

εpsilon

Revista de Educación Matemática

Editada por la Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales

"A menudo se
presume del
analfabetismo
matemático,
contrariamente a lo
que se hace con otros
defectos"

Paulos, J. A.

116
2024

Equipo Editorial

Burgos Navarro, María José
Carrillo de Albornoz Torres, Agustín
Cecilia Gámiz, Lina María
Conde Fernández, Silvia
Contreras García, José Miguel
España Pérez, Francisco
Fernández Plaza, Jose Antonio
Flores Lamolda, Lucía
Flores Martínez, Pablo
Gallardo Jiménez, Sandra
Gámez Valero, Carmen
García Schiaffino, Margarita
Garzón Guerrero, José Antonio
López Centella, Esperanza
Lupiáñez Gómez, José Luis
Molina Muñoz, David
Molina Portillo, Elena
Montejo Gámez, Jesús
Moreno Verdejo, Antonio
Partal García, Daniel
Pérez Martos, María del Carmen
Ramírez Uclés, Rafael
Rivas Olivo, Mauro Alfredo
Rodríguez González, Miguel
Roquette Rodríguez, Esther
Ruiz Hidalgo, Juan Francisco
Tizón Escamilla, Nicolás
Valero Terrón, Iván
Villegas Escobar, Adela María

116

2024

Edita
Sociedad Andaluza de
Educación Matemática "Thales"
Universidad de Cádiz
C.A.S.E.M.
Facultad de Ciencias
Departamento de Matemáticas
Campus del Río San Pedro
Torre Central, 4ª planta
11510 Puerto Real (Cádiz)
Teléfono: 956012833
Email: thales.matematicas@uca.es

Depósito Legal
SE-421-1984

ISSN
2340-714X

Período
2024

Suscripción
Anual

ÍNDICE / CONTENTS

APORTES DE LA INVESTIGACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

- 7 **Carmen Batanero, profesora de la Didáctica de la Matemática**
Belén Carrasco Moya, Lorena Rodríguez González y Juan Núñez Valdés
- 23 **Análisis de dos tareas sobre azar y probabilidad para enriquecimiento curricular**
Mónica Nieves Ermecheo y Nuria Rico Castro
- 37 **Análisis sobre la detección de errores en la representación gráfica de datos en los medios de comunicación**
María del Carmen Galán Mata y Jaime G. Cimas

EXPERIENCIAS DE AULA

- 53 **Adaptaciones metodológicas para la enseñanza de resolución de problemas aritméticos a alumnado con autismo**
Raúl Fernández-Cobos, Irene Polo-Blanco y Alicia Bruno
- 63 **Aprendizaje basado en la indagación para la resolución de problemas de Fermi**
Jesús Montejo-Gámez
- 77 **Entrevista al profesorado: Dionisio Lobatón Cebrián**
Dionisio Lobatón Cebrián

ACTIVIDADES EN LA SAEM THALES

- 85 **Problemas de olimpiadas en equipo, ¿una situación de aprendizaje?**
María Florencia Cruz, Antonio Moreno y Rafael Ramírez Uclés
- 99 **Actividades SAEM Thales**
Ester Roquette Rodríguez

Carmen Batanero, profesora de la Didáctica de la Matemática

Belén Carrasco Moya

Facultad de Matemáticas, Universidad de Sevilla, belenjabugo17@gmail.com

Lorena Rodríguez González

Facultad de Matemáticas, Universidad de Sevilla, lorenarodriguezg00@gmail.com

Juan Núñez Valdés

Facultad de Matemáticas, Universidad de Sevilla, jnvaldes@us.es

Resumen: *En este artículo se describe la vida y obra científica de Carmen Batanero, la primera mujer profesora Titular de Universidad de Didáctica de la Matemática en España. Carmen Batanero desarrolló la mayor parte de su carrera profesional en Granada, donde junto a su marido y otros colaboradores puso en marcha uno de los primeros programas de doctorado en esa disciplina, con el objetivo de formar a doctores en esa especialidad. En 2001 presidió durante dos años la International Association for Statistical Education. Entre 2003 y 2006 formó parte del Comité Ejecutivo de la International Commission on Mathematical Instruction. Más tarde obtuvo la plaza de catedrática de Universidad. Gracias a sus muy numerosas aportaciones científicas, actualmente está considerada un referente en la Didáctica de la Estadística, al haber sido una de las mujeres que con sus labores profesionales sentaron las bases para el enorme desarrollo actual que posee esa disciplina.*

Palabras clave: *Carmen Batanero, Didáctica de la Matemática, Didáctica de la Estadística, mujeres matemáticas.*

Carmen Batanero, teacher of Mathematics Didactics

Abstract: *This article describes the life and scientific work of Carmen Batanero the first woman Senior Lecturer of Mathematics Education in Spain. Carmen Batanero developed most of her professional career in Granada, where together with her husband and other collaborators she launched one of the first doctoral programs in mathematics education, with the aim of training researchers in this area. In 2001, she was appointed president of the International Association for Statistical Education for a period of two years. Between 2003 and 2006 was a member of the Executive Committee of International Commission on Mathematical Instruction. She later became full professor. Currently, she is considered a reference in Statistics Education, who helped to establish since she was one of the women that with their professional work laid the foundations for the current development of that discipline.*

Key words: *Carmen Batanero, Mathematics Education, Statistics Education, women mathematicians.*

1. INTRODUCCIÓN

En este artículo se presenta la vida y actividad científica de Carmen Batanero, profesora de Didáctica de la Matemática en nuestro país, cuya mayor contribución ha sido en el campo de la Didáctica de la Estadística, con el doble objetivo de dar a conocer su figura y mostrarla como modelo y referente a seguir por las mujeres, habida cuenta de cómo llegó a contribuir de manera muy notable, con su trabajo docente e investigador, al crecimiento y desarrollo que posee actualmente esta disciplina.

Como metodología de trabajo y para la elaboración de este artículo, los autores hemos contado, aparte de nuestra búsqueda de información en diferentes fuentes bibliográficas y digitales, con la colaboración de la propia biografiada, quien nos ha facilitado la mayor parte de la información que se presenta, así como las fotografías que ilustran el artículo. De esa forma, los autores hemos conseguido elaborar un escrito sobre algunos de los principales hechos de su biografía, que incluye tanto datos personales como los aspectos más destacados de su actividad profesional.

Al objeto de contextualizar adecuadamente el marco de trabajo que Carmen Batanero se encontró al inicio de su actividad profesional, es conveniente reflejar cuál era el estado de la Educación Matemática en general, y más concretamente de la Educación Estadística en particular, en la que Carmen Batanero centró su atención en sus investigaciones.

2. NOTAS SOBRE LA DIDÁCTICA DE LA ESTADÍSTICA

Como antecedente más general de la Didáctica de la Estadística, puede decirse que los orígenes de la introducción de la Didáctica de la Matemática como disciplina científica se remontan a la década de los años 50 del siglo pasado, cuando prácticamente en todos los países desarrollados en aquel momento se entendía que la enseñanza de las Matemáticas no era la adecuada, dado que el nivel de los estudiantes en Matemáticas era bastante inferior al que se observaba en otras asignaturas (Kline, 1976). Para revertir esta situación, algunas Universidades, sobre todo de los Estados Unidos, empezaron a reformar sus planes de estudios en Matemáticas, al objeto de actualizarlos, de acuerdo con los avances que se producían en Matemáticas y Física, fundamentalmente (Contreras, 2012).

Más tarde, ya en la década de los años 70, Guy Brousseau, nacido en Taza (Marruecos), en 1933, profesor de la Universidad de Bordeaux (Francia), quien posteriormente sería galardonado con la Medalla Félix Klein en 2003, comenzó a sentar las bases de una nueva ciencia de la Educación, la denominada Didáctica de la Matemática, cuando trabajaba en el Instituto de Investigación sobre la Enseñanza de la Matemática (IREM), al introducir el conocimiento matemático como objeto primario de investigación, juntándolo a la ya tradicional relación profesor-alumno (Kline, 1976). Lo que hizo Brousseau fue plantear lo que él denominó “Situaciones Didácticas” para modelar el proceso de enseñanza-aprendizaje, de forma que ese proceso se visualizara como un juego para el cual el docente y el estudiante han definido o establecido reglas y acciones implícitas.

Centrándonos ahora en España, a mediados de los años 60, el colectivo que inició los primeros pasos relacionados con la Didáctica de la Matemática fue la Asociación de Maestros “Rosa Sensat”, un movimiento de renovación pedagógica, creado en Barcelona en 1965, que continúa trabajando en la actualidad para la mejora de la educación. A ella le siguieron, algunos años más tarde, numerosas asociaciones con idénticos fines en el resto del país.

Entre ellas, la fundación en Sevilla, en 1981, de la actual Sociedad Andaluza de Educación Matemática “Thales” (anteriormente llamada Sociedad Andaluza de Profesores de Matemáticas “Thales”), gracias a la iniciativa y a los esfuerzos de Gonzalo Sánchez Vázquez, que lideraba a un numeroso grupo de profesores de Secundaria y Bachillerato, marcó un hito importante en el posterior desarrollo de esta disciplina. Por aquel tiempo fueron apareciendo otras sociedades o asociaciones en diferentes regiones del país que impulsaron el tratamiento de la Didáctica y de la Educación Matemáticas hasta el excelente nivel que posee en la actualidad.

Particularizando ahora al campo de la Educación Estocástica en los últimos treinta años, periodo en que Carmen Batanero ha estado involucrada en algunos de sus desarrollos, ha pasado de ser prácticamente inexistente a alcanzar un alto nivel dentro de la comunidad de Educación Matemática, gracias a la atención que la Estadística y la Probabilidad han tenido en los currículos de los centros de Enseñanza Secundaria y la universidad (Batanero, 2018), con el objetivo de dar una respuesta adecuada a la necesidad de mejorar el conocimiento y la cultura estadística (Gal, 2005) de todos los ciudadanos y profesionales.

Con respecto a lo anterior, es conveniente indicar que Carmen Batanero, siguiendo la tradición europea, discutida en Batanero y Borovcnik (2016), prefiere hablar de estocástica antes que de estadística y probabilidad, porque estas últimas están ligadas indisolublemente, dado que no se recogen datos estadísticos de fenómenos deterministas, que se generan mediante fórmulas matemáticas. Por ello, ella usa el término estocástica para enfatizar la dependencia mutua del conocimiento y razonamiento sobre probabilidad y estadística, que están interconectadas y deben enseñarse conjuntamente.

Una parte muy importante de la investigación pionera en razonamiento y aprendizaje estocástico ha tenido lugar fuera de la educación matemática. Diferentes campos han contribuido con varios paradigmas de investigación y marcos teóricos que han sido analizados en varios trabajos, como los de Kapadia y Borovcnik (1991), Shaughnessy et al. (1996), Jones y Thornton (2005), Chernoff y Sriraman (2014), Batanero et al. (2016) y Zieffler et al. (2018).

Según Batanero (2018), la mayor contribución a la Educación Estocástica se originó dentro de la misma Estadística y comenzó con la creación del Education Committee en el seno del International Statistical Institute (ISI) cuando la mayor preocupación de ese instituto era la de formar buenos estadísticos y obtener informes estadísticos fiables en los países en vía de desarrollo (Vere-Jones, 1995; Zieffler et al. 2018). En el último cuarto del siglo XX, las diferentes aplicaciones de la Estadística comenzaron a enfatizar métodos y procedimientos cada vez más especializados, que se reflejaron en la variedad de cursos sobre estadística bayesiana o multivariante, métodos no paramétricos o remuestreo. Al mismo tiempo, a mediados de los años 70, cada vez más universidades comenzaban a enseñar Estadística a una diversidad de estudiantes. La necesidad de encontrar métodos para enseñarles estas técnicas, se reflejaron en las diferentes sesiones de trabajos en los congresos International Conference on Teaching Statistics (ICOTS), cuya primera edición se celebró en 1982 y siguen realizándose de manera cuatrianual en la actualidad.

Estos congresos se complementaron con una serie de Round Table Conferences sobre temas específicos. La revista *Teaching Statistics* se publicó por primera vez en 1979 y *Journal of Statistics Education* en 1993, y pronto fueron instrumentos de mejora de la educación estadística en todo el mundo.

En ese tiempo, algunos estadísticos desarrollaron métodos específicos para describir la actividad llevada a cabo por ellos y los procesos de modelización y pensamiento estadístico. El que tuvo más influencia fue el desarrollado por Wild y Pfannkuch (1999), que describe el

razonamiento estadístico con cuatro componentes. El primero es el ciclo de investigación PPDAC (problema, planificación, datos, análisis, conclusión), el segundo el ciclo interrogativo, el tercero describe los tipos de razonamiento que se presentan en un problema estadístico y finalmente se asumen una serie de disposiciones como la curiosidad, imaginación o escepticismo.

Otra contribución importante surgió de la colaboración entre estadísticos y profesores de Matemáticas en los Estados Unidos, donde la American Statistical Association (ASA) junto al National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) constituyeron un comité que produjo los Guidelines for Assessment and Instruction in Statistics Education, que proporcionan recomendaciones para enseñar Estadística en la escuela y la universidad. Estos documentos inspiraron la investigación posterior; por ejemplo, sobre comparación de directrices curriculares en diferentes países o comparación de las mismas con estas directrices.

Como consecuencia de todo este interés y de la expansión de la enseñanza de la Estocástica en la universidad, la investigación en Educación Estocástica comenzó a crecer poco a poco bajo la influencia de otros proyectos e iniciativas de la American Statistical Association. Pero, sobre todo, más importante aún fue la creación en 1991 de la International Association for Statistical Education (IASE) como sección independiente del ISI. La nueva asociación tomó a su cargo la organización de los ICOTS desde 1994 y de las conferencias Round Tables sobre temas más específicos. Además, IASE ha organizado otras conferencias como satélites a las sesiones del ISI (Batanero, 2018).

Por todo lo anterior, puede decirse que la investigación en Educación Estocástica como un campo de la Educación Matemática está hoy en día bien establecida, como se muestra en los grupos de Estocástica del International Congress of Mathematics Education (ICME), European Mathematics Education Conferences (CERME), y congresos regionales o nacionales como la Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa (RELME) o los Simposios de la Sociedad Española de Educación Matemática (SEIEM). En estas conferencias la Educación Estocástica se considera un componente de la Educación Matemática, lo que se observa también en las conferencias y trabajos invitados en las mismas.

Fue en este contexto de la Educación Estocástica en el cual Carmen Batanero pasó a desarrollar su principal investigación. En las dos siguientes secciones se tratan, respectivamente, su biografía personal y su obra científica

3. CARMEN BATANERO: SU BIOGRAFÍA PERSONAL

Aunque la casa familiar donde vivían los padres de María del Carmen Batanero Bernabeu se encontraba en el barrio de Los Remedios, de Sevilla, ella nació en el 7 de febrero de 1949 en el más emblemático barrio de Triana, en el que vivían sus abuelos maternos.

Su nacimiento fue muy peculiar, pues fue su propio abuelo materno quien, en su calidad de médico de familia y en su propio hogar, la trajo al mundo, aunque, desafortunadamente, no pudiera luego disfrutar mucho de su nieta pues él falleció a los tres meses de ese nacimiento. Su abuela materna también falleció solo tres años después de que ella naciera. Su abuelo paterno que era abogado y su abuela, dedicada al cuidado del hogar, estuvieron viviendo en su casa de Huelva hasta una muy avanzada edad.

Como puede deducirse de esos datos anteriores, la familia en la que Carmen nació gozaba de una muy buena formación académica. Además de las carreras de sus abuelos, su padre, Juan Batanero García Geraldo, era catedrático y director en la Escuela de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos de la Universidad Politécnica de Madrid, encontrándose entre sus proyectos el

puente de la Salve en Bilbao, primer puente atirantado que se construyó en España, y la rehabilitación del puente de Triana en Sevilla. Su madre Carmen Bernabeu de las Morenas se dedicaba al cuidado de la familia y del hogar, aunque desafortunadamente contrajo muy joven una enfermedad autoinmune, conocida como artritis reumatoide, que la convirtió en una persona dependiente.

Carmen tuvo cuatro hermanos, dos mujeres y dos varones. La menor de las dos hermanas murió a los tres meses. El mayor trabajó en la confederación hidrográfica en Madrid y el menor en la Renfe. En la Figura 1 aparece ella acompañada de su madre y de dos hermanos, Rosario y Juan.

Figura 1

Carmen Batanero, su madre y dos hermanos. Fuente: Archivo familiar.



Hasta la edad de tres años, Carmen Batanero residió en la casa familiar del barrio sevillano de Los Remedios. Sin embargo, debido a la profesión del padre, se trasladó en 1952 junto con su familia a Madrid, ciudad en la que tanto ella como su hermana estudiaron en el colegio Santo Ángel desde la Educación Primaria hasta el Bachillerato. Ella recuerda que las monjas del colegio estaban muy bien preparadas y eran excelentes profesoras, al igual que los profesores seculares que también les daban clase.

Una vez que Carmen Batanero terminó su Bachillerato, su padre, quien por su profesión había viajado mucho por haber estado como delegado en la Unesco, y por tanto conocía muy bien la situación de la mujer en Europa en relación con el mundo laboral, apoyó a Carmen Batanero en su decisión de iniciar estudios universitarios. Así, en 1966, Carmen Batanero ingresó en la Facultad de Matemáticas de la Universidad Complutense de Madrid y, tras cinco años de trabajo y dedicación, en 1971, terminó sus estudios haciendo la especialidad de Análisis Numérico.

A lo largo de los cinco años que estuvo en la Universidad, Carmen Batanero tuvo como catedráticos profesores a varias figuras de la Matemática española de aquellos tiempos, como Alberto Dou Mas de Xaxàs y Miguel de Guzmán Ozámiz, a quienes ella recuerda con mucho cariño. De hecho, dio unas clases de prácticas durante un par de años, como profesora ayudante, en la cátedra del padre Dou. Otros profesores que tuvo fueron Pedro Abellanas Cebollero y Enrique Outerelo Domínguez, siendo este último quien le impartió la materia de Topología en cuarto curso, una asignatura que llamó bastante su atención. Algunos compañeros de carrera de Carmen Batanero fueron Antonio Córdoba Barba y José García-Cuerva Abengoza, ambos catedráticos de Análisis Matemático.

Ya una vez licenciada en 1971, Carmen Batanero inició su trabajo profesional como analista de sistemas en la Dirección General de Carreteras. Dos años más tarde, contrajo matrimonio con Juan Díaz Godino, quien ha sido catedrático de Didáctica de la Matemática y el principal creador del denominado enfoque ontosemiótico (<https://enfoqueontosemiotico.ugr.es/>), un marco teórico de mucha influencia en Latinoamérica.

Durante los dos años siguientes, Carmen Batanero cursó la diplomatura de Estadística en la Escuela Estadística de la Universidad Complutense de Madrid, pero siendo madre reciente de dos hijos mellizos y contando ya con otro hijo de dos años de edad, decidió tomarse un descanso de dos años para cuidar de todos ellos.,

En 1977, se trasladó junto con su marido a Jaén, ya que este obtuvo una plaza en la Escuela de Magisterio y ella otra de profesora en el Colegio Universitario de Jaén, el cual, posteriormente, se incorporaría en 1975 a la Universidad de Granada. Su última hija nació en Jaén y, en la actualidad, Carmen Batanero cuenta con un total de cuatro hijos (que aparecen junto a ella en la Figura 2, izquierda) y seis nietos (Figura 2, derecha).

Durante los años de su etapa en Jaén, Carmen Batanero aprovechó para realizar una tesis doctoral sobre procesos estocásticos puntuales, que dirigió el profesor Ramón Gutiérrez Jaimez. Defendió esa tesis, que llevaba por título “*Modelos de choque y exposición intermitente a riesgo de fallo*” en 1983.

Figura 2

Carmen Batanero y sus hijos en 1988 (izquierda). Familia de Carmen Batanero en 2011 (derecha). Fuente: Archivo familiar



Tres años más tarde, en 1986, Carmen Batanero consiguió el que por entonces era su principal objetivo académico; aprobar la oposición y conseguir una plaza de profesora Titular de Universidad en el área de Estadística. En total, estuvo casi 9 años en el Colegio Universitario de Jaén, en el que trabajó como profesora Encargada de curso entre octubre de 1978 y julio de 1983, más tarde como profesora Titular de Universidad Contratada, entre noviembre de 1983 y noviembre de 1986 y ya finalmente como profesora Titular de Universidad entre diciembre de 1986 y septiembre de 1988.

En octubre de 1988, Carmen Batanero y su marido se trasladaron a Granada y participaron en la puesta en marcha de un programa de doctorado en Didáctica de la Matemática en la universidad de esa ciudad, dado que la misma aún no había doctores en esa especialidad. Al ser ese el primer año de impartición de ese programa, ella tuvo que impartir cuatro asignaturas diferentes, lo cual le supuso un esfuerzo muy grande pues sus clases en Jaén habían sido de Estadística y Probabilidad para futuros matemáticos y Bioestadística para futuros biólogos. Tuvo entonces que cambiar de área de conocimiento convirtiéndose de esa forma en la primera mujer Titular de Didáctica de la Matemática en España.

En 2009 obtuvo la plaza de Catedrática del Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada, en la que permaneció una década, hasta jubilarse en 2019, después de haber tenido una extensa carrera profesional y académica que la hizo pasar, como ya se ha indicado, por la Dirección General de Carreteras, de 1971 a 1977, el Colegio Universitario de Jaén, entre 1978 y 1988 y la Universidad de Granada, desde 1988 hasta 2019, primero como profesora Titular y ya luego, a partir del año indicado, como catedrática de Universidad.

Tras su jubilación, siguió en el departamento como colaboradora extraordinaria hasta 2022 y actualmente, colabora con el grupo de investigación de Teoría de la Educación Matemática y Educación Estadística, como puede verse en la siguiente sección. La Figura 3 muestra su imagen en 2011 y la actual.

Figura 3

Carmen Batanero en Granada, en 2011 (izquierda). Foto actual de Carmen Batanero (derecha).

Fuente: Archivo familiar



Tanto ella como su marido son personas sencillas y caseras, aunque han tenido que viajar mucho a causa de su trabajo. A ambos les gusta la música, caminar, leer y salir de vez en cuando al cine.

4. CARMEN BATANERO: SU ACTIVIDAD PROFESIONAL

Como se ha indicado anteriormente, Carmen Batanero ha centrado la mayor parte de su investigación en el campo de la Educación Estocástica. Una simple mirada a su currículum da una idea clara de la ingente y extensa labor que ha desarrollado y de sus logros académicos, en forma de publicaciones, conferencias en congresos, direcciones de tesis doctorales y otras actividades, que han contribuido a elevar el nivel de esta disciplina hasta alcanzar el notable techo que posee actualmente. Aparte de varias distinciones recibidas, esa labor le ha hecho merecedora de haber obtenido 5 tramos de investigación reconocidos por la Comisión Nacional de Evaluación de la Actividad Investigadora entre 1985 y 2014, y 7 periodos de actividad docente, entre los años 1978 y 2013, aparte de una evaluación muy positiva de los Complementos Autonómicos en los componentes investigador; docente y de gestión entre 1979 y 2003.

Al inicio de su carrera académica, el hecho de que ella fuese la única estadística que había en el Colegio Universitario de Jaén en la etapa en la ella estuvo allí le permitió colaborar en el análisis de datos de numerosas tesis doctorales de disciplinas muy variadas: Biología, Geografía, Historia, Medicina, Química, etc.

Tras su traslado de Jaén a la Universidad de Granada, hay que indicar que en esa Universidad el interés por la educación estocástica se desarrolló al establecerse el programa de doctorado de Educación Matemática en 1988 y el grupo de investigación sobre Educación Estadística (<http://www.ugr.es/~batanero/>). Algunos profesores universitarios de diferentes países comenzaron investigaciones sobre temas que debían enseñar a sus estudiantes, ya que estaban familiarizados con sus dificultades. Como consecuencia se realizaron tesis doctorales sobre temas estocásticos avanzados como los contrastes de hipótesis, la distribución normal, el teorema central del límite, intervalos de confianza, tablas de contingencia, variables aleatorias o análisis de la varianza. Otras tesis se centraron en el análisis de libros de texto, la estadística descriptiva o la probabilidad y la formación de profesores; actualmente parte de estos doctorandos son profesores universitarios que dirigen nuevas tesis de doctorado. A ese respecto, Carmen Batanero dirigió 18 tesis doctorales en esa Universidad, siendo además codirectora de otras 3 más defendidas en otras universidades, por lo que en total ha sido directora de 21 tesis doctorales. Ha sido también directora de varios trabajos de investigación del tipo de trabajos fin de grado o de máster dedicados a la investigación en Educación Estadística, varios de ellos relacionados con la formación del profesorado de Secundaria y Bachillerato.

Referente a su participación en Proyectos de I+D+I financiados en convocatorias públicas, tanto nacionales como internacionales, entre los años 1987 y 2019 Carmen Batanero ha sido Investigadora Principal en 10 de ellos, financiados por diferentes entidades, como el Ministerio de Economía y Competitividad o la Dirección General de Investigación en Ciencia y Tecnología, entre otras instituciones. Asimismo, ha sido también miembro del equipo investigador de otros 9 proyectos más. La mayor parte de todos esos proyectos versaron sobre la investigación en Educación Estadística y sobre el uso de las tecnologías de la información y las comunicaciones en la formación tanto de profesores, para enseñar estadística, como de alumnos de Secundaria, Bachillerato y Universidad.

Ha colaborado también como miembro del equipo de investigación en un proyecto financiado por el Centro de Investigación y de Estudios Avanzados de México y otro, realizado entre 2012 y 2015 financiado por la Fundação para a Ciência e Tecnologia de Portugal. Previamente, entre 2003 y 2005, ella fue Investigadora Responsable de otro proyecto financiado por las Acciones Integradas Hispano Alemanas para realizar una investigación sobre el pensamiento estadístico y el significado de conceptos estadísticos en entornos de aprendizaje apoyados tecnológicamente.

La mayoría de estos proyectos están enmarcados en el “Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos”, que es un marco teórico específico que introdujo su esposo, Juan Díaz Godino en 1993 para apoyar la investigación en Didáctica de la Matemática. En él colaboraron varios investigadores, principalmente de la Universidad de Barcelona, y Carmen Batanero. Esa teoría asume varios supuestos: uno, epistemológico sobre las Matemáticas, basado en presupuestos antropológicos/socioculturales, otro de cognición matemática, sobre bases de la semiología, otro instruccional, sobre bases socio-constructivistas y un último, ecológico, en el que tiene lugar la sociedad de estudio y la comunicación matemática. Puede ampliarse la información sobre este enfoque en Godino et al. (2007).

Referente a sus publicaciones, Carmen Batanero es autora, de manera individual o en colaboración con otros autores, de 28 libros y de 42 capítulos de libros, en ambos casos tanto de investigación como docentes o de divulgación. En ellos trata, entre otros aspectos, del empleo de microordenadores en la escuela, del lenguaje Logo, del azar y la probabilidad, de los fundamentos de la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas para maestros, y de la Didáctica de la Estadística. Asimismo, ha sido autora de más de 200 artículos de investigación en diferentes revistas de impacto, tanto nacionales como internacionales, sobre diferentes temáticas relacionadas con la Didáctica de la Estadística.

El tema de la enseñanza de la Estadística a profesores de cualquier nivel, aunque preferentemente ella se ha centrado en aquellos niveles previos al universitario, ha sido también una constante en su actividad académica, dado que a lo largo de su vida ella ha impartido numerosas clases a aspirantes a profesores de Matemáticas de Secundaria y Bachillerato e incluso de Primaria.

En sus publicaciones docentes, Carmen Batanero trata sobre determinados aspectos de la Matemática o de la Estadística y sus didácticas respectivas, como, por ejemplo, los sistemas numéricos, la medida de magnitudes, los análisis de datos, la media y la varianza y sus didácticas. También se ha ocupado del análisis de algunas paradojas matemáticas, como la de la caja de Bertrand o la de Simpson, por ejemplo. Estas aportaciones se han publicado en revistas científico-divulgativas de Matemáticas dirigidas al profesorado como Epsilon, Redimat, Suma, Números y Unión.

La participación de Carmen Batanero presentando comunicaciones sobre su investigación en jornadas y congresos ha sido también amplia, pues cuenta con participaciones en más de 200 congresos, igualmente tanto nacionales como internacionales. En la Figura 4 se la puede ver participando en dos congresos de estas disciplinas celebrados en Recife (Brasil) y Heredia (Costa Rica), a los que acudió especialmente invitada por las respectivas organizaciones.

Figura 4

Carmen Batanero en el XIII CIAEM Recife, Brasil, 2011 (izquierda) y en el Encuentro Nacional de Enseñanza de la Matemática, en Heredia, Costa Rica (derecha). Fuente: Archivo familiar



Otra de sus actividades en su ejercicio profesional ha consistido tanto en la organización como en la impartición de varias conferencias de la International Association for Statistical Education (IASE). La primera de ellas fue en una mesa redonda celebrada en Granada en 1996 sobre el papel de la tecnología, que brindó una gran oportunidad a los investigadores de reunirse con los principales líderes en Educación Estadística de ese momento.

Precisamente, Carmen Batanero estuvo un total de ocho años ocupando diversos cargos del comité ejecutivo de IASE, de los cuales, dos de ellos, fueron como presidenta entre 2001 y 2003 (ver Figura 5).

Figura 5

Carmen Batanero, presidenta de IASE en 2002. Fuente: Archivo familiar



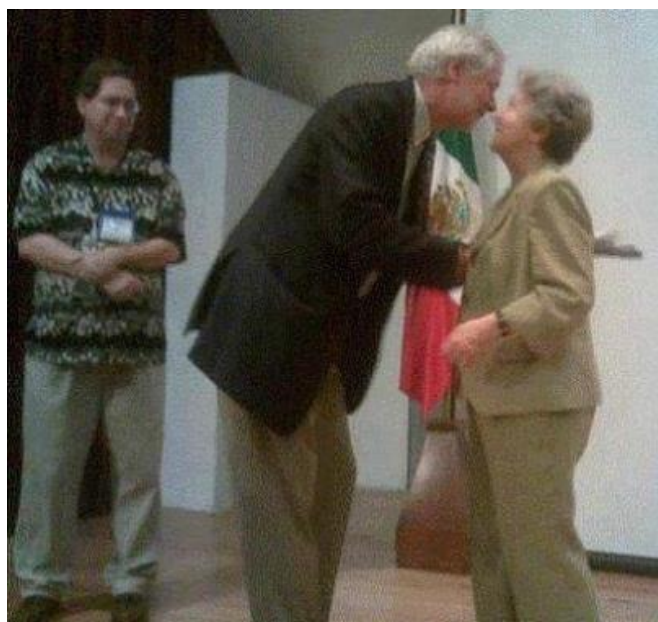
Algunos de los congresos en los que Carmen Batanero fue presidenta del comité científico fueron IASE 2000 Roundtable Conference on Training Researches in the Use of Statistics en Tokio, e ICOTS 7 (Salvador de Bahía, Brasil, en 2006).

