** (72 mujeres x 5 días = 360 y 72 mujeres x 1 hora = 3 días) al año para sus conquistas ¿En qué utiliza Don Juan los dos días del año sobrantes? ¿Vacaciones amorosas?

3. TEATRO MATEMÁTICO

Además de trozos de obras clásicas conocidas, podemos encontrar matemáticas de las siguientes formas a través del teatro:

- Obras específicas sobre matemáticas, por ejemplo las obras *L'entretien de Descartes avec Pascal le jeune*, de Jean-Claude Brisville, que trata de un diálogo inventado entre estos personajes, basado en un encuentro real que tuvieron y del que no trascendió nada, *Fermat's last tango* de Joshua Rosenblum y Joanne Sidney Lessner, musical en el que Fermat aparece como fantasma para detectar el error en la demostración de su famoso último teorema por parte de Keane, o *Calculus* de Carl Djerassi, en la que Newton y Leibniz se disputan el descubrimiento del cálculo diferencial.
- Hay obras elaboradas con técnicas matemáticas, por ejemplo *L'augmentation* de Georges Perec donde los personajes son hipótesis y proposiciones matemáticas, *Tierra de Madelbrot* de Eduardo Mercado en la que se proyectan imágenes matemáticas con unas bailarinas de fondo y la música de violín, *Quad* de Samuel Beckett, obra en la que todo gira en torno al número cuatro, etc.
- Hay obras donde las matemáticas aparecen de forma sorprendente, por ejemplo en *El niño y los sortilegios*, de Gabrielle Colette y Maurice Ravel, en la que un niño debe resolver una serie de acertijos, *Infinities* de John Barrow, obra sorprendente en la que los espectadores van entrando en grupos y se van moviendo en torno a cinco escenarios o *Rhinoceros* de Eugene Ionesco, en la que aparecen retos de lógica cuando los habitantes de una ciudad se van convirtiendo en rinocerontes.

4. LA EXPERIENCIA

En el aula, nada puede superar la expresión de sorpresa y el nivel de atención cuando ven aparecer a su profesor de matemáticas (se puede hacer extensible a cualquier asignatura) disfrazado representando alguna pieza teatral, sea comedia o no.

En mi caso, comencé mi andadura teatral con un grupo de profesores y profesoras de mi centro, que durante todo el curso escolar trabajábamos, en nuestro tiempo libre, para representar una función a final de curso, con el objetivo de acercar el teatro a nuestro alumnado. La mayoría de ellos jamás había asistido al teatro antes de ver a sus profesores en escena. Recuerdo los nervios cuando se abría el telón y los cinco minutos que debíamos dejar pasar hasta que se acallaran las risas del alumnado, al vernos disfrazados. Una vez comenzaba la obra, ni el más travieso abría la boca, y si lo hacía era de asombro. No se escuchaba una mosca, y sin micros ni accesorios de sonido nuestra voz llegaba a todos los rincones del Salón de Actos.

El tiempo nos hizo coger caminos diferentes y el grupo se disolvió, pero el gusanillo se quedó en mí. Así que decidí aprovechar mis ganas e ilusión para seguir indagando en este mundo de posibilidades que acababa de descubrir.

Así es como nació la actividad que os presento. Quise hacer algo diferente para celebrar el día de la Mujer y la Niña en la Ciencia, y busqué relatos de mujeres matemáticas, en las que se contase su vida con un toque de humor, pero no hallé lo que buscaba, así que me decidí a escribir yo misma lo que quería contar a mi alumnado. Me centré en una mujer matemática: Sophie Germain, leí su biografía y me puse manos a la obra.

La semana del 8 al 12 de febrero de 2021, en plena pandemia mundial, los alumnos se frotaban los ojos cuando se tropezaban conmigo por los pasillos, ya que iba disfrazada cuál dama del siglo XIX, y mi forma de hablar emulaba acento francés. Aparecía por sorpresa en algunas clases (donde mi compañero ayudante o yo misma impartíamos matemáticas) ante el estupor del alumnado, a contar mi historia.

Mi texto empezaba con un toque de humor, para que el alumnado se relaje y se centre en la representación, ya que si me ve de esa guisa es probable que no preste mucha atención a mis palabras. Hablar de mis propios números primos es un buen comienzo, así que, muy digna, les informo de mi nombre y de uno de mis logros: tener mis propios números primos. Pregunto a un par de alumnos o alumnas sus nombres y me cuestiono, indignada, si existen los números primos de …. (y pronuncio sus nombres), con ello capto su atención al instante.

Figura 1

Recordemos que un número p es primo de Germain si es primo y a su vez 2p+1 también es primo. Aquí pude abrir un debate y animar a que encontrasen primos de mi propiedad (en sentido figurado).

Después les hablo de mi época, cómo era vivir en el siglo XVIII-XIX en Francia, las dificultades que me encontré solo por ser mujer. Mi padre me prohibió estudiar matemáticas, entre cosas porque no aceptaban mujeres en la Escuela Politécnica de París, donde yo ansiaba estudiar, así que paso a describir mis triquiñuelas para poder leer tratados, sobre todo de matemáticas, sin que se notase mucho. Aunque muchas veces me pillaron mis padres, y me castigaron de muy diversas maneras para alejarme de los libros, finalmente aceptaron mis 'rarezas'. En este punto, mi compañero José María Figueroa voluntariamente irrumpe en la clase haciéndose pasar por mi padre, y me regaña por estudiar cuando las obligaciones de las mujeres son otras. Yo finjo que le haré caso, y en cuanto se va sigo con mi historia.

Con el paso de los años, al querer que alguien leyera mi trabajo, empecé a cartearme con dos grandes matemáticos de mi época: Lagrange y Gauss, pero para hacerlo debí hacerme pasar por un hombre: Monsieur Leblanc. Aquí entra en juego de nuevo mi compañero, para hacerse pasar primero por uno y luego por el otro, y comentamos mi trabajo, lo impresionados que están por que una mujer autodidacta haya sido capaz de tales ingenios, etc. También recordamos cuando, por motivo de la conquista de Prusia por Napoleón yo temí por la vida de Gauss, y le encomendé a un militar amigo de mi familia, el general Pernetti, que velara por su seguridad. Podría decirse que le salvé la vida, ya que el militar contactó con Gauss y agradeció mi mediación, aunque en ese momento decía no saber quién soy, ya que él me conocía por Monsieur Leblanc, así es como le confesé mi verdadera identidad. En el caso de Lagrange estaba tan impresionado por mi trabajo que quiso conocerme en persona, y en mi época, sin tiendas de disfraces ni nada que se asemeje, no me vi capaz de de hacer el papel, así que confesé mi género, y lejos de dejar de hablarme se mostró aún más impresionado por las barreras que tuve que superar y me animó a seguir estudiando.

Figura 2

Les hablo de Fermat y de su último famoso teorema, y para añadir un toque más de teatralidad finjo que uno de los alumnos es clavado a Pierre, y lo animo-obligo a salir al escenario, que es el aula, para que cuente en primera persona su historia. Como lo normal es que no la sepan les llevo una chuleta con los datos más importantes de su vida, y les animo a actuar a la hora de leerlos. Recordemos el que fue el último teorema de Fermat:

No existe ningún entero positivo, n, mayor que dos que satisfaga la ecuación

$$x^n + y^n = z^n$$

Siendo x, y, z enteros positivos.

El teorema, a pesar de su complejidad a la hora de demostrarlo, es simple en su enunciado y fácil de entender en cualquier grupo de ESO.

Después de Fermat hablamos del conde Wolfskehl y la leyenda que lo rodea, en la cual el teorema de Fermat le salvó de un suicidio por mal de amores. Saco a otro alumno que, casualmente es igualito al conde, y le insto también a actuar y a contar su historia. Según la leyenda, el conde Wofskehl no fue correspondido por la dama objeto de su amor, y decidió suicidarse, pero no de cualquier manera ni cualquier día, y mucho menos a cualquier hora, ya que era un señor muy ordenado. Estableció el momento exacto de su muerte y, el día señalado, estuvo cerrando sus asuntos hasta que llegase su hora. Como le sobró tiempo, fue a su biblioteca y empezó a leer un libro, concretamente el trabajo de Ernst Kummer sobre el último teorema de Fermat. Se metió tanto en el tema que cuando se dio cuenta había pasado la hora del suicidio, así que decidió dedicar su vida al teorema, y dejar gran parte de su herencia a quién consiguiese demostrarlo, poniendo, eso sí, una fecha límite (el 13 de septiembre de 2007, no se sabe exactamente por qué ese día y no otro…). Allanado el camino de la curiosidad para un problema concreto, y fácil de entender para ellos, les cuento uno de mis logros: yo, Sophie Germain, demostré el Teorema de Fermat para un caso particular (concretamente cuando x, y, z no sean simultáneamente múltiplos de n, para todo n menor que 10) utilizando para la demostración mis propios números primos, los primos de Germain. Y después de éste gran logro ¿me hice famosa en mi época? No, ¿cobré algún premio/recompensa por éste trabajo? No ¿y el motivo? Simple: yo era una mujer.

En mi caso, no conforme con la situación me presenté varias veces al Premio Extraordinario de las Ciencias Matemáticas, que concedía la Academia de París. Por dos veces no me aceptaron por el hecho de ser mujer, pero a la tercera va la vencida, ya lo dice el refrán, así que a la tercera además de aceptar mi solicitud (esa fue mi primera victoria) me alcé con el galardón (segunda victoria).

Y en vida pocas victorias más tuve, he de decir…. A pesar de pasarme la vida estudiando y trabajando, el hecho de no haber recibido una formación reglada ni pertenecer a círculos académicos, por ser mujer ya que talento no me faltaba, me pasó factura.

Concluida la historia de Sophie Germain les hablo de otras grandes matemáticas del pasado (Hipatia de Alejandría, Sofía Kovaleskaya, Emmy Noether, etc.), grandes matemáticas del presente (María Cumplido, Clara Grima, Mercedes Siles, etc.) y me despido recordándoles que ellos y ellas son el futuro, en esa misma aula escuchando esta historia puede estar el próximo o la próxima científica importante, y puede que dentro de trescientos años algún profesor o profesora se disfrace de ellos para contar su historia a sus alumnos y alumnas.

