

εpsilon

Revista de Educación Matemática

Editada por la Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales

“Las matemáticas pueden aprenderse en la escuela, integrarse en estructuras de aprendizaje particulares y salir de ella para aplicarse a cualquier situación del mundo real”

Moreno, A. y Cruz, M.F.

115
2023

Equipo Editorial

Burgos Navarro, María José
Carrillo de Albornoz Torres, Agustín
Cecilia Gámiz, Lina María
Conde Fernández, Silvia
Contreras García, José Miguel
España Pérez, Francisco
Fernández Plaza, Jose Antonio
Flores Lamolda, Lucía
Flores Martínez, Pablo
Gallardo Jiménez, Sandra
Gámez Valero, Carmen
García Schiaffino, Margarita
Garzón Guerrero, José Antonio
López Centella, Esperanza
Lupiáñez Gómez, José Luis
Molina Muñoz, David
Molina Portillo, Elena
Montejo Gámez, Jesús
Moreno Verdejo, Antonio
Partal García, Daniel
Pérez Martos, María del Carmen
Ramírez Uclés, Rafael
Rivas Olivo, Mauro Alfredo
Rodríguez González, Miguel
Roquette Rodríguez, Esther
Ruiz Hidalgo, Juan Francisco
Tizón Escamilla, Nicolás
Valero Terrón, Iván
Villegas Escobar, Adela María

115

2023

Edita
Sociedad Andaluza de
Educación Matemática "Thales"
Universidad de Cádiz
C.A.S.E.M.
Facultad de Ciencias
Departamento de Matemáticas
Campus del Río San Pedro
Torre Central, 4ª planta
11510 Puerto Real (Cádiz)
Teléfono: 956012833
Email: thales.matematicas@uca.es

Depósito Legal
SE-421-1984

ISSN
2340-714X

Período
2023

Suscripción
Anual

ÍNDICE / CONTENTS

APORTES DE LA INVESTIGACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

- 7 **Acercamiento a la idea de situación de aprendizaje matemático en el currículo de matemáticas**
Antonio Moreno y María Florencia Cruz
- 21 **Un programa de lugar geométrico que invita a descubrir y explicar propiedades mediadas por un software de geometría dinámica**
María Susana dal Maso
- 35 **Matemáticas y patrimonio: un estudio del número de plata**
David Crespo Casteleiro

EXPERIENCIAS DE AULA

- 45 **Demostraciones visuales en el segundo ciclo de la ESO: una propuesta didáctica**
David García Fernández
- 59 **IMMC-Spain, el desafío de la modelización para estudiantes de educación secundaria**
César Gallart, Irene Ferrando y Carlos Segura
- 71 **Entrevista al profesorado: M. Teresa García Pérez**
M. Teresa García Pérez

ACTIVIDADES EN LA SAEM THALES

- 79 **Que las demostraciones no te dejen sin palabras**
Ana M. Martín-Caraballo, Rafael Ramírez Uclés y Miguel L. Rodríguez González
- 87 **Actividades SAEM Thales**
Esther Roquette Rodríguez

Acercamiento a la idea de situación de aprendizaje matemático en el currículo de matemáticas

Antonio Moreno

Universidad de Granada, amverdejo@ugr.es

María Florencia Cruz

Universidad Nacional del Litoral, mfcruz@fhuc.unl.edu.ar

Resumen: Los cambios curriculares españoles actuales requieren de reflexiones sobre la práctica docente y sus nuevos desafíos. Por esto, en este trabajo proponemos, por un lado, caracterizar la expresión situación de aprendizaje para que posibilite el desarrollo del sentido matemático y permita la construcción parcial de significados matemáticos y, por otro lado, señalar la importancia del uso de diferentes situaciones de aprendizaje.

Con el fin de dar respuesta a los objetivos mencionados, analizamos la relación entre los conceptos de tarea, contexto y problema. De este modo, justificamos la necesidad de introducir un concepto más amplio como el de situación de aprendizaje y ofrecemos una definición, sus cualidades y las condiciones que la caracterizan.

Palabras clave: *Situación de aprendizaje, currículo, sentido matemático, competencias.*

Approaching the concept of mathematical learning situations in the mathematics curriculum

Abstract: *The current curricular changes in Spanish education necessitate reflections on teaching practices and the new challenges they bring. In this paper, we propose, on one hand, to characterize the learning situation in a manner that facilitates the development of mathematical sense and allows for the partial construction of mathematical meanings. On the other hand, we emphasize the importance of employing diverse learning situations.*

To address the aforementioned objectives, we analyze the relationship between the concepts of task, context, and problem. In doing so, we justify the need to introduce a broader concept, such as the learning situation, and provide a definition, along with qualities and conditions that characterize it.

Key words: *Learning situation, curriculum, mathematical senses, competencies.*

1. INTRODUCCIÓN

En España los recientes cambios curriculares promueven modificaciones en las acciones que se espera sean desarrolladas en el aula e incluso un cambio de perspectiva en relación con los objetivos que se espera que concrete el alumnado durante la educación obligatoria. La propuesta de desarrollar diversas situaciones de aprendizaje que promueven la atribución de sentido matemático y socioafectivo constituye el foco de los procesos de enseñanza de la matemática. En este artículo, buscamos iluminar esta última consideración.

El sentido matemático parece desarrollarse de formas distintas en situaciones diferentes. El profesorado de matemáticas ha experimentado la complejidad de establecer relaciones entre el entorno en el que se desarrollan las matemáticas y el mundo al que se aplican. A pesar de eso, en muchas oportunidades se afirma que las matemáticas pueden aprenderse en la escuela, integrarse en estructuras de aprendizaje particulares y salir de ella para aplicarse a cualquier situación del mundo real. Sin embargo, las investigaciones cuestionan esta idea al observar las diferencias de rendimiento matemático cuando se plantean situaciones que denominaríamos escolares y situaciones "cotidianas". Por ejemplo, Scribner (1984) y Carraher et al. (1982) confirmaron que el estudiantado realizaba procedimientos de resolución diferentes y empleaba procedimientos matemáticos distintos cuando una misma situación problemática se presentaba en entornos diferentes. Esto sugiere que es el entorno en el que se desarrollan las matemáticas, y no el problema al que se aplican, el que determina la selección de los procedimientos matemáticos que se desarrollarían en el aula de matemáticas (Boaler, 1993).

A modo de ejemplo, Lave (1988) en su exploración de la relación entre el uso de un contexto como el de las compras en las clases de matemáticas y el uso de las matemáticas en relación con una actividad cotidiana como ir de compras, sostiene que en la escuela el contexto de la compra sólo sirve para disfrazar las relaciones matemáticas. En el supermercado, las matemáticas utilizadas se adaptan al contexto de la compra de alimentos y ninguna de las dos experiencias tiene "efectos organizadores simétricos" sobre la otra.

Durante muchos años se creyó que el trabajo matemático realizado en la resolución de problemas permitiría trasladar lo aprendido en el aula a los contextos de la vida cotidiana. Esto es posible si el alumnado primero reconoce que los requisitos de la tarea están representados en el aprendizaje previo, después recupera esta información y, finalmente, la traduce para adaptarla a las exigencias de la situación. Esta teoría sugiere que los procesos de socialización son pasivos y que el conocimiento es un conjunto de informaciones que se transmite de una generación a la siguiente.

Nosotros, como Boaler (1993), pensamos que es inadecuado suponer que el estudiantado puede aprender algo, recuperarlo de la memoria y transferirlo a una nueva situación, y que este proceso se producirá independientemente de la actividad, el entorno o los procesos de socialización. Pero tampoco afirmamos que, dado que todo aprendizaje es específico de una situación, la transferencia no pueda verse favorecida por algún factor del entorno de aprendizaje. La complejidad de las cuestiones relacionadas con el contexto, la transferencia y el aprendizaje del alumno no permite descartar la utilidad de los contextos por este motivo.

En este sentido, y atendiendo a las demandas curriculares españolas actuales, en este trabajo proponemos, por un lado, caracterizar la expresión situación de aprendizaje para que posibilite el desarrollo del sentido matemático y permita la construcción parcial de significados matemáticos y, por otro lado, señalar la importancia del uso de diferentes situaciones de aprendizaje.

Cabe mencionar que en el camino de buscar respuestas a los objetivos propuestos emerge la necesidad de discutir las nociones de tarea, contexto, problema, para así posteriormente focalizar en la noción de situación de aprendizaje y ejemplificarla.

2. TAREAS PARA EL APRENDIZAJE

Los resultados de numerosas investigaciones (Hiebert y Wearne, 1997; Stein y Lane, 1996) que podemos valorar como profesoras y profesores de matemáticas para nuestra planificación de aula hablan de que las mayores mejoras en la evaluación de rendimiento están relacionadas con el uso

de tareas matemáticas que implican al alumnado en hacer matemáticas o utilizar procedimientos con conexión al significado. Además, observan que el rendimiento del alumnado es mayor cuando las tareas se diseñan y se llevan a cabo para fomentar el uso de estrategias de solución múltiple, representación múltiple y explicaciones.

Anthony y Walshaw (2009), por ejemplo, en una síntesis de los resultados de la investigación, argumentan que el papel de las tareas matemáticas, actividades y herramientas es fundamental. Llegan a la conclusión de que "en el aula de matemáticas, es a través de las tareas, más que de cualquier otra manera, que las oportunidades de aprender se ponen a disposición" (p.96). Christiansen y Walther (1986) argumentan que las tareas no rutinarias, debido a la interacción entre los diferentes aspectos del aprendizaje, proporcionan las condiciones óptimas para el desarrollo cognitivo en el que el nuevo conocimiento se construye relacionamente y los elementos del conocimiento previo se reconocen y evalúan. De ello se deduce que las mejores tareas son aquellas que proporcionan contextos y complejidad adecuados, que estimulan la construcción de redes cognitivas, el pensamiento, la creatividad y la reflexión, y que abordan explícitamente temas matemáticos significativos.

En los procesos de enseñanza y de aprendizaje de matemáticas se promueven diversidad de acciones. El empleo por parte del profesorado de tareas con objetivos específicos para generar, desarrollar e incluso evaluar matemáticas es habitual. Las tareas matemáticas son propuestas que se utilizan para promover la puesta en acción del estudiantado en relación con las matemáticas y que el profesorado genera y planifica intencionalmente para el aprendizaje y la evaluación (Moreno y Ramírez, 2016).

El aprendizaje se produce como resultado del trabajo del alumnado con tareas seleccionadas a propósito por el profesorado, que constituyen la base de un diálogo continuo tanto con el o la docente, como con las compañeras y los compañeros sobre sus estrategias y productos. Por todo lo mencionado, la importancia de las tareas para promover el aprendizaje de las matemáticas parece claro y, por tanto, una necesaria reflexión sobre ello.

3. EL EFECTO DEL CONTEXTO

Tempranamente, Boaler (1993) señaló que se subestima el grado en que el contexto de una tarea afecta al rendimiento del alumnado. Cuando se reconoce que el contexto es un factor determinante, siguen prevaleciendo ideas estereotipadas, como la creencia de que las matemáticas en un contexto "cotidiano" son más fáciles que su equivalente abstracto, y que el aprendizaje de las matemáticas en un contexto cotidiano puede garantizar la transferencia a la vida "cotidiana" de las y los estudiantes. Incluso, ya Lave (1988) sugirió que el contexto específico en el que se sitúa una tarea matemática determina no sólo el rendimiento general, sino también la elección del procedimiento matemático.

En un estudio clásico, Taylor (1989) ilustra este efecto en un estudio de investigación en el que se comparan las respuestas del alumnado a dos preguntas sobre fracciones: una preguntaba la fracción de un pastel que cada niña o niño obtendría si se repartiera equitativamente entre seis, y otra preguntaba la fracción de un pan si se repartiera entre cinco. Específicamente, un estudiante involucrado en el estudio de Taylor varió los métodos en respuesta a la variación de las palabras "tarta" o "barra de pan". Este alumno consideraba que la tarta era una entidad única que podía dividirse en sextos, mientras que la barra de pan se consideraba algo que siempre se dividiría en bastantes rebanadas, por lo que el alumno tenía que pensar que el pan se cortaba en un mínimo de, digamos, diez rebanadas y que cada persona recibía dos décimos de la barra.

Ejemplos como éste ponen en tela de juicio la creencia arraigada en la enseñanza de las matemáticas de que los cálculos abstractos implican destrezas de mayor nivel que los cálculos en contexto. También sugieren que es probable que el estudiantado encuentre dificultades similares al pasar de los contextos de tareas en la escuela y los problemas del "mundo real". Por todo lo anterior, el contexto en el que se sitúan las tareas matemáticas parece ser un factor que determina el procedimiento matemático y, por tanto, el rendimiento matemático del estudiantado.

En la literatura de investigación podemos encontrar dos grandes categorías que engloban las razones ofrecidas para situar las tareas en contexto. Por un lado, la motivación y el interés del alumnado a través de un currículo enriquecido y vivido, y por otro, la mejora de la transferencia del aprendizaje a través de la demostración de los vínculos entre las matemáticas escolares y los problemas del mundo real. Sin embargo, los resultados de la investigación sugieren que el alumnado emplea procedimientos diferentes cuando se enfrenta a cálculos "abstractos" y "en contexto" cuando plantean la misma exigencia matemática. Esto sugiere que las suposiciones sobre la mejora de la comprensión y la transferencia como resultado del aprendizaje en contexto pueden ser demasiado simplistas y es necesario profundizarlas.

Al avanzar en la reflexión respecto al contexto, y después de haber puesto de manifiesto la importancia del mismo, interesa señalar algunas dificultades que se podrían generar al seleccionarlo. Una de las dificultades para generar sensación de realidad en los contextos de problemas matemáticos se produce cuando se pide al alumnado que participe como si una tarea fuera real, ignorando al mismo tiempo factores que serían pertinentes en la "versión real" de la tarea. Otra se genera cuando se utilizan contextos matemáticos cotidianos. Se refiere a la medida en que el alumnado puede identificarse realmente con contextos extraídos del mundo de los adultos. Por ejemplo, puede participar en tareas involucradas en un contexto de nóminas y facturas domésticas, lo que puede ser un objetivo valioso por sí mismo; sin embargo, las tareas son mucho más "reales" para las/os adultas/os que las proponen.

En general, los contextos se utilizan a menudo en un intento de motivar y estimular al alumnado, pero en ocasiones, sólo actúan como distractores o incluso como barreras para la comprensión matemática (William, 1990). Por esta razón, algunos/as autores/as valoran la importancia de que la situación problemática sea formulada por el propio alumnado. Cruz et al (2020) hace referencia a la importancia de la selección de temáticas y formulación de problemáticas por parte del estudiantado, si bien este tipo de trabajo posee gran complejidad, presenta el potencial de ofrecer oportunidades al estudiantado de responder preguntas propias e involucrarse en la resolución y comunicación de resultados de su propia investigación matemática y poner a prueba su producción frente a compañeras/os y docentes. Incluso, Cruz (2023) enfatiza en el potencial de este trabajo por permitir al estudiantado hacerse preguntas sobre la propia matemática y avanzar en la comprensión de ciertas nociones matemáticas.

Más aún, al reflexionar en relación a la noción de contexto, Cruz et al (2020) señalan la importancia de “no limitar el trabajo en el estudio de fenómenos del mundo real (perceptual)” (p.199), y resaltan la importancia de que de que el estudiantado aborde situaciones que tiene “la capacidad de visualizar o imaginar por la influencia de experiencias previas” (p.199).

En los libros de texto de matemáticas y también en las pruebas de evaluación, el uso de contextos parece estar basado en ideas no siempre probadas. Una de ellas es que los contextos de las tareas pueden influir en la motivación del estudiantado, pero tienen un impacto limitado en los métodos y el desempeño matemático. Como resultado, los contextos a menudo se incorporan de forma aleatoria en el día a día del aula con la intención de hacer que las matemáticas sean más atractivas y aplicadas a la vida real. Sin embargo, esta estrategia pasa por alto la complejidad del

contexto y el alcance de las experiencias del estudiantado. También obvia la compleja relación entre las experiencias pasadas, las metas matemáticas y las creencias individuales. Más aún, en muchas oportunidades se emplean contextos que podrían ser atractivos para el profesorado, pero no atraviesan del mismo modo al estudiantado o incluso, contextos cercanos para el estudiantado pero que no resultan de interés para el mismo por motivos diversos (temáticas que consideran aburridas o que incluso se encuentran demasiado presentes en su día a día y por lo tanto no considera la necesidad de profundizar en torno a la misma).

En cualquier caso, ningún contexto de tarea puede ofrecer una aplicación universal que resulte familiar y, lo que es más importante, significativa, para todo el alumnado. Wiliam (1990) sugiere el "comienzo abierto" como medio para la familiaridad personal. En este enfoque, las actividades comienzan con un contexto, pero son lo suficientemente abiertas como para que el alumnado siga sus propias instrucciones. De este modo, el alumnado desarrolla un sentido matemático personal, no sólo a partir de su propio desarrollo del contexto, sino de sus propios métodos de aplicación. El debate y la negociación de las actividades abiertas también permiten al alumnado ampliar y aplicar los métodos a sus propios contextos.

Estas consideraciones son relevantes porque muestran la permeabilidad del concepto contexto e incluso la importancia de selección del mismo. Estas ideas serán relevantes en momentos en el diseño de tareas que constituyan o sean parte de una situación de aprendizaje.

4. REFLEXIONES EN RELACIÓN CON LOS PROBLEMAS

La tarea puede tomar diversas formas, por ejemplo, proyectos, problemas, ejercicios, situaciones de aprendizaje, entre otros. Las tareas de resolución de problemas en su sentido más clásico proporcionan la información que debe emplearse para resolverla, poseen una respuesta esperada que resulta estática y no cambiante y requiere que se utilicen una serie de procedimientos, incluso, en el caso en que no conducen a la solución buscada, son considerados erróneos o no adecuados (Esteley, 2014). Además, en enseñanzas tradicionales muchas veces este tipo de problemas se proponen después de que se presenta y ejercita un nuevo tema y el estudiantado al saber que se encuentran en la una unidad determinada emplea las nociones matemáticas que acaba de aprender. Sin embargo, la caracterización de problema matemático puede ser entendida en un sentido más amplio. A modo de ejemplo, Bell (1978) ya tenía en cuenta la importancia de la actitud del estudiantado hacia el problema matemático cuando afirmaba que para que una situación constituya un problema para una persona, debe estar enterada de la existencia de la situación, reconocer que debe ejecutar algún tipo de acción ante ella, desear o necesitar actuar, hacerlo y no estar capacitado, al menos en lo inmediato, para superar la situación. Esta caracterización requiere tener la capacidad de formular, representar y resolver problemas matemáticos; el deseo o necesidad de actuación supone movilizar creencias personales y superar la situación requiere del uso del pensamiento lógico y la reflexión (Chapman, 2015).

Desde entonces, diferentes autoras y autores (e.g. Carrillo, 1998; Cruz et al, 2020; Cruz, 2023; Fernández-Bravo, 2010; Kilpatrick, 1987; Schoenfeld, 1985) señalan la importancia de considerar la relación entre quien resuelve y el problema. Pero también es relevante considerar el entorno educativo en el que el alumnado afronta la resolución del problema porque es en donde el individuo construye sus sistemas de creencias y sus experiencias matemáticas.

Así, asumimos como resolución de problemas "la manifestación que se produce cuando un sujeto identifica una situación como problemática, procede a su resolución a través de una serie de fases no necesariamente lineales usando una estrategia, y se involucra, con una disposición

positiva, en el desafío de resolverla” (Piñeiro, 2019, p. 64). Sin embargo, argumentamos a continuación la necesidad de ampliar el concepto de problema matemático a un constructo más general que aborde, no solo el contexto, su formulación, los procedimientos puestos en juego y la voluntad de quien resuelve, sino el conjunto de relaciones que se establecen entre el estudiantado involucrado en un aula con la persona que resuelve, entre este último y el contexto de la tarea y el modo en que los medios atraviesan dicha resolución. Estas consideraciones resultan relevantes y se emplearán al diseñar situaciones de aprendizaje.

5. PERO ENTONCES... ¿QUÉ ES UNA SITUACIÓN DE APRENDIZAJE?

La caracterización que hagamos de *situación de aprendizaje* tiene que considerar al alumnado que se involucra en la indagación o resolución de la tarea, el entorno educativo en el que se desarrolla, los procesos matemáticos que la alumna o el alumno pone en juego en el contexto dado en la tarea, los medios que atraviesan la experiencia educativa y las relaciones que se generan entre todo lo mencionado.

El Ministerio de Educación y Formación Profesional (2022) español define en el artículo 2 la noción de situación de aprendizaje como: “Situaciones y actividades que implican el despliegue por parte del alumnado de actuaciones asociadas a competencias clave y competencias específicas, y que contribuyen a la adquisición y desarrollo de las mismas” (p.7). Esta definición responde a qué es el aprendizaje -adquisición y desarrollo de competencias-, en qué consiste el conocimiento -actuaciones asociadas a competencias clave y competencias específicas- y cómo enseñar -situaciones y actividades que implican el despliegue por parte del alumnado de actuaciones asociadas a competencias-. A su vez, cabe destacar que la finalidad de la educación en el currículo de matemáticas actual es el desarrollo de competencias.

La noción de situación de aprendizaje así definida enlaza con la noción de alfabetización matemática propuesta por Marco para Prueba de Matemáticas de PISA 2021 (Instituto Colombiano para la Evaluación de la Educación, 2019):

la capacidad de un individuo de razonar matemáticamente y de formular, emplear e interpretar las matemáticas para resolver problemas en una amplia variedad de contextos de la vida real. Esto incluye conceptos, procedimientos, datos y herramientas para describir, explicar y predecir fenómenos. Ayuda a los individuos a conocer el papel que cumplen las matemáticas en el mundo y hacer los juicios y tomar las decisiones bien fundamentadas que necesitan los ciudadanos reflexivos, constructivos y comprometidos del siglo XXI (p. 11).

En el marco del nuevo plan de estudios de matemáticas en España, la expresión "situación de aprendizaje" tiene en cuenta lo mencionado anteriormente, pero consideramos que tiene como prioridad la implicación del estudiantado en un contexto específico que está diseñado para facilitar y motivar el aprendizaje de conceptos y destrezas matemáticas.

En relación con el planteamiento de la noción de realidad y el empleo de “contextos reales” destacamos que no es la característica principal de una situación de aprendizaje. La noción que presenta el Ministerio de Educación y Formación Profesional (2022), tal como señalamos se centra en responder a qué enseñar, qué es aprender y qué es el conocimiento en la búsqueda del desarrollo de competencia matemática. En particular, la competencia específica que fundamenta el desarrollo curricular es la resolución de problemas. Así, siguiendo a De Guzmán (1993), se trata de situar al alumnado en una situación desde la que quiere llegar a otra, unas veces bien conocida, otras un tanto confusamente perfiladas, y no conoce el camino que le puede llevar.

Sin embargo, trabajar la resolución de problemas en este sentido estricto impide el desarrollo de un aspecto sumamente importante de la alfabetización matemática ya mencionado anteriormente: potenciar en el alumnado el conocimiento en relación con el “papel que cumplen las matemáticas en el mundo y hacer los juicios y tomar las decisiones bien fundamentadas que necesitan los ciudadanos reflexivos, constructivos y comprometidos del siglo XXI” (Instituto Colombiano para la Evaluación de la Educación, 2019, p.11).

Además, las “situaciones de aprendizaje” reúnen un conjunto de cualidades que definen la calidad de las mismas. A continuación, indicamos algunas de ellas tomando aportes del Ministerio de Educación y Formación Profesional (2022):

- La situación de aprendizaje presenta un contexto de interés para el alumnado. El interés para el alumnado, dada la diversidad de motivaciones, se considera en términos de “reto de la tarea” (Flores y Moreno, 2014). Es decir, la capacidad del contexto para movilizar el interés del estudiantado en resolverla.
- La situación de aprendizaje promueve el trabajo autónomo y creativo del estudiantado. De este modo se favorece la capacidad de aprender de forma autónoma y el desarrollo del pensamiento crítico. Como señalaban Christiansen y Walther (1986), las mejores tareas son aquellas que proporcionan contextos y complejidad adecuados, que estimulan la construcción de redes cognitivas, el pensamiento, la creatividad y la reflexión, y que abordan explícitamente temas matemáticos significativos.
- La situación de aprendizaje parte de aprendizajes y experiencias previas del estudiantado. Así, el nuevo conocimiento engarza con el previo y se convierte en aprendizaje significativo.
- La situación de aprendizaje permite su resolución de forma creativa y/o cooperativa, reforzando la autoestima, la autonomía, la reflexión crítica y la responsabilidad.
- Finalmente, las situaciones de aprendizaje hacen posible la articulación coherente y eficaz de los distintos conocimientos, destrezas y actitudes propias de la etapa en la que se aplica. Las investigaciones ya señaladas anteriormente en este artículo, señalan que las tareas no rutinarias proporcionan las mejores condiciones para el desarrollo cognitivo en el que el nuevo conocimiento se construye relacionalmente con los elementos del conocimiento previo que se reconocen y evalúan.

