

εpsilon

Revista de Educación Matemática

Editada por la Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales

"Desde el punto de vista de la investigación en educación matemática, es obligación de quienes investigamos hacer el esfuerzo para difundir nuestros estudios"

Ruiz-Hidalgo, J. F.

117
2024

Equipo Editorial

Burgos Navarro, María José
Carrillo de Albornoz Torres, Agustín
Cecilia Gámiz, Lina María
Conde Fernández, Silvia
Contreras García, José Miguel
España Pérez, Francisco
Fernández Plaza, Jose Antonio
Flores Lamolda, Lucía
Flores Martínez, Pablo
Gallardo Jiménez, Sandra
Gámez Valero, Carmen
García Schiaffino, Margarita
Garzón Guerrero, José Antonio
López Centella, Esperanza
Lupiáñez Gómez, José Luis
Molina Muñoz, David
Molina Portillo, Elena
Montejo Gámez, Jesús
Moreno Verdejo, Antonio
Partal García, Daniel
Pérez Martos, María del Carmen
Ramírez Uclés, Rafael
Rivas Olivo, Mauro Alfredo
Rodríguez González, Miguel
Roquette Rodríguez, Esther
Ruiz Hidalgo, Juan Francisco
Tizón Escamilla, Nicolás
Valero Terrón, Iván
Villegas Escobar, Adela María

117

2024

Edita
Sociedad Andaluza de
Educación Matemática "Thales"
Universidad de Cádiz
C.A.S.E.M.
Facultad de Ciencias
Departamento de Matemáticas
Campus del Río San Pedro
Torre Central, 4ª planta
11510 Puerto Real (Cádiz)
Teléfono: 956012833
Email: thales.matematicas@uca.es

Depósito Legal
SE-421-1984

ISSN
2340-714X

Período
2024

Suscripción
Anual

ÍNDICE / CONTENTS

APORTES DE LA INVESTIGACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

- 7 **Análisis de perfiles estratégicos para el aprendizaje autorregulado de matemática en Educación Superior y su relación con el rendimiento académico**
Sofía Funkner, Laura Beatriz Wagner y Maria Paula Dieser
- 31 **¿Cómo conciben la aleatoriedad los maestros de educación infantil en formación?**
Osmar D. Vera, Carmen Batanero y Jocelyn D. Pallauta
- 45 **Los artículos de investigación en didáctica de la matemática**
Juan F. Ruiz-Hidalgo

EXPERIENCIAS DE AULA

- 57 **Geometría circular utilizando GeoGebra: análisis de relaciones entre ángulos inscritos y centrales**
Josafat Javier Velázquez Hernández y Clara Mayo Juárez
- 71 **El coseno y el seno de un ángulo en un sistema de coordenadas utilizando simulaciones PhET**
Marco Antonio Molina Paredes, Clara Mayo Juárez y Alejandro Miguel Rosas Mendoza
- 85 **Entrevista al profesorado: José Fernando Cenit Santiago**
José Fernando Cenit Santiago

ACTIVIDADES EN LA SAEM THALES

- 95 **XXVII Olimpiadas Matemáticas Thales de primaria de Granada**
Iván Valero Terrón, Margarita García Schiaffino, Carmen Méndez Bravo y Rafael Ramírez Uclés

Análisis de perfiles estratégicos para el aprendizaje autorregulado de matemática en Educación Superior y su relación con el rendimiento académico

Sofía Funkner

Universidad Nacional de La Pampa (Argentina), funkner.sofia@exactas.unlpam.edu.ar

Laura Beatriz Wagner

Universidad Nacional de La Pampa (Argentina), lalywagner@gmail.com

Maria Paula Dieser

Universidad Nacional de La Pampa (Argentina), pauladieser@exactas.unlpam.edu.ar

Resumen: El aprendizaje autorregulado ofrece un marco para comprender algunas variables que influyen en el desempeño académico. En este trabajo se analizan perfiles estratégicos de 327 estudiantes de un curso inicial de matemática en una universidad argentina. Se encuentra que, en general, son moderadamente estratégicos, destacando la regulación del esfuerzo y la baja disposición a colaborar con pares. Además, la frecuencia de uso de algunas estrategias depende de variables sexogénicas y del historial académico, y los estudiantes más estratégicos tienen mayores probabilidades de éxito. Esto evidencia la importancia de promover el uso de estrategias autorregulatorias para mejorar el desempeño estudiantil.

Palabras clave: estrategias de aprendizaje, autorregulación del aprendizaje, rendimiento académico, matemática, educación superior

Analysis of strategic profiles for self-regulated learning mathematics in Higher Education and their relationship with academic performance

Abstract: Self-regulated learning offers a framework for understanding some variables that influence academic performance. In this paper, strategic profiles of 327 students who have taken a mathematics subject in the initial university cycle at an Argentine university are analyzed. It is found that, in general, these students are moderately strategic, highlighting the effort regulation and the low willingness to collaborate among peers. In addition, the frequency of use of some strategies depends on sex-gender variables and academic history, and more strategic students are more likely to succeed. This shows the importance of promoting self-regulated learning to improve student performance.

Key words: learning strategies, self-regulation of learning, academic performance, mathematics, higher education

1. INTRODUCCIÓN

En las últimas décadas se observa un movimiento internacional que aboga por un desplazamiento de la educación centrada en la enseñanza hacia una enfocada en el aprendizaje,

fijando como meta la formación de competencias. En este contexto, se demanda a las universidades la formación de estudiantes estratégicos, especialmente capacitados para aprender a aprender, y dotados de herramientas adecuadas para un aprendizaje a lo largo de la vida (Pozo y Mateos, 2009). Estas herramientas se concretan en el desarrollo y uso de estrategias de autorregulación del aprendizaje (Pintrich, 2000; Zimmerman, 1989, 2000).

Numerosos estudios empíricos demuestran la importancia del uso de estas estrategias para lograr un mejor aprovechamiento de la enseñanza, así como su rol predictivo sobre el rendimiento y desempeño académicos en diversas áreas de contenidos, contextos, modalidades y niveles educativos (Broadbent y Poon, 2015; Brydges et al., 2015; de Boer et al., 2018; Devolder et al., 2012; Dieser et al., 2020; Donker et al., 2014; Ergen y Kanadli, 2017; Garcia et al., 2018; Lee et al., 2019; Silverajah et al., 2022; Zheng, 2016). En particular, es posible identificar estos temas en el ámbito del aprendizaje de matemática en Educación Superior (Cho y Heron, 2015; Fong et al., 2015; Kuzilek et al., 2021; Musso et al., 2019; Roick y Ringeisen, 2018; Semensato et al., 2023; Sun et al., 2018; Van Dyken y Benson, 2019; Wild y Neef, 2023).

En consecuencia, resulta de interés analizar los perfiles estratégicos de tales estudiantes a fin de reconocer sus falencias formativas e implementar acciones tendientes a la promoción y el fortalecimiento de estrategias eficaces para mejorar su desempeño académico. Sin esta intervención, los estudiantes adquieren solo algunas técnicas que utilizan sin sistematizar ni reflexionar sobre sus beneficios para el aprendizaje (Boruchovitch y Machado, 2017). Este trabajo aborda estos temas. En particular, tiene por objetivo explorar, identificar y describir los perfiles estratégicos de un grupo de estudiantes de un curso de matemática del ciclo inicial universitario; e indagar si el uso de estas estrategias se relaciona con su rendimiento académico en el área. Por lo tanto, se plantean las siguientes preguntas de investigación (PI):

- PI1. ¿Qué estrategias de aprendizaje manifiestan usar los estudiantes?
- PI2. ¿Cómo varía el uso de estas estrategias según el sexo y la carrera de pertenencia, y a lo largo de los ciclos lectivos considerados?
- PI3. ¿Es posible establecer grupos de perfiles estratégicos de estudiantes?
- PI4. ¿Existe relación entre las estrategias de aprendizaje que manifiestan usar los estudiantes y el rendimiento académico?

2. MARCO TEÓRICO Y ANTECEDENTES

La autorregulación del aprendizaje (ARA) es un constructo de relevancia y vigencia en Psicología Educativa pues ofrece un marco para comprender algunas variables que influyen en el aprendizaje. Sin embargo, existen diversas definiciones del constructo (Schunk, 2008) y múltiples descripciones operacionales de los procesos empleados por los estudiantes para autorregular su aprendizaje (Zimmerman, 1990). Pese a ello, existe cierto consenso en que ésta resulta de la interacción de un conjunto de aspectos cognitivos, motivacionales, conductuales y contextuales (Pintrich, 2000; Zimmerman, 1989, 2000).

Esta naturaleza compleja de la ARA permite definirla como un proceso por el cual un estudiante, de manera activa, consciente y constructiva, monitorea y regula su cognición, motivación y conducta con la intención de alcanzar las metas que ha fijado para su aprendizaje, siempre a partir de las características cambiantes del contexto (Dieser et al., 2020).

A la luz de esta concepción, es posible identificar diversos modelos explicativos del aprendizaje autorregulado que intentan identificar las características y los procesos implicados en cada una de las cuatro dimensiones mencionadas, y reconocer algunas estrategias útiles para

la optimización de tales procesos (Panadero, 2017; Puustinen y Pulkkinen, 2001). Entre los modelos desarrollados se destaca el propuesto por Pintrich (2000) por su naturaleza completa y abarcativa, y por estar ampliamente citado por los especialistas en el campo.

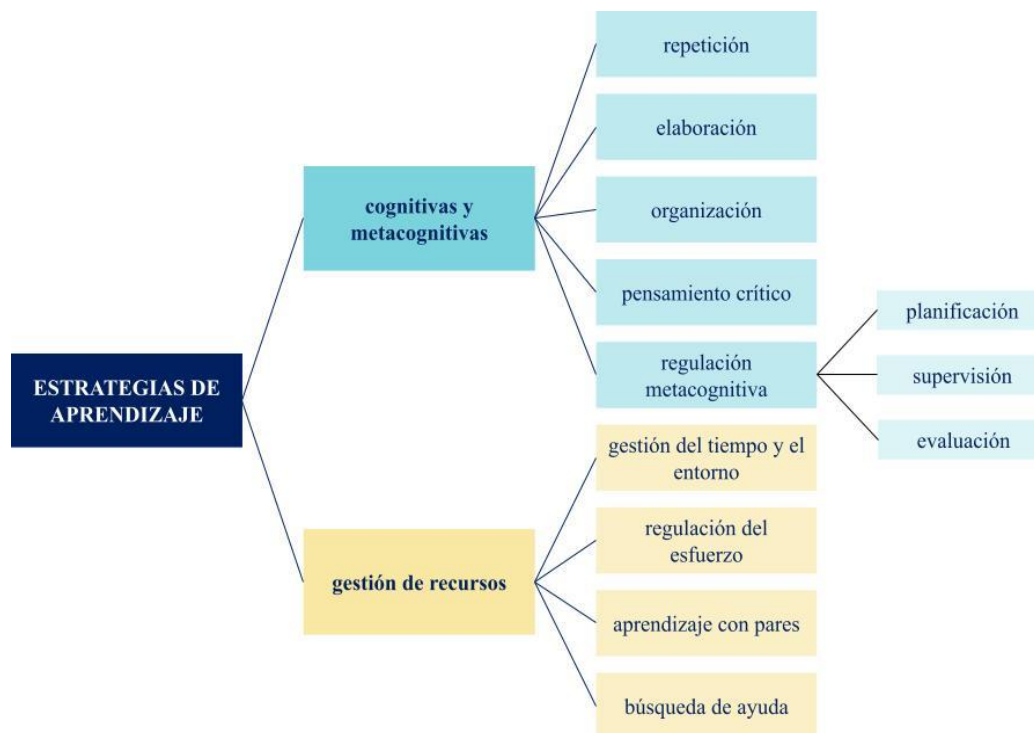
Pintrich (2000) propone un modelo de ARA sustentado en la perspectiva sociocognitiva de Bandura (1991). El modelo incluye dos categorías generales de procesos regulatorios que actúan sobre las cuatro áreas identificadas: (a) las creencias motivacionales, y (b) las estrategias de aprendizaje. Este trabajo centra su atención en el segundo grupo.

Las estrategias de aprendizaje pueden entenderse como una secuencia de acciones, procedimientos, o planes dirigidos a la consecución de ciertas metas (Paris et al., 1983; Zimmerman, 1990). Tienen un carácter consciente e intencional e implican la toma de decisiones, por parte del estudiante, ajustada al objetivo o meta que pretende conseguir y a las condiciones del contexto (Monereo, 2000; Pérez Sánchez y Beltrán Llera, 2014).

Pintrich (2000) reconoce nueve estrategias de aprendizaje esenciales para el proceso de ARA que actúan sobre la dimensión cognitiva, conductual y contextual. Las primeras incluyen las acciones cognitivas desarrolladas por los estudiantes para aprender, recordar y comprender algo nuevo, así como elementos de conocimiento y regulación de la cognición, conjugados en el concepto de metacognición (Pintrich, 2000). Las restantes son consideradas en la categoría de estrategias de gestión de recursos y corresponden a las decisiones y acciones tomadas por los estudiantes para optimizar ciertos elementos de su entorno de aprendizaje (Zimmerman, 1990) y controlar el propio comportamiento (Pintrich, 2000). Ambas categorías, esquematizadas en la Figura 1, se describen a continuación. Se reseñan, además, hallazgos de investigaciones desarrolladas en los últimos cinco años en el ámbito de cursos de matemática en instituciones de Educación Superior. Estos estudios involucraron diferentes instrumentos o escalas psicométricas para identificar el uso de estrategias de ARA en dichos contextos, así como diversas técnicas estadísticas para evaluar su rol predictivo sobre el desempeño de los estudiantes. Algunas de las investigaciones han abordado el efecto de intervenciones activas como aula invertida, factores motivacionales y emocionales (Cho y Heron, 2015; Pranke et al., 2015; Quinn y Aarao, 2020; Rotgans y Schmidt, 2009) sobre el rendimiento académico. Sin embargo, ninguno de los trabajos revisados ha estudiado el efecto de variables de índole sexogenérica o asociadas con la historia académica de los estudiantes sobre el uso de estrategias autorregulatorias. Tampoco se diagnosticaron perfiles de uso de estas estrategias ni se ha reconocido su rol predictivo sobre el desempeño académico en el área. En consecuencia, estos son aportes específicos de esta investigación.

Figura 1

Estrategias de aprendizaje consideradas en el modelo de ARA de Pintrich (2000). Fuente: Elaboración propia.



2.1. Estrategias cognitivas y metacognitivas

Pintrich (2000) incluye cuatro estrategias cognitivas que se ponen en juego en la instancia de ejecución de una tarea. Weinstein et al. (1983) reconocen tres de ellas:

1. Repetición, que incluye un conjunto de procedimientos para mantener y recordar cierta información por un corto periodo de tiempo (*e.g.* realizar múltiples ejercicios de cálculo combinado o de factorización de polinomios).
2. Elaboración, referida a procedimientos que posibilitan la codificación de la información, le dan significatividad conectándola con el conocimiento previo, lo que favorece su posterior recuperación (*e.g.* resumir, tomar notas, explorar diferentes formas de resolver un problema, explicar a otros).
3. Organización, están orientadas a la selección de la información apropiada y la construcción de conexiones entre sus elementos. Implican transformar la información a un formato que facilite la comprensión y asimilación, y combinar los elementos en un todo ordenado y significativo para la persona que aprende (*e.g.* elaborar mapas o redes conceptuales).

Pintrich et al. (1991) agregan una cuarta estrategia de índole cognitivo:

4. Pensamiento crítico, referida al grado en que un estudiante aplica el conocimiento previo a situaciones nuevas para resolver problemas, tomar decisiones o realizar evaluaciones críticas con respecto a ciertos estándares de excelencia (*e.g.* pensar de manera divergente para encontrar soluciones a los problemas).

A estas cuatro estrategias cognitivas, Pintrich (2000) suma la regulación metacognitiva.

5. Jacobs y Paris (1987) afirman que ésta refiere al conocimiento y el control de la cognición, se despliega en los tres momentos distintos de la realización de una tarea, e implica el uso de tres estrategias:
 - a. Planificación, que incluye el establecimiento de metas para la tarea y la selección de una estrategia para alcanzarlas (*e.g.* disponer el material de lectura y establecer un cronograma para leerlo y procesarlo mediante una técnica apropiada).
 - b. Supervisión, referida al seguimiento y la regulación de los progresos realizados hacia el logro de la meta (*e.g.* plantear preguntas para comprobar la comprensión de un material de lectura).
 - c. Evaluación, vinculada a la revisión o modificación de las acciones realizadas para alcanzar la meta (*e.g.* resolver autoevaluaciones optativas para chequear el nivel de comprensión y buscar información adicional si fuera necesario).

Diversas investigaciones de los últimos años demuestran que las estrategias cognitivas y metacognitivas resultan significativas en la predicción del rendimiento académico en cursos de matemática de nivel superior. En efecto, Fong et al. (2015) encuentran que el empleo de ambas predice calificaciones más altas en estudiantes europeos y estadounidenses. En estudiantes hispanos, sólo las estrategias asociadas con los procesos metacognitivos fueron un predictor significativo (Fong et al., 2015). Por su parte, los resultados alcanzados por Roick y Ringeisen (2018) demuestran que el uso de estrategias metacognitivas se relaciona positivamente con el rendimiento académico al inicio del curso, pero negativamente al final del mismo. Resultados similares son obtenidos por Van Dyken y Benson (2019). Estos autores encuentran que el establecimiento y la planificación de objetivos, la autoevaluación y la repetición son algunas de las estrategias con efectos positivos sobre la permanencia en cursos de precálculo. Además, existe evidencia de que la disponibilidad de recursos cognitivos afecta aspectos motivacionales y afectivos que influyen de manera directa sobre el rendimiento académico en matemática (Musso et al., 2019). Resultados similares obtienen Wild y Neef (2023).

2.2. Estrategias de gestión de recursos

Pintrich (2000) considera cuatro estrategias de gestión de recursos que se ponen en juego en diferentes etapas de ejecución de una tarea.

1. Gestión del tiempo y del entorno. La primera comprende la gestión de procesos para la planificación de actividades, y la programación y proyección temporal de las mismas a fin de cumplir con las metas fijadas en el tiempo disponible (*e.g.* programar un tiempo semanal para leer las lecturas recomendadas y realizar los ejercicios de la práctica). La segunda refiere a la preparación y disposición de un espacio físico o virtual en condiciones adecuadas para llevar adelante el aprendizaje (*e.g.* elegir una iluminación apropiada, desactivar las notificaciones en los dispositivos electrónicos, y organizar los documentos de lectura en carpetas temáticas).
2. Regulación del esfuerzo, que está vinculada al manejo y control del esfuerzo, la persistencia y la constancia en la tarea, en las que está implicada la voluntad (*e.g.* continuar estudiando aun cuando un material educativo digital no es interesante).
3. Búsqueda de ayuda estratégica entre compañeros y docentes cuando se lleva a cabo una determinada tarea (*e.g.* consultar al profesor en busca de aclaraciones sobre el material de aprendizaje).

4. Aprendizaje entre pares, vinculada a la disponibilidad para trabajar cooperativa o colaborativamente con los compañeros (*e.g.* participar en una reunión con otros estudiantes para estudiar).

Entre estas estrategias, la búsqueda de ayuda es una de las más relevantes en la predicción del rendimiento académico en cursos de matemática. Así lo demuestran diversos trabajos (Sun et al., 2018; Van Dyken y Benson, 2019). En particular, Sun et al. (2018) encuentran que solicitar ayuda se relaciona significativamente de forma positiva con los resultados académicos tanto en propuestas formativas presenciales y las basadas en aula invertida. Según los hallazgos de Van Dyken y Benson (2019), esta estrategia resultó ser la más influyente sobre la permanencia de estudiantes en cursos de precálculo. Kuzilek et al. (2021), por su parte, identifican que las estrategias de planificación y gestión temporal aumentan las posibilidades de aprobar los cursos de matemática en el primer año académico. No se han encontrado antecedentes de trabajos que analicen posibles relaciones entre las restantes estrategias de gestión de recursos y el desempeño en matemática en cursos de Educación Superior.

3. METODOLOGÍA

3.1. Participantes y contexto

Este estudio se realiza sobre el colectivo de estudiantes que han cursado la asignatura “Cálculo I - Análisis Matemático I - Matemática I” en la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales (FCEyN) de la Universidad Nacional de La Pampa (UNLPam), Argentina, entre los años 2019 y 2022. Dicha asignatura se dicta en el primer cuatrimestre del primer año para las carreras Ingeniería en Recursos Naturales y Medio Ambiente (IRNyMA); Licenciaturas en Geología, Química y Física; y Profesorado en Física. Su programa de estudios aborda temas propios del Cálculo Matemático, en adelante Cálculo.

Se trata de una asignatura ofrecida regularmente en modalidad presencial. Sin embargo, debido al contexto de pandemia por COVID-19, durante los años 2020 y 2021 las clases fueron desarrolladas de manera virtual en el marco de la enseñanza remota de emergencia. Con la vuelta parcial a la presencialidad, en el año 2022, la metodología de trabajo en esta asignatura consistió en una estructura híbrida en la que algunas clases se llevaron a cabo de manera presencial y otras virtual.

Entre los años 2019 y 2022 se registró una matrícula de 549 estudiantes. La administración de los instrumentos de indagación generó un total de 441 respuestas de las cuales se excluyen 114 por diversos motivos (*e.g.* datos faltantes o respuestas duplicadas). En consecuencia, la muestra resultante se compone de 327 estudiantes. En la Tabla 1 se resumen las características de la muestra tomada.

Tabla 1

Caracterización del grupo de 327 estudiantes en estudio.

Característica		Frecuencia	
Cohorte	2019	83	(25,38%)
	2020	85	(26,00%)
	2021	67	(20,49%)
	2022	92	(28,13%)
Sexo	Mujer	182	(55,66%)

	Varón	145	(44,34%)
Carrera	IRNyMA	109	(33,33%)
	Lic. en Geología	39	(11,93%)
	Lic. en Química	85	(26,00%)
	Lic. en Física	80	(24,46%)
	Prof. en Física	14	(4,28%)
Éxito en el curso	2019	31	(37,35%)
	2020	49	(57,65%)
	2021	24	(35,82%)
	2022	20	(21,74%)

3.2. Mediciones e instrumentos

3.2.1. Estrategias de aprendizaje

A fin de recolectar los datos que permitieran indagar el uso de estrategias de aprendizaje en el estudio del Cálculo por parte de los estudiantes del colectivo bajo estudio, se diseñó un instrumento basado en el Cuestionario de Motivación y Estrategias de Aprendizaje (MSLQ, por sus siglas en inglés *Motivated Strategies for Learning Questionnaire*) (Pintrich et al., 1991). El MSLQ consta de 81 reactivos que indagan sobre aspectos motivacionales de los estudiantes y sobre las estrategias de aprendizaje que utilizan para lograr sus metas.

En este trabajo, se consideraron los 50 reactivos correspondientes a la escala de estrategias de aprendizaje. Estas afirmaciones fueron traducidas al español y adaptadas al contexto del Cálculo. También se desglosaron algunas sentencias y agregaron otras para referir a situaciones habituales en el contexto argentino y latinoamericano. De este proceso, resultaron 52 reactivos. Para su valoración se utilizó una escala Likert de cinco niveles asociada a la frecuencia de uso de la conducta referida (1: no uso de la estrategia; 5: alta frecuencia de uso de la estrategia). La media de las valoraciones asignadas a los ítems que refieren a una misma estrategia arroja un valor entre 1 y 5 que da cuenta de la frecuencia media con que el estudiante declara emplear la estrategia en cuestión (Pintrich et al., 1991). Los ítems invertidos se transformaron previamente (6 – valor autoinformado) a fin de que las valoraciones dadas sean favorables a la estrategia evaluada.

Las 52 afirmaciones que surgen del proceso de traducción, adaptación, y validación del MSLQ conforman el Cuestionario de Estrategias de Aprendizaje de Matemática (SLQmath, por sus siglas en inglés *Mathematics Learning Strategies Questionnaire*) y se incluyen en un cuestionario¹ implementado mediante la herramienta “Formularios de Google”. Dicho instrumento se puso a disposición de los estudiantes en el curso *online* de la asignatura dentro del entorno virtual de enseñanza y aprendizaje Moodle de la FCEyN (UNLPam) al comienzo de cada ciclo lectivo (2019, 2020, 2021 y 2022) durante un periodo aproximado de un mes entre las últimas semanas de marzo y las primeras de abril.

Una sucesión de pruebas psicométricas, sugeridas por Carretero et al. (2007), permiten afirmar que el SLQmath evidencia una estructura factorial adecuada siguiendo los criterios propuestos por Hu y Bentler (1999), Lai (2020), y Walker y Smith (2017) ($\chi^2=3535,5$, g.l.=1238,

¹ Enlace al cuestionario aplicado a los estudiantes: <https://forms.gle/i9ipSz5j2YyhVtCr8>

valor $p \geq 0$, RMSEA=0,075, CFI=0,893, SRMR=0,0686) y una consistencia interna general buena a excelente (alpha de Cronbach=0,89 y omega de McDonalds=0,9).

En la Tabla 2 se resume la información referida a los índices parciales de consistencia interna. Según se observa, las subescalas asociadas a la gestión del tiempo y del entorno y a las estrategias metacognitivas poseen una fiabilidad aceptable (alpha de Cronbach=0,71). El resto de los índices parciales, a excepción del asociado a la búsqueda de ayuda, fluctúan entre 0,55 y 0,69, lo que indica una fiabilidad cuestionable. No obstante, Guilford (1954) sostiene que una fiabilidad de 0,50 es suficiente para investigaciones asociadas a la descripción de grupos, como es el caso de este trabajo. Por su parte, la subescala de búsqueda de ayuda produce un alfa de Cronbach por debajo de dicho umbral (0,47). Esto podría deberse a que la subescala está compuesta por pocos ítems (5 de 52), dos de ellos (9 y 52) con cargas factoriales bajas (0,1 y 0,18 respectivamente). No obstante, dada la importancia de estos dos reactivos en el ámbito de la Educación Superior Latinoamericana, se decide continuar con el modelo completo, reconociendo que los resultados asociados a la subescala en cuestión deben considerarse prudencialmente.

Tabla 2

Composición y coeficiente alfa de Cronbach de cada subescala.

Subescala	Cantidad e indicador de ítems	Alfa de Cronbach
Repetición	4 8-15-28-41	0,55
Elaboración	6 22-31-34-36-38-51	0,59
Organización	4 1-11-18-32	0,60
Pensamiento crítico	5 7-16-20-35-40	0,61
Regulación del esfuerzo	4 6-17-29-44	0,69
Gestión del tiempo y el entorno	9 4-12-21-33-39-42-43-47-49	0,71
Regulación metacognitiva	12 2-5-10-13-23-24-25-26-30-46-48-50	0,71
Búsqueda de ayuda	5 9-27-37-45-52	0,47
Aprendizaje con pares	3 3-14-19	0,67

3.2.2. Rendimiento académico

El rendimiento académico es medido mediante el resultado obtenido por cada estudiante al finalizar la cursada de la asignatura. Estos resultados se tomaron de los registros del sistema de gestión académica SIU Guaraní. Corresponden a cuatro niveles (ausente, desaprobado, regularizado, promocionado) recategorizados según el resultado se considere exitoso (regulariza o promociona) o no (ausente o desaprueba).

3.2.3. Otros atributos

Atributos de índole personal (nombre, DNI y sexo) y vinculados con la historia académica del estudiante (carrera, condición de cursada, experiencia previa con la asignatura u otra similar, y motivo de fracaso si se ha cursado con anterioridad alguna asignatura vinculada con el Cálculo) se indagaron mediante el cuestionario descrito previamente.

3.3. Análisis de datos

Para responder a las preguntas de investigación se realizó, en primera instancia, un análisis descriptivo univariado (Johnson y Kuby, 2012) mediante el recuento de frecuencias de las variables correspondientes a los aspectos personales y académicos. Además, con el objetivo de establecer cuáles son las estrategias de aprendizaje que manifiestan poseer los estudiantes, se obtuvieron medidas resumen (media, desvío, coeficiente de variación, mínimo, mediana y máximo) y gráficas (boxplot) de las variables correspondientes a las estrategias de aprendizaje. A su vez, se realizó un análisis descriptivo bivariado con el fin de determinar si existe relación entre las estrategias de aprendizaje declaradas y algunos aspectos personales y académicos, incluido el rendimiento. Para ello se recurrió a medidas resumen por grupos (media, desvío, coeficiente de variación, mínimo, mediana y máximo) (Johnson y Kuby, 2012) y gráficas (radar) (Holtz y Healy, 2018).

Con el fin de encontrar grupos de individuos con características similares (perfiles estratégicos), se llevó a cabo un análisis de cluster jerárquico (Bussab et al., 1990; Johnson y Wichern, 2007) considerando las distancias euclidiana y Manhattan, y los métodos del vecino más cercano, vecino más lejano, promedio de las distancias, centroide y Ward. Se seleccionó el modelo con mayor índice de correlación cofenética. Por último, se aplicó una prueba de independencia Chi Cuadrado (Siegel y Castellan, 1995) para determinar si existe asociación estadística significativa entre el rendimiento académico y el grupo de perfil estratégico al cual pertenece un estudiante.

Se utilizó el *software* estadístico R (R Core Team, 2022) para el total de los análisis realizados. En particular, se utilizaron los paquetes *MASS*, *ggplot2*, *ggradar*, *dplyr*, *scales* y *tibble* para el análisis exploratorio, y el paquete *cluster* para el análisis de cluster.

4. RESULTADOS Y DISCUSIÓN

Para el análisis de los resultados y, por consiguiente, para dar respuesta a las preguntas de investigación planteadas y referidas a las estrategias de aprendizaje que manifiestan poseer los estudiantes de “Cálculo I - Matemática I - Análisis Matemático I” de la FCEyN (UNLPam), se considera la siguiente interpretación de las puntuaciones obtenidas referidas a la frecuencia de uso de las estrategias de ARA:

- [1; 1,50): no utilización de la estrategia
- [1,50; 2,50): bajo uso de la estrategia
- [2,50; 3,50): moderado uso de la estrategia
- [3,50; 4,50): alto uso de la estrategia
- [4,50; 5]: fuerte uso de la estrategia

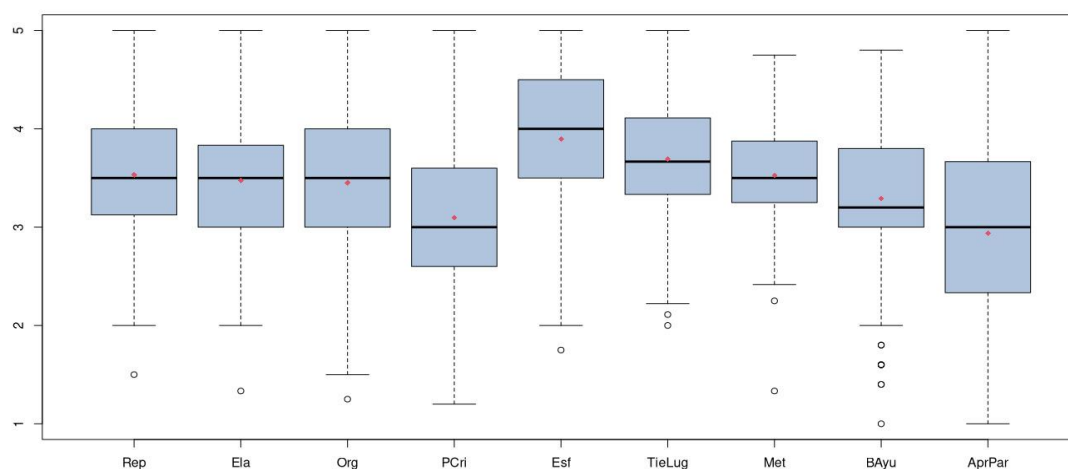
4.1. ¿Qué estrategias de aprendizaje manifiestan usar los estudiantes?

Según se observa en la Figura 2, los estudiantes de Cálculo manifiestan hacer un alto uso de la metacognición (valoración media: $3,53 \pm 0,49$), repetición (valoración media: $3,53 \pm 0,67$) y gestión del tiempo y entorno para el estudio (valoración media: $3,70 \pm 0,57$), pero sobre todo del esfuerzo (valoración media: $3,90 \pm 0,65$). En la distribución de esta última estrategia, se observa un leve sesgo a la derecha con el 75% de las valoraciones superando las 3,50 unidades. Sin embargo, se presenta un solo caso atípico en el que el estudiante manifiesta utilizar de manera poco frecuente el esfuerzo (valoración: 1,75).

