101

2019

épsilon

Revista de Educación Matemática

Editada por la S.A.E.M. "THALES"

epsilon 101

Revista de Educación Matemática

Página de la revista: http://thales.cica.es/epsilon
Revista: epsilon@thales.cica.es

Sociedad Andaluza de Educación Matemática "Thales"

Edita
Sociedad Andaluza de
Educación Matemática "Thales"
Centro Documentación "Thales"
Universidad de Cádiz
C.A.S.E.M.
Facultad de Ciencias
Departamento de Matemáticas
Campus del Río San Pedro
Torre Central, 4ª planta
11510 Puerto Real (Cádiz)
Teléfono: 956012833
Email: thales.matematicas@uca.es

Maquetación
mayteando@gmail.com

Depósito Legal
SE-421-1984

ISSN
2340-714X

Período
2019
Suscripción
Anual

SUMARIO / CONTENTS

Épsilon - *Revista de Educación Matemática* 2019, nº 101, 7-10

¿Gamificación como nueva tendencia didáctica? Juegos y enseñanza de las Matemáticas

Pablo Flores
Universidad de Granada

Pedro Peinado León
Profesor Jubilado

> *"En este periodo* [infancia] *el juego es el producto más puro y espiritual del hombre, al mismo tiempo que el modelo y la imagen de la vida humana entera, de la íntima y secreta vida natural del hombre y de todas las cosas. Por eso genera júbilo, libertad, satisfacción, reposo en sí y fuera de sí, paz con el universo. En él residen y de él brotan las fuentes de todo bien"*
>
> Friedrich Fröbel, 1872-1852

Gamification as a new didactic trend? Games and teaching of Mathematics

¿Es innovador introducir el juego en clase de matemáticas? ¿Las nuevas tendencias educativas son tan "nuevas"?

En la época actual la creación y difusión de nuevos términos parece aportar ideas nuevas. En muchas ocasiones los nuevos términos responden al "marketing" más que realizar aportes conceptuales. En nuestro ámbito educativo conviene ser prudentes para incorporar estos términos, pero sobre todo, para no dejarnos llevar por nuevas tendencias sin profundizar en lo que suponen de mejora para nuestra práctica docente.

Esto ocurre con el término "gamificación" ("ludificiación", prefieren algunos autores españoles que lo practican). Este número monográfico de Épsilon arranca de una preocupación por aclarar este término, antes de asumirlo como una opción interesante que aplicar en nuestras aulas de matemáticas. Para ello hemos invitado a diversos compañeros a relatar sus experiencias prácticas y reflexiones teóricas sobre lo que sustenta el término en nuestro ámbito, el juego y la enseñanza de las Matemáticas.

Partimos de que casi todas las actividades y objetos de nuestro entorno contienen matemáticas o pueden analizarse matemáticamente. Los juegos, naturalmente, entran dentro de esa categoría y, por su carácter atractivo, por el interés que despiertan en el alumnado hacen que propongamos su uso en clase de matemáticas.

Los juegos en clase pueden constituir actividades desencadenantes, ya que la gran motivación que conlleva la actividad lúdica hace que sirva de contexto para que el alumno se interese por cuestiones que, de otra forma, podrían resultarles más áridas (fijar la atención sobre el campo de futbol, por ejemplo, atendiendo a su forma y la repercusión en el desarrollo del partido, es una base estupenda para emplear los elementos geométricos). También puede utilizarse el juego como objeto de estudio en sí mismo, analizando estrategias ganadoras o las condiciones en que se desarrolla el juego, lo que ha sido desde hace siglos una fuente de progreso de las matemáticas, como lo demuestra la conocida historia de la invención del Cálculo de Probabilidades (seguimos usando los dados o las cartas para adentrar a los alumnos en la Combinatoria). Podemos hacer que el propio juego sea la actividad educativa, los alumnos aprenden adoptando el papel de jugadores para lograr un fin, como al realizar Gymkanas matemáticas, crucigramas de definiciones, cifras, propiedades, etc.

En la práctica estas posibilidades que ofrecen los juegos se presentan mezcladas y podemos usar más de una a la vez. Una actividad que resultó muy satisfactoria empleando el juego en clase se inició sin haberla previsto, al identificar el papel de las teclas Rnd y Ran de la calculadora, y la acabamos convirtiendo en un simulador de lanzamientos de monedas y dados, lo que permitió introducir los números seudo-aleatorios y el azar en los ordenadores, e incluso practicar algún método de Montecarlo.

Estos ejemplos de actividades relacionadas con los juegos son sencillas, poco actuales y generalmente conocidas, con lo que apreciamos que no es una novedad el introducir los juegos en clase de matemáticas, pero tampoco una innovación caprichosa y arriesgada. Entendemos que es importante darle carta de naturaleza, sistematizarlo y adaptarse a nuevos juegos y nuevas posibilidades.

En este sentido, hemos pedido a algunos compañeros de los que conocemos sus experiencias con juegos, para que elaboren artículos sobre el juego en la enseñanza de las matemáticas. Agradecemos su disposición a participar en este número monográfico, para contribuir a contrastar ideas y a sugerir posibilidades.

Ana García Azcárate, desde su amplia experiencia en el uso de recursos lúdicos para la enseñanza, hace una presentación general de los juegos y su uso en la clase de matemáticas.

El grupo Alquerque de Sevilla, que desarrolla una sección sobre juegos en la revista Suma, examina el término “gamificación”, para mostrar que se viene practicando el uso de juegos matemáticos en clase, de lo que presentan algunos ejemplos.

Rafael Ramírez Uclés, encargado hace un tiempo de la sección Más que una asignatura, de la revista Épsilon, analiza el papel de alumnos y profesores cuando usan juegos en matemáticas, añadiendo unas interesantes reflexiones sobre cómo ampliar el uso que se puede extraer de un juego.

Enrique Carmona y José Mª Cardeñoso inciden más en la problemática que afronta el profesor para llevar los juegos al aula y presentan varios juegos de mesa.

José Luis Lupiáñez y Margarita García, grandes coleccionistas de juegos que han realizado talleres con niños y adultos, se dedican a los juegos de estrategia de los que exponen una colección variada y puesta al día.

Lluís Albarracín, apoyándose en su experiencia que ya nos transmitió a través de la sección de la revista SUMA, examina las cualidades instructivas de videojuegos.

El término juego se utiliza de una manera tan genérica, que a veces se aplica con connotaciones que no son fáciles de compartir. Aclarar qué entendemos por juego requiere revisar la literatura existente sobre el tema. Como señalan los autores de los artículos de este número, el clásico artículo de Miguel de Guzmán Juegos y matemáticas, aparecido en la revista SUMA (nº4, 61-64), colgado para uso y disfrute de todos, puede servir para concretar y mostrar la cualidad instructiva y el papel del juego en matemáticas. Los libros de Fernando Corbalán, los trabajos del Grupo Alquerque y de Ana García Azcárate están en nuestras referencias más próximas.

Pero no olvidemos que este término adquiere una variedad de significados.

En la literatura pedagógica se reconoce que desde Platón se ha planteado emplear el juego con fines pedagógicos con la intención de crear una escuela atractiva. Los orígenes pedagógicos se basan en que el juego es una actividad natural y espontánea del niño, lo que hace que Fröbel enuncie la frase que comienza estas letras. La pedagogía activa y funcional rescata el juego como una actividad regulada de niños y adultos. Freinet incorpora un principio del juego, para manifestar la necesidad de que el aprendiz esté activo durante el acto didáctico.

Roger Caillois (1913-1978), sociólogo francés de mitad del siglo XX, realiza una interesante y exigente caracterización del juego, considerándola una actividad humana diferente de otras actividades por reunir seis cualidades: ser *libre* (el jugador no puede ser obligado sin perder su carácter de diversión atractiva y gozosa), *separado* (circunscrito a límites de espacio y tiempo, fijados de antemano), *improductivo* (no crea ni bienes ni riqueza, ni elementos nuevos, conduce a situaciones idénticas a la del comienzo), *incierta* (el desarrollo no puede determinarse, ni el resultado fijarse previamente), *reglamentado* (sometido a reglas convencionales que suspenden momentáneamente leyes ordinarias) y *ficticio* (carece específicamente de realidad referida, o tiene franca irrealidad).

Difícilmente pueden cumplirse esas seis exigencias en el uso didáctico del juego. Al plantearlo como una tarea escolar, ¿cómo encajarlo con la libertad de participación? La reglamentación estará sujeta a las reglas escolares, que generalmente respetará los límites que la separan de la actividad ordinaria. Puede ser incierta en su desarrollo, pero el profesor tiene claras las finalidades que pretende alcanzar, por lo que su improductividad se ve matizada por la intención de generar aprendizaje, o por el control que la escuela tiene sobre la actividad de los alumnos. Su carácter ficticio parece que es compatible con las condiciones de su aplicación didáctica.

Como se puede apreciar, afiliarse a una práctica completamente lúdica según las exigencias de Caillois puede llevar consigo una pérdida de intencionalidad en la tarea que plantea el profesor con vistas a lograr un aprendizaje matemático. Vayan estos comentarios para mostrar que tras las propuestas educativas hay todo un mundo de posibilidades, pero también de responsabilidad, que deben conjugarse para mantener las finalidades educativas que debe cumplir la escuela. Esperamos que los aportes de este número sobre juegos sirvan para dar mayor presencia en el aula, pero siempre desde una actitud responsable con las intenciones educativas pretendidas.

Épsilon - *Revista de Educación Matemática* **2019, nº 101, 11-28**

Matemáticas con juegos: Aprender y disfrutar

Ana García Azcárate
Profesora de enseñanza secundaria y bachillerato jubilada

Resumen: *En éste artículo, presentamos otra forma de dar clases de matemáticas: una metodología basada en los materiales lúdicos, que nos permite en clase contrarrestar la imagen clásica de las matemáticas escolares, como una materia seria, difícil y sobre todo aburrida. Basándonos en una larga experiencia de utilización de juegos matemáticos en clase, apuntamos los beneficios que se obtienen, la motivación de nuestros alumnos y las dificultades a la que nos enfrentamos. Para apoyar estas ideas, se presentan cuatro ejemplos de juegos que se han utilizado en clase.*
Palabras clave: *materiales lúdicos, motivación, puzles, bingo, juegos de tablero*

Mathematics with games: Learn and enjoy

Abstract: *In this paper, we present another way of teaching mathematics: a methodology based on playful materials, which allows us to counteract the classic image of school mathematics, as a serious, difficult and above all boring subject. Based on a long experience of using mathematical games in class, we point out the benefits that are obtained, the motivation of our students and the difficulties we face. To support these ideas, four examples of games that have been used in class are presented.*
Keywords: *playful materials, motivation, puzzles, bingo, board games*

En nuestra época, los docentes científicos esclarecidos saben aprovechar en sus clases la motivación excepcional que suscitan las actividades recreativas. Estas son generadoras de placer espontáneo y por esa vía la matemática deja de parecer una disciplina triste y los matemáticos unos aguafiestas. H. Camous (1995)

INTRODUCCIÓN

Hoy en día, cada vez más profesores utilizan juegos en sus clases. Se trata de juegos con contenidos específicos y reglas en muchas ocasiones sacadas de los juegos más populares utilizados fuera de la escuela.

Si parece claro que en Primaria utilizar actividades lúdicas, ayuda a conseguir en todas las áreas mejorar la implicación de los niños y niñas, también es cierto que, en nuestras clases de secundaria, y particularmente en Matemáticas, la introducción de actividades con juegos permite una mayor motivación del alumnado, a la vez que se introduce o se refuerza jugando, conceptos y destrezas puramente matemáticas.

De esta forma, los profesores de Matemáticas que optamos claramente por aprovechar los juegos para nuestras clases, contrarrestamos la imagen en la sociedad, entre los padres, entre todavía muchas de nuestras autoridades educativas, y sobre todo entre muchos de nuestros alumnos y alumnas, de que las matemáticas son una cosa "seria" y por lo tanto difícil y aburrida

Pero romper esta imagen no es desde luego la única razón para utilizar juegos en clase de Matemáticas:

En efecto jugando en clase podemos conseguir:

- Reforzar destrezas y automatismos.
- Introducir nuevos conceptos.
- Utilizar estrategias ligadas a la resolución de problemas como escoger alternativas, tomar decisiones, anticipar resultados, memorizar situaciones.

Y sobre todo, como ya escribía H. Camous en su libro "*Problemas y juegos con la matemática"* las actividades lúdicas *generan placer espontáneo* entre los estudiantes de esas edades.

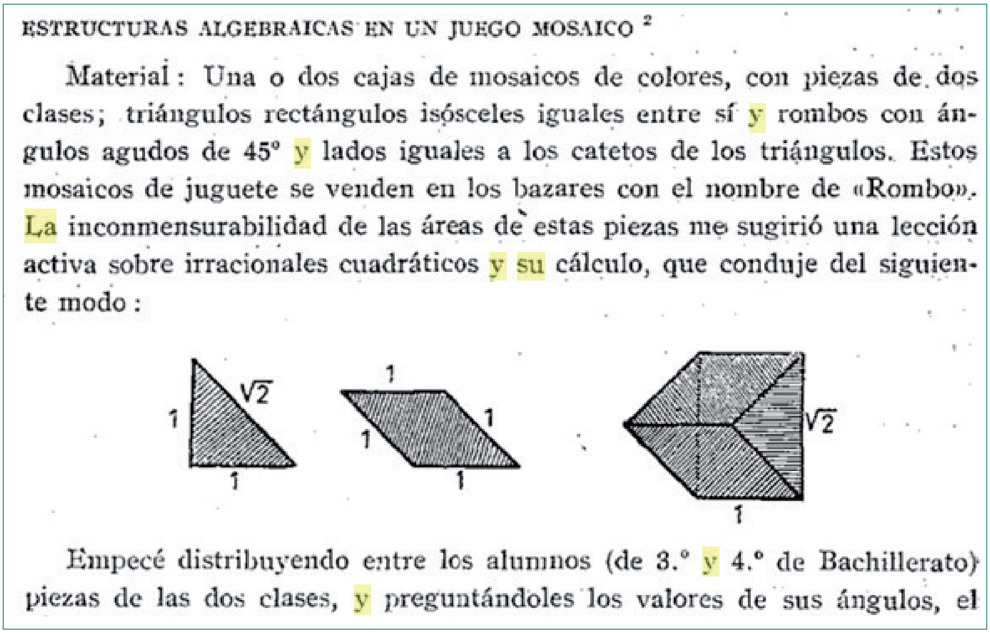
En este artículo queremos insistir en las cualidades didácticas del juego para la enseñanza de las matemáticas, basándonos en una amplia experiencia de utilización de esta metodología. Para desarrollar esta idea comenzamos por presentar unas notas históricas sobre el uso de los juegos en matemáticas. Posteriormente examinamos algunos beneficios de este uso. Basándonos en nuestra experiencia, hacemos algunas recomendaciones sobre cómo emplear los juegos. Finalizamos presentando 4 ejemplos de juegos adaptados a la enseñanza de las matemáticas.

UN POCO DE HISTORIA

Los que llevamos años intentando atraer hacia la actividad matemática con actividades lúdicas a nuestros estudiantes, hemos tenido, desde hace mucho tiempo unos maestros indiscutibles.

Uno de los que sin duda más nos ha influido, y recuerdo ahora con cariño mis búsquedas de sus libros en las librerías de usados del rastro de Madrid y mi alegría cuando conseguía hacerme con uno de ellos, es el profesor Pedro Puig Adam y sus asombrosas clases en el Instituto de San Isidro de Madrid.

Ya en el año 1957, P. Puig Adam presidió en su instituto, la XI reunión de la Comisión Internacional para el Estudio y Mejora de la Enseñanza Matemática (CIEAM), cuyo título era justamente: "El material didáctico matemático actual". En la presentación del certamen, P. Puig Adam (1958) escribía:



ESTRUCTURAS ALGEBRAICAS EN UN JUEGO MOSAICO [2]

Material: Una o dos cajas de mosaicos de colores, con piezas de dos clases; triángulos rectángulos isósceles iguales entre sí y rombos con ángulos agudos de 45° y lados iguales a los catetos de los triángulos. Estos mosaicos de juguete se venden en los bazares con el nombre de «Rombo». La inconmensurabilidad de las áreas de estas piezas me sugirió una lección activa sobre irracionales cuadráticos y su cálculo, que conduje del siguiente modo:

Empecé distribuyendo entre los alumnos (de 3.° y 4.° de Bachillerato) piezas de las dos clases, y preguntándoles los valores de sus ángulos, el

Figura 1.

La Matemática ha constituido, tradicionalmente, la tortura de los escolares del mundo entero, y la humanidad ha tolerado esta tortura para sus hijos como un sufrimiento inevitable para adquirir un conocimiento necesario; pero la enseñanza no debe ser nunca una tortura, y no seríamos buenos profesores si no procuráramos por todos los medios, transformar esta sufrimiento en goce...

En otras de sus obras (Puig Adam, 1960), concretaba:

Si la vida corriente suministra tantos modelos y situaciones aptas para la enseñanza matemática, es natural que busquemos, asimismo, modelos matemáticos en los juguetes... Este acercamiento entre matemática y juguete nos suministrará sin duda, amplias sugerencias para alcanzar la meta ideal de nuestra enseñanza, que es la de convertirla en un juego para el niño.

El profesor Puig Adam pone en práctica sus ideas con sus alumnos del Instituto de San Isidro. Presentamos aquí un fragmento de un artículo suyo dando unas clases que parecen totalmente actuales por su metodología activa: se trata de aprovechar unas piezas de puzle, "*unos mosaicos de juguetes*" (fig. 1).

No quiero, en este apartado dedicado a los precursores, en nuestro país, de la utilización de juegos en clase de matemáticas, olvidarme del profesor Miguel de Guzmán y su alegato, a favor de la utilización de los juegos en clase, en su conocido artículo: *Juegos matemáticos en la enseñanza* (Guzmán, 1984).

Resaltamos a continuación, algunos de los argumentos que aparecen en él para contestar a estas importantes preguntas:

> *¿Se pueden utilizar los juegos matemáticos con provecho en la enseñanza? ¿De qué forma? ¿Qué juegos? ¿Qué objetivos pueden conseguirse a través de los juegos?*
>
> *Es claro que, especialmente en la tarea de iniciar a los más jóvenes en la labor matemática, el sabor a juego puede impregnar de tal modo el trabajo, que lo haga mucho más motivado, estimulante, incluso agradable y, para algunos, aún apasionante.... Por la semejanza de estructura entre el juego y la matemática, es claro que existen muchos tipos de actividad y muchas actitudes fundamentales comunes que pueden ejercitarse escogiendo juegos adecuados tan bien o mejor que escogiendo contenidos matemáticos de apariencia más seria, en muchos casos con claras ventajas de tipo psicológico y motivacional para el juego sobre los contenidos propiamente matemáticos."*

Hacia finales de los años 80 del pasado siglo, ya somos varios los profesores de matemáticas que hemos apostado decididamente por aprovechar el interés y la motivación que los juegos aportan a nuestros alumnos y alumnas. Son años donde hay que enfrentarse a muchos padres, a las autoridades educativas, donde hay que demostrar a los alumnos que jugar en clase no es un divertimento, un recreo, sino que se lo pueden pasar bien aprendiendo matemáticas. En el 91, Santillana me premia por "*el uso de técnicas lúdicas para enseñar matemáticas*" en su concurso de Experiencias Escolares y eso me permite iniciar los sucesivos proyectos de innovación educativa de la Comunidad de Madrid sobre "*Matemáticas lúdicas*". Otros compañeros me acompañan.

En el coloquio organizado por la FESPM: "*Recursos para el aprendizaje*" en Granada en 1998, los recursos lúdicos ocupan ya un gran espacio. Allí tengo la ocasión de compartir sesiones y protagonismo con mi amigo Fernando Corbalán (1994) y sobre todo iniciar una larga amistad con los miembros del Grupo Alquerque de Sevilla.

Hasta llegar a nuestros días. La aparición de la *red* facilita la búsqueda de recursos lúdicos, que ya son infinitos. Los profesores comparten sus experiencias en el aula, cuentan sus éxitos y sus fracasos. El que quiere, puede llevar a su aula, juegos y pasatiempos.

EL ASPECTO SOCIAL DE LA UTILIZACIÓN DE JUEGOS EN CLASE

Cómo indicábamos en el inicio, los juegos en clase facilitan la introducción de nuevos conceptos, la adquisición de destrezas mediante la repetición, llevadera cuando se juega, insoportable cuando se trata de ejercicios clásicos en clase, la implicación de los alumnos en la tarea lúdica propuesta. Pero sobre todo en muchas ocasiones, los juegos favorecen la cooperación entre el alumnado, el trabajo colectivo, la cooperación entre parejas, entre los de "mi" equipo.

Porque jugar en clase, permite cambiar los roles de cada uno.

Un cambio para los alumnos y alumnas que no participan en clase, que no se atreven: en el marco de un juego, donde los errores no se penalizan verdaderamente, donde las correcciones aparecen en el seno de un equipo, de una pareja. Los juegos les ayudan a implicarse, lejos de las miradas del "gran grupo" de clase y del profesorado. Si uno se equivoca jugando, puede perder su turno pero las ansias por ganar harán que el jugador no quiera repetir su error porque lo importante es proseguir el juego, avanzar y quizás ganar.

Un cambio para los que tienen dificultades: jugar les permite olvidarse durante el juego de una situación de fracaso. He vivido en mis clases, muchos casos de ese tipo de alumnos que, ayudados en algunos casos por "la suerte" que siempre interviene en la mayoría de los juegos, han resultados tener papeles destacados en una partida, reforzando de esta forma su autoestima y su futuro comportamiento en clase.

Un cambio para los que siempre han sido "leader" en clase, porque jugando con su pareja, jugando en un equipo, tienen que colaborar y ayudar a sus compañeros.

Y por último un cambio en el papel del profesorado. Cuando estamos utilizando un juego en nuestras clases, los profesores y profesoras tenemos que colocarnos claramente en un segundo plano. Una vez escogido el juego y fijado los objetivos didácticos que se quieren conseguir con él, una vez establecidas y aceptadas las reglas del juego en la clase, los alumnos y alumnas del grupo deben ser capaces de "actuar", de jugar de forma autónoma: las dudas que vayan surgiendo deben primero ser resueltas entre los jugadores y el profesor intervenir sólo en caso de litigio. En estos años de ver a los alumnos participar en un juego en mi clase, he tenido ocasión de asistir a "discusiones matemáticas" de jugadores y muchas veces he pensado en grabarlas para convencer definitivamente a mis compañeros que no quieren reconocer que los materiales lúdicos permiten claramente "una actividad matemática" difícil de conseguir por otros medios.

Nuestra actitud es fundamental en los juegos en clase. Tenemos que garantizar que el clima en clase sea bueno (aunque está claro que una actividad lúdica siempre implica cierto "jaleo", cierto "ruido"); somos los árbitros que hemos de resolver todos los casos polémicos que surgen en una partida, no sólo polémicos por el aspecto matemático sino también por los litigios que pueden surgir entre jugadores). Ante los errores que aparecen, nuestra actitud debe ser de ayuda y apoyo, nunca de simple corrección. Leí en algún sitio la siguiente reflexión que comparto plenamente: "Ningún profesor que ha utilizado juegos en sus clases se ha quejado que sus alumnos y alumnas le respetaban menos o que su autoridad se cuestionaba por ello".

CÓMO LLEVAR UN JUEGO A MI CLASE Y "NO MORIR EN EL INTENTO"

Una de las ideas más importante que intentaba transmitir a los futuros profesores de matemáticas que cursaban el entonces llamado FIPS (Formación Inicial del Profesorado de Secundaria) en la Universidad Autónoma de Madrid, lo anterior al actual Master, era que contrariamente a los que muchos piensan, el utilizar juegos en clase de matemáticas no es una tarea fácil. Porque no estamos sugiriendo aquí el jugar en vísperas de vacaciones o para rellenar de cualquier forma un hueco en el horario. Queremos incorporar los recursos lúdicos como unos materiales más, que se utilizan cuando, según criterios del profesorado, pueden aportar algo positivo al proceso de aprendizaje. Tenemos que ser consciente de que, si no conseguimos motivar a nuestros alumnos, implicarles en el juego, será muy difícil volver a intentarlo de nuevo más adelante.

Antes

Por eso, antes de plantearse llevar una actividad lúdica en clase, debemos recordar los dos primeros principios del Decálogo del Profesor de Matemáticas que nos propone

George Polya en su libro *Mathematical Discovery: on understanding, learning and teaching problem solving* (Polya, 1962):

1. ***Demostrad interés por la materia****. Si el profesor se aburre, toda la clase se aburrirá.*
2. ***Dominad la materia****. Si un tema no le interesa personalmente, no lo enseñe, porque no será Vd. capaz de enseñarlo adecuadamente.*

Es decir si jugar te parece realmente una tarea absurda y aburrida, no propongas a tus estudiantes jugar en clase.

Una vez escogido el tipo de juego que va a permitir cumplir los objetivos didácticos que te has fijado, cuando propongas un juego para tu aula, debes antes haber jugado con él y conocer a fondo sus reglas y, si las hay, cuáles son las estrategias adecuadas para enfrentarse a él.

Pero no sólo se tiene que preparar el profesorado: es necesario también que el alumnado sepa anteriormente a qué va a jugar, para qué y cómo.

Desde luego los profesores que solemos llevar juegos a nuestra aula sabemos que las reglas del juego no se deben explicar en el mismo momento del comienzo del juego sino antes, y que junto a la explicación de las reglas se debe advertir a nuestros alumnos y alumnas que se va a valorar sus "resultados" en el juego. Esto se consigue de diversas formas según el tipo de juego: con la observación del profesor durante la sesión, recogiendo hojas de trabajo asociadas al desarrollo del juego (tablas que se deben rellenar, cuadernos etc). Muchas veces he comprobado que la mejor forma de explicar unas reglas de juego es simular una partida entre el profesor y la clase. Así, los alumnos conocen también el material que van a necesitar para jugar.

En los juegos por equipos de cuatro, es conveniente también preparar el aula antes de empezar a jugar, dejándola con las mesas colocadas y a ser posible con todos los materiales disponibles. Eso implica evidentemente que el profesor y el aula deben estar libres antes de la sesión de juegos.

Durante

Hemos hablado anteriormente del cambio en el papel del profesorado durante el juego. Son pacificadores, son mediadores, son jueces, son árbitros pero no son los protagonistas: los protagonistas son los alumnos. No se puede pretender que el ambiente en clase sea tranquilo, pero quiero resaltar que cualquier metodología activa implica más "ruido" que una clase de lápiz y pizarra.

Después

Si el juego está bien enmarcando dentro de nuestra programación didáctica, es útil muchas veces retomar algunos de los temas que se han tocado jugando, para reforzarlos o ampliarlos.

ALGUNOS EJEMPLOS DE JUEGOS MATEMÁTICOS PARA SECUNDARIA

Presentamos aquí cuatro ejemplos de juegos que he utilizado en mis clases. Cada uno presenta un tipo de organización diferente. En los cuatro casos son "juegos de conocimientos".

El primero es un puzle que permite un trabajo cooperativo por parejas. No necesita grandes preparaciones en el aula y las piezas se entregan fotocopiadas a cada pareja. Se trata de un tipo de actividad que mis alumnos conocen pues lo he utilizado en repetidas ocasiones para reforzar contenidos muy diversos de números, de álgebra, de geometría o de probabilidad y estadística. Este tipo de puzle es muy fácil de crear utilizando el programa Formulator Tarsia.

El ejemplo que presentamos aquí está pensado para reforzar la idea de pendiente de una recta dada en forma implícita o con su expresión general.

Los alumnos y alumnas saben que no sólo se trata de competir y ganar siendo los primeros en acabar el puzle sino que se les va a recoger sus hojas de resultados.

El segundo ejemplo es un juego de mesa con cuatro jugadores. Necesita de una preparación previa del aula y una correcta explicación de las reglas del juego. Como el anterior ejemplo, se trata de un juego post-instruccional que permite por lo tanto reforzar conceptos anteriormente vistos en clase. Después de la sesión de juego, se debe retomar las expresiones de las tarjetas que aparecen, para que todos los alumnos sean conscientes de las simplificaciones posibles.

El tercer ejemplo es una adaptación de un bingo. Es un formato que mis alumnos conocen perfectamente pues en mis clases hemos jugado al bingo para reforzar multitud de conceptos. Es una actividad de todo el grupo de clase y obviamente, como los dos primeros es un ejemplo de juego post-instruccional.

Estos tres primeros ejemplos se pueden descargar sin problemas en mi blog de "Juegos y Matemáticas"

El cuarto ejemplo es un juego pre-instruccional. No se trata de reforzar conceptos previamente trabajados en clase sino de facilitar la introducción de un concepto nuevo. Se trata de un juego que sirve para justificar la ley de los grandes números aplicada a la suma de los resultados del lanzamiento de dos dados.

1. Puzle hexagonal de las rectas paralelas[1]

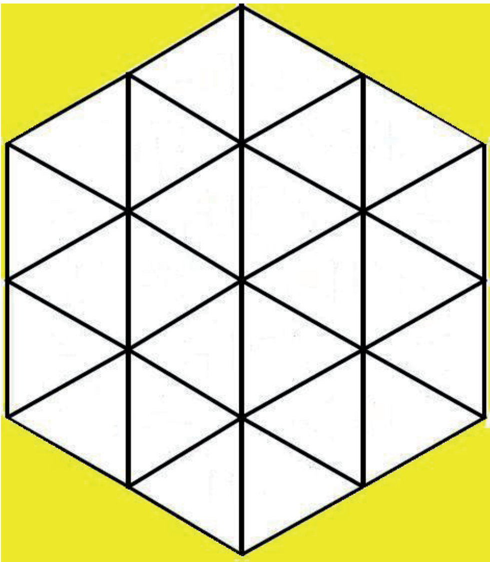
Objetivos:

Reforzar el paso de la ecuación explícita de la recta $y = mx + n$ a su ecuación general $Ax + By + C = 0$, mediante el cálculo de la pendiente correspondiente en ambos casos.

Nivel

Primer y segundo ciclo de ESO

1. https://anagarciaazcarate.wordpress.com/2018/11/20/puzle-hexagonal-de-las-rectas-paralelas/



Observaciones

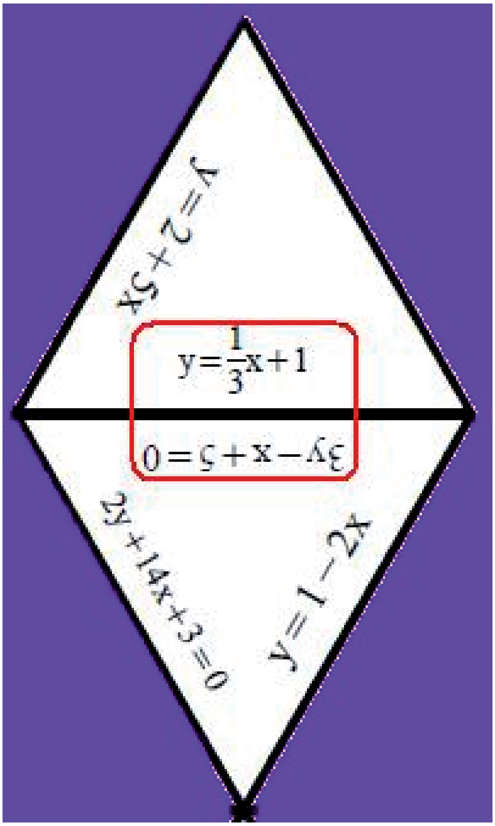
Presentamos aquí 24 fichas de puzle triangulares. Cada triángulo lleva en dos o tres lados, la ecuación de una recta, bien en forma explícita $y = mx + n$, bien en forma general $Ax + By + C = 0$. Para juntar las piezas del puzle se debe adosar los lados de dos fichas que tengan la ecuación de dos rectas paralelas, es decir que tengan la misma pendiente.

En este caso la figura que se obtiene es un hexágono como el de la imagen

Material necesario

- 24 fichas triangulares por pareja de alumnos.
- Una hoja para escribir las pendientes de las diferentes rectas que aparecen.

El juego consiste en unir los lados con dos rectas de la misma pendiente. Por ejemplo:



Reglas del juego

- Se trata de un juego para parejas cooperativas. Al realzar la naturaleza cooperativa del juego se pierde la intención de "ganar" y "perder" dentro de la pareja, predominando la finalidad de colocar entre los dos el máximo número de fichas del puzle.
- Cada pareja debe intentar unir los lados de las fichas triangulares juntando cada ecuación de una recta con otra ecuación de una recta paralela, es decir juntando dos rectas que sean paralelas al tener la misma pendiente.
- De esta forma, se debe formar un gran hexágono.

Metodología

1. Por parejas, los alumnos hallarán las pendientes de las rectas en la libreta de clase y anotarán la pendiente en la hoja que se les ha entregado, hoja que el profesor recogerá.
2. Una vez calculadas las pendientes, comprobarán sus resultados con los de otra pareja para asegurar que sus cálculos son correctos.
3. A continuación, escribirán en las piezas del puzle las pendientes de cada recta y recortarán las piezas
4. Por último ensamblarán el puzle y pegarán la solución en el cuaderno de clase.

Gana la pareja que consiguen formar el gran hexágono primero.

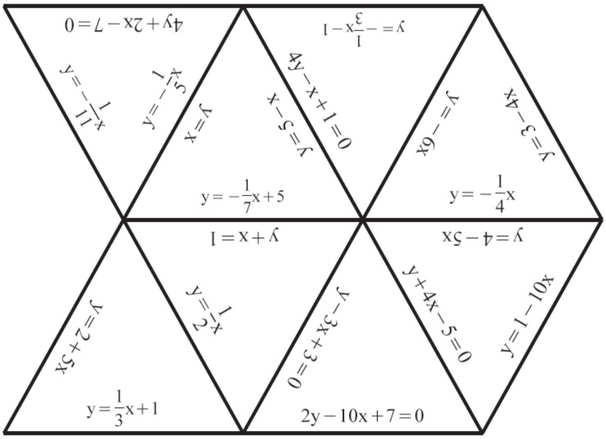
HOJA DE RESULTADOS:

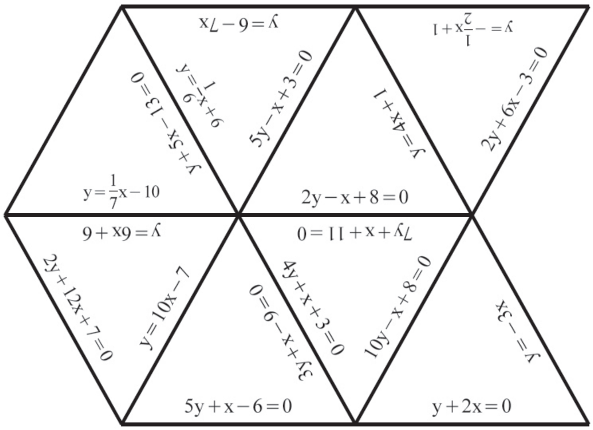
Escribe las pendientes de estas rectas en la columna vacía de la derecha

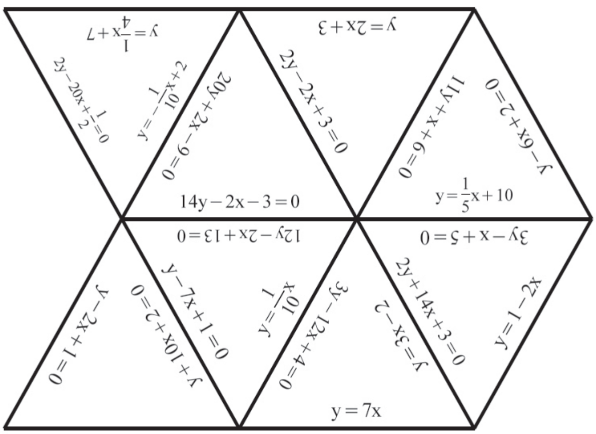
PRIMERA PARTE

$y=2x+3$		$y=-\frac{1}{2}x+1$		$y-6x+2=0$	
$2y-2x+3=0$		$5y+x-6=0$		$5y-x+3=0$	
$y+x=1$		$3y+x-9=0$		$12y-2x+13=0$	
$y=\frac{1}{2}x$		$4y-x+1=0$		$10y-x+8=0$	
$y=4x+1$		$20y+2x-9=0$		$4y+x+3=0$	
$y-3x+3=0$		$14y-2x-3=0$		$y=-\frac{1}{7}x+5$	
$2y-10x+7=0$		$y+5x-13=0$		$y=7x$	
$y=\frac{1}{3}x+1$		$y+10x+2=0$		$2y+14x+3=0$	
$y+2x=0$		$y+4x-5=0$		$y=-\frac{1}{11}x$	
$y=-3x$		$2y+12x+7=0$		$2y-20x+\frac{1}{2}=0$	

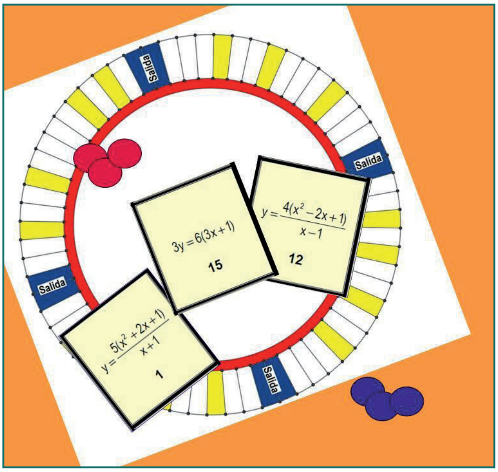
FICHAS


4y + 2x − 7 = 0
y = −1/11 x
y = −1/5 x
y = x
y = −1/3 x − 1
4y − x + 1 = 0
y = 5 − x
y = −6x
y = 3 − 4x
y = −1/7 x + 5
y = −1/4 x
y + x = 1
y = 4 − 5x
y = 2 + 5x
y = 1/2 x
y − 3x + 3 = 0
y + 4x − 5 = 0
y = 1 − 10x
y = 1/3 x + 1
2y − 10x + 7 = 0


y = 6 − 7x
y = −1/2 x + 1
y = 1/6 x + 6
y + 5x − 13 = 0
5y − x + 3 = 0
y = 4x + 1
2y + 6x − 3 = 0
y = 1/7 x − 10
2y − x + 8 = 0
y = 6x + 6
7y + x + 11 = 0
2y + 12x + 7 = 0
y = 10x − 7
4y + x + 3 = 0
3y + x − 9 = 0
10y − x + 8 = 0
y = −3x
5y + x − 6 = 0
y + 2x = 0


y = 1/4 x + 7
y = 2x + 3
2y − 20x + 1/2 = 0
y = −1/10 x + 2
20y + 2x − 9 = 0
2y − 2x + 3 = 0
11y + x + 6 = 0
y − 6x + 2 = 0
14y − 2x − 3 = 0
y = 1/5 x + 10
12y − 2x + 13 = 0
3y − x + 5 = 0
y − 2x + 1 = 0
y + 10x + 2 = 0
y − 7x + 1 = 0
y = 1/10 x
3y − 12x + 4 = 0
y = 3x − 2
2y + 14x + 3 = 0
y = 1 − 2x
y = 7x

2. A COMER SI PUEDES[2]



Objetivos

- Trabajar con expresiones algebraicas.
- Calcular valores numéricos de expresiones algebraicas.

Nivel

2º-3º y 4º de ESO

Material necesario

- Un tablero circular.
- Un dado.
- Tres fichas por jugador de colores diferentes para cada uno.
- 20 tarjetas con expresiones algebraicas.

Observaciones

Presentamos un juego para equipos de cuatro alumnos.

Después de jugar, se puede hacer una puesta en común, preguntando a los alumnos y alumnas, cómo han calculado los valores numéricos de las diferentes tarjetas y haciendo ver, si necesario, otras posibles formas de cálculo.

Por ejemplo, si se ha sacado la tarjeta con la expresión $y = \dfrac{5(x^2 + 2x + 1)}{x + 1}$, es posible que el jugador no se haya dado cuenta que esta expresión, al simplificarla es simplemente:

$$y = \frac{5(x^2 + 2x + 1)}{x + 1} = \frac{5\,(x + 1)^2}{x + 1} = 5\,(x + 1)$$

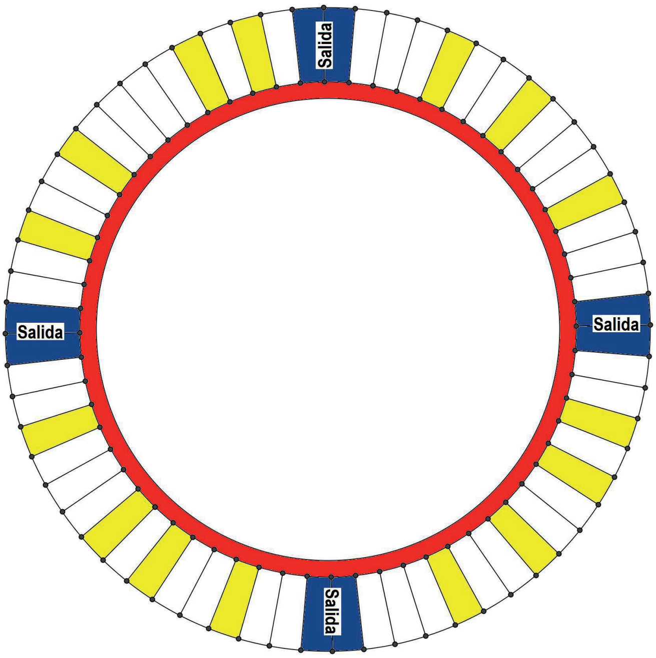
Reglas del juego

- Juego para cuatro jugadores.
- Cada jugador coloca sus 3 fichas sobre una de las casillas de salida.

2. https://anagarciaazcarate.wordpress.com/2012/03/15/a-comer-si-puedes/

- Se empieza a girar en el sentido de las agujas del reloj.
- Sale quien mayor puntuación saca con el dado.
- El primer jugador tira el dado y se mueve con cualquiera de sus fichas, según la puntuación obtenida.
- Cada vez que un jugador cae en una casilla amarilla, debe coger una de las tarjetas y calcular el resultado ***y***, obtenido sustituyendo **x** por la puntuación del dado.
- Este número permite alcanzar o no con alguna de sus fichas, alguna ficha contraria y comérsela. Si no se puede comer ninguna ficha, se intenta otra vez, sacando otra tarjeta.
- Si al cabo de las dos jugadas, el jugador no consigue comerse ninguna ficha contraria, pasa el turno, permaneciendo en su sitio. Si se consigue comer alguna ficha contraria, ocupa el lugar de la ficha que se ha comido y pasa el turno.
- Si se obtiene un número negativo, el recorrido se hace en sentido contrario.
- Gana el que consigue eliminar más fichas al cabo de un número determinado de jugadas, por ejemplo 30.

TABLERO



TARJETAS DEL JUEGO

$y=\dfrac{5(x^2+2x+1)}{x+1}$	$y=\dfrac{4(x^2-1)}{x-1}$	$y=\dfrac{8(x^2-2x+1)}{x-1}$	$y=\dfrac{x^2-4}{x+2}$
$y=\dfrac{3x^2+3x}{x+1}$	$y=\dfrac{x^2-6x+9}{x-3}$	$y=\dfrac{x^2-10x+25}{x-5}$	$y=\dfrac{x^2+6x+9}{x+3}$
$y=\dfrac{2(x^2-8x+16)}{x-4}$	$y=\dfrac{3(x^2+4x+4)}{x+2}$	$y=\dfrac{(x^2-4x+4)}{x-2}$	$y=\dfrac{4(x^2-2x+1)}{x-1}$
$y=\dfrac{x^2-9}{x+3}$	$2y=4(x+6)$	$3y=6(3x+1)$	$y=-5x+8$
$y=6(x-4)$	$y=x+10$	$y=-3x+4+7x$	$4y=16(x-2)$

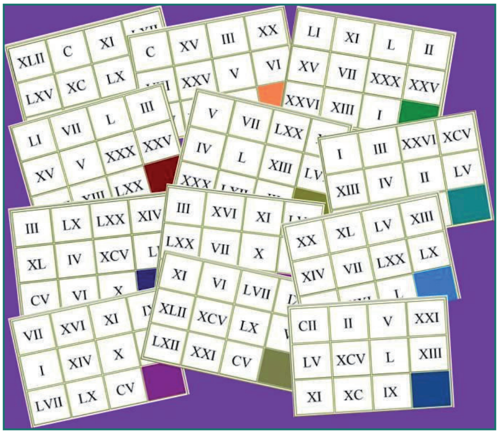
3. EL BINGO DE LOS NÚMEROS ROMANOS[3]

Observaciones

El Bingo es un juego muy similar a la Lotería. Un "Cantor" saca los números al azar de un bombo, que contiene bolillas numeradas. El número que se saca, es anunciado y los jugadores deben marcarlo, si es que lo tienen, en sus Cartones.

Hemos adaptado las reglas tradicionales del Bingo para trabajar la traducción de nuestros números a los correspondientes números romanos.

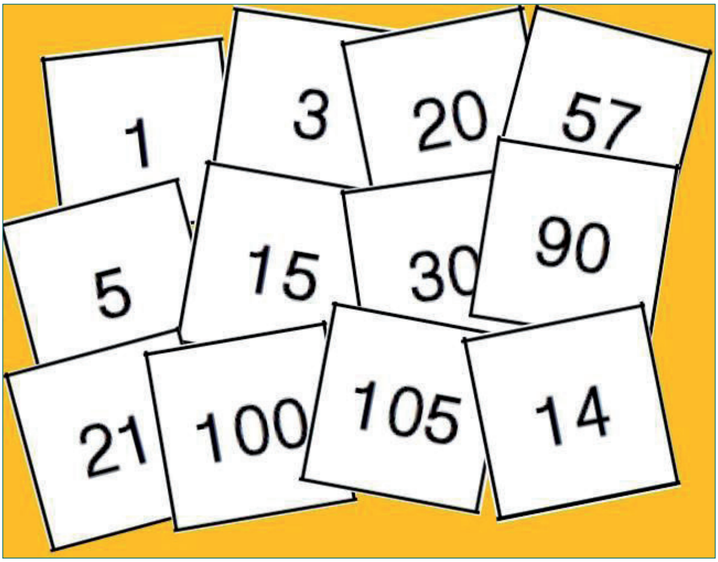
El bombo, en este caso un saco cerrado, contiene 36 fichas como éstas:



Nivel

1º de ESO.

3. https://anagarciaazcarate.wordpress.com/2019/06/04/bingo-de-los-numeros-romanos/



Material necesario

- Un cartón de Bingo para cada alumno o pareja de alumnos. Se presentan 25 cartones diferentes.
- 36 fichas con números del 1 al 105 que se plastificarán y se colocarán en el bombo (se puede usar una simple bolsa)

1	2	3	4	5	6
7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	20	21
25	26	30	40	42	50
51	55	57	60	62	65
70	90	95	100	102	105

Reglas del juego

- Juego a jugar individualmente.
- Cada alumno tiene un cartón de Bingo que contiene 11 números romanos.

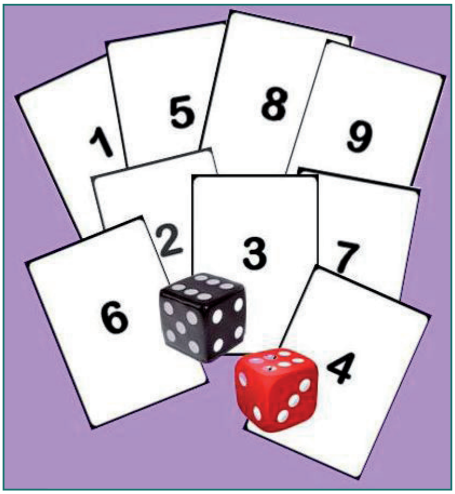
XLII	C	XI	LXII
LXV	XC	LX	VII
II	LI	III	

- Un "cantor" (que puede ser el mismo profesor o algún alumno) saca una ficha del bombo o del saco, y "canta ", un número, escribiendo a continuación ese número en la pizarra de forma ordenada.
- Todos los alumnos que tienen ese mismo número pero escrito como número romano en su cartón, deben hacer una marca sobre el número del cartón.
- **Gana el jugador que consiga completar antes el cartón.**

4. JUEGO: CIERRA LA CAJA (GARCÍA AZCÁRATE, 2013)

Objetivos

Se trata de un juego preinstruccional que sirve para justificar la ley de los grandes números aplicada a la suma de los resultados del lanzamiento de dos dados.



Observaciones:

Cierra la caja (Shut the box) es un juego clásico muy entretenido con el que se trabaja el cálculo mental. He encontrado diferentes reglas para jugar. Lo he adaptado aquí para que sirva de motivación en clase a la hora de plantearse el cálculo de las probabilidades de la suma de los resultados de dos dados.

En una primera parte, la clase se divide en grupos de 4 y se juega, obteniéndose un ganador en cada grupo.

En una segunda parte, se suman los resultados de las tablas de cada grupo para poder plantear a la clase que observen las frecuencias de cada suma e intenten sacar alguna conclusión. Es de esperar que al sumar los resultados de las tiradas de toda la clase y calcular las frecuencias relativas, se llegue a resultados muy parecidos a lo esperado con las probabilidades de cada suceso.

A continuación se realiza el cálculo de las probabilidades utilizando primero un diagrama en árbol, algo engorroso, y a continuación la tabla de doble entrada habitual.

Nivel

4º de ESO si se realiza la actividad con sus dos partes.

Material necesario:

- 9 cartas con los números del 1 al 9 para cada jugador.
- 2 dados.
- Una tabla para apuntar los resultados obtenidos.

Reglas del juego

- Juego para cuatro jugadores.
- Se tiran los dos dados y empieza el jugador que obtiene la suma mayor. El primer jugador se encargará de apuntar las sumas obtenidos por los cuatro jugadores.
- Los cuatro jugadores tienen sus 9 tarjetas por orden y boca abajo. El objetivo del juego es poner boca arriba el máximo número posible de tarjetas.
- El juego se desarrolla por rondas. Empieza el primer jugador tirando los dos dados. Al sumar los valores de los dos dados, obtiene un total que irá desde 2 hasta 12. Supongamos que obtiene 9. Lo que tiene que hacer es descomponer el total de la tirada en una suma que dé 9. Por ejemplo puede hacer:
  5 + 4, colocando boca arriba las cartas del 5 y de 4 o bien **1 + 3 + 5** colocando boca arriba las cartas del 1, del 3 y del 5.
- A continuación se marca el 9 en la tabla de resultados:

Suma		Total
2		
3		
4		

Suma		Total
5		
…..		
9	|	
10		
11		
12		

- El mismo jugador vuelve a lanzar los dos dados y pone boca arriba algunas de las cartas que quedaban. Se vuelve a apuntar la suma en la tabla del grupo. Vuelve a tirar los dos dados hasta que ya no pueda poner nuevas cartas boca arriba con la suma de sus dados.
- Entonces empieza la ronda del siguiente jugador que hace lo mismo.
- La puntuación de cada jugador es la suma de sus cartas que siguen boca abajo al acabar su ronda.
- Gana el que ha obtenido la menor puntuación. Si un jugador ha conseguido en su ronda poner boca arriba todas sus tarjetas se dice que "*ha cerrado la caja*".

Al final de las cuatro rondas se suman las veces que se ha obtenido una suma de 2, de 3,..., de 12, en la tabla de cada grupo.

CONCLUSIONES

Aprender y disfrutar es posible en unas clases de matemáticas donde *el sabor a juego ha impregnado de tal modo el trabajo, que lo ha hecho mucho más motivante, estimulante, incluso agradable.* Es necesario que cada vez más profesores de matemáticas se incorporen a los muchos que hacen de los juegos un recurso habitual en el aula.

REFERENCIAS

Corbalán, F. (1994). *Juegos Matemáticos para secundaria y bachillerato. Madrid,* Síntesis.

García Azcárate, A. (n.d.). *Blog Juegos y matemáticas. http:*//www.anagarciaazcarate.wordpress.com

García Azcárate, A. (2013). *Pasatiempos y juegos en clase de matemáticas: probabilidad y geometría espacial.* Madrid, Editorial Aviraneta.

Guzmán, M. de (1984). *Juegos matemáticos en la enseñanza*. Conferencia en las IV Jornadas sobre Aprendizaje y Enseñanza de las Matemáticas, Santa Cruz de Tenerife, 10-14 Septiembre. http://www.mat.ucm.es/cosasmdg/cdsmdg/05edumat/remediosfracasouniv/laboratorio99/tercera%20parte/juemat/juemat.htm

Polya, G. (1962). *Mathematical discovery.* New York, Whiley.
Puig Adam, P. (1958). *El material didáctico matemático actual*. Madrid, Publicaciones de la Revista Enseñanza Media.
Puig Adam, P. (1960). *La matemática y su enseñanza actual*. Madrid. M.E.C.