Además, tomando aportes del Ministerio de Educación y Formación Profesional (2022) enfatizamos que las situaciones de aprendizaje deben cumplir ciertas condiciones:

- Tiene que tener objetivos claros y precisos.
- Debe integrar diversos saberes básicos.
- Debe favorecer diferentes tipos de agrupamiento.
- Debe implicar la producción e interacción verbal.
- Debe incluir el uso de recursos auténticos en distintos soportes y formatos.
- Debe fomentar aspectos relacionados con el interés común, la sostenibilidad o la convivencia democrática.

Lo descrito otorga bases para avanzar en la comprensión de la caracterización de situación de aprendizaje. En este sentido parece pertinente recurrir a ideas de Skovsmose (2000) puesto que este autor posee una visión amplia de la noción de problema e introduce el concepto de escenario de investigación que ayuda a caracterizar la situación de aprendizaje. Un escenario de investigación es una “situación particular que tiene la potencialidad para promover un trabajo investigativo o de indagación” (p. 5). El escenario de investigación se combina con oportunidades de aprendizaje que sirven de base para los sentidos que el estudiantado puede construir de las

nociones matemáticas. De tal modo que define tres de estas oportunidades de aprendizaje: actividades matemáticas que se refieren exclusivamente a las matemáticas; la semirrealidad considerada como una realidad construida para la tarea; finalmente, tareas que se refieren a situaciones de la vida real.

En el marco de tales ideas, el escenario de aprendizaje se percibe como una estrategia de enseñanza y aprendizaje que se utiliza a menudo para hacer que las matemáticas sean más significativas y relevantes para los estudiantes. En lugar de limitarse a presentar contenidos matemáticos en un aula tradicional, el profesorado crea escenarios o situaciones que requieren que el estudiantado aplique conceptos matemáticos para resolver problemas o hacer frente a retos específicos. Incluso, se pueden presentar problemas abiertos en lo que no se conozca previamente qué matemática estará en juego (Cruz, 2023). Esto proporciona experiencias educativas interactivas, atractivas y prácticas.

La idea que subyace a este enfoque es ayudar al alumnado a ver las aplicaciones prácticas de las matemáticas en la vida cotidiana y a desarrollar habilidades de resolución de problemas que puedan utilizarse fuera del aula. También fomenta la participación activa y el pensamiento crítico.

El diseño y el contenido específicos que se pone en juego en una situación de aprendizaje varían en función de la materia, el nivel escolar y los objetivos de aprendizaje. Además, pueden incluir actividades en grupo, experimentos prácticos, estudios de casos, simulaciones o cualquier otro método que sumerge a los estudiantes en un contexto matemático.

En general, el objetivo de una situación de aprendizaje es crear una experiencia de aprendizaje dinámica e interactiva que mejore la comprensión de las matemáticas por parte de los alumnos y su capacidad para aplicar los conceptos matemáticos en diferentes situaciones.

En consecuencia, una situación de aprendizaje en matemáticas la interpretamos como **una tarea o un conjunto de tareas que promueven acciones por parte del estudiantado que desarrollan los sentidos matemáticos en entornos educativos que incentivan el uso de procesos matemáticos mediante la investigación o indagación y cuyo abordaje permite ver el valor de las matemáticas para dilucidar un problema, emitir juicios o tomar decisiones.**

Para planificar e interpretar una tarea o conjunto de tareas y avanzar en la reflexión con respecto a si se constituye una situación de aprendizaje y sobre lo que desarrolla se pueden identificar y analizar aspectos que se presentan en la siguiente tabla (Ver Tabla 1):

Tabla 1

Aspectos a identificar en una situación de aprendizaje.

Tarea/s		
Contexto	Sentidos	Competencias clave
Agrupamiento		Competencias específicas
Medios		

El análisis de una tarea o varias en torno a tales aspectos puede otorgar pistas para avanzar en la planificación de situaciones de aprendizaje. Aunque no siempre se podrán reconocer todos los aspectos, pues, en casos en los que el estudiantado genera problemas y sus contextos, será complejo identificarlos con antelación.

6. EJEMPLOS PARA REFLEXIONAR

Atendiendo a la caracterización establecida anteriormente un ejercicio como (Ver Tabla 2):

Tabla 2

Ejercicio tradicional.

<i>Resolver la siguiente ecuación: $2x + 3 = 5x - 2$</i>

no se consideraría una situación de aprendizaje porque no fomenta la investigación o la indagación, aunque ello no signifique su exclusión como propuesta de trabajo del estudiante. Por la misma razón tampoco se puede considerar una situación de aprendizaje un problema tradicional como (Ver Tabla 3):

Tabla 3

Problema tradicional.

<i>Un pescador vende 8 Kg. de pescado a 75 € el Kg. con el total del dinero de la venta compra exactamente 5 metros de tela, ¿cuánto cuesta un metro de tela?</i>

Este problema de la semirrealidad se resuelve fácilmente aplicando fórmulas, posee una única respuesta y se disponen de todos los datos necesarios para abordarlo. En este sentido, tampoco consideramos que ofrezca oportunidades al estudiantado para investigar e indagar empleando procedimientos matemáticos.

Pero no siempre esa semirrealidad creada para resolver un problema excluye a la situación problemática de ser considerada una situación de aprendizaje. Por ejemplo, como señala Skovsmose (2000) a modo de ejemplo, el problema de la carrera de caballos permite la indagación de los estudiantes a pesar de no ser una situación real (Ver Tabla 4).

Tabla 4

Problema de carrera de caballos.

<i>El siguiente tablero constituye una pista con once caballos numerados del 2 al 12. Los caballos se encuentran en la línea de partida. Un o una estudiante debe lanzar dos dados, se suman los números en las caras superiores y se hace una cruz sobre el caballo cuyo número corresponde a la suma. Juega varias partidas ¿Por qué caballo apostarías que avanzaría? Justifica.</i>										
2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

En esta tarea, el estudiantado tiene que indagar en la situación planteada para dar respuesta a la tarea. Es interactiva porque le permite experimentar con los dados. Además, la tarea refuerza el valor de las matemáticas para la toma de decisiones. Incluso se puede utilizar este contexto para proponer otra tarea relacionada en la que se plantea la creación de tableros propios apelando al uso de otras operaciones, como, por ejemplo, resta, multiplicación, logaritmos, entre otras. Se trata por tanto de una situación de aprendizaje.

Si bien la tarea anterior puede considerarse semirrealidad, también se pueden presentar situaciones de aprendizaje en un contexto matemático. Cruz et al (2020) muestra la siguiente situación formulada por estudiantes a partir de problematizar la propia matemática (Ver Tabla 5):

Tabla 5

Problema tomado de Cruz et al (2020, p. 215).

Si tenemos distintas figuras geométricas (triángulos, rectángulos, cuadrados, pentágonos, etc.) al unirlos podemos formar poliedros. Pero ¿siempre se puede? (tomando cualquier figura y cantidad)

Esta tarea potencia la investigación e indagación a partir del uso de diversidad de procesos matemáticos, incluso, diferentes grupos podrían dar distintas respuestas en función de su propia investigación.

De igual modo, el Instituto Nacional de Tecnologías Educativas y de Formación del Profesorado ha publicado situaciones de aprendizaje que, a modo de proyecto, permite al alumnado tomar decisiones basándose en las matemáticas e incentivan a la investigación. Es el caso de la situación de aprendizaje que se muestra en la Tabla 6:

Tabla 6

Problema tomado de Instituto Nacional de Tecnologías Educativas y de Formación del Profesorado

¿Cómo me desplazo al lugar de trabajo?¹

Para ir a trabajar Marta tiene que desplazarse por Alicante, y tiene varias opciones. Para evaluar estas opciones y tomar la mejor decisión, Marta tiene en cuenta distintos factores que le afectan y le importan.

Por un lado, el factor económico. El precio de los carburantes ya supone unos gastos importantes, además está el gasto del aparcamiento a diario.

Por otro, no es ajena a los problemas medioambientales, de que el carburante es un recurso natural limitado, así como de la importancia de reducir su huella de carbono.

Baraja opciones como el nuevo aparcamiento disuasorio, que han abierto recientemente en Alicante, combinado con taxi o transporte público.

A lo largo de sus análisis, valiéndose de sus conocimientos en matemáticas, Marta se topará con curiosidades matemáticas, fruto de las complejas interacciones comerciales por llamar nuestra atención, e incluso, si acompañáis lo suficiente a Marta en sus investigaciones, analizará la posibilidad de los coches eléctricos, su nivel de contaminación acústica e incluso, las tasas de siniestralidad como factores a tener en cuenta, y que, con una visión matemática, puede considerarlas mejor.

Como veis, lo único que hace Marta es recabar la información a su alcance, de la forma más eficiente posible, para tomar las decisiones que más le puedan beneficiar.

Algún día seguramente tú tendrás que tomar decisiones parecidas, ¿serás capaz de tomar la mejor?

Otro ejemplo similar se presenta en Hurani et al (2023), las autoras muestran el modo en el que la siguiente tarea (Ver Tabla 7) de la semirrealidad propició la indagación por parte del estudiantado:

¹Disponible en:

https://descargas.intef.es/recursos_educativos/ODES_SGOA/Bachillerato/Matematicas/6E3_SA_BACH_GENERAL_Como_me_desplazo/index.html

Tabla 7

Problema tomado de Hurani et al (2023, p.587).

Una empresa que empaqueta y vende vinos desea realizar una oferta de tres vinos a elección y decidió confeccionar cajas para entregar las tres botellas juntas. Les solicitamos que propongan ideas para el diseño de las cajas y determinen la cantidad de material que se necesita para su construcción. Para el diseño pueden apelar a recursos digitales (por ejemplo, GeoGebra) o materiales concretos.

Incluso, al analizar las producciones del estudiantado destacan que las decisiones tomadas por el estudiantado y cada grupo, como por ejemplo “imponer condiciones a la tarea presentada, hipotetizar, emplear distintos modos de representación y fuentes de información, favorecieron el intercambio de ideas, la comparación de modelos, el establecimiento de relaciones, la recuperación de conocimientos previos e influyeron en los modelos producidos” (p. 589).

Finalmente, algunos ejemplos de la realidad podrían conformarse con tareas como, por ejemplo (Ver Tabla 8):

Tabla 8

Problemas reales.

1 - ¿Cuántos veces late el corazón de una persona a lo largo de su vida?
2 - ¿Cuánto tiempo utilizaste el teléfono en toda tu vida?
3 - ¿Cuánta basura es posible reciclar de toda la basura que se genera en tu casa en un año?, ¿y en tu barrio?, ¿y en tu ciudad?, etc.

Claramente, todos estos ejemplos propician la toma de decisión del estudiantado a partir de la indagación e investigación a partir de procedimientos matemáticos diversos en los que posiblemente se pongan en juego diversos sentidos matemáticos y el socioafectivo e incluso, la articulación entre ellos.

7. REFLEXIONES FINALES

Este artículo ofrece aportes para reflexionar sobre la noción de situación de aprendizaje y sus alcances dentro del aula. Hemos establecido una definición, cualidades y condiciones que las caracterizan. La relevancia de este tipo de tareas para promover el aprendizaje de las matemáticas parece claro y, por tanto, es importante una necesaria reflexión sobre sus diseños y la elección de escenarios para que contribuyan a la educación en términos de humanidad y desarrollo sostenible.

Este trabajo comienza situando a la tarea como el eje de las oportunidades de aprendizaje. En este sentido, las mejores tareas son aquellas que proporcionan contextos y complejidad adecuados, que estimulan la construcción de redes cognitivas, el pensamiento, la creatividad y la reflexión, y que abordan explícitamente temas matemáticos significativos.

El posterior análisis realizado sobre la importancia del contexto seleccionado pone de manifiesto que este debe ser lo suficientemente abierto como para que el alumnado siga sus propias instrucciones.

La tarea en contexto tiene un significado más amplio que el de problema matemático. Así discutimos este concepto para reconocer la necesidad de vincularlo a la alfabetización matemática y por tanto buscar el desarrollo de los diferentes sentidos matemáticos y el socioafectivo por medio del trabajo con las competencias clave y específicas de matemáticas. La planificación

docente en torno a este concepto, tanto para el aprendizaje como para la evaluación, posibilita la formación humana del alumnado a través de la matemática.

En conclusión, una situación de aprendizaje es una tarea o un conjunto de tareas que promueven acciones por parte del estudiantado que desarrollan los sentidos matemáticos en entornos educativos que incentivan el uso de procesos matemáticos mediante la investigación o indagación y cuyo abordaje permite ver el valor de las matemáticas para dilucidar un problema, emitir juicios o tomar decisiones.

AGRADECIMIENTOS

Trabajo patrocinado a través del programa de becas de movilidad académica de la AUIP, patrocinado por AUIP y la Consejería de Transformación Económica, Industria, Conocimiento y Universidades de la Junta de Andalucía. PMA2-2023-099-14.

Financiado por el Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas de Argentina.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Anthony, G., y Walshaw, M. (2009). *Effective pedagogy in mathematics* (Vol. 19). International Academy of Education.
- Bell, F. H. (1978). *Teaching and Learning Mathematics in Secondary School*. Brown Company Publisher.
- Boaler, J. (1993). The Role of Contexts in the Mathematics Classroom: Do they Make Mathematics More "Real"? *For the learning of mathematics*, 13(2), 12-17. <https://flm-journal.org/Articles/5456B6E86646C379524F75BCA9D7EE.pdf>
- Carraher, T. N., Carraher, D. W., y Schliemann, A. D. (1982). Na vida, dez; na escola, zero: os contextos culturais da aprendizagem da matemática. *Cadernos De Pesquisa*, (42), 79–86. Recuperado de <https://publicacoes.fcc.org.br/cp/article/view/1552>
- Carrillo, J. (1998). *Modos de resolver problemas y concepciones sobre la matemática y su enseñanza: metodología de la investigación y relaciones*. Universidad de Huelva.
- Chapman, O. (2015). Mathematics teacher's knowledge for teaching problem solving. *LUMAT*, 3(1), 19-36. <https://doi.org/10.31129/lumat.v3i1.1049>
- Christiansen, B. y Walther, G. (1986). Task and Activity. En B. Christiansen, A. G. Howson, M. Otte (Eds.) *Perspectives on Mathematics Education* (pp. 243-307). Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-009-4504-3_7
- Cruz, M. F. (2023). *Sentidos, validaciones y definiciones al interior de una vivencia de formación de futuras profesoras en matemática mediada por un escenario de modelización matemática en el contexto de una universidad pública argentina*. [Tesis de Doctorado no publicada, Universidad Nacional de Córdoba]. Repositorio Institucional Universidad Nacional de Córdoba.
- Cruz, M. F.; Esteley, C. y Scaglia, S. (2020). Una experiencia de formación para futuros profesores: producir matemática en un contexto de modelización matemática. *Educación Matemática*, 32(1), 189-216. <https://doi.org/10.24844/em3201.09>
- De Guzmán, M. (1993). *Tendencias innovadoras en educación matemática. Organización de estados iberoamericanos para educación y la cultura*. Editorial Popular.
- Esteley, C. (2014). *Desarrollo profesional en escenarios de modelización matemática: Voces y Sentidos* [Tesis de Doctorado, Universidad Nacional de Córdoba]. Repositorio

- Institucional Universidad Nacional de Córdoba.
https://ffyh.unc.edu.ar/publicaciones/tienda/publicaciones_de-investigacion/seicyt-posgrado/tesis/desarrollo-profesional-en-escenarios-de-modelizacion-matematica-voce-y-sentidos/
- Fernandez Bravo, J. A. (2010). *La resolución de problemas matemáticos: creatividad y razonamiento en la mente de los niños*. Grupo mayeútica Educación.
- Flores, P. y Moreno, A. (2014). Formar profesores de matemáticas de primaria para las nuevas competencias. *UNO*, 66, 19-27.
- Hiebert, J. y Wearne, D. (1997). Instructional tasks, classroom discourse and student learning in second grade arithmetic. *American Educational Research Journal*, 30(2), 393-425.
<https://doi.org/10.3102/00028312030002393>
- Hurani, C., Esteley, C. y Cruz, M. F. (2023). Decisiones, trabajo matemático y modelos producidos por futuras/os docentes. En G. Mazzieri, M. P. Saavedra, R. D. Spies, K. Temperini (Eds.). *IX Congreso de Matemática Aplicada, Computacional e Industrial* (pp.586-589). Asociación Argentina de Matemática Aplicada, Computacional e Industrial.
- Kilpatrick, J. (1987). Problem formulating: Where do good problem come from? En A.H. Schoenfeld (Ed.), *Cognitive science and mathematics education* (pp. 123-147). Erlbaum.
- Lave, J. (1988). *Cognition in practice*. Cambridge University Press.
- Instituto Colombiano para la Evaluación de la Educación. (2019). Marco para Prueba de Matemáticas PISA 2021. <https://www.educacionyfp.gob.es/dam/jcr:b7f0ba60-38ec-4523-af38-5b4d752fec96/pisa-2021-mr-matem-ticas-es.pdf>
- Ministerio de Educación y Formación Profesional (MEFP). (2022). *Real Decreto 217/2022, de 29 de marzo, por el que se establece la ordenación y las enseñanzas mínimas de la Educación Secundaria Obligatoria*.
- Moreno, A. y Ramírez, R. (2016). Variables y funciones de las tareas matemáticas. En L. Rico y A. Moreno (Coords.), *Elementos de didáctica de la matemática para el profesor de secundaria* (pp. 241-273). Pirámide.
- Piñeiro, J. L. (2019). *Conocimiento profesional de maestros en formación inicial sobre resolución de problemas en matemáticas*. [Tesis de Doctorado no publicada, Universidad de Granada]. Repositorio Institucional Universidad de Granada.
- Schoenfeld. A.H. (1985). *Mathematical solving problem*. Academic Press.
<https://doi.org/10.1016/C2013-0-05012-8>
- Scribner, S. (1984). Studying working intelligence. En B. Rogoff y J. Lave (Eds.), *Everyday cognition: it's development in social context* (pp. 9-40). Harvard University Press.
- Skovsmose, O. (2000). Escenarios de investigación. *EMA*, 6(1), 3-26.
<https://es.scribd.com/document/329407266/Skovsmose-2000-Escenarios-EMA>
- Stein, M. K. y Lane, S. (1996). Instructional tasks and the development of student capacity to think and reason and analysis of the relationship between teaching and learning in a reform mathematics project. *Educational Research and Evaluation*, 2(1), 50-80.
- Taylor, N. (1989). "Let them eat cake": Desire, Cognition and Culture in Mathematics Learning. En C. Keitel, P. Damerow, A. Bishop, y P. Gerdes, P. (Eds.), *Mathematics, education and society* (pp. 161-163). United Nations Educational Scientific.
- William, D. (1990). *Assessment of Open-ended Work in the secondary School*. Proceedings of a Theme Group at ICME-6.

Un problema de lugar geométrico que invita a descubrir y explicar propiedades mediadas por un software de geometría dinámica

María Susana Dal Maso

Facultad de Humanidades y Ciencias. Universidad Nacional del Litoral (Argentina),
mariasusanadalmaso@gmail.com

Resumen: *Es todo un desafío proponer problemas geométricos donde el lápiz y el papel no resulten suficientes para modelizar la situación planteada. El uso de un software de geometría dinámica favorece la visualización y el diseño de conjeturas contribuyendo a la construcción del sentido de conceptos matemáticos. No se trata sólo de encontrar la solución del problema y asegurarse de que el lugar geométrico hallado sea una construcción que soporta el arrastre manteniendo las propiedades invariantes. El objetivo es mostrar que un software de geometría dinámica es esencial para el descubrimiento de la solución de dicho problema y que la actividad demostrativa no puede ser dejada de lado revelando los pasos que llevan a plantear algunas conjeturas, descartar aquellas propiedades que no llegan a buen puerto y posicionarse en aquellas que permiten transformar la conjetura en una certeza.*

Palabras clave: *Lugar geométrico, explicación, descubrimiento, propiedades geométricas, GeoGebra.*

A geometric place problem that invites you to discover and explain properties mediated by dynamic geometry software

Abstract: *It is a challenge to propose geometric problems where pencil and paper are not enough to model the situation. The use of dynamic geometry software favors the visualization and design of conjectures, contributing to the construction of the meaning of mathematical concepts. It is not just a matter of finding the solution to the problem and making sure that the locus found is a construction that maintains invariant properties under dragging. The objective is to show that a dynamic geometry software is essential for the discovery of the solution of that problem and that demonstration activity must not be left aside, by revealing the steps that lead to some conjectures, discarding properties that do not succeed, and position itself in those that allow transforming the conjecture into a certainty.*

Key words: *Geometric place, explanation, discovery, geometric properties, GeoGebra.*

1. INTRODUCCIÓN

Un concepto matemático está formado por tres componentes: uno la definición, otro su representación y un tercero, las propiedades asociadas al mismo. La construcción de los conceptos matemáticos y las relaciones entre sus componentes es siempre objeto de consideración en la actividad matemática.

Las relaciones existentes entre la definición y la representación de un concepto y, entre la producción y la validación de las propiedades se ven, muchas veces, influenciadas por el uso de tecnologías digitales.

Novembre y Tedesco (2016) consideran que debe reflexionarse sobre el aporte sustancial que la incorporación de recursos digitales puede hacer al aprendizaje cuando entra en diálogo con las herramientas habituales (lápiz, papel, regla, compás, etc.). No se trata de plantear la prevalencia de una herramienta sobre otra sino qué aporta cada una a la otra para favorecer el aprendizaje, “de qué manera se pueden complementar, cómo acompaña una a la otra o cuál se muestra más adaptada para la construcción de un conocimiento determinado” (p. 1). En este sentido, su incorporación debe pensarse más allá del efecto novedoso que pueden producir en los alumnos, intentando “promover el desarrollo de prácticas tales como la anticipación, la elaboración de conjeturas, la exploración, el cuestionamiento de conocimientos anteriores, la explicación, la confirmación o modificación como resultado de un proceso que invitó a resolver un problema” (pp. 1-2).

Es por eso por lo que estudiar el modo en que estas tecnologías modifican la relación de estas actividades matemáticas es una tarea atrayente.

Como plantean Dal Maso y Götte (2014) es una tarea nada sencilla para el docente, buscar problemas donde el uso de un software de geometría dinámica sea indispensable para su resolución. En la actualidad todavía cuesta que se incorporen tecnologías digitales en el trabajo en la clase de matemática y, si se incorporan, muchas veces son usadas para resolver aquello que ya se resolvía con lápiz y papel.

Es interesante trabajar problemas geométricos donde el lápiz y el papel no resulten suficientes para realizar conjeturas y buscar soluciones. Las representaciones gráficas cumplen un papel destacado en la interpretación de conceptos y propiedades geométricas y creemos que, en este sentido, es necesario fomentar el uso de software de geometría dinámica. (Dal Maso y Götte, 2014, p. 89)

El software que se utiliza en este trabajo es GeoGebra.

...se caracteriza por la posibilidad de manipulación directa y continua de representaciones geométricas. Ello permite el diseño de ambientes de exploración y observación de muchos casos que, de otra manera, quedan reservados a personas con elevada capacidad de visualización. Este tipo de software permite diseñar actividades y ambientes que ayuden a los alumnos a estudiar situaciones matemáticas sin tener que hacer mucho énfasis en procesos mecánicos y de graficación que se le pueden dejar a la herramienta computacional (Larios Osorio y Pino-Fan, 2017, p. 4).

En este artículo se muestra un problema presente en el temario de unas olimpiadas universitarias de matemática. Llega a manos de la autora a través de una colega con quien comparte la pasión por la Geometría. La búsqueda de la solución representó un interesante desafío que se narra en estas líneas. Cabe aclarar que los conceptos y propiedades utilizados en el presente artículo pueden encontrarse en textos del nivel secundario y universitario.

En este trabajo se intenta ir más allá de lograr la solución de un problema, o de conjeturar propiedades, para validarlas o descartarlas. Inicialmente se trata de describir un proceso intuitivo, dejando al descubierto el razonamiento que guía la resolución y la demostración que, finalmente, se presenta como parte del resultado de dicho proceso.

El objetivo es mostrar que un software de geometría dinámica es esencial para el descubrimiento de la solución de dicho problema y que la actividad demostrativa no puede ser dejada de lado revelando los pasos que llevaron al autor a formular algunas conjeturas, descartar aquellas propiedades que no llevan a buen puerto y posicionarse en aquellas que permiten transformar la conjetura en una certeza.

2. ANTECEDENTES Y MARCO TEÓRICO

Laborde (1996) plantea que la figura geométrica queda definida como el conjunto de pares formado por dos elementos, el primero el referente (objeto de una teoría geométrica), el segundo uno de los dibujos que lo representa, y que se toma del universo de todos los dibujos posibles del referente.

Por otra parte, Fischbein (1993) plantea la noción de concepto figural, y considera tres categorías de entidades mentales cuando se refiere a figuras geométricas: la definición, la imagen (basada tanto en la experiencia perceptiva-sensorial, como en la imagen de un dibujo) y el concepto figural. Una figura geométrica puede ser descrita como poseedora de propiedades intrínsecamente conceptuales, no obstante, no es un mero concepto. Es una imagen, una imagen visual. Posee una propiedad que los conceptos usuales no poseen, incluye la representación mental de la propiedad espacial.

