107

2021

épsilon

Revista de Educación Matemática

Editada por la S.A.E.M. "THALES"

epsilon 107

Revista de Educación Matemática

Página de la revista: http://thales.cica.es/epsilon
Revista: epsilon@thales.cica.es

Sociedad Andaluza de Educación Matemática "Thales"

Edita
Sociedad Andaluza de
Educación Matemática "Thales"
Centro Documentación "Thales"
Universidad de Cádiz
C.A.S.E.M.
Facultad de Ciencias
Departamento de Matemáticas
Campus del Río San Pedro
Torre Central, 4ª planta
11510 Puerto Real (Cádiz)
Teléfono: 956012833
Email: thales.matematicas@uca.es

Maquetación
referencias.maquetacion@gmail.com

Depósito Legal
SE-421-1984

ISSN
2340-714X

Período
2021
Suscripción
Anual

SUMARIO / CONTENTS

Épsilon - *Revista de Educación Matemática* *2021, nº 107, 7-22*

ABP en la escuela secundaria: análisis de la gestión de un proyecto sobre el crecimiento de plantas y sus vínculos con la matemática

Emanuel Ángel Berardi
Esc. de Educ. Secundaria N°17 "Pueblos Originarios"
Mar del plata, Buenos Aires, Argentina.
emanuel_20mdq@live.com
Ana Rosa Corica
CONICET – NIECyT- UNCPBA
Tandil, Buenos Aires, Argentina
acorica@exa.unicen.edu.ar

Resumen: *Las nuevas propuestas ministeriales para la escuela secundaria en Argentina proponen un estudio codisciplinar, como medio para superar la fragmentación de la enseñanza y del aprendizaje, proponiendo el diálogo, la articulación y la vinculación entre los saberes. Con fundamento en la Teoría Antropológica de lo Didáctico analizamos la gestión del saber matemático en el desarrollo de un proyecto codisciplinar vinculado al estudio del crecimiento de plantas. Los principales resultados indican que el trabajo por proyectos posibilitó que los protagonistas sean los estudiantes: estos formularon y respondieron preguntas logrando autonomía y responsabilidad para la búsqueda de información en diversas fuentes.*
Palabras clave: *Aprendizaje Basado en Proyectos, Escuela Secundaria, Matemática.*

PBL at high school: analysis of project management on plant growth and its links to mathematics

Abstract: *The new ministerial proposals to high school in Argentina propose a co-disciplinary study, as a means to overcome the fragmentation of teaching and learning, proposing dialogue, articulation and the link between knowledge. Based on the Anthropological Theory of Didactics, we analyze the management of mathematical knowledge*

in the development of a co-disciplinary project linked to the study of plant growth. The main results indicate that project work enabled the protagonists to be the students: they asked and answered questions, achieving autonomy and responsibility for the search for information from various sources.
Keywords: *Project-Based Learning, High school, Mathematics.*

INTRODUCCIÓN

En Argentina se han implementado evaluaciones nacionales de aprendizajes desde hace más de dos décadas. Aprender es el operativo de evaluación que se desarrolla anualmente desde el año 2016, y permite obtener información acerca de los niveles de desempeño alcanzados por los estudiantes que se encuentran cursando la educación obligatoria. Desde que se implementa esta evaluación para observar los desempeños en el área de matemática, los resultados no son los deseados (Secretaría de Innovación y Calidad Educativa, 2018). En los últimos años, en Argentina se propuso un cambio de la educación secundaria fundamentado en el enfoque del Aprendizaje Basado en Proyectos (ABP), como una posible solución al problema de los resultados desalentadores en la escuela secundaria (Ministerio de Educación de la Nación, 2017).

Las nuevas propuestas ministeriales sostienen un estudio interdisciplinar, el que tiene como objetivo superar la fragmentación de la enseñanza y el aprendizaje, proponiendo el diálogo, la articulación y la vinculación entre los saberes. Los problemas complejos que se plantean en las sociedades actuales requieren de la integración de saberes provenientes de las distintas disciplinas a fin de ser analizados y sintetizados en un saber integrado que posibilite crear productos, plantear interrogantes a fin de construir diferentes explicaciones o propuestas de solución a esos problemas. Se orienta a que los estudiantes aborden los hechos desde una visión global, no fragmentada, que les permita dar significado a los desafíos que se les presentan y la oportunidad de desarrollar el conocimiento en la participación activa. Esta perspectiva demanda a los docentes desarrollar un trabajo pedagógico conjunto, cooperativo, articulado, a fin de organizar la enseñanza desde un diálogo entre los conceptos, las metodologías, los procesos y procedimientos y la propuesta de actividades interdisciplinarias (Ministerio de Educación de la Nación, 2017).

El trabajo interdisciplinario a través de los saberes coordinados y el aprendizaje basado en proyectos y problemas favorece el trabajo colaborativo y cooperativo; crea espacios de diálogo y genera oportunidades de intercambio y discusiones en torno de situaciones relevantes para los estudiantes por medio de nuevas propuestas curriculares; de esta manera se exige desarrollar capacidades para investigar e innovar, ser creativos y hacer uso de los medios y recursos que contribuyan a optimizar los procesos de enseñanza y de aprendizaje (Dirección de Educación Secundaria de la Provincia de Buenos Aires, 2017).

En la provincia de Buenos Aires en Argentina, las nuevas propuestas ministeriales se han comenzado a experimentar a partir del programa de Escuelas Promotoras. Este programa tiene como propósito contribuir a mejorar las trayectorias escolares y los aprendizajes de los estudiantes del nivel secundario, disminuir las tasas de repitencia y abandono escolar, incrementar la terminalidad/ graduación y aportar al clima escolar en general. En el año 2018 se dio inicio a esta experiencia pedagógica, implementándose en 600 escuelas de la Provincia de Buenos Aires, 295 de gestión estatal y 305 de gestión privada. La implementación comenzó por el primer año de la educación secundaria básica (Dirección de Educación Secundaria de la Provincia de Buenos Aires, 2018).

En este trabajo se reportan resultados de una investigación desarrollada en una escuela secundaria que se encuentra dentro del programa Escuelas Promotoras.

Objetivo:

El objetivo de la investigación es comprender la gestión del saber matemático en el desarrollo de un proyecto codisciplinar, en el que trabajaron de manera cooperativa un profesor de matemática y otro de biología para el estudio del crecimiento de las plantas.

EL APRENDIZAJE BASADO EN PROYECTOS

William Heart Kilpatrick trazó las bases de la *metodología por proyectos* a principios del siglo XX. Esta propuesta sostiene una "filosofía experimental de la educación" (Kilpatrick, 1967b, 72) en la que el conocimiento se adquiere a través de la experiencia. Así mismo, critica la fragmentación del conocimiento en materias, asignaturas o áreas, porque aprender aisladamente significa que "el alumno no ve o siente la utilidad o pertinencia de lo que se enseña para ningún asunto que le interesa en el presente, y por tanto no se adhiere inteligentemente a la situación actual" (Kilpatrick, 1967a, 49). De esta manera, se propone un nuevo programa escolar en el que las áreas se reúnan "desde el punto de arranque de las necesidades del alumno" (Kilpatrick, Rugg, Washburne y Bonner, 1967, 29). En esta propuesta se incorporan las ideas de John Dewey adoptando una concepción más participativa, comprometida e implicada de la escuela (op. cit, 1967b, 64). No todos los proyectos comparten la misma finalidad, en particular, Kilpatrick propone cuatro tipos de trabajo por proyectos según la finalidad: elaboración de un producto final; conocer un tema y disfrutar con su conocimiento o experiencia; mejorar una técnica o habilidad concreta; o resolver un problema intelectual desafiante para el protagonista (Masferrer y Baqueró, 2014).

En la enseñanza por proyectos los estudiantes aprenden de su propia experiencia. De manera cooperativa los estudiantes buscan información, la manipulan, la ordenan y la presentan convenientemente, examinan nuevas fuentes, buscan en internet. De esa forma, plantean problemas, hipótesis, las resuelven, se confunden, reflexionan, piden ayuda, se coordinan con los compañeros, deciden, actúan; todo esto con la finalidad de saciar la curiosidad del tema propuesto de manera consensuada. Como en cualquier trabajo en equipo cada estudiante asume un papel diferente en el mismo: de liderazgo, conciliador, creativo, pasivo o ácrata. A la hora de cooperar puede ocurrir que todos los componentes del grupo aporten de la misma manera, que se produzcan descompensaciones o que la cooperación desaparezca. En esta tercera vía los estudiantes más dominantes atenúa la participación de aquellos más tímidos, tal y como ocurre en la enseñanza tradicional. El profesor debe reconducir estas situaciones para que todas las personas puedan tener voz dentro del grupo. También es normal que un área actúe como motor de un proyecto. No obstante, es necesario explorar vías para que todas las áreas curriculares tengan presencia, siempre y cuando dicha presencia no sea forzada; con la finalidad de no perpetuar la clásica división entre áreas de mayor y menor reconocimiento social y curricular. Es una disyuntiva en la que el profesor dentro de su papel como director del estudio debe elegir la opción más conveniente (Masferrer, Baqueró, 2014).

MARCO TEÓRICO

En esta investigación se adopta como referencial teórico a la Teoría Antropológica de lo Didáctico (Chevallard, 1999, 2013, 2017). El plan de renovación de la escuela secundaria Argentina (Ministerio de Educación de la Nación, 2017) adopta un paradigma pedagógico en el que los objetivos educativos que promueve, los medios que considera útiles y los fenómenos a los que reacciona son genéricos, independientes de las disciplinas específicas. Sin embargo, esta propuesta no resulta suficiente para atender a la problemática de aprendizaje de la matemática en Argentina que fue reportada en el último año (Secretaria de Innovación y calidad Educativa, 2018). Para atender esta problemática se requiere de un paradigma didáctico, el cual depende de una disciplina escolar concreta y de una manera de organizar su proceso de estudio. En el caso particular de la matemática Gascón y Nicolás (2018) lo denominan paradigma didáctico - matemático. Un paradigma pedagógico presupone una forma de interpretar la educación escolar globalmente, la que considerada y responde a determinados fenómenos que afectan al proceso de estudio escolar en su conjunto. Por su parte, un paradigma disciplinar didáctico-matemático asume una forma específica de interpretar la educación matemática, responde a fenómenos disciplinares y propone fines y medios más operativos. En particular, el ABP y la TAD comparten los mismos valores epistemológicos, que es el rol otorgado al proceso de indagación y a las respuestas existentes en la cultura. La TAD constituye un marco que se vincula con diferentes formas de procesos de indagación, resultando ser compatible con el paradigma pedagógico que se proyecta para la escuela secundaria en Argentina. Este referencial sostiene un cambio en la concepción de la enseñanza y en particular de la Matemática proponiendo el paradigma del cuestionamiento del mundo. Esta resulta ser compatible con el ABP, siendo que el estudio codisciplinar es el eje central de ambos enfoques. En esta perspectiva, la actividad escolar es más que resolver problemas: se trata de formular y responder peguntas, buscar en diferentes medias, desarrollar diferentes técnicas, realizar conjeturas, validar soluciones, interactuar con otros miembros de la comunidad de estudio, cotejar resultados, técnicas, validaciones, etc. El paradigma del cuestionamiento del mundo implica la realización de un conjunto de gestos didácticos por parte de alumnos y de profesores que se sintetizan en: actitud de problematización (reconocer la problematicidad de las situaciones vividas y formular las preguntas), actitud herbartiana (disposición a aceptar preguntas que aún no fueron respondidas), actitud procognitiva (estar preparado para estudiar y aprender campos de conocimiento nuevos), actitud exotérica (supone permitirse no saber, aún en el dominio de la propia especialidad) (Chevallard, 2012). En esta propuesta, el profesor tiene que desplazarse del papel de protagonista principal hacia un profesor que *crea circunstancias*. En particular, en este paradigma, al igual que en el enfoque de ABP el profesor se aleja totalmente del transmisor de contenidos, del ejecutor de lo que dicen otros o del experto en estrategias de aprendizaje y competencias básicas. Lejos de tratarse de un profesor ausente, se trata de un director del proceso de estudio y de investigación, capaz de incidir oportuna y eficazmente para hacer evolucionar el estudio.

METODOLOGÍA

En esta investigación se propone una metodología cualitativa de corte exploratoria, descriptiva e interpretativa (Hernández; Fernández; Baptista, 2016). Se describe la gestión de un proyecto codisciplinar desarrollado por un profesor de matemática y un profesor de biología, en una escuela secundaria argentina. El proyecto se originó a partir de las nuevas disposiciones ministeriales que implica el trabajo conjunto de profesores de diferentes disciplinas (Dirección de Educación Secundaria de la Provincia de Buenos Aires, 2019). El proyecto se inició con la proyección de un video que tiene como propósito comprender el crecimiento de las plantas. En particular, la matemática ocupa un lugar destacado para describir este comportamiento a partir de la sucesión de Fibonacci.

El desarrollo del proyecto requirió de 22 clases, que equivalen a 44 horas reloj. En la estructura actual de la escuela secundaria de la provincia de Buenos Aires representó 18 horas del espacio de matemática y 26 horas del espacio de biología. De las 26 horas de biología, en 16 horas se desarrolló una actividad conjunta de los dos profesores. Esto constituyó una modificación de la estructura actual de la escuela secundaria, siendo que si bien el plan de renovación de la escuela secundaria argentina interpela por un trabajo interdisciplinario, aun la estructura de la institución escolar no contempla espacios en los que tenga oportunidad el trabajo conjunto de profesores con los estudiantes.

Para cada sesión de la implementación, el investigador realizó notas de campo, y se recogió las producciones escritas de los estudiantes para su análisis.

Características del curso en el que se desarrolló la investigación

El proyecto se desarrolló en un curso de tercer año, en una escuela secundaria pública de gestión privada en Argentina, que participa de la experiencia Escuela Promotora desde 2018. En 2017 esta escuela, como proyecto institucional, comenzó a trabajar en ABP, por lo que se trata de una escuela con tres años de experiencia en la gestión de enseñanza en saberes coordinados.

En el curso en el que se desarrolló el proyecto se destinan cuatro horas semanales para estudiar matemática (segmentadas en dos encuentros de dos horas) y dos horas semanales para estudiar biología (que se desarrollan en un encuentro de dos horas). El curso estaba compuesto por 33 estudiantes cuyas edades oscilaban entre 14 y 15 años.

Los profesores para llevar a cabo esta propuesta, decidieron realizar distintos encuentros con los estudiantes: algunos de ellos se desarrollaron en conjunto con los dos profesores y otros por separado. La primera clase, en la que participaron los dos profesores, se realizó como actividad introductoria en el marco de la neurociencia, específicamente la biodanza. Esta consistió en trabajar con el cuerpo a través de un objeto (globos) donde los estudiantes tenían que realizar distintas actividades en las que se requería la ayuda de compañeros. Esto se realizó para fortalecer el trabajo en equipo y así consolidar la dinámica vincular entre pares, y poder comprender la importancia que tiene para la realización de este proyecto la cooperación de compañeros y docentes.

Durante las diferentes sesiones que contempló el desarrollo del proyecto, en los espacios de cada materia, los estudiantes trabajaron en pequeños grupos (compuestos por 4 o 5 estudiantes), realizaron las distintas tareas propuestas y compartieron con toda la comunidad de estudio sus producciones.

Una de las fases del estudio requirió que los estudiantes busquen información. La institución en la que se desarrolló la investigación cuenta con biblioteca y acceso a internet. Esto posibilitó realizar búsquedas en la institución según la demanda de los grupos, siendo que también se contó con notebooks y celulares aportadas por los estudiantes.

Para realizar la toma de apuntes los alumnos utilizaron el Método Cornell. Este método consiste en tomar una hoja y situarla de forma vertical, y sobre el papel dibujar una línea horizontal a 5 cm de borde inferior, y la mitad superior se divide en dos zonas mediante una línea vertical dibujada a 6 cm del borde izquierdo. Los apuntes se escriben en la zona de la derecha, mientras que en el margen izquierdo se indica alguna palabra o idea clave para cada párrafo; de tal manera que el área inferior se reserva para hacer un resumen de la página y anotar las dudas que puedan surgir. Ese método se implementa desde el año 2016 en la institución y se aplica en todas las materias de los seis años. Esto posibilita que los estudiantes cuenten con una herramienta útil y práctica para poder estudiar. La principal ventaja de este método es que organiza y estructura la forma de tomar apuntes. Así también permite estudiar del apunte de forma más sencilla porque la idea de tener una sección lateral para anotar conceptos, claves y preguntas posibilita observar los apuntes, tapar con la mano o una hoja la sección principal mientras se lee la columna izquierda y constatar si el lector puede responder las preguntas planteadas.

ANÁLISIS DEL PROYECTO DESARROLLADO EN LA ESCUELA SECUNDARIA

El proyecto que se describe a continuación tiene como objetivo que los estudiantes analicen el crecimiento de plantas. Esta propuesta fue originada por un profesor de matemática y uno de biología, quienes trabajaron de forma cooperativa en la gestión del proyecto.

El desarrollo de la propuesta requirió que los estudiantes cultivaran una planta en sus hogares, la sometieran a diferentes situaciones y registren el comportamiento de la planta a medida que transcurrían los días. La difusión de los resultados del proyecto tuvo lugar en la Feria de Ciencias de la institución, en la que participan todos los estudiantes de la escuela y puede ser visitada por público en general.

En el marco del proyecto que se describe en este trabajo, dos profesores en sus espacios curriculares, dieron lugar a la realización de otros proyectos. El profesor a cargo de la materia Construcción de la Ciudadanía generó una propuesta con los estudiantes con fines solidarios: propusieron donar las plantas cultivadas a distintos hogares de abuelos de la ciudad. A su vez, la profesora a cargo de la materia Plástica propuso la construcción de bosquejos relacionados con plantas mediante el empleo de diversas técnicas.

A continuación se describen las cinco fases que contempló el proyecto desarrollado. En la primera fase los profesores propusieron analizar un video en el que se expone el vínculo de la matemática con el análisis del crecimiento de plantas. Esto generó que se formularan pares de preguntas y respuestas vinculadas a la matemática y a la bilogía. La segunda fase consistió en que los estudiantes cultivaran plantas bajo determinadas condiciones y registraran sus comportamientos. La tercera fase consistió en que los alumnos formularan y respondieran nuevas preguntas en función de la experimentación realizada. En la cuarta fase del estudio se realizó el análisis de los datos recogidos, y finalmente en la quinta fase se organizó la presentación de la experiencia y los resultados para la feria de ciencias de la escuela.

Primera fase del estudio: formulación y estudio de preguntas en torno a la disposición de hojas en plantas y la sucesión de Fibonacci.

En primer lugar, los profesores propusieron a los estudiantes mirar un video que se puede acceder mediante el siguiente link: https://www.youtube.com/watch?v=dfQ0sjk_r08 En este video se describe cómo la matemática modeliza el mundo de las plantas, específicamente, cómo en el crecimiento de las hojas de una planta se vincula a la sucesión de Fibonacci. La tarea de los estudiantes consistió en mirar el video y realizar apuntes mediante el Método de apuntes Cornell.

A continuación, los profesores propusieron a los estudiantes que formularan preguntas sobre la información que brinda el video. Esto requirió que los profesores también aporten preguntas con el propósito de animar a los alumnos a formular las propias, siendo que no estaban habituados a generar y estudiar sus propias preguntas. Las cuestiones propuestas por los estudiantes fueron las siguientes:

$Q_{1:}$ *¿Qué es una sucesión?*
$Q_{2:}$ *¿Quién es Fibonacci?*
$Q_{3:}$ *¿Qué es la sucesión de Fibonacci?*
$Q_{4:}$ *¿Cómo crece una planta?*

Estas preguntas se derivan directamente del video proyectado. Las tres primeras preguntas se refieren a nociones matemáticas, y la cuarta pregunta hace referencia a nociones de biología. Siendo acotado el número de preguntas formulado por los estudiantes y en función de la información que brinda el video, el equipo de profesores tomó la decisión de aportar las siguientes preguntas vinculadas a la biología, que tienen como propósito analizar el crecimiento de plantas según se alteran diversas condiciones del medio, tales como: exposición a ruidos, acceso al agua y al oxígeno.

Q_5: *¿Es verdad que las plantas pueden oír? ¿Cómo afecta la música al desarrollo y crecimiento de las plantas?*
Q_6: *¿Qué sucede cuando la planta es expuesta a estrés hídrico?*
Q_7: *¿Qué sucede en la fase clara y oscura de la planta?*
Q_8: *¿Qué le sucede a las estomas ante la restricción de oxígeno?*

Una vez que se acordaron las preguntas a estudiar los profesores propusieron a los estudiantes responder las preguntas formuladas.

Los estudiantes, en pequeños grupos, realizaron un informe conteniendo las respuestas a las preguntas que surgieron en esta etapa. Para dar respuesta a estas preguntas, los alumnos acudieron a diferentes fuentes de información (libros, revistas científicas y páginas web).

Segunda fase del estudio: experimentación

Para la segunda fase del estudio los profesores solicitaron a los estudiantes una planta. Esta podía ser la que alumnos decidieran, considerando que sea perenne, tal como alguna planta aromática, para que puedan observar los cambios de las mismas durante un lapso de tiempo prolongado. Las plantas estuvieron 3 meses en la casa de los estudiantes, y fueron sometidas a condiciones favorables, adversas y combinaciones de condiciones favorables y adversas.

Cada grupo de estudiantes realizó un estudio distinto en la planta a su cargo y así poder compartir los resultados de las distintas experiencias. Los integrantes de cada grupo tenían asignado roles específicos: algunos se ocupaban de redactar los avances de la investigación, otros se ocupaban del cuidado de la planta y el registro del comportamiento, otros se encargaban de ir armando la carpeta de campo para la presentación en la feria.

Los profesores acordaron con los estudiantes las pautas para el cuidado de la planta y los registros a realizar en una tabla de la evolución de la misma. Para esto, los estudiantes tuvieron que tener en cuenta:

- Lugar en que se ubica la planta (fuera o dentro de la casa).
- Cantidad de hojas de la planta.
- Forma de riego.
- Las horas que permanecen sin luz solar.
- Tipo de experiencia musical a la que es expuesta la planta y cambios que se observan en su crecimiento.

Las pautas acordadas para el cuidado de las plantas se indican en la tabla 1. Las condiciones hídricas fueron propuestas por los profesores mientras que las condiciones sonoras y lumínicas quedaron a cargo de los estudiantes.

La propuesta de las condiciones a las que debían ser sometidas las plantas, indicadas en la tabla 1, fueron establecidas por los profesores. Estas responden a los factores que engloban las respuestas a las preguntas Q_5, Q_6 y Q_7. Queda excluida en esta propuesta el factor oxígeno que fue abordado en la respuesta a Q_8. El control de variables resulta ser pobre en esta propuesta, siendo que por ejemplo para el caso 1 y el caso 2 los cambios que se producen en la planta no resultan ser claro a qué factor se debe: en los mismos periodos de toma de datos se proporciona la misma cantidad de agua y se altera a la vez la cantidad de horas de exposición al sol y el sonido al que son sometidas las plantas. Esto hace que no se pueda identificar específicamente a qué factor se debe el cambio detectado en las plantas.

Tabla 1. Pautas para el cuidado de la planta

Caso 1. Condiciones favorables	**Caso 2. Condiciones desfavorables**	**Caso 3. Combinación de condiciones favorables y desfavorables**
Poner una taza de agua (250cm^3) cada 4 días.	Poner dos tazas de agua (250cm^3) cada 4 días.	Los alumnos realizarán una combinación de los dos casos anteriores, alternando.
Poner cada tantos días música relajante.	Poner cada tantos días música fuerte.	
Exponerla todos los días a la luz solar (un par de horas).	Exponerla algunos días a la luz solar.	