Gamificación en matemáticas, ¿un nuevo enfoque o una nueva palabra?

José Muñoz
Juan Antonio Hans
Antonio Fernández-Aliseda
Grupo Alquerque. Sevilla

Resumen: *Hay personas que cuando hablan de la gesta de Cristóbal Colón lo citan como el descubrimiento de un nuevo mundo, como si los pueblos que ya vivían en ese continente no hubiesen existido. De forma similar, hay profesores de matemáticas que se han volcado con toda pasión a la filosofía de la gamificación en la enseñanza, sin pararse a pensar si esa metodología pudiera tener un pasado reciente. Además, hay compañeros que plantean el acercamiento a la gamificación de una manera, en nuestra opinión, contraproducente. En este artículo comenzaremos explicando qué se entiende por gamificación, de dónde ha surgido y los aspectos que vemos preocupantes en la forma de implantarlo en la enseñanza de nuestra materia. Completaremos el artículo con una muestra de juegos que se han aplicado en nuestras aulas en las últimas décadas: juegos versátiles, diversos, atractivos, baratos, fáciles de construir, motivadores…*
Palabras clave: *Juegos, matemáticas, gamificación, materiales, didáctica.*

Gamification in mathematics, a new approach or a new word?

Abstract: *There are people who, when they talk about the deed of Christopher Columbus, refer to it as the discovery of a new world, as if the people who already lived on that continent would not have existed before. Similarly, there are mathematics teachers who have devoted themselves with passion to the philosophy of gamification in teaching, without stopping to think if that methodology could have a recent past. In addition, there are colleagues who raise the approach to gamification in a way, in our opinion, counterproductive. In this article we will begin by explaining what is meant by gamification, where it has come from and the aspects that we see concerning in the way of implanting it in the teaching of our subject. We will complete the article with a sample of games that*

have been applied in our classrooms in the last decades: versatile games, diverse, attractive, cheap, easy to build, motivating ...
Keywords: *Games, mathematics, gamification, materials, didactics.*

1. INTRODUCCIÓN

Vivimos en un país donde se acogen con fervor las nuevas corrientes que nos llegan, especialmente las estadounidenses. Y muchas veces abrazamos esas ideas sin pararnos a ser críticos con su aplicación e incluso con su historia y desarrollo. Un ejemplo lo tenemos en la fiesta de Halloween que se ha abierto camino en nuestra cultura llegando desde los Estados Unidos, gracias especialmente a las películas y series americanas de entretenimiento. Quizás no todos sepan que esa fiesta se basa en la festividad irlandesa de los antiguos pueblos celtas, que fue adaptada en el continente americano sin ser autóctona. A veces nos suele ocurrir lo mismo con las modas y costumbres que importamos sin pararnos a pensar si eso ya está en las nuestras, aunque sea de otra forma.

Hoy queremos hablar de la nueva moda de la *gamificación*, como una metodología tecnológica para desarrollar las capacidades de los alumnos, que propone juegos, predominantemente digitales, para obtener una serie de beneficios. Aunque como veremos la *gamificación* se aplica en todos los procesos sociales, de pronto ha comenzado a aplicarse en el mundo educativo y, en particular, en la enseñanza de las Matemáticas. Así nos encontramos con profesores que plantean la *gamificación* como una sensacional herramienta, nueva en la enseñanza, hablando de sus fabulosas prestaciones, pero presentando experiencias aisladas, sin pararse a realizar un estudio de sus resultados, y, muchas veces, fuera de un contexto educativo real.

Los que llevamos muchos años trabajando con la herramienta de los juegos educativos como recurso importante en las aulas, observamos con estupor cómo hay compañeros que se lanzan de cabeza a la nueva corriente sin tener en cuenta el proceso seguido por la didáctica de las matemáticas en nuestro país y el profundo trabajo sobre juegos en el aula que se ha realizado en las últimas décadas. Ese adentrarse con un ansia desmedida en la *gamificación*, sin haber pasado previamente por la utilización de juegos educativos en el aula, nos recuerda el proceso de otros que se lanzaron como desaforados al uso de los nuevas tecnologías, en concreto el ordenador y los programas de geometría dinámica o cálculo simbólico, sin haber pasado por el uso de las calculadoras. Y así, se daba la paradoja de profesores que negaban el uso de calculadoras en el aula aunque estaban abiertos al uso de ordenadores como apoyo a las clases o a las actividades de los alumnos.

También hay compañeros que llaman *gamificación* al uso de juegos, sin el requisito digital, en el aula de matemáticas, lo que produce confusión terminológica.

El objetivo de este artículo es doble. Por un lado plantear la idea de *gamificación*, pues hemos comprobado que muchos compañeros no saben bien qué es y otros andan un poco deslumbrados con la atención mediática que se está dedicando a este término, y por otro, y para completar este enfoque, reivindicaremos lo que se ha llamado “aprendizaje basado en juegos” y añadiremos un muestrario de ejemplos para que se vea la versatilidad, la adaptabilidad y la amplitud de este apasionante mundo del juego que algunos llevamos décadas practicando en nuestras clases.

Pero antes de presentar nuestra propuesta en este campo, lo primero es ver someramente en qué consiste la *gamificación*.

2. GAMIFICACIÓN, ¿PERO ESO QUÉ ES?

Normalmente se usa el término *gamificación* como traducción española del término anglosajón *gamification* (formado sobre *game* –juego-), aunque no está registrado en el Diccionario de la lengua española. También se suelen usar alternativas como *ludificación* (propuesta por la Fundación del Español Urgente[1]) o incluso hemos visto referirse a ello con el vocablo *juguetización*; todos ellos horrorosos desde un punto de vista fonológico.

Este término fue creado en el año 2003 por el británico Nick Pelling, diseñador y programador de software dedicado a las empresas. Su enfoque era que se podían transformar en juegos muchas situaciones sociales y empresariales con el fin de conseguir unos objetivos precisos, especialmente potenciar el desarrollo de esos elementos entre los usuarios. A pesar de haberse acuñado en el año 2003, realmente no se utilizó por primera vez hasta el año 2008, por lo que podemos observar que es un concepto muy reciente.

Básicamente la *gamificación* consiste en aplicar dinámicas típicas de los juegos en situaciones no recreativas para cambiar o potenciar la motivación y la respuesta de los individuos ante la consecución de determinados objetivos.

La *gamificación* utiliza, pues, dinámicas propias de los juegos, especialmente de los videojuegos, en contextos no lúdicos, que pueden ser profesionales, sociales, educativos, etc. Su objetivo primordial es conseguir modificar el interés de una parte de la población hacia un determinado producto o situación. En muchas ocasiones se utiliza para fidelizar a los usuarios o seguidores de un determinado producto, por ejemplo, en las redes sociales, pero también para mejorar la productividad, evaluar a determinados usuarios, reforzar la conducta de los individuos atrayéndolos hacia determinados resultados, etc.

Aunque inicialmente el término se creó dentro del mundo empresarial, posteriormente se ha extendido a muchos otros ámbitos de la sociedad, en particular al mundo educativo. Y ahí es donde vemos el problema. Una de sus prácticas más usuales es la de premiar a aquellos usuarios que se implican especialmente en la actividad, basando gran parte de su potencial en esa recompensa, para despertar y mantener así el interés del jugador en todo momento.

Por ello, en este tipo de juegos se utilizan, entre otras, las siguientes técnicas:

- Plantear retos a resolver individualmente o en equipo para conseguir unos objetivos recompensados.
- Crear desafíos entre los usuarios.
- Acumular puntos para obtener regalos o premios.
- Escalar niveles en las clasificaciones, para poder quedar por encima de otros competidores.

---

1. Fundéu-BBVA. https://www.fundeu.es/recomendacion/ludificacion-mejor-que-gamificacion-como-traduccion-de-gamification-1390/

3. ¿ES TODO TAN MARAVILLOSO?

Vemos que esta mentalidad, propia del mundo empresarial, es la misma que se está llevando a la educación y no tenemos nada claro que sean planteamientos adecuados en la acción educativa; se fomentan la competitividad, el estatus conseguido en la clasificación y la recompensa obtenida como factores fundamentales de la *gamificación*.

La introducción de la *gamificación* en la educación está coincidiendo con la expansión de la industria del ocio, del juego y del entretenimiento, como señala en su artículo "El "cuento" de la *gamificación*"[2] José Luis Pérez Tornero, experto y consultor de la UNESCO y uno de los principales referentes en la educación dentro de la alfabetización digital y mediática, que indica que aunque la *gamificación* tiene sus virtudes educativas, su endiosamiento actual es totalmente contextual y se basa en la expansión de la industria del ocio y del fomento de la competitividad.

Creemos peligroso lanzarse, siguiendo la ola de la nueva moda, a utilizar estos juegos recompensados sin pararse a ser críticos con las consecuencias y los logros a medio y largo plazo. Todos los que hemos utilizado algún tipo de recurso novedoso en el aula sabemos la poderosa atracción y motivación que se crea en los alumnos cuando se encuentran ante algo que se sale de lo corriente. Pero también sabemos por experiencia que cuando esa dinámica se repite comienza a perder la capacidad de modificar el comportamiento del alumnado.

Si nos fijamos en los ejemplos de *gamificación* en matemáticas encontramos, por un lado, juegos digitales donde los alumnos tienen que realizar una serie de pruebas para lograr un objetivo, exactamente igual que ocurre en los videojuegos. Hay muchas páginas que permiten la creación de esos videojuegos planteando preguntas para poder alcanzar una serie de objetivos. Nuestra experiencia con el uso de las nuevas tecnologías es que la repetición de ese tipo de actividad termina provocando el hastío y el aburrimiento en el alumnado que pretendemos motivar, pues si bien aquellos alumnos descolgados se animan poderosamente al enfrentarse ante algo nuevo, en cuanto tienen que aplicar unos conocimientos que no tienen, y que no suelen aprender con estas actividades, terminan desconectando rápidamente. También han proliferado, según se ve en artículos, y en encuentros y jornadas de Matemáticas, las famosas *escape room* o juegos de escape[3], que vuelven a presentar el mismo problema: crean una gran expectación cuando se realizan la primera vez, pero como no se pueden volver a repetir, o si se hace todo resulta conocido, pierden el potencial de motivación que tenían al inicio.

Este tipo de actividad tiene además el inconveniente de necesitar mucho trabajo para su elaboración y no ser fácil de modificar para adaptarlo a otros alumnos o para volver a realizarlo con otros contenidos, algo que no ocurre con el juego usual ya trabajado en décadas anteriores y del que somos firmes defensores.

2. Consultar en https://jmtornero.wordpress.com/pereztornero/

3. Actividad de ocio que se practica en equipo y que tiene como objetivo salir de una habitación en la que se está encerrado, para lo que se requiere lógica, inteligencia y deducción. Fundéu-BBVA.

4. ¿Y ESTO ES NUEVO?

Los juegos han acompañado siempre a la humanidad. Se considera que el *Juego real de Ur*, de la antigua Mesopotamia, es uno de los más antiguos que se conoce (antes del 2 600 a. C.). El recorrido de ese juego, similar al *Juego de la Oca*, tenía un objetivo, que era llegar a convertirse, teóricamente, en un ente divino pasando por hechos relacionados con la vida cotidiana. ¿Podríamos considerar esto como *gamificación*?

No es intención de este artículo hacer un recorrido por los juegos en la enseñanza. Seguro que todos nuestros lectores comenzaron, en sus primeros años, aprendiendo conceptos, comportamientos, formas de reaccionar y se prepararon para la vida social a través de los juegos, tanto en casa como en la escuela. Sí queremos hablar sobre la utilización en las últimas décadas de juegos en el aula de matemáticas.

No cabe duda que convertir en juego una actividad aburrida o repetitiva puede llegar a hacerla atractiva y motivante. Los juegos motivan, refuerzan destrezas y conocimientos, fomentan la competencia y estimulan las habilidades sociales. Y por ello su uso constituye una metodología con bastante tradición y seguidores.

Aunque los que han descubierto actualmente la *gamificación* como metodología educativa no lo sepan, se llevan décadas utilizando juegos como recursos didácticos en matemáticas.

En la Wikipedia se hace una clara diferencia entre lo que se conoce como *ludificación* y el "aprendizaje basado en juegos", indicando[4]: "El aprendizaje basado en juegos es un enfoque de enseñanza donde los alumnos utilizan juegos como recursos de aprendizaje o apoyo a la evaluación. Este tema conjuga específicamente la educación y los juegos, donde se construyen escenarios de enseñanza para alcanzar objetivos de aprendizaje previamente definidos a través de juegos. Mientras que la *ludificación* se basa en incorporar dinámicas o mecanismos de juego (puntos, *ranking*, insignias, reglas de juego, etc.) a procesos que de por sí no son muy "jugables", valiéndose de la predisposición psicológica del ser humano para participar en juegos."

Hace cuarenta años, la didáctica de las matemáticas sufrió un florecimiento como rechazo a las matemáticas anquilosadas que en ese momento se impartían, cada vez más alejadas del entorno cotidiano del alumnado. Con la irrupción del *Grupo Cero* de Valencia cambió radicalmente el enfoque que se le daba hasta entonces a la enseñanza, incorporando muchas referencias a la vida cotidiana, planteando actividades más cercanas al alumnado, incluyendo lecturas y artículos de la prensa. En la senda marcada por este grupo aparecieron, en otras comunidades, otros grupos en la misma línea: *Grup Zero* de Barcelona, *Grupo Azarquiel* en Madrid, *Colectivo de Didáctica de las Matemáticas* en Sevilla y muchos más. Éstos comenzaron a elaborar material didáctico para las clases de matemáticas y, ya en la década de los ochenta, aparecen los primeros juegos, tal como se indica en el texto de la Wikipedia, construidos expresamente para desarrollar contenidos matemáticos.

Durante las décadas de los años 80 y 90 una serie de profesores comienzan a investigar más profundamente en el desarrollo del juego matemático en nuestro país. Entre ellos

4. Consultar https://es.wikipedia.org/wiki/Ludificaci%C3%B3n

podemos citar entre otros a Miguel de Guzmán, Fernando Corbalán, Inés M.ª Gómez Chacón, Ana García Azcárate, Luis Ferrero o Jordi Deulofeu, que comienzan a estructurar y a analizar didácticamente la gran variedad de juegos que van surtiendo el material educativo para el trabajo en el aula.

¿Cuáles son las ventajas que vemos del aprendizaje basado en juegos? Aparte de la variedad de juegos, la adaptabilidad que tienen muchos de ellos que nos permite, con poco trabajo, adecuar un determinado tipo de juego a nuestros alumnos, algo que no hemos encontrado en la *gamificación* tal como se presenta actualmente.

Otra ventaja es la capacidad para utilizarlos en cualquier momento del proceso educativo. De esa manera hay juegos que pueden abordarse antes de ver un concepto en el aula y que nos permiten preparar el terreno para la aparición de ese nuevo concepto. En otras ocasiones podemos jugar a la vez que estamos aprendiendo un nuevo concepto con lo que utilizamos un potente recurso motivador, como es el juego, para conseguir que el alumnado aprenda a manejar los conocimientos que está adquiriendo. Incluso podemos utilizar el juego, una vez aprendido un concepto, para afianzarlo o en sucesivos años como repaso de los conocimientos necesarios para seguir avanzando. Esta versatilidad tampoco la hemos visto en los ejemplos que se suelen presentar de *gamificación*, en los que es necesario que el alumnado maneje muy bien los contenidos planteados en los retos para poder avanzar en el juego.

En el aprendizaje basado en juegos, éste se plantea como una actividad en la que el objetivo no es conseguir un premio que nos posicione por encima del resto de jugadores. Hay competencia pero no competitividad, que aunque comparten la misma raíz etimológica no significan lo mismo. Aunque como en todo juego nuestro objetivo es ganar o conseguir resolver el problema planteado, si nos encontramos con un solitario, lo mejor es el proceso en sí, el ser capaces de enfrentarnos al reto, buscar la mejora diaria y participar de una forma lúdica y motivadora en una actividad social que nos permite también aprender a desenvolvernos en la sociedad, donde nos vamos a encontrar con situaciones en las que deberemos seguir unas reglas para enfrentarnos a la resolución de un problema de cualquier tipo.

Como pensamos que quizás algunos compañeros están un poco deslumbrados con la novedad que significa la *gamificación*, y no conocen la poderosa y variada herramienta que ya tienen a su disposición, creemos que este monográfico realizado por personas con experiencia estudiando el uso de los juegos en el aula de Matemáticas, puede servir de guía para afrontar esta opción de una forma más rica. Es por ello que vamos a mostrar ahora algunas opciones de juegos.

5. EJEMPLOS DE JUEGOS EN CLASE DE MATEMÁTICAS

BINGO DE OPERACIONES

Nivel

Educación Primaria.

Juego de cálculo numérico

Juego para cualquier número de jugadores.

Material necesario

- Para el profesor o profesora: Quince tarjetas como las siguientes (figura 1), donde en la parte superior aparece la expresión a calcular y en la inferior el resultado de la misma (para comprobar fácilmente, al final, los valores obtenidos).
- Para los alumnos: Lápiz y papel.

Figura 1: Ejemplo de quince tarjetas para el *Bingo de operaciones.*

El triple de 2, menos 5. **1**	(6 + 8) - (5 + 7) **2**	El doble de 1, más la mitad de 2. **3**
12 x 5 : 15 **4**	(100 : 5) : 4 **5**	La tercera parte de 15, más 1. **6**
22 - 8 -13 + 6 **7**	36 : 9 x 2 **8**	La cuarta parte de 20, más 4. **9**
7 x 3 + 4 - 15 **10**	El doble de 5, más 1. **11**	La mitad de 6 por 4. **12**
18 : 2 + 4 **13**	28 - 12 + 4 - 6 **14**	15 + 4 - 4 **15**

Reglas de juego

- Antes de comenzar el profesor o profesora baraja las tarjetas y los alumnos construyen su cartón de bingo eligiendo aleatoriamente seis o nueve números (según se desee que el juego dure menos o más), entre el 1 y el 15 ambos inclusive, que colocarán en un rectángulo o en un cuadrado respectivamente. Se escriben en la pizarra (o se proyectan como diapositivas) las operaciones de las tarjetas, los alumnos las realizan y si el resultado está entre sus seleccionados lo tachan de su lista.

Objetivo

- Ser el primero en tachar las 6 o 9 cifras seleccionadas.

CADA OVEJA CON SU PAREJA

Nivel

Educación Primaria.

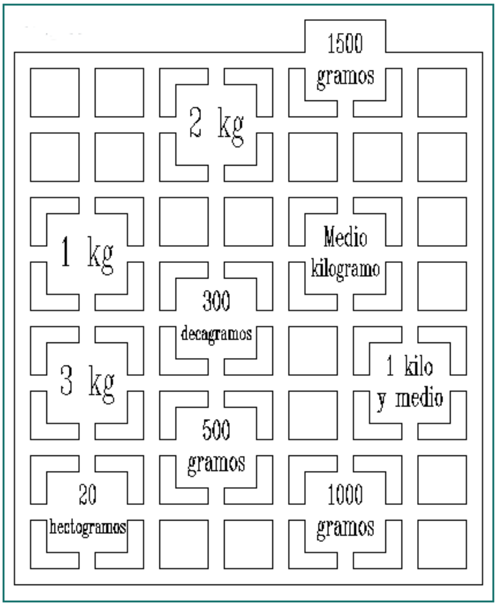


Figura 2: Ejemplo de tablero para el juego *Cada oveja con su pareja*.

Juego tipo

Laberinto sobre medidas.

Jugadores

Juego individual.

Material necesario

Para cada alumno o alumna:

- Un tablero como el de la figura 2 que simula una ciudad formada por calles paralelas y perpendiculares y plazas donde se incluyen los conceptos que queremos relacionar.
- Lápiz y goma de borrar (fig. 2).

Reglas de juego y objetivo

- Unir mediante líneas los conceptos que son equivalentes con las siguientes condiciones:
  1. Las líneas tienen que pasar por las calles de la ciudad.
  2. Las líneas no pueden atravesar las plazas donde están los conceptos.
  3. No pueden coincidir dos líneas en la misma calle ni en un mismo cruce y, por consiguiente, dos líneas no pueden cruzarse.

Referencia

Esta actividad está basada en un pasatiempo llamado *Marcarrutas*, muy frecuente hace unos años en el cuadernillo de pasatiempos que acompañaba al suplemento dominical del periódico *El País*.

JUEGO RADICAL

Nivel

Educación Secundaria (Segundo ciclo).

Juego tipo

Sobre radicales.

Jugadores

Juego para dos, tres o cuatro jugadores.

Material necesario

- Dos dados cúbicos.
- Cinco fichas de colores distintos para cada jugador o jugadora si juegan dos, cuatro si juegan tres y tres si juegan cuatro.
- Un tablero como el siguiente (fig. 3):

Figura 3: Ejemplo de tablero para el *Juego radical*.

	2^3	$\sqrt[5]{2^4}$	$2\cdot\sqrt{2}$	$2\cdot\sqrt[3]{2}$	
$2^2\cdot\sqrt{2}$	$\sqrt[3]{2^2}$	$2\cdot\sqrt[3]{2}$	$2\cdot\sqrt[5]{2^3}$	2^2	$2^2\cdot\sqrt[5]{2^2}$
2^6	$2^2\cdot\sqrt[5]{2^2}$		$\sqrt[3]{2^2}$	$2^2\cdot\sqrt{2}$	$2^2\cdot\sqrt[3]{2^2}$
$2\cdot\sqrt[3]{2^2}$	2	2^5		$2\cdot\sqrt[5]{2}$	2
2^2	$2^2\cdot\sqrt[3]{2^2}$	$2\cdot\sqrt[3]{2}$	2^2	$2\cdot\sqrt[3]{2^2}$	$2\cdot\sqrt{2}$
	$2^3\cdot\sqrt[3]{2}$	2^4	$2\cdot\sqrt[5]{2^3}$	$\sqrt[5]{2^4}$	

Reglas de juego

- Cada jugador o jugadora, en su turno, lanza los dos dados. Si en alguno de ellos sale un 1, se vuelve a lanzar hasta que salga un valor distinto de uno.
- De los dos valores obtenidos, el jugador o jugadora decide cuál será el índice de la raíz y cuál el exponente del radicando y construye un radical en el que la base del radicando será siempre 4.
- Simplifica el radical obtenido y coloca una de sus fichas en la casilla donde aparezca el resultado. Si no hay ninguna casilla libre con ese valor, se pierde el turno.
- Si algún contrario se percata de que la operación ha sido mal realizada, la ficha puesta se retira del tablero y se pierde el turno.

Objetivo

- Gana el primer jugador o jugadora que consigue colocar todas sus fichas sobre el tablero.

CUATRO EN RAYA ALGEBRAICO

Nivel

Educación Secundaria.

Juego tipo

Algebraico, de tablero y fichas.

Jugadores

Juego para dos jugadores.

Material necesario

- Tablero de expresiones de segundo grado (figura 4a).
- Regleta de factores de primer grado (figura 4b).
- 16 fichas de dos colores diferentes por participante, una de las cuales llamaremos ficha testigo. Las dos fichas testigo se colocarán sobre la regleta de factores y las restantes fichas sobre el tablero de juego.

x^2+x	x^2-3x+2	x^2-x	x^2-9	x^2-2x+1	x^2+x
x^2+2x+1	x^2-4	x^2-3x	x^2-4	x^2	x^2-4x+3
x^2+6x+9	x^2-x-2	x^2+4x+3	x^2+x	x^2-5x+6	x^2-6x+9
x^2-4x+4	x^2-1	x^2+4x+4	x^2+x-2	x^2+2x+1	x^2-x
x^2+5x+6	x^2-x-6	x^2-4x+4	x^2+3x	x^2-1	x^2+x-2
x^2	x^2-2x-3	x^2+3x+2	x^2+2x-3	x^2-2x	x^2-9

$x-3$	$x-2$	$x-1$	x	$x+1$	$x+2$	$x+3$

Figuras 4a y 4b. Ejemplo de tablero y regleta de factores para el juego *Cuatro en raya algebraico*.

Reglas de juego

Los jugadores echan a suerte quién empieza el juego.

- El primer jugador o jugadora comienza colocando sobre un factor de la regleta (figura 4b) su ficha testigo, y situando a continuación sobre otro factor (o sobre el mismo) la ficha testigo del otro participante. Realiza el producto de los dos factores señalados y coloca una de sus quince fichas restantes en la casilla correspondiente al resultado.
- El segundo participante coge su ficha testigo de la regleta y la coloca sobre otro factor, hace el producto de su factor y del que señala la ficha testigo del primer jugador o jugadora y ocupa con una ficha la casilla del tablero donde aparece el resultado.
- Para escoger su factor, el segundo participante debe seguir la estrategia del juego clásico del cuatro en raya:
  - *Conseguir lo antes posible, tener cuatro fichas alineadas en el tablero.*
  - *Ocupar una casilla para impedir que su adversario consiga alinear cuatro fichas.*
- El juego continúa con cada uno moviendo únicamente su ficha testigo y colocando, cada vez, una ficha en una casilla del tablero.
- Se puede ocupar la misma casilla de la regleta por dos fichas a la vez. Aunque esta regla se puede restringir si el profesor o profesora lo estima oportuno.
- Si un participante se equivoca en los cálculos, pierde su turno.

Objetivo

- Ser el primero en conseguir cuatro fichas en raya.

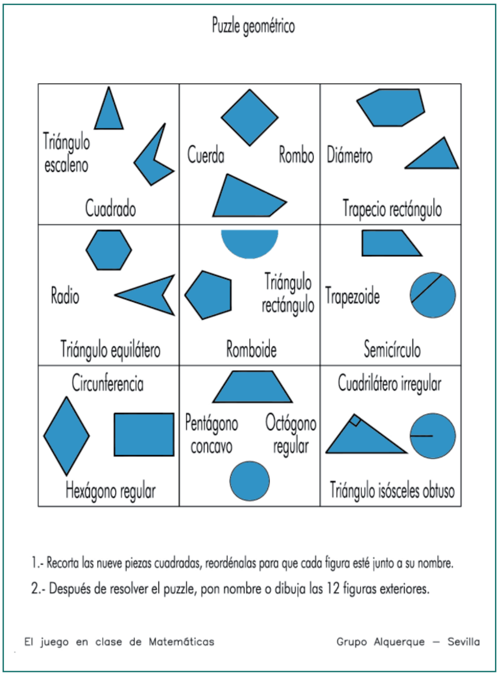


Figura 5. Ejemplo de nueve piezas para el *Puzle geométrico*.

PUZLE GEOMÉTRICO

Nivel

Educación Primaria.

Juego tipo

Juego de geometría.

Jugadores

Juego individual.

Material necesario

- Para cada alumno o alumna: Un juego de nueve piezas como las de la figura 5.

Regla de juego y objetivo

Colocar las piezas formando un cuadrado de tres filas y tres columnas, de forma que dos lados en contacto unan las rectas o figuras con sus nombres.

Comentarios

Este puzle está construido de forma que las piezas deben colocarse en el mismo sentido en que se ven, es decir, no se puede colocar ninguna girada.

Obviamente siempre hay elementos que no están emparejados (los que quedan en el borde).

DOMINÓ DE ÁREAS

Nivel

Educación Primaria.

Juego tipo

Juego de geometría.

Jugadores

Juego para varios jugadores.

Material necesario

- Para cada grupo de alumnos: 28 fichas como las de la figura 6.

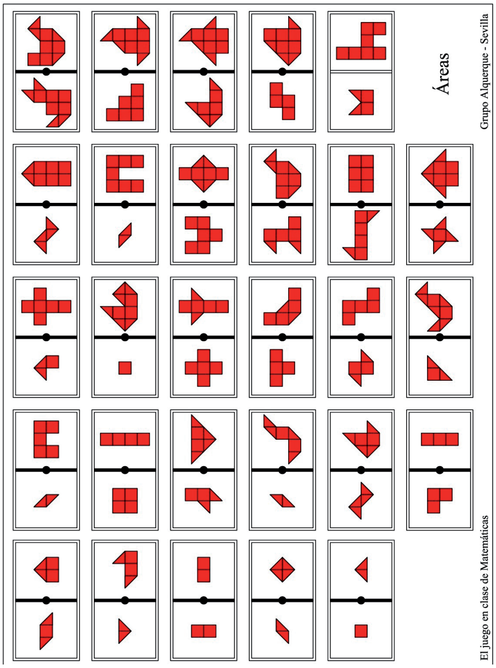


Figura 6: Ejemplo de piezas para el *Dominó de áreas*.

Reglas de juego y objetivo

Las reglas de juego son las clásicas del dominó: las fichas deben colocarse de forma que los dos cuadrados que las unen tengan una figura con la misma superficie.

Se reparten siete fichas por jugador o jugadora, que las oculta de la vista de los contrarios, si participan cuatro alumnos o alumnas; si son menos de cuatro las fichas que sobren se dejan boca abajo, en el centro, para que se "roben" cuando algún participante no pueda colocar alguna de las que ya tiene.

Ser el primero en colocar sus fichas.

CARRERAS DE MOTOS

Nivel

Educación Secundaria.

Juego tipo

Juego de probabilidad.

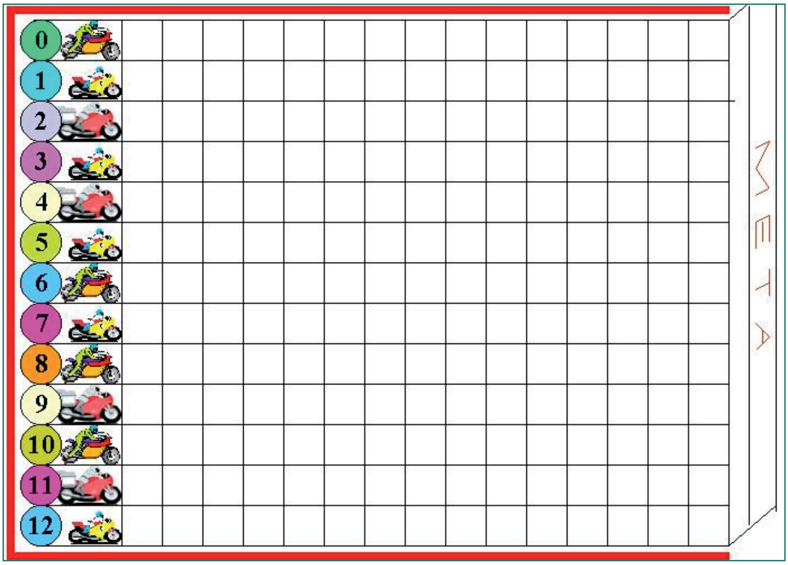


Figura 7: Tablero para la *Carrera de motos*.

Jugadores

Juego para varios jugadores.

Material necesario

- Dos dados cúbicos.
- Una ficha por jugador o jugadora.
- Un tablero como el de la figura 7.

Variante 1. La carrera va a más

Reglas de juego y objetivo

- Cada participante elige un número y coloca su ficha en la salida, en la casilla correspondiente al número.
- Los jugadores lanzan, por turnos, ambos dados. El jugador o jugadora cuyo número coincide con la suma de los que han salido en los dados avanza una casilla hacia la meta.
- Ser el primero que llega a la meta.

Variante 2. La carrera va a menos

Reglas de juego y objetivo

- Cada jugador o jugadora elige un número y coloca su ficha en la salida, en la casilla correspondiente al número.
- Los jugadores lanzan, por turnos, ambos dados. El participante cuyo número coincide con la diferencia de los valores que han salido en los dados (el mayor menos el menor) avanza una casilla hacia la meta.
- Ser el primero que llega a la meta.

■ LLEGAR A CIEN

Nivel

Educación Secundaria.

Juego tipo

Juego de estrategia.

Jugadores

Juego para dos jugadores.

Material necesario

Lápiz y papel.

Figura 8: Ejemplo de partida de *Llegar a 100*.

Primer jugador	Segundo jugador	Suma total
10		10
	5	15
8		23
	8	31
7		38
	9	47
9		56
	9	65
10		75
	7	82
9		91
	9	100
Gana el segundo participante jugador		

Reglas de juego y objetivo

- Los jugadores eligen por turnos un número entre 1 y 10, y lo suman a los números elegidos anteriormente.
- Gana el primer jugador o jugadora que consigue sumar exactamente 100.

Investigación

- Juega unas cuantas partidas.
- Intenta encontrar posiciones desde las que puedas ganar. Busca después otras posiciones desde las que puedas llegar siempre a esas posiciones ganadoras.
- Busca una estrategia que te permita ganar siempre, haga lo que haga el contrario (estrategia ganadora).
- Modifica ahora el juego e intenta encontrar la estrategia ganadora en cada caso:
  1. Solo se pueden elegir números entre 5 y 10.
  2. El primero que llega a 100 (o se pase) pierde la partida.
  3. Gana el primero que llega a 99. (¿Qué relación tiene este caso con el anterior?)
  4. Se eligen números entre 1 y 15 y gana el primero en llegar a 150.

6. Y ESTO NO ES TODO

Hemos seleccionado una serie de juegos que permite ver la variedad de posibilidades que tenemos para utilizar en clase, con bloques curriculares diferentes a niveles educativos diversos pasando por materiales distintos.

Los propios juegos que hemos presentado tienen, en su mayoría, una gran versatilidad. En ellos, salvo quizás en los dos últimos, es posible cambiar los conceptos que se trabajan adaptándolos a otros contenidos y otros niveles educativos. Por ejemplo, el *Bingo de operaciones* que hemos visto podemos adecuarlo a otros temas, como el máximo común divisor y mínimo común múltiplo de varios números; o a los lados de polígonos, donde se puede plantear el número de lados de un dodecágono, por ejemplo, o también la suma de los lados de un hexágono y un heptágono. Podemos utilizarlo en probabilidad de forma que los números a colocar en el cartón vayan desde 0 hasta 1 variando de 5 en 5 centésimas y las frases fuesen sobre la probabilidad de determinados sucesos. O incluso las preguntas pueden referirse a la resolución de ecuaciones de primer grado sencillas con soluciones entre 1 y 15.

También el *Juego radical* podemos modificarlo para trabajar, por ejemplo, con fracciones simplificadas y colocar en el tablero fracciones propias, de forma que con los números aparecidos tras tirar los dados, haya que formar una fracción con el numerador menor que el denominador, simplificarla y buscar el resultado en el tablero.

El *Puzle geométrico* se puede adaptar sin dificultad a cualquier contenido y modificar su tamaño (que influirá en el tiempo para su resolución). Para crear un nuevo puzle el proceso debe ser inverso al que se sigue al jugar con él. En una plantilla vacía comenzamos a escribir elementos emparejados y, una vez completa, se recorta y se reconstruye de otro modo antes de fotocopiar. Incluso se pueden diseñar las piezas de forma que haya que girarlas antes de colocarlas.

Ni que decir tiene que en el caso del *Dominó de áreas* podemos encontrar cientos de versiones con contenidos de todo tipo. Se puede incluso ampliar o disminuir el número de fichas que componen el juego, según el número de alumnos que vayan a jugar o el tiempo que le queramos dedicar a ese recurso.

Con el formato de cartas también hay una gran variedad de juegos matemáticos que aquí no hemos reseñado.

El juego es un recurso para aprender o para repasar contenidos, pero lo interesante didácticamente es no quedarse ahí. Como hemos visto en el último juego de *Llegar a cien*, lo que más nos debe interesar como enseñantes es el estudio posterior del mismo. Por ejemplo, en el de la *Carrera de motos*, que sirve como preparación a la introducción a la probabilidad, después de jugar lo adecuado es estudiar cuáles son los dorsales que tienen más posibilidades de avanzar, para lo que es recomendable hacer una tabla y ver todos los posibles valores de sumar o restar los resultados de lanzar dos dados y la frecuencia de su aparición.

En las referencias que siguen se puede encontrar un banco de recursos de juegos casi inagotable, sobre todo si deciden ustedes adaptar los juegos a su propio alumnado.

7. PARA SABER MÁS

Corbalán, F. (1994). *Juegos matemáticos para Secundaria y Bachillerato*. Madrid: Síntesis.

Deulofeu, J. (2001). *Una recreación matemática: historias, juegos y problemas*. Barcelona: Planeta.

Ferrero de Pablos, L. (1991). *El juego y la matemática*. Madrid: La Muralla S.A.

García Azcarate, A. (2012). *Pasatiempos y juegos en clase de Matemáticas. Números y álgebra*. Madrid: Avinareta.

García Azcarate, A. (2013). *Pasatiempos y juegos en clase de Matemáticas. Geometría*. Madrid: Avinareta.

García Azcarate, A. (2013). *Pasatiempos y juegos en clase de Matemáticas. Probabilidad y geometría espacial*. Madrid: Avinareta.

García Azcarate, A. (2015). *Pasatiempos y juegos en clase de Matemáticas. Funciones y más de álgebra y números*. Madrid: Avinareta.

García Azcarate, A. *Pasatiempos y juegos en clase de Matemáticas*.
https://anagarciaazcarate.wordpress.com/ Consultado 20/01/2019.

Gómez Chacón, I. M. (1992). *Los juegos de estrategia en el currículum de matemáticas*. Madrid: Narcea.

Grupo Alquerque. Sección de juegos de la revista *SUMA*.
http://vps280516.ovh.net/divulgamat15/index.php?option=com_alphacontent&section=13&category=77&Itemid=67 Consultado 20/01/2019.

Grupo Azarquiel (1991). *Ideas y actividades para enseñar álgebra*. Madrid: Síntesis.

Grupo Cero de Valencia (1995): *Matemáticas para la Secundaria Obligatoria. 3 vol*. Madrid: MEC y Edelvives.

Guzmán, M. (1989): Juegos y matemáticas. *SUMA,* 4, 61-64.

Hernán, F. y Carrillo, E. (1988). *Recursos en el aula de Matemáticas*. Madrid: Síntesis.

El juego como tarea de enseñanza: jugar, analizar, rediseñar e inventar

Rafael Ramírez Uclés
Universidad de Granada

Resumen: *En este trabajo se presenta un esquema para incluir los juegos en tareas de enseñanza. Se enfatizan la motivación y la significatividad como dos elementos que aportan los juegos al proceso de enseñanza. Además de jugar, el estudiante analiza, rediseña e incluso inventa características de los juegos que enriquecen los contenidos matemáticos. Se proponen ideas para la utilización de los juegos para contextualizar los contenidos matemáticos.*
Palabras clave: *Gamificación, Motivación, Tarea escolar, Significatividad*

The game as a teaching task: play, analyze, redesign and invent

Abstract: *In this paper we present a scheme to include games in teaching tasks. Motivation and significance are emphasized as two elements that bring the games to the teaching process. In addition to playing, the student analyzes, redesigns and even invents characteristics of the games that enrich the mathematical contents. Ideas are proposed for the use of games to contextualize mathematical contents.*
Keywords: *Gamification, Motivation, School task, significance*

INTRODUCCIÓN

La "gamificación" como técnica de aprendizaje traslada a la clase algunas de las mecánicas de los juegos, tales como el uso de estrategias, modelos, dinámicas y características con el propósito de transmitir unos contenidos a través de una experiencia lúdica que favorezca la motivación, la implicación y la diversión (Werbach y Hunter, 2012).

Convertir la clase de matemáticas en un juego puede tener distintas connotaciones. En una de las acepciones de la Real Academia de la Lengua para jugar se identifica con "hacer algo con alegría con el fin de entretenerse, divertirse o desarrollar determinadas capacidades". Pero también para el juego hay acepciones como "Actividad intrascendente que no ofrece ninguna dificultad". Elegir una determinada metodología para que el estudiante aprenda un contenido implica dejar de utilizar otras opciones. En economía, el coste de oportunidad es considerar, además de la ganancia tras una elección, la pérdida de no haber llevado a cabo las otras opciones. Cuando decidimos incluir juegos en el aula tenemos que sopesar lo que ganamos frente a lo que perdemos por no utilizar otros recursos. En este sentido vamos a analizar el potencial del juego como elemento de enseñanza atendiendo a dos componentes: la motivación ("hacer algo con alegría con el fin de entretenerse, divertirse") y la funcionalidad ("desarrollar determinadas capacidades"). Evitamos así "la intrascendencia"…

Motivación

La utilización del juego como elemento motivador es un hecho bastante consensuado. Puede que, como profesores, estemos alejados de lo que "divierta" a cada uno de nuestros estudiantes que entienden diferente jugar al ajedrez, al escondite, a la videoconsola, o a lanzar una botella de agua semillena (o semivacía, según se mire). Pero las matemáticas no son aburridas en sí mismas, por lo que podemos trasladarle al estudiante la gestión de su aburrimiento, que bien entendido, puede ser el primer paso para la creatividad. En este sentido, se puede *dar un papel relevante al propio estudiante en el diseño de la componente de motivación del juego*.

Funcionalidad

El juego en sí mismo no tiene por qué constituir una tarea rica. Sin embargo, tiene mucho potencial si va insertado en una tarea más global que resalte los elementos de significado de los contenidos matemáticos. El juego como un reto, sirve para contextualizar y darle funcionalidad a los contenidos matemáticos y, por tanto, dotar de significatividad el aprendizaje al resultar útil y relevante para el sujeto (Ausubel, 1963). El significado de un concepto matemático va asociado a las situaciones en las que el estudiante pueda identificarlo. Y no siempre es fácil adaptarlo a las edades correspondientes, plantear contextos reales o situaciones personales que se ajusten a los contenidos que se están trabajando en clase. *El juego puede servir como escenario en el que el estudiante se enfrente a "situaciones casi reales" donde poner en práctica el contenido.*

En este trabajo se presenta un esquema para incluir los juegos en tareas de enseñanza, enfatizando su papel motivador y creador de significatividad. El esquema parte de variar el rol del estudiante, promoviendo que además de jugar, analice, rediseñe e incluso invente características de juegos para trabajar los contenidos matemáticos. Comenzamos por presentar el esquema, posteriormente describimos la tarea del profesor y del estudiante, valiéndonos de ejemplos de tareas que emplean juegos.

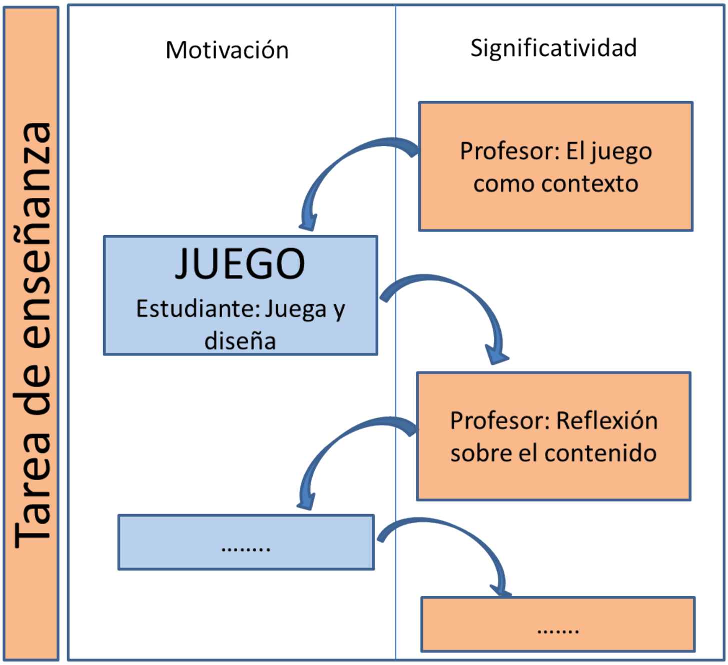


Figura 1. El juego dentro de una tarea de enseñanza.

EL JUEGO INSERTADO EN LA TAREA DE ENSEÑANZA

Resaltamos esta idea: insertar el juego dentro de una tarea de enseñanza, en la que el estudiante tenga un papel relevante en el diseño, que el profesor utiliza como contexto para darle significatividad a contenidos matemáticos (Figura 1).

Vamos a explicar el esquema de la Figura 1 utilizando un ejemplo. Podemos situarnos en una unidad didáctica de Geometría de los últimos cursos de Primaria, pero se puede adaptar a otros niveles, dependiendo del tema que se trate.

a) Profesor: el Juego como contexto de un contenido matemático

Una finalidad de la enseñanza de la geometría es desarrollar el sentido espacial de los estudiantes, que implica que conozcan las definiciones de los conceptos geométricos, sus propiedades, los movimientos y desarrollen habilidades de visualización (Flores, Ramírez y del Río, 2016). Se busca que el estudiante conecte todos estos elementos de un modo funcional, y vaya más allá de simplemente enunciar de memoria lo que es un cuadrado o calcular su área. Se pretende que desarrolle la competencia de comunicar ese conocimiento y que lo haga para algo real (darle funcionalidad). Es interesante situar al estudiante en contextos reales en los que necesite definir con precisión lo que es un cuadrado o utilizar sus propiedades. En este sentido es donde un juego puede ayudar, diseñando un "escenario real" en el que el objetivo sea justamente desarrollar y manifestar esa competencia.

El juego del Tabú se basa en la habilidad para *comunicar* a tu compañero una palabra sin poder usar otras palabras prohibidas. En el juego original difícilmente encontraremos los términos que queremos utilizar en nuestra clase de geometría. Arrancamos de disponer de un juego Tabú con términos matemáticos.

b) JUEGO: El estudiante juega y diseña

El profesor explica el juego original del tabú. A un estudiante le da una tarjeta con la palabra a definir (cuadrado) y con las palabras tabú (cuatro, lado, regular y ángulo). Debe intentar que su compañero adivine la palabra sin utilizar las palabras prohibidas. Ahora es cuando se invita a los estudiantes a diseñar el juego y buscar los elementos que caracterizan la "gamificación" que les resulten más motivadores:

- Forma de organizar los grupos (competir por equipos, parejas…)
- Diseño del material (cada equipo diseña las tarjetas que tendrán que adivinar los otros grupos, la forma de repartirlas…)
- Puntuación (establecer las reglas para puntuar las intervenciones, el esquema de competición, la eliminación…)
- Tiempo (delimitación del tiempo limitado para la explicación de tarjetas …)
- Otras variaciones (que la persona que explique no vea las palabras tabú, aceptación o rechazo de la utilización de gestos….)

El profesor gestiona las propuestas, orientando especialmente sobre el contenido matemático para el diseño de las tarjetas, y favoreciendo que se alcance el consenso de las propuestas de gamificación. Llegado a este punto, comienza el juego…

c) Profesor: Reflexión sobre el contenido

El juego puede quedarse en anecdótico y simplemente divertido. Pueden definir cuadrado diciendo "tres al …..es nueve" o señalando un cuadro. Pero en nuestra propuesta, *consideramos el juego como una parte insertada en una tarea de enseñanza más completa, donde, tras el juego, se "reposan" los contenidos trabajados* (Ramírez y Flores, 2016). Se puede reconducir la clase al objetivo inicial y aprovechar, de manera calmada, las definiciones que se hayan utilizado e ir añadiendo cada vez más palabras tabú para buscar distintas descripciones de un cuadrado y hacer preguntas que las cuestionen.

- Juego: Definir cuadrado sin emplear las palabras tabú: cuatro, lado, regular, ángulo
- Definición del estudiante: Cuadrilátero con sus dos diagonales iguales y perpendiculares
- Intervención docente: ¿Bastaría haber dicho diagonales iguales? ¿O diagonales perpendiculares? (Discusión en clase y puesta en común: Caracterización de los cuadriláteros según sus diagonales)

Se pueden repetir ciclos de juego, de manera que se vayan intercalando momentos de juego y reflexión. Por ejemplo, tras la explicación de la primera intervención docente, incluir nuevas palabras tabú: cuatro, lado, regular, ángulo, cuadrilátero, diagonales, iguales, perpendiculares.

- Definición del estudiante: Las caras de un cubo
- Intervención del docente: ¿Qué objetos tridimensionales tienen cuadrados en sus caras? (Discusión en clase y puesta en común: poliedros)

Y así sucesivamente añadir palabras tabú: cuatro, lado, regular, ángulo, cuadrilátero, diagonales, iguales, perpendiculares, caras, cubo…, junto a las correspondientes discusiones en clase sobre las propiedades.

Como se observa, este procedimiento no es nada "intrascendente" y permite un contexto en el que el estudiante necesita identificar propiedades y utilizar definiciones precisas para comunicar la forma de un determinado objeto. Además de motivación como entretenimiento, ha aportado elementos de significatividad al darle funcionalidad a la utilización de terminología precisa en las descripciones geométricas.

JUEGO, ANÁLISIS, REDISEÑO E INVENCIÓN

El juego anterior se focaliza en la competencia de Comunicar, y en el objetivo de desarrollar el sentido espacial, especialmente en el reconocimiento de propiedades y la definición de conceptos geométricos. Pero no siempre es fácil encontrar un juego que se ajuste a los objetivos específicos de cada unidad. En este caso, creemos que hay dos formas de aproximación: 1) partir del proceso inverso: reconocer las cualidades de un juego y adaptarlo a los contenidos; 2) Rediseñar o inventar el propio juego. Vamos a proponer tres ideas que pueden ayudar en este sentido.

Idea 1: Crear una base de datos de "juegos para clase"

Proponemos una tarea inicial que consiste en hacer una puesta en común con los estudiantes sobre los juegos con los que se "divierten". Incluso se puede organizar un taller de juegos para que los presenten y lo compartan en clase. Cada grupo debe elaborar una ficha de los juegos que aporten, en la que se recojan estos u otros ítems interesantes (Tabla 1):

Tabla 1: Ejemplo de ficha para el juego del Tabú

Nombre del juego	Tabú
Número de jugadores	Podrían jugar dos, pero es más interesante a partir de cuatro jugadores (al menos dos equipos de dos)
¿Qué es lo divertido?	La creatividad para definir las palabras. Tener que hacerlo en tiempo limitado.
¿Qué cualidades desarrolla?	Comunicación. Riqueza de vocabulario.
¿Es asequible?	Juego de mesa. Se puede versionar únicamente con lápiz y papel

No hay que restringir ninguna de sus propuestas, así se recogen fichas relativas al fútbol, a los videojuegos y a todas las actividades que ellos consideren juegos. La información recogida sobre lo que consideran divertido en todas sus propuestas es interesante para la componente de motivación. La pregunta de las cualidades da pistas sobre las competencias para las que puede resultar útil. En el esquema anterior, señalamos un momento de juego en el que, además de jugar, el estudiante adquiría un papel relevante en el diseño. La propuesta es indagar ahora en el papel de las matemáticas en los juegos propuestos en dos aspectos: analizar y rediseñar el juego.

Idea 2: Analizar

El análisis va enfocado a estudiar matemáticamente el contenido de los juegos (Flores, Ramírez y Ruiz-Hidalgo, 2016). Se plantea a los estudiantes completar las fichas de cada juego respondiendo a la pregunta *¿Qué aportan las matemáticas al juego?*

En el juego del Tabú original, las matemáticas tienen un papel nada relevante y únicamente aparecen para obtener la puntuación (elemento de gamificación). Sin embargo, en otros juegos, las matemáticas adquieren protagonismo en la forma del tablero o las piezas que lo componen, el espacio en el que se lleva a cabo, las instrucciones de juego, el material que se utiliza, las estrategias de resolución, etc. Por ejemplo, el juego del Tetris utiliza para sus piezas tetraminós (cuatro cuadrados unidos dos a dos por uno de sus lados) y en las reglas del juego los movimientos en el plano (giros y no simetrías). La gestión de este análisis pasa por convertir en preguntas de descripción (cuál, qué, cómo, dónde…) y de justificación (por qué) todo lo relativo al diseño, construcción, reglas y estrategias (Tabla 2)

Tabla 2: Algunas preguntas de análisis para la ficha del Tetris

	Tetris
Diseño	¿Qué elementos geométricos permiten describir las piezas? ¿Qué influencia tiene la forma de las piezas en el juego? ¿Por qué hay ese número de piezas?
Construcción	¿Cómo fabricarnos uno para clase? ¿Qué necesitamos medir, contar, calcular, dibujar…?
Reglas	¿Qué movimientos están permitidos? ¿Cuáles no? ¿Por qué?
Estrategias	¿Cuál es la estrategia ganadora? ¿Dónde colocar la pieza para que tenga un rendimiento óptimo?