Teniendo en cuenta los referentes teóricos mencionados se considera que un concepto matemático está formado por tres componentes: la definición, su representación y las propiedades asociadas al mismo.

Existen numerosos artículos que hacen referencia a trabajos de investigación que relacionan la tecnología con el modo de enseñar y aprender en el aula (Rojano, 2014), pero también es conocido que todavía hoy es un desafío para los docentes incluirlas en las tareas del currículo y resulta muchas veces trabajoso encontrar y proponer problemas donde el uso de un sistema de geometría dinámica (en adelante SGD) haga la diferencia.

Rojano (2014) subraya que luego de 30 años de investigación intensiva que evidencian las potencialidades didácticas de los entornos tecnológicos de aprendizaje subsiste un mínimo impacto en el currículo oficial e implementado en el aula de matemática. Sostiene que:

Más allá de la posibilidad que ofrecen los entornos tecnológicos de aprendizaje de un acceso temprano a ideas poderosas en matemáticas, las potencialidades didácticas probadas de dichos entornos (tanto de naturaleza cognitiva como epistemológica) hicieron suponer que su influencia podría llegar a moldear un currículo de matemáticas completamente nuevo, así como a revolucionar las prácticas de aula. Sin embargo, esta posibilidad ha sido seriamente cuestionada a partir de los resultados de evaluaciones internacionales recientes y de estudios sobre el uso real de la tecnología por parte de los maestros, lo cual ha dado lugar a intensos debates en la comunidad internacional de matemáticos y educadores matemáticos (Rojano, 2014, p.12).

De Villiers (1993) destaca que la verificación es, generalmente, la principal función que se le brinda a la demostración en términos de convicción o justificación. Señala que en muchos casos los alumnos, en particular los de la escuela secundaria obligatoria, no encuentran la necesidad de demostrar una conjetura, y refuerzan esa idea si de un problema geométrico se trata donde en ocasiones las demostraciones son visualmente obvias.

Si nos trasladamos al nivel universitario, podemos preguntarnos si los estudiantes del profesorado en matemática demuestran porque sienten la necesidad de validar o porque simplemente es lo que se espera que hagan.

Cruz y Mántica (2019), en su investigación con alumnos universitarios, plantean un problema de construcción de un rombo considerando que uno de los vértices se encuentra en un plano determinado. Esperan que los alumnos puedan identificar que los tres vértices restantes, no necesariamente se encuentran en el mismo plano.

Los estudiantes asumen el papel de un matemático en la resolución de la situación, dado que como afirma Schoenfeld (2001), controlan la situación con cuidado, siguen pistas interesantes y abandonan los caminos que parecen no conducir a la solución correcta de la tarea; realizan una revisión de lo solicitado por la consigna en varios momentos. (Cruz y Mántica, 2019, p. 128)

Los estudiantes no manifiestan explícitamente la necesidad de escribir la conjetura con la rigurosidad de una propiedad o teorema matemático y validarla. Recurren a la profesora para que les confirme que deben llevar a cabo estas actividades propias del quehacer matemático a pesar de que habitualmente lo realizan por ser alumnos avanzados del Profesorado en Matemática (Cruz y Mántica, 2019, p. 130).

“Finalmente escriben de modo formal la conjetura establecida. Esto puede deberse a que en el desarrollo de la asignatura se escriben formalmente las conjeturas y demostraciones y este es un trabajo de evaluación” (Cruz y Mántica, 2019, p. 131).

Dal Maso y Hurani (2017) trabajaron con problemas de lugar geométrico con alumnos universitarios. Si bien el SGD utilizado por los alumnos permitió la formulación de conjeturas en función de la construcción realizada, los problemas involucrados en la actividad propuesta presentaron la necesidad de soportes teóricos para explicar y comunicar a la clase la solución hallada.

En todos los casos, los estudiantes describen el lugar geométrico ..., pero en ninguno de los casos presentan argumentos que validen dichos enunciados. Si bien los cambios implementados... permiten a los alumnos hallar el lugar geométrico solución del problema..., no genera la necesidad de demostrar. Creemos que el uso del software y de un conjunto de tareas adecuadas, facilita la visualización, pero convence al alumno de la solución sin verse involucrada la tarea demostrativa. La demostración como condición necesaria para validar su producción no surge espontáneamente, no se evidencia como una necesidad. Sólo aparece si es reclamado explícitamente por el docente (Dal Maso y Hurani, 2017, p. 1705).

De Villiers (1993) enumera cinco funciones de la demostración sin pretender enumerarlas en un orden específico de importancia:

- Verificación (concerniente a la verdad de una afirmación).
- Explicación (profundizando en por qué es verdad).
- Sistematización (la organización de varios resultados dentro de un sistema de axiomas, conceptos fundamentales y teoremas).
- Descubrimiento (el descubrimiento o invención de nuevos resultados).
- Comunicación (la transmisión del conocimiento matemático) (De Villiers, 1993, p. 18).

La creación de programas de computación dinámicos, que permiten observar si una determinada conjetura puede ser cierta o no, traslada el interés de utilizar demostraciones en la enseñanza hacia otras funciones distintas de la simple verificación.

Se citan las funciones de explicación y descubrimiento por entender que son las que se destacan en la resolución del problema que se desarrolla en este trabajo. La función explicación porque,

“Aunque es posible alcanzar un alto grado de confianza en la validación de una conjetura por verificación cuasi-empírica..., esto no proporciona generalmente una explicación satisfactoria de por qué puede ser cierto” (De Villiers, 1993, pp. 20-21). En este sentido la intención quizás no sea la de asegurarse que es correcto el lugar geométrico hallado como

solución del problema sino de preguntarse por qué lo es. “Para el matemático profesional la demostración no es...un medio de verificación a posteriori, sino, a menudo y también, un método de exploración, análisis, descubrimiento e inventiva” (De Villiers, 1993, p. 25).

En el Profesorado en Matemática, carrera de grado de la Universidad Nacional de Litoral, el concepto de lugar geométrico forma parte del curriculum de la enseñanza de la geometría. La definición de lugar geométrico según Puig Adam (1980) destaca la doble implicación que conlleva dicho concepto. “Cuando una figura contiene todos los puntos que cumplen una determinada propiedad, y, recíprocamente, sólo contiene puntos que la cumplen, se dice que es el lugar geométrico de dichos puntos” (Puig Adam, 1980, p.37). Los problemas que involucran el concepto de lugar geométrico ofrecen la posibilidad de: explorar; establecer relaciones entre conceptos ya trabajados; en ocasiones, descubrir relaciones y propiedades; y fomentar la actividad demostrativa. Utilizar un SGD para la resolución de este tipo de problemas favorece la visualización.

...en general, resulta difícil imaginar el lugar geométrico que describe un punto, una línea o cualquier otro objeto geométrico cuando se mueve dentro de una configuración. El uso de este tipo de software permite fácilmente trazar el camino que deja parte de la configuración (punto, segmento, triángulo, etc.) cuando se mueve con respecto a otros elementos dentro de esa misma configuración y como consecuencia ofrece la oportunidad al estudiante de analizar y describir tal lugar geométrico en término de propiedades. Además, los estudiantes pueden realizar variaciones precisas e instantáneas de sus propias representaciones visuales que se producen bajo el uso de este tipo de software. Esto les permite realizar constantes exploraciones y probar sus ideas matemáticas y conjeturas en una forma visual, eficiente y dinámica (Santos Trigo, 2011, pp. 38-39).

Según Villarreal (2012), la producción de conocimiento se ve condicionada por la utilización de diversas tecnologías destacando que los medios utilizados transforman las prácticas, los contenidos y las formas de conocer. “...ese medio es constitutivo del conocimiento, de suerte que si estuviera ausente el conocimiento construido sería otro” (Villarreal, 2012, p. 79).

3. ABANICO DE CONCEPTOS QUE SE PONEN EN JUEGO EN LA RESOLUCIÓN DEL PROBLEMA

Enunciado original del problema: Sean A , Q y B puntos alineados en el plano, con Q estrictamente entre A y B , distinto del punto medio de A y B . Sea H la rama de la hipérbola, con focos A y B , que pasa por Q . Determinar el lugar geométrico de los incentros de los triángulos PAB al variar el punto P sobre la hipérbola - $\{Q\}$.

Nota: el incentro de un triángulo es el centro del círculo inscripto.

Es interesante pensar la definición de la hipérbola como lugar geométrico.

La hipérbola es el lugar geométrico de los puntos tales que el valor absoluto de la diferencia entre sus distancias a dos puntos fijos, los focos, es igual a una constante (positiva), que equivale a la distancia entre los vértices (Rodríguez Marín, 2014, p. 18).

Se considera que desde el punto de vista conceptual es apropiado utilizar el término circunferencia en lugar de círculo. En un primer momento se pensó que quizás, buscando en propiedades de lugares geométricos conocidos, se encontraría la respuesta. Se recordó entonces

dos lugares geométricos que se demuestran a partir de la generalización del teorema de Pitágoras. Se enuncian dichos lugares geométricos:

“El lugar geométrico de los puntos del plano cuya suma de cuadrados de distancias a dos puntos fijos del mismo A, B es constante, es una circunferencia de centro en el punto medio de AB ” (Puig Adam, 1980, p. 132).

“El lugar geométrico de los puntos del plano cuya diferencia de cuadrados de distancia a dos puntos fijos del mismo A, B es una cantidad constante, es una recta perpendicular a AB ” (Puig Adam, 1980, p. 132).

El segundo lugar geométrico se presentaba atractivo considerando que el valor absoluto de la diferencia de las distancias de un punto de la hipérbola a los focos es constante e igual a la distancia entre los vértices. Sea P un punto cualquiera de la hipérbola y A y B los focos, si $2a$ es la distancia entre los vértices se tiene:

$$|PA - PB| = 2a$$

Elevando miembro al miembro al cuadrado:

$$(PA - PB)^2 = 4a^2$$

Y desarrollando la expresión se obtiene una suma de cuadrados

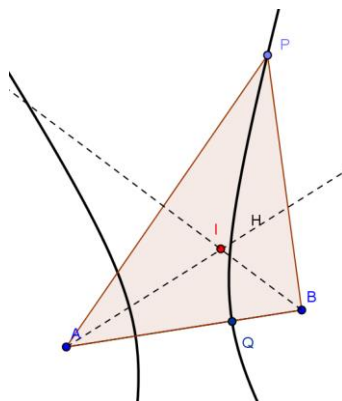
$$PA^2 + PB^2 = 4a^2 + 2 \times PA \times PB$$

Y al no ser constante el producto $PA \times PB$ (dado que P es un punto que se mueve sobre la hipérbola) tampoco se encuentra la respuesta en el primer lugar geométrico.

Es así como se considera interesante hacer uso de un Sistema de Geometría Dinámica (SGD) como el software GeoGebra para la identificación del lugar geométrico en cuestión. Utilizando las herramientas del software se construye la hipérbola de focos A y B que pasa por el punto Q . A dicha rama se la denomina H y el punto P sobre objeto H es vértice de los triángulos APB . El punto I , incentro, es punto intersección de las bisectrices de los ángulos interiores de los triángulos APB (Figura 1).

Figura 1

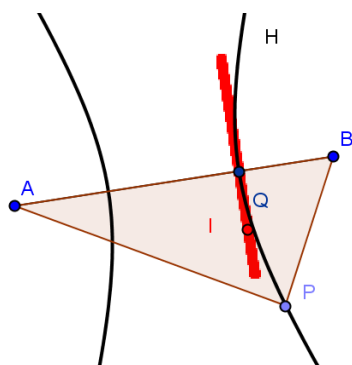
Hipérbola de focos A y B que pasa por Q



Con el comando activar rastro sobre el punto I , y moviendo el punto P sobre objeto H , el lugar geométrico descrito es una recta perpendicular al segmento AB por Q (Figura 2).

Figura 2

El lugar geométrico cuando se mueve P en H es una recta perpendicular a AB por Q



Ahora bien, se ha logrado la visualización del lugar geométrico, ¿pero se ha determinado el lugar geométrico? Según la Real Academia Española (RAE) determinar significa, entre otros, fijar los términos de algo; distinguir, discernir; tomar resolución; señalar o indicar algo con claridad y exactitud; ser causa de que algo ocurra. Visto así, quizás preguntas como ¿todos los puntos I están alineados?, ¿la recta es perpendicular al segmento AB ?, ¿ Q pertenece a dicha recta?, ¿qué conceptos matemáticos permiten esta afirmación?, necesitan una respuesta.

Desde el punto de vista matemático, y a partir de las funciones de la demostración de De Villiers (1993) se intentará explicar la necesidad de demostrar la propiedad que verifican los puntos del lugar geométrico hallado dando respuesta a las preguntas anteriormente formuladas.

Recordando el proceso que llevó al autor a arribar a la demostración elegida como satisfactoria para dar respuesta al problema, resulta interesante comentar algunos pasos en este proceso con la intención de poner de manifiesto que es propio de la actividad matemática formular conjeturas, considerar propiedades que permitan validarlas, descartar aquellas propiedades que no llevan a buen puerto y posicionarse en aquellas que permiten transformar la conjetura en una certeza.

La conjetura, el lugar geométrico que cumple con las condiciones del problema es una recta perpendicular a la recta AB por el punto Q , puso en marcha la búsqueda de propiedades que involucren a la perpendicularidad de dichas rectas. El uso del SGD potencia la visualización del lugar geométrico y permite indagar acerca de las acciones de conjeturar.

La definición de lugar geométrico involucra una doble implicación: una que los puntos que cumplen las condiciones del problema es una recta perpendicular a la recta AB por Q ; y la otra, que todo punto de una recta perpendicular a un segmento AB donde su punto intersección Q es distinto del punto medio de dicho segmento, es incentro de un triángulo de lado AB donde el tercer vértice pertenece a una rama de una hipérbola que pasa por Q . En este artículo se trabajará sobre la primera implicación dado que la intención del autor es mostrar que un software de geometría dinámica es esencial para el descubrimiento de la solución de dicho problema.

Para ello se pensó primero en el ángulo que forman las bisectrices interiores de un triángulo cualquiera.

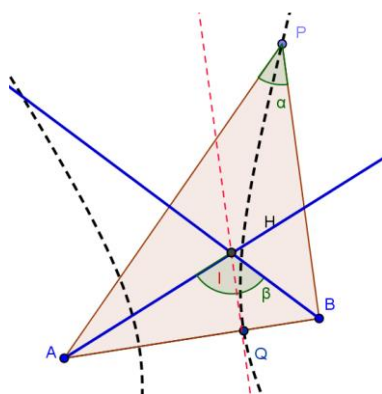
Considerando las bisectrices correspondientes a los ángulos interiores del triángulo APB , se demuestra de manera sencilla que el ángulo β (ángulo AIB) es igual a la mitad del ángulo α (ángulo APB) más un recto. Basta trabajar con los ángulos interiores de los triángulos APB y AIB , plantear dos ecuaciones donde la suma de los ángulos interiores de cada triángulo

considerado es igual a dos rectos y resolver para arribar a que el ángulo AIB (ángulo β) es igual al ángulo $\frac{\alpha}{2}$ más uno recto.

A pesar de contar con el ángulo recto el autor no encontró argumentos para aseverar la perpendicularidad de las rectas AB y QI (Figura 3).

Figura 3

$$\beta = \frac{1}{2} \alpha + 90^\circ$$



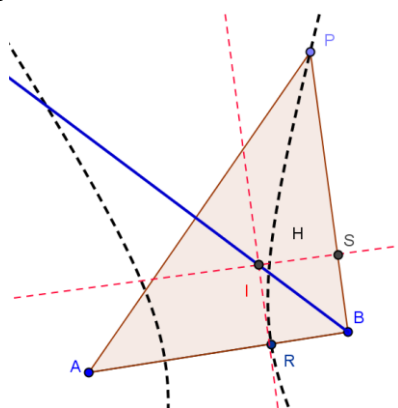
Desechando esta idea, pero siempre rondando el concepto de perpendicularidad es que se centra, el autor, en el incentro y en la propiedad de su equidistancia a los lados del triángulo. Y acá va otro intento por probar el lugar geométrico.

Se considera apropiado a esta instancia del trabajo aclarar que conceptos y propiedades utilizadas tales como incentro, propiedad de equidistancia a los lados de un triángulo, la perpendicularidad de rectas homólogas en un movimiento de rectas perpendiculares, concepto de base media de un triángulo, y demás propiedades y conceptos presentes en este artículo pueden encontrarse en textos del nivel secundario y universitario. De hecho, Puig Adam referido en la bibliografía, es autor de un texto riguroso donde el lector encontrará conceptos y propiedades aquí esgrimidos.

Sea la recta IS (Figura 4) perpendicular al lado PB por el punto I siendo S el pie de la perpendicular. La bisectriz BI del ángulo PBA , BI es eje de simetría. Como S pertenece al lado PB , su simétrico respecto de la bisectriz BI pertenece al lado BA . Sea R el homólogo de S en dicho movimiento. El transformado de IS en dicho movimiento es IR siendo I punto doble por pertenecer al eje de simetría.

Figura 4

Pies de las perpendiculares por I

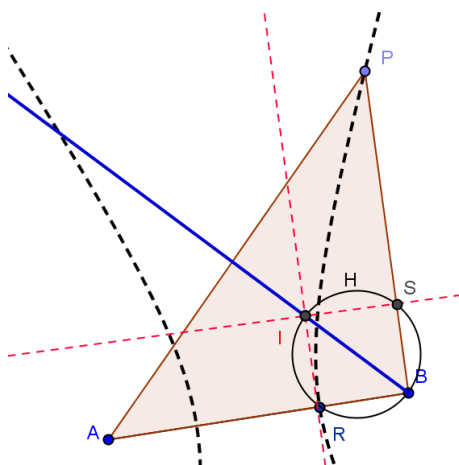


Como las homólogas de rectas perpendiculares también lo son, IR es perpendicular al lado AB . Por un punto exterior a una recta pasa una y sólo una perpendicular a dicha recta, así IR es única. Para poder concluir que se demuestra el lugar geométrico del problema, se debe probar que R coincide con Q , tarea que no se percibía sencilla.

Una vez más mediada la mirada sobre el problema a través del software, se centra la atención en los cuatro puntos I , S , B y R . Como estos cuatro puntos son vértices de un cuadrilátero donde IR perpendicular a AB e IS perpendicular a BP , los ángulos opuestos de dicho cuadrilátero suman dos rectos, luego puede inscribirse en una circunferencia (Figura 5).

Figura 5

Circunferencia por cuatro puntos: B , S , I y R .



Esta idea abre una nueva puerta para pensar en que, si se logra encontrar otra circunferencia secante a ésta en los puntos I y Q del problema original, la recta IQ sería el eje radical logrando arribar quizás a la respuesta buscada.

Se presenta la demostración de la proposición, resolución del problema inicial: Sean A , Q y B puntos alineados en el plano, con Q estrictamente entre A y B , distinto del punto medio de A y B ; y H la rama de la hipérbola, con focos A y B , que pasa por Q . El lugar geométrico de los incentros de los triángulos PAB al variar el punto P sobre la hipérbola tal que P distinto de Q , es una recta perpendicular a la recta AB por el punto Q . (Figura 6).

Sea P un punto sobre la rama H de la hipérbola; los puntos A , B y Q fijos e I el incentro del triángulo APB .

Tres puntos no alineados determinan una circunferencia. Sea C_1 la circunferencia que pasa por los puntos B , I y Q . Sea C_2 , la circunferencia que pasa por los puntos A , I , y Q . C_1 y C_2 se intersecan en I y en Q , luego la recta IQ es eje radical de dichas circunferencias.

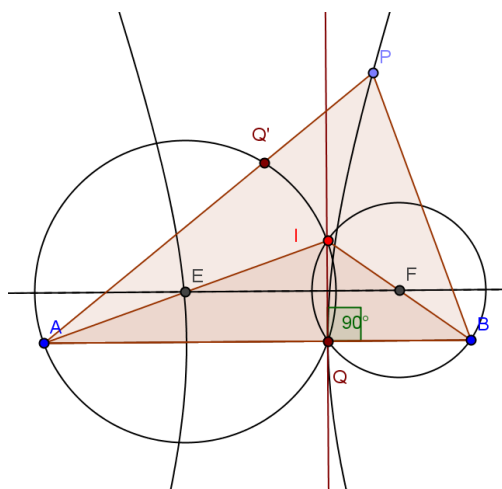
Se prueba primero que AI es diámetro de C_2 y que BI es diámetro de C_1 .

Como la recta AI es bisectriz del ángulo PAB (por ser I incentro del triángulo PAB), es eje de simetría de los lados de dicho ángulo. Como Q es punto intersección de C_2 con el segmento AB , su simétrico respecto de AI (Q') será punto intersección de C_2 con el lado AP pues todo movimiento isométrico del plano conserva el orden y la incidencia. Así, dado que todo diámetro es eje de simetría de la circunferencia, AI diámetro de la circunferencia C_2 denominando con E al punto medio de AI , centro de C_2 .

De manera análoga se puede probar que BI es diámetro de C_1 denominando con F al punto medio de BI , centro de C_1 .

Figura 6

Construcción para visualizar la demostración



Se probará que la recta IQ es perpendicular al segmento AB por Q .

Como la recta IQ es eje radical de las circunferencias C_1 y C_2 , IQ es perpendicular a la recta que une los centros E y F , por propiedad del eje radical. Como E y F son puntos medios de AI y BI respectivamente, el segmento EF es base media del triángulo AIB , siendo EF paralelo a AB . Como una recta perpendicular a otra lo es a todas sus paralelas se tiene que la recta IQ es perpendicular al segmento AB por Q .

Se ha demostrado el lugar geométrico solución del problema. Esta demostración cumple con dos funciones de la demostración según De Villiers (1993): la función explicación y la función descubrimiento.

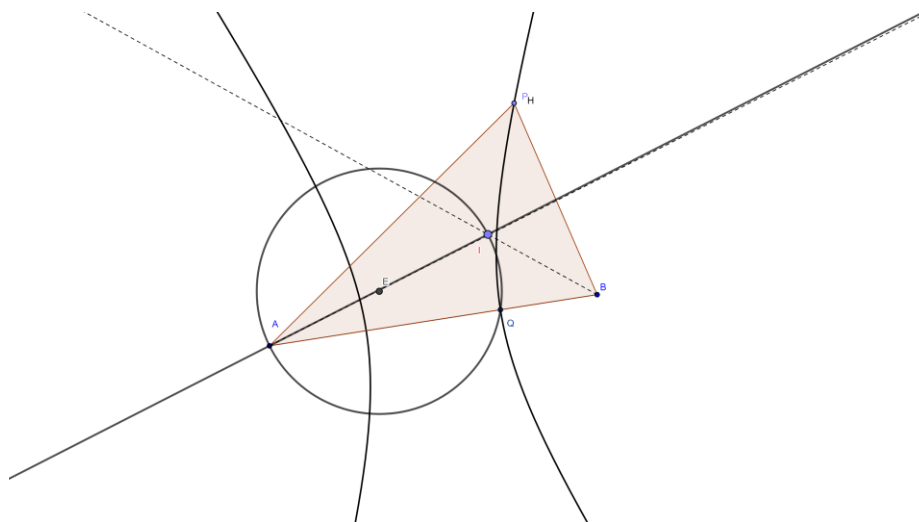
La función explicación ya que esta argumentación permite responder a las preguntas antes formuladas y profundizar en por qué es verdad. Se recuerdan las preguntas: ¿todos los puntos I están alineados?, ¿la recta es perpendicular al segmento AB ?, ¿ Q pertenece a dicha recta?, ¿qué conceptos matemáticos permiten esta afirmación? Todas ellas contestadas en la demostración al probar que todos los incentros de los distintos triángulos APB pertenecen a una recta perpendicular al segmento AB por el punto Q .

La función descubrimiento ya que permite revelar una propiedad recíproca: si una recta es eje de simetría de una circunferencia entonces es recta diametral de dicha circunferencia. La propiedad que se utiliza en geometría es todo diámetro de una circunferencia es eje de simetría de la misma.

Se demuestra la propiedad recíproca por reducción al absurdo y para su ilustración se toma la Figura 7. Para demostrar una proposición por reducción al absurdo se supone falsa la conclusión, se utiliza la hipótesis y se arriba a alguna contradicción de otra proposición, axioma, definición o postulado.

Se enuncia la proposición utilizada en la demostración y que se demuestra a continuación: si la recta AI es eje de simetría de una circunferencia entonces AI es recta diametral de dicha circunferencia.

Figura 7
Recta AI eje de simetría de la circunferencia



Sea AI eje de simetría de la circunferencia. Se niega la conclusión suponiendo AI distinto de un diámetro de la circunferencia, luego AI no pasa por el centro E de dicha circunferencia. Así el homólogo del punto E por la simetría axial de eje AI es el punto E' distinto de E ya que los únicos puntos dobles en dicho movimiento son los puntos del eje. Como el punto E equidista de todos los puntos de la circunferencia por ser su centro, por axioma de incidencia y orden, el punto E' equidista de todos los puntos de dicha circunferencia siendo E' centro de la circunferencia teniendo la circunferencia dos centros distintos.