Paralelamente, junto a su amiga Flavia Jolliffe, Carmen Batanero puso en marcha en 2002 la revista [Statistics Education Research Journal](#), con el objetivo de tener una revista específica de investigación en Educación Estadística. Esa revista está actualmente indexada en Scopus y ella es una editora asociada y también ha sido miembro del panel editorial de otras muchas revistas de impacto internacionales. Por todos estos trabajos Carmen fue nombrada miembro honorario de IASE en 2006.

A lo largo de su vida académica, Carmen Batanero realizó numerosos viajes a distintos países, fundamentalmente iberoamericanos, como Argentina, Brasil, Chile, Colombia, Costa Rica, México, Panamá, Perú, Uruguay y Venezuela, con el objetivo de difundir y expandir la Educación Estadística y la IASE, gracias a lo cual muchos de esos países cuentan actualmente con conferencias y grupos de investigación específicos sobre esa materia. Más concretamente, entre 1992 y 2013, Carmen Batanero realizó 13 estancias en el extranjero, de entre una y dos semanas de duración cada una de ellas, en universidades de países europeos: Loughborough (Inglaterra) y Kassel (Alemania), de países iberoamericanos, El Salvador, Campinas y Río de Janeiro (Brasil), Santa Fe y Río Cuarto (Argentina), Valdivia (Chile), Lima (Perú), Monterrey y Ciudad de México (México) y también de América del Norte, en la Universidad de Minnesota, en las que impartió cursos de perfeccionamiento, maestría y de doctorado en Educación Estadística.

Figura 6

Carmen Batanero en el ICMI Study Monterrey, 2008. Fuente: Archivo familiar



Otro hito importante en su carrera académica que merece también ser destacado es que entre 2003 y 2006 Carmen Batanero fue miembro del comité Ejecutivo de la Comisión Internacional en Educación Matemática (The International Commission on Mathematical Instruction en inglés, conocida por las siglas ICMI) y, posteriormente, fue coordinadora de un ICMI Study titulado

“Teaching Statistics in School Mathematics, Challenges for Teaching and Teacher Education” que, además de incluir una conferencia en Monterrey, México, en 2008 (Figura 7), finalizó con la publicación de un libro de la editorial Springer, titulado “*Teaching Statistics in School Mathematics-Challenges for Teaching and Teacher Education*”.

Finalmente, como se indicó en la sección anterior, es conveniente reflejar que Carmen Batanero continúa en la actualidad ejerciendo su actividad científica a pleno rendimiento, pues tras su jubilación, siguió en el departamento como colaboradora extraordinaria hasta 2022 y actualmente colabora con el grupo de investigación de Teoría de la Educación Matemática y Educación Estadística. Frutos de esa actividad, ya estando jubilada, son sus artículos: (i) con Godino y Font en 2020 (Godino et al., 2020), (ii) cinco artículos con Hernández-Solís, Gea y Álvarez-Arroyo en 2021 (Hernández-Solís et al., 2021a – 2021e), (iii) con Arroyo, Hernández-Solís y Serrano, en 2021 (Arroyo et al., 2021), (iv) con Burgos y Godino (Burgos et al., 2022), (v) con Begué y Valenzuela-Ruiz en 2022 (Batanero et al., 2022), y (vi) 14 más publicados en 2023, todos los cuales pueden verse en la página web de su grupo de investigación: (<https://produccioncientifica.ugr.es/investigadores/352905/detalle>).

En esa página también puede verse que estas nuevas aportaciones de Carmen Batanero tras su jubilación han tenido varios efectos muy positivos. En primer lugar, que del total de 32973 citas que ella tiene actualmente de sus artículos, 13494 se han producido desde su jubilación en 2019. En segundo lugar, que su índice “h” actual sea 88, cuando era 55 antes de 2019 y en tercer lugar, que su índice “i10” actual es 316, siendo 216 antes de 2019.

En esa misma página puede también observarse que Carmen Batanero ha participado, tras su jubilación, en el Proyecto Autonómico ya finalizado en diciembre de 2023 “Razonamiento proporcional y algebraico en la formación de profesores para enseñar Estadística”, como miembro del equipo investigador, y en los proyectos PID2022-139748NB-100 financiado por MICIU/AEI/10.13039/501100011033/ y por FEDER, UE, actualmente activos. Asimismo, sigue teniendo participaciones en congresos, como muestran la que tuvo como conferenciante plenaria en el pasado CERME de Praga o su participación en el PME de 2022, ambos eventos muy recientes y de interés mundial en la educación matemática.

Para finalizar esta meritoria referencia al trabajo desarrollado por Carmen Batanero, es conveniente indicar que en esta sección solo se han mostrado los datos que los autores hemos considerado más destacados de su actividad científica, constituyendo estos únicamente un número reducido de su ingente producción. Puede obtenerse más información al respecto en la página web de su grupo de investigación antes referida.

5. CONCLUSIONES

En la actualidad, además de dedicarle el mayor tiempo posible a su familia y aficiones, como la lectura, Carmen Batanero, no ha dejado de lado su dedicación a la Educación Estadística. Por ello, sigue colaborando con diversas revistas científicas y, tal y como se acaba de mencionar, con diferentes proyectos de investigación en la Educación Matemática y Estadística.

Carmen Batanero destaca que, por una parte, la Didáctica de la Matemática es ahora un área consolidada, con congresos y revistas específicas. Sin embargo, por otra parte, también apunta algunos aspectos que pueden ser mejorables:

Actualmente, no se tienen programas de doctorados de Educación de la Matemática como hace unas décadas y las tesis han de realizarse en los doctorados de educación. Asimismo,

debido a la exigencia de la ANECA de publicar en revistas Scopus y JCR, la investigación se está diluyendo en revistas de Educación o incluso generales, pues pocas de las revistas específicas de Didáctica de la Matemática están en estos índices.

Por último, dada la falta de becas para hacer tesis de Didáctica de la Matemática, algunas plazas de profesor no se pueden cubrir con doctores en esta materia y hay que admitir a matemáticos o incluso otros profesionales doctores en otras áreas. Ellos tienen que reconvertirse para iniciar una nueva investigación, lo cual es difícil para muchos.

Para mejorar el desarrollo de la Didáctica de la Matemática en general y algunos de los aspectos negativos anteriormente mencionados, Carmen Batanero también opina que la Universidad debería apoyar en mayor medida a los jóvenes investigadores:

Se necesita financiación para asistir a congresos y, a día de hoy, también se necesita para poder publicar en muchas revistas. Esto no se lo pueden permitir muchos de ellos, solo aquellos pocos que formen parte de algún proyecto financiado y, sin embargo, son los jóvenes investigadores quienes ahora tienen en sus manos el futuro de esta disciplina.

En este sentido, Carmen Batanero admira el interés, esfuerzo, iniciativa y entusiasmo de los profesores y de las Sociedades de Profesores que forman la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas (FESPM), que integra, por ejemplo, a la Sociedad Andaluza de Educación Matemática (SAEM) “Thales”, de la que ella fue socia hasta su jubilación, a pesar de la cantidad de trabajo que les supone y a los que no siempre se les reconocen las tareas de investigación o las publicaciones.

A pesar de estos avances, Carmen Batanero considera que la formación de los profesores es todavía un tema prioritario de estudio. Ella afirma que la investigación se está centrando solo en el conocimiento estocástico de los profesores, por lo que es necesario prestar más atención a las diferentes facetas del conocimiento didáctico-estocástico del profesor, es decir, los aspectos epistémico, cognitivo, afectivo, mediacional, interaccional y ecológico de su conocimiento (Godino et al., 2017). También comenta que el análisis de propuestas instruccionales para formar a los profesores en cada una de estas facetas es igualmente necesario.

A este respecto, ella cree que todavía hay un largo camino para hacer avanzar la investigación en Educación Estocástica. De hecho, sugirió en 2015 la necesidad de investigar en qué forma las diferentes aproximaciones a la inferencia (en lugar del enfoque prevalente frecuencial) pueden ayudar a superar las dificultades de los estudiantes con el tema, y también dio una lista de cuestiones específicas a investigar, como, por ejemplo, analizar la mejor forma y edad de introducir los diferentes significados de la probabilidad en el currículo o clarificar en qué modo el razonamiento probabilístico puede contribuir a reforzar las competencias matemáticas de los estudiantes (Batanero et al., 2016).

Asimismo, Carmen Batanero también comenta que, en su opinión, se ha producido en los cuatro o cinco últimos años, previos a la actual década de los 20 de este siglo, una gran cantidad de cambios y un crecimiento exponencial de la investigación en Educación Estocástica y una gran incorporación de investigadores iberoamericanos a esta tendencia, por lo que presume que probablemente se llegue pronto a un liderazgo de los países iberoamericanos en esta área en un futuro cercano, dado el elevado número de investigadores implicados y las numerosas iniciativas tomadas en este campo.

Por todo ello y por todos los datos anteriormente comentados sobre su actividad académica, los autores creemos haber probado que Carmen Batanero forma parte de ese número reducido de mujeres que han supuesto un antes y un después en el desarrollo actual de la Didáctica de la Estadística, por lo que debe ser considerada un referente ante la sociedad en general y ante las mujeres en particular, a causa de sus logros conseguidos en lo que podría llamarse albores de esta ciencia.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Batanero, C. (2018). Treinta años de investigación en educación estocástica: Reflexiones y desafíos. *Actas del Tercer Congreso Internacional Virtual de Educación Estadística*. <http://hdl.handle.net/10481/55025>
- Batanero, C., Arroyo, R. Á., Solís, L. A. H. y Serrano, M. M. G. (2021). El inicio del razonamiento probabilístico en educación infantil. *PNA*, 15(4), 267-288.
- Batanero, C., Begué, N. y Valenzuela-Ruiz, S. M. (2022). Modelización de la variabilidad muestral en diferentes metodologías de la inferencia. *Revista de Educación Estadística*, 1(1), 1-22.
- Batanero, C. y Borovcnik, M. (2016). *Statistics and probability in high school*. Sense Publishers.
- Batanero, C., Chernoff, E., Engel, J. Lee, H. y Sánchez, E. (2016). *Research on teaching and learning probability*. Springer.
- Chernoff, E. J. y Sriraman, B. (Eds.) (2014). *Probabilistic thinking. Presenting multiple perspectives*. Springer.
- Contreras, F. A. (2012). La evolución de la didáctica de la matemática. *Horizonte de la Ciencia*, 2(2), 20-25.
- Gal, I. (2005). Towards “probability literacy” for all citizens: Building blocks and instructional dilemmas. En G. A. Jones (Ed.). *Exploring probability in school. Challenges for teaching and learning* (pp. 39-63). Kluwer.
- Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2007). The ontosemiotic approach to research in mathematics education. *ZDM Mathematics Education*, 39(1-2), 127-135.
- Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2020). El enfoque ontosemiótico: implicaciones sobre el carácter prescriptivo de la didáctica. *Revista Chilena de Educación Matemática* 12(2), 47-59.
- Godino, J. D., Giacomone, B., Batanero, C. y Font, V. (2017). Enfoque ontosemiótico de los conocimientos y competencias del profesor de matemáticas. *Bolema*, 31(57), 90-113.
- Hernández-Solís, L. A., Batanero, C., Gea, M. M. y Álvarez-Arroyo, R. (2021a). Significados personales del concepto de juego equitativo en niños y niñas costarricenses. *Innovaciones Educativas*, 23(34), 228-243.
- Hernández-Solís, L. A., Batanero, C., Gea, M. M., & Arroyo, R. Á. (2021b). Solving probabilistic tasks in geometrical context by primary school students. *Educação & Realidade*, 46, 1-21.
- Hernández-Solís, L. A., Batanero, C., Gea, M. M. y Álvarez-Arroyo, R. (2021c). Construcción de espacios muestrales asociados a distintos tipos de sucesos: un estudio exploratorio con estudiantes de Educación Primaria. *Educación Matemática* 33(1), 181-207.
- Hernández-Solís, L. A., Batanero, C., Gea, M. M. y Álvarez-Arroyo, R. (2021d). Comparación de probabilidades en urnas: Un estudio con niños chilenos de Educación Primaria. *Uniciencia*, 35(2).

- Hernández- Solís, L. A., Batanero, C., Gea, M. M. y Arroyo, R. Á. (2021e). Resolución de tareas probabilísticas en contexto geométrico por estudiantes de educación primaria. *Educação & Realidade*, 46, 1-21.
- Jones, G. A. y Thornton, C. A. (2005). An overview of research into the teaching and learning of probability. En G. A. Jones (Ed.), *Exploring probability in school: Challenges for teaching and learning* (pp. 65-92). Kluwer Academic Publishers.
- Kapadia, R. y Borovcnik, M. (Eds.) (1991). *Chance encounters*. Kluwer.
- Kline, M. (1976). *El fracaso de la matemática moderna*. Siglo XXI Editores.
- Shaughnessy, J. M., Garfield, J. y Greer, B. (1996). Data handling. En A. J. Bishop, K. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick y C. Laborde (Eds.). *International handbook of mathematics education* (v.1, pp. 205-237). Kluwer.
- Vere-Jones, D. (1995). The coming of age of statistical education. *International Statistical Review*, 63(1), 3-23.
- Wild, C. y Pfannkuch, M. (1999). Statistical thinking in empirical enquiry (with discussion). *International Statistical Review*, 67(3), 223-265.
- Zieffler, A., Garfield J. y Fry E. (2018). What is statistics education? En D. Ben-Zvi, K. Makar y J. Garfield (Eds.), *International handbook of research in statistics education*, (pp. 37-70). Springer.

Análisis de dos tareas sobre azar y probabilidad para enriquecimiento curricular

Mónica Nieves Ermecheo

Universidad de Granada, monicanieves@correo.ugr.es

Nuria Rico Castro

Universidad de Granada, nrico@ugr.es

Resumen: *En este artículo presentamos y analizamos dos actividades seleccionadas de una sesión de enriquecimiento diseñadas para estudiantes con talento matemático. Con ellas, se abordan diferentes conceptos de azar y probabilidad de forma manipulativa. El análisis de las tareas contempla un abanico de estrategias de resolución, abarcando así diversos niveles de abstracción y dificultad. Como resultado de este análisis se tiene un recurso que los docentes podrán utilizar en gran variedad de niveles y tipos de estudiantado, lo cual les permite abordar objetivos con diferente dificultad en la estrategia de resolución.*

Palabras clave: *Alfabetización estadística, altas capacidades, cálculo de probabilidades, sesión de enriquecimiento, talento matemático.*

Analysis of two tasks on randomness and probability for curricular enrichment

Abstract: *In this paper we present and analyze two activities selected from an enrichment session designed for mathematically talented students. With them, different approaches about concepts of chance and probability are taken, in a manipulative way. The analysis of the tasks contemplates a range of resolution strategies, thus covering various levels of abstraction and difficulty. As a result of this analysis, we have a resource that teachers can use at a wide variety of levels and types of students, which will allow them to address objectives with different difficulties in the resolution strategy.*

Key words: *Statistical literacy, high abilities, probability calculus, enrichment session, mathematical talent.*

1. INTRODUCCIÓN

Según Miller (1990), el estudiantado con talento matemático no solo muestra una gran dote para los cálculos aritméticos y obtiene altas calificaciones en matemáticas, sino que muestra una elevada habilidad para comprender ideas y razonamientos matemáticos. Siguiendo a Greenes (1981), podemos esperar que este tipo de estudiantado presente resultados originales a problemas propuestos, los cuales plantea y resuelve con relativa facilidad y rapidez, siendo capaz de utilizar diferentes estrategias y presentando una buena organización de los datos.

Estas cualidades, que prevalecen en estudiantes con talento matemático, se adecúan a las capacidades necesarias para desarrollar destrezas matemáticas. Por ello, según Fernández y Pérez (2011) es fundamental saber, como docentes, cómo poder trabajarlas adecuadamente con este tipo de alumnado, utilizando la metodología adecuada, para así propiciar el desarrollo de sus habilidades metacognitivas.

Como citar: Nieves-Ermecheo, M. y Rico-Castro, N. (2024). Propuesta y análisis de dos tareas sobre azar y probabilidad para enriquecimiento curricular. *Epsilon*, 116, 23-36.

En la Ley Orgánica por la que se modifica la LOE de 2006 (LOMLOE) se declara de forma específica la necesidad de atención a la diversidad (Jefatura del Estado, 2020). En el Real Decreto 217/2022 de 29 de marzo (2022), por el que se establece la ordenación y las enseñanzas mínimas de la Educación Secundaria Obligatoria, se dicta la necesidad de regular la atención a la diversidad, dando una respuesta curricular adecuada a las capacidades de cada estudiante (Ministerio de Educación y Formación Profesional, 2022). Concretamente, el artículo 23 se centra en la atención al estudiantado con altas capacidades intelectuales y, específicamente, menciona que, en caso de que fuera necesario, podría reducirse un curso la duración de la escolarización de estos, para así adaptarse a su desarrollo académico, social y personal.

Sin embargo, atender esta diversidad en el aula común de la enseñanza reglada es una tarea compleja, ya que es necesario tener en cuenta las características individuales de cada estudiante, siendo flexibles y evitando en la medida de lo posible que sientan ningún tipo de exclusión por parte del resto del grupo. De acuerdo con Ramírez (2012), la buena práctica docente puede ayudar al desarrollo de las habilidades del estudiantado con talento. Por ello, es importante una atención adecuada, ofreciendo distintas herramientas y examinando qué método es el más conveniente para cada estudiante con talento. Siguiendo las ideas de Blanco et al. (2004), conocemos que existen diferentes estrategias para estudiantes con talento matemático (aceleración, agrupación, etc). De entre ellas, nos centraremos en el enriquecimiento curricular. Esta estrategia tiene como eje la enseñanza individualizada y consiste en profundizar más en contenidos del currículo o en trabajar temas que no están dentro de él. No se trata de trabajar contenidos de cursos superiores, sino de ampliar, relacionar, profundizar y hacer más complejos los temas, promoviendo el pensamiento y la creatividad.

El enriquecimiento puede realizarse en el día a día del aula, o bien desde programas extraescolares. Un ejemplo de este tipo de programas es el Proyecto Estalmat¹, un proyecto de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, centrado en estudiantes de entre 12 y 14 años, y cuyo objetivo principal es la detección y el estímulo del talento matemático. De una sesión de este programa, denominada «Juegos de probabilidad», y que se celebró en la sede de Andalucía Oriental durante el curso 2022-2023, se han extraído las dos actividades que se analizan y presentan en este trabajo.

La selección de estas tareas, que están relacionadas con la aleatoriedad, el azar y el cálculo de probabilidades, es especialmente relevante dado que, como señalan varios autores (Batanero (2004) y Dono et al. (2022)) es necesario hacer un esfuerzo por la alfabetización estadística en la etapa escolar, para mejorar los conocimientos en estadística y probabilidad, ya que es una herramienta imprescindible para crear una ciudadanía proactiva y crítica.

El pensamiento estadístico, siguiendo a Gal y Gardfiel (1997), Burril y Buehler (2011) y Rossman et al. (2006), presenta notables diferencias del pensamiento matemático. Es por ello que el aprendizaje de la estadística y la probabilidad dentro de la asignatura de matemáticas suele ser deficitario (Rico y Ruiz-Hidalgo (2022)). Así, cuando se enseña la probabilidad desde una perspectiva matemática, se pueden llegar a perder elementos que son esenciales en la estadística, pero que en matemáticas no lo son.

Este marco es el que motiva la selección de las actividades a analizar; un contenido relevante para la sociedad del futuro, un grupo de estudiantes que tienen talento matemático y por ello demandan contenido extracurricular en el que profundizar, y la selección de un contenido que

¹ Página web: <https://thales.cica.es/estalmat>

forma parte de las matemáticas escolares pero que suele ser explicado de forma pobre y confusa (Batanero et al. (2007)).

Disponer de un análisis de las actividades seleccionadas, para que estas puedan servir como herramienta en el enriquecimiento de estudiantes con y sin talento matemático y en diferentes niveles educativos, es el objetivo de este trabajo. Tratamos en él de ofrecer un recurso que puede servir a docentes de diferentes niveles educativos para incorporar al aula todo o parte de lo que se expone. Es nuestra intención que este análisis didáctico, entendido en el sentido que indica Rico (2016), sirva como ayuda a los docentes de estadística y matemáticas que lo estimen oportuno para incorporar este material a su práctica docente, sea cual sea la etapa en la que se encuentren los estudiantes.

2. SESIÓN DE ENRIQUECIMIENTO

La sesión llamada «Juegos de Probabilidad» se enmarca dentro de un programa de 20 sesiones de enriquecimiento, en el programa Estalmat Andalucía Oriental 22/23. Estas sesiones se llevan a cabo fuera de horario escolar, generalmente durante la mañana del sábado, con una duración de 3 horas cada una de ellas. Los contenidos que se abordan cubren un amplio abanico de temas matemáticos. Durante la sesión de «Juegos de Probabilidad», concretamente, se dispone de una batería de problemas, en total 23, de temática y dificultad diferente donde son habituales las tareas en las que el objetivo es calcular la probabilidad de ocurrencia de un suceso, planteando la pregunta como una toma de decisiones: «¿cómo sería mejor apostar?», «¿qué camino es mejor tomar?».

Los objetivos generales de la sesión se pueden resumir en cuatro: el primero de ellos es que el grupo observe diferentes casos en los que la primera intuición acerca de la solución puede ser fácilmente equivocada; el segundo objetivo es observar la experimentación como una aproximación al modelo probabilístico, no como una réplica fiel del mismo; el tercer objetivo es conseguir la abstracción de diferentes modelos para la resolución de problemas de probabilidad a través de diferentes representaciones; y el cuarto objetivo es conseguir un ambiente de trabajo en equipo respetuoso donde se gestione la frustración ante el error de forma positiva, trabajando el sentido socioafectivo con el fomento de la resiliencia.

De entre todas las tareas propuestas, hemos seleccionado dos de ellas, que representan el espíritu del conjunto al completo, dado que tienen las siguientes características: a) se puede experimentar con material manipulativo para comprobar las conjeturas, b) la intuición inicial sobre la solución es habitualmente incorrecta y c) la solución puede alcanzarse y describirse de diferentes formas y con distinto nivel de complejidad.

Contamos con que el alumnado está familiarizado con conceptos como suceso, espacio muestral, variable, unión, intersección y diagrama de árbol, entre otras. Asimismo, entendemos que hay un trabajo previo en el desarrollo de sus clases habituales, con la incertidumbre y los experimentos simples y compuestos. También damos por hecho que el alumnado está familiarizado con el cálculo de probabilidades utilizando la regla de Laplace y técnicas de recuento basadas en la elaboración de diagramas o tablas.

3. TAREA 1: LAS TRES TARJETAS

3.1. Enunciado

Se tienen tres tarjetas coloreadas: una con ambas caras verdes, otra con ambas caras rojas y una tercera con una cara verde y otra roja. Una persona, que toma el rol de presentadora, saca una de las tarjetas al azar y muestra al público una de las caras. Quien muestra la tarjeta ve una de las caras, y el público ve la otra cara. El público debe apostar por uno de los colores y acertar qué está viendo la persona que tiene la tarjeta. ¿Existe alguna estrategia ventajosa en este juego? ¿Es igual apostar viendo la tarjeta que sin verla?

3.2. Meta

En la resolución de esta tarea lo más habitual es considerar, en un principio, diferentes soluciones que no son correctas. Lo más frecuente es pensar que no hay una estrategia para que aumente la probabilidad de ganar el juego, es decir, lo normal es apostar al azar, o siempre al mismo color. Utilizar una estrategia donde el color observado forma parte de la decisión en la apuesta se consigue después de realizar el juego, observar lo ocurrido y, sobre todo, al abstraer los sucesos involucrados en el juego. Por tanto, las metas de esta tarea serán: a) modelizar correctamente la solución después de la experimentación, rectificando si es necesario la opinión inicial, b) formalizar los resultados lo máximo posible para conseguir explicar y entender cuál es la solución correcta y c) comprobar que la primera intuición nos puede llevar a estrategias que no son óptimas.

El tiempo estimado para la ejecución completa de la tarea es de entre 20 y 30 minutos (2-3 minutos de presentación, 6-9 de elaboración de conjeturas, 4-6 de experimentación, 6-9 de formalización y 4-6 de discusión final).

3.3. Solución

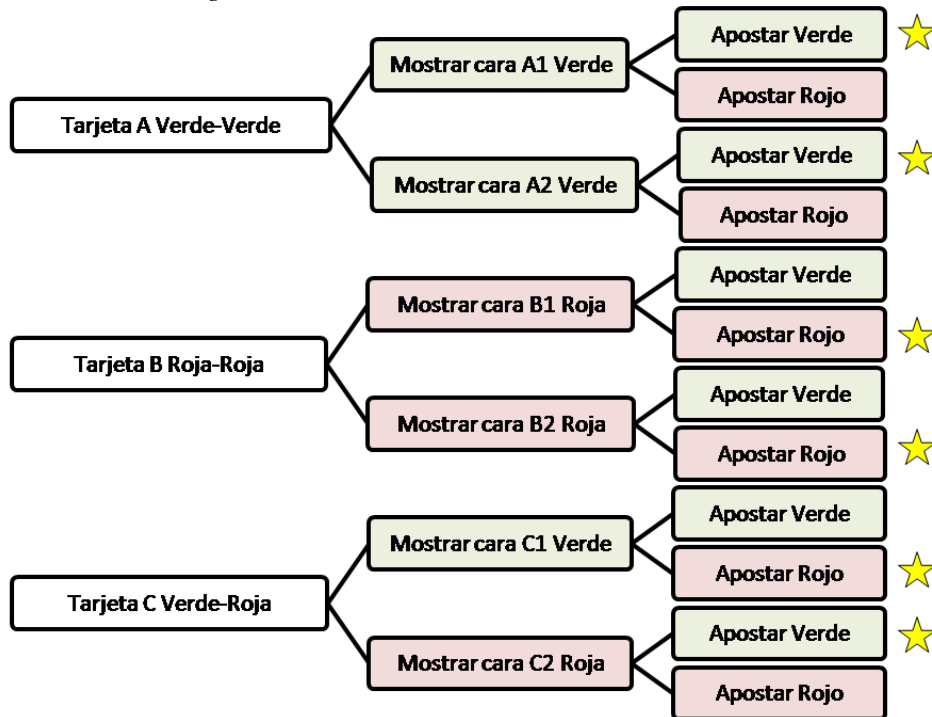
La clave en la resolución de este problema reside en no considerar los colores de forma independiente en cada cara (6 caras, 3 colores) sino observar tarjetas completas, con igual color en ambas caras (dos tarjetas) o con diferente color (1 tarjeta). Llegar a este punto no es inmediato, ya que habitualmente se tiende a considerar caras independientes, con el siguiente razonamiento: la mitad de las caras son de cada color, así que la probabilidad de que lo que ve la persona que sostiene la tarjeta sea un color u otro es la misma, es decir, 0.5. Esto, además, es cierto, si no se tiene más información. Si consideramos que cada una de las caras que se observan desde el público pueden tener detrás un color que es igual o diferente del mostrado, es cuando surge la modelización y a partir de aquí es fácil optimizar la probabilidad de acierto.

Sin embargo, aunque una vez conocida la solución nos parezca evidente, es un problema con el que se suele tener dificultad al principio, precisamente por la consideración de unos sucesos elementales que no son correctos.

Para llegar a una correcta modelización, un método posible e intuitivo es el uso de un diagrama de árbol que facilite el conteo de los casos posibles. Se muestra un ejemplo en la Figura 1.

Figura 1

Diagrama de árbol. Estrategia de conteo de la tarea 1.



En el diagrama de árbol se pueden observar, conjuntamente, todos los «camino» distintos. Se aprecia que, de las veces en las que se ha acertado el color, en 4 de 6 ocasiones el color coincide en ambas caras. Así, concluiremos que

$$P(\text{Acertar diciendo el mismo color}) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

$$P(\text{Acertar diciendo el color contrario}) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

Por lo tanto, es más probable ganar eligiendo el mismo color que se muestra al público.

Si no se considera la información de la que se dispone (color observado), la probabilidad de acertar será

$$P(\text{Acertar apostando al azar o a un color preferido}) = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$$

3.4. Estrategias de resolución alternativas

Dependiendo del nivel de abstracción que alcance el grupo de estudiantes, se pueden usar diferentes estrategias para resolver la tarea, entre las cuales destacamos el acercamiento mediante experimentación, el conteo con una tabla de doble entrada, la abstracción formal y la simulación mediante ordenador.

3.4.1 Acercamiento a la solución mediante experimentación

Este juego se puede llevar a cabo de forma sencilla, con unas tarjetas que son fáciles de fabricar. La experimentación resulta ser útil en la búsqueda de una generalización y, en este caso, conviene hacerlo repetidas veces para dar oportunidad al grupo de estudiantes para concluir que es mejor

apostar por el mismo color. Es importante repetir el proceso un número suficiente de veces, para no crear intuiciones equivocadas si ocurriera una racha improbable. En la Figura 2 se muestra un ejemplo de tarjetas, útiles para la experimentación de la tarea.

Figura 2

Tarjetas usadas para la experimentación de la tarea 1.



3.4.2 Resolución con conteo en tabla de doble entrada

Se puede utilizar como herramienta la elaboración de una tabla a la hora de hacer el conteo de casos. Por ejemplo, la mostrada en la Tabla 1. En esta tabla, además, los sucesos no se refieren a las «caras de la tarjeta» sino a «la tarjeta» en sí, simplificando el número de casos de 12 a 6.

En la tabla se observa que existen seis sucesos distintos y que, al decir el mismo color que se muestra, la probabilidad de ganar es $2/3$.

Tabla 1

Tabla de doble entrada. Estrategia de conteo de la tarea 1.

Color real	Color por el que se apuesta	
	Mismo color	Color contrario
Verde/Verde	Acierto	Fallo
Rojo/Rojo	Acierto	Fallo
Verde/Rojo	Fallo	Acierto

3.4.3. Cálculo formal de las probabilidades

Se puede, en un nivel de abstracción mayor, usar la probabilidad condicionada, aunque sea necesario un mayor conocimiento matemático. (No se prevé, en general, que estudiantes de segundo curso de Educación Secundaria Obligatoria utilicen esta estrategia para resolver el problema, ya que es compleja y requiere el conocimiento de herramientas que se encuentran fuera del currículo de primer curso, pero al tratarse de estudiantes en un programa de enriquecimiento, podría ocurrir que se diera el caso en alguna ocasión). Se definen los sucesos:

M: La tarjeta elegida tiene dos caras del mismo color

D: La tarjeta elegida tiene las caras de distinto color

A: El concursante acierta el color

V: El concursante apuesta el mismo color que ve

La probabilidad que queremos calcular es $P(A|V)$ y compararla con $P(A|\bar{V})$. Se puede utilizar la fórmula de la probabilidad total

$$P(A) = P(A|M)P(M) + P(A|D)P(D)$$

donde $P(M) = \frac{2}{3}$ y $P(D) = \frac{1}{3}$ por existir dos tarjetas con igual color en ambas caras y una tarjeta con colores diferentes en sus caras. Además, se puede obtener de aquí, que

$$P(A|V) = P(A|M \cap V)P(M) + P(A|D \cap V)P(D),$$

$$P(A|\bar{V}) = P(A|M \cap \bar{V})P(M) + P(A|D \cap \bar{V})P(D).$$

Por un lado, si el concursante dice el mismo color (suceso V) tenemos

$$P(A|M \cap V) = 1 \text{ y } P(A|D \cap V) = 0,$$

y, entonces

$$P(A|V) = 1 \times \frac{2}{3} + 0 \times \frac{1}{3} = \frac{2}{3}.$$

Por otro lado, si el concursante dice el color contrario al que observa, es decir, supuesto el suceso \bar{V} , obtenemos

$$P(A|M \cap \bar{V}) = 0 \text{ y } P(A|D \cap \bar{V}) = 1,$$

y, entonces

$$P(A|\bar{V}) = 0 \times \frac{2}{3} + 1 \times \frac{1}{3} = \frac{1}{3}.$$

Concluimos, pues, que es más probable ganar diciendo el color que se muestra.