En algunos juegos, quizás este análisis sea interesante únicamente en alguno de los aspectos, pero permiten al profesor enriquecer su propia base de recursos para utilizar el juego como contexto. En este caso, el Tetris podría asociarse a los contenidos matemáticos de Formas Geométricas y Movimientos en el plano y al desarrollo de las habilidades de visualización.

Idea 3: Rediseñar e Inventar

En su famosa charla TED, Ken Robinson advierte de que la escuela puede matar la creatividad[1]. Robinson define la creatividad como el *proceso de tener ideas originales que tengan valor*. Pensamos que desde la clase de matemáticas se puede aportar *muchísimo* para favorecer la creatividad de nuestros estudiantes. Los problemas matemáticos que aún no tienen respuesta necesitan ideas originales para abordarlos desde una nueva perspectiva. La historia de las matemáticas ha evidenciado muchos avances que surgieron inicialmente con el planteamiento de un aparente juego sencillo (por ejemplo, el problema de los puentes de Konigsberg para los grafos o los juegos del Caballero de Mere para la probabilidad). No tenemos la pretensión de que como profesores lleguemos a inventar nuestro propio juego que se adapte a unas necesidades de enseñanza específicas. Pero no todo depende de ideas felices. Se pueden dar algunos pasos para favorecer el proceso creativo de tener ideas originales y, en este caso, con valor matemático.

Un primer paso es analizar las variaciones posibles en los distintos elementos del juego con la intención de profundizar en los elementos matemáticos o sugerir modificaciones que enriquezcan su potencial didáctico (Ramírez, Flores, Ruiz-Hidalgo y Fernández-Plaza, 2016). Se selecciona una ficha de juegos de la que se haya hecho el análisis y en cada uno de los apartados incluimos una lluvia de ideas con preguntas del tipo *¿Qué pasaría si en vez de…? ¿Y si..?*

Por ejemplo, en el juego de Tetris, en relación al diseño (¿Qué pasaría si en vez de cuadrados se utilizan pentágonos no regulares?), a la construcción (¿Y si son objetos tridimensionales?), a las reglas (¿Y si además de giros, se permiten simetrías? ¿Y si en vez de eliminar filas completas se eliminan otras figuras? ¿Y si hay varios jugadores?) o las estrategias (¿Y siguen siendo estrategias óptimas?)

Tras la inicial lluvia de ideas, cada grupo elige una o varias de las modificaciones, le pone nombre a su nueva versión y completa la ficha, enfatizando sus aportes a estas dos preguntas *¿Es así más divertido? ¿Desarrolla las mismas capacidades?*

En una puesta en común final se discuten las ventajas e inconvenientes de las nuevas versiones, comparándolas con la original y analizando el valor que aportan las nuevas ideas. El proceso creativo cobra sentido tanto para obtener las respuestas como al formular las preguntas, aunque no todas tengan en principio un enfoque matemático. Os proponemos que lo practiquéis en relación a un juego alejado de las matemáticas:

¿Qué pasaría en un partido de fútbol en el que, en vez de dos equipos, juegan tres equipos a la vez? ¿Cómo sería el campo de juego? ¿Qué sería un saque de esquina? ¿Y si se jugase con dos balones a la vez? ¿Cuántos jugadores habría? ¿Cómo se organiza el calendario de una competición para 20 equipos? ¿Qué distribución de jugadores sería óptima en el campo?

Os animamos a desarrollar algunas de las variaciones. Por ejemplo, con un campo de fútbol triangular, cuáles deben ser las dimensiones, dónde colocar las porterías, las áreas, los saques de esquina, los jugadores, qué tamaño y forma puede/debe tener el balón…

1. https://www.ted.com/talks/ken_robinson_says_schools_kill_creativity

Figura 2. Dos tarjetas de Dobble. Extraído de https://jugamosuna.es/tienda/11/dobble.html

Buscad un nombre y ya habéis reinventado uno de los juegos. ¿Es así más divertido? ¿Desarrolla las mismas capacidades?

Un segundo paso que puede favorecer el proceso creativo es “mezclar”. Consiste en seleccionar dos o más juegos y adaptar los elementos de uno en el otro. Hay que valorar si el aporte de uno enriquece la esencia del otro. Añadirle información extra a un puzzle, quizás le elimine interés. Pueden ser juegos cercanos en cuanto a las destrezas que requieren o totalmente diferentes. Por ejemplo, en el juego de Pictionary un jugador tiene que “dibujar” algo para que los compañeros lo acierten. Tiene que hacerlo sin hablar, luego la competencia de comunicar es totalmente diferente a la oral del Tabú. ¿Qué resulta de la mezcla entre el Tabú y el Pictionary? Por ejemplo, se puede jugar al Pictionary incluyendo unos dibujos tabú que no se pueden utilizar. ¿Y jugar al Tabú incluyendo dibujos? ¿Qué cambia en la versión del Tabú de geometría que presentamos al principio?

Os animamos a practicar las mezclas, por ejemplo a partir de vuestros dos juegos favoritos, como las reglas del baloncesto al fútbol, o las del Comecocos al ajedrez, que lo convierten en un interesante toro topológico. Aparentemente hay mezclas imposibles, pero nos gustaría terminar planteando un reto a partir de una curiosa mezcla.

El Dobble es un juego de mesa con un diseño aparentemente sencillo basado en contenidos matemáticos más complejos. Son 55 cartas circulares, cada una con 8 dibujos diferentes. La genialidad del juego es que entre dos cartas cualesquiera hay únicamente un objeto en común (en la Figura 2, solo la llave). Esa característica es la que se usa para proponer diferentes versiones en las que hay que encontrar el objeto común de tu tarjeta con otra.

Esta propiedad no es nada trivial y, su construcción está basada en modelizar las cartas mediante las posibles intersecciones de rectas en el plano, e incluso en el plano proyectivo. Una cualidad que favorece el juego es la discriminación visual, por lo que podría favorecer únicamente la componente de visualización en el sentido espacial. Para introducir otras componentes relativas a movimientos o conceptos matemáticos, ¿mezclamos el *Dobble* con el Tetris? ¿Es posible diseñar las tarjetas para jugar al Dobble con

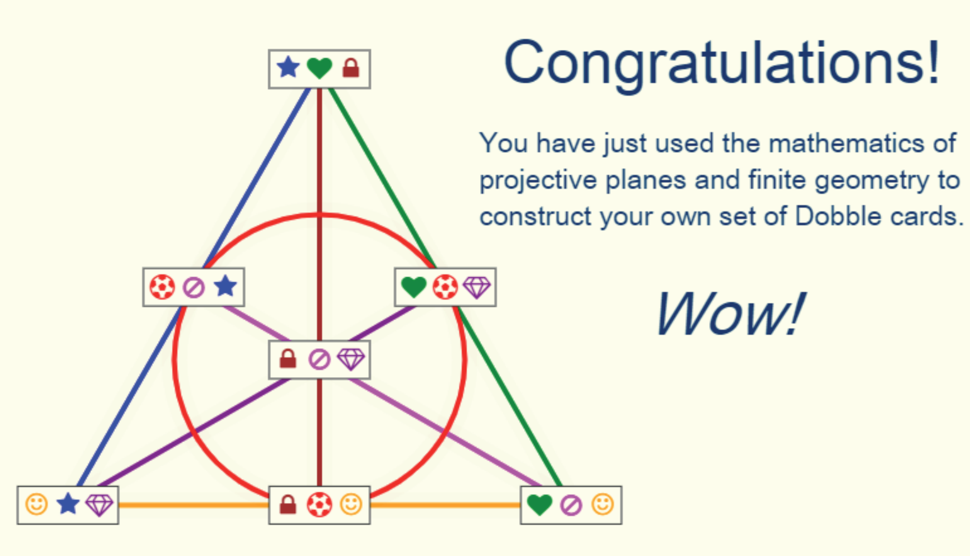


Figura 3. Modelo para obtener tarjetas de Dobble con tres elementos. Extraído de http://thewessens.net/ClassroomApps/Main/finitegeometry.html?topic=geometry&id=19

los dibujos de las piezas del Tetris? Se necesitan siete objetos para hacer tarjetas con tres dibujos cada una (Figura 3). ¿Cuántas fichas distintas tiene el Tetris? ¿Es una curiosísima coincidencia? ¿Es más divertido que el original? Parece que no, hay pocas tarjetas, pero se podrían aumentar los dibujos en cada tarjeta y nombrarlos. ¿Qué ocurre si utilizamos Pentominós, Hexaminós? ¿Qué "eneminós" nos interesa utilizar para tener ocho dibujos en las tarjetas?

Sintetizando todas las ideas, destacamos dos elementos importantes en el esquema propuesto. El papel del profesor es el de plantear muchas y buenas preguntas, utilizando el juego para contextualizar los contenidos matemáticos, con lo que aporta un enfoque funcional para que el aprendizaje sea más significativo. El estudiante debe encontrar las respuestas y, además de jugar, profundizar en el análisis y gestionar el juego, no limitándose a adoptar una postura pasiva de quien hay que entretener. Estas pueden ser las reglas del juego.

REFERENCIAS

Ausubel, P. (1963). *The psychology of meaningful verbal learning*. New York: Grune & Stratton.

Flores, P., Ramírez, R. y del Río, A. (2015). Sentido espacial. En P. Flores y L. Rico (Coords.), *Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en Educación Primaria* (pp. 127-146). Madrid: Ediciones Pirámide.

Flores, P., Ramírez, R. y Ruiz-Hidalgo, J.F. (2016). Variación matemática de juegos de ingenio. *Actas del XVI Congreso sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.*

Matemáticas ni más ni menos. SAEM THALES. Jerez de la Frontera, Cádiz. Recuperado el 5 de diciembre desde https://thales.cica.es/xviceam/actas/pdf/ta09.pdf

Ramírez, R. y Flores, P. (2016). Planificar el enriquecimiento para alumnos de alta capacidad matemática: reposo curricular. *Suma: Revista sobre Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas*, *83*, 33-41.

Ramírez, R., Flores, P., Ruiz-Hidalgo, J. F. y Fernández-Plaza, J. A. (2016). Modificación de juegos para el diseño de tareas. *Actas del XVI Congreso sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Matemáticas ni más ni menos*. SAEM THALES. Jerez de la Frontera, Cádiz. Recuperado el 5 de diciembre desde https://thales.cica.es/xviceam/actas/pdf/ta05.pdf

Werbach, K.& Hunter, D. (2012). *For the Win: How Game Thinking Can Revolutionize Your Business*. Wharton Digital Press, Philadelphia, PA.

Épsilon - *Revista de Educación Matemática* **2019, nº 101, 57-81**

Situaciones basadas en juegos de mesa para atender la elaboración del conocimiento matematico escolar

Enrique Carmona
Universidad de Cádiz

José Mª Cardeñoso
Universidad de Cádiz

Resumen: *En este artículo promovemos que el profesor realice un replanteamiento de su actuación, que le haga profundizar en su conocimiento, empleando juegos de mesa en clase. Comenzamos por aclarar qué entendemos por replanteamiento del profesor. Luego describimos enseñanzas basadas en juegos de mesa, atendiendo a tres momentos, al planificar, durante la actuación con los alumnos y también para orientar hacia la evaluación los logros relativos al conocimiento matemático de referencia.*
Palabras Clave: *Repensar el papel docente. Principio lúdico. Juegos de mesa.*

Situations based on table games to attend the elaboration of school mathematical knowledge

Abstract: *In this article, we encourage the teacher to rethink his performance, to deepen his knowledge, using board games in class. We begin by clarifying what we understand by rethinking the teacher. Then we describe lessons based on board games, attending to three moments, when planning, during the performance with the students and also to guide towards the evaluation the achievements related to the mathematical knowledge of reference.*
Keywords: *Rethink the teaching role. Playful principle. Table games.*

INTRODUCCIÓN

Vamos intentado dibujar un camino para repensar el uso profesionalizado del juego en el aula de matemáticas, indicando cuestiones potencialmente útiles para sacarle partido educativo y formativo. Partimos de conceptualizar el conocimiento profesional del profesor de matemáticas para pasar por recuperar diferentes matices que al principio del juego se le ha dado a lo largo de la historia educativa. Posteriormente mostramos ciertas dudas sobre la gamificación, para acabar centrándonos en ilustrar ciertos momentos decisivos para el uso del juego de mesa en el aula de matemáticas, desde nuestro conocimiento como formadores de profesores de matemáticas. Pasamos posteriormente a indicar ciertos aspectos a plantear antes de llevar un juego al aula, otros que tienen que ver con la planificación y gestión del mismo, para acabar dibujando ciertos aspectos a considerar para poder llegar a institucionalizar el saber matemático de referencia, intrínseco a la estructura de la tarea propuesta con los juegos.

En el seno de una escuela cada vez más alejada de las modas sociales, con currículo anclado en conocimientos y estándares de evaluación, ¿qué hacer como profesor de matemáticas? Seguramente sea imprescindible repensar el papel del profesor respecto de la enseñanza y aprendizaje del conocimiento matemático y decidir cuáles son los principios metodológicos que asumimos como docentes. Cada docente, debiera afrontar la necesidad de analizar y reflexionar sobre su papel como profesional de la educación matemática.

Claramente el devenir de los tiempos hace que se pierda la proximidad al aprendiz y a la información sobre sus gustos, tan alejados de los que tuvimos a su edad, pero también de los que comprendíamos al principio de nuestra carrera como docentes, cuando las circunstancias permitían "robar" al alumno sus intereses en el patio del colegio. También los tiempos han cambiado y hace unos años era, potencialmente sencillo, sorprender al aprendiz, en un mundo carente de casi todo y no sobredotado como el actual.

CONTEXTUALIZACIÓN

Hoy en día aparecen ciertas perspectivas que intentan ayudar a reentender los focos de interés de los problemas docentes. Así acaparan interés las inteligencias múltiples o la neurocognición, tal vez porque existe una renovada pretensión de acercarnos a reentender el aprendizaje del alumno. Si se enfatiza la perspectiva feminista o la sostenibilidad curricular debe ser porque se está interesado en el para qué enseñar. Por ello, se requiere que aparezcan nuevos artilugios, tecnologías o instrumentos con los que enseñar, que van retomando viejos principios del aprendizaje, aparentemente con nuevas caras, para reconceptualizar lo que significa enseñar y la trascendencia que posee su metodología cargada de técnicas alternativas.

Podemos convenir que ya hace demasiado tiempo, el trabajo individual del aprendiz se puso en valor, pero no es menos cierto que ha sido creciente el interés por el trabajo compartido. Conocemos la importancia de la implicación en el aula y que la motivación conductual es cada vez menos oportuna; reconocemos la difícil tarea de trabajar en pequeño grupo, pues no llegamos a conseguir que sea cooperativa esta forma de elaborar el conocimiento y cada vez, nos sentimos más incapaces, de impedir que los buenos principios de la enseñanza se vayan pervirtiendo. Y bajando de nivel, parece que desde siempre compartiéramos el interés por el cálculo mental, la automatización operatoria o la estimación, pero francamente, todos somos conscientes de no conseguirlo.

Hoy en día sabemos que el estudiar no es memorizar, algoritmizar o ejercitar tareas necesarias, para el devenir de la matemática escolar, pero ¿acaso somos capaces de conseguir algo más? Y encima, somos conocedores de que ello no garantiza la elaboración del conocimiento matemático escolar requerido (Azcárate y Cardeñoso, 1994). El currículo históricamente fijaba nociones científicas, luego contenidos, para posteriormente denotar procedimientos y actitudes, valores y normas. Y ahora, el intento se va dirigiendo hacia un currículo competencial, con pruebas y estándares para su evaluación. El mundo competencial proviene de la optimización de la empresa neoliberal, por lo que, en una primera lectura, solo acrecienta un talante conductual. Si, además, a esto se le une, el sobreentendido de que una competencia es una capacidad en acción y, por tanto, caracterizada en muchos casos con indicadores conductuales, cabe preguntar si para el docente realmente las propuestas curriculares han avanzado en algún sentido que le ayude a enseñar.

Seguramente por lo anterior, y mucho más, vemos cómo docentes que mantienen su compromiso adquirido como profesional de la educación matemática, acogen con verdadero entusiasmo cualquier opción emergente. Son estos los que nuevamente se lanzan a sacrificar su tiempo, afrontando aparentes modas novedosas, con la expectativa de que, su talante innovador, le permita resolver sus problemáticas docentes. Por nombrar alguna de las nuevas propuestas, tenemos la llamada *flipped classroom* o clase invertida, la elaboración telemática de tareas a tiempo real, la *gamificación* o juego con recompensa, el uso de programas en red, de la Tablet o el móvil en el aula y, bajando a nuestro campo matemático, enseñar la aritmética mediante un aparente nuevo algorítmico como es el ABN. Pero, reconozcamos que sin saber muy bien a dónde llevarán estas entradas de aire fresco, lo que si denotan es que estos docentes innovadores se siguen creyendo capaces de enseñar matemáticas y lograr que esta se aprenda.

Claro está, estos movimientos innovadores buscan adaptar los procesos de intervención en el aula a los nuevos tiempos. Actualmente en las aulas surgen nuevas situaciones como, atender a la multitarea, manejar el espacio y el tiempo, utilizar *apps* para los dispositivos móviles, tener accesibilidad inmediata a la información, etc.; situaciones que el docente ha de saber controlar y que son, entre otras, las posibles causas de la inadaptación del docente, que usualmente no es nativo digital, para poder y/o querer, paulatinamente, ir incorporando estas novedades a su metodología. Son tantas las posibilidades que cada día se abren y tan rápida su propagación que tal vez sea el momento, como docentes, de reflexionar y pensar sobre ¿qué hacer para que todo esto pueda ayudar verdaderamente en nuestras aulas?

El dominio de estas nuevas propuestas metodológicas, que pueden promover una mayor implicación del alumnado en su aprendizaje matemático, conllevan a su vez, un significativo esfuerzo por parte del docente. Son necesarias muchas horas para poder llegar a utilizar con éxito y con sentido todas esas nuevas tecnologías, programas y aplicaciones. Tiempo que el docente ha de compaginar con el necesario análisis y reflexión sobre su propia práctica.

Nuestra idea es presentar a modo de reflexión personal y provocadora las posibilidades de introducir en el aula situaciones nuevas vinculadas a juegos de mesa, comunes en sus juegos sociales y potencialmente útiles en las aulas.

REPLANTEAMIENTO

Podemos pensar que los docentes deberían considerar y dominar en qué consiste el necesario conocimiento que requiere para ser competente como profesor de matemáticas. Pero las diferentes dimensiones de la naturaleza compleja del conocimiento del profesor de matemáticas analizadas y caracterizadas por números investigadores (Shulman, 1986; Broome, 1988; Fennema, y Franke, 1992; Blanco, 1997; Azcárate, 1997; Llinares, 1998; Azcárate, 1999; Cardeñoso, 2001; Ball, Thames y Phelps, 2008; Godino, 2009; Carrillo, Contreras, y Flores, 2013), pone en cuestión la posibilidad de los docentes de disponer de dicho dominio. Se representan como inabarcables para alguien que no lo tiene como foco de su trabajo formativo, es decir, alguien que no trabaja en la universidad, donde si es necesario construir estas síntesis.

Nosotros no sabemos ni podemos decidir dónde cada docente pone el acento, ni qué puede ser lo más reconfortante que puede afrontar cada profesor de matemáticas, ante sus problemas docentes. Pero sí podemos compartir nuestra experiencia. Una buena estrategia para abordar los problemas de la práctica, suele ser el preguntarse cuáles y en qué consisten dichos problemas, porque ello permite organizar un plan constructivo de desarrollo profesional, peculiar en cada caso. Analizar y reflexionar sobre las diferentes problemáticas que hemos de abordar como docentes, en cualquier nivel educativo, nos permite desarrollarnos como profesionales. Da igual por qué problema se empiece la andadura, pues en el viaje, por los que llamados *ámbitos de investigación profesional* (Porlán, Azcárate, Martín del Pozo, Martín Toscano y Rivero, 1996), encontraremos la creciente complejidad que nos permitirá madurar y evolucionar en nuestro saber profesional.

El camino de asumir constructivamente el propio desarrollo profesional no es corto ni sencillo, pero si se comparte, para hacer de ello una cuestión social, podemos asegurar que será satisfactorio. La experiencia, como aprendiz y docente, nos dice que solo aprende el que quiere, el que se cuestiona algo, el que se informa y piensa sobre ello, el que diseña ciertos planes, los pone en práctica y valora su aplicación. En definitiva, realizar un ciclo de reflexión constructivo en el que algo más conocemos, para alcanzar un nuevo punto de partida y, en suma, volver a comenzar la reflexión con nuevas cuestiones, como pudiera ser la relación percibida entre las actividades de la práctica de los profesores y los resultados de los estudiantes (Ingvarson, Meiers y Beavis, 2005).

Casi sin quererlo, debiéramos ir avanzando lentamente por estos interrogantes, que son importantes porque son los que nosotros podemos formular como docentes, con lo que iremos profundizando hacia nuevas preguntas y respuestas, según sea lo que vaya centrando nuestro interés.

Intentamos proponer algún ejemplo, para ir ilustrando situaciones concretas que nos pueden interesar al docente. Desde esa perspectiva, presentamos tres posibles focos de atención para reflexionar y de paso actualizar nuestro conocimiento: planificar la entrada en aula, gestionar dicho plan en la misma y al final, ser conscientes de qué ha ocurrido.

El análisis del proceso puede ser la base para afrontar el replantear las futuras planificaciones de cada temática a tratar.

GAMIFICACIÓN, ALTERNATIVA POSIBLE AL JUEGO

Como ya se dijo, intentaremos hacer diversas ilustraciones sobre los diferentes aspectos que hemos visto que importan en los momentos de antes, durante y después de la enseñanza de las matemáticas. Una propuesta que está actualmente en auge es lo relativo a la integración en el aula de matemáticas de la gamificación[1] de Zichermann y Cunningham (2011). Esta propuesta suele invocar a promover situaciones relacionadas con retos, recompensas, competitividad, progresos, reconocimiento, altruismo y diversión con el propósito de influir en la conducta psicológica y social del alumnado en pro de involucrarles en procesos de aprendizaje e influir en su predisposición psicológica a resolver problemas (Kapp, 2012).

Sin considerar las ideas subyacentes a la gamificación, sí valoramos los ambientes lúdicos y, por ello, nos vamos a remitir a situaciones más básicas o tradicionales, como son los juegos de mesa actuales y sus potenciales transformaciones para el aula de matemáticas. Por tanto, para comenzar, recapitulemos brevemente, al respecto del juego como actividad y su potencialidad educativa.

Conocemos que el *principio del juego* es una constante en algunas de las teorías sobre el aprendizaje matemático. Nuestra intención no es realizar un relato de sus potencialidades, sino más bien ponerlo en valor y recordar que es un principio a considerar en cualquier tipo de escenario que diseñemos para enseñar matemáticas.

En una breve mirada atrás, vemos como autores de muy diversa formación analizan el papel del juego de diferentes perspectivas. Así, cabe recordar que, para Moritz Lazarus, en el siglo XIX, el juego es un sistema para recuperar energía cuando la necesitamos (Lazarus, 1883). En la misma línea, Karl Groos afirma que la naturaleza del juego es biológica y motor de desarrollo de habilidades y capacidades (Groos, 1902). Ya, en el siglo XX, Granville Stanley Hall, indica que el juego prepara al niño para desarrollar sus actividades en la etapa adulta (Hall, 1929). Diferentes visiones, pero, siempre valorando el juego como un instrumento vital del desarrollo humano.

El juego tiene un claro carácter propedéutico, en general y para el aula de matemáticas en particular. El propio Sigmund Freud considera que el juego, no solo es expresión de deseos inconscientes, sino que también tiene relación con experiencias reales que al niño le han resultado desagradables y así, satisfacer sus necesidades (Freud, 1908). Aunque será en la *teoría de la ficción* cuando Édouard Cláparède nos asegura que el juego, se convierte para el niño en un refugio, donde poder desarrollar sus deseos, cuando la realidad no se lo permite (Tabernero del Río, 1997). Y, por cerrar, recordar que Frederik Jacobus Johannes Buytendijk dice que, por su carácter impulsivo, el juego provoca una actitud emotiva ante la realidad, con una tendencia a la reiteración (Buytendijk, 1935).

1. Sobre Gamificación: http://www.ayudaparamaestros.com/2016/02/los-mejores-recursos-para-gamificar-tu.html

Es importante el juego, considerado como el trabajo de un niño, según decía Piaget (1982), constituyéndose en el motor de su aprendizaje y desarrollo; por otro lado, como afirma Vygotsky (1966), activa los aspectos afectivos, motivacionales y las circunstancias propias del sujeto, así como el motor de cada desarrollo en el aprendizaje.

Pero, también nos interesa el juego, por su relación con las estrategias de resolución de problemas, cuestión relevante ya para Jerome Bruner, sobre todo si posee interés contextual (Bruner, 2003). Para Henri Wallon, el juego permite el acceso y el dominio del campo simbólico (Wallon, 1974), que está desarrollado de forma muy interesante por Decroly y Monchamps (1983) y como comparte Ortega (1992), es un espacio de comunicación social y laboratorio de aprendizaje.

Admitido el potencial del juego como situación de aprendizaje y desarrollo, nuestro interés se centra ahora en analizar algunos juegos que nos permitan integrar en al aula de matemáticas nuevas formas de hacer y de pensar. Partimos de tener en cuenta la trascendencia que para la elaboración del conocimiento matemático posee la capacidad simbólica, que lleva a Piaget (1961) a enunciar el juego como de naturaleza simbólica y que es por tanto una conducta representativa que se organiza alrededor de reglas. Elkonin (1980) caracteriza esta misma cuestión como juego protagonizado, siendo estructuralmente idéntico al juego simbólico piagetiano.

Ahora debemos apoyamos para introducir el juego en el aula en las ideas ya clásicas aunque no por ello más conocidas, como por ejemplo las orientaciones de Dienes y Golding (1970) o Kamii y DeVries (1988) cuando incluyen el juego entre las fases o momentos metodológicos diferenciados para elaborar conocimiento matemático escolar, desde sus propuestas para enseñar de forma activa y manipulativa, llegando a afirmar por analogía, que el niño a través del juego, reinventa las matemáticas.

JUEGOS DE MESA ACTUALES

Cualquier docente que desee implementar una situación de aprendizaje de las matemáticas en el aula basada en un juego de mesa ha de buscar juegos que, por un lado, conecten con los intereses y gustos lúdicos de su alumnado, y que por otro lado, presenten verdaderas oportunidades para el aprendizaje de las matemáticas.

Dar respuesta a la primera premisa, encontrar juegos que empaticen con el interés lúdico del alumnado actual, nos conduce necesariamente a identificar qué juegos de mesa forman parte de las vidas y cultura de nuestro alumnado. Somos conscientes de que según se avanza en edad y en las demandas curriculares van perdiendo protagonismo el modelo lúdico y el principio del juego en la intervención educativa, alejándose de esa imagen del aula de infantil, donde los niños aprenden mientras juegan. Sin embargo, hay juegos y juguetes que atienden a los nuevos conocimientos, quizás más complejos y, por lo cual no se nos ocurre cómo o con qué trabajarlos para alcanzar la pretendida competencia matemática. Autores como Niss (2003) hacen aportes que pueden ser adaptados o solamente tomados como elemento de reflexión evaluativa del docente.

En pro de ayudar a encontrar algún juego de mesa que pudiera suscitar interés o que pudiera inspirar el diseño de una situación de aprendizaje recomendamos tres vías a través de las cuales se podrá saber qué se cuece en la renovada industria de los juegos de mesa. Una de las vías más impactantes es asomarse a alguno de los festivales, ferias y eventos de carácter nacional o internacional presentes en nuestra geografía, como el festival DAU, que en su edición de 2017 congregó a más de 14.000 asistentes en Barcelona. Otra opción sumamente interesante es acercarse a alguna de las asociaciones culturales presentes en cualquiera de las provincias españolas cuya finalidad no es otra que la de compartir y difundir el ocio a través de los juegos de mesa. La asociación cultural cordobesa *Jugamos tod@s*, por ejemplo, entre otras muchas cosas se encarga de la organización de uno de los eventos más importantes del sur de España, el "Festival Internacional de Juegos de Córdoba". Por último y no menos interesante son las numerosas tiendas especializadas, físicas y virtuales, que nos permiten conocer la oferta actual de juegos de mesa, como por ejemplo https://zacatrus.es/, donde cada juego es acompañado de un video tutorial en el que se presentan los aspectos más relevantes del juego y su dinámica y, que nos permitirá conformar una primera opinión sobre los juegos.

Dar respuesta a la segunda premisa, es decir, encontrar juegos de mesa que presenten verdaderas oportunidades para el aprendizaje de las matemáticas, creemos que es todavía una cantera de trabajo incipiente para los profesionales de la educación matemática. Disponer de dicha información implica explorar simultáneamente en las siguientes direcciones:

a) Seleccionar entre la vasta oferta de juegos de mesa actuales aquellos que a priori podrían tener un interés para el aprendizaje de las matemáticas.
b) Analizar en profundidad los juegos de mesa seleccionados en pro de identificar, describir y comprender su verdadero valor formativo para el aprendizaje de las matemáticas.
c) Diseñar e implementar situaciones de aprendizaje basadas en juegos de mesa que expriman la potencialidad lúdica del juego original y maximicen el potencial matemático.
d) Construir instrumentos que nos permitan evaluar las situaciones de aprendizaje basadas en juegos de mesa.

Una fuente significativa para analizar los juegos son los trabajos que futuros docentes elaboran al finalizar sus estudios. Así podemos encontrar una investigación bibliográfica del estado de la cuestión sobre la resolución de problemas en los juegos de mesa, en el trabajo presentado por Comas-Paredes (2016).

Para diseñar situaciones de aula podemos acudir a diferentes fuentes donde se presentan múltiples estrategias de incorporación a la enseñanza. Un aspecto importante es retomar juegos que en la historia dieron origen a diferentes conocimientos matemáticos, como por ejemplo en el campo estocástico (Jiménez Vargas, 2014) o su inclusión en procesos vinculados al trabajo por proyectos (Ochoa Ruiz, 2016). En la misma línea podemos analizar el trabajo de Márquez Troya (2014) que trata, de convertir el juego en el centro de la enseñanza a través de la estrategia de proyectos integrados, o cómo Moreno Grosso (2017) focaliza en el juego, mediante la técnica de trabajo por talleres para el desarrollo del trabajo por proyectos. También podemos analizar la inclusión del juego en el trabajo por rincones (Piñero Sáez, 2018). Todos estos trabajos nos dan ideas para incluir el juego en el aula de matemáticas.

PLANIFICAR ANTES DE ENSEÑAR

El punto de partida es detectar qué habilidades matemáticas se movilizan cuando jugamos a un juego de mesa, las referentes al cálculo mental, al razonamiento probabilístico, a la visualización espacial, al razonamiento lógico, etc. como respuesta a las demandas propias del juego o a la interacción con el resto de jugadores. Creemos que el paso de una situación lúdica empleando un juego de mesa, a una situación de aprendizaje, basada en juego de mesa, pasa necesariamente por un proceso reflexivo el cual implica que el docente se cuestione aspectos relativos a la planificación, a la gestión y a la evaluación. Y que, además, dicha reflexión se haga a la luz del interés docente, del contexto de actuación y de los destinatarios.

Es por ello que nos gustaría compartir algunas reflexiones acerca del rol docente en el diseño, implementación y evaluación de las situaciones de aprendizaje basadas en juegos de mesa. En cuanto a la ardua tarea de explorar el potencial formativo de los juegos para aprender matemáticas creemos que Chamoso, Durán, García, Lalanda y Rodríguez (2004) realizan un análisis muy ilustrativo de cómo a través de los juegos se pueden movilizar numerosos contenidos del currículum de matemáticas de la ESO e implicar la utilización de estrategias propias de la resolución de problemas. Uno de los aspectos que más despierta nuestra curiosidad e interés por los juegos de mesa subyace en la similitud que encontramos entre ellos y la resolución de problemas. Concebir un juego de mesa como una suerte de resolución de problemas, nos conduce a establecer una comparativa natural entre las demandas de un juego de estrategia y las de la resolución de problemas, donde se puede apreciar que sus etapas son equiparables, cuestión ya evidenciada por Gómez Chacón (1992) o ejemplificada por Edo, Baeza, Deulofeu y Badillo (2008). (tabla 1).

Tabla 1. Comparativa de resolución de problemas y juegos

Comprensión del problema	**Comprensión del juego**
¿Qué pide?	¿Qué requisitos?
¿Qué datos tengo?	¿Cuáles son las acciones posibles?
¿Qué necesito?	¿Cuándo se gana?
¿Conozco algún problema análogo?	¿He jugado algún juego similar
Ahora establezco conjeturas	Ahora elaboro estrategias
Y examino las conjeturas	Y examino estrategias
Ejecuto un plan	Juego
¿Se trata de una estrategia aplicable en general?	¿Funciona la estrategia ganadora bajo cualquier condición?
¿Se puede modelizar la estrategia para cierta tipología de problemas?	¿Es posible su modelización para cierto tipo de juegos?

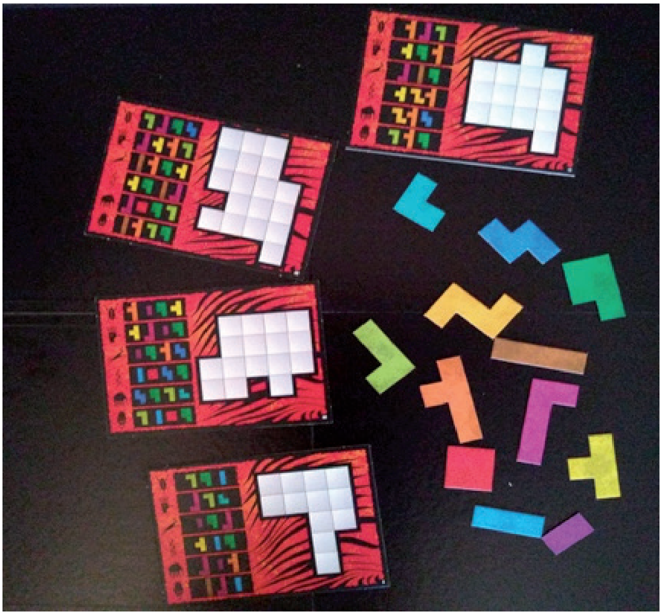


Figura 1. Superficies y fichas.

Planteamos que uno de los requerimientos indispensables para diseñar situaciones de aprendizaje basadas en juegos de mesa que expriman la potencialidad lúdica del juego y maximicen el potencial matemático es comprender qué problema plantea el juego y por qué dicho problema posee un interés matemático, es decir, dilucidar la naturaleza matemática del propio problema.

Para ir ejemplificando mejor nuestras reflexiones vamos a ilustrar y describir imágenes ligadas a algunos juegos de mesa que consideramos de interés. Las seleccionamos porque ya hemos tenido la oportunidad de implementarlas en la formación inicial del profesorado de Educación Primaria e Infantil, y a partir de los cuales se pueden diseñar situaciones de aprendizaje que movilicen conocimientos y habilidades matemáticas de distinta índole.

Juego de mesa "Ubongo"

En el juego de mesa Ubongo[2] en su versión de dos dimensiones, cada jugador dispone de 10 superficies cuadriculadas y 12 fichas o polimինós como las que se muestran en la figura 1, y la dinámica de juego enfrenta a los jugadores al problema de pavimentar distintas superficies empleando combinaciones de 3 o 4 poliminós, dependiendo del nivel

2. Ubongo es un juego de mesa creado por Grzegorz Rejchtman y editado por la empresa Devir. El lector puede visualizar los materiales que componen el juego, sus reglas, objetivo y entrar en contacto con la dinámica de juego en la siguiente dirección https://zacatrus.es/ubongo.html

Figura 2. Fauna.

de dificultad, disponiendo para cada superficie de un tiempo aproximado de un minuto y medio.

El interés que presenta Ubongo radica esencialmente en las oportunidades de aprendizaje que se generan como respuesta a las demandas del juego y que el docente puede manejar como un detonante idóneo para explorar conocimientos vinculados al ámbito espacial-geométrico, como por ejemplo la simetría y los movimientos en el plano y el espacio. No menos interesante resulta las exigencias que el juego establece sobre los jugadores en cuanto a las habilidades de visualización inherentes a la formación y procesamiento de imágenes visuales (Del Grande 1990, citado por Gutiérrez, 1991).

Juego de mesa "Fauna"

En el juego de mesa Fauna[3] la partida transcurre sobre un tablero (ver figura 2) en el que aparece un mapa del mundo con sus zonas terrestres y marítimas más representativas y tres escalas correspondientes a dos magnitudes (masa, longitud y longitud de la cola). La dinámica del juego enfrenta a los jugadores a la necesidad de adivinar en cada ronda el número de regiones en las que se encuentra un animal en su entorno salvaje, su masa,

3. Fauna es un juego de mesa creado por Friedemann Friese y editado por la empresa Devir. El lector puede visualizar los materiales que componen el juego, sus reglas, objetivo y entrar en contacto con la dinámica de juego en la siguiente dirección https://zacatrus.es/fauna.html

Figura 3. Cartas alto voltaje.

longitud total y longitud de la cola. Cada jugador dispondrá de 7 cubitos para realizar apuestas sobre el tablero, recibiendo puntos por los cubitos que hayan sido colocados de forma correcta y perdiendo aquellos cubos que se hayan empleado incorrectamente.

El interés que presenta Fauna, radica esencialmente en las oportunidades de aprendizaje que se generan como respuesta a las demandas del juego y que el docente puede manejar como un detonante idóneo para explorar conocimientos vinculados al ámbito de las magnitudes y su medida, como por ejemplo son las estrategias de aproximación y estimación de las magnitudes masa y longitud en el contexto del mundo animal. No menos interesante resulta las exigencias que el juego establece sobre los jugadores en cuanto a la habilidad de apostar atendiendo a conocimientos estocásticos que les permitan obtener el mayor número de puntos posibles arriesgando la menor cantidad de cubitos.

Juego de mesa “Alto Voltaje”

En este juego de mesa cada jugador dispone inicialmente de 18 cartas, 4 de ellas estarán de inicio en sus manos y por tanto serán visibles y, las 14 restantes, se situaran bocabajo formando un mazo en frente de cada jugador. En medio de todos los mazos se situará una carta bocarriba que permitirá dar comienzo a la partida. Cada una de las cartas posee un valor comprendido entre 1 y 10 escrito en las esquinas, así como un número central que denominaremos modificador, comprendido entre 1 y 3, acompañado con ±, como signos (ver figura 3). La dinámica del juego enfrenta a los jugadores a deshacerse de todas sus cartas antes que el resto de los jugadores, para ello deberán buscar, entre sus cartas disponibles, una carta que coincida con el resultado de sumar o restar el modificador al valor numérico de la carta.

En este caso el interés que presenta Alto Voltaje[4], radica esencialmente en las oportunidades de aprendizaje que se generan como respuesta a las demandas del juego y que puede manejar el docente como un detonante idóneo para explorar conocimientos vinculados al ámbito numérico-aritmético, en concreto referentes al cálculo numérico mental de las estructuras aditivas. Creemos que el diseño original del juego es interesante

4. Alto Voltaje es un juego de mesa creado por Maureen Hiron y editado por la empresa Mercurio. El lector puede visualizar los materiales que componen el juego, sus reglas, objetivo y entrar en contacto con la dinámica de juego en la siguiente dirección https://zacatrus.es/alto-voltaje.html. Si buscas un juego de mesa que permita trabajar el cálculo mental de las estructuras aditivas y multiplicativas en niveles educativos más elevados, te recomendamos el juego de mesa Summy (https://zacatrus.es/summy.html), creado por Corné van Moorsel y editado por la empresa Morapiaf.

para edades comprendidas entre 6 y 8 años ya que genera oportunidades que permiten al alumnado avanzar hacia una aritmética formal, abandonando ciertas estrategias como el recuento, el sobreconteo y deconteo[5] y memorizar algunos hechos numéricos básicos (N+1, N+2, N+3 y N+N) en un entorno lúdico.

Son muchas las cuestiones que pueden ayudar a profundizar en la comprensión de un juego de mesa con la intención de indagar en su potencial formativo para las matemáticas. Por ello, y tras este primer acercamiento que nos permite identificar los problemas matemáticos que deben enfrentarse como respuesta a las propias demandas de algunos juegos, queremos compartir algunas de las cuestiones que pueden orientar la reflexión y facilitarnos el diseño de una situación de aprendizaje auténtica en Cáceres, Chamoso y Cárdenas (2015), que pueden orientar la reflexión y facilitarnos el diseño de una situación de aprendizaje auténtica, basada en un juego de mesa.

Aparte de indagar en la comprensión de elementos primarios propios del juego como las consignas que reciben los jugadores, las reglas que deben respetar y el problema que tienen que enfrentar, resulta interesante atender a las siguientes cuestiones:

- ¿Qué decisiones son las que puede tomar un jugador durante la partida? ¿Existe algún grado de incertidumbre en cuanto a las decisiones a tomar? ¿Qué impacto tiene el azar en las posibles decisiones que se pueden tomar?
- ¿Qué estrategias puede emplear un jugador como respuesta a las demandas del juego? ¿Qué impacto tiene el azar en las posibles estrategias que se puedan emplear? ¿Existe algún grado de incertidumbre en cuanto a las estrategias a emplear? ¿Qué estrategia/s conducen al éxito en el juego? ¿Por qué? ¿Hay alguna estrategia más eficiente que el resto? ¿Qué estrategias se van a revelar como insuficientes o ineficaces? ¿Por qué? ¿Cómo informa el juego acerca de la validez de las estrategias que ponen en marcha los jugadores? ¿Existe alguna estrategia que me asegure la victoria? ¿Y qué decir de las tácticas?
- ¿Qué dificultad puede encontrar un jugador? ¿Podemos modular el grado de dificultad del juego? ¿Qué errores puede cometer un jugador? ¿Qué conflictos cognitivos pueden darse? ¿Cuáles son sus concepciones asociadas?

Parece obvio que un requisito innegociable es que exista algún grado de incertidumbre alrededor de las decisiones, acciones y estrategias que el jugador debe tomar durante el transcurso de la partida, es decir, debe ser un juego de estrategia cuya resolución dependa fundamentalmente de las decisiones del sujeto.

---

5. Antes de asimilar el concepto de suma y resta el niño puede afrontar situaciones aritméticas simples poniendo en marcha estrategias tales como el recuento, el deconteo y el sobreconteo, que se edifican sobre la capacidad de seriar. Estás estrategias propias de la etapa de Educación Infantil se irán abandonando progresivamente en los primeros cursos de Educación Primaria en la medida que los niños se enfrenten con situaciones aritméticas en las que dichas estrategias se revelen como insuficientes, ineficaces o poco económicas y podrán sustituirse por estrategias aritméticas formales como el cálculo mental y/o por la memorización de hechos numéricos.

Recuento (2+5): El niño realiza un conteo verbal desde el 1.

Sobreconteo (2+5): El niño realiza un conteo verbal desde el primer sumando (2, 3, 4, 5, 6 y 7) que denominaríamos sobreconteo lento, o bien desde el sumando mayor (5, 6 y 7) que denominaríamos sobreconteo rápido.

Deconteo (5-2): El niño realiza un conteo verbal hacia atrás (5, 4, y 3).

Así por ejemplo, en el juego de mesa Ubongo, uno de los conflictos cognitivos más habituales y significativos que hemos observado tanto en contextos de formación del Maestro de Educación Primaria, como en un programa extracurricular para alumnado de altas capacidades (12-18 años), es que gran parte de los sujetos empleaba en la implementación de sus estrategias iniciales tanteos que integraban distintas habilidades de visualización, junto con movimientos en el plano que implicaban traslaciones y giros de los distintos poliminós. Esta estrategia de base se mostraba ineficaz en la mayoría de las situaciones para sorpresa del jugador, debido a que en muchas de las situaciones de juego es poco probable que la disposición inicial de los poliminós sobre la mesa permita teselar la superficie empleando únicamente movimientos en el plano.

Observamos que el alumnado empleaba los poliminós tal cual se disponían sobre la mesa al sacarlos de la bolsa, realizando únicamente transformaciones en el plano y considerando que no existía ningún movimiento en el espacio relevante para su propósito. Comprender que debido a la simetría de algunas de las piezas o poliminós, realizar una rotación espacial de 180º de las mismas era determinante para poder pavimentar porciones de la superficie distintas, constituía en sí mismo un punto de inflexión que permitía pasar al alumnado de una estrategia inicial ineficaz a una estrategia considerablemente más eficiente para lograr la teselación deseada.

Si analizamos otro de los juegos presentados, el juego de mesa Fauna, una de las dificultades que encuentran los jugadores radica en tener que estimar cantidades de masa y longitud de la cola de animales desconocidos para ellos, y además hacerlo a través de una representación gráfica de los mismos. Esto les obliga a poner en marcha estrategias de selección de patrones de comparación presentes o evocados, que les permitan realizar previsiones razonables. Otra dificultad emerge cuando los jugadores tienen que estimar cantidades de medida que presentan un orden de magnitud para el que no poseen experiencias previas de medida, como por ejemplo la longitud de un *cachalote*, la masa de un *colibrí* o la longitud de la cola de un *loris lento*. Otra que puede emerger está ligada al conocimiento y uso incorrecto de las unidades de medida del SMD. El juego permite emplear dos niveles de dificultad, existiendo cartas con el borde verde con animales más sencillos y cartas con el borde negro con animales más exóticos. Hay 180 cartas con 360 animales, y en una partida se suelen emplear entre 10 y 15 cartas de animales, por lo que se pueden seleccionar animales que permitan modular con mucha flexibilidad su dificultad.

En el caso del juego de mesa Alto Voltaje, se pueden señalar dos momentos del juego relevantes por implicar la toma de decisión de los jugadores. El primer momento acontece cuando un jugador tiene que elegir cuál carta descartar. Ante tal cuestión hemos encontrado dos tipos de decisiones:

a) Deshacerse de la primera carta que encuentra, ignorando la existencia de otra alternativa, o elegir una al azar.

b) Siendo consciente de la existencia de dos o más alternativas de descarte elegir aquella que le permite deshacerse consecutivamente del mayor número de cartas posibles.

Aunque la segunda opción se manifiesta a medio y largo plazo como más eficiente que deshacerse de una carta al azar, no garantiza la victoria *a priori*, ya que en mayor medida dependerá de las estrategias que ponga en juego para identificar qué carta descartar y de la rapidez con la que lo haga.

El segundo momento acontece cuando en el devenir de la partida un jugador no posee entre sus cartas ninguna que pueda descartar. El jugador no tiene la obligación de robar, por lo que tendrá que decidir si esperar que un jugador descarte una carta, con el inconveniente de dar tiempo para pensar a los contrincantes y que estos puedan descartase de varias cartas consecutivas, o por el contario, robar tantas cartas como desee. Esta decisión no es baladí, y confrontará a los jugadores a plantearse si robar o esperar. Hemos observado que a partir de un número de cartas visibles los jugadores ya no poseen la capacidad de implementar estrategias que tengan en cuenta la totalidad de cartas que poseen, y que los jugadores expertos son conscientes del número máximo de cartas que pueden manejar con soltura.

Para concretar una propuesta de aprendizaje basada en un juego de mesa entendemos que cada una de las cuestiones que nos hemos planteado hasta ahora son necesarias o cuanto menos enriquecedoras, pero de ninguna manera son suficientes. Es necesario dar un paso más, poner estas reflexiones al servicio del interés docente, del contexto en el que se va a realizar la implementación y de los destinatarios.

Para ello es necesario atender a las siguientes cuestiones: ¿Qué modificaciones puedo realizar sobre los componentes materiales, las reglas y consignas del juego original para diseñar una propuesta de aprendizaje de las matemáticas? ¿Qué intención didáctica subyace en cada una de estas modificaciones? ¿Qué aportan dichas modificaciones para el aprendizaje de las matemáticas? ¿Afectan dichas modificaciones al carácter lúdico del juego? ¿En qué medida?

Las diferentes reflexiones e ideas presentadas nos pueden ayudar a conformar una imagen de la futura implementación de este tipo de situaciones. Ello no permite pensar acerca de todas las cuestiones que pudieran emerger en su desarrollo y, a su vez, nos permite prever las posibles oportunidades de aprendizaje, las estrategias que puede poner en marcha el alumnado para solventar la demanda del problema. No solamente creemos que no existen atajos para este propósito, sino que además consideramos que sin este esfuerzo reflexivo previo no haremos otra cosa que trasladar una situación lúdica a la clase.

La variedad de objetivos didácticos, de contextos y de destinatarios hace que coexistan muchas formas diferenciadas de exprimir el potencial matemático de los juegos de mesa. Sin entrar en su caracterización, resaltamos ciertos ejemplos que ilustran algunas de las estrategias que se podrían poner en juego en virtud del fin o propósito educativo:

- Si nuestro propósito es que las demandas del juego generen en el alumnado la necesidad de aplicar un conocimiento (habilidad, técnica, destreza…), que ya poseen, en un contexto nuevo donde la aplicación de dicho contenido no es evidente, entonces tendríamos que modificar las reglas y consignas del juego de tal manera que permita valorar el saber y saber hacer implicado.
- Si nuestro propósito es que las demandas del juego generen la necesidad de aplicar habilidades, técnicas, destrezas incipientes, estos juegos deberán ser un entorno donde practicar dicho saber, y estaremos estabilizando su estima y proceder.
- Si nuestro propósito es que las demandas del juego generen en el alumnado un problema, entendemos que estamos en un contexto de indagación escolar, que implica situaciones donde se promueva que los aprendices sean capaces, de manera

autónoma, de llegar a saber qué requieren, poder encontrarlo, entenderlo y de aplicarlo de forma eficaz.
- Si nuestro propósito es que las demandas del juego generen la necesidad en el alumnado de construir un nuevo conocimiento, hemos de disponer de un cierto itinerario de progresión respecto a esos nuevos saberes novedosos. Para ello hay que tener preparadas ciertas analogías para que los alumnos puedan intuir las claves de superación del mismo y orientarlos en el proceso de resolución y búsqueda, sin interferir ni darles la solución esperada.

GESTIONAR EN EL AULA

Nos parece relevante remarcar que cuando diseñamos una situación de aprendizaje basada en un juego de mesa lo hacemos porque creemos que las preguntas que el propio juego va a trasladar al alumnado son relevantes, y porque creemos que le hará bien al alumnado enfrentar los problemas de naturaleza matemática que se van a movilizar en el trascurso del juego. Sin embargo, nos parece necesario matizar que a pesar de que todo docente, en mayor o menor medida, posee preguntas que considera relevantes para el alumnado y conoce problemas que cree le harían bien enfrentar, creemos que no es suficiente plantear dichas preguntas o problemas para que se produzca un aprendizaje significativo, como manifiesta Brousseau (2002, p. 67) “no basta *comunicar* un problema a un alumno para que ese problema se convierta en su problema y se sienta el único responsable de resolverlo”.

El ideal al que el docente tiene que converger es a que el alumnado se apropie de las preguntas y/o problemas que emergen como demanda del juego de mesa y que se implique en su resolución de la manera más independiente posible de las intenciones didácticas del propio docente. A la difícil labor docente de provocar la interacción autónoma e inmotivada del alumnado con el juego la llamamos devolución (Brousseau, 2002; Bosch Chevallard y Gascón, 2000).

Llamamos actos de devolución a todo lo que el docente, conscientemente e intencionadamente, comunica o se abstiene de comunicar para que el alumnado haga suyas las preguntas y/o problemas que son dominio del docente y para que mantenga el compromiso e interés propio ante la resolución de dichas preguntas y/o problemas. En este sentido, son actos de devolución, todas las informaciones, preguntas, heurísticos, ejemplos, silencios, interacciones que emplee o se abstenga de emplear el docente, a lo largo de toda la situación de aprendizaje. La intención es promover que los alumnos se mantengan implicados en una construcción intencional de su conocimiento (tomando decisiones, haciendo anticipaciones, verificando sus conclusiones). Con estos actos de devolución el docente no pretende que el alumnado adquiera un simple conocimiento de hechos, o un incremento del caudal de los mismos, sino que persigue, como afirma Brousseau (1986), generar modificaciones cognitivas, que hagan que el alumno construya el conocimiento de un modo significativo, y que no pueda olvidarlo con rapidez.

Entendemos que una de las dificultades que plantea la devolución reside en saber cuáles son los problemas y/o preguntas que estimulan al alumnado. En este sentido creemos que los escenarios de aprendizaje que planteamos, basados en juegos de mesa, son un buen punto de partida para que el alumnado entre por propio interés. Esto no implica que el docente pueda desentenderse de su responsabilidad de acompañar al alumnado en sus procesos de aprendizaje y que no tenga que llevar a cabo los actos de devolución que considere adecuados para que el alumnado mantenga su compromiso activo con el problema.