Otra de las indicaciones que dieron los profesores al realizar la experiencia fue que cuando los estudiantes rieguen la planta tengan en cuenta la siguiente fórmula correspondiente a la tasa de almidón. Se destacó que para el transcurso de esta investigación, el porcentaje que arroja esta expresión aporta datos específicos de cuánto azúcar y almidón debe reservar la planta para transcurrir su fase oscura.

$$\frac{S}{T} = \text{Tasa de almidón}$$

S= Molécula de almidón (Agua + Luz)

T= Tiempo (4 días = 5760 minutos)

Si bien la tasa de almidón fue introducida por el profesor de biología, este propuso a los estudiantes que buscarán información acerca de la tasa de almidón. Los estudiantes recopilaron información y destacaron que este porcentaje de tasa de almidón brinda la información de la planta cuando no puede utilizar la energía de la luz solar para convertir el dióxido de carbono en azúcares y almidón, por eso debe regular sus reservas de almidón para asegurar que duren hasta el amanecer. En la experiencia que realizaron los estudiantes, se les propuso que realizaran el cálculo de la tasa de almidón cada 4 días. Esto generó que los estudiantes realizaran registros y los organizaran para luego poder comparar entre las tres experiencias y argumentar sobre la importancia de la tasa de almidón en el ciclo de vida de una planta.

Al realizar la experimentación, los estudiantes se enfrentaron a la problemática de organizar la información de sus registros. Los estudiantes con los profesores acordaron recoger los datos en una tabla como la siguiente:

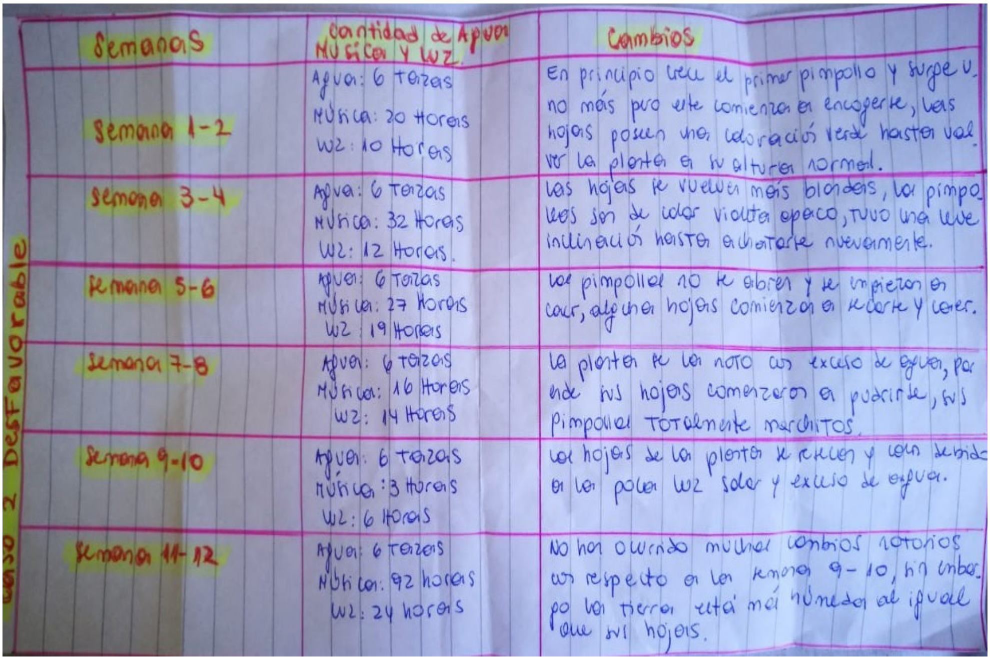
Tabla 2. Tabla de registros para la experimentación

Semana	Cantidad de agua, música y luz	Cambios

En la primera columna de la tabla 2 se recoge el periodo en el que se realiza la toma de datos. Los profesores solicitaron a los estudiantes que realizaran la toma de datos cada 15 días y así poder observar cambios notorios en las plantas. En la segunda columna se recoge las condiciones a la que fue sometida la planta en cada periodo de toma de datos (cantidad de agua proporcionada, tiempo de exposición a la música y cantidad de horas de exposición a la luz solar). En la tercera columna los estudiantes registraron los cambios observados en las plantas.

Cada grupo de estudiantes confeccionó la tabla volcando los datos que fueron registrando durante 3 meses en el que tuvieron que cuidar a la planta. Se destaca que para la experimentación las plantas fueron dadas en las mismas condiciones.

En la Imagen 1, a modo de ejemplo, se indica la tabla propuesta por el grupo 2. En este caso se indican los registros realizados por el grupo 2 quienes experimentaron con una planta que fue sometida a condiciones desfavorables (Caso 2).



Caso 2 Desfavorable

Semanas	Cantidad de Agua Música y Luz	Cambios
Semana 1-2	Agua: 6 Tazas Música: 20 Horas Luz: 10 Horas	En principio crece el primer pimpollo y surge uno más pero este comienza a encogerse, las hojas poseen una coloración verde hasta volver la planta a su altura normal.
Semana 3-4	Agua: 6 Tazas Música: 32 Horas Luz: 12 Horas.	Las hojas se vuelven más blandas, los pimpollos son de color violeta opaco, tuvo una leve inclinación hasta achatarse nuevamente.
Semana 5-6	Agua: 6 Tazas Música: 27 Horas Luz 19 Horas	Los pimpollos no se abren y se empiezan a caer, algunas hojas comienzan a secarse y caer.
Semana 7-8	Agua: 6 Tazas Música: 16 Horas Luz: 14 Horas	La planta se la notó con exceso de agua, por ende sus hojas comenzaron a pudrirse, sus pimpollos totalmente marchitos.
Semana 9-10	Agua: 6 Tazas Música: 3 Horas Luz: 6 Horas	Las hojas de la planta se secan y caen debido a la poca luz solar y exceso de agua.
Semana 11-12	Agua: 6 Tazas Música: 92 horas Luz: 24 horas	No han ocurrido muchos cambios notorios con respecto a la semana 9-10, sin embargo la tierra está más húmeda al igual que sus hojas.

Imagen 1. Protocolo del Grupo 2

En los registros indicados en la Imagen 1 se puede observar que los estudiantes, proporcionaron la misma cantidad de agua a la planta durante el mismo periodo de toma de datos (15 días). En cada periodo se alteró la exposición de la planta en horas a música y luz solar. Esto hace que no sea claro a qué factor se debe el cambio detectado en la planta durante los diferentes periodos. En la tercera columna de la tabla, los estudiantes indicaron cambios en las características de las hojas, en los pimpollos y la forma de la planta. En particular, en la toma de nota de los estudiantes se observa el registro de características cualitativas de la planta y también de los factores a las que atribuyen los cambios en la planta:

"La planta se la noto con exceso de agua, por ende sus hojas comenzaron a pudrirse, sus pimpollos totalmente marchitos"

"Las hojas de la planta se resecan y caen debido a la poca luz solar y exceso de agua"

En las expresiones de los estudiantes se observa que tratan de atribuir a los factores alterados los cambios que observan en la planta. Sin embargo, como todos los factores fueron modificados de manera conjunta no es claro a cuál de ellos se deben los cambios observados en la planta.

En esta presentación también quedaron excluidos aspectos relacionados con el video que se propuso en la fase 1 del estudio. En particular, no se hace mención a la sucesión de Fibonacci. Para poder vincular la experiencia con lo discutido en el video, los registros de los estudiantes deberían haber sido más amplios, registrando aspectos cuantitativos de los cambios de las plantas, como por ejemplo, cantidad de hojas, disposición, altura de la planta, etc.

El análisis de las tablas confeccionadas por cada grupo permitió analizar el comportamiento de la planta durante el periodo de cuidado en las condiciones establecidas. Las plantas como todo ser vivo recibe estímulos (en este caso, luz, agua, nutrientes del suelo) y responden ante ellos para conseguir la máxima efectividad. La respuesta dada por las plantas a los factores propuestos no fue claramente identificada siendo que fueron más de uno modificado al mismo tiempo.

El estudio realizado a la tabla proporcionada por cada grupo generó la formulación de nuevos interrogantes producto de la interacción entre estudiantes y profesores. Las preguntas que se formularon y las respuestas aportadas conforman la fase 3 del estudio.

Tercera fase el estudio: formulación y estudio de nuevas preguntas

En la tercera fase se estudiaron las siguientes preguntas, centradas en nociones matemáticas explicitas en el video que se proyectó en la fase 1, y procurando establecer vínculos entre la biología y la matemática. Los interrogantes propuestos fueron los siguientes:

- Q_{11}: *¿Qué relación encuentran entre el crecimiento de la planta con la sucesión de Fibonacci?*
  - $Q_{11.1}$: *¿Qué es la filotaxia?*
  - $Q_{11.2}$: *¿Qué son los estomas?*
  - $Q_{11.3}$: *¿Cuál es la función de los estomas ante una señal ambiental de luz intensa?*
- Q_{12}: *¿Cómo se relacionan los factores de luz, temperatura, sonido y estrés hídrico para la supervivencia de la planta?*
- Q_{13}: *¿Cuál es la hormona que puede estar involucrada en la fabricación de la glucosa en las plantas?*

En la primera y tercera fase los profesores tuvieron que estimular en los estudiantes la formulación de preguntas y aportar otras para que los estudiantes profundizaran en el estudio. De este modo, el grupo pudo transitar uno de los gestos fundamentales del paradigma del cuestionamiento del mundo que es la dialéctica del estudio e investigación. A pesar de que el análisis de las preguntas derivadas de Q_0 fue regulado por los profesores, los estudiantes asumieron la responsabilidad de búsqueda de respuesta, proponiendo y estudiando situaciones concretas. Destacamos que los alumnos aportaron respuestas con la información mínima y no formularon nuevos interrogantes: la necesidad de indagar fue promovida desde un inicio por los profesores y sostenida por los mismos; no se registraron instancias en las que los interrogantes emerjan de manera espontánea de los alumnos. Las respuestas fueron validadas por los conocimientos de los estudiantes y por la constatación entre los grupos de trabajo y los profesores.

Cuarta fase del estudio: Análisis de datos recogidos

En esta cuarta fase los estudiantes centraron sus actividades en analizar los datos recogidos, recuperando las respuestas a los diferentes interrogantes estudiados en las fases anteriores, y en particular, desde el área de la matemática. Las respuestas estuvieron orientadas a abordar el crecimiento de las plantas y su relación con la sucesión de Fibonacci. Se destaca que los profesores propusieron profundizar en nociones de matemática, siendo que la propuesta de los estudiantes profundizó aspectos de biología.

En esta fase, se profundizó en el análisis del cálculo del porcentaje de la tasa de almidón. En la tabla 3 se indica el cálculo efectuado por 3 grupos de estudiantes, cada uno representante de las tres condiciones diferentes a las que fueron sometidas las plantas.

Tabla 3. Cálculo del porcentaje de la Tasa de Almidón

Semanas	Caso 1 Condiciones favorables	Caso 2 Condiciones desfavorables	Caso 3 Combinación de condiciones favorables y desfavorables
1-2	1,663	1,665	1,662
3-4	1,654	1,67	1,752
5-6	1,65	1,663	1,823
7-8	1,632	1,682	1,895
9-10	1,6156	1,73	1,954
11-12	1,6121	1,871	1,98

En la Tabla 3 se indica el porcentaje de almidón de los tres casos que fueron sometidas las plantas a distintas condiciones durante 12 semanas, en función de los registros realizados por los estudiantes. Se puede observar que en el Caso 1 (Condiciones favorables) al transcurrir las semanas el cálculo realizado para averiguar el porcentaje de almidón que almacenan las plantas, precisamente en la noche cuando estas no disponen de luz solar, se aproxima al número de oro. En particular, en las últimas semanas se puede observar mayor aproximación al número de oro que en las primeras semanas. Se destaca que el cuidado de la planta y la toma de datos fue por tres meses, si se hubiera avanzado en el tiempo, este porcentaje se iba a mantener hasta que la planta volviera a reproducir su ciclo.

En el Caso 2 (Condiciones desfavorables) y el Caso 3 (Combinación de condiciones favorables y desfavorables) el porcentaje de la tasa de almidón tiene una disparidad en todas las semanas a causa de variar las condiciones a las que son expuestas las plantas.

Quinta fase del estudio: Presentación en la feria de la escuela

La etapa final del proyecto consistió en la presentación de la experiencia y sus resultados en la feria de ciencias organizada por la institución. Esta tarea demandó que los estudiantes recuperen todas las fases del proyecto realizado y reorganicen sus resultados para poder comunicar sus experiencias al público en general. En la siguiente imagen se puede observar parte de las producciones de los estudiantes para la feria.

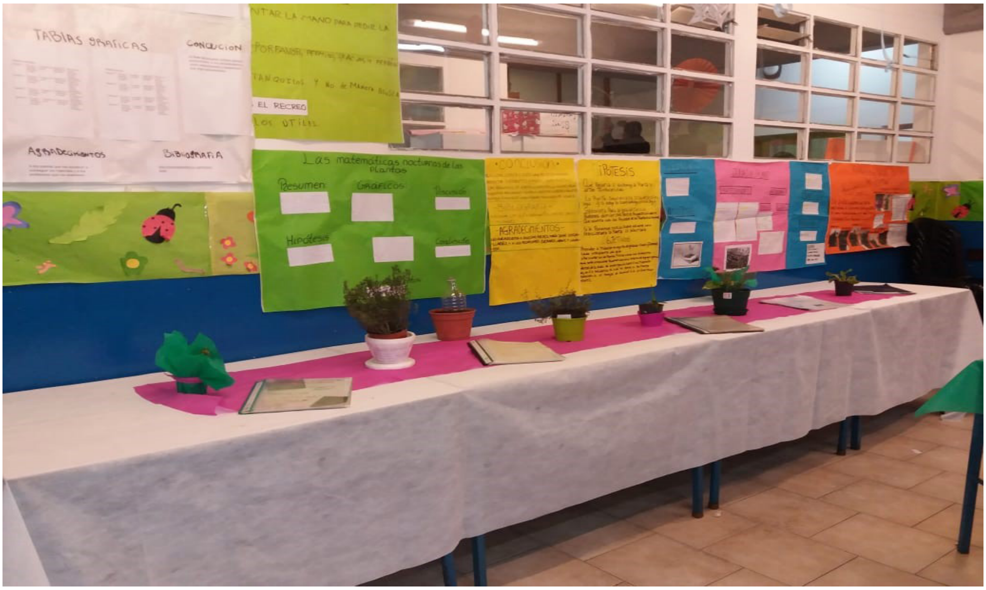


Imagen 2. Exposición de plantas con sus respectivas carpetas de campos

CONCLUSIONES

En este trabajo describimos los resultados del desarrollo de un proyecto con estudiantes de tercer año de una escuela secundaria que se encuentra en el programa Escuela Promotora en Argentina. En esta propuesta se buscó un estudio en el que interaccionaron dos disciplinas: la matemática y la biología. Se destaca que las nociones de biología tuvieron una incidencia mayor en la respuesta de los estudiantes, mientras que las nociones de matemática estuvieron condicionadas a las intervenciones del profesor, siendo que no surgieron de manera espontánea de los estudiantes. Esto lo atribuimos a la forma en que los profesores proyectaron la experiencia y la inexperiencia de los estudiantes en el desarrollo de propuestas en las que intervienen más de una disciplina. En particular, con relación a lo propuesto por los profesores, se destaca que la sucesión de Fibonacci surgió como una imposición desde el inicio a partir de la proyección del video. No hubo instancias en la que los estudiantes observaran las plantas y pudieran encontrar relaciones con la disposición de sus hojas y la información que brinda el video. Por otro lado, la matemática se manifestó como útil en los cálculos realizados en el porcentaje de la tasa de almidón. Esta utilidad de la matemática podría haber sido más evidente si se hubiese profundizado en los registros de los estudiantes: se podría haber registrado datos cuantitativos de la experiencia como ser número de hojas, altura de la planta o número de pimpollos, que complementan el análisis cualitativo que realizaron los estudiantes. Este estudio podría demandar recorrer nociones de estadística, sucesión de Fibonacci, aproximación, medición, etc.

Durante la etapa de experimentación, los estudiantes pudieron observar que al exponer la planta a cambios radicales esta producen modificaciones, siendo algunas reversibles y otras irreversibles. Los cambios que sufrían las plantas que estaban al cuidado de los estudiantes eran producto de ser sometidas a diferentes condiciones. Estas condiciones fueron poco controladas por los profesores y estudiantes, lo que no permitió observar claramente a los factores que respondían las plantas y cómo lo hacían.

Este proyecto resulta de interés para estudiar el crecimiento de plantas y constituye una buena oportunidad para que profesores y estudiantes trabajen de manera cooperativa, pero la propuesta requiere ser reestructurada. El inicio del estudio con la proyección del video seleccionado no generó en los estudiantes interés y vínculos con la biología y la matemática. En el video se exponen directamente las nociones matemáticas involucradas en los fenómenos presentados, pero luego en la etapa de experimentación y análisis de los resultados, las nociones matemáticas no volvieron a emerger de manera espontánea en los estudiantes, solo se recuperaron por las intervenciones de los profesores.

Siguiendo los últimos desarrollos de la TAD es necesario que los estudiantes adopten ciertas posturas hacia el aprendizaje denominadas actitudes: se requiere esencialmente que los estudiantes reconozcan la problematicidad de las situaciones vividas y formulen y respondan sus propias preguntas. Si bien, la disposición a aceptar preguntas que aún no fueron respondidas estuvo instalado desde el inicio del proyecto y sostenida por los profesores, la problematicidad de la propuesta no resultó ser evidente reduciendo el proyecto a una demanda de los profesores. El estudio se inició con la proyección de un video en el que se ofrece información acerca de las nociones que vinculan a la sucesión de Fibonacci con la biología, pero no instala la necesidad de indagar en el crecimiento de las plantas, buscar regularidades y elaborar algún modelo matemático que explique y prediga el comportamiento observado. En el video todo está dicho: el indagar, el despertar curiosidad por algún fenómeno y generar el estudio se encuentran ausentes.

A la luz de los resultados obtenidos, el inicio de la propuesta podría ser a partir del estudio de las siguientes preguntas: *¿Por qué la naturaleza adopta una forma y no otra?*

¿Es indiferente la forma en la que crecen y se disponen las hojas de una planta? A partir de estas preguntas se podría desarrollar la experiencia que se propuso en el proyecto para registrar el comportamiento de las plantas, recoger y analizar datos, extraer conclusiones. Este podría ser el punto de partida para el estudio de este sistema. Con el modelo se debe poder contrastar información, considerando los valores observados. Esta última etapa resulta sumamente relevante porque posibilita decidir sobre la bondad o no del modelo desarrollado.

La sociedad actual con sus cambios acelerados y su alto nivel de incertidumbre requiere de estrategias educativas que desarrollen las capacidades de autonomía e iniciativa personal. Aquellos valores y actitudes que debemos enseñar tienen que estar presentes en el aula en forma de experiencias, tales como los proyectos codisciplinarios. Esto requiere que el profesorado cambie su rol y tenga que romper la tendencia a dirigir a los estudiantes orientando y facilitando los aprendizajes. La educación integral que podemos promover con un proyecto codisciplinario requiere abrir espacios para el intercambio, fomentar la comunicación, promover la democracia en el aula, promover la opinión respetuosa de cada uno, etc. Cuando las diferentes etapas del trabajo están marcadas por situaciones problemáticas, favorecen a que los estudiantes exploren e indaguen para construir soluciones. Las actividades no pueden estar totalmente determinadas desde un inicio, sino que deben fluir, adaptarse o modificarse si es necesario, a partir de las interacciones con los estudiantes y los profesores. Esto provocará que los conocimientos no se aprendan de forma lineal, sino que admitan variaciones. En ocasiones, toman protagonismo nociones que no estaban previstoa, según cómo van interactuando y fluyendo en el aula. De esta manera, cada proyecto codisciplinar es distinto, porque lo realizan personas diferentes, a pesar de que el tema propuesto sea el mismo.

REFERENCIAS

Chevallard, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Grenoble, 19(2), 221-266.

Chevallard, Y. (2013). Enseñar Matemáticas en la Sociedad de Mañana: Alegato a favor de un contraparadigma emergente. *REDIMAT*, 2 (2), 161-182.

Chevallard, Y. (2017). ¿Por qué enseñar matemáticas en secundaria? Una pregunta vital para los tiempos que se avecinan. *La Gaceta de la RSME*, 20 (1), 159–169.

Dirección de Educación Secundaria de la Provincia de Buenos Aires (2017). *Saberes coordinados y aprendizaje basado en proyectos: hacia una enseñanza compartida para lograr aprendizajes integrados. Documentos de actualización curricular.* Disponible en: http://abc.gov.ar/nuevoformatosecundaria/sites/default/files/documento_saberes_coordinados_y_abp.pdf

Dirección de Educación Secundaria de la Provincia de Buenos Aires (2018). *Escuelas promotoras, evaluación de impacto.* Disponible en: http://abc.gov.ar/nuevoformatosecundaria/sites/default/files/informe_promotoras_13_dic_2018.pdf

Dirección de Educación Secundaria de la Provincia de Buenos Aires (2019). *Orientaciones sobre el trabajo docente colaborativo y planificación compartida. Experiencia Escuelas Promotoras.* Disponible en: http://abc.gob.ar/secundaria/sites/default/files/documentos/

orientaciones_sobre_el_trabajo_docente_colaborativo_y_planificacion_compartida_0.pdf

Gascon, J., Nicolás, P. (2018). Paradigmas didácticos y reforma curricular: el caso de la teoría antropológica de lo didáctico. *Congrès international de la TAD, VI.* Autrans, 22 - 26 Ene. 2018.

Hernández, R., Fernández, C.; Baptista, P. (2016). *Metodología de la investigación*. Sexta edición. México: Editorial Mc Graw Hill.

Kilpatrick, W. (1967a). La teoría pedagógica en que se basa el programa escolar. En Kilpatrick, W., Rugg, H., Washburne, G., Bonner, F (Eds), *El nuevo programa escolar* (p. 39-72). Buenos Aires: Editorial Losada.

Kilpatrick, W. (1967b) La filosofía de la educación desde el punto de vista experimentalista. En Kilpatrick, W., Breed, F., Horne, H., y Adler, M. *Filosofía de la Educación* (p. 15-74). Buenos Aires: Editorial Losada.

Kilpatrick, W., Rugg, H., Washburne, C., Bonner, F. (1967) *El nuevo programa escolar.* Buenos Aires: Editorial Losada.

Masferrer, F., Baqueró, M. (2014). *8 ideas Clave. Los proyectos interdisciplinarios*. Barcelona:GRAÓ

Ministerio de Educación de la Nación. (2017). *Marco de Organización de los Aprendizajes para la Educación Obligatoria Argentina (MOA). Anexo Resolución CFE Nro 330/17.* Buenos Aires: Presidencia de la Nación.

Secretaría de Innovación y Calidad Educativa. (2018). *Marco Nacional para la Mejora del Aprendizaje en Matemática.* Buenos Aires: Ministerio de Educación, Cultura, Ciencia y Tecnología.

Experiencia con estudiantes de primer año de la educación secundaria al poner en juego la noción de proporcionalidad

María Florencia Cruz
Valentina Soledad Albrecht
Facultad de Humanidades y Ciencias
Universidad Nacional del Litoral

Resumen: *Se presenta una experiencia en la que se aborda la noción de proporcionalidad con un grupo de estudiantes de primer año del nivel secundario de Santa Fe (Argentina). Se estudian errores que se manifiestan en las producciones escritas al resolver tareas en las que se modifican variables didácticas.*
El análisis de lo acontecido en la experiencia pone de manifiesto la necesidad de cambios que pueden ser beneficiosos para la formación de jóvenes en torno a la noción de proporcionalidad.
Palabras claves: *Educación secundaria, Errores, Proporcionalidad, Variables didácticas.*

Experience with first year high school students when bring into game the proportionality notion

Abstract: *Here we present an experience addressing the proportionality notion with a group of first year high school students from Santa Fe (Argentina). We study the errors showed up in written productions when solving tasks where the didactic variables are modified. The analysis of the experience manifests the necessity of changes that can be beneficial for the student's formation around the proportionality notion.*
Keywords: *High school education, Errors, Proportionality, Didactic variables.*

INTRODUCCIÓN

Se considera que las propuestas de enseñanza deben promover el "hacer matemático" en el aula, lo que implica, la construcción y producción de conocimientos matemáticos.

La presencia de conocimientos y experiencias, escolares y cotidianas, que resultan adecuados para la resolución de ciertas tareas son factores determinantes en la construcción de nuevos conocimientos. Sin embargo, aplicar conocimientos disponibles en nuevas situaciones puede producir respuestas inadecuadas.