3.4.4. Simulación en ordenador

Se puede utilizar un programa informático sencillo para hacer una simulación y observar qué ocurre al elegir uno u otro color, ampliando la cantidad de experimentos a un número tan grande de veces como queramos. Un ejemplo de implementación en R se ofrece en la Figura 3.

Figura 3

Simulación en ordenador. Estrategia de conteo de la tarea 1.

```
# Definir las cartas
cartas <- c("Verde/Verde", "Rojo/Rojo", "Verde/Rojo")

# Función para simular el juego
simular_juego <- function() {
  # Seleccionar una carta al azar
  carta_seleccionada <- sample(cartas, 1)

  # Seleccionar una cara al azar
  cara_visible <- sample(c("Cara1", "Cara2"), 1)

  # Obtener el color de la cara visible
  color_cara_visible <- ifelse(cara_visible == "Cara1",
                              strsplit(carta_seleccionada, "/")[1][1],
                              strsplit(carta_seleccionada, "/")[1][2])

  # Obtener el color de la cara no visible
  color_cara_no_visible <- ifelse(cara_visible == "Cara1",
                                  strsplit(carta_seleccionada, "/")[1][2],
                                  strsplit(carta_seleccionada, "/")[1][1])

  # La apuesta es al color que se observa
  apuesta <- color_cara_visible

  # Devolver la apuesta y el color de la cara no visible
  return(list(apuesta, color_cara_no_visible))
}

# Configurar el número de simulaciones
num_simulaciones <- 10000

# Realizar las simulaciones y contar los aciertos
aciertos <- 0
for (i in 1:num_simulaciones) {
  apuestas <- simular_juego( if (apuestas[[1]] == apuestas[[2]]) {
    aciertos <- aciertos + 1
  }
)
}

# Calcular la proporción de aciertos
proporcion_aciertos <- aciertos / num_simulaciones

# Imprimir resultado
cat("Proporción de aciertos al apostar por el color de la cara visible:",
    proporcion_aciertos, "\n")
```

3.5. Implementación y expectativas

Este problema está ideado para proponerlo verbalmente y recoger una primera impresión de cuál será la estrategia adecuada. A continuación, se realiza el juego utilizando unas tarjetas hechas con material básico (papel, cartulina, forro adhesivo...) un número de veces que permita observar algún patrón. Para esto, se recomienda hacer al menos 15 intentos de adivinar el color.

Se espera que, antes de simular el juego, se argumenten diferentes estrategias para ganar, con poca convicción al principio, con ideas cambiantes, utilizando ensayos mentales de qué ocurriría al decir uno u otro color. Se prevé que la mayoría opte por estrategias de elección que no llevan a una solución correcta en una primera aproximación.

Tras la puesta en práctica, una parte del grupo de estudiantes llegará a la conclusión correcta antes que el resto, aunque pueden presentar aún dificultades para explicar a sus iguales el motivo de que la estrategia elegida sea beneficiosa. En este momento, se podrá guiar al grupo en la

resolución, utilizando alguna de las estrategias propuestas, o teniendo en consideración alguna estrategia que se haya propuesto por su parte.

En caso de que en el grupo de estudiantes nadie llegue a una solución, pueden ser útiles las siguientes preguntas para la reflexión: ¿apostarías al mismo color antes y después de conocer el color que se muestra al público?; si hubiera 500 tarjetas verde/verde y 500 tarjetas rojo/rojo, pero solo una verde/rojo, ¿qué esperarías que ocurriera en el experimento?, ¿cuál sería tu apuesta?; ¿apostar al mismo color que se ve tiene alguna ventaja?

Se trata de una tarea que parece más sencilla de lo que luego resulta ser, ya que la solución es poco intuitiva y lleva algún tiempo llegar a la solución correcta. A una parte del grupo puede que no le sirva la simple experimentación y demande calcular la probabilidad teórica con una de las estrategias mencionadas.

4. TAREA 2: MÁQUINA DE GALTON

4.1. Enunciado

Se dispone de una Máquina de Galton en la cual se lanzan una serie de piezas esféricas desde la parte superior. Van topando contra obstáculos a cada paso, de forma que toman el camino de la derecha con probabilidad 0.5 y el de la izquierda con probabilidad 0.5. Después de 8 obstáculos, ¿dónde es más probable que caigan las bolas al final del recorrido? Al lanzar una gran cantidad de bolas, ¿cómo quedarán distribuidas en la parte inferior?

4.2. Meta

La finalidad de esta tarea es observar cómo es la función de probabilidad binomial y cómo esta tiene una forma que tiende a parecerse a la campana de Gauss. El motivo es que, normalmente, tras leer el enunciado o atender a la explicación de la actividad, hay pocas personas (puede que ninguna) del grupo que intuyen correctamente la forma final en que van a caer las esferas. Hay quien pensará que todos los huecos del final del recorrido tienen la misma probabilidad para que una bola caiga en ellos. Creerán esto ya que, como dice el enunciado, todos los caminos tienen la misma probabilidad. Claramente, esta primera intuición es errónea. Aunque sea verdad que todos los caminos tienen la misma probabilidad, existen más rutas que llegan a los huecos del medio que a los del final del recorrido. De esta forma, la probabilidad de que la bola caiga en una casilla central es superior.

Por otra parte, observar la ocurrencia normal de sucesos muy poco probables también puede ser una meta, siempre que se realice la actividad un número de veces suficiente para que ocurra alguno de estos sucesos (recorrido extremo donde una esfera se coloca en un extremo porque siempre tomó el camino hacia esa dirección).

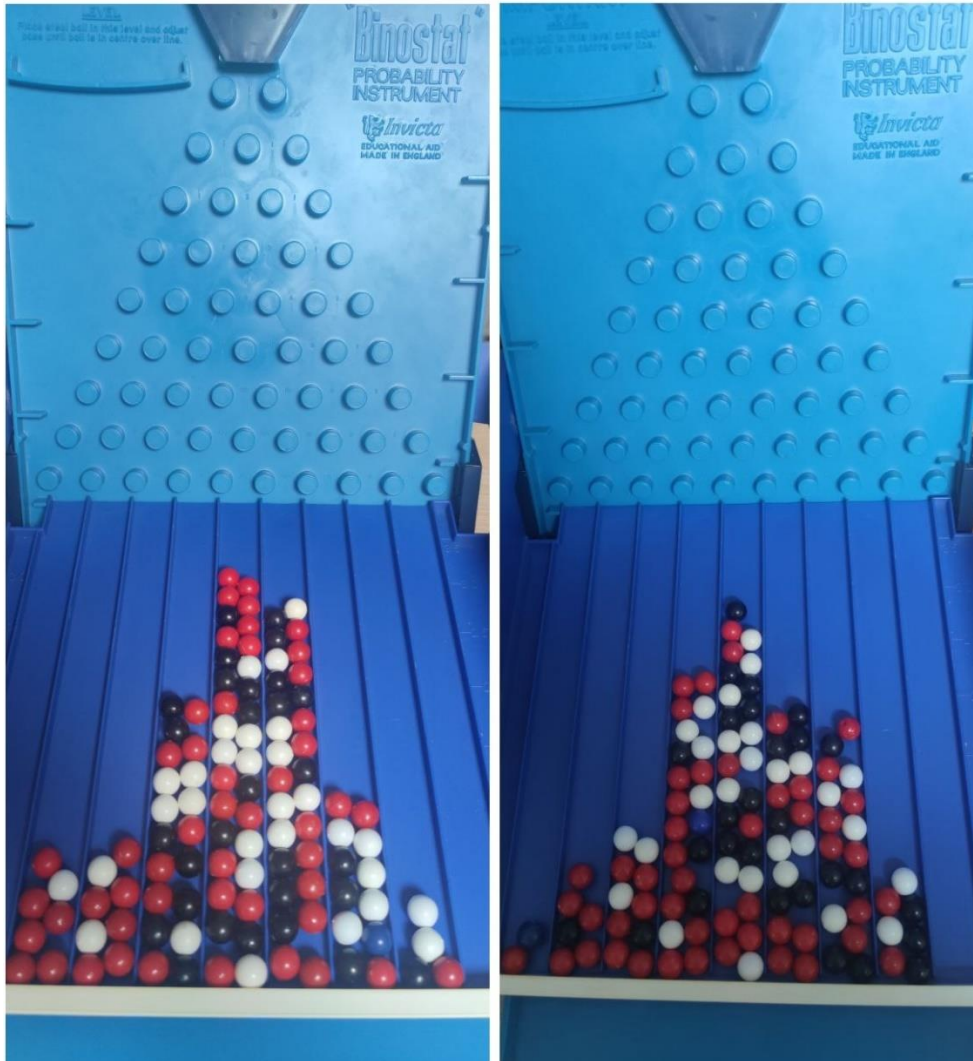
4.3. Solución

Una de las estrategias más eficientes para entender la tarea es el uso de la experimentación. En este caso, al usar la máquina de Galton y dejar caer una cantidad notable de bolas, se observará que las bolas tienden a acabar en las cajas del medio. Así, al finalizar, obtendremos una suerte de gráfico simétrico, con la mayoría de bolas apiladas en el centro. De esta manera, podremos

abstraer y generalizar lo observado en la experimentación. Se aprecia un ejemplo de la experimentación con el uso de la máquina de Galton en la Figura 4.

Figura 4

Experimentación con la máquina de Galton. Estrategia para resolver la tarea 2.



4.4. Estrategias alternativas

Aunque la justificación de por qué las bolas tienden a acabar en las casillas del medio es la misma, hay diferentes maneras de llegar a esta conclusión.

4.4.1 Cálculo de probabilidades intuitivas

Una de las estrategias más básicas para contestar a las preguntas de la tarea puede ser calcular cuál es la probabilidad de que la pieza esférica avance por un camino concreto y, después, observar que hay más caminos que llevan a la bola a las casillas centrales. Así, se podrá observar qué casillas son las más probables. Como menciona el enunciado, la probabilidad de elegir un

camino u otro en cada obstáculo es la misma ($p=0.5$). Por ello, como existen 8 obstáculos en cada camino, la probabilidad de que se siga una ruta en concreto es:

$$P(\text{seguir el camino } A) = \left(\frac{1}{2}\right)^8$$

Queda claro que la probabilidad de seguir un camino concreto es la misma siempre, pero hay más caminos que llegan a las posiciones del medio que a las de las esquinas. Por este motivo, es más probable que las bolas caigan en las cajas centrales. Así, al lanzar una gran cantidad de bolas, la fila central tendrá una cantidad superior de canicas, la cual irá disminuyendo cuanto más cerca se esté de las casillas de las esquinas.

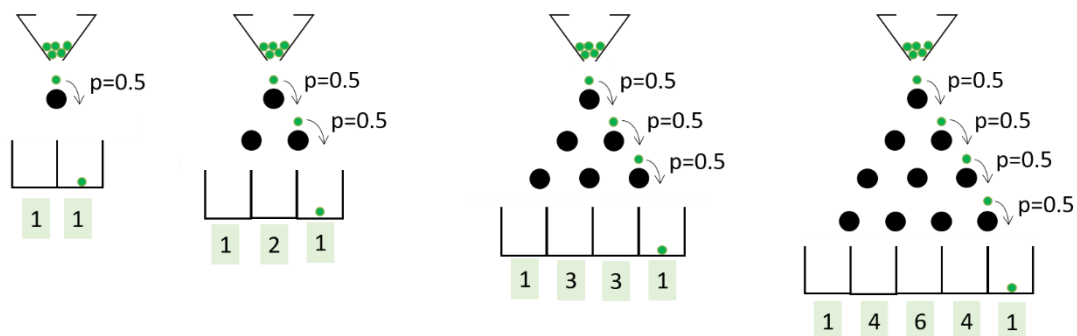
4.4.2 Uso de esquemas y croquis

El uso de un dibujo puede ayudarnos a entender la solución de la tarea. Es más fácil y sencillo crear un dibujo de una máquina más pequeña que la real, para así poder entender qué ocurre de forma más rápida y después generalizarlo. En la Figura 5 se muestra un ejemplo de una máquina de Galton con menos obstáculos que la máquina de la tarea.

Con ayuda del dibujo, se puede calcular cuál es la probabilidad de que la bola siga un camino u otro (en el caso del dibujo, $P(\text{seguir el camino } A) = 0.5 \times 0.5 \times 0.5 \times 0.5$). Además, se observa que hay más caminos que llevan a las casillas centrales. En este caso concreto, empezamos observando lo que ocurre cuando solo hay un obstáculo y existen dos caminos posibles, cada uno con una probabilidad de ser elegido de 0.5. Después, analizamos el caso con dos obstáculos y cuatro caminos diferentes. Aquí, en dos de las opciones la canica cae en la casilla central, mientras que en cada una de las casillas de los extremos solo ocurre una vez. En el tercer paso, contamos con tres obstáculos y, por lo tanto, con ocho rutas distintas. De esta manera, la bola tiene tres caminos para llegar a cada una de las casillas centrales, pero solamente con uno para cada caja de los extremos. Por último, analizamos el caso con cuatro obstáculos y 16 caminos. En esta ocasión, hay seis rutas que llegan a la casilla del medio, mientras que solo uno llega a la caja del extremo. Una vez entendido esto, podemos generalizar lo observado, considerando que las bolas tienen más probabilidad de caer en las casillas del medio. Además, se aprecia que los valores que indican el número de caminos que llegan a cada casilla en cada paso coinciden con los del triángulo de Pascal.

Figura 5

Esquema de funcionamiento de la máquina de Galton. Estrategia de comprensión del funcionamiento de la tarea 2.



Con esta estrategia, podemos observar que al tener 8 obstáculos (9 casillas), la cantidad de caminos que llevan a cada casilla es 1, 8, 28, 56, 70, 56, 28, 8 y 1 respectivamente. De aquí, obtendremos que la cantidad de caminos total es $2^8=1+8+28+56+70+56+28+1=256$ y por tanto conocemos el número de casos favorables a cada casilla así como el número de casos totales y podremos aplicar la regla de Laplace.

4.4.3 Definición de la función masa de probabilidad binomial

Por último, existe una estrategia más compleja y abstracta, que consiste en resolver el problema con el uso de la distribución de la probabilidad de una variable aleatoria binomial. Supongamos que:

$X = n^{\circ}$ de casilla (empezando en 0) en que cae la bola

Sabemos que X sigue una distribución de probabilidad binomial, es decir, $X \sim B(9, 0.5)$. Por lo tanto,

$$P(X = k) = \binom{9}{k} p^k (1 - p)^{9-k}, \text{ para } k = 0, 1, \dots, 9.$$

que es una distribución simétrica con máximo en $n \times p$, es decir, el valor central (o entre los dos centrales). Por ello, se concluye que hay más probabilidad de que las bolas acaben en las casillas centrales.

Es una estrategia muy compleja para el alumnado de esta edad. Por lo tanto, no se espera que haya nadie en el aula que use esta táctica para resolver el problema, salvo en casos excepcionales.

4.4.4 Simulación en ordenador

Existen diferentes recursos online para la simulación del funcionamiento de la máquina a las que se llega fácilmente con una búsqueda en la web². Además de estas simulaciones, se puede utilizar el software R para representar la función masa de probabilidad de una distribución binomial sin más que hacer uso de las funciones **dbinom** para el cálculo de las probabilidades y **barplot** para la representación gráfica.

4.5. Implementación y expectativas

Al realizar esta tarea en el aula, se procura dejar un espacio de tiempo para elucubrar diferentes soluciones antes de pasar a la experimentación. Se espera que el alumnado debata la respuesta en voz alta, llegando a una solución intuitivamente correcta en poco tiempo. Tras la propuesta, más o menos formal, de la solución, se pasa a la experimentación con una máquina de Galton. De esta forma, se comprueba empíricamente cómo ocurren los sucesos y en qué grado la idea intuitiva original era correcta.

En caso de no disponer de una máquina, se puede realizar el experimento con una máquina dibujada y una lanzando una moneda para decidir, en cada obstáculo, si se toma el camino derecho o izquierdo. Para ello basta con asignar «cara» y «cruz» a los valores «derecha» e «izquierda» y, tras lanzar la moneda, ir dibujando dónde caería cada una de las esferas de la máquina.

² Véanse, a modo de ejemplo, las simulaciones en <https://matematicamente.es/?action=games&players=one&game=Galton> o en http://docentes.educacion.navarra.es/msadaall/geogebra/figuras/azar_galton.htm

El tiempo estimado para la ejecución completa de la tarea es de entre 14 y 28 minutos (2-4 minutos de presentación, 2-4 de elaboración de conjeturas, 4-8 de experimentación, 1-2 de formalización y 1-2 de discusión final).

5. CONCLUSIONES

Entendemos que la selección de tareas es una cuestión de crucial relevancia a la hora de abordar los contenidos matemáticos en el aula y que un análisis en profundidad de las mismas es fundamental para establecer los objetivos de las sesiones y tener diferentes herramientas y alternativas de resolución. Con este tipo de análisis, además, nos preparamos como docentes para amoldarnos al nivel, la etapa educativa y el tipo de estudiantado que se encuentra en el aula.

En este trabajo, abordamos el análisis en profundidad de dos tareas que se proponen dentro de una selección ya realizada para una sesión de enriquecimiento extracurricular dentro del programa Estalmat. Con este análisis, los docentes pueden profundizar en el conocimiento de las estrategias de resolución posibles, de forma que pueden proponer la tarea en diferentes niveles educativos con diferentes objetivos cada vez.

Una vez realizado el análisis, podemos concluir:

- a) Se trata de dos tareas que pueden ser utilizadas en diferentes niveles educativos.
- b) Las diferentes estrategias de resolución y abstracción nos permiten trabajar a diferentes niveles dentro de una misma aula.
- c) Son actividades que desafían al estudiantado, en el sentido de que no tienen una solución intuitiva que se corresponda con la solución final.
- d) Dado que se trata de actividades en las que coligen multitud de estrategias de resolución, es conveniente que estas sean conocidas por la figura docente con antelación a la implementación en el aula.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Batanero, C. (2004). Los retos de la cultura estadística. *Yupana. Revista de Educación Matemática de la UNL*, 1, 27-36.
- Batanero, C., Ortiz J. J. y Serrano L. (2007). Investigación en didáctica de la probabilidad. *Uno: Revista de didáctica de las matemáticas*, (44), 7-16.
- Blanco, R., Ríos, C. G. y Benavides, M. (2004). Respuesta educativa para los niños con talento. En M. Benavides, A. Maz, E. Castro y R. Blanco (Eds.), *La educación de niños con talento en Iberoamérica* (pp. 49-60). Trineo
- Burril, G. y Biehler, R. (2011). Fundamental statistical ideas in the school curriculum and in training teachers. En C. Batanero, G. Burrill y C. Reading (Eds.), *Teaching Statistics in School Mathematics- Challenges for Teaching and Teacher Education. New ICMI Study Series* (pp. 57-70). Springer.
- Dono, B., Delalić, A., Arnaut-Berilo, A. y Orlić, M. (2022). Statistical Literacy as a Key Competency for Industry 4.0. En I. Karabegović, A. Kovačević y S. Mandžuka (Eds.), *Proceedings of the New Technologies, Development and Application V* (pp. 1051-1059). Springer International Publishing.
- Fernández, M. E. y Pérez, A. (2011). Las altas capacidades y el desarrollo del talento matemático. El Proyecto Estalmat-Andalucía. *UNIÓN. Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 27, 89-113.

- Gal, I. y Garfield, J. B. (1997). Curricular goals and assessment challenges in statistics education. En I. Gal y J. B. Garfield (Eds.), *The Assessment Challenges in Statistics Education* (pp.1-13). IOS Press.
- Greenes, C. (1981). Identifying the Gifted Student in Mathematics. *The Arithmetic Teacher*, 28(6), 14-17.
- Jefatura del Estado (2020). Ley Orgánica 3/2020, de 29 de diciembre, por la que se modifica la Ley Orgánica 2/2006, de 3 de mayo, de Educación. *Boletín Oficial del Estado*, núm 340, 122868.
- Miller, R. C. (1990). Discovering Mathematical Talent. ERIC Digest# E482.
- Ministerio de Educación y Formación Profesional (MEFP) (2022). Real Decreto 217/2022, de 29 de marzo, por el que se establece la ordenación y las enseñanzas mínimas de la Educación Secundaria Obligatoria, *Boletín Oficial del Estado*, núm 76.
- Ramírez Uclés, R. (2012). *Habilidades de visualización de los alumnos con talento matemático*. Universidad de Granada.
- Rico, L. (2016). Matemáticas y análisis didáctico. En L. Rico y A. Moreno (Coords.), *Elementos de didáctica de la matemática para el profesor de Secundaria* (pp. 85-100). Pirámide.
- Rico, N. y Ruiz-Hidalgo, J. F. (2022). Errors concerning Statistical and Probability in Spanish Secondary School Textbooks. *Applied Sciences*, 12(24), 12719.
- Rossman, A., Chanceand, B. y Medina, E. (2006). Some important comparisons between Statistics and Mathematics, and why teachers should care. En G. Burril y P. Elliot (Eds.), *Thinking and reasoning with Data and Chance* (pp. 323-333). National Council of Teachers of Mathematics.

Análisis sobre la detección de errores en la representación gráfica de datos en los medios de comunicación

María del Carmen Galán Mata

IES Alhaken II, Córdoba, Córdoba, España, cgalanmata@gmail.com

Jaime G. Cimas

IES El Sauce, La Carlota, Córdoba, España, jgcimas@gmail.com

Resumen: *Es mucha la información que se refleja constantemente en los medios de comunicación que se vale de las matemáticas para legitimar su discurso, pero ¿es del todo veraz? ¿Refleja realmente lo que se dice o lo que se quiere representar? Considerando la escasez de investigaciones que analizan esta situación, este estudio examina las percepciones de 219 personas acerca de la corrección de gráficas aparecidas en medios de comunicación. Tras seguir un análisis estadístico de carácter cuantitativo, los resultados muestran que existe una correlación entre el último nivel de estudios en el que se cursó la asignatura de matemáticas y la detección de errores en las gráficas planteadas.*

Palabras clave: *detección de errores, gráficas, medios de comunicación.*

Analysis of the detection of errors in the graphical data representation in the media

Abstract: *There is a lot of information constantly shown in the media that use mathematics to legitimize their discourse, but is this information accurate? Does it really reflect what is said or what is intended to be represented? Considering the lack of research examining this situation, this study examines the perceptions of 219 people regarding the correctness of graphs shown in the media. After a statistical quantitative analysis of the gathered data, the findings show that there is a correlation between the last educational level in which respondents studied mathematics and the total number of right answers when detecting errors in the graphs presented.*

Key words: *detection of errors, graphs, media.*

1. INTRODUCCIÓN

Como señala González-Ogando (2023) “los medios de comunicación son una realidad social que no debemos menospreciar en el aula” (p. 44). Como profesores de matemáticas, nos valemos de informaciones obtenidas de diversos medios de comunicación para analizar en clase con nuestro alumnado. Uno de los objetivos que nos marcamos, contemplado en el RD 217/2022, de 29 de marzo, por el que se establece la ordenación y las enseñanzas mínimas de la Educación Secundaria Obligatoria, es desarrollar destrezas básicas en la utilización de las fuentes de información para, con sentido crítico, adquirir nuevos conocimientos (MEFP, 2022). Las informaciones que analizamos en el aula pueden o no contener errores de índole matemática, y enseñamos a nuestro alumnado a detectar estos posibles errores y analizar la

información. Es una actividad que suele resultar interesante, y desde que la llevamos a cabo, nuestro alumnado nos aporta más material que ha visto o leído. En este sentido, nos preguntamos si, fuera del aula, la población en general es capaz de discernir una información veraz de otra que no lo es, si estos pequeños errores matemáticos son perceptibles.

En bastantes ocasiones, en nuestra vida cotidiana, ante una información matemática tendenciosa hemos llamado la atención sobre el error, y nuestros interlocutores, excusándose en que no se les dan bien las matemáticas, le han restado importancia, y es que, como escribe Paulos (1990), “a menudo se presume del analfabetismo matemático, contrariamente a lo que se hace con otros defectos” (p. 2).

Los sesgos más importantes que pueden aparecer en los gráficos son escalas no proporcionales a la frecuencia o porcentaje, eliminación de ejes, ejes truncados, comparación de distintas variables, errores de edición, uso tendencioso de la información y diagramas de barras de muestras no representativas (Contreras et al., 2017). Asimismo, los errores pueden ser “erratas tipográficas, también habituales pero más entendibles, sino a carencias más profundas y preocupantes, de tipo conceptual o incluso debido a la tendenciosidad y la parcialidad, publicadas con intención de engañar” (González-Ogando, 2023, p. 44).

En nuestro estudio, el sesgo que más aparece en las gráficas es el que con más frecuencia vemos en los medios: la falta de proporcionalidad, bien de los ejes, bien de las barras o bien en los sectores. También utilizamos gráficos donde la leyenda no se corresponde con lo representado, dando una falsa imagen.

Tomamos como punto de partida un estudio llevado a cabo por Arteaga et al. (2016). En él, se analizan los gráficos producidos por 207 futuros docentes de Educación Primaria en una tarea abierta en la que tenían que comparar tres pares de distribuciones. A pesar de que en las instrucciones no se pedía expresamente la elaboración de gráficos, la amplia mayoría (cerca al 90%) los utilizó, lo cual pone de manifiesto la necesidad de su uso para resumir información de forma visual. En este estudio, cerca de un 20% de los gráficos realizados por el futuro profesorado presentaba errores en escalas (escalas no proporcionales, representación errónea de números en la recta, etc.) y en torno a un 10% representaba variables no relacionadas en un mismo gráfico. Sumados los gráficos incorrectos y los parcialmente incorrectos, más de la mitad de los futuros profesores encuestados realizaba gráficos con algún tipo de error. El estudio concluye con el pobre conocimiento de los gráficos estadísticos elementales incluidos en las orientaciones curriculares para la Educación Primaria.

Otro estudio que nos ha resultado interesante es el realizado por Inzunza-Cazares (2015). En él, se estudia la comprensión de gráficos en estudiantes universitarios, mostrándoles gráficas de publicaciones oficiales con datos de los contextos a los que hace referencia el título. Los resultados obtenidos revelan que las gráficas son un tema complejo en tanto que constituyen un modelo o representación que expresa información a través de recursos semióticos (símbolos, líneas, figuras, colores y números) y que, para extraer de ellos la información reflejada, se precisa una enseñanza cuidadosa y bien planeada por parte de los docentes. Finaliza con una reflexión acerca de la necesidad de un cambio de enfoque en la enseñanza de gráficas, incidiendo en el desarrollo de habilidades interpretativas y relación con el contexto.

Destacamos también el trabajo de Díaz-Levicoy et al. (2017), que como conclusión hace una interesante reflexión: si el profesorado tiene dificultad con los gráficos estadísticos, como concluye, fácilmente transmitirá esos errores a su alumnado. Asimismo, existen libros de texto con frecuentes errores en esta materia, y si el profesorado no es consciente de ellos, es altamente probable que los transmita también a los estudiantes.

2. OBJETIVOS

Este estudio examina las percepciones de 219 personas acerca de la corrección de gráficas aparecidas en medios de comunicación, algunas gráficas tendenciosas y otras correctas.

Son varias las hipótesis que nos planteamos a la hora de realizar este estudio. Basándonos en los estudios previos (Arteaga et al., 2016; Díaz-Levicoy et al., 2017; Inzunsa-Cazares, 2015), se puede afirmar que el profesorado y estudiantado presenta dificultades en la elaboración e interpretación de informaciones presentadas en forma de gráficas estadísticas, pero ¿y el resto de la población?

Como objetivo principal consideramos el siguiente: “comprobar si el nivel de estudios matemáticos influye en la percepción de informaciones reflejadas en gráficos aparecidos en medios de comunicación”.

Para ello, se plantea a los participantes un cuestionario en el que se especifica el último nivel educativo en el que han cursado alguna materia relacionada con las matemáticas, así como una serie de cuestiones relacionadas con la veracidad o falsedad de los datos que se representan.

Además, en los estudios mencionados previos (Arteaga et al., 2016; Díaz-Levicoy et al., 2017; Inzunsa-Cazares, 2015), no se tuvieron en cuenta la edad, ya que no tenía sentido al realizarse el estudio sobre grupos de la población homogéneos y muy delimitados sobre el sector (estudiantes de un curso determinado o profesores) ni el género, por lo que nos planteamos como objetivo secundario el siguiente: “determinar si existen diferencias significativas en la percepción de errores en representaciones gráficas en función del género o de la edad”.

3. METODOLOGÍA

3.1. Participantes

Para la selección de los participantes se siguió un muestreo no probabilístico por conveniencia, utilizando como criterio fundamental la proximidad de los participantes con los investigadores, de forma que el cuestionario se difundió entre nuestros contactos, nuestras redes sociales y grupos sociales de intereses matemáticos, pidiendo su colaboración en la redifusión. De esta forma, el número total de participantes en el estudio fue de 219. En relación con el género de los sujetos de estudio, el 36,99% (n = 81) eran hombres, el 61,64% (n = 135) mujeres y el 1,37% restante (n = 3) prefirió no aportar este dato. En relación con la edad de los integrantes del estudio, el 43,38% (n = 95) estaba entre los 15 y los 34 años, el 45,2% (n = 99), entre 35 y 54 y el 11,42% restante (n = 25), entre los 55 y los 74. Finalmente, y en cuanto a los últimos estudios en los que han cursado la asignatura de matemáticas, nos encontramos con que el 23,74% (n = 52) estudió el último curso de matemáticas en ESO/BUP, el 19,96% (n = 24) en Bachillerato/COU, el 53,42% (n = 117) en estudios universitarios y el 11,87% restante (n = 26) en estudios superiores.

3.2. Diseño e instrumentos

Se siguió un enfoque cuantitativo, cuasiexperimental y exploratorio basado en el uso de un cuestionario diseñado *ad hoc*. El instrumento utilizado fue el cuestionario “Matemáticas e Información”. El cuestionario fue diseñado con 19 preguntas divididas en dos dimensiones: una

de información demográfica con preguntas de respuesta cerrada (género, rango de edad y últimos estudios en los que se ha cursado la asignatura de matemáticas) y otra con una selección de ocho representaciones gráficas con dos preguntas cada una de ellas, una expresada de forma dicotómica (gráfica correcta o incorrecta) y otra de respuesta corta (justificación en caso de seleccionar gráfica incorrecta).