Cuando enfrentamos a los maestros en formación inicial de Educación Infantil y Primaria al problema de encontrar una estrategia que les permita ganar siempre en cualquiera de los juegos de mesa que hemos comentado anteriormente, y les pedimos que la expliquen por escrito, es bastante recurrente que, ante alguna de las demandas del problema, disminuya o se interrumpa bruscamente el compromiso que los futuros maestros tienen con el problema. Es en esos momentos de crisis en los que el alumno pierde el interés propio, cuando los actos de devolución o ayuda pedagógica, tienen su razón de ser, ayudar al alumnado a retomar el problema con un interés renovado.

Nuestros actos de devolución siempre están direccionados por la intención de ayudar al alumnado a retomar un problema, sin embargo, la repercusión de nuestros actos no siempre es la esperada, debido a que los motivos por los que el alumnado sale del problema son variados, complejos y de distinta naturaleza (cognitivos, psicológicos, físicos, temporales, etc.). Aprender a identificar las necesidades del alumnado y responder en su justa medida para que vuelva a entrar en el problema por voluntad propia es todo un arte que requiere voluntad, destreza, sensibilidad, desarrollo y muchos intentos fallidos. Para ilustrar esta compleja labor del docente nos vamos a centrar en dos casos particulares que acontecen cuando el alumnado siente que no es su responsabilidad validar su estrategia.

Es bastante habitual que parte del alumnado sienta la necesidad de que el docente valide cada uno de los pasos que ejecuta en la búsqueda de una estrategia ganadora y de manera persistente nos reclame: *¿Profe voy bien?* No menos habitual resulta que parte del alumnado trabaje con total autonomía hasta conseguir armar una estrategia, pero que llegado ese momento nos reclamen: *¿Profe está bien nuestra estrategia?*

En ambas situaciones se pone de manifiesto que el alumnado siente que validar sus producciones no es su problema, a pesar de que en general manifiestan una necesidad imperiosa de saber si sus avances o aproximaciones están bien o no, sienten que es responsabilidad del docente. Cuando no respondemos a la demanda de validar su progresión, identificar su posible fallo o desvelar la supuesta estrategia ganadora, algunos, los menos, aceptan el reto y redoblan sus esfuerzos en pro de satisfacer su necesidad de comprender; la mayoría de los alumnos abandonan el problema de forma fulminante y se muestran contrariados: *¿Profe, no nos vas a decir si vamos bien? ¿En serio?*, *¿Profe, de verdad que no nos vas a decir cuál es la estrategia ganadora?*

A continuación, mostraremos de forma general algunos de los actos de devolución que empleamos en estas ocasiones:

- Uno de los actos de devolución más sencillo y recurrente, y no por ello menos efectivo que empleamos es devolverle la pregunta al alumno dándole el espacio necesario para que se exprese y poniendo toda nuestra atención en comprender su relato.

  Así, por ejemplo, ante la pregunta del alumnado *¿profe voy bien?* solemos responder *¿Tú qué crees?* Y, si el alumno responde, por ejemplo, *no lo sé*, podríamos responderle: *¿qué podrías hacer para saber si vas bien o no?* Y así, de esta manera recurrente, vamos tratando que cada pregunta no sea más que una invitación a retomar el problema, sabiendo que legitimamos su esfuerzo.

- Una vez que el alumnado se ha expresado completamente y hemos comprendido su progreso y/o su estrategia, otro de los actos de devolución que solemos emplear consiste en parafrasear al alumnado.
  Así, por ejemplo, cuando el alumnado te comunica su estrategia y te pregunta: *¿Profe está bien nuestra estrategia?* solemos responder: *¿A ver si te he entendido bien? Tú estrategia consiste en….*
- Otro acto de devolución que empleamos habitualmente es invitar al alumnado a confrontar su avance o estrategia con otros compañeros.
  Así, por ejemplo, cuando el alumnado te comunica su estrategia y te pregunta: *¿Profe está bien nuestra estrategia?,* solemos responder *¿Por qué no la pones a prueba?* Y dependiendo de lo completa o emergente que sea o esté su estrategia, le recomendamos jugar contra un compañero concreto. Si queremos que su estrategia se manifieste como incompleta le recomendaremos jugar frente a un rival con una estrategia más completa, si por el contrario nos interesa que afiancen su estrategia podemos recomendarles que se enfrente a un rival con una estrategia aun emergente.

Llegados a este punto proponemos un breve ejercicio de imaginación, supongamos que el alumnado ha entrado en la situación de aprendizaje propuesta por el docente por interés propio, por el mero placer de jugar, supongamos que el docente ha generado un espacio lo suficientemente confortable y ha sabido acompañar eficientemente al alumnado en su proceso de aprendizaje empleando las devoluciones oportunas para que el alumnado sienta las preguntas y problemas de la situación como propias, asumiendo consciente y voluntariamente la responsabilidad de acometerlas. Supongamos por último que el alumnado ha puesto en marcha las estrategias que le permiten tener éxito en el juego. ¿Acabaría aquí nuestra responsabilidad docente? ¿Podemos afirmar que el alumnado se ha apropiado de un conocimiento?

En principio todas las estrategias que ha movilizado el alumnado han sido respuestas a las demandas del juego, y por tanto tiene conciencia de poseer un conocimiento que le permite tener éxito en el juego. Pero, para que su aprendizaje sea real y pase a formar parte de la cultura matemática, ha de ser consciente de que el conocimiento que ha movilizado no solo tiene validez en el ámbito del juego, sino que ha de encontrar conexiones con otros contextos, para dar sentido a lo aprendido. Ya que, como nos dicen Bosch, Chevallard y Gascón (2000, p. 219), sin esta toma de conciencia "¿cómo podrán distinguir los propios alumnos entre todas las decisiones tomadas para ganar, aquellas que dependen de características coyunturales del juego particular, de aquellas otras que han sido posibles gracias al conocimiento adquirido?"

Es responsabilidad del docente, actuar como mediador cultural entre los conocimientos que han activado los alumnos libremente como respuesta a las demandas del juego y el conocimiento estandarizado (cultura matemática) posibilitando que se produzca la consideración oficial del objeto de enseñanza por parte del alumnado. Este proceso permite que el aprendiz medre desde un conocimiento personal y contextualizado hacia un

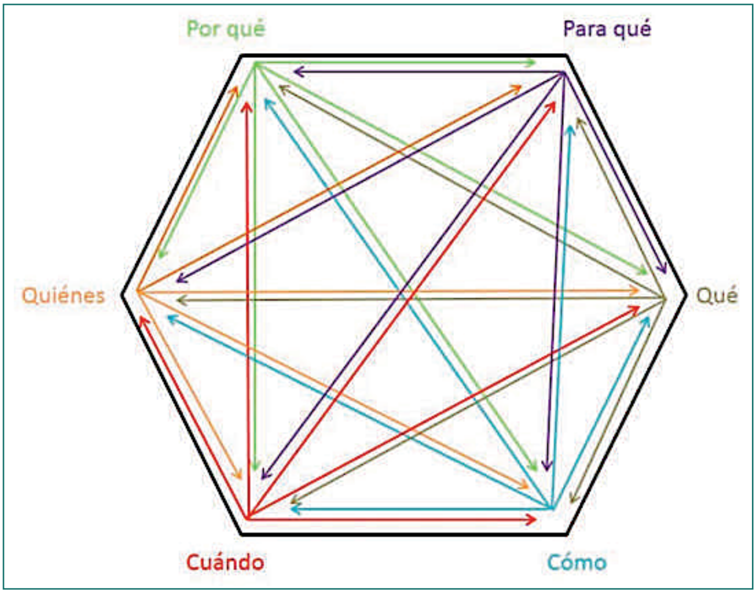


Figura 4. Hexágono de sinergias (Jiménez-Fontana, García-González, Azcárate, Navarrete y Cardeñoso, 2017, p. 146).

conocimiento universal, despersonalizado y reutilizable, y que, además, esto lo haga preservando el sentido matemático de los conocimientos construidos por cada sujeto (Brousseau, 2007).

VALORAR LO CONSEGUIDO

Llegado el momento de cierre en el desarrollo de una situación de aprendizaje vinculada al juego, queremos hacer un breve inciso sobre la cuestión de lo importante que es llegar a saber realmente si sirvió para algo. Innovar en el aula conlleva múltiples esfuerzos, pero realmente si no cambiamos e innovamos en evaluación, de poco va a servir los otros esfuerzos, salvo para mejorar el ambiente y motivación momentánea en el aula.

El plano de la evaluación no se nos oculta que es complejo en si mismo, como sistema interactivo que ha de atender al qué, al cómo, al cuándo, al con qué y sobre todo que responda al por qué y para qué evaluar, como se puede apreciar en la figura 4, la riqueza de interrelaciones que se muestran. En consecuencia, reflexionar sobre la evaluación implica poner en cuestión los dos elementos clave que la sustentan: los criterios y las evidencias que usamos para realizar dicha valoración como sistema comprensivo de la realidad educativa (Azcárate, García-González, Jiménez-Fontana y Cardeñoso, 2017), una vez tengamos claro el qué y elijamos el cómo más adecuado.

Hay que tomar, con instrumentos seleccionados, muchas observaciones para luego darles el sentido oportuno según el papel que les corresponda ¿Cómo sería posible que esta *observación* se pueda concretar? Nos parece que es difícil hacerlo sin fijar en primer lugar cuáles son los aspectos a valorar, pero ello también requiere que nos atrevamos a identificar indicadores relacionados con las finalidades formuladas en el diseño de la situación de aprendizaje. Si no prefijamos, qué significa cierto rango de logro para cada nivel escolar, en cada uno de dichos indicadores, no podremos saber casi nada sobre el aprendizaje alcanzado por el alumnado y, por tanto, de la idoneidad de la situación para cada alumno.

Por ejemplo, en juegos de construcciones, podríamos plantear cuestiones como las propuestas por Vega y Cardeñoso (2005) en su trabajo sobre las Torres de Ecija. La situación trataba sobre construir una torre, dado una colección de polígonos, elementos de decoración y un conjunto real de Torres de Écija, para elegir y representar en 2D y 3D. Al acabar el juego de construcciones, los pequeños grupos de alumnos de 3º de la ESO, deben informar a su clase y su familia, del logro, de los medios para el mismo y de sus características e ideas geométricas aprendidas, mediante un portafolio de presentación. Para evaluar dicho portafolio, los autores implementaron una rúbrica sencilla porque solo recoge tres rangos asociados a los objetivos mínimos (m), medios (s) o ampliatorios (a). Y además es modesta, porque toma pocos indicadores: lenguaje, coherencia, profundidad, adecuación, expresión y representaciones.

Si pensamos en otro contenido a trabajar, en ese mismo ambiente lúdico y cooperativo, como por ejemplo la proporcionalidad, a través de la idea de escala, podemos ilustrar la cuestión a través de indicadores desde los cuales se puedan valorar las producciones y evidencias obtenidas en el proceso. Por ejemplo, con respecto al indicador de *Coherencia* en dichas evidencias podríamos clasificarlas en tres niveles: mantener igual escala en una vista (m); coherencia entre las escalas de los polígonos usados (s) y adaptaciones consistentes y adecuadas entre vistas y polígonos (a), si estos se complementan.

Con respecto el indicador *Adecuación*, podríamos considerar otros tres niveles: explicar por qué se ha elegido dicha escala (m); explicitar el porqué del cambio de escalas para las descomposiciones (s) y la relación de todas las partes descompuestas y del desarrollo plano (a). ¿No nos informa bastante sobre los alumnos? Este tipo de rúbricas nos acerca a indicadores comprensivos de las actuaciones del alumno y su uso nos puede reportar una información significativa sobre el proceso y su resultado.

Otra opción interesante es diseñar una rúbrica que nos permita valorar una situación de aprendizaje lúdica desde la propuesta de las competencias matemáticas de Niss (2003). Para este autor competencia "es la habilidad para entender, juzgar, hacer y usar las matemáticas en una variedad de contextos y situaciones intra y extra matemáticos en los que las matemáticas juega o puede jugar un papel" (Niss, 2003, p. 122). Desde esta idea podemos, para cualquier situación lúdica, formular indicadores adecuados que desarrollen en cada caso concreto dichas competencias. Porque no debemos perder de vista que, si es el desarrollo de los sujetos el para qué y el saber matemático configura el qué evaluar, estos indicadores no debieran ser diferentes de los que usamos en otras situaciones de enseñanza.

Siguiendo con el mismo ejemplo antes referido, podemos encontrar en Vega (2007), podríamos fijarnos en los indicadores que se presentan, aunque faltaría señalar el rango adecuado al grupo de alumnos correspondientes. Una posible propuesta es la recogida en la tabla 2, donde además de otras cuestiones motivacionales, por ejemplo, también se afronta el conocimiento matemático de referencia.

Tabla 2. Competencias del DEA de Vega (2007) en base a Niss (2003).

COMPETENCIA MATEMÁTICA	INDICADORES DE LOGRO
Pensar Matemáticamente	Identificar las variables y estructuras matemáticas subyacentes al problema del mundo real referente a cuerpos geométricos. Abstraer las propiedades de ciertos elementos geométricos, generalizando los resultados a otros conjuntos.
Plantear Resolver Problemas	Identificar diferentes tipos de problemas (prácticos, abiertos) y resolverlos ya sean planteados por uno u otros, a ser posible utilizando distintos procedimientos.
Modelizar Matemáticamente	Analizar propiedades de los cuerpos geométricos. Traducir e interpretar los elementos que conforman los cuerpos geométricos y resultados del análisis en términos del mundo real realizando un diseño y comunicando sus resultados.
Razonar y argumentar Matemáticamente	Relacionar datos para llegar a una solución matemática respecto a cuerpos geométricos. Hacer generalizaciones o elaborar un argumento que apoyen, refuten o proporcionen una solución. Comprobar las hipótesis a través de su organización y control personal.
Representar Matemáticamente Entidades	Interpretar, relacionar y utilizar distintas representaciones para interactuar con cuerpos geométricos eligiendo la más adecuada de acuerdo con la situación y el propósito previsto.
Utilizar Matemáticamente Símbolos y Formalismos	Utilizar símbolos, diagramas y modelos apropiados para representar elementos geométricos empleando un lenguaje simbólico, mostrando que se es capaz de entender la naturaleza y las reglas de los sistemas matemáticos formales, traducir del lenguaje natural al lenguaje simbólico.
Comunicarse Matemáticamente en, con, y sobre	Entender y expresarse en castellano mediante textos escritos, visuales u orales sobre cuerpos geométricos con diferentes niveles de precisión teórica y técnica, para compartir producciones propias.
Hacer uso de ayudas y herramientas	Conocer y ser capaz de utilizar adecuadamente herramientas matemáticas y tecnológicas que puedan favorecer la implementación de procesos y procedimientos para determinar soluciones referentes a cuerpos geométricos.

Para otro tipo de reflexión sobre evaluación, podemos acudir a López Ocaña (2018) que afronta la evaluación en su faceta formativa, si es particularizando en la educación infantil de Fernández Rodríguez (2014), aunque si se focaliza en las competencias matemáticas en educación secundaria, se puede consultar Azcárate y Cardeñoso (2012) donde, desde la óptica que Sanmarti (2007), nos plantea la necesidad de afrontar el reentender la evaluación para, en dicho proceso, aprender como docentes.

CONCLUSIONES

Hemos intentado que este camino sugerido para repensar el papel del profesor cuando se plantea dar más relevancia al juego en aula de matemáticas, vaya acompañado de elemento útiles para que la función educativa y formativa, pueda ser vislumbrada por un profesor con interés por innovar en su aula desde la perspectiva lúdica, por ejemplo, como se aprecia en Muñiz, Alonso y Rodríguez (2014).

En un proceso de este tipo el conocimiento profesional del profesor de matemáticas va a evolucionar, sin lugar a dudas, por lo cual, desde nuestro conocimiento como formadores de formadores de matemáticas, hemos ido centrándonos en compartir cuestiones recomendables para el uso del juego de mesa en el aula de matemáticas, muchas de ellas igual de útiles para los potenciales intentos de gamificación del aula. Aspectos necesarios para la planificación, diseñar y gestionar su implementación; sin olvidar que todo ello tiene interés por la educación matemática pretendida y la consciencia que ha de tener el aprendiz de los logros alcanzados, muchas veces centrados más en las competencias procedimentales y actitudinales, tan necesarias para que el sujeto afronte de forma autónoma el aprender a aprender.

En los trabajos fin de grado y de máster de secundaria focalizados en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas curriculares, cada vez es mayor la demanda de focalizar dichas reflexiones desde la óptica lúdica, donde trabajos como los Márquez Troya (2014) para educación infantil; de Sánchez Esteban (2013) o Jiménez Vargas (2014) para educación primaria; de Fernández García (2015) o Rastrollo Casimiro (2018) para secundaria, alcanzan cotas dignas de ser reseñadas y compartidas en los repositorios universitarios, por su valoración de sobresaliente otorgada por un tribunal de doctores del área de didáctica de la matemática. Seguramente, estas propuestas más cercanas al aula sean experimentables con ligeras adecuaciones al contexto y desde luego, sus reflexiones y argumentaciones, tal vez puedan ser de ayuda para aquellos docentes que se encuentren en disposición para iniciar este tipo de innovación en los principios que iluminan su metodología docente.

No nos resignamos a terminar sin poner en valor aportaciones como la de Hernández Padrón (2018) que nos presenta una interesante propuesta de gamificación, desde el aula de secundaria y facilitando el acceso a la página web de su propuesta con las orientaciones necesarias para reproducir la experiencia. Por otra parte, compartir experiencias como la de Foncubierta y Rodríguez (2014), quienes afirman que gracias a la Editorial Edinumen, han podido materializar la realización de proyectos como la gamificación de Moodle, que además de argumentar su interés, nos facilitan bibliografía significativa de referencia para afrontar este reto, que a nadie se nos escapa que es inevitable, en breve espacio de tiempo. En esta dirección, García-Ruiz, Bonilla-del-Río y Diego-Mantecón (2018) nos participan diferentes propuestas de gamificación clasificadas por etapas educativas y detallan una de las propuestas dirigida al desarrollo de la competencia matemática, trabajo elaborado en el contexto del *Proyecto Horizon 2020* de la Unión Europea.

REFERENCIAS

Azcárate, P. (1997). Sobre el conocimiento didáctico del contenido: dilemas y alternativas. En M. Sierra y L. Rico (Eds.), *Primer Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (pp. 25-33). Zamora: Universidad de Granada.

— (1999). El conocimiento profesional: Naturaleza, fuentes, organización y desarrollo. *Quadrante*, 8, 111-138.

Azcárate, P. y Cardeñoso, J. M. (1994). La naturaleza de la matemática escolar: problema fundamental de la didáctica de la matemática. *Investigación en la Escuela*, 24, 79-88.

— (2012). Evaluación de la competencia matemática. *Investigación en la escuela,* 78, 31-42.

Azcárate, P.; García-González, E.; Jiménez-Fontana, R. y Cardeñoso, J. M. (2017). La evaluación: Actividad profesional clave de la Educación Matemática. En C. E. Lopes y D. Jaramillo (Eds.), *Escenas de la insubordinación creativa en las investigaciones en Educación Matemática en contextos de habla española* (pp. 45-59). New York: Lulú.com.

Ball, D. L., Thames, M. H., y Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of teacher education*, *59*(5), 389-407.

Blanco, L. (1997). Tipos de tareas para desarrollar el conocimiento didáctico del contenido. En L. Rico y M. Sierra (Eds.), *Investigación en Educación Matemática I* (pp. 25-33). Granada: SEIEM.

Bosch, M., Chevallard, Y. y Gascón, J. (2000). *Estudiar matemáticas: el eslabón perdido entre la enseñanza y el aprendizaje.* Barcelona: ICE-Horsori.

Broome, R. (1988). Conocimiento profesional de los profesores. *Enseñanza de las Ciencias. 6*(1). 19-29.

Brousseau, G. (1986). Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. *Recherches en didactique des mathematiques*, *7*(2), 33-115.

— (2002). Los diferentes roles del maestro. En C. Parra y I. Saiz (comps), *Didáctica de la Matemática* (pp. 65-94). Buenos Aires: Paidós Educador.

— (2007). *Iniciación al estudio de la teoría de situaciones didácticas*. Buenos Aires: Libros del Zorzal.

Bruner, J. (2003). *Juego, pensamiento y lenguaje*. Barcelona: Associació de Mestres Rosa Sensat.

Buytendijk, F. J. J. (1935). *El juego y su significado. El juego en los hombres y en los animales como manifestación de impulsos vital*es. Madrid: Revista de Occidente.

Cáceres, M. J., Chamoso, J. M. y Cárdenas, J. A. (2015). Situaciones problemáticas auténticas propuestas por estudiantes para maestro. En C. Fernández, M. Molina y N. Planas (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIX* (pp. 201-210). Alicante: SEIEM.

Cardeñoso, J. M. (2001). *Las creencias y conocimientos de los profesores de Primaria andaluces sobre la Matemática escolar. Modelización de concepciones sobre la Aleatoriedad y Probabilidad*. Cádiz: Servicio de Publicaciones de la UCA.

Carrillo, J., Contreras, L. C. y Flores, P. (2013). Un modelo de conocimiento especializado del profesor de matemáticas. En L. Rico, M. C. Cañadas, J. Gutiérrez, M. Molina y I. Segovia (Eds.), *Investigación en Didáctica de la Matemática. Homenaje a Encarnación Castro* (pp. 193-200). Granada: Editorial Comares.

Chamoso, J., Durán, J., García, J., Lalanda, J., y Rodríguez, M. (2004). Análisis y experimentación de juegos como instrumentos para enseñar matemáticas. *Suma*, 47, 47-58. Recuperado de http://revistasuma.es/IMG/pdf/47/047-058.pdf.

Comas-Paredes, X. (2016). *Resolver problemas a través de los juegos de mesa en quinto y sexto curso de Educación Primaria*. TFG de Maestro de Educación Primaria. Logroño: https://reunir.unir.net/handle/123456789/4496.

Decroly, O. y Monchamps, E. (1983). *El juego educativo. Iniciación a la actividad intelectual y motriz*. Madrid: Ediciones Morata.

Dienes Z. P. y Golding E. W. (1970). *Lógica y juegos lógicos*. Barcelona: Editorial Teide.

Elkonin, D. V. (1980). *Psicología del juego*. Madrid: Editorial Pablo del Río.

Edo, M., Baeza, M. Deulofeu, J. y Badillo, E. (2008). Estudio del paralelismo entre las fases de resolución de un juego y las fases de resolución de un problema. *Unión*, 14, 61-75.

Fennema, E. y Franke, M. L. (1992). Teachers' knowledge and its impact. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 147- 164). New York: Macmillan.

Fernández García, R. (2015). *Los juegos: una herramienta para aprender algebra.* TFM del Máster de Profesorado de Secundaria.Cádiz: http://hdl.handle.net/10498/17536.

Fernández Rodríguez, M. (2014). *La evaluación en Educación Infantil. Consideraciones sobre el conocimiento matemático.* TFG de Maestro de Educación Infantil. Cádiz: https://rodin.uca.es/xmlui/handle/10498/19324.

Foncubierta, J.M. y Rodríguez, C. (2014). *Didáctica de la gamificación en la clase de español*. Editorial Edinumen.

Freud, S. (1908). El creador literario y el fantaseo. En J. Strachey (Ed.), *Sigmund Freud Obras Completas* (9, 123-136). Buenos Aires: Amorrortu.

García-Ruiz, R., Bonilla-del-Río, M. y Diego-Mantecón, J. M. (2018). Gamificación en la Escuela 2.0: una alianza educativa entre juego y aprendizaje. Á. Torres-Toukoumidis y L. M. Romero-Rodríguez (Eds.), *Gamificación en Iberoamérica Experiencias desde la comunicación y la educación* (pp.71-95). Quito: Editorial Universitaria Abya-Yala

Godino, J. D. (2009). Categorías de análisis de los conocimientos del profesor de matemáticas. *Unión*, 20, 13-31.

Gómez Chacón, I. M. (1992). *Los juegos de estrategia en el curriculum de matemáticas*. Madrid: Narcea.

Groos, K. (1902). *Les jeux des animaux*. Paris: Féliz Alcan Éditeur.

Gutiérrez, A. (1991): Procesos y habilidades en visualización espacial. *Memorias del Tercer Simposio Internacional sobre Investigación en Educación Matemática: Geometría,* pp. 44-59. (colección "Ciencias de la Educación", 6). Recuperado de https://goo.gl/FTpWFw.

Hall, S. (1929). *La psicología y la paidología*. Madrid: Ediciones de La Lectura.

Hernández Padrón, I. M. (2018). El Ministerio de Robin Hood: una experiencia de gamificación. *Números*, *Revista de Didáctica de las Matemáticas,* 98, 153-162.

Ingvarson, L., Meiers, M. y Beavis, A. (2005). Factors affecting the impact of professional development programs on teachers' knowledge, practice, student outcomes and efficacy. *Education Policy Analysis Archives, 13*(10), 1-28.

Jiménez-Fontana, R., García-González, E., Azcárate, P., Navarrete, A. y Cardeñoso J. M. (2017). El reflejo de la sostenibilidad curricular y la complejidad en el sistema de evaluación. Cerrando una etapa y estableciendo nuevas sinergias. M Lugo Muñoz (Coord.), *X Seminario de investigaciones en educación ambiental y educación para el desarrollo sostenible: nuevos escenarios, retos y propuestas para el reequilibrio sustentable*. (pp. 141-154), Valsaín (Segovia), 10-12 junio de 2016. Madrid: Organismo Autónomo Parques Nacionales. Ministerio de Medio Ambiente.

Jiménez Vargas, J. (2014). *Diseño y Planificación de la noción de Azar y Probabilidad en Educación Primaria.* TFG de Maestro de Educación Primaria. Cádiz: https://rodin.uca.es/xmlui/handle/10498/16628.

Kamii, C. y DeVries, R. (1988). *Juegos colectivos en la primera enseñanza. Implicaciones de la teoría de Piaget.* Madrid: Aprendizaje Visor.

Kapp, K. (2012). *The Gamification of Learning and Instruction: Game-Based Methods and Strategies for Training and Education*. San Francisco: John Wiley & Sons.

Lazarus, M. (1883). *Concerning the fascination of play*. Berlin: Dummler.

Llinares, S. (1998). Conocimiento profesional del profesor de matemáticas y procesos de formación. *UNO.* 17. 51-63.

López Ocaña, Á. (2018). *Intervención de evaluación formativa aplicable al área de matemáticas.* TFG de Maestro de Educación Primaria. Cádiz: https://rodin.uca.es/xmlui/handle/10498/20771.

Márquez Troya, L. (2014). *El día del juego: Construimos para divertirnos.* TFG de Maestro de Educación Infantil. Cádiz: https://rodin.uca.es/xmlui/handle/10498/16621.

Moreno Grosso, P. (2017). *¿Demasiado ruido? El Tratamiento del Conocimiento Matemático en el contexto de Trabajo por Proyectos mediante Talleres para el Aula de Educación Primaria.* TFG de Maestro de Ed. Primaria. Cádiz: https://rodin.uca.es/xmlui/handle/10498/19308.

Muñiz, L., Alonso, P., y Rodríguez, L. (2014). El uso de juegos como recurso didáctico para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas: estudio de una experiencia innovadora. *Unión: Revista Iberoamericana de Educación Matemática,* 39, 19-33. http://www.fisem.org/www/union/revistas/2014/39/archivo6.pdf.

Niss, M. (2003). Mathematical competencies and the learning of mathematics: The Danish KOM project. En A. Gagatsis, y S. Papastavridis (Eds.), *3rd Mediterranean Conference on Mathematical Education* (pp. 115-124). Atenas: Hellenic Mathematical Society.

Ochoa Ruiz, S. (2016). *El tratamiento del conocimiento matemático a través del juego, para el aula de Educación Primaria en contexto de trabajo por proyectos: ¿Todos podemos ser inventores?* TFG de Maestro de Educación Primaria. Cádiz: https://rodin.uca.es/xmlui/handle/10498/18277.

Ortega, R. (1992). El juego infantil: revisión de la teoría de Vygotski sobre la naturaleza psicológica del juego. *Investigación en la Escuela,* 4, 19-24.

Piaget, J. (1961). *La formación del símbolo*. Mexico: Fondo de Cultura Económico.

— (1982). *Juego y desarrollo*. Barcelona: Laila.

Piñero Sáez, M. C. (2018). *Metodología por rincones.* TFG de Maestro de Educación Infantil. Cádiz: https://rodin.uca.es/xmlui/handle/10498/20746.

Porlán, R.; Azcárate, P.; Martín del Pozo, R.; Martín Toscano, J. y Rivero, A. (1996). Conocimiento profesional deseable y profesores innovadores: fundamentos y principios normativos. *Investigación en la Escuela*, 29, 23-38.

Rastrollo Casimiro, P. (2018). *Exploración de las ideas en probabilidad condicionada de alumnos de 4º ESO*. TFM del Máster del Profesorado de Secundaria.Cádiz: http://hdl.handle.net/10498/20525.

Sánchez Esteban, N. (2013). *El juego y la Matemática. Juegos de matemáticas para el alumnado del primer ciclo de Educación Primaria*. TFG de Maestro de Educación Primaria. Valladolid: http://uvadoc.uva.es/handle/10324/4809.

Sanmartí, N. (2007). *Evaluar para aprender.* Barcelona: Graó.

Shulman, L. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher. 15*(2). 4-14.

Tabernero del Río, S. (1997). La Educación Funcional de E. Cláparède. *Aula,* 9, 45-72.

Vega, M. (2007). *Proyectos de trabajo en el aula de matemáticas: una metodología para el aprendizaje significativo en la ESO. Estudio de un caso*. Memoria DEA en Didáctica de la Matemática. Granada.

Vega, M. y Cardeñoso, J. M. (2005). ¿Por qué a Écija se le conoce como "Ciudad de las torres"? En *Actas XI Jornadas de Investigación en el Aula de Matemáticas. La Geometría.* Granada: S.A.E.M. THALES y Dto. Didáctica de la Matemática de la UGR.

Vygotsky, L. S. (1966). *El papel del juego en el desarrollo*. Madrid: Aprendizaje Visor.

Wallon, H. (1974). *L'évolution psychologique de l'enfant*. Paris: A. Colin.

Zichermann, G. y Cunningham, C. (2011). *Gamification by Design: Implementing Game Mechanics in Web and Mobile Apps*. Cambridge, MA: O'Reilly Media.

Épsilon - *Revista de Educación Matemática* *2019, nº 101, 83-100*

Juegos de estrategia y resolución de problemas de matemáticas

José Luis Lupiáñez Gómez
Universidad de Granada

Margarita García Schiaffino
Colegio Santo Tomás de Villanueva, Granada

Resumen: *En este artículo describimos diferentes juegos de mesa de estrategia que pueden emplearse en el aula para promover el desarrollo de determinadas habilidades de resolución de problemas y de visualización geométrica. Para ello, reflexionamos sobre el papel de este recurso en el aula de matemáticas, analizamos algunos ejemplos de juegos e introducimos algunas dinámicas de aula para emplearlos.*
Palabras clave: *Juegos de estrategia, resolución de problemas, heurísticos, visualización*

Strategy games and mathematics problem solving

Abstract: *In this article we describe some strategy board games that can be used in the classroom to promote the development of specific problem solving and geometric visualization skills. To do this, we reflect on the role of this resource in the mathematics classroom, analyze some examples of games and introduce some suggestions to use them.*
Keywords: *Strategy games, problem solving, heuristics, visualization*

Aquellos que se toman el juego como un simple juego y el trabajo con excesiva seriedad, no han comprendido mucho ni de uno ni de otro.
(Heinrich Heine, s. XIX)

Si tomamos como punto de partida la interesante reflexión inicial de ese ensayista y poeta alemán, en este artículo no pretendemos ni denostar el trabajo serio en el aula de matemáticas, ni elevar los juegos de estrategia al nivel de actividad obligatoria o irrenunciable. Pero sí que tenemos como prioridad ejemplificar el uso de este recurso con un fin formativo y para ello, describiremos cómo en el ejercicio de jugar alguna partida con el objetivo de ganar, se activan algunas habilidades muy relacionadas con la resolución de problemas de matemáticas. Desde esta posición, nos encontramos próximos a una corriente formativa que se denomina recientemente *gamificación*, aunque no nos enmarcamos con totalidad en ella, pues nuestra propuesta es menos ambiciosa.

En nuestro caso, nos ocupamos exclusivamente de mostrar qué habilidades relacionadas con la resolución de problemas se pueden promover mediante la participación de los estudiantes en partidas en juegos de estrategia comerciales para dos o más jugadores, y que por lo general, son con tablero o con piezas manipulables.

Según la Real Academia de la Lengua Española, una acepción del término “jugar” tiene que ver con entretenerse y divertirse, cuando se toma parte en una actividad sometida a una serie de reglas, medie o no en ella el interés[1]. De esta acepción destacamos la idea de que en un juego hay una serie de reglas que, en nuestro caso, condicionan las técnicas, procedimientos y estrategias aplicables y aunque proponemos que se introduzcan en el aula de matemáticas, en ningún caso renunciamos al entretenimiento.

En este artículo presentamos en primer lugar criterios de clasificación de juegos de mesa e introducimos algunas investigaciones que se han realizado acerca de su uso educativo, para después reflexionar sobre el papel que pueden desempeñar determinados juegos en el aula de matemáticas. A continuación describimos habilidades de resolución de problemas y de visualización geométrica que emplearemos para analizar varios juegos de estrategia. Finalmente, recogemos algunas sugerencias para la gestión del aula con estos recursos.

CLASIFICACIÓN E INVESTIGACIONES SOBRE JUEGOS

Al hablar de juegos de estrategia, se abre un panorama amplio que, en ocasiones, transita entre juegos abstractos que se analizan matemáticamente desde la denominada “Teoría de Juegos”, y otros juegos que ocupan estanterías precisas en comercios o secciones en tiendas virtuales y que se caracterizan por ser a menudo complejos, sofisticados, caros y objeto de deseo de los denominados frikis. La Teoría de Juegos es una rama de la Matemática Aplicada que emplea modelos para explicar procesos de interacciones en sistemas formales de incentivos (juegos), y permite explicar una gran variedad de fenómenos de diferente naturaleza en Biología, Psicología o Computación. Por esa razón se trabaja

1. www.rae.es

en varias titulaciones universitarias además de en Matemáticas, como en Informática o Economía. Uno de los resultados más notables de la Teoría de Juegos es el Teorema de Zermelo, de 1913 (Tenorio y Martín, 2015). Este resultado señala que en cualquier juego finito (con un número finito de rondas) entre dos jugadores que mueven alternativamente y en el que el azar no afecta a la toma de decisiones, entonces, si el juego no puede acabar en empate, uno de los contrincantes ha de tener una estrategia ganadora.

Los juegos que vamos a ejemplificar en este trabajo están más cerca de esos que se compran en una juguetería especializada, que de los juegos formales de la matemática aplicada. Tampoco consideramos en este caso los juegos de estrategia que se emplean en ordenador, videoconsolas u otros dispositivos, si bien también son objeto de estudio (Ferrando, Castillo y Pla-Castells, 2017). Partiendo de la propuesta de Gairín (1990), consideramos juego a una ocupación voluntaria en la que una persona se involucra libremente, que supone un desafío contra un reto o contra uno o varios oponentes, que se desarrolla mediante una serie de reglas conocidas, que siempre representa un determinado contexto y que finaliza tras un número finito de fases, espaciales o temporales.

Si atendemos al formato en el que los juegos se presentan, podemos encontrar juegos de papel y lápiz (como el *Tres en raya*), de tablero (*Aventureros al Tren*[2]), de rol (*El Anillo Único*[3]), de miniaturas (*X-Wing*[4]), de cartas (coleccionables o no, como *Magic*[5] o *Uno*[6]) o de dados (*Star Wars Destiny*[4]), por ejemplo. Los contextos también son variados: abstractos (*Genial*[3]), de exploración (*Las Mansiones de la Locura*[4]), de gestión de recursos (*Los Colonos de Catán*[3]), *Party games* (*Los Hombres-Lobo de Castronegro*[2]), *Wargames* (*Combat Commander Europa*[3]), de deducción (*Sherlok Holmes: detective asesor*[2]), de carreras (*Fórmula D*[2]), o de preguntas y respuestas (*Trivial Pursuit*[7]), entre otros.

El estudio matemático de los juegos ha sido objeto de indagación, sobre todo en aquellos que tienen cierta relevancia social. El análisis de la construcción y resolución de un Sudoku (Becerra, Núñez y Perea, 2016), el estudio de la combinatoria que hay detrás de las posibles situaciones de partida del famoso Candy Crush (Rowland, 2015) o la identificación de los problemas que debe resolver quien practique con ese juego (Walsh, 2014), son algunos ejemplos.

También se ha estudiado el tipo de actitudes que favorece su empleo o su interés educativo. En este caso, el ajedrez es uno de los juegos más analizados por su potencial formativo en matemáticas en particular, y a nivel personal en general (Jiménez-Bernal y Gutiérrez-Rubio, 2018; Kazemi, Yektayar y Bolban, 2012). Pero otros juegos de mesa son por supuesto también objeto de análisis (Gough, 2016; Glass y Neller, 2015, Ramellini, 2014).

Este interés se refleja incluso en el tipo de revistas de investigación que se crean. En 2014, la *Serious Games Society* de Italia creó la revista *International Journal Of Serious Games*[8], que desde entonces, edita cuatrimestralmente un número que recoge alrededor

2. www.asmodee.es
3. www.devir.es
4. www.fantasyflightgames.es
5. www.wizards.com
6. www.mattel.com
7. https://shop.hasbro.com/es-es
8. http://journal.seriousgamessociety.org/index.php/IJSG

de cinco artículos relacionados con el diseño, el desarrollo y la evaluación de juegos digitales. Algunos de esos artículos exploran el impacto educativo de esos recursos, como el trabajo de Yong, Gates y Harrison (2016).

Volviendo a los juegos de mesa y como reconocimiento a la calidad de alguno de los editados, existen premios internacionales que valoran su diseño, originalidad, composición, claridad de las reglas, jugabilidad o apariencia, entre otros aspectos. Uno de los premios más prestigiosos es *Spiel Des Jahres*[9]*, creado en Alemania a finales de los años setenta del pasado siglo. Los juegos que se hacen con ese reconocimiento, reciben un impulso que dispara sus ventas y facilita su traducción a varios idiomas para su distribución internacional. En España, existe un premio nacional denominado JdA*[10] (Juego del Año), que anualmente premia un juego con variables similares al alemán. En las páginas web de cada uno de los premios, se pueden consultar los ganadores de cada edición. Varios de los juegos que mencionamos en este artículo han cosechado varias distinciones internacionales.

El interés educativo de este tipo de juegos también ha motivado interesantes iniciativas. La prestigiosa editorial española Devir, artífice de juegos de gran calidad, incluye un grupo de trabajo que desarrolla la unidad “Juegos en el aula” y que diseña fichas y materiales pedagógicos a disposición del profesorado. Además, en 2016 inició un proyecto llamado “Estimulación neurocognitiva a través del juego de mesa”, centrado en fomentar el desarrollo de competencias de los alumnos a través de los juegos. Como veremos a continuación, nosotros compartimos la idea de que los juegos tienen perfecta cabida en el aula y, más concretamente, en la de matemáticas.

JUGAR EN CLASE DE MATEMÁTICAS

En su revisión histórica del papel que han tenido los juegos en la enseñanza española contemporánea, Payá (2007) analiza cómo éstos se han vinculado estrechamente con la educación intelectual y la educación física y corporal, con la educación moral y cívico-social, así como con elementos de educación estética. Sin embargo, en su trabajo también destaca que los modos de llevar al aula estos juegos no han reunido siempre el mismo consenso en la comunidad educativa. Hace varios años, investigadores como Gairín (1990) y Gómez-Chacón (1992), coincidieron al destacar el potencial de los juegos como recurso formativo valioso en el campo de las matemáticas por varias razones, entre las que destacamos algunas. Estos autores señalan que el uso de juegos en clase de matemáticas puede perseguir propósitos como los siguientes:

1. Desarrollar conceptos matemáticos y de destrezas específicas
2. Promover la práctica de algoritmos y la experimentación
3. Desarrollar habilidades de percepción y razonamiento
4. Aplicar pensamiento lógico y heurísticos propios de la resolución de problemas
5. Investigar nuevas técnicas de resolución de problemas

9. https://www.spiel-des-jahres.com/
10. http://premio-jda.es

6. Romper con rutinas de trabajo, proporcionando motivación y estímulo

El vínculo entre juegos y resolución de problemas que destaca el cuarto punto ha sido destacado especialmente por varios autores. Bouvier (1981), citado por Corbalán (1994, p. 19), afirmaba que: "aunque no se pueda siempre hablar de actividad matemática en relación a ellos, los juegos proporcionan situaciones en las que la actividad de investigación se parece mucho a la de las personas que tratan de resolver un problema de matemáticas". En este sentido, asumimos la caracterización que proponen Martín, Muñoz y Oller (2009) de juegos de estrategia a partir de la propuesta de Gairín (2001): son los que demandan a los participantes emplear "técnicas heurísticas similares a las que se emplean para la resolución de problemas. Ejemplos muy sofisticados de juegos de estrategia son el ajedrez o el go, mientras que juegos de estrategia más elementales que los anteriores son las damas o el tres en raya" (p. 146).

Alsina (2016) propone un símil con la pirámide de alimentación, para destacar las actividades que pueden favorecer el desarrollo de la competencia matemática de los escolares y establecer una frecuencia de uso recomendada. En el tercer nivel desde la base, y situándose por debajo de los recursos tecnológicos y el libro de texto, este autor propone el empleo de recursos lúdicos como los juegos.

A continuación sintetizamos algunas ideas relacionadas con resolución de problemas y heurísticos y con habilidades que evidencian un notable desarrollo del denominado sentido espacial. También consideramos habilidades más vinculadas con aspectos sociales y más adelante, emplearemos esas ideas para justificar el interés de determinados juegos en el aprendizaje de las matemáticas.

HABILIDADES QUE PROMUEVEN LOS JUEGOS DE ESTRATEGIA

Dentro de la resolución de problemas, uno de los referentes clásicos más notables es George Pólya, quien elaboró un marco para su enseñanza, proponiendo una secuencia organizada de fases y heurísticos para cada una de ellas, que marcó un antes y un después en la investigación en este campo (Contreras y Carrillo, 2000). Los heurísticos establecen reglas, pautas, cuestiones o actuaciones que conducen y posibilitan la resolución de un determinado problema. Algunos heurísticos clave en cada una de las cuatro fases de Pólya son los siguientes (Puig y Cerdán, 1995; Castro y Ruiz-Hidalgo, 2015):

- **Comprender un problema**. Resulta una fase clave en la resolución de un problema, pues en muchas ocasiones, los errores en esa resolución se deben a dificultades y bloques en la comprensión del propio enunciado. Algunos heurísticos vinculados con esta fase son, por ejemplo: Localiza los datos y la pregunta; Identifica la finalidad; Reformula el problema con tus palabras.
- **Concebir un plan**. La decisión de cómo abordar un problema requiere también de una reflexión cuidada y establece un vínculo entre conceptos y relaciones matemáticas y los datos del problema, que es muy valioso. Ejemplos de heurísticos con los siguientes: Resuelve un problema más sencillo; Busca un patrón; Simplifica las condiciones; Mira hacia atrás.

- **Ejecutar el plan**. Puede ser la fase más técnica, pues se concreta en aplicar lo planificado, pero determinadas actuaciones favorecen la optimización de esta fase: Divide el problema en partes; Elabora una conjetura; Actúa y prueba; Identifica ayudas útiles.
- **Examinar la solución**. Es una fase retrospectiva que persigue, bien validar lo realizado hasta el momento y la solución obtenida, pero también proponer y justificar generalizaciones. Algunos heurísticos vinculados en este caso son: Analiza cómo has superado bloqueos; Explora si podías haber tardado menos; Qué ha sido clave para hallar la solución. Trata de generalizar lo que has hecho.

Una manera sencilla de traducir las fases de la resolución de un problema de Pólya en términos de los juegos de estrategia, pasa primero por comprender las reglas de un juego y, para ello se deben conocer las normas y turnos, dominar los componentes o identificar las condiciones de victoria, de derrota y de empate. En segundo lugar, se debe concebir una estrategia de juego, y para ello se pueden idear retos más sencillos, relacionar dónde quieres llegar con la situación de la que partes, buscar resultados inmediatos o accesibles, o identificar las consecuencias que en tu juego o en el de tus oponentes podrían dejar tus actuaciones. Cuando ejecutas esa estrategia, debes llevarla a la práctica y confirmar los logros previstos, viendo lo que obtienes tú y tus rivales, quizás debas aplicar algunas correcciones o modificaciones a tu estrategia o idear una nueva porque, por ejemplo, ha tenido un coste alto en tu propio juego. Finalmente, se puede explorar si la estrategia desarrollada es ganadora, o al menos, asegura no perder y también si se puede mejorar o favorecer de algún modo.

Por otro lado, Flores, Ramírez y Del Río (2015) caracterizan el sentido espacial como una manera de "entender el plano y el espacio para identificar cuerpos, formas y sus representaciones, que implica manejar relaciones y conceptos de geometría de forma no convencional, incluyendo la habilidad para reconocer, visualizar, representar y transformar formas geométricas" (pp. 129-130). Desde esta perspectiva, el sentido espacial no se centra tanto en la adquisición y el manejo de conceptos geométricos, sino en el modo en el que éstos se presentan en nuestro entorno y en el papel que juegan en él. Como hemos destacado, una de las componentes clave del sentido espacial es la visualización, que se puede entender como la geometría que hacemos con la mente o la imaginación espacial, y que incluye varias habilidades entre las que se encuentran las siguientes (Gutiérrez, 2006; Lupiáñez y Flores, 2011):

- **Identificación visual**. Se relaciona con reconocimiento de una o varias figuras o formas desde un punto de vista matemático. Esta habilidad se emplea cuando se identifican formas geométricas en el entorno o cuando se construyen esas formas a partir de algunos datos. También cuando se pueden hacer construcciones mentales de formas y cuerpos.
- **Conservación de la percepción**. Es la habilidad para extraer información de figuras y formas espaciales que no se pueden ver por completo. También se activa, en un nivel más básico, cuando se reconoce que una determinada figura no cambia si se cambia de posición o si se oculta parte de ella.
- **Percepción de relaciones espaciales**. Tiene que ver con identificar características y propiedades básicas de objetos en el espacio, así como relaciones entre ellos. También se relaciona con la representación en el plano de figuras tridimensionales.

- **Discriminación visual**: Habilidad que permite comparar y clasificar colecciones de objetos de acuerdo a semejanzas y diferencias de diferente calado. Se activa en un nivel muy básico cuando se identifican diferencias entre dos ilustraciones o entre dos figuras claramente visibles. En un nivel superior se emplea para señalar características menos expresas en formas y cuerpos.

Algunas de estas habilidades son fácilmente identificables en determinados juegos de estrategia y no sólo porque involucren el uso de determinadas formas o figuras, sino por aquello que demanda el ser capaz de jugar una partida y el dominio que exige el ganarla.

También existen juegos que promueven el manejo de determinados conceptos y procedimientos específicos de matemáticas, bien porque es necesario utilizarlos internamente porque así se requiera y en otras ocasiones las matemáticas son claramente visibles y su aplicación forma parte de la finalidad expresa del juego.

Más allá del fomento de determinados aprendizajes relacionados con las matemáticas que pueden fomentar este tipo de juegos en el aula, su empleo puede añadir otro interés, si consideramos aspectos transversales también claves en la educación escolar. Chacón (2008) señala que el uso didáctico de juegos en el aula, puede fomentar también el desarrollo de habilidades físicas, sociales y personales, además de las mencionadas académicas. Así, destaca que dentro de una dimensión físico-biológica, esas habilidades se relacionan con la rapidez de reflejos, la destreza manual o la coordinación de los sentidos. En una dimensión socio-emocional menciona la espontaneidad, la socialización, la expresión de sentimientos, la resolución de conflictos, o la autoconfianza. Además, desde un punto de vista cognitivo, destaca la imaginación, la creatividad, la agilidad mental, la memoria, el pensamiento creativo, el pensamiento lógico o la expresión de ideas. Nosotros añadimos en este apartado la toma de decisiones, pues resulta clave en un gran número de juegos de estrategias.

Desde nuestro punto de vista, al jugar con determinados juegos de estrategia permite promover el desarrollo de habilidades cognitivas pero también de valores, normas y actitudes.

ANÁLISIS DE ALGUNOS JUEGOS DE ESTRATEGIA

En primer lugar presentamos y analizamos algunos juegos que permiten promover habilidades específicas de resolución de problema o de visualización o bien que se relacionan con contenidos matemáticos específicos. Finalmente, proponemos otros juegos también interesantes aunque los presentamos más brevemente.

Quoridor (Editorial Gigamic)

Es un tablero cuadrado dividido en una cuadrícula de 9x9. Hay cuatro peones y 20 pequeños muros de madera. Pueden jugar dos, tres o cuatro personas, y el objetivo del juego es ser el primero en llevar un peón de un lado del tablero al opuesto. Al inicio, cada peón se sitúa en el centro de la primera fila de cada uno de los lados del tablero y los 20 muros

Figura 1. Quoridor (fuente: www.gigamic.com).

se reparten proporcionalmente. En cada turno, un jugador puede mover su peón una casilla (hacia delante, detrás, izquierda o derecha), o bien situar un muro entre dos casillas para complicar el recorrido a los contrincantes, sin llegar a bloquear por completo el paso.

Este juego sorprende por la sencillez de sus reglas y por la cantidad de actuaciones que promueve. Desde el punto de vista matemático, destacamos lo valioso que resulta la resolución de casos más simples (pensando que no hubiera muros), para después estudiar lo que afecta en términos de casillas la colocación de uno. También promueve la percepción de relaciones espaciales, pues el control de la posición de tu peón con respecto al resto es clave para ganar la partida. La propia editorial, en su página web, sugiere una serie de actividades sobre posiciones relativas en el plano y para identificar el camino más corto para ir de un punto a otro, que van dirigidas a niños desde 4 años.

Pentago (Editorial MindTwister USA)

Multipremiado juego de estrategia para dos personas, que usó como eslogan publicitario "Segundos para aprender, pero años para dominar". Partiendo de la sencilla consigna de alinear cinco bolitas del mismo color, este juego resulta apasionante y muy rico desde el punto de vista geométrico. El tablero es cuadrado, y está dividido en cuatro cuadrantes también cuadrados, con 9 huecos cada uno. Esos paneles se pueden extraer ligeramente para girarlos hacia la derecha o la izquierda. El juego incluye 18 bolitas negras y 18 blancas. Cada jugador coloca una bolita de su color en uno de los huecos y mueve uno de los cuadrantes 90º hacia un lado, pero no tiene que mover necesariamente el cuadrante en el que ha colocado su bolita. Después el turno pasa al otro jugador, que hace lo mismo, y gana el que alinea 5 bolas de su color.

Desde la página web del fabricante, es posible descargar un libro de estrategia de este juego, que pone de manifiesto la riqueza de las variables que se ponen en cada partida. Desde el punto de vista matemático, destacamos el heurístico mirar hacia atrás, pues resulta clave cuando ya hay bolitas en todos los cuadrantes y serán desplazadas mediante

Figura 2. Pentago (fuente: www.mindtwisterusa.com).

los giros. Ese heurístico se centra en diseñar una actuación en base a pensar primero la situación final que deseo lograr y en este juego eso es fundamental. Por otro lado, es posible jugar con una finalidad de no perder, pero no resulta ni mucho menos tan accesible como en el clásico Tres en Raya. Eso sí, las posiciones centrales son importantes en ambos juegos. Las transformaciones mediante giros son continuas y desde el punto de vista de la visualización, destaca la percepción de relaciones espaciales aunque aplicada al caso del plano, pues sorprende mucho la disposición inicial de las bolitas y las alineaciones que se consiguen girando determinados cuadrantes en uno u otro sentido.

