

εpsilon

Revista de Educación Matemática

Editada por la Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales

Desplegando el
Pensamiento y Sentido
algebraico. Desde la
investigación a la
práctica docente

121
2025

Equipo Editorial

Burgos Navarro, María José
Carrillo de Albornoz Torres, Agustín
Cecilia Gámiz, Lina María
Conde Fernández, Silvia
Contreras García, José Miguel
Cruz, María Florencia
España Pérez, Francisco
Fernández Plaza, Jose Antonio
Flores Lamolda, Lucía
Flores Martínez, Pablo
Gallardo Jiménez, Sandra
Gámez Valero, Carmen
García Schiaffino, Margarita
Garzón Guerrero, José Antonio
López Centella, Esperanza
Lupiáñez Gómez, José Luis
Molina Muñoz, David
Molina Portillo, Elena
Montejo Gámez, Jesús
Moreno Verdejo, Antonio
Partal García, Daniel
Pérez Martos, María del Carmen
Ramírez Uclés, Rafael
Rivas Olivo, Mauro Alfredo
Rodríguez González, Miguel
Roquette Rodríguez, Esther
Ruiz Hidalgo, Juan Francisco
Tizón Escamilla, Nicolás
Valero Terrón, Iván
Villegas Escobar, Adela María

121

2025

Edita
Sociedad Andaluza de
Educación Matemática "Thales"
Universidad de Cádiz
C.A.S.E.M.
Facultad de Ciencias
Departamento de Matemáticas
Campus del Río San Pedro
Torre Central, 4ª planta
11510 Puerto Real (Cádiz)
Teléfono: 956012833
Email: thales.matematicas@uca.es

Depósito Legal
SE-421-1984

ISSN
2340-714X

Período
2025

Suscripción
Anual

ÍNDICE / CONTENTS

7 **Prólogo**

APORTES DE LA INVESTIGACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

9 **Pensamiento algebraico: Propuestas desde la investigación para el aula**
María C. Cañadas y Marta Molina

21 **Aportes al desarrollo del pensamiento algebraico en los primeros cursos desde tesis doctorales**
María D. Torres, Eder Pinto, Cristina Ayala-Altamirano y Lourdes Anglada

37 **Razonamiento algebraico y proporcional en contexto probabilístico: Una experiencia con futuros profesores de secundaria**
Veronica Albanese, María Burgos y Nicolás Tizón-Escamilla

EXPERIENCIAS DE AULA

59 **Representación tabular y gráfica en quinto de primaria. Tareas con funciones para desarrollar el pensamiento algebraico**
Antonio Moreno, María D. Torres y María C. Pérez-Martos

73 **Patrones a través de un cuento. Una experiencia de aula en educación infantil**
Ana Belén Montoro, Elena Castro-Rodríguez y Romina Narváez

83 **Una experiencia para desarrollar el razonamiento algebraico en el aula de sexto de primaria**
María Jesús Segura Carrión y María Burgos

ACTIVIDADES EN LA SAEM THALES

103 **XXII JAEM de Jaén 2026. Un viaje al interior de las Matemáticas**
Juan Antonio Espinosa Pulido

Prólogo

María D. Torres

Universidad de Granada, mtorresg@ugr.es

DESPLEGANDO EL SENTIDO ALGEBRAICO DESDE LAS PRIMERAS EDADES

Este monográfico aborda la necesidad de integrar el **pensamiento algebraico**, como un acercamiento al álgebra, en la enseñanza de las matemáticas desde la educación infantil hasta los niveles superiores desde la perspectiva del Early Algebra. Esta aproximación se entiende como una manera de tratar las situaciones cuantitativas, poniendo el foco en los aspectos estructurales y relacionales, así como en la expresión de la generalidad, utilizando representaciones que no son necesariamente simbólicas.

La relevancia de este campo ha impulsado cambios curriculares a nivel internacional y nacional; de hecho, la normativa curricular española actual ha incorporado el **sentido algebraico** desde la educación primaria. Esta iniciativa busca fomentar la capacidad del estudiantado para identificar patrones, expresar la generalidad y razonar sobre relaciones forzando una implicación directa en la formación del profesorado.

Este monográfico llega en un momento crucial, ofreciendo un recurso para los educadores/as que ayude a equipar al estudiantado en el camino hacia el álgebra de secundaria de forma progresiva, mitigando las dificultades comúnmente identificadas en niveles posteriores. Para los docentes en ejercicio e investigadores, esta colección proporciona un corpus de tareas y estrategias didácticas para abordar con confianza las nuevas demandas curriculares:

El primer artículo es un aporte de investigación, elaborado por María C. Cañadas y Marta Molina que como investigadoras principales de diferentes proyectos nacionales hacen un recorrido por los diferentes enfoques del pensamiento algebraico acercándonos tareas concretas con las que favorecer este pensamiento en la educación infantil y primaria.

El segundo artículo es otro un aporte de investigación en el que Eder Pinto, Cristina Ayala-Altamirano, Lourdes Anglada y María D. Torres, desarrollamos los aspectos teóricos a tener en cuenta para favorecer el pensamiento funcional, tanto para primaria como para infantil, como aproximación al pensamiento algebraico. Lo hacemos desde los resultados de nuestras tesis doctorales contextualizadas bajo diferentes proyectos de investigación nacionales.

El tercer artículo es también un aporte de investigación elaborado por Verónica Albanese, María Burgos y Nicolás Tizón-Escamilla, centrado en los futuros docentes de matemáticas de educación secundaria. Este trabajo nos muestra los diferentes niveles de razonamiento algebraico que evidencian los futuros docentes en la resolución de problemas y nos hace tomar conciencia del contenido matemático que posee el profesor de matemáticas.

El cuarto artículo es una experiencia de aula elaborada por Antonio Moreno, Maricarmen Pérez y María D. Torres, que propone el diseño y la implementación de una secuencia de tareas para fomentar el pensamiento funcional en alumnado de quinto de primaria a partir de representaciones tabulares, gráficas y pictóricas.

El quinto artículo es otra experiencia de aula elaborada por Ana Montoro, Elena Castro y Romina Narváez para la educación infantil que nos muestran como trabajar con patrones a través de un cuento en estas edades tan tempranas.

Y, finalmente, el sexto artículo es una experiencia de aula elaborada por María Jesús Segura Carrión y María Burgos, que describe el diseño y la implementación de una secuencia de sesiones con estudiantado de sexto curso de primaria en la que se abordan los diferentes enfoques del álgebra temprana.

Los trabajos aquí reunidos son el producto de unas líneas de investigación consolidadas, desarrolladas en el marco de diferentes proyectos de investigación I+D y varias tesis doctorales. Pretendemos transferir la investigación a la práctica docente, ofreciendo una visión integral del pensamiento algebraico temprano.

El propósito fundamental del monográfico es ofrecer a la comunidad educativa un recurso que traduce los resultados de más de una década de investigación colaborativa en propuestas concretas. Más importante aún, ofrece caminos claros para cultivar el pensamiento algebraico en el estudiantado ayudándoles a construir una comprensión matemática más profunda y duradera. Esperamos que el lector o lectora encuentre en estas páginas ejemplos de tareas, metodologías y reflexiones que ilustran cómo abordar de manera efectiva el pensamiento algebraico en el aula. Confiamos en que estos trabajos no solo informen, sino que inspiren una posible transformación o reajuste en la práctica docente.

María D. Torres

Pensamiento algebraico: Propuestas desde la investigación para el aula

María C. Cañadas

Universidad de Granada, mconsu@ugr.es

Marta Molina

Universidad de Salamanca, martamolina@usal.es

Resumen: *El pensamiento algebraico debe formar parte de la enseñanza de las matemáticas en la educación primaria al ser un sentido incluido en el currículo español desde 2022. También se identifican elementos en el currículo de educación infantil que hacen recomendable su tratamiento en dicha etapa. En este trabajo describimos el contexto investigador en el que se han desarrollado tres proyectos de investigación I+D sobre esta temática durante la última década y presentamos ejemplos de tareas y posibles adaptaciones que han sido puestas en práctica en aulas de primaria. Desde diferentes enfoques del álgebra escolar (patrones, funciones, aritmética generalizada y ecuaciones-inecuaciones) y a través de prácticas algebraicas (generalización, representación, razonamiento y justificación), estas tareas permiten abordar el pensamiento algebraico en ambas etapas.*

Palabras clave: *desigualdades, ecuaciones, funciones, igualdades, inecuaciones, patrones, pensamiento algebraico.*

Algebraic thinking: Proposals from research to the classroom

Abstract: *Algebraic thinking should form part of the teaching of mathematics in primary education as it is a sense included in the Spanish curriculum since 2022. Elements have also been identified in the early childhood education curriculum that make its treatment at this stage recommendable. In this paper we describe the research context in which three R&D research projects on this topic have been developed over the last decade and we present examples of tasks and possible adaptations that have been applied in elementary classrooms. From different approaches to school algebra (patterns, functions, generalised arithmetic and equations-equations) and through algebraic practices (generalisation, representation, reasoning and justification), these tasks allow algebraic thinking to be addressed at both stages.*

Key words: *algebraic thinking, equalities, equations, functions, inequalities, inequations, patterns.*

1. INTRODUCCIÓN

El pensamiento algebraico relativo a las etapas de infantil y primaria es un tema de interés en la investigación nacional e internacional desde antes de que fuera incorporado en las directrices curriculares de dichas etapas. En este marco el pensamiento algebraico se entiende como un modo de abordar las situaciones cuantitativas que pone el foco en los aspectos estructurales y relacionales (Kieran, 1996) y en la expresión de la generalidad (Mason et al., 1985) con representaciones no necesariamente simbólicas.

A nivel nacional la investigación sobre el pensamiento algebraico se inicia con trabajos que atienden a las nociones de patrones y generalización en la etapa de educación secundaria. Uno de los estudios de referencia fue la tesis doctoral de Encarnación Castro (1995) en la que exploró los patrones en el contexto de secuencias lineales y cuadráticas representadas con puntos. Dando continuidad a esta línea de investigación, una década después las autoras de este artículo iniciamos nuestra actividad investigadora estudiando, desde diferentes perspectivas, el desarrollo del pensamiento algebraico.

En la tesis doctoral de Cañadas (2007), el interés está en el proceso de generalización de estudiantado de educación secundaria en tareas que involucraban patrones y funciones. Tras este trabajo, se identificó que el álgebra se introducía de forma abrupta y limitada en ese nivel educativo en España y se redirigió la línea de trabajo hacia la educación primaria. Molina (2007), en cambio, indaga en su tesis doctoral en el pensamiento algebraico de escolares de educación primaria, por medio del significado que otorgan al signo igual y el pensamiento que evidencian al resolver igualdades numéricas. Con este trabajo se inicia a nivel nacional una línea de investigación que en otros países ya venía explorándose.

Los intereses surgidos a partir de los trabajos mencionados hasta el momento y el creciente interés en el pensamiento algebraico como línea de investigación a nivel internacional motivaron la formación de un equipo de investigación centrado en el este tipo de pensamiento en educación infantil y educación primaria. Como se puede ver en <https://www.pensamientoalgebraico.es>, el núcleo principal de investigadores y docentes de este pertenecemos a instituciones españolas, pero también contamos con colaboradores a nivel internacional. Hasta el momento, este equipo ha venido trabajando en esta temática en el contexto de tres proyectos de investigación I+D. El foco principal de nuestro trabajo ha sido analizar la viabilidad de introducir el pensamiento algebraico desde la educación infantil y primaria y describir las formas en las que se puede promover en estos niveles educativos.

Como aporte de estos proyectos, los cuales describimos de forma sintética en el siguiente apartado, mostramos algunas tareas que ejemplifican posibles formas de abordar en las aulas los diferentes enfoques del álgebra escolar en los que hemos indagado.

2. UNA DÉCADA DE INVESTIGACIÓN A TRAVÉS DE PROYECTOS DE INVESTIGACIÓN

El primer proyecto (2014-2017, con referencia EDU2013-41632-P) se tituló “Pensamiento funcional en estudiantes de educación primaria como aproximación al pensamiento algebraico”. Como su título adelanta, estaba centrado en uno de los enfoques que se proponen para introducir el pensamiento algebraico en educación primaria: el pensamiento funcional. La función es el contenido matemático fundamental de este enfoque, entendiendo que se puede introducir empleando los números naturales y a través de diferentes representaciones. Con este proyecto contribuimos a la caracterización del pensamiento funcional de estudiantes de educación primaria en el contexto español, mostrando evidencias de su uso por dicho alumnado, y diseñamos tareas que pueden ser de utilidad para la práctica docente.

El segundo proyecto fue continuación del anterior (2017-2021, EDU2016-75771-P) y se tituló “Pensamiento funcional en educación primaria: relaciones funcionales, representaciones y generalización”. En él profundizamos en aspectos clave identificados durante el proyecto previo como relaciones funcionales, representaciones y generalización. Durante este proyecto incorporamos al marco conceptual otros elementos de relevancia para incidir en el trabajo en el

aula: errores y dificultades, acciones para ayudar a los alumnos a superar estas dificultades y prácticas que contribuyen a promover el pensamiento algebraico en las aulas (generalización, representación, argumentación y justificación). Este proyecto permitió avanzar en la descripción del pensamiento funcional del estudiantado de educación primaria y desarrollar materiales, tareas y estrategias que favorezcan el desarrollo de pensamiento funcional y la superación de los obstáculos que lo limitan.

El tercer proyecto, actualmente en desarrollo (2021-2025, PID2020-113601GB-I00) —titulado “Pensamiento algebraico en educación infantil y educación primaria”— es el más ambicioso porque trabajamos con estudiantes tanto de infantil como de primaria y ampliamos nuestro foco de estudio. Al foco de los dos proyectos previos —el pensamiento funcional—, añadimos otros enfoques del álgebra escolar: patrones, aritmética generalizada, ecuaciones e inecuaciones. Así indagamos de forma más integral en el desarrollo del pensamiento algebraico por el estudiantado. Además, generamos materiales, tareas y estrategias para favorecer dicho desarrollo y contribuir a eliminar los obstáculos que lo limitan.

Los tres proyectos se han desarrollado gracias a la colaboración con diferentes centros educativos de Educación Primaria en diferentes ciudades españolas. Los centros han sido privados, concertados y públicos y en zonas de diferentes características socioeconómicas. Los investigadores-docentes de los proyectos entramos a las aulas a trabajar con grupos-clase regulares completos, desarrollando un mínimo de 4 sesiones por curso (desde los 3 años hasta 6.º de primaria). En la mayor parte de los cursos, entrevistamos posteriormente a 6-8 alumnos por grupo. Como resultado, hasta el momento nuestro trabajo ha tenido un impacto directo en más de 1.000 estudiantes.

3. ALGUNAS TAREAS PARA FOMENTAR EL PENSAMIENTO ALGEBRAICO EN EL AULA

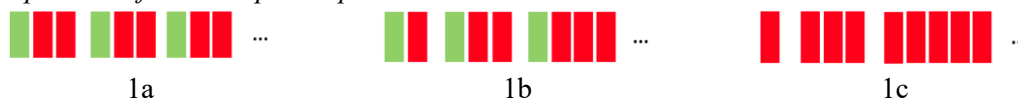
Para las aulas en las que implementamos las sesiones, diseñamos o adaptamos diferentes tareas y materiales dirigidos a fomentar el pensamiento algebraico. En la medida de lo posible, usamos las mismas tareas o con algunas adaptaciones en diferentes cursos. En este apartado proponemos ejemplos de tareas para cada uno de los enfoques del álgebra escolar mencionados anteriormente. En cada tarea, detallamos el curso o cursos en los que se han trabajado, los elementos teóricos que se abordan, así como algunas sugerencias para su adaptación y puesta en práctica en el aula que emergen de nuestra experiencia.

3.1. Patrones

El trabajo con patrones se aborda desde las aulas de educación infantil continuándose en la etapa de educación primaria. Se suele comenzar por los patrones cualitativos para después pasar a los cuantitativos (Moreno et al., 2023). La figura 1 ilustra diferentes tipos de patrones a considerar en esta transición. Anglada et al. (2023) describen en detalle algunas tareas que permiten promover el pensamiento algebraico en educación infantil a través de los patrones.

Figura 1

Ejemplos de diferentes tipos de patrones.



Dentro de los patrones cualitativos, los que más suelen promover los textos escolares son los repetitivos. En la figura 1a mostramos uno de ellos. En ese caso se trata de un atributo cualitativo (color), con dos valores (rojo y verde). Si incluimos más valores para ese atributo (rojo, verde y azul, por ejemplo) o más atributos (forma además del color, por ejemplo), podríamos conseguir patrones de mayor complejidad. En la figura 1a, se observa que el núcleo está constituido por tres elementos (rectángulo verde-rectángulo rojo-rectángulo rojo). Cuanta mayor extensión tenga el núcleo, mayor dificultad tiene la tarea.

A continuación de los patrones cualitativos y antes de los cuantitativos, se propone incluir los patrones de desarrollo. En la figura 1b presentamos un patrón de desarrollo donde se combina lo cualitativo y lo cuantitativo. En este caso, el color permite identificar dónde está el cambio de un término cuantitativo a otro (1-2-3...): aumentan las piezas rojas de un término a otro.

En la figura 1c se observa un patrón cuantitativo. En este caso, se corresponde con la serie de los números impares. Los niños más pequeños (educación infantil), quienes aún no conocen la paridad, lo pueden “ver” de modo recursivo porque cada término se obtiene añadiendo dos piezas al anterior.

En los patrones presentados en la figura 1 se puede requerir continuar los patrones hacia la derecha. Otras posibles tareas son averiguar términos que falten a la izquierda o cumplimentar espacios vacíos entre dos términos no consecutivos del patrón.

En la identificación de cierto tipo de patrones, especialmente aquellos que admiten representaciones estructuradas diferentes de la numérica, puede jugar un rol importante la visualización. En la figura 2 mostramos un ejemplo, que se conoce como “la T crece”, en el que los elementos de la secuencia numérica 4-7-10... se representan formando una T de diferentes tamaños.

Figura 2

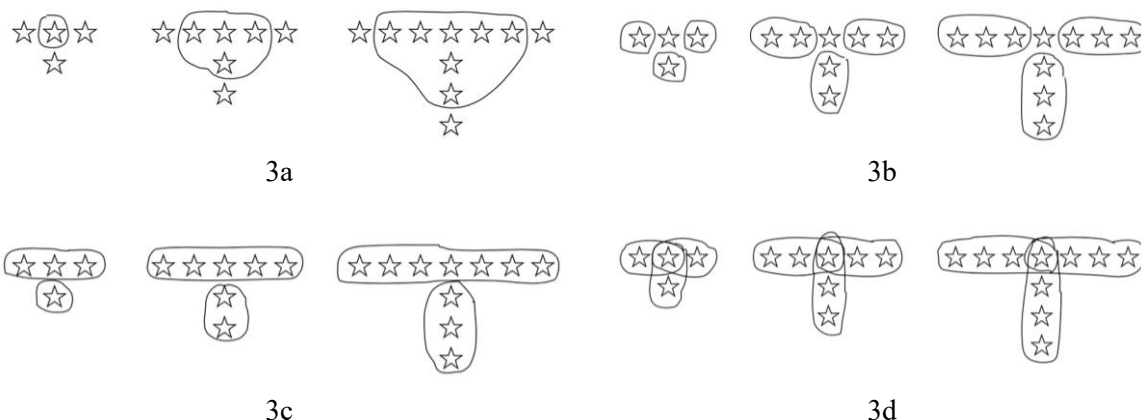
La “T” crece.



A partir de la formulación de diferentes preguntas sobre la percepción del patrón, el estudiantado puede reconocer y generalizar diferentes estructuras. En la figura 3 se muestran algunos ejemplos.

Figura 3

Diferentes formas de ver el patrón “La T crece” (tomado de Lee y Freiman, 2006).



Por ejemplo, en la primera fila de la figura 3a, la parte que se observa constante es la estrella de cada uno de los extremos (3) y la parte central es la que va aumentando añadiéndose una estrella a cada una de las partes (1 en la primera imagen, $1 + 1 \cdot 3$ en la segunda, $1 + 2 \cdot 3$ en la tercera,... $1 + (n - 1) \cdot 3$ en la posición n). En cambio, en la figura 3b, la constante es la estrella central. En la primera imagen de esa figura, añadimos una estrella a cada una de las tres partes, en la segunda, dos estrellas a cada parte, en la tercera 3 estrellas a cada parte... en la que ocupa la posición n añadiríamos n estrellas a cada parte.

Para fomentar el carácter algebraico de las tareas presentadas, sugerimos hacer a los alumnos preguntas explícitas para que expresen la regularidad que observan, que razonen porqué su respuesta es adecuada y que lo justifiquen a sus compañeros. De esta forma, estaríamos abordando la generalización, la representación, el razonamiento y la justificación como prácticas algebraicas.

En tareas de este tipo, identificamos una sutil diferencia entre patrones y funciones. En nuestra línea de investigación, hablamos de patrones cuando el trabajo se realiza únicamente sobre un conjunto de valores o una única variable. Para el ejemplo de figura 3, trabajamos con patrones si atendemos a la cantidad de estrellas en cada caso. En cambio, si fuera relevante considerar la posición que ocupa el dibujo dentro de la serie de estrellas, tendríamos dos conjuntos de valores que covarían —dos variables: número de estrellas y número de posición que ocupa el dibujo— y estaríamos abordando las funciones.

3.2. Funciones

El concepto de función refiere a relaciones entre cantidades que varían de forma conjunta, tales como la que se muestra en la figura 4 entre el número de mesas y el número de cajas.

Figura 4

Situación de fiesta de cumpleaños para trabajar funciones.

Isabel está preparando su fiesta de cumpleaños. Comienza organizando las mesas y las cajas de sorpresas para sus invitados. Ella junta las mesas formando una fila y coloca las cajas en los lados tales como se muestra en la imagen.



La imagen presenta el caso correspondiente a 3 mesas, actuando como *ejemplo genérico* (Balacheff, 2002), que permite ilustrar una relación ampliable a otros casos similares y promover la generalización. Preguntas relativas al número de cajas sorpresa que se necesitan para cantidades concretas de mesas (ej., 3, 4, 10) guían a los estudiantes a explorar dicha relación. Si los casos que se plantean son consecutivos, los estudiantes pueden plantear la estrategia recursiva “sumar 2” para ir obteniendo el número de cajas necesarias. En este caso el comportamiento de la función se describe en términos de *covariación* (Smith, 2008): cómo los cambios en la variable independiente (número de mesas) producen cambios en la variable dependiente (número de cajas de sorpresas).

Por otro lado, si las cantidades de mesas propuestas no son consecutivas y van haciéndose más grandes, la atención de los estudiantes se dirige a la relación de *correspondencia* entre las cajas y las mesas (“el doble”). La generalización y expresión de la relación conducirá a poder analizar y comparar *representaciones equivalentes* de la relación que expliciten diferentes estructuras, por ejemplo, sumar dos veces la misma cantidad o multiplicarla por dos.

Además, al preguntar por cuántas mesas hay si tenemos un número concreto de cajas de sorpresas, por ejemplo 8, podemos trabajar la *relación inversa* (“la mitad”). En este caso, a diferencia de la relación directa, el número de valores posibles de la variable independiente (“número de cajas de sorpresa”) no son todos los números naturales, solo los números pares. Emergen así nociones como el *dominio* y *codominio* de la función.

Trabajar este tipo de situaciones en el aula de primaria implica generalizar dichas relaciones cuantitativas, expresarlas y estudiar su comportamiento (Blanton y Kaput, 2011), siendo accesibles para todos los cursos de esta etapa. El tamaño de los casos particulares y la sofisticación de las representaciones y razonamientos esperables será diferente según la edad de los escolares.

En este caso la situación se ha descrito por medio de una representación pictórica. En Ayala-Altamirano y Molina (2021) se muestra cómo se trabajó esta tarea en un aula de 4.º de primaria integrándose tablas y afirmaciones verdaderas y falsas sobre dicha relación que contribuyeron a promover la justificación del razonamiento seguido por los estudiantes. En Anglada et al. (2023) se ejemplifica otra tarea típica de este enfoque, la máquina de funciones, en la que la función se presenta por medio de una tabla que incluye varios casos particulares. Cañadas et al. (2024) describen la construcción de un gráfico cartesiano que realizan estudiantes de 3.º y 4.º de primaria en el contexto de máquinas de funciones y algunas de las dificultades observadas y que habría que tener en cuenta al introducir este tipo de representación en el contexto funcional.

En todas estas diferentes formulaciones de tareas de funciones, al igual que se ha indicado para el caso de los patrones, se pueden poner en juego las diferentes prácticas algebraicas incorporando la demanda en las tareas de identificar y expresar regularidades que observen ya

sea dentro de una de las variables o entre las dos variables, así como representar y justificar las respuestas y razonamientos.

3.3. Aritmética generalizada

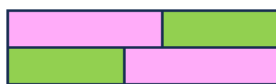
Durante muchos años, la aritmética generalizada se consideraba como la única vía de acceso al álgebra escolar. En la actualidad sigue siendo uno de los enfoques más relevantes, entendiéndose como la parte del álgebra que atiende a las operaciones aritméticas y sus propiedades. El foco está en que el alumnado perciba regularidades en las operaciones aritméticas que puedan ser generalizadas más allá de números específicos (Stephens et al., 2017). Mason et al. (2009) contribuyen a caracterizar este enfoque a través del término pensamiento estructural que refiere a “la conciencia del uso de las propiedades” (p. 10).

En Ramírez et al. (2024) se muestran algunos ejemplos de tareas para trabajar propiedades aritméticas con niños de educación infantil y primer curso de educación primaria, así como algunas estrategias que emplean. En particular este enfoque puede trabajarse a través de sentencias numéricas pidiendo la justificación de la veracidad o falsedad de estas sin la necesidad de recurrir a cálculos aritméticos. Por ejemplo, conocimiento de la propiedad conmutativa de la adición llevaría a reconocer que la expresión $14 + 5 = 5 + 12$ es falsa, pues no están los mismos sumandos en ambos lados del signo igual. En cambio, $14 + 5 = 5 + 14$ es verdadera. No se persigue que realicen las operaciones aritméticas involucradas e indiquen que sus valores numéricos son iguales. La intención es que perciban que a ambos lados de la igualdad están los mismos términos y que, por tanto, se mantiene la relación de igualdad. Antes de la realización de estas tareas, se propone trabajar la descomposición de los números con los que los niños están familiarizados. Por ejemplo, $4 = 2 + 2$, $4 = 3 + 1$, $4 = 2 + 1 + 1$, etc.

Estas propiedades se pueden trabajar desde educación infantil, donde se sugiere apoyarse en materiales manipulativos o representaciones pictóricas. En la figura 5 mostramos cómo se podría visualizar $3 + 4 = 4 + 3$ con las regletas de color. Se observa que la longitud de unir las dos regletas en distinto orden es la misma.

Figura 5

Representación con regletas de color de la relación numérica $3 + 4 = 4 + 3$.



Otras propiedades como la asociativa, o el elemento neutro para la suma o la diferencia se suelen trabajar a través de expresiones como las siguientes: $257 - 24 = 257 - 30 - 4$ y $7 = 0 + 7$. Sugerimos aquí proponer expresiones variadas en cuanto al número de términos que componen cada miembro de la igualdad y la ubicación de las operaciones para ayudar al desarrollo de una comprensión relacional del signo igual (Molina y Ambrose, 2008).

Por tanto, este tipo de tareas sobre propiedades y operaciones aritméticas se podrían trabajar en el aula a través de diferentes representaciones. Incluso si los estudiantes no conocen dichas propiedades aritméticas, pueden generalizarlas a partir de casos particulares representados de forma concreta, pictórica o simbólica. Sugerimos que se dé a los escolares la oportunidad de razonar sus respuestas y de justificarlas.

En algunos textos escolares, como el fragmento que mostramos en la figura 6, encontramos tareas donde se abordan propiedades aritméticas. Sin embargo, en este ejemplo al demandar el

valor numérico de las expresiones, no se favorece el razonamiento basado en las propiedades aritméticas, sino que se refuerza la tendencia al cálculo predominante en las aulas.

Figura 6

Ejemplos extraídos de libro de texto 5.º de primaria de SM (2023).

Resuelve en tu cuaderno e indica la propiedad que has utilizado en cada caso.

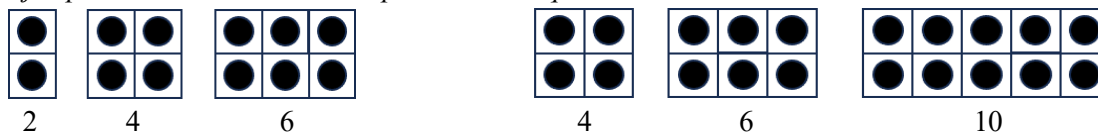
- a. $475 + \bullet\bullet\bullet = 58 + \bullet\bullet\bullet = \bullet\bullet\bullet$
 - b. $(\bullet\bullet\bullet + 2121) + 343 = 5238 + (\bullet\bullet\bullet + \bullet\bullet\bullet) = \bullet\bullet\bullet$
 - c. $4302 + 852 = \bullet\bullet\bullet + \bullet\bullet\bullet = \bullet\bullet\bullet$
- ¿Puedo aplicar la propiedad asociativa con dos sumandos? ¿Por qué?

Además de las propiedades aritméticas elementales, se pueden incluir otras relaciones numéricas tales como averiguar la paridad de la suma de números pares o qué números naturales pueden ser expresados como suma de dos o más números consecutivos” (ej., $7 = 3 + 4$; $10 = 1 + 2 + 3 + 4$). Es importante que, más allá de los resultados aritméticos que se obtengan, el foco esté en las relaciones entre los números o entre ambos lados de la igualdad.

Ambas situaciones se pueden razonar y justificar desde propiedades aritméticas. Sin embargo, los niños suelen buscar la relación general comenzando desde los casos particulares y formulando una conjetura que refutan o no según los casos particulares con los que prueban. Con ejemplos de este tipo, usar representaciones visuales puede facilitar identificar la relación general (Cañadas et al., 2007). La figura 7 ilustra la representación de números pares y de sus sumas con las plaquetas de Herbinier Lebert o su versión más actual, el Numicon. Es posible que, si ya conocen que 4 y 6 son números pares, lo resuelvan aritméticamente, pero esta representación facilita observar que el resultado es par a partir de conocer que los pares en las plaquetas o el Numicon son aquellas piezas que no tienen ningún elemento sin emparejar.

Figura 7

Ejemplos de sumas de números pares con Plaquetas de Herbinier Lebert.



3.4. Igualdades y ecuaciones. Desigualdades e inecuaciones

El concepto de ecuación e inecuación ha sido tradicionalmente trabajado en contextos simbólicos siendo relegado a los niveles de educación secundaria. Sin embargo, el uso de otras representaciones como la verbal, pictórica o manipulativa permite su abordaje desde los primeros cursos escolares. Para que haya presente una ecuación o inecuación, se necesita una situación que exprese relaciones cuantitativas entre varias cantidades, alguna o algunas de las cuales no se conocen. La diferencia entre un concepto u otro radica en si se describe una relación de igualdad o desigualdad entre las cantidades.

La figura 8 muestra un ejemplo de tarea que hemos trabajado con alumnado de segundo ciclo de primaria. En este caso la situación se presenta al estudiante por medio del uso de

representaciones verbales y pictóricas. La disposición particular de las botellas en la imagen busca que emerjan en el aula representaciones diferentes pero equivalentes de dichas cantidades (ej., 14 , $6 + 8$, $3 \cdot 2 + 8$). De nuevo, como en casos previos, el contraste de las mismas en el aula permitirá razonar con diferentes estructuras cuestionando y argumentando sobre su equivalencia.

Figura 8

Ejemplo de historia con números y símbolos algebraicos (Pacheco-Cáceres et al, en prensa).



En esta situación podemos pedir a los estudiantes que representen la historia con una balanza (manipulativa o pictórica) o con números y símbolos, provocando el uso de los símbolos “mayor que” o “menor que”. En el caso de las situaciones de igualdad, en cambio, se requeriría el uso del signo igual como expresión de una equivalencia (no como un comando para dar una respuesta que es un significado a veces promovido desde la aritmética) (Molina y Ambrose, 2008).

Otras opciones de la tarea surgen al plantear el interrogante de cuántas botellas puede tener Pedro. Surge así la necesidad de razonar con cantidades desconocidas como si fueran conocidas, un componente del pensamiento algebraico conocido como pensamiento analítico (Kieran, 2022). En el caso de las ecuaciones, la solución suele ser única mientras que en este caso podemos hablar de un conjunto solución. En consecuencia, las prácticas de representar y razonar son claves en la resolución de estas tareas.

Ante estas situaciones, el estudiantado es capaz de identificar y emplear la cantidad desconocida, pero tiende a dar uno de los posibles valores en las situaciones de desigualdad posiblemente por su limitada experiencia con relaciones de desigualdad. En contextos que involucran cantidades desconocidas la desigualdad tiene un significado restrictivo, es decir, implica buscar todas las posibles soluciones que hacen verdadera la inecuación. La expresión matemática que describe el conjunto de soluciones por comprensión indicando la relación numérica que restringe el valor de la cantidad desconocida (números menores que $x < 12$) suele dejar implícitas todas esas posibles soluciones a diferencia de la expresión por extensión en la que se indican todos los valores posibles (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 y 11). Con guía por parte del docente, los estudiantes llegan a identificar todos los valores posibles por comprensión y por extensión.

También se observa la necesidad de intervención del docente para reconocer expresiones alternativas al valor numérico como representaciones de las cantidades de Miguel y Ana (Pacheco-Cáceres et al, en prensa). Al representar los problemas de ecuaciones e inecuaciones con expresiones equivalentes, los elementos visuales son un recurso importante para aceptar estas equivalencias, permitiendo al estudiantado mirar el problema y tener un argumento fiable

y simple para dialogar sobre la posibilidad de expresar de múltiples formas una misma situación.