* * *

Cuando mi compañera Carmen Galán me propone tomar papel en su obra de teatro, mi primera reacción es de duda por aquello del terror escénico para alguien que nunca ha hecho teatro, como es mi caso, aunque me convence la oportunidad que supone esta actividad para tratar en el aula aspectos transversales del currículo que no siempre se les dedica la atención suficiente y, también, romper con la rutina diaria haciendo teatro en una clase de matemáticas.

El hecho de representar al patriarcado con el papel de padre de Sophie Germain, me permite tratar en clase estereotipos y creencias sobre la mujer que todavía están presentes entre nuestro alumnado, tras lo cual, aprovecho mi interpretación de Lagrange y Gauss para poner de manifiesto que el trabajo y la investigación de las mujeres no se debe desechar por el hecho de que sean mujeres.

El alumnado se da cuenta con esta obra de lo absurdo que supone la discriminación de la mujer en general y en el campo de la ciencia y las matemáticas en particular, mensaje que también se ve reforzado cuando procede desde el ámbito masculino, de mí como profesor en este caso, y no solo la profesora, consiguiendo ambos el objetivo que buscamos de animar a que nuestras alumnas sientan interés por las matemáticas y no descarten dedicarse en un futuro a la ciencia.

5. CONCLUSIÓN

Esta actividad ha requerido mucho tiempo de preparación (ensayos cada uno por separado, juntos e investigación sobre el tema) y mucha imaginación (preparar un texto que recoja lo que queríamos contar con un toque de humor), pero ha merecido la pena con creces. A diferencia de otras actividades para conmemorar este día que hemos realizado otros años, aquí teníamos prácticamente el cien por cien de atención en el aula, y lo que les hemos contado nos consta que les ha calado. En actividades posteriores hemos podido comprobar que recogían cosas que habíamos dicho o mujeres de las que les habíamos hablado, y suelen preguntarnos a menudo cuando nos vamos a volver a disfrazar. Retomaremos la experiencia en cursos sucesivos con la intención de ampliar nuestro repertorio con otras mujeres, y contar otras anécdotas que les permitan conocer diversos aspectos de la historia de las matemáticas.

6. REFERENCIAS WEB

https://mujeresconciencia.com/2017/09/19/sophie-germain-1776-1831/
https://www.gaussianos.com/la-leyenda-de-wolfskehl-y-el-ultimo-teorema-de-fermat/
http://www.ehu.eus/~mtwmastm/Matematicas,%20se%20abre%20el%20telon.pdf
https://www.juntadeandalucia.es/boja/2016/144/18

Épsilon - *Revista de Educación Matemática* **2021, nº 108, 63-68**

Explorando propiedades de los cuadriláteros

Alexander Maz-Machado
María Rodríguez
Universidad de Córdoba
Cistina Pedrosa-Jesús
Universidad de Granada
Astrid Cuida
Universidad de Valladolid

Resumen: *Se presenta una experiencia con maestros en formación realizando una tarea sobre cuadriláteros y las relaciones de algunas de sus propiedades. Se observan ciertas deficiencias en la compresión de la relación entre el número de lados paralelos con el número de lados iguales o de ángulos rectos, siendo incapaces de dibujar algunos de los cuadriláteros que se les pedían o de explicar por qué no podían dibujar algunos de ellos, lo que manifiesta falta de lenguaje y comprensión del mismo.*
Palabras clave: *Didáctica de la geometría, formación de profesores, cuadriláteros.*

Exploring properties of quadrilaterals

Abstract: *We present an experience with teacher trainees around a task about quadrilaterals and the relationships of some of their properties. Certain deficiencies were observed in the understanding of the relationship between the number of parallel sides with the number of equal sides or right angles, being unable to draw some of the quadrilaterals that were asked or to explain why they could not draw some of them, which shows a lack of language and understanding of it.*
Keywords: *Geometry didactics, teacher training, quadrilaterals.*

1. INTRODUCCIÓN

La enseñanza de los cuadriláteros se halla incluida en el currículo de matemáticas desde la educación primaria. En particular, para la comunidad de Andalucía, se plantea en el bloque 4 de geometría y, a partir del segundo ciclo de primaria, asociado al objetivo "STD.34.1. Clasifica cuadriláteros atendiendo al paralelismo de sus lados." (Junta de Andalucía, 2015). Estos se siguen enseñando, aumentando paulatinamente el grado de complejidad de sus propiedades y las relaciones que se establecen según sus ángulos y lados paralelos.

En España, ya desde los años 90 se han venido estudiando los cuadriláteros y su enseñanza desde distintas perspectivas, así Pastor y otros (1992) analizaron los errores presentes en los libros de texto utilizando el modelo de Van Hiele para su clasificación.

Los conocimientos geométricos de los estudiantes para maestro han sido estudiados en diversas universidades y épocas porque, al ser ellos quienes en el futuro deben enseñar los conocimientos matemáticos elementales, se hace necesario tener un conocimiento de lo que saben y cuáles son sus deficiencias, para poder tomar medidas con el propósito de subsanarles y mejorar su formación matemática.

Blanco y Barrantes (2003) analizaron las concepciones sobre la geometría que tenían los estudiantes para maestro. El estudio reveló que los estudiantes "tienen lagunas de conceptos de geometría escolar; algunos no conocen ni el contenido básico" (p. 122). Escudero-Domínguez y Carrillo (2014) analizaron el conocimiento matemático de futuros maestros de primaria que cursaban el segundo año de la carrera. Utilizaron, para el estudio, el marco teórico del Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas (MTSK). Hallaron que los alumnos recaen en la falta de comprensión de los conceptos geométricos y sin embargo conocen y se saben las definiciones de las propiedades casi como un mantra, pero sin saber aplicarlas. Asimismo, descubrieron "que no distinguen entre propiedades necesarias y suficientes, lo que produce que los EPM formulen definiciones que posean características redundantes" (p. 9).

Bernabéu y otros (2019) realizaron un estudio para caracterizar el pensamiento geométrico de los alumnos del grado de Educación Infantil a través de una tarea de clasificación de cuadriláteros. El estudio reveló "Dificultades con las relaciones inclusivas y con las definiciones mínimas, demostró tener dificultades para realizar clasificaciones inclusivas, sin embargo, eran capaces de proporcionar definiciones, no mínimas, aunque coherentes con la clasificación realizada" (p. 38).

Todos estos antecedentes ponen de manifiesto la actualidad e importancia de indagar sobre los conocimientos, concepciones, dificultades y demás aspectos relacionados con la geometría y, en particular, con los cuadriláteros en la formación de los futuros maestros.

Con esta idea y aprovechando que algunas profesoras hacían estancias de investigación en nuestra Universidad de Córdoba, decidimos realizar una actividad docente que permitiera poner en juego los conocimientos que los futuros maestros han adquirido sobre los cuadriláteros durante su trayectoria formativa. No debemos olvidar que los conocimientos de los maestros tienen una gran repercusión en todas las prácticas que se llevan a cabo en el aula en todos los niveles educativos (Chinnappan y Lawson, 2005).

2. LA EXPERIENCIA

En el tercer curso de la titulación del Grado de Educación Primaria de la UCO se imparte la asignatura Didáctica de la Geometría y la Estadística. Durante una de las sesiones de prácticas del curso 2019/20 se les pidió a los alumnos que realizaran, de manera individual, las dos tareas tomadas de Fielker (1981) que se presentan a continuación:

1. Dibuja, donde corresponda, el cuadrilátero que cumpla la condición indicada por las filas y columnas

	Número de pares de lados paralelos			
Nº de pares de lados iguales		0	1	2
	0			
	1			
	2			

Escriba el nombre de los cuadriláteros dibujados en cada Celda (a,a) (a,b)(a,c) , etc..

2. Dibuja, donde corresponda, el cuadrilátero que cumpla la condición indicada por las filas y columnas.

	Número de pares de lados paralelos			
Nº de Ángulos rectos		0	1	2
	0			
	1			
	2			

Escriba el nombre de los cuadriláteros dibujados en cada Celda (a,a), (a,b), (a,c), etc..

En la actividad, participaron 78 alumnos que dispusieron de 90 minutos para realizarla. Se les indicó que podían utilizar materiales y recursos geométricos manuales para ayudarse (regla, compás, transportador). También podían debatir con otros compañeros sobre determinadas dudas. Los alumnos podían realizar la práctica directamente en el ordenador o dibujar en papel los cuadriláteros, fotografiarlos y luego subir la imagen para incorporarla en la plantilla. Al terminar la clase, la actividad en PDF se subía a la plataforma Moodle de la asignatura. Se les indicó que no podían buscar las definiciones en la web y, al estar distribuidos en tres grupos clase, no fue difícil controlar esta variable, sin embargo, siempre es posible que alguien lo hubiese hecho.

Figura 1. Alumnos durante la práctica

3. RESULTADOS

En la primera actividad el mayor número de respuestas erróneas (15%) se presentó en los casos en los que se pedía representar un cuadrilátero con solo un par de lados iguales y dos lados paralelos (celda 1,1), es decir un trapecio isósceles, o en los que se requería representar el cuadrilátero sin lados iguales ni paralelos (celda 0,0), el trapezoide, así como para el trapecio simétrico (celda 2,0). Para esta última respuesta, el alumnado dibujaba un cuadrilátero con todos sus lados de diferente longitud y pasaban por alto la condición de paralelismo para dos de sus lados

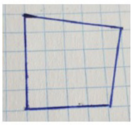
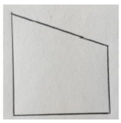
TRAPEZOIDE 	TRAPECIO RECTÁNGULO 	No podemos dibujar dos pares de lados paralelos ya que para ello necesitamos todos los ángulos rectos

Figura 2. Ejemplo de respuestas

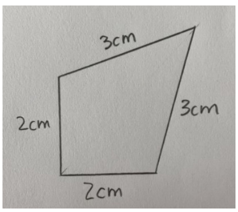


Figura 3. Trapecio simétrico (dos pares de lados iguales y ningún lado paralelo)

En la actividad 2, la mitad de los alumnos respondieron de manera incorrecta al representar el cuadrilátero con dos ángulos rectos y ningún lado paralelo (celda 2,0). Parece que solo consideran los ángulos rectos asociados a rectángulos.