Presentamos, a continuación, las gráficas que han sido objeto de cuestiones a los participantes. Hemos ocultado la fuente de la información para no generar sesgos según la ideología o preferencias de los sujetos de estudio, ofreciéndosela a posteriori a los interesados en ella. Básicamente, debían decidir si la gráfica estaba o no bien construida y justificar su respuesta en caso de no estarlo.

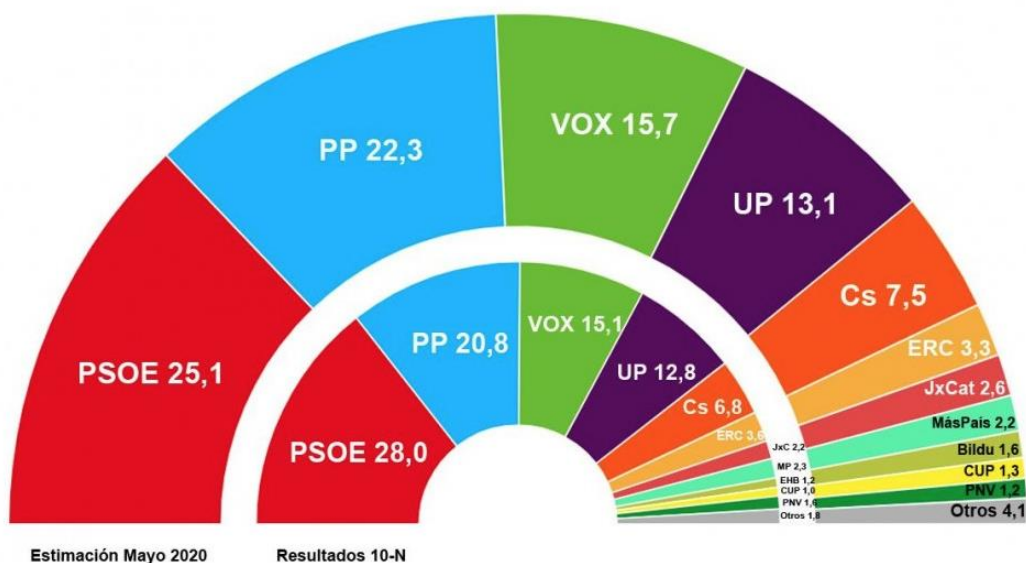
En la figura 1 presentamos una gráfica, aparecida en un programa de TV, donde se muestra la evolución del IPC durante algunos meses del año 2022. En ella aparecen unas escalas no proporcionales: la altura de las barras no es correcta, representando valores inferiores más altos que otros superiores, la anchura tampoco lo es, representando barras de diferentes anchuras sin justificación, y resalta en otro color más llamativo el último mes sin que éste sea objetivamente diferente al resto ni sea un valor representativo.

Figura 1
Evolución del IPC.



La figura 2 es una gráfica aparecida en un diario digital sobre la estimación del voto en unas elecciones, en apariencia correcta. Un análisis más detallado refleja que no lo es, ya que la suma de los porcentajes correspondientes al 10-N no representa la totalidad de los datos, el 100%, y hay un error en la proporcionalidad de algunos sectores (por ejemplo en la estimación de mayo 2020 el sector correspondiente a otros, con un 4.1% de intención de voto representa un área menor que ERC con un 3.3%).

Figura 2
Estimación del voto.



En la figura 3 tenemos la lista de espera a finales de verano en los últimos cinco años. Se corresponde con un tweet de la cuenta oficial de un partido político. Aparecen datos en tanto por mil a juzgar por la notación, pero no se indica qué reflejan esos datos. El mayor sesgo se halla en el área que representa cada año, no guardando ni el más mínimo atisbo de proporcionalidad.

Figura 3
Lista de espera a finales de verano.

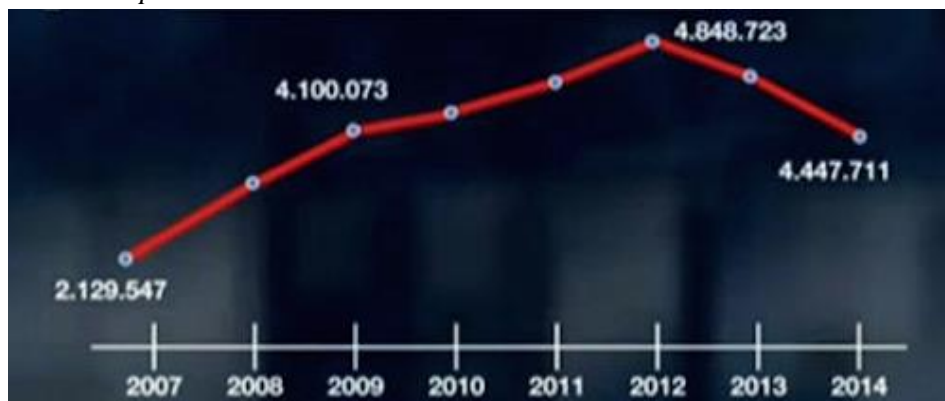


La figura 4 apareció en los informativos de una cadena de TV. Se trata del registro de desempleo en enero de 2015, y en ella podemos apreciar una clara tendenciosidad, induciendo a

pensar que el desempleo ha bajado mucho cuando hay valores inferiores al último dato representado que se encuentran por encima.

Figura 4

Registro del desempleo.



En un *tweet* de la Junta de Andalucía del año 2021 encontramos la figura 5. Muestra las camas ocupadas por pacientes COVID, comparando Andalucía con la media de España en plena pandemia. Aunque por separado podrían considerarse adecuadas, al estar en la misma imagen las barras deberían ser proporcionales.

Figura 5

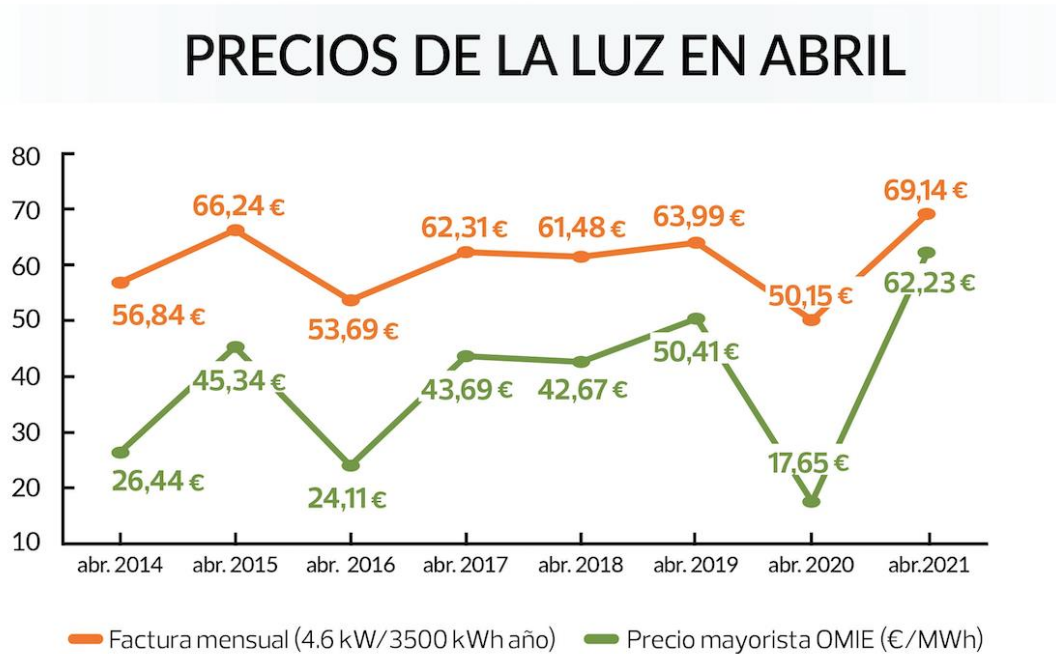
Camas ocupadas por pacientes COVID.



La OCU (Organización Consumidores España) publica la figura 6 en el año 2021 mostrando los precios de la luz. Podríamos considerar la gráfica correcta. No se observan desproporcionalidad, los ejes están correctamente representados y los datos acordes a la leyenda.

Figura 6

Precios de la luz en abril.



La figura 7 presenta una gráfica que fue emitida en un programa de TV, en relación con los contagios por COVID durante la pandemia. En ella podemos apreciar como la leyenda de los datos no se corresponde con lo representado. Si nos fijamos en la gráfica podemos pensar que ha habido más fallecimientos que recuperaciones, pero si nos fijamos en la leyenda es justo al contrario.

Figura 7

Casos coronavirus en España.



La figura 8 muestra un gráfico que apareció en las noticias de una cadena de TV sobre las muertes notificadas durante la pandemia de COVID. La falta de proporcionalidad en las barras

es manifiesta y muy evidente, de hecho, en este caso concreto la periodista que dio la noticia pidió disculpas por el error.

Figura 8

Muertes notificadas.



3.3. Procedimiento y análisis

El instrumento se distribuyó entre mayo y junio de 2023 a través de *Google Forms* teniendo en cuenta las ventajas de los cuestionarios en línea (Phellas et al., 2011). Para la valoración de las respuestas, se tomó en consideración tanto el acierto en la respuesta correcta/incorrecta como la justificación de las gráficas consideradas como incorrectas, descartando aquellas respuestas acertadas pero mal justificadas. Para el análisis, se utilizó el software IBM SPSS (v. 25 para MacOS). En este sentido, se aplicó la prueba de Kolmogorov-Smirnov para analizar la distribución de la muestra; este análisis devolvió una sig. < .05 para las variables consideradas en cada una de las gráficas propuestas (evolución del IPC, estimación del voto, lista de espera a finales de verano, desempleo, camas ocupadas por pacientes COVID, precios de la luz en abril, casos coronavirus en España y muertes notificadas), por lo que se asumió que la muestra no seguía una distribución normal. Teniendo en cuenta este resultado, se aplicaron las pruebas no paramétricas U de Mann-Whitney (para la variable dicotómica ‘género’) y H de Kruskal-Wallis (para las variables politómicas ‘edad’ y ‘estudios en los que se cursa por última vez la asignatura de matemáticas’) para determinar las posibles discrepancias entre los participantes. Además, se aplicó la prueba de Rho de Spearman para determinar posibles correlaciones entre las variables independientes y el total de aciertos al cuestionario.

4. RESULTADOS

4.1. Respuestas al cuestionario

En la Tabla 1, se muestran las respuestas a cada una de las ocho representaciones gráficas propuestas, representando como Q al conjunto de las dos preguntas de cada gráfica:

Tabla 1

Respuestas correctas e incorrectas.

	Q1	Q2	Q3	Q4	Q5	Q6	Q7	Q8
Correcta	142	196	142	150	61	186	119	178
Incorrecta	77	23	77	69	158	33	100	41

Nota. Elaboración propia.

4.2. Diferencias en función del género

Para determinar las posibles discrepancias de los resultados de los participantes en función de su género, se aplicó la prueba U de Mann-Whitney, descartando a aquellos participantes que no revelaron su género. En la Tabla 2, se presentan los resultados del citado análisis:

Tabla 2

U de Mann-Whitney discriminando por género.

Ítem	Género	N	Rango promedi	U	sig.
Q1	Hombre	81	116,33	4833,00	,085
	Mujer	135	103,80		
Q2	Hombre	81	112,00	5184,00	,233
	Mujer	135	106,40		
Q3	Hombre	81	118,50	4657,50	,028
	Mujer	135	102,50		
Q4	Hombre	81	115,00	4941,00	,143
	Mujer	135	104,60		
Q5	Hombre	81	112,67	5130,00	,330
	Mujer	135	106,00		
Q6	Hombre	81	103,67	5076,00	,158
	Mujer	135	111,40		
Q7	Hombre	81	110,50	5305,50	,673
	Mujer	135	107,30		
Q8	Hombre	81	114,33	4995,00	,118
	Mujer	135	105,00		
TOTAL DE ACIERTOS	Hombre	81	116,83	4793,00	,123
	Mujer	135	103,50		

Nota. N = número de respuestas; U = valor de la prueba; sig. = significación. Elaboración propia.

Como se observa en la Tabla 2, los hombres puntúan más alto en todos los ítems salvo en Q6 (precios de la luz en abril). Sin embargo, solo se observan diferencias estadísticamente significativas (sig. < ,05; Zhu, 2016) en el ítem Q3 (lista de espera a finales de verano), como ya se ha indicado a favor de los hombres.

4.3. Diferencias en función de la edad

Para analizar las posibles discrepancias de los participantes en términos de edad, se utilizó la prueba H de Kruskal-Wallis, cuyos resultados se muestran en la Tabla 3:

Tabla 3

H de Kruskal-Wallis discriminando por edad.

Ítem	Edad	N	Rango promedio	H	sig.
Q1	Entre 15 y 34	95	103,55	3,740	,154
	Entre 35 y 54	99	117,53		
	Entre 55 y 75	25	104,70		
Q2	Entre 15 y 34	95	111,13	2,704	,259
	Entre 35 y 54	99	111,55		
	Entre 55 y 75	25	99,60		
Q3	Entre 15 y 34	95	107,01	,666	,717
	Entre 35 y 54	99	113,11		
	Entre 55 y 75	25	109,08		
Q4	Entre 15 y 34	95	103,01	3,577	,167
	Entre 35 y 54	99	116,85		
	Entre 55 y 75	25	109,46		
Q5	Entre 15 y 34	95	102,55	3,862	,145
	Entre 35 y 54	99	116,00		
	Entre 55 y 75	25	114,54		
Q6	Entre 15 y 34	95	109,21	,222	,895
	Entre 35 y 54	99	109,91		
	Entre 55 y 75	25	113,36		
Q7	Entre 15 y 34	95	108,13	,198	,906
	Entre 35 y 54	99	111,33		
	Entre 55 y 75	25	111,82		
Q8	Entre 15 y 34	95	102,84	4,757	,093
	Entre 35 y 54	99	115,02		
	Entre 55 y 75	25	117,36		
TOTAL DE ACIERTOS	Entre 15 y 34	95	102,81	2,492	,288
	Entre 35 y 54	99	116,93		
	Entre 55 y 75	25	109,88		

Nota. N = número de respuestas; H = valor de la prueba; sig. = significación. Elaboración propia.

A la vista de los resultados mostrados en la Tabla 3, los participantes entre 35 y 54 años obtienen mayor puntuación en todos los ítems menos en Q6 (precios de la luz en abril), Q7

(casos coronavirus en España) y Q8 (muertes notificadas), siendo en estos últimos los participantes entre 55 y 75 quienes obtienen una puntuación mayor. No obstante, no se encuentran diferencias estadísticamente significativas en ninguno de los ítems propuestos.

4.4. Diferencias en función del nivel de estudios

Repetimos el mismo análisis (H de Kruskal-Wallis) para determinar las posibles discrepancias en función del último curso en que recibieron docencia de la asignatura de matemáticas. Mostramos en la Tabla 4 los resultados obtenidos:

Tabla 4

H de Kruskal-Wallis discriminando por estudios.

Ítem	Nivel de estudios	N	Rango promedio	H	sig.
Q1	ESO/BUP	52	89,54	11,824	,008
	Bach/COU	24	107,44		
	Universidad	117	119,49		
	E. Superiores	26	110,60		
Q2	ESO/BUP	52	104,65	3,463	,326
	Bach/COU	24	116,94		
	Universidad	117	112,14		
	E. Superiores	26	104,65		
Q3	ESO/BUP	52	97,96	4,005	,261
	Bach/COU	24	107,44		
	Universidad	117	114,81		
	E. Superiores	26	114,81		
Q4	ESO/BUP	52	98,17	4,803	,187
	Bach/COU	24	103,44		
	Universidad	117	115,49		
	E. Superiores	26	115,02		
Q5	ESO/BUP	52	87,92	18,965	<,001
	Bach/COU	24	102,31		
	Universidad	117	122,55		
	E. Superiores	26	104,77		
Q6	ESO/BUP	52	115,97	2,083	,555
	Bach/COU	24	112,81		
	Universidad	117	106,85		
	E. Superiores	26	109,65		
Q7	ESO/BUP	52	88,40	10,700	,013
	Bach/COU	24	114,38		
	Universidad	117	116,95		
	E. Superiores	26	117,88		
Q8	ESO/BUP	52	105,23	4,630	,201
	Bach/COU	24	98,56		
	Universidad	117	115,53		
	E. Superiores	26	105,23		

	ESO/BUP	52	82,26		
TOTAL DE	Bach/COU	24	108,85		
ACIERTOS	Universidad	117	121,94	14,659	,002
	E. Superiores	26	112,81		

Nota. N = número de respuestas; H = valor de la prueba; sig. = significación; ESO = Educación Secundaria Obligatoria; BUP = Bachillerato Unificado Polivalente; Bach = Bachillerato; COU = Curso de Orientación Universitaria; E. Superiores = másteres, suficiencias investigadoras, doctorados y postdoctorado. Elaboración propia.

A la vista de los resultados, nos encontramos con diferencias significativas en los ítems Q1 (evolución del IPC) y Q5 (camas ocupadas por pacientes COVID en Andalucía) y en el total de aciertos, en los tres casos a favor de quienes han estudiado matemáticas por última vez en sus estudios universitarios. En el caso del ítem Q7 (casos coronavirus en España), las discrepancias estadísticamente significativas se encuentran a favor de quienes lo hicieron en estudios superiores.

4.5. Correlación entre las variables género, edad, último nivel educativo en el que recibieron docencia matemática y total de aciertos

Para el análisis de la correlación, se ha realizado la prueba Rho de Spearman. Mostramos en la Tabla 5 los resultados obtenidos:

Tabla 5

Rho de Spearman (correlación entre variables).

		Género	Edad	Total de aciertos	Último nivel educativo
Género	Coef. correlación	1,000	-0,50	-,082	-,049
	Sig.	-	,461	,224	,474
Edad	Coef. correlación	-	1,000	,085	,380
	Sig.	-	-	,213	<,001
Total de aciertos	Coef. correlación	-	-	1,000	,209
	Sig.	-	-	-	,002
Último nivel educativo	Coef. correlación	-	-	-	1,000
	Sig.	-	-	-	-

Nota. sig. = significación. Elaboración propia.

Como se observa en la tabla anterior, encontramos correlación entre dos parejas de variables: entre edad y último nivel de estudios, y entre último nivel de estudios y total de aciertos.

5. DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

En el desarrollo de esta investigación, hemos pretendido analizar las representaciones gráficas en los diferentes medios de comunicación y la percepción de los usuarios den la interpretación de estas. Considerando que la muestra del estudio no seguía una distribución normal, el número de participantes (n = 219) se ha considerado válido para las pruebas no paramétricas aplicadas

(Fahome y Sawilowsky, 2000; Razali y Wah, 2011). De esta forma, los resultados que se han obtenido han permitido alcanzar los objetivos propuestos en el estudio. A continuación, analizamos los principales resultados de la investigación.

A la vista de los hallazgos, podemos extraer que no se encuentran diferencias estadísticamente significativas en cuanto al género o la edad. Sin embargo, no sucede lo mismo cuando analizamos los aciertos de los participantes considerando el último nivel de estudios en el que se recibió docencia de matemáticas. En relación con esto último, el resultado más destacado de nuestro estudio es, quizás, el relativo a las diferencias significativas apreciadas entre el total de aciertos de los participantes y los estudios. En estos casos, se observan diferencias estadísticamente significativas en los ítems Q1 (evolución del IPC), Q5 (camas ocupadas por pacientes COVID en Andalucía) y Total de aciertos a favor de los participantes que recibieron docencia matemática en sus estudios universitarios, y en el ítem Q7 (casos coronavirus en España) a favor de quienes que la recibieron en sus estudios posuniversitarios. De la misma manera, en el estudio de la correlación entre variables, extraemos una correlación significativa entre ambas variables.

De todo esto, podemos extraer la importancia de los estudios matemáticos recibidos para la interpretación de las representaciones gráficas expuestas en los diferentes medios de comunicación, lo que nos hace realizar una pequeña crítica a su exposición. La transmisión de informaciones de índole matemática a través de los medios de comunicación debería ser clara para toda la población e interpretable por todos los usuarios. En cualquier caso, los medios de comunicación deberían representar los datos correctamente y no como se ha mostrado en los diferentes ejemplos seleccionados para esta investigación, ya que no todos los participantes han sido capaces de encontrar los errores de las representaciones gráficas. Ciertamente, el no poder reconocer estos errores permite a los medios de comunicación difundir información errónea.

No obstante, los resultados de esta investigación deben interpretarse considerando ciertas limitaciones. En primer lugar, si bien el tamaño muestral se ha considerado suficiente para el estudio, el número de participantes que estudió matemáticas por última vez en Bachillerato/COU fue significativamente mayor que el del resto de niveles educativos considerados, ocurriendo algo similar en relación con el rango de edad de los encuestados. En segundo lugar, aunque las respuestas abiertas de los participantes se utilizaron para valorar la justificación de la corrección o incorrección de las gráficas, no se ha presentado en este estudio un análisis detallado de estas. En este sentido, futuras investigaciones deberían considerar reclutar muestras más amplias y diversas, así como utilizar mayor variedad de fuentes de información y datos para garantizar la significatividad y generalización de los resultados. Finalmente, otra limitación que nos encontramos se da en el modo de selección de la muestra, ya que se ha realizado por proximidad con los investigadores, obteniéndose un número elevado de respuestas de profesores de matemáticas y estudiantes de estos, quedando relegados a un segundo plano otros participantes de la población que también deberían ser objeto de estudio.

Este estudio revela la necesidad de establecer rigor matemático, directrices más estrictas y procedimientos de revisión al realizar estudios basados en el tratamiento de datos, así como al plantear y publicar representaciones gráficas sobre estos en los medios de comunicación.

6. IMPLICACIONES EN LA ACTIVIDAD DOCENTE

En cuanto a la implicación que puede tener este estudio en el aula, como ya hemos mencionado, se trata de una actividad que suscita mucho interés por parte del alumnado. Se utiliza como

medio de reflexión para que los estudiantes aprendan a discernir la veracidad de los datos que se nos ofrecen en forma de representación gráfica en los medios de comunicación, pues, como hemos podido comprobar, existen casos con representaciones que se alejan mucho de la realidad. Además, ya hemos realizado una primera experiencia en el aula con los resultados de este estudio, lo que les muestra que aquellos individuos que han recibido educación matemática son más capaces de discernir estos errores.

Por todo lo anterior, la educación matemática es fundamental para desarrollar un sentido crítico y unas habilidades que nos ayuden a detectar errores en las representaciones gráficas que se nos presentan en los diferentes medios de comunicación, así como para desarrollar los conocimientos que ayuden al alumnado a comprender y valorar la realidad.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Arteaga, P., Batanero, C., Contreras J. M. y Cañadas, G. R. (2016). Evaluación de errores en la construcción de gráficos estadísticos elementales por futuros profesores. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Estadística*, 19(1), 15-40.
- Contreras, J. M., Molina-Portillo, E., Godino, J. D., Rodríguez-Pérez, C. y Arteaga, P. (2017). Funciones semióticas en el uso de diagramas de barras por los medios de comunicación. En J. M. Contreras, P. Arteaga, G. R. Cañadas, M. M. Gea, B. Giacomone y M. M. López-Martín (Eds.), *Actas del Segundo Congreso Internacional Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos*. Universidad de Granada.
- Díaz-Levicoy, D., Parraguez, R., Ferrada, C. y Ramos-Rodríguez, E. (2016). Errores en la construcción de gráficos estadísticos por profesores chilenos de Educación Primaria. En *XX Actas de las Jornadas Nacionales de Educación Matemática* (pp. 98-102). Universidad de los Andes.
- Fahoome, G. y Sawilowsky, S. S. (2000). *Review of twenty nonparametric statistics and their large sample approximations*. Annual Meeting of the American Educational Research Association.
- González-Ogando, P. (2023). Uso didáctico de errores en medios de comunicación. *Revista SUMA*, (103), 43-52.
- Inzunsa-Cazares, S. (2015). Niveles de interpretación que muestran estudiantes sobre gráficas para comunicar información de contextos económicos y sociodemográficos. *Revista Mexicana de Investigación Educativa*, 20(65), 529-555. <https://bit.ly/3lyrj01>
- Ministerio de Educación y Formación Profesional (MEFP) (2022). Real Decreto 217/2022, de 29 de marzo, por el que se establece la ordenación y las enseñanzas mínimas de la Educación Secundaria Obligatoria, *Boletín Oficial del Estado*, núm 76.
- Paulos, J. A. (1990). *El hombre anumérico*. Tusquets Editores.
- Phellas, C. N., Bloch, A. y Seale, C. (2011). Structured methods: Interviews, questionnaires and observation. En C. Seale, (Ed.), *Researching society and culture* (pp. 181-205). Sage. <https://bit.ly/32jftmH>
- Razali, N. M. y Wah, Y. B. (2011). Power comparisons of Shapiro-Wilk, Kolmogorov-Smirnov, Lilliefors and Anderson-Darling tests. *Journal of Statistical Modeling and Analytics*, 2(1), 13-14. <https://bit.ly/3rj1gC7>

Zhu, W. (2016). $p < 0.05$, < 0.01 , < 0.001 , < 0.0001 , < 0.00001 , < 0.000001 , or < 0.0000001 .
Journal of Sport and Health Science, 5(1), 77-79.
<https://doi.org/10.1016/J.JSHS.2016.01.019>

ANEXO. GRÁFICAS UTILIZADAS

- Gráfica 1: Evolución del IPC. El programa de Ana Rosa, 10/11/2022
- Gráfica 2: Estimación del voto. Diario digital Público. 10/05/2020
- Gráfica 3: Lista de espera a finales de verano. Tweet Mas Madrid. 24/08/2022
- Gráfico 4: Registro del desempleo. Telediario Televisión Española. 22/01/2015
- Gráfico 5: Camas ocupadas por pacientes COVID en Andalucía. Tweet Junta de Andalucía. 18/01/2021
- Gráfico 6: Precios de la luz en abril. OCU (Organización Consumidores España). 21/04/2021
- Gráfico 7: Casos coronavirus en España. El programa de Ana Rosa. 08/04/2020
- Gráfico 8: Muertes notificadas. La Sexta Noticias. 27/12/2021

Adaptaciones metodológicas para la enseñanza de resolución de problemas aritméticos a alumnado con autismo

Raúl Fernández-Cobos

Universidad de Cantabria, raul.fernandezcobos@unican.es

Irene Polo-Blanco

Universidad de Cantabria, irene.polo@unican.es

Alicia Bruno

Universidad de La Laguna, abruno@ull.edu.es

Resumen: Este artículo presenta elementos metodológicos para la enseñanza de la resolución de problemas aritméticos de enunciado verbal adaptados para alumnado con autismo que surgen de la investigación y se han calificado como buenas prácticas. Principalmente, estas metodologías son la instrucción basada en esquemas y el modelo basado en lo conceptual. Su objetivo es facilitar la comprensión conceptual de los problemas matemáticos, teniendo en cuenta las dificultades y apoyándose en las fortalezas de las personas con autismo. Para ello, se hace uso de esquemas y representaciones visuales, acompañadas de instrucción explícita y sistemática, heurísticos y estrategias metacognitivas.

Palabras clave: : problemas aritméticos, instrucción, autismo.

Methodological adaptations for teaching arithmetic problem-solving to students with autism

Abstract: This paper shows methodological elements for teaching verbal arithmetic problem-solving adapted to students with autism, that were developed from research and recognized as good practices. These methodologies include primarily schema-based instruction and conceptual model-based approaches. Their aim is to facilitate the conceptual understanding of mathematical problems taking into consideration the difficulties and leveraging the strengths of individuals with autism. To achieve this, the use of schemas and visual representations is employed, accompanied by explicit and systematic instruction, heuristics, and metacognitive strategies

Key words: arithmetic problems, instruction, autism.

1. INTRODUCCIÓN

La resolución de problemas aritméticos de enunciado verbal ocupa un lugar especial en el currículo de matemáticas, ya que ayuda a los estudiantes a aplicar sus habilidades matemáticas en contextos reales y es, en sí misma, una de las principales formas de aprender matemáticas

(Ministerio de Educación y Formación Profesional, 2022). Para resolver problemas aritméticos no solo se necesitan habilidades de cálculo, sino también una comprensión conceptual de las operaciones y saber cómo relacionar a través de ellas las cantidades que juegan un papel importante en la situación planteada. Además, la resolución de problemas requiere la movilización de una amplia gama de habilidades que trascienden el ámbito matemático. Entre ellas, se incluyen la lectura y comprensión de textos y situaciones, la creación de una representación mental o la elaboración de un plan que permita obtener la solución del problema (Daroczy et al., 2015). Algunos de estos aspectos pueden suponer un reto para estudiantes con necesidades educativas especiales (NEE); en particular, si experimentan dificultades relacionadas con las funciones ejecutivas (como planificar, organizar, revisar, etc.), con la atención o con la comprensión verbal. Una proporción sustancial de los estudiantes con trastorno del espectro autista (TEA) presentan dificultades relacionadas con las habilidades mencionadas (Baron-Cohen et al., 2000; Ozonoff y Schetter, 2007).

De acuerdo con la quinta edición del *Manual diagnóstico y estadístico de los trastornos mentales* (DSM-V; *American Psychiatric Association*, 2013), el TEA es una alteración crónica del neurodesarrollo que se identifica a partir de dificultades en la comunicación y en la interacción social, así como de la observación de patrones repetitivos de comportamiento y de temas de interés restrictivo. A pesar de esta descripción, las personas con TEA presentan una gran variabilidad de síntomas, incluyendo algunas de las dificultades mencionadas, o la presencia o no de discapacidad intelectual en diferentes grados. La investigación educativa ha mostrado que el alumnado con TEA experimenta más dificultades de aprendizaje en matemáticas que sus compañeros de desarrollo típico (Bullen et al., 2022; Mayes y Calhoun, 2006). En general, la resolución de problemas es una actividad costosa para los estudiantes con TEA debido a una débil comprensión de lenguaje (Bae et al., 2015), un perfil bajo en teoría de la mente (Polo-Blanco, Suárez-Pinilla et al., 2024) que influye en la habilidad para inferir estados mentales en otra persona y predecir su conducta, y alteraciones en la memoria de trabajo o en las funciones ejecutivas (Root et al., 2021).

Los últimos datos apuntan a un aumento de la prevalencia del TEA, indicando que, en todo el mundo, uno de cada 100 niños es diagnosticado con autismo (Zeidan et al., 2022). Tal situación demanda el desarrollo de metodologías específicas de aprendizaje cuyos efectos sean empíricamente validados. Creemos que la difusión de estas metodologías entre el profesorado contribuirá al mantenimiento de la atención a la diversidad en las aulas.