En lo que respecta al resto de las estrategias de aprendizaje consideradas, estos estudiantes manifiestan ser moderadamente estratégicos (Figura 2). En particular, las estrategias cognitivas de mayor profundidad de procesamiento de la información como la elaboración (valoración media: $3,48 \pm 0,60$), la organización (valoración media: $3,45 \pm 0,72$) y el pensamiento crítico (valoración media: $3,10 \pm 0,69$) presentan una distribución bastante simétrica. Este mismo comportamiento se observa en la estrategia de aprendizaje con pares (valoración media: $2,94 \pm 0,92$). Por su parte, la estrategia búsqueda de ayuda (valoración media: $3,29 \pm 0,65$), presenta un sesgo a la izquierda con el 25% de las valoraciones entre las 3 y 3,20 unidades y algunos casos atípicos (9) de estudiantes que manifiestan buscar ayuda con nula o muy baja frecuencia (valoraciones inferiores a las 2 unidades). Otros valores atípicos se observan en el empleo de la repetición (1), elaboración (1), organización (1), gestión del tiempo y lugar de estudio (2) y metacognición (2) asociados a estudiantes que manifiestan no utilizar estas estrategias o emplearlas con baja frecuencia (Figura 2). En la labor docente es importante identificar estos casos para poder brindar la ayuda necesaria a fin de promover y desarrollar habilidades que les permitan alcanzar su máximo potencial académico (Pintrich, 2000; Zimmerman, 1989, 2000).

Figura 2

Boxplot de las estrategias de aprendizaje que los 327 estudiantes declaran emplear (Rep: repetición, Ela: elaboración, Org: organización, PCri: pensamiento crítico, Esf: regulación del esfuerzo, TieLug: gestión del tiempo y lugar de estudio, Met: regulación metacognitiva, BAyu: búsqueda de ayuda, AprPar: aprendizaje con pares). Fuente: Elaboración propia.



4.2. ¿Cómo varía el uso estas estrategias según el sexo y la carrera de procedencia, y a lo largo de los ciclos lectivos considerados?

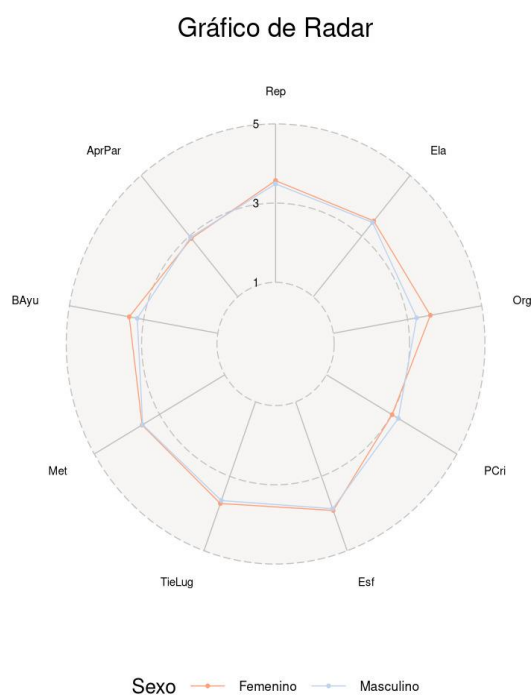
4.2.1. Sexo

El colectivo de estudiantes de Cálculo manifiestan utilizar de manera similar la mayoría de las estrategias de aprendizaje (Figura 3). Sin embargo, las mujeres manifiestan hacer un mayor uso de la organización y la búsqueda de ayuda (valoraciones medias: $3,62 \pm 0,69$ y $3,39 \pm 0,65$ respectivamente). Mientras que los varones manifiestan usar con mayor frecuencia el pensamiento crítico (valoración media: $3,20 \pm 0,69$). Puesto que, entre los trabajos revisados, no se han encontrado antecedentes de diferencias sexogenéricas en los perfiles estratégicos de los estudiantes cuando se enfrentan al aprendizaje de la matemática, este trabajo constituye un

aporte en la temática. Además, estos resultados, tienen implicancias en el diseño de actividades cooperativas o colaborativas. En efecto, conformar grupos donde ambos sexos estén representados permitiría atender a la grupalidad del conjunto (Schmuck y Schmuck, 1975) al maximizar la frecuencia de uso de mayor cantidad de estrategias dentro del equipo.

Figura 3

Gráfico de radar de las frecuencias medias de uso de estrategias de aprendizaje según el sexo (Rep: repetición, Ela: elaboración, Org: organización, PCri: pensamiento crítico, Esf: regulación del esfuerzo, TieLug: gestión del tiempo y lugar de estudio, Met: regulación metacognitiva, BAyu: búsqueda de ayuda, AprPar: aprendizaje con pares). Fuente: Elaboración propia.



4.2.2. Carrera

Los estudiantes de las distintas carreras manifiestan una frecuencia de uso similar de la mayoría de las estrategias de aprendizaje consideradas (Figura 4). Sin embargo:

- Los estudiantes de la Licenciatura en Física destacan por el uso moderado o altamente frecuente de estrategias cognitivas de procesamiento profundo como la elaboración (valoración media: $3,80 \pm 0,63$) y el pensamiento crítico (valoración media: $3,44 \pm 0,75$). Este último patrón también se observa en estudiantes del Profesorado en Física (valoración media: $3,38 \pm 0,69$). Esto podría estar asociado a la práctica permanente que dichos estudiantes hacen de esta estrategia en la resolución de problemas cuando se enfrentan a asignaturas de formación específica a su área de conocimiento.
- Por su parte, los estudiantes de la IRNyMA destacan haciendo un moderado uso de la búsqueda de ayuda (valoración media: $3,47 \pm 0,60$) y del aprendizaje con pares (valoración media: $3,15 \pm 0,79$) junto con los estudiantes del Profesorado en Física (valoración media: $3,21 \pm 0,59$). Esta implementación de la interacción social puede

deberse a la naturaleza colaborativa de los campos de la ingeniería ambiental y la enseñanza en física. Los estudiantes en estas disciplinas con frecuencia se enfrentan a desafíos complejos que requieren la cooperación y el intercambio de conocimiento entre pares.

Figura 4

Gráfico de radar de las frecuencias medias de uso de estrategias de aprendizaje según la carrera de pertenencia (Rep: repetición, Ela: elaboración, Org: organización, PCri: pensamiento crítico, Esf: regulación del esfuerzo, TieLug: gestión del tiempo y lugar de estudio, Met: regulación metacognitiva, BAyu: búsqueda de ayuda, AprPar: aprendizaje con pares). Fuente: Elaboración propia.



Como en el caso anterior, entre los trabajos revisados, no se han encontrado antecedentes que aborden las diferencias en los perfiles estratégicos de los estudiantes en el aprendizaje de la matemática según la carrera de origen. Por lo tanto, este trabajo constituye un aporte en la temática. Los resultados alcanzados, como en el caso del sexo, ponen de manifiesto ciertas consideraciones a tener en cuenta en el diseño de actividades grupales para potenciar la grupalidad de los equipos de trabajo incluyendo estudiantes de diversas carreras. Además, de una mayor expresión de estrategias puestas en juego en el desarrollo de la actividad en cuestión, los estudiantes podrían promover diversas estrategias autorregulatorias mediante procesos de correulación.

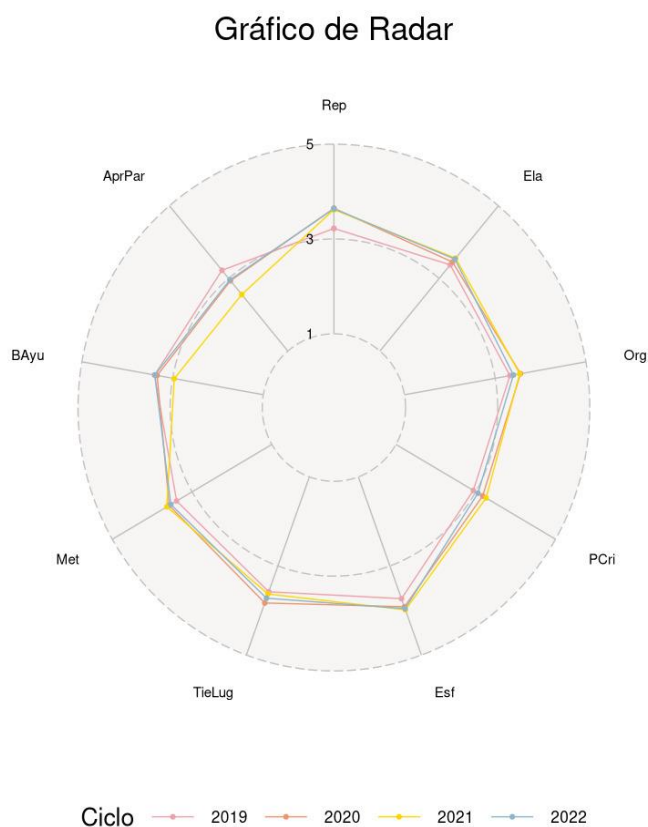
4.2.3. Ciclo lectivo

Se observa que el uso que los estudiantes de Cálculo manifiestan hacer de las estrategias de aprendizaje es similar en los cuatro años (Figura 5). Sin embargo, se identifican algunas leves diferencias que resulta interesante mencionar:

- Se distingue la cohorte 2019 por reconocer un menor uso de la repetición (valoración media: $3,22 \pm 0,62$) pero mayor uso del aprendizaje con pares (valoración media: $3,22 \pm 0,79$) en comparación con las demás cohortes.
- Por su parte, la cohorte 2021 manifiesta emplear en menor medida aquellas estrategias relacionadas con la interacción social, como la búsqueda de ayuda (valoración media: $2,96 \pm 0,68$) y el aprendizaje con pares (valoración media: $2,55 \pm 0,87$). Estos estudiantes atravesaron su último año de secundario, o comienzo de la vida universitaria, en aislamiento social preventivo obligatorio (estricto) debido a la pandemia por COVID-19. Esta situación de aislamiento social pudo haber contribuido a la falta de preparación estratégica en cuanto al uso de las estrategias referidas.

Figura 5

Gráfico de radar de las frecuencias medias de uso de las estrategias de aprendizaje según el ciclo lectivo (Rep: repetición, Ela: elaboración, Org: organización, PCri: pensamiento crítico, Esf: regulación del esfuerzo, TieLug: gestión del tiempo y lugar de estudio, Met: regulación metacognitiva, BAyu: búsqueda de ayuda, AprPar: aprendizaje con pares). Fuente: Elaboración propia.



Dentro de los trabajos revisados, no se han identificado estudios previos que aborden la diferencia en los perfiles estratégicos de estudiantes que afrontan el estudio del cálculo matemático según el año de cursada. Por lo que este trabajo representa una contribución original a la investigación en esta área. Los hallazgos y su posible relación con el contexto formativo en años anteriores, ponen de manifiesto la necesidad de explorar otras variables asociadas con el recorrido escolar de los estudiantes, como el lugar o colegio de procedencia o su desempeño

previo en matemática. Esto podría proporcionar una mejor comprensión de sus perfiles estratégicos, dado el carácter procesual de la ARA.

4.3. ¿Es posible establecer grupos de perfiles estratégicos de estudiantes?

Para determinar los posibles grupos de perfiles estratégicos de estudiantes se realizó un análisis de cluster del tipo jerárquico utilizando cinco métodos (vecino más cercano, vecino más lejano, promedio de las distancias, centroide y Ward) y dos distancias (euclidiana y Manhattan), eligiendo como más apropiado aquel con mayor coeficiente de correlación cofenética. Un resumen de ellos se muestra en la Tabla 3. Se observa que el mayor coeficiente de correlación cofenética se obtiene mediante el método del promedio de las distancias utilizando la distancia Manhattan. Por tal motivo se ensaya la conformación de distintos grupos de estudiantes de perfiles estratégicos mediante este método. De este ensayo, surgen siete grupos, de los cuales tres son descartados por contar con una cantidad reducida de estudiantes. Los cuatro grupos de perfiles estratégicos resultantes se representan en el dendrograma de la Figura 6.

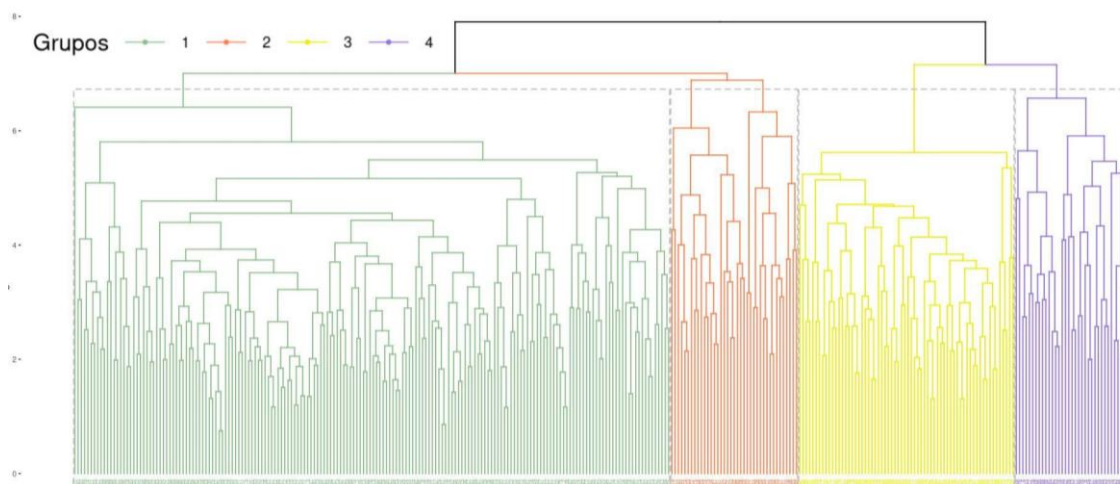
Tabla 3

Comparación de los coeficientes de correlación cofenética.

Distancia	Método	Coeficiente
Euclidiana	Vecino más cercano	0,5055726
	Vecino más lejano	0,4527487
	Promedio de las distancias	0,6009183
	Centroide	0,4931123
	Ward	0,4805186
Manhattan	Vecino más cercano	0,5219423
	Vecino más lejano	0,4924622
	Promedio de las distancias	0,6116095
	Centroide	0,4820724
	Ward	0,4859128

Figura 6

Dendrograma obtenido mediante el método del promedio de las distancias con la distancia Manhattan distinguiendo cuatro grupos estratégicos. Fuente: Elaboración propia.



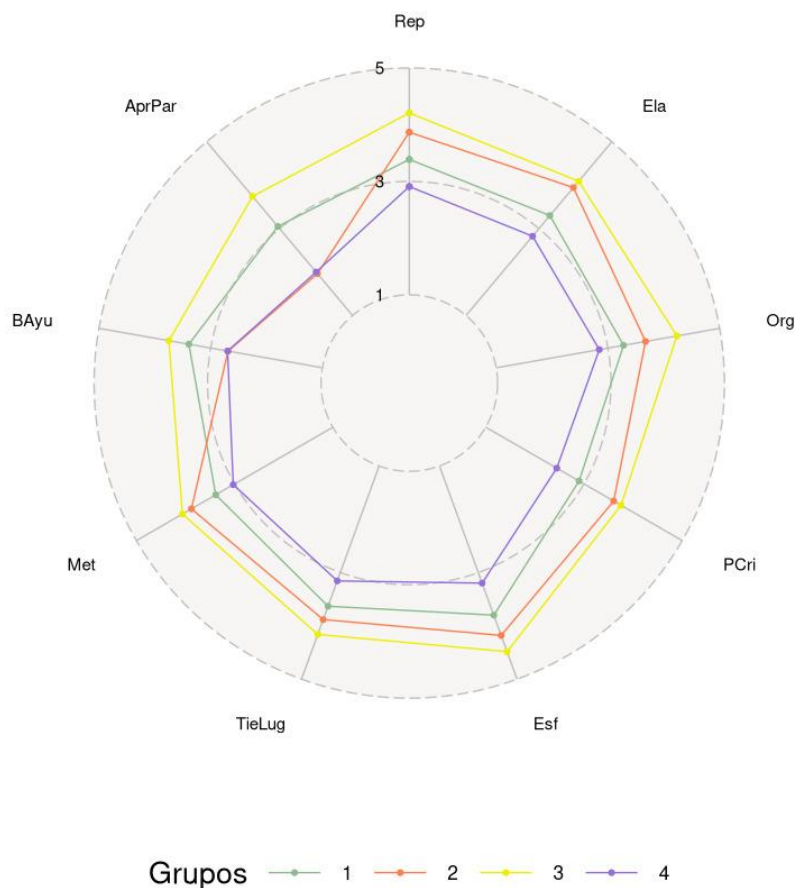
La Figura 7 muestra la valoración media obtenida para cada grupo en cada estrategia de aprendizaje. Esto permite describir los grupos resultantes de la siguiente manera:

- El Grupo 3, representado en color amarillo en las Figuras 6 y 7, es el más estratégico ya que manifiesta un alto uso de todas las estrategias de aprendizaje.
- El Grupo 2, señalado en color naranja en las Figuras 6 y 7, declara hacer un alto uso de la mayoría de las estrategias de aprendizaje, a excepción de las asociadas con la interacción social, es decir, la búsqueda de ayuda y el aprendizaje con pares.
- El Grupo 1, indicado en color verde en las Figuras 6 y 7, resulta moderadamente estratégico pero con una alta gestión de los recursos personales ya que manifiestan regular frecuentemente el esfuerzo y gestionar el tiempo y el entorno de estudio.
- Por último, el Grupo 4, representado en color violeta en las Figuras 6 y 7, es el menos estratégico, al declarar un bajo empleo del pensamiento crítico y aprendizaje con pares, y un moderado uso del resto de las estrategias.

Figura 7

Gráfico de radar de la frecuencia media de uso de las estrategias de aprendizaje según los grupos identificados mediante análisis de cluster (Rep: repetición, Ela: elaboración, Org: organización, PCri: pensamiento crítico, Esf: regulación del esfuerzo, TieLug: gestión del tiempo y lugar de estudio, Met: regulación metacognitiva, BAyu: búsqueda de ayuda, AprPar: aprendizaje con pares). Fuente: Elaboración propia.

Gráfico de Radar



4.4. ¿Existe relación entre las estrategias de aprendizaje que manifiestan usar los estudiantes y el rendimiento académico?

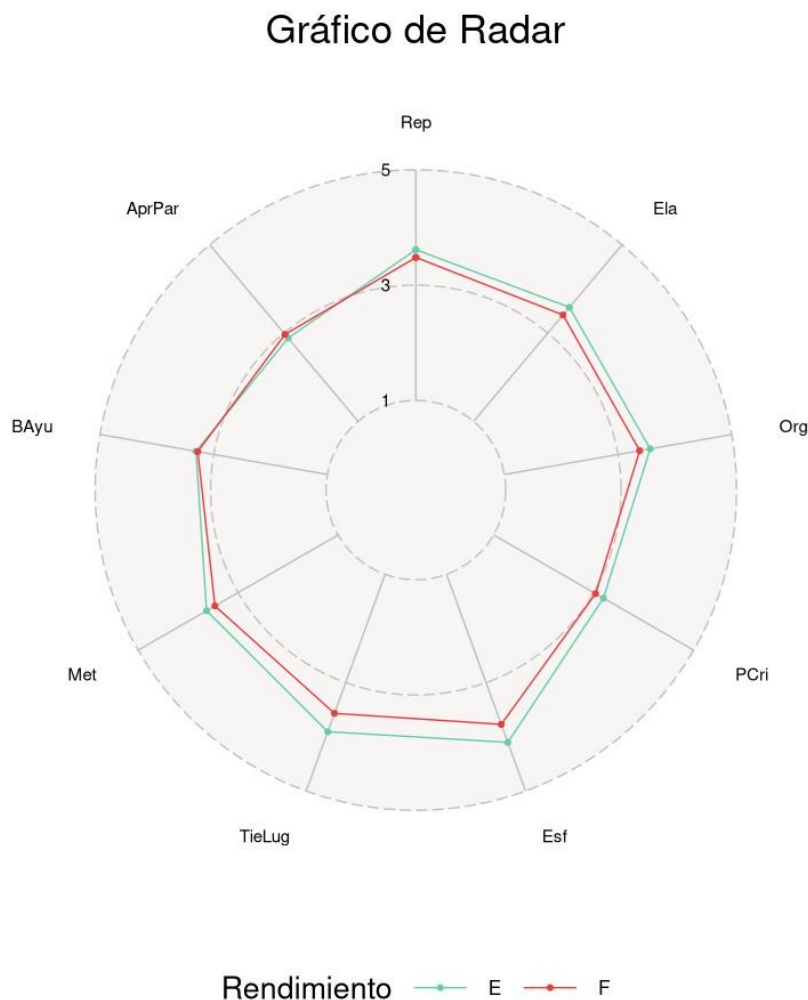
De los 327 estudiantes que respondieron el cuestionario, sólo el 37,92% logró completar la asignatura con éxito. En la Figura 8 puede observarse que son estos mismos estudiantes quienes manifiestan ser un poco más estratégicos.

- En especial, declaran usar con mayor frecuencia las estrategias asociadas con la gestión de recursos personales, como el tiempo y lugar de estudio (valoración media: $3,91 \pm 0,57$ (éxito), $3,57 \pm 0,54$ (fracaso)) y el esfuerzo (valoración media: $4,10 \pm 0,57$ (éxito), $3,77 \pm 0,66$ (fracaso)). Parte de estos resultados, coinciden con los obtenidos por Kuzilek et al. (2021), quienes reconocen que las estrategias de planificación y gestión temporal aumentan las posibilidades de aprobar los cursos de matemática en el primer año académico.
- Sin embargo, no se observan grandes diferencias en la frecuencia de uso de las estrategias relacionadas con la interacción social entre quienes completaron la asignatura exitosamente y quienes no lo lograron. En ambos casos, los estudiantes buscan ayuda (valoraciones medias: $3,31 \pm 0,67$ (éxito); $3,28 \pm 0,64$ (fracaso)) y están dispuestos a aprender con otros (valoraciones medias: $2,89 \pm 0,92$ (éxito); $2,97 \pm 0,92$ (fracaso)) con frecuencia moderada. Esto contradice los hallazgos de otras investigaciones en las que se identifica a la búsqueda de ayuda como una de las estrategias autorregulatorias más relevantes en la predicción del rendimiento académico en cursos de matemática (Sun et al., 2018) y en particular de precálculo (Van Dyken y Benson, 2019). Sin embargo, los resultados aquí alcanzados pueden estar moderados por la escasa fiabilidad alcanzada en la subescala en cuestión.
- Por otro lado, quienes lograron completar el curso con éxito manifiestan hacer un mayor uso de las estrategias cognitivas y metacognitivas, es decir, manifiestan hacer un mayor uso de la repetición (valoración media: $3,61 \pm 0,63$ (éxito) y $3,48 \pm 0,69$ (fracaso)), elaboración (valoración media: $3,58 \pm 0,65$ (éxito) y $3,41 \pm 0,56$ (fracaso)), organización (valoración media: $3,57 \pm 0,75$ (éxito) y $3,38 \pm 0,70$ (fracaso)), pensamiento crítico (valoración media: $3,20 \pm 0,73$ (éxito) y $3,04 \pm 0,65$ (fracaso)) y metacognición (valoración media: $3,63 \pm 0,48$ (éxito) y $3,46 \pm 0,49$ (fracaso)). Sin embargo, la diferencia con quienes no lograron atravesar la asignatura con éxito no es tan acentuada como en el empleo de las estrategias de gestión de recursos personales. Estos resultados concuerdan con los obtenidos en poblaciones de estudiantes europeos y estadounidenses (Fong et al., 2015). Esto demuestra que, en este colectivo de estudiantes hispanoamericanos, también las estrategias de índole cognitiva tendrían relación con un desempeño exitoso en cursos introductorios de matemática, a diferencia de lo que identifican Fong et al. (2015). La importancia de las estrategias metacognitivas sobre el rendimiento académico en este tipo de cursos también es identificada por otros autores en los últimos años (Roick y Ringeisen, 2018; Van Dyken y Benson, 2019).

Figura 8

Gráfico de radar de la media de cada estrategia de aprendizaje distinguidas por el rendimiento académico (Rep: repetición, Ela: elaboración, Org: organización, PCri: pensamiento crítico, Esf: regulación del esfuerzo, TieLug: gestión del tiempo y lugar de estudio, Met: regulación metacognitiva, BAyu: búsqueda de ayuda, AprPar: aprendizaje con pares, E: éxito, F: fracaso).

Fuente: Elaboración propia



En la misma línea, un test de independencia reveló que el rendimiento académico depende del grupo de perfiles estratégicos al cual pertenece un estudiante ($\chi^2=16,457$, g.l.=3, valor $p=0,000914$). En la Tabla 4 puede observarse que la mayoría de los estudiantes pertenecientes a los grupos menos estratégicos no lograron completar la asignatura con éxito (Grupo 1: 31,87% (éxito), 68,13% (fracaso); Grupo 4: 25,64% (éxito), 74,36% (fracaso)). Por el contrario, la mayoría de los estudiantes pertenecientes a los grupos más estratégicos lograron llevar adelante el curso con éxito (Grupo 2: 55,55% (éxito), 44,45% (fracaso); Grupo 3: 53,03% (éxito), 46,97% (fracaso)). Esto demuestra la importancia del uso conjunto de diversas estrategias cognitivas (repetición, elaboración, organización, pensamiento crítico), metacognitivas, de gestión de recursos (gestión del tiempo y el lugar de estudio, regulación del esfuerzo), y de interacción social (búsqueda de ayuda, aprendizaje con pares) para tener un desempeño exitoso en el curso introductorio tomado por el colectivo bajo estudio. Por lo tanto, la identificación anticipada de las estrategias empleadas en contextos de aprendizaje asociados al cálculo y

matemática introductoria, permitiría identificar aquellas de escaso uso o uso deficitario, y diseñar propuestas formativas orientadas a promover su desarrollo. Esto podría favorecer la formación de estudiantes integralmente autorregulados y estratégicos, lo que potencialmente mejoraría los niveles de éxito académico en los cursos asociados.

Tabla 4

Tabla de contingencia del rendimiento académico y el grupo de perfiles estratégicos obtenidos mediante cluster.

Grupos	Rendimiento Académico		Total
	Éxito	Fracaso	
1: Moderadamente estratégicos	58	124	182
2: Altamente estratégicos salvo en la interacción social	20	16	36
3: Altamente estratégicos	35	31	66
4: Poco estratégicos	10	29	39
Total	123	200	323

5. IMPLICANCIAS PARA LA ENSEÑANZA Y EL APRENDIZAJE

A la luz de los resultados previamente presentados, y en consonancia con lo manifestado por diversos autores citados entre los antecedentes de este trabajo, resulta ineludible la consideración de la ARA como un constructo de importancia para comprender algunas variables que influyen en el aprendizaje y en el rendimiento académico de los estudiantes universitarios en cursos iniciales de matemática. Esto tiene múltiples implicancias en el quehacer educativo.

En efecto, diagnosticar y analizar los perfiles estratégicos del estudiantado permite, a los profesores, prealimentar el proceso formativo, reconocer falencias formativas e implementar acciones tendientes a la promoción y el fortalecimiento de estrategias eficaces para mejorar el desempeño académico. En tal sentido, coincidimos con Boruchovitch y Machado (2017) en que, sin esta intervención, los estudiantes adquieren solo algunas técnicas que utilizan sin sistematizar ni reflexionar sobre sus beneficios para el aprendizaje. Además, esta reflexión sobre el posible uso de las estrategias indagadas representa una posibilidad para poner en juego la metacognición y, eventualmente, reconocer la necesidad de reforzar o mejorar determinados procesos autorregulatorios.

Adicionalmente, la identificación de relaciones significativas entre el empleo de algunas estrategias de aprendizaje y otras variables, como el sexo y la carrera de pertenencia, deriva en un conjunto de implicancias sobre el diseño, implementación y andamiaje de posibles actividades cooperativas o colaborativas. En particular, a fin de favorecer el criterio de grupalidad (Schmuck y Schmuck, 1975) de los equipos de trabajo y un buen desempeño por parte de los estudiantes, sería recomendable conformar grupos en los que la diversidad de sexos, carreras y perfiles estratégicos esté representada. Atender a la grupalidad del conjunto podría mejorar el desempeño general del equipo a través de una posible correulación (Hadwin et al., 2018) ejercida por los estudiantes más estratégicos, y la consecuente promoción del aprendizaje autorregulado en el resto de los compañeros. Contar con algoritmos automáticos que permitan conformar fácil y rápidamente estos equipos heterogéneos, dado un conjunto de variables de interés, sería una herramienta de utilidad para el profesorado.

6. CONCLUSIONES Y TRABAJO FUTURO

La ARA es un constructo que ofrece un marco para comprender algunas variables que influyen en el aprendizaje. En particular, cuando éste se asocia a temas de matemática en Educación Superior.

Con base en el modelo propuesto por Pintrich (2000) fue posible identificar, en este trabajo, los perfiles estratégicos declarados por un conjunto de 327 estudiantes que han cursado el grupo de asignaturas “Cálculo I - Matemática I - Análisis Matemático I” de la FCEyN (UNLPam) en alguna de cuatro cohortes (2019, 2020, 2021, 2022). En su conjunto, manifiestan ser moderadamente estratégicos. Destaca la alta frecuencia de uso de la regulación del esfuerzo. Por el contrario, el aprendizaje con pares es la estrategia que declaran utilizar menos frecuentemente.

En el análisis de la influencia de algunos factores sobre los perfiles de uso de estrategias de aprendizaje, no se encuentran diferencias notables según el año de cursado. Sin embargo, la cohorte 2021 manifiesta emplear en menor medida las estrategias que tienen que ver con la interacción social, lo que podría deberse a que estos estudiantes atravesaron su último año de secundario, o comienzo de la vida universitaria, en aislamiento social preventivo obligatorio debido a la pandemia por COVID-19.

Por el contrario, surgen algunas diferencias significativas en torno al sexo y la carrera de pertenencia. En efecto, las mujeres declaran usar más frecuentemente la organización y la búsqueda de ayuda, mientras que los hombres emplean más a menudo el pensamiento crítico. Por otro lado, aunque los estudiantes de las distintas carreras manifiestan ser similarmente estratégicos en la mayoría de las estrategias de aprendizaje consideradas, los estudiantes de Física (licenciatura y profesorado) destacan en la alta frecuencia de uso que dan al pensamiento crítico.

Finalmente, mediante el análisis de cluster fue posible identificar cuatro grupos de perfiles de estudiantes según la frecuencia de uso declarado de las estrategias de aprendizaje. Mediante un test de independencia, se logró determinar que existe relación entre estos perfiles y el rendimiento académico alcanzado en la asignatura cursada. Se observó que la mayoría de los estudiantes pertenecientes a los grupos identificados como más estratégicos lograron llevar adelante el curso con éxito. Mientras que, por el contrario, la amplia mayoría de los estudiantes pertenecientes a los grupos con mayores deficiencias en el uso de las estrategias consideradas, no lo lograron.

Estos resultados ponen de manifiesto la importancia de prealimentar la propuesta formativa mediante el diagnóstico y análisis de los perfiles estratégicos de los estudiantes. Esto tiene diversas implicancias en la actividad docente, sea a través de la promoción directa de estrategias eficaces para mejorar el desempeño académico, o indirecta a través de la conformación de grupos potencialmente eficaces que facilite el aprendizaje autorregulado del equipo mediante procesos corregulatorios.

Pese a los hallazgos que aporta este trabajo, se reconocen limitaciones asociadas con su validez externa que, aunque habituales en este tipo de investigaciones, conviene señalar al extraer conclusiones. En particular, el estudio se basa en una muestra reducida de estudiantes argentinos, participantes de un curso de grado ofrecido en una universidad pública. Si bien los resultados obtenidos son consistentes con trabajos anteriores que consideraron otras poblaciones internacionales, el trabajo futuro debería replicar y extender los hallazgos actuales con otras muestras para probar la generalización. Adicionalmente, dado el carácter procesual de la ARA,

considerar otras variables asociadas con la historia académica de los estudiantes, como el lugar o colegio de procedencia, o calificaciones previas en matemática, podría echar luz en el ámbito de sus relaciones con los perfiles estratégicos.