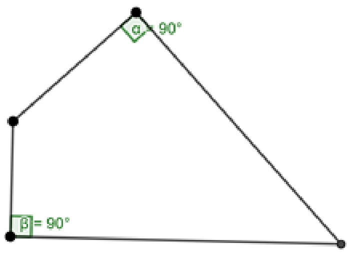


Figura 4. Cuadrilátero con dos ángulos recto y ningún lado paralelo

El 30% de los alumnos dibujó un cuadrado cuando se le pedía un cuadrilátero de dos ángulos rectos y dos pares de lados paralelos, algo incompresible en estudiantes universitarios ya que se enseña que el cuadrado tiene cuatro ángulos rectos desde la enseñanza primaria.

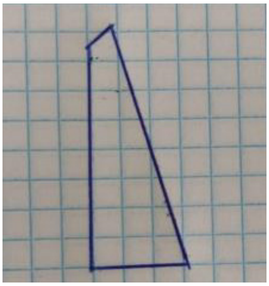


Figura 5. Cuadrilátero con un ángulo recto y ningún lado paralelo

4. CONCLUSIONES

Se ha evidenciado que, pese a enseñarse los cuadriláteros y sus propiedades desde la educación primaria y su uso en diversos problemas, ejercicios y otras actividades propuestas durante toda la formación matemática preuniversitaria, los alumnos universitarios no comprenden cómo se pueden poner de manifiesto varias de sus propiedades (número de pares de lados iguales y número de pares de lados paralelos, número de ángulos rectos y número de lados paralelos). Tienen deficiencias para integrar estas propiedades bajo unas restricciones dadas.

Algunos alumnos no fueron capaces de dar explicación alguna sobre por qué no se podía construir un cuadrilátero con las restricciones solicitadas y se limitaban a dejar en blanco la casilla respectiva. Esto denota que, aunque conocen las propiedades “de memoria" no tienen la capacidad de realizar actividades de intersección de estas para hallar la respuesta o carecen de argumentos matemáticos para dar una razón que justifique el no graficar la respuesta. Este hecho señala que se deban tomar medidas encaminadas a enriquecer el lenguaje y la argumentación matemática soportada en la comprensión de conceptos y propiedades.

Es preocupante observar las carencias que manifiestan los maestros en formación. A la luz de estos resultados y los estudios reseñados, parece que es algo generalizado y coyuntural en la formación geométrica recibida.

5. REFERENCIAS

Bernabéu, M., Moreno, M.., y Llinares, S. (2019). El conocimiento geométrico de los/las estudiantes para maestro/a de educación infantil a través de una tarea de clasificación de cuadriláteros. En *Investigación e innovación en la Enseñanza Superior: Nuevos contextos, nuevas ideas* (pp. 34-44). Octaedro.

Blanco, L. J., y Barrantes, M. (2003). Concepciones de los estudiantes para maestro en España sobre la geometría escolar y su enseñanza-aprendizaje. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, RELIME*, *6*(2), 107-132.

Chinnappan, M. y Lawson, M. (2005). A framework for analysis of teachers'geometric content knowledge and geometric knowledge for teaching. *Journal of Mathematics Teacher Education, 8*(3), 197-221

Escudero-Domínguez, A. y Carrillo, J. (2014). Conocimiento matemático sobre cuadriláteros en estudiantes para maestro. En M. T. González, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVII*I (pp. 267-276). Salamanca: SEIEM.

Fielker, D. S. (1981). Removing the Shackles of Euclid: 1 Classification. Mathematics Teaching, 95, 16-21.

Junta de Andalucía. (2015). Orden de 17 de marzo de 2015, por la que se desarrolla el currículo correspondiente a la Educación Primaria en Andalucía. *Boletín Oficial de la Junta de Andalucía*, *60*.

Jaime, A., Chapas, F., y Gutiérrez, A. (1992). Definiciones de triángulos y cuadriláteros: errores e inconsistencias en libros de texto de EGB. *Epsilon,* 23, 49-62.

Épsilon - *Revista de Educación Matemática* *2021, nº 108, 69-76*

Pensamiento matemático a través de la Educación Plástica: una perspectiva interdisciplinar en una propuesta educativa

Marina Arnal Ferrandiz
Facultad de ciencias de la Educación, Universidad de Córdoba

Resumen: *La propuesta educativa que presentamos a continuación está dirigida a los futuros docentes de la Etapa de Primaria. Se pretende con ello, iniciar un estudio de catalogación y análisis de investigaciones inéditas. En esta propuesta específica se parte de una perspectiva interdisciplinar entre diferentes áreas del conocimiento: el pensamiento matemático y la educación plástica. La propuesta en sí consiste en la formulación de una experiencia didáctica con la realización de un tipo de cometa que presenta como novedad el hecho de no necesitar la intervención del viento para su vuelo, por su extremada ligereza. El texto se desarrolla con explicaciones de meticulosa precisión, acompañadas de dibujos ilustrativos realizados por el profesor José Arnal.*
Palabras clave: *Aprendizaje activo; Educación artística; Matemáticas; Cometas; Enseñanza primaria.*

Mathematical thinking through Plastic Education: An interdisciplinary perspective in an educational proposal

Abstract: *The educational proposal that we present below is created to support future teachers of the Primary school. The idea is to initiate a study of cataloging and analysis of his unpublished research. This specific proposal starts from an interdisciplinary perspective between different areas of knowledge: 'mathematical thinking and plastic education.' The proposal itself consists on the formulation of didactic experience through the making a type of kite which introduce as a novelty due to its extreme lightness weight, it do not need the intervention of the wind to flight. The text is developed with explanations of high precision, accompanied by illustrative drawings made by Professor José Arnal.*
Keywords: *Active learning; artistic education; math; kites; primary education teaching.*

1. INTRODUCCIÓN Y JUSTIFICACIÓN

Hace unos lustros el profesor José Arnal (2002) reflexionaba lo siguiente sobre las matemáticas y la educación artística:

> No obstante haber quedado demostrado (con los teoremas de Gödel) que cuando la razón y la lógica sólo pretendan simplemente sostener sistemas formales, axiomáticamente en un afán de absoluta exclusión de toda ambigüedad, probaremos pues, ahora, a utilizar la razón y la lógica, sin excluir la intuición, como instrumentos válidos para explicar el interés de la Educación Artística en el sujeto, haciendo que con sus experiencias artísticas y creativas logre una vida más plena, fructífera y feliz (p. 28).

La propuesta educativa que presentamos a continuación fue llevada a la práctica durante varios cursos consecutivos por el Profesor D. José Arnal Navarro (1945-2002) primer director del antiguo Departamento de Educación Artística y Corporal de la Universidad de Córdoba (España), fundado en el año 1992 en la entonces denominada "Escuela Universitaria de Formación del Profesorado de EGB", actualmente, Facultad de Ciencias de la Educación.

José Arnal, que durante más de tres décadas impartió la asignatura de Educación Plástica y Visual en la antigua Escuela de Magisterio de Córdoba, era consciente del obstáculo que supone la generalizada percepción, de que todos aquellos aspectos en que se fundamenta la experiencia artística parecen pertenecer a otra categoría diferente a la del pensamiento. En su metodología pedagógica trataba de compensar esta creencia, defendiendo que las imágenes mentales de formas, las configuraciones táctiles y visuales, de sensaciones y sentimientos, son además de esenciales para todo arte, también los son para todo pensamiento auténtico, mediatizado por la lógica (Arnal, 2003).

Partimos de la premisa de que las matemáticas se aprenden utilizándolas y de que el trabajo en el área de las matemáticas en la etapa de Educación Primaria deberá estar basado en la experiencia. El currículo de Primaria parte del desarrollo cognitivo y emocional en el que se encuentra el alumnado de esta etapa, sabemos que los contenidos han de ser abordados de una manera enlazada, atendiendo a una configuración cíclica que conllevará el progresivo desarrollo del pensamiento abstracto. Este punto de partida se fundamenta en las capacidades de los sujetos para analizar y comprender las situaciones, razonar sobre las mismas, generar soluciones y expresar los resultados de manera adecuada. Por ello y en aras de un aprendizaje eficaz se huye de la mera transmisión de conocimientos y procedimientos matemáticos en sí mismos, si sobre ellos no se ha puesto el énfasis en su aplicación a situaciones de la vida real.

La realidad que percibe el alumnado de la Etapa de Primaria es eminentemente plástica, es decir: tangible. Partiendo de aquí, no es difícil concluir que todos los conceptos matemáticos están presentes en ella. La dificultad estaría en aislar esos aspectos y abordarlos de una forma lúdica y efectiva para lograr un aprendizaje eficaz y significativo.

> La matemática ha sido y es arte y juego y esta componente artística y lúdica es tan consubstancial a la actividad matemática misma, que cualquier campo de desarrollo matemático

que no alcanza un cierto nivel de satisfacción estética y lúdica permanece inestable. (Miguel de Guzmán, 1989; p. 62)

Es aquí donde juega un papel importante el uso de una perspectiva interdisciplinar entre diferentes áreas del conocimiento. Este abordaje de la enseñanza configurado de una forma cuidadosa y bien ajustada ayuda sin duda a la comprensión de la realidad que nos rodea en sus diferentes formas y manifestaciones.

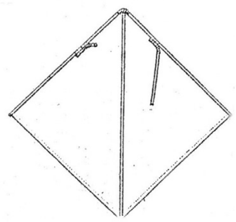
Es por ello por lo que se presenta aquí el estudio de esta propuesta educativa[1], donde conviven la educación plástica y el pensamiento matemático, complementándose mutuamente.

Se presenta la propuesta pedagógica llevada a cabo por el profesor José Arnal tratando de situar una propuesta específica _en este caso la realización de un modelo de cometa dentro de los objetivos, contenidos y criterios de evaluación recogidos en el Real Decreto 126/2014, de 28 de febrero, por el que se establece el currículo básico de la Educación Primaria, con la finalidad de señalar qué aspectos de la propuesta continúan o no vigentes y si la misma podría ser aplicable en la actualidad, abriendo el campo a nuevas actualizaciones de la misma.

1.1. Propuesta de experiencias de construcción de cometas para la asignatura de didáctica de la expresión plástica

1.1.1. Experiencia: Modelo de cometa para volar sin viento:

Se ha diseñado y experimentado un modelo de cometa en extremo ligero, que puede incluso volar sin viento (Fig. 1). Ante esta última afirmación, naturalmente hay que aclarar que si el deslizamiento en ángulo del viento liberándose del empuje sobre la cometa por el límite inferior de la misma, es el factor que la eleva y mantiene en vuelo, no cabe pensar en vuelo posible sin esta acción dinámica del aire respecto a la superficie y posición en ángulo de la cometa; por tanto, si no hay viento, es decir movimiento continuo y unidireccional del aire, el efecto dinámico descrito podrá realizarse mediante el poner en movimiento a la propia cometa. Esta deducción fue la clave para la invención del aeroplano.