2. METODOLOGÍAS DE INSTRUCCIÓN CON ESTUDIANTES CON TEA

Las metodologías específicas para la enseñanza de resolución de problemas buscan reducir la carga cognitiva de los estudiantes con TEA y movilizar una serie de medidas compensatorias que les ayuden a mantener la atención en la tarea, así como a comprenderla y a planificarla mejor. Incorporan, además, algunos elementos que explotan preferencias cognitivas o aspectos en los que muchas personas con TEA se muestran particularmente habilidosas, como por ejemplo pensar y razonar a través de imágenes (Grandin, 2006). Se cree que esta forma de pensamiento visual es la que está por detrás del uso frecuente de dibujos como modo de comunicación por parte de algunos individuos con TEA (Di Renzo et al., 2017). En la práctica, esto se refleja en las estrategias de resolución que algunos estudiantes adoptan a la hora de afrontar, por ejemplo, tareas algebraicas (Goñi-Cervera et al., 2022) o problemas matemáticos verbales (Goñi-Cervera et al., 2023; Polo-Blanco, Suárez-Pinilla et al., 2024).

Recientemente, Root et al. (2022) recopilaron una serie de buenas prácticas para enseñar resolución de problemas a estudiantes con TEA y discapacidad intelectual, enfatizando aspectos como el diseño de materiales que faciliten la comprensión del problema, la discriminación entre diferentes tipos de problema observando su estructura o el desarrollo de la autonomía a la hora de afrontar la tarea.

Entre las metodologías de instrucción más relevantes, se encuentran la instrucción basada en esquemas (SBI, por sus siglas en inglés; Jitendra et al., 2002) y su posterior adaptación, conocida como instrucción basada en esquemas modificada (MSBI; Spooner et al., 2017); así como el modelo conceptual de resolución de problemas (COMPS; Xin, 2012; Xin et al., 2020). Estas metodologías tienen como foco común la búsqueda de la comprensión conceptual de los problemas matemáticos mediante el uso de esquemas o diagramas conceptuales, que se acompañan de una instrucción explícita, y del uso de heurísticos y estrategias metacognitivas. Ambas han resultado ser útiles para desarrollar las habilidades de resolución de problemas en estudiantes con dificultades de aprendizaje (Powell y Fuchs, 2018; Xin et al., 2020) y, específicamente, con TEA (García-Moya et al., 2022; Polo-Blanco et al., 2022; Root et al., 2021).

A continuación, comentamos algunas de las medidas específicas que tienen en cuenta, en el marco de estas metodologías de instrucción, características típicas del TEA. Es importante hacer notar que, dada la amplia variedad sintomatológica del TEA, el abanico de prácticas que se consideren en cada caso deberá adaptarse al perfil particular del alumno. Algunas de ellas se refieren al diseño de los materiales empleados, mientras que otras son prácticas de instrucción.

2.1. Diseño de materiales

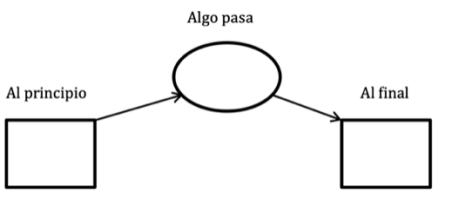
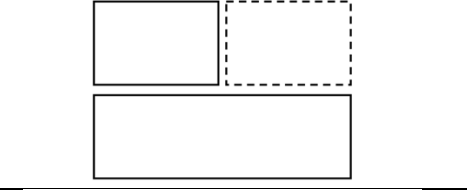
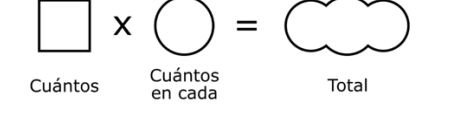

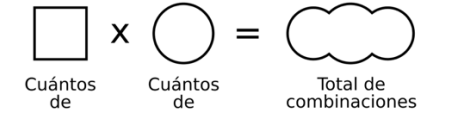
A la hora de diseñar los materiales con los que se realiza la instrucción, es importante tener en cuenta algunas de las dificultades y fortalezas que manifiestan muchos estudiantes con TEA. Se deben tomar medidas que contribuyan tanto a mejorar el acceso al problema como a facilitar la comprensión conceptual por parte del alumnado. Algunas de ellas se enuncian a continuación.

Esquemas y diagramas. Los esquemas se utilizan frecuentemente para trabajar la resolución de problemas verbales con alumnado de desarrollo típico (Hershkovitz y Neshet, 2003). En nuestro caso, el uso de esquemas o de diagramas para representar la relación entre cantidades de un tipo determinado de problema se fundamenta más, si cabe, en la preferencia por el pensamiento visual de muchas personas con TEA. Además, puede resultar útil a estudiantes con alteraciones en la memoria de trabajo, porque actúan de soporte para la representación mental del problema (Spooner et al., 2017).

Los esquemas que se utilizan en las metodologías SBI o MSBI captan las relaciones entre las cantidades presentes en el enunciado de un tipo de problema matemático (e. g., Polo-Blanco et al., 2024). Se trata de un enfoque semántico, en el sentido de que se espera que el alumno generalice el uso del esquema para todos los problemas de un mismo tipo, con independencia de si se requiere una u otra operación para calcular la solución (lo que va a depender de cuál es el dato que se desconoce). Por ejemplo, para enseñar problemas de estructura aditiva, se utilizan diagramas diferentes para problemas de combinación, de cambio y de comparación (ver Tabla 1). El esquema utilizado para problemas de combinación, por ejemplo, sería el mismo con independencia de si desconocemos el total (en cuyo caso deberíamos aplicar una suma) o si desconocemos una de las partes (en cuyo caso deberíamos utilizar una resta para calcular la solución).

En la metodología COMPS, se utiliza un diagrama conceptual basado en una representación algebraica del problema, como, por ejemplo, “Parte1 + Parte2 = Total”, para los problemas aditivos de combinación; o “Elementos por grupo x Número de grupos = Producto”, para problemas multiplicativos de razón (ver Tabla 1). Aunque el estudiante disponga del diagrama conceptual, aún tiene que determinar el tipo de operación necesaria para obtener la solución del problema teniendo en cuenta qué datos del diagrama se dan en el enunciado del problema y cuál se desconoce.

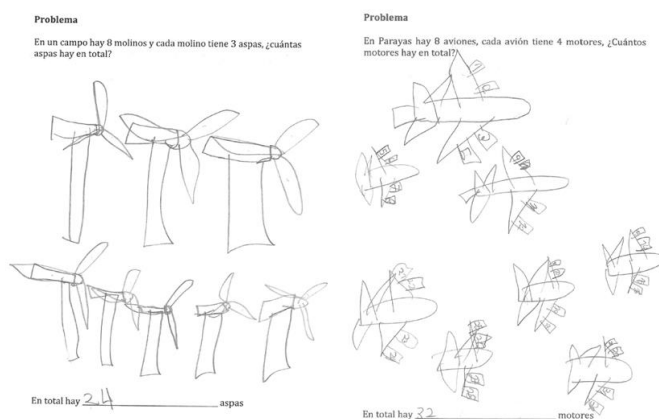
Tabla 1
Ejemplos esquemas y diagramas (MSBI y COMPS, respectivamente).

Tipo de problema	Diagrama esquemático	Metodología e investigaciones
Aditivo de cambio		MSBI (e.g., Polo-Blanco, González et al., 2024)
Aditivo de comparación o combinación		MSBI (e.g., Root et al., 2022)
Multiplicativo de razón		COMPS (e.g., Polo-Blanco et al., 2022)
Multiplicativo de comparación		COMPS (e.g., Polo-Blanco et al., 2022)
Multiplicativo de producto cartesiano		COMPS (e.g., García-Moya, et al., 2022)

Apoyos visuales. El uso de sistemas alternativos y aumentativos de comunicación (SAAC), como pictogramas o las representaciones visuales del proceso de resolución, puede contribuir significativamente a mejorar la comprensión de la tarea en aquellos alumnos con dificultades del lenguaje, además de ayudar a reducir la carga cognitiva requerida al representar de una manera más concreta algunos elementos abstractos del problema (Barnett y Cleary, 2015; Wong et al., 2015).

Contextualización de los problemas en torno a tópicos de interés. Incluir los focos de interés del alumno en los enunciados de los problemas (ver Figura 1) podría incentivar su interés por aprender a resolverlos (Polo-Blanco et al., 2021).

Figura 1
Resolución de problemas por parte de un estudiante con TEA adaptada a tópicos de interés del alumno (Polo-Blanco et al., 2021).



Enunciados simples. Reducir la complejidad de los enunciados ayuda a los estudiantes con TEA con dificultades del lenguaje. Además, en algunos casos, entender la situación planteada, especialmente si requiere inferir información acerca del estado mental y las motivaciones de los sujetos que intervienen, podría entrañar dificultades (Polo-Blanco, Suárez-Pinilla et al., 2024). Por otra parte, entender la terminología específica de los problemas plantea a menudo dificultades a los estudiantes (véanse las dificultades relacionadas con la palabra “triple” en Polo-Blanco et al., 2022). Spooner et al. (2017) sostienen que es importante fijar la estructura de los enunciados, presentando cada dato en oraciones independientes y reservando una última oración para la pregunta final.

Hoja de trabajo y hoja de pautas. La presentación de los problemas organizada en una hoja de trabajo, que se apoye al mismo tiempo en una hoja de pautas de actuación, facilita las dificultades relacionadas con las habilidades propias de las funciones ejecutivas. La hoja de trabajo (ver Figura 2) puede tener espacios diferenciados para el enunciado del problema (expresado con o sin pictogramas), el esquema o diagrama, la operación elegida y la ejecución de la misma.

Figura 2

Hojas de trabajo para resolución de problemas adaptadas (Fernández-Cobos y Polo-Blanco, en revisión; García-Moya et al., 2022).



En paralelo, la hoja de pautas, que algunos autores han llamado “análisis de la tarea”, guía de manera visual y escrita en el proceso de resolución de problemas (ver Figura 3), y además permite al docente identificar exactamente dónde se presentan las dificultades. El uso de la hoja

de pautas puede ser muy beneficioso para aquellos alumnos que presentan dificultades de atención y alteraciones en las funciones ejecutivas (Root et al., 2022).

Figura 3

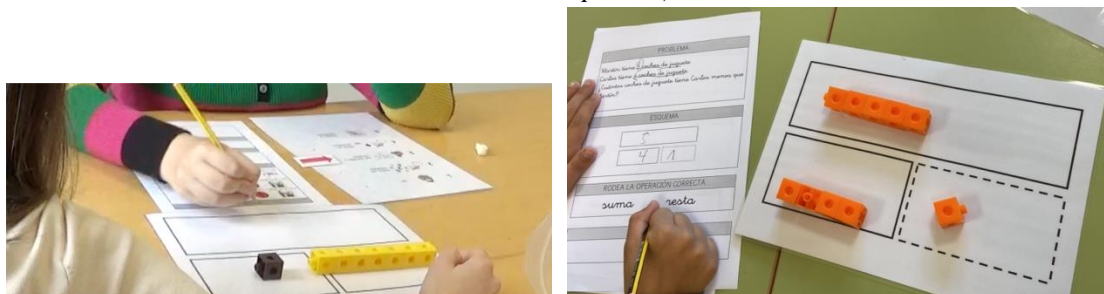
Hoja de pautas adaptada a la resolución de problemas (García-Moya et al., 2022; Goñi-Cervera et al., en prensa).

1	Leer el enunciado 	<div style="background-color: #4a7ebb; color: white; padding: 5px; text-align: center; font-weight: bold;">PAUTAS PARA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS</div> <ol style="list-style-type: none"> 1 Leer el problema y subrayar los datos 2 Rodear la cantidad mayor 3 Representar la situación 4 Completar el esquema 5 Encontrar la operación 6 Resolver y comprobar
2	Elegir y poner el pictoenunciado ¿Qué cosas hay en el enunciado?	
3	Escribir el número en el esquema ¿Cuántos...? ¿Cuál es el total de combinaciones?	
4	Escribir el signo de ¿multiplicación o división? <div style="text-align: center; font-size: 24px; margin: 5px 0;"> × ÷ </div> Multiplicación División	
5	Hacer el dibujo 	
6	Hacer la operación $\begin{array}{r} \times 8 \\ 2 \\ \hline \end{array} 8 2$	
7	Escribir la solución 	

Material manipulativo. El uso de material manipulativo para representar la situación del problema (ver Figura 4) ofrece al estudiante la oportunidad de desarrollar una estrategia alternativa cuando no domina las operaciones, además de resultar un apoyo para alumnos con dificultades en la memoria de trabajo.

Figura 4

Uso de material manipulativo en la resolución de problemas aditivos (Fernández-Cobos y Polo-Blanco, en revisión; Goñi-Cervera et al., en prensa).



2.2. Prácticas de instrucción

Poniendo el foco en el docente, los estudios con estudiantes con TEA han identificado una serie de prácticas que resultan útiles a la hora de llevar a la práctica una metodología de instrucción de resolución de problemas.

Instrucción explícita y sistemática. Es necesario enseñar activamente al alumno a utilizar los materiales de apoyo y a resolver los problemas, ofrecerle apoyo durante el proceso de resolución de problemas y adoptar estrategias metacognitivas (Root et al., 2021). Además, esta instrucción debería planificarse de manera sistemática, de forma que se aplique consistentemente y se pueda regular en función de los progresos del estudiante. Por ejemplo, es habitual seguir una secuencia en las sesiones de instrucción que comienza con la modelización por parte del docente de uno de los problemas para, a continuación, pedir al alumno que resuelva problemas similares por su cuenta, recibiendo retroalimentación en directo del docente. Es recomendable utilizar un sistema de apoyos mínimos, en el que la intervención del docente se regula en función de la competencia del estudiante, planeando de antemano la retirada paulatina de apoyos a medida que el estudiante progresa (Spooner et al., 2017). También es habitual que el docente espere un intervalo de tiempo prudencial (unos segundos) antes de corregir al alumno, para ofrecerle la oportunidad de enmendar por sí mismo sus errores. La instrucción también se debe planificar globalmente, para introducir diferentes tipos de problemas de manera secuencial y enseñando explícitamente al alumno a distinguirlos (Root et al., 2022). Ejemplos de apoyo específico para reforzar la comprensión de la situación planteada en el problema podrían ser la formulación de preguntas guía acerca del significado de las cantidades del problema (Root y Browder, 2019; ver también Figura 5 con material propio), o también pedirle al alumno que identifique los datos relevantes del problema o que coloque pictogramas específicos que representen los diferentes tipos de cantidades (como, por ejemplo, la incógnita; el total, en problemas de combinación; o el multiplicador, en problemas multiplicativos de comparación) en los huecos del esquema o diagrama.

Figura 5

Resolución de un problema de combinación con apoyo de la hoja de pautas, hoja de trabajo, pictogramas, esquema y preguntas guía.

The figure illustrates a multi-step process for solving a combination problem. It consists of several interconnected components:

- Hoja de pautas (Checklist):** A vertical list of five steps:
 1. LEE (Read) - accompanied by a book icon.
 2. RODEA LOS NÚMEROS (Circle the numbers) - accompanied by a pencil icon and a red arrow pointing to the numbers 8, 7, 6, 4, 3, 2, 1 in a diagram.
 3. USA MATERIAL / ESQUEMA (Use material / Diagram) - accompanied by a box icon.
 4. RODEA LA OPERACIÓN (Circle the operation) - accompanied by a pencil icon and a plus-minus sign.
 5. ESCRIBE LA OPERACIÓN (Write the operation) - accompanied by a pencil icon.
- Hoja de trabajo (Worksheet):** A structured workspace divided into sections:
 - PROBLEMA:** Contains a word problem: "EN TOTAL DIEGO Y JANA RECOGEN OCHO SETAS" (Total, Diego and Jana pick up eight mushrooms) with a large number 8 and a mushroom pictogram. Below it, "DIEGO RECOGE SEIS SETAS" (Diego picks up six mushrooms) with a number 6 and a mushroom pictogram. A question asks: "¿CUÁNTAS SETAS RECOGE JANA?" (How many mushrooms does Jana pick up?).
 - ESQUEMA:** A diagram with two boxes containing the numbers 0 and 2, and a larger box below containing the number 8.
 - RODEA LA OPERACIÓN:** A section with a plus sign (+) and a minus sign (-).
 - OPERACIÓN:** A section where the operation $8 - 6 + 2$ is written.
- Preguntas guía y esquema (Guiding questions and diagram):** A box containing three questions:
 - Coloquemos el pictograma "en total" dentro del esquema grande. ¿En qué casilla lo ponemos?
 - ¿Sabemos el número total de setas que tienen Diego y Jana? Pongamos estas setas en el esquema grande.
 - ¿Sabemos cuántas setas tiene Diego? Pongamos esas setas en el esquema.
 - ¿Sabemos cuántas setas tiene Jana? Pongamos el signo de interrogación al esquema.
 Below the questions is a diagram showing a large box with a question mark and a smaller box with three mushrooms. Below that, a row of eight mushrooms is shown, with a circle around the last two mushrooms.

Instrucción comportamental. Además de enseñar la resolución de problemas y mostrar cómo utilizar los materiales, se espera que el docente de asistencia motivacional, reforzando las conductas que se quieren promover y reconduciendo la atención del alumno a la tarea en caso de ser necesario (Spooner et al., 2017).

3. REFLEXIONES FINALES

Se han mostrado algunas adaptaciones de metodologías de instrucción en resolución de problemas concebidas para ser utilizadas con alumnado con TEA. Generalmente, estas adaptaciones se consideran a partir de la investigación con alumnado con dificultades de aprendizaje en matemáticas o con necesidades educativas especiales (con y sin discapacidad intelectual). Todas ellas buscan que los estudiantes con TEA comprendan el enunciado del problema (estructurando la redacción, prestando atención al lenguaje y buscando vocabulario o contextos cercanos), comprendan conceptualmente los problemas (apoyándose en diagramas o esquemas, y distinguiendo entre diferentes tipos de problemas en base a su estructura o posición de la incógnita) y lo resuelvan procedimentalmente (siguiendo una instrucción explícita y sistemática, comenzando con un modelado por parte del profesor, para dar paso a la práctica guiada y terminando con la práctica independiente).

Algunos aspectos de estas adaptaciones no difieren radicalmente de los procesos de enseñanza del alumnado de desarrollo típico. De hecho, el propio currículo de Matemáticas en Primaria (Ministerio de Educación y Formación Profesional, 2022) destaca la importancia de enseñar a resolver problemas no solo a través de las operaciones, sino también con otras estrategias manipulativas o gráficas. No obstante, el conjunto de adaptaciones que se considera se adapta específicamente al tipo de pensamiento que se observa en las personas con TEA. Aun así, es importante tener en cuenta cada caso particular, e identificar aquellas que mejor se adapten al perfil de cada estudiante.

AGRADECIMIENTOS

Trabajo desarrollado en el marco de los proyectos PID2022-136246NB-I00, financiado por MCIN/AEI/10.13039/501100011033 / FEDER, UE; PID2022-139007NB-I00 y PID2020-113601GB-I00, del Ministerio de Economía y Competitividad de España, AEI/10.13039/501100011033; y SUBVTC-2023-0014, financiado por el Gobierno de Cantabria.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- American Psychiatric Association. (2013). *Diagnostic and statistical manual of mental disorders* (5^a ed.). American Psychiatric Association Publishing. <https://doi.org/10.1176/appi.books.9780890425596>
- Bae, Y. S., Chiang, H. -M. y Hickson, L. (2015) Mathematical word problem solving ability of children with autism spectrum disorder and their typically developing peers. *Journal of Autism Developmental Disorders*, 45, 2200–2208. <https://doi.org/10.1007/s10803-015-2387-8>
- Barnett, J. E. H. y Cleary, S. (2015). Review of evidence-based mathematics interventions for students with autism spectrum disorders. *Education and Training in Autism and Developmental Disabilities*, 50(2), 172–185. <http://www.jstor.org/stable/24827533>
- Baron-Cohen, S., Tager-Flusberg, H. y Cohen, D. J. (Eds.). (2000). *Understanding other minds: Perspectives from developmental cognitive neuroscience* (2^a ed.). Oxford University Press.

- Bullen, J. C., Zajic, M. C., McIntyre, N., Solari, E. y Mundy, P. (2022). Patterns of math and reading achievement in children and adolescents with autism spectrum disorder. *Research in Autism Spectrum Disorders*, 92, 101933. <https://doi.org/10.1016/j.rasd.2022.101933>
- Daroczy, G., Wolska, M., Meurers, W. D. y Nuerk, H. C. (2015). Word problems: A review of linguistic and numerical factors contributing to their difficulty. *Frontiers in Psychology*, 6(348), 1–13. <https://doi.org/10.3389/fpsyg.2015.00348>
- Di Renzo, M., Marini, C., Bianchi di Castelbianco, F., Racinaro, L. y Rea, M. (2017). Correlations between the drawing process in autistic children and developmental indexes. *Journal of Psychology & Psychotherapy*, 7(2), 1–9.
- Fernández-Cobos, R. y Polo-Blanco, I. (En revisión). Using modified schema-based instruction to teach problem-solving to students with autism and language impairments.
- García-Moya, M., Polo-Blanco, I., Blanco, M. R. y Goñi-Cervera, J. (2022). Teaching Cartesian product problem solving to students with autism spectrum disorder using a conceptual model-based approach. *Focus on Autism and Other Developmental Disabilities*. [Publicación digital previa]. <https://doi.org/10.1177/10883576221121806>
- Goñi-Cervera, J., Cañadas, M. C. y Polo-Blanco, I. (2022). Generalisation in students with autism spectrum disorder: An exploratory study of strategies. *ZDM Mathematics Education*, 54, 1333–1347. <https://doi.org/10.1007/s11858-022-01415-w>
- Goñi-Cervera, J., Martínez Romillo, M. C. y Polo-Blanco, I. (2023). Strategies used by students with autism when solving multiplicative problems: An exploratory study, *Advances in Autism*, 9(1), 65–81. <https://doi.org/10.1108/AIA-03-2021-0017>
- Goñi-Cervera, J., Polo-Blanco, I., Bruno, A. y Fernández-Cobos, R. (En prensa). Effects of modified schema-based instruction to teach students with autism to solve additive compare problems. *The Journal of Special Education*.
- Grandin, T. (2006). *Pensar con imágenes: Mi vida con el autismo*. Alba Editorial.
- Hershkovitz S. y Neshet, P. (2003). The role of schemes in solving word problems. *The Mathematics Educator*, 7(2), 1–24.
- Jitendra, A., DiPipi, C. M. y Perron-Jones, N. (2002). An exploratory study of schema-based word-problem-solving instruction for middle school students with learning disabilities: An emphasis on conceptual and procedural understanding. *The Journal of Special Education*, 36(1), 23–38. <https://doi.org/10.1177/00224669020360010301>
- Mayes, S. D. y Calhoun, S. L. (2006). Frequency of reading, math, and writing disabilities in children with clinical disorders. *Learning and Individual Differences*, 16, 145–157. <https://doi.org/10.1016/j.lindif.2005.07.004>
- Ministerio de Educación y Formación Profesional (2022). Real Decreto 157/2022, de 1 de marzo, por el que se establecen la ordenación y las enseñanzas mínimas de la Educación Primaria. *Boletín Oficial del Estado*, núm 52.
- Ozonoff, S. y Schetter, P. L. (2007). Executive dysfunction in autism spectrum disorders. En L. Meltzer (Ed.), *Executive Function in Education. From Theory to Practice* (pp. 133–160). Guilford.
- Polo-Blanco, I., González López, M. J. y Bruno, A. (2021). Influencia del contexto en problemas de multiplicación y división: estudio de caso de un alumno con autismo, *Siglo Cero*, 52(1), 59–78. <https://doi.org/10.14201/scero20215215978>

- Polo-Blanco, I., González, M. J., Bruno, A. y González, J. (2024). Teaching students with mild intellectual disability to solve word problems using schema-based instruction. *Learning Disability Quarterly*, 41(1), 3–5. <https://doi.org/10.1177/07319487211061421>
- Polo-Blanco, I., Suárez-Pinilla, P., Goñi-Cervera, J., Suárez-Pinilla, M. y Payá, B. (2024). Comparison of mathematics problem-solving abilities in autistic and non-autistic children: The influence of cognitive profile. *Journal of Autism and Developmental Disorders*, 54, 353–365. <https://doi.org/10.1007/s10803-022-05802-w>
- Polo-Blanco, I., Van Vaerenbergh, S., Bruno, A. y González, M. J. (2022). Conceptual model-based approach to teaching multiplication and division word-problem solving to a student with autism spectrum disorder. *Education and Training in Autism and Developmental Disabilities*, 57(1), 31–43.
- Powell, S. R. y Fuchs, L. S. (2018). Effective word-problem instruction: Using schemas to facilitate mathematical reasoning. *TEACHING Exceptional Children*, 51(1), 31–42. <https://doi.org/10.1177/0040059918777250>
- Root, J. R. y Browder, D. M. (2019). Algebraic problem solving for middle school students with autism and intellectual disability. *Exceptionality*, 27(2), 118–132. <https://doi.org/10.1080/09362835.2017.1394304>
- Root, J. R., Ingelin, B. y Cox, S. K. (2021). Teaching mathematical word problem solving to students with autism spectrum disorder: A best-evidence synthesis. *Education and Training in Autism and Developmental Disabilities*, 56, 420–436.
- Root, J. R., Saunders, A., Cox, S. K., Gilley, D. y Clausen, A. (2022). Teaching word problem solving to students with autism and intellectual disability. *TEACHING Exceptional Children*, [Publicación digital previa]. <https://doi.org/10.1177/00400599221116821>
- Spooner, F., Saunders, A., Root, J. y Brosh, C. (2017). Promoting access to common core mathematics for students with severe disabilities through mathematical problem solving. *Research and Practice for Persons with Severe Disabilities*, 42(3), 171–186. <https://doi.org/10.1177/1540796917697119>
- Wong, C., Odom, S. L., Hume, K., Cox, A. W., Fettig, A., Kucharczyk, S., Brock, M. E., Plavnick, J. B., Fleury, V. P. y Schultz, T. R. (2015). Evidence-based practices for children, youth and young adults with autism spectrum disorder. *Journal of Autism and Developmental Disorders*, 45, 1951–1966. <https://doi.org/10.1007/s10803-014-2351-z>
- Xin, Y. P. (2012). *Conceptual Model-Based Problem Solving: Teach Students with Learning Difficulties to Solve Math Problems*. Sense Publishers.
- Xin, Y. P., Park, J. Y., Tzur, R. y Si, L. (2020). The impact of a conceptual model-based mathematics computer tutor on multiplicative reasoning and problem-solving of students with learning disabilities. *The Journal of Mathematical Behavior*, 58, 100762. <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2020.10076>
- Zeidan, J., Fombonne, E., Scolah, J., Ibrahim, A., Durkin, M.S., Saxena, S., Yusuf, A., Shih, A. y Elsabbagh, M. (2022). Global prevalence of autism: A systematic review update. *Autism Research*, 15(5), 778–790. <https://doi.org/10.1002/aur.2696>

Aprendizaje basado en la indagación para la resolución de problemas de Fermi

Jesús Montejo-Gámez
Universidad de Granada, jmontejo@ugr.es

Resumen: Este trabajo presenta una experiencia de aula en la que se aplican las ideas del aprendizaje basado en la indagación para resolver problemas de estimación de grandes cantidades. Para desarrollar la experiencia se diseñó una tarea y un secuencia de pasos que ofrece la cantidad justa de ayuda para abordar la estimación. Estos pasos se diseñaron partiendo de las herramientas didácticas desarrolladas para el proyecto europeo MERIA, que fueron adaptadas para trabajar las competencias de modelización. La experiencia, que fue llevada a cabo con un grupo de 22 estudiantes del grado de primaria, puso de manifiesto fortalezas y debilidades del planteamiento didáctico implementado. Estas se explican y discuten en el manuscrito.

Palabras clave: formación inicial de maestros de primaria, proyecto MERIA, modelización matemática, tareas de estimación.

Inquiry-Based Learning for solving Fermi problems

Abstract: This paper shows a teaching experience which applies the inquiry-based learning approach to solve large quantity estimation problems. To develop the experience, a task and a sequence of steps were designed to provide just the right amount of help in addressing the estimation. These steps were designed based on some didactic tools developed for the MERIA European project, which were adapted to foster modelling skills. The experience, which was carried out with a group of 22 prospective primary school teachers, revealed strengths and weaknesses of the didactic approach implemented. These are also explained and discussed in the manuscript.

Key words: elementary teacher education, MERIA project, mathematical modelling, estimation tasks.

1. INTRODUCCIÓN

Las normativas curriculares promulgadas durante los últimos años en el ámbito nacional demandan la promoción de aprendizajes basados en el diseño de competencias clave. Con el fin de acercar los diferentes contenidos disciplinares con este enfoque por competencias, la Ley Orgánica por la que se Modifica la Ley Orgánica de Ecuación (LOMLOE) (Jefatura del Estado, 2020) materializa un conjunto de competencias específicas para cada materia. En el caso de las matemáticas, el Real Decreto 157/2022, de 1 de marzo, por el que se establecen la ordenación y las enseñanzas mínimas de la Educación Primaria (Ministerio de Educación y Formación Profesional, 2022), propone ocho competencias específicas cuyo desarrollo integrado constituye el fin de la educación matemática en esta etapa educativa. El desarrollo de prácticas de enseñanza alineadas con este tipo de aprendizaje competencial supone de por sí un desafío para el profesorado de primaria, desafío que es aún mayor si se atiende a las dificultades del profesorado en formación inicial en competencias matemáticas tales como la resolución de

problemas, el razonamiento o la aplicación del contenido matemático en situaciones contextualizadas (véanse Kaasila et al., 2010 o Sáenz, 2009, por ejemplo). Resulta prioritario, por tanto, incluir en la educación matemática de los futuros maestros actividades que estimulen el desarrollo de sus propias competencias matemáticas (López et al., 2020).

Diferentes autores señalan que las tareas de estimación son de utilidad para el desarrollo de estas competencias (Ärlebäck y Albarracín, 2019; Montejo-Gómez et al., 2023). En efecto, la elaboración de un “juicio sobre el valor del resultado de una operación numérica o de la medida de una cantidad, en función de circunstancias individuales del que lo emite” (Segovia et al., 1989, p. 18) involucra actividades de relevancia en la formación del profesorado, como son la reflexión sobre el orden de magnitud de las unidades de medida o la necesidad de dar soluciones exactas o aproximadas (Segovia y Castro, 2009). Una familia de tareas de estimación que ha sido especialmente estudiada en educación matemáticas está constituida por los *problemas de Fermi*, que consisten en preguntas abiertas sobre la estimación de cierta cantidad cuya resolución implica el diseño de estrategias personales, la elección de variables y la estimación directa o recogida de datos sobre fenómenos reales (Ärlebäck y Albarracín, 2019). Esto ha llevado a que exista un volumen creciente de estudios que analiza el desempeño de los futuros maestros de primaria al resolver diferentes problemas de Fermi (por ejemplo, Segura, 2022).