Trabajos futuros se orientan a ampliar el conjunto de datos incorporando nuevas cohortes de ingresantes a la FCEyN (UNLPam) con el fin de aplicar técnicas propias del aprendizaje automático que permitan predecir su rendimiento académico en función de sus perfiles estratégicos y algunas características de índole personales y académicas. En particular, en el marco de un Trabajo de Tesis de Maestría en Matemática que se dicta en la unidad académica mencionada, se pretende generar un estado del arte de las Redes Neuronales Artificiales, para posteriormente aplicarlas al conjunto de datos educativos en cuestión.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Bandura, A. (1991). Social cognitive theory of self-regulation. *Organizational Behavior and Human Decision Processes*, 50(2), 248–287, [https://doi.org/10.1016/0749-5978\(91\)90022-L](https://doi.org/10.1016/0749-5978(91)90022-L)
- Boruchovitch, E. y Machado, A. C. (2017). A autorregulação da aprendizagem na formação inicial e continuada de professores: como intervir para desenvolver?. En: Polydoro, S.A.J (org.). *Promoção da Autorregulação da Aprendizagem: Contribuições da Teoria Social Cognitiva*. Porto Alegre: Letra1, 89-104.
- Broadbent, J. y Poon, W. L. (2015). Self-regulated learning strategies & academic achievement in online higher education learning environments: A systematic review. *The Internet and Higher Education*, 27, 1-13. <https://doi.org/10.1016/j.iheduc.2015.04.007>
- Brydges, R., Manzone, J., Shanks, D., Hatala, R., Hamstra, S. J., Zendejas, B. y Cook, D. A. (2015). Self-regulated learning in simulation-based training: A systematic review and meta-analysis. *Medical Education*, 49(4), 368-378. <https://doi.org/10.1111/medu.12649>
- Bussab, W. de O., Miyazaki, E. S. y de Andrade, D. F. (1990). *Introdução à análise de agrupamento*. En: IX Simpósio Brasileiro de Probabilidade e Estatística, IME-USP, São Paulo.
- Cho, M. H. y Heron, M. L. (2015). Self-regulated learning: the role of motivation, emotion, and use of learning strategies in students' learning experiences in a self-paced online mathematics course. *Distance Education*, 36(1), 80-99. <https://doi.org/10.1080/01587919.2015.1019963>
- de Boer, H., Donker, A. S., Kostons, D. y van der Werf, G. P. C. (2018). Long-term effects of metacognitive strategy instruction on student academic performance: A meta-analysis. *Educational Research Review*, 24, 98-115. <https://doi.org/10.1016/J.EDUREV.2018.03.002>
- Devolder, A., van Braak, J. y Tondeur, J. (2012). Supporting self-regulated learning in computer-based learning environments: Systematic review of effects of scaffolding in the domain of science education. *Journal of Computer Assisted Learning*, 28(6), 557-573. <https://doi.org/10.1111/j.1365-2729.2011.00476.x>
- Dieser, M. P., Sanz, C. V. y Zangara, M. A. (2020). Autorregulación del aprendizaje y rendimiento académico en contextos educativos mediados por TIC. Una revisión sistemática en el ámbito de la Educación Superior Iberoamericana. En *8vo. Seminario Internacional de Educación a Distancia RUEDA 2019. La educación en prospectiva. Prácticas disruptivas mediadas por tecnologías*.

- Donker, A. S., de Boer, H., Kostons, D., Dignath van Ewijk, C. y van der Werf, M. P. C. (2014). Effectiveness of learning strategy instruction on academic performance: A meta-analysis. *Educational Research Review*, 11, 1-26. <https://doi.org/10.1016/J.EDUREV.2013.11.002>
- Ergen, B. y Kanadli, S. (2017). The effect of self-regulated learning strategies on academic achievement: A meta-analysis study. *Eurasian Journal of Educational Research*, 69, 55-74. <https://doi.org/10.14689/ejer.2017.69.4>
- Fong, C. J., Zientek, L. R., Yetkiner Ozel, Z. E. y Phelps, J. M. (2015). Between and within ethnic differences in strategic learning: a study of developmental mathematics students. *Social Psychology of Education*, 18(1), 55-74. <https://doi.org/10.1007/s11218-014-9275-5>
- Garcia, R., Falkner, K. y Vivian, R. (2018). Systematic literature review: Self-regulated learning strategies using e-learning tools for Computer Science. *Computers & Education*, 123, 150-163. <https://doi.org/10.1016/J.COMPEDU.2018.05.006>
- Guilford, J. P. (1954). *Psychometric Methods*. New York: McGraw-Hill.
- Hadwin, A. F., Järvelä, S. y Miller, M. (2018). Self-regulation, co-regulation and shared regulation in collaborative learning environments. En D. H. Schunk y J. A. Greene (Eds.), *Handbook of Self-Regulation of Learning and Performance*. New York: Routledge
- Holtz, Y. y Healy, C. (2018). *The radar chart and its caveats*. from Data to Viz. <https://www.data-to-viz.com/>
- Hu, L. y Bentler, P. M. (1999). Cutoff criteria for fit indexes in covariance structure analysis: Conventional criteria versus new alternatives. *Structural Equation Modeling: A Multidisciplinary Journal*, 6(1), 1–55. <https://doi.org/10.1080/10705519909540118>
- Jacobs, J. E. y Paris, S. G. (1987). Children's metacognition about reading: Issues in definition, measurement, and instruction. *Educational Psychologist*, 22(3–4), 255–278. <https://doi.org/10.1080/00461520.1987.9653052>
- Johnson, R. A. y Kuby P. (2012). *Estadística elemental*. 11a. edición. CENGAGE Learning.
- Johnson, R. A. y Wichern, D. W. (2007). *Applied multivariate statistical analysis*. 6th edition. Pearson Education, Inc.
- Kuzilek, J., Zdrahal, Z. y Figlik, V. (2021). Student success prediction using student exam behaviour. *Future Generation Computer Systems*, 125(11), 661-671. <https://doi.org/10.1016/j.future.2021.07.009>
- Lai, K. (2020). Fit difference between nonnested models given categorical data: Measures and estimation. *Structural Equation Modeling: A Multidisciplinary Journal*, 28, 99-120. <https://doi.org/10.1080/10705511.2020.1763802>
- Lee, D., Watson, S. L. y Watson, W. R. (2019). Systematic literature review on self - regulated learning in massive open online courses. *Australasian Journal of Educational Technology*, 35(1), 28-41. <https://doi.org/10.14742/ajet.3749>
- Monereo, C. (2000). El asesoramiento en el ámbito de las estrategias de aprendizaje. En C. Monereo (Ed.), *Estrategias de aprendizaje* (pp. 15–62). Madrid: Visor.
- Musso, M. F., Boekaerts, M., Segers, M. y Cascallar, E. (2019). Individual differences in basic cognitive processes and self-regulated learning: Their interaction effects on math performance. *Learning and Individual Differences*, ELSEVIER, 71, 58-70. <https://doi.org/10.1016/j.lindif.2019.03.003>

- Panadero, E. (2017). A review of self-regulated learning: Six models and four directions for research. *Frontiers in Psychology*, 8. <https://doi.org/10.3389/fpsyg.2017.00422>
- Panke, A. y Frison, L. M. B. (2015). Potencialização da aprendizagem autorregulada de bolsistas do PIBID/UFPEL do curso de licenciatura em matemática através de oficinas pedagógicas. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, Rio Claro, 29(51), 223-240. <https://doi.org/10.1590/1980-4415v29n51a12>
- Paris, S. G., Lipson, M. Y. y Wixson, K. K. (1983). Becoming a strategic reader. *Contemporary Educational Psychology*, 8(3), 293–316. [https://doi.org/10.1016/0361-476X\(83\)90018-8](https://doi.org/10.1016/0361-476X(83)90018-8)
- Pérez Sánchez, L. y Beltrán Llera, J. (2014). Estrategias de aprendizaje: Función y diagnóstico en el aprendizaje adolescente. *Padres y Maestros*, (358), 34–38. <https://doi.org/10.14422/pym.v0i358.4086>
- Pintrich, P. R. (2000). The role of goal orientation in self-regulated learning. En M. Boekaerts, P. R. Pintrich y M. Zeidner (Eds.), *Handbook of self-regulation* (pp. 452–502). San Diego, CA: Academic Press. <https://doi.org/10.1016/B978-012109890-2/50043-3>
- Pintrich, P. R., Smith, D. A. F., Garcia, T. y McKeachie, W. J. (1991). *Manual for the use of the Motivated Strategies for Learning Questionnaire*. Michigan: National Center for Research to Improve Postsecondary Teaching and Learning.
- Puustinen, M. y Pulkkinen, L. (2001). Models of self-regulated learning: A review. *Scandinavian Journal of Educational Research*, 45(3), 269–286. <https://doi.org/10.1080/00313830120074206>
- Quinn, D. y Aarao, J. (2020). Blended learning in first year engineering mathematics. *ZDM – Mathematics Education*, New York, 52(5), 927-941.
- R Core Team (2022). *R: A language and environment for statistical computing*. R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria. URL <https://www.R-project.org/>
- Roick, J. y Ringeisen, T. (2018). Students' math performance in higher education: Examining the role of self-regulated learning and self-efficacy. *Learning and Individual Differences*, 65, 148-158. <https://doi.org/10.1016/j.lindif.2018.05.018>
- Rotgans, J. y Schmidt, H. (2009). Examination of the context-specific nature of self-regulated learning. *Educational Studies*, London, 35(3), 239-253. <https://doi.org/10.1080/03055690802648051>
- Schmuck, R. A. y Schmuck, P. A. (1975). *Group processes in the classroom* (2nd ed.). W. M. C. Brown Company Publishers.
- Schunk, D. H. (2008). Metacognition, self-regulation, and self-regulated learning: Research recommendations. *Educational Psychology Review*, 20(4), 463–467. <https://doi.org/10.1007/s10648-008-9086-3>
- Semensato, M. T., Pilatti, L. A., Damiani e Silva, F. y Maciel Pinheiro, N. A. (2023). Revisão sistemática de estudos sobre a autorregulação da aprendizagem da matemática no ensino superior. *Bolema: Boletim De Educação Matemática*, 37(75), 218–249. <https://doi.org/10.1590/1980-4415v37n75a11>
- Siegel, S. y Castellan, N. J. J. (1995). Dos muestras independientes. En Estadística no paramétrica aplicada a las ciencias de la conducta. 4th ed. (pp. 128-199). México: Trillas. <https://doi.org/10.26439/persona1998.n001.1715>
- Silverajah, V. S. G., Wong, S. L., Govindaraj, A., Khambari, M. N. M., Rahmat, R. W. B. O. K. y Deni, A. R. M. (2022). A systematic review of self-regulated learning in flipped

- classrooms: Key findings, measurement methods, and potential directions. *IEEE Access*, 10, 20270–20294. <https://doi.org/10.1109/ACCESS.2022.3143857>
- Sun, Z., Xie, K. y Anderman, L. H. (2018). The role of self-regulated learning in students' success in flipped undergraduate math courses. *The Internet and Higher Education*, London, 36, 41-53. <https://doi.org/10.1016/j.iheduc.2017.09.003>
- Van Dyken, J. y Benson, L. (2019). Precalculus as a death sentence for engineering majors: A case study of how one student survived. *International Journal of Research in Education and Science*, 5(1), 355-373.
- Walker, D. A. y Smith, T. J. (2017). Computing robust, bootstrap-adjusted fit indices for use with nonnormal data. *Measurement and Evaluation in Counseling and Development*, 50(1-2), 131-137. <https://doi.org/10.1080/07481756.2017.1326748>
- Weinstein, C. E., Mayer, R. E. y Watkins, K. (1983). The teaching of learning strategies. *Innovation Abstracts*, 5(4).
- Wild, S. y Neef, C. (2023). Analyzing the associations between motivation and academic performance via the mediator variables of specific mathematic cognitive learning strategies in different subject domains of higher education. *IJ STEM Ed* 10, 32. <https://doi.org/10.1186/s40594-023-00423-w>
- Zheng, L. (2016). The effectiveness of self-regulated learning scaffolds on academic performance in computer-based learning environments: a meta-analysis. *Asia Pacific Education Review*, 17(2), 187-202. <https://doi.org/10.1007/s12564-016-9426-9>
- Zimmerman, B. J. (1989). A social cognitive view of self-regulated academic learning. *Journal of Educational Psychology*, 81(3), 329–339. <https://doi.org/10.1037/0022-0663.81.3.329>
- Zimmerman, B. J. (1990). Self-regulated learning and academic achievement: An overview. *Educational Psychologist*, 25(1), 3–17. https://doi.org/10.1207/s15326985ep2501_2
- Zimmerman, B. J. (2000). Attaining self-regulation: A social cognitive perspective. En M. Boekaerts, P. Pintrich y M. Zeidner (Eds.), *Handbook of self-regulation* (pp. 13–40). San Diego, CA: Academic Press. <http://doi.org/10.1016/B978-012109890-2/50031-7>

¿Cómo conciben la aleatoriedad los maestros de educación infantil en formación?

Osmar D. Vera

Universidad de Cádiz, osmar.dario@uca.es

Carmen Batanero

Universidad de Granada, batanero@ugr.es

Jocelyn D. Pallauta

Universidad de Los Lagos, Chile, jocelyn.diaz@ulagos.cl

Resumen: Se presenta un estudio exploratorio de la definición y ejemplos de aleatoriedad que proponen una muestra de 132 maestros en formación de educación infantil, así como las respuestas a su discriminación entre sucesos aleatorios y no aleatorios. Los resultados indican, en una parte de los participantes, una concepción incompleta de la aleatoriedad y la asignación de una fenomenología muy reducida a los sucesos aleatorios. Hay mejores resultados en la discriminación de sucesos aleatorios y deterministas, aunque todavía se presentan dificultades. Se concluye la necesidad de reforzar la formación probabilística de estos futuros profesores para que sea posible abordar con éxito la introducción de ideas de azar y probabilidad en las primeras etapas educativas.

Palabras clave: comprensión de la aleatoriedad, fenomenología del azar, evaluación, maestros de educación infantil en formación.

How early childhood pre-service teachers conceive randomness?

Abstract: We present an exploratory study of the definition and examples of randomness proposed by a sample of 132 prospective early childhood education teachers, as well as their responses to their discrimination between random and non-random events. The results indicate that some participants have an incomplete conception of randomness and that they assign a very reduced phenomenology to random phenomena. The discrimination of random and deterministic events was better, although difficulties remain. We conclude the need to reinforce the probabilistic training of these prospective teachers in order to successfully address the introduction of ideas of chance and probability in the early stages of education.

Key words: understanding randomness, chance phenomenology, assessment, early childhood pre-service teachers.

1. INTRODUCCIÓN

Un tema debatido en los últimos años es la necesidad de introducir algunas ideas sobre el azar y la probabilidad en la etapa de educación infantil (Alsina, 2017; Alsina y Vásquez, 2016). Dos razones apoyan esta propuesta: Por un lado, las investigaciones más recientes muestran que niños y niñas muy pequeños ya tienen ideas sobre lo aleatorio y se sienten interesados por el

tema (Batanero et al., 2021; Kafoussi, 2004). Por otro, el niño encuentra el azar en su vida familiar, escolar y social en numerosas situaciones, que pueden servir para contextualizar este aprendizaje.

El éxito de la introducción de este tema en esta etapa educativa se basará sin duda en la preparación adecuada de los maestros, aunque, en este momento, las asignaturas de didáctica de la matemática en el Grado de Educación Infantil dedican muy poco tiempo a la estadística y probabilidad. Además, algunas investigaciones recientes, indican dificultades de comprensión de la probabilidad por parte de profesores en formación inicial (Batanero y Álvarez-Arroyo, 2024) y hay pocas investigaciones realizadas con maestros en formación de educación infantil (Franco y Alsina, 2022).

Para aportar información al respecto, el objetivo de este trabajo es presentar los resultados de un estudio exploratorio que evalúa las características que asignan a los sucesos aleatorios, los ejemplos que proponen y la discriminación entre fenómenos aleatorios y deterministas de una muestra de maestros de educación infantil en formación inicial. En lo que sigue se describen los antecedentes, concepciones sobre la aleatoriedad, método y resultados del estudio.

2. ANTECEDENTES

Las investigaciones con maestros de educación primaria en formación inicial indican que son capaces de trabajar el planteamiento y resolución de problemas de probabilidad, la comunicación y la argumentación (Alonso-Castaño et al., 2021) y comprenden el concepto de juego equitativo (Hourigan y Leavy, 2020). Sin embargo, muchos desconocen los diferentes significados de la probabilidad y no perciben la independencia de ensayos repetidos (Ingram, 2022) o forman espacios muestrales incorrectos para los problemas de probabilidad (Chernoff et al., 2018).

Azcárate et al. (1998) realizan un estudio cuyo objetivo fue conocer los criterios que un grupo de maestros de educación primaria en formación inicial utilizaba para explicar sus creencias y opiniones sobre la naturaleza aleatoria de diferentes fenómenos. Para ello les preguntaron si eran aleatorios o no una serie de sucesos, justificando su respuesta. Entre las creencias de los participantes encuentran el no reconocimiento de la aleatoriedad, la aleatoriedad como incertidumbre, causalidad, equiprobabilidad, múltiples posibilidades, falta de información, así como las ligadas a los significados laplaciano y frecuencial de la probabilidad.

Gómez (2014) estudia el conocimiento matemático para enseñar probabilidad de una muestra de maestros de educación primaria en formación inicial, indicando dificultades de comprensión de conceptos asociados a los significados frecuencial y subjetivo de la probabilidad, pero no evalúa específicamente su comprensión de la aleatoriedad o la fenomenología que le asocian.

Respecto al conocimiento didáctico, Gea y Fernández (2018) indican que, en su investigación, la mayor parte de un grupo de maestros de educación primaria en formación inicial pudieron discriminar las respuestas correctas o incorrectas de estudiantes a problemas elementales de probabilidad. Los participantes en el trabajo de Gómez (2014) tuvieron mayor dificultad al identificar errores en tareas de probabilidad frecuencial, juego equitativo y sesgo de equiprobabilidad y los de Burgos et al. (2022) al evaluar las soluciones de sus estudiantes a problemas de comparación de probabilidades o sugerir propuestas didácticas para ayudarles a superar sus errores.

El cuestionario utilizado en esta investigación se ha tomado de Hernández-Salmerón (2015), quien evalúa la comprensión de la idea de aleatoriedad en una muestra de 89 estudiantes de 1º y 2º cursos de Educación Secundaria Obligatoria (ESO). La autora califica las respuestas a los ítems como correctas, parcialmente correctas o incorrectas, sin analizar las argumentaciones empleadas. Sus resultados indican que fue difícil para los estudiantes proporcionar ejemplos de aleatoriedad diferentes de los juegos de azar.

3. DIFERENTES CONCEPCIONES DE LA ALEATORIEDAD

Para analizar las respuestas de los profesores participantes nos basamos en los diferentes significados que el concepto de aleatoriedad ha recibido a lo largo de la historia y que todavía persisten en la práctica estadística o en las concepciones de los estudiantes. Entre dichas concepciones o interpretaciones encontramos las siguientes, descritas en Batanero et al. (1998) y Bennet (1999).

- Una primera concepción, aceptada, según Bennet (1999), hasta el comienzo de la Edad Media es interpretar *la aleatoriedad como contraposición a la relación causa-efecto*. En esta interpretación subyace una visión determinista del mundo, donde todo lo que existe tiene una causa, aunque esta causa no se conoce para los fenómenos aleatorios.
- De hecho, la interpretación de *aleatoriedad como fenómeno causado por causas desconocidas* estuvo aceptada hasta comienzos del siglo XX, cuando Poincaré (1912/1987) hizo notar con ejemplos la existencia de fenómenos aleatorios con causas conocidas, como el movimiento Browniano.
- Al comienzo del cálculo de probabilidades se analizaron sobre todo los juegos de azar por diversos autores como Pascal y Fermat, en que todos los sucesos del espacio muestral son equiprobables. Paralelamente, se formó una concepción de *aleatoriedad como equiprobabilidad* de todos los sucesos elementales de un experimento. Esta concepción, aunque más avanzada, es muy reducida y solo serían aleatorios los juegos de azar, pues es difícil encontrar otras situaciones en que los sucesos posibles sean equiprobables (Batanero et al., 1998).
- La concepción frecuencial de la probabilidad, que introduce Jacques Bernoulli al demostrar la ley de los grandes números (Bennet, 1999), amplía la aplicación de la probabilidad a muchos campos. *En esta concepción, la aleatoriedad se equipara a la estabilidad de las frecuencias*: Serían aleatorios los sucesos cuya frecuencia relativa se estabiliza a largo plazo.
- Con la introducción del teorema de Bayes y la probabilidad subjetiva, una nueva visión, sostenida, entre otros por Kyburg (1974), indica que *la aleatoriedad depende del conocimiento previo*: Sería una visión subjetiva donde un suceso puede ser aleatorio para unas personas y no para otras, considerando su conocimiento del fenómeno.
- Una visión más reciente es debida a Von Mises, quien define una secuencia aleatoria como aquella que no sigue un patrón conocido o que pueda conocerse y que se liga a la elaboración de las primeras tablas de números aleatorios (Batanero et al., 1998).

Finalmente, según Batanero et al. (1998), se considera aleatorio cualquier fenómeno en que se pueda aplicar el cálculo de probabilidades. Esta es la concepción que consideramos más avanzada, aunque todas las descritas fueron consideradas correctas en su día, Actualmente serían concepciones parcialmente correctas, pues no se aplican a todos los fenómenos

aleatorios. En lo que sigue, utilizamos estas concepciones de la aleatoriedad para interpretar las respuestas al cuestionario de los profesores participantes.

4. MÉTODO

Se trata de un estudio cualitativo, descriptivo y exploratorio. Participaron en la investigación 132 estudiantes del Grado de Magisterio en Educación Infantil, de la Universidad de Cádiz, en su mayoría de 19 o 20 años, que cursaban la asignatura de Conocimiento Matemático en Educación Infantil, en segundo curso de su carrera. Los estudiantes de la muestra no habían estudiado previamente ninguna asignatura de matemática en la universidad. Sin embargo, habiendo cursado la Educación Secundaria Obligatoria, todos ellos habrían estudiado en dicho periodo los experimentos y sucesos aleatorios, la probabilidad simple, compuesta y condicional. Ninguno de los participantes tenía necesidades especiales. Estos participantes completaron en el mes de noviembre de 2023, individualmente, en forma anónima y por escrito el cuestionario que se presenta en la Figura 1, disponiendo de un tiempo máximo de 90 minutos para responderlo. Lo completaron con interés y sin incidencias.

El cuestionario está formado por algunos ítems del construido por Hernández-Salmerón (2015) con tareas tomadas de textos dirigidos al profesorado, como el de Godino et al. (1988). Los tres primeros ítems son tomados directamente de dicho cuestionario y en el cuarto se redujo el número de situaciones (inicialmente seis) a cuatro. El objetivo del cuestionario es evaluar las características que los participantes atribuyen a la aleatoriedad, los ejemplos que son capaces de proponer de juegos y fenómenos aleatorios y su capacidad para discriminar fenómenos aleatorios y deterministas.

Figura 1.

Cuestionario propuesto a los futuros profesores

1. ¿Qué quiere decir que una cosa ocurre al azar?		
2. Pon ejemplos de juegos en que interviene el azar		
3. Pon ejemplos de situaciones de tu vida diaria (distinta de juegos) en las que interviene el azar		
4. Indica con una cruz (X) en cuáles de las siguientes situaciones interviene el azar y en cuáles no:	sí	no
a. Sacar una carta de una baraja española y observar si es de oros		
b. Observar si mañana llueve o no		
c. Poner agua a enfriar y observar si se congela a cero grados		
d. Lanzar un tiro a una canasta de baloncesto y observar si el balón entra		

El primer ítem es de respuesta abierta y se pide a los profesores que expliquen con sus propias palabras lo que sería un fenómeno de azar, para analizar la comprensión intuitiva que tiene el maestro en formación inicial de un fenómeno aleatorio. Se habla de fenómenos de azar en lugar de utilizar el término aleatorio, que pudiera no ser familiar para algún participante. En los ítems 2 y 3 se les piden ejemplos de juegos y de situaciones diferentes de los juegos, para analizar la tipología que consideran para los fenómenos aleatorios.

El ítem 4 presenta una serie de situaciones en las que el futuro maestro ha de discriminar cuáles son aleatorias (situaciones a, b, d) y cuáles deterministas (c). La situación (a) describe un juego de azar, la (b) un fenómeno meteorológico, la (c) una situación determinista y la (d) un

resultado deportivo. Esperamos que la situación (a) sería aceptada como aleatoria por aquellos participantes que admiten la concepción de azar como equiprobabilidad, o una más amplia que incluya esta; la (b) por los que también aceptan la que corresponde a estabilidad de las frecuencias y la (d) por los que aceptan igualmente la concepción subjetiva. Se espera rechacen la opción (c) como aleatoria.

Recogidas las respuestas escritas de los participantes, se realizó un análisis de contenido (Drisko y Maschi, 2016) de las respuestas a las preguntas 1 a 3, que fueron clasificadas mediante un proceso cíclico, en que uno de los autores clasificó las respuestas, siendo revisada la codificación por otro autor, hasta llegar a un consenso. Para cada situación descrita en la pregunta 2, se codificó simplemente si se respondía que el fenómeno era aleatorio o no.

5. RESULTADOS Y DISCUSIÓN

Los resultados obtenidos para cada pregunta se exponen a continuación.

5.1. Definiciones de sucesos que ocurren al azar

Para responder la primera pregunta los participantes dieron su definición intuitiva de qué es algo que sucede al azar. Algunas de ellas pueden equipararse a las concepciones históricas de la aleatoriedad descritas en Bennet (1999) y se han categorizado en la forma siguiente:

D1. Algo que se contrapone a la relación causa y efecto: En estos casos, los futuros maestros indican que si algo ocurre al azar no tiene causa. Corresponde a una concepción primera del azar, consistente en suponer que todo está causado y un fenómeno es aleatorio simplemente porque no tiene una causa que lo produzca, es decir es casual.

Por ejemplo, P1: *Ocorre por casualidad, sin intención o motivo por el que esté condicionado.*

D2. Algo sin explicación: Las definiciones clasificadas en este apartado son las de los que indican que algo que ocurre al azar sería aquello cuya causa no conocemos; está relacionada con la definición D1, aunque es ligeramente diferente pues se admite que el fenómeno pueda tener causa, pero no las conocemos. Ambas son concepciones primitivas hoy superadas.

Por ejemplo, P2: *Una situación que ocurre al azar es fortuita, no planeada. Nadie sabía qué podría pasar.*

D3. Cuando hay equiprobabilidad de resultados: Estos futuros profesores indican que un experimento aleatorio consta de resultados equiprobables, y corresponde a una visión que estuvo aceptada en las primeras etapas de estudio de la probabilidad y ligada a la concepción clásica e la probabilidad. Aunque correcta, es limitada, pues sólo se aplicaría a los juegos de azar.

Por ejemplo, P3: *Que hay un 50% de posibilidades de que ocurra o no.*

D4. Se puede aplicar la probabilidad: Se considera que un fenómeno aleatorio es aquel al que se le puede aplicar las reglas de la probabilidad y eventualmente ocurrirá y sería una concepción que engloba a la D3.

Por ejemplo, P4: *Cuando algo tiene la misma probabilidad de que ocurra o no.*

Otras definiciones utilizadas por los participantes se apoyan en propiedades de los fenómenos aleatorios:

D5. Algo desordenado: Corresponde a una propiedad de una secuencia de resultados aleatorios, que, al no tener un patrón conocido, es desordenada. Sería similar a la concepción de Von Mises.

Por ejemplo, P5: *Una cosa que ocurre de forma aleatoria sin una sucesión determinada, es decir, sin un orden establecido.*

D6. Impredecible: Una característica de los sucesos aleatorios es que son fortuitos; no se puede decir con seguridad si ocurrirán o no en una única repetición del experimento aleatorio; sin embargo, se puede predecir la distribución del conjunto de sucesos en una serie de repeticiones del experimento.

Por ejemplo, P6: *Cuando se hace algo y hay posibilidad de que pase cualquier cosa.*

D7. Incontrolable: Otra propiedad de la aleatoriedad es que no se puede controlar y ocurre a pesar de la falta de control.

Por ejemplo, P7: *Algo que ocurre al azar es aleatorio, es decir, no tienes poder para decidir qué sucede.*

D8. Varias características: Cuando el maestro en formación inicial alude en su respuesta a varias de las anteriores características.

Por ejemplo, P8: *Hace alusión a que es una probabilidad, la cual no puede ser un resultado previsible pues existen variables que no podemos controlar y por tanto no podemos conocer con exactitud el resultado.* Este futuro profesor hace referencia a la probabilidad, a la vez que a la imposibilidad de control e impredecibilidad.

En la Tabla 1 presentamos los resultados de la definición intuitiva dada por los maestros en formación inicial de algo que ocurre por azar, con la finalidad de evaluar su concepción intuitiva de la aleatoriedad. Lo más frecuente fue considerar algo que ocurre al azar como contrario a la causa y efecto o sin causas conocidas (categorías D1 y D2) que son concepciones ya superadas e incorrectas. La concepción como equiprobabilidad (D3) sería parcialmente correcta al ser muy limitada, luego el resto de las categorías corresponden a concepciones correctas (D4 a D8, que corresponden al 57,6% de participantes)

Tabla 1

Frecuencia y porcentaje de definiciones de algo que ocurre por azar

Tipo de respuesta	Frecuencia	Porcentaje
D1. Contrario a causa y efecto	38	28,8
D2. Causas desconocidas	5	3,8
D3. Equiprobabilidad	13	9,8
D4. Se puede analizar con la probabilidad	5	3,8
D5. Desordenado	13	9,8
D6. Impredecible	27	20,5
D7. Incontrolable	22	16,7
D8. Varias características	9	6,8

Hernández-Salmerón (2015) no clasifica las respuestas por categorías y solo indica que el 71,4 % en primer curso de la ESO y el 78,8% en segundo curso dan respuesta y ejemplo

correcto en esta pregunta, por lo que los resultados en este estudio no llegan a alcanzar los de la autora, a pesar de que ella trabajaba con estudiantes de la ESO. Las categorías D1 y D2 aparecen en Azcárate et al. (1998) como una única denominada “causalidad”; también cita la categoría D3, pero no el resto de las categorías en nuestra clasificación. Por el contrario, en nuestro caso no aparecen la visión de la aleatoriedad como incertidumbre, falta de información, múltiples probabilidades, laplaciana o frecuencial.

5.2. Ejemplos de juegos de azar

En la Tabla 2 se presentan los tipos de juegos de azar citados por los maestros en formación de la muestra, junto con su frecuencia y porcentaje (respecto al total de participantes). Puesto que algunos participantes citan más de un ejemplo, la suma de porcentajes es mayor que 100. Se han ordenado los juegos citados por su frecuencia. Lo más frecuente fue citar el bingo (más de la mitad de la muestra), y entre una tercera parte y la mitad indican los juegos de cartas, lotería, parchís y ruleta. Son menos frecuentes las citas a otros juegos. En unos pocos casos se clasifican deportes como el fútbol o baloncesto como juegos de azar. Una diferencia con el trabajo de Hernández-Salmerón (2015) es que algunos de sus estudiantes citaron videojuegos disponibles en los teléfonos móviles o juegos infantiles como la gallina ciega y el escondite y en esta investigación no se ha dado ninguno de estos ejemplos.

Tabla 2

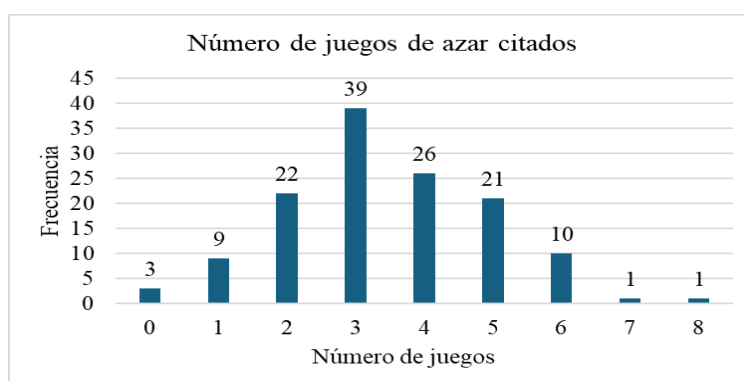
Frecuencia y porcentaje de participantes que citan distintos juegos de azar

Tipo de juego	Frecuencia	Porcentaje
Bingo	84	63,6
Cartas	62	47
Dados	60	45,5
Lotería	52	39,4
Parchís	49	37,1
Ruleta	45	34,1
Otros juegos de mesa	22	16,7
Casino	20	15,2
Oca	20	15,2
Monedas	19	14,4
Apuestas	14	10,6
Fútbol	4	3
Baloncesto	3	2,3

En la Figura 2 se representa el número de juegos de azar diferentes propuesto por cada uno de los futuros profesores de la muestra, donde se observa que lo más frecuente fue dar tres ejemplos, aunque algunos participantes llegaron hasta ocho juegos diferentes y unos pocos no llegaron a citar ninguno. En el trabajo de Hernández-Salmerón (2015) el número medio de ejemplos de juego de azar fue 2,3 muy próximo al obtenido en este trabajo.