Los razonamientos equívocos de los estudiantes se manifiestan con la presencia de errores en las resoluciones de tareas propuestas en los procesos de enseñanza y de aprendizaje (Socas, 1997). Según Rico (1998) los errores forman parte del proceso de construcción y elaboración del conocimiento humano, y en particular, del conocimiento científico. Este autor, sostiene que en la mayoría de los casos los errores "no aparecen por azar, sino que surgen en un marco conceptual consistente, basado sobre conocimientos adquiridos previamente" (p.193).

Atendiendo a las consideraciones realizadas se presenta una experiencia de aula. De lo sucedido en la misma, se focaliza en el estudio de errores que manifiestan producciones escritas de estudiantes de primer año del nivel secundario de la provincia de Santa Fe (Argentina) cuando se modifican variables didácticas en tareas de proporcionalidad. En particular, se analiza una clase en su escenario natural con el fin de potenciar la comprensión de la propia práctica docente, repensar la misma y mejorarla. Un análisis cuidadoso puede redundar en beneficios para pensar los procesos de enseñanza y de aprendizaje que involucran la noción de proporcionalidad en la educación secundaria.

La importancia de abordar la temática mencionada se evidencia en los núcleos de aprendizaje prioritarios para 7º año de la educación primaria y 1º año de la educación secundaria (2011) formulados por el Ministerio de Educación de Argentina. Los mismos plantean la necesidad de que se pongan en juego tareas en las que se produzca "el análisis de variaciones en situaciones problemáticas que requieran reconocer y utilizar relaciones directamente proporcionales usando distintas representaciones" (p.20). A su vez, destacan la necesidad de que se analicen "propiedades de las relaciones de proporcionalidad directa (al doble el doble, a la suma la suma, constante de proporcionalidad)" (p.20).

Asimismo, diversas investigaciones en el campo de la educación matemática señalan que la noción de proporcionalidad sigue siendo un objeto que produce dificultad en los procesos de enseñanza y de aprendizaje de la matemática, y por tanto es importante estudiar en torno a la misma para lograr impactos y cambios en el sistema educativo (Fernández y Llinares, 2012; Obando, Vasco y Arboleda, 2014 y Burgos y Godino, 2019)

Las consideraciones realizadas muestran la importancia y necesidad del trabajo reflexivo respecto a la noción de proporcionalidad.

MARCO TEÓRICO

En la experiencia se toman lineamentos teóricos de las Teorías de las Situaciones Didácticas (TSD) de Guy Brousseau que se exponen a continuación.

Brousseau (2007) considera que la TSD unifica e integra aportes de diversas disciplinas educativas poniendo especial énfasis en mejorar y regular la enseñanza de la matemática. El autor afirma que la enseñanza se concibe a partir de relaciones entre estudiantes, sistema educativo y saber escolar. Bajo la convicción constructivista del aprendizaje, expresa que:

> El alumno aprende adaptándose a un medio que es factor de contradicciones, dificultades y desequilibrios, un poco como lo hace la sociedad humana. Este saber, fruto de la adaptación del alumno, se manifiesta por medio de nuevas respuestas, que son la marca del aprendizaje (Brousseau, 2007, p.30).

El autor señala la importancia de modificar "variables" en una misma situación con el fin de que los estudiantes desarrollen diferentes estrategias y por tanto evolucionen sus conocimientos. También afirma que se llama "variable cognitiva a una variable de la situación tal que por la elección de valores diferentes puede provocar cambios en el conocimiento óptimo. Entre las variables cognitivas las variables didácticas son las que puede fijar el docente" (Brousseau, 2007, p.32).

A su vez, Brousseau (2007) afirma que las variables didácticas que emplea el docente causan diferencias de complejidad a pesar de que se ponga en juego un mismo saber matemático. Como consecuencia, se pueden producir obstáculos cuando el conocimiento disponible en los estudiantes no se adapta directamente a la nueva situación en la que se involucran variables didácticas diferentes.

Se analizan las producciones de estudiantes poniendo especial atención a la noción de error que exponen los autores: Socas (1997) y Rico (1998).

Socas (1997) destaca que las dificultades se originan a partir de diferentes elementos: el desarrollo cognitivo de los estudiantes, el currículo de matemática y los métodos de enseñanza que se ponen en juego. "Estas dificultades se conectan y refuerzan en redes complejas que se concretan en la práctica en forma de obstáculos y se manifiestan en los alumnos en forma de errores" (p. 125). Además, manifiesta que los errores surgen por un conocimiento adquirido que resulta inadecuado para la situación y no únicamente por una falta de conocimiento. El autor, tomando aportes de Brousseau, expresa que los obstáculos en el aprendizaje de matemática poseen diferentes orígenes: ontogénico o psicogénico, didáctico y/o epistemológico.

Cabe mencionar también, que Socas (1997) sostiene que el análisis de los errores tiene un doble interés. Por una parte, sirve para ayudar a los profesores a organizar estrategias generales y específicas para conducir mejor los procesos de enseñanza y de aprendizaje, insistiendo en aquellos aspectos que generan más dificultades. Por otra, contribuye a una mejor preparación de estrategias de corrección de los mismos.

Para intervenir eficazmente en los procedimientos de los estudiantes el profesor debe detectar y clasificar los errores según sus causas: a) errores que tienen su origen en un obstáculo, b) errores que tienen su origen en la ausencia de sentido, y c) errores que tienen su origen en actitudes afectivas y emocionales. La regularidad con la que aparecen ciertos errores favorece el conocimiento de sus causas, y es información útil para entender y abordar los errores de los estudiantes, como así también para promover un mejor aprendizaje (Socas, 1997).

Por su parte, Rico (1998) retomando a Radatz, realiza una clasificación de errores a partir del procesamiento de la información:

- Errores debidos a dificultades de lenguaje: surgen en la utilización de conceptos, símbolos y vocabulario matemático.
- Errores debidos a dificultades para obtener información espacial: son los cometidos en una representación espacial o en un problema geométrico.
- Errores debidos a un aprendizaje deficiente de hechos, destrezas y conceptos previos: aparecen por las insuficiencias de destrezas, procedimientos y conceptos previos.
- Errores debidos a asociaciones incorrectas o a rigidez del pensamiento: aparecen por la inflexibilidad del pensamiento para adaptarse a nuevas situaciones.
- Errores debidos a la aplicación de reglas o estrategias irrelevantes: producto de la utilización de reglas o estrategias similares en contenidos diferentes.

Finalmente se destaca que diversos investigadores en educación matemática (Rico, 1997; Socas, 1997; Brousseau, 2007; Godino, y Batanero 2002) manifiestan que considerar al error como parte del proceso de enseñanza y de aprendizaje es fundamental en el marco de la concepción constructivista de la matemática. Independientemente de la causa del error, que los alumnos participen activamente de la superación del error, que sean conscientes y que aprendan de ellos, que argumenten y revean sus conocimientos es necesario en instancias de aprendizaje.

MODALIDAD DE TRABAJO

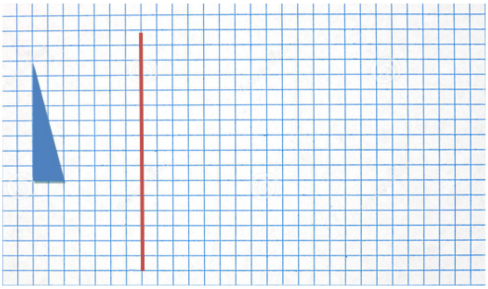
En este trabajo se presenta una experiencia en la que participan catorce estudiantes de primer año (12-13 años) de una escuela de educación secundaria de la ciudad de Santa Fe (Argentina). En la clase la docente presenta a los estudiantes un cuestionario cerrado con respuestas abiertas (Bressan, 2001).

Es de destacar que el diseño del cuestionario queda a cargo de la docente del curso. La misma, propone dos tareas en las que se pone en juego la noción de proporcionalidad donde se modifican las variables didácticas.

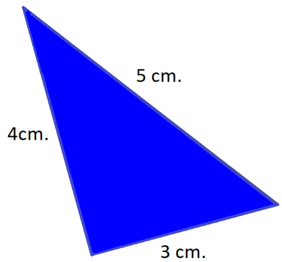
Los estudiantes previamente a la implementación del cuestionario han explorado figuras semejantes, ampliadas y reducidas, en diversos contextos. El cuestionario se propone en instancias de trabajo individual y no se realizan aclaraciones respecto a enunciados, atendiendo a que el objetivo principal de la tarea es evidenciar la puesta en juego de conocimientos previos de los estudiantes al emplear la noción de proporcionalidad. Se presenta a continuación el cuestionario:

Tabla 1. Cuestionario presentado a los estudiantes.

TAREA 1: El segmento rojo es un lado ampliado del triángulo azul. Completa el triángulo con los dos lados que faltan. Explicá qué tuviste en cuenta para dibujarlo.



TAREA 2: Se quiere ampliar un triángulo teniendo en cuenta las medidas de los lados que se presentan en la figura de análisis[1] de abajo. Si el lado que mide 3cm se transforma en uno de 9cm ¿Cuánto miden los otros dos lados del triángulo ampliado?



Se distribuye a cada estudiante una hoja con las tareas propuestas. En la puesta en acto la docente aclara oralmente que en ambas tareas los triángulos presentados son rectángulos, cuál es el ángulo recto en cada caso (en la primera tarea el ángulo formado por los lados que se encuentran en posición horizontal y vertical, y en la segunda el formado por los lados de 3cm y 4 cm) y que en la segunda tarea deben construir el triángulo ampliado debajo de la consigna en hoja lisa. El análisis de los datos se realiza a partir de sus producciones escritas.

ANÁLISIS PREVIO

Para la resolución del cuestionario diseñado los estudiantes deben poner en juego conocimientos disponibles, entre ellos: ángulos, rectas perpendiculares y paralelas, unidades de

1. La expresión figura de análisis refiere a las “figuras o bosquejos que no poseen rigurosidad geométrica, en donde se vuelca la información dada como primer paso ya sea para resolver un problema geométrico, una demostración o realizar una construcción geométrica” (Micelli, 2010, pp. 11).

medida de longitud (convencionales y no convencionales), ampliación de figuras, triángulos, números racionales y operatoria con ellos, semejanza y proporcionalidad. A su vez, es necesario que conozcan el modo en que se emplean los instrumentos de geometría.

A continuación se presenta el análisis previo de cada una de las tareas. No pretende ser exhaustivo, pero potencia el conocimiento de la situación y de los modos en que pueden proceder los estudiantes.

Análisis previo tarea 1

La figura presentada es un triángulo rectángulo escaleno. El enunciado no especifica a qué lado corresponde el lado dado ampliado, por lo que, se tienen tres respuestas diferentes posibles. Sin embargo, el enunciado no admite pluralidad de respuestas, puesto que solicita que se complete la construcción, por lo que puede presentarse cualquiera de las tres.

- <u>Caso 1:</u> Se considera que el lado dado ampliado se corresponde con el cateto mayor del triángulo dado y se emplea como unidad de medida el lado del cuadrado de la hoja cuadriculada (unidad no convencional). Por lo tanto, todos los lados aumentan el doble para que se mantenga la proporción.
- <u>Caso 2:</u> Se considera que el lado dado ampliado se corresponde con el cateto menor del triángulo dado y se emplea como unidad de medida el lado del cuadrado de la hoja cuadriculada (unidad no convencional). Por lo tanto, todos los lados aumentan el óctuplo para que se mantenga la proporción.
- <u>Caso 3:</u> Se considera que el lado dado ampliado se corresponde con la hipotenusa del triángulo dado y se utiliza como unidad de medida los centímetros (unidad convencional). Por lo tanto, se debe multiplicar a todos los lados por 1,93 para que se mantenga la proporción.

Es de destacar que en la tarea se solicita la construcción de la figura y su explicación, con el fin de: permitir la comprensión por parte de la docente del razonamiento puesto en juego, inducir a los estudiantes a encontrar una estrategia de resolución y potenciar la validación matemática.

Las variables didácticas puestas en juego en esta tarea son: uso de unidad de medida no convencional (lado del cuadrado de la hoja cuadriculada) o convencional (cm), empleo de hoja cuadriculada, presentación de la figura en posición estereotipada, presentación que condiciona la unicidad de respuesta a la tarea (a pesar de que existen tres respuestas correctas diferentes) y presentación de información a partir de una figura y un lado ampliado de la misma.

"La expresión representación gráfica en posición estereotipada refiere a las representaciones gráficas de figuras que poseen ciertas características visuales irrelevantes para el concepto, pero que influyen en la apreciación de los estudiantes" (Moriena y Scaglia, 2003, p.6). Al respecto Bertè (2000) plantea que normalmente los estudiantes al referirse a un ángulo recto piensen en rectas en posición horizontal y vertical, lo cual puede producir un obstáculo en la comprensión de este concepto.

Análisis previo tarea 2

En esta tarea se solicita hallar las longitudes de los lados de un triángulo rectángulo escaleno al ampliarlo. En la figura de análisis se explicita que un cateto mide 3cm, otro 4cm y la hipotenusa 5cm. El cateto que en el triángulo original mide 3cm se transforma en uno de 9cm, por lo que se debe multiplicar a todos los lados por 3 para que se mantenga la proporción.

En esta tarea las variables didácticas puestas en juego son las siguientes: empleo de hoja blanca, presentación de la figura de análisis en posición no estereotipada, uso de unidad de medida convencional (cm) y el modo de presentación de los datos del problema (figura de análisis, coloquialmente y oralmente).

ANÁLISIS DE LAS PRODUCCIONES DE LOS ESTUDIANTES

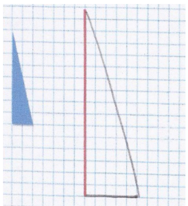
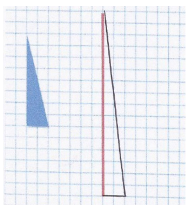
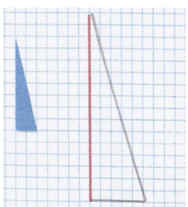
Se presenta en este apartado el estudio de las respuestas producidas por los estudiantes durante la experiencia llevada a cabo. Se nominan A_1, A_2,…, A_{14} con el motivo de preservar la identidad. Se organiza el análisis por alumno y se destaca que se presentan en letra formato cursiva (itálica) las expresiones textuales que se encuentran en el texto escrito de los estudiantes.

Análisis de las producciones de los estudiantes tarea 1 (Ver tabla 2)

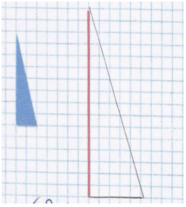
Los estudiantes A_5, A_6, A_7, A_8, A_9, A_{10}, A_{11}, A_{12}, A_{13} y A_{14} realizan la construcción correctamente y argumentan:

> *A_5: Tuve en cuenta los cuadraditos de la hoja y la figura azul la comparé con el fragmento rojo.*
> *A6: Se expandió el lado A* (cateto mayor) *al doble del original y por lo tanto el lado B* (cateto menor) *se multiplicó por 2.*
> *A_7: El tamaño se multiplicó por 2 entonces intento que el lado B* (cateto menor) *sea el doble.*
> *A_8: En vez de poner 2 cuadraditos como el del triángulo dado, le puse 4.*
> *A_9: Tuve en cuenta la forma del triángulo, la línea roja* (lado ampliado dado) *y la explicación del problema.*
> *A_{10}: Los lados se duplican.*
> *A_{11}: Multipliqué los lados por 2.*
> *A_{12}: Tuve en cuenta el triángulo dado.*
> *A_{13}: Tuve en cuenta la base del triángulo, porque multipliqué la cantidad de cuadraditos que ocupaba la base por 2.*
> *A_{14}: El lado ampliado dado ocupa 16 cuadraditos y el original 8 cuadraditos, expresa que 8+8=16 entonces 2+2=4.*

Tabla 2. Análisis de errores cometidos en tarea 1

<table>
<tr><th>Alumno</th><th>Producción alumno</th><th>Clasificación de error</th><th>Análisis</th></tr>
<tr><td>A_1</td><td>*Tuve en cuenta que se expandieron de 8* (la cantidad de cuadrados) *a 16 por la línea dibujada y luego dibujé las otras líneas completando la figura.*
</td><td>Según Rico (1998), el error cometido se produce debido a un aprendizaje deficiente de destrezas, procedimientos y conocimientos previos, dado que si bien compara la longitud de los lados, no logra establecer la relación entre ellos (8 y 16). La respuesta final presentada no corresponde a una construcción correcta, debido a que las medidas de los lados no son proporcionales. A su vez, el error se manifiesta debido a la ausencia del sentido por no lograr la utilización de una estrategia matemática para dar la respuesta (Socas, 1997).</td><td>Considera que el lado ampliado dado se corresponde con el cateto mayor del triángulo dado. Sin embargo, no explicita que una medida es el doble de la otra. El lado que originalmente mide 2 unidades[2] es ampliado por el estudiante a 5 unidades y mantiene el ángulo recto determinado por este último y el lado dado. No reconoce la relación de proporcionalidad entre las longitudes de los lados.</td></tr>
<tr><td>A_2</td><td>*Tuve en cuenta la base del triángulo.*
</td><td>Las longitudes de los lados de la construcción presentada no son proporcionales respecto a las del triángulo dado. Se considera un error debido a asociaciones incorrectas o a rigidez del pensamiento de los planteados por Rico (1998), puesto que no se evidencia el empleo de estrategias que posibiliten la ampliación del triángulo, se observa una resistencia al nuevo conocimiento. De la clasificación propuesta por Socas (1997) este error se origina debido a una ausencia de sentido.</td><td>Se aprecia que el lado que originalmente mide 2 unidades se mantiene de la misma longitud en la construcción propuesta y mantiene el ángulo recto determinado por este último y el lado dado.</td></tr>
<tr><td>A_3</td><td>*Conté los cuadraditos de la figura hecha.*
</td><td colspan="2">El error cometido coincide con la producción de A_1, por tanto la clasificación y el análisis coinciden.</td></tr>
</table>

2. A partir de este momento cuando se presenta en el texto el término “unidades” se hace referencia a la unidad “cantidad de cuadrados de la hoja cuadriculada”.

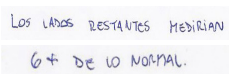
Alumno	Producción alumno	Clasificación de error	Análisis
A_4	*Tuve que hacer la primera raya corta* (refiere al cateto de menor longitud del triángulo) *porque si no, no quedaría como el dado azul y la raya larga fue para llegar al otro extremo de la raya roja y porque igualé al dado azul* (determinando la hipotenusa). 	El error cometido coincide con la producción de A_1 y A_3, por tanto la clasificación y el análisis coinciden.	

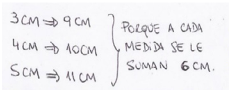
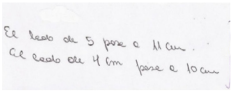
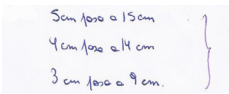
Análisis de las producciones de los estudiantes tarea 2 (Ver tabla 3)

Los estudiantes A_{10}, A_{11}, A_{12}, A_{13} y A_{14} realizan la construcción correctamente y argumentan:

A_{10}: Los lados se triplican.
A_{11}: Multiplique los lados por 3.
A_{12}: Multipliqué por tres las medidas dadas.
A_{13}: Multipliqué por 3 las longitudes dadas.
A_{14} no realiza consideraciones del procedimiento llevado a cabo, sin embargo, es evidente que multiplica las longitudes de los lados dados por 3.

Tabla 3. Análisis de errores cometidos en tarea 2

Alumno	Producción alumno	Clasificación de error	Análisis
A_1		El error se debe a la rigidez del pensamiento y a la aplicación de reglas o estrategias irrelevantes, dado que no logra adaptarse a la nueva situación (Rico, 1998). De la clasificación propuesta en Socas (1997) este error se origina por un obstáculo, puesto que probablemente surge por la génesis del concepto a aprender.	No realiza la construcción. Afirma que se debe sumar 6cm a cada una de las longitudes de los lados, utiliza un razonamiento aditivo de modo incorrecto. Respecto a este error Bertè (2000) señala que es frecuente que los estudiantes consideren que la relación de proporcionalidad se mantiene si se suma una constante a las longitudes dadas.

<table>
<tr><th>Alumno</th><th>Producción alumno</th><th>Clasificación de error</th><th>Análisis</th></tr>
<tr><td>A_2</td><td>
</td><td colspan="2">El error cometido coincide con la producción de A_1, por tanto la clasificación y el análisis coinciden. Si bien no logra una construcción proporcional con respecto al triángulo dado, se evidencia que en este caso amplia la medida de todos los lados. Esto último se considera un avance respecto a la respuesta dada en la tarea 1 por este estudiante, ya que se ponen en juego variables didácticas que influyen en las estrategias que se deben llevar a cabo y la complejizan.</td></tr>
<tr><td>A_3</td><td>
</td><td colspan="2">El error cometido coincide con la producción de A_1 y A_2, por tanto la clasificación y el análisis coinciden.</td></tr>
<tr><td>A_4</td><td>
</td><td>Este error según Rico (1998) se debe, por un lado, a asociaciones incorrectas o rigidez del pensamiento, ya que para uno de los lados del triángulo utiliza de modo correcto una estrategia en la que se pone en juego el nuevo conocimiento, pero el otro lado lo amplia utilizando otra estrategia dando una respuesta errónea. Por otro lado el error se debe a la aplicación de reglas o estrategias irrelevantes, dado que utiliza en un caso una estrategia multiplicativa (correcta) y en el otro caso una estrategia aditiva (incorrecta).
El error es causado debido a una ausencia de sentido, según lo planteado por Socas (1997).</td><td>Se considera que para el primer caso el estudiante multiplica por 3 la longitud dada, sin embargo, para el otro lado “pareciera” que suma 10cm a la longitud. Esta última relación coincide con la relación que se establece entre 5cm y 15 cm. Por lo mencionado, se destaca que en principio parece que el estudiante encuentra la estrategia correcta de resolución, sin embargo, no logra llevarla a cabo al ampliar cada uno de los lados del triángulo.</td></tr>
<tr><td>A_5</td><td>
</td><td>El error cometido coincide con la producción de A_1, A_2 y A_3, por tanto la clasificación coincide.</td><td>Intenta validar su afirmación realizando la construcción geométrica, sin embargo, al observar la misma da cuenta que la respuesta es incorrecta y lo afirma explicitando “sumándole 6 no se forma la figura”. Si bien no emplea correctamente la noción de proporcionalidad, se destaca que detecta el error cometido, a pesar de que no logra franquearlo.</td></tr>
</table>

Alumno	Producción alumno	Clasificación de error	Análisis
A_6	EL LADO "A" = 10cm "B" = 9cm "C": 11cm	El error cometido coincide con la producción de A_1, A_2, A_3, y A_5, por tanto la clasificación y el análisis coinciden.	
A_7	Del lado "A" son 10cm, lado "B" 9cm y lado "C" 11cm	El error cometido coincide con la producción de A_1, A_2, A_3, A_5 y A_6, por tanto la clasificación y el análisis coinciden.	
A_8	No presenta respuesta.		
A_9	EL DE 3cm PASA A 9cm EL DE 4cm PASA A 8cm EL DE 5cm PASA A 15cm.	Según Rico (1998) el error presentado se debe a asociaciones incorrectas o a rigidez del pensamiento, dado que si bien emplea la nueva estrategia adquirida no logra utilizarla correctamente al ampliar todas las longitudes de los lados del triángulo, por lo tanto, se considera que no logra adaptarse totalmente a la nueva situación. Según Socas (1997) el error es causado debido a una ausencia de sentido, dado que no logra mantener su estrategia de resolución durante toda la tarea.	Responde de forma errónea, sin realizar consideraciones respecto a la estrategia empleada. Se aprecia que en el primer caso mencionado duplica la medida del lado tal como se realiza en la primera tarea presentando una respuesta errónea, y en el segundo caso triplica la longitud dada obteniendo una respuesta correcta. Se destaca que la estrategia utilizada es multiplicativa en ambos casos, a pesar de que no mantiene la constante de proporcionalidad para la ampliación de todos los lados.