La enseñanza de la resolución de problemas de Fermi implica para los formadores de profesorado asumir el desafío de proporcionar una *cantidad justa de ayuda* para los futuros maestros, que alivie los posibles bloqueos derivados del carácter abierto de la pregunta inicial sin simplificar en exceso la estimación a desarrollar. El planteamiento de la enseñanza que se desarrollaron en el marco del proyecto MERIA (2016) proporciona ideas clave en este sentido. Continuando otras iniciativas a nivel europeo como los proyectos PRIMAS (Dorier y García, 2013) o MASCIL (García et al., 2018), el proyecto MERIA (2016) combina los principios de la *Educación matemática realista* (Van den Heuvel-Panhuizen y Drijvers, 2014), las ideas del *Aprendizaje basado en la indagación* (Maaß y Doorman, 2013) y el planteamiento pedagógico de la *Teoría de situaciones didácticas* (Brousseau, 1997) para generar herramientas didácticas que guíen el aprendizaje de la resolución de problemas de Fermi de los futuros maestros de primaria.

Este es el punto de partida del presente trabajo, cuya estructura se detalla a continuación. En la siguiente subsección se explican las ideas teóricas del proyecto MERIA (2016) que sustentan la propuesta didáctica de la experiencia que se presenta. La sección 2 explica el contexto de la experiencia llevada a cabo, así como la tarea planteada y el diseño de la sesión de trabajo creada para apoyar a los futuros maestros en su resolución. La sección 3 muestra algunos ejemplos del trabajo desarrollado por estos estudiantes y valora la experiencia desarrollada. Finalmente, la sección 4 extrae la conclusión del trabajo.

1.1. Marco teórico. Escenarios del proyecto MERIA

Con el fin de proporcionar la ayuda justa para la resolución de problemas abiertos, el proyecto MERIA (2016) desarrolló dos herramientas básicas: *módulos* y *escenarios*. Un módulo es la unión de un escenario y el material necesario para implementarlo en el aula. Por su parte, un escenario es una descripción exhaustiva de una sesión de clase en términos de la Teoría de situaciones. En este marco teórico se persigue que los estudiantes construyan conocimiento resolviendo tareas, de manera que la resolución de estas tareas surja como adaptación a un denominado *medio didáctico*. Un medio didáctico consiste en la tarea, el conocimiento previo

de los estudiantes y los artefactos necesarios para resolver la tarea (papel, lápiz, calculadora, instrumentos de medida, etc.).

En este contexto, la labor del profesorado es la de diseñar el medio didáctico y la de ayudar a los estudiantes a adaptarse a él. Durante este proceso, aparecen situaciones *adidácticas* y *didácticas*. Las situaciones *adidácticas* son aquellas en las que los estudiantes están comprometidos con la tarea y exploran el medio sin la interferencia del profesor. Las situaciones *didácticas* son aquellas en las que los estudiantes y los profesores interactúan. La combinación equilibrada de situaciones *didácticas* y *adidácticas* es la que lleva al proceso de indagación y a la construcción del conocimiento por parte de los estudiantes. Por tanto, un escenario adecuado debe contener esta combinación de situaciones a lo largo de diferentes fases.

- i) Fase de *devolución*, en la que el profesor introduce la tarea y explica las reglas para resolverla (suele incluir situaciones *didácticas*).
- ii) Fase de *acción*, en la que los estudiantes se involucran en la resolución de la tarea y trabajan activamente en ella (suele incluir situaciones *adidácticas*).
- iii) Fase de *formulación*, en la que los estudiantes formulan explícitamente (verbalmente o por escrito) los resultados obtenidos en la fase de acción.
- iv) Fase de *validación*, en la que los estudiantes comprueban sus hipótesis y estrategias frente al medio (suele incluir situaciones *adidácticas*).
- v) Fase de *institucionalización*, en la que el profesor declara el conocimiento institucional (suele incluir situaciones *didácticas*). En esta fase, el profesor puede poner ideas en común, comparar puntos de vista y explicar estrategias que se han revelado como óptimas.

Los escenarios de enseñanza del proyecto MERIA (2016) aprovechan estas ideas para organizar los tiempos de las sesiones de trabajo en el aula. En particular, cada escenario contiene la especificación del objetivo de conocimiento para la lección, un conjunto de objetivos más amplios que pueden ser alcanzados durante el desarrollo del escenario (pero que no reciben atención principal), el conocimiento previo que deben tener los estudiantes para aprovechar la sesión, el material necesario para implementar la sesión, el curso y la edad de los estudiantes, la distribución de la sesión en fases (de *devolución*, de *acción*, de *formulación*, de *validación* y de *institucionalización*) y la duración de cada una de ellas, la formulación exacta de las tareas planteadas y las conjeturas del profesor sobre las respuestas de los estudiantes a las tareas, preguntas de ampliación relacionadas con la sesión y una lista de las producciones que deben generar los estudiantes al finalizar la lección. Pueden verse plantillas para desarrollar este tipo de escenarios y algunos ejemplos adicionales en MERIA (2016). Estos ejemplos muestran la potencia de los escenarios, que fueron aprovechados para el diseño de la experiencia como se detalla a continuación.

2. CONTEXTO Y PLANTEAMIENTO DE LA EXPERIENCIA

La experiencia fue desarrollada con un grupo de 22 estudiantes del grado de educación primaria de la Universidad de Granada de cuarto curso que habían superado las asignaturas obligatorias relacionadas con matemáticas y su didáctica de dicho grado. Estos estudiantes estaban matriculados en la asignatura “Competencias matemáticas para la educación primaria”, de carácter optativo, que se focaliza en el conocimiento didáctico de los estudiantes sobre la enseñanza de las matemáticas por competencias así como en el desarrollo de sus propias competencias matemáticas. En el marco de esta asignatura, los estudiantes asistieron a una serie

de sesiones de resolución de problemas en las que se plantearon tareas de modelización matemática que fueron resueltas durante cada una de las sesiones, en las que se adaptaron las ideas teóricas descritas previamente. Concretamente, se celebraron seis sesiones en las que se abordaron sendas tareas. Este trabajo detalla la experiencia en torno a una de las sesiones, que se focalizó en la resolución de un problema de Fermi. La siguiente subsección especifica el problema y el planteamiento didáctico desarrollado para abordarla.

2.1. Diseño de la sesión de trabajo

El punto de partida de la sesión fue el planteamiento de la tarea “Los seguidores del presidente” (Figura 1), que pide calcular el número de personas que asistieron a la ceremonia de investidura del presidente Barack Obama en vista de una imagen de satélite del evento. Dicha imagen de fue proporcionada a los estudiantes en formato digital escalable para facilitar el desarrollo de sus estimaciones.

Figura 1

Enunciado de la tarea “Los seguidores del presidente”.

Barack Obama fue elegido presidente de los Estados Unidos de América en 2009. La asistencia a su ceremonia de investidura fue histórica, y se puede ver en la fotografía.

Proporciona una estimación de la cantidad de personas que asistieron a la ceremonia de investidura de Obama. Explica tu solución.



El planteamiento didáctico desarrollado para resolver la tarea partió de los escenarios desarrollados en el proyecto MERIA (2016). Dada su complejidad y la naturaleza del problema planteado, estos escenarios fueron reducidos dando lugar a los escenarios simplificados que se esquematizan en la Figura 2. La idea fundamental de estos escenarios es la de organizar las acciones del formador y las reacciones de los estudiantes que tienen lugar durante el desarrollo de la sesión en cuatro pasos que combinan las diferentes fases utilizadas en los escenarios del proyecto MERIA (2016). La descripción de estos pasos para esta experiencia de aula se sintetiza a continuación (los detalles acerca del escenario simplificado que se implementó se recoge en el Anexo I).

En el *Paso 1*, el formador enunció la tarea, se aseguró de que los estudiantes la comprendieron y formularon preguntas preliminares para observar las ideas previas de los estudiantes acerca de la dificultad de la tarea y los conocimientos necesarios para resolverla (fase de devolución). A continuación, el formador dejó tiempo para responder estas cuestiones. Durante ese periodo de tiempo, se limitó a escuchar a los futuros maestros, anotar en la pizarra las diferentes ideas que van surgiendo entre el alumnado y seleccionar los equipos cuya aportación era de interés para el resto de la clase (acción para todos los equipos y formulación para los que explicaron sus ideas al formador).

Figura 2

Plantilla para desarrollar un escenario simplificado.

Objetivos principales		
Objetivos secundarios		
Conocimiento previo		
Material necesario		
Paso	Acciones del profesor	Acciones y reacciones de los estudiantes
Paso 1 (duración)	Cuestiones preliminares	
Paso 2 (duración)	Primera pregunta de guía	
Paso 3 (duración)	Segunda pregunta de guía	
Paso 4 (duración)	Reflexión sobre los mensaje a institucionalizar (escribir explícitamente aquí)	
Pregunta de ampliación		
Producciones de los estudiantes		
Observaciones:		

En el *Paso 2*, el formador puso en común las respuestas a las preguntas preliminares (formulación), valoró las ideas surgidas y las conectó con la primera pregunta de guía, centrada en el diseño de una estrategia para resolver la tarea (véase el enunciado específico en el Anexo I). También se aseguró de que los futuros maestros comprendieron esta pregunta (devolución). Concedió un nuevo periodo de tiempo para trabajar en la pregunta, recogiendo las ideas de interés que emergen para anotarlas en la pizarra y seleccionando las contribuciones de potencial interés para el grupo completo (acción para todos los equipos y formulación para los que explicaron sus ideas al formador).

En el *Paso 3*, el formador de profesorado moderó la puesta en común de las ideas de los diferentes equipos, buscando que emergieran las fortalezas y debilidades de cada una de las estrategias proporcionadas por los equipos de trabajo (formulación). Esto llevó a la segunda pregunta de guía, cuyo foco es la implementación de las estrategias surgidas (el enunciado específico se proporciona en el Anexo I). El formador planteó esta segunda pregunta y se aseguró de que todos los futuros maestros la comprendieran (devolución). De nuevo, se deja un periodo de tiempo en el que el rol de los formadores es análogo al desarrollado en los dos pasos anteriores (escucha y selección y anotación de ideas de valor potencial, fases de acción y formulación en algunos casos).

En el *Paso 4*, finalmente, el formador dirigió la puesta en común de los resultados obtenidos en respuesta a la segunda pregunta de guía (formulación), que condujo a una solución “óptima”, consensuada en la medida de lo posible (validación entre iguales). Tras ello, se propuso la reflexión compartida sobre los pasos seguidos en la sesión, las dificultades que los equipos de trabajo encontraron y cómo estos se resolvieron. Además, se hicieron explícitas las ideas clave de la sesión: Por una parte, la importancia de identificar cantidades clave que permiten desarrollar la estimación, y que estas no tienen por qué estar en el enunciado de la tarea. Por otra parte, la necesidad de idear y aplicar estrategias antes de involucrarse en cálculos

(institucionalización). La intervención del formador culminó invitando a los futuros maestros a discutir la dificultad de la tarea, y dejando los minutos finales para que estos trabajaran en sus producciones finales y plantearan dudas personalizadas.

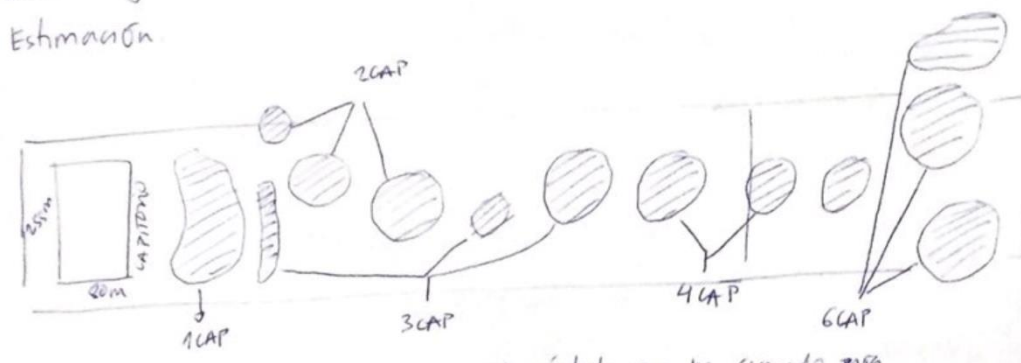
El desarrollo de estos cuatro pasos tuvo lugar en una sesión de 60 minutos, 55 de los cuales fueron de trabajo efectivo: 45 de intercambio de cuestiones y puesta en común de ideas y 10 de trabajo sobre las producciones finales y dudas. Estas 22 producciones, junto con el mismo número de respuestas a un cuestionario cortos sobre el problema de Fermi planteado son las evidencias que se recogieron del desempeño de los futuros maestros durante la sesión.

3. ESTRATEGIAS ENCONTRADAS Y VALORACIÓN DE LA EXPERIENCIA

Durante la sesión emergieron principalmente tres estrategias de resolución del problema de Fermi en respuesta a la primera pregunta de guía planteada. La primera de ellas se basó en localizar una zona particular del dibujo (el área de la planta del Capitolio o el cuadrado unidad de una retícula trazada para cuadrricular el área total de la imagen proporcionada), calcular su área y multiplicar por el número de personas que caben en un metro cuadrado, variable para la que se consensuó el valor de 8 como válido. Las estimación proporcionada se obtuvo multiplicando el resultado obtenido por el número de cuadrados ocupados por personas en la imagen de la tarea.

Figura 3

Detalle de una producción que descompone la zona ocupada por personas.

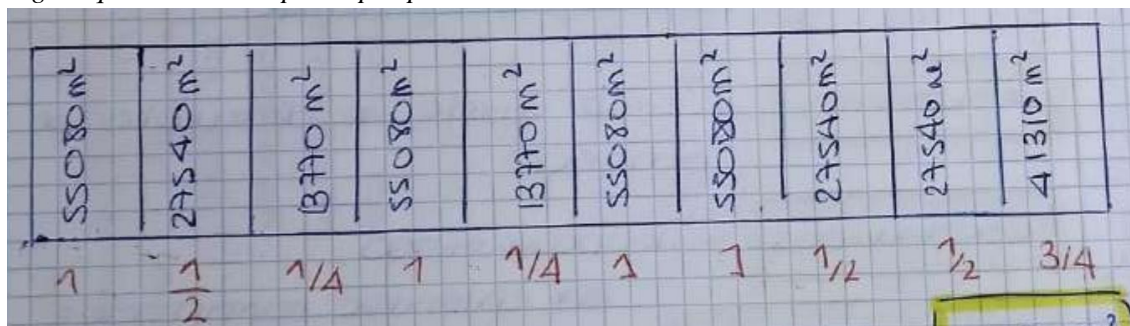


La segunda estrategia observada, que fue la más común, consistió en descomponer la zona ocupada por personas en figuras cuya área se estimó utilizando fórmulas escolares (Figura 3). En la mayoría de los casos, se asumió que las figuras estaban “llenas” de gente y se utilizó el dato de que caben 8 personas en un metro cuadrado, pero se encontró también un futuro maestro que consideró diferentes ratios de ocupación (6, 4 o 2 personas por metro cuadrado) según la figura sobre la que trabajó.

La tercera consistió en dividir la imagen dada por el enunciado de la tarea en diferentes regiones y estimaron la fracción de cada región que estaba ocupada por personas. En la mayoría de estos casos se tomaron diferentes regiones con fracciones distintas (Figura 4), aunque también se encontraron casos en los que se asumió una “fracción de ocupación” global (por ejemplo, uno de los futuros maestros consideró que la zona de la imagen ocupada por personas es un tercio de la misma).

Figura 4

Detalle de una producción que dividió la imagen en regiones y estimó las fracciones de cada región que estaban ocupadas por personas.



En cuanto a la valoración de la experiencia llevada a cabo, se percibió que la estructuración en pasos de la sesión condicionó el trabajo de los futuros maestros que la siguieron en diferentes sentidos. En primer lugar, se encontró que todos estos estudiantes universitarios mantuvieron una actitud positiva, siguieron la sesión y dieron una respuesta elaborada al problema planteado, algo que no sucede en general cuando se plantea problemas abiertos en la educación matemática de los futuros maestros de primaria. Esto indica que la secuenciación en pasos puede contribuir a estimular el compromiso de estos estudiantes universitarios con la resolución de problemas complejos y evitar los eventuales bloqueos y respuestas en blanco que pueden emerger en la resolución de este tipo de tareas. En segundo lugar, se percibió que los periodos de puesta en común y debate ayudaron a reducir errores (de elección de variables y estrategias, así como de cálculo), lo que llevó también a respuestas homogéneas y estimaciones de bastante precisión. Estos periodos de puesta en común, por el contrario, condujeron a situaciones menos deseables. Una de ellas es que el formador tuvo dificultades para que el grupo completo siguiera los debates, ya que cada maestro en formación quería seguir sus propias ideas y en pocas ocasiones valoraban las de sus compañeros. Otra debilidad de la experiencia es que se ha identificado una riqueza de ideas menor que la documentada por la investigación para la misma tarea en muestras similares (véase el estudio de Montejó-Gómez et al., 2023). De hecho, la totalidad de las estrategias encontradas aplica la idea de Densidad identificada por Segura (2022) para una generalidad de problemas de Fermi. Esta situación es natural debido a que los debates desarrollados en las puestas en común condujeron a la confluencia de ideas entre diferentes compañeros.

Respecto al uso de preguntas guía y la previsión sobre las respuestas de los estudiantes estipuladas en los escenarios simplificados, se ha observado que el seguimiento de los mismos resultó complejo para el formador de profesorado, ya que en ocasiones tuvo que imponer ideas para que el planteamiento de las preguntas guía emergiera del desarrollo de la sesión. Esto podría no ser posible en escenarios planteados para otras tareas en las que el formador no tenga experiencia, ya que el pensamiento de los futuros maestros que atiendan la sesión podría no corresponderse con la expectativa planteada en el escenario simplificado. Esta idea incide en la sensación del formador de que el empleo de los escenarios podría resultar contraproducente, ya que se trata de una herramienta compleja que puede inducir confusión entre los futuros maestros para resolver problemas como el abordado en la experiencia de aula desarrollada. Se plantea entonces el interés de desarrollar experiencias con otras tareas de modelización que supongan mayor dificultad. El Anexo II recoge un ejemplo de escenario simplificado para la tarea de

modelización “El Faro” (Blum y Borromeo, 2009), que ilustra el potencial de esta herramienta didáctica para resolver una de estas tareas de mayor dificultad.

4. CONCLUSIÓN

Este artículo presenta y valora el desarrollo e implementación de una experiencia de aula en la que se trabajó la resolución de problemas de Fermi a partir de estrategias de aprendizaje basado en la indagación (Maaß y Doorman, 2013). Para ello, se adaptaron los escenarios del proyecto MERIA (2016), que fueron diseñados para el aprendizaje de contenido matemático escolar, pero que aquí han sido utilizados para el desarrollo de competencias de modelización. Este hecho es novedoso y constituye el principal interés didáctico de la propuesta didáctica y del trabajo.

La experiencia llevada a cabo puso de manifiesto algunas ventajas potenciales de esta aproximación didáctica, como son el estímulo del compromiso con la resolución de problemas abiertos por parte de un estudiantado que suele tener dificultades en este tipo de aprendizaje matemático (Kaasila et al., 2010; Sáenz, 2009), así como su buen desempeño en este tipo de problemas. También se han observado puntos débiles, como la posible pérdida de ideas que emerge de la compartición de soluciones en gran grupo o la complejidad del diseño de las sesiones de trabajo, que puede resultar contraproducente en algunas ocasiones. En cualquier caso, la implementación en el aula de los escenarios simplificados que se diseñaron dejó patente los beneficios de dar *una cantidad justa de ayuda* para resolver problemas de Fermi. De esta manera, se puede afirmar que las ideas utilizadas suponen una contribución de valor a las prácticas de enseñanza de las matemáticas por competencias, por lo que el balance de la experiencia se puede considerar positivo.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Ärlebäck, J. B. y Albarracín, L. (2019). An extension of the MAD framework and its possible implication for research. En U. Jankvist, M. Van den Heuvel-Panhuizen y M. Veldhuis (Eds.), *Proceedings of CERME11* (pp. 1128-1135). Freudenthal Institute y ERME.
- Blum, W. y Borromeo, R. (2009). Mathematical Modelling: Can It Be Taught And Learnt? *Journal of Mathematical Modelling and Application*, 1(1), 45-58.
- Brousseau, G. (1997). *Theory of didactical situations in mathematics: Didactique des mathématiques, 1970-1990*. Kluwer Academic Publishers.
- Dorier, J. L. y García, F. J. (2013). Challenges and opportunities for the implementation of inquiry-based learning in day-to-day teaching. *ZDM*, 6(45), 837-849. <https://doi.org/10.1007/s11858-013-0512-8>
- García, F. J., Romero, R., Abril, A. M. y Quesada, A. (2018). Proyecto europeo “matemáticas y ciencias para la vida”. *Alambique*, 92, 77-79.
- Jefatura del Estado (2020). Ley Orgánica 3/2020, de 29 de diciembre, por la que se modifica la Ley Orgánica 2/2006, de 3 de mayo, de Educación. *Boletín Oficial del Estado*, núm 340, 122868.
- Kaasila, R., Pehkonen, E. y Hellinen, A. (2010). Finnish pre-service teachers' and upper secondary students' understanding on division and reasoning strategies used. *Educational Studies in Mathematics*, 3(73), 247-261. <https://doi.org/10.1007/s10649-009-9213-1>

- López, M., Albarracín, L., Ferrando, I., Montejo-Gómez, J., Ramos, P., Serradó, A., Thibaut, E. y Mallavibarrena, R. (2020). La educación matemática en las enseñanzas obligatorias y el Bachillerato. En D. Martín de Diego, T. Chacón, G. Curbera, F. Marcellán y M. Siles (Coords.), *Libro Blanco de las Matemáticas* (pp. 1-94). Centro de Estudios Ramón Areces.
- Maaß, K. y Doorman, L. M. (2013). A model for a widespread implementation of inquiry-based learning. *ZDM*, 6(45), 887-889. <https://doi.org/10.1007/s11858-013-0505-7>
- MERIA (2016). MERIA project: Mathematics Education Relevant, Interesting and Applicable. <https://meria-project.math.hr/>
- Ministerio de Educación y Formación Profesional (2022). Real Decreto 157/2022, de 1 de marzo, por el que se establecen la ordenación y las enseñanzas mínimas de la Educación Primaria. *Boletín Oficial del Estado*, núm 52.
- Montejo-Gómez, J., Fernández-Ahumada, E., Martínez-Jiménez, E. y Adamuz-Povedano, N. (2023). Análisis de modelos para la estimación de cantidades irregularmente distribuidas. En Jiménez-Gestal, C., Magreñán, Á. A., Badillo, E. e Ivars, P. (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVI* (pp. 387-394). SEIEM.
- Sáenz, C. (2009). The role of contextual, conceptual and procedural knowledge in activating mathematical competencies (pisa). *Educational Studies in Mathematics*, 71(2), 123-143. <https://doi.org/10.1007/s10649-008-9167-8>
- Segovia, I., Castro, E., Castro, E. y Rico, L. (1989). *Estimación en cálculo y medida*. Síntesis.
- Segovia, I. y Castro, E. (2009). La estimación en el cálculo y en la medida: fundamentación curricular e investigaciones desarrolladas en el Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada, *Electronic Journal of Research in Educational Psychology*, 17(7), 499-536.
- Segura, C. (2022). *Flexibilidad y rendimiento en la resolución de problemas de estimación en contexto real. Un estudio con futuros maestros* [Tesis doctoral]. Universidad de Valencia, Valencia, España.
- Van den Heuvel-Panhuizen, M. y Drijvers, P. (2014). Realistic mathematics education. En S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of mathematics education* (pp. 521-525). Springer.

Anexo I. Escenario simplificado de la tarea planteada en la sesión

Ejemplo 2 (Seguidores del presidente) Barack Obama fue elegido presidente de los Estados Unidos de América en 2009. La asistencia a su ceremonia de investidura fue histórica, y se puede ver en la fotografía de debajo.



Proporciona una estimación de la cantidad de personas que asistieron a la ceremonia de investidura de Obama. Explica tu solución.

Escenario simplificado de la tarea

Objetivos principales	i) Identificar y asignar variables y parámetros: identificar aquellas cantidades que son relevantes para estimar la asistencia. Definirlas y darles un nombre. ii) Diseñar estrategias para resolver problemas: proporcionar un conjunto de pasos que llevan a una estimación de la asistencia sin necesidad de conocer datos concretos. iii) Obtener información y estimar datos: obtener de forma autónoma valores realistas para el área que ocupa una persona o relaciones entre áreas en metros cuadrados y la cantidad de personas que ocupan esas áreas.	
Objetivos secundarios	a) Aplicar procedimientos matemáticos: calcular áreas y usar fracciones. Manipular expresiones algebraicas que describan una estrategia de cálculo (dependiendo de la estrategia y del estudiante). b) Introducir lenguaje formal (dependiendo de la estrategia y del estudiante): anotar una expresión algebraica que describe la estrategia de cálculo. c) Evaluar la utilidad del modelo: comparar los resultados obtenidos con los resultados de los compañeros y con información tomada de internet. d) Explicar el modelo: escribir un informe que detalle la estrategia de estimación y los cálculos y el razonamiento involucrado en las estimaciones hechas.	
Conocimientos previos	Fracciones, áreas y medida. El conocimiento sobre escalas también puede ser útil.	
Material necesario	Acceso a internet para buscar las medidas del parque del Capitolio. Instrumentos de medida para estimar el área ocupada por una persona.	
Paso	Acciones del profesorado	Acciones de los estudiantes y reacciones a las acciones del profesorado.
Paso 1 (5')	Cuestiones preliminares. ¿Es esta tarea muy difícil para vosotros? ¿Por qué? ¿Qué datos o información previa necesitáis?	- Es muy difícil: no sabemos cómo empezar. - El número de personas que cabe en cada zona del parque y la proporción de área que está ocupada por gente. - Las dimensiones del parque. - El área que ocupa una persona.
Paso 2 (10')	Primera cuestión de guía. Anotad una estrategia (conjunto de pasos a seguir) para contabilizar la asistencia si conocieras todos los datos necesarios.	A) Conociendo el área que ocupa una persona y las áreas de cada zona del parque y las fracciones de cada una ocupadas por personas: A1) Dividir el área de cada zona del parque entre el área ocupada por una persona para saber el número de personas que caben cada zona (si estuviera llena). A2) Multiplicar por la fracción de esa zona que está ocupada para saber el número de personas que hay.

		<p>A3) Sumar los resultados para obtener la asistencia total. Esta estrategia se podría seguir en el parque entero, pero previamente habría que estimar la fracción de parque que estaba ocupada.</p> <p>B) Sabiendo el área ocupada por una persona y las áreas ocupadas por personas en cada zona del parque</p> <p>B1) Divide el área ocupada por gente entre el área ocupada por una persona para saber la asistencia en esa zona.</p> <p>B2) Sumar los resultados para obtener la asistencia total. Se puede seguir esta estrategia en el orden contrario (primero sumar las áreas y dividir después).</p>
Paso 3 (15')	<p>Segunda cuestión de guía. Estimad todos los datos que necesitáis para seguir vuestras estrategias (¿dónde fue tomada la foto?) y dad vuestra estimación de la asistencia a la investidura de Obama. Explica tus estimaciones, siendo todo lo preciso que puedas.</p>	<p>1) Para estimar el área ocupada por una persona:</p> <p>1a) Calcular la densidad: contar la gente que cabe en una superficie de área conocida y dividir entre este área.</p> <p>1b) Medir una persona y aproximar su área.</p> <p>1c) Buscarlo en internet</p> <p>2) Para estimar el área de cada zona del parque: estimar sus dimensiones (buscando en google o usando una escala) y aplicar fórmulas adecuadas.</p> <p>3) Para estimar las fracciones ocupadas por la gente en cada parte: estimación directa o global, compensando densidades de diferentes zonas.</p> <p>4) Para estimar el área ocupada por la gente en cada zona: multiplicar el área total de la zona por la fracción ocupada por gente.</p>
Paso 4 (15')	<p>Ideas clave</p> <p>i) Importancia de saber qué cantidades son realmente necesarias para hacer la estimación. <i>Para abordar una situación abierta, debemos centrar la atención en la pregunta a resolver, preocuparnos por las cantidades que hay que conocer para dar una respuesta y definir con precisión y dar un nombre a cada una de estas cantidades. No debe importarnos si no conocemos sus valores exactos.</i></p> <p>ii) Necesidad de definir y seguir una estrategia. <i>A la hora de enfrentarse a una pregunta abierta, es buena idea definir con precisión los cálculos que hay que hacer antes de hacerlos. Esto evita utilizar datos innecesarios, hacer cálculos inútiles y además ayuda a centrarse en el problema a resolver, y no prestar atención a detalles irrelevantes. Una estrategia bien definida también contribuye a controlar el proceso de cálculo y detectar errores.</i></p> <p>iii) Importancia de obtener información más allá de la que da el enunciado. <i>Cuando resolver la tarea requiere utilizar información de la que no disponemos, debemos aproximar esta información (calcularla, estimarla, buscarla en internet, etc). Debemos ser tan precisos y cercanos a la realidad como podamos. Es también recomendable que anotemos la fuente (o el cálculo/razonamiento) de donde obtenemos la información utilizada.</i></p>	
Preguntas de ampliación		
Producciones de los estudiantes	<p>Informe completo e individual sobre cómo responder a la pregunta inicial y cuestionario online individual con tres preguntas de respuesta corta (250 caracteres cada una). Las preguntas son:</p> <p>1) Haz una lista con los datos que necesitaste para dar tu estimación y da un esquema breve de la estrategia que empleaste para resolver esta tarea.</p> <p>2) Explica brevemente cómo obtuviste cada uno de los datos que necesitabas para dar tu estimación.</p> <p>3) De acuerdo a tus cálculos, ¿cuánta gente asistió a la investidura de Barack Obama? ¿Es tu estimación similar a las de tus compañeros o a las que has encontrado en internet? ¿Por qué?</p>	

Anexo II. Escenario simplificado para la tarea “El Faro” (adaptada de Blum y Borromeo, 2009)

Ejemplo 1 (El faro, adaptada de Blum & Borromeo-Ferri, 2009). El faro de Cabo Mayor está situado al Norte de Santander, muy cerca de la playa del Sardinero, en un lugar abierto al Mar Cantábrico. Este faro está (da luz) a 91 m sobre el nivel del mar, que es de gran utilidad para avisar a los barcos de la cercanía de la costa.



Cuando un barco empieza a divisar la luz del faro sobre el horizonte ¿a qué distancia de la costa se encuentra?