Este enfoque del álgebra puede abordarse también proponiendo a los estudiantes la invención de historias a partir de algún tipo de representación de una relación de igualdad o desigualdad (ej., por medio de una balanza). Esta demanda y la posterior discusión en el aula sobre la correspondencia entre las historias y las representaciones conduce a interpretar y relacionar cantidades desconocidas con contextos cotidiano y se identifica como una estrategia efectiva para favorecer la transición desde el pensamiento aritmético hacia el algebraico (Ayala-Altamirano et al., 2025).

4. REFLEXIONES FINALES

El objetivo principal de este trabajo es ejemplificar formas de abordar en las aulas de primaria el desarrollo del pensamiento algebraico que han sido implementadas en el marco de varios proyectos de investigación que ilustran una línea de trabajo ya consolidada.

Las tareas ejemplo seleccionadas se han estructurado en función del enfoque del álgebra escolar al que corresponden. Estos enfoques no son exhaustivos ni pretenden serlo. Permiten llamar la atención sobre diferentes formas de abordar el pensamiento algebraico en las aulas que conducen al trabajo con nociones algebraicas diferentes. En particular, la aritmética generalizada es uno de los enfoques que se han considerado desde el principio, pero no es el único. Los patrones, habitualmente se trabajan en educación infantil, pero durante años desaparecieron de la educación primaria. Las funciones y las ecuaciones-inecuaciones se trabajan tradicionalmente en educación secundaria. Mostramos algunos ejemplos de cómo abordar su introducción desde antes.

Un elemento transversal a los enfoques son las cuatro prácticas que caracterizan la actividad algebraica: generalizar, representar, justificar y razonar (relaciones y estructuras matemáticas) (Blanton y Kaput, 2011). Estas prácticas son útiles para abordar elementos algebraicos en la educación primaria y en la educación infantil. La generalización es el componente principal que diferencia el pensamiento aritmético del algebraico (Kieran, 1996). En lo relativo a las representaciones, existen una variedad de ellas como se ha puesto de manifiesto en las distintas tareas presentadas. No hay que usarlas todas en todos los enfoques, pero sí es importante identificar aquellas que facilitan la percepción de la estructura y, por tanto, la generalización. Por otra parte, justificar y razonar son prácticas que enriquecen las tareas algebraicas al provocar el uso de las estructuras y relaciones generalizadas como objeto de pensamiento y permitir la progresión en la forma de expresión de estas.

En ocasiones, los docentes pueden usar tareas ya diseñadas para un fin. En otras, sabemos que adaptan las ya existentes para fines concretos. Esperamos haber ofrecido ideas para ser críticos con las tareas disponibles en diferentes fuentes de información, de manera que fomenten lo algebraico de forma eficaz y eficiente. Este aporte es especialmente necesario dada la reciente incorporación en el currículo del sentido algebraico y la escasa formación que tienen los docentes en ejercicio al respecto, pues la gran mayoría se formaron en un momento en el que los planes de estudio de magisterio no incluían el pensamiento algebraico.

AGRADECIMIENTOS

Proyecto PID2020-113601GB-I00 financiado por MCIN/AEI/10.13039/501100011033 y proyecto PID2024-157106NB-I00.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Anglada, M. L., Fuentes, S. y Cañadas, M. C. (2023). Desarrollo del sentido algebraico en Educación Infantil a través de tareas con patrones. *Epsilon*, 113, 9-19.
- Ayala-Altamirano, C. y Molina, M. (2021). Fourth-graders' justifications in early algebra tasks involving a functional relationship. *Educational Studies in Mathematics*, 107(2), 359-382 <https://doi.org/10.1007/s10649-021-10036-1>
- Ayala-Altamirano, C., Pinto, E., Molina, M. y Cañadas, M. C. (2025). La invención de sentencias e historias matemáticas como medio para evidenciar el desarrollo del pensamiento algebraico. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, 28,77-96. <https://doi.org/10.35763/aiem28.7544>
- Balacheff, N. (2000). *Procesos de prueba en los alumnos de matemáticas*. Una Empresa Docente.
- Blanton, M. L. y Kaput, J. J. (2011). Functional thinking as a route into algebra in the elementary grades. En J. Cai y E. Knuth (Eds.), *Early algebraization, advances in mathematics education: A global dialogue from multiple perspective* (pp. 5-23). Springer. <https://doi.org/10.1007/978-3-642-17735-4>
- Cañadas, M. C. (2007). *Descripción y caracterización del razonamiento inductivo utilizado por estudiantes de educación secundaria al resolver tareas relacionadas con sucesiones lineales y cuadráticas 2007*. Tesis doctoral. Universidad de Granada.
- Cañadas, M. C., Deulofeu, J., Figueiras, L., Reid, D. y Yevdokimov, O. (2007). The conjecturing process: Perspectives in theory and implications in practice. *Journal of Teaching and Learning*, 5(1), 55-72.
- Cañadas, M. C., Moreno, A. y Torres, M. D. (2024). First encounter with constructing graphs in the functional thinking approach to school algebra in 3rd and 4th grades. *ZDM-Mathematics Education*, 56, 1059-1078. <https://doi.org/10.1007/s11858-024-01627-2>
- Castro, E. (1994). Exploraciones de patrones numéricos mediante configuraciones puntuales. Estudio con escolares de primer ciclo de secundaria (12-14 años). Tesis doctoral. Universidad de Granada.
- Kieran, C. (1996). The changing face of school algebra. En C. Alsina, J. Álvarez, B. Hodgson, C. Laborde y A. Pérez (Eds.), *Proceedings of 8th International Congress on Mathematical Education: Selected lectures* (pp. 271-290). SAEM Thales.
- Kieran, C. (2022). The multi-dimensionality of early algebraic thinking: Background, overarching dimensions, and new directions. *ZDM-Mathematics Education*, 54(6), 1131-1150.
- Lee, L. y Freiman, V. (2006). Developing algebraic thinking through pattern exploration. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 11(9), 428-433.
- Mason, J., Graham, A., Pimm, D. y Gowar, N. (1985). *Routes to roots of algebra*. London, United Kingdom: The Open University.

- Mason, J., Stephens, M. y Watson, A. (2009). Appreciating mathematical structure for all. *Mathematics Education Research Journal*, 21(2), 10-32. <https://doi.org/10.1007/BF03217543>
- Molina, M. (2007). *Desarrollo de pensamiento relacional y comprensión del signo igual por alumnos de tercero de educación primaria*. Tesis doctoral. Universidad de Granada.
- Molina, M. y Ambrose, R. (2008). From an operational to a relational conception of the equal sign: Third graders' developing algebraic thinking. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, 30(1), 61-80.
- Moreno, A., Cañadas, M. C., Anglada, L., Ayala-Altamirano, C., Fuentes, S., Narváez, R., Pérez-Martos, M. C., Reyes-Escobar, M. y Torres, M. D. (2023). Atribuciones del sentido algebraico en educación primaria. *UNO. Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 100, 21-29.
- Pacheco-Cáceres, E., Pérez-Martos, M. C. y Ayala-Altamirano, C. (en prensa). Introduciendo ecuaciones e inecuaciones a través de problemas aritméticos con apoyo visual. *Aula 31*.
- Ramírez, R., Brizuela, B. y Blanton, M. L. (2024). Kindergarten and first-Grade students' understandings of arithmetic properties across different kinds of problems. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education*, 24, 176-195.
- Smith, E. (2008). Representational thinking as a framework for introducing functions in the elementary curriculum. En J. Kaput, W. Carraher y M. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (133-160). Routledge.

Aportes al desarrollo del pensamiento algebraico en los primeros cursos desde tesis doctorales

María D. Torres

Universidad de Granada, mtorresg@ugr.es

Eder Pinto

Universidad de O'Higgins, eder.pinto@uoh.cl

Cristina Ayala-Altamirano

Universidad de Málaga, cristina.ayala@uma.es

Lourdes Anglada

Universidad de Granada, lourdesanglada@eummia.es

Resumen: *Este trabajo recoge aspectos teóricos y el diseño de tareas para abordar el pensamiento algebraico desde un enfoque funcional. Presentamos un conjunto de aportes para la docencia desde cuatro tesis doctorales desarrolladas bajo tres proyectos de investigación sobre pensamiento algebraico: EDU2013-41632-P, EDU2016-75771-P y PID2020-113601GB-I00, centrados en educación primaria e infantil.*

Abordamos la generalización y la representación de las estructuras dadas en las relaciones funcionales, mostrando ejemplos de tareas con las que profundizar en el desarrollo del pensamiento funcional desde infantil. El objetivo es que los estudiantes desarrollen habilidades que les permitan pensar algebraicamente y reflexionen sobre las relaciones entre variables en los niveles educativos más básicos.

Palabras clave: *generalización, pensamiento algebraico, representación, tareas con funciones.*

Contributions to the development of algebraic thinking in early grades from doctoral theses

Abstract: *This paper covers theoretical aspects and task design for approaching algebraic thinking from a functional perspective. We present a set of contributions to teaching from four doctoral theses developed under three research projects on algebraic thinking: EDU2013-41632-P, EDU2016-75771-P, and PID2020-113601GB-I00, focused on primary and early childhood education.*

We address the generalization and representation of structures given in functional relationships, showing examples of tasks with which to deepen the development of functional thinking from early childhood. The goal is for students to develop skills that enable them to think algebraically and reflect on the relationships between variables at the most basic educational levels.

Key words: *algebraic thinking, generalization, representation, tasks with functions.*

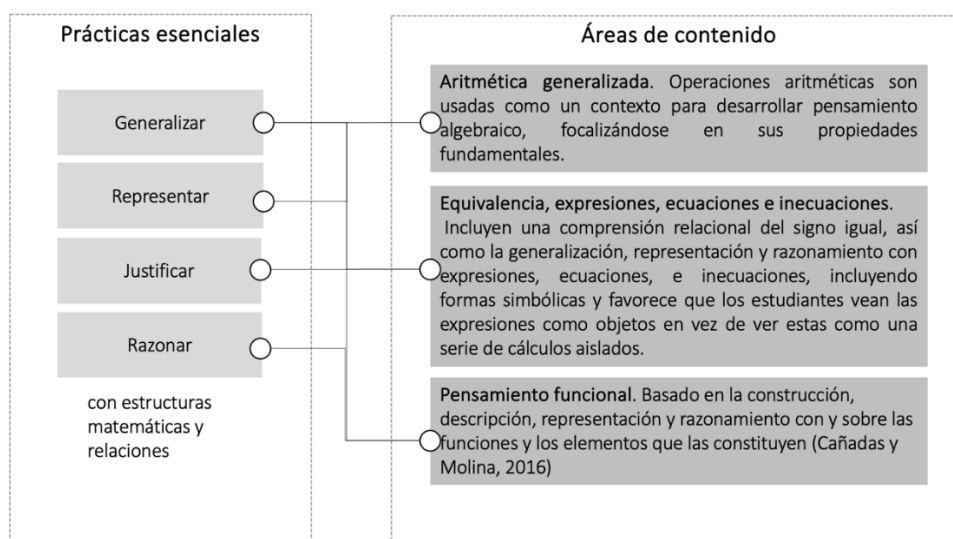
1. POSTURA ADOPTADA

El marco de las tesis doctorales defendidas a lo largo de tres proyectos de investigación desde 2013, ha asumido la postura de que el pensamiento algebraico puede emerger sin necesidad de recurrir a símbolos alfanuméricos, siempre que el estudiante interactúe con estructuras matemáticas y relaciones (Kaput, 2008), o que sea capaz de razonar sobre lo indeterminado, operando con sumas, restas, multiplicaciones o divisiones cuando intervienen elementos desconocidos, tratándolos como si fueran conocidos (Radford, 2003, 2006).

Sobre el trabajo de Kaput (2008), Blanton et al. (2011, 2018) amplían la noción de sistema simbólico e incorporan diversas representaciones (pictóricas, manipulativas, numéricas, entre otras) como herramientas clave para el desarrollo del pensamiento algebraico. Más específicamente, estas autoras organizan el pensamiento algebraico a través de cuatro *prácticas esenciales* que desarrollarse en todas las *áreas del contenido*, tal como lo mostramos en la figura 1.

Figura 1

Prácticas esenciales y áreas de contenido del pensamiento algebraico.



Un componente clave de las cuatro prácticas esenciales es que todas giran en torno al trabajo con *estructuras matemáticas y relaciones*. En el contexto del *early algebra* es central la noción de estructura, ya que esta permite establecer conexiones y relaciones entre conceptos y procesos matemáticos y, como consecuencia, permite analizar cómo los estudiantes interpretan una regularidad y, potencialmente, la generalizan (Warren et al., 2013).

Específicamente, las cuatro tesis que presentamos aquí se han concentrado en una de las aproximaciones al pensamiento algebraico: el pensamiento funcional.

2. PENSAMIENTO FUNCIONAL

El pensamiento funcional, como área de contenido —y foco de las tesis doctorales que presentaremos—, reconoce a la función como un concepto matemático central. En el contexto del *early algebra*, las funciones cumplen un rol fundamental por dos razones principales: (a) permiten introducir a los estudiantes en el pensamiento algebraico al explorar la noción de

“variable” como una relación de cambio entre cantidades (Blanton et al., 2011); y (b) ofrecen una nueva mirada sobre las operaciones aritméticas básicas, que pueden interpretarse como funciones al implicar relaciones sistemáticas entre cantidades (Carraher y Schliemann, 2007).

Consideramos que el pensamiento funcional se centra en la generalización y expresión de la relación entre cantidades que varían de forma conjunta (Blanton et al., 2011). Específicamente, la función, la relación entre cantidades y la variación conjunta entre las cantidades involucradas constituyen los elementos centrales para desarrollar el pensamiento algebraico en los primeros cursos (Cañadas y Molina, 2016, p. 210). Aquí, el interés está puesto en funciones lineales, específicamente del tipo $y = mx + b$, donde m y b son constantes, y las variables x e y son números naturales. Este tipo de función se considera adecuado para la edad y el tipo de trabajo que se espera de los estudiantes de infantil y primaria en el enfoque funcional del álgebra temprana (Carraher y Schliemann, 2007).

3. APORTES DE LAS TESIS DOCTORALES

A continuación, presentamos algunos aportes a la docencia desde el estudio del pensamiento funcional desarrollado en unas tesis doctorales centradas en educación primaria e infantil.

3.1. Generalización de estudiantes de educación primaria en un contexto funcional

Existe un consenso amplio en torno a la relevancia de la generalización como un aspecto central del pensamiento algebraico (por ejemplo, Mason et al., 1992; Pólya, 1966). Promover que estudiantes de los primeros cursos de la educación primaria generalicen favorece que estos: (a) aparten información irrelevante; (b) adapten, ajusten y reorganicen un conjunto de experiencias previas; (c) pongan atención a ideas, capacidades y propiedades involucradas en diferentes situaciones; y (d) mejoren su comprensión y herramientas para resolver problemas (Carraher y Schliemann, 2015; English y Warren, 1998).

Si bien se han desarrollado diversas propuestas orientadas a fomentar que los estudiantes generalicen al abordar distintos contenidos matemáticos, aún persisten vacíos en la comprensión de cómo se desarrolla este proceso en la educación primaria. Por otra parte, la enseñanza y el aprendizaje del álgebra escolar se han centrado en cómo los estudiantes de educación secundaria (aproximadamente entre 12 y 16 años) interactúan con contenidos algebraicos. En este contexto, dirigir la atención hacia los procesos de generalización que desarrollan niños y niñas de entre 6 y 12 años al enfrentarse a contenidos algebraicos constituye un foco de interés específico que requiere especial atención y que abordamos aquí.

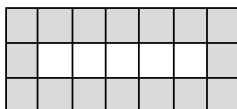
En el marco de la tesis doctoral¹ de Eder Pinto, dirigida por María C. Cañadas, asumimos un marco referencial para describir cómo estudiantes de entre 8 y 12 años interactúan con *estructuras matemáticas y relaciones* al resolver problemas que implican cantidades que covarían. En las tareas que abordan el constructo de pensamiento funcional, las funciones se presentan mediante problemas contextualizados. El problema de las baldosas es un ejemplo de este tipo de tareas (ver figura 2).

¹ Titulada: “Generalización de estudiantes de 3º a 6º de Educación Primaria en un contexto funcional del álgebra escolar” y realizada dentro de los proyectos de investigación del Plan Nacional I+D con referencias EDU2013-41632-P y EDU2016-75771-P, financiados por la Agencia Estatal de Investigación (AEI) de España y el Fondo Europeo de Desarrollo Regional (FEDER).

Figura 2

Problema de las baldosas.

Un colegio quiere reformar el suelo de todos sus pasillos porque está ya muy estropeado. El equipo directivo decide enlosar los pasillos con baldosas blancas y con baldosas grises. Todas las baldosas son cuadradas y tienen el mismo tamaño. Las baldosas se van a colocar en cada pasillo de la manera que ves en la siguiente imagen.



El colegio contrata a una empresa para que reforme los pasillos de las tres plantas del colegio. Te pedimos que ayudes a los albañiles a contestar algunas preguntas que necesitan responder para hacer este trabajo.

1. ¿Cuántas baldosas grises necesitan para el suelo de un pasillo en el que colocan 5 baldosas blancas?
2. Unos pasillos son más largos que otros. Por eso, los albañiles necesitan diferente número de baldosas para cada pasillo. ¿Cuántas baldosas grises necesitan para el suelo de un pasillo en el que colocan 8 baldosas blancas?
3. ¿Cuántas baldosas grises necesitan para el suelo de un pasillo en el que colocan 10 baldosas blancas?
4. ¿Cuántas baldosas grises necesitan para el suelo de un pasillo en el que colocan 100 baldosas blancas?
5. Los albañiles de una empresa siempre colocan primero las baldosas blancas y después las baldosas grises. ¿Cómo puedes saber cuántas baldosas grises si ya han colocado las baldosas blancas?
6. En uno de los pasillos, por error los albañiles han colocado las baldosas grises antes que las blancas. Han colocado 20 baldosas grises, ¿cuántas baldosas blancas necesitan? ¿Cómo lo sabes?
7. En otro pasillo los albañiles también han colocado las baldosas grises antes que las blancas. Han colocado 56 baldosas grises, ¿cuántas baldosas blancas necesitan? ¿Cómo lo sabes?

El problema de las baldosas involucra la función $g = 2w + 6$, con números naturales como dominio y codominio. En este problema intervienen dos variables: el número de baldosas blancas (w) y el número de baldosas grises (g). Por ejemplo, si queremos saber cuántas baldosas grises se pueden colocar alrededor de un número dado de baldosas blancas, g se expresa en función de w . En este caso, w es la variable independiente y g la dependiente.

Cuando los estudiantes trabajan con una tarea de pensamiento funcional, tienen distintas formas de interpretar y construir cómo se relacionan las variables dependiente e independiente:

- *Recurrencia*, que describe la atención a la variación dentro de una misma cantidad (por ejemplo, en el problema de las baldosas: “el número de baldosas grises aumenta de 2 en 2”);
- *Correspondencia*, que se refiere a los pares $(a, f(a))$ (por ejemplo, “el doble del número de baldosas blancas más seis”); y
- *Covariación*, que analiza cómo varían conjuntamente dos cantidades y cómo el cambio en una (por ejemplo, de a_n a a_{n+1}) produce un cambio en la otra (de $f(a_n)$ a $f(a_{n+1})$), como en “cuando el número de baldosas blancas aumenta en uno, el número de baldosas grises aumenta en dos”.

En nuestro trabajo nos centramos en la correspondencia y la covariación, ya que ambas implican a las dos variables (a diferencia de la recurrencia, que explica la variación entre

distintos valores de la variable dependiente). Es a través de estas relaciones funcionales, que pueden ser percibidas y expresadas a través de diferentes representaciones matemáticas por las cuales identificamos en las respuestas de los estudiantes (orales y escritas) evidencias de generalización al representar, justificar y razonar cómo una cantidad varía con respecto a otra en general. En Pinto y Cañadas (2021) y Pinto et al. (2022) nos centramos en abordar evidencias de relaciones funcionales de estudiantes de 3.º y 5.º de primaria al abordar las tareas de funciones.

3.2. Representación de cantidades indeterminadas por estudiantes de primaria en contextos funcionales

En la tesis doctoral de Cristina Ayala-Altamirano², dirigida por Marta Molina, se propone describir y analizar cómo estudiantes de tercero y cuarto de primaria representan cantidades indeterminadas y justifican relaciones funcionales, y cómo estos procesos se ven influenciados por las características de las tareas propuestas. En términos curriculares, la investigación se alinea con la tendencia internacional que impulsa la introducción temprana del pensamiento algebraico sin esperar a la educación secundaria. La tesis evidencia que los estudiantes de educación primaria son capaces de pensar de manera general, además de representar y justificar relaciones funcionales, siempre que se le propongan tareas adecuadas a su nivel de desarrollo y experiencias cercanas.

Al hablar de álgebra la primera idea que se viene a la mente es la de realizar cálculos, pero con letras. Aunque en esta tesis se amplía esta visión y no se trata con letras sino con cantidades indeterminadas que pueden ser representadas de múltiples formas, el primer acercamiento a la problemática de estudio fue comprender las concepciones que los estudiantes tienen sobre las letras como representación de cantidades indeterminadas. En el primer estudio que compone la tesis (Ayala-Altamirano y Molina, 2020) se muestra que los estudiantes pueden atribuir a las letras un significado dinámico, asociado a la variabilidad, incluso si inicialmente se apoyan en referentes familiares como el alfabeto o la aritmética. Estos hallazgos contradicen interpretaciones simplistas que asocian el uso de números o referencias al alfabeto con una comprensión estática o errónea del álgebra. Por el contrario, la investigación demuestra que detrás de estas representaciones hay razonamientos coherentes, que merecen ser comprendidos y valorizados como parte del proceso de aprendizaje.

La autora adopta una perspectiva multimodal y semiótica que reconoce la legitimidad de diversas formas de representación: lenguaje natural, gestos, dibujos, ejemplos numéricos y representaciones gráficas. Esta amplitud permite valorar las expresiones personales de los estudiantes, muchas veces descartadas por no ajustarse a la convención matemática. Desde esta perspectiva, en los siguientes estudios que forman parte de la tesis (Ayala-Altamirano y Molina, 2021a, 2021b; Ayala-Altamirano et al., 2022) se desprenden orientaciones pedagógicas concretas. Primero, es importante comprender que para representar de forma general una relación funcional (por ejemplo, $2x + 3$ o el doble de un número más tres), es necesario ser parte de un proceso de generalización. Por ejemplo, una tarea inicial puede consistir en presentar una situación en la que sea necesario razonar sobre la relación en casos numéricos cercanos, casos

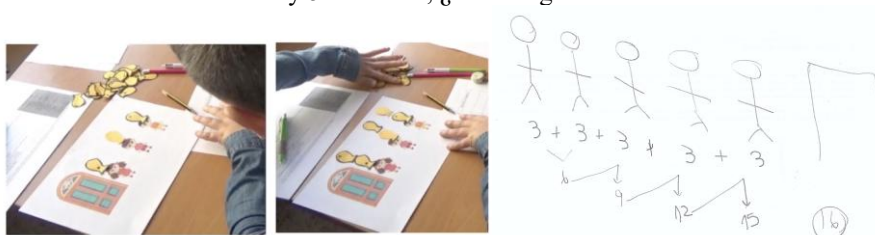
² Titulada: “Concepción y representación de cantidades indeterminadas por estudiantes de primaria en contextos funcionales” y realizada dentro de los proyectos de investigación del Plan Nacional I+D con referencias EDU2013-41632-P y EDU2016-75771-P, financiados por la Agencia Estatal de Investigación (AEI) de España y el Fondo Europeo de Desarrollo Regional (FEDER).

numéricos lejanos y en casos indeterminados. Por ejemplo, “En el cumpleaños de Isabel le regalarán la misma cantidad de globos a cada invitado y colocarán un globo en la puerta para avisar que es la casa del cumpleaños. Para que encuentren una regularidad en primera instancia se razona con casos particulares cercanos, que permitan incluso el uso de material manipulativo para observar cuál es la relación entre variables o a través de otros medios de representación (Ver figura 3).

Figura 3

Problema de los globos.

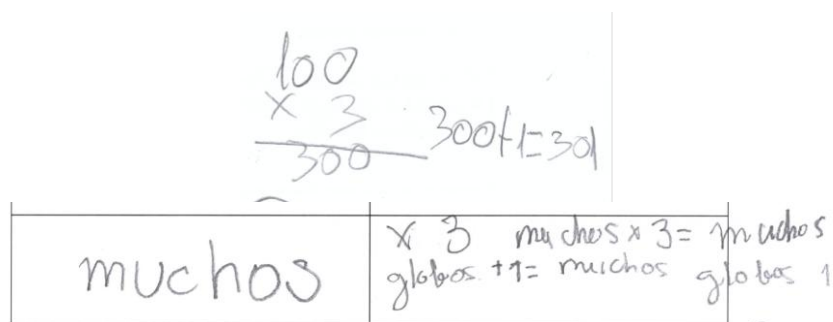
- Quando hay 3 invitados, se necesitan 10 globos.
- Quando hay 6 invitados, se necesitan 19 globos.
- Quando hay 2 invitados, se necesitan 7 globos.
- Quando hay 5 invitados, ¿cuántos globos necesita?



Luego se pregunta por casos lejanos y por cantidades indeterminadas, como: ¿y cuando hay 100 invitados cuántos globos se necesitan? Si invita a “muchos” invitados, ¿cuántos globos necesita? (Ver figura 4).

Figura 4

Expresión de la relación funcional en casos lejanos e indeterminados.



El uso de la palabra muchos, —o cualquier palabra que se asocie a una indeterminación o caso desconocido, tal como: algunos, unos, una cantidad que no conocemos— permite introducir la idea de cantidad indeterminada sin recurrir inmediatamente a letras. Posteriormente, puede invitarse a los estudiantes a pensar “cómo podrías saber el número de globos si no sabes cuántos invitados hay” y fomentar que expresen esta idea en sus propias palabras, con dibujos o esquemas, antes de introducir representaciones convencionales como $3 \times n + 1$. Los resultados de los estudios muestran que los estudiantes generalizan y se refieren a cantidades indeterminadas con distintos grados de sofisticación, dependiendo de la forma como representen estas cantidades. Este elemento es importante, porque valida las ideas informales o incipientes de los estudiantes.

Otro aspecto relevante de la tesis es la descripción del impacto de la interacción social y la comunicación oral en la construcción del conocimiento. Se constata que las justificaciones

orales permiten a los estudiantes explicitar sus ideas con mayor claridad que las justificaciones escritas, y que los intercambios con los pares amplían su repertorio de estrategias. Además, se demuestra que el tipo de justificación solicitada (de elaboración o de validación) influye en los elementos de la función a los que los estudiantes prestan atención, lo que tiene importantes implicancias para el diseño de tareas en el aula. Esta evidencia sugiere que las tareas deberían incorporar momentos estructurados para la discusión en grupo, por ejemplo, mediante preguntas como: ¿cómo llegaste a la respuesta? ¿Qué estrategias seguiste para encontrar la relación? ¿Estás de acuerdo con lo que dijo tu compañero? ¿Por qué sí o por qué no? ¿Estás de acuerdo con la siguiente afirmación?

En la tesis se considera la importancia de la justificación al momento de referirse a cantidades indeterminadas, la tesis evidencia que tareas que proponen sentencias de verdadero o falso resultan especialmente potentes para desencadenar discusiones sobre la validez de generalizaciones. Por ejemplo, ante la afirmación “Si hay x invitados, entonces hay $x + 1$ globos”, se puede invitar a los estudiantes a decidir si la afirmación es siempre verdadera, a justificar su respuesta con ejemplos o a corregir la afirmación planteando la relación correctamente.

Finalmente, en la elección del tipo de función a tratar, en Ramírez et. al., (2022) se muestra que los problemas que involucran relaciones aditivas simples del tipo $y = x + b$ son más asequibles para los estudiantes, seguidos de las relaciones multiplicativas sin constante ($y = ax$), siendo las más complejas aquellas que combinan multiplicación y suma ($y = ax + b$). Este hallazgo puede orientar la secuenciación de la enseñanza, comenzando por situaciones fácilmente visualizables (por ejemplo, “Cada niño tiene dos globos”) y avanzando progresivamente hacia estructuras más complejas.

En síntesis, es importante destacar que la tesis apoya una visión del álgebra como una forma de pensar y comunicar, no solo como un sistema de símbolos. Esta perspectiva invita a los docentes a reconocer, valorar y potenciar las formas personales de expresión matemática de sus estudiantes, brindándoles oportunidades para avanzar hacia formas más sofisticadas mediante tareas ricas, variadas y socialmente compartidas. Es así como el álgebra no es solo simbolismo algebraico, sino son prácticas que se complementan unas con otras, a saber: generalizar, representar, justificar y razonar.

3.3. Estructuras de estudiantes de educación primaria en un enfoque funcional

En el ámbito del pensamiento funcional se habla de estructuras para referirse a la expresión de las regularidades presentes entre las variables de las funciones involucradas (Torres et al., 2024). En la tesis de doctoral de María D. Torres³, dirigida por María C. Cañadas y Antonio Moreno, exploramos cómo estudiantes de segundo de primaria identifican las estructuras sin atender a la posición ni el crecimiento, como sucede en el estudio de los patrones, sino atendiendo a la relación de covariación y a la generalización de esas estructuras. En este sentido podemos establecer dos relaciones en las funciones de dos variables: formas directa e inversa de la función.

³ Titulada: “Generalización, estructuras y representaciones de estudiantes de segundo de educación primaria desde un enfoque funcional del early algebra” y realizada dentro del proyecto de investigación del Plan Nacional I+D con referencias EDU2016-75771-P, financiado por la Agencia Estatal de Investigación (AEI) de España y el Fondo Europeo de Desarrollo Regional (FEDER).

Cuando hablamos de una función $y = f(x)$, en general, se está haciendo referencia a su forma directa, pues es la manera usual en la que se representa la regularidad entre las dos variables en un contexto concreto. Esa función tiene una función inversa $y = g(x)$, tal que $g(f(x)) = f(g(x)) = x$. En este estudio fijamos, de partida, una función dada $y = x + 2$ que decidimos que es la que se refiere a la forma directa por considerarla más sencilla (Torres et al, 2021a). Se afirma que, para los casos por los que preguntamos a los estudiantes, para uno o más valores de x , estaremos indagando sobre la capacidad del sujeto para identificar o generalizar la forma directa de esa función. Sin embargo, cuando se intercambian los roles de las dos variables en ese mismo contexto, entonces se está indagando sobre la capacidad del sujeto para identificar o generalizar sobre la forma inversa de esa función. La forma directa está determinada por la forma en la que se presentan los datos iniciales.

En la siguiente figura 5 mostramos una tarea en la que abordamos la estructura de ambas formas de la función usando la representación tabular como herramienta (Torres et al., 2021b).

Figura 5

Tarea para el trabajo de ambas formas de la función.

Un tren va recogiendo a los amigos de Elsa para que vayan a su cumpleaños. En cada parada de tren se montan el mismo número de personas. Queremos saber cuántas personas tendrá el tren cuando haya pasado por muchas paradas. ¿Cómo puedes saber cuántas personas lleva el tren si en cada parada suben 2 personas?

Para abordar la tarea podemos llevar a cabo un protocolo de preguntas en el aula partiendo de casos particulares para avanzar hacia la generalización de la estructura (ver figura 6).

Figura 6

Protocolo de trabajo para la forma directa.

FORMA DIRECTA

1° Casos particulares

1. Casos particulares dados
Cuando el tren para 1 vez se suben 2 personas

Cuándo el tren para 3 veces ¿cuántas personas se suben?

Cuando el tren para 10 veces ¿cuántas personas se suben?
2. Casos particulares propuestos por el estudiante.

Dime un número de paradas que pueda hacer el tren (). Si para esas veces ¿Cuántas personas pueden subirse?
3. Casos particulares con cantidades cada vez mayores

Si el tren para 1000 veces ¿cuántas personas podrán subirse?

Si el tren para un millón de veces ¿cuántas personas podrán subirse?

2° Generalización

4. Expresar la generalización

¿Cómo le explicarías a un amigo cuántas personas llevará el tren cuando pasa por infinitas paradas?

¿Cómo le explicarías a un amigo cuántas personas llevará el tren cuando pasa por muchas paradas?

Para trabajar progresivamente la forma inversa podemos aplicar un representación tabular con diferentes valores como lo de la figura 7.

Figura 7

Representación tabular con diferentes casos particulares.

Número de paradas	Número de personas
	4
	2
3	
7	
	6
	12
10	
	20
	300
	4 millones
	Z

Las preguntas que podemos usar para trabajar la forma inversa de una función de forma análoga a lo anterior pueden verse en la figura 8.

Figura 8

Protocolo de trabajo para la forma inversa.

FORMA INVERSA

1° Casos particulares

1. Casos particulares dados

- Cuando el tren lleva 4 personas ¿Cuántas veces ha parado?
- Cuando el tren lleva 12 personas ¿Cuántas veces ha parado?
- Cuando el tren lleva 300 personas ¿Cuántas veces ha parado?

2° Generalización

2. Expresar la generalización

¿Cómo le explicarías a un amigo que ha de hacer para conocerlas personas que van en el tren cuando ha parado por muchas paradas?

En nuestra investigación utilizamos el potencial del objeto matemático, la función, de forma que los estudiantes desarrollen habilidades que les permitan pensar algebraicamente y reflexionen sobre las relaciones entre variables en este nivel educativo. El trabajo realizado sobre los distintos papeles jugados por las mismas variables de una estructura expresada de manera directa o inversa puede ayudar a profundizar en el desarrollo de la búsqueda de covariaciones entre variables que les será beneficioso en niveles posteriores.

3.4. Relaciones funcionales, representaciones y generalización en educación infantil

La posibilidad de potenciar el desarrollo del pensamiento funcional, en niños y niñas desde educación infantil es un aspecto que cada vez genera mayor interés para la investigación en Educación Matemática (Narváez et al., 2025). Un creciente cuerpo de investigación ha descrito las formas en que estos niños pueden participar en este tipo de pensamiento, incluyendo cómo estos generalizan, representan, justifican y razonan con la estructura y las relaciones entre cantidades que covarían (p. ej., Anglada et al., 2024; Blanton y Kaput, 2004; Brizuela et al., 2021; Warren et al., 2013). Estos estudios, se han centrado fundamentalmente en las relaciones funcionales, las generalizaciones de estas relaciones y sus representaciones.