1. El material objeto de estudio, es decir, la propuesta educativa de José Arnal, así como los dibujos de todas las figuras pertenecen al acervo familiar de los hijos del profesor y se encuentran aún en proceso de catalogación.

El modelo que hemos experimentado está logrado en el equilibrio de sus componentes actuando de manera similar al aeroplano, es decir, tiende a mantenerse en equilibrio en posición horizontal, como flotando en el aire, sobre el que se desplaza por efecto de la tracción del hilo que la sujeta y le proporciona quién con ella juega, al desplazarse corriendo o incluso andando, con la escasa velocidad de caminar paseando. Es semejante al “ala delta”.

Instrucciones para construir la cometa para “no viento”:

1. Cortamos un cuadrado de papel de seda, con diagonal no mayor a 53 cm., pues esta es la medida del tubito sin el extremo acodado lo que corresponde al lado no mayor a

$$\left(\sqrt{\frac{53^2}{2}}\right) - \ 37\,\text{cm.}$$

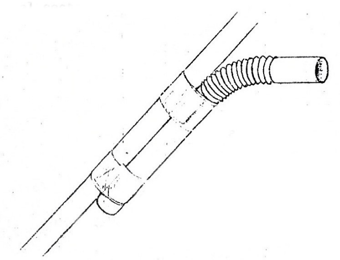
2. Seguidamente se han de reforzar los perfiles, adhiriendo un hilo con pegamento de contacto o cola blanca y cubriéndolo con un dobladillo de 3 a 5mm. del borde del papel (en este modelo sólo se requieren en los lados que se forman en el ángulo inferior). Para simplificar y abreviar la operación, puede valer el cubrir toda la longitud de estos lados con cinta adhesiva.
3. A continuación, tomamos una pajita de refrescos y, tras cortarle la parte flexible del acodamiento, lo adherimos al papel en todo lo largo de la diagonal que corresponde al vértice del ángulo perfilado con refuerzo, utilizando para ello pegamento de contacto. Aplicando la menor cantidad posible sobre una línea a lo largo de todo el tubito y de modo semejante se extiende otra línea de pegamento sobre la susodicha diagonal. Cuando tras unos minutos se hayan secado, de modo que no ofrezcan adherencia al tacto, se pondrán en contacto presionando ligeramente el tubito de plástico sobre el papel y quedarán definitivamente adheridos. El extremo acodado restante se guarda porque se utilizará más tarde.
4. La operación siguiente será formar un ángulo articulando dos tubitos, al introducir el extremo no acodado de uno en la boca del acodamiento del otro. Para facilitar esta operación, con la cuchilla se practicará un pequeño corte longitudinal en el extremo no acodado del tubito que ha de penetrar, de modo que se reduzca el diámetro al superponerse los bordes del corte enrollándose ligeramente (Fig. 2)

Una vez realizado este acoplamiento, se recubre con la menor cantidad posible y suficiente de cinta adhesiva y cortamos el exceso de longitud midiendo desde el vértice 37cm. sobre cada uno de los dos tubitos. El resto más largo incluirá un acodamiento, que se guardará también, porque será de utilidad en la operación final.

Teniendo así esta estructura angular, preparamos su adhesión sobre los lados no reforzados del cuadrado de papel, extendiendo una línea de pegamento en toda la longitud de los tubitos. Es necesario prestar mucha atención a las líneas de pegamento sobre el mismo plano.

5. Ahora es el momento de terminar la estructura de esta cometa. Le falta el elemento transversal que mantendrá la forma diédrica con la que el viento se deslizará en dos vertientes laterales al tiempo que hacia abajo. Ese efecto será el que le proporcionará el gran equilibrio a esta comenta posibilitándoles el vuelo sin necesidad de cola.

Para ajustar la colocación de este elemento transversal señalaremos sobre los tubitos laterales una medida correspondiente a poco más de un tercio de su longitud desde el vértice superior. Haciendo coincidir sobre uno de esos puntos el acodamiento flexible del fragmento pequeño que guardamos tras realizar la operación nº3, de modo que el segmento recto sea sujetado junto al tubito lateral en la parte inferior de la señal marcada, dirigiendo hacia arriba y hacia el eje central la boca en el extremo del sector curvo. Esta parte plisada a modo de fuelle la estiramos todo lo posible antes de fijar en el lugar señalado este fragmento. La sujeción puede efectuarse con dos trocitos de cinta adhesiva (Fig. 3).

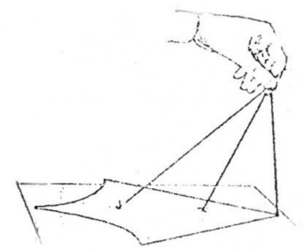


Al otro lado se fijará el otro fragmento restante que se guardó durante la operación nº. 4, de modo que el extremo recto más corto sea fijado sobre la parte superior de la medida marcada, dejando hacia abajo el segmento largo, en cuya punta estrecharemos el diámetro de modo semejante a como se ha explicado en la operación nº. 4, a fin de que pueda introducirse con facilidad en la boca del tubito acodado corto, que se encuentra en el lado opuesto.

Ya está completa la estructura de la comenta. Sólo le faltan los tirantes para enganchar en ellos el hilo que ha de sujetar en vuelo. Si la varilla central fuese más resistente y rígida (sin ser más pesada), bastarían dos puntos de enganche para los tirantes de hilo, pero lo más conveniente es fijar tres puntos: uno en el extremo superior, otro en el primer tercio de la longitud de la varilla central y un tercero en el 2º tercio. Estos tres tirantes se atarán al tubito perforando el papel a ambos lados de este para rodeándolo atarlo por la parte frontal, es decir que el tirante asome extendido en toda su longitud por la cara del papel donde no están las varillas.

Para anudar correctamente estos tres tirantes se toman sus extremos con dos dedos mientras la cometa se deja horizontalmente sobre la mesa con las varillas abajo. Tirando con dos dedos de tres hilos a la vez, pero sin sujetarlos totalmente, deslizamos los dedos hacia arriba de modo que sin que se despegue la cometa de la mesa (la sujetamos un poco con la otra mano), los tres hilos en ligera tensión permanezcan rectos, procurando que el más corto de ellos sea el primero, o sea el que se sujeta en el vértice anterior. El siguiente o central, sea apenas más largo que el primero con que quedará con mayor longitud el tercero. Sin que se pierda la concurrencia de los tres hilos y manteniendo esa proporcionalidad de longitudes, se anudarán juntos en un punto aproximado al lugar donde los sujetábamos (Fig. 4). Desde allí se atará el hilo que mantendrá en vuelo nuestra cometa.

La sustitución de estos tirantes por una horquilla triangular de papel, le da mayor resistencia habilitándola para su uso con viento, pero desfavorece su aspecto cuando la cometa es decorada.



1.2. Criterios de evaluación

Específicos del área de las matemáticas:

1. Aplica con eficacia sus habilidades de razonamiento numérico, cálculo, razonamiento espacial u organización de la información;
2. Clasifica, describe y analiza propiedades de las figuras en el plano y en el espacio;
3. Identifica contenidos relacionados con la orientación y representación espacial, la localización, la descripción y el conocimiento de objetos en el espacio;
4. Conoce las principales propiedades de las formas planas y tridimensionales;
5. Utiliza correctamente los conocimientos geométricos para clasificar de acuerdo a criterios libremente elegidos, construir, dibujar, modelizar y medir;
6. Logra visualizar relaciones geométricas;
7. Expresa verbalmente de forma precisa razonada el proceso seguido;
8. Identifica y resuelve problemas de la vida cotidiana, adecuados a su nivel, estableciendo conexiones entre la realidad y las matemáticas y valorando la utilidad de los conocimientos matemáticos adecuados para la resolución de problemas;

9. Desarrolla estrategias para medir figuras de manera exacta y aproximada;
10. Utiliza nociones geométricas de regularidad, paralelismo, perpendicularidad, simetría, geometría, perímetro y superficie para describir y comprender situaciones de la vida cotidiana;
11. Conocer las figuras planas; cuadrado, rectángulo, romboide, triangulo, trapecio y rombo.

Específicos del área de la Educación Artística:
1. Conoce el manejo básico de los instrumentos y materiales propios del dibujo técnico manejándolos adecuadamente;
2. Utiliza el punto, la línea y el plano al representar el entorno próximo y el imaginario;
3. Organiza el espacio utilizando conceptos básicos de composición, equilibrio y proporción;
4. Maneja los materiales e instrumentos de manera adecuada, cuidando el material y el espacio de uso;
5. Explica con la terminología aprendida el propósito de su trabajo y las características del mismo;
6. Confecciona obras tridimensionales con diferentes materiales planificando el proceso y eligiendo la solución más adecuada a sus propósitos en su producción final;
7. Identifica los conceptos de horizontalidad y verticalidad.

2. CONCLUSIONES

Una de las finalidades del desarrollo de la competencia matemática en la Educación Primaria es la de identificar conceptos y procedimientos matemáticos aplicables. En cuanto a los objetivos generales se busca el desarrollo progresivo de capacidades relacionadas con el área como la deducción, la inducción, la estimación, la aproximación, la probabilidad, la precisión, el rigor, la seguridad. En relación con los objetivos específicos queda expresado de forma explícita el estudio de las formas y sus propiedades, asignándole un papel relevante a los aspectos manipulativos en la construcción de modelos y estructuras espaciales.

A través del planteamiento de estos ejercicios y con una finalidad notoriamente lúdica, se suscita una situación de incertidumbre cuya resolución es la consecución del objetivo final: el vuelo de la cometa. Para lograrlo, es necesario poner en marcha mecanismos de pensamiento matemático al tiempo que una correcta ejecución plástico-constructiva. En este sentido la propuesta de Arnal ofrece abundantes ejemplos y situaciones que ponen en marcha procesos, estrategias de aproximación y estimación; métodos y actitudes matemáticas para su desarrollo, que favorecen el éxito de un aprendizaje efectivo.

Como conclusión y tras el estudio de esta interesante propuesta abalada por la práctica pedagógica, constatamos que cumple con los objetivos, contenidos y criterios de evaluación recogidos en el Real Decreto 126/2014, de 28 de febrero, por el que se establece el currículo básico de la Educación Primaria. Es por tanto perfectamente aplicable en la actualidad, y siempre estará abierta a nuevas actualizaciones.