REFLEXIONES FINALES

En la primera tarea la mayor parte de los estudiantes realizan la ampliación de modo correcto, cuatro de los catorce estudiantes manifiestan error. En particular, los errores que se manifiestan de la clasificación propuesta por Rico (1998) surgen debido a aprendizaje deficiente de destrezas, procedimientos y conocimientos previos, y a asociaciones incorrectas o a rigidez del pensamiento. De la clasificación que se presenta en Socas (1997) la totalidad de errores se producen debido a la ausencia de sentido.

De las tres respuestas posibles explicitadas en el análisis previo se aprecia que los estudiantes emplean la que se obtiene al considerar que el lado ampliado dado se corresponde con el cateto mayor del triángulo dado. Recurren a esta condición de modo "automático". Esto último evidencia el poder de la imagen estereotipada, y en este caso, como una tarea que puede tener diferentes respuestas se limita a una única. Al respecto, Mántica (2006) afirma que en diversas situaciones los estudiantes se guían "por lo que ven" realizando una mirada no matemática de figuras.

Es de destacar que en todos los casos los estudiantes utilizan como unidad de medida el “lado del cuadrado de la hoja cuadriculada” a pesar de que disponen de regla y compás que pueden emplear en la resolución de la tarea. También se destaca que en todos los casos trazan en principio el cateto que consideran menor y luego a partir de los dos catetos la hipotenusa, sin analizar si la misma cumple la estrategia matemática puesta en juego.

En la segunda tarea cinco de los catorce estudiantes responden de modo correcto. Los errores que se manifiestan en las producciones se deben a asociaciones incorrectas o rigidez del pensamiento y a la aplicación de reglas o estrategias irrelevantes (Rico, 1998). De la clasificación propuesta en Socas (1997) los errores se originan por un obstáculo. Al explicitar la estrategia matemática utilizada en la segunda tarea, 6 estudiantes utilizan (de modo incorrecto) como estrategia la aditividad de una constante para obtener la respuesta final. Este resultado es similar al presentado en Bertè (2000).

A partir del análisis realizado se considera importante que al diseñar una secuencia que involucre la noción de proporcionalidad se:

- agregue una variable didáctica a la vez, con el fin de que la construcción del conocimiento matemático sea progresivo. La incorporación en la segunda tarea de un número excesivo de variables didácticas (hoja blanca, posición no estereotipada y unidad de medida convencional) respecto a la primera influye fuertemente en las resoluciones de los estudiantes;
- presentan tareas que habiliten la pluralidad de respuestas diferentes y correctas, y que el docente incentive el trabajo con las mismas;
- propongan diversos contextos, en caso contrario es posible que el estudiante asocie características del contexto particular, reconociéndolas de forma inadecuada como características del conocimiento.
- trabajen diversos contraejemplos, dado que uno no es suficiente para que el estudiante logre franquear errores (Bertè, 2000). La autora manifiesta que un contraejemplo proporcionado por el docente no convence al estudiante y asegura que la proporcionalidad tiene más sentido cuando se compara con la no proporcionalidad.

Cabe mencionar, tal como afirma Socas (1997), que la información acerca del error le ofrece al profesor estrategias de remediación que “van dirigidas a superar un obstáculo, a dar sentido a los objetos matemáticos o a crear una actitud racional hacia las matemáticas” (p. 151). Dichas estrategias implementadas favorecen la construcción del conocimiento nuevo por parte de los estudiantes.

Finalmente, se destaca que el análisis de errores evidencia una rica información con respecto al estado del nuevo conocimiento, admitiendo que resulta un hacer necesario para repensar y potenciar los procesos de enseñanza y de aprendizaje. De este modo, se deja de condenar o penalizar el error del estudiante para aceptar que los errores contribuyen a la formación matemática de los estudiantes, como afirma Socas (1997) un error puede ser el detonante para lograr un buen aprendizaje.

REFERENCIAS

Bertè, A. (2000). *Matemática dinámica.* Buenos Aires: AZ.

Bressan, A. (2001). *Documento: La evaluación en matemática. Enfoques actuales.* Rio Negro: Ministerio de Educación y cultura. Consejo Provincial de Educación Rio Negro.

Brousseau, G. (2007). *Iniciación al estudio de la teoría de situaciones didácticas.* Buenos Aires: El Zorzal.

Burgos, M y Godino, J.D. (2019). Trabajando juntos situaciones introductorias de razonamiento proporcional en primaria. Análisis de una experiencia de enseñanza centrada en el profesor, en el estudiante y en el contenido. *BOLEMA, 33 (62)*, 1-21.

Fernández, C. y Llinares, S. (2012). Características del desarrollo del razonamiento proporcional en la educación primaria y secundaria. *Enseñanza de las Ciencias, 30(1),* 129-142.

Godino, J. D. y Batanero, C. (2002) Proporcionalidad. En J.D. Godino (dir.) *Didáctica de las matemáticas para maestros,* 271-286. GAMI: Granada.

Mántica, A. M. (2006). Analizando errores geométricos. En A. M. Mántica, L. Nitti y S. Scaglia (comp.) *La Matemática. Aportes para su enseñanza.* 89-98. UNL: Santa Fe.

Micelli, M. (2010). *Las figuras de análisis en geometría. Su utilización en el aula de matemática.* Tesis de Maestría no publicada, Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada – IPN. México.

Ministerio de Educación Ciencia y Tecnología. (2011). NAP. Disponible en: https://www.educ.ar/recursos/110560/nap-para-septimo-ano

Moriena, S. y Scaglia, S. (2003). Efectos de las representaciones gráficas estereotipadas en la enseñanza de la geometría. *Educación Matemática*, 15(001), 5-19.

Obando, G., Vasco, C.E. y Arboleda, L. C. (2014). Enseñanza y aprendizaje de la razón, la proporción y la proporcionalidad: un estado del arte. *RELIME, 17 (1)*, 59-81.

Rico, L. (1998). Errores y Dificultades en el Aprendizaje de las Matemáticas. En J. Kilpatrick, P. Gómez y L. Rico (Eds.) *Educación Matemática.* 69-108. Una empresa docente: Bogotá.

Socas, M. (1997). Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las matemáticas en la Educación Secundaria. *En la Educación Matemática en la Enseñanza Secundaria. Cuadernos de Formación del Profesorado.* 125-154. HORSORI: Barcelona.

Épsilon - *Revista de Educación Matemática* *2021, nº 107, 37-46*

Dando la vuelta al mundo a través de las matemáticas

Francisco Javier Palacios-Hidalgo
Universidad de Córdoba
Jaime G. Cimas
IES El Sauce, La Carlota, Córdoba

Resumen: *La interdisciplinariedad se alza como un reto educativo fundamental para superar la fragmentación del conocimiento y preparar al alumnado para afrontar de forma efectiva los retos del siglo XXI. En este contexto, este artículo presenta los resultados de una experiencia didáctica desarrollada en 1º curso de Educación Secundaria Obligatoria en la asignatura de Matemáticas como parte del proyecto de aprendizaje interdisciplinar "La vuelta al mundo", cuyo objetivo es conmemorar el quinto centenario de la primera vuelta al mundo. Las actividades cooperativas presentadas plantean trabajo de investigación, cálculo numérico y resolución de problemas y permiten el desarrollo de las competencias clave.*
Palabras clave: *aprendizaje interdisciplinar en Matemáticas; Educación Secundaria; aprendizaje cooperativo; proyecto interdisciplinar.*

Around the world through mathematics

Abstract: *Interdisciplinarity arises as a key educational objective in an attempt to overcome knowledge fragmentation and prepare 21st-century students to face the challenges of the present effectively. In this context, this article presents the results of a didactic experience developed in the 1st grade of Secondary Education in the subject of Mathematics as part of the interdisciplinary learning project "Around the world", which aims to celebrate the fifth centenary of the first expedition around the world. The cooperative activities presented promote research, numerical calculation and problem-solving skills and eventually allow developing the learners' key competences.*
Keywords: *interdisciplinary learning in Mathematics; Secondary Education; cooperative learning; interdisciplinary project.*

INTRODUCCIÓN

El debate acerca de cómo preparar a las nuevas generaciones para afrontar de forma efectiva los retos del siglo XXI es cada vez más acentuado. Así, desde diversos prismas educativos, científicos y sociales, son cada vez más los argumentos en favor de un aprendizaje en las escuelas que esté en consonancia con las características del presente, un presente en el que los límites entre las disciplinas y las áreas del conocimiento se desdibujan. En este sentido, y como se discute en la literatura científica (Alonso-Bedate, 2014; López, 2012), todo fenómeno de la realidad (y, en particular, de la ciencia) es, por simple que parezca, irremediablemente complejo. Todo lo que ocurre no se da de forma ordenada o motivado por una única causa; al contrario, todo suceso es resultado de una amalgama de razones que, como tal, no puede estudiarse, analizarse o explicarse desde una única perspectiva. No tiene sentido, pues, una fragmentación excesiva del conocimiento, y mucho menos lo tiene si se considera el aluvión de cambios de diverso tipo propiciados por la Sociedad de la Información y el Conocimiento. Siguiendo estas premisas, la educación, como elemento social, también es una realidad compleja y multidisciplinar, en la que conviven diversos actores con múltiples objetivos e intenciones (Espejo, 2010).

En este panorama, la transversalidad y la interdisciplinariedad se alzan como dos retos educativos fundamentales, de forma que el profesorado ha de contribuir “a superar la fragmentación del conocimiento que se ofrece a través de las diferentes asignaturas”, así como “potenciar el trabajo colaborativo e innovador […] orientando las actividades de aprendizaje hacia la adquisición de competencias” (Lavega, Sáez de Ocáriz, Lasierra, y Salas, 2013, p. 135). Este artículo presenta los resultados de una experiencia didáctica desarrollada en un grupo de 1º curso de Educación Secundaria Obligatoria (ESO) en la asignatura de Matemáticas como parte de un proyecto de aprendizaje interdisciplinar desarrollado en el IES El Sauce (La Carlota, Córdoba) en el curso académico 2019/2020.

FUNDAMENTACIÓN TEÓRICA Y LEGAL

A lo largo de la historia, la educación ha sido considerada objeto de reflexión y, por ende, de interés y preocupación social. Así, entender los procesos educativos de manera única y especializada es prácticamente imposible, lo que nos lleva a pensar que la educacion es eminentemente interdisciplinar. De hecho, formar a los estudianes para que sean capaces de descubrir la multitud de perspectivas con las que entender el mundo es, como señalan Llano-Arana et al. (2016), una labor clave del docente:

> Se hace necesario que los profesores utilicen vías que permitan a los estudiantes asimilar los sistemas de conocimientos y los métodos de la actividad intelectual y práctica, y los coloquen en posición de dar respuesta a las situaciones que se presentan con perseverancia y afán por lograr el objetivo y que, además, promuevan en ellos el interés cognitivo. (p. 321)

La propia legislación educativa, tanto estatal como autonómica, evidencia la necesidad de promover una visión interdisciplinar del aprendizaje (Ley Orgánica 8/2013; Orden de 14 de julio de 2016; Real Decreto 1105/2014). Este tratamiento interdisciplinar del aprendizaje está respaldado por estudios que han demostrado cómo este mejora las competencias específicas y transversales del alumnado (Lavega et al., 2013; Pozuelos-Estrada, Rodríguez-Miranda, y Travé-González, 2012).

A la luz de investigaciones en el ámbito de la interdisciplinariedad en educación, puede afirmarse la relación entre aprendizaje interdisciplinar y desarrollo de competencias. En relación con estas últimas, la adquisición y desarrollo integral de las siete competencias clave al finalizar la educación obligatoria constituye uno de los objetivos principales del sistema educativo español (Ley Orgánica 8/2013; Orden de 14 de julio de 2016; Real Decreto 1105/2014). Así, el aprendizaje interdisciplinar se establece como una herramienta efectiva para la formación íntegra del alumnado.

En cuanto a las Matemáticas, esta disciplina "permite trabajar no solo los contenidos propios de la disciplina, sino también desarrollar numerosas competencias y temas transversales" (Palacios-Hidalgo y Cimas, 2020, p. 149). Por ello, esta materia, constituye un entorno tan válido como cualquier otra asignatura para desarrollar una experiencia de aprendizaje interdisciplinar como la que se describe a continuación.

EL PROYECTO

La experiencia didáctica descrita en este artículo se desarrolla en el marco de un proyecto interdisciplinar llevado a cabo en el IES El Sauce (La Carlota, Córdoba) en el curso académico 2019/2020. El proyecto, titulado "La vuelta al mundo", tiene como objetivo principal conmemorar, a través del aprendizaje interdisciplinar, el quinto centenario de la primera vuelta al mundo realizada por Fernando de Magallanes y Juan Sebastián Elcano mediante la realización de distintas tareas en todas las materias de la ESO.

En el caso de esta experiencia, si bien las actividades descritas se enmarcan en la asignatura de Matemáticas, también contemplan ciertos aspectos de otras materias como Lengua Castellana y Literatura y Educación Plástica, Visual y Audiovisual. Del mismo modo, el proyecto está enfocado a la adquisición y desarrollo de las siete competencias clave del sistema educativo español.

LA EXPERIENCIA

La experiencia consiste en un total de 11 actividades realizadas de manera cooperativa (en grupos de 4 personas siguiendo las indicaciones de Lim y Klein, 2006), agrupadas en tres bloques secuenciales. Se emplearon un total de cuatro sesiones para el desarrollo de todas las actividades. A través del hilo argumental de la "vuelta al mundo", el eje vertebrador del proyecto, el alumnado de 1º ESO puso en práctica contenidos de la asignatura de Matemáticas.

A modo de inicio, se entregó a los estudiantes un dossier explicativo en el que se les presentaba información general del proyecto interdisciplinar, datos específicos acerca de los objetivos que deberían alcanzar en el área de Matemáticas a través de este, breves textos de carácter argumental para cada bloque, y una descripción de las actividades que desarrollaron.

A continuación, se describen las actividades propuestas:

Un viaje muy largo: actividades 1-5

Cinco actividades formaron el primer bloque de tareas, el cual estuvo dirigido, por un lado, a dotar al alumnado de un conocimiento básico acerca de las paradas realizadas durante la primera vuelta al mundo y, por otro, a la resolución de problemas sencillos.

Se situó la acción de la forma siguiente:

> Este recorrido fue realizado en una época en la que los medios de navegación eran muy rudimentarios, incómodos e inseguros, por lo que la hazaña de dar la vuelta al mundo parecía una tarea casi imposible. De hecho, originalmente no era ese el objetivo del viaje, sino que los viajeros iban en búsqueda de un paso por mar para cruzar el continente americano y llegar así a la India (dicho paso en se localiza actualmente en Panamá). Una vez descubierto el paso, se pretendía llegar a las Islas Molucas, lugar en el que se comerciaba con especias muy cotizadas y siempre realizando el trayecto navegando hacia el oeste.

En la primera actividad, el alumnado debía realizar una búsqueda en internet para identificar las principales paradas realizadas por Fernando de Magallanes y Juan Sebastián el Cano en la primera vuelta al mundo, indicando las fechas correspondientes a la salida y llegada de cada uno de los trayectos realizados. Para evitar distorsión en los resultados de cada grupo, se proporcionó al alumnado un recurso web concreto (https://www.rutaelcano.com/la-primera-vuelta-al-mundo) con el que realizar la búsqueda.

Partiendo de los resultados de la primera actividad, el alumnado tuvo que calcular el tiempo total de navegación, el tiempo que los viajeros estuvieron en tierra y la duración de la vuelta al mundo. Una vez calculados, los estudiantes cotejaron los resultados obtenidos con las duraciones totales que se afirman en internet.

Figura 1. Mapa mudo para las actividades 3 y 6.
(Fuente: https://bit.ly/3hbP66e)

En la tercera actividad, se pidió a los participantes que localizara todas las paradas realizadas en un mapa mudo (Figura 1) y trazara líneas rectas que unieran dichos puntos en el orden en que se realizaron las paradas. En este caso, utilizaron *Google Maps* para localizar los puntos.

Una vez dibujado el trayecto, se presentó la siguiente ruta para que comprobaran sus resultados:

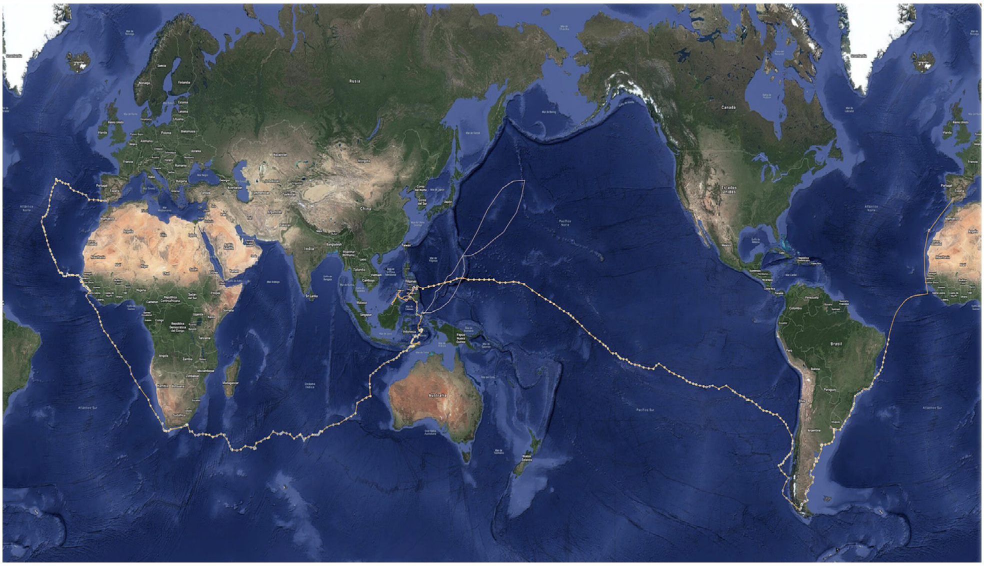


Figura 2. Recorrido de la primera vuelta al mundo.
(Fuente: https://bit.ly/30xzt2b)

A través de estas tres primeras actividades, se pretendía que el alumnado pusiera en práctica habilidades de investigación a la vez que conocimientos de cálculo matemático básico.

A continuación, se presentó un nuevo texto de carácter argumental:

> Ya hemos conseguido analizar los diferentes lugares del mundo por los que se pasó al realizar esta expedición. Ahora, vamos a centrar nuestra atención en un caso supuesto en la actualidad. Para ello, supondremos que las distancias se toman en línea recta, por lo que desarrollamos las siguientes actividades.

Para la cuarta actividad, se supuso que el primer viaje se realizó siguiendo el recorrido tal y como se trazó en la actividad anterior. Partiendo de tal consideración, se pidió al alumnado que calculara la distancia total recorrida en dicho trayecto. Para facilitar esta actividad, se presenta la web http://es.distance.to, que aporta información sobre las distancias en línea recta. A continuación, se presenta un ejemplo de búsqueda de la distancia entre el origen y destino de la primera etapa:

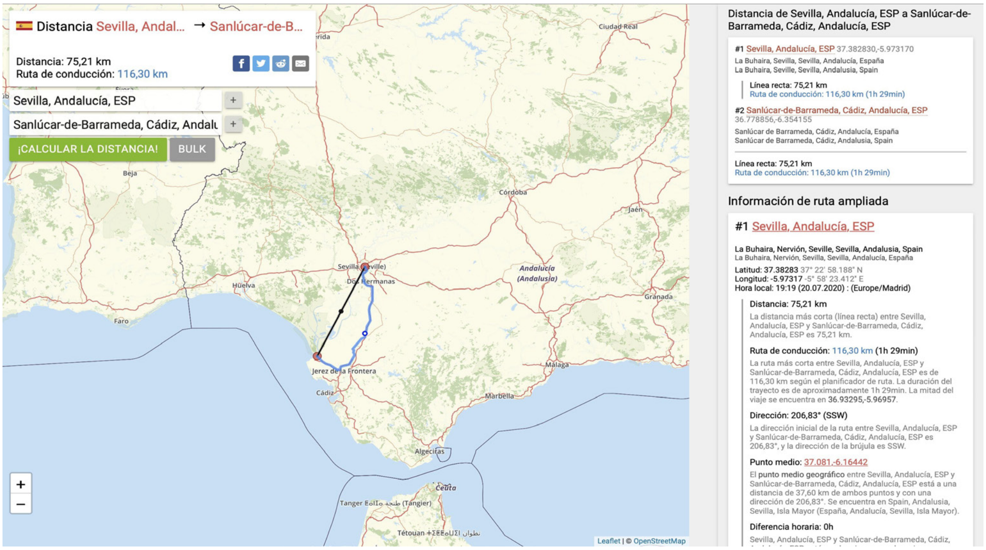


Figura 3. Distancia Sevilla-Sanlúcar de Barrameda – primera etapa.
(Fuente: https://bit.ly/2ZIERR5)

Tras el cálculo, se indicó a los estudiantes que, en la actualidad, el recorrido se habría realizado en avión, un medio de transporte más rápido que los barcos del siglo XVI; teniendo esto en cuenta, se planteó un nuevo problema que resolver: (a) Si el avión consume 12 L por cada kilómetro recorrido, ¿qué cantidad de combustible consumiría en el trayecto propuesto de la actividad anterior?; (b) Si el combustible cuesta 1,29 €/L, ¿qué precio total se habría gastado una persona en realizar el viaje en avión?; (c) si el avión volara a una velocidad de 1040 km/h, ¿cuánto tiempo se tardaría en realizar dicho viaje?

Phileas (¿Willy?) Fogg no era un buen matemático: actividades 6-10

El segundo bloque constó de 5 actividades cuyo objetivo principal era repetir las tareas desarrolladas en el primer bloque en un contexto distinto, basándose en la exitosa novela *La vuelta al mundo en 80 días* de Julio Verne.

La acción se estableció con el siguiente texto introductorio:

> Hasta ahora, hemos analizado lo que sucedió durante el recorrido de la primera vuelta al mundo, pero como esto mismo indica, no es la única que se ha realizado. En las próximas actividades, centramos nuestra atención en una novela *La vuelta al mundo en 80 días* de Julio Verne, en la que se habla sobre la expedición de casi tres meses de duración alrededor del mundo de un conocido personaje.

En la sexta actividad, el alumnado buscó información sobre la novela del escritor francés Julio Verne y elaboró un breve resumen del argumento. Posteriormente, tuvieron que indicar en un mapa mudo (Figura 1) las paradas efectuadas por el protagonista de la obra y trazar el recorrido en línea recta; una vez dibujado el trayecto, se presentó la siguiente ruta para que comprobaran sus resultados:

Figura 4. Recorrido en *La vuelta al mundo en 80 días* de Julio Verne.
(Fuente: https://bit.ly/2CNGXWX)

De igual forma, los estudiantes calcularon la distancia total recorrida en dicho trayecto y resolvieron el problema planteado en la quinta actividad suponiendo que realizaran el viaje en avión.

Con este bloque de actividades, a la vez que el alumnado seguía practicando sus habilidades de cálculo numérico y resolución de problemas, se conectaron las tareas previamente realizadas con la novela *La vuelta al mundo en 80 días*. Así, el trabajo realizado no resultó excesivamente difícil para el alumnado, puesto que se trabajaron actividades que ya habían realizado previamente.

El final del recorrido: actividad 11

En la actividad final, el alumnado preparó una exposición oral en la que presentaron y compararon los datos de la primera vuelta al mundo y el recorrido de la novela de Julio Verne.