La tesis doctoral desarrollada por Lourdes Anglada⁴, bajo la dirección de María C. Cañadas, ha abordado la representación tabular y el diseño de tareas de generalización en el último curso de educación infantil (5-6 años). La atención específica al diseño de tareas nos ayuda a reflexionar a nivel teórico sobre los tipos específicos de tareas que propician ciertas ideas en los niños y niñas. A la vez, a nivel de la práctica esto nos ayuda a construir futuros ambientes educativos al tener en cuenta las maneras específicas en las cuales interactúan los tipos de tareas y los aprendizajes que se observan a medida que los niños interactúan con ellas.

Particularmente en educación infantil, a la hora de diseñar tareas sobre pensamiento funcional debemos tener en cuenta varios aspectos:

1. Usar materiales concretos que permitan trabajar con experiencias perceptivo-motrices, (Blanton y Kaput, 2004; Warren et al., 2013). La selección de estos materiales es esencial en el diseño de tareas. Los materiales manipulativos adecuados son aquellos que ayudan a los estudiantes a construir, fortalecer y conectar varias representaciones de ideas matemáticas” (Sarama y Clements, 2009).
2. Emplear problemas contextualizados, pues son considerados una herramienta importante para indagar en este tipo de pensamiento, al favorecer que los niños comprendan la relación entre cantidades que covarían a partir de un contexto determinado (Smith, 2008).
3. Fomentar que los estudiantes utilicen distintas representaciones, pasar por distintas representaciones al resolver una tarea algebraica genera un pensamiento más flexible en los estudiantes También es importante desarrollar la capacidad de traducir o establecer relaciones entre distintos modos de representación (Brizuela y Earnest, 2008; NCTM, 2000). Una dificultad a la hora de investigar a estas edades es que su capacidad de expresión es limitada, muchas veces, los problemas de los niños no son de captación, sino de expresión (Cooper y Warren, 2011). Es por esto tener en cuenta la posibilidad de usar distintas representaciones y establecer relaciones entre ellas permite arrojar luz sobre el pensamiento de los niños.
4. Plantear preguntas que ayuden a los niños a conceptualizar las cantidades involucradas y la variación de cada cantidad, de modo que coordinen la variación de las dos cantidades y luego desarrollen su comprensión y capacidad para expresar esta relación (Pittalis et al., 2020). Estas deben ser preguntas abiertas, que desafíen el pensamiento de los niños y que permitan promover y movilizar la comprensión de la estructura como

⁴ Titulada: “Pensamiento funcional con estudiantes de último curso de educación infantil: relaciones funcionales, representaciones y generalización” y realizada dentro de los proyectos de investigación del Plan Nacional I+D con referencias EDU2016-75771-P y PID2020-113601GB-I00, financiados por la Agencia Estatal de Investigación (AEI) de España y el Fondo Europeo de Desarrollo Regional (FEDER).

una regla replicable, evitando las preguntas del docente que se responden con un “sí” o un “no” (Blanton, 2008).

A continuación presentamos una de las tareas diseñadas que se implementó en una clase de 13 niños y niñas del último curso de educación infantil (5-6 años) en las que se tuvieron en cuenta cada una de las recomendaciones anteriores.

Presentamos la tarea en clase de forma oral. Utilizamos una gallina y huevos de juguete, y un espejo. La historia contaba que una gallina a la que se le ocurrió la idea de colocar un espejo junto a los huevos que ponía para engañar al resto de gallinas y ser así la que más huevos ponía (ver figura 9). Lo anterior se ajusta a las condiciones 1 y 2 expuestas anteriormente.

Figura 9

Materiales usados en la tarea.



Respecto a la condición 4, mientras escenificábamos la historia, realizamos preguntas que orientamos para que fueran un ente facilitador del diálogo y de la justificación por parte de los niños y niñas. Algunas de las preguntas realizadas fueron: “¿Cómo pensaste que era [un número cualquiera]?”, “¿Cómo lo has hecho?”, “¿Por qué?”. Al principio, las preguntas se referían a qué había ocurrido al poner el espejo y a predecir lo que ocurriría cuando la gallina pusiera el espejo. A continuación realizamos preguntas que implicaban la función inversa, preguntábamos cuantos huevos debería poner la gallina para ver en el espejo un número determinado. Las respuestas se iban comprobando con el material de manera que los propios niños podían validar sus respuestas. Estas preguntas se realizaron para un número de huevos entre 1 y 10. Después, realizamos preguntas con cantidades mayores, ya sin apoyarnos en el material. Por último, realizamos preguntas con cantidades indeterminadas, por ejemplo: “¿Cuántos huevos veremos en el espejo si la gallina puso muchos?” y preguntamos en general qué es lo que ocurría cuando la gallina ponía los huevos delante del espejo. Estas preguntas incitaban a expresar la generalización.

En esta tarea hemos puesto especial interés en las representaciones utilizadas y la relación entre ellas (condición 3), en particular, la representación verbal y la tabular. Nos centramos en observar las formas en que los niños construyen tablas de funciones para representar la relación entre dos cantidades covariantes. Su construcción implica identificar las variables y la relación que se establece entre ellas (Martí et al., 2010), entre otras nociones.

La investigadora dibujó los ejes de una tabla en la pizarra y puso el primer par de valores: “si la gallina pone un huevo, al ponerlo delante del espejo veremos dos”. A continuación los niños salieron por turnos a la pizarra añadiendo pares de valores de la función. Tuvimos presente proponerles valores no consecutivos para evitar la recursividad. Además, formulamos

preguntas que ponían la atención en las relaciones por filas de la tabla (López y Brizuela, 2024). Cada vez que un niño escribía una pareja de valores, le preguntábamos qué quería decir con lo que había escrito. Se abría una discusión en clase y se confirmaba si todos los niños lo consideraban correcto o no. En caso de discrepancia lo comprobaban con el material. Una vez realizada la tabla procedimos a leerla entre todos. En la figura 10 podemos ver a la izquierda la tabla construida por los niños y niñas y a su izquierda la realizada por la investigadora con parejas de valores propuestas por los niños.

Figura 10

Tabla construida por los niños en la pizarra.

miércoles 22-enero-2025	
GALINA, ESPEJO	
1	2
3	6
2	4
4	8
5	10

10	20
20	40
100	200
300	600

4. REFLEXIONES FINALES

En las tesis doctorales presentadas hemos usado el potencial del objeto matemático, la función, buscando que los estudiantes desarrollen habilidades que les permitan pensar algebraicamente y reflexionen sobre las relaciones entre variables en los niveles educativos más básicos.

Las tareas y contextos implicados en cada uno de los estudios de las tesis sobre el pensamiento funcional alientan a los estudiantes a descubrir relaciones entre variables, a explorar estructuras matemáticas más que a centrarse en cálculos aislados. Hacer uso de este tipo de tareas para atender a la generalización y su forma de representarse plantea un acercamiento a la enseñanza del pensamiento funcional.

El trabajo realizado sobre los distintos papeles jugados por las mismas variables de una relación funcional expresada de manera directa o inversa puede ayudar a profundizar en el desarrollo de la búsqueda de covariaciones entre variables que les será beneficioso en niveles posteriores. Así mismo, el trabajo concreto con la representación tabular pueden ayudar a los profesores a diseñar actividades en el aula que apoyen su uso fomentando habilidades comunicativas, razonamiento y la justificación. Dado que el currículo actual de la escuela primaria y secundaria exige el dominio de esta y otras herramientas de representación similares para representar gráficamente la información, de ahí el interés de observar su uso por parte de estos jóvenes estudiantes.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Anglada, L., Cañadas, M. C. y Brizuela, B. M. (2025). Generalization among 5-Year-olds in a functional context with programmable robot. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 1-22. <https://doi.org/10.1007/s10763-024-10495-x>
- Ayala-Altamirano, C. y Molina, M. (2020). Meanings attributed to letters in functional contexts by primary school students. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 18(7), 1271-1291. <https://doi.org/10.1007/s10763-019-10012-5>
- Ayala-Altamirano, C. y Molina, M. (2021a). El proceso de generalización y la generalización en acto. Un estudio de casos. *PNA*, 15(3), 211-241. <https://doi.org/10.30827/pna.v15i3.18109>
- Ayala-Altamirano, C. y Molina, M. (2021b). Fourth-graders' justifications in early algebra tasks involving a functional relationship. *Educational Studies in Mathematics*, 107(2), 359-382. <https://doi.org/10.1007/s10649-021-10036-1>
- Ayala-Altamirano, C., Molina, M. y Ambrose, R. (2022). Fourth graders expression of the general case. *ZDM – Mathematics Education*, 54(6), 1377-1392. <https://doi.org/10.1007/s11858-022-01398-8>
- Blanton, M. L. (2008). *Algebra and the elementary classroom: Transforming thinking, transforming practice*. Heinemann Educational Books.
- Blanton, M. L. y Kaput, J. (2004). Elementary grades students' capacity for functional thinking. En M. Johnsen y A. Berit (Eds.), *Proceedings of the 28th International Group of the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 135-142). Bergen University College
- Blanton, M. L., Brizuela, B. M., Stephens, A., Knuth, E., Isler, I., Gardiner, A. M., Stroud, R., Fonger, N. L. y Stylianou, D. (2018). Implementing a Framework for Early Algebra. *Teaching and Learning Algebraic Thinking with 5-to-12-Year-Olds, ICME-13*, 27-49. https://doi.org/https://doi.org/10.1007/978-3-319-68351-5_2
- Blanton, M. L., Levi, L., Crites, T. y Dougherty, B. J. (2011). *Developing essential understanding of algebraic thinking. Grades 3-5*.
- Brizuela B. M., Blanton M. L. y Kim Y. (2021). A kindergarten student's use and understanding of tables while working with function problems. En A. G. Spinillo, S. L. Lautert y R. E. Borba (Eds.), *Mathematical reasoning of children and adults*. Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-69657-3_8
- Brizuela, B. M. y Earnest, D. (2008). Multiple notational systems and algebraic understandings: The case of the "best deal" problem. En J. J. Kaput, D. W. Carraher y M. L. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 273-301). Lawrence Erlbaum Associates.
- Cañadas, M. C. y Molina, M. (2016). Una aproximación al marco conceptual y principales antecedentes del pensamiento funcional en primeras edades. En E. Castro, E. Castro, J. L. Lupiáñez, J. F. Ruiz y M. Torralbo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática. Homenaje a Luis Rico* (pp. 209-218). Comares. <https://doi.org/ISBN 978-0-88385-901-8>
- Carraher, D. W. y Schliemann, A. D. (2015). Powerful ideas in elementary school mathematics. *Handbook of International Research in Mathematics Education: Third Edition*, 2, 191-218. <https://doi.org/10.4324/9780203448946>
- Cooper, T. J. y Warren, E. (2011). Years 2 to 6 students' ability to generalise: Models, representations and theory for teaching and learning. En J. Cai (Ed.), *Early algebraization. Advances in mathematics education* (pp. 187-214). Springer.
- English, L. D. y Warren, E. A. (1998). Introducing the variable through pattern exploration. *The*

- Mathematics Teacher*, 19(2), 166-170.
- Kaput, J. J. (2008). What is algebra? What is the algebraic reasoning? En J. J. Kaput, D. W. Carraher y M. L. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 5-17). Lawrence Erlbaum Associates.
- López, M. y Brizuela, B. M. (2024). Las tablas como herramientas algebraicas. *Uno. Revista de Didáctica de las Matemáticas* 106, 23-28.
- Martí, E., Pérez, E. y de la Cerda, C. (2010). Alfabetización gráfica. La apropiación de las tablas como instrumentos cognitivos. *Contextos*, 9(10), 65-78.
- Mason, J., Burton, L. y Stacey, K. (1992). *Pensar matemáticamente*. Ministerio de Educación y Ciencia / Labor.
- National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Autor.
- Narváez, R., Adamuz-Povedano, N. y Cañadas, M. C. (2025). Análisis bibliométrico sobre pensamiento algebraico en educación infantil y primaria en Scopus. *Avances De Investigación En Educación Matemática*, (27), 43-65. <https://doi.org/10.35763/aiem27.5825>
- Pinto, E. y Cañadas, M. C. (2021). Generalizations of third and fifth graders within a functional approach to early algebra. *Mathematics Education Research Journal*, 33, 113-134.
- Pinto, E., Cañadas, M. C. y Moreno, A. (2022). Functional Relationships Evidenced and Representations Used by Third Graders Within a Functional Approach to Early Algebra. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 20(6), 1183-1202. <https://doi.org/10.1007/s10763-021-10183-0>
- Pólya, G. (1966). *Matemáticas y razonamiento plausible*. Tecnos.
- Pang, J. y Sunwoo, J. (2022). Design of a pattern and correspondence unit to foster functional thinking in an elementary mathematics textbook. *ZDM—Mathematics Education*, 54(6), 1315-1331. <https://doi.org/10.1007/s11858-022-01411-0>
- Pittalis, M., Pitta-Pantazi, D. y Christou, C. (2020). Young students' functional thinking modes: The relation between recursive patterning, covariational thinking, and correspondence relations. *Journal for Research in Mathematics Education*, 51(5), 631-674. <https://doi.org/10.5951/jresmetheduc-2020-0164>
- Radford, L. (2003). Gestures, speech, and the sprouting of signs: A semiotic-cultural approach to students' types of generalization. *Mathematical Thinking and Learning*, 5(1), 37-70. https://doi.org/10.1207/S15327833MTL0501_02
- Radford, L. (2006). Algebraic thinking and the generalization of patterns: A semiotic perspective. En J. Alatorre, M. Sáiz y A. Méndez (Eds.), *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, North American Chapter* (Vol. 1, pp. 2-21). Universidad Pedagógica Nacional.
- Ramírez, R., Brizuela, B. M. y Ayala-Altamirano, C. (2022). Word problems associated with the use of functional strategies among grade 4 students. *Mathematics Education Research Journal*, 34(1), 317-341. <https://doi.org/10.1007/s13394-020-00346-7>
- Sarama, J. y Clements, D. H. (2009). "Concrete" computer manipulatives in mathematics education. *Child Development Perspectives*, 3(3), 145-150.
- Smith, E. (2008). Representational thinking as a framework for introducing functions in the elementary curriculum. En J. J. Kaput, D. W. Carraher y M. L. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (133-163). Routledge.

- Torres, M. D., Cañadas, M.C., Moreno, A., y Gómez, P. (2021a). Structures in direct and inverse forms of a function evidenced by 7–8-year-old students. *Uniciencia*, 35(2), 1-16. <https://doi.org/10.15359/ru.35-2.16>
- Torres, M. D., Brizuela, B. M., Cañadas, M. C. y Moreno, A. (2021b). Introducing tables to second grade elementary students in an algebraic thinking context. *Mathematics*, 10(1), 56. <https://doi.org/10.3390/math10010056>
- Torres, M. D., Cañadas, M. C. y Moreno, A. (2024). Structure recognition and generalization by second-graders in direct and inverse forms of a linear function. *Mathematical Thinking and Learning*, 27(3), 323-341. <https://doi.org/10.1080/10986065.2024.2324492>
- Warren, E., Miller, J. y Cooper, T. J. (2013). Exploring young students' functional thinking. *PNA*, 7(2), 75-84. <https://doi.org/10.30827/pna.v7i2.6131>

Razonamiento algebraico y proporcional en contexto probabilístico: Una experiencia con futuros profesores de secundaria

Veronica Albanese

Universidad de Granada, vealbanese@go.ugr.es

María Burgos

Universidad de Granada, mariaburgos@ugr.es

Nicolás Tizón-Escamilla

Universidad de Granada, tizon@ugr.es

Resumen: *El estudio explora la capacidad de futuros docentes de matemáticas de educación secundaria para resolver problemas que implican razonamiento proporcional en un contexto probabilístico y para analizar la presencia de objetos característicos del álgebra y proporcionalidad en resoluciones propias y de estudiantes. Los resultados muestran que los futuros docentes resuelven los problemas propuestos con distintos niveles de razonamiento algebraico y analizan adecuadamente la presencia de elementos del álgebra y la proporcionalidad en sus resoluciones. Tienen más dificultades para analizar resoluciones de estudiantes, especialmente si son incorrectas y tomar decisiones para gestionar el error. Se concluye la necesidad de fortalecer la formación en el análisis de la actividad matemática presente en sus propias prácticas y en las de sus estudiantes.*

Palabras clave: *razonamiento algebraico, razonamiento proporcional, probabilidad, formación de profesores, educación secundaria.*

Algebraic and Proportional Reasoning in Probability Tasks: An Experience with Prospective Secondary Teachers

Abstract: *The study explores the ability of prospective secondary mathematics teachers to solve problems involving proportional reasoning in a probabilistic context, as well as to analyze the presence of algebraic and proportionality-related objects in their own solutions and those of students. The results show that the prospective teachers solve the proposed problems with varying levels of algebraic reasoning and adequately identify the presence of algebraic and proportionality elements in their own work. They experience greater difficulty when analyzing students' solutions, especially when these are incorrect, and when making decisions to address errors. The study concludes that there is a need to strengthen teacher education in the analysis of the mathematical activity present in their own practices and in those of their students.*

Keywords: *algebraic reasoning, proportional reasoning, probability, teacher training, secondary education.*

1. INTRODUCCIÓN

Históricamente el álgebra ha desempeñado un papel crucial en las matemáticas escolares. Dominar el álgebra no sólo es imprescindible en cursos superiores de matemáticas en la enseñanza secundaria, sino que su presencia es innegable en carreras de Ciencias, Tecnología, Ingeniería y Matemáticas (STEM, por sus siglas en inglés) (Levin y Walkoe, 2022). Desde hace varias décadas se ha ampliado la forma de concebir el razonamiento algebraico para incluir procesos como los de generalización, formalización o modelización, y diversificar las formas de pensar algebraicamente para incluir el pensamiento analítico, estructural, funcional o relacional (Kieran, 2022). Enriquecer la concepción del razonamiento algebraico en este sentido, garantiza una visión integrada y longitudinal del álgebra escolar, pero también la consideración trasversal del algebraico como razonamiento que puede ponerse de manifiesto en tareas relacionadas con la aritmética, la medida, la geometría o la probabilidad.

La relación entre el grado de conocimiento del profesor de matemáticas y el desarrollo del razonamiento algebraico en sus estudiantes justifica el interés por determinar el tipo de conocimiento didáctico-matemático que debe tener el futuro profesorado (Ferreira et al., 2022). Esto supone la necesidad de diseñar e implementar experiencias formativas que permitan caracterizar y promover el desarrollo de conocimientos y competencias en el profesorado en cuanto al razonamiento algebraico. En particular, estas acciones deben contemplar el análisis del carácter algebraico de las prácticas matemáticas que se ponen en juego en la solución de tareas en diferentes contextos, la interpretación del carácter algebraico de las soluciones propuestas por escolares a dichas tareas, y finalmente, la identificación y gestión de dificultades en relación con la actividad algebraica desarrollada (Burgos, 2023).

En esta investigación centramos la atención en tareas que permiten conectar el razonamiento algebraico, proporcional y probabilístico en la formación de profesores. Por un lado, el razonamiento proporcional es considerado como precursor del razonamiento algebraico en los estudiantes, en tanto implica “razonar algebraicamente sobre dos cantidades generalizadas que están relacionadas de tal manera que la relación de una cantidad con respecto a la otra es invariante” (Blanton et al., 2015, p. 43). Por otro lado, el razonamiento proporcional forma parte del análisis del espacio muestral, la cuantificación proporcional de las probabilidades y la comprensión y uso de las correlaciones, aspectos centrales del razonamiento probabilístico (Batanero et al., 2021).

Múltiples estudios indican que muchos de los errores conceptuales y procedimentales en el ámbito de la probabilidad pueden deberse a un razonamiento proporcional insuficiente (Begolli et al., 2021). Por este motivo, recientemente, Burgos y colaboradores han evaluado específicamente los conocimientos y competencias de futuros docentes de Educación Primaria para interpretar las respuestas de estudiantes en tareas de comparación de probabilidades (Burgos, López-Martín et al., 2022) y de juego equitativo (Burgos, 2023), analizando cómo identifican el razonamiento proporcional, o su ausencia, en las prácticas matemáticas de los escolares. Los resultados ponen de manifiesto las dificultades de futuros docentes para justificar con base en elementos matemáticos por qué consideran correcta la respuesta de un alumno, lo que los lleva a sustentar su valoración en la proximidad con una solución experta o esperada, y sin cuestionar los argumentos que permiten asegurar la validez de la respuesta de un estudiante.

En este trabajo mostramos los resultados de una experiencia llevada a cabo con un grupo de futuros profesores de educación secundaria. Por un lado, se les solicitaba proponer soluciones a problemas que articulaban razonamiento proporcional y probabilístico y analizar qué aspectos

propios del álgebra y la proporcionalidad estaban presentes en ellas. Por otro lado, debían analizar el grado de corrección y la presencia de razonamiento algebraico y proporcional en resoluciones de estudiantes de educación secundaria ante un problema de creación de espacio muestral. Las preguntas de investigación que nos planteamos son las siguientes:

- ¿Qué aspectos característicos de los razonamientos algebraico y proporcional identifica el futuro profesorado de matemáticas en el análisis de sus propias resoluciones a problemas en un contexto probabilístico?
- ¿Qué elementos propios del álgebra y la proporcionalidad reconoce el futuro profesorado de matemáticas al analizar resoluciones de estudiantes de educación secundaria?
- ¿Cómo identifica el futuro profesorado de matemáticas los errores presentes en las resoluciones de estudiantes de educación secundaria a un problema que articula proporcionalidad y probabilidad?
- ¿Cómo gestiona los errores o qué modificaciones del problema original proponen para contribuir a la superación de dichos errores?

2. FUNDAMENTACIÓN TEÓRICA

2.1. Razonamiento algebraico elemental desde la perspectiva del Enfoque Ontosemiótico

Asumir una perspectiva antropológica de las matemáticas, supone concebir la matemática como actividad humana (Godino, 2024). En el Enfoque Ontosemiótico (EOS) se asume además una visión pragmática de los objetos matemáticos, que lleva a relacionar el significado con las prácticas de resolución de problemas y los contextos de uso en los que estos toman parte. Así, en las prácticas matemáticas, entendidas como acciones realizadas por un sujeto para resolver un problema, validar su solución o comunicarla a otros, participan y emergen distintos tipos de objetos matemáticos, clasificados según su naturaleza y función en: situaciones-problema, lenguajes, conceptos, proposiciones, procedimientos o argumentos. Estos objetos no aparecen de manera aislada, sino que están interconectados formando configuraciones ontosemióticas de prácticas, objetos y procesos. Así, las situaciones-problemas son el origen de la actividad matemática; el lenguaje constituye el elemento ostensivo del trabajo matemático, y los argumentos fundamentan los procedimientos y las proposiciones que relacionan los conceptos matemáticos entre sí.

Desde el EOS se entiende el *Razonamiento Algebraico Elemental* (RAE) como el sistema de prácticas operativas y discursivas requeridas en la resolución de tareas matemáticas abordables desde la Educación Primaria, en las que están presentes objetos y procesos algebraicos (Burgos et al., 2024; Godino et al., 2015). Se consideran objetos algebraicos: a) *relaciones binarias* (de equivalencia o de orden) y sus respectivas propiedades (reflexiva, transitiva y simétrica o antisimétrica); b) *operaciones y sus propiedades*, realizadas sobre los elementos de conjuntos de objetos diversos; c) *funciones, sus componentes* (variables, representaciones analítica, tabular o gráfica), *tipos, operaciones y propiedades*; d) *estructuras, sus tipos y propiedades*. El carácter algebraico de una práctica matemática está esencialmente ligado a una serie de procesos como son el reconocimiento por el sujeto que la realiza de la regla que conforma el objeto intensivo (generalización, inferencia de la generalidad), la consideración de la generalidad como una nueva entidad unitaria (unitarización) y su materialización mediante cualquier registro semiótico (representación) para su posterior tratamiento analítico (transformación). Bajo el marco del EOS

(Godino, 2024), Godino et al. (2015) propusieron un modelo basado en niveles de RAE con el que se pretende analizar el carácter más o menos algebraico de las prácticas que se ponen en juego al resolver tareas matemáticas. Así, los criterios para delimitar los distintos niveles están basados en el tipo de objetos y procesos matemáticos implicados en la actividad matemática: tipos de representaciones usadas, procesos de generalización implicados y cálculo analítico. Estos criterios se describen a continuación:

- *Nivel 0.* Se opera con objetos intensivos de primer grado de generalidad (número naturales), usando lenguajes natural, numérico, icónico, gestual.
- *Nivel 1.* Se usan objetos intensivos de segundo grado de generalidad (clases de números naturales, números racionales), propiedades de la estructura algebraica de los números naturales y la igualdad como equivalencia.
- *Nivel 2.* Se usan representaciones simbólico-literales para referir a los objetos intensivos reconocidos que permanecen ligados a la información espacio-contextual; se resuelven ecuaciones de la forma $Ax + B = C$. En tareas funcionales se reconoce la generalidad, pero no se opera con las variables para obtener formas canónicas de expresión.
- *Nivel 3.* Los símbolos se usan de manera analítica, sin referir a la información contextual. Se realizan operaciones con indeterminadas o variables; se resuelven ecuaciones de la forma $Ax + B = Cx + D$.
- *Nivel 4.* Primer encuentro con parámetros como registro numérico y coeficientes variables que implica discriminación del dominio y rango de la función paramétrica, esto es, la función que asigna a cada valor del parámetro una función o ecuación específica.
- *Nivel 5.* Intervienen familias de ecuaciones y de funciones. Se realizan cálculos o tratamientos conjuntos con parámetros y variables.
- *Nivel 6.* Introducción de algunas estructuras algebraicas y estudio del álgebra de funciones.

Esta manera de concebir el razonamiento algebraico elemental logra, por un lado, distinguir la actividad aritmética (nivel 0) de la algebraica (nivel 3 y superiores) distinguiendo niveles de razonamiento proto-algebraico (niveles 1 y 2) en los que los estudiantes pueden “pensar algebraicamente”, es decir, generalizar o tratar cantidades indeterminadas de manera analítica sin que esto implique un tratamiento en lenguaje alfanumérico. Por otro, permite dar continuidad y articular el álgebra con el resto de los contenidos matemáticos: aritmética, geometría, medida y estocástica. En efecto, siempre que se reconozca la presencia de objetos intensivos en una práctica matemática, en alguno de sus niveles de generalidad o intensidad, es posible atribuirles un cierto grado de algebrización, tanto si el intensivo (la generalidad) se expresa de manera simbólica como si no.

2.2. Modelo de conocimiento del profesor de matemáticas

En esta investigación adoptamos el modelo de Conocimientos y Competencias Didáctico-Matemáticas del (CCDM) profesor (Godino et al., 2017) desarrollado dentro del EOS (Godino, 2024). En este modelo, el conocimiento del profesor en la dimensión matemática le permite resolver las tareas matemáticas propias del nivel educativo en el que enseñará (conocimiento matemático común) y vincular el contenido matemático de dicho nivel con aquellos que se estudiarán en niveles superiores (conocimiento matemático ampliado). La dimensión didáctica del modelo CCDM propone seis subcategorías del conocimiento del profesor: epistémica (significados del contenido institucional), ecológica (alineación de tareas según el currículo

institucional), cognitiva (conocimiento especializado sobre las formas de razonar de los estudiantes, los conflictos y errores que emergen al resolver problemas específicos), afectiva (creencias, afectos y disposiciones hacia las matemáticas manifestadas por los estudiantes), interaccional (identificación y respuesta a los conflictos e interacciones de los estudiantes), y mediacional (elección de los recursos más adecuados para la enseñanza).

La competencia del profesor se entiende como la capacidad para abordar los problemas didácticos inherentes a los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, en particular, para proporcionar respuestas adecuadas a situaciones reales en el aula, como crear situaciones que promuevan un aprendizaje significativo, evaluar las respuestas de los estudiantes y tomar decisiones consecuentes. De manera específica, ante una tarea matemática determinada, el profesor debe ser capaz de resolver la tarea, utilizando distintas estrategias y diversas justificaciones, y reconocer la diversidad de significados que se ponen en juego (faceta epistémica) y las potenciales dificultades que sus estudiantes podrían encontrar (faceta cognitiva). También debe ser competente para modificar la tarea con la intención de involucrar determinados elementos matemáticos, atender a ciertas expectativas de aprendizaje o generar ciertas interacciones (facetas mediacional e interaccional).

El objetivo de este trabajo de investigación es explorar las competencias de análisis epistémico y cognitivo de profesores de matemáticas en formación para reconocer el carácter algebraico en las prácticas institucionales o personales desarrolladas para resolver problemas, centrando la atención en el contexto probabilístico. La *competencia de análisis epistémico* supone la capacidad del profesor para identificar los objetos y procesos implicados en las prácticas matemáticas necesarias para la resolución de las situaciones-problemas, en particular del nivel de RAE (esto es, el grado de generalidad y formalización implicado), con la intención de anticipar conflictos potenciales de aprendizaje.

La *competencia de análisis cognitivo* implica: a) descomponer las resoluciones de los estudiantes identificando la intencionalidad de las prácticas elementales, b) reconocer los objetos matemáticos que intervienen en esas prácticas y su grado de generalidad, c) interpretar y valorar las estrategias de solución de los estudiantes a un problema en base a los elementos matemáticos reconocidos. Esta competencia de análisis cognitivo se relaciona con la “mirada profesional del pensamiento matemático de los estudiantes” (Fernández et al., 2023) que supone discernir los elementos relevantes en las estrategias empleadas por los estudiantes al resolver los problemas de matemáticas, de los que no lo son y desarrollar un discurso profesional para expresar con sentido lo que ha identificado como relevante desde el punto de vista matemático.

El análisis de respuestas dadas por alumnos a las mismas tareas que previamente han resuelto los profesores les ofrece la posibilidad de reflexionar sobre la presencia de objetos algebraicos en las producciones de alumnos y confrontar las soluciones esperadas (las desarrolladas por ellos mismos como expertos, análisis epistémico) con las soluciones que los propios alumnos pueden llevar a cabo (análisis cognitivo). Este análisis debe servir para adaptar y mejorar el diseño de las tareas a las necesidades de los estudiantes.

3. METODOLOGÍA

La investigación adopta un enfoque descriptivo-cualitativo y de tipo exploratorio, pues la muestra utilizada es no aleatoria (selección intencionada atendiendo a la disponibilidad de los/las docentes en formación) y moderada en tamaño (McMillan y Schumacher, 2005). Atendiendo al problema de investigación, la metodología seguida es la ingeniería didáctica, entendida en el sentido

generalizado propuesto desde el EOS (Godino, 2024) que persigue que el diseño instruccional y la investigación sean interdependientes. Se distinguen cuatro fases en la investigación.

- *Estudio preliminar.* Supone la adaptación del contenido matemático y didáctico-matemático para su enseñanza y aprendizaje en el contexto de la formación de profesores. Incluye la revisión de los conocimientos didáctico-matemáticos sobre el propio contenido (razonamiento algebraico y proporcional, y su conexión con el probabilístico), y de las necesidades y carencias de docentes en formación al respecto.
- *Diseño del experimento.* Supone la selección de tareas, secuenciación y análisis *a priori* de las mismas atendiendo a los comportamientos esperados de los docentes en formación.
- *Implementación.* Observación de las interacciones entre personas y recursos y evaluación de los aprendizajes logrados.
- *Evaluación o análisis retrospectivo,* derivado del contraste entre lo previsto en el diseño y lo observado en la implementación con los docentes en formación.

3.1. Contexto

Participaron en la investigación 15 futuros profesores de matemáticas (indicados a continuación como FPM1, FPM2,... FPM15) que cursaban el Máster en Profesorado de Enseñanza Secundaria Obligatoria y Bachillerato con especialidad de Matemáticas en una universidad española. Respecto a la formación académica, dos de ellas eran graduadas en matemáticas; siete, en ingeniería; tres, en arquitectura; una, en farmacia, y uno, en economía. Al comienzo de la intervención, los FPM recibieron formación didáctico-matemática sobre aspectos epistémicos (conceptos, propiedades y procedimientos en proporcionalidad, algebra y probabilidad), cognitivos (aprendizaje de la probabilidad, análisis de errores y dificultades) e instruccionales (diseño y secuenciación de tareas, materiales y recursos para la enseñanza de la probabilidad). En este trabajo, analizamos la actividad realizada por estos FPM a lo largo de tres sesiones centradas en el análisis epistémico y cognitivo del razonamiento proporcional y algebraico en el contexto probabilístico, y que formaba parte de la calificación final de la asignatura. Todos los FPM dieron su consentimiento informado por escrito para participar en la investigación de manera voluntaria.

3.2. Diseño e implementación

La experiencia formativa se desarrolló a lo largo de tres sesiones de dos horas y media de duración cada una. A continuación, se describe cada una de las sesiones.

Sesión 1. *Introducción al razonamiento algebraico y su conexión con el razonamiento proporcional.* De manera previa a la sesión presencial, con la intención de identificar sus concepciones previas sobre el razonamiento algebraico y proporcional, los FPM respondieron a través de la plataforma Moodle institucional de la universidad a las cuestiones:

- a) *¿Qué consideras que es el razonamiento algebraico y en qué actividades crees que aparece involucrado?*
- b) *¿En qué crees que consiste el razonamiento proporcional y en qué situaciones-problema puede ser necesario?*

También, como trabajo previo, se solicitó a los FPM que leyeran los trabajos de Burgos y Godino (2020) y Burgos, Batanero et al. (2022), y durante la sesión, se discutió sobre las aportaciones de estos documentos respecto al razonamiento algebraico y proporcional y su presencia en el contexto probabilístico, resolviendo las dudas surgidas en el proceso de lectura/estudio.