3. REFERENCIAS

Arnal, J. (2003). ¿Podemos confiar en la lógica? En Domínguez, P. M. (Coord*.): Educación Plástica y Visual Hoy: Fundamentos, experiencias y nuevas perspectivas* (págs. 25-40). Sevilla: Océano Ediciones-H.S.

De Guzmán, M. (1989). Juegos y matemática. *Revista Suma,* 4, 61-64

Real Decreto 126/2014, de 28 de febrero, por el que se establece el Currículo básico de la Educación Primaria.

Épsilon - *Revista de Educación Matemática* *2021, nº 108, 77-92*

Una unidad didáctica transversal sobre Topología básica y sus relaciones con los nudos marineros

José Manuel de los Santos Castro
I.E.S. Punta del Verde (Sevilla)
Silvia González Galindo
Enrique Martín García Martín
María Teresa Moyano Dávila
Juan Núñez Valdés
Universidad de Sevilla

Resumen. *En este artículo se presenta un estudio teórico-práctico en forma de unidad didáctica dirigida a los alumnos de Matemáticas de Secundaria y Bachillerato, referida a la Topología y sus relaciones con los nudos marineros, programada para ser llevada a la práctica en tres años, si bien únicamente se ha podido experimentar en el primero de ellos debido a la pandemia causada por la Covid-19. El principal objetivo es facilitarle al profesorado de Matemáticas de estos niveles nuevos recursos metodológicos que permitan motivar e interesar a los alumnos por esa disciplina.*
Palabras Claves: *Unidad didáctica. Enseñanza Secundaria y Bachillerato; Topología; Nudos Marineros; Gamificación.*

Transversal didactic unit on basic topology and its links to marine knots

Abstract. *This article shows a Didactic Unit aimed at Secondary and Baccalaureate Mathematics students and referred to Topology and its applications to sea knots, programmed to be put into practice in three years, which could only be developed in the first of them due to the pandemic caused by Covid-19. The main objective is to provide teachers at these levels with new methodological resources that allow students to be motivated and interested in Mathematics.*
Keywords: *Didactic unit. Secondary Education and Baccalaureate; Topology; Sea knots; Games.*

1. INTRODUCCIÓN

Aunque pudiera parecer que son materias que no tienen nada que ver la una con la otra, la fabricación de un nudo marinero y la Topología presentan algunas características comunes y comparten en cierto modo algunas técnicas de construcción. En Topología, a partir de un trozo de cuerda cerrada se pueden “fabricar” circunferencias, polígonos, otros tipos de curvas cerradas, etc, siempre bajo la condición de “*sin cortar ni pegar*”, indicándose al respecto que todas esas figuras resultantes de “manipular” esa cuerda son “topológicamente equivalentes”. Con referencia a los nudos marineros ocurre una cosa relativamente parecida: a partir de una cuerda se pueden fabricar una serie de nudos que los patrones de barcos usan para atracarlos, amarrarlos y anclarlos, nudos que comúnmente son denominados “nudos marineros”. De ahí que pueda considerarse de manera natural la preparación y construcción de estos nudos como una más de las relaciones de la Topología con la vida real.

Por ello, a raíz de la experiencia recogida en las visitas anuales que realizan los miembros del equipo de investigación en Didáctica y Metodología de las Matemáticas, dirigido por uno de los autores de esta comunicación a Institutos de Secundaria y Bachillerato, los autores, en su momento un profesor universitario, tres alumnos del último curso de un doble grado de Matemáticas y Estadística y un profesor de Secundaria, decidieron elaborar una Unidad Didáctica transversal (en adelante, UD) sobre Topología y juegos topológicos e introducción al conocimiento de los nudos marineros más elementales, como aplicación de dichos juegos, dado que hasta el estado actual de sus conocimientos, esa unidad no se encontraba en la literatura. Y no solo pensaron elaborarla, sino también llevarla después a la práctica y experimentarla en tres centros de enseñanza secundaria.

En este artículo se presentan las principales características teóricas de esa UD (obviamente de manera reducida por razones de extensión. No se olvide que una unidad de estas características puede alcanzar tranquilamente más de 50 páginas), así como una breve descripción de las actividades realizadas en su puesta en práctica en el primero de los años previstos, dada la imposibilidad de haberla podido continuar en los dos siguientes a causa de las restricciones promulgadas con motivo de la pandemia de la Covid-19.

Con la elaboración de esta UD se pretende facilitarle al profesorado de Secundaria y Bachillerato nuevos recursos metodológicos que permitan hacerles ver a los alumnos algunas de las aplicaciones prácticas de las Matemáticas y con ello motivarles e interesarles por su estudio. Para su mejor comprensión se recomiendan las lecturas de (Gardner, 1986), (Grupo Alquerque, 2005), (Web1) y (Web2) sobre juegos topológicos, y (Biosca, 2001) o (Perry, 2009) sobre nudos marineros.

Para terminar esta introducción y con el objetivo de contextualizar temporalmente esta aportación y como ya se ha indicado, es conveniente enfatizar que la redacción de la misma se encuentra enmarcada en plena situación de la pandemia mundial causada por la Covid-19, ya una vez iniciado en España el periodo de confinamiento el 14 de marzo de 2020. Los autores esperábamos que esta situación no se prolongara tanto tiempo, por lo que hasta ahora habíamos decidido esperar un tiempo sin publicarla, al objeto de que la actividad pudiese estar completamente finalizada, decidiendo ya su publicación en vistas de que la situación no se espera que se resuelva del todo en un tiempo más o menos cercano.

Describimos a continuación las principales partes de las que consta esta UD, centrándonos de manera especial en el comentario de las sesiones puestas en práctica, en las dificultades detectadas en su desarrollo y en las propuestas que se podrían implementar para mejorarlas.

2. CONTEXTUALIZACIÓN DE LA UNIDAD DIDÁCTICA

La UD se deseaba poner en práctica en tres Institutos de Enseñanza Secundaria, dos de Sevilla capital, el Ramón Carande y el Punta del Verde y uno de la provincia, el Arrabal de Carmona, dado que los profesores que integraban los departamentos de Matemáticas de los mismos habían dado su consentimiento para que se pudiera experimentar en esos centros (de hecho, el profesor de secundaria autor de este artículo estuvo trabajando en uno de los de Sevilla el primer año y después fue destinado al otro de la capital, mientras que el profesor universitario había sido profesor en la carrera de varios profesores del departamento de Matemáticas del de la provincia, los cuales llevaban ya algún tiempo colaborando con él en estas actividades).

Por las razones de extensión antes indicadas no vamos a extendernos aquí en contextualizar tanto esos centros como los entornos en los que se encuentran o las características de sus departamentos de Matemáticas, que por otra parte pueden consultarse en sus páginas webs respectivas. Tan solo diremos que los tres centros tienen ya una antigüedad y suficiencia probadas y gozan de una muy buena reputación en el ámbito educativo sevillano.

3. JUSTIFICACIÓN DE LA UNIDAD DIDÁCTICA

Esta UD no tiene en principio una justificación normativa para un curso y nivel concretos, pues al tener el carácter de transversal, puede ser puesta en práctica no solo en un nivel sino en los dos últimos cursos de Secundaria y los dos de Bachillerato. De hecho, la idea de los autores era que al segundo año en un mismo centro se realizase no solo con alumnos nuevos sino también pudiesen atenderla alumnos que ya la hubiesen experimentado, al objeto de contrastar el grado de cumplimiento de los objetivos propuestos.

Sin embargo, puede ser muy bien justificada desde el punto de vista histórico. Como ejemplo concreto, sobre juegos topológicos existe una abundante literatura y páginas webs que pueden consultarse sin mayor dificultad (véanse las referencias anteriormente citadas). Asimismo, dentro de las aplicaciones de esta rama de las Matemáticas, la elaboración de nudos marineros data prácticamente del principio de los tiempos y tiene un poso histórico muy bonito de ser narrado. Y también puede ser justificada por su adecuación a la vida real, dado que facilita grandemente la consecución de las capacidades de destreza, soltura, pericia y maña, muy útiles para la resolución de cualquier tipo de problema.

4. OBJETIVOS DE LA UNIDAD DIDÁCTICA

Dos son los principales objetivos de esta UD. El primero, poner a disposición de los profesores de Matemáticas de Secundaria y Bachillerato una experiencia ya realizada en la que se muestran una serie de juegos topológicos, normalmente no conocidos por los alumnos de esos niveles, que pueden ser usados por esos profesores para conseguir diferentes objetivos, entre los que destacaríamos, aparte el fundamental de conseguir una mayor motivación e interés de los alumnos por esta disciplina, los de potenciar varias cualidades y habilidades de los alumnos, como pueden ser la visión espacial, la agudeza visual, la imaginación y sobre todo, la capacidad de razonamiento y de utilización de estrategias para conseguir un determinado fin y todo ello con el propósito final de obtener una mayor autoconfianza y autoestima en los alumnos para el estudio de las Matemáticas. Y el segundo, mostrar una posible relación existente entre la Topología y la elaboración de nudos marineros, habida cuenta de que la destreza y la pericia que se pueden conseguir con el dominio y manejo de los juegos topológicos pueden ser muy útiles para construir nudos marineros, tanto los ya conocidos como otros de elaboración propia, siguiendo las mismas o parecidas técnicas que se aplican en la resolución de los juegos topológicos.