Escenario simplificado de la tarea

Objetivos principales	i) Dibujar la situación: hacer un esquema del faro y del barco en el que la Tierra se representara como un círculo y que permita visualizar la situación. ii) Usar y formular hipótesis: aprovechar la curvatura de la Tierra para utilizar las propiedades del círculo y el Teorema de Pitágoras iii) Aplicar ideas matemáticas en otros contextos: usar que 1) en el momento en que el barco empieza a divisar el faro, la línea de visión entre ambos es tangente a la superficie terrestre, 2) observar que esta línea es perpendicular al radio de la Tierra en ese punto de horizonte y, por tanto, 3) aplicar el Teorema de Pitágoras para calcular distancias.	
Objetivos secundarios	a) Identificar y asignar variables y parámetros: identificar, en el esquema dibujado, las distancias conocidas y desconocidas que forman parte del modelo. b) Aplicar procedimientos matemáticos: aplicar el Teorema de Pitágoras, hacer cálculos que involucren raíces cuadradas y usar unidades de medida apropiadas para trabajar simultáneamente en diferentes escalas (91 m frente a 6370 Km). c) Analizar la verosimilitud del modelo: evaluar si el orden de magnitud de la solución obtenida es plausible. d) Explicar el modelo: escribir un informe que detalla la solución obtenida: explicar la importancia de la curvatura de la Tierra, proporcionar el esquema hecho y los cálculos desarrollados.	
Conocimientos previos	Teorema de Pitágoras, propiedades del círculo.	
Material necesario	Acceso a internet para buscar los datos reales necesarios (radio de la Tierra y la solución de la tarea, para validarla)	
Paso	Acciones del profesorado	Acciones de los estudiantes y reacciones ante las acciones del profesorado
Paso 1 (5')	Questiones preliminares. ¿Cómo abordaría la situación? ¿Es esta tarea muy difícil para vosotros? ¿Por qué? ¿Qué información o datos previos necesitáis? ¿Cuánto esperáis que sea aproximadamente la distancia que se pide?	- Estrategias básicas: un triángulo rectángulo (Tierra plana y rayos de luz que caen formando cierto ángulo). - Dificultad alta: no saben cómo empezar - Datos necesarios: la altura del barco, ángulo con el que la luz incide, existencia o no de oleaje o de nubes. - Expectativas sobre la solución dispersas: estimaciones de pocos metros y de muchos kilómetros.

Paso 2 (10')	Primera cuestión de guía. Un día soleado, hay un momento donde el barco puede ver la torre del faro, pero no puede ver la casa. Haz un dibujo que explique esta situación, usando unidades de medida adecuadas.	<ul style="list-style-type: none"> - Desacuerdo: hay alumnos que piensan que si el barco ve la torre, entonces también ve la casa. - No entienden cómo puede ocurrir la situación descrita - Surge la idea de considerar la curvatura de la Tierra.
Paso 3 (15')	Segunda cuestión de guía. Ahora, pensad en el momento en el que el barco divisa el faro por primera vez. Utiliza las ideas que se han discutido para estimar la distancia del barco a la costa y compara tu resultado con tu primera estimación y con resultados que encuentres en internet.	<ul style="list-style-type: none"> - La altura del barco es un dato a tener en cuenta - La línea de visión barco-faro es tangente a la superficie terrestre - Algunos alumnos observan que esta línea es perpendicular al radio terrestre. - El Teorema de Pitágoras es útil en este caso. - El radio de la Tierra se puede buscar en internet.
Paso 4 (15')	<p>Ideas clave</p> <p>i) La importancia de representar una situación geométrica presentada en contexto. <i>Hacer un esquema de la situación facilita centrarse en la cuestión a resolver en situaciones geométricas. En este caso, permitió identificar los datos y descubrir la clave de la tarea: hay que usar la curvatura terrestre.</i></p> <p>ii) La importancia de las hipótesis. <i>Todos sabemos que la superficie de la Tierra se curva, pero en un primer intento es usual ignorar este hecho. Cuando se trabaja con situaciones reales, debemos seleccionar qué características de la realidad son relevantes para responder a nuestra pregunta. Debemos encontrar aquellos elementos que facilitan la aplicación de ideas matemáticas, pero no podemos simplificar excesivamente ya que nuestra solución debe ser útil.</i></p> <p>iii) El conocimiento sobre las propiedades del círculo que se aplicaron. <i>El Teorema de Pitágoras es aplicable porque la línea recta entre el faro y el barco es tangente a la Tierra y por tanto es perpendicular al radio.</i></p>	
Preguntas de ampliación	Una fórmula general de la distancia entre cualquier barco y cualquier faro; La diferencia entre “distancia en línea recta” y distancia sobre la superficie.	
Producciones de los estudiantes	Informe completo e individual en el que se da respuesta a la pregunta inicial y cuestionario online individual con tres preguntas cortas (250 caracteres cada una). Las preguntas son: 1) ¿Por qué es necesario tomar en consideración el radio de la Tierra para resolver esta tarea? 2) ¿Por qué se puede aplicar el Teorema de Pitágoras? 3) ¿A qué distancia, aproximadamente, está el barco de la costa la primera vez que divisa el faro?	

Entrevista al profesorado: Dionisio Lobatón Cebrián

Dionisio Lobatón Cebrián

IES Leopoldo Queipo (Melilla, España), dionisio@iesleopoldoqueipo.com

Resumen: Este artículo presenta la entrevista realizada a Dionisio Lobatón Cebrián, profesor en Educación Secundaria y Bachillerato con más de quince años de experiencia docente. El entrevistado describe y valora algunas actividades de innovación desarrolladas en su carrera y destaca el riesgo que supone convertir la innovación en el fin de la educación. También reflexiona sobre el conocimiento y la competencia del profesorado, así como sobre la pertinencia del uso de materiales en el aula de matemáticas. Finalmente, el profesor valora los pros y contras de los cambios normativos recientes en el sistema educativo.

Palabras clave: entrevista al profesorado, educación secundaria y bachillerato, clase invertida, juegos y matemáticas.

Teacher interview: Dionisio Lobatón Cebrián

Abstract: This paper shows the interview made to Dionisio Lobatón Cebrián, who has more than 15 years of teaching expertise. The interviewee describes and discusses some of the innovation activities developed along his career and highlights the risk of making innovation the end of education. He also reflects on the knowledge and competence of teachers, as well as on the relevance of the use of materials in the mathematics classroom. Finally, this teacher assesses some pros and cons of recent regulatory changes in the education system.

Key words: : teacher interview, secondary and pre-university education, flipped classroom, games and mathematics.

1. TRAYECTORIA

Revista Epsilon (RE): ¿Cómo resumiría su recorrido profesional para que las/los lectores de Epsilon le conozcan?

Dionisio Lobatón Cebrián (DLC): Aunque mi formación académica se encaminó inicialmente al área de estadística, una breve experiencia docente en el IES Ave María “Casa Madre” de Granada cambió mi perspectiva sobre la educación. A raíz de ahí, decidí aterrizar en Melilla y comenzar a dar clases en secundaria y bachillerato. Desde hace dieciséis años soy profesor de matemáticas en una ciudad acogedora y en un contexto multicultural radicalmente distinto al que se puede encontrar en los centros educativos de la península. En mi particular opinión, es un pequeño lujo del que puedo disfrutar y que recomiendo a cualquiera que tenga la oportunidad.

2. INNOVACIÓN EN LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS

RE: ¿Cuál es su motivación para centrarse en experiencias innovadoras en matemáticas?

DLC: Ninguna. Nadie garantiza que una innovación mejore la adquisición de conocimientos de sus alumnos. Todo docente consciente del valor que tiene su labor para sus grupos va a anteponer unos conocimientos mínimos y la profundización en ciertos contenidos para que puedan ser aplicados en situaciones reales, en otras materias académicas o en la propia construcción de otros conocimientos matemáticos. Dar valor a la innovación en sí es como sustituir la luna delantera de un coche por una pantalla en la que se proyecte lo que se ve a través de la luna delantera. Las innovaciones pueden ser sorprendentes, incluso motivadoras, pero nunca pueden ser el fin del proceso educativo. Que los docentes conozcamos nuevas herramientas tecnológicas o nuevos modelos metodológicos para crear actividades o diseñar nuestras sesiones es muy positivo, porque puede mejorar nuestro desempeño en el aula. Pero ningún docente debería obsesionarse con introducir cambios en sus clases porque sienta que debe seguir las corrientes de innovación que desde la administración se están tratando de implementar. A esto también colaboran los gurús educativos que no se preocupan del fin formativo de la educación o algunos docentes que se realizan profesionalmente a través de la innovación.

Figura 1

Estudiantes de 4º curso de ESO trabajando en las fichas durante el periodo de clase.



En 2017, después de haber leído y estudiado las bondades del aula invertida, decidí implementar esta metodología en mis propias clases. Con la certeza de que esta metodología serviría para mejorar los resultados de mis alumnos de matemáticas de cuarto de ESO, creé vídeos para que mis alumnos los visionaran y tomaran notas antes de llegar al aula. Una vez en el aula resolvíamos las dudas sobre los vídeos en una puesta en común en la que participaban alumnos que pocas veces se habían interesado por la asignatura. Continuábamos realizando fichas de actividades por parejas o individualmente (tal y como se muestra en la Figura 1), mientras yo resolvía las dudas que iban surgiendo. Estas actividades fueron diseñadas de manera muy constructiva, de modo que pudieran llevar a la práctica los distintos contenidos trabajados en los vídeos.

El resultado fue alentador en las primeras sesiones. Los alumnos veían los vídeos y aquellos que no solían participar nunca, comenzaron a interesarse por la asignatura. Los primeros trabajos que evalué me dieron el primer “baño” de realidad. Ya nadie sacaba ceros, los peores alumnos del grupo habían mejorado su adquisición de conocimientos y, en consonancia, mejoraban sus resultados. Sin embargo, los alumnos más motivados, que eran capaces de

profundizar en la materia, empeoraron. Esto fue el primer toque de atención. Hablé con las que hasta ese momento habían sido dos de las alumnas más destacadas de la clase y me transmitieron su incomodidad con el cambio. No les gustaba no poder resolver sus dudas inmediatamente, durante la explicación en vivo. El proceso de abstracción que vivían al atender a las explicaciones a través de los vídeos era muy distinto al que habían vivido en el aula con la metodología tradicional. Sentían que no se enteraban bien del todo. Así lo corroboraban sus primeros resultados.

Con ciertas dudas, pero con ánimo para realizar algunos cambios, afronté la segunda unidad. Reduje la duración de los vídeos que hasta aquel momento estaban durando unos diez minutos. Hice muchos más vídeos, pero no se extendían más de cinco minutos. Algunos de ellos profundizaban más en la materia. Ahora, comprender bien los contenidos era más importante para poder avanzar al siguiente vídeo. Con estos cambios conseguí que los alumnos con más dificultades dejaran de ver los vídeos. Cada vez participaban menos en la fase inicial de dudas de cada sesión. Los alumnos que desde comienzo de curso habían obtenido buenos resultados monopolizaban ahora este periodo. Muchos no eran capaces de realizar las actividades ni individualmente ni en grupo. Empezaba a sentir que todos los alumnos estaban descontentos.

Tercera y última unidad. Fiel al aula invertida, decidí darle un último giro. Bajé el nivel de profundización, los vídeos seguían durando menos de cinco minutos y la cantidad de vídeos se redujo nuevamente. Éxito. Todos mis alumnos habían mejorado, pero ¿qué había mejorado? Todos participaban más. Todos realizaban las fichas de actividades en clase. Todos dominaban la materia. Pero ya no trabajábamos los contenidos que yo consideraba que eran imprescindibles de cara al futuro. No me había preocupado de que mis alumnos aprendieran, sino de que no fracasaran. Capacitar a mis alumnos se había convertido en un objetivo secundario frente a implementar con éxito la innovación metodológica.

No dudo que habrá docentes que puedan llevar a cabo la implementación de metodologías innovadoras con éxito. Sin embargo, ese éxito no debería limitar las oportunidades de afrontar con garantías los retos académicos o de otra índole de los propios alumnos.

RE: ¿Se ha interesado más recientemente por alguna otra experiencia innovadora para la enseñanza de las matemáticas?

DLC: La metodología que utilizo hoy en día en mis clases es tradicional. Una sesión puede consistir en una explicación de conceptos o procedimientos, ejemplos donde se utilicen y ejercicios para que los alumnos los pongan en práctica. En otras ocasiones realizamos sesiones prácticas en las que los alumnos van señalando dudas y van dirigiendo las actividades que quieren realizar. Siempre contamos con relaciones de ejercicios que les entrego al comenzar cada unidad. Este año, además, les envío por correo electrónico ejercicios propuestos con sus soluciones por separado, donde pueden ver los procedimientos paso a paso. Esto permite que aquellos que no son muy buenos tomando notas de la pizarra tengan un recurso extra para comprender los contenidos. De momento, ha tenido buena acogida y algunos alumnos lo agradecen.

Si hay algo que creo que funciona en el aula, metodológicamente hablando, es la ilusión. Muchas veces los docentes entramos en el aula con un estado de ánimo que nos condena al fracaso. Mostrar ilusión y dinamismo en una explicación despierta el interés en los alumnos, capta su atención, los involucra en la dinámica de la clase. Las aptitudes sociales son

importantes en nuestra profesión. Las capacidades de comunicar y de empatizar facilitan mucho esa labor de transmisión del conocimiento. A veces, cuando esas aptitudes no nos acompañan, podemos ser buenos actores capaces de engatusar a los alumnos generando en ellos la misma ilusión hacia la materia que nosotros mismos mostramos.

También influyen otros factores. Hay que ser capaz de ganarse la confianza del grupo. Hace años el papel del profesor como fuente de conocimiento cierto no se ponía en tela de juicio. Hoy en día eso ha cambiado y es cada vez más común que ante la explicación del docente un alumno diga en clase frases como: “eso está mal” o “eso no es así”. La falta de confianza en el docente tiene que desaparecer y para ello son necesarios dos elementos: dominar la materia y tener seguridad en uno mismo. La mayoría de docentes domina su materia, sin embargo, muchos carecen de esa seguridad que les va a elevar su estatus frente al grupo de alumnos. Para ganar su atención tienen que creer en lo que dices. Hay cierto principio de autoridad que facilita que los alumnos adquieran nuevos conocimientos conectándolos con los que ya tienen. Siempre será más sencillo si tienen la certeza de que quien se los transmite domina los contenidos con garantías. Tanto el dominio de la materia como la seguridad en uno mismo se ganan con la propia experiencia docente, así que es muy importante creer en lo que estás haciendo, aunque a veces no veas los resultados a corto plazo. Todos podemos ser buenos docentes, pero tenemos que poner de nuestra parte y tratar de mejorar curso tras curso.

RE: Las teorías de conocimiento del profesor que surgen de la investigación educativa suelen distinguir entre conocimiento del contenido, que usted reconoce con precisión en su respuesta anterior, y conocimiento didáctico del contenido, que no se vislumbra en su discurso. ¿Qué valor le da usted a este tipo de conocimiento y cómo encaja en las competencias del profesorado que ha señalado?

DLC: En secundaria, para el docente de cualquier especialidad, el conocimiento didáctico del contenido va íntimamente ligado a la experiencia profesional. En una realidad ideal, el especialista debería ampliar profundamente ese conocimiento didáctico al cursar el MAES, o, al menos, tener los suficientes recursos para continuar su formación de manera autónoma en esa dirección. Sin embargo, esto dista mucho de la realidad.

Cada contenido que se imparte ha de tener una sólida base en los conocimientos previos de los alumnos y se debe proyectar hacia el futuro académico como base de próximos conocimientos, ya sea en el propio curso o en cursos venideros, incluso en otras materias. Ser conscientes de cómo y para qué se va a utilizar cada contenido, en qué se sostiene y hacia dónde se proyecta, debería ser una cuestión previa a resolver antes de abordarlo. Pero lo cierto es que esa reflexión de naturaleza didáctica solo nos la proporciona, a día de hoy, la propia práctica docente. Nada como impartir una materia en cuarto de ESO para ser conscientes de en qué contenidos se debe incidir y cómo se deben explicar los de tercero de ESO. Cuando en un curso posterior notas las carencias de los alumnos sobre lo que deberían conocer del curso anterior, mejora tu comprensión de la materia, en general, y de los contenidos del curso anterior, en particular. Conectas los contenidos formando cadenas que los relacionan curso tras curso. Por ejemplo, no es lo mismo impartir trigonometría en cuarto de ESO sin conocer estas relaciones, que partiendo de un conocimiento bien construido de los teoremas de Pitágoras y Tales, y de los elementos de la geometría plana, sabiendo que se va a utilizar tanto en física, en la descomposición vectorial, como en matemáticas en primero y segundo de bachillerato.

En otro sentido, cómo impartir los contenidos o qué estrategias utilizar para hacérselos llegar a los alumnos de manera cada vez más eficiente es otra reflexión que se realiza en el transcurso de la trayectoria docente. Cada curso frente a la misma materia, pero con la experiencia de los cursos anteriores, se desarrollan estrategias para captar la atención de los alumnos de cara a que no aparezcan determinados errores, a que comprendan más rápidamente un procedimiento y sean capaces de reproducirlo, o a que tengan una comprensión profunda de un determinado concepto.

Aunque el conocimiento didáctico del contenido es esencial para mejorar la práctica docente, veo pocas alternativas para poder realizar un proceso externo a la propia experiencia en el aula que permita mejorarlo. Desde luego, más allá del MAES, no conozco ninguna otra formación que se centre en este aspecto. Incluso en el MAES, esta formación se centra en conceptos básicos, pero no atiende a los más abstractos. Por ejemplo, es fácil encontrar recursos didácticos en la web que permitan reflexionar sobre contenidos relacionados con los números y la aritmética, pero son escasos los que profundizan en el análisis o el álgebra.

3. EL PAPEL DE LOS MATERIALES Y RECURSOS

RE: Ya que habla de recursos, ¿qué valor concede a los materiales y recursos en la enseñanza de las matemáticas?

DLC: Tener variedad de materiales y recursos para que los alumnos pongan en práctica sus conocimientos y los asimilen es importante. Pero los materiales en sí no son elementos mágicos que transfieran conocimientos. Hay que aprender a usarlos al igual que hay que aprender a seguir una explicación, a extraer las ideas principales de un texto, a tomar apuntes o a corregir ejercicios. El proceso de transferencia de conocimientos se puede realizar usando materiales manipulativos o recursos tecnológicos que pueden ser motivadores. Para ello, hay que aprender a usarlos y es necesaria una retroalimentación que en ocasiones puede venir de la propia interacción a través del ensayo y error, pero que en la mayoría de los casos va a ser necesario que el docente intervenga guiando ese proceso o, al menos, corrigiéndolo.

En mi centro, para celebrar el día del libro, realizamos actividades complementarias que nos permiten disfrutar de un día distendido con los alumnos. Gymkhanas, Escape Rooms, o talleres de manualidades diversos son ejemplos de estas actividades. Desde hace tres años hemos introducido los juegos de mesa como una actividad más. El valor educativo del juego es muy alto. La comprensión y puesta en práctica de las reglas, la creación de estrategias y las interacciones con los demás participantes, ya sea compitiendo o colaborando, desde el respeto son algunas de las ventajas que nos aporta esta actividad. Al comenzar esta actividad siempre realizamos una explicación inicial. El juego de mesa como recurso educativo necesita que alguien explique sus elementos, sus mecánicas, sus objetivos y las estrategias que se pueden utilizar.

El juego más sencillo necesita una explicación. Después de las dos primeras partidas con miembros del departamento de matemáticas, dejamos que los alumnos expliquen el juego a otros alumnos que se quieren incorporar. La primera vez que utilizamos los juegos, al ver que tras esas dos partidas los alumnos los dominaban con soltura, dejamos que hicieran esa explicación sin supervisión. Tras un rato jugando vimos que en tres mesas se habían liado. Los que se incorporaban no entendían bien el juego y los que sabían jugar cometían errores. Dominar el juego en dos partidas no implica saber explicarlo. Así que tuvimos que reiniciar las

partidas señalando los problemas que habían ido surgiendo. Afortunadamente, el ambiente distendido hizo que la actividad fuera un éxito, pero ¿qué habría ocurrido si estuviéramos en otro contexto donde la motivación para aprender no fuera tan alta?

Habitualmente en el aula no aprendemos para jugar o para divertirnos. Aunque se puede dar el caso en que las dinámicas de clase sean divertidas y no generen ninguna tensión, el aprendizaje de cualquier herramienta nueva puede llegar a causar aversión a algunos alumnos. Utilizar en el aula nuevas herramientas o recursos debe ir acompañado por una reflexión sobre cómo deben introducirse y qué objetivos pretenden alcanzarse. No digo con esto que haya que escribir tres folios, ni tan siquiera una palabra, pero sí debemos pensar en cómo hacerlo paso a paso, para adelantarnos a las dificultades que puedan aparecer. Programar una actividad nueva no debe relacionarse con rellenar un texto burocrático como nos tiene acostumbrados la administración. Debería parecerse más a una charla con los colegas comentando qué puede salir mal o cómo puede llevarse a cabo dicha actividad.

RE: ¿Esas charlas con los colegas que acaba de mencionar son comunes en su centro educativo?

DLC: Siempre se comentan detalles sobre algunos aspectos con otros compañeros de departamento, pero no es algo habitual, suele ser esporádico. En general, los docentes somos celosos sobre nuestra actividad dentro del aula. Aunque colaboramos y nos coordinamos, no se suele dar ese tipo de charlas, quizá por temor a no sentir la aprobación de los colegas.

En mi segundo curso como profesor, una compañera me ofreció la oportunidad de entrar a una de sus clases. Observar el ambiente de la clase, el trato de mi compañera con los alumnos, la autonomía con que ellos orientaban la dinámica de la clase para ir resolviendo sus dudas, ... fue una experiencia que me aportó mucho como docente. Para mí fue una referencia muy positiva en un momento en el que todavía tienes muchas incertidumbres sobre lo que haces bien y lo que haces mal en el aula.

Poder compartir las experiencias dentro del aula con otros compañeros me parece fundamental para crecer en esta profesión. La idea más simple, esa que jamás se te ha pasado por la cabeza, puede ser de uso habitual para otro compañero. Compartir las experiencias para impartir un determinado contenido puede revelar nuevas estrategias que puedes adoptar en tu aula. Volviendo a lo que comentábamos antes sobre el conocimiento didáctico del contenido, esta puede ser una buena manera de ampliarlo y que todos los participantes de una charla así se enriquezcan con las estrategias didácticas de otros. Desde luego, no lo vería como una charla formal, sino como un coloquio informal, aunque con ese objetivo predefinido.

Lo que sí se suele comentar con menos reticencias son las estrategias para intervenir en clase ante situaciones disruptivas. Todos los compañeros en determinado momento hemos tenido dificultades en el aula para afrontar un conflicto con un alumno o entre los propios alumnos. En ese aspecto sí suele haber mucha colaboración. Puede ser que nos identifiquemos unos con otros y compartamos solidariamente esas estrategias que a nosotros mismos nos fueron bien.

4. CAMBIOS NORMATIVOS Y CURRICULARES

RE: ¿En qué medida cree que ha influido la nueva ley educativa en la práctica docente según su experiencia?

DLC: Cualquier cambio de ley educativa supone una reflexión sobre la práctica docente. Sin valorar si es mejor o peor que la anterior, la reflexión tiene algo positivo en cuanto a reevaluar lo que hacemos en el aula. Sin embargo, cualquier cambio conlleva un proceso de readaptación que paraliza otras actividades que nos competen como docentes. Si quiero realizar una formación específica para ampliar mis conocimientos en una determinada herramienta o en una nueva metodología didáctica y, a la vez, la Administración me obliga a adaptar la metodología que uso en el aula, a modificar los sistemas de evaluación y de calificación, y a crear nuevos instrumentos de evaluación que se adapten a la filosofía de la nueva ley, es evidente que tengo que renunciar a esa formación que, probablemente, hubiera sido más positiva para mi desempeño en el aula.

Mejorar como docentes es un poliedro con numerosas aristas: la formación pedagógica, la actualización tecnológica, la renovación de las aplicaciones dentro de nuestras materias específicas o las inquietudes personales que pueden favorecer el desarrollo de vínculos interdisciplinares en el aula. ¿Se ha considerado algo de esto en la nueva ley educativa? ¿Algún legislador ha pensado en desarrollar una carrera profesional docente? La práctica docente no está en el foco de la ley y, en consecuencia, es difícil que pueda mejorar. Un plan real de formación para el profesorado que sea práctico y funcional, y la conciliación de esta formación con la vida personal daría un giro de ciento ochenta grados en este ámbito. Pueden continuar cambiando las leyes educativas, pero así no van a lograr que mejore la práctica docente.Ç

Como funcionarios somos conscientes de que estamos supeditados a la ley, pero a ningún funcionario le cambian la ley marco por la que se rige su trabajo como a los docentes. La instrumentalización política de la educación nos deja a la deriva en un barco que cambia de rumbo constantemente. Así será imposible que lleguemos a buen puerto.

Problema de olimpiadas en equipo, ¿una situación de aprendizaje?

María Florencia Cruz

Universidad Nacional del Litoral, mfacruz@fhuc.unl.edu.ar

Antonio Moreno

Universidad de Granada, amverdejo@ugr.es

Rafael Ramírez Uclés

Universidad de Granada, rramirez@ugr.es

Resumen: *El objetivo central del proceso de enseñanza y de aprendizaje es que el estudiantado logre producir y atribuir sentidos matemáticos diversos durante su paso por la educación obligatoria. Para esto, las recomendaciones curriculares proponen la generación e implementación de situaciones de aprendizaje en las que se promueva el desarrollo de competencias que potencian la producción de los distintos sentidos e incluso la articulación entre ellos. En este artículo analizamos una tarea de la Olimpiada Thales de Granada en 6° de Primaria desde la perspectiva de las situaciones de aprendizaje. El modo de análisis propuesto destaca las características como potencial situación de aprendizaje en el aula.*

Palabras clave: *Situación de aprendizaje; Tarea matemática; Sentido matemático; Competencia matemática.*

A team math olympics problem, a learning situation?

Abstract: *The central objective of the teaching and learning process is for students to be able to produce and attribute diverse mathematical meanings during their time in compulsory education. To this end, the curricular recommendations propose generating and implementing learning situations that promote the development of competencies that enhance the production of different senses and even the articulation between them. In this article, we analyze a task of the Thales Olympiad of Granada in 6th grade of Primary School from the perspective of learning situations. The proposed mode of analysis highlights the characteristics as a potential learning situation in the classroom.*

Key words: *Learning situation; Mathematical task; Mathematical sense; Mathematical competence.*

1. INTRODUCCIÓN

Los procesos de enseñanza y aprendizaje están influenciados por aspectos sociales, culturales, históricos, políticos y tecnológicos de los diseñadores curriculares y del profesorado (Moreno, 2004). Además, los cambios educativos que se promueven a través del mismo suelen implicar

importantes modificaciones sobre qué significa aprender matemáticas y sobre las prácticas de aula.

Los recientes cambios curriculares en España promueven transformaciones en las actuaciones que se desarrollan en el aula e incluso un cambio de perspectiva sobre las expectativas de aprendizaje del alumnado de la etapa de primaria y secundaria obligatoria. Específicamente, el foco ya no se encuentra en el desarrollo de contenidos recurriendo a modos de trabajo en el aula tradicionales, sino que se busca la producción de sentido en el marco de diversas vivencias y/o experiencias. Es decir, el actual objetivo central del proceso de enseñanza y de aprendizaje es que el estudiantado logre producir y atribuir sentidos matemáticos diversos durante su paso por la educación obligatoria.

En esta línea, la propuesta de trabajo en el aula se aleja del uso de libro de texto tradicional puesto que, como señala Skosvmose (2000), éstos en muchas oportunidades podrían considerarse un “hecho” en la clase, con solución, en general, única y en los que una autoridad externa a la clase es quien determina las prácticas que se ponen en juego. Este nuevo currículo invita al profesorado a profundizar en la justificación de la relevancia de las tareas que se desarrollan.

En este marco, el profesorado tiene el desafío, e incluso la dificultad, de buscar modos de contribuir para que el estudiantado logre la producción de sentidos matemáticos cognitivos (relativos al conocimiento) y también emocional, a saber: numérico, algebraico, sentido de la medida, espacial, estocástico y socioafectivo. Para esto, las recomendaciones curriculares proponen la generación e implementación de situaciones de aprendizaje en las que se promueva el desarrollo de competencias que potencian la producción de los distintos sentidos e incluso la articulación entre ellos.

Atendiendo a lo mencionado y con el fin de contribuir y ejemplificar una potencial situación de aprendizaje, en este artículo buscamos analizar una prueba propuesta a estudiantes de sexto curso de educación primaria en el marco de la Olimpiada Matemática de Primaria en Granada. En particular, identificamos **competencias y sentidos** que se pueden desarrollar con el fin de analizar si la misma constituye una situación de aprendizaje.

2. SENTIDOS, COMPETENCIAS Y SITUACIÓN DE APRENDIZAJE

La importancia de la producción de sentido en el ámbito educativo ha ido adquiriendo cada vez mayor relevancia en las últimas décadas a pesar de formar parte de la agenda de los docentes de matemáticas desde hace muchísimo tiempo. Dewey (1958), al analizar la experiencia en la educación, ya hace referencia al sentido. Específicamente señala que “debe prestarse un cuidado atento a las condiciones que dan, a cada experiencia presente, un sentido valioso” (p.59). Más recientemente, el informe realizado en 2009 por el NCTM (National Council of Teachers of Mathematics) sostiene que las prácticas de razonamiento y construcción de sentido son fundamentales para que el estudiantado desarrolle competencia matemática. Cuestión que coincide con las orientaciones del currículo español actual.

Específicamente, la noción de sentido en el diccionario de la Real Academia Española tiene diversos significados, entre ellas: “Capacidad de entender, apreciar o juzgar algo” y “Habilidad o destreza para hacer algo o para juzgar bien en ello”. En este artículo, estas definiciones interpretadas en el marco educativo y pensadas en los procesos de enseñanza y de aprendizaje de la matemática permiten que propongamos caracterizar sentido matemático como **el desarrollo por parte del estudiantado de capacidades específicas, habilidades o destrezas**

en torno a nociones matemáticas en el marco de una vivencia y/o experiencia en la que se movilizan conocimientos matemáticos disponibles con el fin de tomar decisiones o emitir juicios.

En relación con los dominios y saberes en el área matemática se señala que:

El sentido numérico se caracteriza por la aplicación del conocimiento sobre numeración y cálculo en distintos contextos, especialmente profesionales; el sentido de la medida se centra en la comprensión y comparación de atributos de los objetos; el sentido espacial aborda la comprensión de los aspectos geométricos de nuestro mundo; el sentido algebraico proporciona el lenguaje en el que se comunican las matemáticas y las ciencias; por último, el sentido estocástico comprende el análisis y la interpretación de los datos y la comprensión de fenómenos aleatorios para fundamentar la toma de decisiones a nivel laboral y, en general, en un mundo lleno de incertidumbre (Ministerio de Educación y Formación Profesional, 2022, p.181).

Además, como se menciona anteriormente, el currículo actual propone el aprendizaje competencial, autónomo, significativo y reflexivo por parte del estudiantado. Es decir, el foco se encuentra en que el estudiantado pueda desarrollar ciertas competencias al finalizar la educación básica obligatoria. Para esto, debe desarrollar competencias clave y específicas. El MEFP (2022) señala que las primeras enfatizan en que el estudiantado progrese y pueda afrontar ciertos retos o desafíos sociales que se presentan y las segundas focalizan en que puedan poner en juego saberes básicos de cada asignatura en el marco de diversas situaciones.

En esta búsqueda de un estudiantado activo que logre desarrollar competencias emerge la noción de situación de aprendizaje. En el MEFP (2022) se interpreta una situación de aprendizaje como: “Situaciones y actividades que implican el despliegue por parte del alumnado de actuaciones asociadas a competencias clave y competencias específicas, y que contribuyen a la adquisición y desarrollo de las mismas” (p.7). Este tipo de situaciones llevadas adelante en el aula de matemática potenciarán la producción de sentidos por parte del estudiantado en el marco de vivencias y/o experiencias que fomentan el desarrollo de las competencias que se espera que la ciudadanía pueda desarrollar al culminar los estudios obligatorios.