Sesión 2. Razonamiento algebraico y proporcional. Análisis epistémico. Esta sesión tuvo como objetivo desarrollar la capacidad de los FPM para resolver problemas involucrando diferentes niveles de RAE y analizar qué objetos propios de los razonamientos algebraicos y proporcional están presentes en sus propias resoluciones. Para ello se plantearon a los participantes los dos problemas incluidos en la Figura 1, y se les solicitó dar respuesta a las siguientes tareas:

- Resuelve los problemas utilizando en cada resolución un nivel de algebrización distinto.*
- Indica de manera justificada (en base a los objetos y procesos algebraicos) el nivel de algebrización implicado en cada resolución.*
- Indica en qué resoluciones interviene el razonamiento proporcional y en qué forma.*

Figura 1.

Problemas de juego equitativo y comparación de razones unitarias propuestos en la Sesión 2.

Problema 1. Laura y Daniel juegan a lanzar a la vez dos dados de 6 caras numeradas del 1 al 6 y a sumar sus resultados. Cada vez que gane Laura recibirá un paquete de chicles de su sabor preferido, ¡fresa! Y cada vez que gane Daniel recibirá un paquete de chicles de menta (¡odia la fresa!). En el paquete de chicles de fresa vienen 5 chicles y en el paquete de chicles de menta vienen 7, así que los niños dudan del juego... De todos los resultados posibles en el lanzamiento de los dados, ¿cuándo debería ganar Laura y cuándo debería ganar Daniel para que el juego fuera equitativo? Explica tu respuesta.

Problema 2. Una caja con 16 bombones cuesta 4,8€ y la caja con 12 bombones cuesta 4,2€. ¿Qué caja de bombones es más rentable?

El problema 1 planteado implica una situación proporcionalidad inversa en el contexto de la equitatividad de juegos de azar, con ganancias distintas para cada jugador. Es un problema distinto a los habituales en juego equitativo, en el que la equitatividad no se logra con la asignación del premio, sino con la determinación de los casos favorables a cada jugador para que el juego sea justo. El problema 2 implica la comparación de razones unitarias en un contexto aritmético. Este segundo problema se introduce en la sesión con el objetivo de valorar la capacidad de los FPM para resolver problemas con distintos niveles de RAE y analizar la actividad algebraica en cada caso.

Sesión 3. Del análisis cognitivo al instruccional. El objetivo de esta sesión consistía en que los FPM interpretaran, analizaran y valoraran las respuestas de estudiantes de educación secundaria a un problema dado, para posteriormente tomar decisiones sobre cómo ayudarles a superar las dificultades manifestadas. Así, se les planteó, en primer lugar, que resolvieran el problema incluido en la Figura 2.

Figura 2.

Problema sobre creación de espacio muestral propuesto en la Sesión 3.

Problema. Disponemos de dos cajas, la caja A y la caja B, que contienen ambas bolas blancas y bolas negras. En la caja A por cada bola blanca hay tres bolas negras. En la caja B hay 20 bolas (entre negras y blancas). ¿Cuántas bolas hay de cada color en la caja B si es igual de probable sacar una bola blanca que en la caja A? Explica tu respuesta.

En esta tarea, empleada también en el contexto de formación de docentes de primaria en Burgos et al. (2025) y López-Martín et al. (2025), se debía determinar la composición de una urna (con número de casos posibles conocido) para que la probabilidad de éxito fuera la misma que en otra donde no se conocía la composición, pero sí la razón entre casos favorables y desfavorables.

Esta situación conecta dos componentes esenciales del razonamiento probabilístico: la identificación de la naturaleza proporcional del cálculo de probabilidades y la comprensión del espacio muestral.

A continuación, se facilitaron las respuestas dadas por varios estudiantes de educación secundaria al problema (Figura 3) y se formularon las siguientes preguntas a los FPM:

- ¿Crees que son correctas las respuestas (procedimiento y argumento) dadas por los alumnos? Justifica tu valoración identificando en las resoluciones que consideras incorrectas las posibles estrategias o intuiciones que han llevado al estudiante a dar una respuesta errónea.
- ¿En qué respuestas crees que aparece involucrado el razonamiento proporcional?
- ¿En cuáles consideras que es mayor el nivel de algebrización de la actividad desarrollada?
- ¿Qué estrategias metodológicas emplearías con cada estudiante para ayudarle a comprender y corregir su error?
- ¿Cómo modificarías el enunciado para obtener un nuevo problema con el que el estudiante pudiera superar la dificultad encontrada?

Figura 3.

Respuestas de estudiantes al problema de la Sesión 3.

Respuesta de Alba

5)

Bolas blancas	1	2	3	4	5
Bolas negras	3	6	9	12	15
Total	4	8	12	16	20

Por cada 1 blanca hay 3 bolas negras.
 $P(\text{sacar una bola blanca en la caja B}) = \frac{5}{20} = \frac{1}{4}$
 $P(\text{sacar una bola blanca en la caja A}) = \frac{1}{4}$

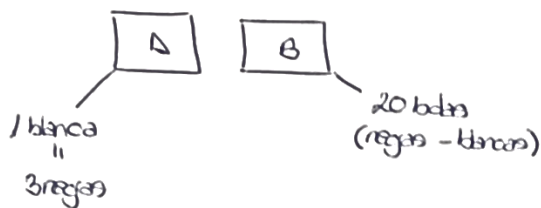
En la caja B hay 20 bolas, 5 blancas y 15 negras, ya que si hay la misma probabilidad en la caja A que en la B de sacar una bola blanca, debe mantenerse la proporción de que por cada bola blanca hay 3 negras, sino la probabilidades serían distintas al ocurrir sucesos distintos en el experimento aleatorio. Conociendo que por una blanca hay 3 negras, he realizado una tabla de proporcionalidad hasta obtener las 20 bolas.

Respuesta de Carlos

En la caja A hay una probabilidad de sacar una bola blanca de $\frac{1}{4}$, ya que hay una blanca por cada 3 negras (1+3=4). Si en la caja B hay 20 bolas entre blancas y negras, y hay la misma probabilidad que en la caja A de sacar una bola blanca, en la caja B habría 6 blancas y 14 negras.

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{20} = \frac{5+1}{20} = \frac{6}{20}$$

Respuesta de Darío



Caja A — $P(\text{Blanca}) = \frac{1}{3} = 0,3$

Caja B — $P(\text{Blanca}) = \frac{x}{20}$

$0,3 = \frac{x}{20}$

$0,3 \times 20 = x$

$x = 6$

$P(B) = \frac{6}{20} = 0,3$

x = casos posibles

$$\begin{array}{r} \times \quad 20 \\ \quad 0,3 \\ \hline \quad 60 \\ + \quad 00 \\ \hline \quad 06,0 \end{array}$$

20 bolas
- 6 casos posibles (blancas)
14 bolas negras.

* La posibilidad de sacar bola blanca en la caja A es de 0,3 ; y en la caja B es exactamente la misma. Por tanto hacemos la probabilidad de sacar bola blanca ; que es los casos favorables 'x' (desconocemos) entre los casos posibles que son 20 (porque hay ese número de bolas). Al despejar la ecuación nos damos cuenta de que hay 6 casos favorables de sacar blanco. Por tanto al restar 6 a 20 bolas ; nos dan 14 negras.

6 bolas blancas
14 bolas negras } Caja B

La respuesta de Alba es correcta y el nivel de RAE es 1. Intervienen proporciones y la relación queda sistematizada a través de la tabla de proporcionalidad, que permite a Alba establecer composiciones de cajas equivalentes a la caja A, hasta determinar aquella que respeta la condición del número de bolas totales de la caja B. El razonamiento proporcional aparece a través del reconocimiento de la razón y la relación entre probabilidad y proporción entre bolas blancas y negras.

La respuesta de Carlos es incorrecta y su nivel de RAE es 1 visto que intervienen números racionales (fracciones y suma de fracciones). Carlos identifica la probabilidad de sacar una bola blanca en A como 1/4. Reconoce también que 20 son los casos posibles en la caja B pero su error consiste en operar con las fracciones 1/4 y 1/20 (sin justificar qué interpreta por la fracción 1/20 ni por qué las suma), para determinar el número de casos favorables. De hecho, en el resultado considera que el numerador debe ser el número de bolas blancas en B si el total es 20 (denominador). El razonamiento proporcional se observa a través de la transformación de la razón

entre casos favorables y casos desfavorables en la fracción de casos favorables sobre casos posibles que da la probabilidad.

La respuesta de Darío es incorrecta y su nivel de RAE es 2 porque plantea y resuelve una ecuación del tipo $Ax = B$. Su error consiste en considerar la razón de una bola blanca por cada 3 bolas negras como la probabilidad de sacar una bola blanca en A, cuando se trata de la razón entre casos favorables y desfavorables (en lugar de posibles), por lo que hay confusión entre casos posibles y casos desfavorables en la caja A. El razonamiento proporcional aparece en el planteamiento de la ecuación proporcional que deriva de la naturaleza proporcional del cálculo de probabilidades.

3.3 Análisis de datos

Se llevó a cabo un análisis de contenido (Cohen et al., 2018) de las producciones escritas de los participantes.

En el análisis de las concepciones previas respecto al razonamiento proporcional y algebraico, se consideraron los objetos y procesos matemáticos con los que vinculan la presencia de tales razonamientos, así como los tipos de situaciones-problemas en los que consideraron que aparecen.

En el análisis de las respuestas escritas de los FPM a las tareas propuestas en la sesión 2 (análisis epistémico), se consideraron los siguientes aspectos:

- Grado de corrección de las resoluciones propuestas.
- Tipo de estrategias empleadas y nivel de RAE implicado en las mismas. La asignación de nivel se realizó atendiendo a las características que los definen en el modelo de Godino et al. (2015).
- Grado de corrección del nivel de RAE asignado por los participantes a sus propias prácticas matemáticas. Se analizó la justificación de los participantes para asignar el nivel de razonamiento algebraico y a qué objetos y procesos algebraicos hicieron referencia, así como su pertinencia con relación al análisis experto previo.
- Elementos del razonamiento proporcional identificado en sus prácticas.

En el análisis de la valoración de los FPM de las soluciones de estudiantes propuestas en la sesión 3 (análisis cognitivo), se consideraron los siguientes aspectos:

- Grado de corrección de valoración de la respuesta del estudiante y su justificación.
- Identificación de la presencia de razonamiento proporcional y objetos matemáticos relacionados con este.
- Identificación del nivel de RAE, atendiendo a las características que los definen en el modelo de Godino et al. (2015) y de objetos matemáticos relacionados con el razonamiento algebraico.

En el análisis de las respuestas incorrectas (Carlos y Darío), también se tuvieron en cuenta:

- Identificación de los errores.
- Estrategias para gestionar la superación del error.
- Elementos de variación del enunciado.

Excepto en el caso de los niveles de RAE y los objetos y procesos algebraicos, determinados *a priori* por el marco teórico, las demás categorías son emergentes y no excluyentes, es decir, surgen del análisis cíclico de los datos y es posible encontrar diferentes categorías para cada aspecto en la misma respuesta de un FPM (porque identificara varios errores, propusiera más de una forma de atender al error o variara de diferente modo el enunciado del problema de partida).

4. RESULTADOS

A continuación, se presentan los resultados obtenidos del análisis de las respuestas de los FPM.

4.1. Sesión 1. Concepciones previas

Cuatro FPM asociaron explícitamente el razonamiento algebraico con el empleo de un determinado lenguaje simbólico. Entre los conceptos matemáticos identificados por los FPM con relación al razonamiento algebraicos se encuentran: variable o incógnita (dos), expresiones algebraicas o polinomios (tres), (in)ecuaciones (siete), sistemas (uno), funciones (dos). Por ejemplo:

“El razonamiento algebraico consiste sustancialmente en transmitir argumentos matemáticos a través de un lenguaje especial, de forma rigurosa, mediante variables algebraicas y operaciones definidas entre ellas. Para ello, se utiliza una “sintaxis” particular, caracterizada por una tendencia lógica y abstracta. En esta sintaxis se emplean variables algebraicas (letras o símbolos) que determinan el objeto matemático. La combinación de estas, a través de operaciones determinadas con antelación, conforman las llamadas expresiones algebraicas.” FPM1.

“El razonamiento algebraico consiste en identificar en qué situaciones emplear álgebra. Como son las funciones y representación gráfica de las mismas, ecuaciones, inecuaciones” FPM6.

Otros FPM asociaron el razonamiento algebraico a estructuras superiores como la teoría de conjuntos (dos) y los subespacios vectoriales (uno). Además, dos FPM no aportaron ideas concretas sobre el razonamiento algebraico.

Con respecto a la identificación de situaciones-problema donde se involucre el razonamiento algebraico, solo respondieron cinco de los FPM, indicándose en dos casos la modelización de situaciones reales/cotidianas; en un caso, problemas de geometría; en otro caso, solo problemas de economía, y en un último caso, diferentes situaciones (economía, informática, ingeniería, estadística).

Por otro lado, los FPM reconocieron el razonamiento proporcional asociado a conceptos tales como razón, proporción o proporcionalidad (cinco), y relaciones entre cantidades (cinco); y procedimientos tales como el empleo de la regla de tres (dos). Ejemplificativo resulta la respuesta de FPM14, quien señaló que “el razonamiento proporcional implica la comprensión y aplicación de las proporciones y las relaciones proporcionales entre cantidades”. Cabe destacar la presencia, en la categoría de relaciones entre cantidades, de una sola respuesta en la que se mencionó explícitamente la naturaleza lineal de la relación (“dependencia lineal de un parámetro respecto a otro”, FPM13) y solo dos respuestas en las que se contempla explícitamente la relación inversa de proporcionalidad.

Ocho de los FPM aportaron información respecto a las situaciones problemas donde aparece razonamiento proporcional, indicando: geometría, escalas, semejanzas (seis); economía, finanza, intereses (tres); porcentajes (dos); estadística y probabilidad (uno); y cocina (uno).

4.2. Sesión 2. Resolución y análisis epistémico en tareas que implican razonamiento proporcional

En la sesión 2, 12 FPM resolvieron correctamente el problema 1 (incluido en la Figura 1). Con relación a las resoluciones incorrectas, en una de ellas se asignó a todos los jugadores la misma probabilidad de ganar, mientras que, en las otras, si bien se identificó la razón que debían cumplir

las probabilidades de los jugadores, no se llegó a indicar los resultados de las tiradas de dados asignados a cada jugador, tratándose por tanto de resoluciones incompletas.

Para resolver el problema 1, seis FPM plantearon un sistema de ecuaciones con dos incógnitas (véase un ejemplo en la Figura 4) y tres FPM plantearon una ecuación con una incógnita del tipo $5x = 7(1 - x)$, como FPM2, siendo x la probabilidad de ganar de Laura. Como consecuencia, un total de 9 resoluciones presentaron un nivel 3 de RAE. Este nivel fue identificado correctamente por cinco de los FPM, mientras que tres le asignaron un nivel 2 y una no contestó. Entre los objetos matemáticos mencionados que justificaron el nivel de RAE indicado, se indicaron ecuaciones, sistemas de ecuaciones e incógnitas/variables. Por ejemplo, FPM8 indica “en el problema 1, se ha utilizado un sistema de 2 ecuaciones y con 2 incógnitas, con un nivel algebraico”.

Figura 4.

Resolución de FPM1 al problema 1 sesión 2. Nivel 3 de RAE.

Llamo "a" al número de casos favorables de ganancia de Laura y "b" al de Daniel.
Para que sea un juego equitativo debe cumplirse lo siguiente:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{a}{36} \cdot 7 = \frac{b}{36} \cdot 5 \\ a + b = 36 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} a = 15 \\ b = 21 \end{array}$$

Por lo tanto, de las 36 posibles cases, Laura debería ganar en 15 de ellas y Daniel en 21 de ellas para que el juego fuera equitativo.

Los otros seis estudiantes utilizaron relaciones y propiedades de las fracciones (números racionales, intensivos de grado 2) para determinar la probabilidad de ganar de cada jugador (un ejemplo se muestra en la Figura 5) o plantearon una ecuación de proporcionalidad del tipo $\frac{5}{12} = \frac{x}{36}$, como FPM14, resolviendo el problema con un nivel 2 de RAE. Este nivel fue reconocido correctamente por cuatro de los FPM, mientras que dos no contestaron. En las justificaciones del nivel de RAE, solo un FPM indicó el planteamiento y resolución de una ecuación “en la que la incógnita está despejada en un miembro de la ecuación” (FPM13), mientras que en otros tres casos indicaron objetos relacionados con la proporcionalidad -proporción, razón-, las fracciones y la probabilidad, como FPM6 que indica “ha sido necesario el razonamiento proporcional, regla de Laplace, propiedades de fracciones”.

Figura 5.

Resolución de FPM7 al problema 1 sesión 2. Nivel 2 de RAE.

Para que sea equitativo el número de chicles que ganen cada uno:

- Lana tendría que ganar 7 veces (35 chicles)
- Daniel tendría que ganar 5 veces (35 chicles).

Esto sería lo correcto si inventar cosas favorables fueran 12, pero como tenemos 36 cosas favorables la relación sería:

- Lana tendría que ganar 21 veces $\rightarrow \frac{21}{36}$
- Daniel tendría que ganar 15 veces $\rightarrow \frac{15}{36}$

Por otro lado, todos los FPM resolvieron correctamente el problema 2. La estrategia usada de manera mayoritaria en la resolución fue la de reducción a la unidad y en algunos casos la regla de tres (estableciendo ecuaciones proporcionales o haciendo uso de equivalencia de fracciones) (Figura 6), tratándose de resoluciones de nivel 1 y 2 de RAE, respectivamente. Como excepción, FPM13 encontró el mínimo común múltiplo entre el número de bombones de las cajas para comparar sus precios.

El nivel de RAE de las cuatro resoluciones de nivel 2 fue indicado genéricamente como proto-algebraico (sin especificar nivel 1 o 2) por tres FPM, mientras uno lo identificó incorrectamente como aritmético. El nivel proto-algebraico se asoció con objetos matemáticos relacionados con la proporcionalidad o procedimientos de reducción a la unidad y empleo de la regla de tres (“he hecho reducción a la unidad, pero usado para ello la regla de tres”, FPM3), si bien hay quienes lo justificaron con “no usar símbolos”, como FPM10.

El nivel de RAE de las once resoluciones de nivel 1 fue identificado correctamente por ocho FPM que apoyaron sus justificaciones con la presencia de “propiedades y cálculos con fracciones y la igualdad como equivalencia” tal como señaló FPM1, mientras dos lo reconocieron incorrectamente como aritmético basando su justificación en “se han empleado solo operaciones aritméticas”, como indicó FPM6. Finalmente, tres FPM no respondieron al nivel de RAE de sus resoluciones.

Figura 6.

Resolución de FPM1 al problema 2 sesión 2. Nivel 2 de RAE.

Problema 2

16 bombones — 4,8€	$x = \frac{1 \text{ bombón} \cdot 4,8€}{16 \text{ bombones}} = \frac{2,4}{8} = \frac{1,2}{4} = 0,3€/\text{bombón}$
1 bombón — x	
12 bombones — 4,2€	$x = \frac{1 \text{ bombón} \cdot 4,2€}{12 \text{ bombones}} = \frac{2,1}{6} = 0,35€/\text{bombón}$
1 bombón — x	

Cabe destacar que, de los 12 FPM que resolvieron correctamente ambos problemas, 11 de ellos utilizaron en las dos resoluciones niveles diferentes de RAE, como se demandó en la tarea, resultando siempre la resolución del problema 1 aquella con el nivel mayor de algebrización. Solo FPM7 desarrolló resoluciones con el mismo nivel de RAE (nivel 2) en ambos problemas.

Con relación al análisis de los objetos propios de la proporcionalidad, en el problema 1, nueve FPM identificaron correctamente la presencia de razonamiento proporcional en sus propias resoluciones, uno indicó incorrectamente que no había, y cinco no contestaron. En las justificaciones de ocho que lo reconocieron se encontraron referencias a (esta vez de manera excluyente): esperanza (tres), razón (uno), equidad (uno), relación entre premios y probabilidades (dos), cálculo de la probabilidad (uno). Por ejemplo, FPM3 indicó: “Sí, hay razonamiento proporcional en el planteamiento de la ecuación con la que hay que comparar los caramelos por la probabilidad de ambos para mantener la proporcionalidad”.

Por último, en el problema 2, los 12 FPM que contestaron, señalaron correctamente la presencia de razonamiento proporcional en sus propias resoluciones. Los 12 justificaron esta presencia indicando conceptos de razón y proporción, mientras que siete de ellos identificaron explícitamente la razón (a veces erróneamente indicada como proporción) entre precio de una caja de bombones y número de bombones. Por ejemplo, FPM9 indica “aparece razonamiento proporcional: se calcula proporción en función del precio por bombón”.

4.3. Sesión 3. Análisis cognitivo en la creación de urnas equivalentes

Todos los FPM resolvieron correctamente la tarea propuesta en la sesión 3 (Figura 2). Entre las resoluciones, dos FPM utilizaron estrategias aritméticas (nivel 0 de RAE), nueve emplearon fracciones (intensivos de grado 2, nivel 1 de RAE), tres plantean y resolvieron la ecuación proporcional (nivel 2 de RAE), y uno formuló la relación funcional entre bolas blancas y negras (nivel 3 de RAE).

A continuación, se muestran los resultados del análisis de las valoraciones realizadas por los FPM de las tres respuestas de estudiantes de educación secundaria proporcionadas (Figura 3).

4.3.1 Respuesta de Alba

Todos los FPM apreciaron que el resultado y la resolución de Alba eran correctos, así como que incorporaba elementos propios del razonamiento proporcional. Entre estos elementos, se mencionaron de manera no excluyente: la construcción de la tabla de proporcionalidad (siete casos), una referencia más o menos explícita a la identificación de la razón –aclarando que, por cada blanca, tres negras o $1/3$ – (cuatro casos), y el empleo de fracciones equivalentes (dos casos). Por ejemplo, FPM13 indicó que Alba “usa las proporciones ya que genera una tabla con fracciones equivalentes hasta llegar a un total de 20 bolas”. Cabe destacar que tres FPM no argumentaron la presencia del razonamiento proporcional.

Respecto al reconocimiento del nivel de RAE de la respuesta de Alba, tres FPM indicaron incorrectamente un nivel 0 o aritmético y no describieron objetos algebraicos involucrados. La mayoría de los FPM indicó un nivel proto-algebraico (11 en total, de los cuales dos especificaron un nivel 2, cinco señalaron correctamente un nivel 1, y los restantes cuatro dejaron indicado proto-algebraico sin especificar nivel). Solo un FPM no contestó sobre el nivel de RAE. Los objetos matemáticos relacionados con el razonamiento algebraico indicados por los nueve FPM que respondieron fueron: la tabla de proporcionalidad (un caso), la referencia a proporciones o razones

(cuatro casos), el concepto de fracción (dos casos), las propiedades de las operaciones y la igualdad como equivalencia (tres casos). Un ejemplo de esto último fue la justificación de FPM11: “Nivel 1: propiedades e las operaciones y concepto de equivalencia”.

4.3.2 Respuesta de Carlos

Aunque todos los FPM reconocieron que la respuesta de Carlos era incorrecta, tuvieron dificultades para interpretar o explicar la naturaleza del error. Solo cinco FPM mencionaron que la probabilidad de bolas blancas en la caja A había sido identificada correctamente. Varios notaron que el error se situaba en la suma, tres de ellos indicando explícitamente que se trataba de un error relacionado con la aplicación incorrecta de la proporcionalidad en sentido aditivo (FPM7 “creo que realiza la suma para que tengan la misma probabilidad sumándolos”; FPM8 “ha cometido el error de confundir la misma probabilidad con la suma $\frac{1}{4} + \frac{1}{20}$ ”), y tres señalando simplemente que allí no se debía sumar. Seis FPM no indicaron el error o hicieron referencia a generalidades del tipo que el procedimiento es incorrecto sin proporcionar más detalles.

Con relación a las propuestas para gestionar el error de Carlos, los participantes sólo lograron proponer estrategias muy genéricas. Tres FPM hicieron referencia al empleo de material manipulativo para simular la situación; cinco mencionaron una genérica explicación de conceptos de probabilidad o proporcionalidad sin más detalles; dos mencionaron que le explicarían el error, y dos propusieron mostrar la resolución correcta. Las propuestas de modificación de enunciado incluyeron: modificar la expresión “igual de probable” por “la misma probabilidad” (en dos casos); preguntar solo por las bolas negras (dos casos); modificar la proporción de bolas en A: una blanca por cada negra (un caso); o concretar el número de bolas en A (cuatro casos).

Respecto al nivel de RAE, ocho FPM indicaron incorrectamente que la respuesta de Carlos es aritmética o de nivel 0; tres indicaron correctamente un nivel de RAE proto-algebraico (dos de ellos especificando nivel 1) y cuatro no contestaron.

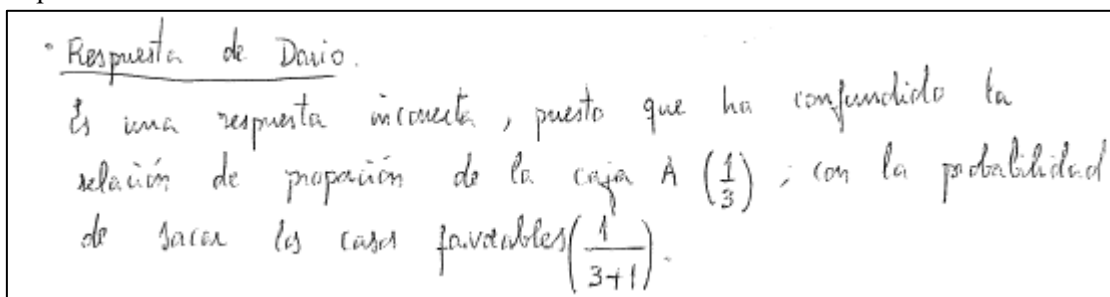
Finalmente, cuatro fueron los FPM detectaron la presencia de razonamiento proporcional en la respuesta de Carlos. Solo en dos de los casos hicieron referencia al cálculo de la probabilidad en A, siete indicaron que no se aplicó razonamiento proporcional o se aplicó mal y cuatro no contestaron.

4.3.3 Respuesta de Darío

Todos los FPM reconocieron que la respuesta de Darío era incorrecta y que el error se situaba en el cálculo de las probabilidades de sacar una bola blanca en la caja A. Mientras que seis FPM detallaron que el error dependía de haber empleado la razón/proporción entre bolas blancas y negras como la probabilidad (ver Figura 7, FPM8), tres de los cuales señalando que el error consistía en indicar que la probabilidad era 1/3 en lugar de 1/4, en cuatro de los casos notaron que el error estaba ligado a dificultades con el muestreo o con la identificación de casos posibles.

Figura 7

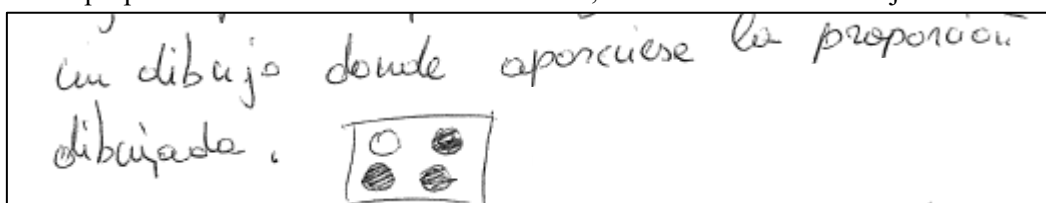
Explicación de FPM8 al error de Darío



Respecto a las estrategias a las que recurrieron los FPM para ayudar Darío a comprender su error, cinco FPM indicaron que le explicarían de nuevo conceptos relacionados con la probabilidad, mientras que otros cinco utilizarían algún recurso material o gráfico (ver ejemplo en Figura 8) para visualizar el total de bolas en la caja A (proponiendo que sean cuatro). Un FPM explicaría directamente el error a Darío y otro volvería a leer el enunciado con él. Finalmente, tres no propusieron estrategias para enfrentarse al error.

Figura 8

FPM5 propone concretar el número de bolas en A, en este caso con un dibujo.



De los 13 FPM que propusieron modificaciones al enunciado de la tarea, 11 hicieron referencia a concretar el número de bolas de la caja A, explicitando en la mayoría de los casos (nueve) que sean 4, y dos propusieron modificar la relación de bolas blancas y negras a 1/2.

Con relación al nivel de RAE de la respuesta de Darío, 11 FPM indicaron que esta presentaba un nivel proto-algebraico (cinco indicaron correctamente el nivel 2, dos señalaron un nivel 1 y cuatro no especificaron el nivel concreto), uno indicó nivel aritmético y uno un nivel algebraico. A pesar de detectar adecuadamente el nivel de RAE, solo cinco FPM justificaron su asignación haciendo referencia a objetos matemáticos como ecuaciones (dos), la presencia de una variable o incógnita (dos), y el empleo de una regla de tres (dos).

Respecto al empleo del razonamiento proporcional, la mayoría (diez) indicaron que sí hay, dos aclararon que no se aplicaba o se aplicaba incorrectamente, y tres de ellos no contestaron.

En la respuesta de Darío, una correcta identificación del error situado en la interpretación de la razón 1/3, así como dirigir la atención hacia los elementos propios razonamiento proporcional presentes en la resolución, produjo propuestas de gestión del error generalmente adecuadas, que insistían en la composición del espacio muestral en la caja A.

4.4. Síntesis

Atendiendo a los resultados presentados en los apartados previos, finalizamos esta sección respondiendo a las preguntas de investigación:

- *¿Qué aspectos característicos de los razonamientos algebraico y proporcional identifica el futuro profesorado de matemáticas en el análisis de sus propias resoluciones a problemas en un contexto probabilístico?*

Los futuros profesores identifican objetos propios del razonamiento algebraico como son las ecuaciones, sistemas de ecuaciones o variables, que aparecen cuando justifican el nivel de razonamiento algebraico de la solución. De igual manera, identifican objetos relacionados con la proporcionalidad, esencialmente los procedimientos de reducción a la unidad o la regla de tres, o las propiedades y operaciones con fracciones que vinculan a un nivel proto-algebraico. En el contexto probabilístico, se vincula a términos como la esperanza, razón o cálculo de la probabilidad.

- *¿Qué elementos propios del álgebra y la proporcionalidad identifica el futuro profesorado de matemáticas al analizar resoluciones de estudiantes de educación secundaria?*

En el análisis de las respuestas de estudiantes, consideran el concepto de fracción o proporción, así como la tabla de proporcionalidad como elemento característico del razonamiento proporcional en el caso de Alba, si bien no siempre le atribuyen un carácter proto-algebraico. En el caso de las respuestas de Carlos o Darío, se vincula al cálculo de probabilidades. En estos casos, muestran más dificultades para reconocer objetos algebraicos, aunque asignen adecuadamente el nivel de RAE.

- *¿Cómo identifica el futuro profesorado de matemáticas los errores presentes en las resoluciones de estudiantes de educación secundaria a un problema que articula proporcionalidad y probabilidad?*

Aunque reconocen que la respuesta de Carlos es incorrecta, no determinan claramente cuál es la naturaleza del error. En el caso de Darío, identifican el error en el cálculo de probabilidades, mencionando en algunos casos la dificultad para diferenciar casos posibles de favorables al establecer la razón.

- *¿Cómo gestiona los errores o qué modificaciones del problema original proponen para contribuir a la superación de dichos errores?*

Las estrategias que proponen para gestionar los errores, tanto en el caso de Carlos como en el de Darío son muy genéricas (volver a leer, explicar conceptos, utilizar material o representaciones icónicas). Sin embargo, se aprecia especialmente en el caso de Darío, que cuando se identifican las carencias en el razonamiento proporcional las estrategias que proponen son más adecuadas. Las propuestas de modificación al enunciado del problema para contribuir a superar los errores se centran en el uso del lenguaje, preguntar sólo por casos favorables, facilitar más información (cantidades absolutas y no razones) o simplificar las razones.

5. DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

La resolución flexible de las tareas matemáticas, el reconocimiento de las prácticas matemáticas que se ponen en juego, así como la identificación de los objetos y procesos algebraicos implicados en estas, son competencias esenciales cuando se trata de fomentar el razonamiento algebraico en los escolares (Burgos, 2023). El estudio simultáneo de las dificultades asociadas a las estrategias empleadas, según los niveles de generalidad o formalización, motiva la reflexión sobre la eficacia de determinados métodos de solución, centrando la atención en la relación entre la estrategia y la pertinencia de su uso en relación con el grado de sofisticación conceptos, propiedades, procedimientos y argumentos requeridos.

En este trabajo se ha presentado un estudio diseñado e implementado con la intención de explorar cómo un grupo de futuros profesores de matemáticas de educación secundaria: (i) resuelve problemas que implican el razonamiento proporcional en un contexto probabilístico, (ii) identifica la presencia de objetos propios del álgebra y la proporcionalidad en sus propias resoluciones, (iii) analiza el grado de corrección y el tipo de objetos algebraicos y proporcionales presentes en las resoluciones de estudiantes de educación secundaria, y (iv) propone modificaciones para contribuir a la superación de los errores encontrados. Este estudio nos permite detectar y profundizar en las posibles limitaciones que futuros docentes de secundaria puedan presentar en sus conocimientos matemáticos y competencias de análisis tanto en la faceta epistémica como en la cognitiva.

En lo que respecta a la dimensión epistémica, la mayoría de los futuros profesores resolvieron con éxito los dos problemas propuestos con resoluciones de distinto nivel de RAE, mostrando un conocimiento adecuado de la proporcionalidad. Este hecho concuerda con investigaciones previas con futuros profesores de secundaria (Burgos et al., 2018), y señala una importante diferencia con aquellas llevadas a cabo con futuros docentes de primaria, quienes encuentran mayores dificultades para resolver problemas de proporcionalidad en contextos tanto aritméticos (Buforn et al., 2017; Weiland et al., 2019) como probabilísticos (Ortiz et al., 2006; Vásquez y Alsina, 2015; Burgos, López-Martín et al., 2022). Entre las estrategias empleadas, predominaron aquellas de nivel algebraico en el contexto probabilístico, lo que contrasta con resultados previos en contexto aritmético (Burgos et al., 2018).