5. METODOLOGÍA, CONTENIDOS Y TEMPORIZACIÓN, NÚMERO Y TIPO DE LAS SESIONES

La UD estaba prevista que se llevase a cabo en 10 sesiones a realizar en 3 cursos académicos, 5 en las aulas de los respectivos centros y otras 5 en forma de talleres en el patio de los mismos. Todas las sesiones se realizarían entre febrero y mayo de cada año, de la forma que se describe a continuación:

Tabla 1. Características de las sesiones de la UD

Sesión	Año Académico	Lugar	Tipo sesión	Duración
S1	2018-2019	IES R. Carande	Aula	3 horas
S2	2018-2019	IES R. Carande	Taller	2,5 horas
S3	2019-2020	IES Punta Verde	Aula	3 horas
S4	2019-2020	IES Punta Verde	Taller	2,5 horas
S5	2019-2020	IES R. Carande	Aula	1 hora
S6	2019-2020	IES R. Carande	Taller	2,5 horas
S7	2020-2021	IES Arrabal	Aula	1 hora
S8	2020-2021	IES Arrabal	Taller	2,5 horas

Sesión	Año Académico	Lugar	Tipo sesión	Duración
S9	2020-2021	IES Punta Verde	Aula	1 hora
S10	2020-2021	IES Punta Verde	Taller	2,5 horas

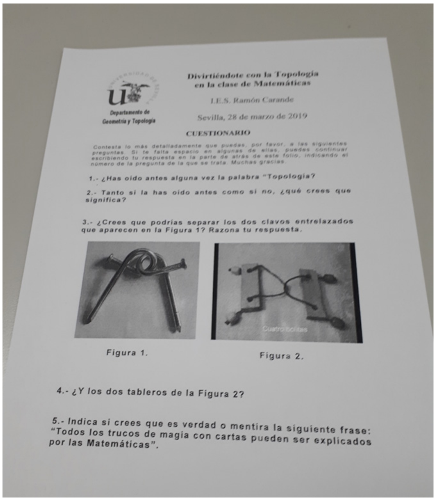
Tal como se ha indicado anteriormente, esta UD estaba planteada para ser desarrollada en 10 sesiones, entre los cursos 2018-19 y 2020-21, si bien la pandemia ocasionada por la Covid-10 solo ha permitido que se realizasen una sesión de aula (la S1) y otra de taller (la S4, que por cierto tuvo lugar exactamente dos semanas antes del 14 de marzo de 2020, fecha de inicio del confinamiento en España a causa de la pandemia).

Por lo que se refiere a los contenidos y a la metodología, la actividad que se realizó en el aula tuvo lugar en el IES Ramón Carande, en tres horas distintas de la mañana del 21 de febrero de 2019, aprovechando las horas de clase del horario del profesor de secundaria autor de este artículo. Se trabajó la primera hora con alumnos de un grupo de 2º ESO, la segunda con alumnos de 4ª ESO y la tercera con alumnos de 2º Bachillerato. Su contenido fue el mismo para todos los alumnos independientemente del nivel en el que se encontraban. Es conveniente indicar, asimismo, que se contaba con el permiso de la dirección del centro para la realización de esta actividad, que había informado a su vez a los padres de los alumnos de que esta se iba a realizar.

Una vez ya en clase, uno de los autores les explicó muy brevemente a los alumnos en qué iba a consistir la actividad y los objetivos que se pretendían conseguir con la misma. Después se les pasó un cuestionario anónimo a los alumnos, dándoles entre 5 y 8 minutos para rellenarlo, al objeto de disponer por parte de los autores de una serie de datos que nos permitiesen hacer un análisis cuantitativo de la experiencia, aparte del propiamente cualitativo. Las preguntas de las que constaba este cuestionario, fueron las siguientes (se omiten espacios entre ellas. Véase Figura 1):

Divirtiéndote con la Topología en la clase de Matemáticas
I.E.S. Ramón Carande
Sevilla, 28 de marzo de 2019
CUESTIONARIO

Contesta lo más detalladamente que puedas, por favor, a las siguientes preguntas. Si te falta espacio en algunas de ellas, puedes continuar escribiendo tu respuesta en la parte de atrás de este folio, indicando el número de la pregunta de la que se trata. Muchas gracias.
1.- ¿Has oído antes alguna vez la palabra “Topología?
2.- Tanto si la has oído antes como si no, ¿qué crees que significa?
3.- ¿Crees que podrías separar los dos clavos entrelazados que aparecen en la figura de la izquierda? Razona tu respuesta.
4.- ¿Y los dos tableros de la figura de la derecha?
5.- Indica si crees que es verdad o mentira la siguiente frase: “Todos los trucos de magia con cartas pueden ser explicados por las Matemáticas”.



Departamento de Geometría y Topología

Divirtiéndote con la Topología en la clase de Matemáticas

I.E.S. Ramón Carande

Sevilla, 28 de marzo de 2019

CUESTIONARIO

Contesta lo más detalladamente que puedas, por favor, a las siguientes preguntas. Si te falta espacio en algunas de ellas, puedes continuar escribiendo tu respuesta en la parte de atrás de este folio, indicando el número de la pregunta de la que se trata. Muchas gracias.

1.- ¿Has oido antes alguna vez la palabra "Topologia?

2.- Tanto si la has oido antes como si no, ¿qué crees que significa?

3.- ¿Crees que podrias separar los dos clavos entrelazados que aparecen en la Figura 1? Razona tu respuesta.

Figura 1. Figura 2.

4.- ¿Y los dos tableros de la Figura 2?

5.- Indica si crees que es verdad o mentira la siguiente frase: "Todos los trucos de magia con cartas pueden ser explicados por las Matemáticas".

Figura 1. El Cuestionario. Fuente: Elaboración propia

Tras la cumplimentación del cuestionario, se les propuso a los alumnos la realización de una serie de juegos topológicos, de manipulación de objetos geométricos, con breves explicaciones teóricas posteriores de los resultados obtenidos. El objetivo que se pretendía era constatar que un alumno de cualquier nivel de los anteriormente reseñados es totalmente capaz, a pesar de su edad, de comprender a partir de explicaciones muy elementales los principios más básicos de la Topología, disciplina que en la Universidad de Sevilla actualmente se cursa en el segundo de los cuatro años del Grado en Matemáticas, es decir, dos cursos después de la finalización de los estudios de Bachillerato de los alumnos.

Con los cuestionarios ya recogidos y rellenos, uno de los autores les explicó brevemente a los alumnos, antes de empezar a practicar con ellos los juegos topológicos, que:

> La Topología es la rama de las Matemáticas dedicada al estudio de las propiedades de los cuerpos geométricos que permanecen inalteradas, es decir, que no cambian, cuando esos objetos se doblan, se estiran, se encogen, se retuercen, etc., pero siempre que se haga sin romper ni separar lo que estaba unido, ni pegar lo que estaba separado.
>
> Por ejemplo, un triángulo es topológicamente equivalente, es decir, es lo mismo, que una circunferencia, ya que podemos transformar uno en otro de forma continua, sin romper ni pegar. Pero una circunferencia no es lo mismo que un segmento, ya que habría que partirla o pegar sus dos mitades al romperla por algún punto.

Tras realizarles algunas preguntas a los alumnos sobre si habían entendido bien lo que se les había comentado e incluso pedirles a dos o tres de ellos que habían contestado afirmativamente que pasaran ellos mismos a explicárselo de nuevo al resto de sus compañeros, lo que por cierto alguno hizo bastante bien, los autores les plantearon a los alumnos la primera actividad: la que podríamos denominar "*Enredados*".

Para ello, las dos autoras pasaron a atarse cada una de ellas sus muñecas con una cuerda preparada al efecto, de manera que ambas cuerdas quedaran entrelazadas e invitaron al resto de alumnos, que se habían agrupado por parejas a su completa elección, a que hiciesen lo mismo con las cuerdas que se le repartieron a cada pareja (véase la parte superior de la Figura 2, izquierda).

Una vez ya todas las parejas convenientemente entrelazadas, las autoras y sin que el resto de parejas vieran cómo lo hacían, pasaron a soltarse sin mayor problema y a pedirles a las parejas formadas por los alumnos que trataran también de soltarse.

Entre los alumnos, lo más común fue que intentaran desliarse tratando de pasar la cuerda sobre sus cabezas y alrededor de su cuerpo con nulo resultado, pues solo conseguían o volver a la posición inicial o enredarse aún más. Tras varios intentos, al observar que ninguna pareja conseguía el objetivo, las dos autoras procedieron a mostrarles cómo se desataban para intentar que se dieran cuenta de cuál era la clave para resolver esta prueba.

La solución consiste en darse cuenta de que el único "agujero" existente es el pequeño hueco que queda entre la muñeca y la cuerda atada a ella, que es suficientemente pequeño como para que no se la puedan quitar, pero lo suficientemente grande como para que pueda pasar otro trozo de cuerda por medio.

Este juego es muy atractivo ya que requiere la interacción de dos personas e incluso puede asociarse a la magia matemática. Además, para practicarlo tan sólo se necesitan dos trozos de cuerda y dos personas a las que les gusten los retos.

En esta actividad pudimos observar que los alumnos de segundo y cuarto de ESO intentaron buscar la solución de una manera más activa e impulsiva, moviendo su cuerpo y probando distintas posiciones. Por otro lado, los alumnos de bachillerato trataron de afrontar el juego de una manera más intelectual, pues en lugar de moverse trataban de razonar cual era la vía óptima para resolver este enigma.

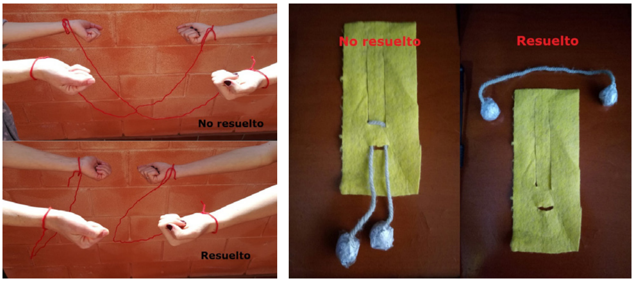


Figura 2. Juego "Enredados" en su estado inicial y resuelto (izquierda) y juego de las Bolas en Fieltro en su estado inicial y resuelto (derecha). Fuente: Elaboración propia

En la siguiente actividad se repartieron dos tipos de enigmas para que intentasen resolverlos. Para ello dividimos a los estudiantes en pequeños grupos, de entre 2 y 4 personas, y les dimos uno a cada grupo que, tras resolverlo, tenían que intercambiarlo con otro grupo que tuviese el juego diferente.

En el primer juego, al que llamamos "*Bolas en Fieltro*", tenemos una cuerda con una bola en cada uno de los extremos y un trozo de fieltro, al que le habíamos hecho varios orificios, entrelazados tal y como se muestra en la Figura 2, derecha. El objetivo es separar el fieltro y la cuerda, advirtiendo que las bolas no se pueden pasar por el orificio pequeño.

En sus primeros intentos, los alumnos trataron de pasar la cuerda por encima del fieltro (lo cual no sirve absolutamente para nada, ya que se vuelve a la posición inicial: es como si le hubieran aplicado la identidad), y posteriormente procedieron a aplicarle distintos movimientos a la cuerda, sin éxito. Algunos, a pesar de las advertencias previas, seguían tratando de pasar la cuerda por el agujero de menor tamaño.