Figura 2

Número de juegos de azar citados por cada participante



5.3. Ejemplos de fenómenos aleatorios diferentes de los juegos de azar

En la tercera pregunta se pidió a los futuros profesores que propusiesen situaciones aleatorias de su vida diaria que no fuesen juegos de azar, con la finalidad de conocer a qué fenómenos asignaban a la aleatoriedad. Las respuestas a esta pregunta se clasificaron en las siguientes categorías:

C1. Situaciones meteorológicas: La meteorología es una fuente de fenómenos aleatorios próximos a la vida de cualquier ciudadano y que aparece con frecuencia en los textos escolares. Por ello, se presentaron múltiples ejemplos en este contexto. Por ejemplo, si un día cualquiera llueve o no llueve o la temperatura ese día.

C2. Situaciones acontecidas por coincidencias: Otro grupo de fenómenos son las coincidencias, es decir, resultados inesperados. Algunos ejemplos descritos fueron ver a una persona famosa, a un amigo o a un conocido por la calle.

C3 y C4. Loterías y juegos de Azar: A pesar de que la pregunta explícitamente indicaba que no se sugirieran juegos de azar, todavía muchos participantes en el estudio los citaron, indicando como ejemplo, ganar una quiniela o recibir un premio de la lotería nacional. Cuando se trata de juegos de azar puros como la lotería, serían situaciones asimilables a la concepción de azar como equiprobabilidad, pero no en todos los casos se aplica, ya que, por ejemplo, ganar la quiniela no es un fenómeno de sucesos equiprobables.

C5. Situaciones escolares: Se citan ejemplos como las preguntas que tocan en un examen o la calificación del examen, o si la profesora llama o no a un alumno para responder una pregunta como aleatorias.

C6. Tráfico y transporte: El tráfico puede ser impredecible debido a varios factores, como accidentes, obras viales, condiciones meteorológicas adversas y la cantidad de vehículos en la carretera.

C7. Decisiones aleatorias: A veces tomamos decisiones al azar en situaciones triviales como elegir un restaurante, seleccionar una película, o elegir una prenda de vestir, reflejando la influencia del azar en nuestras elecciones diarias.

C8. Comercio y compras: Las compras impulsivas pueden ser influenciadas por factores aleatorios, como la atracción instantánea hacia un producto o una oferta inesperada. También se indica que por azar se puede adquirir un producto próximo a caducar o defectuoso.

C9. Accidentes: Los accidentes casuales pueden ocurrir debido a circunstancias imprevistas, como tropezar, resbalar o romper un objeto, que están más allá de nuestro control directo. Otros accidentes domésticos pueden ocurrir por quedarse sin combustible, pinchar una rueda, etc. añadiendo un elemento de azar a la vida cotidiana en el hogar.

C10. Salud: A pesar de tomar medidas preventivas, las enfermedades pueden afectarnos debido a la exposición a virus, bacterias u otros agentes patógenos que están fuera de nuestro control.

C11. Deportes: El resultado de un juego deportivo puede depender del azar en aspectos como la habilidad de los oponentes, lo que añade incertidumbre al resultado final.

C12. Trabajo/Laboral: A pesar de tener las habilidades necesarias, encontrar un empleo puede depender de factores externos, como la cantidad de otros candidatos o las preferencias del empleador.

C13. Finanzas: La rentabilidad de una inversión o la pérdida o ganancia esperada también tienen elementos aleatorios.

C14. Otras situaciones citadas que no se engloban en las anteriores, fueron extraer sin mirar un caramelo en una bolsa que contiene distintos sabores o jugar al amigo invisible.

Por último, algunos participantes citan situaciones no aleatorias o no responden la pregunta.

Las respuestas obtenidas se presentan en la Tabla 3, en la que la suma de porcentajes es mayor que 100, dado que algunos futuros profesores dieron varios ejemplos.

Tabla 3

Frecuencia y porcentaje de participantes que citan distintas situaciones aleatorias

Tipo de situación	Frecuencia	Porcentaje de participantes
C1. Meteorología	45	33,6
C2. Coincidencias o sucesos fortuitos	45	33,6
C3. Lotería, sorteos	37	27,6
C4. Otros juegos de azar	14	10,4
C5. Situaciones escolares	29	21,6
C6. Tráfico y transporte	23	17,2
C7. Decisiones aleatorias	16	11,9
C8. Comercio, compras	12	9,0
C9. Accidentes	15	11,1
C10. Salud	11	8,2
C11. Deportes	7	5,2
C12. Trabajo/laboral	2	1,5
C13. Finanzas	4	3,0
C14. Otras situaciones no aleatorias	5	3,7
No responde	3	2,2

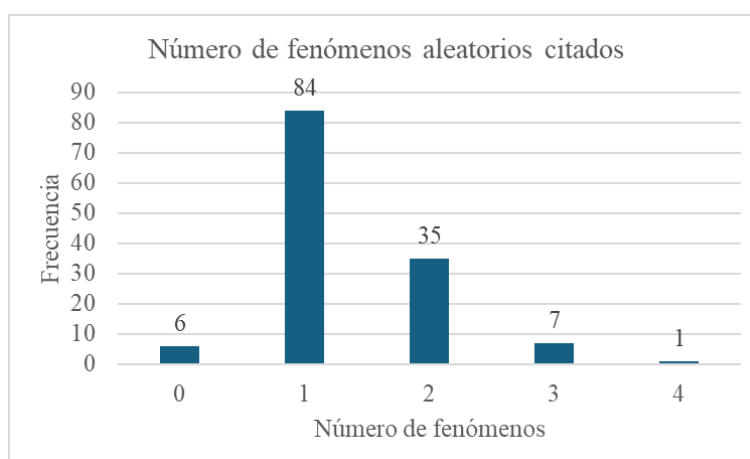
Los fenómenos más familiares para estos futuros profesores son la meteorología y las coincidencias. Hacemos notar que más de la cuarta parte que, a pesar de que se pedían situaciones diferentes de juegos de azar, dieron como ejemplos este tipo de juegos. En todo caso, en su conjunto se citan fenómenos variados, lo que indica una buena identificación de fenómenos de azar en la vida cotidiana por parte de los futuros profesores.

Hernández-Salmerón (2015) no clasifica el tipo de situaciones citadas por sus estudiantes, aunque indica que muchos estudiantes siguen respondiendo con juegos de azar en esta pregunta y que alrededor de un 30% no fue capaz de dar ningún ejemplo, proporción que es mucho menor en nuestro estudio (2,2 %).

En la Figura 3 se presenta la distribución del número de fenómenos aleatorios descritos en la pregunta 3 por cada participante, destacando su pequeño número, que se suele reducir a uno o dos ejemplos, e incluso en seis ocasiones no se cita ninguno. En todo caso las respuestas son mejores que en Hernández-Salmerón (2015), cuyos estudiantes no llegan a una respuesta correcta en promedio.

Figura 3

Número de fenómenos aleatorios citados por cada participante



5.4. Discriminación de sucesos aleatorios y deterministas

En la Tabla 4 se presentan los resultados en la Pregunta 4, donde se pide discriminar entre una serie de situaciones cuáles están relacionadas con el azar. A pesar de su aparente sencillez, se encuentran dificultades de discriminación de las situaciones deterministas y aleatorias por parte de los participantes.

En relación con la situación determinista (c), el mayor porcentaje de maestros en formación inicial la reconoce como tal. Al comparar con el trabajo de Hernández-Salmerón (2015) con estudiantes de educación secundaria, el porcentaje de estudiantes de 1º y 2º de la ESO que consideró determinista el suceso fue el 87,5% y 87,9%. Por lo tanto, nuestros resultados son mejores que aquellos (93,8%).

Tabla 4

Porcentaje de maestros en formación inicial que reconoce como aleatoria diferentes situaciones

Porcentaje de participantes que da cada respuesta	Sí	No
a. Sacar una carta de una baraja española y observar si es de oros	95,4	4,7
b. Observar si mañana llueve o no	53,5	46,5
c. Poner agua a enfriar y observar si se congela a cero grados	6,2	93,8
d. Lanzar un tiro a una canasta de baloncesto y observar si el balón entra	78,3	21,7

Respecto a las situaciones aleatorias, la mejor reconocida como tal es la (a) que corresponde a un juego de azar y donde se aplicaría la concepción de aleatoriedad como equiprobabilidad de resultados (Batanero et al., 1998). En la situación (d) solo el 78,3% reconoce la aleatoriedad; en esta situación sería aplicable una concepción subjetiva de la aleatoriedad, pues puede influir en la respuesta del estudiante el hecho de que sea bueno o malo encestando al baloncesto. Finalmente, solo algo más de la mitad de la muestra considera aleatorio que un día llueve o no, donde se aplicaría una concepción frecuencial, pero que parte de los participantes puede haber interpretado desde el punto de vista subjetivo, dependiendo de la información que tengan sobre el pronóstico del tiempo. Los porcentajes de estudiantes que consideran aleatorias estas situaciones para 1º y 2º cursos de ESO en la investigación de Hernández-Salmerón (2015) fueron 87,5% y 93,9% en la situación (a), 57,1% y 54,1% en la (b) y 87,5% y 93,9% en la (d). Por tanto, dichos resultados son similares a los del presente estudio en las dos últimas y mejores en la primera.

6. IMPLICACIONES PARA LA FORMACIÓN DE MAESTROS

En este trabajo se han descrito los resultados de un estudio exploratorio de evaluación sobre las ideas intuitivas del azar y aleatoriedad de un grupo de maestros de educación infantil en formación inicial. Los resultados indican una mezcla de ideas correctas e incorrectas.

Algunas de las definiciones dadas son muy limitadas al contraponer la aleatoriedad a lo causado o reducirlo a una concepción de sucesos equiprobables, que limitaría la aplicación de la probabilidad a los juegos de azar. Esta visión se confirma en algunos participantes, quienes asignan una variedad reducida a los fenómenos aleatorios, y señalan juegos de azar cuando se les pide fenómenos diferentes a los mismos. Además, son poco frecuentes los ejemplos sobre salud, laborales o finanzas. Los resultados aportan nueva información respecto a la investigación de Azcárate et al. (1998) y coinciden con otras evaluaciones llevadas a cabo con maestros de educación primaria en formación inicial como las de Gómez (2014), Vásquez y Alsina (2015), quienes indican una formación insuficiente de los mismos respecto a otros conceptos probabilísticos.

La falta de conocimiento probabilístico de los maestros de la etapa de educación infantil podría afectar la introducción de ideas de azar y probabilidad en la educación infantil y primeros cursos de educación primaria, reclamada por autores como Alsina (2017) o Godino et al. (1988). Sería, por tanto, necesario reforzar el conocimiento probabilístico y el conocimiento didáctico relacionado con los futuros profesores de educación infantil en formación inicial, para poder seguir las recomendaciones de los autores citados.

Dicha formación contribuiría sin duda a desarrollar su razonamiento probabilístico de los maestros de educación infantil en formación (Batanero et al., 2023; Borovenik, 2016) al hacerles conscientes de las muchas aplicaciones de la probabilidad en situaciones cotidianas, escolares o sociales y aprender a discriminar situaciones aleatorias y deterministas.

Finalizamos reconociendo la limitación del estudio descrito en este trabajo y animamos a otros investigadores a replicar nuestro estudio con nuevas muestras de profesores en formación, cambiando también las preguntas para analizar más profundamente las ideas de los participantes.

Agradecimientos

Proyecto PID2022-139748NB-100 financiado por MCIN/AEI/ 10.13039/501100011033/ y FEDER (una forma de hacer Europa).

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Alsina, Á. (2017). Contextos y propuestas para la enseñanza de la estadística y la probabilidad en Educación Infantil: un itinerario didáctico. *Épsilon*, 95, 25-48. https://thales.cica.es/epsilon_d9/sites/default/files/2023-04/epsilon95_2.pdf
- Alsina, Á. y Vázquez, C. (2016). De la competencia matemática a la alfabetización probabilística en el aula: elementos para su caracterización y desarrollo. *UNIÓN*, 48, 41-58. <https://doi.org/10.30827/pna.v15i4.21357>
- Alonso-Castaño M., Alonso, P., Mellone, M. y Rodríguez-Muñiz L. J. (2021). What mathematical knowledge do prospective teachers reveal when creating and solving a probability problem? *Mathematics*, 9(24), 3300. <https://doi.org/10.3390/math9243300>
- Azcárate, P., Cardeñoso, J. M. y Porlán, R. (1998). Concepciones de futuros profesores de primaria sobre la noción de aleatoriedad. *Enseñanza de las Ciencias*, 16(1), 85-97. <https://www.raco.cat/index.php/ensenanza/article/view/83237>
- Batanero, C., Gea, M. M. y Álvarez-Arroyo, R. (2023). La educación del razonamiento probabilístico. *Educação Matemática Pesquisa*, 25(2), 127-144. <https://doi.org/10.23925/1983-3156.2023v25i2p127-144>
- Batanero, C., Green, D. R. y Serrano, L. R. (1998). Randomness, its meanings and educational implications. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 29(1), 113–123. <https://doi.org/10.1080/0020739980290111>
- Batanero, C. y Álvarez-Arroyo, R. (2024). Teaching and learning of probability. *ZDM Mathematics Education*, 56(1), 5-17. <https://doi.org/10.1007/s11858-023-01511-5>
- Batanero, C., Álvarez Arroyo, R., Hernández-Solís, L. A. y Gea, M. M. (2021). El inicio del razonamiento probabilístico en educación infantil. *PNA*, 15(4), 267-288. [10.30827/http://dx.doi.org/pna.v15i4.22349](http://dx.doi.org/pna.v15i4.22349)
- Bennett, D. J. (1999). *Randomness*. Harvard University Press.
- Borovenik, M. (2016). Probabilistic thinking and probability literacy in the context of risk. *Educação Matemática Pesquisa*, 18(3), 1491-1516. <https://revistas.pucsp.br/emp/article/view/31495>
- Burgos, M., López-Martín, M. del M., Aguayo-Arriagada, C. G. y Albanese, V. (2022). Análisis cognitivo de tareas de comparación de probabilidades por futuro profesorado de Educación Primaria. *Uniciencia*, 36(1), 1-24. <http://dx.doi.org/10.15359/ru.36-1.38>

- Chernoff, E. J., Vashchysyn, I. y Neufeld, H. (2018). Comparing the relative probabilities of events. En C. Batanero y E. Chernoff (Eds.), *Teaching and learning stochastic. Advances in Probability Education Research* (pp. 277-291). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-72871-1_16
- Drisko, J. W. y Maschi, T. (2016). *Content analysis*. Oxford University Press.
- Franco, J. y Alsina, Á. (2022). El conocimiento del profesorado de Educación Primaria para enseñar estadística y probabilidad: una revisión sistemática. *Aula Abierta*, 51(1), 7-16. <https://doi.org/10.17811/rifie.51.1.2022.7-16>
- Gea, M. M. y Fernandes, J. A. (2018). Conocimiento de futuros profesores de los primeros años escolares para enseñar probabilidad. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, 14, 15–30. <https://doi.org/10.35763/aiem.v0i14.213>
- Godino, J. D., Batanero, C. y Cañizares, M. J. (1988). *Azar y probabilidad: fundamentos didácticos y propuestas curriculares*. Síntesis.
- Gómez, E. (2014). *Evaluación y desarrollo del conocimiento matemático para enseñar la probabilidad en futuros profesores de educación primaria*. Tesis Doctoral. Universidad de Granada. <https://digibug.ugr.es/bitstream/handle/10481/34020/23535301.pdf>
- Hernández-Salmerón, E. (2015). *El lenguaje del azar en alumnos de Educación Secundaria Obligatoria*. Tesis de Máster. Universidad de Granada.
- Hourigan, M. y Leavy, A. M. (2020). Pre-service teachers' understanding of probabilistic fairness: Analysis of decisions around task design. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 51(7), 997-1019. <https://doi.org/10.1080/0020739X.2019.1648891>
- Ingram, J. (2022). Randomness and probability: exploring student teachers' conceptions. *Mathematical Thinking and Learning*, 26(1), 1-19. <https://doi.org/10.1080/10986065.2021.2016029>
- Kafoussi, S. (2004). Can kindergarten children be successfully involved in probabilistic tasks? *Statistics Education Research Journal*, 3(1), 29-39. <https://doi.org/10.52041/serj.v3i1.540>
- Kyburg, H. E. (1974). *The logical foundations of statistical inference*. Reidel
- Poincaré, H. (1987). *Calcul des probabilités*. Jacques Gabay (Trabajo original publicado en 1912).
- Vásquez, C. y Alsina, Á. (2015). El conocimiento del profesorado para enseñar probabilidad: Un análisis global desde el modelo del conocimiento didáctico-matemático. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, 7, 27–48. <https://doi.org/10.35763/aiem.v1i7.104>

Los artículos de investigación en didáctica de la matemática

Juan F. Ruiz-Hidalgo

Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada, jfrui@ugr.es

Resumen: *En investigación educativa y, en particular, en la investigación en didáctica de la matemática existe una evidente desconexión con la práctica docente. Con el objetivo de acercar la investigación al profesorado de matemáticas, en este trabajo se presentan los elementos necesarios para entender un artículo de investigación en educación matemática. En primer lugar, el género lingüístico al que pertenece y que determina su forma y sus características. A continuación, el contexto en el que se escriben estos artículos, que corresponde a la comunidad investigadora en educación matemática. En tercer y último lugar, es necesario conocer las normas y características de funcionamiento que establecen las revistas del área.*

Palabras clave: *Educación matemática, investigación educativa, revistas de didáctica de la matemática.*

Mathematics education research journal papers

Abstract: *There exists an evident gap between teaching practice and educational research, particularly within mathematics education research. With the goal of bringing research closer to mathematics teachers, this work presents some required elements to understand a research paper in mathematics education. Firstly, the linguistic genre which determines its form and its characteristics. Secondly, the context in which these papers are written corresponds to the community of researchers in mathematics education. Thirdly and finally, it is necessary to know the operating procedures and features established by the journals in the area.*

Key words: *Didactic of Mathematics, educational research, Mathematics education journals.*

1. INTRODUCCIÓN

La investigación en educación matemática tiene poca o ninguna repercusión en la práctica docente. Autores tan reconocidos como, por ejemplo, Jeremy Kilpatrick afirman que la investigación en el área no es especialmente fructífera en su implementación en las aulas de matemáticas (Presmeg y Kilpatrick, 2019, p. 348).

Los motivos para esta desconexión son bastante variados y complejos. No se puede simplemente culpar a las personas que investigan, ni a los agentes educativos (docentes y equipos directivos), ni a la administración educativa (Perines, 2018). Se trata de un problema complejo que requiere de un profundo análisis y de una propuesta de soluciones que comprometa a todas las personas involucradas.

Perines (2018) organiza las causas de esta ruptura en seis tipos:

1. La diferencia de intenciones entre la política, que enfoca la investigación en los temas útiles para sus intereses políticos, y la investigación, que procura centrarse en contenidos beneficiosos para los centros escolares.

2. La escasa formación en investigación de los futuros docentes. Es difícil encontrar en los programas de formación de docentes materias orientadas a la investigación.
3. El modelo de transferencia de los conocimientos a la práctica docente es un modelo explicativo simplista según el cual los resultados de las investigaciones deben tener una repercusión automática en el aula.
4. Las personas que investigan no tienen en cuenta los conocimientos ni la experiencia de los docentes. Es necesario un reconocimiento profundo del conocimiento y trabajo docente para que la investigación logre resultados que interesen al profesorado.
5. Desde el colectivo docente se desconfía de los artículos de investigación, ya que priorizan el producto resultante de los artículos ignorando otros elementos básicos para la comprensión integral de los mismos.
6. Los criterios de evaluación de la investigación en España hacen que la investigación esté más interesada en publicar en revistas importantes que en publicar trabajos que tengan una aplicación práctica efectiva.

Ante estos motivos, Perines (2018) propone algunas sugerencias de solución, de las que destaca la necesidad de movilizar y difundir el conocimiento para “generar debate, tener consecuencias y repercusiones en la práctica educativa” (p. 20).

Como editor jefe de la revista de investigación en educación matemática *PNA* (<https://revistaseug.ugr.es/index.php/pna/index>) considero, desde el punto de vista de la investigación en educación matemática, que es obligación de quienes investigamos hacer el esfuerzo para difundir nuestros estudios. Así, con la intención general de conectar la investigación en didáctica de la matemática con el colectivo docente, elaboro en este documento una visión de la literatura en educación matemática en España orientada a docentes de matemáticas de todos los niveles educativos. No se trata de una guía ni de unas normas, redacto unas líneas que ayuden a docentes de matemáticas y a quienes se inician en la investigación en educación matemática a entender un poco mejor la investigación, que les orienten cuando quieran o tengan que leer un artículo científico y les ayuden a vislumbrar aspectos de los artículos que puedan ser de su interés.

Espero que, tras la lectura de este documento, se tenga una visión más amplia de qué es un artículo de investigación en educación matemática y qué elementos básicos se deben tener en cuenta para realizar una lectura que resulte útil para su posible aplicación en el aula.

2. LOS ARTÍCULOS DE INVESTIGACIÓN

Las características clásicas de un artículo científico son la objetividad y la imparcialidad, se complementan con la claridad, la precisión y la concisión (Cortés de los Ríos y Cruz Martínez, 2001). En sí mismo, el artículo de investigación constituye un tipo de género lingüístico. Según la lingüística sistémico-funcional de Halliday (Eggins, 2004; Halliday y Hasan, 1976) los géneros se definen como convenciones de uso a las que, dentro de determinados contextos en los que están inscritos, un grupo puede asignar un determinado significado social (Martín Menéndez, 2010). En el caso del artículo de investigación, se trata de un género que debe ser reconocido por la comunidad académica, que posee uno o varios objetivos comunicativos específicos y que está estructurado de una manera estandarizada en la que cada apartado puede ser variable. Para ser compartido y que haga su función de transmitir un significado, quienes escriben, investigan y leen deben compartir el contexto y los requisitos propios del género (Cortés de los Ríos y Cruz Martínez, 2001).

La comunicación entre los miembros de la comunidad científica de una determinada área se realiza de manera formal a través de artículos en revistas especializadas entre cuyos fines está la comunicación de resultados de interés, la identificación y diferenciación de un ámbito propio entre la comunidad científica o el avance en los conocimientos científicos (Cortés de los Ríos y Cruz Martínez, 2001).

En síntesis, para entender un artículo de investigación será necesario conocer: el género, la comunidad en la que está enmarcado y las normas propias compartidas por sus miembros.

2.1. Los elementos de un artículo de investigación

Los elementos que caracterizan un artículo de investigación son la reivindicación científica, la cortesía, el lenguaje aproximativo y la macroestructura (Alcaraz Varó, 2000).

El primer elemento, la reivindicación científica, atiende a la función de los artículos de delimitar el área de conocimiento para aumentar su reputación y generar avances en la ciencia establecida (Cortés de los Ríos y Cruz Martínez, 2001).

Los elementos segundo y tercero se pueden entender como el conjunto de rasgos (claridad expositiva, referencias a otros trabajos) y técnicas lingüísticas propias del género (impersonalización, matización, reconocimiento de los valores de la comunidad, ...) que se identifican con el lenguaje propio de los artículos de investigación, conocido como lenguaje aproximativo o lenguaje oblicuo o indirecto (Cortés de los Ríos y Cruz Martínez, 2001).

Por último, la macroestructura es quizá el elemento más visual de los artículos. Se trata del formato que organiza los artículos. El conocimiento de este formato es un requisito indispensable para la comprensión de la lectura y es casi tan importante como la comprensión del contenido (Cortés de los Ríos y Cruz Martínez, 2001). En general, los artículos científico-técnicos contienen las siguientes secciones: título, resumen, introducción, método, resultados, discusión y referencias. En el caso de los artículos de educación matemática, entre la introducción y el método suele aparecer el marco conceptual o teórico.

3. LA COMUNIDAD INVESTIGADORA EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Otra de las claves de la literatura investigativa es el conocimiento de la comunidad científica donde está enmarcada y sus particularidades y convenciones.

3.1. La educación matemática y la didáctica de la matemática

Usando las palabras de Rico et al. (2002) entendemos la “educación matemática como el conjunto de ideas, conocimientos y procesos implicados en la construcción, representación, transmisión y valoración del conocimiento matemático que tienen lugar con carácter intencional” (p. 36). Las finalidades y campos de actuación de la educación matemática son Rico y Sierra (2000):

- El estudio y la estructuración de los significados de los conceptos matemáticos de las matemáticas escolares.
- El estudio de las condiciones para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, referido al conocimiento didáctico necesario para planificar tareas y evaluar el aprendizaje.

- La consideración de disciplina científica que se ocupa de indagar en los procesos de enseñanza y aprendizaje así como de los planes para la preparación profesional de los educadores matemáticos” (Rico et al., 2002, pp. 36-37), que es lo que habitualmente se conoce como didáctica de la matemática.

La configuración de lo que conocemos hoy día como didáctica de la matemática en España se produce en el período determinado por la Ley de Reforma Universitaria (LRU), de 25 de agosto de 1983 y la Ley de Ordenación General del Sistema Educativo (LOGSE), de 3 de octubre de 1990. Concretamente, es en el marco de la LRU donde se constituye el área de conocimiento didáctica de la matemática como uno de los campos de conocimiento básicos en torno a los que se estructura el nuevo modelo de Universidad española, reconociendo el esfuerzo realizado por la comunidad de educadores matemáticos españoles en los treinta años previos (Rico y Sierra, 1994). Su constitución oficial está establecida por el Real Decreto 1888/84 (Ministerio de Educación y Ciencia, 1984).

La didáctica de la matemática está fundamentada en diversas áreas de conocimiento como la Psicología, Pedagogía, Epistemología, Filosofía, Matemáticas e Historia de las Ciencias (Rico, 1997). Su objetivo es, según Schoenfeld (2000), tratar de comprender la naturaleza del pensamiento matemático, su aprendizaje y enseñanza, y mejorar ésta última.

Por otra parte, Castro et al. (2002) señalan tres tareas principales de esta área, de las que dos están en conexión con la formación de profesores:

- Investigar los fenómenos de educación matemática que se producen en el medio escolar.
- Proporcionar al profesorado de matemáticas en formación los instrumentos necesarios para que desarrolle su trabajo de modo competente.
- Orientar a los docentes de matemáticas para que mejoren su rendimiento y actualicen su práctica docente, proporcionándoles medios y recursos didácticos para que ello sea posible.

3.2. Los artículos de investigación en educación matemática

La investigación en educación matemática se comparte a través de los informes de investigación, los cuales son los elementos clave en el proceso de investigación. Algunos de los tipos de investigación que se hacen en educación matemática son: estudios históricos, métodos de indagación filosófica, investigación etnográfica, estudios de casos, métodos que requieren encuestas, estudios experimentales comparativos o métodos cuasiexperimentales (Jaeger, 1988). A esta lista se le pueden añadir los más recientes métodos de diseño mixto, que complementan las ventajas de los métodos cualitativos y cuantitativos para dar visiones más completas de los fenómenos que se estudian (Presmeg y Kilpatrick, 2019).

Esta variedad de métodos debe estar soportada por un proceso de investigación disciplinado con los siguientes componentes que avalan la importancia de una publicación (Hart, 1993, p. 411):

1. Hay un problema.
2. Hay evidencia/datos.
3. El trabajo se puede replicar.
4. Se informa del trabajo.
5. Existe una teoría.

Los criterios para juzgar la calidad de la investigación, por su parte, incluyen relevancia, validez, objetividad, originalidad, rigor, precisión, previsibilidad, reproductibilidad y relación (Presmeg y Kilpatrick, 2019, p. 349).

Un informe de investigación bien estructurado contendrá (Presmeg y Kilpatrick, 2019, p. 351):

- Título
- Resumen bien escrito, que describe la investigación, su diseño, su alcance y los principales resultados.
- Introducción, que proporciona un trasfondo sucinto pero interesante de los principales interrogantes. Estas cuestiones, que emergen de la introducción, se presentan al final y clarifican el título, las palabras clave y orientan la lectura del documento.
- Una revisión de la literatura que sitúe la investigación en el panorama internacional y que permita desarrollar un marco teórico que proporcione unos cimientos que fortalezcan el proyecto concreto que se comunica y que permita el avance colectivo en el área (Spangler y Williams, 2019, p. 14). Los marcos teóricos juegan un rol crítico en las investigaciones en educación matemática y tienen tres propósitos: (1) proporcionar a quienes se inician en investigación herramientas de aprendizaje sobre el papel de la difusión de la investigación; (2) recordar a quienes tienen una posición consolidada en la investigación que atestigüen que los aspectos teóricos podrían haberse vuelto obvios y no estar articulando la difusión de su investigación; y (3) guiar a los colectivos encargados de la revisión y edición de las revistas que valoran la calidad de los artículos (Leathman, 2019, p. 180).
- El método proporciona detalles del diseño empírico, la muestra estudiada y de cómo el diseño se lleva a cabo. Se discuten, entre otras cosas, la representatividad de la muestra o las diferentes fases de la investigación.
- Los datos se presentan a modo de resumen con un informe detallado de cómo el análisis que se ha hecho de los mismos se ejecutó.
- Para terminar, los artículos deben contener una discusión con las implicaciones y las limitaciones de la investigación y las posibles vías de continuación. La discusión debe dejar claras cómo las conclusiones del informe se relacionan con las cuestiones iniciales de las que surge la investigación.

3.3. Las revistas de didáctica de la matemática en España

Los informes de investigación se publican en revistas especializadas, en las que la comunidad investigadora en educación matemática comparte los resultados de investigación.

En España encontramos un número considerable de revistas especializadas. Una sencilla búsqueda en *Dialnet* (<https://dialnet.unirioja.es>) bajo los parámetros “Psicología y Educación” y “Didácticas aplicadas” proporciona un total de 169 revistas. Añadiendo el criterio “matemáticas”, que esté en activo y la revista sea española, se obtiene la siguiente lista:

- *Avances de investigación en educación matemática, AIEM* (<https://aiem.es>), es una revista de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática, SEIEM (<https://www.seiem.es>), cuya finalidad es contribuir al avance del conocimiento de los procesos involucrados en la educación matemática y en la investigación en educación matemática.

- *Enseñanza de las Ciencias* (<https://ensciencias.uab.es>) es una revista de investigación y experiencias didácticas dirigida la comunidad docente e investigadora del campo de la didáctica de las ciencias y de las matemáticas. Acepta trabajos con rigor metodológico y fundamentación científica que supongan una contribución al progreso del conocimiento en esas áreas.
- *Números: Revista de didáctica de las matemáticas* (<https://scpm Luis Balbuena.org/revista-numeros/>) es una revista editada por la Sociedad Canaria “Luis Balbuena Castellano” de profesorado de matemáticas. Se ocupa de la enseñanza y el aprendizaje desde infantil hasta la universidad, aunque atiende preferentemente la educación primaria y secundaria. Publica trabajos de interés para el profesorado de esos niveles, tales como experiencias de aula, reflexiones sobre la enseñanza, aplicaciones de la investigación, etc.
- *REDIMAT* (Revista de Investigación en Didáctica de las Matemáticas, <https://hipatiapress.com/hpjournals/index.php/redimat/index>), editada por la editorial Hipatia, es un espacio internacional destinado a estimular el debate científico sobre la didáctica de las matemáticas, a partir de evidencias científicas. Publica trabajos originales, tanto empíricos como teóricos, centrados en investigaciones científicas basadas en diversidad de enfoques teóricos y metodológicos.
- *Suma: Revista sobre Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas* (<https://revistasuma.fespm.es>) es una revista editada por la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas (FESPM, a la que recomiendo incluir a las profesoras en el nombre) que publica documentos relacionados con la didáctica de las matemáticas tanto a nivel divulgativo como formativo: actividades en el aula, historia de las matemáticas, desarrollo analítico, etc.
- *Uno: Revista de didáctica de las matemáticas* (<https://www.grao.com/revistas/revista-uno/>) es una revista editada por Graó Educación que se define como un punto de encuentro entre el profesorado y el conjunto de especialistas de la didáctica de las Matemáticas, que buscan una herramienta de conocimiento y comunicación que les permita mantener una actualización en la innovación educativa relacionada con su área de conocimiento.