Blokus 3D (Editorial Mattel)

Editado originalmente por el grupo Ravensburger, *Blokus 3D* nació como evolución tridimensional del muy premiado *Blokus*. Diseñado para que se enfrenten entre dos y cuatro jugadores, *Blokus 3D* incluye una plataforma giratoria con varias plantillas para la base de las construcciones y cuatro grupos de 11 piezas distinguidos por color. Las piezas son uniones de 2, 3 o 4 cubos unidos por al menos una cara (policubos). Con estas piezas se construyen diferentes tipos de prismas y el jugador cuyo color tenga mayor visibilidad en la cara superior del prisma, una vez que no se puedan poner más piezas, es el ganador. En un turno, cada jugador sitúa una de sus piezas en la

Figura 3. Blokus 3D (fuente: https://boardgamegeek.com)

plataforma de forma que ésta toque en al menos una cara con otra pieza de su color colocada antes, y sin dejar huecos vacíos.

Este juego necesita de varias partidas para llegar a identificar las consecuencias de elegir una u otra pieza en cada turno, valorando los resultados obtenidos en diferentes plantillas. La búsqueda de un patrón también se promueve, pues se realizan construcciones sencillas con un pequeño grupo de piezas que asegura alcanzar la altura establecida de manera rápida, asegurando la presencia de un color en la parte superior. Desde el punto de vista de la visualización, la identificación visual y la conservación de la percepción resultan claves, pues es necesario componer y recomponer policubos, además de aplicar rotaciones para localizar la posición que tienen que adoptar para rellenar huecos en el prisma y bloquear el desarrollo del resto de jugadores. *Blokus 3D* es un juego en el que se evidencia rápidamente el dominio de estas habilidades.

Jungle Speed (Editorial Asmodee)

Figura 4. Jungle Speed (fuente: www.asmodee.es).

Este juego de cartas se ha convertido en poco tiempo en un popular entretenimiento en reuniones de amigos y se constituye un excelente ejemplo de cómo contribuir a poner en juego y a promover la habilidad de discriminación visual de una forma lúdica y entretenida. Las reglas son sencillas: hay un mazo de cartas con diferentes ilustraciones que se reparten entre los jugadores, todas boca abajo. Gana el juego quien se quede sin cartas. Uno tras otro los jugadores sacan carta y la dejan boca arriba delante de cada uno. Cuando dos cartas que tienen exactamente la misma ilustración coinciden en la mesa (sin importar el color), los jugadores que las hayan sacado tienen que coger lo antes posible una figura de madera situada en el centro de juego. El que lo consiga primero da al perdedor las cartas que tenga descubiertas sobre la mesa, pero si alguien coge la figura por error, se lleva todas las cartas descubiertas que haya sobre la mesa en ese momento.

El reto básico es distinguir con rapidez las ilustraciones de las cartas, pero algunas son muy similares entre sí. Algunas cartas incluyen series de polígonos y a veces cuesta identificar a primera vista el número de lados de las figuras; otras tienen círculos con diferentes tipos de cortes interiores y hay formas creadas con cintas o que son curvas cerradas y las diferencias residen en el número de bucles de las cintas o en algunas secciones de las curvas. *Jungle Speed* fue Juego del Año en España en 2005.

La habilidad de discriminación visual resulta evidente en este juego, pues el ganador suele ser la persona que más rápidamente identifica los elementos que diferencian una figura de otra, pues en ocasiones esas diferencias son pequeñas y aparentemente pueden parecer iguales. Además, el juego cambia cuando salen cartas especiales, como aquellas que hacen que de pronto el atributo de comparación válido sea el color, sin importar la forma de las figuras.

Rummikub (Editorial Goliath)

Se puede considerar todo un clásico, pues fue creado en 1980 y desde entonces se ha editado ininterrumpidamente. *Rummikub* incluye 104 fichas numeradas del 1 al 13 en cuatro colores diferentes y con dos unidades por cada número y color. Además, hay otras fichas que son comodines. Pueden jugar entre dos y cuatro jugadores y al inicio cada jugador selecciona al azar 14 fichas y las mantiene ocultas al resto de jugadores. Aquél jugador que se quede sin fichas, ganará la partida. En cada ronda, un jugador puede desprenderse de fichas si consigue reunir 3 o 4 del mismo número sin importar el color o una escalera de 3 fichas del mismo color. También puede desprenderse de una o varias fichas colocándolas en las colecciones que haya en la mesa, respetando los criterios de agrupamiento. Si en una ronda un jugador no puede formar nada ni puede colocar ninguna de sus fichas en las colecciones de la mesa, debe robar una ficha de la reserva y pasar el turno.

Este juego tiene un vínculo muy estrecho con habilidades matemáticas básicas relacionadas con los números naturales: composiciones y descomposiciones numéricas, seriación o patrones. Pero más allá de eso, ser capaz de articular un turno bueno en el que te deshaces de alguna ficha mediante la reorganización de las que hay en la mesa, requiere de habilidades de un nivel más alto. En términos de resolución de problemas, mirar hacia atrás o reformular una propuesta de colocación, son heurísticos muy prácticos. Mirar hacia atrás se aplica porque antes de nada debes imaginar en tu cabeza la posible reorganización de las fichas de la mesa para colocar una o varias tuyas. Pero en ocasiones, cuando esos cambios se hacen físicamente, se reorganiza el juego y se cambia el objetivo porque se descubren nuevas posibilidades. Cuando quedan pocas fichas en la reserva,

Figura 5. Rummikub (fuente: www.goliathgames.es).

determinados conocimientos probabilísticos te pueden llevar a ser paciente y robar más. El precio económico de este juego facilita su uso en clase.

Piko Piko el gusanito (Editorial Mercurio EGDGames)

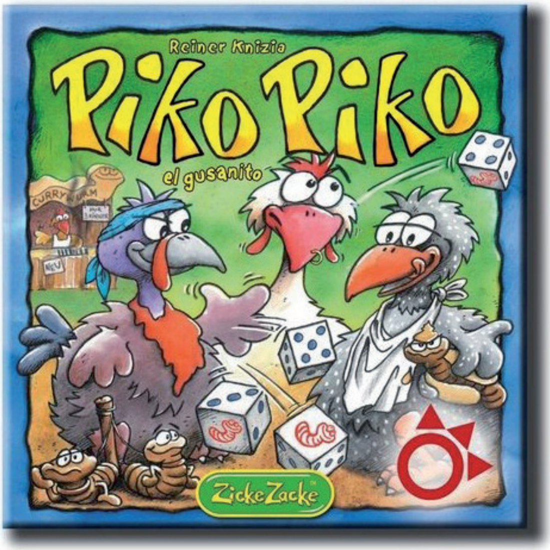


Figura 6. Piko Piko el gusanito (fuente: www.egdgames.com).

Situándonos en un contexto avícola, este gracioso juego nos pone en el papel de pollos que tienen que recoger tantos gusanos como puedan para llevarlos a un asadero en el que Pepe Pollo, cocina los más exquisitos platos de gusanos para toda la población de aves de la ciudad. El jugador que gana es aquel pollo que recolecta mayor número de gusanos. El juego tiene 16 fichas con raciones de gusanos con valores desde 21 a 36 y, además, 8 dados con valores del 1 al 5 y una cara con un símbolo de gusano. Pueden jugar entre 2 y 7 jugadores. Para jugar se alinean las fichas según sentido creciente de las cifras y en un turno, cada jugador lanza todos los dados y puede separar todos los que tienen un mismo valor (incluyendo el gusano). Tira de nuevo los restantes y ahora tiene que separar todos los iguales de un valor diferente al reservado antes. Así, sigue tirando hasta que pare voluntariamente o hasta que haga una tirada fallida. Si para, debe sumar todos los valores de los dados y, si tiene al menos un gusano, coge la ficha con el valor de esa suma y la pone delante de sí, o se la roba a un contrincante que la tenga visible. Si la tirada es fallida, porque no se alcanza un número mínimo de gusanos disponible o solo salen números ya recolectados, el jugador debe devolver una de sus fichas. Al final, se suman los valores de las fichas que ha acumulado cada uno y de ahí sale el pollo ganador.

El juego resulta interesante cuando se van agotando las fichas, pues eso condiciona los números que puedes o debes guardar. La estimación de lo mínimo que necesitas para llegar a determinadas fichas o el estudio de la probabilidad condicionada a las fichas que ya se han retirado, son estrategias más elaboradas. Desde el punto de vista de los heurísticos, destacamos reformular el problema, pues en cada turno debes modificar tu objetivo en función de lo que queda visible. También se resuelven problemas parciales cuando debes decidir la cantidad de dados que tienes que reservar, o se buscan patrones y recurrencias porque siempre es más sencillo acceder a determinadas cifras con unos dados determinados. El hecho de que jueguen hasta siete contrincantes, facilitan que se hagan explícitas algunas de esas tácticas.

Catán (Editorial Devir)

Figura 7. Catán (fuente: www.devir.es).

Conocido popularmente por *Los Colonos de Catán*, que fue su primera denominación en España, quizás sea el más conocido y jugado de los que presentamos en este artículo. Se ha editado en más de 15 idiomas, ha sido premiado en multitud de ocasiones, destacando el *Spiel der Jahres* en 1995, y se realizan competiciones nacionales e internacionales. En la página de la editorial, indicada en el título de la Figura 5, se menciona que se han vendido más de dos millones de unidades y que es un juego que aúna estrategia, astucia y capacidad de negociación. El fin del juego es colonizar una isla y gana el jugador que más expande su control, pues construir caminos, poblados y ciudades otorga puntos de victoria, y el jugador que más puntos obtenga será el vencedor. En la edición básica pueden jugar hasta 4 jugadores pero entre las muchas expansiones que tiene, una permite que jueguen hasta 6 personas. Dado el carácter elaborado de sus reglas, remitimos a la página de la editorial para ver vídeos explicativos o descargar el manual oficial.

Catán ha sido analizado en artículos de investigación de Educación Matemática. Se le asocian contenidos probabilísticos en ciertas fases del juego en las que los resultados del lanzamiento de unos dados condicionan asentamientos en la isla y la obtención de recursos. Zapf (2015) señala que, cuando se juega una partida, los jugadores pasan por una serie de etapas, que se inician con un lanzamiento de dados y la consiguiente generación de hipótesis y de diferentes enfoques de resolución de problemas. Después, deben evaluar la bondad de los resultados obtenidos y así analizar sus posibilidades de expansión. Finalmente, hay una etapa más creativa en la que se recompone el juego y se abren nuevas posibilidades de avance. Maaß y Siller (2013) concluyen que en un juego como *Catán*, el dominio matemático se puede aplicar para encontrar y validar estrategias rentables, pues los jugadores deben modelizar matemáticamente algunas situaciones y no solo han de centrarse en aspectos meramente técnicos y algorítmicos.

Coincidimos con estos expertos en que las tácticas que deben aplicarse en este juego se acercan a las de resolución de problemas que hemos comentado. Además, la experiencia de la autora de este artículo evidencia su interés didáctico en un aula de Educación Secundaria, como describimos más adelante.

Otros juegos interesantes

Sin entrar en el detalle de cada uno, nos parece acertado mencionar algunos otros juegos que favorecen algunas de las habilidades o actitudes que hemos citado hasta el momento.

En ocasiones el interés reside sólo en ellas, sino que las interacciones que se promueven al jugar son valiosas en sí mismas.

Quixxo y *Quarto!*, son dos juegos de la editorial Gigamic que comparten la finalidad de alinear figuras, como el Tres en raya, pero con dinámicas realmente diferentes: en *Quixxo* debes desplazar piezas antes de colocar la tuya y en *Quarto!* hay que alinear cuatro figuras que compartan, al menos, un atributo visual (color, altura, forma de la base,…). También centrado en aspectos geométricos, *Abalone* (editorial Asmodee), resulta realmente adictivo. Diseñado para dos jugadores, cada uno controla canicas de colores opuestos sobre un tablero hexagonal y el objetivo es echar del tablero seis canicas del oponente mediante movimientos de traslación. Aunque el reglamento es muy sencillo, jugar bien es ya otro tema: la percepción espacial y las posibilidades de movimiento al inicio de juego son muchas y se deben tomas muchas decisiones. Este juego también está disponible como una aplicación de tableta.

A *Genial* (editorial Devir) pueden jugar hasta 4 jugadores. Tiene una mecánica básica parecida al dominó, pero va mucho más allá, pues las piezas son dos hexágonos unidos por un lado y no tienen números, sino diferentes formas geométricas de varios colores. Así, el recubrimiento del plano es mucho más rico y cada jugador debe hacer uniones de esas formas para acumular puntos. El nombre del juego lo dice todo.

Un juego que puede usarse muy habitualmente en clase y en poco tiempo es *Alto Voltaje* de la editorial Mercurio[11], juego trepidante de cálculo mental. Es cierto que todo pasa por sumar o restar 1, 2 o 3, pero como todos los jugadores juegan a la vez, las operaciones cambian rápidamente y resulta realmente divertido. Otros juegos que promueven el cálculo mental con cartas y dados son, respectivamente, *¡Mía!* de Tranjis Games[12] y *Qwixx* de Morapiaf[13]. Otro juego relacionado con números es *¡Toma 6!* también de la editorial Mercurio. Es un juego de cartas centrado en hacer series numéricas, pero el juego de un oponente puede modificar notablemente el tuyo.

Hay otros juegos que requieren trabajo en equipo pues tienen carácter cooperativo: todos los jugadores deben aportar algo para conseguir la victoria. En estos juegos, o ganan todos o pierden todos, pero cuando se emplea en el aula, resulta muy interesante observar cómo los alumnos asumen roles en función de los personajes del juego. En este caso destacamos *¡Rescate!* de la editorial Devir, un atractivo juego de bomberos donde los participantes deben rescatar víctimas de un edifico ardiendo y apagar el fuego antes de que se venga abajo la construcción. La manera de optimizar los movimientos requiere de ciertas habilidades matemáticas por la distribución del tablero en filas y columnas y porque hay un dado de 6 caras y otro de 8, multiplicándose así las posibilidades. Cuando en clase los alumnos se ven inmersos en este tipo de juegos, hemos comprobado que asumen roles de trabajo, se comprometen y la comunicación entre ellos se hace imprescindible. Otros ejemplos son *La Boca* de Kosmos[14] y *Brick Party* de SD Games[15], relacionados con percepción espacial y con construcciones. También destacamos en la

11. http://www.mercurio.com.es
12. https://www.tranjisgames.com
13. https://www.morapiaf.com
14. https://www.thamesandkosmos.com/index.php/kosmosgames
15. http://playsdgames.com

Figura 6 (a y b). Jugando a Catán en clase de matemáticas.

misma línea la amplia gama de juegos de escapismo, tal como la serie de juegos *Exit* de la editorial Devir, que enfatizan de manera expresa la colaboración entre jugadores.

PARA TERMINAR: CÓMO USAR ESTOS JUEGOS EN CLASE

En el contexto de los alumnos con altas capacidades y como contrapunto al término de “aceleración curricular”, Ramírez y Flores (2016) proponen la idea de “reposo curricular”. Esta noción, que lo autores defienden para todo el alumnado, se centra en ese tiempo de asentamiento y maduración que requiere el aprendizaje y que rara vez los profesores brindamos y por ende, en pocas ocasiones lo disfrutan nuestros alumnos. Nosotros creemos que en esos tiempo de reposo, los juegos que hemos presentado tienen cabida, no porque se alejen de una finalidad educativa, sino porque promueve que se asienten hábitos de trabajo y se le otorgue solidez a habilidades matemáticas básicas. Todos estos juegos se pueden usar en el aula de matemáticas, son apropiados y relevantes y el tiempo de juego se ajusta bien a una sesión de clase, incluyendo una reflexión sobre el juego que es también importante.

Basándonos en la experiencia de la autora de este trabajo, podemos ejemplificar el uso del juego *Catán* en un aula de tercer curso de Educación Secundaria. Al inicio de la sesión y una vez visto el contenido de la caja, no encontramos especiales problemas para que los alumnos se distribuyan por equipos y lean juntos las instrucciones, pues están muy bien detalladas, si bien suelen recurrir a la versión resumida pues su prioridad es jugar lo antes posible. Desde ese momento, la clase es un auténtico bullicio y resulta especialmente interesante cuando se alcanza la fase de negociación; en este ambiente, parecen otros. Cuando se deben asignar zonas de colonización mediante el lanzamiento de los dados, no surgen de manera espontánea criterios de probabilidad y eso que el juego señala en rojo los números menos probables de obtener con la suma de los valores obtenidos. Al acabar la partida, reconocen que debían de haber hecho otras selecciones e incluso ponen en tela de juicio la calidad de los dados. Centramos así la reflexión final en qué estrategias son las mejores para ganar, qué se puede hacer para no perder y suelen salir a colación algunas cuestiones relacionadas con el azar.

La dinámica general que empleamos cuando introducimos juegos en el aula de matemáticas se puede sintetizar en una serie de pasos orientativos:

1. Dependerá del juego, pero una configuración idónea es formar grupos de cuatro integrantes. El objetivo de este primer momento es la comunicación lingüística, para que verbalicen sus acciones más inmediatas. Deben leer las reglas del juego de forma individual y comentarlas por parejas para ver si han entendido cómo se juega. Si ya conocen el juego, se les pide que las lean igualmente, pues seguro que hay cosas que desconocen y eso se puede justificar porque así llegarán a jugar mejor. En este momento deben surgir preguntas como: ¿En qué consiste el juego? ¿Coincide lo que yo he entendido con lo que has entendido tú? ¿Cómo empezamos a jugar? Si es cooperativo, ¿cómo nos organizaremos?
2. Una vez leídas las reglas y comentadas en grupo, los alumnos deben montar el tablero y los componentes entre todos. También es recomendable que haya una primera partida en la que se ayuden entre ellos y en la que el profesor ayuda para aclarar dudas.
3. Jugar, disfrutar y divertirse.
4. Aplicar un pequeño cuestionario para que los alumnos realicen una breve reflexión sobre la experiencia. Puede incluir cuestiones del tipo: ¿Cómo se llama el juego? (pues en ocasiones juegan y ganan pero no saben cómo se llama); Explica en qué consiste el juego y cómo has jugado. ¿Has jugado de forma diferente la segunda partida ? Si volvieras a jugar, ¿qué cambiarías en tu forma de jugar? ¿Te parece fácil ganar? ¿Se puede empatar? ¿Influye qué jugador empiece una partida?

En el aula estos juegos funcionan y lo hacen sin ningún tipo de camuflaje: las normas son impuestas por las reglas establecidas. El profesor debe buscar los juegos adecuados y los momentos oportunos y, sobre todo, debe también disfrutar con el juego. Introducir estos juegos en el aula potencia la comunicación, la elaboración de estrategias colaborativas y el trabajo en equipo. Además, con determinados juegos se activan habilidades matemáticas fundamentales y también el conocimiento de determinados contenidos. Se trata de resolver problemas al fin y al cabo, pero en un ambiente lúdico en el que los alumnos suelen asumir determinados roles que los aleja de la pasividad que en ocasiones caracteriza su participación en el aula de matemáticas.

REFERENCIAS

Alsina, A. (2016). Diseño, gestión y evaluación de actividades matemáticas competenciales en el aula. *Revista Épsilon, 92*, 7-29.

Becerra, A., Núñez, J. y Perea, J. M. (2016). ¿Cuántas matemáticas hay en los sudokus? *Revista Pensamiento Matemático*, *4*(1), 113-136.

Bouvier, A. (1981). *La mystification mathématique*. Paris: Herman.

Castro, E. y Ruiz-Hidalgo, J. F. (2015). Matemáticas y resolución de problemas. En P. Flores y L. Rico (Corrds.), *Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en Educación Primaria* (pp. 89-106). Madrid: Pirámide.

Chacón, P. (2008). El juego didáctico como estrategia de enseñanza y aprendizaje. ¿Cómo crearlo en el aula? *Nueva Aula Abierta, 16*(5). Disponible en http://www.academia.edu/download/31505080/PaulaChacon.pdf.

Contreras, L. C. y Carrillo, J. (2000). *Resolución de problemas en los albores del siglo XXI: una visión internacional desde múltiples perspectivas y niveles educativos*. Huelva: Hergué Editorial.

Corbalán, F. (1994). *Juegos matemáticos para secundaria y bachillerato*. Madrid: Editorial Síntesis.

Ferrando, I., Castillo, J. y Pla-Castells, M. (2017). Videojuegos de estrategia en Educación Matemática. Una propuesta didáctica en secundaria. *Revista Épsilon, 97*, 23-42.

Flores, P., Ramírez, R. y del Río, A. (2015). Sentido espacial. En P. Flores y L. Rico (Coords.), *Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en Educación Primaria* (pp. 127-146). Madrid: Pirámide.

Gairín, J. M. (1990). Efectos de la utilización de juegos educativos en la enseñanza de las matemáticas. *Educar, 17*, 105-118.

— (2001). Hacer matemáticas: el juego como recurso. En C. Alsina, Mª. A. Ortiz, J. M. Gairín, A. Pérez y J. L. Álvarez (Eds), *Aspectos didácticos de Matemáticas, 8* (pp. 55-116). Zaragoza: Instituto de Ciencias de la Educación de la Universidad de Zaragoza.

Glass, D. Y Neller, T. W. (2016). Optimal defensive strategies in one-dimensional RISK. *The Mathematical Magazine*, *88*(3), 217-230.

Gómez-Chacón, I. (1992). *Los juegos de estrategia en el currículum de matemáticas*. Madrid: Narcea.

Gough, J. (2016). Stimulating mathematical thinking through domino games. *The Australian Mathematics Teacher*, *71*(2), 20-22.

Gutiérrez, A. (2006). La investigación sobre la enseñanza de la geometría. En P. Flores, F. Ruiz y M. de la Fuente (Coord.), *Geometría para el siglo XXI* (pp. 15-58). Badajoz: Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas y Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales.

Jiménez-Bernal, F. y Gutiérrez-Rubio, D. (2018). Propuesta de aplicación del ajedrez como apoyo a la enseñanza de la geometría analítica en el plano. *Revista Épsilon, 98*, 49-56.

Kazemi, F., Yektayar, M. y Bolban, A. M. (2012). Investigation the impact of chess play on developing meta-cognitive ability and math problem-solving power of students at different levels of education. *Procedia - Social and Behavioral Sciences*, *32*, 372-379.

Lupiáñez, J. L. y Flores, P. (2011). Sentido espacial. En I. Segovia y L. Rico (Coords.), *Matemáticas para maestros de Educación Primaria* (pp. 329-349). Madrid: Pirámide.

Martín, J., Muñoz, J. M. y Oller, A. M. (2009). Empleo didáctico de juegos que se matematizan mediante grafos. Una experiencia. *Contextos Educativos*, *12*, 137-164.

Payá, A. (2007). *La actividad lúdica en la historia de la educación española contemporánea*. Tesis doctoral. Universitat de Valencia.

Puig, L. y Cerdán, F. (1995). *Problemas aritméticos escolares*. Madrid: Síntesis.

Ramellini, G. (2014). Strategy games and the school curriculum. *Noubiaix*, *34*, 32-40.

Ramírez, R. y Flores, P. (2016). Planificar el enriquecimiento para alumnos de alta capacidad matemática: reposo curricular. *SUMA*, *83*, 33-41.

Rowland, D. (2015). Candy Crush combinatorics. *The College Mathematics Journal, 46*(5), 255-262.

Tenorio, A. y Martín, A. (2015). Un paseo por la historia de la Teoría de Juegos. *Boletín de Matemáticas, 22*(1), 77–95.

Yong, S. T., Gates, P. y Harrison, I. (2016). Digital games and learning mathematics: Student, teacher and parent perspectives. *International Journal of Serious Games, 3*(4), 55-68.

Walsh, T. (2014). Candy Crush's puzzling mathematics: this simple game has deceptively difficult computational problems behind it, which might be why it is so addictive. *American Scientist*, *102*(6), 430–433.

Una guía práctica para el uso de videojuegos en el aula de Matemáticas

Lluís Albarracín
Universitat Autònoma de Barcelona

Resumen: *En este artículo se presenta una guía básica para utilizar videojuegos en el aula de matemáticas. Se discuten los diferentes tipos de videojuegos que pueden utilizarse y la forma de elegirlos. También se detallan algunos aspectos sobre el rol que debe ocupar el videojuego en la actividad y como complementar la actividad de juego para poder utilizar videojuegos comerciales como contexto rico para promover la competencia matemática de los alumnos.*
Palabras clave: *Serious games, videojuegos comerciales, resolución de problemas.*

Gamification in mathematics, a new approach or a new word?

Abstract: *This article presents a basic guide to use videogames in the math classroom. The different types of video games that can be used and the way to choose them are discussed. Some aspects are also detailed on the role that the video game should occupy in the activity and how to complement the game activity in order to use commercial videogames as a rich context to promote the mathematical competence of the students.*
Keywords: *Serious games, commercial video games, problem solving.*

INTRODUCCIÓN

Las posibilidades de innovación en las aulas de matemáticas se han incrementado notablemente con la llegada de los soportes y contenidos digitales, aunque todavía no se hayan explorado en profundidad todas sus posibilidades. En paralelo, en las últimas décadas se han reconsiderado los objetivos del trabajo en las aulas, desplazando el foco de la enseñanza de los contenidos, tratando de centrar la actividad de aula hacia promover el desarrollo de la competencia matemática. Este cambio supone un reto para el profesorado, que sigue buscando propuestas efectivas de aula, con lo que la innovación ha pasado a ser una constante en muchas aulas de matemáticas.

Muchas de las propuestas innovadoras se nutren del frenético desarrollo de tecnologías de las últimas décadas. Muestras concretas de recursos didácticos basados en la tecnología que cuentan con una trayectoria consolidada son los entornos de geometría dinámica, como Geogebra o Cabri, los entornos de programación que han evolucionado desde LOGO hasta Scratch o los softwares de representación gráfica dinámica de funciones (Radford, 2009).

Este artículo se centra en analizar las posibilidades del uso de videojuegos en las aulas de matemáticas y trata de ofrecer diversas consideraciones para que el profesor pueda orientar de forma precisa actividades matemáticas soportadas en videojuegos. A estas alturas no resulta sorprendente plantearse el uso de un videojuego como herramienta de aprendizaje, pero es necesario observar que los videojuegos han evolucionado notablemente desde su aparición en los hogares a finales de los años 70 del siglo XX. La evidente mejora de los gráficos viene acompañada de la introducción de mecánicas de juego que permiten incorporar nuevos retos a los jugadores y la aparición de un sinfín de géneros y subgéneros, que posibilita que existan videojuegos para todos los públicos y necesidades, desde el entusiasta que dedicará centenares de horas a perfeccionar sus habilidades hasta el que solo necesita un juego para ocupar pequeños espacios de tiempo de forma esporádica.

En determinados casos, los retos que el videojuego plantea al jugador contienen elementos propios de las matemáticas, con lo que la actividad de juego puede asemejarse a un proceso de resolución de un problema matemático, que es una de las actividades centrales de la matemática escolar, pero que continúa siendo difícil de gestionar en las aulas debido a la carga cognitiva que requiere por parte de los alumnos. En este sentido, es necesario recordar que en muchas ocasiones se ha atribuido potencial didáctico a los videojuegos por su componente motivacional, que evidentemente es uno de los elementos que los definen, pero en este artículo voy a tratar de poner de manifiesto que se pueden elegir videojuegos comerciales que además promuevan el pensamiento matemático por la propia naturaleza del juego que proponen y que esta actividad puede ser de una gran riqueza por la profundidad de pensamiento necesaria para enfrentarse a ella y por el alto nivel de complejidad que presenta. Por ello, el primer objetivo de este artículo es evidenciar la potencialidad de determinados videojuegos para promover la actividad matemática. El segundo es mostrar formas exitosas de incluir estos videojuegos en las dinámicas de aula.

De esta forma, este artículo se inicia presentando un fugaz repaso a algunos de los conceptos básicos sobre el uso de videojuegos como herramienta educativa, detallándose los resultados más prominentes de las investigaciones realizadas al respecto. A continuación, se incluye la discusión de aspectos esenciales para la toma de decisiones por parte del profesor de matemáticas para elegir videojuegos adecuados para sus actividades, así como para poder elegir una forma de gestión de aula que aproveche al máximo la potencialidad del videojuego. Finalmente, se muestran ejemplos de concreciones de actividades complementarias a la actividad de juego, que son las que en último término deben permitir consolidar los aprendizajes de los alumnos que vienen promovidos por el uso del videojuego.

LOS VIDEOJUEGOS COMO HERRAMIENTA EDUCATIVA

Bishop (1999) describe las matemáticas como una tecnología simbólica que está caracterizada por las actividades universales de contar, localizar, medir, diseñar, jugar y explicar. Bishop entiende que la ejecución de estas actividades requiere diversos conceptos y potencialidades matemáticas. Desde esta perspectiva, *jugar* es una actividad que constituye una parte importante del desarrollo cognitivo y social de los niños y, de hecho, los juegos han sido desde siempre una actividad cotidiana de la humanidad.

Salen and Zimmerman (2004) definen juego como "*un sistema en el que los jugadores se involucran en conflictos artificiales, definidos por reglas, que dan como resultado un resultado cuantificable*" (p. 80). En el caso de un juego digital o videojuego, la definición es válida simplemente añadiendo como soporte para el juego una plataforma digital. Para De Guzmán (2007) los juegos están relacionados con el aprendizaje de las matemáticas, ya que requieren relacionarse con unas reglas, incitan al uso de aquellas técnicas que llevan al éxito y permiten desarrollar patrones de juego complejos, equivalentes a problemas matemáticos.

Si nos centramos en los videojuegos, estos poseen características que los hacen atractivos para los jugadores (Rosas et al., 2003) y que los dotan de una gran potencialidad como instrumentos para aprender estrategias específicas y para adquirir conocimientos (Gros, 2007). Charsky (2010) considera que las características esenciales de los videojuegos como herramientas educativas son la competición y la presencia de objetivos, la existencia de reglas bien definidas y la necesidad de tomar decisiones. Como simulaciones, los videojuegos proporcionan a los jugadores la oportunidad de pensar, entender, preparar y ejecutar acciones, así como la posibilidad de jugar colaborativamente en videojuegos multijugador y compartir conocimientos y habilidades (Gee, 2003). Que los videojuegos estén diseñados a partir de normas y objetivos concretos y la naturaleza de la interacción con la máquina, les permite ofrecer respuesta inmediata a las acciones del jugador, lo que los dota de una alta efectividad como herramienta de aprendizaje (Dickey, 2005). Esta rapidez con la que se obtienen diferentes tipos de respuestas a las acciones realizadas permite que el jugador adapte y mejore su actividad para conseguir los retos que el juego plantea.

LA ACTIVIDAD DE JUEGO COMO ACTIVIDAD DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

En un estudio cualitativo basado en identificar los procesos que desarrollan los alumnos durante una partida de un videojuego de estrategia denominado *Vector Tower*

Defense 2, y que trataremos en mayor detalle más adelante en este texto, Hernández-Sabaté, Joanpere, Gorgorió y Albarracín (2015) comprobamos que la actividad desarrollada por alumnos de Educación Primaria y Secundaria durante el juego es equivalente a un proceso de resolución de problemas matemáticos. En concreto, identificamos los procesos de planificación, toma de decisiones, predicción, razonamiento y justificación. Estos procesos son propios de la resolución de problemas matemáticos (Pólya, 1945) y se dan de forma natural al tratar de conseguir los objetivos de juego y superar los retos que se plantean.

El análisis del comportamiento de los alumnos muestra la presencia constante de estos procesos, lo que se asocia a lo que podríamos denominar "resolución de problemas intrajuego", pero el estudio evidencia que en los procesos de resolución se involucran un gran número de conceptos matemáticos que aparecen al tratar de entender y alcanzar el reto propuesto por el videojuego. En concreto identificamos que los alumnos se enfrentan durante el juego a situaciones que pueden ser traducidas fácilmente a problemas aritméticos, geométricos, de proporcionalidad y de optimización. De hecho, el juego se manifiesta como una actividad realmente compleja de resolución de problemas, ya que los alumnos tratan de resolver diferentes tipos de situaciones problemáticas que aparecen durante el juego de forma simultánea, solapándose en el tiempo, y generando amplios ciclos entrelazados de "Observación → Planificación → Toma de decisiones", hecho que interpretamos como que los alumnos están pendientes de la resolución de diversos problemas de forma simultánea.

El trabajo concluye con la identificación de diversas oportunidades de aprendizaje matemático, que no en todos los casos son aprovechadas por los alumnos para transformarse en aprendizajes efectivos, pero que suponen el inicio de una línea de investigación que me ha llevado a implementar en el aula diversas propuestas distintas utilizando videojuegos en aulas de Educación Primaria y Secundaria. El diseño de estas actividades está orientado a que el videojuego sea la herramienta que proporciona situaciones problemáticas en las que aparecen oportunidades de aprendizaje matemático y que se proporcione a los alumnos actividades complementarias para ayudarlos a generar los aprendizajes pretendidos. Esta experiencia es la base de la guía que detallo a continuación y que pretende dar al profesor orientaciones concretas y fundamentadas para poder incorporar los videojuegos a su propuesta de aula.

UNA GUÍA PARA UTILIZAR VIDEOJUEGOS EN EL AULA DE MATEMÁTICAS

Lo que sigue es un conjunto de consideraciones para el uso de videojuegos en el aula de matemáticas. Se presentan aspectos logísticos como el tipo de soporte necesario para jugar, un análisis de la naturaleza de los diferentes tipos de videojuegos recomendados y el tipo de contenidos matemáticos a trabajar, así como consideraciones didácticas relacionadas con la organización del aula y la propuesta de trabajo necesaria para complementar la actividad de juego.

Soporte de juego

La primera decisión a tomar viene condicionada por los recursos disponibles en forma de soportes de juego. Esta decisión condiciona buena parte de la práctica de aula, ya que cada tipo de soporte permite un tipo u otro de videojuegos y, sobre todo, una forma distinta de interacción con la máquina. Los videojuegos están diseñados para ser jugados sobre determinados soportes, ya sea un ordenador, una consola, una tableta o un móvil. No es nada habitual que los centros educativos dispongan de consolas de juego ni parece recomendable que se solicite a los alumnos que las lleven al centro para poder trabajar con ellas, con lo que las opciones realistas se centran en jugar en ordenadores o tabletas. En el caso de alumnos de Educación Secundaria podrían utilizarse los teléfonos móviles propios de los alumnos, aunque esencialmente podrán ejecutar el mismo tipo de videojuegos a los que les permiten jugar las tabletas.

El soporte tableta permite ejecutar juegos diseñados para dispositivos móviles. Este hecho condiciona el diseño de los juegos, desde dos puntos de vista principales. Por una parte, los controles del juego serán táctiles. Este hecho reduce el número de juegos disponibles, ya que no todos los tipos de juego se adaptan fácilmente a este tipo de control, pero siguen existiendo juegos en los que señalar y arrastrar son formas adecuadas de control y permiten que el juego accesible a un amplio número de alumnos, que no siempre estarán acostumbrados a otros tipos de control, como puede ser el uso de un mando. El segundo aspecto relevante es el tipo de experiencia que ofrece el juego en dispositivos móviles. En general estos juegos plantean retos estructurados en fases que se pueden jugar en pocos minutos, ofreciendo en muchos casos un gran número de niveles disponibles para el jugador. Este diseño se adapta fácilmente a los tiempos que disponemos en las aulas y permite organizar la actividad en base a un número determinado de niveles a jugar, conociendo de antemano las situaciones que los alumnos deberán superar. Además, en muchos casos los primeros niveles acostumbran a ser un manual de instrucciones jugable, con lo que no es necesaria una introducción en detalle presentando el juego a los alumnos. Un aspecto positivo es que una gran mayoría de los videojuegos disponibles en las tiendas online de los dispositivos móviles son gratuitos o disponen de una versión reducida gratuita, que puede ser perfectamente útil para una actividad de aula.

Por su parte, el soporte en ordenador permite un mayor catálogo de videojuegos a elegir, pero existen limitaciones prácticas que lo reducen. Los ordenadores disponibles en los centros educativos no acostumbran a tener una tarjeta gráfica dedicada, con lo que los videojuegos más demandantes en recursos no son una opción viable. Por ello, los videojuegos a nuestro alcance son aquellos que fueron publicados hace años o los diseñados para jugar desde el navegador, que también podrían utilizarse en ordenadores tipo *chromebook*, que empiezan a ser comunes en los centros educativos. Este último tipo de juegos es muy recomendable, ya que comparte algunas de las características de los juegos diseñados para dispositivos móviles. como son las partidas con niveles que requieren tiempos cortos y una curva de aprendizaje que encaja con los tiempos habituales en las aulas.

Figura. 1. Una captura de pantalla de *DragonBox Algebra*.

Serious games

Los *serious games* (juegos serios) son juegos diseñados con un propósito principal distinto del entretenimiento, hecho que motiva su nomenclatura. Existen serious games diseñados con propósitos muy dispares, como los destinados a concienciar a los jugadores (hábitos saludables de vida, medio ambiente), los pensados como ejercicios puramente artísticos o simuladores que permiten recrear prácticas complejas en entornos seguros, como pilotar un avión o practicar los protocolos de una intervención quirúrgica. Los serious games se utilizan por i) las posibilidades que ofrecen para motivar a los alumnos, ya que tratan de mantener parte del atractivo de los videojuegos comerciales; ii) la inmersión que proponen, que habilita el pensamiento profundo al poder ignorar distractores en la práctica en el mundo real; iii) la posibilidad de ofrecer respuestas inmediatas a las acciones del jugador; y iv) ofrecer un entorno virtual seguro en el que el error solo tiene consecuencias dentro del contexto de juego.

En nuestro caso nos interesan los videojuegos con objetivos educativos y didácticos, centrados en el aprendizaje de las matemáticas. Un ejemplo muy interesante de videojuego educativo es *DragonBox Algebra*, que puede jugarse en dispositivos móviles. El juego recrea las reglas de la resolución de ecuaciones y las presenta en forma de retos basados en rompecabezas. Concretamente, el juego substituye las incógnitas y números por elementos gráficos y las reglas de resolución por unas reglas alternativas pero equivalentes sobre los movimientos de las piezas en un tablero. El tablero está dividido en dos partes y cada una es equivalente a uno de los dos miembros de una ecuación (véase la fig. 1).

Gutiérrez-Soto, Arnau y González-Calero (2015) han estudiado el impacto del uso de *DragonBox Algebra* sobre la competencia de resolver ecuaciones de alumnos de Educación Secundaria cuando regresan al mundo del álgebra obteniendo resultados positivos. En la misma línea existen otros videojuegos del mismo desarrollador[1] diseñados

1. https://dragonbox.com/

Figura 2. Una captura de pantalla de *Semideus*.

para promover el aprendizaje de la geometría euclídea (*DragonBox Elements*) o la aritmética (*DragonBox Numbers*).

Otro videojuego diseñado como herramienta para enseñar matemáticas es *Semideus*[2] que surge de un proyecto de investigación de la Tampere University of Technology en Finlandia (fig. 2). El videojuego se dirige a trabajar los aspectos conceptuales relacionados con las fracciones y su representación sobre la recta numérica. Las investigaciones de sus creadores revelan que el videojuego promueve aprendizajes como la equivalencia y ordenación de fracciones y la comparación de valores de fracciones a partir de la estimación y la representación en la recta numérica (Kiili, Moeller & Ninaus, 2018).

Por su naturaleza, los videojuegos educativos diseñados para enseñar matemáticas requieren de una dinámica de aula relativamente simple, ya que ellos mismos contienen los elementos didácticos necesarios para promover aprendizajes. Sin embargo, los videojuegos de este tipo que realmente inciden en aspectos conceptuales son escasos. En algunos casos nos encontramos con videojuegos que proponen una experiencia de juego pobre, basada en otorgar logros a superar niveles que no dejan de ser meros ejercicios de cálculo. En estos casos, los alumnos acostumbran a perder rápidamente el interés por el juego. Otras propuestas, como pueden ser *Math Combat Challenge* o *Meltdown*, ofrecen videojuegos de acción como los que juegan los alumnos en su tiempo de ocio, pero añaden actividades matemáticas, normalmente cálculos, dentro del juego. Este último tipo de videojuegos introducen las matemáticas de forma completamente artificial en la dinámica de juego y pueden generar la concepción en los alumnos que las matemáticas son aquello que no les permite disfrutar del juego. La Figura 3 muestra una captura de imagen de *Meltdown*, en la que se puede ver que los alumnos deben decidir si las igualdades

2. http://www.flowfactory.fi/semideus/

Figura 3. Una captura de *Meltdown*, un videojuego de acción en primera persona en el que la acción se interrumpe con actividades matemáticas.

numéricas mostradas son ciertas para poder seguir con el juego. De esta forma, la actividad matemática que se propone debe hacerse dentro de la actividad de juego, pero en paralelo a la dinámica planteada. Este hecho supone una interrupción de la actividad principal, lo que supone un obstáculo para el alumno y una posible fuente de desafección hacia el trabajo matemático planteado en este formato.

Dado que el diseño de un *serious game* orientado al aprendizaje de las matemáticas no es un ejercicio trivial y es fácil que las propuestas caigan en la opción de camuflar actividades matemáticas rutinarias bajo un entorno de juego, en el siguiente bloque considero una opción opuesta, la de utilizar videojuegos dirigidos al entretenimiento que posibilitan el trabajo matemático por las características concretas de los retos que presentan.

Videojuegos comerciales

Un enfoque distinto a los *serious games* es el de utilizar videojuegos comerciales, aquellos que han sido diseñados esencialmente para ofrecer entretenimiento, y adaptar su uso a los propósitos didácticos del profesor. En la actualidad existe un abanico enorme de géneros y subgéneros de videojuegos, muchos de ellos no contienen elementos que permitan su uso educativo, otros pueden promover reflexiones interesantes pero que no involucren un análisis matemático de la situación, con lo que pueden ser herramientas útiles para otras materias (como podría ser cualquier juego de la saga *Assassin's Creed* para contextualizar determinadas épocas históricas) pero no para fomentar el aprendizaje matemático. Por ello, en el resto de este artículo me centro en aquellos videojuegos comerciales que incluyen elementos que permiten un acercamiento desde el análisis matemático que puede trasladarse de forma efectiva a las aulas de matemáticas.

En la elección del videojuego a utilizar, el primer paso es identificar la potencialidad para promover actividad matemática durante el juego. Este aspecto es estrictamente necesario en los videojuegos comerciales, justamente porque no han sido diseñados con el propósito de servir como herramienta educativa. El objetivo es aprovechar que ofrecen una propuesta de juego atractiva y que sea el docente el que se encargue de potenciar las posibilidades de trabajar las matemáticas con ellos.

En el pasado me encargué de una sección fija en la revista SUMA en la que repasé algunos videojuegos comerciales que presentan un claro potencial de aprendizaje matemático. Esa sección estaba orientada a recomendar videojuegos que los alumnos pudieran jugar en sus casas y que pudieran ser recomendados por el profesor, de la misma forma que muchos profesores recomiendan películas con contenidos matemáticos, o que repasan vidas de matemáticos célebres, o recomiendan novelas en las que las matemáticas juegan un papel relevante. La idea subyacente es que, si los alumnos van a pasar parte de su tiempo libre jugando, que el profesor de matemáticas pueda ofrecer opciones que proporcionen experiencias matemáticamente interesantes a sus alumnos.

Un ejemplo es el videojuego *Portal 2* (Albarracín, 2013) que presenta retos basados en alterar la topología de los espacios de los que la protagonista debe salir y que está estructurado como una secuencia de problemas en la que cada aprendizaje se refuerza y es clave para poder superar los niveles siguientes. Sin embargo, aunque la experiencia de juego en *Portal 2* promueva aspectos de resolución de problemas en un contexto en el que el análisis de la geometría del espacio es clave, el tiempo necesario para poder trabajar estos conceptos es muy superior al que disponemos en la práctica.

Otra opción es *SimCity* (Albarracín, 2015), un videojuego de simulación en el que el jugador toma el rol del alcalde/gestor de una ciudad y debe diseñarla y controlarla, gestionando aspectos como la distribución de las zonas residenciales, la recaudación de impuestos o la gestión de los servicios básicos. Jugando a *SimCity* se deben tomar decisiones complejas, en las que un análisis matemático de la situación es de gran ayuda para solucionar las dificultades que presenta la simulación. Como en el caso de *Portal 2*, el tiempo necesario para entender las mecánicas de juego y conocer todos los elementos involucrados en la toma de decisiones (urbanísticos, económicos, ambientales, de gestión de la energía y un largo etcétera) requiere de una cantidad de tiempo de la que generalmente no disponemos.

Ante esta situación, es necesario centrarse en videojuegos que puedan ser utilizados de forma efectiva en el aula. Videojuegos que permitan que los alumnos puedan empezar a jugar rápidamente y que puedan estructurarse en actos cortos. El género de videojuegos que mejor se ajusta a esta descripción son los videojuegos de puzle. Seguramente el ejemplo más conocido es *Tetris*, un videojuego en el que se deben encajar tetrominós, pero existen una amplia gama de juegos diferentes que comparten el patrón de proponer pequeños retos a los alumnos. Si pretendemos trabajar la perspectiva en entornos tridimensionales, *Monument Valley* (fig. 4) y *Echocrome* son dos propuestas distintas basadas en los mundos irreales de M. C. Escher.

Otro tipo de juego de puzles que proporciona muchas posibilidades de trabajar aspectos metacognitivos sobre resolución de problemas son los juegos de tuberías, de los que hay muchas variantes para dispositivos móviles. Estos juegos pueden ser una buena opción en Educación Primaria, específicamente en el segundo ciclo, para trabajar

Figura 4. Una captura de *Monument Valley* en la que se ve un diseño de juego basado en los mundos irreales de M. C. Escher.

contenidos de orientación y caminos en el plano. Dado que de este subgénero se pueden encontrar múltiples juegos, podemos elegir aquél que más se acerque a nuestros intereses o que incluya elementos de diseño que podamos aprovechar. Por ejemplo, el videojuego *Pipeline* propone que construyamos una tubería para conectar dos tomas de agua (la verde y la roja en la fig. 5) pero las piezas a utilizar se encuentran en la pantalla desde el inicio y la intervención del jugador se basa en rotarlas para crear el camino por el que pasará el agua. Este diseño proporciona una mecánica de juego más simple que otras propuestas en las que el jugador debe elegir una pieza y colocarla libremente en el terreno de juego, con lo que el manejo del videojuego es más ágil y los alumnos se enfrentan antes al reto propuesto.

Un género distinto es el de los videojuegos de estrategia en tiempo real. La relevancia de estos videojuegos proviene de los años 90 con ejemplos como *Dune*, *Warcraft* o *Starcraft* (Albarracín, 2014), pero en los últimos años han vuelto a ganar popularidad por juegos en equipo como *League of Legends*. Nuevamente, este tipo de juegos no son fáciles de trasladar a las dinámicas habituales de aula, con lo que es necesario elegir algún videojuego que reduzca la complejidad de juego que acostumbran a presentar. En este caso, los videojuegos del género *tower defense* simplifican la complejidad respecto a los videojuegos de estrategia en tiempo real de forma que pueden plantearse actividades que complementen el juego con el objetivo de trabajar diferentes contenidos matemáticos.

Los videojuegos *tower defense* se caracterizan por una serie de mecánicas comunes. Cada nivel consiste en un mapa en el que hay un camino por el que circulan una serie de enemigos que aparecen en hordas, dividiendo cada nivel en diferentes rondas. El jugador debe colocar una serie de torres defensivas fijas en puntos escogidos del mapa donde atacarán a los enemigos dentro de un determinado radio de acción y con una fuerza determinada, ambas características específicas de cada tipo de torre. El juego se basa en un sistema económico que permite comprar y mejorar las torres, potenciando sus

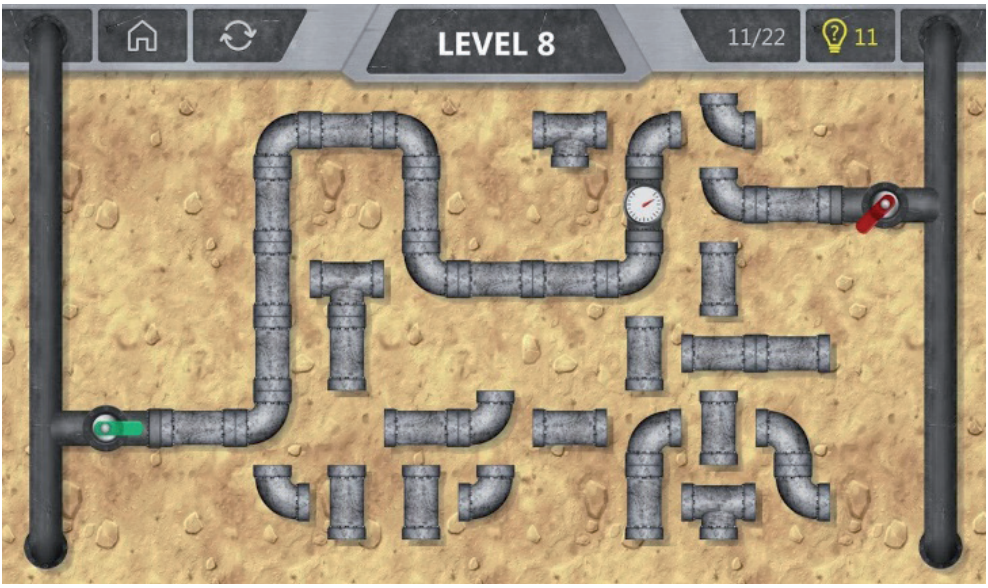


Fig. 5. Una captura de pantalla de *Pipeline* con el camino casi definido.

características. El objetivo es sobrevivir a los sucesivos ataques de los enemigos, evitando que lleguen al final del camino.

En Ferrando, Castillo y Pla-Castells (2017) y en Joanpere, Nicolich, Vila y Albarracín (2016) se describen dos propuestas diferentes basadas en el uso de dos videojuegos *tower defense* como son *Bloons Tower Defense 5* y *Vector Tower Defense 2*, respectivamente. Ambos videojuegos comparten las mecánicas básicas de juego que son las que plantean una actividad que admite un análisis matemático a los jugadores/alumnos. Identificar la potencialidad matemática es uno de los elementos clave para elegir el videojuego, con lo que aquí nos centraremos en evidenciar qué aspectos concretos del diseño de estos dos videojuegos podemos aprovechar en el aula.

La principal mecánica de un videojuego *tower defense* es elegir y colocar torres sobre el campo de juego, con lo que el posicionamiento de torres es un aspecto crucial. Elegir una torre comporta disponer de los recursos adecuados (o tener un plan para conseguirlos), elegir un tipo concreto de torre que se ajuste a las necesidades identificadas y elegir una posición para colocarla. En Joanpere et al. (2016) se propone profundizar en el análisis de esta elección a partir de aislar este componente del juego y estudiarlo como proceso independiente. En concreto, se propone a los alumnos la actividad de decidir el mejor lugar del mapa para colocar una torre con un alcance determinado (Fig. 6).

El análisis pasa por crear una función de utilidad de la torre, que debe relacionarse con el área de camino que puede cubrir y tratar de maximizar la función "área de camino cubierta". Los alumnos del ciclo superior de Educación Primaria trabajan a partir de contar cuadrados, pero con los alumnos de Educación Secundaria es posible trabajar directamente el área cubierta sin simplificaciones.

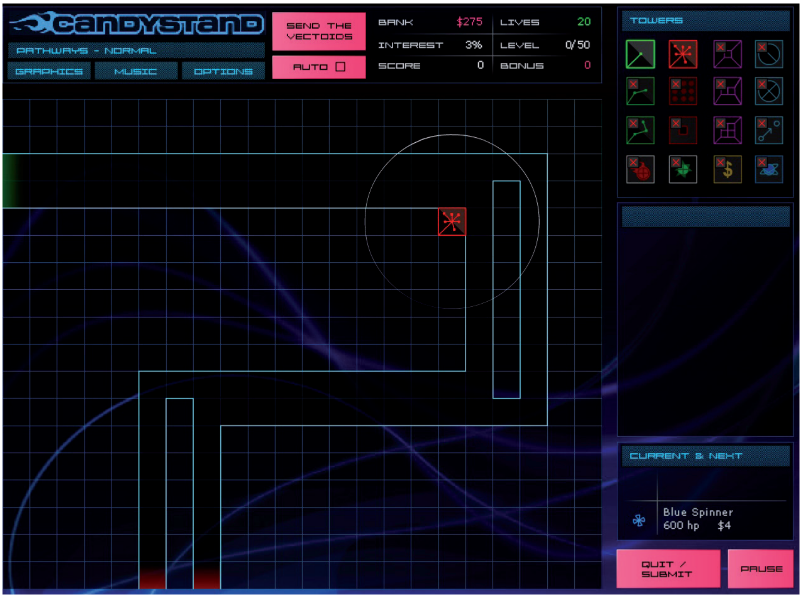


Figura 6. Una captura del mapa de *Vector Tower Defense 2* en la que se muestra como el jugador coloca una torre roja y considerando su alcance.