Tras varios intentos y tras ver que algunos grupos no avanzaban, las autoras pasaron a darles un par de pistas a los estudiantes, como por ejemplo que trabajasen con la maleabilidad del fieltro. Finalmente revelaron que la solución consistía en deformar el fieltro, pasando la tira central por el hueco por donde salen los extremos de la cuerda.

El segundo juego, que presentamos como "*El enigma de los tubos*", consistía en dos tubos al que atamos una anilla a cada uno de ellos mediante cuerdas entrelazadas, de la forma que se muestra en la figura 3. La longitud de la cuerda no es mayor que la longitud del tubo, impidiendo por tanto sacar la anilla por debajo del tubo (Figura 3, izquierda).

Figura 3. El enigma de los tubos en su estado inicial y resuelto (izquierda) y juego de las Coronas Laberínticas, también en su estado inicial y resuelto (derecha).
Fuente: Elaboración propia

Uno de los autores les proporcionó a los alumnos la pista de que, para resolver este juego, la estrategia a seguir era similar a la del juego titulado "*Enredados*". Algunos estudiantes, haciendo caso omiso a esta pista, trataron de sacar las anillas por los extremos inferiores de cada tubo, llegando incluso a romper algunos de estos. Por lo demás, la mayoría se dieron cuenta de la similitud que presentaba con el juego anteriormente indicado y consiguieron resolverlo rápidamente.

El siguiente juego, al que llamamos "*Coronas Laberínticas*", estaba provisto de una corona circular que tenía por cada lado un laberinto distinto. Unido a ella había otra corona circular con una abertura y dos salientes que eran por los que tenían que salir del laberinto para conseguir separar ambas piezas, tal y como se muestra en la Figura 3, derecha.

Pasando ahora de las sesiones de aula a los talleres, el único taller realizado tuvo lugar en el IES Punta del Verde, de Sevilla capital, el 27 de febrero de 2020, de 11:30 a 14 horas, con motivo de la celebración conjunta del 28 de febrero (Día de Andalucía, anticipada al día lectivo anterior) y del V centenario de la vuelta al mundo de Magallanes y Elcano.

Para la realización del taller se montaron dos mesas en el patio del instituto, una de ellas con varios modelos de cada uno de los juegos que se trataron en la actividad de aula, y de otros nuevos, de dificultad similar, para que los alumnos pudieran participar en ellos y otra segunda mesa especialmente destinada a enseñarles los diferentes tipos existentes de nudos marineros y cómo la Topología puede ayudar a formarlos, deshacerlos y sobre todo a crear otros nuevos de mayor o menor consistencia por lo que se refiere a que puedan ser desatados con más o menos facilidad.

En la mesa de los nudos se colocaron varios ejemplares de un boletín sobre nudos marineros y su conocimiento básico, elaborado por los autores de este artículo y a disposición de los alumnos para su consulta, cuyo contenido era el siguiente:

- ACTIVIDAD 1: Considera las letras (en mayúsculas) del abecedario: A B C D E F G H I J K L M N Ñ O P Q R S T U V W X Y Z. Agruparlas según la siguiente propiedad: se puede transformar una en otra de manera continua, deformándola sin romperla ni pegarla. Por ejemplo: I y J estarían en el mismo grupo.
- Actividad 2: Aprender a construir los nudos marineros más básicos y elementales, entre los cuales pueden citarse los siguientes: *“Lazo”, “Enganche de cala”, “Enganche de clavo”, “Ballestrinque”, “Medio enganche” y “Ocho*”. En lo que sigue, a uno de los extremos de la cuerda lo llamaremos “extremo A” y a los dos extremos, indistintamente, “cuernos”.

5.1. El Lazo

El nudo marinero denominado “*lazo*” se usa para crear un bucle al final de una cuerda, lo que puede ser útil por varias razones, desde asegurar una cuerda hasta un apilamiento, hasta unir dos cuerdas. La gran ventaja que tiene sobre otros nudos que también se usan para lo mismo es que es muy fácil de deshacer, incluso aunque la cuerda haya estado sometida a una gran tensión. La forma de realizarlo es la siguiente:

- Paso 1: Hacer un pequeño bucle en la cuerda un poco antes del final y después pasar los extremos de la cuerda a través de ese bucle.
- Paso 2: Envolver el extremo alrededor de la cuerda por encima del bucle, girar el extremo hacia abajo y volverlo a pasar por el bucle.
- Paso 3: Tirar con fuerza del extremo de la cuerda por encima del bucle que se ha formado con objeto de ajustar el nudo.

5.2. El Enganche de cala

Este nudo es asombrosamente fácil de realizar. Se construye de la siguiente manera:

- Paso 1: Envolver la cuerda alrededor de un lado de la base de un listón que colocaremos debajo de la misma.
- Paso 2: Tirar de la línea a lo largo de la parte superior de la cala y luego enrollarla debajo del cuerno en el otro lado.

- Paso 3: Invertir las direcciones y atravesar la parte superior de la cala en sentido contrario.
- Paso 4: Para terminar el enganche de la cala, invertir la dirección nuevamente como si fuera a envolver nuevamente debajo del cuerno opuesto. Pero en lugar de pasar la línea debajo de ella, formar un pequeño bucle y darle la vuelta. Colocar el lazo que acaba de hacerse sobre el cuerno y tirar con fuerza para que la línea se ajuste sobre sí misma. Después, repetir el mismo proceso, en el segundo cuerno de la cala.

5.3. El Enganche de clavo

Este nudo es útil cuando se quiere asegurar una línea a un riel y puede hacerse de dos formas distintas.

5.3.1. Método 1

- Paso 1: Envolver la línea una vez alrededor del riel o poste.
- Paso 2: Empezar a enrollar alrededor del riel por segunda vez, con la línea cruzando la parte superior de la primera envoltura. Terminar la segunda vuelta, pero antes de apretarla, pasar el extremo A por debajo. Después, tirar para asegurar el enganche de clavo en su lugar.

5.3.2. Método 2

Si se está atando un enganche de clavo a un poste con un extremo accesible, se puede hacer este nudo de forma más fácil y rápida, con el mismo resultado.

- Paso 1: Hacer un bucle y pasarlo por el extremo del poste.
- Paso 2: Hacer un segundo bucle y darle la vuelta para que el extremo A quede frente al primer bucle. Después, tirar de él con fuerza.

Hay que tener en cuenta, no obstante, que si la línea no está sometida a una ligera presión todo el tiempo, o si gira sobre el riel o el poste, se puede deshacer. Por ello, no debe usarse nunca este nudo para tareas pesada. En este caso, puede agregarse un nudo de medio nudo encima de un nudo de clavo, para estar seguros.

5.4. Nudo de Medio enganche (o nudo por encima de la mano)

Es el nudo más simple posible de hacer, aunque no es fiable para asegurar nada por sí solo, por lo que se recomienda acompañarlo de otros nudos diferentes. Para formarlo basta pasar el extremo A a través de la cuerda, jalarlo a través del bucle que se acaba de hacer y tirar de él.

5.5. El nudo Ocho

Se prepara de la siguiente manera

- Paso 1: Hacer un bucle en la línea.
- Paso 2: Envolver el extremo A sobre la línea y pasarlo de nuevo a través del bucle.
- Paso 3: Tirar de ambos extremos para ajustarlo firmemente, o presionar el nudo para ajustar su posición y luego ajustarlo con fuerza.

5.6. Nudo de bonificación: bucle a bucle

Este es más una táctica que un nudo, y además requiere dos cuerdas. Se usa para unir dos líneas con bucles en sus extremos entre sí y es muy fácil y rápido de hacer. Basta con pasar el extremo A de una línea a través del bucle de otra cuerda y luego pasarlo por el bucle en su otro extremo. Luego, tirar del extremo A hasta que los dos bucles se junten.

5.7. El nudo Ballestrinque

El ballestrinque es un nudo cuyo origen se encuentra en la tradición náutica. Se usa para sujetar un cabo a un poste o mástil, aunque como puede aflojarse por cambios en la tensión, suele complementarse con un nudo de seguridad sobre la misma cuerda para evitar esta posibilidad. Se prepara según:

- Paso 1: Rodear la cuerda sobre el palo
- Paso 2: Hacer un nudo normal (entrelazando y tirando) alrededor del palo.

Algunos de estos nudos marineros pueden verse en la Figura 4.

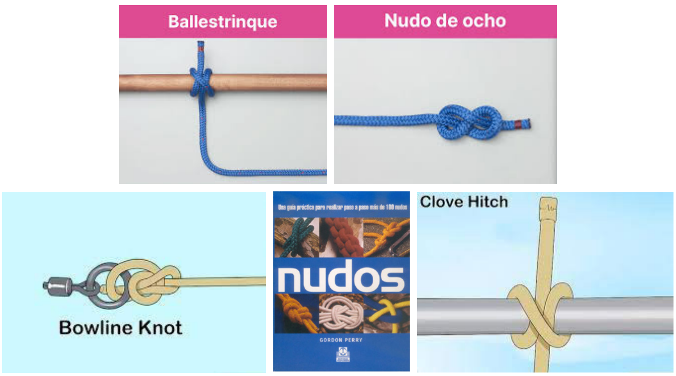


Figura 4. Algunos nudos marineros. Fuente: (Perry, 2009) y (Web 3)

6. RECURSOS DE LA UNIDAD DIDÁCTICA

Para las actividades de aula se utilizó el siguiente material, fácil de conseguir e incluso de construir por el propio profesorado, como fue nuestro caso (véase Figura 5):

- **a)** Cuestionario de 5 preguntas sobre Topología.
- **b)** 40 cuerdas para entrelazar a los alumnos
- **c)** Juego topológico de "Enredados".
- **d)** Juego topológico de "Bolas en fieltro".
- **e)** Juego topológico de "El enigma de los tubos".
- **f)** Material de papelería: tijeras, folios, papel celo y tiras de cartulina apropiadas para la experimentación con los diferentes juegos.