RESULTADOS Y CONCLUSIÓN

Si bien en esta experiencia se plantearon un total de 10 actividades en las que el alumnado tuvo que realizar tareas de investigación, cálculo numérico y resolución de problemas de forma cooperativa, así como una actividad final en la que los estudiantes debían comparar las dos vueltas al mundo trabajadas, se les pidió que agruparan los resultados de las 10 primeras actividades y presentaran un único resultado que aunara todo lo realizado en las cuatro sesiones que duró la experiencia. De esta forma, se les pidió que elaboraran pósteres en los que se mostraran todo lo realizado, potenciando la motivación y creatividad, a la vez que propiciando la creación de un producto final que requiriera la implicación activa de todos los componentes del grupo (Johnson y Johnson, 2012). A continuación, se muestran algunos de los resultados:

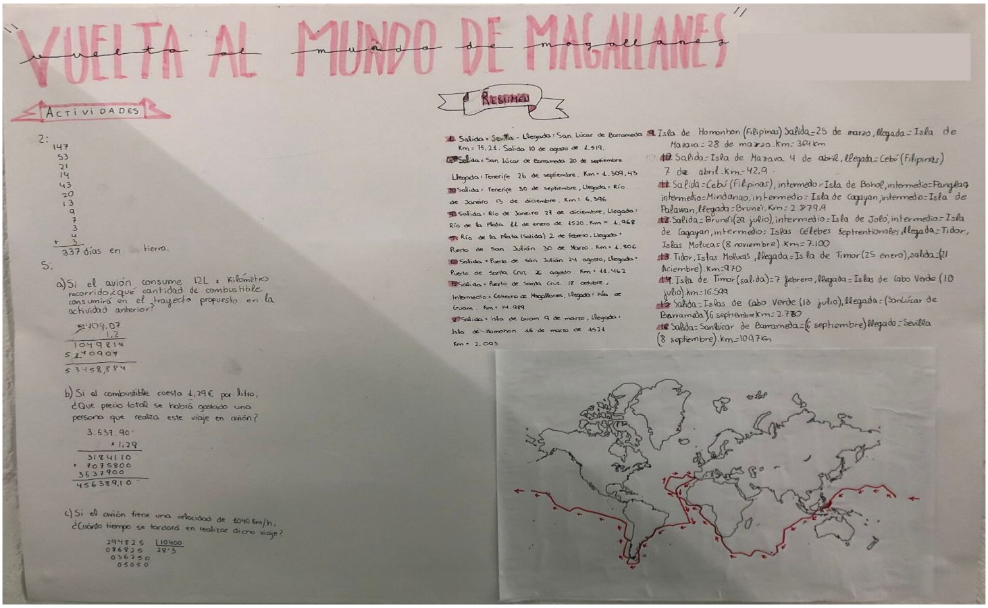


Figura 5. Póster sobre la primera vuelta al mundo elaborado por el alumnado.(Fuente: elaboración propia)

Como valoración general de la experiencia, los estudiantes se sintieron muy motivados hacia la realización de las actividades planteadas, principalmente debido al trabajo cooperativo con sus compañeros y compañeras y a la posibilidad de utilizar las Matemáticas de una manera lúdica y diferente a lo que acostumbraban a hacer. Sin embargo, cabe destacar que, si bien las actividades se implementaron tanto en la asignatura de Matemáticas como en el resto de las materias, el proyecto interdisciplinar no se desarrolló de forma generalizada en el centro debido a las consecuencias de la pandemia provocada por la COVID-19. No obstante, la actitud del alumnado anima a seguir organizando actividades de este tipo con el objetivo de formarlos para los retos del presente.

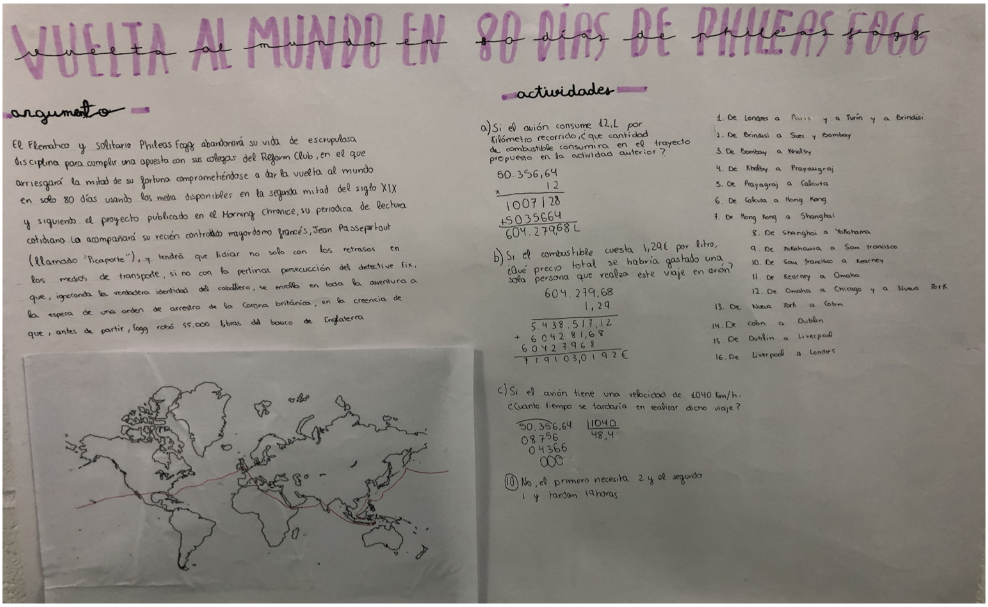


Figura 6. Póster sobre la vuelta al mundo de Philieas Fogg elaborado por el alumnado.(Fuente: elaboración propia)

REFERENCIAS

Alonso-Bedate, C. (Ed.). (2014). *El saber interdisciplinar*. Madrid: Universidad Pontificia Comillas.

Espejo, R. (2010). Algunos aspectos de la educación compleja. *Polis*, *25*, 1–14.

Johnson, D. W., y Johnson, R. T. (2012). Cooperative learning. En D. J. Christie (Ed.), The encyclopedia of peace psychology (pp. 1–5). Hoboken: Blackwell Publishing Ltd.

Lavega, P., Sáez de Ocáriz, U., Lasierra, G., y Salas, C. (2013). Intradisciplinariedad e Interdisciplinariedad en la adquisición de competencias: Estudio de una experiencia de aprendizaje cooperativo. *Revista Electrónica Interuniversitaria de Formación del Profesorado*, *16*(1), 133–145.

Ley Orgánica 8/2013, de 9 de diciembre, para la Mejora de la Calidad Educativa. (BOE Núm. 295, de 10 de diciembre de 2013).

Lim, B.-C., y Klein, K. J. (2006). Team mental models and team performance: A field study of the effects of team mental model similarity and accuracy. *Journal of Organizational Behaviour*, *27*, 403–418.

Llano-Arana, L., Gutiérrez-Escobar, M., Stable-Rodríguez, A., Núñez-Martínez, M. C., Masó-Rivero, R. M., y Rojas-Rivero, B. (2016). La interdisciplinariedad: Una necesidad contemporánea para favorecer el proceso de enseñanza aprendizaje. *Medisur*, *14*(3), 320–327.

López, L. (2012). La importancia de la interdisciplinariedad en la construcción del conocimiento desde la filosofía de la educación. *Sophia*, (13), 367–377.

Orden de 14 de julio de 2016, por la que se desarrolla el currículo correspondiente a la Educación Secundaria Obligatoria en la Comunidad Autónoma de Andalucía, se regulan determinados aspectos de la atención a la diversidad y se establece la ordenación de la evaluación del proceso de aprendizaje del alumnado. (BOJA Núm. 144, de 28 de julio de 2016).

Palacios-Hidalgo, F. J., y Cimas, J. G. (2020). El papel de la educación intercultural en el área de matemáticas: Una propuesta de innovación para el desarrollo de las competencias clave. En N. Aguayo-Arrabal (Ed.), *Educación de las segundas lenguas* (pp. 147–152). Córdoba: UCOPress.

Pozuelos-Estrada, F. J., Rodríguez-Miranda, F. P., y Travé-González, G. (2012). El enfoque interdisciplinar en la enseñanza universitaria y el aprendizaje basado en la investigación. Un estudio de caso basado en la formación. *Revista de Educación*, *357*, 561–585.

Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato. (BOE Núm. 3, de 3 de enero de 2015).

Evaluación inicial como catalizador para el diseño de unidades de aprendizaje de Geometría en Educación Secundaria

Silvia Natividad Moral-Sánchez
Universidad de Almería
silviamoral@uma.es
María Teresa Sánchez-Compaña
Universidad de Málaga
teresasanchez@uma.es
Isabel María Romero-Albaladejo
Universidad de Almería
imromero@ual.es

Resumen: *En este artículo se propone un cambio en las prácticas metodológicas tradicionales para la evaluación inicial del alumnado en el aprendizaje de los cuerpos geométricos en Educación Secundaria. La información obtenida de dicha evaluación se utilizará con el fin de adecuar los conocimientos en base a los errores y dificultades geométricas fomentando un clima de participación e inclusión en el aula. Se trata de poner de manifiesto la importancia de dicha evaluación inicial y las implicaciones y consecuencias que tendrá en el diseño posterior de la unidad de aprendizaje.*
Palabras clave: *Geometría, Errores geométricos, Evaluación inicial, Cuerpos geométricos, Metodologías activas, Educación Secundaria.*

Initial evaluation as a catalyst for the design of Geometry learning units in Secondary Education

Abstract: *This article proposes a change in the traditional methodological practices for the initial evaluation of students in the learning of geometric bodies in Secondary Education. The information obtained from evaluation will be used in order to adapt the knowledge based on the errors and geometric difficulties, fostering a climate of participation and inclusion in the classroom. It is about highlighting the importance of this*

initial evaluation and the implications and consequences that it will have in the design of the learning unit.
Keywords: *Geometry , Initial Evaluation, Geometric errors, Geometric bodies, Active methodologies, Secondary Education.*

INTRODUCCIÓN

En Educación Secundaria existe un alto índice de fracaso y falta de motivación hacia las matemáticas. Se hace preciso establecer instrumentos de evaluación inicial que no solo identifiquen los conocimientos previos que tiene el alumnado, sino que también actúen de detonante inicial para la construcción del aprendizaje activo (Junta de Andalucía, 2016). De esta manera se facilita el posterior diseño de una experiencia que incluirá técnicas de gamificación y herramientas de Realidad Virtual. Para ello, es esencial establecer una evaluación inicial diagnóstica y formativa que bien fundamentada, elaborada y basada en unos instrumentos adecuados, otorgue información útil y práctica de los factores cognitivos del grupo-clase. Según Arrien, Muñuziri y Ugarriza (2016), la evaluación inicial aporta incalculables datos para construir la intervención educativa, ya que define los conocimientos y competencias previos del alumnado con respecto al curriculum y prioriza los aspectos deficitarios para la posterior intervención educativa, permitiendo concretar y diseñar las estrategias de aprendizaje para que sea más eficaz. En este artículo se expone la evaluación inicial de la unidad de cuerpos geométricos realizada en un Instituto de Educación Secundaria de la Axarquía en la provincia de Málaga, con 30 alumnas y alumnos de tercero de ESO de entre 14 y 16 años. Se pretende analizar los resultados en el plano cognitivo en dos vertientes, la visualización espacial y el análisis de errores en geometría. En el plano de la visualización espacial Sinclair y Freitas (2012) afirman que tanto el gesto como el dibujo o diagrama constituyen la base material del experimento del pensamiento matemático y no pueden entenderse solo como una representación virtual o física. Luego, para poder evaluar esta habilidad, se hace necesario diseñar una dinámica que forme parte de la evaluación inicial y que involucre gestos y dibujos de cuerpos geométricos. Por otro lado, en la unidad didáctica que nos ocupa en este artículo, se hacen patente los errores previos del alumnado. Rico (1995) propone el error en geometría como aquello que entorpece la consecución de los objetivos. Es importante conocer el origen de los errores del alumnado para poder reestructurar sus esquemas mentales y proporcionarles las ayudas adecuadas. Guillén (2010), recordando a Bishop (1992), llama la atención sobre los obstáculos que se encuentran para representar las ideas geométricas, dado que existe un vocabulario visual muy complejo, con muchas convenciones y símbolos que deben comprender quienes aprenden, si se espera que les den sentido a las figuras geométricas. Se ha elaborado en la Tabla 1 un breve estudio de los errores más habituales en geometría que pueden ser detectados en la evaluación inicial.

Tabla 1. Errores en geometría

Error tipo	**Referencias**
1: Alfabetización del alumnado en el lenguaje geométrico (confusión en la identificación de términos, juicios basados en subfamilias o en parte de una figura) y habilidad para comunicarla	Guillén (2000); Rupayán (2007)
2: Extensión de una propiedad de una familia de sólidos a otra, o de elementos del plano a elementos del espacio	Guillén (2000)
3: Incomprensión de conceptos implicados en cierta propiedad	Guillén (2000)
4: Destrezas necesarias para la manipulación física o mental de cuerpos geométricos (girar, trasladar, deformar, ...), habilidad de dibujar representaciones planas y en el espacio	Guillén y Gutiérrez (1992); Gutiérrez (1998)
5: Destreza para relacionar representaciones en el plano de cuerpos espaciales con dichos cuerpos (en los dos sentidos 2D ⇒ 3D y 3D ⇒ 2D), habilidad de visualización espacial	Guillén y Gutiérrez (1992); Gutiérrez (1998); Rupayán (2007)
6: Confundir vértices con aristas	Astolfi (1999)
7: Confundir caras con aristas o atribuir caras a cuerpos de revolución como si fuesen poliedros	Tovar (2014)
8: Los modelos de aristas son más difíciles que los de caras (grados de abstracción)	Barrantes y Zapata (2008)

También es importante establecer un diálogo en dichas dinámicas de evaluación, según Osorio y López (2017) esto se produce mediante un *feedback* o realimentación en el que el alumnado sea consciente de sus errores en el proceso de aprendizaje para poder así mejorarlos. La ausencia de *feedback*, o que éste no reúna las características adecuadas (por ejemplo, que el profesorado sólo se limite a marcar los aciertos y errores sobre el papel), puede provocar incertidumbre al alumnado sobre su progreso en el aprendizaje.

El objetivo de este artículo es compartir con la comunidad educativa una experiencia de evaluación inicial que toma como punto de partida los errores cognitivos y que servirá como base para poder desarrollar todo el proceso posterior en la unidad de geometría. La investigación realizada se encuentra enmarcada dentro de la metodología de investigación de diseño a través de los experimentos de enseñanza analizando el aprendizaje en contexto (Molina et al, 2011).

EVALUACIÓN INICIAL PARA CUERPOS GEOMÉTRICOS

A continuación, y tras exponer al inicio los objetivos didácticos de la evaluación inicial en esta experiencia, se describen las dos dinámicas para la realización de la misma. En la primera, con un formato de preguntas y respuestas, se utilizan unas pizarritas individuales (que llamaremos "Miniboards") para dar el *feedback* posibilitando así la detección de errores. En la segunda se realiza una dinámica activa y motivadora con el uso de la mímica para tratar de establecer los errores en visualización espacial. Finalmente, se ofrecen los resultados obtenidos en dichas dinámicas con un breve análisis de los mismos.

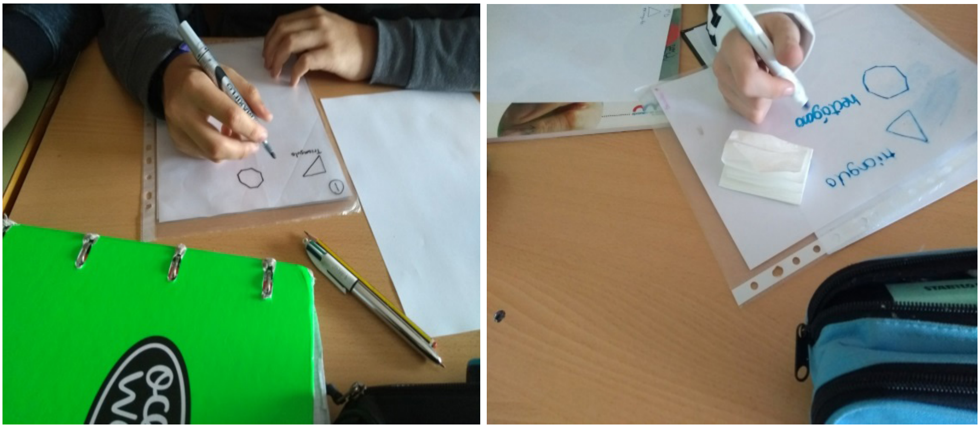
Objetivos de la las dinámicas de evaluación inicial:

- Mostrar al alumnado los objetivos de aprendizaje del tema de cuerpos geométricos, para tener una visión global del mismo antes de comenzar. Los contenidos a tratar incluyen: identificación de poliedros y sus propiedades, simetría axial y rotacional.
- Tomar conciencia y evidenciar los errores cognitivos y futuras dificultades de aprendizaje en geometría.
- Establecer las bases de conocimiento matemático respecto a la visualización espacial, para el diseño del resto de las sesiones que conformarán el contenido a tratar y que usarán un entorno de Realidad Virtual.

Dinámica 1. Evaluación inicial de conceptos previos de cuerpos geométricos mediante dibujos en "*Miniboard*"

- ***Componentes necesarios:***
  - "*Miniboard"* (pizarrita), consisten en un forro de plástico con un folio dentro para que sean opacas, de modo que con un rotulador se puede escribir sobre ellas y borrar fácilmente.
  - Rotulador para dibujar o escribir y trozo de papel o trapo para ir borrando.

- ***Mecánica:***
  - La parrilla planteada tiene un formato de preguntas y respuestas que son de elaboración propia y se basa en el estudio mostrado en la Tabla 1. Los ítems de dicha parrilla se pueden consultar en: https://bit.ly/3jwIxMR
  - Esta dinámica no se realizará de un modo tradicional, escribiendo las respuestas en un papel o respondiéndolas en voz alta, sino que, una vez formulada cada pregunta, el alumnado dibuja o escribe su respuesta en la "*Miniboard"* como muestran la Figura 1 y 2.

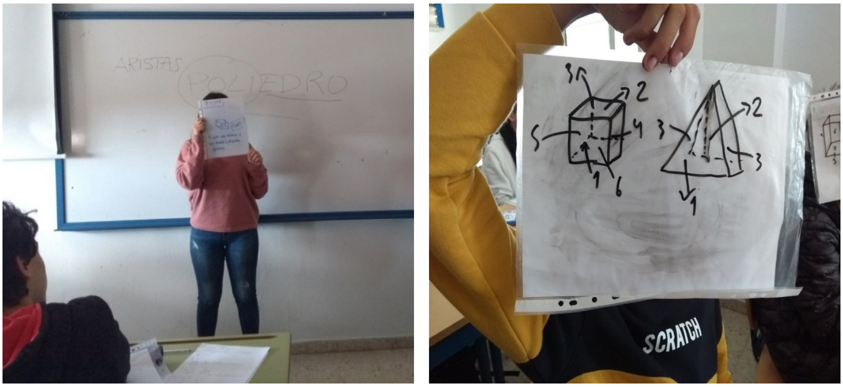


Figuras 1 y 2: Alumnado respondiendo a las preguntas de la evaluación inicial

Una vez que todos han respondido, levantan y muestran su "*Miniboard*" a todo el grupo-clase, de forma que pueda verla tanto la profesora como el resto de compañeras y compañeros como se ve en la Figura 3.

Figura 3: Alumnado enseñando sus respuestas

Cuando todo el mundo ha podido ver lo que ha contestado el resto, de forma correcta o errónea, el *feedback* con la respuesta válida no lo da la profesora, sino que ésta elige a un estudiante con la respuesta correcta, que será el encargado de explicárselo al resto como se muestra en las Figuras 4 y 5.



Figuras 4 y 5: Corrección feedback entre iguales

Se produce de esta forma un aprendizaje entre iguales, lo que conlleva a una asimilación más rápida del concepto, ya que al ir viendo sus fallos y los de los compañeros les permite aprender del error.

Para que la dinámica sea más ágil, en vez de ir respondiendo las preguntas y exponiendo la solución de una en una, se recomienda contestar por tandas con varios ítems como muestra las Figuras 6, 7, 8 y 9.

Figuras 6, 7, 8 y 9: Respuesta múltiple y feedback

De esta manera se ofrece una visión y respuesta global de algunos de los conceptos que están relacionados entre sí, demostrándose una mayor asimilación cognitiva del alumnado y su posterior aplicación al resto de la unidad de aprendizaje.

En la dinámica se muestra una visión general de lo que serán los objetivos a alcanzar en la unidad didáctica. Se promueve a la vez un primer acercamiento entre el grupo-clase y adquisición por parte del alumnado de una base sólida de los elementos y características de los cuerpos geométricos.

Dinámica 2. "*Speed dating poliédrico*": evaluación inicial para visualización espacial mediante gestos

- ***Componentes necesarios:***
  - Cartas con dibujos de cuerpos geométricos, cada uno elegirá una al azar en: https://bit.ly/3gSXFm9
  - Las mesas se deben colocar de dos en dos.

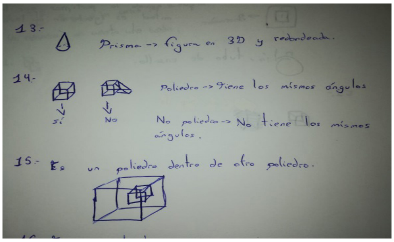
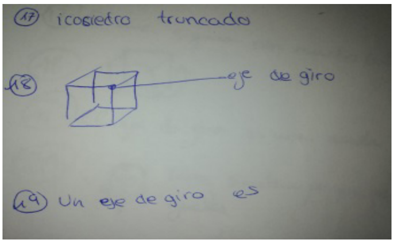
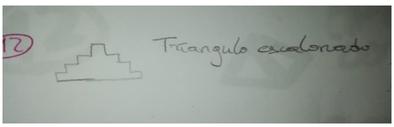
- ***Mecánica:***
  - La dinámica consiste en tener una "cita rápida" con todos y cada uno de los compañeros y compañeras de clase. Usando la mímica y solo con gestos, sin pronunciar ni una palabra, el alumnado debe intentar, por un lado, describir el poliedro que les ha tocado, y por otro, adivinar que otros estudiantes tienen la misma carta que ellos.
  - Para ello, se sientan por parejas. Cada miembro de la pareja tiene un minuto para describirle al otro la figura que hay en la carta mediante todo tipo de gestos como se observa en las Figuras 10 y 11. Después de esos dos minutos se cambia de compañero para recibir a su próxima "cita". Estos cambios los va indicando la profesora con un sonido o una palabra previamente establecido. Así, se irán repitiendo los intercambios hasta que interactúen con toda la clase y vuelvan a su posición original de partida. Por último, se reunirán con quien crean que tiene su misma carta.

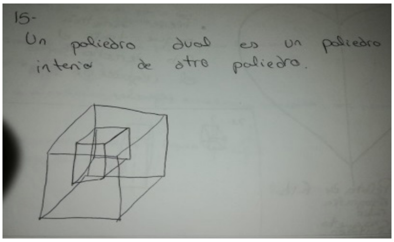
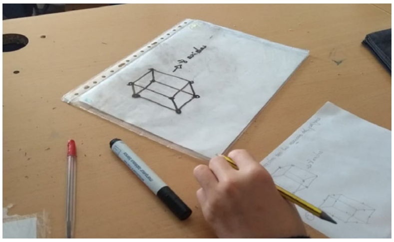
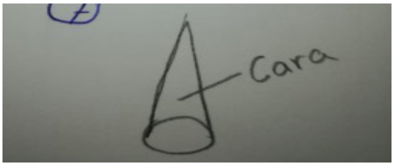
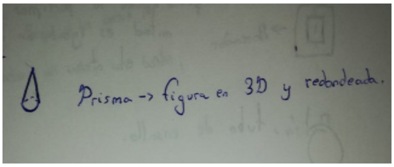

Figuras 10 y 11: Alumnado llevando a cabo la dinámica Speed dating poliédrico con gestos

RESULTADOS DE ERRORES Y DIFICULTADES MEDIANTE OBSERVACIÓN DIRECTA

En la Tabla 2 se muestran los errores cometidos por el alumnado, estableciéndose en esa misma tabla un comparativa con los ofrecidos en la Tabla 1 que mostraba de forma teórica los fallos usuales que aparecen en geometría según la literatura.