Además de estas, destaco las revistas *Epsilon. Revista de la Sociedad Andaluza de Educación Matemática “Thales”* y *PNA: Revista de investigación en didáctica de la matemática* a las que dedicaré el siguiente epígrafe.

En el ámbito de la educación hay muchas otras revistas que también publican artículos de investigación en educación matemática, pero que no aparecen en la lista debido a las restricciones de la búsqueda realizada. Sin tratar de ser exhaustivo, se pueden nombrar: *Didácticas Específicas* o *Revista Eureka sobre enseñanza y divulgación de las ciencias*.

4. Las revistas *Epsilon* y *PNA*

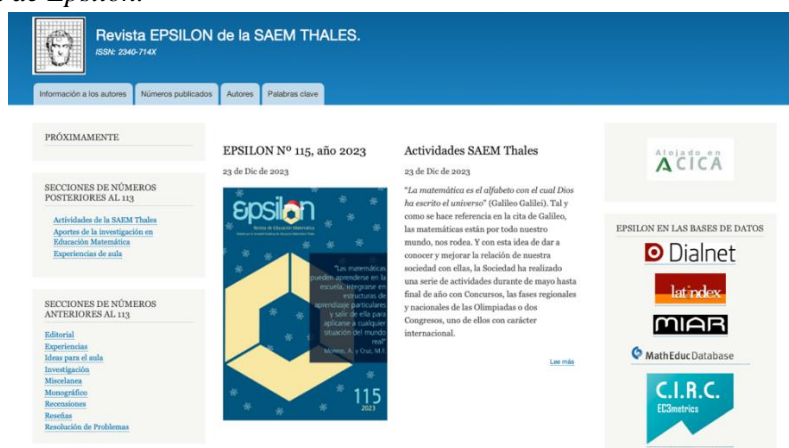
En el apartado anterior he presentado una lista de revistas que se publican actualmente en España. En las descripciones se puede observar claramente cuáles de ellas están enfocadas a los trabajos de investigación y cuáles tienen una perspectiva de conectar con el cuerpo de docentes. Como casos particulares de esta doble vertiente, están *Epsilon* y *PNA*.

4.1. Epsilon

La revista *Epsilon* (<https://thales.cica.es/epsilon/>) está editada por la Sociedad Andaluza de Educación Matemática “Thales” (Figura 1) y se publica trimestralmente. Su finalidad es compartir ideas, experiencias y recursos sobre el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas en todos los niveles educativos. Las principales líneas de publicación son: experiencias de aula, aportes desde la investigación en educación matemática y difusión de actividades desarrolladas en la SAEM Thales.

Figura 1

Página inicial de Epsilon.



La revista se publica desde 1984 y en la actualidad se han publicado 115 números. En el último, se incluyen 8 artículos, 3 de ellos en la sección de aportes a la investigación, 3 más sobre experiencias en el aula y 2 correspondientes a las actividades de la sociedad Thales.

4.1.1. Ejemplo de artículo de Epsilon

Al observar los artículos que corresponden a la sección de aportes a la investigación (Crespo, 2023; Dal Maso, 2023; Moreno y Cruz, 2023) lo primero que llama la atención es que sus estructuras no corresponden con la estructura presentada en el apartado 3.2. debido, fundamentalmente, a que no se trata de trabajos de investigación empíricos.

Por ejemplo, en “Matemáticas y patrimonio: un estudio del número de plata”, Crespo (2023) conecta el patrimonio almeriense con las matemáticas escolares. Concretamente, la conexión se realiza con el sentido espacial a través de la construcción de figuras geométricas y la semejanza de triángulos y con el sentido de la medida a través de la medida de áreas (Consejería de Desarrollo Educativo y Formación Profesional, 2023), destacando el número de plata.

El trabajo explota la premisa curricular de que “trabajar las propiedades de los objetos a través de materiales manipulativos, recursos digitales, relacionando la geometría con la naturaleza, la arquitectura y el arte y destacando su importancia en la cultura de Andalucía, ayuda a asimilar estos saberes” (Consejería de Desarrollo Educativo y Formación Profesional, 2023, p. 9727/246).

Además, como señala el autor, el mismo problema puede ser abordado en diferentes niveles de ESO, primero con el uso de herramientas sencillas y, posteriormente, con procedimientos

PNA publica cuatro números al año con cuatro artículos en cada uno de ellos. Los artículos pueden ser en español, inglés o portugués. El público lector de *PNA* suele tener el perfil investigador en didáctica de la matemática y las personas que publican se dedican a la investigación en el área. Desde 2006 hasta el momento, ha publicado 72 números que contienen entre 3 y 4 artículos de investigación cada uno.

4.1.1. Ejemplos de artículos de PNA

Casi todos los artículos que se publican en *PNA* son estudios empíricos aunque, en ocasiones, encontramos también artículos teóricos. La mayoría, consecuentemente, mantienen la estructura mencionada anteriormente y están escritos para ser compartidos con la comunidad de investigación.

Los cuatro artículos publicados en el último número de 2023, el 18(1), son trabajos empíricos. En el primero, que me sirve como ejemplo, Vásquez et al. (2023), analizan los procesos matemáticos (resolución de problemas, razonamiento y prueba, comunicación, conexiones y representación) que predominan en los libros de textos de educación infantil de Chile y España. Tras un cuidadoso proceso metodológico, sus resultados subrayan que, para el desarrollo de la competencia matemática, hay procesos que se describen con más cuidado en los libros pero que otros, como la comunicación y el razonamiento, están más descuidados. Además, enfatizan la importancia que tienen las guías docentes para que el profesorado de educación infantil oriente su enseñanza al enriquecimiento de procesos que desarrollen la competencia matemática del estudiantado.

Se trata de un artículo realmente interesante para el colectivo docente de educación primaria en ejercicio ya que les puede ayudar a tomar la siempre difícil decisión de seleccionar un libro de texto. En el documento se analizan casi 1000 tareas de 16 libros, para edades de 3 a 6 años, identifican los procesos fomentados en dichas tareas por ejes de contenido y proporcionan información clave para el colectivo docente. Por supuesto, sus resultados no son aplicables directamente pues, como se indica en el trabajo, la muestra de libros analizados no es muy amplia.

5. REFLEXIONES FINALES

Con la intención de dar pautas sencillas de lectura de literatura científica para docentes y el personal investigador en formación, en este trabajo he presentado algunas ideas básicas sobre los artículos de investigación en educación matemática. Se trata de un género lingüístico específico, con características reconocibles como la objetividad e imparcialidad, con rasgos propios (claridad expositiva, referencias a otros trabajos) y técnicas lingüísticas propias del género que lo dotan de una estructura particular.

Los artículos en investigación educativa se escriben para conectar a los miembros de la comunidad investigadora en educación matemática, para reivindicar el área de conocimiento y para enriquecer el conocimiento existente. Este enriquecimiento debería llegar al profesorado de matemáticas en ejercicio (y, por qué no, en formación), pero el hecho es que raramente se establece comunicación entre la investigación y las prácticas de aula.

He planteado ideas que se deben tener claras al enfrentarse a la lectura de un artículo de investigación como:

- Qué es la investigación en educación matemática (el contexto)

- Cómo es un artículo de investigación en educación matemática (el género)
- Dónde se publican estos artículos y cómo son las revistas del área (las normas compartidas por los miembros de la comunidad).

Además, he proporcionado algunos ejemplos de artículos y la utilidad que le puede dar cualquier docente de matemáticas de dos revistas con enfoques y público diferentes; *Epsilon* y *PNA*.

La conexión entre las comunidades docente e investigadora en matemática educativa está aún pendiente. Se trata de una labor que no se puede realizar en un solo sentido y tanto la investigación debe reconocer el conocimiento profesional docente, como el cuerpo docente debe hacer el esfuerzo de acercarse a las publicaciones en investigación.

Una línea abierta en este sentido es la de ejemplificar cómo realizar una lectura en detalle de artículos científicos, en qué fijarse, qué elementos se pueden obviar y para cuáles es necesario matizar para que el profesorado de matemáticas pueda aplicar o usar la información contenida en él.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Alcaraz Varó, E. (2000). *El Inglés Profesional y Académico*. Alianza Editorial.
- Castro, E, del Olmo, M. A. y Castro, E. (2002). *Desarrollo del pensamiento matemático infantil*. Universidad de Granada.
- Consejería de Desarrollo Educativo y Formación Profesional (2023). Orden de 30 de mayo de 2023, por la que se desarrolla el currículo correspondiente a la etapa de Educación Secundaria Obligatoria en la Comunidad Autónoma de Andalucía, se regulan determinados aspectos de la atención a la diversidad y a las diferencias individuales, se establece la ordenación de la evaluación del proceso de aprendizaje del alumnado y se determina el proceso de tránsito entre las diferentes etapas educativas. En *Boletín Oficial de la Junta de Andalucía*, 104. Junta de Andalucía.
- Cortés de los Ríos, M. E. y Cruz Martínez, M. S. (2001). El análisis del género del artículo de investigación. *Revista de Lenguas para Fines Específicos*, 7 y 8, 32-50.
- Crespo, D. (2023). Matemáticas y patrimonio: un estudio del número de plata. *Epsilon*, 115, 35-44.
- Dal Maso, M. S. (2023). Un problema de lugar geométrico que invita a descubrir y explicar propiedades mediadas por un software de geometría dinámica. *Epsilon*, 115, 21-33.
- Eggins, S. (2004). *An introduction to Systemic Functional Linguistics* (2nd edition). Continuum.
- Halliday, M. A. K. y Hasan, R. (1976). *Cohesion in English*. Longman Group Ltd.
- Hart, K. M. (1993). Basic criteria for research in mathematics education. En A. Sierpiska y J. Kilpatrick (Eds.), *Mathematics education as a research domain: A search for identity* (pp. 409-413). Kluwer.
- Jaeger, R. M. (Ed.). (1988). *Complementary methods for research in education*. American Educational Research Association.
- Leathman, K. R. (2019). Principles for effectively communicating the theoretical framing of our work. En K. R. Leathman (Ed.), *Designing, Conducting, and Publishing Quality Research in Mathematics Education* (pp. 169-182). Springer
- Martín Menéndez, S. (2010). Opción, registro y contexto. El concepto de significado en la lingüística sistémico-funcional. *Tópicos del seminario*, 23, 221-239.

- Ministerio de Educación y Ciencia (1984). Real Decreto 1888/1984, de 26 de septiembre, por el que le regulan los concursos para la provisión de plazas de los Cuerpos docentes universitarios. En *Boletín Oficial del Estado*, 257. Gobierno de España.
- Moreno, A. y Cruz, M. F. (2023). Acercamiento a la idea de situación de aprendizaje matemático en el currículo de matemáticas. *Epsilon*, 115, 7-19.
- Perines, H. (2018). ¿Por qué la investigación educativa no impacta en la práctica docente? *Estudios sobre educación*, 34, 9-27. <https://doi.org/10.15581/004.34.9-27>
- Presmeg, N. y Kilpatrick, J. (2019). Pleasures, power, and pitfalls of writing up Mathematics Education research. En G. Kaiser y N. Presmeg (Eds.), *Compendium for Early Career Researcher in Mathematics Education* (pp. 347-358). Springer Open. <https://doi.org/10.1007/978-3-030-15636-7>
- Rico, L. (1997). Los organizadores del currículo de matemáticas. En L. Rico (Coord.), *La educación matemática en la enseñanza secundaria* (pp. 39-59). Horsori.
- Rico, L. y Sierra, M. (1994). Educación matemática en la España del siglo XX. En J. Kilpatrick, L. Rico y M. Sierra (Eds.), *Educación matemática e investigación* (pp. 97-207). Síntesis.
- Rico, L. y Sierra, M. (2000). Didáctica de la Matemática e investigación. En J. Castillo y L. C. Contreras (Eds.), *Matemática española en los albores del siglo XXI* (pp. 77-131). Hergué, Editorial Andaluza.
- Rico, L., Sierra, M. y Castro, E. (2002). El área de conocimiento de 'Didáctica de la Matemática'. *Revista de Educación*, 328, 35-58.
- Schoenfeld, A. (2000). Purposes and methods of research in Mathematics Education. *Notice of the AMS*, 47(6), 641-679.
- Spangler, D. A. y Williams, S. R. (2019). The role of theoretical frameworks in Mathematics Education research. En K. R. Leathman (Ed.), *Designing, Conducting, and Publishing Quality Research in Mathematics Education* (pp. 1-16). Springer.
- Vásquez, C., Pincheira, N. y Alsina, A. (2023). Los procesos matemáticos en educación infantil: una aproximación desde libros de texto de Chile y España. *PNA*, 18(1), 1-34. <https://doi.org/10.30827/pna.v18i1.27164>

Geometría circular utilizando GeoGebra: análisis de relaciones entre ángulos inscritos y centrales

Josafat Javier Velázquez Hernández
Instituto Politécnico Nacional/ProME CICATA-Legaria,
j_velazquezhsa@seg-gto.gob.mx

Clara Mayo Juárez
Instituto Politécnico Nacional/CICATA-Legaria, cmayoj@ipn.mx

Resumen: Este artículo presenta los resultados obtenidos tras implementar una secuencia didáctica dirigida a estudiantes de segundo año de secundaria, con un rango de edad de 13 a 14 años, diseñada con el propósito de explorar, a través de un applet creado con GeoGebra, las relaciones existentes entre los ángulos inscritos y centrales que comparten un mismo arco en una circunferencia cualquiera.

Palabras clave: Circunferencia, ángulos centrales, ángulos inscritos, semicircunferencia, tecnología en el aula, GeoGebra.

Circular geometry using GeoGebra: analysis of relationships between inscribed and central angles.

Abstract: This article presents the results obtained from implementing a didactic sequence aimed at 2nd-grade high school students, with an age range of 13 to 14 years. The sequence was designed to explore, using an applet created with GeoGebra, the relationships between inscribed and central angles that subtend the same arc in a circle.

Key words: Circumference, central angles, inscribed angles, semicircle, technology in the classroom, GeoGebra.

1. INTRODUCCIÓN

Tras el impacto de la pandemia por COVID-19, la dinámica educativa en México -al igual que en el resto del mundo- experimentó un cambio radical. Los espacios físicos, esenciales en las prácticas pedagógicas, tuvieron que trasladarse a entornos virtuales, evidenciando la brecha digital existente en la población y la falta de competencias digitales en la comunidad educativa, entre otros desafíos. Esta situación inesperada tomó por sorpresa al profesorado en cuanto al aprovechamiento de las herramientas tecnológicas y al uso de metodologías para facilitar la apropiación del conocimiento en este nuevo escenario (Cifuentes-Faura, 2020). Sobre la marcha, se intentó reorientar las prácticas para que fueran distintas a las presenciales y se pudieran afrontar estos retos, sin embargo, no se logró plenamente dicho objetivo.

Según el informe de resultados de la Comisión Nacional para la Mejora Continua de la Educación, extraído de la Evaluación diagnóstica del aprendizaje del alumnado de educación básica 2022-2023, se observa que la disciplina de matemáticas presenta los niveles más bajos de

aciertos. Específicamente, este déficit se concentra en la unidad de estudio “Forma, Espacio y Medida” del nivel de secundaria. El informe subraya la urgente necesidad de abordar aspectos relacionados con las propiedades de ángulos, triángulos, paralelogramos y polígonos; la congruencia de triángulos; el uso de coordenadas en el plano cartesiano; así como las propiedades y cálculo de áreas de cuadriláteros, polígonos, círculos, sectores circulares y el volumen de prismas y cilindros (MEJOREDU, 2023).

Tradicionalmente la enseñanza de estos contenidos se realizaba mediante el uso de herramientas de geometría convencionales, como reglas, compases y papel milimétrico; situación que fue difícil emular en la transición hacia entornos virtuales por la falta de una preparación formal en la implementación de diversas modalidades de aprendizaje a distancia de la mayoría de las y los profesionales de la educación (Díaz-Barriga, 2020).

En la actualidad, a la luz de la experiencia vivida, se encontró que la integración de aplicaciones interactivas, como GeoGebra, abre un abanico de posibilidades para visualizar conceptos abstractos, experimentar con construcciones geométricas y fomentar un entendimiento más dinámico y participativo de la geometría, lo que les da un alto valor epistémico, contribuyendo a atender y contrarrestar este fenómeno al que algunos especialistas han denominado pérdida de aprendizajes (UNESCO et al., 2021).

El presente trabajo aborda una experiencia de aula desarrollada con un grupo de 2.º grado de secundaria, en donde el objetivo se centró en que el alumnado fuera capaz de caracterizar ángulos inscritos y centrales en una circunferencia y analizar sus relaciones, a través de la interacción con un applet creado con GeoGebra. Consideramos esta herramienta digital ya que en diversos estudios (Juárez y Eligio, 2020; Zulnaidi y Zakaria, 2012) han sido documentados sus beneficios en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

1.1. Intenciones didácticas

Las intenciones didácticas de la experiencia descrita son que el alumnado:

- Analice las características de los ángulos centrales e inscritos de la circunferencia.
- Encuentre la relación entre las medidas de ángulos centrales e inscritos, cuando sus lados comprenden el mismo arco, a partir de trazos en un mismo círculo.
- Deduzca que todo triángulo inscrito en una semicircunferencia es un triángulo rectángulo.

1.2. Contexto de aplicación

La secuencia didáctica se aplicó en la Escuela Secundaria General No. 3 “Ignacio Ramírez”, ubicada en la Ciudad de Guanajuato, Gto., es una escuela pública que labora en el turno matutino, a la que asisten 644 estudiantes, de los cuales 333 son mujeres y 311 son hombres. Se localiza en una zona urbana, rodeada en su mayoría por desarrollos habitacionales de viviendas de interés social que cuentan con todos los servicios básicos, con vialidades amplias y pavimentadas que facilitan el tránsito y acceso vehicular.

El espacio donde se llevó a cabo esta actividad se denomina Aula LEA (Laboratorio de Experiencias de Aprendizaje), la cual forma parte de un proyecto denominado SINERGYA; que el Gobierno Estatal a través de la Secretaría de Educación de Guanajuato, promueve en las escuelas de educación primaria y secundaria para fomentar e innovar ambientes de aprendizaje con el uso eficiente de soluciones tecnológicas. Están organizadas de tal manera que permiten

que grupos de hasta 25 estudiantes puedan utilizar de manera personal una computadora portátil, y promover al mismo tiempo el aprendizaje colaborativo, en tanto trabajan en mesas trapezoidales que en conjunto forman estaciones hexagonales de equipos de trabajo de al menos 5 integrantes por mesa.

El espacio está equipado con un sistema de presentaciones colaborativas para aula, un software para la educación asistida, licencias de software de inglés, software para experimentos digitales de física, química y biología, un software de simulaciones interactivas para matemáticas, física, química y biología, mobiliario y proyector, por lo que el alumnado está habituado al uso de tecnología digital de este tipo.

1.3. Características de los estudiantes que participaron en la clase

El alumnado que participó en la actividad cursa el 2.º año de secundaria, por lo que su rango de edad es de 13 a 14 años, este grupo se conforma por 10 hombres y 10 mujeres, en quienes, de acuerdo con los reportes de los departamentos de Psicología y Trabajo Social de la escuela, no se detectan Barreras para el Aprendizaje y la Participación (BAP) significativas, tomando como referencia el enfoque desarrollado por Booth y Ainscow (2002, p. 8), en el que definen que “las barreras al aprendizaje y la participación surgen de la interacción entre los/as estudiantes y sus contextos; las personas, las políticas, las instituciones, las culturas y las circunstancias sociales y económicas que afectan a sus vidas”.

Cabe aclarar que ninguno de los participantes forma parte de algún grupo en donde el docente sea titular, de manera que será el primer contacto, con fines didácticos, que él tenga con el alumnado sujeto de esta práctica. Lo anterior debido a que el papel que desempeña el profesor dentro de la institución es de carácter administrativo, cuya función específica es la de acompañar y asesorar al profesorado de la disciplina de matemáticas.

2. PROPUESTA DIDÁCTICA

Previo al desarrollo de la sesión se construyó un applet en GeoGebra, diseñado para que cada estudiante reconozca algunas de las rectas y segmentos notables en la circunferencia, y que, con base en ello, defina cuáles son las características de los ángulos centrales e inscritos, respectivamente. Así mismo, mediante el uso de deslizadores que hagan variar la medida del arco que subtienden y comparten ambos ángulos, así como la posición del vértice del ángulo inscrito, se pretende que el estudiante encuentre y destaque la relación que guardan ambas construcciones geométricas entre sí. Las acciones anteriores se irán observando en diversos momentos de la clase de acuerdo con la consigna, para lo cual se incluyeron casillas de control dentro de esta herramienta.

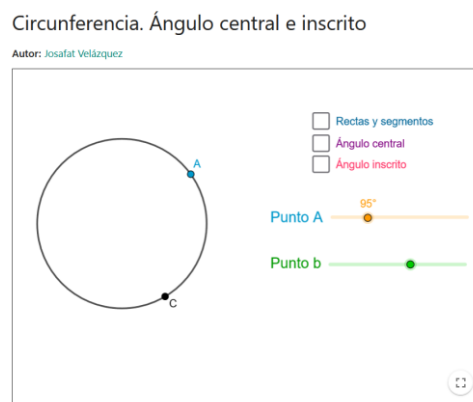
Se decidió trabajar con GeoGebra por el valor relacionado con el conocimiento y la comprensión que la herramienta significa, ya que permite representar visualmente conceptos matemáticos con los que el estudiante puede interactuar y experimentar (Figura 1), lo que se considera es fundamental para comprender aspectos abstractos como los que se abordan en la presente propuesta, por ejemplo, al momento de modificar parámetros en el applet y ver cómo estos cambios afectan el modelo presentado. En el estudio de Juárez y Eligio (2020) se hace hincapié en los beneficios que presenta el applet de GeoGebra en los estudiantes cuando resuelven problemas geométricos, entre estos se encuentra la reflexión que los estudiantes

consiguen hacer al manipular los deslizadores del applet, misma que no lograron al trabajar únicamente con lápiz y papel.

Como parte de las consideraciones previas respecto a la dinámica de la sesión, se contempló que la apropiación de cada uno de los conceptos a abordar partiera de los conocimientos previos del alumnado, por ello la metodología de trabajo se centró en resolver tareas de forma individual para después compartir en plenaria las ideas y los hallazgos de cada uno, esto con la finalidad de socializar el conocimiento, estando de acuerdo con Mejías y Sandoval (1996, p. 38) cuando aseguran al respecto que “el conocimiento no es un objeto que se pasa de uno a otro, sino que es algo que se construye por medio de operaciones o habilidades cognitivas que se inducen en la interacción social”.

Figura 1

Vistas del applet construido.



2.1. Desarrollo de la sesión

Habiendo ingresado al Aula LEA, se le pidió al alumnado que tomara una computadora portátil del gabinete de carga, que regresara a su estación de trabajo y que encendiera su equipo, una vez realizado, debía ingresar a la siguiente dirección en el navegador web: www.geogebra.org/classroom. Ya en la página se le indicó que ingresara el código E9EW PAMJ y que se identificara con su nombre completo, para ingresar al classroom de GeoGebra (Figura 2).

Figura 2

Vista general del classroom de GeoGebra.



Se le entregó una guía de trabajo al alumnado (Figura 3) y se analizó en colectivo el objetivo y las intenciones didácticas proyectadas para la sesión, en la misma se le solicitó que incluyera su nombre, para posteriormente brindarle retroalimentación.

Figura 3

Guía de trabajo entregada al alumnado.

SECRETARÍA DE EDUCACIÓN DE GUANAJUATO Supervisión de Escuelas Secundarias Generales. Zona 13 Escuela Secundaria General No. 3 "Ignacio Ramírez"	
Ángulos inscritos y centrales en una circunferencia. Profr. Josafat Javier Velázquez Hernández	
Disciplina	Matemáticas 2.º
Contenido	Circunferencia, círculo y esfera.
PDA	Determina la medida de ángulos inscritos y centrales, así como de arcos de circunferencia.
Estudiante:	
Objetivo. Como resultado del desarrollo de esta secuencia didáctica se espera que seas capaz de caracterizar ángulos inscritos y centrales en una circunferencia y analices sus relaciones.	
Intenciones didácticas. <ul style="list-style-type: none">• Que analices las características de los ángulos centrales e inscritos.• Que encuentres la relación entre las medidas de ángulos centrales e inscritos, cuando sus lados comprenden el mismo arco, a partir de trazos en un mismo círculo.• Que deduzcas que todo triángulo inscrito en una semicircunferencia es un triángulo rectángulo.	

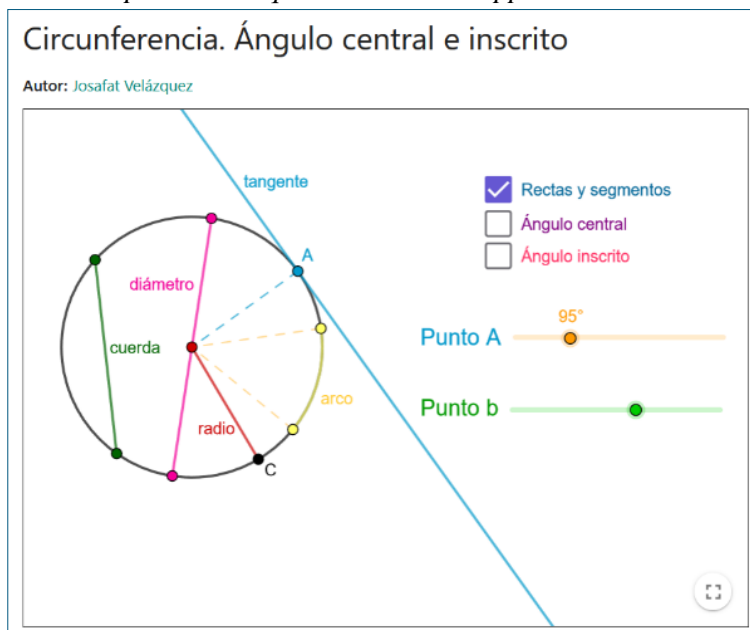
2.1.1 Activación de conocimientos previos

Haciendo uso del applet, se les pidió que seleccionaran la casilla de control “Rectas y segmentos” y, con base en lo que observaran, relacionaran dos columnas donde se enunciaban rectas y segmentos notables en la circunferencia, así como algunos enunciados que referían a las definiciones de estos. La Figura 4 muestra un ejemplo de respuestas dadas por un alumno en virtud de sus observaciones del applet.

Algo que llama la atención, es que a pesar de haberse advertido en la consigna que los incisos podían repetirse al ser relacionados con la columna de las definiciones, varios estudiantes se mostraron desconcertados e incluso hicieron comentarios sobre que sobrarían enunciados, fue hasta que leyeron con mayor detenimiento que se dieron cuenta que varios de ellos correspondían a un mismo segmento de la circunferencia, tal fue el caso del radio, el arco y el diámetro.

Figura 4

Producto de un alumno a partir de lo que observa en el applet.



2. Ya dentro del classroom de GeoGebra, haciendo uso del applet, verifica que únicamente esté señalada la casilla de control "Rectas y segmentos" y, con base en lo que observes, relaciona ambas columnas (pueden repetirse los incisos):

- | | |
|-------------|---|
| a) Cuerda | (c) Elemento cuya medida es la mitad de la medida del diámetro. |
| b) Tangente | (a) Segmento trazado entre dos puntos diferentes de la circunferencia. |
| c) Radio | (b) Elemento que es perpendicular a un radio en un punto de la circunferencia. |
| d) Arco | (c) Segmento que va del centro a un punto de la circunferencia. |
| e) Diámetro | (d) Elemento de la circunferencia determinado por la abertura de un ángulo central. |
| | (e) Elemento cuya longitud es el doble de la medida del radio. |
| | (e) Cuerda de mayor longitud en una circunferencia. |
| | (a) Parte de la circunferencia delimitada por dos puntos en ella. |

Cabe destacar que en esta actividad el enunciado "Segmento trazado entre dos puntos diferentes de la circunferencia" al estar muy cercano a la definición de diámetro, causó cierto conflicto en el alumnado, sin embargo, una gran mayoría (90%) pudo discernir que, para tratarse de uno, hacía falta que se mencionara que este segmento pasaba por el centro de la circunferencia, tal como se evidencia en la Tabla 1, donde se concentra el porcentaje de acierto que hubo al relacionar las columnas:

Tabla 1

Porcentaje de acierto al relacionarlas rectas o los segmentos notables con su descripción.

Recta o segmento	Porcentaje de acierto por definición	
	Definición	%
Cuerda	<ul style="list-style-type: none"> • Segmento trazado entre dos puntos diferentes de la circunferencia. 	90
Tangente	<ul style="list-style-type: none"> • Elemento que es perpendicular a un radio en un punto de la circunferencia. 	45
Radio	<ul style="list-style-type: none"> • Elemento cuya medida es la mitad de la medida del diámetro. 	50
Arco	<ul style="list-style-type: none"> • Segmento que va del centro a un punto de la circunferencia. 	90
	<ul style="list-style-type: none"> • Elemento de la circunferencia determinado por la abertura de un ángulo central. 	80
Diámetro	<ul style="list-style-type: none"> • Parte de la circunferencia delimitada por dos puntos en ella. 	85
	<ul style="list-style-type: none"> • Elemento cuya longitud es el doble de la medida del radio. 	45
	<ul style="list-style-type: none"> • Cuerda de mayor longitud en una circunferencia. 	45

Por otro lado, se intuye que el criterio mencionado en el párrafo anterior pudo haber originado que se concentrara el menor porcentaje de aciertos en las dos definiciones de diámetro (45% en ambas), lo anterior se infiere al no explicitarse, en ninguno de los enunciados, que este segmento toca o pasa por el centro de la circunferencia. Al no tener este concepto claro y al no poder asociarlo con ninguna de las representaciones gráficas contenidas en el applet, se dio un fenómeno muy particular al momento de observar el porcentaje de acierto en las definiciones de radio, pues mientras aquella que menciona que es un “segmento que va del centro a un punto de la circunferencia” concentra el 90% de acierto, la que lo define como un “elemento cuya medida es la mitad del diámetro” sólo alcanzó un 50%.

2.1.2 Análisis de las características de los ángulos centrales e inscritos

Se solicitó al alumnado que seleccionara la casilla de control “Ángulo central”, verificando que fuera la única que estuviese activa, y que estructurara con sus propias palabras una definición para éste. De igual forma, se le solicitó que con la casilla de control “Ángulo inscrito” activa estructuran una definición. Las Figuras 5 y 6 muestran ejemplos de respuestas dadas por el alumnado a estas cuestiones.

Figura 5

Definición de ángulo central por parte de un alumno, a partir de lo que observa en el applet.

Circunferencia. Ángulo central e inscrito

Autor: Josafat Velázquez

Rectas y segmentos
 Ángulo central
 Ángulo inscrito

Punto A 95°

Punto b

3. Selecciona la casilla de control "Ángulo central" (verifica que sea la única que esté activa), y estructura con tus propias palabras una definición para éste.
 Se caracteriza porque el vertice esta en el centro, y puede ser cualquier angulo.
 Se forma con 2 radios

Figura 6

Definición de ángulo inscrito por parte de un alumno, a partir de lo que observa en el applet.

Circunferencia. Ángulo central e inscrito

Autor: Josafat Velázquez

Rectas y segmentos
 Ángulo central
 Ángulo inscrito

Punto A 95°

Punto b

4. Realiza lo mismo con la casilla de control "Ángulo inscrito" (verifica que sea la única que esté activa), y estructura con tus propias palabras una definición para éste.
 El vértice se ubica en cualquier parte de la circunferencia al igual que el final de los dos segmentos. Es formado por 2 cuerdas.

2.1.3 Búsqueda de la relación entre las medidas de ángulos centrales e inscritos

La siguiente indicación fue que activaran las dos casillas de control anteriores (Ángulo central y Ángulo inscrito) y que utilizaran el deslizador “Punto A” para hacer variar la medida del arco que subtienden y comparten ambos ángulos de la circunferencia, también se les pidió que observaran con detenimiento la variación en la medida de sus ángulos y para guiarlos se plantearon las siguientes preguntas ¿encuentras alguna relación entre la medida de ambos ángulos?, ¿qué razón existe entre la medida de uno respecto la del otro?

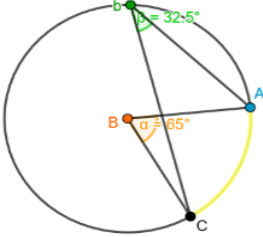
Al terminar, se les pidió que dejaran en un punto fijo el deslizador “Punto A” y que manipularan el deslizador “Punto b”, para que observaran cómo el vértice del ángulo inscrito comenzaba a moverse sobre la circunferencia; después de algunos minutos se realizaron los siguientes cuestionamientos ¿esto afecta la medida del ángulo?, ¿sigue existiendo la relación que encontraste en el punto 5? La Figura 7 ilustra las relaciones encontradas por el alumnado tras manipular el applet.