Para el taller, además de todos los materiales anteriormente indicados, que se complementaban con otros juegos topológicos más (que no describimos aquí por razones de extensión), como "*Pirámide enjaulada", "pirámides de bolas", "anillas", "bucles" y "giros"*, entre otros, todos los cuales se trataban en una de las dos mesas que se usaron, en la otra mesa se dispusieron algunos rollos de cuerda, tijeras propias de talleres para el alumnado y varios modelos de cada tipo de nudos marineros básicos y alguno que otro de mayor dificultad, invitándose a los alumnos a que, primero los desenrollasen y luego los volviesen a formar, e invitándolos también a que ellos formasen sus propios nudos y actuasen como profesores ante el resto de sus compañeros, todo ello estando en todo momento asesorados por los componentes de la mesa.

Figura 5. Diversas instantáneas del taller, con las mesas y dos profesoras del centro "piratas" tratando de soltarse. Fuente: Elaboración propia

7. EVALUACIÓN DE LA UNIDAD DIDÁCTICA

En toda unidad didáctica debe existir un apartado referido a la evaluación, que contemple tanto la evaluación del alumnado como la propia autoevaluación de la actividad y del profesorado.

Obviamente, en este caso no ha lugar a una evaluación cuantitativa del alumnado, puesto que no se le ha sometido a ninguna prueba o control que mida sus conocimientos, interés, trabajo o desarrollo de competencias, pero sí cualitativa, pues los autores del artículo sí podemos dar fe del entusiasmo, ilusión y sobre todo ganas de participar y aprender que mostraron los alumnos de todos los centros en los que se puso en práctica la unidad, tanto en la actividad de aula como, más incluso aún, en la de taller.

También en este punto podemos mostrar las respuestas dadas por algunos grupos de alumnos que realizaron la actividad de aula, al objeto de que le sirva como patrón comparativo a los profesores que se animen a repetirla en sus clases.

En la Tabla 2 se detallan las respuestas de dos grupos de alumnos a las preguntas de dicho cuestionario. En A/B, la A significa el número de respuestas de los 19 alumnos de un grupo de 4º ESO y la B la de los11 alumnos de un grupo de Bachillerato. Las respuestas SÍ, sin más aclaraciones, se denotarán por Sí (-), mientras que las respuestas SÍ seguida de algún matiz o razón se denotarán por Sí (+). Y análogamente para las respuestas NO. La notación NS/NC denota las respuestas No sabe o No contesta (en ellas se incluyen también las respuestas sin sentido o absurdas dadas por los alumnos).

Tabla 2. Respuestas al cuestionario de alumnos de ESO (izquierda) y Bachillerato (derecha)

Pregunta	Sí (-)	Sí (+)	No (-)	No (+)	NS/NC
1	8/4	3/0	8/5	0/0	0/2
3	3/4	5/3	3/2	3/0	1/2
4	4/4	4/1	5/3	2/2	1/1

- Para la pregunta 2, las respuestas más frecuentes fueron
  - algo relacionado con la tierra: 4/4
  - algo relacionado con juegos de matemáticas: 4/2
  - algo relacionado con medicina: 1
  - NS/NC: 10/5.

- Para la pregunta 5, las respuestas fueron:
  - Verdad: 13/8
  - Falso: 5/1
  - NS/NC: ½.

Por lo que respecta a la autoevaluación de la actividad por parte del profesorado, basta decir que todos los autores del artículo salimos completamente entusiasmados de todas y cada una de las tres sesiones que se desarrollaron, en las que nosotros también aprendimos de los alumnos y estábamos deseosos de incluir algunas de sus intervenciones y reflexiones en las siguientes sesiones, cuya realización ya no fue posible a causa de la pandemia.

Por todo ello y prescindiendo de cuestionarios de autoevaluación de la actividad o rúbricas adecuadas, manifestamos nuestro enorme contento por lo ya realizado y nuestras ganas y deseos de volver a ponerla en práctica cuando la situación sanitaria vuelva a permitirlo.

No obstante, incluimos a continuación un nuevo apartado de la unidad, que completa todo lo anteriormente indicado

8. DIFICULTADES DETECTADAS Y PROPUESTAS DE MEJORA

Salvo la imposibilidad de realizar toda la actividad completa tal como estaba programada a causa de la situación pandémica sobrevenida, que nadie podía prever a escasísimos días de su aparición, no se han detectado serias dificultades ni producido graves problemas en las sesiones realizadas, salvo quizás el hecho de que las sesiones con los alumnos de menor edad fueron algo densas y no se pudieron realizar todos los juegos que se habían previsto para las mismas, dado que aparte de la menor falta de concentración y atención que estos alumnos presentaban y a su natural nerviosismo, sí es posible que habría que distinguir mejor entre el tipo y sobre todo el número de los juegos que se proponen para estos alumnos, a diferencia de los propuestos para el último curso de Secundaria o de Bachillerato.

Por ello, y como propuestas de mejora, los autores planteamos las siguientes. La primera, de menor entidad, llevar menos juegos topológicos a las sesiones con los alumnos de menor edad, que sean además ligeramente más básicos que los que se les proponen a los mayores.

La segunda, más general, aunque forzada por la situación que se ha vivido, tener previsto un Plan B de actuación, de tipo virtual u online para seguir realizando la actividad de aula en los tiempos en los que el trabajo presencial no ha sido posible, si bien tenemos que reconocer, con toda sinceridad, que por el momento no nos hemos planteado cómo hacerlo, en parte porque esperamos y deseamos que esta situación finalice en el menor tiempo posible.

La tercera, tratar de ahondar bastante más en las explicaciones de los conceptos matemáticos subyacentes en la actividad, lo cual no se pudo hacer por cuestiones de tiempo.

La cuarta, relativa ya a los talleres, incorporar a las sucesivas ediciones del taller, sobre todo para alumnos de altas capacidades, al objeto de fomentar la diversidad, algunos otros tipos de nudos de mayor complicación. Entre ellos podríamos citar (por orden alfabético) los nudos de/del *Ahorcado, As de Guía (y variantes), Bandolero, Barrilete, Boca de lobo, Boza, Calabrote, Cirujano, Cuadrado, Gancho con vuelta, Gaza, Llano, Llano múltiple, Margarita, Palangre, Pescador, Pescador Doble, Tejedor y Trébol*.

Y la quinta, también para el taller, darles más protagonismo y tiempo a los chavales que hayan resuelto alguno de los juegos o elaborado nudos para que sean ellos mismos los que actúen de monitores o profesores de sus compañeros enseñándoles cómo hacer lo que ellos mismos han hecho. Para ello, obviamente hay que animarlos a esta tarea, ya que en nuestra experiencia nos encontraos con la típica frase o similar: "*yo sé hacerlo, pero no sé explicarlo*", ante la que inicialmente cedimos y no tratamos de convencer a sus autores de que hiciesen al menos el intento.

9. OTROS APARTADOS DE LA UNIDAD DIDÁCTICA

Otros apartados básicos y fundamentales de una Unidad Didáctica, como los de Competencias, Estándares de evaluación, Clima de clase y Atención a la Diversidad, no se han tratado específicamente en la unidad, aunque pueden considerarse implícitamente comentados en los ya indicados, por lo que omitimos en este artículo un tratamiento más extenso de los mismos. Aparte de estos, los de Conocimientos previos no son necesarios en esta UD y la Bibliografía coincide con la que se da como propia del artículo.

10. BREVES REFLEXIONES DE LOS AUTORES

La puesta en práctica de la UD propuesta ha servido para darles a entender a los alumnos que las Matemáticas no son sólo operaciones aritméticas o de otro tipo sin sentido, sino que estas se aplican y existen en muchas otras ocasiones de la vida cotidiana, que en principio no parecen tener relación alguna con esa disciplina.

Los autores, además, también consideramos muy importante el hecho de que, al menos durante el tiempo que han durado las sesiones, los alumnos se lo hayan pasado bien con las Matemáticas, hayan podido disfrutar con ellas, y librarse de la percepción de que es esta es una disciplina árida y monótona, de la que ellos apenas entienden nada y cuyo único objetivo al cursarla es aprobarla y poder librarse de ella en un futuro próximo.

Por todo ello, los autores creemos firmemente que actividades como esta, aunque no sea posible realizarlas con mucha frecuencia por razones obvias, pueden contribuir mucho a la valoración de la asignatura por parte de los alumnos y pueden ayudar además a que estos tengan una comprensión más completa de lo que son las Matemáticas y las vean de otra forma más atractiva y positiva, que les lleve a interesarse más por ellas, estudiarlas más y conocer sus aplicaciones y disfrutar de las mismas, aunque eso sí, siendo siempre conscientes de que aunque con las Matemáticas se puede “jugar”, estas no son un “juego” y por tanto, requieren de un esfuerzo e interés grandes del alumno para su aprendizaje.

11. AGRADECIMIENTOS

Los autores desean hacer constar la colaboración en el taller y valiosa ayuda prestada en su realización por varios compañeros/as, alumnos/as de los grados y dobles grados de la Facultad de Matemáticas (algunos ya egresados): Sabrina Fortes Lorenzo, Ángela Guisado López, Antonio Hidalgo Torné, María Isabel Prados Gómez, Luis Rabasco González, Zhixiang Chen, y una compañera de la Facultad de Económicas, María del Rocío Romo García, gracias a todos los cuales la actividad tuvo un rotundo éxito y fue muy reconocida y alabada por todo el profesorado y alumnado del centro. A todos ellos, nuestro más sincero agradecimiento (véase Figura 6).

Figura 6. Algunos de los autores y los colaboradores en la organización y desarrollo del taller. Fuente: Elaboración propia

12. BIBLIOGRAFÍA

Biosca Rolland, C. (2001). Enciclopedia de los nudos. Arganda del Rey: Edimat Libros.

Gardner, M. (1986). Rosquillas anudadas y otras amenidades matemáticas. Barcelona: Labor.

Grupo Alquerque (2005). Juegos Topológicos. Recuperado el 8 de junio de 2021 de http://www.grupoalquerque.es/ferias/2005/topologicos/j_topo.htm

Perry, Gordon (2009). Nudos. Una guía práctica para realizar paso a paso más de 100 nudos. Zaragoza: Paidotribo.

Web1: Página web de Juegos Didácticos (2017). Recuperado el 8 de junio de 2021 de: http://thales.cica.es/system/files/JUEGOS-THALES.pdf

Web2: Página web de Juegos Topológicos. Materiales Didácticos Bernal (2017). Recuperado el 8 de junio 2021, de http://www.bemal.net/Juegos-topologicos

Web 3. Blog de nudos marineros (sin fecha). Recuperado el 8 de junio de 2021, de https://blog.clickandboat.com/es/cinco-nudos-marineros-basicos/