Por su parte, Ferrando, Castillo y Pla-Castells (2017) sugieren plantear la actividad matemática desde el punto de vista de la modelización a partir de *Bloons Tower Defense 5* para trabajar el concepto de función. En este punto me parece interesante destacar que, aunque *Vector Tower Defense 2* y *Bloons Tower Defense 5* son videojuegos del mismo género y comparten gran parte de los elementos de diseño que los caracterizan, presentan diferencias que pueden ser especialmente útiles para determinados tipos de actividad. En concreto, *Vector Tower Defense 2* es muy explícito con las características concretas de los enemigos y torres en el juego. Por ejemplo, es posible leer en pantalla que los enemigos del primer nivel tienen 600 puntos de vida y que la torre roja daña en 110 puntos a todos aquellos enemigos a los que dispara. Esto permite plantear problemas a los alumnos para predecir el comportamiento de los enemigos ante determinadas torres, que pueden ir aumentando en complejidad al leer en pantalla que las torres rojas causan un 150% de daño a los enemigos rojos pero solo un 50% del daño habitual a los enemigos verdes (fig. 7).

En cambio, los diseñadores de *Bloons Tower Defense 5* no incluyeron este tipo de información en la pantalla de juego, aunque sabemos que este es el tipo de cálculos que computa el juego para resolver los eventos del juego. Por ello, dado que esta información no está disponible para los alumnos, tiene sentido plantear la actividad de modelización del comportamiento interno del juego (¿cuánto tarda una torre en volver a disparar?, ¿qué cantidad de daño hace en cada disparo?). Esta diferenciación entre los dos videojuegos puede entenderse como una oportunidad para generar actividades distintas y adaptadas a los conocimientos de los alumnos en cada nivel educativo. Dado que para determinados géneros existe una gran cantidad de variantes de un mismo formato de juego, es posible elegir aquél que se adapte mejor a la propuesta que el profesor tenga en mente.

Organización de la actividad de juego

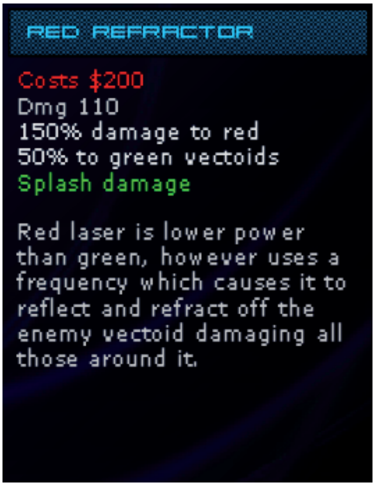


Figura 7. Detalle de la información proporcionada en pantalla por *Vector Tower Defense 2*.

La mayoría de los videojuegos que hemos identificado como adecuados para su uso en el aula de matemáticas, ya sean *serious games* o videojuegos comerciales, presentan una propuesta de juego individual. En este caso, el docente puede mantener esta propuesta y buscar la interacción entre los alumnos a partir de compartir experiencias de juego o en el trabajo complementario a la actividad de juego. Pero también es interesante valorar la posibilidad de pedir a los alumnos que jueguen en otras configuraciones. En el estudio desarrollado en Hernández, Joanpere, Gorgorió y Albarracín (2015) pedimos a los alumnos que jugaran en parejas a un juego individual, provocando la necesidad de consensuar las decisiones a tomar. En ese caso, esta propuesta respondía a la necesidad de que los alumnos verbalizaran sus razonamientos y los defendieran frente a un igual. De la misma forma, en el aula se puede promover que los alumnos discutan y compartan ideas sobre el videojuego al jugar en pareja. De esta forma, el profesor puede aprovechar las discusiones entre los alumnos para proponer actividades de análisis matemático que permitan resolver las dificultades que aparecen durante el juego.

Otra forma de organización de la actividad de juego es que cada uno de los alumnos se enfrenten por ellos mismos al videojuego, pero que exista un conjunto de objetivos comunes a alcanzar propuestos a todo el grupo-clase. Por ejemplo, en un videojuego que se estructure en niveles, el reto puede ser que alguien del grupo llegue a superar un nivel determinado, sabiendo de antemano que ese objetivo es realmente difícil sin compartir ideas o estrategias. De otra forma, se puede conseguir que los alumnos trabajen cooperativamente al solicitar que todos superen un nivel mínimo. Esta forma de organización promueve compartir conocimientos sobre el juego, que si están conectados con aspectos matemáticos van a promover la generación y aplicación de conceptos clave. Que todo el grupo tenga un objetivo común permite discusiones en forma de lluvia de ideas a partir de las cuales se pueden testar las diferentes estrategias necesarias para avanzar con éxito en el juego. Utilizando este tipo de propuesta con *Vector Tower Defense 2* en un grupo de 6º de Primaria, los alumnos compararon distintas configuraciones de torres, midiendo su eficacia en el juego a partir de una función que definieron ellos mismos para ser usada en el modo de juego libre que incorpora el videojuego. En este modo no existe la limitación de los recursos iniciales, con lo que supone un entorno perfecto para la experimentación.

Rol del videojuego en la actividad

Una vez determinado el videojuego e identificados los elementos matemáticos que aparecen durante el juego, es necesario crear las actividades que van a complementar la

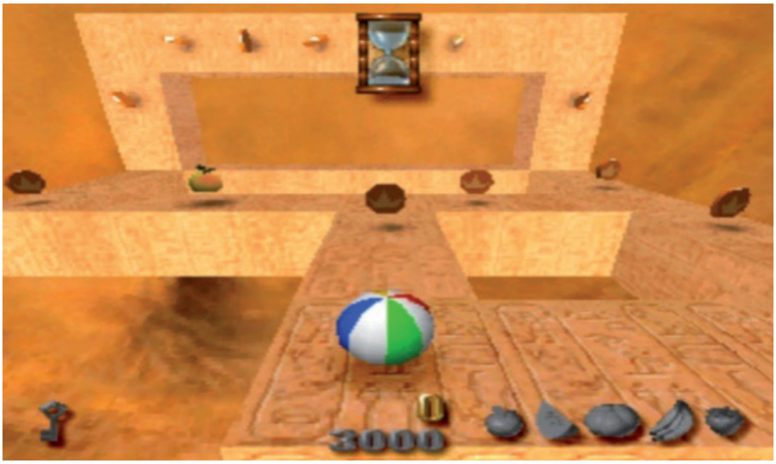


Figura 8. Un nivel de *Kula World* en una plataforma tridimensional.

experiencia de juego con el objetivo de explicitar el trabajo matemático y consolidar aprendizajes. Esto es debido a que los videojuegos comerciales no están diseñados como herramientas didácticas y priorizan la experiencia de juego, con lo que los alumnos juegan en un entorno que puede ser muy rico por su complejidad, pero no nos asegura que el trabajo sea tan profundo como deseamos. Para ilustrar esta necesidad, voy a centrarme en primera instancia en desarrollar un ejemplo que he utilizado en diversas ocasiones con alumnos del ciclo superior de Educación Primaria.

Kula World es un videojuego de tipo puzle en el que el jugador controla una esfera (en este caso es una pelota de playa) que debe recorrer una plataforma tridimensional formada por cubos en busca de las llaves que le permitan habilitar la salida (Fig. 8).

En *Kula World*, el jugador controla el movimiento de la pelota con el teclado y puede moverse en cuatro direcciones en el plano (delante, detrás, izquierda y derecha). Cuando la dirección está definida, puede decidir avanzar en línea recta hacia adelante. También se puede saltar para cambiar de plataforma o esquivar objetos peligrosos. De esta forma, cuando el jugador se mueve por la plataforma ve vistas distintas de ella, siempre desde el punto de vista subjetivo de la posición de la pelota de playa, con lo que debe interpretar su posición en la plataforma para orientarse y localizar los objetos que debe conseguir.

Los alumnos juegan de forma intuitiva y veloz. El juego no proporciona momentos para que los alumnos se paren a pensar sobre la mejor forma de alcanzar un punto concreto de la plataforma, ya que cada nivel tiene un tiempo determinado para ser superado. En muchos casos, si los alumnos no consiguen los objetivos de un nivel, reinician nivel y trabajan siguiendo la estrategia de ensayo y error. De esta forma los alumnos experimentan dificultades para visualizar las plataformas tridimensionales y se ven obligados a enfrentarse a situaciones complejas, pero hasta este punto el videojuego no ha hecho más que ofrecer oportunidades de aprendizaje que pueden ser superadas sin que los alumnos analicen adecuadamente la situación. Por ello es necesario plantear actividades que partan de esta experiencia y que los obliguen a trabajar desde otra perspectiva.

En este caso una propuesta interesante es proporcionar a los alumnos un material manipulativo que les permita construir réplicas de las plataformas que aparecen en el juego

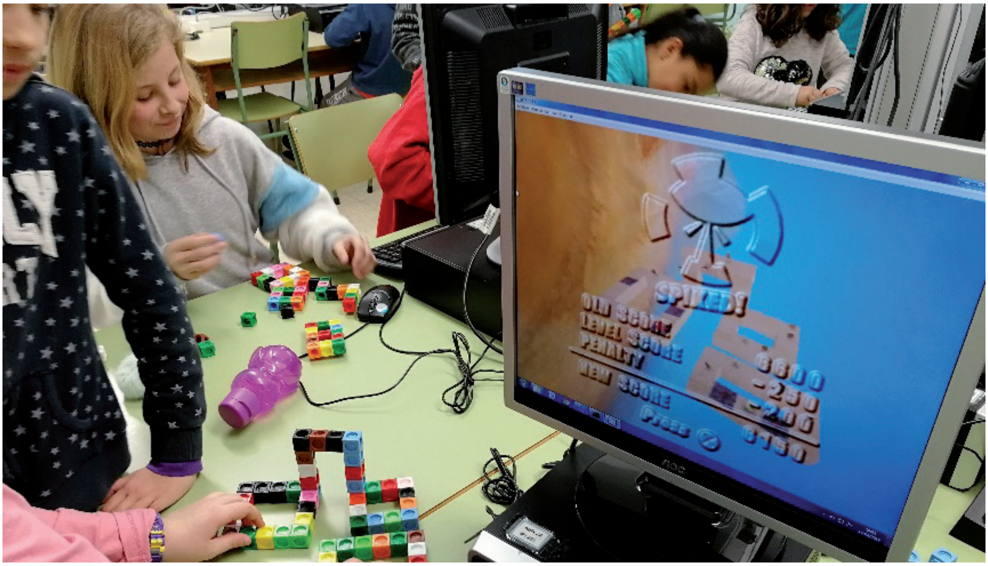


Figura 9. Unas alumnas reproduciendo una plataforma de *Kula World* utilizando cubos multilink.

en el mundo real. La Figura 9 muestra a una pareja de alumnas que trata de reproducir estas plataformas usando cubos multilink. Este trabajo permite evidenciar la naturaleza tridimensional de entorno en el que han jugado.

Una vez los alumnos han construido algunas de estas plataformas, la actividad se puede conducir a pensar con detalle algunos aspectos que propone el juego y analizarlos matemáticamente. En concreto, se puede pedir a los alumnos que, respetando las normas de movimiento del juego, determinen qué zonas de la plataforma son accesibles desde una posición inicial de la pelota. De esta forma se trabajan los caminos en entornos tridimensionales y las normas del juego pasan a actuar como restricciones de los problemas planteados. Así también se transforma una actividad geométrica (construir plataformas) en una actividad topológica (diferenciación de zonas) que conecta con la experiencia de juego, por lo que resulta natural para los alumnos y aprecian que es interesante para ver el juego desde otra perspectiva.

Los problemas a plantear a los alumnos en este contexto pueden ser muy diversos. Una vez identificada una plataforma que contenga zonas no accesibles desde un punto de partida dado, se puede proponer a los alumnos que la modifiquen (añadiendo cubos o plataformas auxiliares para permitir llegar a esas zonas) para que desde ese punto inicial se pueda llegar a recorrer toda la plataforma. Este tipo de actividad enlaza con el diseño de plataformas y los alumnos valoran la idea de trabajar como lo hacen los diseñadores del videojuego para ofrecer niveles que sean interesantes para el jugador. De esta forma la actividad puede continuar diseñando nuevas plataformas que podrían ser niveles alternativos a los propuestos por el videojuego. La opción más accesible es construir estas plataformas con materiales manipulativos, pero también existe la opción de trabajar en un entorno virtual tridimensional como *SketchUp*, aunque este último requiere que los alumnos se acostumbren y dominen una forma diferente de representar objetos. Los

Figura 10. Una captura de pantalla de *The Plague* en la que el sur de Asia ha sido infectado.

alumnos muestran mucho interés en esta actividad, especialmente en discutir los elementos y características que permiten establecer una escala de dificultad para clasificar los niveles del videojuego.

Tal y como está diseñada, esta actividad parte de la propuesta de juego de *Kula World*, iniciando los alumnos la actividad con el rol de jugadores, pero al avanzar se les proponen que tomen un rol distinto, acercándose al tipo de reflexión que hace un diseñador de videojuegos y en el que queda claro que el análisis matemático es parte fundamental.

A continuación, detallaré otro ejemplo que puede conllevar una aproximación algo distinta al videojuego. Esta propuesta proviene de Frejd y Ärlebäck (2017), que utilizaron el videojuego *The Plague* (Fig. 10) con alumnos de los cursos superiores de Educación Secundaria, equivalente a la etapa de Bachillerato en España. *The Plague* es un videojuego para plataformas móviles en el que el jugador tiene la posibilidad de diseñar un virus con el objetivo de infectar a toda la población humana terrestre y provocar una pandemia que acabe con la humanidad. *The Plague* también es interesante desde el punto de vista de los conocimientos biológicos, ya que el virus puede diseñarse para que soporte climas tropicales, para que tenga un periodo de incubación largo y permita infecciones después de largos viajes transoceánicos o que provoque efectos secundarios como mucosidad o tos para que pueda propagarse más efectivamente.

Desde el punto de vista de las matemáticas, *The Plague* es interesante porque permite analizar la evolución de la población infectada. Este es un aspecto crucial en el desarrollo del juego y los alumnos se enfrentan a él de forma intuitiva. La propuesta de Frejd y Ärlebäck (2017) es que los alumnos recojan los datos que va ofreciendo el juego, generen las gráficas de población adecuadas y estudien la naturaleza de las curvas que aparecen. Dado el alto nivel de autenticidad de la simulación, este trabajo permite discutir en el aula fenómenos de crecimiento exponencial y la función logarítmica.

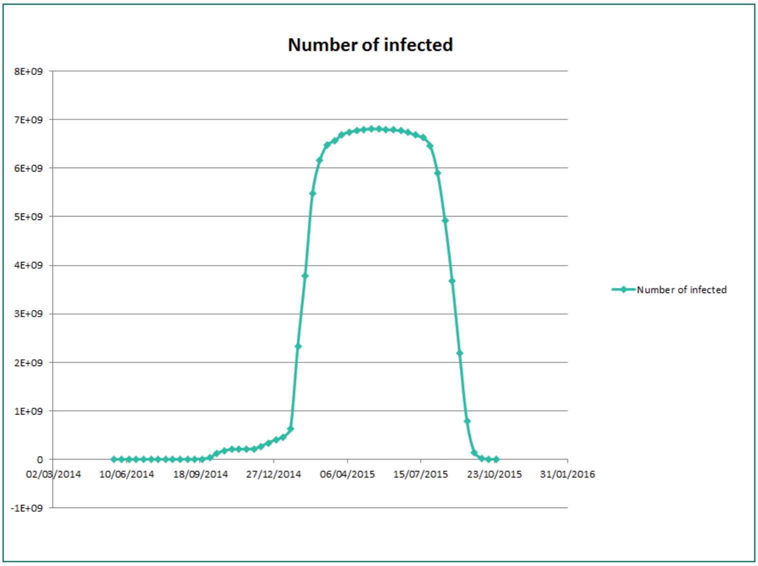


Figura 11. Una muestra de gráfico de población elaborado jugando a *The Plague*.

La propuesta permite que los alumnos relacionen la forma de las curvas estudiadas con su experiencia en el juego, dotando de significado a la curva y su evolución, ya que los momentos de mayor crecimiento de la población infectada son aquellos que busca el jugador para conseguir los objetivos de juego. Un gráfico como el que muestra la Figura 11 permite también identificar los momentos clave del juego, como el instante en el que se da el máximo de población infectada o los cambios de tendencia (puntos de inflexión).

En el caso de *The Plague*, la implementación en el aula puede tomar formas distintas. Una opción es promover el juego en parejas, para que se consensuen decisiones y que sea menos tedioso el proceso de recopilar los datos. De esta forma también pueden tomarse notas de las decisiones que van tomando los alumnos sobre el diseño del virus y así se puede estudiar su impacto. Una opción distinta es pedir a los alumnos que hagan esta parte de la actividad en sus casas y dedicando el tiempo de aula a compartir la experiencia y al análisis matemático de los datos obtenidos.

A MODO DE CONCLUSIÓN

Este artículo muestra solo una parte de las posibilidades de los videojuegos en las aulas de matemáticas, todavía queda un largo camino por explorar. El lector echará de menos propuestas como *Minecraft*, que merecería un artículo entero, o explorar opciones alternativas de gestión, como que los alumnos propongan videojuegos y se trabajen en el aula las dificultades matemáticas que encuentran en ellos.

También es necesario explorar las posibilidades de los *serious games* que van a ir apareciendo en los próximos años cuando los videojuegos vayan siendo utilizados en más ámbitos. El mercado de los videojuegos comerciales es enorme y sigue creciendo, pero los videojuegos diseñados como herramientas educativas son todavía escasos. Es muy posible que en los próximos años aparezcan más opciones que superen a las actuales en diversos aspectos. Bajo mi punto de vista, los videojuegos diseñados para aprender matemáticas tienen todavía margen de mejora para proponer una actividad de juego compleja e interesante por ella misma, como ofrecen los videojuegos comerciales, pero, si el uso de videojuegos se asienta en las aulas, es posible que más empresas desarrolladoras traten de ocupar este espacio. Mientras tanto, usar videojuegos comerciales permite conectar fácilmente un contexto real (dentro de la virtualidad de un videojuego) con el conocimiento matemático, si elegimos adecuadamente el videojuego a utilizar.

Porque lo que es innegable es que aquello que empezó como un entretenimiento para niños se ha ido infiltrando en muchas otras actividades e involucrando a personas de cualquier rango de edad. Y no podemos olvidar que en la actualidad supone una vía de acceso a la interacción con la tecnología, que va a ser la constante de las nuevas generaciones de alumnos, para las que los contenidos audiovisuales, los entornos tridimensionales o la realidad virtual van a formar parte de sus vidas como ciudadanos competentes.

REFERENCIAS

Albarracín, L. (2013). Portal 2. *Suma: Revista sobre Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas*, *74*, 77-82.

— (2014). Videojuegos de estrategia en tiempo real. *Suma: Revista sobre Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas, 75*, 77-83.

— (2015). Videojuegos. Diseñando ciudades en SimCity. *Suma: Revista sobre Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas*, *78*, 65-71.

Bishop, A. (1991). *Mathematical enculturation: A cultural perspective on mathematics education*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Charsky, D. (2010). From edutainment to serious games: A change in the use of game characteristics. *Games and culture*, *5*(2), 177-198.

De Guzmán, M. (2007). Enseñanza de las ciencias y la matemática. *Revista iberoamericana de educación, 43*, 19-58.

Dickey, M. D. (2005). Engaging by design: How engagement strategies in popular computer and video games and inform instructional design. *Educational Technology Research and Development, 53*, 67–83.

Ferrando, I., Castillo, J., & Pla-Castells, M. (2017). Videojuegos de estrategia en Educación Matemática.: Una propuesta didáctica en secundaria. *Epsilon: Revista de la Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales*, *97*, 23-42.

Frejd, P., & Ärlebäck, J. B. (2017). Initial Results of an Intervention Using a Mobile Game App to Simulate a Pandemic Outbreak. In *Mathematical Modelling and Applications* (pp. 517-527). Springer, Cham.

Gee, J. P. (2003). What video games have to teach us about learning and literacy. *ACM Computers in Entertainment, 1*(1), 1–4.

Gros, B. (2007). Digital games in education: the design of games-based learning environments. *Journal of Research on Technology in Education, 40*(1), 23–28.

Gutiérrez-Soto, J., Arnau, D. & González-Calero, J. A. (2015). Un estudio exploratorio sobre el uso de DragnBox Algebra© como una herramienta para la enseñanza de la resolución de ecuaciones. *Ensayos: Revista de la Facultad de Educación de Albacete, 30*(1), 33-44.

Hernández-Sabaté, A., Joanpere, M., Gorgorió, N., & Albarracín, L. (2015). Mathematics learning opportunities when playing a tower defense game. *International Journal of Serious Games*, *2*(4), 57-71.

Joanpere, M., Nicolich, M., Vila, M., & Albarracín, L. (2016). Un videojuego de estrategia para proponer problemas de matemáticas. *Aula de innovación educativa*, *248*, 24-28.

Kiili, K., Moeller, K., & Ninaus, M. (2018). Evaluating the effectiveness of a game-based rational number training - In-game metrics as learning indicators. *Computers & Education*, *120*, 13-28.

Pólya, G. (1945). *How to Solve lt*. Princeton University Press.

Radford, L. (2009). “No! He starts walking backwards!”: interpreting motion graphs and the question of space, place and distance. *ZDM, 41*(4), 467-480.

Rosas, R., Nussbaum, M., Cumsille, P., Marianov, V., Correa, M., Flores, P., Grau, V., Lagos, F., López, X., López, V., Rodriguez, P. and Salinas M. (2003). Beyond Nintendo: design and assessment of educational video games for first and second grade students. *Computers & Education, 40*(1), 71-94.

Salen, K., & Zimmerman, E. (2004). *Rules of play: Game design fundamentals*. Cambridge, MA: MIT Press.

Épsilon - *Revista de Educación Matemática* *2019, nº 101, 121-136*

La puesta en juego de actividades propias del quehacer matemático mediadas por el empleo de un software de geometría dinámica

María Florencia Cruz
Ana María Mantica
Universidad Nacional del Litoral

Resumen: *Es innegable que el trabajo con tecnologías digitales en los procesos de enseñanza y aprendizaje de la matemática se hace presente en los diferentes niveles del sistema educativo. A su vez el empleo de las mismas compone una preocupación central para los investigadores en Educación Matemática.*
Con el fin de aportar información se presentan los resultados de una investigación que tiene por objetivo comprender el lugar que otorgan al software de geometría dinámica Cabri 3D futuros profesores en matemática al formular y validar propiedades geométricas en el dominio de la geometría tridimensional empleando la noción de lugar geométrico.
Palabras clave: *Software de Geometría Dinámica – Conjeturar – Validar – Futuros Profesores – Geometría Tridimensional.*

Mathematical task gameplays mediation by the usage of dynamic geometric software

Abstract: *We cannot deny that the usage of digital technologies in teaching and learning of mathematical processes is present in all different educative systems. At the same time, its employment is one of the main concerns between mathematics education researchers. With the aim to provide information, here we show the results of a research whose main goal is to understand the role given to Cabri 3D software in dynamic geometrics, by pre-service mathematics teachers, when stating and validating geometrical properties in the tridimensional geometric domain using the geometric locus knowledge.*
Keywords: *Dynamic Geometry Software – Conjecture – Validate – Pre-service Mathematics Teachers – Tridimensional Geometry.*

INTRODUCCIÓN

Es innegable que el trabajo con tecnologías digitales en la formación de futuros profesores se hace necesario, pues los estudiantes que actualmente se encuentran en las aulas de la escuela secundaria son nativos digitales. Es necesaria la presentación de propuestas que lleven a los estudiantes a formular y validar conjeturas, evitando problemas de tipo "probar que…" que aseguran la validez de los que se pretende probar, devolviendo así la responsabilidad matemática a los estudiantes.

En la presente investigación se tiene por objetivo estudiar el lugar que otorgan futuros profesores en matemática al software de geometría dinámica *Cabri 3D* al conjeturar y validar afirmaciones en el dominio de la geometría tridimensional, en particular, cuando se pone en juego la noción de lugar geométrico. La temática es considerada de interés por diversos investigadores (Burgos Navarro y Flores Martínez, 2017; Cruz y Mantica, 2017; Gómez-Chacón, Botana, Escribano y Abánades, 2016; Gutiérrez y Jaime, 2015; Gómez-Chacón y Escribano, 2014).

Esta investigación se lleva a cabo con estudiantes argentinos de la Facultad de Humanidades y Ciencias (FHUC) de la Universidad Nacional del Litoral (UNL) de la ciudad de Santa Fe. Los estudiantes se encuentran transitando el tercer año de la carrera Profesorado en Matemática, han cursado entre otras asignaturas Geometría Euclídea Plana y se encuentran cursando la última semana de Geometría Euclídea Espacial, materia en la cual se emplea habitualmente el Software de Geometría Dinámica (SGD) *Cabri 3D*.

La importancia de que futuros profesores en matemática conjeturen y validen situaciones problemáticas que abordan la noción de lugar geométrico, con diferentes tecnologías, radica en parte, en el lugar que documentos regulatorios oficiales le otorgan a estas actividades matemáticas. En el último documento realizado por profesores en matemática que se desempeñan en carreras de profesorados de instituciones superiores universitarias y no universitarias de Argentina (2010), convocados para su realización por el Instituto Nacional de Formación Docente se plantea, la necesidad del trabajo con distintos recursos tecnológicos (lápiz y papel, compás, regla, escuadra, transportador, instrumentos mecánicos, software de geometría dinámica, entre otros) en prácticas específicas de geometría, particularmente la construcción de figuras y lugares geométricos. También se destaca la importancia de que los futuros docentes exploren, elaboren y validen propiedades geométricas.

Los núcleos de aprendizaje prioritarios para la educación secundaria (2011), propuestos por el Ministerio de Educación de Argentina sostienen que en el nivel secundario se apunta a lograr en los estudiantes la producción y validación de enunciados sobre relaciones y propiedades de figuras y cuerpos geométricos, procurando avanzar desde argumentaciones empíricas hacia otras más formales. A su vez proponen plantear situaciones donde el análisis y construcción de figuras se validen utilizando propiedades geométricas, particularmente en situaciones problemáticas en las que se emplea la noción de lugar geométrico.

Como se menciona anteriormente los documentos regulatorios apuntan a que los futuros profesores en el transcurso de su formación tengan acceso a actividades propias del quehacer matemático como conjeturar, validar, emplear diferentes recursos tecnológicos, entre otras. El realizar este tipo de actividad durante su formación puede redundar en beneficio de sus propuestas de enseñanza en la escuela secundaria. Se considera que este modo de trabajo puede potenciar su labor como docentes logrando mejoras en la enseñanza de la matemática.

MARCO DE REFERENCIA

Se realizan consideraciones teóricas de términos o expresiones principales que se utilizan en el presente texto y de la influencia de la utilización del SGD cuando se llevan a cabo los procesos de formulación y validación de conjeturas que involucran la noción de lugar geométrico.

Cuando se menciona la actividad matemática de conjeturar afirmaciones se hace referencia a las sospechas matemáticas que los estudiantes realizan a partir de exploraciones, ensayos, errores, uso de datos conocidos, saberes previos, entre otros. A partir de la experiencia de trabajo sobre una tarea matemática se establecen afirmaciones de las que se tiene un cierto margen de certeza, aunque con lo realizado hasta dicho momento no es posible asegurar que realmente es así y no puede ser de otra manera (Itzcovich, 2007).

La expresión "procesos de validación", en términos de Balacheff (2000), refiere a la actividad intelectual que se ocupa de la manipulación de información, dada o adquirida, para producir nueva información que permita asegurar la veracidad de una afirmación y, eventualmente producir una explicación.

Arcavi y Hadas (2000) afirman que algunos aspectos de la actividad matemática se potencian con la utilización del SGD. Consideran que el empleo del mismo contribuye a la visualización, experimentación, sorpresa y retroalimentación. Sostienen que los SGD:

- Otorgan la posibilidad de construir figuras con ciertas propiedades y permiten la transformación de las mismas en tiempo real lo cual potencia la *visualización* y es posible que brinde bases intuitivas que se utilicen para la formulación y validación de conjeturas.
- Permiten la obtención de gran cantidad ejemplos lo que colabora a que los estudiantes logren el desempeño de la *experimentación.* La información que se obtiene por la *experimentación* puede ser de colaboración para la determinación de generalizaciones y la formulación de conjeturas.
- Posibilitan poner en tela de juicio las predicciones de los estudiantes al obtener un resultado determinado. Cuando la devolución del SGD genera diferencias con respecto a las predicciones que explícitamente enunciaron, se provoca una *sorpresa* que puede ser un detonador para lograr un aprendizaje significativo.
- Provocan diferencia entre las expectativas de cierta acción y el resultado que se obtiene en el SGD, es decir, una reacción que brinda una *retoalimentación*. Esta retroalimentación puede motivar a los estudiantes a revisar, verificar e incluso a demostrar.

Villarreal (2004) afirma que la incorporación del SGD cuando se llevan a cabo procesos de pensamiento matemático, son condicionados por la incorporación de esta tecnología y no determinados por la misma. La autora retoma aportes de Hershkowitz y Schwarz (1997) quienes determinan un conjunto de normas sociomatemáticas que se encuentran relacionadas con la incorporación de tecnologías en los procesos de enseñanza y de aprendizaje, entre ellas: los resultados que se obtienen de los SGD pueden ayudar a generar justificaciones y a pesar de la evidencia que puede mostrar el SGD es necesaria la presencia de pruebas o justificaciones.

Benitez Mojica (2006) destaca la importancia de la utilización del SGD para resolver problemas en los que se debe determinar el lugar geométrico, considera que se establece un "puente" entre la visualización y la argumentación de ideas matemáticas. El autor sostiene que en este tipo de problemas se realiza la construcción con las condiciones solicitadas y se ponen en juego características propias que aporta el SGD como lo son, el arrastre, la traza y el lugar geométrico. Utiliza la expresión "prueba del arrastre" cuando refiere a la acción de control que utiliza el movimiento de los objetos del software para constatar una conjetura e indica que el uso de ésta juega un papel importante en el proceso de argumentación. En su investigación reporta tres niveles de argumentación: el reconocimiento visual, la prueba del arrastre y la prueba con lápiz y papel. Señala la peligrosidad para la formación matemática de los estudiantes del uso del SGD como herramienta de demostración.

Laborde (1996) sostiene que en el trabajo con SGD al desplazar un elemento base del dibujo, el mismo se deforma respetando las propiedades geométricas utilizadas para su construcción y las que dependen de estas. La construcción de un objeto geométrico implica comunicar al programa un procedimiento geométrico, por esta razón el uso del SGD debería favorecer el empleo de conocimientos geométricos. Si la construcción se realiza a "ojo", es decir, sin respetar propiedades, se deforma.

En relación con lo mencionado, Laborde (2015) sostiene que es difícil que los estudiantes comprendan que la construcción se conserva en el transcurso del desplazamiento si se realiza teniendo en cuenta las propiedades geométricas del objeto considerado, que esto hace que modifique su tamaño, pero no su forma. Esto que denomina "arrastre" y es fundamental tanto para la relación entre el objeto y su representación, como para el trabajo en la formulación y validación de conjeturas, debe ser enseñado. El entorno permite determinar la variabilidad de los elementos del objeto geométrico en cuestión y de su dominio de variación. Habilita a descartar interpretaciones erróneas que en muchos casos pueden ser inferidas del dibujo estático que lo representa, dado que al realizar el arrastre y deformar el dibujo pueden dejar de cumplir propiedades establecidas.

CONSIDERACIONES METODOLÓGICAS

La presente investigación es de naturaleza cualitativa, se pretende un trabajo intensivo teniendo en cuenta que un empleo cuidadoso proporciona resultados replicables, información válida de los fenómenos estudiados e incluso un conocimiento acerca de la comunidad a la que pertenecen los sujetos de estudio, a pesar de perder la posibilidad de establecer generalizaciones (Mc Knight, Magid, Murphy y Mc Knigt, 2000). Se realiza un estudio de casos en el que interesa comprender la complejidad y particularidad del mismo (Stake, 1998).

Los sujetos de estudio son dos alumnos que cursan la asignatura Geometría Euclídea Espacial (GEE) en el profesorado en matemática de la FHUC de la UNL. En la asignatura mencionada se desarrolla la geometría en tres dimensiones. Esta materia se encuentra en el tercer año del plan de estudio de la carrera y los estudiantes previamente cursaron y regularizaron Geometría Euclídea Plana. Para regularizar GEE los estudiantes deben obtener en un examen teórico práctico al menos 50% y, si superan este último, deben aprobar un taller que se lleva a cabo la última semana de cursado.

La investigación se realiza en el taller dado que se considera que los estudiantes disponen algunos conocimientos básicos de la geometría tridimensional que posibilitan y potencian la formulación y validación de conjeturas en este dominio. Por lo mencionado se considera que la muestra es no probabilística e intencional (Kazez, 2009).

En el taller se presenta una situación geométrica en la cual se invita a los estudiantes a conjeturar y validar una afirmación. Se organiza en dos etapas, en la primera trabajan con un par en el desarrollo de una respuesta a la situación y en la segunda realizan una exposición frente a las docentes de la asignatura del proceso llevado a cabo. En esta última instancia las docentes intervienen con el fin de interpelarlos y potenciar la validación de afirmaciones.

La interacción entre pares potencia, en el ámbito investigativo, el acceso a los procesos que llevan a cabo, las decisiones que toman, sus ideas y los procedimiento empleados (Balacheff, 2000). Quaranta y Wolman (2003) afirman que en instancias de producción los intercambios posibilitan la escucha y puesta a prueba de sugerencias, las confrontaciones, las justificaciones entre alumnos, entre otros factores que potencian la puesta en juego de procesos de validación. Las autoras indican que la interacción entre estudiantes encuentra determinadas limitaciones cuando un estudiante asume la dirección de la solución y los otros acepten sin cuestionamiento, o si un alumno sin utilizar argumento de orden matemático se opone sistemáticamente a las propuestas del resto.

El taller tiene una duración de 3 horas reloj y para el desarrollo del mismo se diseña la siguiente tarea[1]:

Tabla 1: tarea presentada a los estudiantes.

TAREA: Sean el plano α, la recta r paralela a α y A y C puntos de r. Construir los rombos ABCD tal que B sea un punto de α. Hallar el lugar geométrico de D al variar B.

Los estudiantes saben que en el taller es obligatorio el empleo del SGD *Cabri 3D*, por esta razón no se explicita en la tarea. La construcción es realiza en una netbook del departamento de matemática de la FHUC de la UNL que posee la licencia del mismo. Es habitual el empleo del SGD en diversas asignaturas de la carrera Profesorado en Matemática y particularmente en GEE se usa *Cabri 3D* en clases teóricas y prácticas. Se considera importante el manejo del mismo por las potencialidades mencionadas en el marco teórico y por las consideraciones destacadas en Cruz y Mantica (2017), es un complemento que los estudiantes están acostumbrados a emplear en instancias de formulación y validación de afirmaciones y deben poner en juego conceptos y propiedades geométricas

1. La tarea se diseña en el marco de un trabajo colaborativo entre las investigadoras y la profesora Marcela Götte.

al realizar construcciones. Es de destacar que se considera valioso que los estudiantes empleen el SGD en instancias de formación docente porque el hábito de su uso puede potenciar su empleo en su futura labor docente.

Se registra la información, teniendo el consentimiento de los estudiantes, a través de artefactos escritos, grabaciones en audio y la descripción del SGD con el fin de alcanzar un estudio fiable y válido (Mc Knight, et al., 2000). Se destaca que la herramienta "descripción" posibilita observar cada paso que se lleva a cabo para realizar la construcción. Gutiérrez (2005) destaca que con dicha herramienta se logra conocer la sucesión de pasos llevados a cabo para realizar la construcción y el comando usado en cada uno de ellos.

ANÁLISIS DE LAS ACTUACIONES DE LOS ESTUDIANTES

Se presenta el análisis del trabajo que realizan los dos estudiantes que participan de la experiencia, Bartolo (B) y José (J). Los nombres empleados son pseudónimos con el fin de preservar la identidad de los sujetos. Se utiliza letra cursiva (itálica) para expresar las transcripciones textuales obtenidas del audio[2]. Se realiza el análisis, en una primera instancia de las interacciones de los estudiantes en la resolución de la situación, en una segunda de la exposición de su resolución frente a las docentes de la asignatura en la que explican y fundamentan su proceso de resolución. En esta última instancia se aprecian intervenciones de las docentes, P y M, invitando a los estudiantes a validar sus conjeturas a partir de propiedades disponibles.

Análisis de las interacciones entre los estudiantes

Los estudiantes comienzan el proceso de resolución utilizando el SGD *Cabri 3D*. En un primer momento José intenta ubicar los vértices del rombo en la zona de trabajo y "supone" que los puntos se encuentran en un plano sin considerar que si la figura es paralelogramo (por ser rombo) deben ser los cuatro vértices coplanares. En este sentido es de destacar que en esta primera instancia utilizan la intuición y no apoyan esta afirmación en propiedades y métodos geométricos trabajados en la asignatura.

—*B: Construir los rombos A, B, C, D…* [Refiere a los rombos dado que el problema solicita construir los rombos][3]

—*J: Ah, ¡sí! Ya está… para…*

—*B: ¿B quién es?*

—*J: No dice pero supongo que son puntos del plano.*

En la descripción de la construcción se aprecia que José utiliza la herramienta "paralela" para determinar un plano paralelo al de base por un punto exterior a él. Denomina

2. Los diálogos se expresan en variedad dialectal del español rioplatense.

3. En el texto las expresiones entre corchetes seguidas a las transcripciones textuales de los audios responden a interpretaciones de los investigadores.

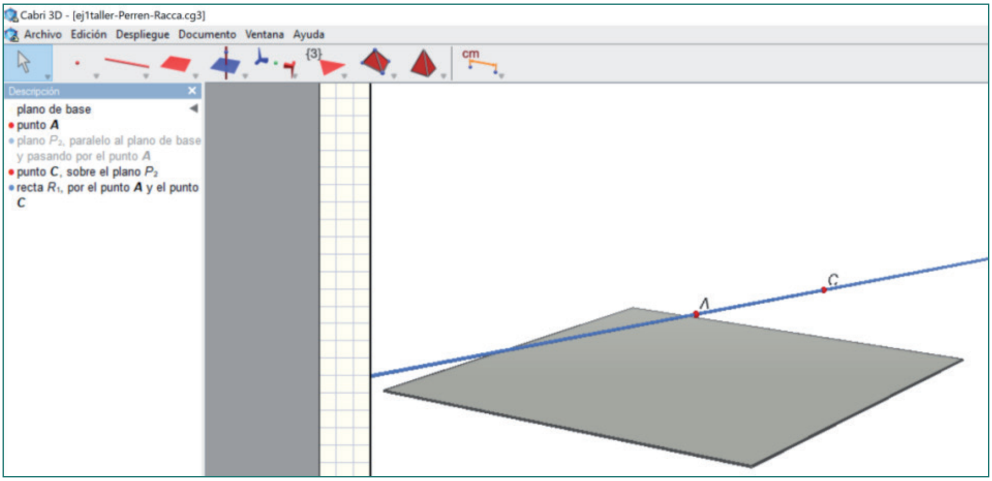


Figura 1. Construcción de la recta AC en Cabri 3D.

A al punto exterior y C otro punto cualquiera en el mismo plano. Posteriormente traza la recta que contiene a los puntos A y C y oculta el plano. Las acciones que ejecuta el estudiante corresponden a lo solicitado en la consigna. Pone en juego el concepto de recta paralela a un plano dado y utiliza la propiedad que afirma que toda recta contenida en un plano paralelo a uno dado es paralela al mismo (sin explicitarla). Se destaca que en la asignatura GEE se define recta paralela a un plano como aquella que no tiene puntos en común con él. Como se menciona anteriormente es habitual el uso de *Cabri 3D* en las clases y por tanto los estudiantes conocen que este software no tiene una herramienta que permita construir una recta paralela a un plano.

Durante este momento de la construcción en el audio se aprecia que José explicita oralmente a Bartolo los procedimientos que lleva a cabo, se considera que la interacción produce limitaciones, dado que uno de los estudiantes asume la dirección de la resolución y el otro acata sin intervenir y cuestionar. La docente a cargo de la asignatura GEE confirma que José es un estudiante intuitivo y extrovertido dando respuestas inmediatas, sin realizar un análisis profundo de lo formulado, siendo este posterior a la verificación en el software. En este sentido parece que Bartolo se encuentra apabullado por la actitud de José, dado que necesita realizar un análisis previo para expresar la conjetura; en el audio se aprecia que no realiza intervenciones en este momento de la resolución.

Posteriormente José continúa tomando decisiones respecto a la construcción. Se supone que utiliza las propiedades de diagonales de rombo, dado que realiza un plano perpendicular a la recta AC por el punto medio del segmento AC y determina la recta intersección de este plano con el plano base (plano que se encuentra predeterminado en el software).

Para realizar lo mencionado en primera instancia se aprecia que José explicita que debe representar la recta perpendicular al segmento AC, Bartolo pone a prueba la producción de José, ya que pregunta si lo que traza es un plano perpendicular a la recta por el punto medio del segmento AC. En este sentido, es de destacar que Bartolo pone en juego

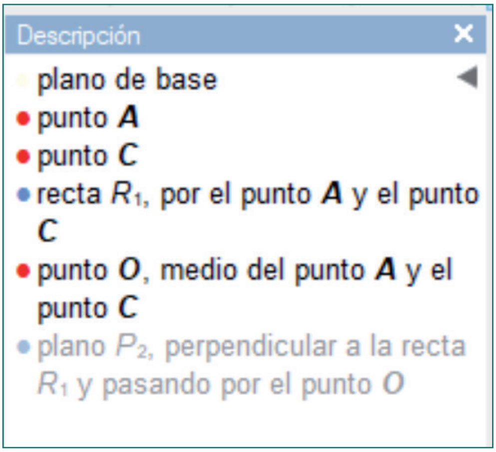


Figura 2. Descripción propuesta por el SGD.

un concepto de la geometría tridimensional, dado que por un punto de una recta pasan infinitas perpendiculares a ella incluidas en un plano perpendicular a la recta. José visualiza la representación en el plano (pantalla de la computadora). Como plantean Arcavi y Hadas (2000) la visualización que posibilita el SGD brinda bases intuitivas que potencian en este caso el interrogante de Bartolo, detonante de la formulación y validación de la conjetura formulada por José.

En caso que no se produjera la intervención de Bartolo la construcción no hubiera sido posible con el software, dado que no construye una recta perpendicular a otra por un punto en el espacio tridimensional por no ser única la recta. Al ejecutar las opciones propone como puede verse en "descripción" la utilización de plano perpendicular a recta por un punto (no construye la recta solicitada y explicita en gris que es posible construir un plano perpendicular al segmento AC por su punto medio). En este caso particular se observa el potencial del SGD, dado que realiza una devolución inesperada, sorprendiendo al estudiante que utiliza erróneamente un concepto. Esto último hubiera detonado en una sorpresa y retroalimentación producida por el SGD (Arcavi y Hadas, 2000).

—*J: Pero hay que buscar el punto medio del AC primero.*

—*B: Punto medio.*

—*J: Acá, punto medio, y la recta perpendicular… ahí está…*

—*B: ¿Le pusiste plano perpendicular a recta?*

—*J: ¿Sabes qué? tendría que, a ver… borrar y poner el plano, en vez de la recta*

—*B: Si, porque después podes sacar más rápido el punto.*

—*J: ¡No! Además hay que buscar un lugar geométrico, así que…*

—*B: Si bueno, dice construir los rombos, LOS* [Remarca que el rombo a construir no es único].

—*J: Si.*

—*B: A, B, C, D tal que B sea un punto de α, hallar el lugar geométrico de D al variar B.*

Los estudiantes asumen el papel de un matemático en la resolución de la situación, dado que como afirma Schoenfeld (2001), controlan la situación con cuidado, siguen pistas interesantes y abandonan los caminos que parecen no conducir a la solución correcta de la tarea; realizan una revisión de lo solicitado por la consigna en varios momentos.

Trazan el plano mediador (perpendicular a AC por O) del segmento AC, al respecto se considera que utilizan que las diagonales del rombo son perpendiculares y se cortan en su punto medio, a pesar de no explicitarlo. Determinan la recta intersección del plano de

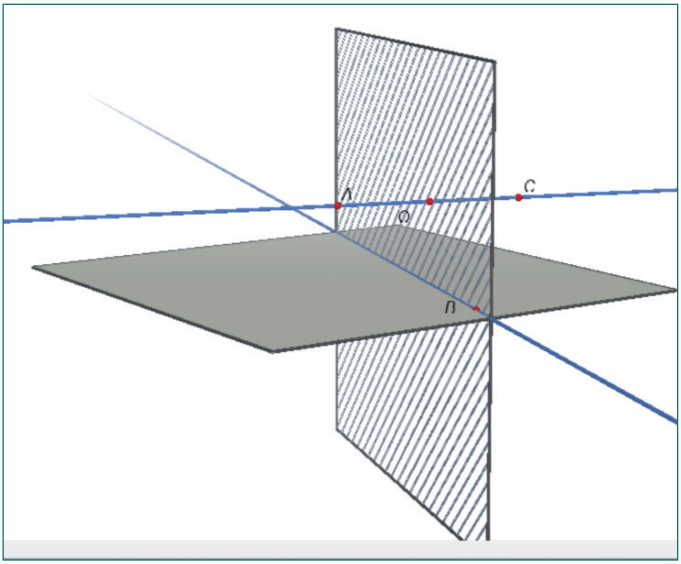


Imagen 3: Construcción del vértice B en Cabri 3D.

base con el plano mediador y consideran B un punto cualquiera de dicha recta (llámese b). Hasta el momento determinan 3 vértices del rombo.

—*J: Y tiene que ser una recta perpendicular a esta y paralela al plano, porque tiene que conservar esta distancia, es decir, esto es una simetría central, entonces la recta tiene que ser paralela a esta de acá abajo, o sea, va a ser paralela al plano.* [Refiere a que la recta que contiene al vértice D se encuentra en una recta ortogonal[4] a la recta AC y paralela al plano base y a la recta b]

—*B: Si, van a ser paralelas seguro.* [Refiere a que la recta que contiene al vértice B es paralela a la recta que contiene al vértice D]

—*J: Y además como este plano es perpendicular esto* [Segmento AC] *la recta va a ser perpendicular a este, ehh… ortogonal.* [Refiere a que la recta AC será ortogonal a la recta que contiene a D]

Si bien José no hace explícitas las propiedades de rombo para justificar la construcción, en un momento determinado, necesita volver a la definición de rombo y se la pregunta a Bartolo. En el texto se hace referencia a un trabajo individual, dado que Bartolo acepta lo propuesto por José y se limita a repetir lo que este dice y a intentar responder sus interrogantes. En general no formula conjeturas.

Se considera que José necesita hacer visible la imagen que tiene de rombo y para ello pregunta por la definición. En el diálogo cuando Bartolo explicita características de esta figura geométrica, José rápidamente e interrumpiéndolo afirma "ya está". Parece que recupera la imagen asociada a rombo que le permite continuar con la resolución de la tarea.

4. Se toma la definición que se utiliza en la asignatura GEE: Dos rectas son ortogonales sí y sólo sí por una de ellas se puede trazar un plano perpendicular a la otra.

Fischbein (1993) afirma que cuando se imagina una figura geométrica particular se hace pensando en una figura dibujada y no en la figura matemática que es el objeto del razonamiento matemático. Hasta el momento utiliza propiedades de rombo sin trabajar con la noción de concepto figural de rombo que implica, como sostiene el autor, la fusión de la imagen y el concepto.

—*J: ¿Qué era un rombo che? , no me acuerdo… decime la definición*

—*B: Y… tenían los cuatro lados iguales… era como un…*

—*J: Ah… bien… si, ¡ya se cual es!, ¡Ya está! Un punto sobre la recta… este va a ser el punto.*

—*B: El punto B de α.*

Determinan el homólogo del punto B utilizando simetría central con centro en el punto medio del segmento AC, denominándolo D. Trazan una recta paralela a la recta b (contiene a B) por D.

—*J: Al otro hay que hacerlo simétrico, una simetría central.*

—*B: Sí.*

—*J: Simetría central, tengo que poner primero el centro, ayuda… imagen del centro O… listo… al revés.* [Refiere a la ayuda que brinda el software respecto del uso de un comando determinado]

—*B: Tendrías que poner el centro y después… el punto.*

—*J: ¿Cuál es?*

—*B: El punto D.*

Finalmente determinan con la herramienta "polígono" el rombo de vértices ABCD. Con la construcción realizada los alumnos consideran que han encontrado el lugar geométrico solicitado en la situación.

—*B: Hallar el lugar geométrico de D al variar B.*

—*J: Bueno, ya lo hicimos pero hay que escribirlo.*

—*B: Sí, ¿hay que escribirlo al lugar geométrico?*

—*P: Si.*

—*J: En una hoja… ¿hay que justificarlo también? podemos justificarlo pero…*

—*B: O escribimos la construcción*

—*J: Claro, ¿la construcción también hay que escribirla? El por qué decimos que es así.*

—*P: Todo lo que ustedes quieran…*

—*J: Lo que sea necesario.*

—*P: Lo que a ustedes les parezca necesario.*

Los estudiantes no manifiestan explícitamente la necesidad de escribir la conjetura con la rigurosidad de una propiedad o teorema matemático y validarla. Recurren a la profesora para que les confirme que deben llevar a cabo estas actividades propias del quehacer matemático a pesar de que habitualmente lo realizan por ser alumnos avanzados del Profesorado en Matemática. Pareciera que lo devuelto por el SGD influye en la decisión acerca de la validación de su conjetura, no tienen en cuenta que a pesar de la evidencia

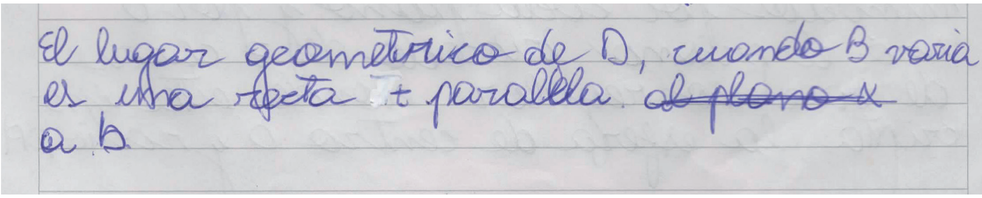


Figura 4. Conjetura establecida[5].

que les devuelve el software las normas sociomatemáticas establecen que es necesaria la puesta en juego de una prueba (Hershkowitz y Schwarz, 1997, citado en Villarreal 2004).

La docente en ese momento les devuelve la responsabilidad a los estudiantes con el fin de que ellos tomen la decisión de explicitar la conjetura y realizar una validación formal. Brousseau (2007) afirma que la devolución se produce cuando el docente no explicita la respuesta que espera, sino que otorga la responsabilidad de que tomen decisiones por sus propios medios.

Finalmente escriben de modo formal la conjetura establecida. Esto puede deberse a que en el desarrollo de la asignatura se escriben formalmente las conjeturas y demostraciones y este es un trabajo de evaluación. Se aprecia que en la conjetura se da por supuesto que la recta (t) que describe D es paralela a la recta b, y no se justifica esto utilizando la propiedad de simetría central (la simétrica de una recta que no pasa por el centro de simetría es una paralela a ella).

Análisis de la defensa del trabajo realizado.

Esta instancia se realiza especialmente para que la intervención docente potencie la validación de afirmaciones por parte de los estudiantes recurriendo a propiedades. Ateniendo a lo planteado en documentos curriculares vigentes en Argentina respecto a la formación docente que consideran necesaria la validación de propiedades geométricas.

Barolo toma la iniciativa de explicar el modo en que comenzaron la construcción en el SGD, sin embargo José necesita reafirmar lo planteado por el par. Nuevamente se aprecia la necesidad de José de ser el protagonista de la situación. En la continuidad del diálogo se nota esta actitud constante del estudiante.

—*B: Trazamos la paralela. Sería un punto en el espacio y después trazamos el plano paralelo a α y después trazamos la recta.*

—*J: Para la paralela primero trazamos un plano paralelo y después en el plano paralelo la recta.*

—José utiliza un lenguaje más riguroso que Bartolo en la exposición. Posteriormente explican el modo en que determinan la recta paralela al plano y los vértices A y C de la diagonal y del rombo.