Absurdo dado que la circunferencia tiene un único centro. El absurdo provino de suponer que AI no es una recta diametral, luego AI es una recta diametral y el segmento AI es diámetro de dicha circunferencia.

Cuando se realiza una demostración, se utilizan muchas veces propiedades que abren puertas para nuevas validaciones y disponer qué propiedades demostrar y cuáles tomarlas como válidas y no probarlas, es una decisión que hay que tomar. Es conocida la afirmación sobre la unicidad del centro de la circunferencia. Pero si se abre el abanico, se puede probar que el centro de una circunferencia es único.

Tres puntos no alineados determinan una circunferencia, sean dichos puntos P_1, P_2 y P_3 . Se considera la cuerda P_1P_2 y la cuerda P_2P_3 . Si las mediatrices de esas cuerdas se cortan en dos puntos distintos, E y E' , ambas cuerdas tienen la misma mediatriz EE' lo cual es absurdo pues las únicas cuerdas que tienen la misma mediatriz son las cuerdas paralelas y las cuerdas P_1P_2 y P_2P_3 no lo son.

4. A MODO DE CONCLUSIÓN

En la propuesta el autor pretende mostrar que la producción de conocimiento se ve condicionada por la utilización de un software de geometría dinámica. Villarreal (2012), destaca que los medios utilizados transforman las prácticas, los contenidos y las formas de conocer. Las nuevas tecnologías no aparecen ejerciendo un papel de suplementación sino de reorganización al incorporarlas a la clase de matemática.

Se acuerda con Santos Trigo (2011) que la posibilidad de realizar variaciones precisas e instantáneas de la propia representación favorece la exploración comprobando de forma visual conjeturas y propiedades de manera eficiente y dinámica.

La producción mediada por GeoGebra reorganiza la tarea generando conocimientos matemáticos al considerar propiedades recíprocas de las ya conocidas.

Volvamos sobre el lugar geométrico planteado al principio de este artículo que se desprende de la generalización del Teorema de Pitágoras para triángulos oblicuángulos. Si en vez de considerar los triángulos APB donde A y B son puntos fijos y P un punto variable de la hipérbola, se considera los triángulos AIB siendo I los incentros de los triángulos APB , es sencillamente comprobable de manera visual y empírica, utilizando GeoGebra, que la diferencia de los cuadrados de la cantidad de longitud entre IA e IB es constante verificándose que “el lugar geométrico de los puntos del plano cuya diferencia de cuadrados de distancia a dos puntos fijos del mismo A, B es una cantidad constante, es una recta perpendicular a AB ” (Puig Adam, 1980, p. 132).

Pero quizás estén de acuerdo con el autor que más allá de ser necesario conocer esta propiedad de lugar geométrico para poder aplicarla, y que todavía se pueden preguntar el porqué de la pertenencia de Q a dicha perpendicular, el camino recorrido hasta aquí permite destacar dos funciones importantes de la demostración: la de explicación y la de descubrimiento. Se los invita a leer a De Villiers (1993) citado en este artículo que a pesar del paso de los años sus comentarios están más que vigentes y llevan al autor de este artículo a repensar las prácticas en la formación de profesores.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Cruz, M. y Mántica, A. (2019). La puesta en juego de actividades propias del quehacer matemático mediadas por el empleo de un software de geometría dinámica. *Epsilon*, 101, 121-136.
- Dal Maso, M.S. y Götte, M. (2014). Hilvanando la circunferencia intermedia entre la inscrita y la circunscripta. En G. Astudillo, P. Willging y N. Ferreyra (Eds.), *V Reunión Pampeana de Educación Matemática: Memorias* (pp. 82-89). EdUNLPam. <https://docplayer.es/33756886-Issn-en-linea-vol-5-agosto-2014-la-pampa-argentina-memorias.html>
- Dal Maso, M.S. y Hurani, C. (2017). GeoGebra en el planteo de conjeturas en problemas de lugar geométrico. En V. Baraldi, N. Díaz y M. Perticarà (Comps.), *VIII Encuentro Nacional y Latinoamericano: la universidad como objeto de investigación: publicación de trabajos* (pp. 1695-1707). EdicionesUNL. http://www.fhuc.unl.edu.ar/media/investigacion/publicaciones/VARIOS/u17_ebook_parte%202.pdf
- De Villiers, M. (1993). El papel y la función de la demostración en matemáticas. *Epsilon*, 26, 15-30.
- Fischbein, E. (1993). The theory of figural concepts. *Educational Studies in Mathematics*, 24, 139 – 162.
- Laborde, C. (1996). Cabrí-Geómetre o una nueva relación con la geometría. En L. Puig y J. Calderón, (Eds.), *Investigación y didáctica de las matemáticas* (pp. 67-85). MEC-CIDE.

- Larios Osorio, V. y Pino-Fan, L. (2017). Esquemas argumentativos de estudiantes de secundaria en ambientes de geometría dinámica. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, 12, 39-57.
- Novembre, A. y Tedesco G. (2016). *Aportes para pensar la enseñanza de la matemática con TIC*. https://www.academia.edu/29941746/Aportes_para_pensar_la_ense%C3%B1anza_de_la_matem%C3%A1tica_con_TIC
- Puig Adam, P. (1980). *Curso de geometría métrica*. Euler.
- Rodríguez Marín, M. (2014). *Problemas sobre geometría. Relaciones métricas en la circunferencia. Lugares geométricos* [Trabajo Fin de Máster]. <https://www.ugr.es/~anillos/textos/pdf/2014/Geometria1.pdf>
- Rojano, T. (2014). El futuro de las tecnologías digitales en la educación matemática: prospectiva a 30 años de investigación intensiva en el campo Educación Matemática. *Educación matemática*, 26, 11-30.
- Santos Trigo, L. (2011). La educación matemática, resolución de problemas, y el empleo de herramientas computacionales. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*, 6 (8), 35-54.
- Villarreal, M. (2012). Tecnologías y educación matemática: necesidad de nuevos abordajes para su enseñanza. Innovación y experiencias. *Virtualidad Educación y Ciencia*, 3 (5), 73-94.

Matemáticas y patrimonio: un estudio del número de plata

David Crespo Casteleiro

IES Aurantia, Benahadux, Almería, España, davidcasteleiro@hotmail.com

Resumen: *La presencia de las Matemáticas en nuestro entorno es una ocasión adicional para aproximar la disciplina al alumnado, desde puntos de vista próximos, y a la misma vez ensalzar el rico valor patrimonial que nos rodea. Este artículo se centra en la obtención del número de plata mediante diversas técnicas geométricas, tomando como punto de partida uno de los bastiones o torres de la catedral de Almería.*

Palabras clave: *Geometría, número de plata, proporciones, semejanza, trigonometría.*

Mathematics and patrimony: a study of the silver number

Abstract: *The presence of Maths in our environment is an additional opportunity to familiarize students with the discipline, from points of view that are familiar to them, and at the same time to highlight the importance of the rich assets surrounding us. This article focuses on obtaining the silver number by means of different geometrical techniques, taking as a starting point one of the bastions or towers of the cathedral of Almeria.*

Key words: *Geometry, silver number, proportions, similarity, trigonometry.*

1. JUSTIFICACIÓN

Las últimas leyes educativas (desde LOE 2/2006, de 3 de mayo, hasta la actual LOMLOE 3/2020, de 29 de diciembre) han puesto el foco de atención en la necesidad de formar alumnos y alumnas que alcancen unas destrezas, expresadas en términos de competencias, permitiéndoles desarrollarse de manera integral en la vida adulta. Para ello, conscientes de que los ritmos de aprendizaje son tan distintos como los individuos, se han promovido estrategias metodológicas que en la actualidad parten de las situaciones de aprendizaje, entendidas como centros de interés del alumnado, tratando de captar su atención y motivar su formación. Y el patrimonio histórico reflejado en monumentos, constituye una ocasión para visibilizar las Matemáticas y acercarlas al alumnado, tanto para generar nuevo conocimiento como para contextualizarlas.

Una de las mayores dificultades a la que nos enfrentamos los docentes, es conseguir que el proceso de enseñanza y aprendizaje se lleve a cabo de manera satisfactoria. Pero con frecuencia observamos que el alumnado, y especialmente en la resolución de problemas, no ha conseguido entender el argumento que exponemos para encontrar la solución, por lo que disponer de estrategias diversas, con una dificultad graduada de complejidad, supone un verdadero aliciente para el profesorado.

De forma recíproca, tener en nuestras manos un mismo problema que pueda ser abordado con técnicas distintas, y por lo tanto resuelto desde los primeros cursos de la Secundaria hasta con herramientas más sofisticadas en Bachillerato, permite testar cómo la capacidad madurativa

varía, poniendo de relieve la potencia de los distintos instrumentos matemáticos, toda vez que se puede ir simplificando la resolución del problema.

2. CONTEXTUALIZACIÓN

La catedral de Almería es un monumento con pocos parecidos exteriores a la mayoría de las seos que salpican la Península Ibérica, pues atesora la doble función de ser catedral y fortaleza. La unificación territorial llevada a cabo por los Reyes Católicos, suponía por añadidura la hegemonía de la religión católica como el único culto tolerado. Aunque las diversas capitulaciones firmadas al anexionarse los territorios del Reino nazarí de Granada permitían a sus habitantes proseguir con sus costumbres y respetaban su religión, en la práctica, esta idílica situación se defenestró a los pocos años.

La Almería de finales del s. XV y principios del XVI, sufrió diferentes terremotos que asolaron la ciudad y, en particular, la mezquita mayor que se había convertido en una incipiente catedral. La necesidad de erigir templos en los que se pudiera llevar a cabo el oficio religioso era acuciante. Ser además una provincia con una amplia extensión de costa, permitía que los piratas berberiscos realizaran incursiones, ávidos de botín y espoleados por los habitantes del Reino de Granada que se habían exiliado al norte de África, con funestas consecuencias para la población y sus haciendas (Rodríguez et al., 1975, p.3-5).

Así, el 4 de octubre de 1524 tenía lugar el solemne acto de colocación de la primera piedra de la catedral fortaleza, auspiciada por el obispo fray Diego Fernández de Villalán, que se erigiría en un estilo gótico tardío, y dará paso en las portadas al renacentista (Navacués y Sarthou, 1998, p. 19). Como posición avanzada respecto de la Alcazaba, la rudeza militar impregna los flancos este, oeste y sur, desde donde con mayor probabilidad podrían tener lugar los ataques a la ciudad provenientes del mar.

Al este, como suele ser común en los templos y siguiendo las recomendaciones del arquitecto e ingeniero romano Vitrubio, se ubicará el altar mayor precedido de tres capillas con girola (Vitruvio, 1997, p. 107). La central, dedicada al Cristo de la Escucha, sirve también como alojamiento eterno de los restos del impulsor de la obra, Villalán, en un marmóreo sepulcro. Desde el exterior, la torre tiene planta cuadrangular, pero al alzarse, sus lados se duplican tendiendo a ochavarse. Con un patrón idéntico, los baluartes que ocupan los vértices del lienzo sur de la muralla, tienen la misma distribución, como puede observarse en la Figura 1.

Figura 1

Torre que ocupa el vértice sureste del conjunto.



El objeto del presente artículo, será poner de manifiesto la relación existente entre el lado del cuadrado (L) y del octógono regular (l) inscrito en el mismo, que viene dado por el número de plata $\delta = 1 + \sqrt{2}$. Esto es:

$$L = \delta \cdot l$$

3. OBJETIVOS

El interés para una mejora del proceso de enseñanza y aprendizaje viene marcado por la consecución de unos logros, entre los que podemos destacar:

- Contextualizar en el patrimonio histórico aspectos matemáticos.
- Visualizar los números irracionales y la aritmética de los radicales.
- Fomentar la semejanza y el cálculo de áreas como herramientas básicas de cálculo.
- Potenciar el uso del teorema de Pitágoras.
- Establecer sinergias entre la Geometría y el Álgebra.
- Dar valor a la trigonometría como herramienta versátil al resolver problemas geométricos.
- Emplear medios tecnológicos, como GeoGebra, para ilustrar las situaciones problemáticas y hacer comprobaciones.

Para ello, se presentarán ocho demostraciones diferentes de la relación $L = \delta \cdot l$, recurriendo a técnicas geométricas que involucran elementales resultados como el teorema de Pitágoras y el cálculo de áreas, la construcción del octógono por corte sagrado, pasando por la semejanza de triángulos, herramientas de trigonometría o una combinación de estas y el teorema de la bisectriz, que es a su vez consecuencia directa del teorema de los senos.

Aliados de la potencia del lenguaje algebraico y la resolución de ecuaciones de segundo grado, junto con el trabajo con radicales, podemos llevar a término las demostraciones siguientes.

4. RESULTADOS

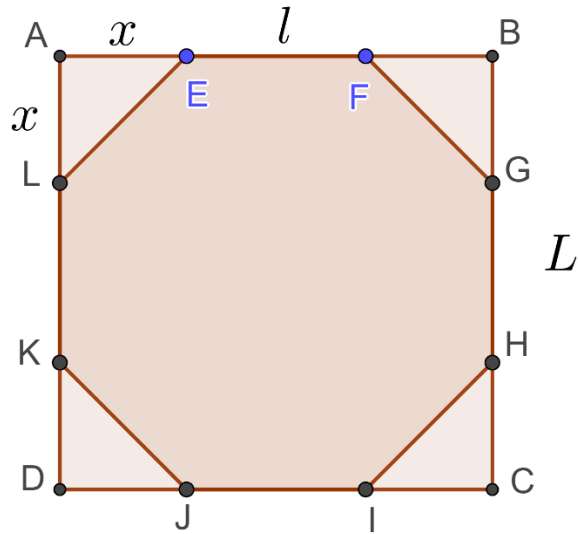
Para aligerar la notación, si P_1, P_2, \dots, P_n son los vértices consecutivos de un polígono de n lados, denotaremos por $S_{P_1 P_2 \dots P_n}$ al valor de su área. De manera adicional, y con el mismo leitmotiv que permita simplificar la escritura, sea $ABCD$ un cuadrado donde hemos inscrito un octógono regular $EFGHIJKL$.

Es conocido que la medida de cada uno de los ángulos interiores del polígono regular de n lados viene dada por la expresión $\alpha_n = \frac{180(n-2)}{n}$, de donde los ángulos interiores de un octógono regular medirán $\alpha_8 = 135^\circ$ y por lo tanto sus suplementarios 45° .

Al observar la Figura 2, acabamos de demostrar que el triángulo rectángulo AEL es además isósceles, donde por añadidura hemos empleado la notación $\overline{AE} = \overline{AL} = x$, $\overline{LE} = \overline{EF} = l$ y $\overline{AB} = \overline{BC} = L$.

Figura 2

Notación.

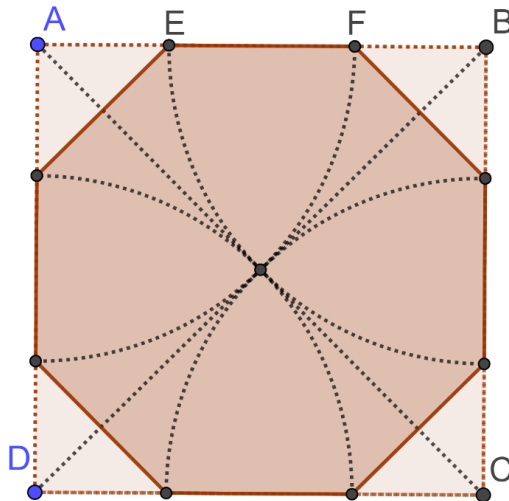


4.1. Construcción del octógono por *corte sagrado*.

Considerando la mitad de la diagonal del cuadrado de lado L , del teorema de Pitágoras se desprende que su valor es $\frac{\sqrt{2}}{2}L$. Usando esta medida como radio, podemos trazar desde A y B sendos cuadrantes de circunferencia que cortan al lado \overline{AB} en los puntos F y E , respectivamente, de donde $\overline{AF} = \overline{EB} = \frac{\sqrt{2}}{2}L$ como muestra la Figura 3.

Figura 3

Corte sagrado.



$$\text{Luego } \overline{AE} = \overline{FB} = L - \frac{\sqrt{2}}{2}L = \frac{(2-\sqrt{2})}{2}L.$$

$$\text{Pero } L = \overline{AE} + \overline{EF} + \overline{FB} \Rightarrow L = \frac{(2-\sqrt{2})}{2}L + l + \frac{(2-\sqrt{2})}{2}L \Rightarrow L - (2 - \sqrt{2})L = l \Rightarrow$$

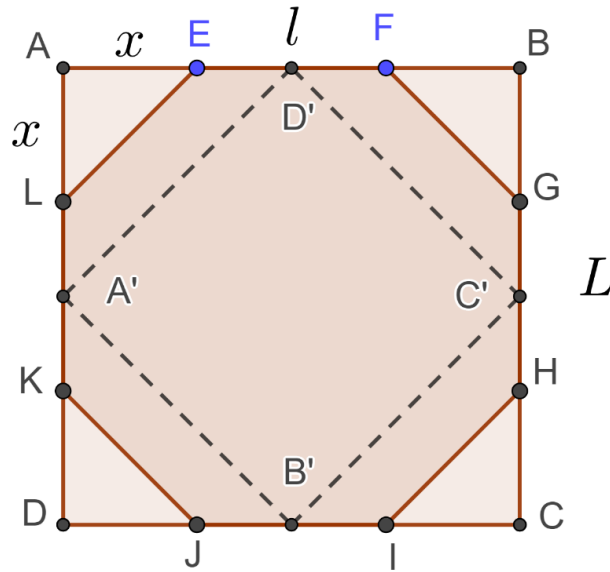
$$\Rightarrow (\sqrt{2} - 1)L = l \Rightarrow L = \frac{l}{\sqrt{2} - 1} \Rightarrow L = (1 + \sqrt{2})l \Rightarrow L = \delta \cdot l$$

4.2. Comparando áreas (primera descomposición).

Consideremos el cuadrado $ABCD$ que refleja la Figura 4 y obtengamos los puntos medios de sus lados, que notamos por las letras D', C', B' y A' . Evidentemente el polígono $A'B'C'D'$ es un cuadrado, ya que los triángulos $AD'A', D'BC', C'CB'$ y $A'B'D$ son rectángulos isósceles iguales, pues comparten sus catetos cuya medida es $\frac{L}{2} = x + \frac{l}{2}$.

Figura 4

Segunda demostración.



Al aplicar sucesivamente el teorema de Pitágoras en los triángulos AEL y $AD'A'$, podremos obtener el cateto del primero y la hipotenusa del segundo. En efecto:

$$2x^2 = l^2 \Rightarrow x = \frac{l}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}l$$

$$\left(\overline{A'D'}\right)^2 = \left(\frac{L}{2}\right)^2 + \left(\frac{L}{2}\right)^2 \Rightarrow \overline{A'D'} = \frac{L}{\sqrt{2}}$$

Comparando las áreas de las figuras en las que hemos descompuesto el cuadrado, claramente se observa la igualdad:

$$\mathcal{S}_{ABCD} = 4\mathcal{S}_{AD'A'} + \mathcal{S}_{A'B'C'D'}$$

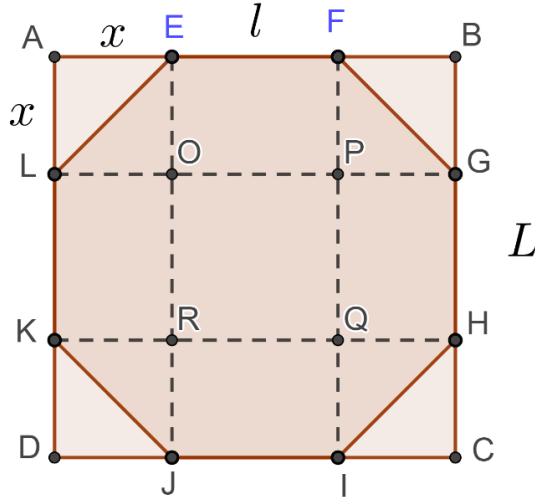
De donde:

$$\begin{aligned} L^2 &= 4 \frac{\left(x + \frac{l}{2}\right)^2}{2} + \left(\frac{L}{\sqrt{2}}\right)^2 \Rightarrow L^2 = 2 \left(x + \frac{l}{2}\right)^2 + \frac{L^2}{2} \Rightarrow \frac{L^2}{2} = \left[\sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2}l + \frac{l}{2}\right)\right]^2 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \left(\frac{L}{\sqrt{2}}\right)^2 = \left(l + \frac{\sqrt{2}}{2}l\right)^2 \Rightarrow \frac{L}{\sqrt{2}} = \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)l \Rightarrow L = \sqrt{2} \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)l \Rightarrow \\ &\Rightarrow L = (1 + \sqrt{2})l \Rightarrow L = \delta \cdot l \end{aligned}$$

4.3. Comparando áreas (segunda descomposición).

Figura 5

Tercera demostración.



Trazando cuatro de las diagonales del octógono, paralelas dos a dos, observamos que el cuadrado \$ABCD\$ se descompone en cuatro cuadrados iguales al \$AEOL\$, el cuadrado \$OPQR\$ ocupando la posición central, y otros cuatro rectángulos también iguales al \$EFPO\$ (véase la Figura 5). Esto es:

$$S_{ABCD} = 4S_{AEOL} + S_{OPQR} + 4S_{EFPO}$$

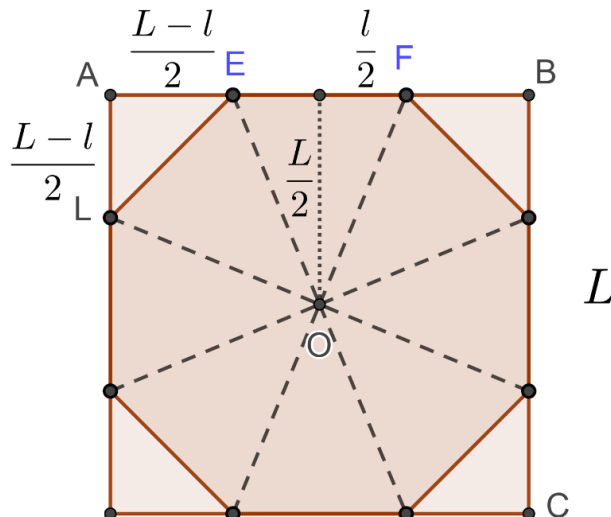
Teniendo en cuenta que $x = \frac{\sqrt{2}}{2}l$, la igualdad anterior se traduce en:

$$\begin{aligned} L^2 &= 4x^2 + l^2 + 4lx \Rightarrow L^2 = 2l^2 + l^2 + 4l \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}l \Rightarrow L^2 = (3 + 2\sqrt{2})l^2 \Rightarrow \\ &\Rightarrow L^2 = (1 + \sqrt{2})^2 l^2 \Rightarrow L = (1 + \sqrt{2})l \Rightarrow L = \delta \cdot l \end{aligned}$$

4.4. Comparando áreas (tercera descomposición).

Figura 6

Cuarta demostración.



Teniendo en cuenta la Figura 6, sea O el centro de la circunferencia circunscrita al octógono. El triángulo EFO es isósceles, ya que los segmentos $\overline{EO} = \overline{FO}$ son radios de la circunferencia, de donde la altura trazada desde O y de medida $\frac{l}{2}$, divide al lado \overline{EF} en dos partes iguales cuya longitud es $\frac{l}{2}$, la mitad del lado del octógono.

Claramente $\overline{AE} = \overline{AL} = \frac{L-l}{2}$ y como $S_{ABCD} = 4S_{AEL} + 8S_{EFO}$:

$$L^2 = 4 \frac{\left(\frac{L-l}{2}\right)^2}{2} + 8 \frac{l \cdot \frac{l}{2}}{2} \Rightarrow L^2 = \frac{(L-l)^2}{2} + 2Ll \Rightarrow 2L^2 = (L-l)^2 + 4Ll \Rightarrow \\ \Rightarrow L^2 - 2Ll - l^2 = 0$$

Dividiendo por l^2 la ecuación anterior y realizando el cambio de variable $\frac{L}{l} = t$, esta se transforma en:

$$t^2 - 2t - 1 = 0$$

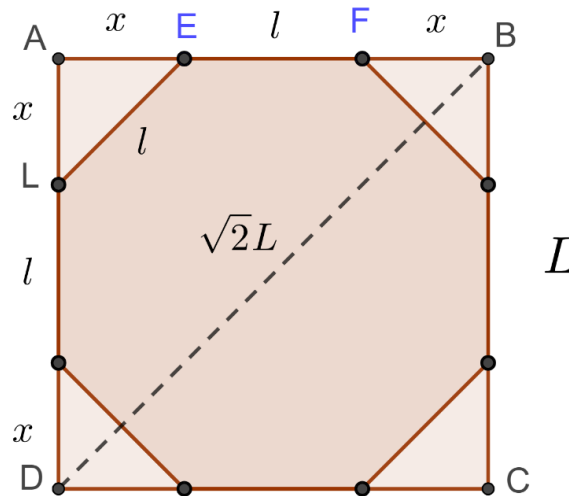
cuya solución positiva es

$$t = \frac{L}{l} = 1 + \sqrt{2} \Rightarrow L = \delta \cdot l$$

4.5. Empleando triángulos semejantes (primera descomposición).

Figura 7

Quinta demostración.