Más de la mitad de los FPM identificaron objetos propios del razonamiento algebraico en sus prácticas y le asignan correctamente su nivel de RAE, resultado similar al obtenido por Burgos y Godino (2022a) con futuros docentes de primaria al resolver tareas de proporcionalidad, y mejorando notablemente lo observado en Burgos y Godino (2018) con profesorado de secundaria en formación inicial en una investigación centrada en tareas de proporcionalidad inversa. Mayores limitaciones, sin embargo, se observaron en el análisis epistémico relacionado con la proporcionalidad. Si bien los FPM fueron capaces de detectar objetos propios del razonamiento algebraico, se trataron en su mayoría de conceptos, siendo pocos los procedimientos y nulas las proposiciones o argumentos identificados, hecho en línea con los resultados observados por Burgos et al. (2018).

Con relación al ámbito cognitivo, las competencias didáctico-matemáticas de los FPM resultaron más incipientes, dada la complejidad encontrada en el análisis de las respuestas de los estudiantes, especialmente en los casos de respuestas incorrectas. A pesar de que los futuros docentes valoraron adecuadamente el grado de corrección de las respuestas proporcionadas, su análisis de los objetos tanto de carácter proporcional como algebraico presentes fue más limitado que el llevado a cabo en sus propias resoluciones. En general, la identificación del nivel correcto de RAE resultó ser más compleja para los FPM al analizar las respuestas de los estudiantes en comparación con el análisis de sus propias resoluciones. No pareció haber una relación entre la identificación de niveles superiores de RAE y el reconocimiento de la presencia de razonamiento proporcional. Estas consideraciones también se reflejaron en las justificaciones de la presencia de objetos matemáticos relacionados con el razonamiento algebraico, que resultaron en general menos ricas cuando se analizaron las respuestas de los estudiantes, especialmente si estas eran incorrectas, en comparación con el análisis de sus propias resoluciones.

Por un lado, cuando las respuestas de los estudiantes resultaban incorrectas, la asignación del nivel de RAE no fue apropiada en más de la mitad de los casos, y aun siendo correcta, fueron pocos los que justificaron de forma apropiada la presencia de objetos algebraicos que motivaran

su asignación. Por otro lado, los FPM no justificaron adecuadamente o, directamente, no identificaron la presencia de razonamiento proporcional en las respuestas incorrectas de los estudiantes. Estas importantes limitaciones también se habían encontrado previamente en futuros docentes de educación primaria, tanto en el ámbito algebraico Burgos y Godino (2022b) como proporcional (Burgos, López-Martín et al., 2022).

Las dificultades de los FPM para interpretar las prácticas matemáticas (operacionales y discursivas) de los estudiantes al resolver la tarea, particularmente cuando no es explícita su relación con el carácter proporcional de la probabilidad, se reflejan posteriormente en la manera en que los participantes propusieron estrategias para gestionar los errores. Así, por ejemplo, las dificultades encontradas por los FPM para interpretar la respuesta incorrecta de Carlos implicaron propuestas de estrategias de gestión del error muy genéricas. Esto coincide con los resultados encontrados en trabajos previos con futuros docentes de primaria, a quienes se les propuso la tarea incluida en la Figura 3, con respuestas de estudiantes, para que interpretaran su conocimiento y errores (Burgos et al, 2025) y tomaran decisiones de acción para ayudarles a superar las limitaciones (López-Martín et al., 2025). Sin embargo, a diferencia de los resultados de estos estudios, cuando los FPM interpretaban correctamente el error del estudiante y lo relacionaba con la proporcionalidad, las estrategias de gestión del error resultaban más apropiadas y específicas para la dificultad particular del estudiante, incluyendo representaciones icónicas y propuestas de modificaciones del enunciado inicial del problema.

La competencia de análisis, tanto a nivel epistémico como cognitivo, es una capacidad clave del docente de matemáticas, pues implica la identificación de los contenidos matemáticos presentes en una práctica dada, la detección de errores y dificultades presentes en la misma y la modificación de tareas para atender los errores detectados (Godino et al., 2017). Este trabajo muestra la existencia de importantes deficiencias con relación a la adquisición y desarrollo de esta competencia por parte de futuros profesores de matemáticas, poniendo de manifiesto la necesidad de incluir en los procesos de instrucción, tanto a nivel inicial como en programas de formación continua, oportunidades para que los docentes analicen la actividad matemática presente en sus propias prácticas y, en especial, en las prácticas de sus estudiantes.

AGRADECIMIENTOS

Investigación realizada como parte del proyecto de investigación PID2022-139748NB-100 financiado por MCIN/AEI/10.13039/501100011033/ y por FEDER, UE.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Batanero, C., Álvarez-Arroyo, R. Hernández-Solís, L. A. y Gea, M. M. (2021). El inicio del razonamiento probabilístico en la educación infantil. *PNA*, 15(4), 267-288. <https://doi.org/10.30827/pna.v15i4.22349>
- Begolli, K.N., Dai, T., McGinn, K.M. y Booth, J.L. (2021). Could probability be out of proportion? Self-explanation and example-based practice help students with lower proportional reasoning skills learn probability. *Instructional Science*, 49, 441-473. <https://doi.org/10.1007/s11251-021-09550-9>

- Blanton, M., Brizuela, B. M., Murphy, A., Sawrey, K. y Newman-Owens, A. (2015). A learning trajectory in 6-year-olds' thinking about generalizing functional relationship. *Journal for Research in Mathematics Education*, 46(5), 511-559. <https://doi.org/10.5951/jresmetheduc.46.5.0511>
- Buform, À., Fernández, C. y Llinares, S. (2017). Conocimiento del razonamiento proporcional de los estudiantes para maestro y cómo reconocen características de la comprensión de los estudiantes. En J. M. Muñoz-Escolano, A. Arnal Bailera, P. Beltrán-Pellicer, M. L. Callejo y J. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXI* (pp. 167-176). SEIEM.
- Burgos, M. (2023). *Razonamiento algebraico elemental. Implicaciones en la formación de profesores*. Universidad de Almería.
- Burgos, M., Beltrán-Pellicer, P., Giacomone, B. y Godino, J. D. (2018). Conocimientos y competencias de futuros profesores de matemáticas en tareas de proporcionalidad. *Educação e Pesquisa*, 44, e182013. <https://doi.org/10.1590/S1678-4634201844182013>
- Burgos, M., Batanero, C. y Godino, J. D. (2022). Algebraization levels in the study of probability. *Mathematics*, 2022, 10, 91. <https://doi.org/10.3390/math10010091>
- Burgos, M. y Godino, J. (2018). Recognizing algebrization levels in an inverse proportionality task by prospective secondary school mathematics teachers. En L. Gómez Chova, A. López Martínez e I. Candel Torres (Eds.), *EDULEARN18 Proceedings* (pp. 2483-2491). IATED.
- Burgos, M. y Godino, J. D. (2020). Modelo ontosemiótico de referencia de la proporcionalidad. Implicaciones para la planificación curricular en primaria y secundaria. *AIEM - Avances de Investigación En Educación Matemática.*, 18, 1–20. <https://doi.org/https://doi.org/10.35763/aiem.v0i18.255>
- Burgos, M. y Godino J. D. (2022a). Assessing the Epistemic Analysis Competence of Prospective Primary School Teachers on Proportionality Tasks. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 20, 367–389. <https://doi.org/10.1007/s13138-021-00193-4>
- Burgos, M. y Godino, J. D. (2022b). Prospective Primary School Teachers' Competence for the Cognitive Analysis of Students' Solutions to Proportionality Tasks. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 43, 347–376. <https://doi.org/10.1007/s13138-021-00193-4>
- Burgos, M., López-Martín, M. M., Aguayo, C.G. y Albanese, V. (2022). Análisis cognitivo de tareas de comparación de probabilidades por futuros profesores de educación primaria. *Uniciencia*, 36, 1-24. <http://dx.doi.org/10.15359/ru.36-1.38>
- Burgos, M., López-Martín, M. M., Albanese, V. y Aguayo-Arriagada, C. G. (2023). Analysis of primary school students' answers to fair game tasks: An experience with preservice teachers. *BEIO, Boletín de Estadística e Investigación Operativa*, 39(3), 48–69. https://www.seio.es/wp-content/uploads/2023/12/2023_3_Historia.pdf
- Burgos, M., López-Martín, M. M., Tizón-Escamilla, N., Aguayo-Arriagada, C. G. (2025). Razonamiento proporcional y algebraico de estudiantes cuando resuelven una tarea probabilística. *PNA*, 19(2), 131-158. <https://doi.org/10.30827/pna.v19i2.29887>
- Burgos, M., Tizón-Escamilla, N. y Godino, J. D. (2024). Expanded model for elementary algebraic reasoning levels. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, 20(7), em2475. <https://doi.org/10.29333/ejmste/14753>
- Cohen, L., Manion, L., y Morrison, K. (2018). *Research methods in education (8th edition)*. Routledge. <https://doi.org/10.4324/9781315456539>
- Fernández, C; Ivars, P. y Llinares, S. (2023). El desarrollo de la competencia mirar

- profesionalmente el pensamiento matemático de los estudiantes durante los períodos de práctica. *Revista Interuniversitaria de Formación del Profesorado*, 98 (37.2), 127-146. <https://doi.org/10.47553/rifop.v98i37.2.99296>
- Ferreira, M. C. N., Ponte, J. P. y Ribeiro, A. J. (2022). Towards and approach to teachers' professional development: How to work with algebraic thinking in the early years. *PNA*, 16(2), 167-190. <https://doi.org/10.30827/pna.v16i2.22234>
- Godino, J. D. (2024). *Enfoque ontosemiótico en educación matemática. Fundamentos, herramientas y aplicaciones*. McGraw Hill–Aula Magna.
- Godino, J. D., Batanero, C., Font, V. y Giacomone, B. (2017). Enfoque Ontosemiótico de los Conocimientos y Competencias del Profesor de Matemáticas. *Bolema*, 31(57), 90-113. <https://doi.org/10.1590/1980-4415v31n57a05>
- Godino, J. D., Neto, T., Wilhelmi, M. R., Aké, L., Etchegaray, S. y Lasa, A. (2015). Niveles de algebrización de las prácticas matemáticas escolares. Articulación de las perspectivas ontosemiótica y antropológica. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, 8, 117-142. <https://doi.org/10.35763/aiem.v1i8.105>
- Kieran, C. (2022) The multi-dimensionality of early algebraic thinking: background, overarching dimensions, and new directions. *ZDM Mathematics Education*, 54, 1131-1150. <https://doi.org/10.1007/s11858-022-01435-6>
- Levin, M. y Walkoe, J. (2022). Seeds of algebraic thinking: a Knowledge in Pieces perspective on the development of algebraic thinking. *ZDM Mathematics Education*, 54, 1303–1314. <https://doi.org/10.1007/s11858-022-01374-2>
- López-Martín, M. M., Burgos, M. y Albanese, V. (2025) Preservice teachers interpreting and acting on students' responses to a probability problem. *Statistics Education Research Journal*, 24(2), 1-26. <https://doi.org/10.52041/serj.v24i2.819>
- McMillan, J.H. y Schumacher, S. (2005). *Investigación educativa*. Pearson Educación.
- Ortiz, J. J., Mohamed, N., Batanero, C., Serrano, L. y Rodríguez, J. D. (2006). Comparación de probabilidades en maestros en formación. En Bolea, M. P., Moreno, M. y González, M. J. (Eds.), *Investigación en educación matemática: actas del X Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (pp. 267-276). Instituto de Estudios Altoaragoneses.
- Vásquez, C. y Alsina, A. (2015). El conocimiento del profesorado para enseñar probabilidad: Un análisis global desde el modelo del Conocimiento Didáctico-Matemático. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, 7, 27-48. <https://doi.org/10.35763/aiem.v1i7.104>
- Weiland, T., Orrill, C., Brown, R. y Nagar, G. G. (2019). Mathematics teachers' ability to identify situations appropriate for proportional reasoning. *Research in Mathematics Education*, 21(3), 233–250. <https://doi.org/10.1080/14794802.2019.1579668>

Representación tabular y gráfica en quinto de primaria. Tareas con funciones para desarrollar el pensamiento algebraico

Antonio Moreno

Universidad de Granada, amverdejo@ugr.es

María D. Torres

Universidad de Granada, mtorresg@ugr.es

María C. Pérez-Martos

Universidad de Granada, mcperezmartos@ugr.es

Resumen: *Este trabajo es parte de una investigación más amplia derivada del proyecto PID2020-113601GB-I00: Pensamiento algebraico en educación infantil y educación primaria. Presentamos una experiencia didáctica llevada a cabo con estudiantes de quinto de primaria, enmarcada en una investigación sobre el desarrollo del pensamiento algebraico en edades tempranas. Diseñamos e implementamos una secuencia de tareas centradas en el uso de representaciones tabulares y gráficas para explorar y generalizar relaciones funcionales. Las actividades, basadas en contextos cercanos al alumnado, permitieron una progresión desde la identificación de patrones hasta la expresión simbólica de funciones. El análisis de las tareas pone de relieve la importancia de propuestas con alta demanda cognitiva y del papel activo del profesorado en la construcción del sentido algebraico.*

Palabras clave: *generalización, pensamiento algebraico, representación tabular y gráfica, tareas con funciones.*

Tabular and graphical representation in fifth grade. Tasks with functions to develop algebraic thinking.

Abstract: *This work is part of a broader research project PID2020-113601GB-I00: Algebraic thinking in early childhood and primary education. This article presents a teaching experience carried out with fifth-grade elementary school students, as part of research on the development of algebraic thinking at an early age. A sequence of tasks was designed and implemented, focusing on the use of tabular and graphical representations to explore and generalize functional relationships. The activities, based on contexts familiar to the students, allowed for progression from pattern identification to symbolic expression of functions. Analysis of the tasks highlights the importance of cognitively demanding proposals and the active role of teachers in constructing algebraic meaning.*

Key words: *algebraic thinking, generalization, tabular and graphical representation, tasks with functions.*

1. JUSTIFICACIÓN

El álgebra escolar puede entenderse como una forma de expresar la generalidad matemática de modo que sea posible manipularla y explorarla (Kaput, 2008; Mason, 1996). Supone ir más allá de casos particulares, para identificar regularidades, igualdades o cambios que nos permiten reconocer estructuras subyacentes.

La investigación ha mostrado que los cambios curriculares que enfatizan el razonamiento covariacional, pueden tener un impacto positivo en la comprensión del álgebra por parte del alumnado (Ellis y Ozgür, 2024). Estos hallazgos refuerzan la importancia de incluir experiencias de álgebra temprana en la educación primaria, pues permiten avanzar hacia el álgebra de secundaria de forma progresiva y natural, evitando así muchas de las dificultades comúnmente identificadas en este nivel (Warren et al., 2006).

En España, la reciente incorporación del concepto de sentido algebraico en el currículo (MEFP, 2022) abre nuevas posibilidades para el trabajo con ideas algebraicas desde los primeros niveles educativos. Curricularmente, “el sentido algebraico engloba los saberes relacionados con el reconocimiento de patrones y las relaciones entre variables, la expresión de regularidades o la modelización de situaciones con expresiones simbólicas” (MEFP, 2022). Este sentido algebraico lo concebimos como un proceso de comprensión de ideas y conceptos algebraicos, que permite identificarlos, describirlos, explicarlos y aplicarlos en diferentes situaciones algebraicas. Dado su carácter procesual, el sentido se construye en la interacción con tareas escolares que promueven la toma de conciencia de las relaciones algebraicas (Moreno et al., 2023).

El sentido algebraico puede desarrollarse en Educación Primaria fundamentalmente a través de los conocimientos o destrezas relacionadas con cuatro componentes o capacidades: Generalización de patrones numéricos, geométricos y de las leyes que gobiernan las relaciones numéricas; Resolución de problemas; Situaciones funcionales; Modelización de fenómenos físicos y matemáticos (Ruiz- Hidalgo y Flores, 2022). Estas capacidades pueden estar interconectadas. Por ejemplo, el trabajo con patrones algebraicos, considerado por diversos currículos educativos como una vía de acceso al álgebra escolar, y las relaciones funcionales. El trabajo con patrones permite generalizar; contribuye a la capacidad de generar modelos matemáticos y resolver problemas. A su vez sientan las bases para desarrollar habilidades como explorar regularidades y captar estructuras contribuyendo al pensamiento funcional (Torres et al, 2024).

Una de las formas de desarrollar este sentido algebraico en primaria es a través del pensamiento funcional. Según Kaput (2008), este tipo de pensamiento se centra en las relaciones entre dos o más variables, e incluye los procesos que van desde la identificación de relaciones específicas hasta su generalización. Además, el pensamiento funcional implica no solo reconocer cómo varían las cantidades entre sí, sino también expresarlo mediante diferentes representaciones y utilizar esas expresiones para analizar el comportamiento de una función (Blanton et al., 2011).

Entre las prácticas clave que favorecen el desarrollo del pensamiento algebraico destacan la generalización y la representación (Blanton et al., 2018). La generalización es un componente central del pensamiento algebraico (Mason, 1996), y puede abordarse como un proceso dinámico que se construye en la actividad matemática (Torres et al., 2022). Por su parte, las representaciones actúan como herramientas cognitivas y didácticas que permiten a los estudiantes interactuar con los conceptos y asignar significado a las estructuras matemáticas (Rico, 2009; Radford, 2000). En el contexto de la educación primaria, las representaciones que pueden

utilizarse en el trabajo con funciones y generalización incluyen formas verbales, pictóricas, numéricas, simbólicas, tabulares, gráficas o incluso gestuales (Carraher et al., 2008).

Estas prácticas se alinean con las competencias específicas que se busca desarrollar en el alumnado de primaria. Pero su impacto depende, en gran medida, del papel que desempeña el profesorado. No basta con conocer los saberes matemáticos, es fundamental que los docentes generen oportunidades reales para que el alumnado construya sentido algebraico.

El compromiso del profesorado con el razonamiento y la comprensión profunda influye directamente en cómo el alumnado se acerca al álgebra. Un maestro o maestra puede cultivar una cultura del pensamiento matemático al sustituir prácticas centradas en la memorización por experiencias que promuevan la formulación de conjeturas, la discusión de ideas y la exploración de conexiones entre conceptos.

En este artículo compartimos una experiencia de aula desarrollada con estudiantes de quinto de primaria, centrada en un conjunto de tareas diseñadas para favorecer la representación y generalización de relaciones funcionales. A lo largo de varias sesiones, se buscó que el alumnado progresara desde el reconocimiento de relaciones particulares hasta la construcción de generalidades, utilizando distintas formas de representación como apoyo para el desarrollo del pensamiento funcional y del sentido algebraico.

2. DESARROLLO DE LAS SESIONES

Diseñamos e implementamos una secuencia de cuatro sesiones en un grupo de quinto de primaria de un colegio público del sur de España. El grupo estaba conformado por 26 estudiantes (15 niños y 11 niñas), de entre 10 y 12 años. Las sesiones se llevaron a cabo durante cuatro semanas consecutivas y tuvieron como eje central el trabajo con relaciones funcionales simples, mediante tareas de representación tabular y gráfica que fomentaran el pensamiento funcional y la generalización.

Cada sesión siguió una estructura similar: se introducía un contexto significativo, se proponía una tarea individual o en pequeños grupos, y se finalizaba con una puesta en común en gran grupo para reflexionar sobre las estrategias utilizadas y los significados construidos. El objetivo global de la secuencia fue que el alumnado identificara y generalizara relaciones funcionales a partir de contextos significativos, utilizando distintas representaciones para expresar esas relaciones. Así las capacidades del sentido algebraico que pretendíamos trabajar con cada una de sesiones podemos concretarlas más, en relación al currículum, como aparece en la tabla 1.

Tabla 1

Capacidades del sentido algebraico en relación a favorecer el pensamiento funcional.

Contenido	Capacidades
Patrones	P1. Identificar patrones
	P2. Descubrir elementos ocultos
	P3. Extender y generalizar regularidades numéricas o espaciales
Funciones	F1. Identificar la relación entre variables que covarían
	F2. Usar diferentes representaciones de funciones: simbólica, tabular y gráfica y hacer conversiones entre ellas.
	F3. Identificar y conocer las características de familias de funciones

Contenido	Capacidades
	F4. Análisis del cambio prestando atención a la descripción de cambios, cualitativos y cuantitativos, desde los primeros cursos.
Modelización	M1. Significar el simbolismo matemático. Noción de variable

En la tabla 2, siguiente se resumen los contextos utilizados y las funciones trabajadas en cada sesión, así como las capacidades a desarrollar del sentido algebraico.

Tabla 2

Relación entre el contexto, la relación funcional y las capacidades a desarrollar por tareas de cada sesión.

Sesión	Situación planteada	Relación funcional tras cada una	Capacidades del sentido algebraico
Sesión 1	Parque de atracciones de Málaga	$f(n)=2n+5$	F1, F2 y F4
Sesión 2	Parque de atracciones de Almería	$f(n)=3n$	F1, F2 y F3
Sesión 3	Comparar los parques de atracciones de Málaga y Almería	$f(n)=2n+5$ y $f(n)=3n$	P1, P3, F1, F2 y F3
Sesión 4	Máquina de bolas	$f(n) = n \times n$	F1, F2, F4, y M1

En cada sesión el investigador-docente comenzaba introduciendo el contexto, para continuar aplicando un cuestionario/tarea que se les planteaba y finalizar discutiendo lo trabajado en gran grupo. En la Figura 1 podemos ver al investigador-docente solicitando a los estudiantes que levanten sus manos para responder a una pregunta realizada durante la puesta en común de una de las sesiones.

Figura 1

Interacción del investigador-docente con el grupo-clase.



En cuanto a los conocimientos previos, los estudiantes habían utilizado las tablas como herramienta de recogida de información en ciertas asignaturas, pero los gráficos de funciones no

los habían trabajado. Las sesiones comienzan implementando la representación tabular para estudiar las relaciones funcionales por considerarse una herramienta intuitiva a partir de la cual es posible registrar valores e inferir la relación funcional (Torres et al, 2021). Más adelante involucramos la representación gráfica con la que el estudiantado lee los datos, identificando los valores en el gráfico y las variables (Cañadas et al, 2024).

2.1. Tareas aplicadas en cada una de las sesiones

Un aspecto clave que diversos autores destacan al diseñar o seleccionar tareas matemáticas es la atención a su *demanda cognitiva* (Stein et al., 2009; Sullivan et al., 2013). Según Stein et al. (2009), la demanda cognitiva se refiere al tipo y nivel de pensamiento que se requiere por parte del alumnado para implicarse con éxito en la resolución de una tarea.

A partir de esta definición, los autores proponen una guía para analizar el tipo de demanda que implica una tarea, distinguiendo entre tareas de baja y alta demanda cognitiva. Las tareas de baja demanda suelen ser rutinarias: su resolución se basa en aplicar procedimientos conocidos o memorizados, muchas veces indicados de forma explícita en el enunciado. No exigen que el alumnado explique sus razonamientos ni que justifique sus respuestas; el foco está puesto en obtener la solución correcta, no en el proceso.

En cambio, las tareas de alta demanda cognitiva implican una comprensión más profunda. No pueden resolverse simplemente repitiendo procedimientos aprendidos sin reflexión. Requieren que los estudiantes comprendan lo que hacen, puedan explicarlo y vinculen su trabajo con significados matemáticos. Estas tareas promueven el uso de múltiples representaciones y favorecen que se establezcan conexiones entre ellas, lo que enriquece la construcción de significado. Además, suelen admitir diferentes estrategias o caminos de resolución, ya que no hay un procedimiento único sugerido en el enunciado.

Por su parte, Sullivan et al. (2013) subrayan que, para que las tareas generen aprendizaje, deben ser seleccionadas cuidadosamente por el profesorado, y deben promover el diálogo entre los estudiantes y con el docente. Estas tareas, señalan, deben ofrecer diversidad de contextos y niveles de complejidad, estimular el pensamiento y la reflexión, favorecer la construcción de redes cognitivas y abordar contenidos matemáticos relevantes de manera explícita.

En este sentido, en la propuesta se incrementa progresivamente la demanda cognitiva de las tareas, desde el uso de valores numéricos simples hasta la abstracción simbólica y la generalización. Del mismo se tiene en cuenta que el alumnado comienza viendo la relación funcional como un patrón porque trabaja la generalización con una sola variable y , como razonamiento, emplea la recursividad.

Las tareas fueron diseñadas con los siguientes objetivos relacionados con las competentes de sentido algebraico a desarrollar:

- Estimular la generalización de patrones o regularidades y la formulación de reglas a partir de datos numéricos.
- Favorecer la identificación y expresión de relaciones funcionales a partir de contextos concretos.
- Promover el uso de distintas representaciones (tabular, gráfica, simbólica y verbal) para describir dichas relaciones.
- Introducir al alumnado en el análisis comparativo de funciones mediante el uso de gráficas.

2.1.1. Tarea sesión 1

En esta primera sesión se presentó al alumnado el contexto de un parque de atracciones que cobra una tarifa fija de entrada (5 euros) y una cantidad adicional por cada viaje (2 euros). La tarea consistió en completar una tabla que recogía el coste total en función del número de viajes realizados.

El objetivo de esta tarea es reconocer la estructura aditiva-multiplicativa de una función afín y expresar la relación entre variables de forma tabular. En esta tarea nos centramos en desarrollar las capacidades del sentido algebraico relativas a F1, F2 y F4 (ver tabla 1).

Un aspecto clave fue el uso de valores numéricos pequeños que permitió que el alumnado utilizara estrategias de conteo o cálculo mental, facilitando el reconocimiento del patrón antes de formalizar la relación funcional. La experiencia previa de nuestras investigaciones con estas situaciones, nos lleva a presentar la tarea de la Figura 2 con cantidades que no sean continuas. El objetivo es evitar la recurrencia para llevar al alumnado a otras formas de pensamiento funcional como la covariación y la correspondencia.

Figura 2

Tarea de la sesión 1.

Parque de atracciones de Málaga. 5 euros por el carnet de socio y 2 euros por viaje.

1. Si te haces socio y das 3 viajes, ¿cuántos euros debes pagar?

2. Si te haces socio y das 8 viajes, ¿cuántos euros debes pagar?

Viajes	Euros	¿Cómo lo has hecho?

3. a. Completa la siguiente tabla escribiendo los euros que gastas si das el número de viajes que aparecen ahí, teniendo en cuenta que te haces socio y tienes el carnet.

Viajes	Euros
1	
10	
3	
9	
25	

3. b. ¿Cómo lo has hecho? Explícalo.

En la siguiente tabla (Tabla 3) especificamos ciertos aspectos de interés para la gestión de la sesión 1.

Tabla 3

Datos sobre la gestión de la Sesión 1.

Sesión 1		
	Tiempo invertido	Entre 3 y 4 minutos
	Dificultades previstas	No comprender la diferencia entre “carnet de socio” y “ticket”
Introducción del contexto	Pautas seguidas por el investigador-docente para tratar estas dificultades	Destacó varias veces que el carnet solo se pagaba una vez, a la hora de entrar, mientras que el ticket era lo que se pagaba para poder realizar cualquier actividad una vez dentro.
Aplicación del cuestionario	Tiempo invertido	15'
	Rol del investigador-docente	Resolver dudas (sin indicar la solución)
Puesta en común	Tiempo invertido	20'
	Rol del investigador-docente	Moderar, dar la palabra a los estudiantes para que compartan sus respuestas

2.1.2. Tarea Sesión 2

La relación funcional trabajada en la segunda sesión fue $f(n)=3n$, también usando el parque de atracciones como contexto. Ahora implicamos un nuevo parque con precios diferentes en el que no hay que pagar un carnet de socio para entrar. De nuevo aparece la representación tabular en un formato para completar con las variables independiente y dependiente, según corresponda, ver figura 3.

El objetivo de la sesión era contrastar la función afín de la sesión anterior con una función de proporcionalidad directa; para ello, la tarea facilita la identificación de una regla multiplicativa y prepara el terreno para la comparación entre funciones de la sesión siguiente. Con esta tarea nos centramos en desarrollar las capacidades del sentido algebraico relativas a F1, F2 y F3 (ver tabla 1). Durante la sesión, el alumnado centraba la diferencia entre las funciones en la compra de entrada o no al parque sin asociarle significado matemático a ese término independiente. Sin embargo, esa diferencia en el contexto provocó la construcción de estructuras matemáticas distintas que preparan el camino hacia el estudio de las funciones lineales en la enseñanza secundaria.

Figura 3

Tarea de la sesión 2.

Parque de atracciones de Almería. En Almería hay un parque de atracciones con precios diferentes al de Málaga que vimos el último día. En este parque no hay que pagar por el carnet de socio. Sofía estuvo en el parque de atracciones de Almería y pagó 12 euros por 4 viajes.

1.a. Completa la tabla siguiente rellenando los viajes que da Sofía y los euros que gasta en el parque.

1.b. ¿Cómo lo has hecho?

Viajes	Euros
1	
4	12
	6
10	30
7	
	0
20	

En la siguiente tabla (Tabla 4) especificamos ciertos aspectos de interés para la gestión de la sesión 2.

Tabla 4

Datos sobre la gestión de la Sesión 2.

Sesión 2		
Introducción del contexto	Tiempo invertido	Entre 3 y 4 minutos
	Dificultades previstas	Al ser el contexto también sobre un parque de atracciones, podían pensar que se trataba del mismo parque (misma función) que aparecía en la sesión 1
	Pautas seguidas por el investigador-docente para tratar estas dificultades	Destacó reiteradamente que se trataba de un parque de atracciones diferente al de la sesión anterior.
Aplicación del cuestionario	Tiempo invertido	15'
	Rol del investigador-docente	Resolver dudas (sin indicar la solución)
Puesta en común	Tiempo invertido	20'
	Rol del investigador-docente	Moderar, dar la palabra a los estudiantes para que compartan sus respuestas

2.1.3. Tarea Sesión 3

La tarea de la sesión 3 consistió en comparar las funciones de los dos parques de atracciones de las sesiones previas. Por lo tanto, las funciones a comparar son $f(n)=2n+5$ y $f(n)=3n$. Aquí hemos implicado la representación gráfica para que los estudiantes puedan interpretar la comparación desde el gráfico, ver figura 4. Las capacidades a trabajar del sentido algebraico son: P1, P3, F1, F2, y F3. Es interesante destacar cómo el alumnado, cuando resolvió esta tarea, comparaba las funciones interpretando adecuadamente la pendiente de las rectas.

Figura 4

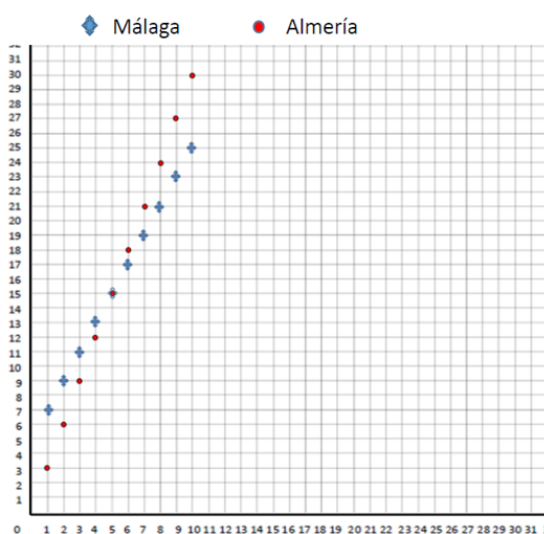
Tarea de la sesión 3.

Comparación de costes de dos parques de atracciones: Almería y Málaga.

1. Observa la siguiente tabla donde hay información de los parques de atracciones de Málaga y de Almería.

Viajes	Euros (Málaga)	Euros (Almería)
1	7	3
2	9	6
3	11	9
4	13	12
5	15	15
6	17	18
7	19	21
8	21	24
9	23	27
10	25	30

- 1.a. Fíjate en los datos de las tablas, ¿qué parque de atracciones es más caro?
 - 1.b. Explica por qué ese parque de atracciones es más caro.
 - 1.c. ¿Qué parque de atracciones es más caro si das 3 viajes?
 - 1.d. ¿Qué parque de atracciones es más caro si das 5 viajes?
 - 1.e. ¿Qué parque de atracciones es más caro si das 7 viajes?
2. Fíjate en el siguiente gráfico. Hemos representado los números de la tabla anterior para los viajes dados y los euros gastados. Hay cruces para identificar al parque de Málaga y puntos para el de Almería.



- 2.a. Fíjate en el gráfico. Si das 5 viajes, ¿cuántos euros hay que pagar en ambos parques de atracciones? Explica cómo puedes saberlo.
- 2.b. Si das menos de 5 viajes, ¿cuántos euros hay que pagar? Explicalo observando el gráfico.
- 2.c. Si das más de 5 viajes, ¿cuántos euros hay que pagar? Explicalo observando el gráfico.
- 2.d. ¿Qué parque de atracciones es más caro según el gráfico? Explica cómo puedes saberlo.
- 2.e. Si das 100 viajes, ¿qué parque de atracciones es más caro? ¿cómo puedes saberlo?

En la siguiente tabla (Tabla 5) especificamos ciertos aspectos de interés para la gestión de la sesión 3.

Tabla 5
Datos sobre la gestión de la Sesión 3.

Sesión 3		
	Tiempo invertido	10'
	Dificultades previstas	<ol style="list-style-type: none"> 1. No comprender el gráfico ya que se introdujo por primera vez. 2. Confundir la representación de las dos estructuras en un mismo gráfico.
Introducción del contexto	Pautas seguidas por el investigador-docente para tratar estas dificultades	<ol style="list-style-type: none"> 1. Comenzó explicando las partes del gráfico y lo que representaba cada una de ellas. 2. Destacó reiteradamente que cada color se correspondía con un parque de atracciones diferente y que de esa forma se podían representar diferentes parques en un mismo gráfico, indicando que esto permitía compararlos.
	Tiempo invertido	20'
Aplicación del cuestionario	Rol del investigador-docente	Resolver dudas (sin indicar la solución)
	Tiempo invertido	20'
Puesta en común	Rol del investigador-docente	Moderar, dar la palabra a los estudiantes para que compartan sus respuestas

2.1.4. Tarea Sesión 4

La tarea se desarrolló en torno al contexto de la conocida máquina de funciones (Dienes, 1971; Willoughby, 1997), en la que se introduce una cierta cantidad de bolas y, dependiendo de la función asociada, se obtiene una cantidad distinta a la salida. Las capacidades a trabajar del sentido algebraico con esta tarea son: F1, F2, F4, y M1.