5. El lugar geométrico de B, cuando D varía es una recta t paralela a b.

—B: Después el punto medio del segmento AC (...) O, y trazamos.
—P: ¿Pedía la consigna el punto medio?
—J: No, no… lo trazamos porque determinamos el plano perpendicular a la recta por O.
—M: ¿Por qué?
—J: Perpendicular a la recta por O, por eso buscamos O.
—P: ¿Por qué por O?, es decir, ¿por qué por el punto medio y no por otro?
—J: Por el punto medio para que esta sea… está explicado en el texto…
—P: ¿Por qué trazaron el plano perpendicular?
—J: Ah… está buena esa pregunta…
—P: Por algo lo trazaron…

Los estudiantes no responden explícitamente la pregunta del docente que exige explicitar propiedades de las diagonales del rombo. No logran validar formalmente la decisión respecto de por qué es necesario considerar el punto medio del segmento AC y el plano perpendicular a dicho segmento. Explican el modo en el que determinan la recta b.

José manifiesta que la explicación se encuentra en el texto escrito, sin embargo, se aprecia una ausencia de validación formal, dado que en la imagen 5 que se presenta se muestra que en el texto expresan lo mismo que en la exposición oral.

Imagen 5: Texto escrito por los estudiantes.[6]

Se menciona en la interpretación del diálogo y del análisis de la descripción del software que emplean propiedades de cuadriláteros, no obstante, no las explicitan y pareciera que lo realizan en forma intuitiva. Alsina, Burgués y Fortuny (1999) destacan la existencia de dos modos diferentes de comprensión y expresión del conocimiento en el dominio de la geometría tridimensional. El conocimiento geométrico intuitivo se logra de modo directo y visual y el conocimiento geométrico reflexivo se logra empleando la lógica. Generalmente el inicio del estudio geométrico se realiza a través de la intuición geométrica, sin embargo ambos tipos de conocimientos son complementarios y necesarios en el desarrollo de este tipo de pensamiento.

Los estudiantes oralmente explican el modo en que realizan la construcción del rombo. Determinan que el vértice B del rombo debe estar en la recta ortogonal a la que contiene a AC, sin realizar una fundamentación matemática para afirmar esta conjetura. Posteriormente determinan el vértice D como el simétrico de B respecto de O. Finalmente afirman que los cuatro vértices se encuentran en un plano utilizando propiedades de simetría.

La docente interviene preguntando si determinaron el lugar geométrico que solicita la consigna. José afirma que la construcción les permite probar que el cuadrilátero construido es un rombo, dado que los cuatro vértices son coplanares y los cuatro lados son iguales. Utiliza que las diagonales son perpendiculares, puesto que la construcción es realizada de este modo; sin embargo, no lo explicita como condición para afirmar que la figura es un rombo.

6. Sea el segmento AC. Sea O el punto medio de AC. Trazamos el plano β perpendicular a la recta r (recta AC). Trazamos la intersección de los planos α y β. Sea αβ=b. Sea Bb.

—*J: Para comprobar que las longitudes son iguales, después encontramos que los cuatro puntos están en el mismo plano. Entonces están en el mismo plano y las distancias son las mismas, es un rombo.* [Refiere a que los lados del cuadrilátero tienen longitudes iguales]

Los estudiantes prueban que la figura obtenida es un rombo utilizando propiedades disponibles, a pesar de no explicitarlas siempre. No responden del mismo modo para probar lo que la consigna solicita que es el lugar geométrico (LG) obtenido, a pesar que lograron conjeturarlo.

Bartolo manifiesta que sin realizar el arrastre del punto B sobre la recta b utilizando el SGD no hubiera logrado determinar el LG, por el contrario, José afirma que al leer la consigna logra visualizar la situación y determina que el LG es la recta paralela a b.

—*B: Y después las paralelas, el lugar geométrico.*
—*J: Ah… el lugar geométrico es la paralela a esta recta acá.*
—*M: ¿Cómo encontraron ese lugar geométrico?*
—*J: Lo habíamos propuesto sin el software primero.*
—*B: Así de pensarlo sin el software capaz que a mí no me salía.*
—*J: Pero es…*
—*P: ¿En qué te ayudo el software para saber que el lugar geométrico es una recta?*
—*B: Claro, y después ir moviendo…*
—*P: ¿Qué movieron?*
—*B: El punto B, en la recta que teníamos B entonces te ibas dando cuenta que ibas trazando una recta.*
—*M: ¿Usaron traza?*
—*B: No, no*
—*J: Yo tenía en mente que era esa, después la marcamos.*

La docente interviene para solicitar una explicación acerca del LG obtenido, dado que como se plantea anteriormente los estudiantes lo determinan de diferente modo. Bartolo desplazando el punto sobre la recta b visualiza que el mismo se mueve sobre la recta paralela, José no necesita realizar el arrastre del punto, porque como manifiesta, logra visualizarlo sin necesidad de realizar la construcción.

—*M: ¿Por qué la recta paralela es el lugar geométrico solicitado?*
—*J: Bueno… primero son paralelas…están en el mismo plano.*
—*B: Están en el plano perpendicular a α, que pasa por O*
—*J: Está ahí porque así lo construimos y esto está acá por la simetría.*
—*M: Pero, ¿por qué se dieron cuenta que ese era el lugar geométrico?*
—*B: Movimos…*
—*A: ¿Qué movieron?*
—*B: El punto B, íbamos mirando como el D se desplazaba. Porque yo para el lugar geométrico sino solo así tenía el punto D y después sacar la recta paralela no se me hubiera ocurrido, no se me venía a la mente nunca, entonces moviendo el punto B iba mirando que iba pasando.*

La docente solicita a los estudiantes una validación de la conjetura establecida, no obstante, no se hacen cargo de la responsabilidad que les otorga la misma. Validan formalmente su construcción pero no su conjetura. Las propiedades de lados y diagonales del rombo (utilizadas de manera intuitiva) son suficientes para determinar que las rectas son paralelas. Esto último puede deberse a que no disponen los conocimientos que permiten fundamentar la decisión o porque no lo consideran necesario debido a la visualización en el SGD. A partir del análisis presentado se considera que para los estudiantes la visualización (Bartolo) o la intuición (José) son suficientes para determinar la propiedad geométrica.

CONCLUSIONES

Ateniendo al objetivo propuesto en la presente investigación y el análisis presentado se afirma que el lugar que otorgan los estudiantes a la actividad matemática de conjeturar cuando emplean *Cabri 3D* es diferente en José y Bartolo. Bartolo considera necesario realizar la construcción geométrica en el SGD para establecer la conjetura y manifiesta que no hubiera podido determinarla sin el mismo. José no lo emplea para establecer la conjetura, visualiza el lugar geométrico a determinar y lo construye con el SGD para cumplir con lo solicitado para la aprobación del taller.

En función de la representación realizada principalmente por José, Bartolo desplaza el punto B (en la recta b) y observa que D se mueve sobre la recta paralela a b. Este último utiliza el software para afirmar la conjetura, sin embargo obtiene el LG desde la visualización influenciada por la conjetura de su par. Se aprecia que no utiliza las herramientas que le ofrece para obtener el lugar geométrico, por ejemplo "trayectoria". Al variar el punto lo que se observa en la pantalla es que la sucesión de ellos "parecen" estar alineados. No obstante podría ocurrir que fuera de lo que se visualiza en la pantalla los puntos describan otro lugar geométrico.

Los estudiantes, como se menciona anteriormente, utilizan el arrastre para observar que el punto se desplaza sobre la recta representada (que consideran como LG). Laborde (1996, 2015) destaca la importancia del empleo del mismo en la visualización de la variabilidad de elementos geométricos y su potencial para determinar el dominio de validación de la conjetura.

En relación con los aspectos del quehacer matemático potenciados con el uso del SGD en la resolución de tareas geométricas, plateados por Arcavi y Hadas (2000), se destaca que la visualización y la experimentación se emplean por los estudiantes y en momentos perjudica la puesta en juego de validaciones formales. La sorpresa y la retroalimentación se opacan, en este caso, por la interacción entre pares, no obstante de no mediar el debate entre ellos el SGD en situaciones hubiera generado diferencias con respecto a las predicciones que explícitamente plantean.

En el texto escrito los estudiantes realizan un análisis del proceso de construcción del rombo y en momentos validan sus decisiones a pesar de no expresar siempre las propiedades geométricas empleadas. No proceden de modo análogo al probar el lugar geométrico. Villarreal (2004) sostiene que en momentos los resultados obtenidos con el empleo del SGD potencian validaciones formales, dado que al utilizarlo deben poner en juego propiedades geométricas para realizar la construcción, estas podrían emplearse para fundamentar las afirmaciones establecidas. En este caso particular, la evidencia que muestra el SGD respecto al lugar geométrico es una limitación para la producción de una validación matemática formal.

En relación con los niveles de argumentación mencionados en Benitez Mojica (2006) se aprecia que logran el reconocimiento visual y la prueba de arrastre, sin embargo no alcanzan una prueba matemática formal en lápiz y papel de la conjetura establecida. En concordancia con lo planteado por el autor se destaca en el presente escrito la peligrosidad de la utilización del SGD como prueba de demostración.

Se considera interesante realizar investigaciones futuras en las que se diseñen problemas que potencien las diferencias entre las devoluciones que brinda la pantalla de la computadora (SGD) y las conjeturas establecidas. De modo tal que las "sorpresas" de los estudiantes fomenten las validaciones que se ponen en juego.

Una limitación de la investigación es que los estudiantes que participan de la propuesta son los que logran la superación previa de un examen en el que se ponen en juego nociones de la geometría tridimensional, por lo que no es posible prever respuestas de diversos estudiantes que se encuentran cursando la asignatura.

Los sujetos de estudio pusieron de manifiesto diversas cuestiones que se mencionan en el marco de referencia como la posibilidad de lograr retroalimentación con el SGD, el empleo de la visualización como un factor que puede potenciar la formulación de conjeturas pero limitar la puesta en juego de procesos de validación, la no utilización del recurso "traza", entre otros.

REFERENCIAS

Alsina, C., Burgués, C. y Fortuny, J.M. (1999). *Invitación a la didáctica de la geometría.* Madrid: Síntesis

Arcavi, A y Hadas, N. (2000). El computador como medio de aprendizaje: ejemplo de un enfoque. *International Journal of Computers for Mathematical Learning* (5), (pp. 25-45). Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Balacheff, N. (2000). *Procesos de prueba en los alumnos de matemáticas*. Bogotá: Una empresa docente.

Benitez Mojica, D. (2006). Resolución de problemas de cónicas con el apoyo de la geometría dinámica. En J. Luna; C.J. Luque; A. Oostra; J.H. Pérez y C. Ruiz. (Eds.), *Memorias del XVI encuentro de geometría y IV de aritmética* (pp. 77-88). Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional.

Brousseau, G. (2007). *Iniciación a estudio de la teoría de las situaciones didácticas*. Buenos Aires: Zorzal.

Burgos Navarro, M. y Flores Martínez, P. (2017). Reflexión sobre la práctica del profesor de matemáticas en la enseñanza de las funciones. *Épsilon*. 97, 65-74.

Cruz, M.F y Mantica A.M. (2017). El uso del software de geometría dinámica en la formulación y validación de conjeturas. *UNIÓN.* 51 (3). 69-82.

Fischbein, E. (1993). The theory of figural concepts. *Educational Studies in Mathematics*, 24 (2). 139-162.

Gómez-Chacón, I. y Escribano, J. (2014). Geometric Locus activities in a dynamic geometry system. Non-iconic visualization and instrumental genesis. *Relime*. 17 (4 II). 361-383.

Gómez-Chacón, I., Botana, F., Escribano, J., y Abánades, M.Á. (2016). Concepto de Lugar Geométrico. Génesis de Utilización Personal y Profesional con Distintas Herramientas. *Bolema*. 30 (54). 67-94

Gutierrez, A. (2005) Aspectos metodológicos de la investigación sobre aprendizaje de la demostración mediante exploraciones con software de Geometria dinámica. A. Maz Machado; B. Gómez Alfonso y M. Torralbo Rodríguez (Eds.), *Noveno Simposio de la Sociedad Española de Educación Matemática SEIEM*. (pp. 27-46). Córdoba: Universidad de Córdoba.

Gutiérrez, A. y Jaime, A. (2015): Análisis del aprendizaje de geometría espacial en un entorno de geometría dinámica 3-dimensional, *PNA, 9*(2), 53-83.

Itzcovich, H. (Ed.). (2007). *La matemática escolar.* Buenos Aires: Aique.

Kazez, R. (2009). Los estudios de casos y el problema de la selección de la muestra: aportes del sistema de matrices de datos. *Subjetividad y procesos cognitivos*, 13(1), 71-89.

Laborde, C. (1996). Cabrí-Geómetre o una nueva relación con la geometría. En L. Puig y J. Calderón (eds.). *Investigación y didáctica de las matemáticas*. (pp. 67-85). Madrid: MEC-CIDE.

— (2015). *Matemática con Tecnología*. *Entrevista Colette Laborde*. Recuperado el 12 de julio de 2017 de https://www.youtube.com/watch?v=1vqJ1OOJMU0

Mc Knight, C., Magid, T. M. yMc Knigt, M- (2000). *Mathematics Education Research: A Guide for the Research Mathematician*. Rhode Island: American Mathematical Society.

Ministerio de Educación Ciencia y Tecnología. (2011). NAP. Tercer ciclo. Disponible en: https://www.educ.ar/recursos/110570/nap-secundaria-matematica

Ministerio de Educación. (2010). Proyecto de mejora para la formación inicial de profesores para el nivel secundario. Áreas: Biología, Física, Matemática y Química. Disponible en: https://cedoc.infd.edu.ar/upload/Matematica.pdf

Quaranta, M. y Wolman, S. (2003). Discusiones en las clases de matemática: qué, para qué y cómo se discute. En M. Panizza (Comp.). *Enseñar matemática en el Nivel Inicial y el primer ciclo de la EGB. Análisis y propuestas* (pp. 189-243). Buenos Aires: Paidós.

Schoenfeld, A. (2001). La enseñanza del pensamiento matemático y la resolución de problemas. En L. Resnik y L. Klopfer (Comp). *Currículo y cognición* (pp. 141-170). Buenos Aires: Aique.

Stake, R. (1998). *Investigación con estudio de casos.* Madrid: Morata.

Villarreal, M. (2004). Transformaciones que las Tecnologías de la Información y la Comunicación traen para la Educación Matemática. *Yupana* 1 (04), 41-55.

Épsilon - *Revista de Educación Matemática* *2019, nº 101, 137-145*

Matemagia en el aula

Fernando Arribas Ruiz
María del Carmen Galán Mata
Jaime González Cimas
Álvaro Luque Borrego
IES Averroes

"Si quieres resultados distintos, no hagas siempre lo mismo"
ALBERT EINSTEIN

Resumen: *A través del presente artículo queremos dar a conocer algunas de las actividades de Matemagia que hacemos de forma habitual con nuestro alumnado, la forma de abordarlas y los resultados que hemos obtenido, que han sido sorprendentes y motivadores. Todo empezó con algunos trucos de magia con números para introducir el bloque de álgebra en diferentes cursos, y acabó con una mesa de Matemagos en las jornadas de Mates en la Calle de la ciudad de Córdoba.*
Palabras Clave: *Matemagia, Taller, Tarjetas, Geogebra*

MatheMagic in the classroom

Abstract: *Through this article we want to give acknowledgement to some of the activities of Mathemagic that we usually practice with our students, the way to put them into action and the results that we have obtained, which have been surprising and motivating. It all started with several magic tricks with numbers to introduce the algebra units in different courses, and ended with a table of Mathemagicians in the "Maths in the street" encounter in the city of Córdoba*
Keywords: *Mathemagic, workshop, cards, geogebra*

1. INTRODUCCIÓN

Imagínense un niño o niña que no para de preguntar por todo, que tiene curiosidad, se trata de un caso poco habitual en nuestras aulas, donde a menudo nos encontramos con un alumnado sin ganas de saber, sin inquietudes, en definitiva, sin curiosidad.

Cuando somos pequeños todo es nuevo para nosotros, vemos cualquier aspecto del mundo como un misterio y tenemos ganas de saber, que es el primer requisito para aprender. Aunque en esa época de nuestra vida, en la niñez, carecemos de sentido crítico y de la capacidad de razonamiento para comprender todo aquello que nos rodea. Y el problema radica en que cuando somos lo suficientemente mayores, muchas veces lo que ha desaparecido es la curiosidad. La pregunta es la siguiente: ¿es el sistema educativo culpable de matar la curiosidad?

En el colegio nos explican muchos conceptos y procedimientos que no entendemos realmente. Por ejemplo, para conocer la forma de nuestro planeta:

> *"La Tierra es esférica y tiene un radio de 6371 km"*

Los alumnos y alumnas memorizan este dato y lo escriben en un examen, poniendo fin al proceso de enseñanza – aprendizaje. Sin embargo, si el alumnado tuviese que convencer a un escéptico no sería capaz. La enseñanza nos ofrece respuestas incluso antes de que hayamos podido formular las preguntas adecuadas en clase, lo que produce una pérdida de interés en nuestro alumnado.

Una posible solución sería mirar el mundo como lo hizo Eratóstenes, formulando preguntas y tratando de demostrar las respuestas obtenidas, es decir, hacer ciencia. Cuando obligas a tu mente a enfrentarse a un reto y lo descubres por ti mismo, tu cerebro valida el aprendizaje y lo recuerda siempre, dicho de otro modo, aprendemos mejor aquello que comprendemos, y comprendemos solo aquello que descubrimos por nosotros mismos. Es como cuando lees un libro, aunque no te guste, lo recuerdas, recuerdas esa historia porque tú mismo has hecho el esfuerzo de recorrer ese camino mental. Cuando te dan un resumen de ese libro, lo olvidas rápido y te cuesta mucho memorizarlo, porque no has tenido la experiencia de leerlo.

Para ello, planteamos a nuestro alumnado la posibilidad de convertirnos en matemagos, de manera que captemos su curiosidad. Con el desarrollo de esta actividad, nos planteamos los siguientes objetivos:

- Descubrir diferentes aplicaciones de los conocimientos matemáticos
- Aprender gran cantidad de trucos de magia que contengan razonamientos matemáticos.
- Aprovechar un contexto lúdico para fomentar la divulgación matemática.
- Despertar el interés en los alumnos y alumnas hacia las matemáticas.

2. MATEMAGIA EN EL AULA

Nuestra andadura comenzó con algunos trucos numéricos al principio del bloque de álgebra en los diferentes cursos en que impartíamos clase, y fue tal el éxito y el interés

Imagen 1.

mostrado por el alumnado que nos animamos hacer un taller de Matemagia, ampliando esos y otros trucos, numéricos y de cartas, para exponer en la Feria de la Ciencia de Sevilla. Tradicionalmente asistimos a esta feria con proyectos de divulgación de matemáticas, y en el curso 2011/2012, en el que el lema de la Feria era "Todo es número", nuestro stand versaba sobre la Matemagia. Nuestro alumnado hacía diversos trucos a los visitantes, con bastante éxito. Tal fue el éxito que el año siguiente, donde la temática y los juegos que llevábamos eran otros, los visitantes de años anteriores nos preguntaban si éramos nosotros los de la magia, y guardamos un rinconcito, desde ese año en adelante, para la Matemagia en nuestro stand. También asistimos con nuestros matemagos durante varios cursos a las jornadas de Mates en la Calle que se celebran en Córdoba, enseñando a la población cordobesa la relación entre Magia y Matemáticas.

En el presente artículo queremos poner de manifiesto una serie de trucos que utilizamos de forma habitual en el aula, y las construcciones que hemos hecho de algunos de ellos con Geogebra, una herramienta muy versátil, cuyas aplicaciones no se quedan solo en el bloque de Geometría, si no que puede utilizarse prácticamente en cualquier bloque de contenidos de Matemáticas.

3. TRUCOS DE MATEMAGIA

Piensa un número…

Las actividades del tipo "Piensa un número" son una buena baza para introducir el álgebra en prácticamente cualquier curso académico. Ayuda a la simbolización que el álgebra requiere y motiva y sorprende al alumnado, que busca la explicación del truco.

Proponemos un ejemplo, que puede servir de base, pero hay miles de ejemplos de este tipo de problemas.

- *Con la calculadora, escribe un número de menos de 8 dígitos.*
- *Multiplícalo por 3.*

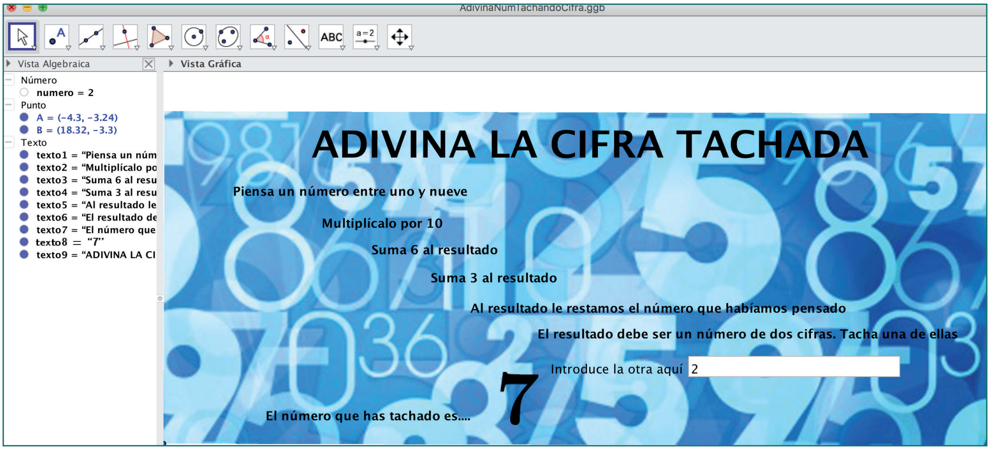


Imagen 2.

- *Suma 15 al resultado.*
- *Multiplica la respuesta por 2.*
- *Divide el resultado por 6.*
- *Resta a ese número el que pensaste originalmente.*
- La expresión algebraica con la que trabajamos es la siguiente:

$$\{[2(3x+15)]:6\}-x$$

$$\{[6x+30]:6\}-x$$

$$\{x+5\}-x=5$$

Por lo que claramente podemos observar que, independientemente del número elegido originalmente, el resultado será cinco.

Adivina la cifra tachada

El problema que planteamos consiste en pensar un número de una cifra y realizar las siguientes operaciones aritméticas:

- *Piensa un número entre uno y nueve*
- *Suma 6 al resultado*
- *Ahora suma tres al resultado*
- *Resta el número que habías pensado originalmente*
- *El resultado obtenido es un número de dos cifras, tacha una e indícanos la otra*

Si suponemos que el número elegido ha sido tendremos la siguiente expresión algebraica tras realizar las operaciones indicadas:

$$10x+6+3-x$$

$$9x+9$$

$$9(x+1)$$

El resultado que nos dará el participante es un múltiplo de nueve y por las características del número original, deberá ser de entre los siguientes {18, 27, 36, 45, 54, 63, 72, 81, 90}, de forma que todos ellos cumplen con la propiedad que sus cifras suman nueve. Por tanto, si nos da una cifra, para obtener la otra bastará con restársela a nueve.

La cifra perdida

El problema que planteamos consiste en adivinar una cifra de todas las que obtengamos al seguir una serie de indicaciones que a continuación ponemos de manifiesto:

- *Piensa un número con la cantidad de cifras que quieras, sin importar si se repiten.*
- *Ordena las cifras de ese número en otro orden de manera que obtengas un número con tantas cifras como tenía el original.*
- *Resta al mayor el menor de los dos números.*
- *Del resultado de la resta, tacha un número que no sea cero.*
- *Dime las demás cifras en cualquier orden y adivinare cual es la cifra que has tachado.*

La fundamentación matemática de este problema consiste en que, al restar dos ordenaciones distintas de las mismas cifras, el resultado obtenido obligatoriamente debe ser

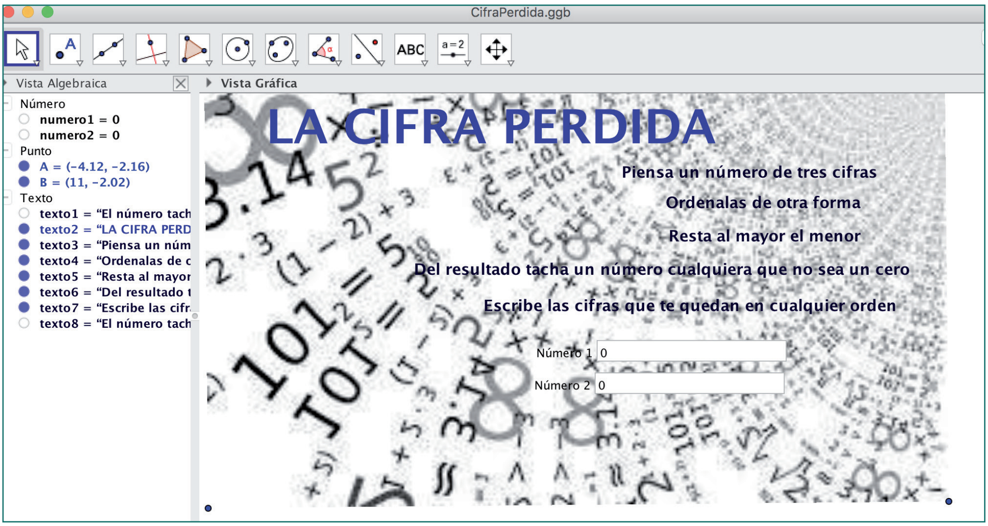


Imagen 3.

un múltiplo de nueve (debido a que cada diferencia entre dos potencias de 10 es múltiplo de nueve). Ahora bien, un múltiplo de nueve cumple que la suma de todas sus cifras también lo es y, por lo tanto, para adivinar el número bastará con sumar las cifras conocidas y contar cuánto falta para el siguiente múltiplo de nueve. Lo que falte corresponde a la cifra tachada y si la suma ya es múltiplo de nueve, la cifra tachada será un nueve (pues hemos eliminado el caso 0).

Tarjetas de base dos

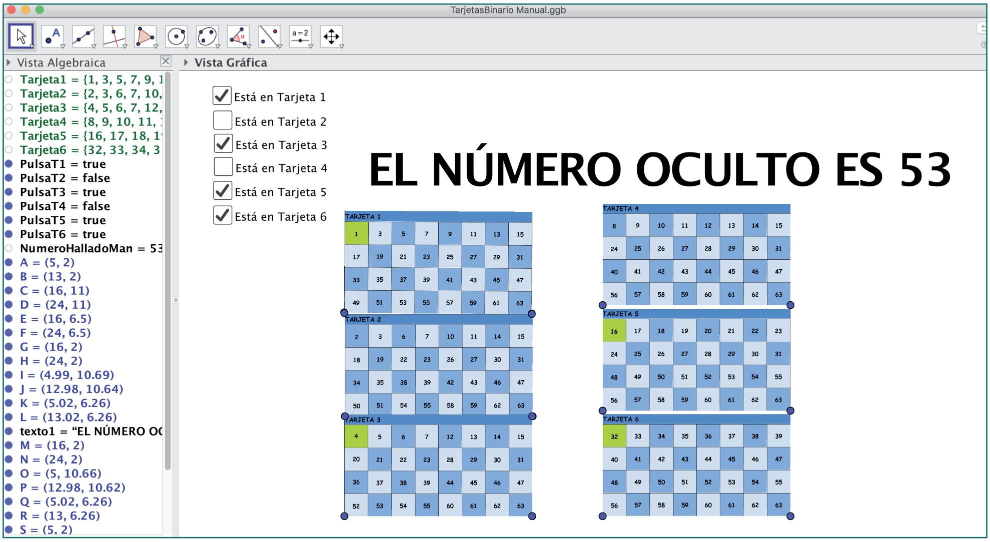


Imagen 4.

En este juego se muestran seis tarjetas o cartulinas, cada una de ellas conteniendo los números que se indican. Se pide a un espectador que piense un número y que separe las tarjetas que contienen dicho número. El matemago, con un simple vistazo a dichas tarjetas, nombra rápidamente el número pensado.

El truco es bastante sencillo, basta sumar los primeros números de las tarjetas que contienen el número pensado. Con toda seguridad, la prueba de la validez de este método es mucho más interesante para alguien interesado en las matemáticas. Dicha prueba se vuelve sencilla después de observar con detalle las tarjetas: si escribimos la representación binaria de los números involucrados, en la tarjeta 1 están todos los números cuya última cifra es un uno, en la tarjeta 2, aquellos cuya penúltima cifra es un uno, y así sucesivamente. El primer número de cada tarjeta indica el valor decimal de cada una de las cifras del número. Así que su suma nos dará el número pensado.

Este juego es fácil de llevar a cabo con tarjetas en papel, que pueden estar plastificadas, el matemago puede hacer la suma rápidamente. También hicimos una construcción con Geogebra con resultados igual de sorprendentes.

TARJETAS DE BASE TRES

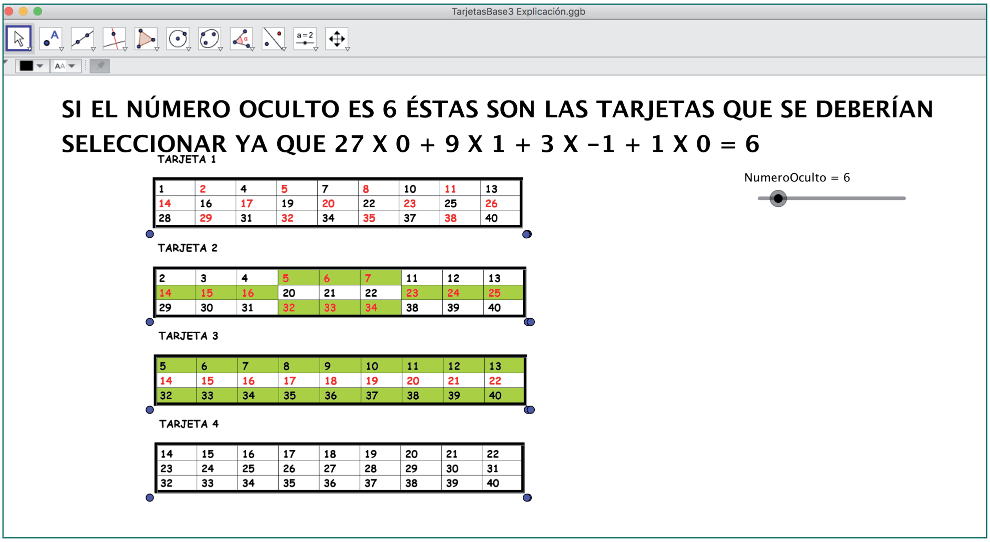


Imagen 5.

En este caso es más difícil que el espectador encuentre el truco, pues no consiste en sumar los números más pequeños que aparecen (como en el caso anterior). Las tarjetas están codificadas en base 3, a la primera le corresponde el 1=30, a la segunda el 3=31, a la tercera el 9=32 y la última lleva asociado el 27=33. Sólo hay que sumar el código si está en negro o restarlo si está en rojo. Así si nos dicen que el número pensado está en rojo en la tarjeta 1, en negro en la 2ª y en negro en la 4ª, el número será −1+3+27 = 29. En este caso el número más grande con 4 tarjetas es 1+3+9+27 = 40. Con 5 tarjetas sería 1+3+9+27+81 = 121 y con n tarjetas sería $\frac{(3^n-1)}{2}$

Juegos con cartas

Los juegos con cartas son quizás los más atractivos para el alumnado, y los más complicados de explicar en papel, siendo más didáctica la demostración in situ o un vídeo. Explicamos un juego de cartas muy popular, sumando 10:

- *El espectador elige 12 cartas cualesquiera del mazo extendido.*
- *De las 12 cartas elige 4.*
- *Recogemos las 8 cartas restantes y las colocamos debajo del mazo.*
- *Diremos que nuestro juego se llama cuenta atrás y que tenemos una predicción y le diremos la carta que va a salir.*
- *Le damos la vuelta estas 4 cartas.*

Imagen 6.

- *Si la primera carta tiene como valor, por ejemplo, el 3 de trébol, tendremos que dejar encima de esa carta cartas bocabajo hasta llegar a 10, en este caso 7.*
- *Esto lo hacemos con el resto de montones.*
- *Una vez que hemos acabado sumamos el valor de las cartas que quedan bocarriba, las que hemos sacado inicialmente.*
- *Y vamos retirando del mazo exactamente el número resultante. Esa última carta será nuestra predicción.*

Mientras el espectador elige estas 4 cartas nosotros hemos recogido el mazo y hemos mirado disimulo la última. Siempre, en todos los casos, independientemente de las doce cartas elegidas en un principio y de las 4 posteriores, la última carta que miramos es la número 40 del mazo. Al fin y al cabo, son las cartas que se retiran del mazo ya en cada montón, retiramos 10, en nuestro ejemplo en el primer montón 7 que ponemos bocabajo y posteriormente 3 que es el número que había inicialmente, 3 +7=10. Esto pasa en todos los casos.

Lo más complicado de este truco es mirar con disimulo la última carta entre el paso 2 y 3. Por este motivo es que se le pide al espectador inicialmente que retire doce cartas, para posteriormente entretenerlo y pedirle que elija solamente 4 de esas cartas.

4. BIBLIOGRAFÍA Y REFERENCIAS WEBS

Página de juegos interactivos

http://www.catedu.es/matematices/index.php?option=com_content&view=article&id=51:la-adivina&catid=24:matemagia&Itemid=93

Recursos Matemagia GRUPO ALQUERQUE

http://www.grupoalquerque.es/ferias/2011/archivos/pdf/matemagia_enredadora.pdf

Recursos Matemagia

http://www.matematicasdivertidas.com/Matemagia/matemagia.html

Juegos de lógica

http://www.juegosdelogica.com/neuronas/matemagi.htm
Matemagia, Adrián Paenza, Editorial Sudamericana
Matemagia, Fernando Blasco, Ediciones Temas de Hoy

Modelización matemática de la evolución de dos reactivos químicos

Teresa F. Blanco
Universidad de Santiago de Compostela

Manuel García Piqueras
Universidad de Castilla-La Mancha

José Manuel Diego-Mantecón y Zaira Ortiz-Laso
Universidad de Cantabria

Resumen: *En los últimos años investigadores han resaltado la importancia de trabajar las materias de forma interdisciplinar para aumentar el interés por las áreas STEM. Esta experiencia describe una actividad STEM basada en la resolución de problemas del ámbito de la química. En concreto las estudiantes modelizaron la evolución de dos reactivos en una reacción química, desempeñando un papel fundamental la función exponencial. La conexión entre la química y las matemáticas se efectúa gracias a la modelización, siendo un recurso idóneo para fomentar la adquisición de las competencias clave e integrar los contenidos de distintas áreas.*
Palabras clave: *STEM, química, modelización, función exponencial, educación matemática*

Mathematical modelling of two chemical reactants evolution

Abstract: *In recent years, researchers have highlighted the importance of working the subjects in an interdisciplinary way, to increase the interest in the STEM areas. This experience describes a STEM activity based on the problem solving contextualized in the chemistry discipline. In particular, students modelled the evolution of two reactants in a chemical reaction, playing a key role the exponential function. The connection between mathematics and chemistry is made through modelling, being it a suitable resource to promote the acquisition of key competences and to integrate contents from different areas.*
Keywords: *STEM, chemistry, modelling, exponential function, mathematics education*

INTRODUCCIÓN

La Unión Europea ha detectado en los últimos años un interés decreciente por las áreas científico-tecnológicas, identificando un número insuficiente de graduados en ese ámbito (CEDEFOP, 2014; Kennedy y Odell, 2014; Thomas y Watters, 2015). Este hecho se considera preocupante para el futuro de los países europeos y han surgido distintas investigaciones que explican factores que conducen a la elección de estudios, identificando factores de género, sociales, culturales, económicos e institucionales (Hense et al., 2017; Krapp y Prenzel, 2011; Thomas y Watters, 2015). En particular, tiene una gran influencia la forma en que se enseñan las ciencias y las matemáticas en los centros, enfatizando en la necesidad de trabajar las materias de esos ámbitos interdisciplinarmente (Rocard, Csermely, Walwerg-Henriksson y Hemmo, 2007; Thomas y Watters, 2015).

El término STEM proviene del acrónimo inglés *Science, Technology, Engineering y Mathematics* (en español ciencia, tecnología, ingeniería y matemáticas). Una actividad STEM integra los procesos de enseñanza-aprendizaje de al menos dos de las disciplinas mencionadas anteriormente, con el fin de obtener una solución a un problema contextualizado. Estas soluciones son abiertas y promueven la investigación científica a través de la resolución de problemas (Diego-Mantecón et al., 2017).

La tendencia de trabajar las materias científico-tecnológicas de forma integrada mediante un aprendizaje basado en la investigación se refleja en la LOMCE[1], ley actual de educación en España. Dicha ley enfatiza la adquisición de siete competencias clave, entre las que se encuentra la *competencia matemática y competencias básicas en ciencia y tecnología*, dejando constancia de la importancia que supone trabajar de forma interdisciplinar. En los contenidos, criterios de evaluación o estándares de aprendizaje evaluables de materias STEM se recogen aspectos que aluden a la necesidad de trabajar mediante un aprendizaje basado en la investigación a través de proyectos (RD 1105/2014, de 26 de diciembre; O. 65/2015, de 21 de enero).

Para dar soporte a la educación STEM surgen proyectos nacionales e internacionales como STEMforYouth. STEMforYouth es un proyecto de la Unión Europea que proporciona, tanto al profesorado como al alumnado, problemas y cursos para su implementación (Diego-Mantecón, Sáenz de la Torre y Brzozowy, 2017; Brzozowy et al., 2017; Diego-Mantecón, García-Piqueras, Blanco y Ortiz-Laso, 2018). El material educativo generado dentro del proyecto se encuentra alojado en la plataforma de actividades OLCMS, por sus siglas en inglés '*Open Learning Content Management System'* (en español: *sistema de gestión de contenido de aprendizaje abierto*)— https://olcms.stem4youth.pl/. Los recursos educativos de la plataforma son libres y se encuentran clasificados por disciplinas: astronomía, ciencia ciudadana, física, ingeniería, matemáticas, medicina, y química, en función del área que se involucra con mayor perseverancia en cada uno de los problemas contextualizados. Una de las funcionalidades que incluye la plataforma es un foro donde profesores y estudiantes valoran y comparten sus experiencias de implementación.

1. Ley Orgánica para la Mejora de la Calidad Educativa

EXPERIENCIA

La experiencia que aquí se presenta se enmarca en el proyecto STEMforYouth, y en particular dentro de su competición internacional. En esta competición estudiantes de varios países europeos participaron de forma colaborativa en el desarrollo de actividades STEM. Los estudiantes divididos en grupos de tres tenían edades comprendidas entre los 15 y los 19 años. Los temas centrales de la competición fueron: *impresión 3D*, *uso de focos LED*, *aplicación de la función exponencial*, y *análisis de la calidad del aire*. La estructura de los problemas en cada uno de los temas era muy similar, en primer lugar, se trabajaba la base teórica del problema, y posteriormente se aplicaba a situaciones contextualizadas.

En este artículo se presenta, en concreto, una actividad de aplicación de la función exponencial para modelizar la evolución de dos reactivos en una reacción química. Esta experiencia estuvo liderada por una estudiante de nacionalidad serbia de 16 años, y completaban el equipo dos estudiantes españolas de 1º de Bachillerato del IES Tomás Navarro Tomás de 16 y 17 años. El equipo estuvo supervisado por dos mentores de nacionalidad serbia y española, ambos profesores de los centros donde las estudiantes están matriculadas. La actividad se realizó en el curso académico 2017/2018 y tuvo una duración de siete semanas y media. Las tres estudiantes tienen un rendimiento académico alto, con un gran interés en el ámbito científico-tecnológico. Dada la muestra de estudiantes, el proceso de implementación de la actividad se desarrolló íntegramente en lengua inglesa.

IMPLEMENTACIÓN EN EL AULA

A continuación, se describe el proceso de implementación de la actividad. Se trabajaron aspectos teóricos de las matemáticas, mayoritariamente del ámbito de las funciones, y la aplicación de estos en diferentes disciplinas. En el proceso de aplicación desempeñó un papel fundamental la modelización matemática, reforzando los contenidos matemáticos e involucrando conocimientos de las otras disciplinas.

La actividad se presenta dividida en tres partes con objetivos bien diferenciados. La primera parte, abarca la tarea (I) y pretende dar a los estudiantes una base teórica de la función exponencial. La segunda parte, que comprende las tareas (II) y (III), se centra en la aplicación de las matemáticas en diferentes áreas para resolver problemas contextualizados. La última parte, tarea (IV), tiene como objetivo la puesta en común de los resultados. A continuación, se explica el objetivo principal de cada una de las tareas, así como el tiempo de implementación.

- (I) *fundamentos teóricos de la función exponencial*, que pretendía que comprendiesen la diferencia entre función exponencial y lineal, así como la comprensión de los parámetros de la exponencial (1 semana).
- (II) *modelización matemática*, que permitió establecer modelos matemáticos en problemas de diferentes disciplinas (física, química, biología o economía) (2.5 semanas).

- (III) *análisis de datos experimentales*, donde los alumnos dedujeron si conjuntos de datos contextualizados se aproximan a una función exponencial (2.5 semanas).
- (IV) *revisión*: puesta en común de las tareas realizadas por las estudiantes y redacción de la documentación a entregar (1.5 semanas).

Las tareas (I) y (IV) fueron realizadas por las tres estudiantes. De esta forma, adquirieron una base teórica necesaria para resolver cada una de las tareas, y pusieron en común los resultados obtenidos. El resto de tareas se realizaron individualmente. Especial importancia tuvo la tarea (IV) donde las estudiantes ponían en común sus resultados para elaborar un documento final y preparar la defensa de la actividad que realizaron frente a los evaluadores.

Además de resolver problemas en las distintas tareas, las estudiantes tenían que presentar un documento de texto en lengua inglesa que ha sido enviado a través de la plataforma OLCMS para su evaluación como parte de la competición internacional. Dicho documento recoge el proceso de implementación de la actividad, así como la resolución de cada uno de los problemas. También, realizaron una presentación *power point* para mostrar los resultados más significativos de la actividad ante el jurado mediante videoconferencia.

Debido a la extensión de la actividad, en este documento se presenta uno de los problemas de la tarea (IV) *modelización matemática*. Los demás problemas contextualizados se encuentran disponibles en inglés en el siguiente enlace: https://ocs-pl.oktawave.com/v1/AUTH_385fff76-290b-43da-b2fc-96b1c08bce24/olcmsProd/medialibrary/2018/01/Expotential_Function_Problem.pdf

Para resolverlos, las estudiantes utilizaron las hojas de cálculo y la calculadora gráfica del software de geometría dinámica GeoGebra. Este recurso didáctico tuvo especial importancia, permitiéndolas variar fácilmente los parámetros a través de deslizadores. De esta forma, representaban el modelo planteado, establecían la coherencia de dicho modelo o identificaban tendencias en el comportamiento de la función.

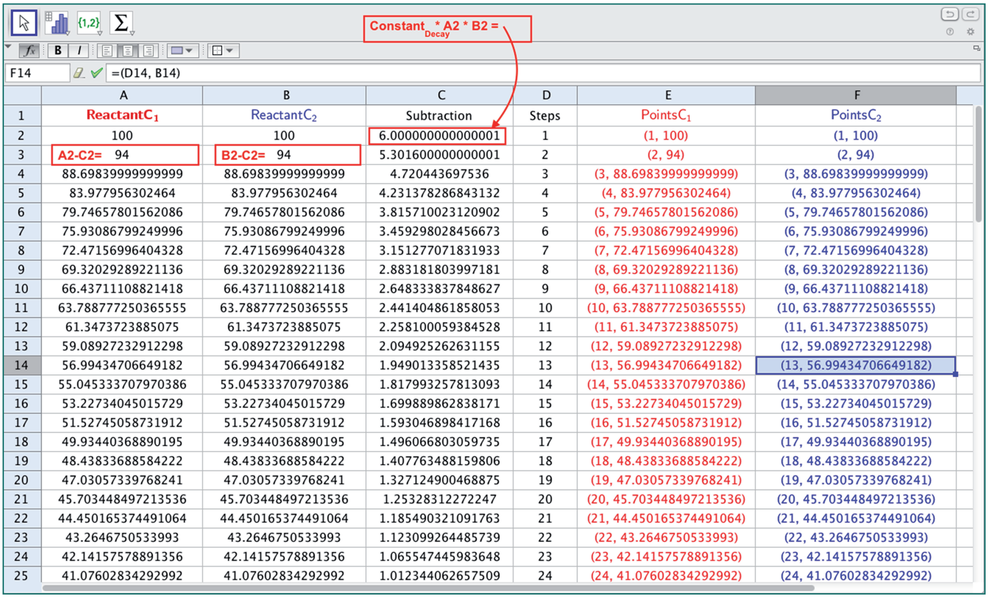
EJEMPLO DE MODELIZACIÓN: EVOLUCIÓN DE DOS REACTIVOS QUÍMICOS

En esta sección detallaremos el problema de la tarea (IV) *modelización matemática,* enunciado en la Tabla 1.

Apartado (i). Para estudiar cómo varía la concentración de dos reactivos, las estudiantes consideraron dos valores iniciales de C_1 y C_2. En primer lugar, utilizaron la hoja de cálculo de GeoGebra, para obtener una visión local de cómo varía la función en cada iteración. En la Figura 1, se muestra la hoja de cálculo donde se simula la variación de dos reactivos a lo largo del tiempo. Utilizando la condición *la concentración de cada uno de ellos disminuye proporcionalmente al producto de sus concentraciones*, introdujeron un constante positiva $\text{Constant}_{\text{Decay}}$ menor que la unidad. Las estudiantes analizaron casos particulares para ver cómo variaba la función lo que las llevó a generalizar a través de las siguientes funciones:

Tabla 1. Evolución de dos reactivos en una reacción química.

Se puede suponer que dos reactivos químicos reaccionan de acuerdo con la siguiente ley: en un intervalo de tiempo dado, la disminución de la concentración de cada uno de los reactivos es proporcional al producto de sus concentraciones en cada momento. Además, los cambios en C_1 y C_2 son iguales siempre. • (i) Utiliza una hoja de cálculo para elaborar un modelo matemático que muestre la evolución de la concentración en cada uno de los casos. Verifica si en alguno de los modelos de C_1 o C_2 la concentración disminuye siguiendo una función exponencial. • (ii) Intenta cambiar la diferencia D entre los valores de C_1 y C_2. ¿Se aproxima ahora una de las dos curvas a una función exponencial?



$\text{Constant}_{\text{Decay}}$ * A2 * B2 =

F14 =(D14, B14)

	A	B	C	D	E	F
1	ReactantC$_1$	ReactantC$_2$	Subtraction	Steps	PointsC$_1$	PointsC$_2$
2	100	100	6.000000000000001	1	(1, 100)	(1, 100)
3	A2-C2= 94	B2-C2= 94	5.301600000000001	2	(2, 94)	(2, 94)
4	88.69839999999999	88.69839999999999	4.720443697536	3	(3, 88.69839999999999)	(3, 88.69839999999999)
5	83.977956302464	83.977956302464	4.231378286843132	4	(4, 83.977956302464)	(4, 83.977956302464)
6	79.74657801562086	79.74657801562086	3.815710023120902	5	(5, 79.74657801562086)	(5, 79.74657801562086)
7	75.93086799249996	75.93086799249996	3.459298028456673	6	(6, 75.93086799249996)	(6, 75.93086799249996)
8	72.47156996404328	72.47156996404328	3.151277071831933	7	(7, 72.47156996404328)	(7, 72.47156996404328)
9	69.32029289221136	69.32029289221136	2.883181803997181	8	(8, 69.32029289221136)	(8, 69.32029289221136)
10	66.43711108821418	66.43711108821418	2.648333837848627	9	(9, 66.43711108821418)	(9, 66.43711108821418)
11	63.788777250365555	63.788777250365555	2.441404861858053	10	(10, 63.788777250365555)	(10, 63.788777250365555)
12	61.3473723885075	61.3473723885075	2.258100059384528	11	(11, 61.3473723885075)	(11, 61.3473723885075)
13	59.08927232912298	59.08927232912298	2.094925262631155	12	(12, 59.08927232912298)	(12, 59.08927232912298)
14	56.99434706649182	56.99434706649182	1.949013358521435	13	(13, 56.99434706649182)	(13, 56.99434706649182)
15	55.045333707970386	55.045333707970386	1.817993257813093	14	(14, 55.045333707970386)	(14, 55.045333707970386)
16	53.22734045015729	53.22734045015729	1.699889862838171	15	(15, 53.22734045015729)	(15, 53.22734045015729)
17	51.52745058731912	51.52745058731912	1.593046898417168	16	(16, 51.52745058731912)	(16, 51.52745058731912)
18	49.93440368890195	49.93440368890195	1.496066803059735	17	(17, 49.93440368890195)	(17, 49.93440368890195)
19	48.43833688584222	48.43833688584222	1.407763488159806	18	(18, 48.43833688584222)	(18, 48.43833688584222)
20	47.03057339768241	47.03057339768241	1.327124900468875	19	(19, 47.03057339768241)	(19, 47.03057339768241)
21	45.703448497213536	45.703448497213536	1.25328312272247	20	(20, 45.703448497213536)	(20, 45.703448497213536)
22	44.450165374491064	44.450165374491064	1.185490321091763	21	(21, 44.450165374491064)	(21, 44.450165374491064)
23	43.2646750533993	43.2646750533993	1.123099264485739	22	(22, 43.2646750533993)	(22, 43.2646750533993)
24	42.14157578891356	42.14157578891356	1.065547445983648	23	(23, 42.14157578891356)	(23, 42.14157578891356)
25	41.07602834292992	41.07602834292992	1.012344062657509	24	(24, 41.07602834292992)	(24, 41.07602834292992)

Figura 1. Hoja de cálculo que simula la disminución de la concentración de dos reactivos químicos.

$$C_1\,(t{+}1) = C_1\,(t) - \text{Constant}_{\text{Decay}} \cdot C_1\,(t) \cdot C_2\,(t)$$

$$C_2\,(t{+}1) = C_2\,(t) - \text{Constant}_{\text{Decay}} \cdot C_1\,(t) \cdot C_2\,(t)$$

Representando las columnas E (en color rojo, Figura 1) y F (en color azul, Figura 1) obtenidas en la hoja de cálculo, las estudiantes concluyeron que el conjunto de puntos generados para ambos reactivos, se podrían aproximar a una función exponencial. Las estudiantes utilizaron el comando FitExp[<*Lista de Puntos*>] de GeoGebra, para aproximar los conjuntos de datos a un modelo exponencial. La Figura 2 muestra los dos conjuntos de puntos (en rojo) y (en azul), que son aproximados a una función exponencial, respectivamente, y . Para determinar la calidad del ajuste, utilizaron el comando RSquare[< *Lista de Puntos* >, <*Función*>] de GeoGebra. Esto las permitió obtener que el

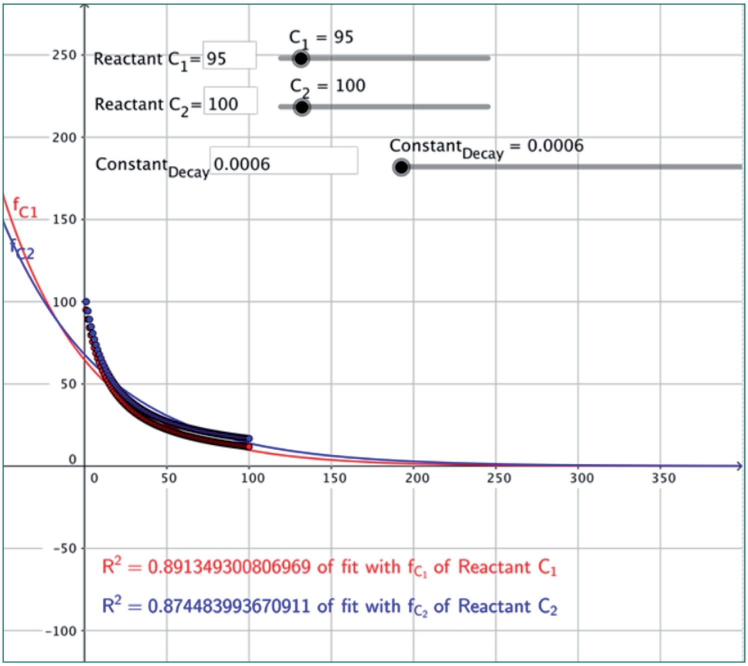


Figura 2. Funciones exponenciales generadas a partir de las concentraciones químicas C_1 y C_2

coeficiente de correlación es cercano a 1, lo que indica que la función aproximada es una *buena aproximación* como puede observarse en la figura 2.