Con la notación habitual que aparece en la Figura 7, y la condición $L = 2x + l$, al cuadrado de partida le hemos trazado una de sus diagonales. Claramente del teorema de Pitágoras se deduce que tanto $x = \frac{l}{\sqrt{2}}$ como que $\overline{BD} = \sqrt{2}L$.

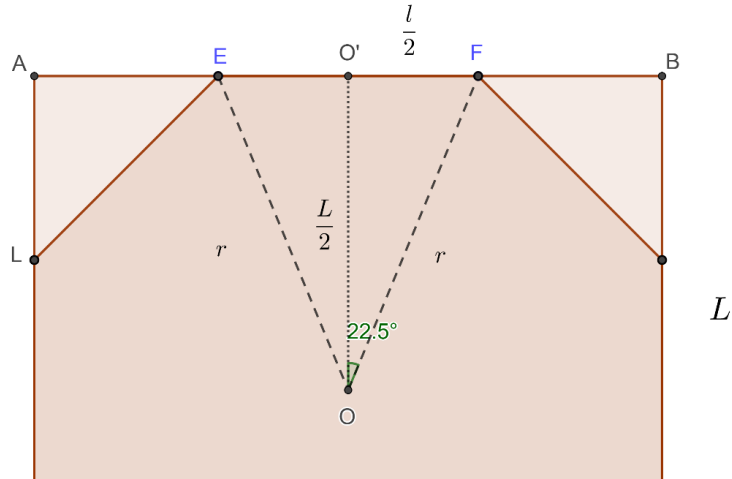
Los triángulos ABD y AEL son rectángulos e isósceles. En particular tienen los mismos ángulos, lo que permite afirmar que son semejantes, por lo que sus lados son proporcionales. Esto es:

$$\frac{\overline{BD}}{\overline{EL}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AE}} \Rightarrow \frac{\sqrt{2}L}{l} = \frac{2x+l}{x} \Rightarrow \frac{\sqrt{2}L}{l} = \frac{2 \cdot \frac{l}{\sqrt{2}} + l}{\frac{l}{\sqrt{2}}} \Rightarrow \frac{\sqrt{2}L}{l} = \frac{\sqrt{2}l + l}{l} \sqrt{2} \Rightarrow \\ \Rightarrow L = (1 + \sqrt{2})l \Rightarrow L = \delta \cdot l$$

4.7. Recurriendo a herramientas de trigonometría.

Figura 9

Construcción geométrica de la séptima demostración.



Centrando la atención sobre el triángulo EOF de la Figura 9, podemos obtener la medida de $\widehat{O'OF} = \frac{45^\circ}{2} = 22.5^\circ$ y calcular el valor de su tangente sirviéndonos de la fórmula del ángulo mitad. Así:

$$\operatorname{tg} 22.5^\circ = \operatorname{tg} \frac{45^\circ}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos 45^\circ}{1 + \cos 45^\circ}} = \sqrt{\frac{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}}{1 + \frac{\sqrt{2}}{2}}} = \sqrt{\frac{2 - \sqrt{2}}{2 + \sqrt{2}}} = \frac{2 - \sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} - 1$$

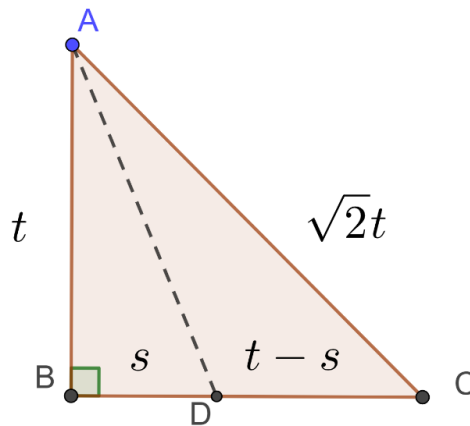
Pero el triángulo $OO'F$ es rectángulo, luego también debe ser:

$$\operatorname{tg} 22.5^\circ = \frac{\frac{l}{2}}{\frac{L}{2}} \Rightarrow \frac{l}{L} = \sqrt{2} - 1 \Rightarrow \frac{L}{l} = \frac{1}{\sqrt{2} - 1} \Rightarrow \frac{L}{l} = 1 + \sqrt{2} \Rightarrow L = \delta \cdot l$$

4.8. Mediante el teorema de la bisectriz.

Figura 10

Construcción auxiliar de la octava demostración.



Consideremos el triángulo rectángulo isósceles ABC de la Figura 10, en el que hemos trazado la bisectriz \overline{AD} del ángulo \widehat{BAC} . Si denotamos por $\overline{AB} = \overline{BC} = t$, del teorema de Pitágoras se sigue que $\overline{AC} = \sqrt{2}t$. De la misma forma al nombrar $\overline{BD} = s$, se deduce que $\overline{DC} = t - s$.

Al aplicar el teorema de la bisectriz en el triángulo ABC , se obtiene:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BD}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{CD}} \Rightarrow \frac{t}{s} = \frac{\sqrt{2}t}{t-s} \Rightarrow \frac{1}{s} = \frac{\sqrt{2}}{t-s} \Rightarrow \sqrt{2}s = t - s \Rightarrow (1 + \sqrt{2})s = t \Rightarrow \frac{t}{s} = 1 + \sqrt{2}$$

Ahora bien, el triángulo ABD tiene los mismos ángulos que el triángulo $OO'F$ de la Figura 9, por lo que sus lados son proporcionales, esto es:

$$\frac{\overline{OO'}}{\overline{O'F}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{BD}} \Rightarrow \frac{\frac{L}{2}}{\frac{l}{2}} = \frac{t}{s} \Rightarrow \frac{L}{l} = 1 + \sqrt{2} \Rightarrow L = \delta \cdot l$$

5. CONCLUSIONES

El extenso patrimonio histórico que nos rodea suele ser objeto de estudio por ámbitos alejados de las Matemáticas, cuando estas aportan un nuevo punto de vista sobre los monumentos y nos ofrecen la posibilidad de visualizar la disciplina en nuestro entorno.

El tratamiento realizado en el artículo, permite resolver el mismo problema con herramientas sencillas en los primeros cursos de la Secundaria y abordar otras cuestiones propias de los últimos cursos, como son el trabajo con radicales o las igualdades notables, asistidas de la resolución de ecuaciones.

Una vez estudiada la trigonometría, encontramos una nueva oportunidad para resolver de manera elegante y breve el mismo problema, pero esta vez con procedimientos estandarizados que no requieren de razonamientos tan deductivos, haciendo que el alumnado pueda valorar la potencia de las herramientas que emplea.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Jefatura del Estado (2006). *Ley Orgánica 2/2006, de 3 de mayo, de Educación*. Boletín Oficial del Estado, 4 de mayo de 2006, núm. 106, pp. 17158-17207. <http://www.boe.es/boe/dias/2006/05/04/pdfs/A17158-17207.pdf>
- Jefatura del Estado (2020). *Ley Orgánica 3/2020, de 29 de diciembre, por la que se modifica la Ley Orgánica 2/2006, de 3 de mayo, de Educación*. Boletín Oficial del Estado, 30 de diciembre de 2020, num 340, pp. 122868-122953. <https://www.boe.es/boe/dias/2020/12/30/pdfs/BOE-A-2020-17264.pdf>
- Navacué, P. y Sarthou, C. (1998). *Catedrales de España*. Espasa Calpe.
- Rodríguez, M. et al. (1975). *La Catedral de Almería*. Everest.
- Vitruvio, M. (1997). *Los diez libros de Arquitectura (Traducción de José Luis Oliver)*. Alianza editorial.

Demostraciones visuales en el segundo ciclo de la ESO: una propuesta didáctica

David García Fernández

Universidad de Granada, davidgfret@correo.ugr.es

Resumen: Este trabajo presenta una propuesta didáctica diseñada con el objetivo de desarrollar en el alumnado habilidades y destrezas relacionadas con la competencia específica de formular y comprobar conjeturas. El foco principal de esta propuesta son las demostraciones matemáticas visuales, las cuales se trabajarán mediante recursos manipulativos, gráficos y aplicaciones de software de matemáticas dinámicas, principalmente GeoGebra. Durante su desarrollo se tratarán cuatro bloques temáticos a través de tareas significativas que requieren de creatividad, reflexión y razonamiento crítico, los cuales son: teorema de Pitágoras y triángulos, identidades algebraicas, sucesiones y series y números enteros. Con el objetivo de atender a la diversidad en el aula, muchas de las actividades propuestas se han diseñado de manera secuenciada con lo que se pretende que el alumno trabaje los distintos aspectos de la demostración matemática de forma progresiva.

Palabras clave: educación secundaria, demostración, conjetura, método de inducción

Visual proofs for the highest courses of the secondary education: a teaching proposal

Abstract: The aim of this work is presenting a educational proposal disigned in order to develop skills with regard to specific competence relating to formulate conjectures. This proposal is focused on mathematics visual proofs that will be showed by manipulative and graphic resources just as dinamic software in mathematics, mainly GeoGebra. The contents block is divided in four topics, which are Pitagoras' theorem and triangles, algebraic identities, sequences and integers, that will be studied through activities where creativity, reflection and critical thinking are needed to resolve them. In order to promote diversity awareness, the activities in this article have been disigned sequenced, facilitating the work in distinct aspects on a mathematical proof for students, in a progressive way.

Key words: induction method, mathematical conjecture, proof, secondary education

1. INTRODUCCIÓN

La demostración puede entenderse en matemáticas de muy diversas maneras. De acuerdo con el diccionario de la Real Academia Española, demostrar consiste en hacer ver la veracidad de un argumento mediante razonamientos y pruebas. Según Martí (2003), demostrar consiste en llevar a cabo un razonamiento aplicando reglas lógicas con la finalidad de llegar a la veracidad de una proposición. Esta propuesta didáctica se centra en la definición y propiedades que destaca Stylianides (2007) acerca de la demostración matemática escolar. De acuerdo a este autor, una demostración es un argumento matemático a favor o en contra de una afirmación matemática que es accesible, conceptualmente, a los miembros de una comunidad. En este trabajo haremos especial hincapié en las demostraciones visuales y geométricas.

El ser humano ha usado desde siempre imágenes con la finalidad de representar y esquematizar la realidad. En las matemáticas, el proceso de representación ha servido de ayuda para plasmar y ejemplificar ideas complejas sobre el papel a lo largo de la historia, así como para guiar el razonamiento durante una demostración. Las demostraciones visuales en las que nos centraremos son un tipo concreto de demostración no formal en el que, mediante argumentos geométricos, se pretende probar una afirmación haciendo uso de dibujos o imágenes. Para el diseño de esta propuesta didáctica se han tomado como modelo algunas de las ideas recopiladas por Nelsen (2001), las cuales destacan por su sencillez y elegancia a la hora de presentarse al lector.

Con relación a su enseñanza en el aula, la demostración matemática es un concepto tanto difícil de aprender, como de enseñar. Esta dificultad se debe en parte a la gran cantidad de ideas equivocadas que tienen los alumnos en el proceso de razonar con argumentos lógico-matemáticos. Por ejemplo, según el *Education Committee of the European Mathematical Society* (2011) uno de los errores más comunes en los alumnos es el de considerar como general una propiedad o característica que se cumple en varios casos particulares. Sin embargo, a pesar de las dificultades de llevar la demostración al aula, no podemos relegarla, como contenido, a un segundo plano. Según Hanna y De Villiers (2011), la demostración debería jugar un papel relevante en el currículum de matemáticas de secundaria. Es más, en países como Alemania y Francia, la demostración se enseña como un contenido específico (Alfaro-Carvajal et al., 2019), tal y como se trata en esta propuesta. No obstante, Stylianides y Stylianides (2017a) consideran que se hace poco énfasis en este problema, pues a pesar de contar con gran diversidad de estudios sobre cómo los estudiantes entienden la demostración y el papel que esta debería ocupar en los estudios de secundaria, son pocas las propuestas didácticas que plantean presentar la demostración al alumnado y que cuenten con un alto porcentaje de éxito. Un ejemplo de propuesta exitosa relacionada con la demostración matemática llevada al aula la encontramos en el estudio realizado por Senk (1985) donde un 30% del alumnado adquirió capacidades bastante satisfactorias con relación a la destreza de la demostración.

La presente propuesta didáctica está orientada a que el alumnado de 4º de la E.S.O. adquiera habilidades y destrezas asociadas a las competencias específicas establecidas por el Real Decreto 217/2022, de 29 de marzo, centrándose en la tercera de ellas, que incide en el razonamiento y la demostración en matemáticas. Para ello, se propone una metodología que reconozca al estudiante como agente de su propio proceso de aprendizaje gracias a actividades significativas que requieren de creatividad, reflexión y autonomía. Autores como Stylianides y Stylianides (2017b) alientan el diseño de este estilo de propuestas didácticas que no solo intentan acercar al alumnado a la demostración matemática, sino que pueden proporcionar conocimiento teórico sobre la naturaleza de las dificultades de los estudiantes con la demostración.

1.1. Descripción metodológica y justificación curricular

El flujo de trabajo seguido para el diseño de esta propuesta ha consistido, primeramente, en partir del diseño de objetivos didácticos vinculados a la tercera competencia específica de matemáticas, que incide en el razonamiento y la demostración matemáticas. A partir de los objetivos específicos se pudieron diseñar tareas modelo, que han servido a su vez para identificar bloques temáticos pertinentes para trabajar la competencia. De esta manera, se han podido diseñar otras tareas adicionales relacionadas con los bloques temáticos y que permiten

continuar desarrollando la competencia seleccionada en un principio, y trabajar de forma adicional otras competencias específicas del currículo.

Es por ello que la propuesta didáctica está subordinada a los objetivos didácticos que en ella se van a trabajar y, por lo tanto, su finalidad es permitir a los estudiantes ahondar en la competencia asociada. Los que se definieron para este trabajo se describen a continuación:

- O1. *Formular conjeturas* generales en base a observaciones particulares: esto es, a partir de varias observaciones de un mismo suceso, enunciar una conjetura que intente explicar, por ejemplo, alguna de las características de los observado y relacionarlo con ciertas condiciones en las que se ha producido la observación.
- O2. *Aportar contraejemplos* con el fin de rechazar la validez de conjeturas: se pretende que los estudiantes sean capaces de encontrar contraejemplos sencillos a conjeturas falsas planteadas por el docente o que incluso adquieran la capacidad de comprobar la veracidad de las que planteen ellos mismos mediante la búsqueda de contraejemplos.
- O3. *Realizar cambios en las hipótesis de partida*, comprobando cómo varía el resultado: observar cómo realizar cambios en las hipótesis de una conjetura inicialmente falsa, la pueden convertir en verdadera.
- O4. *Usar software matemático y tecnología para validar conjeturas*: para comprobar de manera visual si sus propias conjeturas planteadas son ciertas. En esta propuesta didáctica se trabajará sobre todo con GeoGebra.
- O5. *Construir demostraciones por método de inducción*: se pretende que el alumnado maneje casos sencillos y visuales de demostraciones que se puedan construir de forma iterativa usando inducción.
- O6. *Comunicar* de forma eficiente, haciendo uso del lenguaje matemático, *resultados obtenidos*: pretendemos que adquieran habilidad a la hora de comunicar, haciendo uso del lenguaje matemático oportuno, de manera eficiente los resultados que han obtenido.

Tabla 1

Conexión entre las competencias específicas del currículo y los objetivos didácticos de la presente propuesta.

Competencias específicas	Objetivos didácticos					
	O1	O2	O3	O4	O5	O6
CE1. Resolver problemas	X				X	
CE2. Validar soluciones		X		X		
CE3. Plantear conjeturas	X	X	X	X	X	
CE4. Diseñar algoritmos					X	
CE5. Conexiones matemáticas	X	X			X	
CE8. Comunicar	X		X			X
CE9. Gestionar emociones						X
CE10. Trabajo en equipo						X

Los bloques temáticos que han surgido a partir de estos objetivos y siguiendo la metodología descrita son la geometría, el Teorema de Pitágoras, las identidades algebraicas, las sucesiones y series y, finalmente, números enteros y sus propiedades. Algunas de las tareas modelo que les han dado origen aparecen más adelante en este trabajo. En cuanto a las

competencias específicas (CE) de la normativa curricular que se desarrollan a lo largo de la propuesta descrita para 4º de la E.S.O. estas se reflejan en la Tabla 1 en conexión con los objetivos didácticos definidos.

Con respecto a las competencias específicas establecidas por el Decreto 217/2022, la Tabla 1 muestra la conexión entre los objetivos didácticos definidos y dichas competencias. Como se ha señalado, la tercera de ellas es la fundamental en este trabajo. En relación a la capacidad del alumnado de investigar conjeturas, esta se relaciona con los siguientes objetivos didácticos: O1, pues se persigue que los estudiantes sean capaces de formular sus propias conjeturas, en ocasiones guiados por el docente, y verifiquen la validez de las mismas; O2, ya que aportar contraejemplos es una forma de probar que una conjetura es falsa; y, finalmente, O5 puesto que se pretende que los estudiantes sean capaces de comprobar, haciendo uso del método inductivo, y de forma visual, conjeturas. Además, el objetivo O3 desarrolla la capacidad de modificar hipótesis de partida en un razonamiento y comprobar de qué forma varía entonces la veracidad de una conjetura. Esta habilidad es esencial para que los estudiantes puedan enfrentarse a problemas matemáticos en la vida cotidiana y en contextos profesionales. Les permite comprender que la información presentada en un problema puede ser flexible y ajustable, y que pueden adaptarla para resolver situaciones diversas. Finalmente, la capacidad de usar tecnología en favor del razonamiento matemático se trabaja a través del objetivo O4.

La Tabla 1 también ilustra la conexión entre los objetivos formulados y otras competencias específicas del currículo. La competencia CE1, relacionada con la resolución de problemas, queda recogida en el O1 ya que para poder formular conjeturas en base a lo observado en distintos casos es necesario conocer los datos, en específico las distintas hipótesis iniciales, que llevarán a enunciar una conjetura u otra. También está conectada con O5, puesto que para poder aplicar inducción es necesario comprender correctamente los datos disponibles y el enunciado que se pretende demostrar. La competencia específica CE2, relacionada con la validación de soluciones de un problema, se puede desarrollar mediante O2, dado que en el proceso de encontrar un contraejemplo se debe probar con distintos candidatos y comprobar si estos cumplen, verificando unas hipótesis iniciales, la tesis requerida; y mediante O4, pues mediante el uso de software de matemáticas dinámicas, se pretende que los alumnos validen la veracidad de sus conjeturas, lo que conlleva comprobar la corrección matemática de sus planteamientos. En cuanto a la competencia específica CE4, relacionada con el pensamiento computacional, se pretende que el alumnado la desarrolle a través del objetivo didáctico O5, puesto que para realizar el método de inducción al nivel en el que queremos presentarlo es necesario reconocer patrones, sobre todo visualmente, realizar de forma correcta la hipótesis de inducción y computar las distintas iteraciones. Respecto a la competencia CE5, relacionada con las conexiones matemáticas, esta se puede desarrollar mediante el logro de los objetivos O1, ya que para formular conjeturas es necesario entender correctamente las relaciones que existen entre distintas áreas de las matemáticas, y O5, dado que para aplicar el método de inducción ocurre exactamente lo mismo. La competencia CE8, relacionada con la comunicación matemática, se trabaja a través del objetivo O6, mediante la comunicación de los resultados obtenidos a la hora de validar sus conjeturas.

Debe señalarse, para concluir, que las competencias específicas vinculadas a la dimensión afectiva también se contemplan en la propuesta. CE9, relacionada con la gestión de las emociones, está presente en los objetivos O1, O2, O3 y O5, ya que a través de los mismos se pretende desarrollar en el alumno la capacidad para gestionar la frustración que muchas ocasiones genera el construir de manera correcta una demostración de una conjetura o encontrar

un contraejemplo, así como implantar en el alumnado la capacidad de mantener una actitud positiva aun cuando los resultados a los que se esperaba llegar no se han alcanzado. De igual modo, la décima competencia específica, relacionada con el trabajo en equipo, conectan con O6, dado que contamos con actividades que se trabajan de forma colaborativa.

2. PROPUESTA DIDÁCTICA

2.1. Contexto

La propuesta didáctica está diseñada para un colegio de la ciudad de Granada. Se trata de un Concertado con la Consejería de Educación de la Junta de Andalucía de tres líneas en Educación Infantil, Educación Primaria y Educación Secundaria Obligatoria. El colegio presenta una gran diversidad en el nivel socioeconómico del alumnado y sus familias. Por un lado, hay familias que escolarizan a sus hijos e hijas por trabajar en un campus universitario cercano. Por otra parte, también hay familias pertenecientes a zonas en riesgo de exclusión social que solicitan este centro, así como familias de pueblos de la zona metropolitana de Granada. Esta diversidad en las familias da lugar a una gran diversidad en el nivel socioeconómico del alumnado, con una clase media, en ocasiones media alta y en el caso de otras familias media baja. Cabe mencionar también que hay familias con hijos e hijas de dificultades o NEAE. Esta enorme diversidad, se vive en el centro como un enorme potencial y riqueza con la que crecer juntos tanto en conocimiento como en valores.

2.2. Sesiones y tareas

La Tabla 2 recoge un resumen de las diez sesiones en las que se llevarían a cabo en esta propuesta didáctica junto con un breve comentario descriptivo de los contenidos a impartir en las mismas. El temario tratado en ellas es más familiar para el alumnado en las primeras sesiones con la finalidad de que trabajen la demostración en un ambiente de contenidos que manejen con facilidad y con el que se sientan cómodos.

Tabla 2

Resumen de las distintas sesiones de la propuesta didáctica.

Sesión	Título	Objetivos	Competencias	Contenidos
S1	Introducción a la demostración	O1, O2, O3	CE1, CE3, CE5, CE8	Introducción a la demostración matemática. Primeros ejemplos
S2	Demostrando el teorema de Pitágoras I.	O1, O3, O4	CE1, CE2, CE3, CE5, CE8, CE9, CE10	Demostración visual y geométrica del teorema de Pitágoras
S3	Demostrando el teorema de Pitágoras II.	O1, O2, O3, O4	CE3, CE5, CE8, CE9	Doble implicación y extensión a triángulos no rectángulos
S4	Demostrando identidades algebraicas I: Identidades	O1, O3, O4	CE1, CE2, CE3, CE5, CE8, CE9	Identidades notables, demostración visual y geométrica de las mismas

Sesión	Título	Objetivos	Competencias	Contenidos
S5	notables Demostrando identidades algebraicas II: Suma de n enteros	O1, O3, O6	CE1, CE3, CE5, CE8, CE9	Demostraciones visuales y analíticas de la suma de n enteros
S6	Demostrando identidades algebraicas III: Suma de los n primeros impares	O1, O4, O6	CE1, CE3, CE5, CE8, CE9	Demostración visual y geométrica de la suma de los n primeros números impares
S7	Demostrando identidades algebraicas IV: Cuadrados y sumas	O1, O3, O6	CE3, CE5, CE8, CE10	Demostración de una igualdad algebraica y repaso de contenidos de sucesiones y series mediante un juego
S8	Sumas y series geométricas	O1, O2, O4, O4, O6	CE1, CE3, CE5, CE8, CE9	Demostraciones visuales y geométricas de la convergencia de un determinado tipo de series
S9	El método de inducción I	O1, O5, O6	CE1, CE3, CE4, CE5, CE8, CE9	Primer acercamiento al método de inducción. Ejemplos visuales y geométricos
S10	El método de inducción II	O1, O5, O6	CE1, CE3, CE5, CE8, CE9	Método de inducción desde una perspectiva más rigurosa matemáticamente

A continuación, se presentan varias de las tareas que se les propondrán a los alumnos. Con el objetivo de atender la diversidad del aula, en esta propuesta didáctica se han incluido tareas secuenciadas que atiendan a dicha pluralidad y que permitan a todos los estudiantes avanzar en el aprendizaje a su propio ritmo. Para ello, las tareas secuenciadas que hemos incluido fomentan el trabajo de los diferentes aspectos de la demostración matemática de forma progresiva. Por limitaciones de espacio en esta sección no se recogerán todas las tareas presentes en esta propuesta didáctica.

La imagen que se les presenta les sirve ya como el contraejemplo que se les pide en el enunciado. Los alumnos que no dibujen sus propios triángulos pueden usar los que se les presentan en la Figura 1 (izquierda). Contando los cuadrados pequeños obtendrán el área de los cuadrados construidos sobre los distintos lados.