Figura 7

Relaciones encontradas por un alumno al manipular el applet.

Circunferencia. Ángulo central e inscrito

Tarea 1



Rectas y segmentos

Ángulo central

Ángulo inscrito

Punto A 65°

Punto b

5. Activa las dos casillas de control anteriores y utiliza el deslizador “Punto A” para hacer variar la medida del arco que subtienden y comparten ambos ángulos de la circunferencia, observa con detenimiento la variación en la medida de sus ángulos, ¿encuentras alguna relación entre la medida de ambos ángulos?, ¿qué razón existe entre la medida de uno respecto la del otro?

El ángulo central es la mitad del ángulo inscrito

6. Deja en un punto fijo el deslizador “Punto A” y manipula el deslizador “Punto b”, observarás que el vértice del ángulo inscrito comienza a moverse sobre la circunferencia, ¿esto afecta la medida del ángulo?, ¿sigue existiendo la relación que encontraste en el punto 5?

1-No afecta la medida del ángulo.
2-Sí.

2.1.4 Deducción de las características de un triángulo inscrito en una semicircunferencia

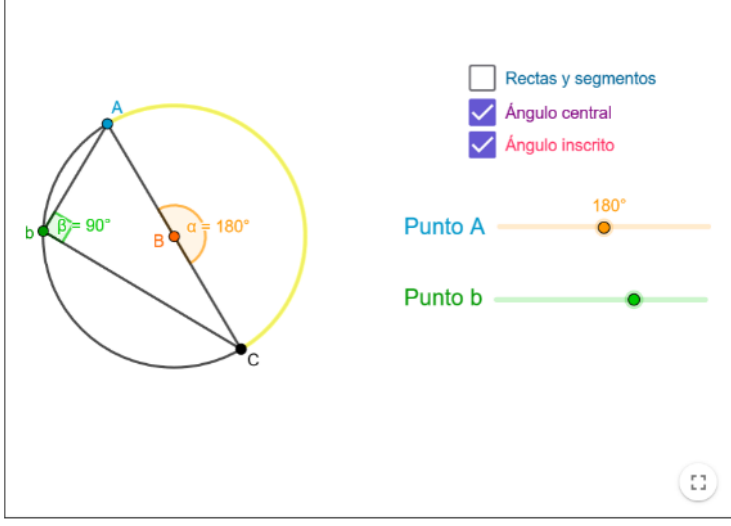
Ya casi para finalizar se pidió a los estudiantes que manipularan el deslizador “Punto A” para que hicieran que el ángulo central midiera 180° y que observaran cuál es la medida del ángulo inscrito; luego, sin mover el deslizador “Punto A”, se les pidió que operaran el “Punto b” y verificaran si la medida del ángulo inscrito cambiaba. Después de varias configuraciones se les invitó a que reflexionaran sobre qué figura se formaba entre los ángulos central e inscrito, en cualesquiera de las pruebas realizadas, para posteriormente preguntarles ¿qué características tiene esta figura y qué puedes asegurar sobre ella? El tipo de respuestas dadas por el alumnado a esta pregunta se ilustra con la Figura 8.

Figura 8

Inferencia de un alumno sobre un triángulo inscrito en una circunferencia.

Circunferencia. Ángulo central e inscrito

Tarea 1



7. Manipulando el deslizador "Punto A", haz que el ángulo central mida 180° y observa cuál es la medida del ángulo inscrito, ¿cuánto mide? Ahora, sin mover el deslizador "Punto A", opera el "Punto b" y verifica si la medida del ángulo inscrito cambia.

90°
no cambia.

8. En cualesquiera de las pruebas que realizaste en el punto 7, define qué figura se forma entre los ángulos central e inscrito, ¿qué características tiene esta figura y qué puedes asegurar sobre ella?

Es un triángulo rectángulo

2.2. Cierre de la sesión

En plenaria se socializaron las ideas y relaciones que fueron encontradas por parte del alumnado durante el desarrollo de la clase, durante las participaciones fue común escuchar que cualquier ángulo central mide el doble que el ángulo inscrito; otros estudiantes advertían el inverso de esta relación, que el ángulo inscrito mide la mitad que el ángulo central, a lo que el docente agregó que ambos casos se cumplen sólo si los ángulos comparten un mismo arco, mencionando que a esta relación se le conoce como el “Teorema del ángulo central” o “Teorema del ángulo inscrito”, según sea el caso.

Adicional a lo anterior, se le preguntó al alumnado qué es lo que había observado al momento de manipular el applet y definir una medida de 180° y hacer variar la posición del vértice del ángulo inscrito, a lo que en varias participaciones se destacó que en todos los casos el ángulo inscrito seguía midiendo 90° ; tras cuestionar sobre qué figura se formaba con los lados de ambos ángulos, el alumnado coincidió en que era un triángulo con un ángulo de 90° , otra parte, la minoría, lo nombró como triángulo rectángulo, afirmación que hizo sentido al resto de la clase. El profesor concluyó que con base en las aportaciones se podía afirmar que todo triángulo inscrito en la mitad de una circunferencia es un triángulo rectángulo.

2.2.1 Ejercicio de autoevaluación

Con la finalidad de recabar el sentir del alumnado tras el desarrollo de esta secuencia didáctica y medir el nivel de apropiación que percibió haber logrado, se le proporcionó un formulario alojado en la paquetería de Google, construido tomando como referencia la Taxonomía de Bloom (Bloom, 1956), en el que se solicitó que leyera cada uno de los enunciados y eligiera el que representara de mejor forma su sentir respecto a lo aprendido durante la sesión (Figura 9). Las respuestas a esta pregunta de elección se muestran en la Figura 10.

Figura 9

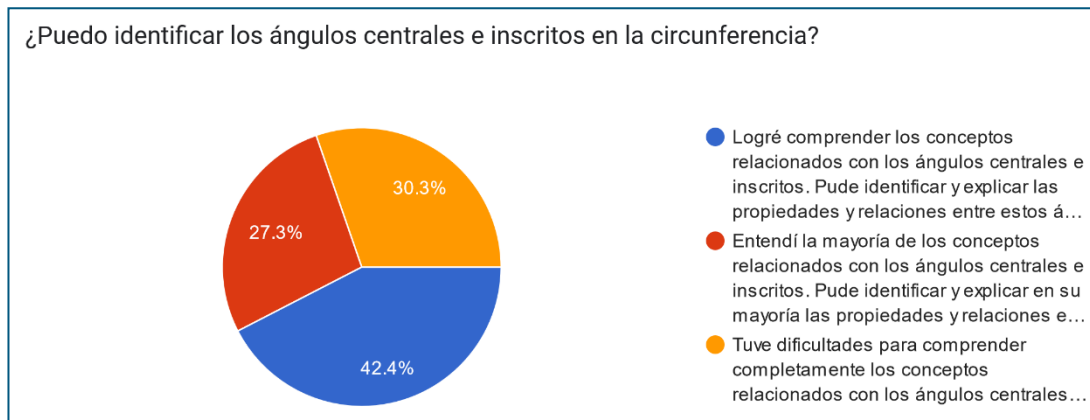
Niveles de logro propuestos en el formulario

¿Puedo identificar los ángulos centrales e inscritos en la circunferencia? *

- Logré comprender los conceptos relacionados con los ángulos centrales e inscritos. Pude identificar y explicar las propiedades y relaciones entre estos ángulos, así como deducir por qué un triángulo inscrito en una semicircunferencia es rectángulo.
- Entendí la mayoría de los conceptos relacionados con los ángulos centrales e inscritos. Pude identificar y explicar en su mayoría las propiedades y relaciones entre los ángulos, aunque tuve algunas dificultades. Mi comprensión sobre por qué un triángulo inscrito en una semicircunferencia es rectángulo fue parcial.
- Tuve dificultades para comprender completamente los conceptos relacionados con los ángulos centrales e inscritos. Pude identificar algunos ángulos y propiedades, pero mi comprensión de las relaciones entre estos ángulos es limitada. No logré deducir o explicar por qué un triángulo inscrito en una semicircunferencia es rectángulo.

Figura 10

Distribución de las autovaloraciones.

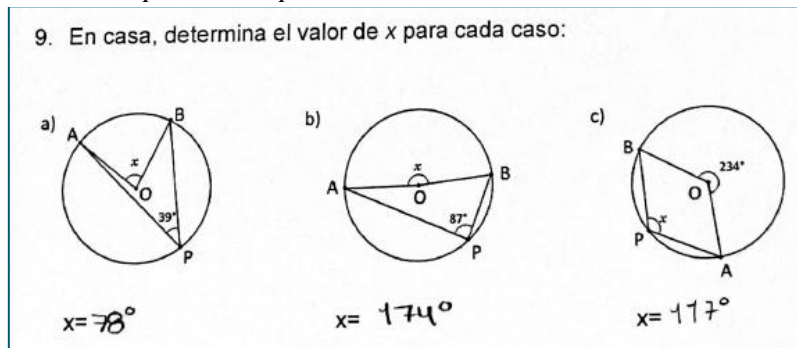


2.2.2 Aplicando lo aprendido

Se solicitó a alumnado que en casa determinara el valor de x para cada uno de tres modelos geométricos presentados, con la intención de seguir estimulando la comprensión de la relación entre ángulos inscritos y ángulos centrales, además de servir como insumo para valorar la aplicación del conocimiento obtenido (Figura 11).

Figura 11

Soluciones de un alumno planteados para abordarse en casa.



Para atender la consigna que se muestra en la imagen, fue necesario que el estudiante determinara si la medida definida correspondía al ángulo central o al ángulo inscrito, para posteriormente calcular el valor de x con base en el “Teorema del ángulo central” o “Teorema del ángulo inscrito” enunciados en la sesión, esto en cada una de las tres circunferencias dadas.

3. CONCLUSIONES

Tras analizar los resultados obtenidos mediante la aplicación de esta secuencia didáctica, que se enfocó en la utilización de GeoGebra como herramienta digital para explorar la relación entre un ángulo inscrito y uno central que comparten un mismo arco, se concluye que esta metodología presentó varias ventajas significativas. Entre ellas, permitió al alumnado visualizar de manera interactiva cómo cambian los ángulos al modificar el arco compartido, lo que facilitó una comprensión más profunda y tangible de los conceptos geométricos. Además, aseguró la

precisión en la construcción y medición de ángulos y arcos, reduciendo errores y reforzando la exactitud en los resultados obtenidos.

Asimismo, se puede afirmar que el uso del applet construido con GeoGebra permitió a los estudiantes explorar múltiples escenarios rápidamente, algo que, en contraste, con el uso de herramientas convencionales, como regla y compás, podría llevar más tiempo para dibujar y medir ángulos, limitando la capacidad de explorar diversas situaciones geométricas en un tiempo reducido, lo que, aunado a las demás ventajas, ayudó a una comprensión más exacta de las relaciones entre la medida de los ángulos.

Partiendo de la sistematización de la información y productos recabados, en un ejercicio de valoración sobre el nivel de logro alcanzado para cada una de las tres Intenciones Didácticas (ID) planteadas, se determinó lo siguiente:

- ID1. Alto: La mayoría del grupo logró identificar y describir con precisión los ángulos centrales e inscritos. Se observó una comprensión general de las propiedades y relaciones entre estos ángulos.
- ID2. Medio: Algunos estudiantes lograron comprender la relación entre ángulos, pero mostraron dificultades en cálculos o explicaciones precisas en ciertos casos.
- ID3. Medio: Algunos estudiantes entendieron la idea general, pero mostraron dificultades al explicar por qué un triángulo inscrito en una semicircunferencia es rectángulo en todos los casos.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Bloom, B. (1956). *Taxonomía de los objetivos educacionales, Manual I: El dominio cognitivo*. David McKay.
- Booth, T. y Ainscow, M. (2002). *Índice de Inclusión. Desarrollando el aprendizaje y la participación en las escuelas*. UNESCO/CSIE.
- Cifuentes-Faura, J. (2020). Docencia online y Covid-19: la necesidad de reinventarse. *Revista de Estilos de Aprendizaje*, 13, 115-127.
<http://revistaestilosdeaprendizaje.com/article/view/2149/3248>
- Díaz-Barriga, Á. (2020). La escuela ausente, la necesidad de replantear su significado. En H. Casanova (Coord.) *Educación y pandemia: una visión académica* (pp. 19-29). UNAM.
https://www.iisue.unam.mx/investigacion/textos/educacion_pandemia.pdf
- Juárez, C. M. y Eligio, U. X. (2020). El Applet como un Recurso para la Reflexión en la Resolución de Problemas Geométricos. *Journal of Research in Mathematics Education*, 9(1), 88-115.
- Mejía, R. y Sandoval, S. (1996). *Interacción social y activación del pensamiento. Transformación del estilo docente*. ITESO.
- MEJOREDU (2023). Evaluación diagnóstica del aprendizaje de las y los alumnos de educación básica 2022-2023. Informe de resultados.
- UNESCO, UNICEF y BM. (2021). *The State of the Global Education Crisis*. World Bank Group.
- Zulnaidi, H. y Zakaria, E. (2012). The effect of using GeoGebra on conceptual and procedural knowledge of high school mathematics students. *Asian Social Science*, 8(11), 202-206.

El coseno y el seno de un ángulo en un sistema de coordenadas utilizando simulaciones PhET

Marco Antonio Molina Paredes

Escuela Politécnica Nacional, Quito, Ecuador, marco.molinao@epn.edu.ec

Clara Mayo Juárez

Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada Unidad Legaria,
Ciudad de México, cmjuarez@ipn.mx

Alejandro Miguel Rosas Mendoza

Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada Unidad Legaria,
Ciudad de México, arosas@ipn.mx

Resumen: En este trabajo se presenta el desarrollo de una clase en donde se estudia el significado del coseno y del seno de un ángulo, en un sistema de coordenadas, a estudiantes del curso propedéutico de tecnología superior utilizando como apoyo didáctico una simulación interactiva PhET, a la cual tienen acceso de manera gratuita vía Internet. Se presenta una secuencia didáctica aplicada en la clase, seguida de un análisis de resultados, aciertos y dificultades suscitadas en el desarrollo de éste; así como la experiencia estudiantil durante la clase y su impresión en cuanto a la utilización de la simulación interactiva.

Palabras clave: coseno, seno, trigonometría, simulación, PhET, enseñanza de matemáticas.

The cosine and sine of an angle in a coordinate system using PhET simulations.

Abstract: This work presents the development of a class where the meaning of the cosine and the sine of an angle is explained, in a coordinate system, to students of the higher technology preparation course using as didactic support an interactive PhET simulation, to which the students have free access over the Internet. A didactic sequence applied in the class is presented, followed by an analysis of results, successes and difficulties raised in its development, as well as the students' experiences during class and their impression regarding the use of the interactive simulation.

Key words: cosine, sine, trigonometry, simulation, PhET, mathematics teaching.

1. INTRODUCCIÓN

El seno y el coseno de un ángulo en un triángulo rectángulo son conceptos que se abordan desde el bachillerato. La idea de una razón entre las medidas de los lados de un triángulo rectángulo tratado desde una visión clásica es muy frecuente en la educación media.

Maldonado (2005) muestra tres etapas escolares para el estudio del coseno y seno: el planteamiento de la razón trigonométrica, la relación entre ángulos medidos en grados o en radianes, y la comprensión de las propiedades y sus aplicaciones. De Kee (1996) por su parte

Cómo citar: Molina Paredes, M. A., Mayo Juárez, C. y Rosas Mendoza, A. M. (2024). El coseno y el seno de un ángulo en un sistema de coordenadas utilizando simulaciones PhET. *Epsilon*, 117, 71-83.

menciona la dificultad que existe en el paso de las razones trigonométricas en el triángulo rectángulo hacia un sistema de coordenadas usando la circunferencia trigonométrica. La comprensión, abstracción y formalización requieren de gran esfuerzo y tiempo por parte del estudiante y el profesor porque vincula una mayor cantidad de conceptos que se los suelen trabajar de manera memorística y sin profundidad. Montiel (2004) demuestra la gran dificultad de pasar de la razón trigonométrica, a la circunferencia trigonométrica y posteriormente a la función trigonométrica, porque el sentido geométrico asociado a las dos primeras se pierde y el grado de abstracción y el carácter funcional aparecen. Torres, Montiel et al. (2016) aclaran que esta dificultad asociada a la pérdida del sentido geométrico se debe al avance y tecnicismo del Álgebra, siendo fundamental el buscar una resignificación del saber trigonométrico.

Un enfoque común y más preciso para introducir el seno y el coseno es definirlos en la circunferencia trigonométrica. Luego, utilizando el teorema de Tales, se expresan como razones entre los lados de un triángulo rectángulo. La departamentalización de los conocimientos se produce cuando la definición geométrica se desvincula del método general de cálculo, lo que provoca que estos se vean como escenarios separados. Campo y Lasso (2014) mencionan:

la importancia de innovar en situaciones que permitan al estudiante analizar, reflexionar, inferir y conjeturar conceptos trigonométricos y romper con el esquema tradicional de la enseñanza de las razones y funciones trigonométricas de una manera aislada, por lo que sí es posible trabajar en el aula de una manera integrada los conceptos de razón y función trigonométrica usando incluso contextos cotidianos para los estudiantes. (p. 101)

Con base en lo expuesto, el objetivo principal de la clase es explicar en términos trigonométricos los conceptos de coseno y seno de un ángulo en un sistema de coordenadas a estudiantes del curso propedéutico de tecnología superior teniendo como apoyo didáctico una simulación interactiva PhET. Los objetivos específicos de la clase son:

- Asociar las coordenadas de los puntos de la circunferencia trigonométrica con el coseno y el seno del ángulo formado por el radio que contiene estos puntos.
- Deducir el signo del coseno y del seno para cualquier ángulo dado sin una calculadora usando la circunferencia trigonométrica.
- Definir las razones trigonométricas exactas para ángulos especiales (que son aquellos ángulos que recaen sobre la intersección de circunferencia trigonométrica con los ejes y la adición, a estos, de 30° , 45° y 60°).

1.1. ¿Qué es PhET Simulation?

Physics Education Technology (PhET) fue fundado en el 2002 por el ganador del premio Nobel Carl Wieman y desarrollado con la ayuda de fondos de muchas donaciones para que se pueda acceder a este gratuitamente. El proyecto PhET de la Universidad de Colorado Boulder crea simulaciones interactivas de matemáticas y ciencias, las cuales son fruto de una investigación educativa que impulsa a los estudiantes, mediante entornos lúdicos e intuitivos, a aprender a través de la exploración y el descubrimiento. El acompañamiento y corrección del profesor, a posterior, garantiza el correcto aprendizaje. Chamberlain, Lancaster, Parson y Perkins (2014) indican que el diseño de una actividad orientada con una simulación interactiva puede influir notablemente en el proceso de exploración del estudiante.

Sarwoto et al. (2020) mencionan que usar simulaciones en actividades de aprendizaje puede proveer experiencias de aprendizaje mientras los estudiantes juegan y exploran. Por su parte, Souza et al. (2020) después de usar las simulaciones PhET concluyen que las tecnologías educativas favorecen la enseñanza y el aprendizaje mediante la demostración práctica, siempre que estos se combinen con una planificación estructurada y sigan una secuencia de enseñanza que priorice la visualización práctica de los contenidos impartidos durante la clase. En la tabla 1 se mencionan las ventajas encontradas en estas simulaciones.

Tabla 1
Ventajas de usar simulaciones PhET

Ventajas
Gratuita en forma móvil y web.
Intuitiva y confiable.
Tiene simulaciones de matemáticas, física, química, ciencias de la Tierra y biología.
Desarrollada y revisada por expertos.
Existe material para trabajar desde cero.
Promueve la curiosidad y la exploración por parte del estudiante.

2. DISEÑO DE LA SECUENCIA DIDÁCTICA

El objetivo de la secuencia didáctica es estudiar junto a los alumnos los conceptos del coseno y el seno de un ángulo en un sistema de coordenadas. Como prerrequisitos los estudiantes deberán conocer: la circunferencia de radio 1 centrada en el origen de un sistema de coordenadas cartesianas, el teorema de Pitágoras y las razones trigonométricas en un triángulo rectángulo, así como sus valores para los ángulos de 30° , 45° y 60° .

Para la secuencia se utilizó la simulación interactiva de PhET Trig Tour simulation disponible en la web: http://phet.colorado.edu/sims/html/trig-tour/latest/trig-tour_en.html

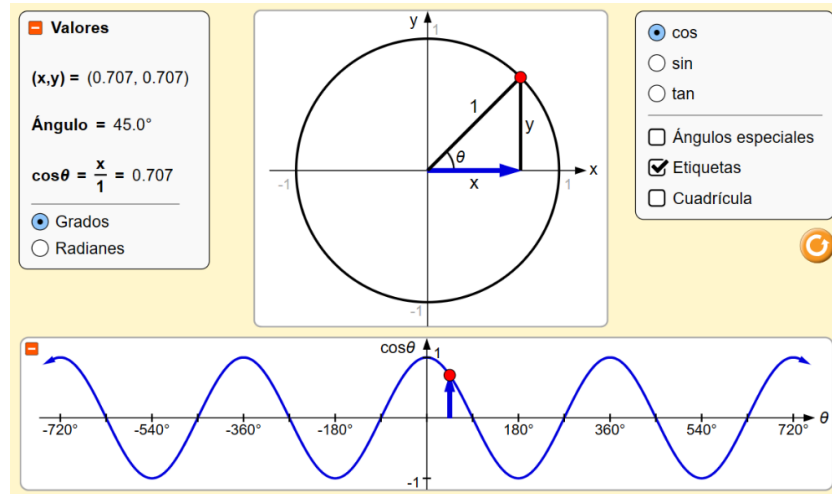
2.1. Secuencia Didáctica puesta en práctica

2.1.1. Presentación del tema

Al inicio de la secuencia didáctica se presentarán los objetivos de la clase, su justificación y objetivos a alcanzarse. También se compartirá el enlace de la simulación interactiva a los estudiantes para que puedan usarla en su teléfono celular mediante conexión a Internet con el fin de que se familiaricen y la exploren. Esta se puede ver en la figura 1.

Figura 1

Simulación interactiva PhET: Tour trigonométrico.



2.1.2. Desarrollo del tema

Se pedirá a los estudiantes que exploren libremente e interactúen en el simulador. El profesor realizará una ronda de preguntas y recabará las respuestas e intuiciones de los estudiantes acerca de lo observado. Las preguntas serán las siguientes:

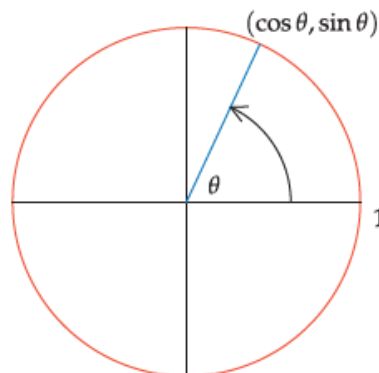
- ¿Qué sucede con el coseno cuando el ángulo se desplaza en el sentido positivo o en el sentido negativo?
- ¿Qué sucede con el seno cuando el ángulo se desplaza en el sentido positivo?
- ¿Cuándo cambia de signo el coseno? ¿Cuándo cambia de signo el seno?
- ¿Cuándo coseno se hace 0? ¿Cuándo seno se hace 0?

Se proponen 5 minutos para que los estudiantes realizaran esta exploración.

Se formalizará en la pizarra los conceptos de coseno y seno de un ángulo en un sistema de coordenadas, respectivamente, como la abscisa y la ordenada del punto de intersección entre el segmento que determina el ángulo y el círculo unitario (Axler, 2016), como se muestra en la figura 2. Se destinará 10 minutos para esta etapa.

Figura 2

Seno y coseno de un ángulo en un sistema de coordenadas (Axler, 2016)

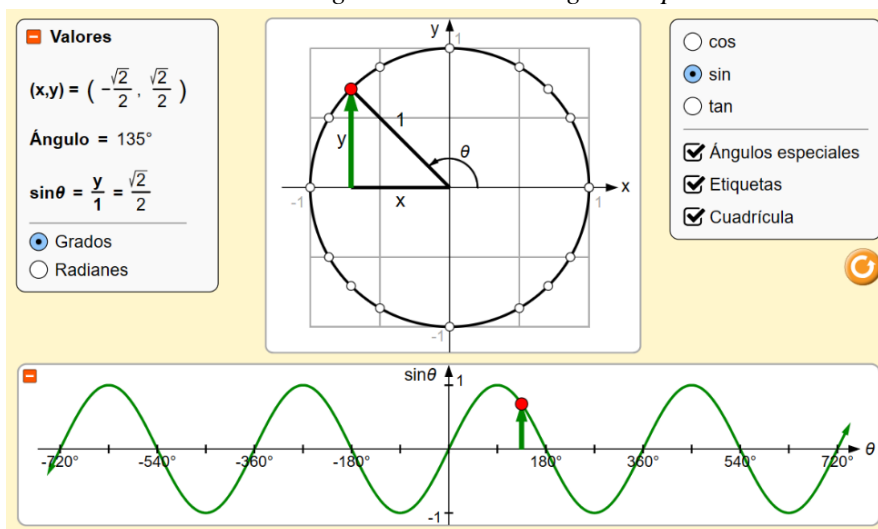


Se pedirá a los estudiantes los signos de las coordenadas de los puntos en cada uno de los cuatro cuadrantes de un sistema de coordenadas cartesianas. Posteriormente, se les solicitará analizar el signo del coseno y del seno a través de la visualización en la simulación que tienen en su teléfono celular. Luego, se enfatizará en el signo de cada una de estas dos razones dependiendo en el cuadrante en donde se encuentren destacando que el seno es positivo en el primer y segundo cuadrante y el coseno es positivo en el primer y cuarto cuadrante. Se dará un tiempo de 10 minutos para realizar esta actividad.

Juntamente con los estudiantes y el simulador, se deducirán las razones trigonométricas para los ángulos de 30, 45 y 60 grados. Luego, a través de la suma de estos ángulos, se establecerán los signos del seno y coseno de los ángulos de 90, 120, 135, 150, 180, 210, 225, 240, 270, 300, 315 y 330 grados respectivamente, tal como se ve en la figura 3. Se considerarán 10 minutos para esta etapa.

Figura 3

Simulación interactiva PhET: Tour trigonométrico con ángulos especiales



Se presentarán 7 ejercicios relacionados con los valores del coseno y seno de los ángulos especiales analizados anteriormente, para ser desarrollados por los estudiantes, luego se proporcionará la respectiva retroalimentación. Se destinará 15 minutos para el desarrollo de los ejercicios y la retroalimentación. En la tabla 2 se exponen los ejercicios y preguntas que se presentarán a los estudiantes.

Tabla 2

Ejercicios y preguntas del coseno y seno de un ángulo en un sistema de coordenadas.

Ejercicios
Encuentre el coseno y el seno para los ángulos de 120°, 135°, 150°
Encuentre el coseno y el seno para los ángulos de 210°, 225°, 240°
Encuentre el coseno y el seno para los ángulos de 300°, 315°, 330°

Preguntas

¿Qué sucede con el seno y coseno de 0° , 90° , 180° y 270° ? Establezca sus valores.

Si el seno de un ángulo es $\frac{\sqrt{3}}{2}$, ¿el coseno de ese ángulo es?

Si el seno de un ángulo es $-\frac{\sqrt{2}}{2}$, ¿el coseno de ese ángulo es?

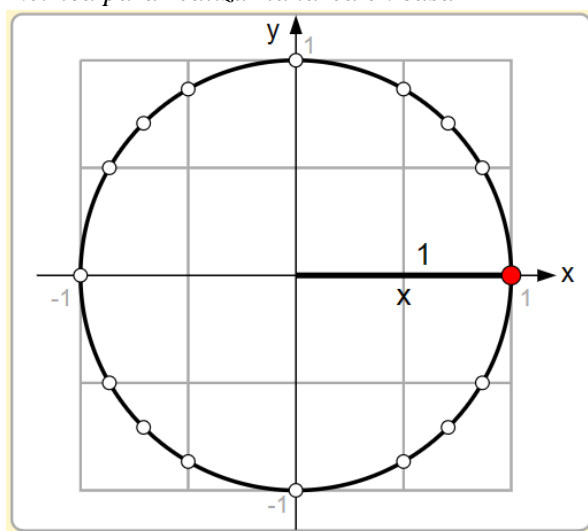
Si el coseno de un ángulo es $\frac{1}{2}$, ¿el seno de ese ángulo es?

Se propondrá a los estudiantes realizar una tarea a desarrollar en casa. Podrán usar el simulador. La tarea se compone de lo siguiente:

1. Completar el siguiente diagrama con los respectivos ángulos y coordenadas (ver Figura 4):

Figura 4

Circunferencia trigonométrica para realizar la tarea en casa



2. ¿Es el seno de 45° igual al seno de 135° ? ¿Por qué?
3. ¿Es el coseno de 60° igual al coseno de 300° ? ¿Por qué?
4. ¿Es el seno de 120° igual al coseno de 210° ? ¿Por qué?
5. ¿Es el coseno de 45° igual al seno de 225° ? ¿Por qué?
6. ¿Por qué el seno de 90° es igual al coseno de 0° ?

2.1.3. Cierre

Se cerrará la clase recordando cómo obtener el seno y el coseno de un ángulo en un sistema de coordenadas cartesiano, asociándolos con las coordenadas de los puntos de la circunferencia trigonométrica, así como sus signos. Se comentará que en la siguiente clase se abordará lo que sucede con ángulos mayores a 360° en sentido horario y antihorario, así como las otras razones trigonométricas. Esta última etapa durará 5 minutos.

3. APLICACIÓN DE LA SECUENCIA DIDÁCTICA

3.1. Participantes y lugar de estudio

La clase se llevó a cabo en un aula de la Escuela Politécnica Nacional en Quito, Ecuador, la cual es pública. Esta se dictó sobre una pizarra y como complemento la simulación interactiva en línea, el jueves 10 de noviembre del 2023 a las 11 am. La duración de la clase fue de una hora de manera presencial.

Los estudiantes participantes cursan la materia de Fundamentos de la matemática del curso propedéutico de Tecnología Superior, y son:

1. Johnny, 24 años, masculino
2. Salomé, 24 años, femenino
3. Erik, 19 años, masculino
4. Emily, 19 años, femenino

Todos ellos están familiarizados con la tecnología y accedieron a la simulación mediante sus teléfonos celulares con acceso a Internet por medio de la red institucional.

3.2. Presentación del tema

En esta primera etapa se presentó el propósito de la clase y se compartió la simulación interactiva. Hubo receptividad de los estudiantes al tema, así como motivación por el hecho de poder usar su celular en clase.

3.3. Desarrollo del tema

En esta segunda etapa, el proceso de indagación de la simulación que se muestra en la figura 5 fue seguido de una ronda de preguntas y respuestas que se presentan en la tabla 3:

Figura 5

Proceso de indagación de la simulación en los teléfonos celulares



Tabla 3

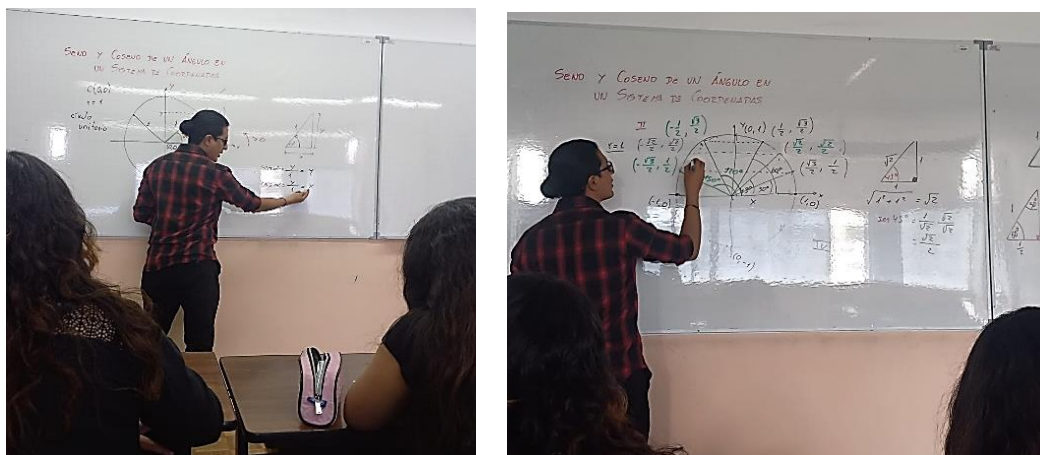
Preguntas y respuestas acerca del proceso de indagación de la simulación

Preguntas	Respuestas
Profesor: ¿Qué sucede con el coseno cuando el ángulo se desplaza en el sentido positivo o en el sentido negativo?	Erik: Se hace más chiquito y luego más grande profe.
Profesor: ¿Qué sucede con el seno cuando el ángulo se desplaza en el sentido positivo?	Emily: Lo mismo.
Profesor: ¿Cuándo cambia de signo el coseno?	Erik: Cuando pasa de un cuadrante a otro... del primero al segundo, luego del tercero al cuarto.
Profesor: ¿Cuándo cambia de signo el seno?	Emily: Cuando pasa del primero al segundo... digo del segundo al tercero.
Profesor: ¿Cuándo coseno se hace 0?	Johnny: En 90 profe...y luego en 270.
Profesor: ¿Cuándo seno se hace 0?	Johnny: En 180, (piensa...) y en 0.
Profesor: ¿Y si el ángulo sigue “avanzando” en el sentido positivo?	Johnny: Se repiten. Erik: Y para el otro lado también, profe. Salomé: (se ríe)

Después se presentaron formalmente los conceptos del coseno y el seno de un ángulo en un sistema de coordenadas, pero este fue ejecutado parcialmente debido a que se necesitaron varios prerrequisitos (razones trigonométricas en un triángulo rectángulo) para poderlo comprender. Se procedió a explicar las mismas y se tuvo el apoyo de la aplicación para poder avanzar, figura 6. Esto conllevó más tiempo de lo planificado.