La actividad se presentó al alumnado mediante el siguiente enunciado: «Al cole ha llegado una caja misteriosa. Cuando introduces un número de bolas, sale otro, como ves en la siguiente imagen. Vuestra misión es averiguar qué cambio realiza la máquina».

Este planteamiento estuvo acompañado de una representación pictórica de la máquina como se ve en la figura 5, que ayudó a contextualizar la tarea y facilitar su comprensión inicial. Un aspecto interesante de este contexto es que no permite determinar con el único dato de la tabla el funcionamiento de la máquina, sino que tiene diferentes opciones.

Figura 5

Representación pictórica de una caja misteriosa.

1.a. Completa la siguiente tabla rellenando los huecos con el número de bolas que entran y sale de la caja.

1.b. ¿Cómo lo has hecho? Explica lo que has pensado.

Bolas que entran	Bolas que salen
2	4
7	
10	
Algún número de bolas	
R	

2.a. Fíjate ahora en la figura. Entran “ ϕ ” bolas en la caja. ¿Estás de acuerdo con la cantidad de bolas que salen ($\phi + \phi$)? Si no estás de acuerdo, escribe tú la expresión que creas correcta.

2.b. Explica tu respuesta anterior, ¿por qué crees que es así?

3.a. Completa la siguiente tabla.

Bolas que entran	Bolas que salen
5	
	9
4	
	36

3.b. ¿Cómo has calculado las bolas que entran y que salen de la caja para completar la tabla?

3.c. Representa los números de la tabla anterior en un gráfico

3.d. Observa todos los puntos que has dibujado en el gráfico, ¿qué es lo que sucederá para puntos siguientes? ¿Cómo sabes cómo continúa? Explicalo.

En la siguiente tabla (Tabla 6) especificamos ciertos aspectos de interés para la gestión de la sesión 4.

Tabla 6

Datos sobre la gestión de la Sesión 4.

Sesión 4		
	Tiempo invertido	Entre 3 y 4 minutos
Introducción del contexto	Dificultades previstas	Previamente nos había sucedido que, al introducir un valor indeterminado mediante una letra del abecedario español, los estudiantes se empeñaban en darle el valor de la posición que ocupa esa letra en el abecedario.
	Pautas seguidas por el investigador-docente para tratar estas dificultades	Seleccionamos una letra del abecedario griego (ϕ), en principio desconocido para estos estudiantes, para intentar evitar que le dieran un valor numérico.
Aplicación del cuestionario	Tiempo invertido	20'
	Rol del investigador-docente	Resolver dudas (sin indicar la solución)
Puesta en común	Tiempo invertido	25'
	Rol del investigador-docente	Moderar, dar la palabra a los estudiantes para que compartan sus respuestas

Como podemos ver en la Tabla 5, la situación de la Sesión 3 implicó más tiempo a la hora de introducir la situación. Mientras que en las Sesiones 1, 2 y 4 invertimos entre 3 y 4 minutos, en la Sesión 3 fueron necesarios unos 10 minutos por tener que introducir el gráfico cartesiano. El tiempo invertido en la realización del cuestionario fue mayor en las Sesiones 3 y 4 que en las dos primeras.

3. CONCLUSIONES

La experiencia desarrollada muestra que es posible introducir ideas algebraicas relevantes en la educación primaria mediante tareas contextualizadas y cognitivamente desafiantes. Las actividades permitieron que el alumnado experimentara una progresión que iba desde la simple identificación de patrones hasta la expresión simbólica de funciones.

En ese sentido, el objetivo de la secuencia de tareas se cumplió al lograr que el alumnado identificara y generalizara relaciones funcionales a partir de contextos cercanos y significativos

La representación tabular y gráfica se revelaron como herramientas poderosas para apoyar la comprensión de relaciones funcionales y promover la generalización. El trabajo se inició utilizando la representación tabular como una herramienta intuitiva que permitió a los estudiantes

registrar valores e inferir la relación funcional. Posteriormente, se involucró la representación gráfica, lo que permitió al estudiantado leer datos e identificar las variables.

La generalización y la representación destacan como prácticas clave que favorecen el desarrollo del pensamiento algebraico, siendo la generalización un componente central del mismo. Así, la comparación de funciones mediante distintos registros de representación favoreció el desarrollo del pensamiento funcional en el alumnado. Esta aproximación ha permitido abordar las capacidades del sentido algebraico a un nivel curricular, lo que podría contribuir a una transición más natural hacia el álgebra formal en niveles superiores.

Por último, el rol del profesorado es fundamental como mediador del aprendizaje. Los docentes deben generar oportunidades reales para la construcción de sentido algebraico, promoviendo una cultura de pensamiento matemático que sustituya la memorización por la formulación de conjeturas, el diálogo de ideas y la exploración de conexiones entre conceptos matemáticos.

AGRADECIMIENTOS

Este trabajo se ha realizado con el apoyo de los Proyectos PID2020-113601GB-I00 financiado por MCIN/AEI/10.13039/501100011033 y PID2024-157106NB-I00.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Alsina, À., Pincheira, N. y Delgado-Rebolledo, R. (2024). The professional practice of designing tasks: how do pre-service early childhood teachers promote mathematical processes in early algebra? *ZDM-Mathematics Education*. <https://doi.org/10.1007/s11858-024-01636-1>
- Blanton, M. L., Levi, L., Crites, T. y Dougherty, B. J. (2011). *Developing essential understanding of algebraic thinking for teaching mat*
- Blanton, M. L., Brizuela, B. M., Stephens, A., Knuth, E., Isler, I., Gardiner, A. M., Stroud, R., Fonger, N. L. y Stylianou, D. (2018). Implementing a framework for early algebra. En C. Kieran (Eds), *Teaching and learning algebraic thinking with 5- to 12-year-olds*. ICME-13 Monographs (pp. 27-49). Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-319-68351-5_2.
- Cañadas, M.C., Moreno, A. y Torres, M.D. (2024). First encounter with constructing graphs in the functional thinking approach to school algebra in 3rd and 4th grades. *ZDM Mathematics Education* **56**, 1059–1078. <https://doi.org/10.1007/s11858-024-01627-2>
- Carraher, D. W., Martinez, M. V. y Schliemann, A. D. (2008). Early algebra and mathematical generalization. *ZDM-Mathematics Education*, *40*, 3-22. <https://doi.org/10.1007/s11858-007-0067-7>.
- Ellis, A. T. y Özgür, Z. (2024). Trends, insights, and developments in research on the teaching and learning of algebra. *ZDM–Mathematics Education*, *56*(2), 199-210.
- Kaput, J. J. (2008). What is algebra? What is algebraic reasoning? En J. J. Kaput, D. W. Carraher y M. L. Blanton (eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 5-17). Routledge. <https://doi.org/10.4324/9781315097435-2>

- Mason, J. (1996). Expressing generality and roots of algebra. In N. Bednarz, C. Kieran, & L. Lee (Eds.), *Approaches to algebra: Perspectives for research and teaching* (pp. 65-86). Kluwer. https://doi.org/10.1007/978-94-009-1732-3_5.
- Ministerio de Educación y Formación Profesional (2022). Orden EFP/678/2022, de 15 de julio, por la que se establece el currículo y se regula la ordenación de la Educación Primaria en el ámbito de gestión del Ministerio de Educación y Formación Profesional. *Boletín Oficial del Estado*, (174), de 21 de julio de 2022, 103615-103772.
- Moreno, A., Cañadas, M. C., Anglada, L., Ayala-Altamirano, C., Fuentes, S., Narváez, R., ... y Torres, M. D. (2023). Atribuciones del sentido algebraico en educación primaria. *Uno: Revista de didáctica de las matemáticas*, 100, 21-29.
- National Council for Curriculum and Assessment [NCCA] (2014). Mathematics in early childhood and Primary Education (3–8 years). Definitions, theories, development and progression. NCCA. https://www.ncca.ie/media/1494/maths_in_eep_education_theories_progression_research_report_17.pdf
- Nieto, L. J. B., Rodríguez, N. C., Astudillo, M. T. G., Verdejo, A. J. M., García, G. S. M., de Castro Hernández, C., & Gestal, C. J. (2022). *Aportaciones al desarrollo del currículo desde la investigación en educación matemática*. Editorial Universidad de Granada.
- Rico, L. (2009). About the notions of representation and understanding in research in mathematics education. *PNA*, 4(1), 1-14. <http://hdl.handle.net/11162/79435>
- Sullivan, P., Clarke, D., Clarke, B. y O’Shea, H. (2013). Exploring the relationship between task structure and cognitive demand in mathematics tasks. *Educational Studies in Mathematics*, 83(1), 165–181. <https://doi.org/10.1007/s10649-012-9448-9>
- Stein, M. K., Smith, M. S., Henningsen, M. y Silver, E. A. (2009). *Implementing standards-based mathematics instruction: A casebook for professional development* (2nd ed.). Teachers College Press.
- Torres, M. D., Moreno, A. y Cañadas, M. C. (2021). Generalization process by second grade students. *Mathematics*, 9(10), 1109.
- Torres, M. D., Brizuela, B. M., Cañadas, M. C. y Moreno, A. (2021). Introducing tables to second-grade elementary students in an algebraic thinking context. *Mathematics*, 10(1), 56.
- Torres, M. D., Ayala-Altamirano, C. y Ramírez-Uclés, R. (2024). Growing patterns invention by primary education students. *Research in Mathematics Education*, 1-21.
- Warren, E., Cooper, T. J. y Lamb, J. T. (2006). Investigating functional thinking in the elementary classroom: foundations of early algebraic reasoning. *Journal of Mathematical Behavior*, 25(3), 208-223. <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2006.09.006>

Patrones a través de un cuento. Una experiencia de aula en educación infantil

Ana Belén Montoro

Universidad de Granada, amontoro@ugr.es

Elena Castro-Rodríguez

Universidad de Granada, elenacastro@ugr.es

Romina Narváez

Universidad Autónoma de Chile, romina.narvaez@uautonoma.cl

Resumen: *La enseñanza del álgebra en educación infantil ayuda a los escolares a construir una base sólida para trabajar las matemáticas en niveles superiores. En estos primeros niveles la enseñanza del álgebra está relacionada en gran medida con el trabajo con patrones. Por ello, en este trabajo describimos una experiencia de aula en la que, a través del cuento de “La Cebra Camila”, trabajamos con patrones de repetición y desarrollo (crecimiento) en un aula de 3 años. Específicamente, describimos las sesiones realizadas, las interacciones con el alumnado y la tarea ejecutada por ellos. Finalmente, recogemos algunas consideraciones a tener en cuenta para trabajar esta experiencia en otros niveles.*

Palabras clave: *Álgebra temprana, educación infantil, patrones, pensamiento algebraico, sentido algebraico, tareas con patrones.*

Patterns in early ages through tales: A classroom experience

Abstract: *Teaching algebra in Early Childhood Education helps students build a solid foundation for working with mathematics at higher levels. At these early levels, algebra instruction is largely related to working with patterns. Therefore, in this paper, we describe a classroom experience in which, through the tale “Camila the Zebra”, we worked with patterns of repeating pattern and growth pattern in a 3-year-old classroom. Specifically, we detail the progress of the sessions, the interactions with the students, and the tasks they completed. Finally, we outline some considerations to keep in mind when working with this experience at other levels.*

Key words: *Early algebra, Childhood Education, Elementary education, Patterns, Algebraic thinking, Algebraic sense, Algebraic tasks.*

1. INTRODUCCIÓN

La incorporación de la enseñanza del álgebra en educación infantil responde a una propuesta de innovación curricular conocida como *Early Algebra*, que plantea la introducción del álgebra desde los primeros años de escolarización como una manera de pensar y actuar con objetos, relaciones y estructuras matemáticas (Blanton y Kaput, 2005; Kaput, 2000). Esto permite que los profesores puedan ayudar a los escolares a construir una base sólida para un trabajo más complejo

en niveles superiores (NCTM, 2000, p. 39). En educación infantil, la enseñanza del álgebra está relacionada en gran medida con el trabajo con patrones. Específicamente, la generalización de patrones es considerada adecuada para introducir el álgebra en el contexto escolar (Vergel, 2015). Sin embargo, a pesar de la relevancia del trabajo con patrones, algunos estudios muestran la escasa atención que sufren las tareas de los libros de texto de infantil que involucran seriaciones a partir de patrones (Pincheira et al., 2022). Por ello, en este trabajo mostramos una tarea en la que trabajar este contenido. Específicamente describimos una experiencia de aula en la que, a través del cuento de la cebra Camila, trabajamos con patrones de repetición y de desarrollo (crecimiento) en un aula de 3 años.

2. PATRONES EN INFANTIL

El desarrollo del pensamiento algebraico en educación infantil a partir del trabajo con patrones es considerado por algunos autores (e.g., Radford, 2010) como un elemento clave para iniciar al alumnado en el proceso de generalización. Esta aproximación permite que, quienes cursan los primeros niveles educativos se acerquen a actividades sobre reconocimiento y expresión de regularidades, siendo esto, una puerta de entrada hacia el pensamiento funcional. Diversos autores (e.g., Anglada et al., 2023; NCTM, 2000; Warren y Cooper, 2006) coinciden en que trabajar con patrones ayuda al alumnado de cursos iniciales a identificar regularidades, establecer relaciones entre datos y a construir generalizaciones.

En este trabajo, entendemos por patrón aquello que es común, que se repite con regularidad en distintos hechos o situaciones y que se puede prever en futuras apariciones (Castro-Rodríguez y Castro, 2016). Los autores Zipper et al. (2019) expresaron que para abordar el trabajo con patrones en infantil es necesario plantear secuencias predecibles que involucren dibujos, sonidos, movimientos o números, los cuales permitan diferentes formas de exploración.

Castro-Rodríguez y Castro (2016) distinguieron dos tipos de patrones que se trabajan en los primeros años escolares. En primer lugar, los patrones de repetición son aquellos que presentan un conjunto de elementos denominado como núcleo que se repiten sistemáticamente (por ejemplo, ABABA, AABAAB...). Canciones como “la vaca Lola” o “*baby shark*” son ejemplos de patrones de repetición. En segundo lugar, los patrones de desarrollo que crecen (1-11-111-1111-...) o decrecen (1111-111-11-1) de forma sistemática produciendo expansión o reducción del elemento inicial (Castro-Rodríguez y Castro, 2016). Un ejemplo de patrones de crecimiento lo encontramos en la canción “Chuchuwa” en la cual se van agregando acciones con parte del cuerpo a medida que avanza la canción. En el cuento “En la tela de una araña” (Muñoz y Acosta, 2020) encontramos un ejemplo de patrón de decrecimiento.

Diferentes investigaciones han descrito experiencias de aula en infantil donde se ha trabajado con el enfoque de patrones como acercamiento al pensamiento algebraico. Acosta y Alsina (2024) diseñaron, validaron e implementaron un itinerario de enseñanza para patrones de repetición con el fin de describir sus efectos y evidenciar los modos de pensamiento algebraico que se movilizan. En base a sus resultados destacan que la enseñanza de patrones debe acompañarse de la manipulación de materiales, experimentación y exploración en tareas de generalización, ya que esta conlleva una abstracción mental, para poder así dar el paso a un pensamiento funcional.

Wijns et al. (2021) realizaron un estudio longitudinal con estudiantes de 4 a 6 años analizando la relación entre los patrones de repetición y crecientes. Como resultados destacaron que trabajar con patrones de repetición ayuda al desarrollo del pensamiento matemático de los estudiantes de cursos iniciales. Asimismo, Acosta y Alsina (2022) plantearon tareas con patrones en situaciones

reales con niños de 4 a 5 años destacando la importancia de trabajarlos desde edades tempranas utilizando recursos gráficos y contextos cercanos a la experiencia cotidiana. Finalmente, Anglada et al. (2023) trabajaron tres tareas que involucraban patrones de repetición con estudiantes de 3 a 5 años. Estas tareas fomentaron la necesidad de cuestionar, indagar, experimentar y crear.

Como expresaron Mulligan y Mitchelmore (2009) trabajar con el contenido de patrones y estructuras en edades tempranas favorecen al aprendizaje matemático. En esta línea, los antecedentes descritos nos muestran que el trabajo con patrones en educación inicial ayuda al alumnado a desarrollar el pensamiento algebraico, identificando regularidades y expresar relaciones a través del desarrollo de la representación y abstracción matemática (Acosta y Alsina, 2021; Blanton et al., 2015).

Existen diversas maneras de trabajar patrones en educación infantil más allá de continuar una secuencia dada. Algunos autores (Acosta y Alsina, 2024; Anglada et al. 2023; Castro-Rodríguez y Castro, 2016) coinciden en algunas como las siguientes:

- Nombrar ordenadamente cada uno de los elementos de una secuencia que presenta un patrón.
- Copiar una secuencia completa dada.
- Extender una secuencia a izquierda y/o a derecha, repitiendo el núcleo del patrón mínimo tres veces.
- Completar el elemento o elementos que faltan en una secuencia dada.
- Reconocer el núcleo del patrón de una secuencia dada.
- Crear o inventar una secuencia que presenta un patrón.

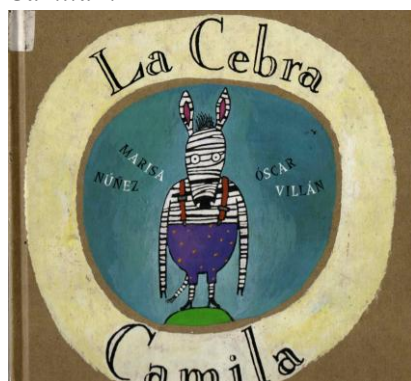
La experiencia de aula que presentamos está diseñada para que los niños copien y extiendan patrones de repetición y de crecimiento. Los primeros se trabajan atendiendo a la variable color y los segundos en una retahíla que involucra secuencias del cuento auditivas y de color.

3. EXPERIENCIA DE AULA

Los recursos literarios proporcionan un contexto ideal para trabajar patrones, ya que numerosas canciones y cuentos infantiles contienen patrones de repetición o desarrollo que ayudan a los escolares a anticipar qué viene después y recordarlos más fácilmente. En Alsina y Giralt (2017), por ejemplo, una de las nueve propuestas de actividades que presentan se basa en la identificación de patrones a partir del cuento “A qué sabe la luna”. En este trabajo, mostramos una propuesta de aula para trabajar patrones de repetición diseñada para alumnado de 3 años, a través del cuento “La cebra Camila” (Núñez y Villán, 2000. Ver Figura 1). Dicha propuesta consta de dos partes: (1) la identificación de patrones presentes en el cuento, específicamente de repetición y desarrollo (crecimiento) y (2) la copia y/o extensión por parte del alumnado de un patrón de repetición, centrado en las líneas del cuerpo de la cebra a través de papeles de colores.

Figura 1

Portada del cuento “La cebra Camila”.



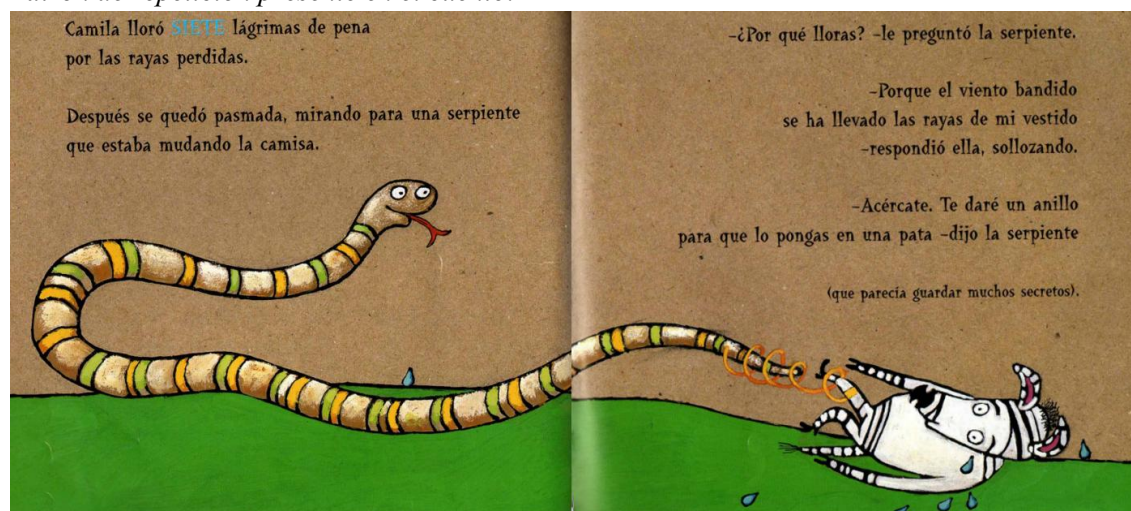
3.1. Identificación de patrones mientras se relata el cuento

En este apartado, resumiremos el cuento elegido, detallando los patrones que se encuentran en él, el tipo de actividad que se espera que el estudiante haga (identificar y extender patrones) y el tipo de acciones que debe realizar la persona que cuenta el cuento.

La cebra Camila, protagonista de este cuento, vive en una colina donde sopla mucho el viento. Un día, mientras jugaba, el viento sopló tanto, que perdió sus rayas. Camila estaba muy triste, por lo que lloró tantas lágrimas como rayas había perdido. De camino a casa, se encuentra con distintos animales, que le regalan objetos para decorar su cuerpo, sustituyendo las rayas perdidas. Cada vez que aparece un animal se repite la misma conversación (Figura 2) cambiando el número de lágrimas que llora, el animal y el objeto que le da. Concretamente, aparecerán seis animales dispuestos a ayudarlo.

Figura 2

Patrón de repetición presente en el cuento.



Dado que se trata de un patrón auditivo, la entonación juega un papel crucial. Durante la lectura del cuento usamos voz normal para el narrador, poniendo mucho énfasis en la pregunta “¿por qué lloras?”, y usamos voz entrecortada de haber llorado cuando dice que “porque el viento bandido se ha llevado las rayas de su vestido”.

A partir del cuarto animal (la araña), hicimos una pequeña pausa, invitando al alumnado a participar del cuentacuentos y comprobando si anticipaban el patrón, es decir, lo que le iban a preguntar y su respuesta.

Narrador: Después, se quedó pasmada mirando una araña que estaba bordando un paño. Y la araña le preguntó...

Estudiantes: ¿Por qué lloras?

Narrador: Porque (gimotea)... el viento...

Estudiantes: se ha llevado las rayas.../le ha quitado el vestido...

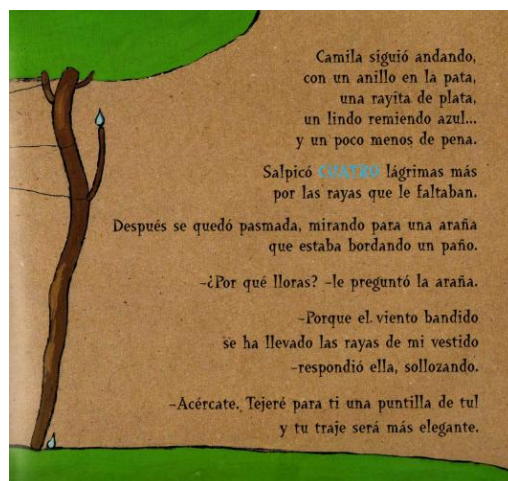
Narrador: Porque el viento bandido se ha llevado las rayas de mi vestido.

A medida que el cuento iba avanzando, más estudiantes anticipaban la respuesta y la frase era más precisa. La decisión de comenzar a hacer paradas a partir de la aparición del cuarto animal se apoya en las indicaciones del Ontario Ministry of Education and Training (2008), que sugieren presentar al menos tres repeticiones completas del núcleo del patrón para ayudar al alumnado a reconocer la regularidad involucrada.

Sin embargo, este no es el único patrón que aparece en el cuento y que los estudiantes son capaces de identificar. En el cuento, cada vez que el narrador se despide de un animal, nombra todos los regalos que ha ido recibiendo (Figura 3). Es decir, encontramos un patrón de crecimiento.

Figura 3

Patrón de crecimiento presente en el cuento.



Consideramos que recordar los regalos que han ido recibiendo (por los nombres que tienen) y el orden en el que lo hacen puede resultar una tarea complicada para los participantes de esta edad, al menos, la primera vez que se lee el cuento. Sin embargo, una regularidad que detectan rápidamente es que sigue su camino con “un poquito menos de pena”. Por ello, el narrador realizó una breve pausa para comprobar si reconocen esta regularidad.

Narrador: Camila siguió andando, con un anillo en la pata, una rayita de plata, un lindo remiendo azul... y un poquito menos...

Estudiantes: De pena

Narrador: ¿Cuántas lágrimas toca llorar ahora? ¿Quién se acuerda cuántas lloró antes?

Estudiantes: Lloró cinco.

Narrador: Pues ahora salpicó... 4 lágrimas.

[...]

Narrador: Camila siguió andando, con un anillo en la pata, una rayita de plata, un lindo remiendo azul, una puntilla de tul... y un poquito menos...

Estudiantes: De pena

Narrador: ¿Cuántas lágrimas le toca llorar ahora? ¿Quién se acuerda cuántas lloró antes?

Estudiantes: Tres, lloró cuatro.

Estudiante: Primero siete, luego seis, luego cinco y luego cuatro. Ahora toca tres.

Narrador: Mira, dicen que primero lloró siete (acompaña de los dedos), luego seis (baja un dedo), luego cinco (baja otro), luego cuatro (baja otro). Entonces, ¿cuántos creéis que toca llorar ahora?

Estudiantes: Tres.

Narrador: Efectivamente, lloró tres lágrimas de pena. ¿Y sabéis con quién se encontró ahora?

3.2. Extensión de un patrón de repetición

En esta parte de la actividad, utilizamos como contexto la historia del cuento para trabajar la extensión de patrones de repetición basados en la variable color. Partimos del siguiente diálogo:

Narrador: ¿Ha quedado bonita la Camila con los regalos que le han hecho?

Estudiantes: Sí.

Estudiantes: Sí, se puso contenta.

Estudiantes: Ya no lloraba más.

Narrador: Las cebras están acostumbradas a vestirse con rayas, ¿a que sí?

Estudiantes: Claro, rayas negras.

Estudiantes: Blancas y negras.

Narrador: ¿Sabéis qué ocurre? que la cebra Camila, después de verse tan bonita con los regalos de sus amigos, quiere usar ropa más colorida. Pero le encantan las rayas. Ha visto una tela y quiere probársela, ¿nos ayudáis a vestirla?

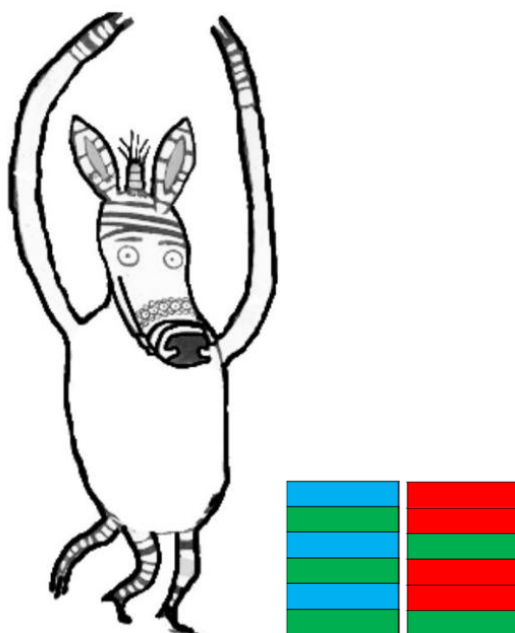
Estudiantes: Sí.

Narrador: Mirad, aquí están las telas que ha elegido ella (mostrando las tarjetas de la Figura 4). ¿Podéis utilizar estas pegatinas de colores para ver cómo quedaría si compra esa tela? Recordad que ella quiere saber cómo quedaría con esta tela.

En esta actividad, el alumnado trabajó individualmente. Se repartió una imagen de la cebra Camila sin rayas, una tarjeta a cada participante que simula la tela del vestido que quiere la cebra y contiene el patrón a seguir y pegatinas de colores (Figura 4). El patrón utilizado en 3 años fue AB, aunque también se les proporcionó el ABB o AAB a aquellos estudiantes que habían completado correctamente el patrón AB y querían probarle otro vestido.

Figura 4

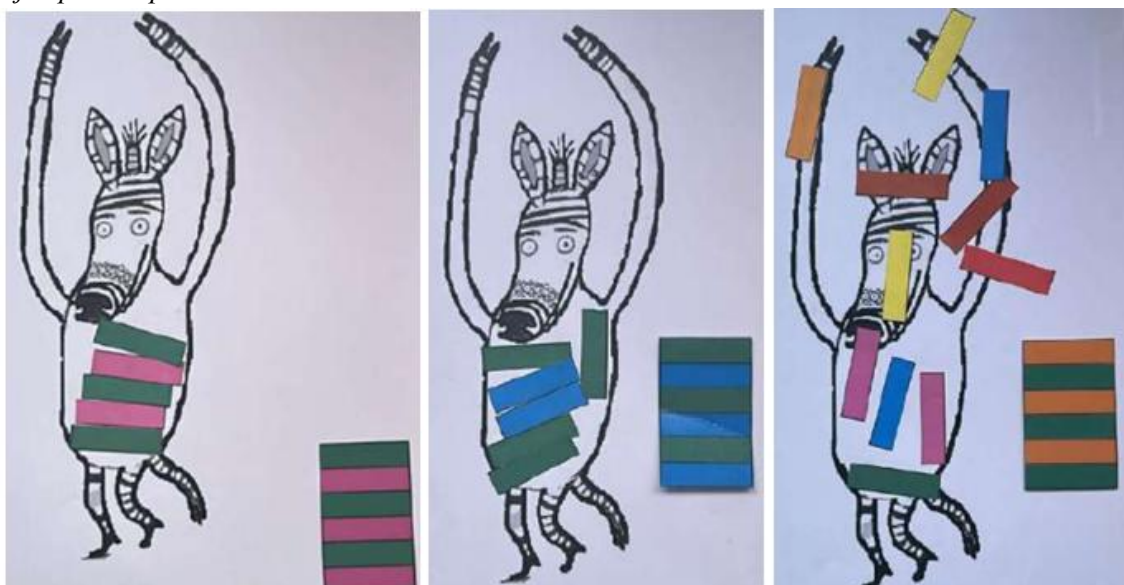
Materiales utilizados.



En la Figura 5, se muestran ejemplos de distintos niveles de desempeño: estudiantes que copian el patrón de la tarjeta, otros que la visten con los colores seleccionados y otros que se limitan a cubrirla completamente.

Figura 5

Ejemplos de producciones.



Para ayudarles a encontrar el patrón, es muy útil preguntarles por los colores que están presentes en la tela que vamos a utilizar (la tarjeta) y animarlos a decir en voz alta cómo aparecen dichos colores. A continuación, mostramos un ejemplo de conversación con un estudiante, tras haber vestido a la Cebra Camila según su preferencia:

Narrador: A ver... ¿cómo has vestido a la Cebra Camila? Le has puesto rayas por todo el cuerpo. La verdad es que ha quedado muy bonita. ¿Hacemos otra para que parezca que se ha puesto un vestido con esta tela?

Estudiante: Vale.

Narrador: A ver... ¿qué colores vamos a necesitar?

Estudiante: Naranja.

Narrador: ¿Nada más?

Estudiante: Verde también.

Narrador: ¿Lo ponemos? Vamos a fijarnos en los colores. ¿Me puedes decir qué color va?

Estudiante: Naranja, verde, naranja, verde, naranja, verde (mientras el narrador va señalando con el dedo).

Narrador: Muy bien, ¿puedes entonces vestirlo así? Intenta poner las rayitas juntas, que no queden huecos blancos. [... Después de pegar las primeras pegatinas]

Narrador: Aún queda un poquito de cebra sin vestir, ¿podemos poner alguna pegatina más?, ¿sabes de qué color será? Vamos a decir juntos los colores, como hemos hecho antes.

Estudiante y narrador: Naranja, verde, naranja, verde, naranja, verde

Estudiante: Le toca el turno al naranja.

4. CONCLUSIONES

Como lo han expresado diferentes autores (e.g., Anglada et al., 2023; Vergel, 2015) en la etapa de infantil es recomendable desarrollar el pensamiento algebraico a través del trabajo con patrones, con el fin de preparar a los escolares para niveles educativos superiores. En este documento proponemos una experiencia que ayuda a abordar este tipo de pensamiento matemático, trabajando con patrones (de repetición y de desarrollo) a través del cuento de “La cebra Camila”.

Al realizar la actividad observamos que este contexto motiva a los escolares a participar e implicarse en el trabajo con patrones. En la tarea que aquí se presenta, la actividad está diseñada para que los estudiantes reconozcan la regularidad y extiendan la secuencia. Si bien algunos estudiantes se limitaron a copiar el patrón, se les animó a nombrar los elementos de la serie como un paso previo a extender la secuencia. Sin embargo, consideramos que la tarea propuesta se puede adaptar o ampliar fácilmente para trabajar otro tipo de actividad. Un ejemplo de ello podría ser proporcionarles a los estudiantes la cebra vestida con una secuencia a la que le falte un elemento para que tengan que encontrar el elemento faltante; una cebra en blanco en la que tengan ellos que crear un patrón libre, por ejemplo, con sus colores favoritos; o clasificando los vestidos realizados en clase en función de su estructura. Otra forma de modificarlo, ampliando la dificultad de la tarea, consiste en modificar el patrón, pudiendo ampliarse a ABB, ABC o incluso, patrones de desarrollo (por ejemplo, rojo-verde, rojo-verde-verde, rojo-verde-verde-verde,...), o añadiendo otros atributos como pueden ser el grosor de la línea o el tipo de línea (continua, discontinua).