2.2.1. Tarea 1 (Sesión 3): El teorema de Pitágoras en triángulos no rectángulos

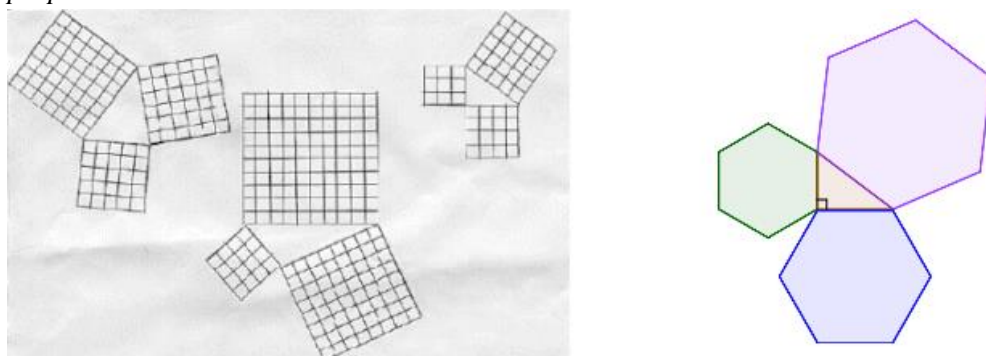
¿Se cumple el teorema de Pitágoras en triángulos no rectángulos? Si la respuesta es negativa proporciona un contraejemplo y extiende la doble implicación que aparece en el teorema de

Pitágoras para triángulos rectángulos adaptándola al caso de triángulos obtusángulos y acutángulos. Básate en la siguiente imagen como una ayuda (ver Figura 1, izquierda).

La importancia de esta tarea radica en la formulación de conjeturas que el alumnado deberá de proponer y de validar mediante la aportación de contraejemplos. La pregunta que se realiza aparece acompañada de una aclaración que sirve de guía para la resolución del ejercicio. Para contestarla basta con que dibujen con una regla dos triángulos que no sean rectángulos, uno acutángulo y otro obtusángulo, y en base a las medidas que obtengan en los lados que comprueben si se cumple el teorema de Pitágoras. En ambos casos obtendrán dos desigualdades que les servirán para presentar como contraejemplo, así como de guía para conjeturar la extensión del teorema de Pitágoras a triángulos no rectángulos.

Figura 1

Izquierda: Imagen de ayuda para resolver la Tarea 1 (Fuente: Ramírez, 2016). Derecha: Ejemplo en GeoGebra de la construcción de hexágonos regulares sobre los lados que se propone en la Tarea 2.



2.2.2. Tarea 2 (Sesión 3): Otros polígonos en el teorema de Pitágoras

Utilizando GeoGebra investiga qué relación existe entre las áreas de los polígonos regulares de n lados construidos sobre los lados de un triángulo rectángulo. Comienza construyendo un pentágono sobre un triángulo de lados 3, 4 y 5. ¿Qué relación encuentras entre las áreas de los distintos pentágonos? Haz lo mismo para hexágonos regulares. ¿Qué ocurre si el triángulo es obtusángulo? ¿Y acutángulo? ¿Qué ocurre en el caso especial de que el triángulo sea equilátero? ¿Por qué? Para ayudarte haz uso del comando Área (nombre del polígono) en GeoGebra.

A través de esta tarea se pretende que el alumnado estudie qué ocurre con la igualdad que se da en el teorema de Pitágoras en el caso en el que no consideramos el cuadrado construido sobre los distintos lados del triángulo; sino otro tipo de polígonos regulares. La tarea se presenta secuenciada, comenzado por el caso particular en el que los polígonos que se consideran son pentágonos. Haciendo uso del comando *Área*, previamente explicado en clase, el estudiante podrá comprobar de forma inmediata la relación que guardan las áreas en los distintos casos propuestos. Una vez respondida la primera pregunta se abre un amplio abanico de cuestiones más abstractas que el alumno deberá responder utilizando GeoGebra. En esta tarea la propia imagen en GeoGebra que generen los estudiantes junto con el comando que les permite calcular áreas de polígonos ayudarán a construir la demostración que se les pide. En el caso de la última pregunta sí es cierto que, además de presentar una prueba visual en GeoGebra, deberán aportar un desarrollo más algebraico de la respuesta.

2.2.3. Tarea 3 (Sesión 4): Identidades notables

Demuestra, mediante argumentos visuales y geométricos las siguientes identidades notables

i) $(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$

ii) $(a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$

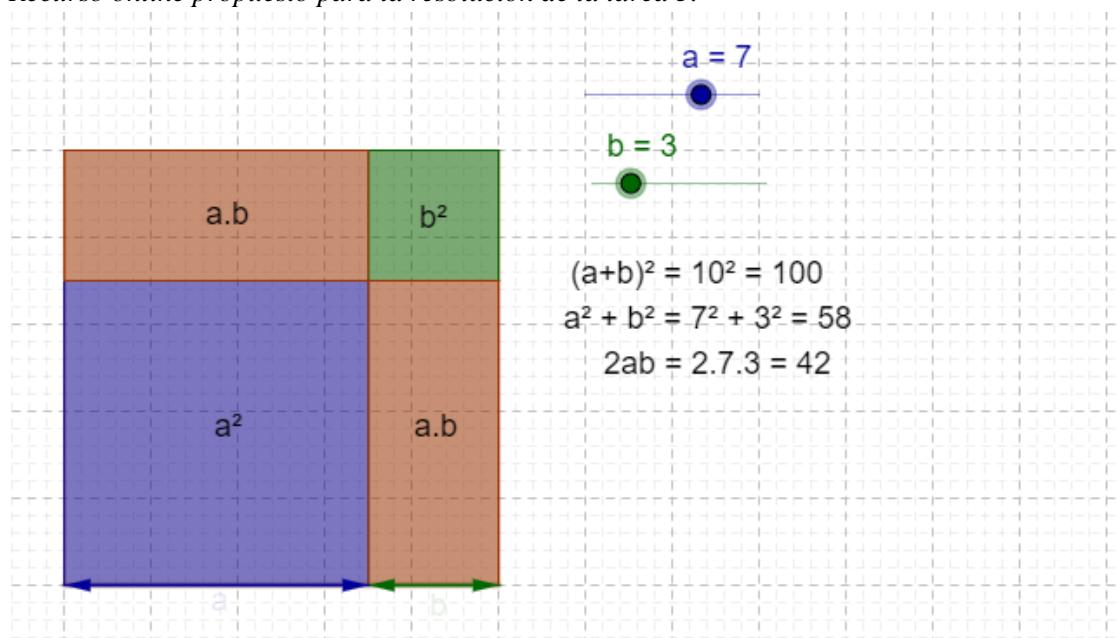
iii) $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

Puedes utilizar el siguiente enlace de ayuda para completar el ejercicio.

http://docentes.educacion.navarra.es/msadaall/geogebra/figuras/n1suma_cuadrado.htm

Figura 2

Recurso online propuesto para la resolución de la tarea 3.



El objetivo de la Tarea 3 es que el alumno haga uso de software de matemáticas dinámicas que se muestra en la Figura 2 para trabajar objetivo O4. Se presenta un enunciado más escueto que en el resto de tareas y directamente algebraico puesto que las identidades notables ya son un contenido ampliamente trabajado durante toda la secundaria y con el que el alumnado debe sentirse familiarizado. El primer apartado está pensado para resolverse de forma guiada por el docente durante la sesión, explicando la relación entre la expresión algebraica y las áreas de las figuras. El resto de apartados deberá resolverlos el alumnado de forma autónoma e independiente. Para ello deberá relacionar la expresión algebraica que se les presenta en el enunciado con la demostración visual que se usa como recurso en esta tarea, dotando de sentido geométrico a la expresión abstracta. Desarrollamos así un conocimiento intramatemático en el alumno, consiguiendo que este relacione conceptos pertenecientes a distintas áreas de las matemáticas. El papel de la demostración visual en esta tarea es el de resultar un recurso para el estudiante, de forma que la entienda y justifique aportando argumentos geométricos que relacione con las identidades del enunciado.

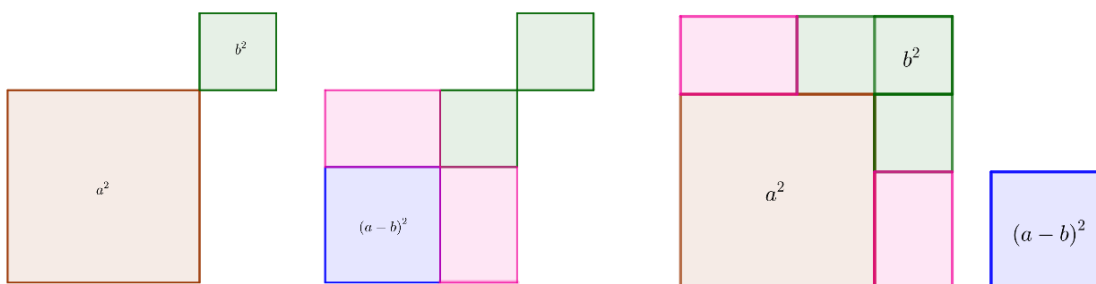
2.2.4. Tarea 4 (Sesión 4): Identidad de Legendre

Contesta de forma razonada las siguientes preguntas:

- i) Calcula $(5+3)^2 + (5-3)^2$ y a continuación $2(5^2+3^2)$: ¿Qué observas?
- ii) Calcula de igual forma $(7+2)^2 + (7-2)^2$ y a continuación $2(7^2+2^2)$ ¿Ocurre lo mismo que en el caso anterior? Prueba con otros dos números, los que tu elijas.
- iii) Haciendo uso de las fórmulas de las identidades notables que ya conoces, calcula $(a+2)^2 + (a-2)^2$ y a continuación $2(a^2+2^2)$, donde a es cualquier número real. ¿Has obtenido la misma expresión en ambos casos?
- iv) Haciendo uso del siguiente enlace y del material del enlace justifica con tus palabras que $(a+b)^2 + (a-b)^2 = 2(a^2 + b^2)$. Para ello ten en cuenta el significado, en términos de áreas, que tienen estas expresiones (véase la Figura 3).

Figura 3

Recortables manipulativos de la Tarea 4: Identidad de Legendre.



Esta tarea se les presenta de forma muy secuenciada a los estudiantes con el objetivo de atender a la diversidad y que de esta forma todos los alumnos puedan adquirir paulatinamente destrezas en relación a la abstracción, a la manipulación algebraica de expresiones y a la construcción de demostraciones mediante argumentos algebraicos y geométricos. Para ello se comienza la tarea trabajando con números concretos en el primer apartado, los cuales ayudarán al estudiante a comprender de forma más palpable la identidad que se pretende demostrar. En el segundo apartado se introduce una variable con la finalidad de aumentar el nivel de abstracción, aunque aún se mantiene un número para que el alumno se sienta cómodo. Finalmente aparecen dos variables con las que la identidad quedaría demostrada. La imagen de la Figura 3 se incorpora en el tercer apartado para que una vez que el alumno haya practicado la manipulación algebraica y aritmética en los dos apartados anteriores pueda entender el sentido geométrico de la identidad, estableciendo una relación entre la demostración visual que se le presenta y la expresión algebraica que se espera que obtenga.

2.2.5. Tarea 5 (Sesión 6): Sumas de los n primeros números naturales impares

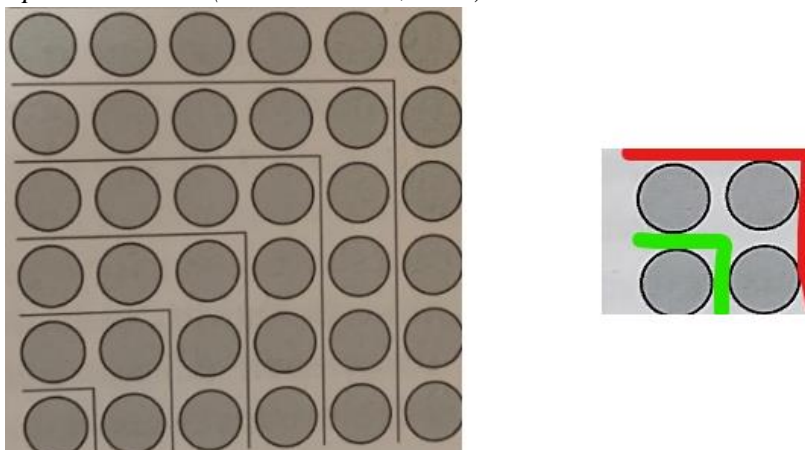
A partir de la siguiente imagen responde de forma justificada a los siguientes apartados (véase la Figura 4).

- i) Observa que si sumamos los dos primeros números impares, $1+3$, podemos formar un cuadrado de lado 2 y de área $2^2 = 4$. ¿Qué lado tendrá el cuadrado formado por la suma de los tres primeros números impares? ¿Y qué área? ¿Y el formado por los cuatro primeros números impares? La siguiente figura puede servirte de ayuda.

ii) En base a los resultados obtenidos en el apartado anterior, ¿cuánto crees que vale la suma de los n primeros números impares? ¿Por qué? (Aporta argumentaciones geométricas).

Figura 4

Izquierda: Figura que se les presentará a los alumnos en la Tarea 5. Derecha: ayuda propuesta para resolverla (Fuente: Nelsen, 2001).



En esta tarea el alumno trabajará la demostración visual que aparece en Nelsen (2001) de que la suma de los n primeros impares coincide con n^2 . Para ello, se comienza presentando el caso particular para $n=2$ y se intenta que el estudiante identifique cada bola de la imagen con una unidad de longitud. De esta forma, el área estará en una relación de igualdad con el número de pelotas, el cual representa la suma de los n primeros impares. En el segundo apartado se pide la generalización para un n cualquiera. A partir de los casos de la primera cuestión se pretende que el alumno haya podido encontrar la relación existente entre la representación geométrica en el dibujo y la expresión algebraica de la afirmación que tendrá que conjeturar. La demostración visual que se le muestra tiene como finalidad ayudar primero a conjeturar cuánto vale la suma requerida y segundo, presentar una demostración propiamente considerada que deberán entender y justificar mediante argumentos geométricos.

2.2.6. Tarea 6 (Sesión 8): Hexágonos y cuadrados

En base a la siguiente imagen responde a las preguntas planteadas a continuación (véase la Figura 5).

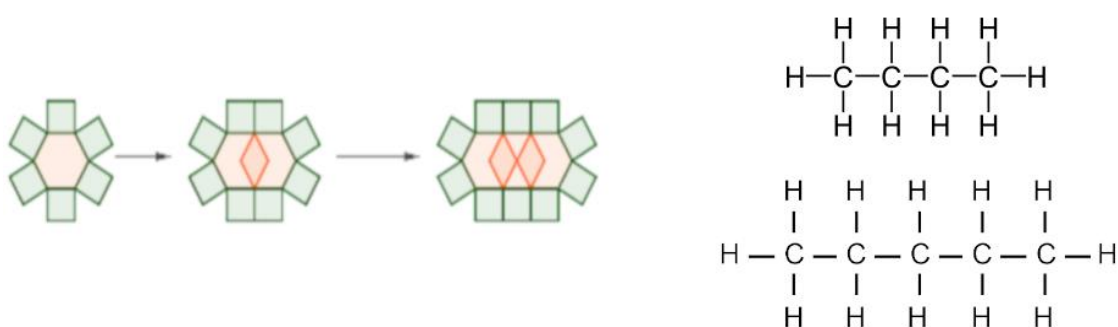
- i) ¿Cuántos cuadrados tendremos para 5 hexágonos? ¿Y para 10?
- ii) Halla una fórmula que nos permite calcular el número de cuadrados en el caso de tener n hexágonos.
- iii) En química orgánica se denominan alcanos a aquellos hidrocarburos que constan de átomos de carbono e hidrógeno unidos por enlaces simples. Los siguientes alcanos (a la derecha en la figura) se denominan metano y pentano, cuentan con 4 átomos de carbono y 10 de hidrógeno y 5 átomos de carbono y 12 de hidrógeno, respectivamente. Halla una fórmula para determinar el número de átomos de hidrógeno en base a los átomos de carbono en cadenas de alcanos de este tipo para cualquier número n de átomos de carbono.

Esta actividad se ha diseñado con la finalidad de representar un primer acercamiento al método de inducción. A través de ella se pretende que el estudiante entienda el trasfondo que encontramos en este método de demostración, pues el conocimiento de lo que ocurre en una de las iteraciones nos permite deducir lo que ocurrirá en las siguientes a través de razonamientos lógico-matemáticos y, por lo tanto, llegar a demostrar, como en este caso, que una determinada

fórmula o expresión es cierta. Como representa un primer contacto con este método de demostración, la idea, más que realizar una inducción al uso, es que el estudiante comprenda la importancia que tienen las iteraciones en este método y que a partir de ellas podemos comprobar la validez de una expresión. Además, con el fin de mostrar al estudiantado una aplicación de las matemáticas en un ámbito científico concreto, se enriquece la tarea con el tercer apartado, en el que el alumno puede encontrar una fórmula parecida con la que obtener el número de átomos de hidrógeno en un alcano, lo que hace más realista esta tarea. La imagen en esta tarea sirve para reconocer el patrón más que para demostrar la fórmula a la que se quiere llegar.

Figura 5

Izquierda: Imagen asociada a los apartados i) e ii). Derecha: Imagen asociada al apartado iii): moléculas de metano y pentano, respectivamente.



3. ANÁLISIS DE INSTRUCCIÓN ASOCIADO A LAS TAREAS

Las tareas que se han diseñado a lo largo de esta propuesta didáctica se fundamentan en la necesidad de brindar a los estudiantes experiencias de aprendizaje significativas y efectivas. Al adaptarse a los diferentes estilos de aprendizaje y niveles de habilidad de los alumnos, estas tareas buscan garantizar un aprendizaje inclusivo y equitativo para todos los participantes mediante la secuenciación de tareas que aumentan la dificultad progresivamente, el uso de materiales manipulativos y de herramientas digitales. En definitiva, las tareas planteadas en esta propuesta didáctica tienen un propósito claro: enriquecer la experiencia educativa de los estudiantes, fomentar el desarrollo de competencias relacionadas con la formulación de conjeturas y estimular su interés por el aprendizaje. A continuación, se lleva a cabo un análisis no intensivo de algunas de las tareas propuestas en este trabajo, donde se recogen aspectos relevantes de las mismas como las competencias que se trabajan, la formulación en la que se le presenta a los alumnos y su significatividad entre otras (Tablas 3, 4 y 5).

Tabla 3

Análisis de la Tarea 1.

Tarea 1: El teorema de Pitágoras en triángulos no rectángulos	
Meta	Realizar una conjetura del teorema de Pitágoras en triángulos no rectángulos.
Contenido	Teorema de Pitágoras, desigualdades y geometría elemental.
Objetivos/competencias	O1, O2, O3 / CE3, CE5, CE8

Tarea 1: El teorema de Pitágoras en triángulos no rectángulos	
Formulación	Tanto de forma oral como escrita en un folio que se repartirá con el enunciado y la imagen.
Materiales y recursos	Lápiz, papel y regla.
Agrupamiento/interacción	Individual, discusión de resultados al final en grupo.
Contexto	Científico
Temporalización	30 min
Complejidad	Reflexión
Secuenciación	Desarrollo
Realista	No
Significativa	Sí, ya que se inicia desde la intuición matemática y el conocimiento previo del teorema de Pitágoras y supone un reto para el alumnado estudiar cómo varía nuestro resultado en triángulos que no cumplen las hipótesis de partida (ser un triángulo rectángulo).

Tabla 4*Análisis de la Tarea 2.*

Tarea 2: Otros polígonos en el teorema de Pitágoras	
Meta	Estudiar cómo varía la famosa fórmula del teorema de Pitágoras si en lugar de considerar los cuadrados de los lados, consideramos otro polígono mediante el uso de software de matemáticas dinámicas.
Contenido	Teorema de Pitágoras, desigualdades y geometría elemental.
Objetivos/competencias	O1, O2, O3, O4 / CE3, CE5, CE8
Formulación	Se presenta en clase en pizarra digital y se envía por plataforma educativa junto con un enlace a GeoGebra.
Materiales y recursos	GeoGebra, ordenador
Agrupamiento/interacción	Individual
Contexto	Científico
Temporalización	Realizar en casa
Complejidad	Reflexión
Secuenciación	Cierre
Realista	No
Significativa	Sí, ya que se inicia desde la intuición matemática y el conocimiento previo del teorema de Pitágoras y de su

Tarea 2: Otros polígonos en el teorema de Pitágoras

demostración y constituye un reto para el alumnado al variar la condiciones, ya que no consideramos el cuadrado de sus lados, sino otra figura geométrica.

Tabla 5

Análisis de la Tarea 3.

Tarea 6: Hexágonos y cuadrados	
Meta	Aplicar el método de inducción a un caso particular de figuras geométricas.
Contenido	Método de inducción
Objetivos/competencias	O1, O5, O6 / CE1, CE3, CE4, CE5, CE6, CE8
Formulación	Escrita en folio
Materiales y recursos	Lápiz y papel
Agrupamiento/interacción	Individual
Contexto	Científico
Temporalización	10 min para presentarla en clase. Se finaliza en casa
Complejidad	Reflexión
Secuenciación	Cierre
Realista	No es realista, pero nos acerca a un contexto de la química en el que los alumnos pueden ver la aplicación del método de inducción en otras áreas de la ciencia.
Significativa	Sí, ya que se inicia desde la intuición matemática y el conocimiento previo del método de inducción que le hemos presentado al alumnado en clase. Además, pueden encontrar una relación significativa y comprobar así la importancia y la relación que tienen las demostraciones matemáticas con otras ramas de la ciencia.

Como conclusión, consideramos que esta forma de presentar las demostraciones visuales puede ser una estrategia efectiva para fomentar la comprensión profunda de conceptos matemáticos, promover el razonamiento lógico y fortalecer el pensamiento crítico de los alumnos; así como desarrollar en los estudiantes la capacidad de construir sus propias demostraciones con el fin de validar conjeturas. Mediante la observación y manipulación de representaciones gráficas, diagramas y modelos visuales, tanto en papel como haciendo uso de software de geometría dinámica, los estudiantes podrán visualizar de manera concreta los principios y relaciones matemáticas subyacentes.

Entre las ventajas que supondría llevar a cabo esta propuesta didáctica en el aula podemos señalar el brindar a los alumnos las herramientas necesarias para abordar con confianza y autonomía los desafíos matemáticos que se presentan en su entorno académico y contribuir a la

mejora de su capacidad de comunicación matemática, al permitirles expresar y defender sus ideas de manera clara y coherente, desarrollando así también, de forma intensiva, las competencias específicas relacionadas con comunicar y gestionar emociones. Como inconveniente, de acuerdo con el *National Council of Teachers of Mathematics* (2003), las demostraciones no deberían tratarse en el aula como un contenido adicional relacionado con un bloque de contenidos específico. Estas deberían integrarse en la unidad didáctica o situación de aprendizaje de forma continuada y estar presentes en las discusiones en la clase. Por lo tanto, lo óptimo sería que todas estas tareas estuviesen integradas en las distintas unidades en las que se trabajan los respectivos bloques temáticos.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Alfaro-Carvajal, C., Flores-Martínez, P., Valverde-Soto, G. (2019). La demostración matemática: significado, tipos, funciones atribuidas y relevancia en el conocimiento profesional de los profesores de matemáticas. *Uniciencia*, 38(2), 55-75. <https://doi.org/10.15359/ru.33-2.5>
- Education Committee of the European Mathematical Society (2011). Do theorems admit exceptions? Solid findings in mathematics education on empirical proof schemes. *EMS Newsletter*, 82, 50-53.
- Hanna, G. y De Villiers, M. (2011). Aspects of proof in mathematics education. En G. Hanna y M. De Villiers (Eds.), *Proof and Proving in Mathematics Education* (pp. 1-10). Springer. <https://doi.org/10.1007/978-94-007-2129-6>
- Martí, I. (2003). *Diccionario enciclopédico de educación*. Grupo Editorial Ceac.
- National Council of Teachers of Mathematics (2003). *Principios y estándares para la educación matemática*. Sociedad Andaluza Thales de Educación matemática Thales.
- Nelsen, R. (2001). *Demostraciones sin palabras*. Proyecto Sur.
- Ramírez, R. (2016). Atención a la diversidad y matemáticas escolares. En Rico, L. y Moreno, A., *Elementos de la didáctica de las matemáticas para el profesor de secundaria* (pp 295-310). Pirámide.
- Real Decreto 217/2022, de 29 de marzo, por el que se establece la ordenación y las enseñanzas mínimas de la Educación Secundaria Obligatoria. Boletín Oficial del Estado, núm. 76 (2022).
- Senk, S. (1985). How well do students write geometry proofs? *The Mathematics Teacher*, 78(6), 448-456.
- Stylianides, A. J. (2007). Proof and proving in school mathematics. *Journal for research in Mathematics Education*, 38(3), 289-321.
- Stylianides, G. J., Stylianides, A. J. (2017a). Research-based interventions in the area of proof: the past, the present, and the future. *Educational Studies in Mathematics*, 96, 119-127. <https://doi.org/10.1007/s10649-017-9782-3>
- Stylianides, G. J., Stylianides, A. J. (2017b). Research on the teaching of proof: Taking stock and moving forward. En J. Cai (Ed.), *Compendium for research in mathematics education* (pp. 237-266). National Council of Teachers of Mathematics.