Tabla 2. Explicitación de errores geométricos en la evaluación inicial

Error	Evidencia alumnado	Tipo Tabla 1
Comprensión del lenguaje matemático (relación de términos con conceptos)		1
Habilidad de comunicación geométrica	Dificultad en la capacidad de entender y comunicar información en algunas preguntas y respuestas	1
Identificación de las destrezas de visualización espacial	Confundir poliedros con polígonos (también la semántica)	1, 3 y 5
	Confundir eje de simetría con plano de simetria	
	Confundir eje de giro con punto de giro 	
Habilidad de dibujar (construcciones geométricas). Dificultad para dibujar en tres dimensiones.	Respuestas con dibujos erróneos 	4 y 5

Error	**Evidencia alumnado**	**Tipo Tabla 1**
No reconocer la totalidad de las figuras geométricas: solidos platónicos; clasificar conos, cilindros y esfera como poliedro; no saber qué es un prisma (buen reconocimiento de pirámides por modelización en la realidad)	Confusión inicial al describirlas o dibujarlas; errores en *feedback* evaluación inicial	1, 2 y 3
No reconocer los duales de los sólidos platónicos		2 y 3
Confundir vértices con aristas		6
Confundir caras con aristas o poner caras en cuerpos de revolución		7
Extensión de propiedades de una familia de sólidos a otra: Confundir poliedros con cuerpos de revolución o confundir pirámides con tetraedro		2
Los modelos de aristas son más difíciles que los de caras (grados de abstracción)	Dificultad para ver los poliedros eliminando las caras en posteriores sesiones y dificultad para describirlos	8
Error al asignar aristas y vértices en un cuerpo de revolución	Dificultad detectada en observación *feedback* evaluación inicial	3 y 7

A continuación, se realiza un análisis más exhaustivo en la dinámica de "*Speed dating poliédrico"*. En ella, se observa la dificultad de la transición mental que el alumnado debe hacer para poder pasar de dos a tres dimensiones. Cada estudiante debe abstraer e imaginar en su mente el cuerpo geométrico según el dibujo que les ha tocado. La mayoría intenta dibujar la figura en el aire, aunque otros optan por hacerlo sobre la mesa. Algunos recurren al polígono o polígonos que forman la figura para describirlas, unos intentan hacer los ángulos entre polígonos y la gran mayoría hace alusión al número de caras, aristas, vértices u otras propiedades del aprendizaje en la Dinámica 1.

Se observa el desarrollo de la capacidad de memoria visual y creatividad con los dibujos con mímica del que lo explica y la capacidad de asimilación, observación y visualización espacial del que atiende e intenta imaginar que figura le están describiendo.

Con esta dinámica se produce una comunicación no verbal geométrica, se desarrolla la habilidad de abstracción y transferencia. La dinámica no solo sirve para observar la percepción previa en visualización espacial, sino que fomenta la creatividad al tener que imaginar algo en tres dimensiones que no han visto antes y sorprende como lo relacionarán al usar elementos de Realidad virtual durante la unidad didáctica posterior que surge de esta evaluación inicial.

CONCLUSIÓN

Qué duda cabe que los sistemas de evaluación han evolucionado y hay que hacerlos atractivos para el alumnado, a la vez que prácticos y útiles para el proceso de enseñanza-aprendizaje en matemáticas. La evaluación inicial permite concretar las estrategias en el diseño de la unidad integrada y posibilita el desarrollo de las competencias respecto al curriculum (Arrien et al.,1998). Con estas dinámicas de "*Miniboard" y "Speed dating poliédrico"* se ofrece una visión global al alumnado de los contenidos a tratar, haciéndoles conscientes de si los conocimientos previos que tienen son o no erróneos, ya que la presencia del error en un proceso evaluativo no denota solamente una falta de conocimiento, sino que está evidenciando la existencia de un esquema cognitivo inadecuado en el alumnado (Socas,1997). Con las metodologías activas se proporciona un *feedback* constante, en un ambiente distendido, efectivo, ameno, inclusivo y motivacional que permite un aprendizaje emergente y que puede hacerles querer sumergirse en la asignatura, ayudando así a su alfabetización matemática, desarrollo cognitivo y a la socialización e inclusión en el grupo haciendo subir su autoestima. Se establecen así las bases de conocimiento matemático para el diseño del resto de las sesiones que conformarán el contenido a tratar y en las que habrá que establecer mecanismos para subsanar dichos errores. Esta experiencia puede ser replicable con cualquier grupo-clase.

REFERENCIAS:

Astolfi, J.P(1999). El error, un medio para enseñar. Sevilla: Diada.

Arrien, E., Muñuziri, E., Ugarriza,J.R., (1998) . La evaluación inicial en las Aulas de Aprendizaje de Tareas: Instituto para el Desarrollo Curricular y la Formación del Profesorado del País Vasco. Recuperado el 1 Junio de 2020, de https://www.berrigasteiz.com/site_argitalpenak/docs/110_nee/1101997005c_Doc_IDC_aat_eval_ini_c.pdf

Barrantes, M. y Zapata, M. (2008). Obstáculos y errores en la enseñanza-aprendizaje de las figuras geométricas. Campo Abierto. *Revista de Educación,* 27, 55-71

Bishop, A. (1992). Implicaciones didácticas de la investigación sobre la visualización. Antología de Educación Matemática. REDU: *Revista de docencia universitaria*, 8 (1), 11-34.

Guillén, G., Gutiérrez, A. (1992). Proyecto de investigación: La enseñanza de la geométría de sólidos. Recuperado el 1 Abril de 2019,de https://www.uv.es/angel.gutierrez/archivos1/textospdf/GutOtr92.pdf

Guillén, G. (2000). Sobre el aprendizaje de conceptos geométricos relativos a los sólidos. Ideas erróneas. *Enseñanza de las Ciencias,*18(1), 35-53.

Guillén, G. (2010). "¿Por qué usar los sólidos como contexto en la enseñanza- aprendizaje de la geometría? ¿Y en la investigación?" En M. M. Moreno, A Estrada, J. Carrillo y T.A. Sierra (Eds.), Investigaciones en Educación Matemática XIV, Lleida, SEIEM, 21-68

Gutiérrez, A. (1998). Las representaciones planas de cuerpos 3-dimensionales en la enseñanza de la geometría espacial. *Revista Ema,* 3(3), 193-220.

Molina, M., Castro, E., Molina, J.L., y Castro, E. (2011). Un acercamiento a la investigación de diseño a través de los experimentos de enseñanza. *Enseñanza de las Ciencias*, 29(1), 75–88

Orden de 14 de julio de 2016, por la que se desarrolla el currículo correspondiente a la Educación Secundaria Obligatoria en la Comunidad Autónoma de Andalucía, se regulan determinados aspectos de la atención a la diversidad y se establece la ordenación del proceso de aprendizaje del alumnado, BOJA nº 144, 28 de julio (2016)

Osorio, K., López, A. (2017) La Retroalimentación Formativa en el Proceso de Enseñanza-Aprendizaje de Estudiantes. Mendoza: *Revista Iberoamericana de Evaluación Educativa*, 7(1), 13-30.

Rico, L (1997). Reflexión sobre los fines de la educación matemática. *Suma,* 5, 5-19

Rupayán, R (2007). Habilidades desarrolladas por la geometría en los niños. Recuperado el 1 Junio 2019, de https://pedagogic07.wordpress.com/2007/07/17/habilidades-desarrolladas-por-la-geometria-en-los-ninos/

Sinclair, N.,Freitas,E. (2011).Diagram,gesture,agency_Theorizim embodiment in the mathematics classroom. *Educ Stud Math* ,80,133–152.

Socas, M. M. (1997). Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las Matemáticas en la Educación Secundaria. En Rico, L. y otros: La Educación Matemática en la Enseñanza Secundaria,125-154. Barcelona: Horsori

Tovar, E, (2014). Errores en el aprendizaje de las figuras y cuerpos geométricos en el primer año de educación. *Revista Ciencias de la Educación Universidad de Carabobo* (Venezuela), 45,174-186.

Épsilon - *Revista de Educación Matemática* *2021, nº 107, 59-65*

Relación entre motivación por las matemáticas y aprendizaje activo a través de herramientas digitales

Francisco José Poyato López
Universidad de Córdoba. España
fpoyato@uco.es

Resumen: *Existe una relación clara entre la motivación que el alumnado muestra por las matemáticas y el rendimiento académico. Un aspecto al que debe prestar atención el profesorado es el fomento de la motivación de su alumnado a través de metodologías activas. En este trabajo mostramos los resultados de un proyecto de trabajo con alumnado de sexto curso de primaria. A través del cual, se pudo realizar un aprendizaje autónomo utilizando herramientas digitales para la búsqueda de información y elaboración de resultados. Los datos obtenidos muestran que el empleo de metodologías activas y herramientas digitales resultan motivadoras y fomentan el aprendizaje.*
Palabras clave: *Metodologías activas, Herramientas digitales, Motivación.*

Relationship between motivation for mathematics and active learning through digital tools

Abstract: *There is a clear relationship between the motivation that students show for mathematics and academic performance. One aspect that teachers should pay attention to is promoting the motivation of their students through active methodologies. In this work we show the results of a work project with sixth grade primary school students. Through which the students were able to carry out autonomous learning using digital tools to search for information and produce results. The data obtained show that the use of active methodologies and digital tools are motivating and promote learning.*
Keywords: *active methodologies, digital tools, motivation.*

INTRODUCCIÓN

Diferentes trabajos han demostrado las estrechas relaciones que existen entre la motivación que muestra el alumnado por una materia y su rendimiento académico en ella. De hecho, cuando el alumnado se siente competente en un área, por el hecho de haber obtenido buenos resultados, desarrolla una valoración mayor por la misma (Denissen et al., 2007). De esta manera, los logros en una materia consiguen por un lado que el alumnado tenga una percepción de que su competencia en ella es importante, y por otro, posibilita que se desarrolle su motivación intrínseca (Garon-Carrier et al., 2016). Al mismo tiempo, esta percepción que el alumnado desarrolla sobre sus habilidades se traduce en que va a invertir un esfuerzo mayor en el trabajo en esa materia, y por tanto alcanzarán un mayor rendimiento (de Bruin et al., 2014). Así, las relaciones que existen entre motivación y resultados trabajan en ambas direcciones y por tanto son recíprocas.

Una primera consecuencia para el profesorado de esta relación se encuentra en que se hace necesario poner de manifiesto de forma temprana los éxitos alcanzados por los estudiantes, ya que tal y como hemos comentado, esto puede desencadenar el proceso que lleva, de la percepción de la competencia, al desarrollo de un mayor esfuerzo y, por tanto, a una mayor motivación.

De forma opuesta, la percepción en el alumnado de que existe un fracaso temprano conducirá a que se esfuerce menos y a que esté desmotivado por realizar tareas relacionadas con la materia.

En el caso concreto de las matemáticas, los estudiantes que muestran un rendimiento matemático previo más alto muestran un nivel de autoestima mayor y una más alta consideración de su capacidad para realizar tareas matemáticas, y como consecuencia, manifestarán una mayor valoración por las matemáticas en el futuro (Kriegbaum, et al., 2015).

Un aspecto que se relaciona negativamente con la motivación y el rendimiento es la ansiedad matemática. Esta se refiere a sentimientos de preocupación, miedo y tensión que surgen al realizar actividades del área matemáticas (Suinn y Winston, 2003) y está provocada por la falta frecuente de comprensión en la realización de tareas matemáticas. Estos sentimientos de preocupación que surgen con la ansiedad matemática tienen como consecuencia un comportamiento de evitación de la práctica de ejercicios matemáticos y, por tanto, un efecto negativo en el rendimiento (Krinzinger et al. 2009). Además, este sentimiento de ansiedad tiene también un efecto negativo en la memoria de trabajo puesta en práctica en las estrategias utilizadas para resolver una tarea (Ramírez, et al., 2016).

USO DE APLICACIONES Y APRENDIZAJE ACTIVO

Tal y como acabamos de comentar anteriormente, para evitar la ansiedad por las matemáticas se necesita llevar a cabo una enseñanza motivadora. En este sentido, resulta adecuado que el alumnado realice un aprendizaje activo y conectado con la realidad en la que se encuentra (Dehesa, 2018). Un ejemplo de ello es la incorporación de herramientas digitales tales como aplicaciones en el proceso de enseñanza-aprendizaje. Su uso aumenta la curiosidad del alumno, y esta, tal y como han demostrado diferentes estudios, se transforma en motivación por la resolución de un problema.

En ocasiones esta motivación surge incluso para dar respuesta a cuestiones que en principio no resultan llamativas para el alumnado pero que sí son necesarias, Es este tipo de motivación es la que los autores describen como motivación conceptual. En el área de matemáticas, esta motivación supone una estrategia de enseñanza que permite, utilizando la curiosidad de los estudiantes como eje, la introducción de un nuevo concepto, que va a servir como herramienta, en aplicaciones informáticas, para la resolución de problemas reales a través del aprendizaje activo del alumnado (Mandelbrot 1994).

Otro instrumento de motivación relevante en el aprendizaje de las matemáticas es la concreción, ya que resulta útil tener una comprensión precisa de algo. Esta se alcanza a través del conocimiento de los detalles del concepto que se está aprendiendo. Para ello, el uso de las aplicaciones facilita la ejemplificación de las ideas que se están enseñando, y permite así llevar a cabo una enseñanza más concreta.

El aprendizaje activo es un método de resolución de problemas caracterizado por realizar una acción y reflexionar sobre sus resultados. En la educación matemática puede definirse como el aprendizaje a través del trabajo individual del alumno sobre un problema real seguido de una reflexión sobre este trabajo.

UNA EXPERIENCIA DE AULA CON ALUMNADO DE TERCER CICLO DE PRIMARIA

Tal y como hemos comentado anteriormente, la motivación juega un importante papel en el aprendizaje del alumnado. Regula la emoción, la cognición y/o el comportamiento (Hannula, 2004), y permite predecir y comprender el desempeño de los estudiantes (Kim, et al., 2014)

Para fomentar hoy día la motivación en el alumnado de primaria, se hace imprescindible que este realice, en mayor o menor medida, un aprendizaje activo a través de la utilización de herramientas informáticas. El uso de la tecnología supone que el alumnado tenga una percepción distinta de la naturaleza de la tarea y ofrece un método diferente para que los estudiantes se involucren en el proceso de aprendizaje (Heafner, 2004). Diferentes estudios han demostrado, además de lo comentado, que el empleo de la tecnología a través de metodologías activas, como por ejemplo el aprendizaje basado en proyectos (ABP), permite también reducir las limitaciones de los métodos tradicionales y constituye una forma más flexible de organizar el currículo (Huscroft-D’Angelo et al., 2017). Son numerosas las investigaciones que han demostrado que el aprendizaje basado en proyectos permite una mayor adquisición de conocimientos y unas mejores relaciones entre alumnos y alumnas a través de su colaboración (Basilotta et al., 2018; Mosier et al., 2016; Lynn y Hwang, 2016; Jorge-Pozo y Jiménez-Gestal, 2019).

Teniendo en cuenta lo expuesto, llevamos a cabo una experiencia con el objetivo de mejorar la adquisición de conocimientos matemáticos por parte del alumnado de 6º de primaria, organizando al alumnado en grupos de trabajo de cuatro miembros y siguiendo una metodología de trabajo por proyectos. Por otro lado, también quisimos conocer cuál era la percepción del alumnado sobre la utilización de esta metodología.

Para realizar esta experiencia, y puesto que en la metodología de trabajo por proyectos es necesario partir de los intereses del alumnado, tuvimos en cuenta la inquietud mostrada por los alumnos y las alumnas en participar en la planificación de una excursión durante varios días y que se organiza con motivo del viaje de fin de curso que se realiza al finalizar la etapa de primaria.

Con esta experiencia pretendemos que el alumnado desarrolle, entre otras, las competencias matemática y digital. Los contenidos que se abordaron se encuentran repartidos en los cinco bloques de contenidos que propone el curriculum del área de matemáticas de primaria. Algunos de los que se trabajaron fueron: resolución de diferentes tipos de problemas numéricos de una operación con sumas y restas, referidas a situaciones reales, desarrollo de estrategias personales para resolver problemas e investigaciones, utilización de recursos informáticos para la realización de actividades y la comprensión de contenidos matemáticos, disposición favorable para conocer y utilizar diferentes contenidos matemáticos para obtener y expresar información, para la interpretación de mensajes y para resolver problemas en situaciones reales de la vida cotidiana, expresión oral del proceso seguido en cualquiera de los procedimientos utilizados, empleo de gráficos estadísticos: diagramas de barra, etc.

Para el desarrollo de la experiencia, nos hemos basado en los recursos que se ofrecen de forma gratuita desde diferentes páginas web institucionales, como por ejemplo la de la Consejería de Educación y Deporte de la Junta de Andalucía. En concreto, utilizamos la información que se incluye dentro del documento “Programas para el desarrollo de la competencia informacional articulados desde la biblioteca escolar”.

A modo de introducción, se inició el proyecto realizando una sesión informativa sobre algunos de los diferentes buscadores que existen, y sobre la manera en la que debían de dirigir su búsqueda de información para que esta fuera lo más práctica y funcional posible. Así, previa a la búsqueda, los grupos de trabajo seleccionaron cuáles debían de ser los criterios de búsqueda a utilizar.

Una vez seleccionados los criterios, cada grupo debía de buscar información para programar el viaje. Fundamentalmente, la información que buscaron fue la siguiente: calcular el presupuesto del viaje, buscar información sobre los horarios de trenes y autobuses, extraer información sobre la oferta cultural y de entretenimiento para planificar la estancia en el parque natural y los lugares a visitar. Conocer las condiciones atmosféricas para las fechas en la que está previsto realizar la excursión, para así poder planificar alternativas si la climatología no permite llevar a cabo lo planificado.

Para poder conocer esta información, el alumnado realizó una búsqueda en varias webs. En primer lugar, situaron la comarca a visitar utilizando http://maps.google.es/, pudiendo además obtener información de la distancia en kilómetros y de la ruta a seguir. Consultaron también la página de Renfe: https://www.renfe.com/es/es y de varias empresas de alquiler de autobuses, y obtuvieron un listado de empresas sobre la que pudieron hacer una elección. Para la previsión meteorológica buscaron en la web de la agencia estatal de meteorología: http://www.aemet.es/es/portada.

Para las actividades de ocio consultaron la información alojada en diferentes webs. Como ejemplo incluimos algunas de ellas:

- https://tranco.es/escolares/
- https://www.inturjoven.com/documents/10180/20408559/CAZORLA/94056d79-2989-49e4-b3fe-4555541c6742

- https://www.viajeteca.net/destinos-estudiantes/actividades-excursiones-escolares-sierra-cazorla
- http://www.aventurasport.es/2020/02/03/especial-escolares-cazorla/

Como resultado final del proyecto, cada grupo realizó una presentación en formato PowerPoint, en la que se apoyaron para presentar la información al resto de compañeros

Para la recogida de información se utilizó el diario del profesor, la observación directa y un cuestionario de preguntas abiertas que respondió el alumnado al final del proyecto. El cuestionario está formado por cuatro cuestiones

- ¿Qué has sentido al buscar tú mismo/a la información para la excursión?
- ¿Cómo te resulta de interesante realizar este tipo de proyectos en grupo?
- ¿Cómo te ha resultado trabajar la parte del proyecto relacionada con las matemáticas comparada con los ejercicios que propone el libro?
- ¿Te gustaría repetir proyectos de este tipo?

Tras el análisis de las respuestas, se realizó una categorización de las ideas expresadas por los alumnos y las alumnas. Se determinó que existía una gran mayoría de opiniones del alumnado que expresaban su acuerdo con la utilización de esta metodología.

Asimismo, la observación directa y la información recogida en el diario del profesor revelaron similares a los encontrados en las respuestas a las cuestiones abiertas.

A modo de ejemplo, incluimos algunas de las respuestas del alumnado a las cuestiones planteadas:

> *“Me ha gustado mucho poder hacer todo el trabajo con mis compañeros, sobre todo la parte de buscar lo que nos costaba cada parte del viaje”.*

> *“Al principio no sabía si iba a ser capaz de hacer la parte que me había tocado, que era comparar los precios de las actividades, pero cuando vi que sí estaba encontrando cosas, me gustó mucho trabajar así las matemáticas, calculando el porcentaje de cuánto nos ahorrábamos”.*

> *“A mí gusta mucho ver cosas de matemáticas con ejemplos que son de verdad, con el libro es un poco aburrido”.*

> *“La parte que más he disfrutado es haciendo los gráficos de barras y explicándolos en clase en la exposición, a mí es que eso es lo que más me gusta de las mates este curso”.*

> *“Me gusta cuando hacemos en clase proyectos de este tipo, y a mis padres también les gusta ver cómo en el cole trabajamos muchas cosas a la vez”.*

> *“Yo ya sé cómo buscar los horarios de los trenes y las distancias que hay en kilómetros entre ciudades, sabría cómo hacerlo en un mapa en internet”.*

> *“Nos hemos ayudado mucho entre todas las compañeras de mi grupo. En lo que tenía dudas, mis compañeras me han aclarado cómo poner en la tabla lo que nos costaba cada cosa para hacer el presupuesto”.*

CONCLUSIONES

La utilización de herramientas de aprendizaje digital en la educación está convirtiéndose en un recurso cada vez más frecuente. La finalidad del presente estudio fue analizar si el empleo de metodologías activas con un papel importante de las herramientas digitales suponía una motivación para el aprendizaje de contenidos matemáticos. A pesar de las limitaciones del proyecto, lo largo del desarrollo del proyecto se puso de manifiesto que cuando el alumnado es protagonista activo de su aprendizaje, desarrolla su autonomía e independencia. El trabajo colaborativo y de investigación realizado con las herramientas digitales permitió aumentar los tiempos de concentración y de trabajo, posibilitando un acercamiento autónomo a los contenidos matemáticos que se abordaron en el proyecto. Por otro lado, el que el alumnado perciba que los contenidos matemáticos forman parte de su realidad, hace que resulten más motivadores para ellos.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Basilotta, Pinto, García-Valcárcel y García, 2018; Basilotta, V., Pinto, A. M., García-Valcárcel, A. y García, M. L. (2018). La percepción de los docentes de Bachillerato sobre un proyecto de aprendizaje-servicio. Un estudio de caso. *Revista electrónica interuniversitaria de formación del profesorado*, 21(2), 65-78. doi:https://doi.org/10.6018/reifop.21.2.323301

de Bruin, A. B. H., Kok, E. M., Leppink, J., & Camp, G. (2014). Practice, intelligence, and enjoyment in novice chess players: A prospective study at the earliest stage of a chess career. *Intelligence*, 45, 18-25. https://doi.org/10.1016/j.intell.2013.07.004

Dehesa, N. (2018). Las Matemáticas puestas en Juego. *Épsilon - Revista de Educación Matemática*. 99, 43-54.

Garon-Carrier, G., Boivin, M., Guay, F., Kovas, Y., Dionne, G., Lemelin, J. P. (2016). Intrinsic motivation and achievement in mathematics in elementary school: a longitudinal investigation of their association. *Child Dev*.87, 165–175

Hannula, MS (2004). Regulación de la motivación en matemáticas. Ponencia presentada en la décima Congreso Internacional de Educación Matemática, TSG 24, Copenhague, Dinamarca. Obtenido de http://www.icme10.dk/

Kim, C., Park, S. y Cozart, J. (2014). Affective and motivational factors of learning in online mathematics courses. *British Journal of Educational Technology.* Vol 45 (1), 171-185. *doi:10.1111/j.1467-8535.2012.01382.x*

Heafner, T. (2004). Using technology to motivate students to learn social studies. *Contemporary Issues in Technology and Teacher Education*, 4(1), 42–53.

Higgins K, Huscroft-D'Angelo J, Crawford L. (2019). Effects of Technology in Mathematics on Achievement, Motivation, and Attitude: A Meta-Analysis. *Journal of Educational Computing Research*. 57(2):283-319. doi:10.1177/0735633117748416

Huscroft-D'Angelo, J., Higgins, K., & Crawford, L. (2016). Technology, affective characteristics and mathematics: A review of the literature from 1985-2013. *Journal of Educational Computer Research.*

Jorge-Pozo, D. y Jiménez-Gestal, C. (2019) Aplicando flipped classroom para el aprendizaje basado en problemas (ABP) en secundaria. *Épsilon - Revista de Educación Matemática*. 103, 45-54.