AGRADECIMIENTOS

Este trabajo se ha realizado como parte del proyecto con referencia PID2020-113601GB-I00, financiado por financiado por MCIN/AEI/10.13039/501100011033.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Acosta, Y. y Alsina, Á. (2022). Influencia del contexto de enseñanza en la representación de patrones en educación infantil. *Alteridad*, 17(2), 166-179.
- Acosta, Y. y Alsina, Á. (2024). Modos de pensamiento algebraico en educación infantil: efectos de un itinerario de enseñanza de patrones de repetición. *PNA*, 18(2), 189-222. <https://doi.org/10.30827/pna.v18i2.26256>
- Alsina, A. y Giralt, I. (2017). Introducción al álgebra en educación infantil: un itinerario didáctico para la enseñanza de los patrones. *Revista de Didácticas Específicas*, 16, 113-129
- Anglada, M. L., Fuentes, S. y Cañadas, M. C. (2023). Desarrollo del sentido algebraico en Educación Infantil a través de tareas con patrones. *Epsilon*, 113, 9-19.
- Blanton, M. L. y Kaput, J. J. (2005). Characterizing a classroom practice that promotes algebraic reasoning. *Journal for Research in Mathematics Education*, 36(5), 412-446. <https://doi.org/10.2307/30034944>
- Castro-Rodríguez, E. y Castro, E. (2016). Pensamiento lógico-matemático. En E. Castro y E. Castro (Eds.), *Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en educación infantil* (pp. 87-107). Pirámide.
- Kaput, J. J. (2000). *Transforming algebra from an engine of inequity to an engine of mathematical power by "algebrafying" the K-12 curriculum*. National Center for Improving Student Learning and Achievement in Mathematics and Science.
- Muñoz, I. y Acosta, M. (2020). *En la tela de una araña*. Muñeca de trapo.
- National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. The National Council of Teachers of Mathematics.
- Núñez, M. y Villán, Ó. (2000). *La cebra Camila*. Kalandraka.
- Ontario Ministry of Education and Training (2008). A guide to effective instruction in mathematics, Kindergarten to Grade 3 – Patterning and Algebra. Autor.
- Pincheira, N., Acosta, Y. y Alsina, A. (2022). Incorporación del álgebra temprana en Educación Infantil: un análisis desde los libros de texto. *PNA*, 17(1), 1-24. <https://doi.org/10.30827/pna.v17i1.24522>
- Radford, L. (2010). Layers of generality and types of generalization in pattern activities. *PNA*, 4(2), 37-62.
- Vergel, R. (2015). Generalización de patrones y formas de pensamiento algebraico temprano. *PNA*, 9(3), 193-215. <https://doi.org/10.30827/pna.v9i3.6220>
- Warren, E. y Cooper, T. (2006). Using repeating patterns to explore functional thinking. *Australian Primary Mathematics Classroom*, 11(1), 9-14. <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2006.09.006>
- Wijns, N., Verschaffel, L., De Smedt, B. y Torbeyns, J. (2021). Associations Between Repeating Patterning, Growing Patterning, and Numerical Ability: A Longitudinal Panel Study in 4- to 6-Year Olds. *Child Development*, 92(4), 1354-1368. <https://doi.org/10.1111/cdev.13490>

Montoro, A. B., Castro-Rodríguez, E. y Narváez, R.

Zippert, E. L., Clayback, K. y Rittle-Johnson, B. (2019). Not Just IQ: Patterning Predicts Preschoolers' Math Knowledge Beyond Fluid Reasoning. *Journal of Cognition and Development*, 1–20. <https://doi.org/10.1080/15248372.2019.1658587>

Una experiencia para desarrollar el razonamiento algebraico en el aula de sexto de primaria

María Jesús Segura Carrión
mjseguracarrion@correo.ugr.es

María Burgos
mariaburgos@ugr.es

Resumen: *La importancia de desarrollar el razonamiento algebraico en la etapa de educación primaria cuenta con el respaldo tanto del currículo como de la investigación en educación matemática. En el momento en que actualmente nos encontramos, en el que el sentido algebraico comienza a encontrar su hueco en las aulas de matemáticas, interesa conocer cómo razonan algebraicamente los/las estudiantes que acaban la educación primaria cuando aún no han podido recibir la formación reglada suficiente en este sentido. Por este motivo, describimos el diseño y resultados de una implementación con estudiantado de sexto curso de primaria en la que se abordan los diferentes enfoques del álgebra temprana. Los resultados muestran que los/las estudiantes resolvieron con éxito las tareas y que pudieron razonar en términos proto-algebraicos para justificar y formular identidades algebraicas o para obtener la regla general en patrones geométricos. En el caso de tareas de modelización por medio de ecuaciones, en cambio, predominaron las estrategias pre-algebraicas.*

Palabras clave: *Razonamiento algebraico elemental, Educación Primaria, Modelización, Identidades algebraicas, Patrones geométricos.*

An experience to develop algebraic reasoning in the sixth grade classroom

Abstract: *The importance of developing algebraic reasoning at the primary education level is supported by both the curriculum and research in mathematics education. At this moment in time, when algebraic thinking is beginning to find its place in mathematics classrooms, it is important to understand how students completing primary education reason algebraically, even though they have not yet received sufficient formal instruction in this area. For this reason, we describe the design and results of an implementation with sixth-grade primary students that addresses various approaches to early algebra. The results show that students successfully solved the tasks and were able to reason in proto-algebraic terms to justify and formulate algebraic identities or to derive general rules in geometric patterns. In contrast, in modeling tasks using equations, pre-algebraic strategies were more prevalent.*

Key words: *Algebraic reasoning, Primary Education, Early Algebra, Modelling, Algebraic identities, Geometric patterns.*

1. INTRODUCCIÓN

El interés por el desarrollo del razonamiento algebraico desde las primeras edades cuenta hoy día con un sólido consenso en la comunidad de investigadores en educación matemática (Kieran, 2022). Las nuevas propuestas curriculares incorporan contenidos algebraicos desde los primeros niveles de enseñanza con la intención de enriquecer la actividad matemática escolar y facilitar el

tránsito de la aritmética al álgebra (ACARA, 2014; CCSI, 2023). Para atender a esta demanda, la normativa curricular española actual integra desde la Educación Primaria el sentido algebraico como el sistema de los saberes relacionados con el reconocimiento de regularidades y patrones, la identificación y expresión de relaciones entre variables y la modelización de situaciones (MEFP, 2022). Como “lenguaje en el que se comunican las matemáticas” (p. 24486), constituye el vehículo para desarrollar en el estudiantado una adecuada competencia matemática (Alsina, 2022; Burgos, 2023), siendo esencial en el desarrollo de competencias específicas como el razonamiento, la prueba, la representación y la comunicación (MEFP, 2022).

Para Malara y Navarra (2018), el pensamiento algebraico en las primeras edades (al que se refieren como pensamiento pre-algebraico) ocurre “en todas las actividades destinadas a desarrollar en los alumnos una actitud para buscar regularidades, relaciones y propiedades, y para expresarlas primero en lenguaje natural y luego algebraico” (p. 54). Involucra el desarrollo de la aritmética relacional, la construcción progresiva del lenguaje algebraico y al desarrollo de hábitos mentales que permitan a los alumnos utilizar el lenguaje algebraico como herramienta para pensar.

El razonamiento algebraico temprano, entendido como aquel que “llevan a cabo los niños de 5 a 12 años mientras construyen significado para los objetos y formas de pensar que encontrarán posteriormente en el estudio del álgebra en la escuela secundaria” (Kieran, 2022, p. 1131), puede ser desarrollado en el aula de primaria desde diferentes enfoques (Blanton et al., 2018): a) aritmética generalizada, b) equivalencia, expresiones, ecuaciones e inecuaciones y c) estudio de las funciones. En la aritmética generalizada, las operaciones aritméticas ofrecen el contexto para generalizar, representar, justificar y razonar con las primeras estructuras y relaciones matemáticas. Se acepta que desarrollar una comprensión profunda de las operaciones, sus propiedades y relaciones es imprescindible para el estudio del álgebra en etapas superiores (Schifter y Russell, 2022). Con el estudio de las expresiones, ecuaciones e inecuaciones se pretende desarrollar una comprensión relacional del signo igual, que permita al estudiante identificar y establecer equivalencias entre distintas expresiones de manera general, acercándose a la idea de incógnita (Blanton et al., 2018). La finalidad del tercer enfoque es la de construir, describir, representar y razonar con y sobre las funciones y los elementos que las constituyen (Pittalis et al., 2020). Incluye la generalización de las relaciones entre cantidades que varían en forma conjunta, la expresión de estas relaciones y el uso de dichas expresiones para analizar el comportamiento de una función (Carrher y Schliemann, 2019). Supone razonar sobre las relaciones funcionales, de covariación o de correspondencia entre las variables involucradas en los problemas. Además de las relaciones de correspondencia y covariación, otros autores consideran también los patrones recursivos, especialmente los de tipo geométrico, como forma de introducir las funciones en el ámbito escolar (Wilkie et al., 2016).

En este trabajo mostramos el diseño y resultados de una implementación con un grupo de estudiantes de sexto curso de primaria, que persigue desarrollar el razonamiento algebraico por medio de la modelización, la validación, justificación y creación de identidades algebraicas y la generalización en patrones geométricos. Analizamos tanto el éxito alcanzado por el estudiantado, como el nivel de razonamiento algebraico logrado en las diferentes tareas propuestas.

2. FUNDAMENTACIÓN

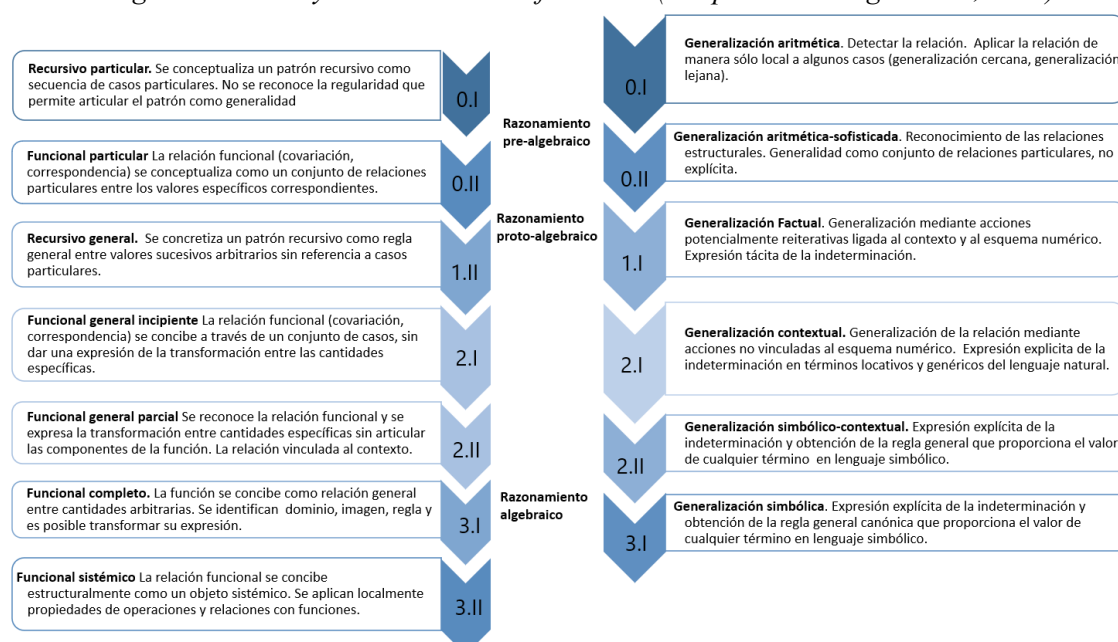
El modelo de los niveles de razonamiento algebraico elemental (RAE) desarrollado en el Enfoque Ontosemiótico (Godino et al., 2014) considera la actividad matemática como algebraica en

términos la presencia de objetos y procesos de naturaleza algebraica. Así, se consideran objetos algebraicos: relaciones binarias y sus propiedades; operaciones y sus propiedades; funciones, sus operaciones y propiedades; estructuras, sus tipos y propiedades. Estos objetos intervienen y emergen de las prácticas por medio de procesos de generalización, unitarización, representación y cálculo analítico. En este modelo, la generalización se interpreta en términos de la identificación de objetos intensivos (generales, clases de objetos particulares) involucrados en las prácticas (Godino et al., 2014). El objeto intensivo no aparece hasta el momento en que el sujeto muestra el criterio o regla que se aplica para delimitar los elementos constituyentes del conjunto. Además de la generalización que da lugar al conjunto, puede ocurrir un proceso de unitarización, por el que el conjunto pasa a ser algo nuevo, diferente de los elementos que lo constituyen, una entidad unitaria (objeto considerado globalmente como un todo) que puede ser representada y participar en otras prácticas, para dar lugar a nuevos objetos intensivos. Para ello, la nueva entidad unitaria tiene que ser materializada mediante un gesto, icono, nombre o símbolo. Así, tiene lugar un proceso de representación que acompaña a la generalización y unitarización. Por último, los símbolos se desprenden de los referentes a los cuales representan para convertirse en nuevos objetos sobre los cuales se opera de manera sintáctica o formal (Godino et al., 2014).

Recientemente, Burgos et al., (2024) han ampliado el modelo de niveles de RAE propuesto por Godino et al. (2014), estableciendo subniveles que facilitan una visión más microscópica de las estructuras implicadas. Para ello consideran diferentes grados de sofisticación en rasgos esenciales del razonamiento algebraico como son la generalización, el razonamiento estructural, funcional y la analiticidad (Figura 1).

Figura 1

Estratos de generalización y de razonamiento funcional (Adaptado de Burgos et al., 2024).



Se consideran dos ideas claves como criterio operativo para distinguir la generalización aritmética de la generalización algebraica o proto-algebraica: la deducción y la analiticidad. Para que la generalización sea algebraica, debe haber una deducción de una expresión que permita calcular el valor de cualquier término en una secuencia. Además, se requiere que el

reconocimiento de la característica común como algo plausible, sea utilizada de manera analítica para derivar una fórmula que necesariamente proporcione el valor de cualquier término. Así distinguen tres formas de generalización: *pre-algebraica*, cuando no hay deducción ni tratamiento analítico, la abducción genera un procedimiento, pero no una expresión directa de la generalidad; *proto-algebraica*, cuando lo que se deduce, lo común, se expresa a través de instancias particulares de la variable y se observan rasgos analíticos incipientes (proto-analiticidad); *algebraica*, cuando la fórmula generada es usada de manera analítica para deducir formas canónicas de expresión.

Es posible de forma similar establecer estratos de razonamiento estructural, entendido este como razonar con y sobre estructuras (Burgos et al., 2024). El razonamiento *pseudo-estructural* supone un uso de los números que excede de lo meramente aritmético, en el que las relaciones numéricas tienen la intención de expresar generalidad. El razonamiento estructural es incipiente si las propiedades de operaciones y relaciones se aplican localmente, mientras que se considera parcial cuando las propiedades de operaciones y relaciones se aplican de manera general pero no aparecen correlacionadas. En el razonamiento estructural completo las propiedades de las operaciones y relaciones binarias se aplican de forma general y correlacionada.

Se considera *razonamiento funcional proto-algebraico* aquel en el que la relación funcional se reconoce de manera general pero no se identifica la estructura de la función ni se transforma la expresión de la relación (Figura 1). En el *razonamiento recursivo general*, se explicita un patrón recursivo como regla general entre valores sucesivos arbitrarios sin referencia a casos particulares (Blanton et al., 2015). El *razonamiento funcional (general) incipiente*, lleva a reconocer la relación general (covariación o correspondencia) de forma cualitativa o a través de un conjunto de casos, pero sin llegar a dar una expresión de la transformación entre las cantidades específicas. En el *razonamiento funcional parcial*, se identifica la relación funcional y se expresa la transformación entre las cantidades específicas, pero no se articulan dominio, imagen y regla de correspondencia. No hay un cálculo sintáctico implicado en el tratamiento de la regla. Finalmente, el razonamiento funcional algebraico, implica la consideración de la función como estructura.

3. METODOLOGÍA

La metodología seguida se inscribe en el enfoque de las investigaciones de diseño instruccional (Kelly et al., 2014), pues focaliza la atención en el aprendizaje en contexto. Se persigue comprender y mejorar las posibilidades de fomentar el razonamiento algebraico de estudiantado de primaria a través de tareas específicas, de modo que la investigación y el diseño del entorno de aprendizaje son interdependientes.

3.1. Contexto y Participantes

En la experiencia participó un grupo de 22 estudiantes de sexto curso de educación primaria (11-12 años) de un centro público de educación infantil y primaria de un municipio de la provincia de Granada. La selección de la muestra fue intencional atendiendo a la disponibilidad e interés del centro educativo, el tutor y los escolares por formar parte de la experiencia formativa. El grupo había estudiado previamente números naturales y sus propiedades, números enteros, su representación y relación de orden y, por último, potencias, múltiplos y divisores, criterios de divisibilidad. Con respecto al nivel académico promedio del grupo, aproximadamente el 20% del

alumnado presenta dificultades del aprendizaje en matemáticas. A pesar de ello, se muestran motivados y muestran un elevado interés en el desarrollo de las tareas.

3.2. Diseño e Implementación

En la experiencia se diseñaron cinco sesiones de trabajo, de 55 minutos de duración cada una. Al comienzo de cada sesión, la primera autora del trabajo, que ejercía también de profesora en prácticas, introducía las actividades que se iban a abordar y permitía al alumnado consultar las dudas de comprensión surgidas. A continuación, entregaba una ficha de trabajo a cada estudiante con los enunciados de las tareas. Disponían de 40 minutos para responder de manera individual a los problemas sobre su hoja de trabajo y después se procedía a la puesta en común de las soluciones. Los/las estudiantes decidían voluntariamente su participación (siendo en todas las sesiones muy activa), siendo la profesora quien moderaba su participación, motivando la negociación de diferentes estrategias posibles y la validación de las soluciones.

En las dos primeras sesiones de trabajo, las situaciones pretendían trabajar la aritmética generalizada: propiedades y relaciones entre números en problemas verbales (sesión 1) y relaciones (igualdad, desigualdad) numéricas que implicaban las propiedades elementales de la suma y la resta (sesión 2). En este trabajo mostramos los resultados derivados de las sesiones 3, 4 y 5, destinadas respectivamente a la modelización, las identidades algebraicas y el estudio de patrones. A continuación, describimos las tareas planteadas en cada una de estas sesiones.

3.2.1. Sesión 3. Modelización

En la sesión 3 se planteó la siguiente situación:

1. Ana lanzó 10 veces a canasta. Cada vez que acertó anotó 3 puntos y cada vez que perdió fueron 2 puntos. Si al final tuvo 15 puntos, ¿Cuántas veces falló? Explica como lo has averiguado.
2. Luis también quiso jugar. Encestó 6 y fallo 2 tiros. Al final obtuvo 16 puntos. Cada vez que acertó le puntuaron igual que a Ana, pero cree que le restaron más cuando falló.
 - a) ¿Estás de acuerdo con Luis? Explica por qué.
 - b) ¿Cuánto le penalizó cada fallo? Explica como lo has averiguado.

El problema, de creación propia, implica la modelización mediante ecuaciones con coeficientes enteros y soluciones naturales. Tanto en esta sesión como en la siguiente, aparecen implicados números enteros, a petición del tutor del grupo, pues acababan de estudiar dicho tema. Con la tarea se pretende descubrir y caracterizar las estrategias de los/las estudiantes, así como si pueden trascender del ensayo-error, para identificar y aplicar relaciones de tipo aritmético para resolver el problema. Al comienzo se observó cierta confusión con el enunciado que llevaba a los/las estudiantes a pensar que Luis había lanzado 10 veces a canasta igual que Ana. La profesora aclaró esta duda inicial.

3.2.2. Sesión 4. Identidades algebraicas

En esta sesión se plantearon las siguientes dos actividades:

Actividad 1. A continuación aparecen unas igualdades. Tienes que averiguar para qué valores del número desconocido (representado con una letra) es verdad cada igualdad. Justifica siempre tu respuesta:

1. $-3 + a = a - 3$
2. $-6 + b = -2$
3. $-2 + c - 3 = -5 + c$
4. $-2 + d = d + 2$

Actividad 2. Inventa tú ahora igualdades como las anteriores, donde aparezcan números enteros (-2, -3, ...-525, 4, 6, ...323) y letras que representen a números desconocidos:

1. Igualdad 1: que siempre sea verdad. ¿Por qué es siempre verdad?
2. Igualdad 2: que siempre sea falsa. ¿Por qué es siempre falsa?
3. Igualdad 3: que sea verdad sólo a veces. ¿Por qué es verdad sólo a veces?

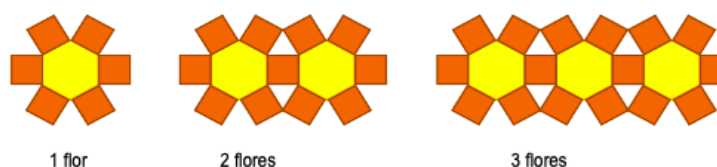
En la primera actividad se debía decidir y justificar la validez de identidades algebraicas que involucran las propiedades conmutativa, asociativa y compatibilidad de la igualdad con la suma. Mientras que las identidades 1) y 2) son siempre verdades, la segunda lo es sólo para un valor de la incógnita, y la última no es válida en ningún caso.

En la segunda actividad, se trataba de crear tres identidades: siempre verdadera, siempre falsa o sólo válida para determinados valores del símbolo literal, justificando el rango de validez. Los/las estudiantes no mostraron dificultad para comprender la tarea, a pesar de no estar familiarizados con los símbolos literales, quizá porque durante la sesión 1, habían trabajado con símbolos (no literales) para identificar cuando dos operaciones eran las mismas cuando los sumandos tenían cifras enmascaradas por medio de formas geométricas.

3.2.3. Sesión 5. Patrones geométricos

En la sesión 5, se propuso la siguiente tarea, adaptada de Wilkie (2016), con la intención de potencial y evaluar el razonamiento funcional por medio de patrones de crecimiento:

Julio hizo una cadena de margaritas con los bloques del patrón:



- a) ¿Cuántos hexágonos y cuadrados necesitará Julio para hacer una cadena de margaritas con 7 flores? Explica tu respuesta.
- b) ¿Cuántos hexágonos y cuadrados necesitará Julio para hacer una cadena de margaritas con 20 flores? Explica tu respuesta.
- c) Para cualquier número de margaritas que te den, ¿cómo calculas el número total de bloques que necesitará Julio para su cadena? Explica tu respuesta.
- d) ¿Es posible hacer una cadena de margaritas que utilice exactamente 100 cuadrados? Explica tu respuesta.

Los apartados a) y b) persiguen extender el patrón de crecimiento identificando su estructura (generalización cercana y lejana), c) busca que los/las estudiantes describan la relación entre el número de hexágonos y cuadrados de la cadena de flores y su posición en la secuencia, para derivar la regla general; el apartado d) profundiza en el análisis del patrón por medio de la relación inversa. Aunque los/las estudiantes no mostraron dificultad inicial para comprender los diferentes apartados de la tarea, la profesora insistió en que se detuvieran en apreciar que compartían las flores en la cadena.

4. RESULTADOS

En esta sección, presentamos los resultados obtenidos a partir del análisis de las respuestas escritas del estudiantado a las tareas propuestas en cada una de las sesiones de trabajo.

4.1. Modelización

En la tabla 1 resumimos los tipos de estrategia empleados por el alumnado para resolver la tarea, mostrando el nivel de RAE asociado y el grado de corrección (C respuesta correcta, I respuesta incorrecta). A continuación, ejemplificamos estas estrategias y describimos los principales errores encontrados.

Tabla 1

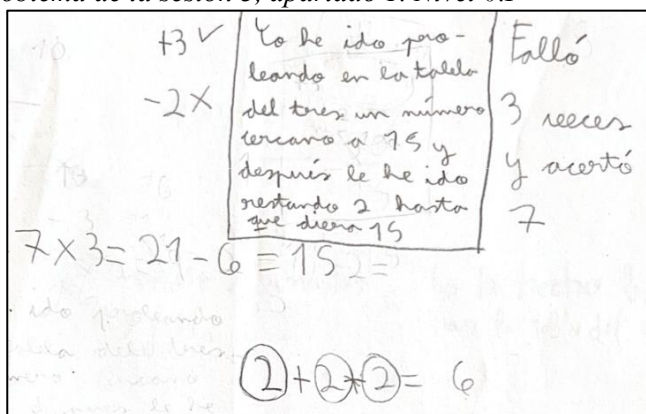
Tipos de estrategia, grado de corrección y nivel de RAE implicado en la resolución de la tarea.

Tipo de estrategia	Nivel de RAE	Apartado 1)		Apartado 2)	
		C	I	C	I
Estrategia no explícita	No aplica	2	1		
Ensayo-error	0.I.	10	0		
Determina puntuación total restada para obtener valor del fallo	0.I.	2	2	15	7
Búsqueda de relaciones con soporte diagramático	0.II.	4			
No responde			1		
Total		18	4	15	7

Como muestra la Tabla 1, para resolver la tarea de modelización emplearon en todo caso un razonamiento pre-algebraico, llegando a la solución correcta en la mayoría de los casos, usando estrategias de ensayo-error (Figura 2) o bien razonando en base a las relaciones y propiedades de los números y operaciones empleadas, algo característico de una actividad aritmética sofisticada (Figura 3).

Figura 2

Solución de E11 al Problema de la sesión 3, apartado 1. Nivel 0.I

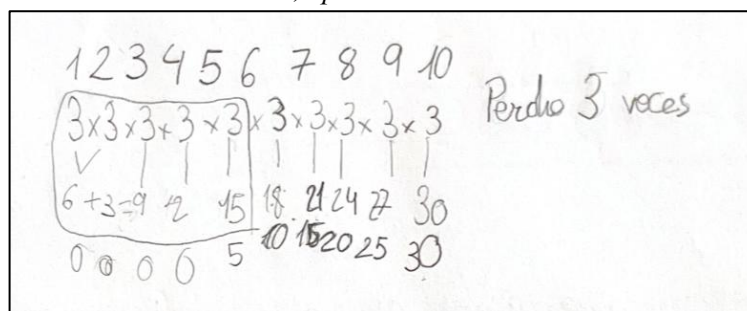


E11, reconoce que sigue una estrategia de ensayo-error para resolver el primer apartado del problema (“he ido probando en la tabla del tres un número cercano a 15 y después le he ido restando 2 hasta que me diera 15”). Opera con intensivos de primer grado, es decir con números

naturales, tratando al signo igual solo en el sentido operacional, por lo que su nivel de RAE es 0.I según Burgos et al. (2024). En cambio, E5 (Figura 3) hace un uso pseudo-estructural de las relaciones numéricas que le lleva a determinar las combinaciones de aciertos y fallos posibles, empleando además una estructura diagramática como medio para organizarlas. La actividad desarrollada corresponde en tal caso a un nivel 0.II según Burgos et al. (2024).

Figura 3

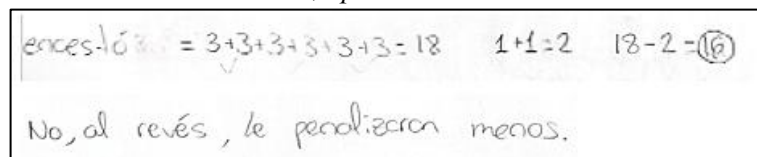
Solución de E5 al Problema de la sesión 3, apartado 1. Nivel 0.II



En la segunda parte del problema, los/las estudiantes recurrieron a estrategias aritméticas (nivel 0.I de RAE, operaciones elementales con números naturales y uso del signo igual sólo en sentido operacional). De forma mayoritaria, respondieron como E13 cuya solución se muestra en la Figura 4.

Figura 4

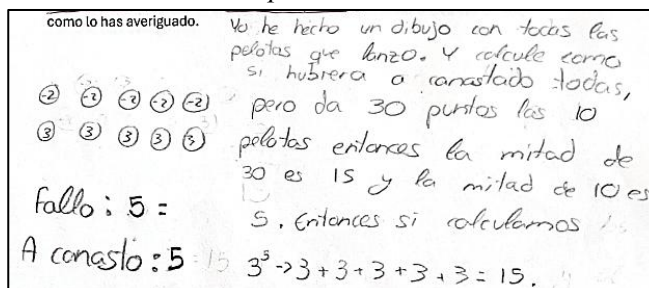
Solución de E13 al Problema de la sesión 3, apartado 2. Nivel 0.I



Como E13, hubo estudiantes que determinaron cuántos puntos sumaron en aciertos (empleando en ese caso la suma repetida $3+3+3+3+3+3=18$) y después valoraron cuántos puntos se le restaron para lograr la puntuación final de 16. Esto permite a E13 determinar que en cada tiro fallado le quitaron a Luis un punto, observando que “le penalizaron menos”.

Figura 5

Solución de E7 al problema de la sesión 3, apartado 1.

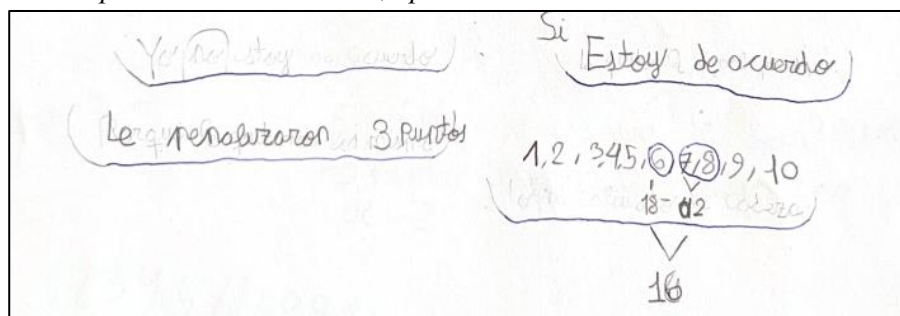


Los errores asociados a esta tarea se basan en establecer una cierta proporcionalidad entre el número de aciertos y el número de fallos. Algunos estudiantes afirman como E7 (Figura 5) que

“30 puntos son las 10 canasta, entonces la mitad de 30 es 15, entonces la mitad de 10 es 5”, sin reconocer el ajuste de la penalización al no encestar. En la respuesta de E7 se observa un uso incorrecto de la notación como potencia (3^5 para indicar la suma de 3 cinco veces, 3×5).

Figura 6

Respuesta de E1 al problema de la sesión 3, apartado 2.



Por otro lado, en el apartado 2, las respuestas erróneas muestran una incongruencia entre la práctica operativa (donde identifican una diferencia de dos puntos negativa) y la práctica discursiva, que los lleva, como a E1 en la Figura 6, a indicar que le penalizaron tres puntos.

4.2. Identidades Algebraicas

En la Tabla 2 se resumen los tipos de estrategia, el nivel de RAE asociado y la corrección de las respuestas del estudiantado a la Actividad 1 de esta sesión, en la que se debía decidir y justificar la validez de identidades algebraicas.

Tabla 2

Tipos de estrategia, grado de corrección y nivel de RAE. Actividad 1. Identidades algebraicas.

Tipo de estrategia	Nivel de RAE	$-3 + a = a - 3$		$-6 + b = -2$		$-2 + c - 3 = -5 + c$		$-2 + d = d + 2$	
		C	I	C	I	C	I	C	I
Verificación sobre un único caso particular.	0.I	8				15		1	4
Uso de casos particulares para comprobar la veracidad								8	
Diferencia las constantes según signo	0.II								5
Uso de ejemplo genérico		13				5	1		
Reconoce propiedad y valida en casos particulares	1.I							2	
Obtiene el único valor posible (resuelve la ecuación aritmética)	2.I			21					
No responde									1
Total		21		21		20	1	11	10

Como podemos observar todo el estudiantado identifica de manera correcta la validez de la identidad $-3 + a = a - 3$, la mayoría lo hace para $-2 + c - 3 = -5 + c$ y la mitad reconoce que

$-2 + d = d + 2$ es siempre falsa. Es frecuente que recurran a un único caso particular para comprobar la validez, en el caso de las identidades $-3 + a = a - 3$, y $-2 + c - 3 = -5 + c$, si bien no añaden mayor justificación. La actividad en este caso se considera aritmética (pre-algebraica de nivel 0.I de RAE). Por ejemplo, como muestra la Figura 7, E12 asigna un valor numérico al símbolo literal y aprecia que el resultado de operar a izquierda y derecha del signo igual es el mismo, por lo que considera cierta la identidad. En estos casos, los ejemplos se usan sin seguir ningún criterio particular (empirismo ingenuo, Beltrán-Meneu et al., 2024).

Figura 7

Respuesta de E12 a la Actividad 1.1).

1) $-3 + a = a - 3$
 $-3 + 5 = 5 - 3$
 $2 = 2$

Con relación a la identidad $-2 + d = d + 2$, ocho estudiantes recurrieron a más de un ejemplo, explicando de manera oral a la profesora, en la puesta en común “hemos ido probando hasta que hemos visto que no se podía hacer”, haciendo referencia al uso de varios casos particulares para reconocer la falsedad de la expresión. Así parece que encontrar un valor para el que una identidad es válida les es suficiente para considerar su validez general, pero cuando la identidad no se cumple sobre un valor, necesitan recurrir a otros casos, para adquirir certeza. La particularización produce ejemplos, pero no hay sentido del contraejemplo. En cualquier caso, aunque reconocen que justificar la validez de las identidades supone comprobar que lo que aparece a ambos lados del signo es igual es lo mismo, el símbolo literal tiene un carácter de sustitución específica.

Por otro lado, otros estudiantes se basaron en la diferencia del signo de la constante que se suma al símbolo literal para apreciar que el valor de la izquierda no puede ser el mismo que el de la derecha. Por ejemplo, E12 afirma “nunca va a dar un valor porque uno es un número positivo y otro negativo”. En este caso, se observa un tratamiento pre-estructural de la identidad, si bien no llegan a describir las expresiones en su totalidad (números, operaciones, relación), recurriendo a algunos casos particulares para apoyar esta afirmación. En este caso, se considera por tanto que la actividad es de nivel 0.II de RAE.