IMMC-Spain, el desafío de la modelización para estudiantes de educación secundaria

César Gallart

Departament de Didàctica de la Matemàtica, Universitat de València,
cesar.gallart@uv.es

Irene Ferrando

Departament de Didàctica de la Matemàtica, Universitat de València,
irene.ferrando@uv.es

Carlos Segura

Departament de Didàctica de la Matemàtica, Universitat de València,
carlos.segura@uv.es

Resumen: *En las últimas décadas, el interés por la modelización en la enseñanza de las matemáticas ha permeado el diseño de los programas educativos, hasta el punto de aparecer como una de las competencias matemáticas a desarrollar por los estudiantes de secundaria en la nueva ley educativa. Sin embargo, las actividades de modelización todavía son poco habituales en las aulas, pese a que pueden integrarse en la enseñanza de varias maneras: en el entorno "normal" del aula, o en forma de actividades extracurriculares con o sin apoyo directo del profesor. En esta contribución queremos presentar una actividad extracurricular que consiste en una competición de modelización para equipos de estudiantes: el concurso IMMC-Spain. Esta competición nacional permite elegir a los dos equipos participantes en el International Mathematical Modelling Challenge, pero su objetivo central es promover la enseñanza de la modelización matemática y sus aplicaciones en la educación secundaria. Hasta la fecha, se han celebrado cuatro ediciones de IMMC-Spain y más de 500 estudiantes han participado en la competición. Cabe destacar también los buenos resultados obtenidos en la competición internacional por algunos de los equipos seleccionados. Se presentarán en detalle las bases del concurso, se mostrarán ejemplos de los problemas propuestos y se comentarán las características de las producciones de los equipos participantes.*

Palabras clave: *modelización, educación secundaria, resolución de problemas, contexto real, concursos.*

IMMC-Spain: the modelling challenge for secondary school students

Abstract: *In recent decades, the growing interest in the introduction of modelling in mathematics teaching has permeated the design of educational programmes, with modelling appearing as one of the mathematical competences to be developed by secondary school students in the new education law. However, mathematical modelling can be integrated into teaching in various ways: in the "normal" classroom environment, or in the form of extracurricular activities with or without direct support from the teacher. In this contribution, we would like to present an extracurricular activity consisting of a modelling competition for teams of students: the IMMC-Spain competition. This national competition allows the two teams participating in the International Mathematical Modelling Challenge to be selected,*

but its central aim is to promote the teaching of mathematical modelling and its applications in secondary education. To date, four editions of IMMC-Spain have been held and more than 500 students have participated in the competition. It is also worth highlighting the good results obtained in the international competition by some of the selected teams. The competition rules will be presented in detail, examples of the proposed problems will be shown and the characteristics of the productions of the participating teams will be discussed.

Key words: *modelling, secondary education, problem solving, real context, competitions.*

1. INTRODUCCIÓN

Existe un consenso en la educación matemática actual sobre la importancia de la conexión entre los conocimientos matemáticos, sus aplicaciones y la realidad (Blum y Niss, 1991; National Council of Teachers of Mathematics, 2000; Burkhardt, 2006; Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económicos, 2017). Esto puede verse también en la última reforma educativa en España, donde la modelización de problemas de la vida cotidiana aparece como una de las competencias específicas a desarrollar dentro de la propia competencia matemática (Real Decreto 217/2022, de 29 de marzo, por el que se establece la ordenación y las enseñanzas mínimas de la Educación Secundaria Obligatoria). En efecto, la resolución de problemas de modelización implica establecer conexiones entre el mundo real y el mundo de las matemáticas gracias a la construcción de modelos que, a partir del conocimiento matemático del estudiante, permiten estructurar, analizar y explicar situaciones o fenómenos reales (Blum y Niss, 1991; Blum, 1993; Haines y Crouch, 2007; Verschaffel et al., 2002).

Se pueden introducir actividades de modelización en el marco de las clases ordinarias, implementando proyectos de modelización de largo desarrollo, en varias sesiones, o proponiendo problemas de modelización más cortos, que puedan abordarse en una sesión de clase (Gallart et al., 2019). Sin embargo, otra opción valiosa es proponer al estudiantado participar en concursos como el *International Mathematical Modeling Challenge* (Garfunkel et al., 2021), al cual nos referiremos a partir de ahora, siguiendo el acrónimo oficial, como IM²C.

El IM²C es un concurso internacional dirigido a equipos de estudiantes de Secundaria o Bachillerato. Su objetivo es “desarrollar y mejorar la capacidad de los estudiantes para visualizar, comprender y aplicar las matemáticas en contextos del mundo real” (Comité australiano del IM²C, s.f.). Los países participantes en el concurso pueden presentar hasta dos equipos de estudiantes y cada país decide cómo escoger a sus representantes. En España la selección de los equipos que participan en la competición internacional se articula a través del concurso IMMC-Spain, que en el curso 2023-24 cumple su cuarta edición. En este artículo pretendemos contextualizar y describir con detalle el desarrollo del concurso IMMC-Spain, con dos objetivos: (i) destacar las oportunidades de aprendizaje para los participantes; (ii) invitar a los lectores de la revista *Épsilon* a promover la participación entre el estudiantado.

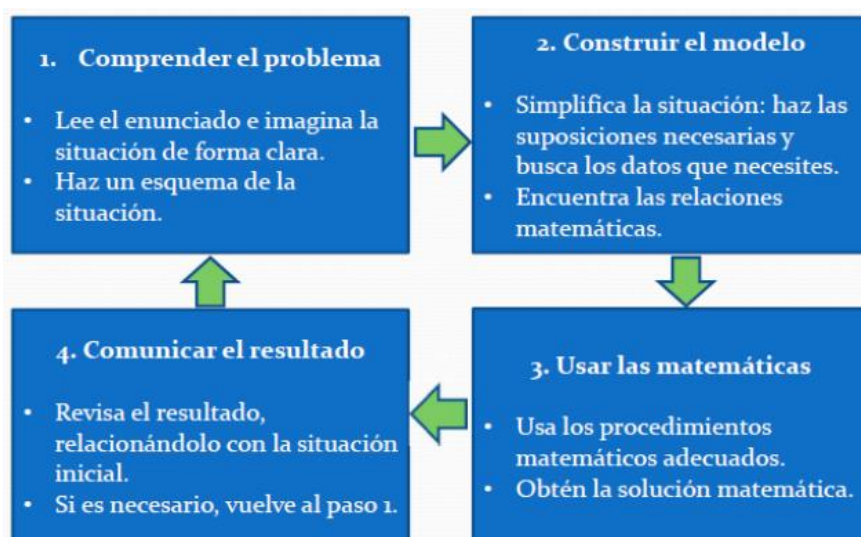
2. LA MODELIZACIÓN EN LA EDUCACIÓN SECUNDARIA

Maaß (2006) define los problemas de modelización como auténticos –es decir, pertenecientes al mundo real o a una realidad inventada pero plausible–, complejos –en el sentido de que el proceso de resolución no es conocido de antemano, sino que requiere de una reflexión previa–, y abiertos –puede haber más de una vía de resolución o solución posible–. Según Blum y Niss (1991) y Blum (1993), la modelización matemática englobaría el proceso de resolución de un

problema de este tipo: la traducción de una situación real al lenguaje matemático, lo que nos proporciona un modelo matemático; su resolución mediante el uso de las herramientas matemáticas pertinentes; la interpretación de la solución matemática obtenida de nuevo en la realidad; y la validación del proceso y su comunicación final. La modelización transita entre el mundo real y el mundo de las matemáticas (y viceversa) a través de un ciclo que puede repetirse un número indefinido de veces mientras el resolutor afina su resolución, ajustando su modelo y adecuando su solución a la situación real (Borromeo-Ferri, 2006). La Figura 1 muestra un ciclo de modelización simplificado que puede presentarse a los alumnos como guía y acompañamiento de su propio proceso de resolución:

Figura 1

Esquema del ciclo de modelización.



Si nos centramos en la educación no universitaria, el uso de la modelización presenta una doble perspectiva (Julie y Mudaly, 2007; Calabuig et al., 2015): por un lado, la introducción de problemas de modelización en el aula propicia el desarrollo integrado de las competencia matemática en general, y de la competencia en resolución de problemas reales en particular (Maaß, 2006; Gallart, 2016); por otro lado, el uso de la modelización y las aplicaciones matemáticas permite presentar los contenidos de forma contextualizada, generando una comprensión más profunda y una mayor predisposición en el alumnado (Maaß, 2006; Zbiek y Conner, 2006).

Estas dos perspectivas (complementarias y no excluyentes) están cobrando relevancia en el sistema educativo español, contribuyendo a promover un cambio de paradigma en la enseñanza de las matemáticas (Blum, 2011) que refuerza la autonomía del alumnado y el trabajo colaborativo (Blum y Borromeo-Ferri, 2009). Existen numerosos ejemplos que nos permiten ilustrar estos cambios, tanto en educación infantil y primaria (Alsina y Salgado, 2021; Albarracín et al., 2015) como en educación secundaria y bachillerato (Gallart y Mata, 2020; Trelles-Zambrano et al., 2019; Ferrando y Navarro, 2015; Sierra Galdón et al., 2011). En estos trabajos se pueden encontrar distintas aproximaciones a las actividades de modelización en la educación no universitaria, dando lugar a distintas tipologías: los problemas de Fermi (Ferrando et al, 2017), de corta duración y centrados en simplificar una situación real para realizar

estimaciones; las *Modelling Eliciting-Activities* (abreviadamente, MEAs; Lesh y Doerr, 2003), en las que se debe construir un modelo que permita tomar una decisión razonada sobre una situación problemática inicial; o los proyectos matemáticos realistas (abreviadamente PMR; Sol, 2009), donde a partir de un contexto real y poco estructurado, son los alumnos los que deben concretar una pregunta de investigación que resolverán a modo de proyecto de larga duración.

Sin embargo, existen pocos trabajos sobre actividades extracurriculares de modelización, en las que el entorno de aprendizaje es diferente, tal y como ocurre con el concurso IM²C (Garfunkel et al., 2021). Los problemas que propone el IM²C son actividades de modelización, dirigidas al alumnado de secundaria y bachillerato, que requieren desarrollar un modelo matemático que permita argumentar sobre una situación real mediante un informe. Estos problemas están disponibles en abierto y son, por tanto, un recurso accesible, sostenible y útil para el profesorado.

3. BASES DEL CONCURSO IMMC-SPAIN

El IM²C es un concurso internacional en el que participan equipos de más de 30 países de todo el mundo. Las bases del concurso pueden consultarse en su página web¹. Cada país organizador puede presentar un máximo de dos equipos, estableciendo sus propios criterios de selección. Como hemos señalado anteriormente, la selección de los dos equipos que representarán a España se hace mediante el concurso IMMC-Spain. Este concurso tiene una estructura muy similar a la fase internacional, en la que los participantes deben resolver un problema de modelización y escribir un informe sobre su modelo matemático.

Los equipos participantes en el IMMC-Spain pueden estar formados por un máximo de cuatro estudiantes de un mismo centro educativo que cursen entre 3º de ESO y 2º Bachillerato. Cada equipo está supervisado por un profesor responsable, que también es la persona encargada de hacer la inscripción. Para esto, solo es necesario cumplimentar un cuestionario accesible desde la web del concurso: <https://immcpain.blogs.uv.es/>. El plazo de inscripción está abierto desde finales del mes de octubre hasta la segunda semana de enero.

El papel de supervisor del docente responsable queda sujeto y limitado por las bases del concurso: en ningún caso podrá interferir en el trabajo de los equipos, que deben trabajar de forma autónoma. Sin embargo, tal y como se explica en Gallart y Mata (2022), su ayuda puede resultar muy importante en aspectos tales como la motivación (dar a conocer a los alumnos este concurso e incentivarles a participar en él), la organización (planificar tiempos, organizar condiciones y lugares de trabajo), y en aspectos formales propios del concurso (inscripción y aporte de documentación, supervisión del formato del informe final).

Una vez cerrado el plazo de inscripción, comienza formalmente el concurso. Desde la organización de IMMC-Spain se envía a los docentes responsables de los equipos participantes el enunciado del problema de la edición. Los equipos cuentan con un plazo de 3 semanas para resolver el problema y redactar el informe con el modelo matemático propuesto. Al recibir todos los informes, se procede a la evaluación de las propuestas. Durante la etapa de revisión, cada documento, con el número de control como única identidad, es leído por al menos dos correctores, y calificado mediante la rúbrica que se muestra en la Tabla 1.

¹ Web oficial del concurso IM²C, <https://immchallenge.org/Index.html>

Tabla 1

Criterios de evaluación y baremo para las propuestas recibidas en el IMMC-Spain.

Elemento a evaluar	Descripción	Puntuación hasta
Resumen	El resumen incluye las hipótesis, los detalles más importantes del modelo y las conclusiones	10 puntos
Formato y claridad	El informe es de fácil lectura, está bien redactado y organizado	10 puntos
Precisión en la definición del problema	Se identifica el problema real a resolver y se especifican las preguntas matemáticas precisas, se explicitan de forma justificada las hipótesis del problema y la elección de variables.	20 puntos
Proceso de modelización y matematización	Se formula de forma clara el modelo identificando los datos importantes, discriminando valores de los parámetros y desarrollando representaciones matemáticas adecuadas. Uso correcto de herramientas matemáticas.	30 puntos
Evaluación y validación del modelo	Comprobación de los resultados matemáticos e interpretación en términos de la situación problemática.	15 puntos
Puntos fuertes y débiles	Se estudia la pertinencia de las soluciones presentadas tras la revisión y se evalúa la sensibilidad a los cambios en los supuestos establecidos.	5 puntos
Respuesta a la pregunta	Se evalúa la calidad de la respuesta presentada en el informe en base a la pregunta planteada.	10 puntos

Aunque no hay valor de corte ni se publican las calificaciones numéricas, la evaluación cuantitativa es necesaria para clasificar las propuestas presentadas. Siguiendo el procedimiento del concurso internacional IM²C, se da una puntuación en una escala de 100 puntos con la que se pretende evaluar el informe de manera global, ponderando todos los aspectos importantes de la modelización. Una vez normalizada la puntuación de los dos correctores, si la brecha entre dos puntuaciones de una misma propuesta es demasiado amplia –mayor de 30 puntos– un tercer corrector también revisa la propuesta.

Además, para cada informe presentado, se realiza una evaluación cualitativa que permite dar *feedback* a los participantes. En efecto, la rúbrica de evaluación incluye un apartado de comentarios para que los correctores puedan completar su evaluación cuantitativa con información, análisis y orientaciones sobre el desarrollo del modelo presentado. Estos

comentarios son trasladados a los profesores responsables de cada equipo con una finalidad formativa: que les sirvan para reflexionar sobre los procesos implicados en la modelización y les permitan mejorar su competencia, lo que además les podrá ser útil para futuras participaciones tanto en la fase internacional como en otras ediciones del IMMC-Spain.

En la siguiente sección explicaremos las características de los problemas de modelización propuestos en el concurso.

4. DESCRIPCIÓN Y EJEMPLOS DE LOS PROBLEMAS PROPUESTOS

Los problemas planteados en el concurso, tanto en la fase nacional como en la internacional, tienen como característica común que se sitúan en un contexto real que, necesariamente, es relevante durante el proceso de resolución. Además, se diseñan para que admitan múltiples estrategias y para promover enfoques en los que las TIC (calculadoras gráficas, hojas de cálculo y software matemático) jueguen un papel importante, demandando el desarrollo de modelos matemáticos que movilicen distintos contenidos y procedimientos. El objetivo de estas actividades de modelización es que el alumnado elabore un informe fundamentado en un modelo que satisfaga las condiciones del enunciado del problema y que, en algunos casos, permita ser adaptado a nuevas situaciones.

Teniendo en cuenta las características de estos problemas, no existen respuestas correctas o incorrectas, sino respuestas más eficaces, completas o adecuadas que otras. En los siguientes apartados se muestran algunos ejemplos de las últimas ediciones de la competición en su fase nacional e internacional.

4.1. Los problemas de la fase nacional: IMMC-Spain

El problema propuesto en la edición del 2022 de la fase nacional, cuyo enunciado se resume en la Figura 2 (la versión íntegra está disponible en la web del concurso²), se titula “El dilema del encargado” y se contextualiza en un restaurante. El problema consiste en diseñar un modelo que permita organizar las mesas del restaurante para maximizar la rentabilidad del local. Este modelo puede atender a diferentes aspectos relacionados con la gestión de las mesas o los turnos de comida y puede acompañarse de simulaciones numéricas, datos empíricos o estudios que lo apoyen.

Figura 2

Problema propuesto en la fase nacional en la edición del 2022

El dilema del encargado

El Restaurante “Casa Paco” de Belicena está teniendo en los últimos meses un éxito fulgurante gracias a su fusión entre cocina mediterránea y tropical. Su éxito es tal que no reservan mesas con antelación, sin embargo, es posible que si lo hicieran mejoraría el rendimiento del restaurante. ¿Cómo repartir los comensales entre las mesas que tiene un restaurante para obtener la mayor rentabilidad?

² Pueden verse los problemas propuestos para la fase nacional en <https://immcspain.blogs.uv.es/problemas-immc-spain-ediciones-pasadas/>

En la edición del 2023 se propuso el problema “Ahorrando en la factura de la luz” (ver un resumen del enunciado en la Figura 3), que enfrenta a los alumnos a la necesidad de ahorrar energía en sus centros escolares. Para ello, los participantes debían diseñar un modelo para optimizar la factura eléctrica, pudiendo tener en cuenta aspectos tales como pautas de consumo, períodos de tarificación, instalación de placas solares o las ofertas que hacen las compañías eléctricas. De nuevo, el modelo podía acompañarse de simulaciones numéricas, datos empíricos u otros estudios que ayuden a justificar las decisiones y criterios asumidos.

Figura 3

Problema propuesto en la fase nacional en la edición del 2023

Ahorrando en la factura de la luz

Este año, la edición española del International Mathematical Modelling Challenge aborda una cuestión que nos preocupa a todos: ¿cómo ahorrar el gasto en electricidad? Para ello, cada equipo ha de presentar un modelo matemático que busque optimizar la factura de la electricidad de un centro educativo.

4.2. Los problemas de la fase internacional: IM²C

Una vez revisadas y evaluadas las propuestas de los participantes del concurso IMMC-Spain, se seleccionan los tres o cuatro mejores equipos, que tendrán la oportunidad de resolver el problema planteado en el concurso internacional IM²C. En esta fase, las condiciones para la resolución del problema son más exigentes, pues los equipos cuentan únicamente con cinco días consecutivos (a su elección, dentro del plazo establecido, entre final de febrero y final de abril) para desarrollar el modelo matemático y redactar el informe.

Una vez recibidos los informes de la fase internacional, son revisados por el comité de expertos de IMMC-Spain para seleccionar los dos que representarán a España en la competición internacional. Tal y como veremos en los siguientes ejemplos, las características de los problemas planteados en esta fase son similares a los de la fase nacional.

Figura 4

Traducción del enunciado del problema de la fase internacional en la edición del 2022

¡A bordo! Embarcar y desembarcar de un avión

En el transporte aéreo, la eficacia es tiempo y el tiempo es dinero. Incluso los pequeños retrasos en los horarios de los aviones de pasajeros suponen una pérdida de tiempo tanto para las compañías aéreas como para sus pasajeros. Durante cualquier vuelo de pasajeros, hay dos operaciones que consumen mucho tiempo y que dependen sobre todo del comportamiento humano: el embarque y el desembarque del avión. Construye uno o varios modelos matemáticos para calcular los tiempos totales de embarque y desembarque del avión.

En la edición del 2022, el problema “Aboard! Boarding and disembarking a plane” (Figura 4) demanda desarrollar un modelo que permita estimar los tiempos que necesita un determinado avión para embarcar y desembarcar a sus pasajeros. Hay varios aspectos que se deben tener en cuenta: el movimiento de los pasajeros dentro del avión, interferencias con el equipaje de mano,

grupos de prioridad, dificultades para acceder a los asientos de ventanilla, etc. También se pide a los participantes que apliquen su modelo a diferentes métodos de embarque preestablecidos (embarques aleatorios, embarques por secciones y embarques por asiento), e incluso que lo modifiquen para atender a distintos tipos de aviones (con cabinas de pasajeros relativamente anchas y cortas o en aviones con dos entradas y dos pasillos).

En el problema de la edición del 2023, "*Using Land: A valuable resource*" (Figura 5), se pedía a los equipos que desarrollaran un modelo para la planificación óptima del uso del suelo buscando un equilibrio entre el desarrollo de recursos para la comunidad y los beneficios empresariales. Este modelo debía establecer una "métrica de decisión cuantitativa" que permitiera a los propietarios tomar decisiones acerca de que es cuál es su "mejor uso", teniendo en cuenta las distintas opciones de ocupación: deportes al aire libre, pistas de esquí, distintos tipos de granjas, centros de agroturismo o la instalación de placas solares. Además, se les pedía estudiar en qué medida afectaría a su modelo la construcción de una nueva fábrica en el terreno.

Figura 5

Traducción del enunciado del problema de la fase internacional en la edición del 2023

Utilizar la tierra: Un recurso valioso

La planificación óptima del uso del suelo y el equilibrio entre los valores de la comunidad y los beneficios empresariales suelen requerir modelos que incluyan la geografía, el clima, las opciones empresariales y las necesidades de la comunidad y la cultura local para tomar decisiones importantes. Los dirigentes de la comunidad y los planificadores empresariales intentan decidir el "mejor uso" de una parcela de 3 kilómetros cuadrados disponible para urbanizar. Determina qué decisiones cuantitativas pueden ayudar a los responsables a decidir "mejor" cuál debería ser el uso final. Las medidas deben tener en cuenta los beneficios y costes a corto y largo plazo.

En la página web del concurso internacional puede acceder a los enunciados íntegros, así como a más problemas y las resoluciones de los equipos ganadores³.

5. RESOLUCIÓN DE LOS PROBLEMAS E INFORME FINAL

Tanto en la fase nacional como en la internacional, se pide a los equipos de estudiantes que presenten un modelo matemático que dé respuesta a las demandas del problema. Para la construcción de este modelo, los equipos disponen de un cierto tiempo: unas tres semanas en la fase nacional desde el momento que reciben, vía email, el enunciado del problema; y, en la fase internacional, cinco días consecutivos a elegir por cada equipo de entre un período de aproximadamente dos meses que fija la organización. El trabajo puede realizarse desde el propio colegio o instituto, siempre bajo la supervisión del profesor responsable.

Finalmente, cada equipo debe presentar un informe para que pueda ser evaluado por un comité de expertos. El informe, de una extensión máxima de 20 páginas, debe incluir, además del propio modelo, las suposiciones consideradas, los argumentos y los razonamientos

³ Pueden verse los problemas propuestos para la fase internacional en <https://immchallenge.org/Pages/Sample.html>

matemáticos utilizados, las conclusiones a las que se llegan, así como las posibles fuentes y referencias utilizadas. Además, los equipos deben redactar un resumen, de una página de extensión, cuya importancia remarca el propio concurso. El resumen, aconsejan, debe redactarse en un lenguaje cotidiano, como si sus destinatarios finales no tuvieran una alta capacidad matemática y a modo de “declaración directa hacia las personas que necesitan resolver el problema del mundo real” (Galbraith y Holton, s.f., p. 59).

Dado que ni el alumnado ni el profesorado están acostumbrados a la preparación de este tipo de informes, es importante contar con recursos útiles. En este sentido, una fuente que puede resultarles muy provechosa son las diferentes páginas webs de los países participantes. En ellas, docentes y estudiantes encontrarán información y materiales valiosos para su preparación (como los problemas de ediciones anteriores y los informes de los equipos finalistas, así como los comentarios de los comités evaluadores). En particular, el comité australiano presenta una guía para profesores y estudiantes con recomendaciones sobre la organización y preparación previa de los equipos (Galbraith y Holton, s.f., pp. 57-59). Entre otros, se recogen los siguientes consejos:

- La responsabilidad y el respeto por la contribución de los compañeros, así como una buena planificación de los tiempos son esenciales para la efectividad del trabajo. Respecto a la organización del equipo, se apunta la posibilidad de asignar diferentes “roles” a sus integrantes, según su experiencia y aptitudes, siempre de forma flexible.
- Los problemas propuestos en ediciones anteriores pueden servir para que los alumnos tengan una experiencia previa en modelización. También el propio ciclo de modelización puede resultarles un apoyo útil y práctico, ayudándoles a estructurar la resolución del problema.
- La “habilidad de redactar informes” se considera esencial en el proceso de modelización. Por ello, y debido a las pocas oportunidades de “comunicar matemáticas” que se les da a los alumnos, se sugiere incluir en las clases ordinarias la necesidad de dar explicaciones y razonamientos para mejorar su comunicación y capacidad de redacción sobre y con las matemáticas.

En la figura 6 podemos ver un extracto del resumen incluido en el informe presentado por uno de los equipos ganadores en la fase nacional de la edición de 2023.