Junta de Andalucía. Consejería de Educación y Deporte. Programas para el desarrollo de la competencia informacional articulados desde la biblioteca escolar. https://www.juntadeandalucia.es/educacion/portals/ishare-servlet/content/f4d62919-9e01-4987-a6db-f3a793a27781

Kriegbaum, K., Jansen, M., & Spinath, B. (2015). Motivation: A predictor of PISA's mathematical competence beyond intelligence and prior test achievement. Learning and Individual Differences, 43, 140–148. https://doi.org/10.1016/j.lindif.2015.08.026

Krinzinger, H., Kaufmann, K., y Klaus, W. (2009). Math Anxiety and Math Ability in Early Primary School Years. *Journal of Psychoeducational Assessment* 27(3):206-225 DOI: 10.1177/0734282908330583

Lynn, V. y Hwang, Y. (2016) Exploring the effects of project-based learning in secondary mathematics education. *The Journal of Educational Research*, 109(5), 449 463. doi:https://doi.org/10.1080/00220671.2014.979911

Mandelbrot, B. (1994). Fractals, the computer, and mathematics education" in Proceedings of the 7th International Congress on Mathematical Education (Plenary lectures), C. Gaulin, B. R. Hodson, D. H. Wheeler, and J. C. Egsgard, Eds., pp. 77–98, Les Presses de L'universit´e Laval, Sainte-oy, Qu´ebec, Canada, August 1994.

Mosier, Levine y Perkins, 2016; Mosier, G., Levine, J. y Perkins, T. (2016). Students' perceptions of project based learning within the new tech school model. *International Journal of Educational Reform,* 25(1), 2-15. doi:https://doi.org/10.1177/10567879160

Ramirez, G., Chang, H., Maloney, E. A., Levine, S. C., & Beilock, S. L. (2016). Journal of Experimental Child On the relationship between math anxiety and math achievement in early elementary school: The role of problem solving strategies. *Journal of experimental child psychology*, 141, 83–100. https://doi.org/10.1016/j.jecp.2015.07.014

Suinn R., Winston E. (2003). The Mathematics Anxiety Rating Scale, a Brief Version: Psychometric Data. *Psychological Reports*. 92(1): 167-173. doi:10.2466/pr0.2003.92.1.167

Épsilon - *Revista de Educación Matemática* *2021, nº 107, 67-82*

ALKIMIA: sistema alternativo para realizar multiplicaciones y divisiones mediante símbolos y algoritmos que no usan las tablas

Magdalena Guzmán Domínguez
Maestra especialista en pedagogía terapéutica
jacris2ma@gmail.com

Resumen: *Alkimia es un sistema alternativo a los algoritmos tradicionales para multiplicar y dividir sin usar las tablas cuyo objetivo es dar respuesta al alumnado que tiene otra manera de aprender, ajustarse mejor a sus capacidades, ritmo y estilo de aprendizaje. Las tablas son solo una opción. Es necesario salir del camino único.*
Palabras clave: *Matemáticas, Tablas, Método alternativo, Dificultades de aprendizaje, Operaciones de multiplicar y dividir.*

ALKIMIA: alternative system for performing multiplication and division using symbols and algorithms that do not use tables

Abstract: *Alkimia is an alternative system to traditional algorithms for multiplying and dividing without using tables, whose objective is to respond to students who have another way of learning, to better adjust to their abilities, pace and learning style. Tables are only one option. It is necessary to get out of the single path.*
Keywords: *Mathematics, Tables, Alternative method, Learning difficulties, Multiplication and division operations.*

INTRODUCCIÓN

Durante casi treinta años de docencia como especialista en pedagogía terapéutica, he buscado insistentemente la mejor manera de enseñar al alumnado que aprende de forma diferente. He observado cómo multiplicaciones y divisiones se convertían en un muro infranqueable, principalmente por la dificultad de aprenderse las tablas. Las expresiones

256 × 67, 2345: 8 les provocaban animadversión, pues eran el preludio del mal rato que iban a pasar y el motivo de suspensos y castigos sufridos durante años.

Tal como indican las Instrucciones de 22 de junio de 2015 de la Dirección general de Participación y Equidad de la Junta de Andalucía (Junta de Andalucía, 2015a), una parte del alumnado tiene dificultades de aprendizaje (déficit de atención, discalculia…) que les impiden retener las tablas y aprender los algoritmos tradicionales. Otros con sobredotación intelectual tienen gran creatividad e *insight* en la resolución de problemas (Benito, 2003) y no las necesitan, pues emplean estrategias propias.

La Orden de 17 de marzo de 2015 por la que se desarrolla el currículo correspondiente a la Educación Primaria en Andalucía (Junta de Andalucía, 2015b) menciona brevemente las tablas de multiplicar:

- Mapa de desempeño, estándar 20.5: Construye y memoriza las tablas de multiplicar, utilizándolas para realizar cálculo mental.
- Contenidos segundo ciclo 2.15: Descomposición aditiva y multiplicativa de los números. Construcción y memorización de las tablas de multiplicar.

No es proporcional esta breve alusión a la cantidad de sesiones de trabajo que se les dedica ni a su relevancia, tanto académica como socioafectiva, en la vida escolar y familiar de nuestro alumnado. Considero que es un tiempo perdido —para algunos por el esfuerzo infructuoso que realizan, para otros porque no las necesitan— en el que podrían desarrollar otras capacidades.

Como señala el manifiesto contra los algoritmos tradicionales de las cuatro operaciones aritméticas y de la raíz cuadrada (ATOA) (Martín, s.f.): “Los estudiantes necesitan conocerlos, pero no debido a su importancia matemática, sino porque ayudan a los estudiantes a tener ‘éxito’ en la escuela. Es decir, son destrezas para la supervivencia escolar de los alumnos. Quien no sabe hacer divisiones o multiplicaciones es un fracasado en la escuela. Son destrezas de supervivencia, procedimientos que el alumno debe dominar, simplemente porque el programa de matemáticas lo exige”.

Comparto lo expuesto en el manifiesto. Sin embargo, resolver multiplicaciones y divisiones era importante para mis alumnos y alumnas precisamente porque marca un “status” y manejarlas con soltura les hace sentirse mejor, sube su autoestima y eleva el nivel de expectativas.

Dadas la dificultad que encontraban y la importancia que para ellos tenía aprender a “hacer estas cuentas”, busqué y encontré un camino alternativo con algoritmos que no dependen de las tablas: Alkimia.

Usamos símbolos y esquemas en el enunciado de las cuentas consiguiendo un impacto visual que para ellos tiene sentido y les sirve de guía. Resolvemos todas las operaciones sin tablas, mezclando distintos elementos, unos de creación propia, otros basados en sistemas atribuidos a antiguas civilizaciones y en estrategias que usan las manos, de tradición popular.

La inteligencia es diversa, dinámica y peculiar (Robinson, 2009), no es lógico tener un solo guion y pretender que todos lo sigan. Debemos ofrecer a nuestro alumnado distintas estrategias para que opten por las que mejor se adaptan a su manera de ser y de aprender. Las tablas y procedimientos tradicionales son solo una opción.

DESCRIPCIÓN DE ALKIMIA

Alkimia permite acceder a los resultados de las operaciones mediante procedimientos que no usan las tablas ni los algoritmos tradicionales.

Coincidiendo con lo indicado por Castro: "Distinguimos entre el significado de las operaciones y el dominio de las formas o procedimientos de cálculo utilizados para obtener resultados cuando se aplican estas operaciones" (Castro, 2013), usamos símbolos y esquemas para representar el significado de las operaciones y unas técnicas y procedimientos diferentes a los habituales para encontrar el resultado.

Símbolos y esquemas

Cada proceso de aprendizaje debe ir acompañado de situaciones contextualizadas en las que las operaciones respondan a acciones. (Flores, Castro-Rodríguez y Fernández-Plaza, 2015).

Para este grupo de niños y niñas, la simbología habitual estaba vacía de significado: sabían que la equis significa multiplicar y los dos puntos o la caja dividir, pero ¿qué significan realmente multiplicar y dividir? Eso no estaba tan claro. Era necesario plantear una situación problemática a la que dar solución y para encontrarla hemos de hacer algo (operaciones). Esa acción la representamos mediante los símbolos y las operaciones con los esquemas.

Símbolos

Representan las transformaciones que sufren las cantidades para llegar a la solución del problema. No están ligados necesariamente a ninguna operación.

El símbolo de la figura 1 muestra cómo una cantidad conocida se transformará en otra mayor desconocida (círculo vacío). La transformación puede realizarse mediante una multiplicación pero también con una suma cuando añadimos elementos a una cantidad conocida y con una división cuando el divisor sea menor que la unidad.

El símbolo de la figura 2 expresa la transformación de una cantidad conocida, en otra más pequeña, desconocida. Representa la división, la resta cuando quitemos elementos a una cantidad conocida y la multiplicación cuando uno de los factores sea menor que la unidad.

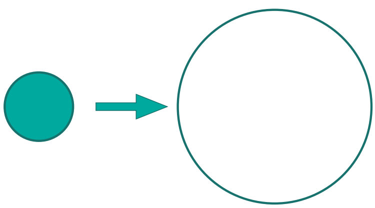


Figura 1

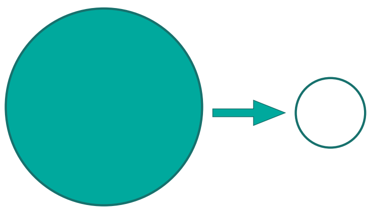


Figura 2

Esquema

En él situamos los datos de la operación que vamos a realizar distinguiendo los números cardinales de los que no lo son y marcando la diferencia de tamaño de las cantidades inicial y final.

El esquema de la multiplicación (figura 3) sustituye al clásico 2452 ×x 4 = 9808.

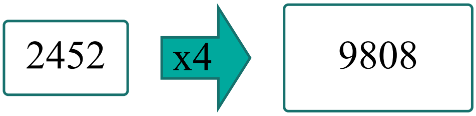


Figura 3

Escribimos los números cardinales en un recuadro: 2452 es el cardinal del conjunto inicial y 9808 el número de elementos que se consigue repitiendo 4 veces el conjunto inicial.

El esquema de la división (figura 4) sustituye a 9808: 4 = 2458.

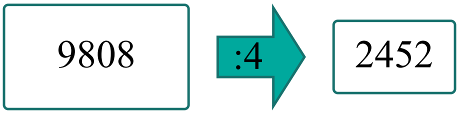


Figura 4

Escribimos los datos en el lugar que corresponde: 9808 es el cardinal del conjunto inicial (mayor) y 2452 los elementos obtenidos partiendo 4 veces el conjunto inicial.

La figura 5 muestra trabajos realizados por mis alumnos

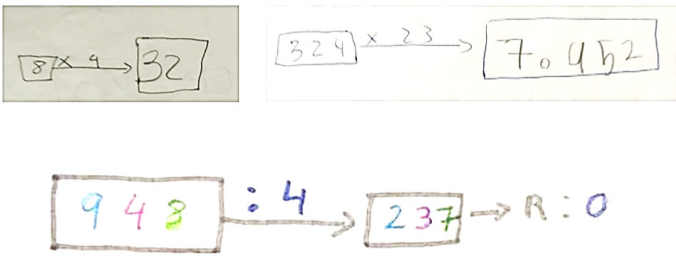


Figura 5

En la figura 6 una alumna usa el símbolo y el esquema para resolver un ejercicio.

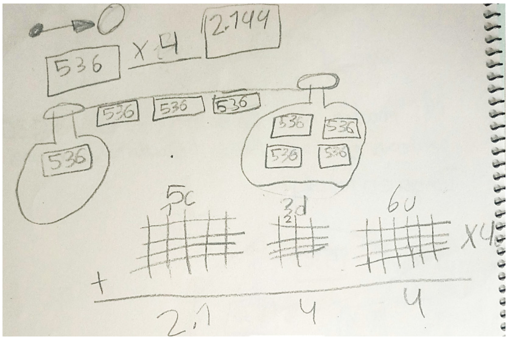


Figura 6

TÉCNICAS QUE SUSTITUYEN A LOS ALGORITMOS QUE USAN LAS TABLAS

Las técnicas son diversas, pero todas cumplen el objetivo inicial: simplificar la realización de las operaciones, no usar las tablas y encontrar el resultado de la multiplicación o división.

La multiplicación

En Alkimia cambiamos la representación tradicional por los motivos anteriormente explicados y la sustituimos por nuestro esquema (figura 7).

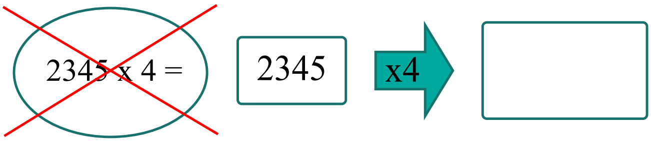


Figura 7

Multiplicamos dígito a dígito marcando el orden numérico (figura 8):

2um	**3c**	**4d**	**5u**	
(4x2)	(4x3)	(4x4)	(4x5)	**4u**
8um	12c	16d	20u	

Figura 8

Para encontrar el resultado de cada producto tenemos tres caminos:

Puntos

Está basado en el sistema maya (figura 9).

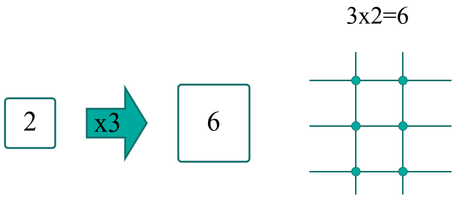
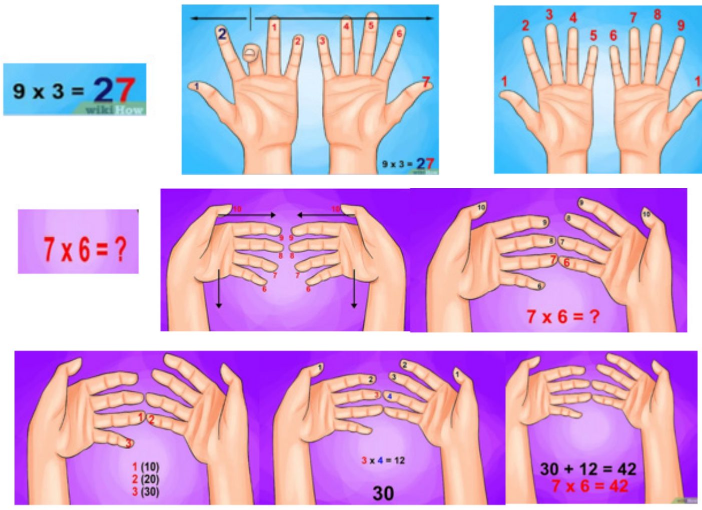


Figura 9

Trazamos tantas rayas horizontales como indique uno de los factores y tantas verticales como indique el otro. Contamos los puntos de cruce. Es fácil de hacer y muy útil para entender el sentido de la multiplicación por su impacto visual.

Manos

Con números muy altos, el esfuerzo de atención sostenida puede complicar la operación a quienes tienen dificultades con ella. Podemos recurrir a estrategias empleando las manos. La tradición popular presenta numerosos ejemplos, que podemos encontrar en internet (figuras 10 y 11) . (https://es.wikihow.com/multiplicar-con-las-manos).



Figuras 10 y 11

Estas técnicas son una buena opción, pues recurren a algo que siempre llevamos con nosotros.

Resultados conocidos

Es posible que, con el uso, lleguen a asociar la imagen de un entramado con un número, que hayan aprendido algunos números de la tabla o que lo hayan averiguado por otros métodos. Si es así, pueden ponerlo directamente.

Esas son las tres maneras de encontrar el resultado de los productos. Se pueden emplear juntas o por separado, como mejor se adapten a cada manera de aprender.

Continuamos con la realización de la operación. Una vez encontradas las respuestas, escribimos cada resultado debajo del orden numérico al que pertenece, es decir: 20 debajo del 5 porque son 20 unidades, 16 debajo del 4 porque son 16 decenas, etc. (figura 12).

Unimos las cifras de un mismo orden numérico mediante una línea curva ("caracolito" la llamó una alumna y ese nombre quedó).

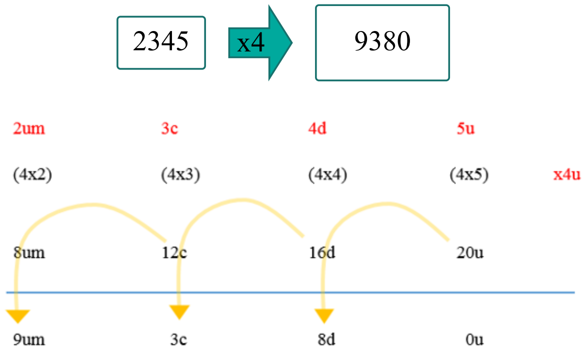


Figura 12

Si al sumar las cifras del mismo orden obtenemos un número de dos cifras, añadimos la nueva cifra a la suma escribiéndola sobre la curva que indica el "caracolito" (figura 13).

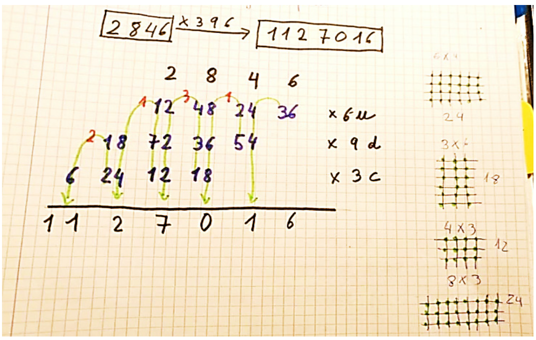


Figura 13

La división

Manejamos dos técnicas diferentes según las cifras del divisor:

Una cifra en el divisor (El huerto)

Es un sistema de filas y columnas muy fácil de resolver que a ellos les recordaba el huerto del colegio. Tiene las siguientes características:

- Es un sistema de reparto o agrupamiento basado en el orden decimal.
- Es muy gráfico, van viendo paso a paso lo que están haciendo.
- Permite combinar el reparto, las manos y los resultados conocidos.

En el siguiente ejemplo vamos a repartir 935 unidades en 4 grupos (figura 14).

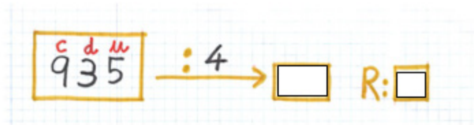


Figura 14

Dibujamos tantas columnas como indique el divisor. En nuestro ejemplo, 4.

A la izquierda de las columnas escribimos la cantidad que vamos a repartir, empezando por el orden mayor (9 centenas) y vamos marcando una raya en cada columna hasta completar el valor de la cifra que estamos repartiendo. En nuestro caso hemos rellenado dos filas y ha sobrado una centena. A la derecha ponemos el número de filas completadas: 2 y trazamos una línea horizontal para separar el campo de las centenas. Al hacer la raya ellos suelen decir: "se acabó el campo de las centenas, vamos a sembrar al de las decenas". El número de elementos sobrantes (1) lo escribimos en el campo de las decenas, resaltando que va delante porque es una unidad superior, pues viene del campo de las centenas. Repetimos el mismo procedimiento hasta el campo de las unidades. El cociente se formará con el número de filas completas de cada orden: 233 (2 C, 3 D, 3 U); el resto será el número de unidades sobrantes: 3.

En la figura 15 aparecen ejemplos de dos divisiones realizadas por este método.

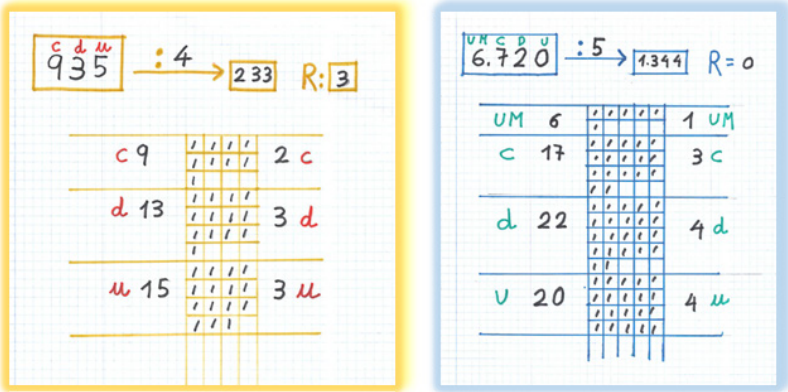


Figura 15

Cuando la cantidad de elementos a repartir es muy elevada (figura 16), podemos emplear las técnicas de las manos o los resultados conocidos. No es necesario repartir 58 unidades si sabemos que 7 x 8 son 56: solo marcamos las dos que faltan para llegar a 58.

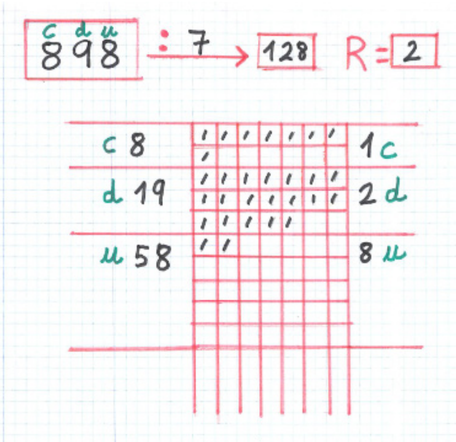


Figura 16

Ambas maneras de realizar la operación son igualmente válidas, pues dan el resultado correcto. Si usamos números con decimales seguimos el mismo procedimiento, pero trazamos una línea distinta para indicar que salimos del campo de los números enteros (figura 17).

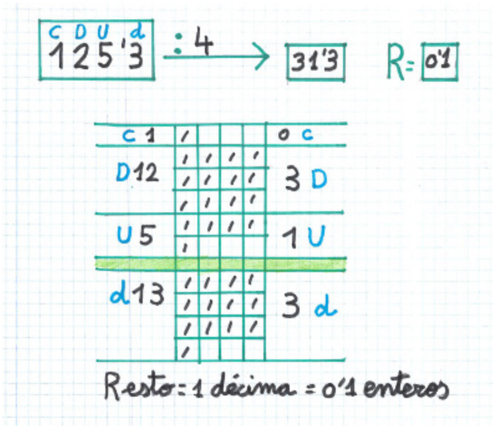


Figura 17

Varias cifras en el divisor (La tabla)

Suelen ser las más temidas. Para resolverlas usamos una adaptación del método egipcio, donde marcamos y ubicamos la secuencia a seguir.

El sistema tiene unas características muy interesantes:

- Solo se usan sumas y restas.
- Tiene una estructura (plantilla) coherente.
- En caso de error, pueden volver sobre sus pasos fácilmente para rectificar.
- Hacer la prueba (con calculadora) era una avanzadilla hacia las igualdades y las ecuaciones.

Véase el ejemplo en la figura 18:

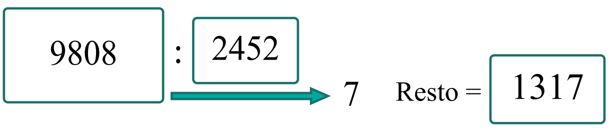


Figura 18

Debemos distribuir 34.791 unidades (recuadro) en grupos de 4782 unidades (recuadro). Formaremos 7 grupos (sin recuadro) y sobrarán 1317 unidades (recuadro).

Desarrollo de la operación:

Dibujamos tres columnas. En la izquierda escribimos el divisor, que es el número de unidades que necesitamos para formar un grupo. Escribimos 1 del grupo formado en la columna de la derecha. Doblamos el valor del divisor y lo escribimos debajo de él obteniendo la cantidad de unidades necesarias para formar dos grupos, anotamos el número dos a la derecha, debajo del 1. Así sucesivamente hasta llegar sin sobrepasar al valor del dividendo (figura 19).

	4.782		1
Doble	9.564		2
Doble	19.128		4
Doble	~~38.256~~ >34.791		8

Figura 19

Si no llegamos al valor exacto comenzamos con las restas. Restamos al dividendo la cantidad de elementos utilizados en la última duplicación, en nuestro ejemplo 34.791 – 19.128 = 15.663. Apuntamos el resultado en la columna del centro junto al sustraendo. Comparamos el resultado de la resta en dirección ascendente restando cuando sea posible y anotando el resultado junto al sustraendo, hasta no poder restar más: ese número final es el resto, en este caso, 1317 (figura 20)

4.782	6.099 - 4.782 **1.317**	1
9.564	15.663 - 9.564 **6.099**	2
19.128	34.791 - 19.128 **15.663**	4
34.791		8

Figura 20

El cociente es la suma de grupos que hemos formado: 4 + 2 + 1 = 7.

Hacen la prueba con la calculadora, aplicando la definición de división: dividendo es igual a divisor por cociente más el resto.

En el ejercicio de la figura 21 conocíamos la cantidad inicial: 34791 (recuadro) y el número de grupos: 4782 (sin recuadro) y queríamos saber los elementos que cabían en cada grupo. En este caso 7 elementos (recuadro).