Figura 6

Proceso de explicación y deducción de las razones trigonométricas en un triángulo rectángulo y en un sistema de coordenadas.



Luego se procedió a explicar y deducir juntamente con los estudiantes los signos de las razones trigonométricas. En esta etapa empezaron a surgir interrogantes que se presentan en la tabla 4:

Tabla 4

Interrogantes y respuestas acerca de los signos de las razones trigonométricas.

Interventor	Intervención
Johnny	Profe, ¿por qué en el círculo se da vueltas, pero en la gráfica de abajo se mueve a la izquierda?
Profesor	Porque en el círculo observas el movimiento del punto alrededor de este, donde la primera componente es el coseno del ángulo, en cambio, en la gráfica de abajo es el ángulo vs el coseno del ángulo. Me explico mejor: cuando tú empiezas a desplazar el ángulo, la abscisa, que es el coseno del ángulo, se mueve de derecha a izquierda, derecha, izquierda, y si te fijas en la gráfica se mueve de manera ondulatoria.
Johnny	Entonces, ¿cómo le entiendo al seno? ¿Para qué me sirve?
Profesor	El seno en cambio es la segunda ordenada del punto que hablamos hace un momento. Muchos fenómenos en la naturaleza se comportan así, de manera ondulatoria... sinusoidal se lo suele decir. Si te fijas el seno, como es la ordenada, haría este juego, sube, baja, sube, baja, entre 1 y -1.
Erik	Entonces, el coseno es siempre la abscisa y el seno es siempre la ordenada, ¿verdad?
Profesor	Es correcto.

Johnny	¿Siempre tengo que trabajar con la circunferencia de radio 1, o puedo usar otras?
Profesor	Inicialmente trabajamos con la circunferencia trigonométrica, que es la de radio 1 y centrada en el origen de coordenadas, luego podemos usar la proporcionalidad para trabajar con otras circunferencias. Las razones trigonométricas de los ángulos no cambiarán.
Erik	Y si quiero de otros ángulos, ¿le sigo sumando?
Profesor	Exacto, así como lo hicimos.

Una vez respondidas las preguntas, se explicaron y dedujeron las razones trigonométricas para los ángulos especiales, lo cual se pudo avanzar con la utilización de la simulación y la explicación previa de los prerrequisitos de razones trigonométricas en un triángulo rectángulo para 30° , 45° y 60° .

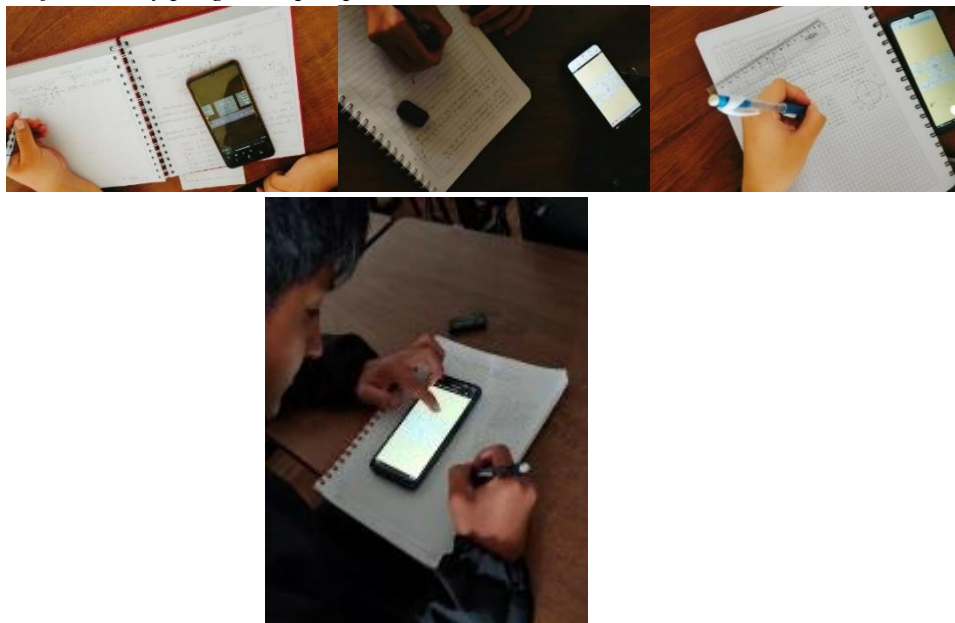
En la última parte de esta etapa se procedieron a desarrollar las preguntas de cierre, con un tiempo reducido, por los inconvenientes presentados. Cada pregunta tiene su retroalimentación y apoyo posterior en la simulación. Se presentan en la tabla 5 y en la figura 7.

Tabla 5
Ejercicios y preguntas contestadas.

Ejercicios y Preguntas	Respuesta de los estudiantes
Encuentre el coseno y el seno para los ángulos de 120° , 135° , 150°	Todos responden correctamente
Encuentre el coseno y el seno para los ángulos de 210° , 225° , 240°	Johnny, Salomé y Erik responden correctamente
Encuentre el coseno y el seno para los ángulos de 300° , 315° , 330°	Todos responden correctamente
¿Qué sucede con el seno y coseno de 0° , 90° , 180° y 270° ? Establezca sus valores.	Johnny y Emily responden correctamente
Si el seno de un ángulo es $\frac{\sqrt{3}}{2}$, ¿el coseno de ese ángulo es?	Johnny responde correctamente
Si el seno de un ángulo es $\frac{-\sqrt{2}}{2}$, ¿el coseno de ese ángulo es?	Johnny, Emily y Erik responden correctamente
Si el coseno de un ángulo es $\frac{1}{2}$, ¿el seno de ese ángulo es?	Ninguno responde correctamente

Figura 7

Desarrollo de ejercicios y preguntas por parte de los estudiantes.



3.4. Cierre

En esta última etapa, los estudiantes mencionan el método de cómo obtener las razones trigonométricas para los ángulos especiales en el sistema de coordenadas y sus signos. Se menciona la importancia de recordar las razones de 30, 45 y 60 y con base en ellas la obtención de las demás. Reciben su tarea.

4. ANÁLISIS DE LA APLICACIÓN DE LA SECUENCIA DIDÁCTICA

La etapa de introducción a la clase e indagación de la aplicación fue exitosa por dos situaciones en específico: el saber que van a usar una aplicación con su celular y el hecho de ver un tema que no abordaron a profundidad en su bachillerato por motivos de planificación, pandemia y enfoque. Además, se cumplió con los tiempos establecidos y sus objetivos.

La necesidad de los prerrequisitos fue una dificultad que se presentó sobre la marcha. Es importante, como menciona Kee *et al.* (1996), comprobar que los estudiantes tienen los requisitos previos para los conceptos que se quiere enseñar y que ellos comparten el significado de las palabras que se usa. Una dificultad para los profesores es pensar si estas palabras y conceptos comunes los adquirieron (o no) hace mucho tiempo.

Al ser una clase interactiva y personalizada, las preguntas son inevitables. La apertura del profesor para contestarlas y no salirse del tema es importante para intentar cumplir con lo planificado.

Siempre hubo retroalimentación para saber en qué tópico el profesor debía detenerse y enfatizar más. Un ambiente de confianza y cordialidad anima a los estudiantes a abrirse y expresar sus ideas abiertamente, aunque a veces sean erróneas, pero es labor del docente el corregirlas.

4.1. Retroalimentación e impresiones de los estudiantes

La tabla 6 muestra las impresiones recogidas por los estudiantes tras la clase.

Tabla 6

Retroalimentación e impresiones de los estudiantes.

Estudiantes	Retroalimentación e impresiones
Todos	Creemos que fue una app con la información necesaria para entender el tema, y sí fácil de usar, pero no, nada llamativa.
Johnny	La clase estuvo interesante. Pero quedó la sensación de que faltó mucho más contexto, tal vez esto surge porque fue una clase puntual.
Erik	Se podría entender el tema sin el uso del software, pero sin duda es un gran aporte, principalmente por disponer de la gráfica y poder manipularla, facilita la comprensión.
Emily	Si, estuvo bien para la explicación del maestro. Tal vez se podría agregar más para ejercicios y preguntas.
Johnny	Pues, yo pienso que se debería incrementar la participación de los estudiantes a través de cuestionamientos que te obligan a razonar, obviamente con la ayuda del profe y un texto base.

5. CONCLUSIONES

Al finalizar la clase, los estudiantes son capaces de verbalizar el método de cómo obtener las razones trigonométricas para los ángulos especiales en el sistema de coordenadas y sus respectivos signos cumpliéndose uno de los objetivos de la clase.

Si bien es cierto en un comienzo fue difícil el paso de las razones trigonométricas en un triángulo rectángulo a un sistema de coordenadas, situación que ya preveíamos, siempre es necesario comprobar los requisitos mínimos necesarios para abordar un concepto nuevo o una generalización de un concepto, y no suponer que este, por haber sido visto en el bachillerato, está comprendido e interiorizado.

El presentar al seno y al coseno a través de varias representaciones puede garantizar una mayor comprensión y posterior proceso de abstracción y formalización. El uso de la simulación didáctica es una excelente herramienta para abordar este tipo de conceptos que suelen causar dificultades en su forma funcional.

El prever en la planificación ciertas complicaciones que se pueden dar a lo largo de la clase conlleva un mejor manejo de los tiempos que en este caso fue insuficiente para cumplir con la planeado.

La secuencia tuvo un alto grado de efectividad ya que se cubrieron los objetivos planteados y se obtuvo una retroalimentación favorable por parte de los estudiantes, aunque se considera que puede ser mejorada mediante cambios como: cubrir los prerrequisitos de los estudiantes, considerar el tiempo de la clase más extendido, tener más rondas de preguntas y respuestas establecidas, considerar más tiempo para la realización de ejercicios y preguntas para interiorizar los conocimientos.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Axler, S. (2016). *Precalculus: A prelude to calculus*. Wiley.
- Campo, C. D. y Lasso, L. A. (2014). *Una secuencia didáctica en el paso de las razones trigonométricas a las funciones trigonométricas: el caso de la función seno*. [Tesis de Licenciatura], Universidad del Valle. <http://funes.uniandes.edu.co/11029/1/Campo2014Una.pdf>
- Chamberlain, J., Lancaster, K., Parson, R., & Perkins, K. (2014). How guidance affects student engagement with an interactive simulation. *Chemistry Education Research and Practice*, 15, 628-638. <https://doi.org/10.1039/C4RP00009A>
- De Kee, S., Mura, R. y Dionne, J. (1996). La compréhension des notions de sinus et de cosinus chez des élèves du secondaire. *For the Learning of Mathematics*, 16, 19-27. <https://www.jstor.org/stable/40248201>
- Maldonado, E. S., (2005). *Un análisis didáctico de la función trigonométrica*. [Tesis de Maestría], CINVESTAV IPN. <https://dokumen.tips/documents/maldonado-2005.html?page=1>
- Montiel, G. (2004). *Estudio socioepistemológico de la función trigonométrica*. [Tesis de Doctorado, CICATA-Legaria]. https://www.matedu.cicata.ipn.mx/tesis/doctorado/montiel_2005.pdf
- Sarwoto, T., Jatmiko, B. y Sudiby, E. (2020). Development of Online Science Teaching Instrument Based on Scientific Approach Using PhET Simulation to Improve Learning Outcomes at Elementary School. *IJORER : International Journal of Recent Educational Research*, 1(2), 90-107. <https://doi.org/10.46245/ijorer.v1i2.40>
- Souza, P., Ferreira, M. y Labor, O. (2020). Investigando o ensino de trigonometria através da interdisciplinaridade com um simulador da plataforma PhET. *REAMEC*, 8(3), 574-591. <http://dx.doi.org/10.26571/reamec.v8i3.10784>
- Torres, D., Montiel, G., Salazar, O., Hinojos, J., Trujillo, E. y Osorio, M. (2016). Análisis y Diseño de actividades didácticas en el contexto de las razones y funciones trigonométricas utilizando GeoGebra. *Investigación e Innovación en Matemática Educativa*, 1(1), 573-585. <https://revistaiime.org/index.php/IIME/article/view/43/1>

Entrevista al profesorado: José Fernando Cenit Santiago

José Fernando Cenit Santiago

CEIP Francisco Ayala, Iznalloz (Granada), josefern36@gmail.com

Resumen: Este artículo presenta la entrevista realizada a José Fernando Cenit Santiago, maestro de primaria con 16 años de experiencia docente. El entrevistado describe algunas experiencias de enseñanza de las matemáticas que ha desarrollado y reflexiona sobre la importancia de presentar matemáticas conectadas con otras actividades de la vida de los niños, de aprender a partir de la manipulación y la experimentación y de no limitar su enseñanza a los procedimientos de cálculo. A continuación valora las experiencias descritas desde el punto de vista curricular y desde su propia visión de la labor docente. Finalmente, el profesor señala la importancia de la formación matemática de los maestros, de calificar los criterios de evaluación curriculares y apela a la valentía de los maestros para implementar prácticas de enseñanza innovadoras en el aula de primaria.

Palabras clave: entrevista al profesorado, educación primaria, pedagogía Freinet, situaciones matemáticas reales, material manipulativo.

Teacher interview: José Fernando Cenit Santiago

Abstract: This paper shows the interview made to José Fernando Cenit Santiago, who has 16 years of teaching expertise. The interviewee describes some mathematics teaching experiences and discusses the importance of teaching mathematics in connection to other children's activities, promoting learning from manipulation and experimentation, and going beyond calculation procedures. Next, he values his experiences from both curricular and personal points of view. Finally, the teacher emphasises the significance of mathematics in teacher education and the importance of qualifying curricular assessment criteria. He also appeals to teachers' courage to implement innovative teaching practices in the primary school classroom.

Key words: teacher interview, primary education, Freinet pedagogy, real mathematics situations, manipulatives

1. TRAYECTORIA Y MOTIVACIÓN

Revista Epsilon (RE): ¿Cómo resumiría su recorrido profesional para que las/los lectores de Epsilon le conozcan?

José Fernando Cenit Santiago (FC): Actualmente llevo 16 años como maestro. Empecé trabajando en la especialidad de Pedagogía Terapéutica (PT), que fue lo que estudié en su momento. Estuve 14 años trabajando de PT y posteriormente pasé a impartir docencia en la educación primaria, en la que llevo estos dos últimos dos cursos centrados en el primer ciclo: el curso pasado estuve en segundo y este curso he empezado desde primero.

RE: ¿Cuál es su motivación para centrarse en experiencias innovadoras en matemáticas?

FC: La innovación surge de la necesidad de que el alumnado entienda la matemática dentro de un contexto lo más cercano posible a situaciones cotidianas y reales vinculadas a las necesidades de su vida personal. Por ejemplo, yo me inspiro en la pedagogía Freinet, que es de la época de Montessori, es decir, nos estamos remontando prácticamente un siglo hacia atrás. Si lo miramos desde ese punto de vista, de innovador no tiene nada en el sentido de que no es novedoso. Ahora, la novedad está en que estas ideas no suelen llegar al contexto escolar.

RE: ¿Cómo interpreta usted la pedagogía Freinet? ¿Qué principios de esa pedagogía aplicas habitualmente o tienes presentes en tus prácticas de enseñanza?

FC: La pedagogía Freinet básicamente se basa en la democracia, en la cooperación y en la cercanía al contexto cotidiano y real del alumnado. Por ejemplo, el denominado *cálculo vivo* es una de las técnicas freinetianas para el aprendizaje de las matemáticas. El cálculo vivo surgió del propio Freinet bajo la iniciativa de aprovechar cualquier situación, cualquier recurso, para entender la matemática como una necesidad vital. La gestión de un huerto escolar proporciona un ejemplo de aplicación de este cálculo vivo. Esta gestión implica que hay que comprar semillas que luego pueden dar un producto. Dicho producto quizá se podría vender en el mercado del pueblo a cierto precio, lo que plantea la idea de crear una cooperativa, y así sucesivamente. En síntesis, el cálculo vivo busca entender la matemática en un contexto concreto, en base a una necesidad real y cotidiana. Se puede decir que está “vivo” porque busca integrarse en la vida del alumnado.

2. EXPERIENCIAS DE INNOVACIÓN EN LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS

RE: ¿Puede explicar alguna experiencia innovadora que haya implementado para trabajar las matemáticas?

FC: Una experiencia que me gustó especialmente fue la que hicimos el curso pasado en segundo de primaria. Partió de la iniciativa del alumnado de expresar su estado de ánimo al llegar a clase. A partir de ahí se les propuso que escribieran textos libres, es decir, que escribieran lo que te apeteciera. Y lo aprovecharon: la mayoría seguían contando cómo se sentían. Otros contaban algo que les hubiera pasado el fin de semana o el día anterior, o inventaban sus propias historias. En definitiva, se sentían con la libertad de expresar por escrito lo que realmente te apetecía. Los textos generados con esta actividad se copiaban en la pizarra para que el alumnado realizara aportaciones para mejorarlo: ortografía, expresión escrita... lo que fuera necesario. Y, viendo el ímpetu que tenían los niños por querer expresarse, aproveché para decirles que yo iba a hacer lo mismo. Así, bajo la premisa de que contaba mi vida, les proponía situaciones matemáticas de la vida cotidiana, para las que pedía su colaboración para dar respuesta. Por ejemplo, para motivar la necesidad de dividir conté que estaba con amigos tomando una cerveza, había que pagar 16 euros, y estábamos cuatro. Al preguntar qué harían ellos en ese caso, se les inducía a pensar cómo hacer para llegar a una solución, aún sin disponer de conocimiento concreto para conseguirla.

Esta actividad me hizo percibir la potencialidad de las situaciones de compra, por lo que surgió la idea de poner una tienda en la clase con la colaboración de las familias. De esta manera conseguimos una serie de envases de diferentes productos, que etiquetábamos con sus precios reales, a pesar de que el currículo en segundo de primaria no contempla decimales. A partir de este material, simulábamos situaciones de forma vivencial en el contexto de la tienda y empleando material manipulativo. Dentro de esta actividad también aparecieron situaciones de medida, para las que utilizamos cintas magnéticas y balanzas, policubos y tarjetas numéricas para que el alumnado con más dificultad también pudiera pensar. Todas estas situaciones se plantearon en grupo, buscando que los niños las pensaran juntos: se lanzaba la situación problemática y ellos debían encontrar una respuesta. De esa forma, potenciamos también el pensamiento divergente: un grupo podía llegar a la solución por una vía, y otro llegaba por otra vía totalmente distinta.

El éxito de las situaciones de compra, que tanto simulamos en clase, nos llevó a plantearnos la posibilidad de llevar estas situaciones a la vida real. Dado que una de las principales dificultades que sufrimos en mi centro educativo tiene que ver con la necesidad de que el alumno se acerque a la alimentación saludable (el tipo de comida que llevan los niños al recreo es bastante mejorable) se nos ocurrió empezar a trabajar sobre este tema. Así, empezamos a facilitar información sobre propiedades de alimentos sanos y se propuso, a las familias que quisieron participar, que presentaran una receta saludable para poder hacerla en clase. En este contexto, hubo tres madres que participaron con tres recetas distintas. Por ejemplo, una propuso una brocheta de fruta, presentando las cantidades de fruta que se necesitaba para una brocheta, lo que dio lugar a gran cantidad de situaciones de cálculo para conocer conociendo las cantidades de fruta necesarias para 22 brochetas (una para cada uno de ellos). El cálculo de estas cantidades introduce la necesidad de expresar partes de una pieza de fruta. Por ejemplo, las brochetas tenían un trozo de kiwi cada una, y entre todos estimamos cada kiwi podía cortarse en cuatro trozos, por lo que el trozo que tiene cada brocheta representa un cuarto de kiwi. Se planteó entonces el problema de conocer cuántos kiwis necesitamos para hacer 22 brochetas que, como se observa, requiere un contenido de nivel superior al de segundo. Esta situación dio oportunidades para que ellos mismos también tuvieran que decidir cómo podían hacerlo, si necesitaban hacer un dibujo, si necesitaban representarlo con un teatro o utilizando material manipulativo. Del mismo modo, se vieron obligados a pensar de antemano qué estrategias podían utilizar para enfrentarme a esa situación novedosa. Dentro de esta actividad de las recetas, otra madre marroquí presentó un bizcocho de harina de avena, dátiles y frutos secos, lo que amplió el cálculo de cantidades a medidas de masa, más allá del cálculo de trozos de fruta.

La actividad de las recetas llevó a una actividad basada en el cálculo de precios de compra: sumar los precios de todos los ingredientes para qué dinero era necesario, y luego distribuir este dinero entre los distintos niños y niñas para ver cuánto tenía que aportar cada uno. Esto, además, propició que hicieran su lista de la compra, con lo que también trabajaron la escritura. Así, se repartió la compra de los productos entre los distintos pequeños grupos que hay en clase, de manera que cada grupo tuvo su lista de la compra y presupuesto, y fuimos al supermercado. Esto fue interesante porque ellos habían estimado el precio que tenían los productos, y su vivencia en la situación real les hizo ver que algunos de los presupuestos que habían elaborado no eran suficientes. Entonces tuvieron que tomar decisiones como la de rebajar las cantidades de productos que habían pensado en un principio, o cambiar estos por otros más baratos. Se vieron obligados a comparar precios, pedir dinero a otro grupo, que tenía que ver a su vez si le sobraba y cuánto le sobraba... Es decir, fue una situación bastante divertida dentro del propio

supermercado. Además, como una de las madres trabaja en ese supermercado, las cajeras habían preparado pequeñas “trampas”: añadieron al ticket de compra algún producto que ellos no habían comprado y cometieron errores en la devolución, lo que obligó a los niños a valorar la información reflejada en el ticket y comprobar si había algún fallo y reclamarlo de manera razonada.

Tras la experiencia en el supermercado, hubo que repartir el dinero que había sobrado entre todos los niños y niñas. Esto también supuso un desafío porque su idea inicial en muchos casos era la de contar el número de monedas y repartirlas. Pero no todas las monedas tienen el mismo valor, lo que podría conducir a que unos compañeros se llevaran más dinero que otros, situación que ellos percibieron cuando contaban las monedas. Para resolver este conflicto, llegaron a la conclusión de que lo necesario sería cambiar el dinero por monedas más pequeñas para poder hacer el reparto de manera equitativa. Como se puede comprobar, la experiencia llevada a cabo suscitó el trabajo con ideas de la educación financiera: el manejo de monedas y billetes, el uso responsable del dinero, el proceso de compra, los conceptos de *vuelta*, como se dice coloquialmente, y de *presupuesto*, la suma de cantidades para ajustar el presupuesto y el reparto sin hacer divisiones, sino razonando cómo se efectúa ese proceso.

RE: En la descripción de la experiencia has mencionado los cuartos de kiwi, situaciones de reparto, en incluso uso de decimales con alumnado de segundo de primaria. ¿Cómo abordan los niños situaciones que requieren contenido desconocido para ellos y qué valor le das a introducir estas situaciones en tus prácticas de enseñanza?

FC: Justo el interés de introducir estas situaciones se basa en el hecho de que el alumnado no tiene herramientas matemáticas para resolverlas. Eso obliga a que afronten las preguntas planteadas desde la experimentación. Por ejemplo, en la situación del dinero sobrante tras salir del supermercado, la primera acción fue la de repartir todas las monedas entre los niños y niñas, una para cada uno para que todos tuvieran las mismas monedas. Sin embargo, a mitad del proceso se hizo evidente que las monedas tienen valores diferentes, por lo que recibir las mismas monedas no garantizaba recibir el mismo dinero. La primera respuesta que dieron a esta situación es dar el mismo número de cada tipo a cada alumnado, pero pronto se dan cuenta de que eso requiere disponer de ciertas cantidades de cada tipo de moneda, y no tenían esas cantidades. Entonces, al final, por inducción, llegaron a la conclusión de que la respuesta está en cambiar el dinero en monedas más pequeñas. Es decir, efectivamente, no tienen esas herramientas iniciales, y esto es lo que obliga a detenerse a pensar si tienen los conocimientos suficientes o si necesitan adquirir un conocimiento nuevo. Esta reflexión se alcanza gradualmente a partir de la propia experimentación: se dieron cuenta de que necesitaban una herramienta para repartir y de hacerlo utilizando la misma moneda.

Es claro que ellos no saben dividir en ese momento porque no es un contenido específico, o un saber básico como se diría ahora, propio de segundo o de primaria. No tienen por qué saberlo y, de hecho, a nivel oficial de calificación no lo estamos calificando. Pero este reparto sí que forma parte del problema real planteado, de esa necesidad a la que te estás enfrentando. Y los niños lo abordan con estrategias que ellos consideran adecuadas, y eso es lo fundamental. Por ejemplo, ante el problema de reparto de dinero sobrante, algunos niños representaron cada euro con un policubo. Otros utilizaron el folio para representar todo el dinero y, si estaban cuatro personas, dividieron el folio en cuatro, y otros fueron probando hasta que se daban cuenta de cómo sería el reparto equitativo. En resumen, fueron sacando sus propias conclusiones desde la

manipulación, la visualización y la experimentación sin alcanzar el saber básico preciso, es decir, la división hecha en papel siguiendo el proceso mecánico. Entiendo que lo que se pretende con el currículo es desarrollar el razonamiento y la comprensión, y en este sentido los avances que hacen los niños y niñas son considerables.

RE: Efectivamente, el currículo fija como metas de la educación matemática el desarrollo de las competencias específicas y las experiencias que has descrito son muy competenciales, y se derivan de una lectura inteligente de las situaciones de clase, por lo que dependen del propio alumnado. No obstante, la normativa también marca saberes básicos mínimos a cubrir, ¿cómo ves de factible de cubrir todos los saberes curriculares a partir de experiencias como la que has descrito y qué importancia le das, como maestro, a hacerlo?

FC: Desde mi perspectiva personal, depende de la finalidad que otorguemos a nuestra enseñanza. Si debemos enseñar para que el alumnado haga una operación en papel para luego hacer un examen, entonces la respuesta es discutible. Sin embargo, si queremos acercarnos a los criterios de evaluación actuales, que están hoy en día están muy relacionados con la resolución de problemas, entonces considero que estamos cubriendo el currículo al máximo. Un ejemplo de ello es el uso de los decimales que surgió en la experiencia explicada. Aunque no fueron todos los niños y niñas, hubo parte del alumnado que salieron de segundo de primaria habiendo reflexionado sobre los números decimales, aunque sin entender claramente el concepto, porque no era lo que se pretendía. Ellos relacionaban la parte entera de un precio con los euros y la parte decimal con los céntimos. En esta situación, los decimales tienen un significado claro, por lo que muchos llegaron a afianzar esta idea y han empezado tercero sabiendo el proceso de una suma y resta con decimales. Otro ejemplo es el de la división: cuando han llegado a tercero y han empezado a trabajar el proceso mecánico, ya tenían adquirida la comprensión de lo que es una división como situación de reparto.

No puedo negar que no cubrir contenidos del currículo siempre genera miedo. Muchas veces parece que si no se siguen los contenidos de forma exhaustiva como establece el libro de texto, estos contenidos no se están trabajando o, al menos, no como se debe. Esta situación se ve reflejada en las tareas de coordinación con mi paralelo de tercero. El pasado curso, el compañero que tuve era bastante cercano y aceptaba algunas de estas prácticas aunque no al 100%. Digamos que intercalaba un la innovación con la tradición, por así decirlo. Pero al menos se mostró bastante receptivo ante este tipo de planteamientos metodológicos. Sí que es cierto que otros maestros o maestras no lo son tanto. Otro factor importante está en la percepción de las familias sobre este tipo de prácticas, ya que hay muchas que no están de acuerdo y son bastante reaccionarias, pero sé explicarles que se están trabajando los criterios de evaluación y que, por tanto, esta forma de trabajar está justificada.

RE: Como mencionas, la acogida que tienen las experiencias innovadoras entre los compañeros es un factor importante para que estas sean exitosas, ¿qué volumen de compañeros se abren a estas experiencias?

FC: Mínimo, prácticamente nulo. Supongo que por miedo a romper con hábitos adquiridos, y también está la dificultad que plantea la evaluación o, mejor dicho, la calificación. Un examen con diez ejercicios de cálculo es fácil de evaluar: pongo diez cuentas, y si un alumno tiene

nueve de ellas bien tiene un 9, si tiene ocho bien entonces un 8, etc. Sin embargo, evaluar los criterios de evaluación del currículo actual es mucho más complicado y diría que da miedo. Creo que no justificado, porque hoy en día disponemos ya de cuadernos en Séneca que ya viene perfilado, es decir, en base a cada criterio de evaluación, subrúbrica con los distintos indicadores de logro, etc. Pero seguimos teniéndolo, parece que es así es más difícil de justificar a un padre o una madre por qué su hijo tiene un 8 o un 7. Por ejemplo, si les dices que el niño no aporta absolutamente nada al resolver un problema en grupo, te pueden acusar de que evalúas según una opinión: te falta evidencia clara, por así decirlo y, de algún modo, te sientes desprotegido. También está la presión de muchas familias que siguen pensando que no podemos salir de los métodos tradicionales y que critican cualquier práctica que escapa de lo habitual.

Y luego, claro, también echo en falta referentes, es decir, personas que trabajen como a mí me gustaría trabajar, o por lo menos me permita discutir sobre prácticas o perspectivas diferentes. Figuras así son muy necesarias. En este sentido, creo que la administración tampoco potencia las buenas prácticas. Sería ideal que desde la inspección se reconocieran este tipo de prácticas, algo que puede pasar alguna vez, pero no es muy habitual. En general el inspector está interesado en la burocracia: las programaciones, los instrumentos de evaluación y que dispongas de muchas evidencias. En resumen, existen tantas dificultades para desarrollar prácticas innovadoras que, al final, muchos maestros y maestras optan por seguir con lo tradicional y no complicarse.

RE: Siguiendo con los compañeros, y con la evaluación, se observa que la enseñanza que pones en práctica parece coherente con el planteamiento que se hace actualmente de los criterios de evaluación. Hay sectores del profesorado que no están de acuerdo con este planteamiento, ¿cuál es tu punto de vista al respecto?

FC: Los criterios de evaluación plantean un debate largo, porque efectivamente hay profesorado que no comparte. Pero si atendemos a los criterios de evaluación de matemáticas en la normativa LOMLOE, vemos que no se persigue que el niño en tal momento tenga que dominar cierto contenido, sino que se busca el desarrollo de una serie de habilidades y destrezas. Se supone que cuando el niño o la niña acaban la primaria, deben tener un perfil de salida basado en habilidades y destrezas. En este contexto, la forma de conseguir el desarrollo de habilidades y destrezas en el caso de la matemática, es acercando la disciplina a situaciones cotidianas desde la experimentación, la manipulación, la visualización, el razonamiento, la comprensión. Por tanto, creo que la perspectiva que tienen los criterios de evaluación puede ser positiva para el aprendizaje de las matemáticas de los niños y niñas de primaria, al menos tal y como yo lo veo.

RE: ¿Cree que experiencias como la presentada tienen puntos débiles o aspectos de mejora? Indique también si tienen fortalezas que no haya comentado previamente.