Es posible reconocer cierto razonamiento proto-algebraico en la respuesta de trece estudiantes, quienes justifican la veracidad de la identidad $-3 + a = a - 3$ en base a una propiedad, si bien dan un valor particular al símbolo literal para adquirir certeza. En este caso, el caso particular actúa como ejemplo genérico, no por su valor sino por su estructura. Por ejemplo, E17 afirma “ $-3 + 5 = 5 - 3$ porque el orden de los factores no altera al producto”. E17 enuncia una propiedad general en lenguaje natural, lo que corresponde al nivel 1.I de RAE según Burgos et al. (2024), si bien confunde la expresión con relación al producto y no la suma.

En el caso del apartado dos, responden de manera similar a E6 (Figura 8) encontrando el único valor del símbolo literal para el que es verdadera la igualdad, lo que supone un nivel proto-algebraico 2.I. Se observa cómo E6 aprecia la necesidad de invertir las operaciones para obtener el resultado, lo que supone la resolución de la ecuación aritmética implicada (Burgos et al., 2024).

Figura 8

Respuesta de E6 a la Actividad 1. 2).

2) $-6 + b = -2$
 $-2 = -2$

Porque el resultado de la operación ya te lo indica, entonces tienes que buscar algún número que te de el mismo número

En el caso de la identidad algebraica $-2 + c - 3 = -5 + c$, la mayoría del estudiantado recurre a casos particulares para decidir la validez de la identidad (ejemplo empírico, nivel 0.I de RAE). Por el contrario, aquellos que reconocen las propiedades conmutativa y asociativa de en la suma de números enteros, se apoyan en un ejemplo genérico (valor estructural más que operacional) para justificar la validez de la identidad. Por ejemplo, E17 justifica “Porque -2 y -3 da -5 y en el otro lado pone -5, $-2+5-3 = -5+5$.” Aunque E17 no reconoce el carácter unitario de la identidad, razona en base a las propiedades asociativa y conmutativa para identificar la igualdad de las expresiones $(-2 + a - 3)$ y $(-5 + a)$ al “otro lado”, mostrando un razonamiento estructural parcial.

Es en la última identidad donde se aprecian los errores más significativos. Por un lado, al operar con los casos particulares, transformando la operación suma de la derecha en una de multiplicación, y por otro, al ignorar el valor del signo como determinante para decidir la validez. En el primer caso, los/las estudiantes seleccionan de manera intencionada (experimento crucial, Beltrán-Meneu et al., 2024) como E8 en la Figura 9, el valor de $d = 2$.

Figura 9

Solución errónea de E8 a la Actividad 1.4)

4) $-2 + d = d + 2$
 $-2 + 2 = 0 \times 2$

Porque $-2 + 2 = 0 \times 2$ que da 0

En el segundo caso, cinco estudiantes justifican la veracidad de forma similar a E2 apreciando que “dan los mismos resultados salvo que uno es negativo y otro positivo”.

El estudiantado creó expresiones algebraicas, en su mayoría correctas como respuesta a los diferentes apartados de la actividad 2 planteada en esta sesión. Usualmente se usaron uno o varios símbolos literales a uno o ambos lados del signo igual, salvo en tres ocasiones en las que crearon identidades aritméticas ciertas y otras dos, en las que formularon identidades aritméticas falsas. Sin embargo, como muestra la Tabla 3, no siempre justificaron con éxito la validez de dichas identidades.

Tabla 3

Justificación, corrección y nivel de RAE implicado en las respuestas a la Actividad 2.

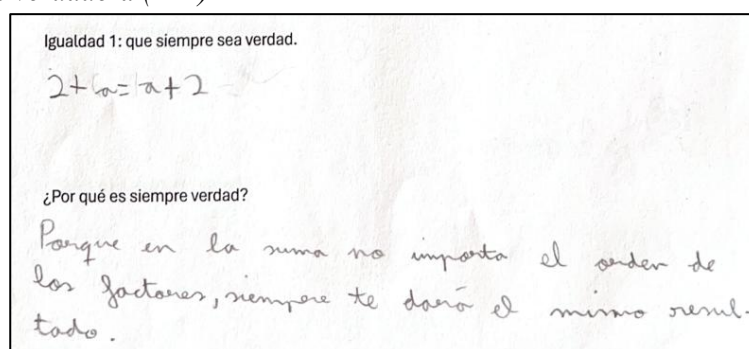
Justificación. Atribución de significado al símbolo literal	Nivel de RAE	Identidad 1		Identidad 2		Identidad 3	
		Siempre cierta		Siempre falsa		Cierta a veces	
		C	I	C	I	C	I
Caso particular	0.I	3		2			
Ejemplo genérico	0.II		1				
Símbolo literal como receptor/Propiedad general	1.II	1		4	3	1	
Símbolo literal como incógnita o variable. Reconoce dependencia respecto del símbolo literal	2.I	11	4	7	2	17	1
No justifica				2			1
No contesta			1		1		1
Total		15	6	15	6	18	3

En la Tabla 3 se muestran las estrategias empleadas para justificar la validez de las identidades y cuál es el papel atribuido a los símbolos literales cuando los emplean. Cuando los/las estudiantes emplean sólo valores concretos para producir identidades aritméticas siempre verdaderas (o siempre falsas), su justificación se basa únicamente en que el resultado de operar a izquierda o derecha es igual (o distinto). En este caso, la actividad se considera de nivel 0.I, pues sólo se opera con números particulares y el signo igual no adquiere significado relacional.

La mayoría de los/las estudiantes desarrollaron un razonamiento proto-algebraico de nivel 2.I, dado que a través de sus justificaciones atribuyen al símbolo literal el carácter de número generalizado en las identidades 1 (siempre verdaderas) e identidades 2 (siempre falsas). En aquellos casos en los que la actividad es proto-algebraica de nivel 1.II, general identidades algebraicas en las que los símbolos literales se interpretan como receptores de valores numéricos concretos y como tales se les asignan (Figura 12). La mayoría de las identidades siempre verdaderas, se construyeron a partir de las propiedades asociativa y conmutativa de la suma (ver Figura 10). Los/las estudiantes recurrieron a estas propiedades para justificarlas (aunque en algunos casos se refieran a “factores” y “producto” en la conmutatividad de la suma), exhibiendo un razonamiento estructural completo (correlación entre propiedades y relación de igualdad con números naturales). Lo indeterminado se expresa explícitamente en términos genéricos del lenguaje natural (generalización proto-algebraica).

Figura 10

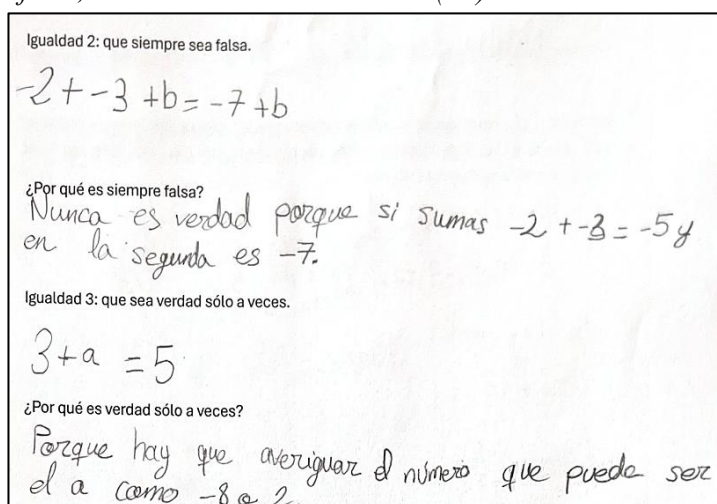
Identidad siempre verdadera (E11)



Es frecuente que el estudiantado genere identidades con estructura similar a las de la actividad previa, pero no siempre para crear identidades con el mismo rango de validez. Por ejemplo, como muestra la Figura 11, E5 recurre a las propiedades asociativa y compatibilidad de la igualdad con la suma (equilibrio, Wilkie y Hopkins, 2024) para en este caso general una identidad siempre falsa. También es frecuente, que reconozcan que la identidad 3 es cierta para determinado(s) valor(es), pero que no lo obtengan (“depende del valor que le pongas puede ser o no”, E6) o consideren algunos que no son válidos, porque ignoran los signos, como ocurre con E5.

Figura 11

Identidad siempre falsa, identidad cierta solo a veces (E5)

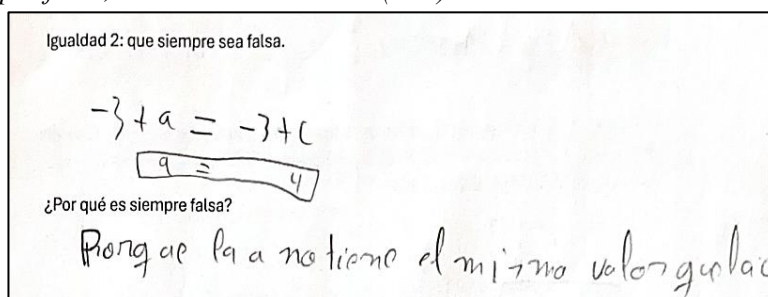


En la justificación de la falsedad de la identidad 2, se observan además dos argumentos frecuentes: aquellos que consideran como E18 que “da igual el valor que le des, no se puede hacer”, indicando la irresolubilidad de la ecuación que plantean, o aquellos que indican como E7 que $7 + 3 + a = 1 + a$ es siempre falsa “porque si a la a le asignas un número luego no lo puedes cambiar”. Parece reconocer que el símbolo literal está en lugar de un número, que debe ser el mismo a la izquierda y derecha del signo igual, de manera que no puede cierta la igualdad si se suma a constantes distintas.

Se observa también que cuando usan dos símbolos literales no identifican la dependencia que establece la relación. Por ejemplo, E10 (Figura 12), asume en el caso de la identidad 2, que a y c son números diferentes y, por lo tanto, nunca va a ser una igualdad verdadera. En este caso, los símbolos literales actúan como receptores de números concretos, por lo que la actividad se considera de nivel 1.II de acuerdo con Burgos et al. (2024).

Figura 12

Identidad siempre falsa, dos símbolos literales (E10).



Con respecto a los errores, muestran confusión en la justificación a través de las propiedades de las operaciones, no reconocen la relación entre las variables (Figura 12) o no consideran resoluble la ecuación, asumiendo una identidad que es cierta solo en un valor, por ejemplo, la que propone E17, $-8 + c = 525 + 1$, como identidad siempre falsa “porque no se puede resolver”.

4.3. Patrones Geométricos

La tabla 4 recoge los diferentes tipos de estrategias, empleadas por los/las estudiantes para determinar el número de cuadrados en una cadena de 7 margaritas (generalización cercana), de 20 margaritas (generalización lejana) y para una cadena con un número cualquiera de margaritas (regla general). Todos determinaron correctamente el número de hexágonos, por lo que centramos la atención en esta parte. Se incluye además el grado de corrección de las respuestas (C: correcta, I: incorrecta).

Tabla 4

Estrategias y grado de corrección. Problema de las margaritas (apartados a, b, c)

Estrategia para determinar el número de cuadrados para el número dado (n) de flores	Generalización cercana ($n = 7$)		Generalización lejana ($n = 20$)		Regla general	
	C	I	C	I	C	I
No explícita		1				3
Conteo/soprote icónico	3			3		
Recursiva; descompone patrón	4			2		2
$n \times 5 + 1$			1		1	
$(n - 1) \times 5 + 6$	1		2		3	
$n \times 6$	2	2		1		1
$n \times 6 - (n - 1)$	8		9		9	
$n \times 6 - n + 1$	1		1		1	
$(n - 1) \times 6$						
No contesta				3		3
Total	19	3	13	9	14	8

De los 22 estudiantes que resolvieron el problema, once justificaron su estrategia, tanto en la generalización cercana como en la lejana, haciendo referencia a las características propias de patrón: los pétalos (cuadrados) que comparten o que todos tienen 5 pétalos salvo el último que tiene 6. Los demás no justificaron cómo habían llegado a obtener el número de cuadrados. Como podemos observar en las tablas 4 y 5 los/las estudiantes emplearon diversas estrategias de resolución, siendo también diverso el nivel de RAE logrado.

Tabla 5

Nivel de RAE logrado en la tarea Cadena de margaritas.

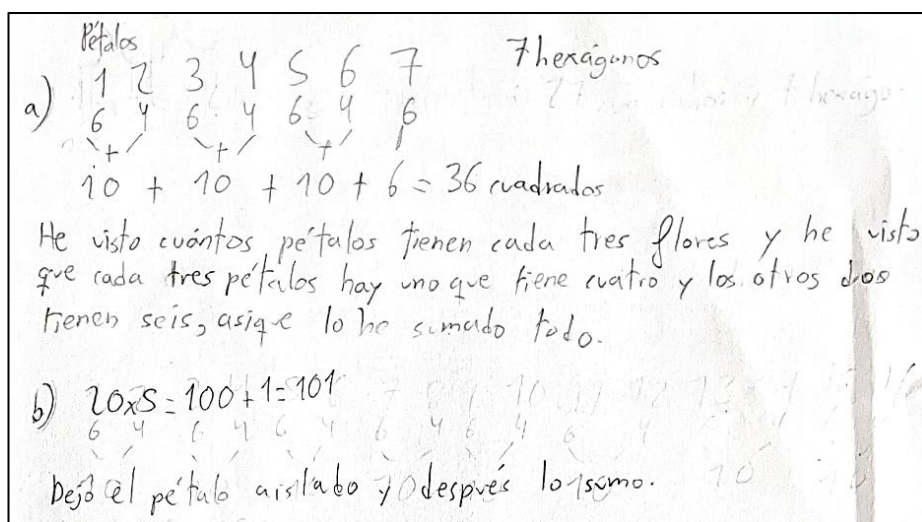
Nivel de RAE	Generalización o razonamiento funcional	Generalización cercana	Generalización lejana	Regla general	Total
0.I	Generalización aritmética	7	4	1	12
0.II	Generalización aritmética sofisticada. Razonamiento funcional particular	2	1		3
1.I	Generalización factual	10	12	6	28
2.I	Generalización contextual	2	2	6	10

	Razonamiento funcional incipiente			
2.II	Razonamiento funcional parcial		3	3
	Sin estrategia explícita	1	3	4
	No contesta		2	5

Aquellos que usaron una estrategia de conteo, usualmente con soporte icónico, para determinar el número de cuadrados necesarios en una cadena de 7 flores (nivel 0.I de RAE) y que emplearon esta misma estrategia en el apartado b) lo hicieron de manera incorrecta en este último caso.

Figura 13

Respuesta de E12. Cadena de margaritas, apartados a) (Nivel de RAE 0.II) y b) (nivel de RAE 1.I)



Parte del estudiantado utilizó estrategias de naturaleza aritmética-sofisticada (nivel 0.II de RAE) para resolver los primeros ítems. Por ejemplo, para responder al apartado a), E12, descompone el patrón observando que entre cada dos flores a las que se contarán cuatro pétalos (cuadrados) la del medio tendría cuatro. Se observa una mirada pseudo-estructural, la relación funcional se construye como un conjunto de relaciones particulares entre valores específicos correspondientes. Después cambia su estrategia en el apartado b), abstrayendo del proceso anterior, la cantidad fija de pétalos en cada flor (independientemente de su posición) y añadiendo “el pétalo aislado” para determinar la regla de formación (nivel 1.I de RAE).

Figura 14

Respuesta de E7. Cadena de margaritas, items a) y b). Generalización factual. Nivel 1.I RAE.

a) Hexágonos = 7. Cuadrados = 36; porque si multiplicamos los cuadraditos que hay en una flor o sea (6) y lo multiplicamos por el número de flores que hay (7) sería $6 \times 7 = 42$ y si le restamos 6 que son los cuadraditos que comparten todas las flores sería esto:
 $6 \times 7 = 42 - 6 = 36$. Esta es mi explicación.

b) Hexágonos = 20. Cuadrados = 101; porque si multiplicamos los cuadraditos que hay en una flor (6) y lo multiplicamos por el número de flores que hay (20) sería $20 \times 6 = 120$ y luego lo restamos 19 que son los cuadraditos que comparten todas las flores sería esto.
 $20 \times 6 = 120 - 19 = 101$.

Quienes usaron la estrategia $(n \times 6) - (n - 1)$ en el apartado a) la mantuvieron en b) y c). En este caso, los/las estudiantes muestran como E7 en la Figura 14, una generalización de tipo factual. Lo indeterminado no llega a enunciarse de forma explícita, sino que se expresa a través de acciones concretas. Lo que se generaliza es el esquema operacional, potencialmente reiterativo, que permite determinar el número de cuadrados.

En otros casos, como el de E9, muestran una generalización de tipo contextual (nivel 2.I de RAE) cuando indican “multiplicando los hexágonos por los cuadrados menos los que comparten”. La regla general que permite determinar el número de cuadrados necesario para construir una cadena con un número dado de flores (igual al de hexágonos) se expresa en términos genéricos, vinculada al contexto, pero no en el plano de lo numérico. Aquellos estudiantes que no detectaron las características del patrón generalizan multiplicando por seis, como E20 “multiplicando los cuadrados”. Solo tres estudiantes no respondieron al apartado c).

Las respuestas más frecuentes al apartado c), muestran una generalización de tipo contextual, y un razonamiento funcional incipiente. Se describe la relación general entre el número de flores (posición en el patrón) y el número de cuadrados, pero no se identifican las cantidades específicas que se comparan por lo que no llega darse la transformación entre ellas. Por ejemplo, E7 indica en c) “multiplicamos los cuadraditos que hay en una flor por el número de flores que hay y luego le restamos los cuadraditos que comparten”.

En otros casos, los/las estudiantes responden en c) como E22, “el número de hexágonos se multiplica por seis y se le resta el número de hexágonos menos uno” $(n \times 6 - (n - 1))$. La estudiante expresa la transformación entre las cantidades específicas, si bien no articula dominio, imagen y regla de correspondencia, por lo que se considera un razonamiento funcional parcial (Burgos et al., 2024).

Por último, en el apartado d) se espera que el estudiantado haga uso de la relación funcional dada en c) para determinar si es posible construir una cadena de flores para un número de cuadrados dado. Se persigue avanzar en la unitarización de la relación funcional y su tratamiento inverso (Burgos, 2023). Dos estudiantes responden “no” sin mostrar una estrategia explícita. Tres estudiantes se apoyaron en los resultados obtenidos en b), como E12 “No, en el b se necesitan 101, de hecho”. Algunos estudiantes que en los apartados anteriores recurrieron a la regla $(n \times 6) - (n - 1)$, afirman que se puede realizar, ya que “5 es múltiplo de 100”. Por otro lado,

aquellos estudiantes que usaron la relación $n \times 6$, identificaron que no se puede ya que “6 no es múltiplo de 100”, basándose en la estructura multiplicativa de los números naturales. Finalmente, ocho estudiantes no resolvieron esta tarea.

5. CONCLUSIONES

En este trabajo hemos descrito el diseño y resultados de una implementación con un grupo de estudiantes de sexto curso de primaria que se enfrentaban por primera vez a tareas de naturaleza algebraica que implicaban la modelización, la justificación y creación de identidades algebraicas y la generalización en patrones geométricos.

Los/las estudiantes tuvieron éxito en la resolución de la tarea de modelización, empleando de manera general un razonamiento pre-algebraico (esencialmente de nivel 0.I de RAE). También identificaron de manera adecuada la validez de las identidades algebraicas, con mayor dificultad en el caso de la expresión $-2 + d = d + 2$, recurriendo en este caso a niveles de razonamiento proto-algebraico propios del uso de ejemplos genéricos, el razonamiento estructural incipiente y la resolución de ecuaciones de tipo aritmético. Cuando crean identidades algebraicas (siempre ciertas, ciertas a veces o siempre falsas), lograr usar el símbolo literal como incógnita o variable, considerando la dependencia de la validez de la expresión respecto del símbolo literal (nivel 2.I de RAE). Estos resultados están en línea con los de Pinto et al. (2023) quienes observaron la capacidad de justificar, si bien lo hicieron oralmente, la veracidad de igualdades numéricas y algebraicas, basándose en relaciones entre sumandos y propiedades de las operaciones, reconociendo el significado relacional del signo igual.

Finalmente, con relación a la tarea de patrones geométricos, los resultados muestran la amplia diversidad de estrategias usadas por los/las estudiantes. Por un lado, las estrategias vinculadas a un nivel 0.I de RAE, son insuficientes para responder con éxito a las tareas que demandan generalización lejana o el establecimiento de la regla general. Los/las estudiantes que desarrollan prácticas con un nivel RAE superior, logran identificar las características propias del patrón, siendo la estrategia $n \times 6 - (n - 1)$ la más utilizada, aunque no en todos los casos mostraron un razonamiento estructural completo ni lograron derivar una expresión canónica equivalente. Se observaron dificultades para responder a la última pregunta, lo que pone de manifiesto que los/las estudiantes aún no articulan dominio, imagen y regla de correspondencia, por lo que el razonamiento funcional solo llega a ser parcial y en escasas ocasiones.

El estudiantado, aún sin haber trabajado en el aula de clase el sentido algebraico, exhibe cierto razonamiento analítico incipiente, ya que se refiere a símbolos literales como cantidades desconocidas (variables) y considera la posibilidad de operar con estas como si las conocieran. Apreciamos como Coles y Ahn (2022), que cuando los/las estudiantes escriben sobre lo que hacen o notan, muestran mayor evidencia de tratar las relaciones de manera analítica. Así, consideramos necesario promover la justificación en el aula, para potenciar rasgos del sentido algebraico, como son también la modelización o el pensamiento funcional (Ayala-Altamirano y Molina, 2021).

AGRADECIMIENTOS

Investigación realizada como parte del proyecto de investigación PID2022-139748NB-100 financiado por MCIN/AEI/10.13039/501100011033/ y por FEDER, UE

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Alsina, À. (2022). *Itinerarios didácticos para la enseñanza de las matemáticas: 3-6 años*. Gráo.
- Australian Curriculum, Assessment and Reporting Authority [ACARA] (2014). *Foundation to year 10 curriculum: Number sense and algebra* (ACMSPO24).
- Ayala-Altamirano, C. y Molina, M. (2021). Fourth-graders' justifications in early algebra tasks involving a functional relationship. *Educational Studies in Mathematics*, 107, 359–382. <https://doi.org/10.1007/s10649-021-10036-1>
- Beltrán-Meneu, M. J., Ramírez-Uclés, R., Ribera-Puchades, J. M., Gutiérrez, A. y Jaime, A. (2024). A Case Study of Proving by Students with Different Levels of Mathematical Giftedness. *Mathematics Teaching Research Journal*, 16(2), 119–145.
- Blanton, M. L., Brizuela, B. M., Stephens, A., Knuth, E., Isler, I., Gardiner, A. M., Stroud, R., Fonger, N. L. y Stylianou, D. (2018). Implementing a framework for early algebra. En C. Kieran (Ed.), *Teaching and learning algebraic thinking with 5- to 12-year-olds: The global evolution of an emerging field of research and practice* (pp. 27-49). Springer
- Blanton, M., Brizuela, B. M., Murphy, A., Sawrey, K. y Newman-Owens, A. (2015). A learning trajectory in 6-year-olds' thinking about generalizing functional relationships. *Journal for Research in Mathematics Education*, 46(5), 511-559.
- Burgos, M. (2023). *Razonamiento algebraico elemental. Implicaciones en la formación de profesores*. Editorial Universidad de Almería.
- Burgos, M., Tizón-Escamilla, N., y Godino, J. D. (2024). Expanded model for elementary algebraic reasoning levels. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, 20(7), em2475. <https://doi.org/10.29333/ejmste/14753>
- Carraher, D. W. y Schliemann, A. D (2019). Early algebraic thinking and the US mathematics standards for grades K to 5, *Infancia y Aprendizaje*, 42(3), 479-522.
- Coles, A. y Ahn, A. (2022) Developing algebraic activity through conjecturing about relationships. *ZDM Mathematics Education*, 54, 1229–1241. <https://doi.org/10.1007/s11858-022-01420-z>
- Common Core State Standards Initiative [CCSSI] (2023). *Common Core State Standards for Mathematics*. https://corestandards.org/wp-content/uploads/2023/09/Math_Standards1.pdf
- Godino, J. D., Aké, L., Gonzato, M. y Wilhelmi, M. R. (2014). Niveles de algebrización de la actividad matemática escolar. Implicaciones para la formación de maestros. *Enseñanza de las Ciencias*, 32(1), 199-219.
- Kelly, A. E., Lesh, R. A. y Baek, J. Y. (2014). *Handbook of design research methods in education: Innovations in science, technology, engineering, and mathematics learning and teaching*. Routledge.
- Kieran, C. (2022) The multi-dimensionality of early algebraic thinking: background, overarching dimensions, and new directions. *ZDM Mathematics Education*, 54, 1131-1150. <https://doi.org/10.1007/s11858-022-01435-6>.
- Malara, N. A., y Navarra, G. (2018). New words and concepts for early algebra teaching: Sharing with teachers epistemological issues in early algebra to develop students' early algebraic thinking. *Teaching and learning algebraic thinking with 5-to 12-year-olds: The global evolution of an emerging field of research and practice*, 51-77.

- Ministerio de Educación y Formación Profesional (MEFP). Real Decreto 157/2022, de 1 de marzo, por el que establecen la ordenación y las enseñanzas mínimas de la Educación Primaria. *Boletín Oficial del Estado*, 52 (I), 24386 – 24504.
- Pinto, E., Ayala-Altamirano, C., Molina, M. y Cañadas, M. C. (2023). Desarrollo del pensamiento algebraico a través de la justificación en educación primaria. *Enseñanza de las Ciencias*, 41(1), 149-173. <https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.5835>
- Pittalis, M., Pitta-Pantazi, D. y Christou, C. (2020). Young students' functional thinking modes: The relation between recursive patterning, covariational thinking, and correspondence relations. *Journal for Research in Mathematics Education*, 51(5), 631-674. <https://doi.org/10.5951/jresmetheduc-2020-0164>
- Schifter, D. y Russell, S.J. (2022) The centrality of student-generated representation in investigating generalizations about the operations. *ZDM Mathematics Education*, 54, 1289–1302. <https://doi.org/10.1007/s11858-022-01379-x>
- Wilkie, K. J. (2016). Learning to teach upper primary school algebra: changes to teachers' mathematical knowledge for teaching functional thinking. *Mathematics Education Research Journal*, 28, 245-275.
- Wilkie, K. y Hopkins, S. (2024). Primary students' relational thinking and computation strategies with concrete-to-symbolic representations of subtraction as difference. *Journal of Mathematical Behavior*, 73, 101121.

XXII JAEM de Jaén 2026. Un Viaje al interior de las Matemáticas

Juan Antonio Espinosa Pulido

Departamento de Didáctica de la Matemática, Universidad de Jaén (Jaén, España),
jepulido@ujaen.es

Resumen: *Del 1 al 4 de julio de 2026, la ciudad de Jaén acogerá las XXII Jornadas para el Aprendizaje y la Enseñanza de las Matemáticas (XXII JAEM), organizadas por la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas (FESPM) y la Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales, en colaboración con la Universidad de Jaén. Las JAEM constituyen el encuentro más relevante en España en torno a la didáctica y divulgación de las matemáticas, un espacio de formación, reflexión y convivencia entre docentes de todos los niveles educativos, desde Educación Infantil hasta la Universidad.*

Palabras clave: *Educación Matemática, Didáctica, Innovación, Congreso, Formación Docente, Jaén 2026.*

XXII JAEM of Jaén 2026. A Journey into the Heart of Mathematics

Abstract: *From July 1st to 4th, 2026, the city of Jaén will host the 22nd Conference on the Teaching and Learning of Mathematics (XXII JAEM), organized by the Spanish Federation of Mathematics Teachers' Societies (FESPM) and the Andalusian Society of Mathematics Education Thales (SAEM Thales), in collaboration with the University of Jaén. The JAEM conference is the most significant national event devoted to mathematics education in Spain. It provides a unique space for training, reflection, and exchange among teachers of all educational levels — from early childhood to university — as well as researchers and science communicators.*

Keywords: *Mathematics Education, Didactics, Innovation, Conference, Teacher Training, Jaén 2026.*

1. UN PUNTO DE ENCUENTRO PARA LA EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Las Jornadas para el Aprendizaje y Enseñanza de las Matemáticas (JAEM) son el principal foro de encuentro de la comunidad matemática educativa en España. Durante más de cuatro décadas, estas jornadas han reunido a miles de docentes, investigadores y divulgadores en torno a un objetivo común: mejorar la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.

En 2026, Jaén toma el relevo de Santander para celebrar su XXII edición, con la ilusión de convertir la ciudad en un auténtico espacio para el pensamiento matemático, donde se encuentren tradición, innovación y pasión por la educación.

Figura 1

Logotipo de las XXII JAEM de Jaén 2026.



2. SEDE Y ORGANIZACIÓN

El congreso se celebrará íntegramente en el Campus de Las Lagunillas de la Universidad de Jaén, un espacio moderno, accesible y dotado de excelentes infraestructuras. Sus amplias zonas verdes, equipamientos tecnológicos y espacios de encuentro convierten a la UJA en un entorno idóneo para acoger un evento de esta magnitud.

La ciudad de Jaén, capital del “paraíso interior” andaluz, ofrece a los visitantes una combinación perfecta de patrimonio, cultura, gastronomía y hospitalidad, convirtiéndose en un marco incomparable para disfrutar de las matemáticas y del encuentro entre docentes.

Figura 2

Campus de las lagunillas – Universidad de Jaén.



3. NÚCLEOS TEMÁTICOS

El congreso se articula en torno a siete núcleos temáticos que recogen las principales líneas de reflexión e innovación de la Educación Matemática actual:

- **Procesos matemáticos:** experiencias, métodos y reflexiones sobre la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en todas las etapas educativas.
- **Conexiones extramatemáticas:** relaciones entre las matemáticas y otras disciplinas, proyectos STEAM y la matematización del entorno.
- **Evaluación de y para el aprendizaje:** estrategias, herramientas e instrumentos para una evaluación formativa, global y significativa.

- **Recursos para el aula:** materiales manipulativos, digitales y tecnológicos que potencien el razonamiento y la comprensión, con especial atención a la Educación Infantil y Primaria.
- **Formación del profesorado:** modelos de formación inicial y continua, comunidades de aprendizaje, mentorización docente y codocencia.
- **Divulgación matemática:** mejorar el discurso matemático y acercar la matemática a la sociedad mediante experiencias comunicativas y divulgativas.
- **Inclusión e igualdad:** estrategias y recursos para garantizar una enseñanza de las matemáticas equitativa, accesible y centrada en las capacidades de todo el alumnado.

Figura 3

Comité científico de las XXII JAEM



4. ESTRUCTURA DE LAS JORNADAS

Las XXII JAEM combinarán conferencias plenarias a cargo de reconocidos especialistas nacionales e internacionales con comunicaciones, talleres, mesas redondas y exposiciones interactivas.

El programa fomentará el intercambio de experiencias docentes y el diálogo entre todos los niveles educativos, desde Infantil hasta Universidad, integrando la investigación didáctica con la práctica cotidiana del aula.

Además, el congreso contará con espacios de divulgación matemática, muestras interactivas, stands y actividades abiertas a la sociedad, que permitirán acercar las matemáticas al público general y dar visibilidad al papel de la educación matemática en la vida diaria.

Figura 4

Comité organizador de las XXII JAEM



5. INSCRIPCIÓN EN LAS XXII JAEM DE JAÉN 2026

La inscripción en las XXII Jornadas para el Aprendizaje y Enseñanza de las Matemáticas (JAEM) deberá realizarse exclusivamente a través del formulario oficial disponible en la web del congreso (<https://22.jaem.es/participacion/inscripciones>).

Una vez completado el formulario, las personas inscritas recibirán un correo de confirmación con los datos de acceso a su entorno personal, desde el cual podrán gestionar diversos aspectos de su participación: verificar o modificar sus datos, enviar propuestas de talleres o comunicaciones, consultar el estado de sus aportaciones, elegir talleres, inscribirse en excursiones y confirmar su asistencia a la cena de gala.

La inscripción se hará efectiva tras el pago de la cuota correspondiente, que puede realizarse por transferencia bancaria o Bizum. Las tarifas reducidas estarán disponibles hasta el 31 de mayo de 2026.

Cuotas XXII JAEM	Hasta el 31/05/2026	A partir del 1/06/2026
Miembros de sociedades federadas FESPM	120 €	150 €
General	180 €	220 €
Cena de gala	60 €	60 €
Visita a la Catedral de Jaén	14 €	14 €
Visita a los Baños Árabes	10 €	10 €
Excursión a Baños de la Encina	25 €	25 €
Visita a Úbeda o Baeza	30 €	30 €

6. JAÉN, CIUDAD ANFITRIONA

Jaén, conocida como la capital mundial del aceite de oliva, ofrece un entorno único donde la historia, la ciencia y la naturaleza conviven en armonía. Su patrimonio monumental -la Catedral renacentista de la Asunción, el Castillo de Santa Catalina, los baños árabes- y su paisaje de olivares infinitos conforman un escenario singular y acogedor.

Los asistentes podrán disfrutar de su gastronomía, su hospitalidad y su cultura mientras comparten unos días dedicados a las matemáticas y a la convivencia profesional y personal.

Figura 5

Video promocional de las XXII JAEM - Catedral de Jaén.



7. UNA INVITACIÓN A PARTICIPAR

Las XXII JAEM de Jaén 2026 quieren convertirse en un espacio abierto, dinámico y constructivo para toda la comunidad educativa. Docentes de todas las etapas, investigadores, formadores, estudiantes universitarios y amantes de las matemáticas encontrarán en este encuentro una oportunidad única para aprender, compartir y disfrutar de la educación matemática.

Por ello, animamos a todos los interesados a realizar su inscripción cuanto antes, beneficiándose de las tarifas reducidas y asegurando su plaza en los talleres y actividades complementarias. Jaén se prepara para recibir a la educación matemática española con los brazos abiertos y con la convicción de que estas jornadas marcarán un punto de inflexión en nuestra forma de enseñar y aprender matemáticas.

Figura 6

Calle Bernabé Soriano - Jaén.



Para más información: visitar la web oficial de las XXII JAEM – Jaén 2026. (<https://22.jaem.es/>)