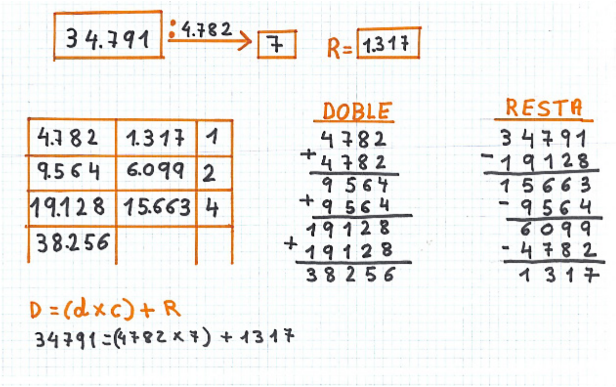


Figura 21

En el ejemplo de la figura 22, al calcular el doble de las cantidades, alcanzamos el valor del dividendo. Por lo tanto, la división es exacta. El cociente es el último número que hemos escrito en la fila de la derecha

$\boxed{36.528}$: 4.566 → $\boxed{8}$

4.566		1
9.132		2
18.264		4
36.528		8

Figura 22

Las divisiones con decimales se resuelven de manera similar, pero en varias etapas, tal como se explica en el siguiente ejemplo: Vamos a repartir una cantidad de 548,25 unidades en 197 grupos (figura 23).

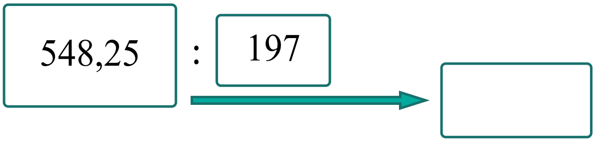


Figura 23

Empezamos repartiendo los números enteros: 548. Obtenemos un cociente de 2 unidades y un resto de 154 unidades (figura 24)

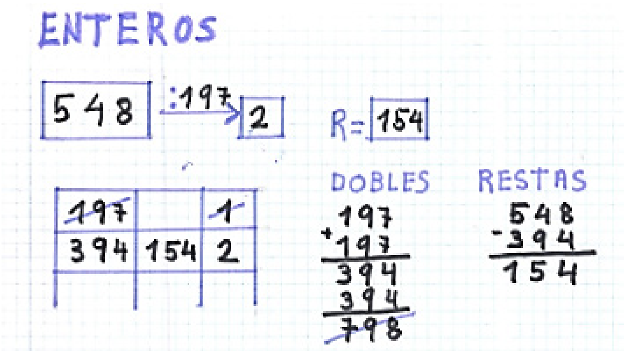


Figura 24

Formamos otra tabla para las décimas, cuyo dividendo serán las 154 unidades del resto anterior más el número correspondiente a las décimas: 1542 décimas. Obtenemos 7 décimas en el cociente y 163 décimas en el resto (figura 25)

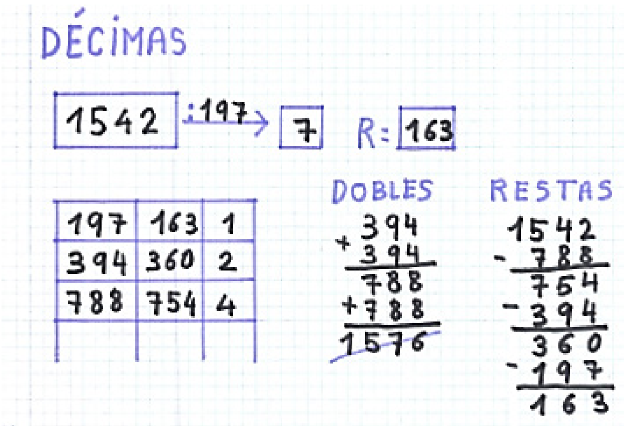


Figura 25

Construimos otra tabla para las centésimas. El dividendo se forma con las 163 décimas del resto anterior más las 5 centésimas de la cantidad inicial: 1635 centésimas. Obtenemos 8 centésimas en el cociente y 59 centésimas en el resto (figura 26)

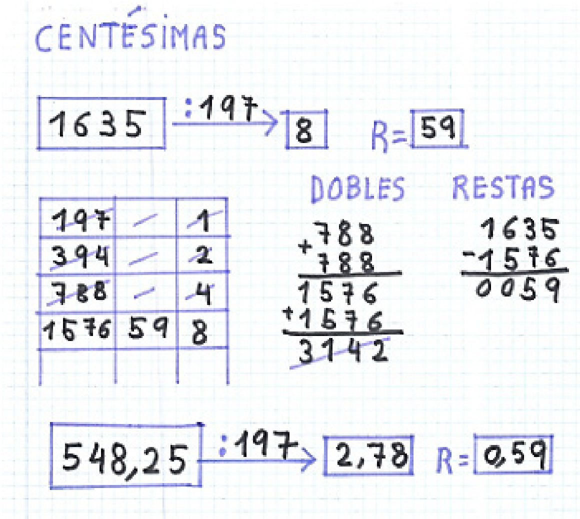


Figura 26

El cociente de la división inicial lo formarán todos los cocientes parciales: 2 enteros, 7 décimas y 8 centésimas: 2,78.

El resto es el del último orden (centésimas) que hemos de pasar al orden en el que esté expresado el dividendo inicial: 59 centésimas = 0,59 unidades (figura 27)

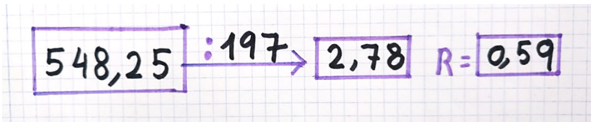


Figura 27

Como hemos podido observar, mediante estas técnicas se pueden resolver todas las multiplicaciones y divisiones, desde las más sencillas hasta las más complicadas, sin necesidad de usar las tablas. Gracias a ellas mis alumnos y alumnas pudieron resolverlas y continuar con sus aprendizajes.

CONCLUSIÓN

Propongo ese sistema como alternativa para evitar a muchos niños y niñas los problemas derivados de la obligatoriedad de operar usando las tablas y algoritmos tradicionales. Con una alternativa metodológica esos aprendizajes han sido posibles.

Despertamos un alto nivel de motivación en el alumnado junto al que se construyó, que, por distintos motivos, no aprendía al ritmo esperado para su edad los contenidos del programa.

Venían confiados, sabiéndose capaces de hacer muchas cosas bien, sabiendo que todos tenemos habilidades y dificultades, que el error no es una tragedia. Les gustaba llevar sus trabajos a casa, enseñar estas nuevas técnicas que dominaban y que su familia desconocía. Sin haberlo pedido, me trajeron representadas situaciones problemáticas y su solución con este nuevo sistema.

Dominar la multiplicación y la división produce en el alumnado un impacto emocional tan positivo que les ayuda a superar frustraciones, tensiones y estrés. Aprenden porque quieren aprender, porque les parece divertido y útil.

Es imprescindible enseñar distintas maneras de resolver las operaciones para que cada cual elija la que mejor se adapte a su manera de aprender y dejar siempre abierta una puerta a otras opciones.

Hemos de emplear el tiempo en los conocimientos y valores que les hagan crecer como personas. Enseñémosles a pensar, a aprender, a ser críticos, a valorar y analizar la información que constantemente les llega, a ser solidarios, asertivos, resilientes, a enriquecerse con la diversidad, a aprender de sus errores, a construir sus conocimientos… Esa es la verdadera educación.

Estamos en el siglo XXI: preparemos a nuestros niños para desenvolverse en él, fomentemos el pensamiento divergente. Debemos ofrecerles la oportunidad de investigar y recorrer caminos alternativos.

Las tablas y las cuentas no son imprescindibles ni únicas, no tienen que aprenderlas ni resignarse a mirarlas en un papel mientras otros compañeros las manejan con soltura. No es necesario pasar tantas horas intentando retener algo que pronto van a olvidar. Hay un camino alternativo para esas operaciones que todo lo complican.

Abandonemos el camino único, ofrezcamos alternativas.

REFERENCIAS

Benito, Y. (2003). Manual internacional de superdotados: Manual para profesores y padres. Madrid, España: Editorial EOS.

Flores, P., Castro-Rodríguez, E. y Fernández-Plaza, J.A. (2015). Enseñanza y aprendizaje de las estructuras aritméticas. En Flores, P. y Ricol, L. (Coords.) Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en la educación primaria. Madrid, Pirámide.

Junta de Andalucía (2015a). Instrucciones de 22 de junio de 2015 de la Dirección general de Participación y Equidad de la Junta de Andalucía.

Junta de Andalucía (2015b). Currículo de matemáticas de Enseñanza Primaria, BOJA nº60.

Martín, A.R. (s.f.). Manifiesto en contra de los algoritmos tradicionales de las cuatro operaciones aritméticas y de la raíz cuadrada (atoa). Página del autor: 2

Robinson, K. (2009). *El elemento*. Grijalbo.

https://www.instructables.com/id/Tablas-de-6-7-8-y-9-en-sus-manos/

https://es.scribd.com/document/273286477/ENSENANZA-DE-TABLAS-DE-MULTIPLICAR-DEL-6-AL-10

Wiki How, https://es.wikihow.com/multiplicar-con-las-manos

Épsilon - *Revista de Educación Matemática* *2021, nº 107, 83-89*

Las figuras imposibles en la formación matemática del alumnado de secundaria

Vicente Meavilla Seguí
Catedrático de Matemáticas jubilado
Doctor en Filosofía (Pedagogía)
vmeavill@hotmail.com

Resumen: *En este artículo, con la ayuda de las «figuras imposibles», proponemos una colección de actividades de enseñanza-aprendizaje dirigidas a los alumnos de E. S. O. y Bachillerato.*
Con ellas se pretende que los estudiantes no universitarios profundicen en el estudio de las leyes que permiten construir las representaciones bidimensionales de los objetos 3D. Al mismo tiempo, de forma transversal, se introducen algunos objetos matemáticos (números primos, «triángulo aritmético», proyecciones ortogonales) y algunos personajes notables en la Historia de las Matemáticas.
Palabras clave: *Figuras imposibles, Educación matemática, Sistemas de representación.*

Impossible figures: an educational proposal for High Schools

Abstract: *In this article, with the help of the "impossible figures", we propose a collection of teaching-learning activities aimed at E. S. O. and Bachillerato students. The aim of these activities is to help non-university students to deepen their study of the laws that make it possible to construct the laws that allow the construction of two-dimensional representations of 3D objects.*
At the same time, in a transversal way, some mathematical objects (prime numbers, "arithmetic triangle", orthogonal projections) and some remarkable characters in the History of Mathematics are introduced.
Keywords: *Impossible figures, Mathematics education, Representation systems.*

UN POCO DE HISTORIA: A MODO DE INTRODUCCIÓN

Las *figuras imposibles*, aquellas que se pueden dibujar en un papel pero que no se pueden construir en el mundo real tridimensional, han inspirado a números artistas y diseñadores gráficos a lo largo de los tiempos (Pieter Breugel, William Hogart, Oscar Reutersvärd, M. C. Escher, Sandro Del Prete, Itsvan Orosz, Jos de Mey, etc.), han fascinado a buen número de matemáticos o aficionados a las Matemáticas, están presentes en algunos sellos de correos, intervienen en el diseño de ciertos logotipos, aparecen en las pantallas de determinados juegos de ordenador e incluso han jugado un papel capital en la campaña publicitaria de un modelo de automóvil.

Desde una óptica didáctica, la introducción de las *figuras imposibles* en los programas de Matemáticas de la E. S. O. puede ayudar a la consecución de los objetivos siguientes:

Comprender el espacio tridimensional [3D] a través de sus representaciones bidimensionales [2D]

Profundizar en el conocimiento de las leyes que rigen algunas representaciones planas del espacio 3D.

Potenciar el uso de herramientas informáticas en la enseñanza y aprendizaje de la Geometría.

En esta línea, hace ya muchos años (Meavilla, 2003 y 2004), propusimos una «intervención» pedagógica estructurada en cuatro fases que se pueden esquematizar en el diagrama siguiente:

1. Representación de objetos 3D en el plano

↓

2. Construcción de objetos 3D a partir de sus representaciones 2D
   2.1. Figuras posibles
   2.2. Figuras imposibles

↓

3. Análisis y clasificación de figuras bidimensionales

↓

4. Diseño de figuras imposibles con ordenador

En la primera fase (*Representación de objetos 3D en el plano*) los alumnos debían dibujar algunos objetos tridimensionales construidos con cubos encajables.

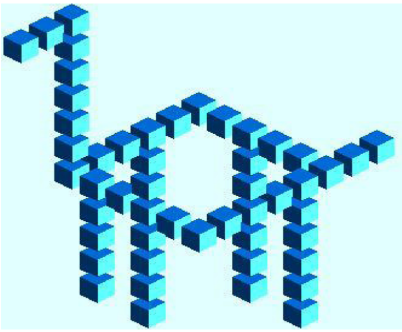
En la segunda etapa (*Construcción de objetos 3D a partir de sus representaciones 2D*) los estudiantes montaban con cubos encajables los objetos 3D representados en algunos dibujos. En este momento se descubrían dibujos que se pueden construir en el mundo tridimensional (*figuras posibles*) y dibujos que no se pueden construir en tres dimensiones (*figuras imposibles*)

En la tercera fase (*Análisis y clasificación de figuras bidimensionales*) se estudiaban diversos diseños bidimensionales y se clasificaban en posibles e imposibles.

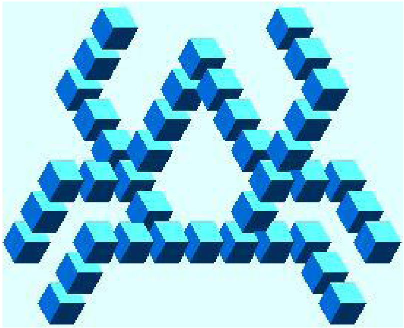
Por último, en la cuarta etapa (*Diseño de figuras imposibles con ordenador*) los alumnos debían crear figuras imposibles utilizando algún programa sencillo de ordenador.

En este artículo, utilizando diseños y dibujos propios, que no fueron concebidos desde una óptica didáctica, sugerimos una colección de actividades de enseñanza y aprendizaje que, además de tener cabida en alguna de las etapas que acabamos de describir, permiten introducir, ampliar o recordar, conceptos y/o procedimientos matemáticos.

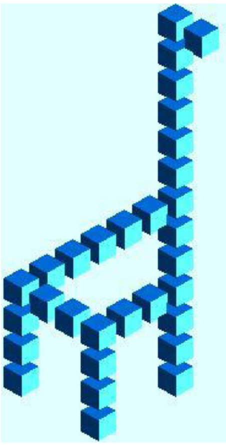
UNA ACTIVIDAD PARA LOS ALUMNOS DE 1º Y 2º DE E. S. O.



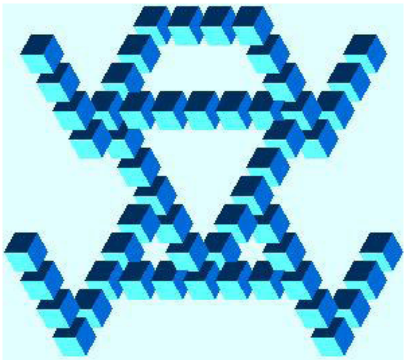
Camello



Cangrejo



Jirafa

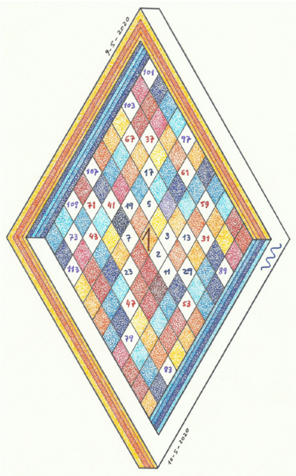


Rana

En la figura anterior se representan cuatro animales.

1. Constrúyelos con cubos multilink.
2. Discute con tus compañeros los resultados que has obtenido.

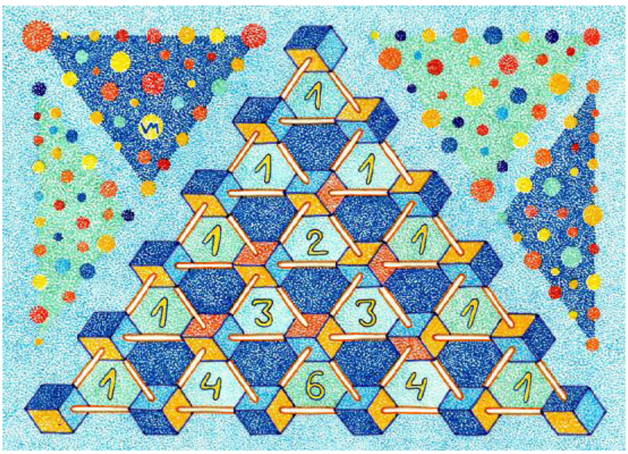
OTRA ACTIVIDAD PARA EL SEGUNDO CICLO DE E. S. O.



En el dibujo anterior se representa un conjunto de números encerrados en un marco que tiene la forma de un rombo.

1. ¿Es posible construir dicho marco en el mundo real? Razona tu respuesta.
2. Ordena de menor a mayor los números que intervienen en el dibujo. ¿Cómo se llaman dichos números (exceptuando el 1)?
3. Busca en INTERNET el significado de la expresión «espiral de Ulam». ¿Tiene algo que ver dicha espiral con los números del dibujo anterior?

TARTAGLIA, PASCAL Y EL «TRIÁNGULO ARITMÉTICO»: UNA ACTIVIDAD DE ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE PARA 1º DE BACHILLERATO



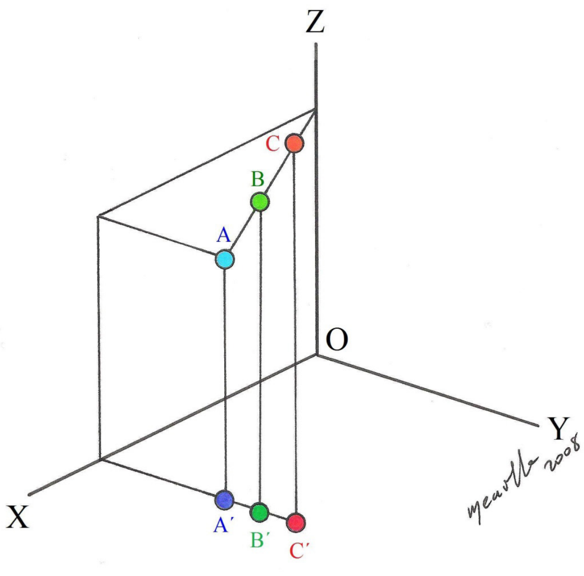
1. En la figura anterior, además de una distribución triangular de números, aparecen varios cubos conectados por varillas. ¿Es posible esta conexión en el mundo 3D? Razona tu respuesta.
2. Si el número de filas del triángulo numérico de la figura fuese aumentando, ¿qué números formarían la sexta y séptima filas? Razona tu respuesta.
3. Busca en INTERNET el significado de las expresiones «triángulo aritmético», «triángulo de Tartaglia» y «triángulo de Pascal». Relaciona las definiciones que hayas obtenido con el triángulo de la figura.
4. Busca en INTERNET las biografía de Nicolo Fontana («Tartaglia») y Blaise Pascal.

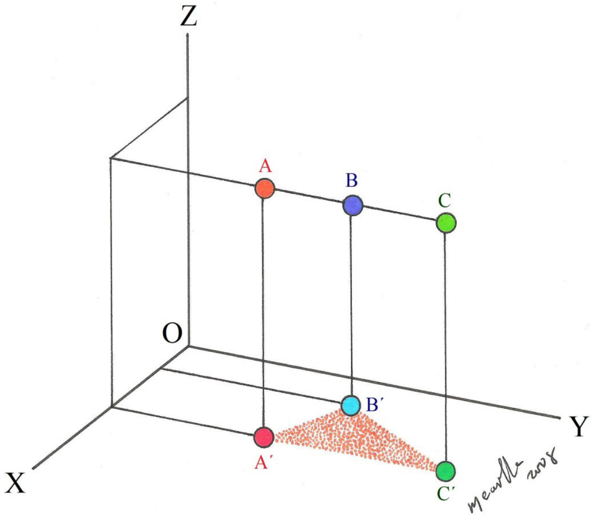
PROYECCIONES IMPOSIBLES PARA LOS ALUMNOS DE 2º DE BACHILLERATO

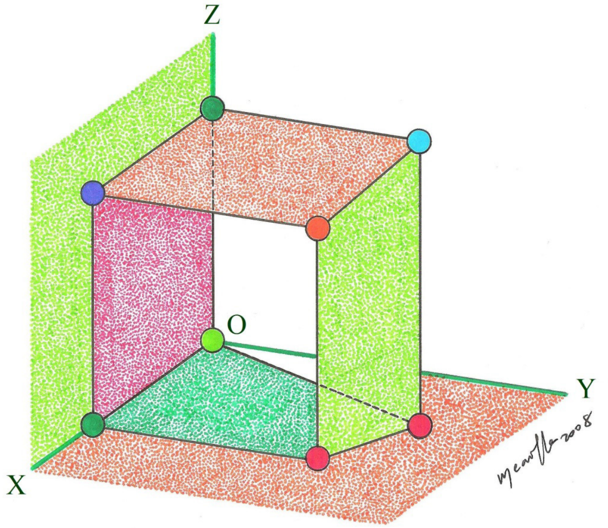
En los programas oficiales del segundo curso del Bachillerato de Ciencias una parte importante se dedica a la Geometría Analítica del espacio 3D. Dado que el estudio de esta rama de las Matemáticas no universitarias sólo presta atención a la manipulación (transformación) de los objetos geométricos tridimensionales, mediante ternas numéricas y expresiones algebraicas con tres variables, no resulta extraño que la mayoría de los alumnos de este nivel educativo presenten deficiencias significativas a la hora de visualizar los elementos que intervienen en la mayoría de los problemas que se les suelen presentar.

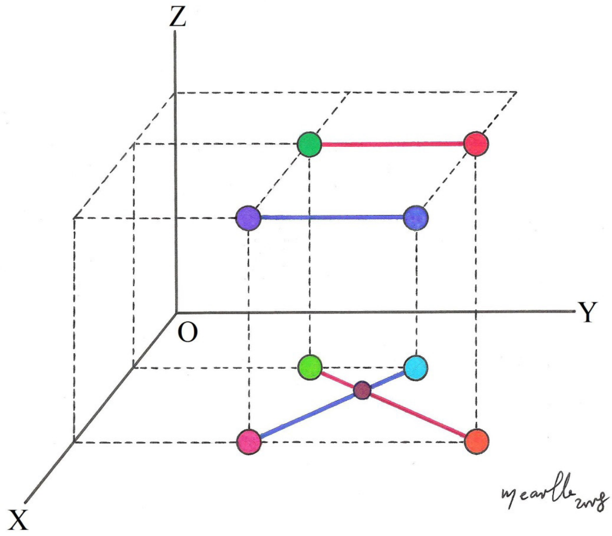
Para reducir estas limitaciones, creemos que la introducción de las figuras imposibles, como preámbulo a los estudios analíticos, puede resultar beneficiosa.

A modo de ejemplo presentamos la actividad siguiente.




Z
A
B
C
O
B´
Y
A´
C´
X
meavilla 2008


Z
O
Y
X
meavilla 2008



En las cuatro figuras anteriores hay algunos detalles «extraños». Descríbelos de forma razonada.

REFERENCIAS

Meavilla Seguí, V. (2003). An Educational Proposal for Geometry Courses. *ARCHIMEDES*, (2), 26-27.

Meavilla Seguí, V. (2004). Figuras imposibles: Una propuesta didáctica y algunas actividades para la enseñanza y el aprendizaje de la Geometría elemental. *SIGMA Revista de Matemáticas*, (24), 169-174.

Meavilla Seguí, V. (2004). *Figuras imposibles. Geometría para heterodoxos.* Granada: Proyecto Sur de Ediciones, S. L.

Meavilla Seguí, V. (2011). Geometría imposible para alumnos de Enseñanza Secundaria Obligatoria. *SIGMA Revista de Matemáticas*, (36), 25-37.

REFERENCIAS ONLINE

<https://im-possible.info/english/art/index.html>