Lo anterior confirmó la hipótesis de que el proceso reproducido, la variación de las concentraciones de los reactivos, seguía una función exponencial respecto del tiempo.

Apartado (ii). Para la realización de esta parte, las alumnas crearon dos deslizadores que les permitieron variar fácilmente las concentraciones de los reactivos, así como el valor de constante Constant$_{Decay}$. Las estudiantes identificaron que cuanto menor era la concentración mejor se ajustaba a una función exponencial. Los resultados se pueden ver en la Figura 3.

EVALUACIÓN

A continuación, se presenta una evaluación desde dos perspectivas: adaptación al currículum español y evaluación en el aula.

Adaptación al currículum

Esta actividad es idónea para trabajar las competencias clave enunciadas en el Real Decreto 1105/2014 (de 26 de diciembre) y la Orden 65/2015 (de 21 de enero). En concreto, se trabaja la competencia matemática y competencias básicas en ciencia y tecnología, competencia digital, competencia lingüística y competencia de aprender a aprender.

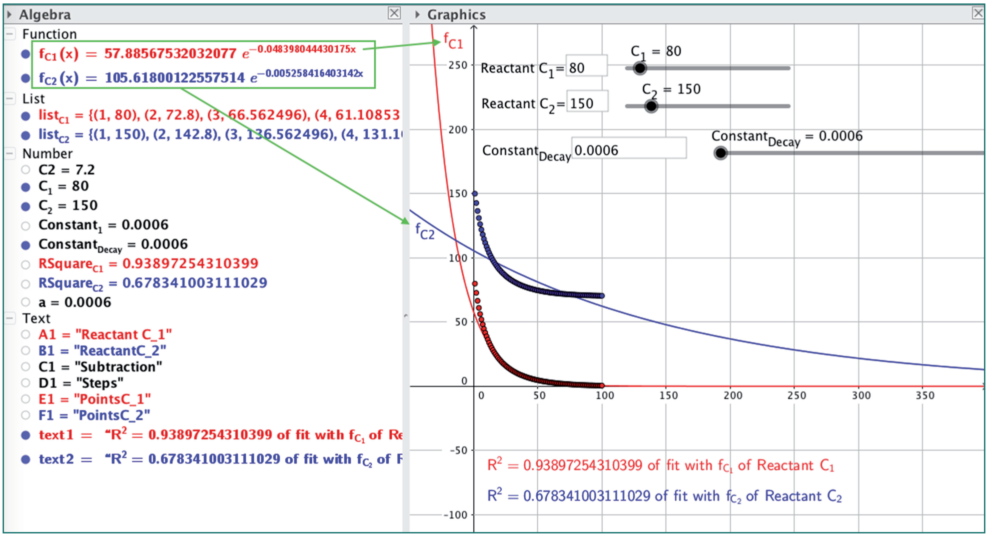


Figura 3. Ajuste de las concentraciones $C_1(t)$ (en rojo) y $C_2(t)$ (en azul) mediante las funciones exponenciales.

Las estudiantes aplicaron conocimientos matemáticos para adquirir nuevo conocimiento del ámbito de las matemáticas, la química y la tecnología. Cabe destacar, que la actividad trata aspectos teóricos y prácticos a través de la modelización con el objetivo de obtener la solución de un problema contextualizado y deducir propiedades de las funciones. Estos hechos implican un desarrollo de la competencia matemática y competencias básicas en ciencia y tecnología.

Las estudiantes emplearon recursos tecnológicos para resolver problemas y difundir los resultados obtenidos en la actividad, fomentando su competencia digital. Ha sido especialmente beneficioso la incorporación del software de geometría dinámica GeoGebra, ayudándolas a comprobar e interiorizar las propiedades de las funciones.

Además de trabajar las competencias relacionadas con el ámbito STEM, desempeña un papel fundamental la competencia lingüística tanto de forma oral como escrita. Las estudiantes han escrito una memoria final de la actividad y una presentación que recoge aspectos relevantes de la misma. Además, realizaron varias videoconferencias con homólogos y evaluadores en lengua inglesa para informarse sobre el estado de las tareas o defender su proyecto.

En esta actividad el conocimiento se ha ido adquiriendo gradualmente, reforzándolo a lo largo de la actividad en distintas tareas. Como consecuencia, las estudiantes han estado continuamente en contacto para planificar la actividad, explicar y supervisar el estado de las tareas, o evaluar los resultados, desarrollando aspectos destacados de la competencia de aprender a aprender.

Evaluación en el aula

El profesorado no ha realizado una evaluación cuantitativa de la misma, pero se ha seguido diariamente el trabajo de las estudiantes. Esto ha permitido detectar que una de las mayores dificultades con las que se encontraron las alumnas fue el uso de la herramienta GeoGebra. A pesar de que ya lo habían utilizado con anterioridad, no tenían suficiente dominio en la hoja de cálculo, los deslizadores y ciertas funciones de ajuste matemático. Otro aspecto importante a resaltar en la evaluación de esta actividad fue el hecho de que las alumnas pudieran comprobar la potencialidad de este programa, al aplicarlo a problemas contextualizados, para elaborar hipótesis, contrastarlas y obtener soluciones.

A nivel general, trabajar en un contexto internacional ha supuesto una gran motivación para los profesores y las estudiantes; mostrando estas últimas una disposición muy favorable hacia el aprendizaje en el ámbito STEM.

CONCLUSIÓN

La actividad STEM que se ha presentado es parte de la competición internacional del proyecto STEMforYouth. Se trata de una actividad basada en la investigación y el aprendizaje colaborativo que involucra principalmente tres áreas del conocimiento: matemáticas, química y tecnología. Las estudiantes debían resolver problemas contextualizados utilizando aspectos teóricos y prácticos de las matemáticas, para conectarlos con las otras áreas.

Las matemáticas desempeñan un papel fundamental en el ámbito STEM, especialmente cuando se explica un fenómeno contextualizado con el objetivo de dar predicciones a través de modelos. En muchos casos, el nexo entre los contenidos matemáticos y otras disciplinas se produce gracias a la modelización. Se trata de una herramienta idónea para integrar contenido de distintas áreas, así como desarrollar competencias clave del currículo LOMCE en las aulas de secundaria.

AGRADECIMIENTOS

Este trabajo ha sido financiado por el proyecto STEM4youth: Promotion of Stem Education by Key Scientific Challenges and their Impact on our Life and Career Perspectives, dentro del Programa Horizon 2020 (H2020- Seac-2015-1710577); y por el FEDER/ Ministerio de Ciencia, Innovación y Universidades – Agencia Estatal de Investigación/ _Proyecto EDU2017-84979-R.

REFERENCIAS

Brzozowy, M., Hołownicka, K., Bzdak, J., Tornese, P., Lupiañez-Villanueva, F., Vovk, N., … Moussas, X. (2017). *Making STEM education attractive for young people by presenting key scientific challenges and their impact on our life and career perspectives*.

En International Technology, Education and Development Conference INTED2017 (pp. 9948–9957). Valencia: IATED.

CEDEFOP. (2014). Rising STEMs. Recuperado el 17 de abril de 2018, de http://www.cedefop.europa.eu/en/publications-and-resources/statistics-and-indicators/statistics-and-graphs/rising-stems

Diego-Mantecón, J. M., Bravo, A., Arcera, O., Cañizal, P., Blanco, T. F., Recio, T., González-Ruiz, I. e Istúriz, M. P. (2017). *Desarrollo de cinco actividades STEAM con formato KIKS*. En Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas (eds.). VIII Congreso Iberoamericano de Educación Matemática (pp. 357-365). Madrid: Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas.

Diego-Mantecón, J.M., García-Piqueras, M., Blanco, T. F. y Ortiz-Laso, Z. (2018) Problemas en contextos reales para trabajar las matemáticas— Plataforma STEMforYouth. Sociedad de la Información, 58, 29-38.

Diego-Mantecón, J. M., Sáenz De La Torre Lasierra, J. J. y Brzozowy, M. (2017). *Proyecto STEMforYouth*. En Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas (eds.). VIII Congreso Iberoamericano de Educación Matemática (pp. 305-311). Madrid: Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas.

Hense, J., Weiser, L., Scheersoi, A., Drymiotou, I., Kotkas, T., Kang, J. y Direito, I. (2017). *Interest in Science–Measurement and some surprising findings.* En European Science Education Research Association (ESERA). Dublín

Kennedy, T. J. y Odell, M. R. L. (2014). Engaging students in STEM education. *Science Education International*, *25*(3), 246-258.

Krapp, A. y Prenzel, M. (2011). Research on interest in science: Theories, methods, and findings. *International journal of science education*, *33*(1), 27-50.

España. Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato. *Boletín Oficial del Estado*, 3 de enero de 2015, núm. 3, pp. 169-546.

España. Orden ECD/65/2015, de 21 de enero, por la que se describen las relaciones entre las competencias, los contenidos y los criterios de evaluación de la educación primaria, la educación secundaria obligatoria y el bachillerato. *Boletín Oficial del Estado*, 29 de enero de 2015, núm. 25, pp. 6986-7003.

Rocard, M., Csermely, P., Walwerg-Henriksson, H. y Hemmo, V. (2007). *A Renewed Pedagogy for the Future of Europe*. Recuperado el 10 de abril de 2018, de http://ec.europa.eu/research/science-society/document_library/pdf_06/report-rocard-on-science-education_en.pdf

Thomas, B. y Watters, J. J. (2015). Perspectives on Australian, Indian and Malaysian approaches to STEM education. *International Journal of Educational Development*, *45*, 42-53.

Épsilon - *Revista de Educación Matemática* **2019, nº 101, 157-163**

Las tablas de multiplicar aprovechando simetrías

Enrique Alonso Vendrell
IES Juan de Mairena

Resumen: *En este artículo, el autor desarrolla un método novedoso de plantear al alumnado las tablas de multiplicar con las siguientes ventajas: Es fácil de aprender, ya que requiere poca memoria, y es rápido de escribir. Por lo que puede ser útil al alumnado en general, pero especialmente a los alumnos con problemas de memoria.*
Palabras clave: *Innovación, Didáctica, Matemáticas, Tablas de multiplicar, Primaria, Técnicas de estudio, Memorización.*

The multiplication tables taking advantage of symmetries

Abstract: *In this paper, the author develops a novel method of presenting the multiplication tables to the student, with the following advantages: It is easy to learn, as it requires little memory, and is quick to write. For what can be useful to students in general, but especially to students with memory problems.*
Keywords: *Innovation, Didactics, Mathematics, Multiplication tables, Primary, Study techniques, Memorization.*

1. INTRODUCCIÓN

En la práctica docente, como profesor de matemáticas de secundaria que soy, encuentro que muchos alumnos no pueden acceder a los contenidos de la materia al no realizar las operaciones aritméticas de forma correcta, en tiempo y sin que les suponga una ardua tarea. Ahondando un poco, se puede ver que muchas veces la dificultad parte desde el aprendizaje memorístico de las tablas de multiplicar. Algo ya señalado en algunos estudios sobre dificultades en con el cálculo aritmético (Coronajo-Hijon, 2014). Así, buscando alternativas, he desarrollado un método novedoso de representar las tablas, que requiere mucha menos memoria, es rápido de escribir y fácil de aprender, y además en él se pueden apreciar ciertas relaciones que no se observan en la forma tradicional.

En este artículo no valoraré si el aprendizaje memorístico de las tablas es necesario o no, y tampoco pretendo que este método sustituya al tradicional, ni mucho menos, ya que al final, si se usan las tablas, se debe responder de forma rápida y correcta a un producto concreto. Pero creo que es un método que ofrece ciertas ventajas añadidas, además del mero hecho de ser una alternativa, como el hecho que se aprenden todas las tablas a la vez en lugar de ir de una en una (al alumnado siempre le cuesta mas las tablas del 7 y el 8, que son las últimas que aprende). Por otro lado, por poner un punto débil, hay que darse cuenta que esta forma de plantear las tablas esconde el significado real de las mismas, que es fácilmente apreciable con el método tradicional.

2. MARCO TEÓRICO

Para empezar, voy a exponer el marco teórico en el que se basa, aunque como no es necesario ni para su escritura ni para su uso, el lector que así lo desee puede pasar directamente al punto donde se explica cómo se escribe y cómo se usa. La tabla que presento usa, para empezar, la propiedad conmutativa, lo cual no es nada novedoso, y la dejará con la mitad de los resultados. A continuación se va a dividir la información de las decenas de las unidades (si bien el método es válido en cualquier base, me centraré en la base 10).

Con las unidades se usarán las siguientes dos propiedades que nos proporcionarán dos simetrías adicionales (mod es el módulo, es decir el resto al dividir):

$$(a\cdot(10 - b)) \bmod 10 = 10 - (a\cdot b) \bmod 10$$

$$((10 - a)\cdot(10 - b)) \bmod 10 = (a\cdot b) \bmod 10$$

Para las decenas, en un principio pensé en usar un código de colores. Pero luego me dí cuenta que, en una tabla, los cambios de decenas se producen cuando decrecen las unidades. Obviamente las unidades siempre cambian si se suma un número menor que 10. Si las decenas no cambian es porque sólo las unidades han crecido, si las decenas cambian solo pueden aumentar en 1 y en este caso las unidades deben decrecer, ya que si aumentan decenas y unidades a la vez es porque se ha sumado un valor mayor que 10. Así sólo hay que marcar estos cambios de decenas, ya que contándolos tendremos las decenas. Finalmente opté por marcar cuando no hay cambios en las decenas, ya que son muchas menos marcas que cuando si los hay, por lo que habrá que contar cuando no haya marcas.

3. INSTRUCCIONES PARA ESCRIBIR LA TABLA

El primer paso será escribir una fila y una columna con los números del 1 al 9, con los unos coincidentes. Y se escribirán unicamente las unidades de los productos cruzados de los números del 2 al 5, tal y como se indica en la figura 1. Esta es la única parte que hay que memorizar, y es bastante sencilla al ser la columna de la derecha 0 y 5 alternos y la primera fila se va contando de dos en dos, quedando solo por memorizar 3 posiciones.

En segundo lugar se escribirá la zona simétrica a esta que ya tenemos, pero con la diferencia hasta 10 de dichas cifras, tal y como se recoge en la figura 2. Es decir, restaremos 10 menos los valores anteriores.

Para completar los números de la tabla, se escribirá la zona simétrica a la zona que ya tenemos e incluyendo la fila con los números del 1 al 9, tal cual está. Véase la figura 3.

Ahora, como último paso, se pondrán las 12 marcas en las cifras que sean mayores que la cifra que está situada sobre ellas. Esto es, las seis primeras de a diagonal, todos los 8 salvo el de la última columna y el 6 que está bajo el 3 y el 5 que está bajo el 0 restantes. Véase la figura 4.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	2x2= 4	2x3= 6	2x4= 8	2x5= 0				
3		3x3= 9	3x4= 2	3x5= 5				
4			4x4= 6	4x5= 0				
5				5x5= 5				
6								
7								
8								
9								

Figura 1. Unidad del producto.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	0	10–8= 2	10–6= 4	10–4= 6	
3		9	2	5	10–2= 8	10–9= 1		
4			6	0	10–6= 4			
5				5				
6								
7								
8								
9								

Figura 2. Diferencia hasta 10.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	0	2	4	6	8
3		9	2	5	8	1	4	7
4			6	0	4	8	2	6
5				5	0	5	0	5
6					6	2	8	4
7						9	6	3
8							4	2
9								1

Figura 3. Imagen especular.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	0	2	4	6	8
3		9	2	5	8	1	4	7
4			6	0	4	8	2	6
5				5	0	5	0	5
6					6	2	8	4
7						9	6	3
8							4	2
9								1

Figura 4. Tabla completa.

4. USO DE LA TABLA

El uso de la tabla es muy sencillo, para empezar el primer factor debe ser menor o igual que el segundo. Si no fuera así habría que usar la propiedad conmutativa, alterando el orden.

Para las unidades se busca la cifra que esté en la columna y fila que indique el producto. Por ejemplo, para las unidades de 6×7 se busca la cifra que esté en la fila 6 y columna 7, que en este caso es 2. Véase la figura 5.

Para las decenas se cuentan, desde la cifra de las unidades previamente localizada y hasta arriba, las cifras sin marcar (nunca se cuentan las cifras de la primera fila). Por ejemplo, las decenas de 6×7 son 4, ya que las cuatro cifras 2-5-1-4 están sin marcar. Véanse las estrellas de la figura 5.

5. CASO PRÁCTICO

Dado que soy profesor de secundaria, no tengo ocasión de poner en práctica este método en el aula. Solo he podido enseñarle a mi hijo de 8 años la tabla. El aprendizaje, junto al primer intento, se realizó en menos de media hora. Primero, apoyándome en las imágenes aquí expuestas, le conté como se iba formando la tabla. A continuación le pedí que lo reprodujese él mismo con el resultado de la figura 6.

Además del problema de mantener filas y columnas y que preguntaba al comenzar cada fase para recordarla, los errores que cometió fueron:

1. En la primera fase, en la fila 3, hizo 3×2=6, por lo que le tuve que decir que cada fila empieza justo en el producto de dos números iguales: 3×3, 4×4 y 5×5.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	0	2	4	6	8
3		9	2	5	8	1	4	7
4			6	0	4	8	2	6
5				5	0	5	0	5
6					6	2	8	4
7						9	6	3
8							4	2
9								1

Decenas: 4

Unidades:2

Figura 5. Ejemplo de uso de las tablas. 6×7=42

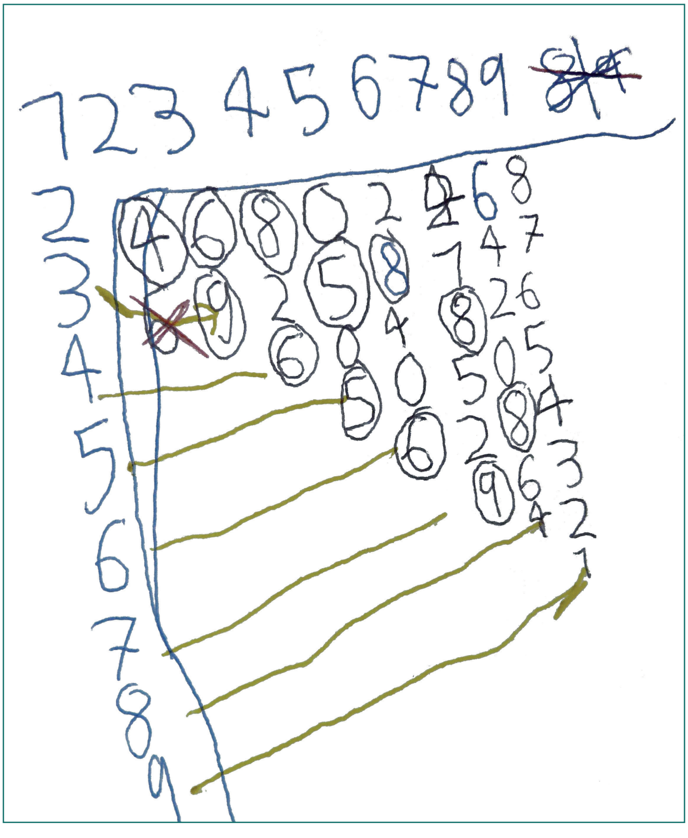


Figura 6. Primer intento.

También cometió errores, que no dejé que escribiese, en ciertas multiplicaciones (En este curso, 3º primaria, todavía no ha empezado con las multiplicaciones), pero escribió la columna del 5 sin hacer las multiplicaciones.

2. En la segunda fase tuvo un error restando, que él mismo modificó.
3. En la tercera fase tuvo problemas al principio al hacer la imagen especular. Le expliqué que la forma más sencilla es ir leyendo y escribiendo las diagonales: (8-4-8-0), (7-2-5-6),(6-0-2), (5-8-9), (4-6), (3-4), (2), (1)

En la última fase recordó las 6 marcas de la diagonal, los cuatro 8 y sabía que había dos más, el 6 y el 5 que tuve que decírselos.

Dos días más tarde le pedí de nuevo que la reprodujese. Esta vez no cometió ningún fallo, salvo en una de las multiplicaciones, de las que hay que memorizar. El resultado se puede ver en la figura 7.

El uso fue totalmente correcto, solo le surgió la duda cuando le pregunté 7×4 y le tuve que indicar que en ese caso debe buscar 4×7.

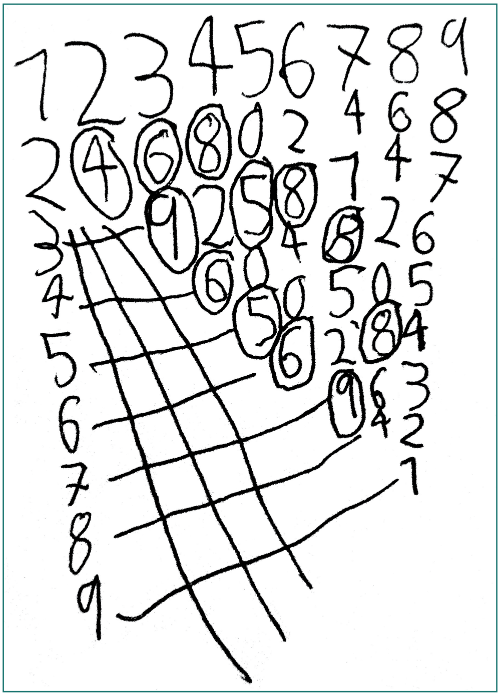


Figura 7. Segundo intento.

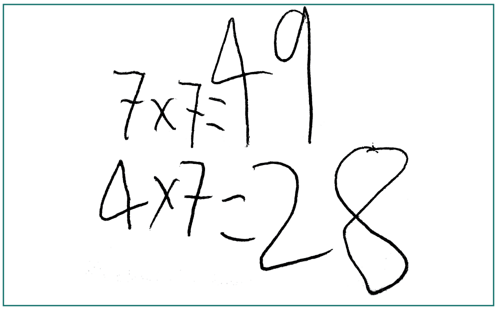


Figura 8. Uso.

4. CONCLUSIÓN

Espero que este método pueda resultar útil es la enseñanza de las tablas de multiplicar. Podría usarse desde primaria, introduciéndola en paralelo a las tablas tradicionales en forma de lista, pero sin sustituirlas, ya que si se puede evitar alguna frustración debe ser desde el principio, y más si la causa un aspecto meramente memorístico.

5. REFERENCIAS

Coronado-Hijón, A. (2014). Estudio de prevalencia de dificultades de aprendizaje en el cálculo aritmético. Bordón. Revista de pedagogía, 66(3), 39-60.

Épsilon - *Revista de Educación Matemática* 2019, nº 101, 165-175

RINCÓN "SAPERE AUDE"… ¿resolviendo problemas?

Sixto Romero
Escuela Técnica Superior de Ingeniería
Universidad de Huelva
sixto@uhu.es

1. MATEMÁTICAS EN LA ANTIGUA INDIA.

Hemos indicado en números anteriores que la historia de las matemáticas es el compendio de investigaciones sobre el origen de su nacimiento, su evolución y de los personajes, actores fundamentales de su desarrollo, es decir los matemáticos y matemáticas involucrados que lo han hecho posible.

El concepto de número ha estado ligado al surgimiento de las matemáticas en la historia de la humanidad de una manera muy gradual en las comunidades primitivas. A lo largo de la historia, los avances en la complejidad de la estructura social y sus relaciones se fue reflejando en el desarrollo de la matemática. Los problemas a resolver se hicieron más difíciles y ya no bastaba, como en las comunidades primitivas, con solo contar cosas y comunicar a otros la cardinalidad del conjunto contado, sino que llegó a ser crucial contar conjuntos cada vez mayores, cuantificar el tiempo, operar con fechas, posibilitar el cálculo de equivalencias para el trueque: es el momento del ***surgimiento de los nombres y símbolos numéricos.***

En esta ocasión vamos a dedicar el sub-apartado de la historia a las *Matemáticas en la antigua India.*

Recogida la idea, en partes, de un excelente artículo de Michel Waldschmidt, *Les Mathématiques en Inde* (2001) voy a esbozar algunas ideas de los registros más antiguos existentes de la India y que se encuentran en los Sulba Sutras (datados de aproximadamente entre el siglo VIII a. C. y II d. C), y apéndices de textos religiosos con reglas simples para construir altares de formas diversas, como cuadrados, rectángulos, paralelogramos y otros. Los textos más antiguos que se conservan sobre matemáticas en la Antigua India (que comprendería la actual India, así como Pakistán, Nepal, Bangladesh y Sri Lanka) están escritos en sánscrito, una lengua ya hablada por los habitantes del área de Punjab hacia la mitad del segundo milenio a.C. (fig. 1)

Al igual que con Egipto, las preocupaciones por las funciones del templo, señalan un origen de las matemáticas en rituales religiosos. En los Sulba Sutras se encuentran

Figura 1. La épica India, el Mahabharata y el Ramayana. https://introduccionalteatroasiatico.wordpress.com/la-epica-india-el-mahabharata-y-el-ramayana.

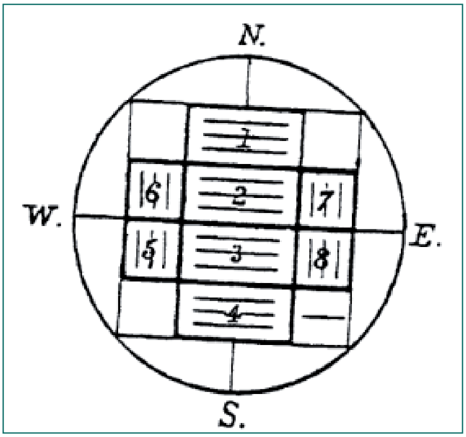


Figura 2. Regla para hacer un altar Garhapatya (círculo circunscrito al cuadrado) https://pages.uv.es/iarribas/wikibase/Varios/Pi_India.pdf.

métodos para construir círculos con aproximadamente la misma área que un cuadrado, lo que implica muchas aproximaciones diferentes del número π (fig. 2).

La historia de las matemáticas antiguas, tal como se percibe en los países occidentales, se centra con mayor frecuencia en la antigüedad helénica, en sí misma influenciada por civilizaciones egipcias y mesopotámicas, y también por la riqueza de las matemáticas chinas y de la India, que ha sido durante mucho tiempo subestimada en esta perspectiva, comienza a ser mejor entendida. Las interacciones entre estas diferentes civilizaciones aún no están claramente establecidas, y son objeto de discusión, si no de controversia.

Según la tradición ortodoxa hindú, el trabajo astronómico más importante, Surya Siddhãnta, se dice que se compuso hace más de dos millones de años.

De hecho, no hay rastros de matemáticas en India antes de 1500 a. C. La civilización del valle del Indo (alrededor del año 3000 a. C) no se ha descubierto hasta 1920, y la escritura aún no está descifrada. Hay unos pesos, objetos que parecen destinados a medir, probablemente sea una numeración, pero no sabemos nada más.

Es posible que algunas piezas de Véda se hayan escrito alrededor del año 1500 a. C, en la época en la que los Arios venían del norte. Pero los Sulvasutras (manuales de la cuerda), textos que indicaban reglas y procedimientos en la construcción de los altares (figs. 3 y 4) que no contenían demostraciones, solo reglas: la perfección de los altares les daría el favor de los dioses, fueron escritos por Baudhyayana, Āpastamba y Katyayana entre los siglos

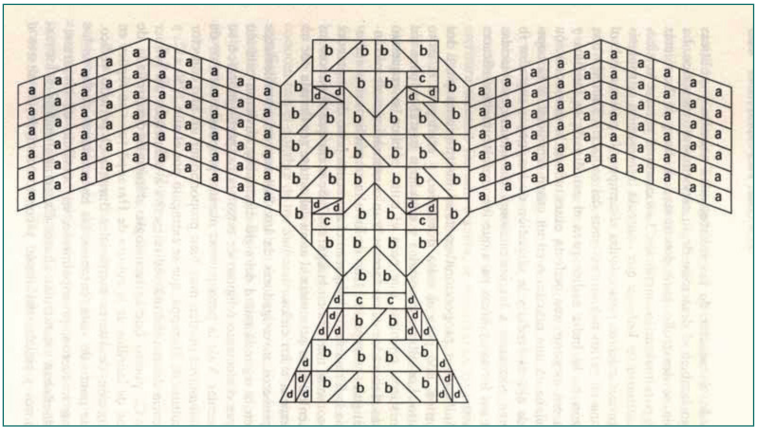


Figura 3. Salvasutra (I). https://www.gktoday.in/gk/sulvasutras/.

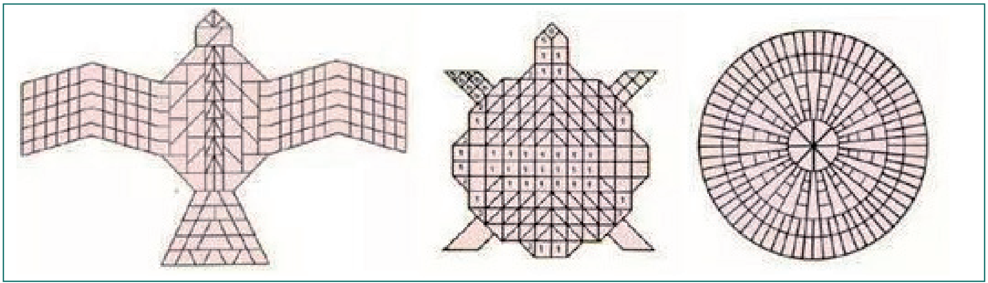


Figura 4. Sulvasutras (II). https://www.gktoday.in/gk/sulvasutras/.

octavo y cuarto antes de Jesucristo, después de que el ejército persa de Darío entrara en la India. El primero formula el teorema de Pitágoras, da un procedimiento para calcular la raíz cuadrada $\sqrt{2}$ correcta hasta la quinta cifra decimal, y diversas construcciones geométricas. El segundo amplía estos temas. El último no añade mucho. La geometría aquí provenía de la integración de orientación, forma y área de los altares, según las prescripciones de los libros sagrados védicos. Había resultados geométricos, procedimientos de construcción de altares y algoritmos. El teorema de Pitágoras está incluido de la siguiente manera, por ejemplo, por Katyayana: *"La soga (estirada a lo largo de la longitud) de la diagonal de un rectángulo produce un (área) que producen conjuntamente los lados horizontal y vertical"*.

En la construcción de un altar aparecen varios tripletes pitagóricos, incluso con números irracionales. En las construcciones geométricas que planteaban, había cuadrados, rectángulos, trapecios y círculos, que se debían construir con restricciones de área. Un par de ejemplos: "Fusionar dos cuadrados iguales o desiguales para obtener un tercer cuadrado'', "transformar un rectángulo en un cuadrado de la misma área''

También aparecen, al mismo tiempo, el gramático Panini (Shalatura siglo IV a. C.) sánscrito de la India antigua. Con seguridad, el gramático más célebre y más frecuentemente citado de los antiguos gramáticos de la India, y Siddartha (Gautama), nombre civil del Buddha/Buda histórico (563-483 a. C.), asceta y sabio, fundador del budismo.

Estos antiguos manuales de texto hindúes marcan pautas para construir altares de sacrificio de la forma y de tamaño precisos. La redacción de los manuales sigue una métrica fija (como los textos sagrados, y como el tratado de Gramática de Panini). Se organizan en *slokas*, formas de versos desarrollados a partir del tipo de cuarteto poético llamado *anustubh.*

Es la base del verso épico de la literatura hinduista, y puede ser considerada la forma de verso indio por excelencia, ya que se utiliza con mucha más frecuencia que cualquier otra métrica en la poesía clásica en sáncrito. Por ejemplo, el Majábharata y el Ramaiana (ambos del siglo III a. C. aproximadamente) están escritos en su mayoría en slokas, evitando los verbos y destinados a ser aprendido de memoria.

Las construcciones de los altares son descritas por el citado ut-supra, Āpastamba (Personaje importante entre el 510 y el 240 a. C. Fue un religioso hinduista y matemático indio. Se desconoce dónde nació o dónde vivió. Los estudiosos tampoco coinciden en la datación de sus obras. Es probable que fuera un clérigo de la religión védica (una religión ritualista que desapareció para dar lugar a la más mística religión hinduista). Se sabe que pertenecía a una familia de brahmanes de la secta védica Taitiríia, que se dedicaban a la repetición del Krisna-iáyur-veda ("el veda negro de los sacrificios'), compuso al menos parte de un extenso texto llamado Kalpa-sutra. El texto completo se atribuye a Āpastamba, pero el indólogo indio Pandurang Vaman Kane (1880-1972) afirma que con respecto a esta autoría hay una diferencia de opiniones entre los distintos indólogos. Kane logró datar el Dharma-sutra (una de las partes del Kalpa-sutra) entre el 450 y el 350 a. C. Otra parte del Kalpa-sutra es el Āpastamba-srauta-sutra, que es la más conocida de las obras Sulba-sutras, que son libros sobre la construcción de altares y sobre las formas de los lugares y fuegos rituales para los sacrificios como se ha indicado ut-supra. Escritos en forma de aforismos, abordaban temas como la conversión de espacios circulares en cuadrados con la misma superficie o la construcción de cuadrados sobre la diagonal de otro cuadrado, etc.

El estilo aforístico los Sulba-sutras solo proporciona fórmulas para hacer determinadas construcciones sin explicar el procedimiento por el que se obtuvieron estas fórmulas (lo que hoy se llamaría una demostración). Posiblemente obtenían los datos midiendo de manera empírica (sin fórmulas teóricas). No obstante, Āpastamba, en algunos pasajes muestra razonamientos comparables a una demostración.

En esta obra primitiva, quizás contemporánea al geómetra griego Pitágoras (572-497 a. C.), se encuentran reglas para la construcción de ángulos rectos (para la construcción de altares perfectamente cuadrados, lo cual era necesario para los rituales místicos) por medio de ternas de cuerdas. En varios sutras proporciona una lista de ternas pitagóricas y muestra su utilización en la construcción de triángulos rectángulos. La lista de ternas incluye las siguientes:

$$(3; 4; 5); (5; 12; 13); (7; 24; 25); (8; 15; 17); (20; 21; 29); (12; 35; 37) ;(15, 36, 39);$$

$$(5/2, 6, 13/2);(15/2, 10, 25/2).$$

También aparece una regla que recuerda a los elementos de Euclides. Es la siguiente:

Para construir un cuadrado equivalente (en área) a un rectángulo ABCD, llévense los lados menores "y" sobre los mayores de manera que AF=AB=BE=CD y trácese la recta HG *mediatriz de los segmentos CE y DF; prolónguese EF hasta K, GH hasta L y AB hasta M de manera que FK=HL=FH=HM, y trácese la recta LKM. Constrúyase ahora un rectángulo con diagonal igual a LG y con su lado más corto igual a HF; entonces el lado más largo de este rectángulo es el lado "x"del cuadrado buscado. (Āpastamba-srauta-sutra)*

En este problema importante Baudhãyana expresa así la diagonal de un cuadrado

"*Como medida (del lado del cuadrado) y el tercio aumentado del cuarto disminuido de su trigésima cuarta parte, esto es, en términos modernos, nos viene a dar la aproximación*

$$1+\frac{1}{3}(1+\frac{1}{4}(1-\frac{1}{34}))=\frac{577}{408}=1.414215...$$

para $\sqrt{2}$ *(notemos que* 577^2*-2.*408^2 *= 1*).

El establecimiento de calendarios fue otra motivación importante para desarrollar las matemáticas, y esto lleva al estudio de la astronomía (*Jyotisutras*).

No se puede ignorar la importancia de la astrología y las revelaciones cósmicas.

Las tablas de fechas, latitudes y longitudes, del movimiento del sol, de la luna y de la Tierra, representan la base de los cálculos para hacer horóscopos y predecir la longevidad de los individuos, así como la elección de fechas propicias y adecuadas para eventos importantes (por ejemplo, el matrimonio).

De 500 a 200 a.C., las matemáticas Védicas (El período védico o la era védica es el período de la historia de la India en la que los textos canónicos hindúes, como los cuatro Vedas, Brāhmaṇas, Āraṇyaka y Upaniṣad, se compusieron en sánscrito védico, una forma de sánscrito. La cultura asociada con este período, a veces denominada civilización védica, se desarrolló en el norte y noroeste del subcontinente indio. El período védico es, por definición, aquel en el que se desarrolló la literatura védica, y se puede ubicar en el segundo milenio antes de Cristo y el primer milenio antes de Cristo. hasta el siglo 6 a.C.) continuarán desarrollándose, antes de decidirse a dar paso a las matemáticas de la teoría de números, permutaciones y combinaciones, teorema del binomio, y siempre la astronomía (fig. 5 y 6).

Un sistema de numeración digital se encuentra en la India en el siglo III a.C. en tiempos del rey Ashoka, probablemente uno de los más grandes gobernantes que la Tierra ha conocido. En la India del siglo III a,C, su adhesión al budismo le permitió encarnar una revolución humana valiente y comprometida.

Los historiadores se han preguntado durante mucho tiempo si este hombre había existido, porque solo se le conocía a través de las leyendas budistas. Pero en 1837, James Prinsep, un funcionario de la administración civil del imperio británico en Benares, logra descifrar un alfabeto hasta ahora desconocido, y logra comprender el significado de las inscripciones grabadas en dos columnas de arenisca rosa. Gradualmente, muchos escritos en columnas, en rocas o en cuevas son descubiertos y traducidos, identificados como edictos dictados por el rey Ashoka y grabados en las cuatro esquinas de su inmenso reino (¡finalmente, nos enfrentamos a documentos históricos reales!) (figs. 7 y 8).

Había hecho pilares de piedra (algunos existen todavía), en el que se encuentran inscripciones grabadas en brahmi, con los ascendientes más lejanos de nuestro sistema

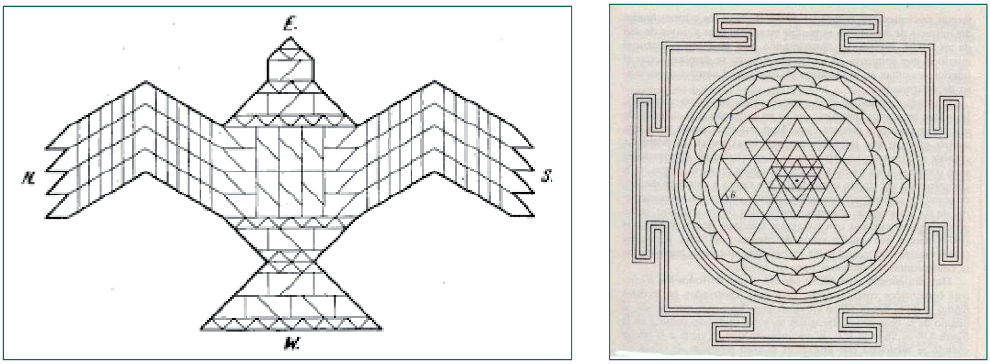


Figura 5. Matemáticas Védicas.

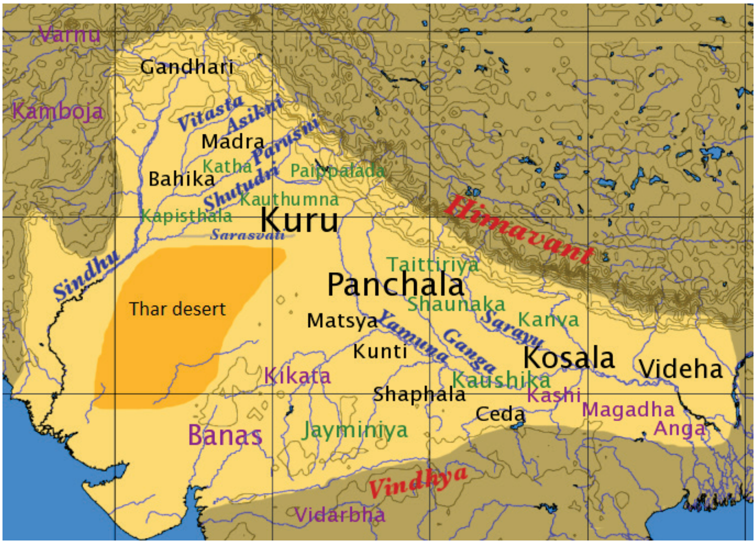


Figura 6. Mapa de la India Védica. https://es.wikipedia.org/wiki/Periodo_védico.

numérico actual. La numeración brahmi es un sistema de numeración indio que apareció alrededor del siglo III a. C. y que fue utilizado hasta bien entrado el siglo IV.

Es el antepasado gráfico directo de la numeración gupta, utilizada en el Imperio Gupta (figura 9), uno de los mayores imperios políticos y militares de la historia de la India. Fue gobernado por la dinastía Gupta entre 320 y 550 d.C. y ocupó la mayor parte de la India septentrional y de los actuales Pakistán oriental y Bangladés (bajo este imperio, se dio un período de paz y prosperidad que favoreció el desarrollo de la cultura india desde el punto de vista artístico, literario y científico. Así, los reyes Gupta establecieron un eficaz sistema administrativo y un fuerte poder central, permitiendo la autonomía local en períodos de paz. La sociedad era ordenada según las creencias del hinduismo con una rígida división en castas. En esta etapa el hinduismo adquiere sus principales características: las principales divinidades, las prácticas religiosas y la importancia de los templos. Durante este período fueron tan grandes el comercio y los intercambios con el

Figura 8. Rey Ashoka con sus tropas. https://fr.dreamstime.com/photo-stock-roi-ashoka-ses-troupes-image63840367.

exterior que la mitología y arquitectura hinduista y budista se expandieron por Borneo, Camboya, Indonesia y Tailandia).

Los numerales brahmí no utilizaban el sistema posicional, sino que utilizaban símbolos separados para 1, 4, 5, 6, 7, 8, 9 y también había símbolos para 10, 100, 1000, etc., al igual que para 20, 30, 40, [...], 90 y para 200, 300, 400, [...], 900. Los números 2 y 3 se formaban a partir del símbolo 1.

La introducción de este sistema de escritura será una herramienta indispensable en el desarrollo futuro de las matemáticas en la India que permitirá escribir grandes números que fascinarán a los matemáticos.

Probablemente sea, entre el segundo y el cuarto siglo de nuestra era, cuándo sea datado el

Figura 7. Posible representación de Asoka. Relieve en Amravati. https://es.wikipedia.org/wiki/Asoka.

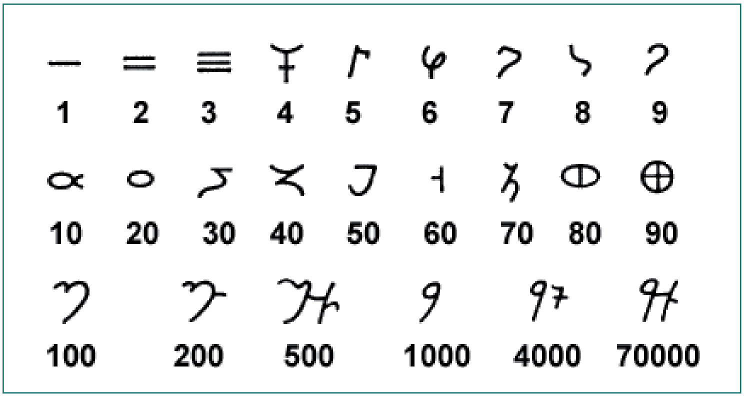


Figura 9. Numeración brahmi. https://www.geocachingtoolbox.com/index.php?lang=es&page=codeTables&id=brahmiNumbers

manuscrito de Bakhahli con la introducción de operaciones matemáticas, decimal, introducción de cero, álgebra, ecuaciones cuadráticas, raíces cuadradas, uso de incógnitas y el signo menos.

2. SAPERE AUDE, GEOMETRÍA

2.1. Ejercicios de aquí y allá

En Matemáticas, muchas veces, me pregunto si realmente conocemos suficientemente la historia de las matemáticas y especialmente la de la geometría: sus fundamentos y sus conceptos que debemos recordar obligatoriamente. En los planes de estudio durante muchos años la geometría no ha sido bien tratada En los libros de texto, o durante su primer curso de geometría para principiantes, al alumno hay que "ENFRENTARLO" inevitablemente con los teoremas y principios más simples de esta rama de las matemáticas: con un poco de trabajo y una buena dosis de motivación, podrán adquirir y aprender destrezas en poco tiempo y reglas básicas en geometría (fig. 10).

- **a)** Vocabulario de las figuras: tangente, paralelo,secante, perpendicular,…
- **b)** Ángulos: ángulo adyacente, ángulo opuesto, ángulo interno y externo, bisectriz,
- **c)** Distancias: punto a punto, círculo y esfera, mediana, altura, distancia métrica, distancia de Hausdorff,…
- **d)** Plano cartesiano,…
- **e)** Triángulos: triángulo isósceles, rectángulo, equilátero, escaleno,…
- **f)** Teoremas: teorema de Thales, teorema de Pitágoras, teorema de la altura,…

Algunos pueden pensar que solo los estudiantes de doctorado o los investigadores son capaces de llevar a cabo las teorías más complejas de la geometría, pero a mi juicio esto es un error común. En realidad, ¿la geometría es solo una cuestión de lógica?

Debemos hablar de diferentes tipos de geometría.

En el sentido estricto del término, hablamos de geometría para evocar la geometría clásica y euclidiana, que es la que enseñan los profesores de matemáticas de todo

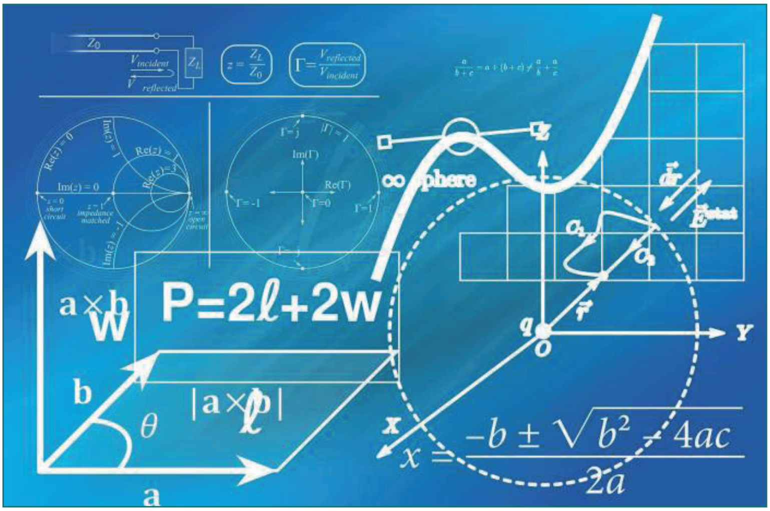


Figura 10. ¿Para principiantes en el estudio de la geometría puede parecer chino? https://www.superprof.fr/blog/etudier-les-formes-et-les-espaces/

el mundo. En la escuela intermedia o secundaria, los estudiantes aprenderán conceptos simples de geometría clásica que permiten una introducción a puntos de referencia más complejos. Aunque en cursos en la Universidad, los estudiantes pueden elegir diferentes áreas de investigación en geometría: geometría diferencial, geometría algebraica, geometría compleja, geometría no conmutativa, geometría no euclidiana, geometría de contacto, geometría riemanniana...

¡La llamada geometría clásica debería ser, en gran parte suficiente, para esperar obtener una buena formación en matemáticas durante su carrera escolar!

Propuesta 1: dos joyitas geométricas

JOYITA: a) *Sea M un punto del lado BC de un tri*ángulo *ABC. La paralela por M a AB corta al lado AC en el punto N y la paralela por M a AC corta al lado AB en el punto O. La razón entre las áreas de los triángulos OBM y NMC es* k^2.

Determínese la razón entre las áreas de los triángulos AON y ABC (fig. 11).

JOYITA: b) *Dos circunferencias secantes* C_1 *y* C_2 *de radios* R_1 *y* R_2 *se cortan en los puntos A y B.*

Por B se traza una recta variable que corta de nuevo a C_1 *y* C_2 *en dos puntos que llamaremos M y N respectivamente. Comprobar que existe un punto P, que depende sólo de* C_1 *y* C_2*, tal que la mediatriz del segmento MN pasa por P.*

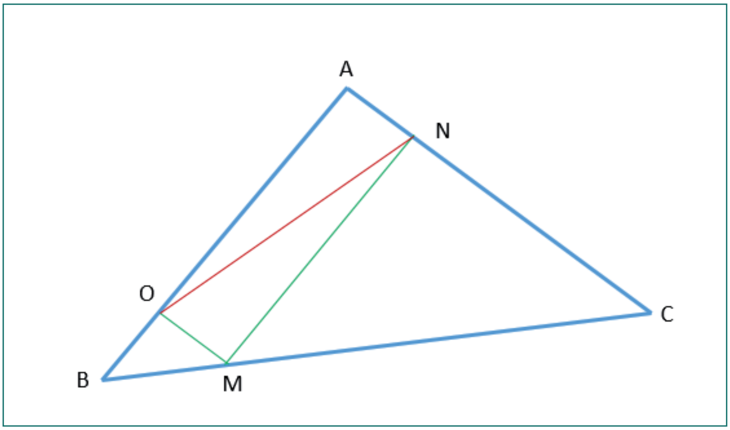


Figura 11. Triángulo cualquiera.

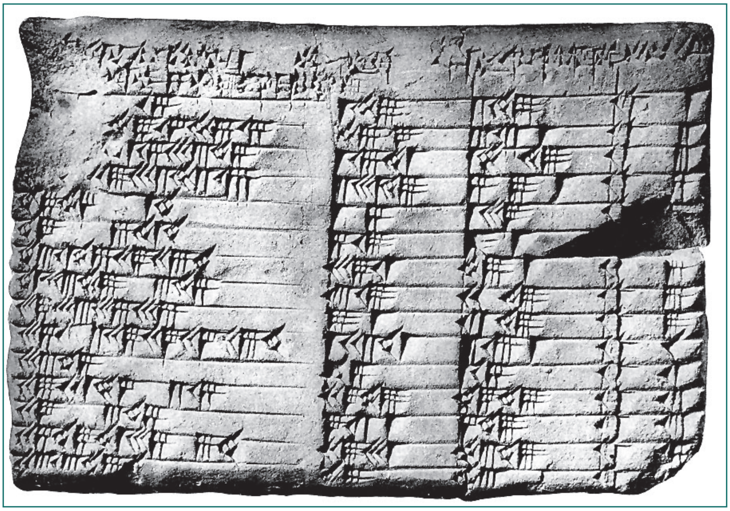


Figura 12. Plimpton 322 es una tablilla de barro de Babilonia. https://en.wikipedia.org/wiki/Number_theory#/media/File:Plimpton_322.jpg

7. SAPERE AUDE, TEORÍA DE NÚMEROS

7.1. Ejercicios de aquí y allá

La teoría de los números siempre ha fascinado tanto a los aficionados como a los matemáticos profesionales desde la antigüedad (fig. 12).

En contraste con otras ramas de las matemáticas, muchos de los problemas y teoremas de la teoría de los números requieren a menudo una base matemática sofisticada (fig. 13).

Hasta mediados del siglo XX, la teoría de los números se consideraba la rama más pura de las matemáticas, sin aplicaciones directas al mundo real. El advenimiento de los ordenadores y las comunicaciones digitales reveló que el problema no era fácil. Hay que distinguir actualmente la naturaleza de una teoría elemental de los números, una teoría

Figura 13. Depósito de Números. https://sp.depositphotos.com/stock-photos/n%C3%BAmeros-de.html?qview=126584852

pura de los números, una teoría analítica de los números y una teoría probabilística de los números. Estas categorías reflejan los métodos utilizados para abordar los problemas relacionados con los enteros.

En este sentido, presentaremos algunos ejemplos propuestos en la Olimpiada matemática española que bien merecen nuestra atención y que puede servir de entrenamiento para nuestros alumnos y material docente para el/los profesores que lo deseen.

Ahí va mi propuesta para este número 101.

Propuesta 2: dos joyitas numéricas

JOYITA: a) *Hallar todos los enteros positivos p y q tales que*

$$p! + 1 = (q! - 1)2.$$

JOYITA: b) *Los números enteros desde 1 hasta 9 se distribuyen en las casillas de un cuadrado 3x3. A continuación sumamos seis números de tres cifras, tres que se leen en filas de izquierda a derecha y otros tres que se leen en columnas de arriba abajo.*

¿Podremos encontrar alguna distribución para la que se obtenga como valor de la suma 2019?

NOTA: Las respuestas pueden enviarla a la dirección electrónica:

sapereaudethales@gmail.com