FC: De nuevo, depende de lo que valoremos como correcto: si valoramos como imprescindible que los niños y niñas sepan sumar, restar, multiplicar en papel siguiendo la dinámica habitual, creo que se podía señalar como debilidad que este tipo de prácticas docentes no inciden sobre ello. De hecho, por ejemplo, yo este año sí he incluido un día dedicado a eso: veo también positivo dedicarle un espacio a esas actividades. Este año lo he hecho también en parte por evitarme posibles reacciones y críticas, más que por mí. Es decir, para evitar posibles conflictos: así por lo menos justifico que un día lo dedicamos a los algoritmos. Pero claro, también depende

de cómo se quieran trabajar los algoritmos. Es decir, hoy en día en matemáticas hay un montón de metodologías que trabajan el cálculo mental sin necesidad de hacer una suma siguiendo el proceso mecánico tradicional, y en otros países esas mismas mecánicas pueden ser distintas. También hay métodos como son el de Singapur o el ABN que exploran el cálculo de maneras alternativas al algoritmo usual, y eso no quiere decir que los niños no sepan sumar ni restar: hay otras posibilidades de cálculo mental, y hay que explorar todo. Por eso digo que también depende un poco de la perspectiva que tengamos como docentes, de lo que queramos priorizar.

3. VISIÓN DEL APRENDIZAJE Y LA ENSEÑANZA

RE: ¿Cuál debe ser, a su entender, la prioridad en la enseñanza de las matemáticas?

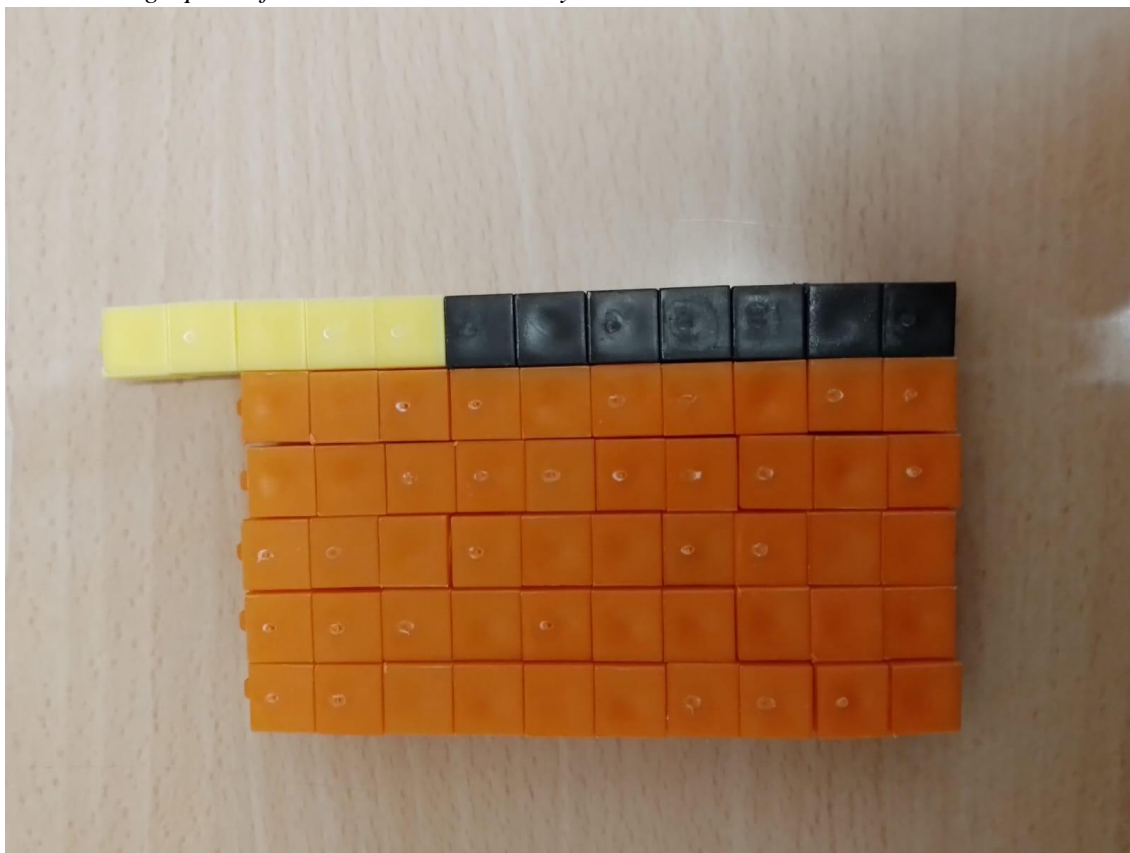
FC: Desde mi perspectiva, la prioridad debe ser la comprensión. En mi experiencia previa como estudiante, yo no entendía las matemáticas... pero porque siempre las había trabajado como una mecánica en la que aparecían números que no estaba claro qué representaban o a qué se referían: un juego de símbolos al que no veía sentido alguno. Al final intentaba aprender una mecánica porque tenía que hacer un examen en busca de cierta calificación. Pero una vez hecho el examen, no quedaba mucho... De hecho, no me acuerdo de hacer una raíz cuadrada, ni una potencia, ni ninguno de ese tipo de procedimientos. Para mí el procedimiento no es, desde luego, lo importante. El pensamiento matemático va más allá, es una forma de actuar en situaciones de nuestro día a día. Es decir, constantemente estamos utilizando el pensamiento matemático: una cajera de un supermercado está todo el día trabajando la matemática. Un panadero también trabaja conceptos como la equivalencia entre unidades, o la proporcionalidad. Los ciudadanos, en acciones cotidianas, también activamos el pensamiento matemático al echar gasolina, comprar, mirar el calendario o el reloj, etc. Es decir, el pensamiento matemático está constantemente con nosotros. La prioridad para mí sería facilitar que el alumnado se acerque a ese pensamiento matemático que está en nuestra vida cotidiana.

RE: En la descripción de algunas prácticas de enseñanza ha señalado la importancia de la manipulación, ¿qué materiales manipulativos utiliza habitualmente en clase o considera relevantes para la enseñanza de las matemáticas?

FC: Ciertamente, desde mi punto de vista los materiales son fundamentales y, de hecho, este curso estoy trabajando con rincones matemáticos donde el material juega un papel fundamental. Uno de los materiales que más utilizamos son los policubos, sobre todo por su versatilidad para trabajar diferentes contenidos de matemáticas. Antes he mencionado su uso como modelo cardinal en el cálculo: cuando los niños representan cada euro usando uno de los policubos, y también para comprender la secuencia numérica, ya que se pueden agrupar libremente formando regletas Cuisenaire a demanda del alumnado, ya que son encajables (Figura 1). Sí decimos, por ejemplo, que el número 5 se repite 9 veces, ellos van contando y empiezan a manipular: 5, 10, 15, 20... 45, lo que permite cierto acercamiento a la multiplicación en el aula de segundo en mi caso, y al cálculo mental en general.

Figura 1

Policubos agrupados formando doce unidades y cinco decenas



Las tarjetas numéricas son también un material que utilizo mucho en combinación con los policubos, sobre todo con el fin de establecer una relación entre la cantidad y el número. La comprensión de esta relación se manifiesta, por ejemplo, al trabajar las sumas con llevadas, ya que las tarjetas están puestas como *familias*: las familias del 10, las del 20, las del 30... que representan la decena, y las tarjetas de las unidades. Para hacer, por ejemplo, 29 más 13, representan con el material esas dos cantidades (Figura 2) y luego hacen un recuento conjunto: primero juntan las decenas, y luego las unidades. Al hacer esto ya van viendo: “uy, me he pasado dos, ya tengo una decena más”, y descubren de dónde surge la llevada. Otra potencialidad de los policubos para el cálculo es que facilita visualizar la composición y descomposición de los números, así como la relación entre la suma y la resta. Por otra parte, a la hora de trabajar la medida es fundamental hacerlo midiendo, por lo que los instrumentos de medida son, a mi juicio, materiales fundamentales en el aula de matemáticas de primaria: cinta métrica para la longitud, o el peso que tienes en casa o una balanza para la masa. En cualquier caso, y como indicaba antes, cualquier recurso que sea visual, manipulativo y acerque a una vivencia directa es un material útil para la enseñanza de las matemáticas, al menos tal y como yo la concibo.

Figura 2

Representación de sumandos utilizando las tarjetas numéricas y los policubos



RE: ¿Qué recomendaciones haría al profesorado de primaria que sufre dificultades para trabajar las matemáticas en el aula de primaria?

Creo que la primera recomendación que haría sería que dedicaran algún tiempo de su formación a contenido matemático. Creo que los maestros carecemos de herramientas iniciales para poder enfrentarnos a trabajar una matemática efectiva. Es decir, la formación inicial que recibimos en la universidad es bastante... deficitaria, digamos, y veo imprescindible centrarnos en mejorar. No solo desde el punto de vista disciplinar, sino también desde el didáctico: mi sensación tras terminar el grado de maestro fue el que conocía teorías, pero no tenía conocimiento para dar clase. Por tanto, animaría a mis compañeros maestros a que tomaran formación continua relacionada con matemáticas: en ocasiones los Centros de Profesorado dan oportunidades en ese sentido, por ejemplo relacionados con el método ABN algunos años atrás, aunque de forma intermitente.

Mi segunda recomendación es más bien una petición. Pediría *valor* a los maestros y maestras para reconocer esa sensación de desprotección a la hora de calificar que he mencionado antes, mientras atendamos a los criterios de evaluación, no tiene porque haber ningún miedo. También animaría al profesorado de primaria a atreverse a *cerrar* los libros de texto y experimentar con prácticas innovadoras. Los maestros y maestras, cuando entramos a nuestra clase, somos quienes decidimos, y me gustaría que tomáramos más decisiones buscando algo nuevo. Por supuesto, con fundamento, no tiene sentido hacer cosas por hacerlas, pero sin pretender actuar de forma totalmente científica, la enseñanza no siempre funciona como la ciencia. Pero sí considero positivo probar diferentes ideas, ver si funcionan o no... y arriesgarse a que fracasen, o a que no sean bien acogidas por familias o compañeros. Esa valentía es la mejor manera de crecer como maestro o maestra de matemáticas.

XXVII Olimpiadas Matemáticas Thales de primaria de Granada

Iván Valero Terrón

IES “Virgen del Rosario” – Benacazón (Sevilla), ivanvaleroterron@gmail.com

Margarita García Schiaffino

Colegio Santo Tomás de Villanueva - Granada, margaschiaffino@gmail.com

Carmen Méndez Bravo

Colegio Santo Tomás de Villanueva – Granada, mendezbravocarmen@gmail.com

Rafael Ramírez Uclés

Universidad de Granada, rramirez@ugr.es

Resumen: *Este artículo presenta las pruebas de la XXVII Olimpiada Matemática Thales de Primaria de Granada celebrada en 2024, un evento diseñado para estimular el interés y la colaboración entre estudiantes de sexto grado en matemáticas. Esta competición consta de tres pruebas: la Prueba de Equipos, la Prueba de Velocidad y la Prueba de Relevos. Se enfatiza la importancia del trabajo en equipo y las habilidades prácticas en la resolución de problemas matemáticos.*

Palabras clave: *Olimpiada Matemática Thales, Primaria, Competición Matemática, Trabajo en equipo, Resolución de Problemas.*

XXVII Thales Mathematical Olympiads for primary school in Granada

Abstract: *This article presents the XXVII Thales Mathematics Olympiad for primary students in Granada, an event designed to stimulate interest and collaboration among sixth-grade students in mathematics. This competition consists of three tests: the Team Test, the Speed Test, and the Relay Test. The importance of teamwork and practical skills in solving mathematical problems is emphasized.*

Key words: *Thales Mathematics Olympiad, Primary, Mathematical Competition, Teamwork, Problem Solving.*

1. LA OLIMPIADA THALES DE PRIMARIA

Desde sus inicios, la SAEM THALES mostró su interés y potencial para la organización de eventos matemáticos. Estos encuentros buscan difundir las matemáticas y estimular el entusiasmo de los alumnos hacia esta área. Las competiciones varían en sus enfoques: algunas buscan el conocimiento matemático puro, otras valoran la creatividad en la resolución de problemas, y algunas fomentan el trabajo colaborativo.

Este caso es el de la Olimpiada Matemática Thales de Primaria que se celebra en Granada. Pretende que el estudiantado colabore entre sí para abordar problemas con aspectos matemáticos específicos y logren resolverlos como equipo.

Los participantes son alumnos y alumnas de 6º de primaria en grupos de 3 y resuelven tres pruebas: la Prueba de Equipos, Prueba de Velocidad y Prueba de Relevos. En las dos primeras se trabaja de forma grupal, mientras que en la última el trabajo es individual, aunque la colaboración y comunicación es primordial.

2. LA PRUEBA DE EQUIPOS

En esta prueba los alumnos asumen los roles de tres personajes para resolver algunas cuestiones comunes. Se les entregan tres hojas de información, una por personaje, con diversos datos para que resuelvan las cuestiones que se dan aparte. Disponen de 5 minutos para leer la prueba y hacer las aclaraciones y estrategias que consideren oportunas entre los tres. Pasados los cinco minutos, tendrán 35 minutos para dar respuesta a las distintas cuestiones que aparecen en la hoja de cuestiones.

En la edición de 2024 los personajes eran Isabel, María y Javier, que están pensando algunas ideas para ganar un poco de dinero y ayudar a una familia del barrio que les ha pedido ayuda. Para ello, están analizando distintas posibilidades de negocio para vender algunos productos en el vecindario como pulseras, galletas o limonada.

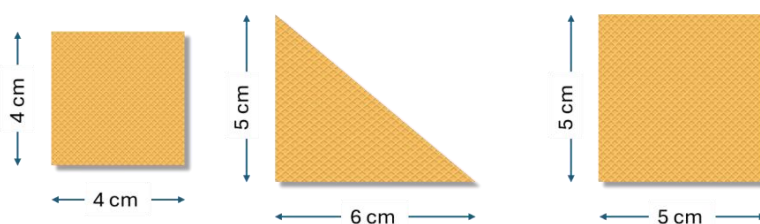
1.1. La información de cada personaje

INFORMACIÓN DE MARÍA.

- Conoce el procedimiento para fabricar pulseras. Son tiras de tela de 20 cm de largo y 2 cm de ancho. A cada pulsera se le añade un colgante.
- Si los tres amigos trabajan juntos en equipo, pueden fabricar una pulsera en 5 minutos, pues tienen que decorarlas con un rotulador y montar el colgante.
- María quiere estudiar diseño y ha editado un folleto de publicidad en la cuarta parte de un folio. Así en cada fotocopia de un folio han obtenido 4 folletos.
- Ha decidido que deben repartir entre los vecinos 300 folletos de publicidad. En editarlos, fotocopiarlos, recortarlos y anotar los encargos que le han pedido han tardado 4 horas y 20 minutos.
- Han recibido un pedido de 50 pulseras, 80 vasos de limonada y 200 galletas.

INFORMACIÓN DE ISABEL.

- Ha encontrado una receta para hacer limonada. Para fabricar un litro, necesita agua, dos cucharadas de azúcar y medio kilogramo de limones.
- Si trabajan en equipo, el tiempo de preparación es de 5 minutos para cortar los limones, 5 minutos para preparar la mezcla con el azúcar y el agua y 1 minuto para servir cada vaso de limonada.
- A Isabel le encantan las mediciones en matemáticas.
 - Una cucharada son aproximadamente 12 gramos de azúcar
 - 1 litro son 8 vasos de limonada
 - Las galletas pueden ser de uno de estos tres tipos:



- Estos son los precios de venta de los productos:



INFORMACIÓN DE JAVIER.

- Su abuela le ha enseñado a hacer galletas. Dispone de una bandeja de 50 cm de largo y 30 cm de ancho.
- Trabajando en equipo, el tiempo de preparación para la masa es de 1 hora. Y luego tienen que dejar cociendo en el horno 40 minutos cada bandeja. No pueden incluir dos bandejas a la vez en el horno. Después, deben recortar las galletas según la forma elegida, tardando medio minuto en recortar cada galleta.
- Le encantan los estudios de mercado y las negociaciones de precios. Ha conseguido gratis la energía consumida en el horno, el agua y también los vasos de plástico para la limonada.
- Ha buscado los siguientes precios:



Masa para galletas
20 € por bandeja



Tela para las pulseras
2,5€ por metro



Colgante para pulsera
0,5 €



Limones
1,20€ por kilogramo



Fotocopiar un folio
4 céntimos



Paquete 1 kg
1,40 €

Paquete 0,5 kg
1,20 €

Paquete 125 g
0,50 €

1.2. Las cuestiones.

Actividad 1: Las fotocopias de los folletos.

¿Cuánto dinero necesitan para fotocopiar los folletos?

Actividad 2: El orden de los productos.

El sábado 1 de octubre lo dedicaron a repartir los folletos y anotar los pedidos. Cada sábado lo van a dedicar a un producto, es decir, un sábado para la limonada, otro sábado para las galletas y otro sábado para las pulseras. Pero para saber el orden, necesitan calcular el dinero que les va a costar producirlas. Vamos a ayudarles a tomar esa decisión.

Actividad 2.A: Calculando el coste de las pulseras.

La tela se vende en bandas de 10 cm de ancho y se paga según la longitud.

- (A) ¿Cuánto gastarán para fabricar las pulseras?
- (B) ¿Tienen dinero suficiente para empezar el sábado 8 de octubre la fabricación de las pulseras?

Actividad 2.B: Calculando el coste de la limonada

- (A) ¿Cuánto gastarán para fabricar la limonada?
- (B) ¿Tienen dinero suficiente para empezar el sábado 8 de octubre la con la limonada?

Actividad 2.C: Calculando el coste de las galletas

- (A) ¿Cuántas galletas de cada tipo caben en la bandeja?

Cuadrado 4 cm →

Triángulo rectángulo →

Cuadrado 5 cm →

- (B) ¿Con qué tipo de galleta se necesitan menos bandejas para atender al pedido?
- (C) ¿Cuánto gastarán para fabricar las galletas?
- (D) ¿Tienen dinero suficiente para empezar el sábado 8 de octubre con las galletas?

Actividad 3: Planificando el trabajo.

Una vez hecho el estudio de los gastos, planifican el trabajo para que cada sábado fabriquen y vendan un solo producto.

- (A) ¿Cuánto tiempo tardarán en producir cada producto?
- (B) Completad la tabla:

	Dinero disponible	Actividad	Tiempo de fabricación	Gastos	Ingresos
Sábado 1 de octubre	10	FOLLETOS			0
Sábado 8 de octubre		LIMONADA			
Sábado 15 de octubre		GALLETAS			
Sábado 22 de octubre		PULSERAS			

Actividad 4: Los beneficios.

- (A) ¿Cuánto dinero han ganado con la empresa?
- (B) ¿Cuánto tiempo han trabajado en total?
- (C) ¿Cuánto dinero han ganado por cada hora de trabajo?

3. LA PRUEBA DE VELOCIDAD.

Son actividades contrarreloj. Se requiere colaboración, comunicación y habilidades prácticas. Cada equipo trabaja durante 5 minutos en cada una de las situaciones que se le presentan. Los equipos deben parar de trabajar al oír la señal. Se les recoge la actividad y se pasa a la siguiente tarea. En total son 5 los ejercicios que el equipo tiene que resolver.

Problema 1: Sopa de números.

Los números del uno al nueve están escondidos en esta sopa de letras. ¡Encontradlos!

B U R H R R V G Z B M T S E R T M O
 M U D D N M C D N N R N O S L B L C
 L J N C D N V U N M R C S C M N L N
 N D L O Q H E L A L E S S H H C N I
 N N S Y R V N S S T L T U N S O S C
 R N M N E M H D E R R G L L T L T X
 T L N M C C D I T M D O U I R S O C
 F S E I S H S L L R N I C E I T U D
 Q G C B D Q L N L D Q S S H S U B O

Problema 2: Killer sudoku

Esta es una versión un poco diferente al clásico sudoku. No solo debes asignar los números del 1 al 4 en cada fila, columna y caja 2x2 sin que se repitan, sino que debéis resolver todas las *killer pistas*.

Cada *killer pista* consiste en un número situado en la esquina de las cajas de líneas discontinuas. Los números que coloques en las casillas de esas cajas deben sumar el mismo número pequeño que aparece en la esquina. Además, dentro de esas cajas tampoco puede haber números repetidos.

7 4	1	5 3	2
2	8 3	1	4
9 3	4	8 2	4
3 1	2	4	3

6		8	
5	3		3
	6	3	
		6	

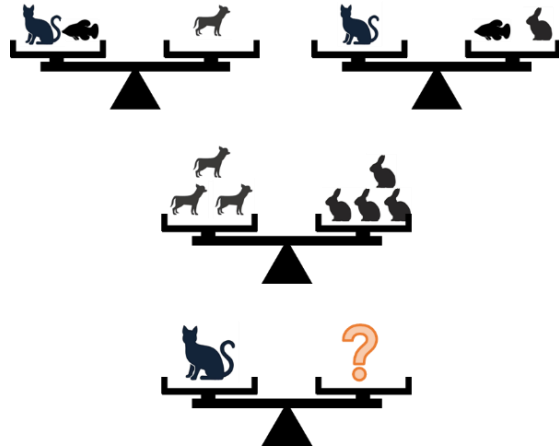
5		5	
7	4		6
	3		
5		5	

Problema 3: las mascotas de Elena.

Elena es una amante de los animales y ha decidido pesarlos por separado. Ha descubierto que:

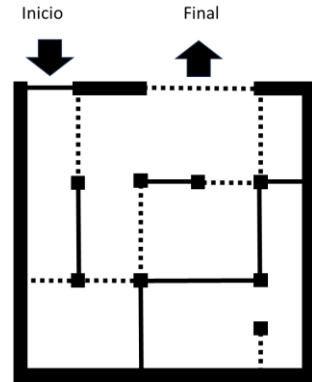
- Un gato y un pez pesan lo mismo que un perro.
- Un gato pesa lo mismo que un pez y un conejo.
- Tres perros pesan lo mismo que cuatro conejos.

¿A cuántos peces equivale un gato?



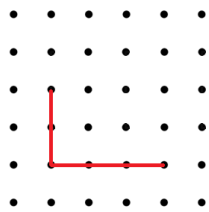
Problema 4: El palacio de las puertas misteriosas.

Tenéis que atravesar el laberinto alternando las puertas punteadas con las puertas rellenas (no podéis pasar por dos puertas del mismo tipo consecutivamente). ¿Podéis encontrar el camino que vaya desde el INICIO hasta el FINAL?

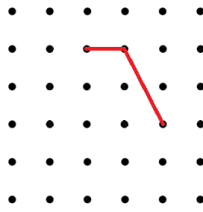


Problema 5: Polígonos incompletos.

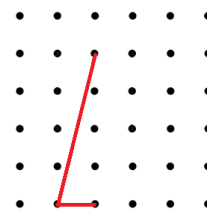
Completa los siguientes polígonos para que todos tengan área 8 cuadraditos.



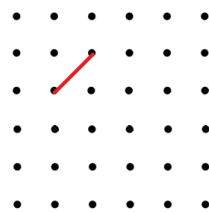
Rectángulo



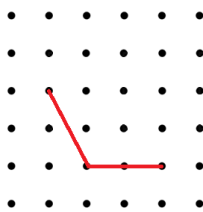
Romboide



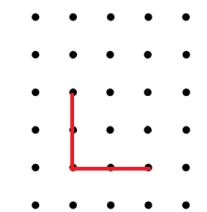
Trapezio



Cuadrado



Pentágono



Hexágono

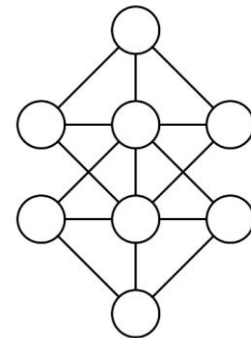
4. LA PRUEBA DE RELEVOS.

En esta prueba se trabajará de forma individual, si bien cada equipo trabajará sobre la misma resolución de los ejercicios, el proceso es el siguiente:

- Al primero de cada equipo se le entrega un ejercicio e inicia su resolución durante 5 minutos. Si finaliza dicho ejercicio y no han transcurrido los 5 minutos, levanta la mano y se le entrega el segundo ejercicio. De igual modo, si el primer ejercicio entregado les resulta muy dificultoso, pueden levantar la mano y se entrega otro; dejando el primero para el compañero siguiente.
- Transcurridos los cinco minutos, se hará una señal para que se aproxime a la mesa de trabajo el segundo componente del equipo y disponen de 1 minuto para intercambiar información de lo realizado; después se queda en la mesa de trabajo el segundo miembro, disponiendo de otros 5 minutos para terminar el/los ejercicios, levantado la mano cuando necesite ejercicios nuevos.
- El proceso anterior se repetirá hasta que cada componente del equipo pase dos veces por la mesa de trabajo. La prueba durará por tanto 35 minutos (30 de trabajo individual y 5 de cada intercambio).
- Todos los ejercicios que se entreguen permanecen en la mesa de trabajo hasta el final, estén o no terminados.

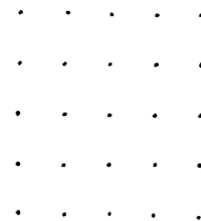
Problema 1: Malos vecinos.

Escribe las cifras del 1 al 8 en los círculos de la siguiente figura, de manera que ninguna línea conecte números consecutivos. Por ejemplo, eso significa que el 3 no puede unirse con el 2 o el 4; que el 6 no puede unirse con el 5 o el 7...



Problema 2: El cuadrado misterioso.

En el dibujo de la derecha, dibujad un cuadrado que una 8 puntos (ni uno más ni uno menos). Vuestro dibujo tiene que encerrar 5 puntos en su interior y dejar 12 puntos en el exterior.



Problema 3: El odioso 13.

La *triscaidecafobia* es el miedo irracional (considerada a veces superstición) que tienen algunas personas al número 13. ¡En este problema tenéis que demostrar que no sois triscaidecafóbicos!

Utilizando cinco veces el número 3 podemos conseguir el número 13:

$$3 \times 3 + 3 + 3 : 3 = 13$$

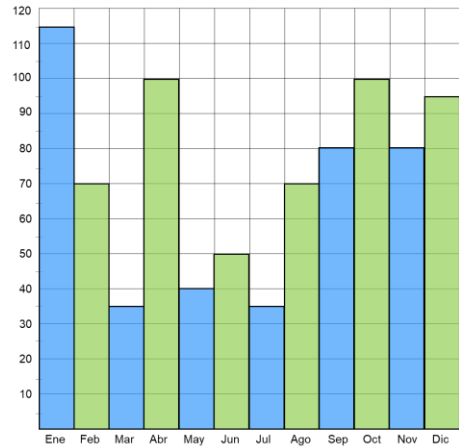
Ahora os toca a vosotros:

- Utilizando trece veces el número 1 consigue el número 13.
- Utilizando trece veces el número 2 consigue el número 13.
- Utilizando trece veces el número 9 consigue el número 13.

Problema 4: La lluvia en Londres es una maravilla.

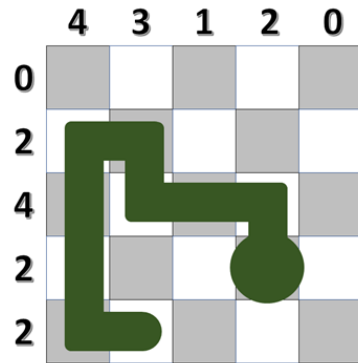
Fernando está haciendo un trabajo para la asignatura de inglés y ha encontrado este gráfico que muestra la lluvia mensual en Inglaterra y Gales durante un año. Está medido en milímetros (mm).

- a) ¿Cuánta lluvia cayó en enero?
- b) ¿Cuánta lluvia cayó en febrero?
- c) ¿Cuánta lluvia cayó más en abril que en mayo?
- d) ¿Cuánto llovió en total en el segundo trimestre del año?
- e) ¿Cuánto llovió de media durante agosto y septiembre?
- f) ¿Cuál es el mes más húmedo del año?
- g) ¿Cuál es el mes más seco del año?

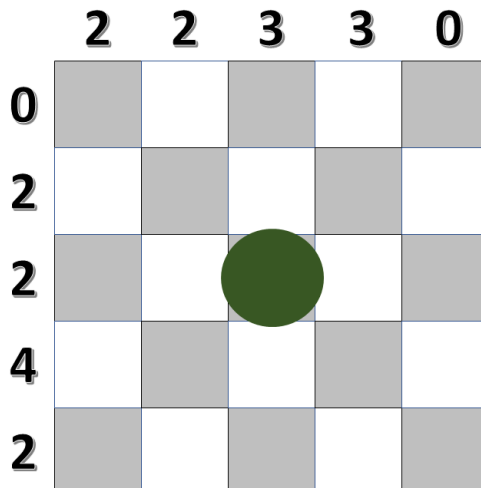


Problema 5: En busca de Nagini.

Voldemort está preocupado. Su serpiente, *Nagini*, se ha perdido y sólo dispone de la magia para encontrarla. *Nagini* ocupa exactamente diez casillas y el hechizo revela los números que ves en la imagen, los cuales muestran el número de casillas ocupadas que hay en esa fila o columna.



¿Podéis determinar dónde se encuentra *Nagini* en la cuadrícula inferior? Como pista, os dejamos indicada la posición de la cabeza:



Problema 6: Libros maravillosos.

Deduce qué tipo de libros le gusta leer a cada uno de estos amigos con las pistas siguientes:

- 1) Los dos personajes que leen libros de aventuras son chicos.
- 2) María no está interesada por los libros de magia.
- 3) Ni a Pedro ni a ninguna de las chicas le gustan los libros de astronomía.
- 4) María, David y Paula son amigos desde pequeños.
- 5) A una de las chicas le gusta la poesía.
- 6) A Esther le encantan las novelas de misterio.
- 7) Juan comparte gustos con Pedro.

		Tipo de libro				
		Aventura	Misterio	Poesía	Magia	Astronomía
Personajes	María					
	David					
	Paula					
	Esther					
	Juan					

Podéis ayudaros del diagrama de la derecha.

Problema 7: Popurrí de problemas incompletos.

Observad las operaciones que sirven para resolver estos problemas y deducid cuál era la pregunta. Luego, escribid el resultado:

Un coche ha recorrido 225 kilómetros en 3 horas.

Pregunta: _____

Operaciones: $(225:3) \times 5 = \underline{\quad}$

Solución: _____

Tengo 10 € y quiero comprar 5 bolígrafos a 2,30€ cada uno.

Pregunta: _____

Operaciones: $5 \times 2,30 - 10 = \underline{\quad}$

Solución: _____

Los autocares que tienen mayor capacidad de pasajeros son los de dos articulaciones, en la que en cada una caben el mismo número de pasajeros. En total caben 240 personas. En el primer vagón solo van sentadas 53 y el resto va de pie:

Pregunta: _____

Operaciones: $240:2 - 53 = \underline{\quad}$

Solución: _____

Problema 8: Ciclo numérico.

El objetivo de este problema es dibujar un bucle en la cuadrícula utilizando solamente líneas rectas.

- No se puede dibujar en diagonal.
- El bucle no puede cruzarse ni tocarse consigo mismo, y solo puede pasar por las casillas libres del tablero.
- Las con números indican por cuántas casillas adyacentes pasa el bucle, incluidas las casillas que se tocan en diagonal.

Completa ambos ciclos:

El 8 indica que el bucle pasa por las 8 casillas alrededor de esa casilla



				3
	8			
3				

3					3
	4				
		5			
				8	
		5			

				6	
		4			
	6				
			7		
3					

5. CONCLUSIONES

Estas actividades están diseñadas para disfrutar de una mañana de Olimpiadas (Grupo LaX, 2000; 2007) pero son también recomendables para trabajar de manera cooperativa en los últimos cursos de Primaria e incluso primeros cursos de secundaria. Particularmente, la prueba de equipos está diseñada para ser planteada como una situación de aprendizaje (Moreno y Cruz, 2023) y desarrollar el sentido matemático. Animamos al profesorado a incluirlas como tareas de clase para fomentar el trabajo cooperativo.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Grupo LaX (2000). Olimpiada matemática de 6º de Primaria en Granada. En Gámez, A., Macías, C. y Suárez, C. (eds.). *Matemáticos y Matemáticas para el tercer milenio. IX Congreso sobre enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas "THALES"*. Sección de Autoedición CITI, Universidad de Cádiz. (pp. 307-309).
- Grupo LaX (2007, julio). Vive en Granada la Olimpiada de Primaria. Comunicación en el *XIII Congreso sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas (XIII JAEM)*. Granada, España.
- Moreno, A. y Cruz, F. (2023). Acercamiento a la idea de situación de aprendizaje matemático en el currículo de matemáticas. *Epsilon*, 115, 7-19.