Sin embargo, esta caracterización de situación de aprendizaje en matemáticas es ampliada a partir de un estudio de investigación en profundidad por Moreno y Cruz (2023), quienes definen situación de aprendizaje como **“una tarea o un conjunto de tareas que promueven acciones por parte del estudiantado que desarrollan los sentidos matemáticos en entornos educativos que incentivan el uso de procesos matemáticos mediante la investigación o indagación y cuyo abordaje permite ver el valor de las matemáticas para dilucidar un problema, emitir juicios o tomar decisiones”** (p.14).

En esta caracterización se entrama con la caracterización de sentido propuesta anteriormente y posiciona al estudiantado en un rol activo en el que debe llevar adelante dos acciones fundamentales e irrenunciables, investigar o indagar. Estas acciones requieren el desarrollo tanto de actividades intelectuales como experimentales con el fin de profundizar y aumentar los conocimientos sobre una asignatura.

3. CARACTERÍSTICAS Y CONDICIONES DE UNA SITUACIÓN DE APRENDIZAJE

La actual propuesta curricular propone el trabajo con las situaciones de aprendizaje con el fin de potenciar el trabajo activo del estudiantado y para que este valore la importancia de la matemática como herramienta para comprender aspectos del mundo. Las mismas, según el MEFP (2022) y Moreno y Cruz (2023) deben cumplir determinadas características:

- Ca1. Se utilizan contextos de interés para el estudiantado.
- Ca2. Se promueve el trabajo autónomo y creativo del estudiantado.
- Ca3. Se parte de aprendizajes y experiencias previas del estudiantado.
- Ca4. Se resuelven problemas de forma creativa y cooperativa, reforzando la autoestima, la autonomía, la reflexión crítica y la responsabilidad.
- Ca5. Posibilitan la articulación coherente y eficaz de los distintos conocimiento, destrezas y actitudes propias de la etapa.

A su vez, se establecen condiciones que debería verificar:

- Co1. Tiene que tener objetivos claros y precisos.
- Co2. Debe integrar diversos saberes básicos.
- Co3. Debe favorecer diferentes tipos de agrupamiento.
- Co4. Debe implicar la producción e interacción verbal.
- Co5. Debe incluir el uso de recursos auténticos en distintos soportes y formatos.
- Co6. Debe fomentar aspectos relacionados con el interés común, la sostenibilidad o la convivencia democrática.

4. UNA TAREA DADA EN OLIMPIADAS MATEMÁTICAS DE GRANADA

En el marco de la XXVI Olimpiada Thales de Granada de 6º de Primaria se propuso una tarea con el fin de que el estudiantado cooperativamente respondiese a diversos interrogantes. Cada equipo debía responder en 30 minutos el mayor número de preguntas propuestas. Para esto cada participante del equipo recibió una parte de la información y la puso en común con el equipo en búsqueda de una resolución. La tarea se denomina: “La urbanización sostenible” y el estudiantado se involucró como profesionales con el fin de tomar decisiones críticamente apelando a saberes matemáticos diversos y movilizándolo competencias clave y específicas.

En este artículo seleccionamos tal tarea para analizarla y reflexionar sobre sus cualidades como posible situación de aprendizaje. La tarea se organiza en tres partes como se muestra en la Tabla 1.

Tabla 1.

Partes de la tarea.

Parte 1	Parte 2	Parte 3
Contexto de la tarea	Información que permite abordar las preguntas y se entrega en tres partes (una parte a cada estudiante)	Preguntas a responder en equipo por el estudiantado

A continuación, realizaremos un análisis de cada una de las partes.

5. ANÁLISIS DE LA TAREA

5.1. Reflexiones respecto a la parte 1.

En la primera parte se presenta el contexto de la tarea. El mismo presenta una empresa llamada “Whitlas y asociados” y explica que la misma debe realizar un estudio acerca del consumo energético de edificios que forman parte de una urbanización utilizando placas solares y se deben colocar tales edificios en las parcelas de la urbanización buscando que el gasto sea el menor posible, pero también el impacto medioambiental que se genera.

Posteriormente se presentan tres personajes, a saber: Puri, la arquitecta general de edificación, Laura, la arquitecta técnica que focaliza en gestión de plazas solares y ayuda a Puri y Ana, la economista. Después se propone e invita al estudiantado que conforma el equipo a distribuirse roles tomando cada una/o un papel de los tres anteriores.

Esta primera parte de contextualización de la tarea muestra la búsqueda de captar la atención del estudiantado, presentando ciertas particularidades. Destacamos que esta tarea tiene un objetivo supramatemático como es el cuidado medioambiental y la búsqueda del reconocimiento de cómo la matemática ayuda a lograr ese objetivo.

Con respecto al modo de presentación del contexto destacamos dos cuestiones como fundamentales. La primera es que el mismo resulta fácilmente imaginable para el estudiantado, y no se limita “el trabajo en el estudio de fenómenos del mundo real (perceptual)” (Cruz et al, 2020, p.199). La segunda es que el posicionar a cada estudiante en un rol de acción podría potenciar el desarrollo del empoderamiento del estudiantado en momentos de toma de decisiones y validación de las mismas (Magallanes y Esteley, 2016) e incluso, potencia el desarrollo de sentido socioafectivo.

Estas ideas nos llevan a considerar que el contexto podría resultar de interés para el estudiantado (Ca1) y a su vez, fomenta el abordaje de una temática de interés común, vinculada con la sostenibilidad (Co6).

5.2. Reflexiones respecto a la parte 2.

En la segunda parte se proporciona información a cada estudiante que conforma el equipo.

El o la estudiante que simule ser Puri recibe cinco unidades de información, mientras que Laura y Ana reciben seis. Cada una de estas informaciones posee características diferentes, puesto que la comprensión de cada una de ellas promueve la interpretación de diversas representaciones y la atribución de sentidos distintos como se sintetiza en las siguientes tablas (Ver tablas 2, 3 y 4).

Tabla 2.

Unidades de información recibidas por Puri, arquitecta general.

<i>Unidades de información</i>	<i>Representación</i>	<i>Sentidos</i>
1. Cada planta de un edificio es un cubo y la altura de cada planta es de 3 metros	Verbal	Espacial; Medida
2. Hay 6 edificios, de 1, 3 y 5 plantas	Verbal	Numérico
3. Vista desde el oeste:	Pictórica	Espacial

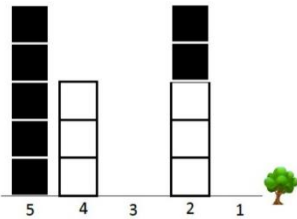
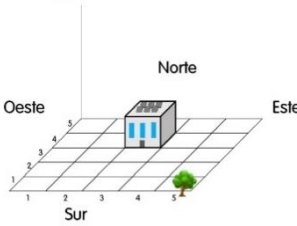
		
<p>4. El único edificio de 1 planta está situado en la parcela (3,4) como se puede observar:</p> 	<p>Simbólica y gráfica</p>	<p>Espacial</p>
<p>5. El vatio es una unidad de medida de la potencia eléctrica. Su símbolo es una W</p>	<p>Verbal y simbólica</p>	<p>Medida</p>

Tabla 3.

Unidades de información recibidas por Laura, arquitecta técnica.

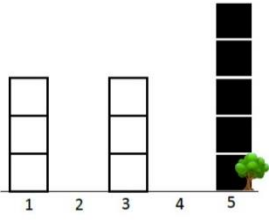
<i>Unidades de información</i>	<i>Representación</i>	<i>Sentidos</i>												
<p>1. Hay 3 edificios de 3 plantas</p>	<p>Verbal</p>	<p>Numérico</p>												
<p>2. Vista desde el sur:</p> 	<p>Pictórica</p>	<p>Espacial</p>												
<p>3. Los edificios de 5 plantas se ubican en las coordenadas (5,2) y (5,5)</p>	<p>Simbólico</p>	<p>Espacial</p>												
<p>4. Fórmula para calcular el volumen del cubo</p>	<p>Verbal; simbólica</p>	<p>Medida; algebraico</p>												
<p>5.</p> <table border="1" data-bbox="277 1529 715 1742"> <thead> <tr> <th>Día de la semana</th> <th>Horas de sol</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>Lunes</td> <td>8</td> </tr> <tr> <td>Martes</td> <td>6</td> </tr> <tr> <td>Miércoles</td> <td>0</td> </tr> <tr> <td>Jueves</td> <td>2</td> </tr> <tr> <td>Viernes</td> <td>4</td> </tr> </tbody> </table>	Día de la semana	Horas de sol	Lunes	8	Martes	6	Miércoles	0	Jueves	2	Viernes	4	<p>Tabular</p>	<p>Estocástico</p>
Día de la semana	Horas de sol													
Lunes	8													
Martes	6													
Miércoles	0													
Jueves	2													
Viernes	4													
<p>6. En la terraza de cada edificio hay una placa solar que produce 300 W por hora cuando hace sol y 100 W por hora cuando está nublado. Las placas únicamente funcionan desde las 5:00 am hasta las 20:00 pm</p>	<p>Verbal; simbólico</p>	<p>Medida</p>												

Tabla 4.

Unidades de información recibidas por Ana, la economista.

<i>Unidades de información</i>	<i>Representación</i>	<i>Sentidos</i>
1. Cada edificio mide tres metros de ancho y tres metros de largo y ocupa exactamente una parcela cuadrada de la cuadrícula de la urbanización	Verbal	Medida; espacial
2. Los edificios de una planta y de cinco plantas son negros. Los de tres plantas son blancos	Verbal	Espacial
3. El viernes hizo sol desde las 10:00 a las 14:00 y estuvo nublado el resto del tiempo.	Simbólico y verbal	Medida
4. El consumo de energía de cada oficina depende de su volumen. Se necesitan 30 vatios por cada metro cúbico para que puedan funcionar una jornada entera de trabajo.	Verbal y simbólica	Medida
5. Los vatios que haya que consumir y no se produzcan se pagan a 0,01 euros.	Verbal	Numérico
6. Los vatios que se producen y no se consumen se donan a la red eléctrica.	Verbal	Numérico

En la información proporcionada a cada estudiante observamos que se ponen en juego diversas representaciones y sentidos. La interpretación de tal información requiere el empleo y relación de aprendizajes disponibles y promueve que cada estudiante deba recuperar experiencias para interpretar la información en contexto (cumpliendo así Ca3). También requiere del trabajo autónomo y creativo de cada estudiante para la interpretación de la información y de la búsqueda de comunicación posterior al resto del equipo (Ca2).

A su vez, tal como se observa en las Tablas (2, 3 y 4) se ponen en juego diversos sentidos matemáticos, por esto consideramos que también en esta etapa se integran diversos saberes básicos (Co2). El estudiantado deberá desarrollar destrezas personales para interpretar la información que ayuden a identificar y gestionar emociones al enfrentarse a retos matemáticos, fomentando la confianza en las propias posibilidades en este momento de interpretación individual y adaptándose a las situaciones de incertidumbre, puesto que la comprensión de ciertas nociones se verá afectada por información que dispone otro/a integrante del equipo. Esta consideración constituye una competencia específica de la educación primaria en tercer ciclo.

5. 3. Reflexiones respecto a la parte 3.

La tercera parte se organiza en 8 apartados llamados cuestiones que se deben abordar utilizando la información proporcionada. En el primer apartado se propone responder la pregunta que se muestra en la Figura 1.

Figura 1.

Cuestión número 1 de la parte 3.

1. ¿Cuál es la altura del edificio más alto?

Para dar respuesta a esta pregunta se requiere la atribución de sentido numérico y de la medida principalmente. De las informaciones 1 y 2 proporcionada a Puri (Cada planta de un edificio es un cubo y la altura de cada planta es de 3 metros; Hay 6 edificios, de 1, 3 y 5

plantas). En este caso el estudiantado debe poner en juego ciertas competencias específicas, como ser interpretar la pregunta y proporcionar una respuesta matemática de las mismas recurriendo a conceptos, herramientas y estrategias, para analizar la información más relevante. Esto implica descartar el resto de información y para el/la estudiante que simule ser Puri debe poner en juego una importante capacidad de comunicación, logrando así comunicar y representar, de forma individual y colectiva, conceptos, procedimientos y resultados matemáticos, utilizando el lenguaje oral, escrito, gráfico, multimodal y la terminología apropiados, para dar significado y permanencia a las ideas matemáticas.

El segundo apartado también se constituye de una sola pregunta, tal como se muestra en la Figura 2.

Figura 2

Cuestión número 2 de la parte 3.

2. ¿Cuántas oficinas hay en la urbanización?

Consideramos que en esta respuesta se promueve la producción de sentido numérico. A su vez, se requiere de información de Puri (2. Hay 6 edificios, de 1, 3 y 5 plantas; 4. El único edificio de 1 planta está situado en la parcela (3,4)) y de Laura (1. Hay 3 edificios de 3 plantas. 3; Los edificios de 5 plantas se ubican en las coordenadas (5,2) y (5,5)). Aunque no hace falta emplear toda esa información, el equipo de estudiantes a través de la comunicación puede decidir cómo emplear o incluso, puede validar su respuesta recurriendo a los datos extras asegurar su validez desde un punto de vista formal y en relación con el contexto planteado.

Con respecto a las competencias específicas, consideramos que se promueven las mismas que en el caso anterior. También, la resolución de la situación aplicando diferentes técnicas, estrategias y formas de razonamiento, para explorar distintas maneras de proceder y obtener la respuesta.

En el tercer apartado se presentan tres preguntas (Ver Figura 3).

Figura 3.

Cuestión número 3 de la parte 3.

3. A) ¿Qué volumen tiene cada oficina?

B) ¿Cuál es el consumo de cada oficina cada día?

C) ¿Cuál es el consumo total de todos los edificios cada día?

En esta consigan se podría atribuir sentido espacial, de la medida e incluso numérico y algebraico al realizar operaciones atendiendo a la unidad de medida correspondiente. Para responder a la cuestión A se debe recurrir a información de Laura (4. Fórmula para calcular el volumen del cubo), Puri (1. Cada planta de un edificio es un cubo y la altura de cada planta es de 3 metros) y Ana (1. Cada edificio mide tres metros de ancho y tres metros de largo y ocupa exactamente una parcela cuadrada de la cuadrícula de la urbanización). Para responder a la

pregunta B se debe recurrir a información de Ana (4. El consumo de energía de cada oficina depende de su volumen. Se necesitan 30 vatios por cada metro cúbico para que puedan funcionar una jornada entera de trabajo.) y la información obtenida en la respuesta a la consigna A, por lo que el estudiantado debe relacionar información obtenida anteriormente, recuperarla y establecer conexiones con la información dada para poder dar respuesta. Para la respuesta C se realiza un proceso similar, recurriendo a información obtenida en 2. En este caso, nuevamente hay información de más, puesto que, por ejemplo, si el estudiantado conoce la noción de cubo no necesita la información de Ana o a la inversa con la información de la altura de cada planta proporcionada a Puri. A partir de lo descrito, consideramos que las competencias específicas que se promueven en las cuestiones 1 y 2 coinciden en este caso. Posteriormente se presenta el apartado 4 (Ver Figura 4).

Figura 4.

Cuestión número 4 de la parte 3.

4. ¿Cuántos vatios produjeron el pasado viernes el total de los edificios?

En esta pregunta se produce principalmente sentido numérico y de la medida, pero como en el caso anterior entra en juego el sentido algebraico en el uso de unidades de medida. Para interpretar y dar respuesta a esta pregunta se necesita información de Puri (5. El vatio es una unidad de medida de la potencia eléctrica. Su símbolo es una W), de Laura (6. En la terraza de cada edificio hay una placa solar que produce 300 W por hora cuando hace sol y 100 W por hora cuando está nublado. Las placas únicamente funcionan desde las 5:00 am hasta las 20:00 pm) y de Ana (3. El viernes hizo sol desde las 10:00 a las 14:00 y estuvo nublado el resto del tiempo.). También entra en juego información que han utilizado previamente, por ejemplo, el número de edificios.

Consideramos que se emplean las mismas competencias específicas que en las cuestiones 2 y 3. Añadimos que en este caso el estudiantado también debería reconocer y utilizar conexiones entre las diferentes ideas matemáticas e informaciones proporcionadas para comprender algunas nociones implicadas en otras áreas o en la vida cotidiana como ser la de vatio, interrelacionando conceptos y procedimientos, para interpretar y dar respuesta a la pregunta.

En el quinto apartado se propone al estudiantado completar una tabla (Ver Figura 5).

Figura 5.

Cuestión número 5 de la parte 3.

5. Completad la siguiente tabla:

	Horas de sol	Producción horas de sol de cada edificio	Producción horas nubladas de cada edificio	Producción de cada edificio
Lunes				
Martes				
Miércoles				
Jueves				
Viernes				

Para completar la tabla se atribuyen los mismos sentidos que en el caso anterior e incluso estocástico. A su vez, solo hace falta recurrir a información proporcionada a Laura (5. Ver en Tabla 3; 6. En la terraza de cada edificio hay una placa solar que produce 300 W por hora cuando hace sol y 100 W por hora cuando está nublado. Las placas únicamente funcionan desde las 5:00 am hasta las 20:00 pm), Puri (5. El vatio es una unidad de medida de la potencia eléctrica. Su símbolo es una W) para completar todas las columnas de la tabla e incluso, como en los casos anteriores, se podría utilizar información extra como la de Ana (3. El viernes hizo sol desde las 10:00 a las 14:00 y estuvo nublado el resto del tiempo). Con respecto a las competencias, consideramos que se promueven las mismas que en la cuestión anterior.

En el sexto apartado se propone nuevamente el abordaje de una única pregunta (Figura 6).

Figura 6.

Cuestión número 6 de la parte 3.

6. ¿Hubo algún día de la semana donde la urbanización generó tanta energía como consumió?

El abordaje de esta pregunta requiere de la conexión entre diversas unidades de información e incluso, es posible recurrir a las respuestas proporcionadas en 3.C. y 5 para dar cuenta de la misma. Por esto, requiere la producción de diversos sentidos tal como se hace evidente en el análisis de tales respuestas (3.C. y 5). Con respecto a las competencias específicas consideramos que se promueven las mismas que en el caso cuatro y anterior. Enfatizamos que en este caso la comunicación y representación toma un rol relevante en el momento de relacionar y poner en juego conceptos, procedimientos y resultados matemáticos, utilizando el lenguaje oral, escrito, gráfico, multimodal y la terminología apropiados, para dar significado y permanencia a las ideas matemáticas.

En el séptimo apartado se propone la producción de un gráfico (Ver Figura 7).

Figura 7.

Cuestión número 7 de la parte 3.

7. Elabora un gráfico del dinero que pagó la urbanización la semana pasada por su consumo energético.

LUNES	MARTES	MIÉRCOLES	JUEVES	VIERNES

En este caso nuevamente se puede recurrir a información obtenida en 3.C. y 5. para conocer el consumo energético diario y el generado por día de la semana. Así se pondrían en juego diversos sentidos como en esos casos y también el estocástico al producir el gráfico. Con respecto a la información, se debería añadir un dato proporcionado a Ana (5. Los vatios que

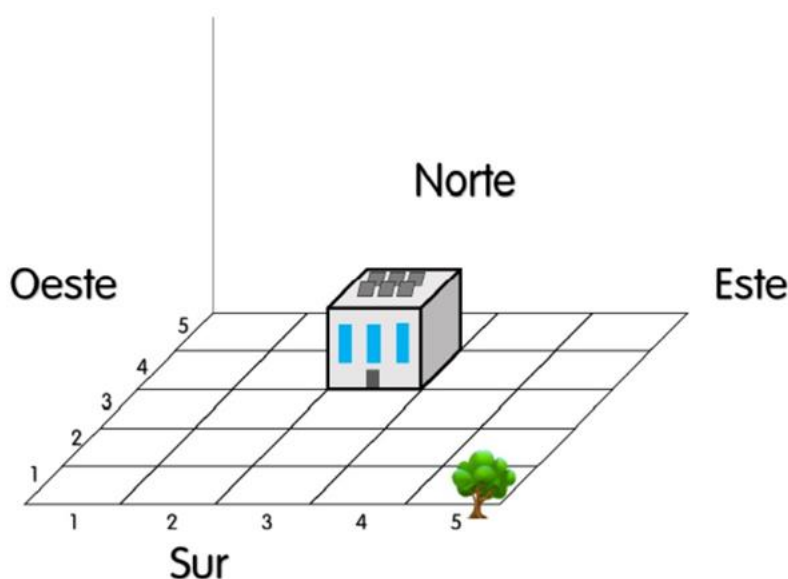
haya que consumir y no se produzcan se pagan a 0,01 euros.). Cabe mencionar que esta respuesta requiere que el estudiantado realice conexiones e interpretaciones entre respuestas dadas anteriormente. La idea de pagar vatios que se hayan consumido y no generado podría incluso resultar dificultoso. Con respecto a las competencias específicas consideramos que se promueven las mismas que en el caso anterior.

A continuación, presentamos la última cuestión de la tarea (Ver Figura 7).

Figura 8.

Cuestión número 8 de la parte 3.

- Colocad los edificios en la siguiente cuadrícula, indicando el número de plantas que tiene cada uno y sus coordenadas



En esta última consigna se promueve principalmente el sentido espacial. Para esto el estudiantado debe recuperar como unidad de información proporcionadas a Puri (3. Vista desde el oeste; 4. El único edificio de 1 planta está situado en la parcela (3,4)) y Laura (2. Vista desde el sur; 3. Los edificios de 5 plantas se ubican en las coordenadas (5,2) y (5,5)). También se debe recurrir a información obtenida previamente para determinar el número de plantas de cada edificio en su respectiva ubicación y establecer las coordenadas. Las competencias que se promueven son las mismas que en las cuestiones 6 y 7.

6. REFLEXIONES FINALES

La Tabla 5 recupera la propuesta por Moreno y Cruz (2023) para reflexionar en torno a los aspectos que se hacen evidentes en la misma. En el análisis presentado respecto a la primera parte focalizamos en el contexto y agrupamiento y encontramos que la tarea resulta potente ambas consideraciones. A pesar de esto, es relevante destacar que el agrupamiento propuesto se encuentra en el marco particular de una olimpiada y que en el caso de llevarse adelante esta misma tarea en una clase de matemática podría el o la docente tomar otras decisiones en la gestión de la misma. A su vez, en este caso no discutimos respecto a los medios empleados, pero consideramos que con tecnologías tradicionales podría llevarse adelante tal como se

propone en tal olimpiada. En otro contexto, si se decidiera, se podrían emplear calculadoras y software en ciertos momentos.

Tabla 5

Aspectos a identificar en una situación de aprendizaje propuestos por Moreno y Cruz (2023).

Tarea/s		
Contexto	Sentidos	Competencias clave
Agrupamiento		Competencias específicas
Medios		

Con respecto a los sentidos observamos que la tarea promueve la producción de los diversos sentidos matemáticos y del socioafectivo. Asimismo, encontramos que, en muchas de las cuestiones analizadas, tanto en la parte 2 como 3, conviven diversos sentidos. Asimismo, en el análisis de la tercera parte de la tarea explicitamos las competencias que se promueven.

Del análisis detallado realizado encontramos que la tarea cumple con todas las características y condiciones necesarias para ser una situación de aprendizaje. Consideramos que incluso se promueve durante todo el desarrollo de la tarea una competencia fundamental a desarrollarse durante el transcurso de la Educación Primaria, a saber: el desarrollo de destrezas sociales, reconociendo y respetando las emociones, las experiencias de los demás y el valor de la diversidad y participando activamente en equipos de trabajo heterogéneos con roles asignados, para construir una identidad positiva como estudiante de matemáticas, fomentar el bienestar personal y crear relaciones saludables.

Como reflexiones la tarea también ofrece posibilidades para trabajar en el aula que posibilitan otro tipo de trabajo, por ejemplo, se pueden abordar preguntas que se generan en el aula de matemática y así permitir discutir problemas vinculados con la tarea original o incluso un poco alejados. También se podría promover la investigación del estudiantado respecto a algunas cuestiones solicitando por ejemplo que se hagan representaciones como la solicitada en la cuestión 8 del propio barrio.

Consideramos relevante destacar también que la tarea promueve la articulación entre los diferentes sentidos, cuestión que resulta fundamental actualmente para eliminar la fragmentación e incluso, superficialidad, de los conocimientos. Permitir, invitar e incluso ofrecer oportunidades para que el estudiantado puede vincular conceptualmente diferentes sentidos matemáticos e incluso extramatemáticos es una cuestión fundamental en la agenda de educadores y docentes.

Finalmente, señalamos que el análisis de esta tarea podría seguir profundizándose, analizando las potencialidades y limitaciones de variantes de la misma.

AGRADECIMIENTO

Trabajo patrocinado a través del programa de becas de movilidad para estancias postdoctorales en universidades andaluzas. Convocatoria 2024. PMP-2024-016-18.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Cruz, M. F.; Esteley, C. y Scaglia, S. (2020). Una experiencia de formación para futuros profesores: producir matemática en un contexto de modelización matemática. *Educación Matemática*, 32(1), 189-216. <https://doi.org/10.24844/em3201.09>
- Dewey, J. (1958). *Experiencia y educación*. Losada.
- Magallanes, A. N. y Esteley, C. B. (2016). Empoderamiento: Una Caracterización al Interior de la Educación Matemática. *Revista Internacional De Educación Para La Justicia Social*, 5(2). <https://doi.org/10.15366/riejs2016.5.2.009>
- Ministerio de Educación y Formación Profesional (MEFP) (2022). Real Decreto 217/2022, de 29 de marzo, por el que se establece la ordenación y las enseñanzas mínimas de la Educación Secundaria Obligatoria, *Boletín Oficial del Estado*, núm 76.
- Moreno, A. (2004). *Ideología y educación matemática: El proceso de infusión ideológica*. Octaedro.
- Moreno, A y Cruz, M.F. (2023). Acercamiento a la idea de situación de aprendizaje matemático en el currículo de matemáticas. *Epsilon*, 115, 7-19.
https://thales.cica.es/epsilon/sites/default/files/2023-12/epsilon115_01_0.pdf
- National Council of Teachers of Mathematics (2009). *Focus in High School Mathematics: Reasoning and Sense Making*. NCTM.
- Real Academia Española. (s.f.). Disponible. En *Diccionario de la lengua española*. <https://dle.rae.es/sentido>
- Skovsmose, O. (2000). Escenarios de investigación. *EMA*, 6(1), 3-26.
<https://es.scribd.com/document/329407266/Skovsmose-2000-Escenarios-EMA>

Actividades SAEM Thales

Ester Roquette Rodríguez

Colegio San Felipe Neri (Cádiz, España), esther.roquette@gmail.com

Resumen: Desde desafíos numéricos hasta enigmas geométricos, nuestro propósito es cultivar la pasión por el pensamiento lógico y creativo. Como dijo el renombrado matemático John Allen Paulos, 'Las matemáticas son una gimnasia del espíritu y una preparación para la filosofía'. En este artículo, embarquémonos juntos en un viaje hacia el maravilloso mundo de las matemáticas, donde la exploración y el descubrimiento son los principales motores de aprendizaje y crecimiento.

Palabras clave: matemáticas, desafíos numéricos, enigmas geométricos, pasión, pensamiento lógico, creativo, filosofía, exploración, descubrimiento, aprendizaje, crecimiento.

Activities SEAM Thales

Abstract: From numerical challenges to geometric puzzles, our aim is to foster a passion for logical and creative thinking. As renowned mathematician John Allen Paulos once said, "Mathematics is a gymnasium of the mind and a preparation for philosophy." In this article, let's embark together on a journey into the marvelous world of mathematics, where exploration and discovery are the primary drivers of learning and growth.

Key words: mathematics, numerical challenges, geometric puzzles, passion, logical thinking, creative, philosophy, exploration, discovery, learning, growth.

1. MARZO 2024

El mes grande para la Sociedad es el mes de marzo; en el celebramos nuestra Olimpiada se 2° de la ESO, pero tenemos muchas más actividades.

En este mes hemos podido disfrutar de las Olimpiadas Alevín (6° de Ed Primaria) y Juvenil (4° de la ESO), hemos disfrutado del Concurso Canguro organizado por la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas, el Día Internacional de las Matemáticas, junto con la Feria de Ciencias de Sanlúcar de Barrameda (Cádiz).

Figura 1

Cartel de la actividad

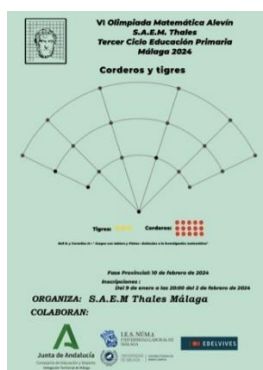


Figura 2

Cartel de la actividad



Figura 3

Cartel de la actividad



Figura 4
Mesa Presidencial OMT Málaga



2. CALENDARIO DE ACTIVIDADES

El último trimestre del curso está repleto de actividades; vamos a poder disfrutar de la Fase Regional de la OMT de 2º de la ESO en Sevilla (mayo), las Fases Finales de la OMT Alevín (Madrid) y la de 2º de la ESO (Cáceres) y 4º de la ESO (Melilla) donde los representantes andaluces disfrutaran con el resto de los compañeros.

También en el mes de mayo la FESPM, como los años anteriores, ha organizado el Día Escolar de las Matemáticas bajo el lema “Matemáticas y agricultura” ([enlace al cuadernillo de actividades](#)).

En Granada podremos disfrutar de Math City Map tanto el alumando como el profesorado, estando la inscripción todavía en abierto.

Y para cerrar el curso, tenemos las JAEM en Santander (<https://21.jaem.es>) del 30 de junio al 3 de julio organizado por la Sociedad Matemática de Profesores de Cantabria.

Figura 5
DEM “Matemáticas y agricultura”

**Matemáticas y agricultura:
Del papiro de Rhind al
cambio climático**

10 de mayo de 2024
10:30 horas

Conferenciante: **D. Lorenzo J. Blanco Nieto**
Miembro de la Sociedad Extremeña de Educación
Matemática "Ventura Reyes Prósper"

3. CONVOCATORIAS ABIERTAS PARA SOCIOS/AS

Como actividad permanentemente abierta se encuentra la Convocatoria de Publicaciones. En ella cualquier socio o socia de la Thales o de cualquier otra sociedad de la Federación Española de Sociedad de Profesores de Matemáticas (FESPM) puede [presentar material de contenido matemático](#) para ser publicado en formato online o en formato papel.

Por otro lado, también tenemos abierta la convocatoria para profesorado de ESTALMAT.

4. ACTAS DEL XVIII CEAM

Ya están disponibles las actas del XVIII CEAM celebrado en Granada en julio de 2023. Animamos a los lectores de Epsilon a revivir ese viaje apasionante al que se refería el lema del Congreso y seguir enseñando las matemáticas con sentido.

<https://thales.cica.es/xviiiiceam/> ocio o socia