6. CONCLUSIONES

Como hemos visto, el concurso IM²C supone una buena oportunidad para alumnos y profesores noveles para introducirse en las prácticas de modelización matemática. La falta de manuales y libros de texto sobre modelización supone una dificultad que este concurso, que pone a disposición del alumnado y del profesorado, en abierto, problemas, ejemplos de resoluciones, informes de evaluación cualitativa, y otro tipo de recursos, puede ayudar a superar. Así, los problemas utilizados en ediciones anteriores (tanto de la fase nacional como de la internacional), así como las resoluciones propuestas por los ganadores y las guías que las webs de los distintos países organizadores son un material excelente para trabajar actividades de modelización en nuestras aulas.

Figura 6

Extracto del resumen presentado por uno de los equipos participantes en la fase nacional para el problema “Ahorrando en la factura de la luz”

Para asignarle a cada escuela una solución, nos hemos basado en la necesidad del centro por reducir las facturas, lo cual lo hemos medido con nuestra tasa de necesidad de reducción, y las condiciones climáticas del mismo. La Tnr se ha regido por la siguiente fórmula:

$$Tnr = 0.3Mo. + 0.2Er. + 0.5 \frac{Panual}{12 Q alumnos}$$

Luego, para proceder a la asignación de las soluciones hemos utilizado diferentes esquemas ramificados que simplifican el proceso de elección.

Asimismo, para validar el proyecto lo hemos aplicado a tres escuelas distintas, escogiéndolas tras previo análisis para que representen tres casos variados que englobe a todas las escuelas de España.

Por supuesto, para aquellos docentes y estudiantes con experiencia en actividades de modelización, el concurso supone un desafío interesante y motivador para seguir profundizando en las conexiones entre las matemáticas y la realidad.

Por último, recordemos que la modelización matemática es una buena oportunidad para transformar y mejorar la percepción que la sociedad tiene de las matemáticas escolares como una serie de contenidos y procedimientos abstractos, desconectados del mundo real. Por ello, alentamos a todos aquellos docentes interesados en la modelización matemática a que animen a sus estudiantes a participar en la próxima edición del concurso y les supervisen en este desafío motivador y enriquecedor. La inscripción de los equipos para la edición 2023-24 estará abierta hasta el día 13 de enero. Invitamos a los lectores a visitar la web: <https://immcpain.blogs.uv.es/>

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Albarracín, L., Lorente, C., Lopera, A., Pérez, H. y Gorgorió, N. (2015), Problemas de estimación de grandes cantidades en las aulas de Primaria. *Epsilon, Revista de Educación Matemática*, 32(1), 19-33.
- Alsina, A. y Salgado, M. (2021). Introduciendo la modelización matemática temprana en educación infantil: un marco para resolver problemas reales. *Modelling in Science Education and Learning*, 14(1), 33-56.
- Blum, W. (1993). Mathematical modelling in mathematics education and instruction. En T. Breiteig, I. Huntley y G. Kaiser (Eds.), *Teaching and learning mathematics in context* (pp. 3-14). Ellis Horwood Limited.
- Blum, W. (2011). Can Modelling be taught and learnt? Some answers from empirical research. En G. Kaiser, W. Blum, R. Borromeo y G. Stillman (Eds.), *Trends in Teaching and Learning of Mathematical Modelling* (pp. 15-30). Springer.
- Blum, W. y Borromeo-Ferri, R. (2009). Modelling: Can It Be Taught And Learnt? *Journal of Mathematical Modelling and Application*, 1(1), 45-58.
- Blum, W. y Niss, M. (1991). Applied Mathematical Problem Solving, Modeling, Applications, and Links to other Subjects – State, Trends and Issues in Mathematics Instruction. *Educational Studies in Mathematics*, 22, 37-68.

- Borromeo-Ferri, R. (2006). Theoretical and empirical differentiations of phases in the modeling process. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 41, 453-465.
- Burkhardt, H. (2006). Modelling in Mathematics Classrooms: reflections on past developments and the future. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 38(2), 178-195.
- Calabuig, J. M., Ferrando, I., Gallart, C., García-Raffi, L. M., Hurtado, D. y Sierra, L. (2015). La modelización como competencia transversal en el sistema educativo español. *UNO. Revista de didáctica de las matemáticas*, 69, 44-51.
- IM²C australian committee (s.f.) About the IM²C. <https://www.immchallenge.org.au/about-the-immc>.
- Ferrando, I. y Navarro, B. (2015). Un viaje fin de curso y tres tareas de modelización. Una experiencia en el aula de secundaria. *Modelling in Science Education and Learning*, 8(2), 79-92.
- Ferrando, I., Albarracín, L., Gallart, C., García-Raffi, L. M., Gorgorió, N. (2017). Análisis de los modelos matemáticos producidos durante la resolución de problemas de Fermi. *Bolema*, 31(57), 220-242.
- Galbraith, P. y Holton, D. (s.f.). Mathematical modelling. A guidebook for teachers and teams. <https://www.immchallenge.org.au/files/IM2C-Teacher-and-student-guide-to-mathematical-modelling.pdf>
- Gallart C., Ferrando, I. y García-Raffi, L. M. (2019). Modelización matemática en la educación secundaria: manual de uso. *Modelling in Science Education and Learning*, 12(1), 71-85.
- Gallart, C. (2016). *La modelización como herramienta de evaluación competencial* (Tesis doctoral). Universitat Politècnica de València, Valencia, España.
- Gallart, C. y Mata, P. (2020). Formación del profesorado en modelización: primeros pasos de una profesora novel. *Modelling in Science Education and Learning*, 13(2), 43-56.
- Gallart, C. y Mata, P. (2022). La modelización a través del IMMC. *Números*, 112, 7-22.
- Garfunkel, S., Niss, M. y Brown, J. P. (2021). Opportunities for modelling: An extra-curricular challenge. En F.K.S. Leung, G. A. Stillman, G. Kaiser y K. L. Wong (Eds.). *Mathematical Modelling Education in East and West* (pp. 363-375). Springer.
- Haines, C. R., y Crouch, R. M. (2007). Mathematical modelling and applications: Ability and competence frameworks. En W. Blum, P. Galbraith, M. Niss y H-W. Henn (Eds.), *Modelling and applications in mathematics education: The 14th ICMI study* (pp. 417-424). Springer.
- Julie, C., Mudaly, V. (2007). Mathematical modelling of social issues in school mathematics in South Africa. En W. Blum, P. Galbraith, H.W. Henn y M. Niss (Eds.), *Modeling and Applications in Mathematics Education. The 14th ICMI Study* (pp. 503-510). Springer.
- Lesh, R. y Doerr, H. M. (2003). Foundations of a Models and Modeling perspective on Mathematics Teaching, Learning and Problem Solving. En R. Lesh y H. M. Doerr (Eds.), *Beyond Constructivism: Models and Modeling Perspectives on Mathematics Problem Solving, Learning, and Teaching* (pp. 3-34). Lawrence Erlbaum Associates.
- Maaß, K. (2006). What are modeling competencies? *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 38(2), 113-142.
- National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. NCTM.
- Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económicos (2017). PISA 2015 Assessment and Analytical Framework: Science, Reading, Mathematic, Financial Literacy and Collaborative Problem Solving. <https://doi.org/10.1787/9789264281820-en>

- Real Decreto 217/2022, de 29 de marzo, por el que se establece la ordenación y las enseñanzas mínimas de la Educación Secundaria Obligatoria. Boletín Oficial del Estado, núm. 76 (2022).
- Sierra Galdón, L., Juan Blanco, M. A., Garcia-Raffi, L. M., y Gómez Urgellés, J. (2011). Estrategias de aprendizaje basadas en la modelización matemática en Educación Secundaria Obligatoria. *Actas de las 15 Jornadas sobre el Aprendizaje y la Enseñanza de las Matemáticas*. FESPM.
- Sol, M. (2009). *Anàlisi de les competències i habilitats en el treball de projectes matemàtics amb alumnes de 12-16 anys a una aula heterogènia* (Tesis Doctoral). Universitat de Barcelona, Barcelona, España.
- Trellers-Zambrano, C., Toalongo, X., Alsina, A. y Gonzales, N. (2019). La modelización matemática a través de las actividades generadoras de modelos: una propuesta para el aula de secundaria. *Epsilon, Revista de Educación Matemática*, 102, 43-59.
- Verschaffel, L., Greer, B. y De Corte, E. (2002). Everyday knowledge and mathematical modeling of school word problems. En K. Gravemeijer, R., Lehrer, B., Oers, B., van and L. Verschaffel (Eds.), *Symbolizing, modeling and tool use in mathematics education* (pp. 257–276). Springer.
- Zbiek, R. y Conner, A. (2006). Beyond motivation: exploring mathematical modelling as a context for deepening students' understandings of curricular mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 63, 89-112.

Entrevista al profesorado: M. Teresa García Pérez

María Teresa García Pérez

CEIP Al-Ándalus de Córdoba, teresagarcia20@gmail.com

Resumen: Se presenta la entrevista realizada a M. Teresa García, maestra con una dilatada experiencia profesional en educación primaria. En ellos ha prestado especial atención a la enseñanza de las matemáticas, colaborando en diferentes proyectos de investigación e innovación relacionados con el desarrollo del sentido numérico del alumnado. En la entrevista, M. Teresa habla de su trayectoria y motivación, describe algunos recursos y actividades que le son útiles para desarrollar el sentido numérico en el primer curso de primaria y proporciona su visión sobre el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas.

Palabras clave: entrevista al profesorado, educación primaria, sentido numérico, recursos manipulativos

Teacher interview: M. Teresa García Pérez

Abstract: The interview made to M. Teresa García, who carries a long-standing teaching expertise, is shown. During this period, she has paid especial attention to mathematics teaching and collaborated with multiple research and innovation projects connected to the development of children's number sense. Throughout the interview, M. Teresa talks about her experience and motivation, describes some resources and activities she employs to work on numerical sense in primary school, and provides her viewpoint on learning and teaching of mathematics.

Key words: teacher interview, primary education, numerical sense, manipulatives.

1. TRAYECTORIA Y MOTIVACIÓN

Revista Epsilon (RE): ¿Cómo resumiría su recorrido profesional para que las/los lectores de Epsilon le conozcan?

M. Teresa García (MTG): Soy maestra desde hace más de treinta años. Comencé en Educación de Adultos, después obtuve la especialización en Educación Infantil y trabajé varios cursos en esta etapa. Finalmente me quedé en primaria y en los últimos seis años desempeño mi labor en el CEIP Al-Ándalus de Córdoba. Un periodo significativo en mi vida profesional fue pertenecer más de una década a un colegio rural en el que atendía a niños y niñas de tres a siete años, conviviendo distintos niveles en un aula unitaria. Esta experiencia fue muy enriquecedora porque me aportó una visión amplia y a la vez profunda de la evolución del aprendizaje, tanto en relación con el proceso de lectoescritura como en la adquisición de conocimientos lógico-matemáticos.

También, durante bastante tiempo, he sido responsable y docente en programas de Formación Permanente del Profesorado, impartiendo cursos sobre el desarrollo del sentido numérico en los primeros niveles educativos y asesorando a distintos Grupos de Trabajo que abordaban esta temática.

Desde 2010 colaboro con el área de Didáctica de la Matemática del Departamento de Matemáticas de la Universidad de Córdoba en diversos proyectos de investigación e innovación. Fruto de esa colaboración han surgido artículos, ponencias, talleres y el libro “Del número al sentido numérico y de las cuentas al cálculo táctico. Fundamentos, recursos y actividades para iniciar el aprendizaje” (García Pérez y Adamuz-Povedano, 2020). Nuestro proyecto de innovación más reciente se titula “Innovación metodológica en el área de la aritmética escolar en el primer ciclo de la Educación Primaria”. Este es nuestro cuarto año de intervención y, gracias a la financiación que recibimos de la Universidad de Córdoba, nuestro alumnado de primero y segundo (131 escolares en la actualidad), dispone de cuadernos que diseñamos especialmente para trabajar a nivel gráfico y simbólico los conocimientos, habilidades y destrezas que van adquiriendo gracias a nuestra metodología.

RE: ¿Cuál es su motivación para centrarse en experiencias innovadoras en matemáticas?

MTG: He centrado mi experiencia en la enseñanza de las matemáticas básicas porque creo que constituyen los pilares fundamentales sobre los que construir. Estoy de acuerdo con muchos autores cuando aseguran que los primeros aprendizajes y el primer contacto con la formalización son de una enorme trascendencia. Los primeros años son un periodo extraordinariamente sensible en el funcionamiento del cerebro, los niños pequeños tienen una enorme curiosidad, son tremendamente activos, emotivos y tienen un gran deseo de aprender. La enseñanza debe estar a la altura de ese momento evolutivo tan singular respondiendo a sus necesidades y sus intereses, acompañándolos, guiándolos y sembrando en ellos el amor por los números. Sé que el recuerdo de estas primeras experiencias va a ser determinante para que desarrollen una disposición favorable hacia las matemáticas.

También me interesan las edades de infantil y primer ciclo porque es en estos niveles iniciales de la escolaridad donde se detectan las primeras dificultades de un modo más claro. Es cuando resulta más fácil identificar destrezas elementales que fallan, desempeños que van más lentos de lo esperado, bloqueos en actividades sencillas o errores demasiado frecuentes. Esto nos da la oportunidad de atender esas dificultades y, en la medida de lo posible, atenuarlas e incluso solucionarlas con una intervención temprana.

Por otra parte, me apasiona conocer las aportaciones de la neurociencia y su aplicación en el ámbito educativo. Aunque es un campo de investigación todavía reciente, creo que los docentes tenemos ante nosotros un gran reto formativo y enormes posibilidades de innovación en este terreno. Desde ese maravilloso laboratorio que es la clase, con nuestra intuición, nuestro saber y nuestro gran conocimiento práctico, podemos avanzar hacia una neurodidáctica de las matemáticas incorporando los nuevos descubrimientos para estar más informados sobre qué matemáticas enseñar, cómo y cuándo enseñarlas y así ofrecer mejores acciones en nuestras aulas.

2. TRAYECTORIA Y MOTIVACIÓN

RE: Describa alguna experiencia de enseñanza que considere especialmente significativa o útil

MTG: Todo lo que hacemos en la escuela en relación con las matemáticas me parece relevante y no sabría destacar una experiencia sobre otra, así que me centraré en el momento actual, en los

aspectos fundamentales del trabajo que estoy realizando este primer trimestre con mi alumnado de primero.

Considero prioritario, desde que comienza el curso, presentarles unas matemáticas cercanas, interesantes, útiles y fáciles. Intento que se impliquen, que tengan iniciativa, que verbalicen lo que hacemos y pensamos, y que fortalezcan su creatividad. Para conseguirlo, damos mucha importancia a la comunicación, nos ayudamos de recursos visuales y manipulativos, trabajamos en cuadernos especialmente elaborados para este nivel, incorporamos juegos para motivar y consolidar los aprendizajes y “matematizamos la realidad” todo lo posible para que relacionen conocimientos y establezcan conexiones. En definitiva, procuro crearles un entorno de aprendizaje atractivo y motivador, que no amenace su autoestima y en el que pueda haber oportunidades para todo el alumnado. Este enfoque viene avalado por la investigación que nos llega de las neurociencias, que asegura que las emociones son poderosas aliadas en el proceso de instrucción y pueden afectar positiva o negativamente a elementos tan decisivos como la atención, la memoria, la iniciativa, la autoestima y el rendimiento.

Respecto a la distribución del tiempo en cada sesión, seguimos una estructura estable que combina momentos grupales con el trabajo individual o por parejas. En primer lugar, el responsable de cada día se coloca ante toda la clase para decir la fecha en el calendario, recordar otras fechas importantes en el mes, leer el horario y realizar un reto relacionado con los contenidos que estemos trabajando (Figura 1). Dicho reto va cambiando pero suele dirigirse a la resolución de un problema. Después trabajamos por parejas o con todo el grupo, unas veces con los materiales manipulativos y otras, haciendo recitado de series, o cálculo mental. Se termina la clase con trabajo escrito en el cuaderno. Con esta distribución del tiempo, logramos que se activen y coordinen distintas funciones ejecutivas de suma relevancia como la observación, anticipación, orden y organización, planificación, comunicación asertiva, autorregulación, memoria de trabajo, toma de conciencia de los errores, etc

Figura 1

Descripción de la figura.



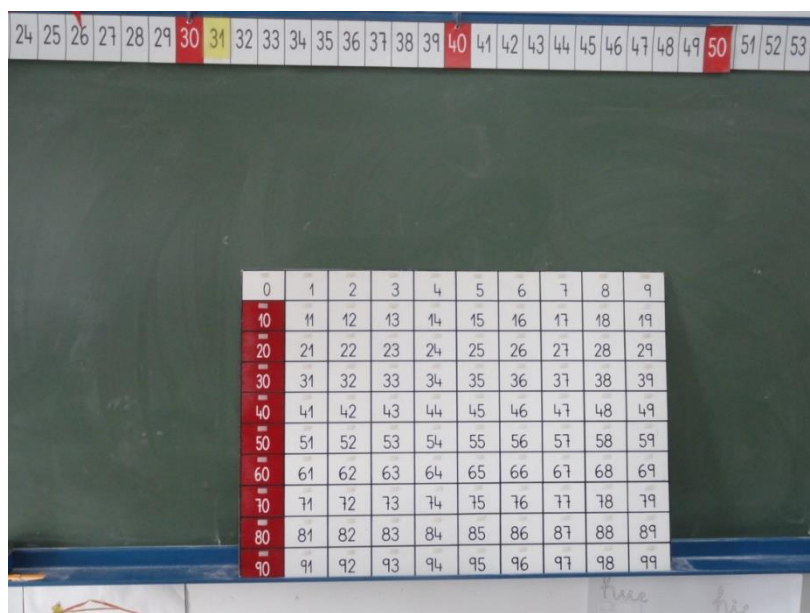
En cuanto al uso de recursos, creo que son fundamentales para el desarrollo del pensamiento lógico-matemático y del sentido numérico en particular. En las etapas de infantil y primaria, la manipulación y la visualización son herramientas de extraordinaria potencia para el aprendizaje matemático. Además, son un factor de inclusión ya que hacen al área más accesible a todo el alumnado. Pero tenemos que aclarar que estamos hablando de materiales con criterios de calidad, es decir, que sean adecuados a la edad y nivel del alumnado y que estén bien diseñados y seleccionados para que verdaderamente sirvan de vehículo tanto a los conceptos como a los procedimientos.

En nuestra clase de primero de primaria utilizamos distintos recursos que aseguran un buen aprendizaje de la numeración y el cálculo. Se trata de elementos muy prácticos, resistentes y fáciles de manejar, sencillos aunque con enormes posibilidades. Responden a diseños geométricos que relacionan número y espacio para conectar con percepciones intuitivas de los niños y ayudarles a comprender los conceptos abstractos.

El primero a destacar es la **cinta numérica**, que presenta los números en un formato lineal (Figura 2) y transmite con mucha fuerza el orden, los cambios, las distancias, los complementos a la decena y el patrón numérico. Con este “camino ordenado de los números” comprobamos la recurrencia de los dígitos, practicamos el recitado hacia delante y hacia atrás, señalamos números y los relacionamos con “operaciones estratégicas”, etc. Además, apoyándose en esta visualización, cada niño y niña va construyendo su propia línea mental para conectarla después con cálculos sobre la Línea Numérica Vacía.

Figura 2

Cinta numérica (arriba) y panel numérico (debajo).



Otro recurso importante es el **panel numérico**, que presenta los números en un formato bidimensional de tabla (Figura 2). Avanzamos de 1 en 1 por las filas, conociendo a cada familia, y también automatizamos el conteo de 10 en 10 bajando y subiendo por las columnas. El panel asocia número y espacio conformando un “mapa” riguroso donde cada número ocupa una

coordenada fija. Dominar esta distribución geométrica será fundamental para “sostener” y hacer más fácil el cálculo a nivel mental.

Tanto la cinta como el panel son muy eficaces para constatar a nivel simbólico el aspecto ordinal del número, pero necesitamos también un modelo cardinal que ponga en relación ambos aspectos. Utilizamos para ello la **caja de numeración** (Figura 3), un recurso imprescindible para construir y manejar los números según la estructura del sistema de numeración decimal. El trabajo con este recurso produce un salto cualitativo en la comprensión del número y de su tamaño, ya que proporciona un modelo concreto y fiel a la realidad visible, que da sentido al uso de los símbolos escritos y a los conceptos relativos al valor posicional.

Figura 3

Niños trabajando con la caja de numeración



Los tres recursos mencionados actúan de manera coordinada activando capacidades visuales, lingüísticas, auditivas y motrices. Precisamente, una de las aportaciones del estudio del cerebro es la constatación del carácter multimodal del aprendizaje, esto es, que el saber conceptual no es solo una construcción mental a partir del lenguaje y los símbolos, sino que hay una participación activa de nuestro sistema sensorio-motor: los sentidos y el movimiento colaboran de manera profunda para dar significado a los contenidos abstractos.

Por último, tenemos que hablar de los procedimientos que usamos para el cálculo escrito. Nuestra metodología, basada en la comprensión, el razonamiento y las habilidades numéricas, es incompatible con los algoritmos tradicionales de cálculo. En ellos, los alumnos y alumnas no pueden volcar lo que van aprendiendo sobre los números y las operaciones, no pueden desarrollar predicciones, exploraciones ni modos creativos de resolución. En nuestras aulas utilizamos un procedimiento que llamamos “**cálculo táctico**”. Se trata de un modo de calcular que necesita de la implicación activa del sujeto, que lo aborda como una misión a resolver haciendo uso de sus conocimientos y sus capacidades cognitivas. Para ello, después de interpretar la operación, debe movilizar lo que sabe de los números, desplegar las habilidades que ha adquirido y expresarlas por escrito para llegar a la solución. Aquí tenemos algunos ejemplos de sumas y restas en el tramo 0 – 99 (Figura 4):

Figura 4

Ejemplos de operaciones resueltas en el primer curso utilizando cálculo táctico.

$$76 + 16 =$$
$$76 + 10 + 4 + 2 = 92$$

86 90

$$47 - 25 = 22$$
$$47 - 10 - 15 = 22$$

37

$$63 - 24 =$$
$$63 - 3 - 20 - 1 = 39$$

$$58 + 26 = 84$$
$$58 + 2 + 20 + 4 = 84$$

$$44 - 15 =$$
$$44 - 5 - 5 - 5 = 29$$

$$16 + 55 =$$

$$6 + 65 = 71$$

$$37 + 56 =$$
$$37 + 3 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 3 = 93$$

RE: ¿Qué recomendaciones haría al profesorado de primaria que sufre dificultades para trabajar las matemáticas en el aula de primaria?

MTG: Muchas veces las dificultades a la hora de trabajar las matemáticas se deben al enfoque y métodos de enseñanza. En estos casos recomendaría a los docentes que tomaran conciencia sobre su papel como instructores y guías en el camino al razonamiento, que animaran a sus alumnos y alumnas a pensar e implicarse de una manera activa. Que en lugar de promover en ellos aprendizajes mecánicos, les invitaran a reflexionar y a descubrir relaciones, patrones y estrategias. También que dejaran de lado la uniformidad para observar y atender a la diversidad de capacidades y estilos cognitivos.

Por otra parte, les animaría a seleccionar e incorporar a sus clases materiales y recursos manipulativos para facilitar la visualización, la representación y dar impulso a la actividad mental, dando siempre mucha importancia a la verbalización.

Por último, les aconsejaría diversificar las actividades para que el conocimiento llegue desde diferentes contextos, tener muy en cuenta los ritmos atencionales de cada edad y aprovechar el enorme potencial del juego.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

García Pérez, M. T. y Adamuz-Povedano, Natividad (2020). *Del número al sentido numérico y de las cuentas al cálculo táctico Fundamentos, recursos y actividades para iniciar el aprendizaje*. Octaedro.

Que las demostraciones no te dejen sin palabras

Ana M. Martín-Caraballo

Universidad Pablo de Olavide, ammarcar@upo.es

Rafael Ramírez Uclés

Universidad de Granada, rramirez@ugr.es

Miguel L. Rodríguez González

Universidad de Granada, miguelrg@ugr.es

Resumen: *En el presente trabajo se exponen algunas de las tareas de una sesión para estudiantes inscritos al programa ESTALMAT (Estímulo del TALento MATemático). A partir de representaciones visuales, se proponen tareas para que el estudiantado haga conjeturas y justifique qué se está demostrando, comunicando sus razonamientos al resto del grupo. Además de introducir al estudiantado en diferentes técnicas de demostración, se espera que los estudiantes reflexionen sobre la generalidad de las argumentaciones visuales frente a otros procedimientos analíticos o algebraicos.*

Palabras clave: *argumentación visual, demostración, razonamiento, talento matemático*

Do not let the demonstrations leave you speechless

Abstract: *This paper presents some of the tasks of a session for students enrolled in the ESTALMAT (Stimulating Mathematical Talent) programme. Based on visual representations, tasks are proposed for students to make conjectures and justify what is being demonstrated, communicating their reasoning to the rest of the students in the group. In addition to introducing students to different demonstration techniques, we expect students to reflect on the generality of visual argumentation as against other analytical or algebraic procedures.*

Keywords: *visual representations, demonstrations, reasoning, mathematical talent.*

1. INTRODUCCIÓN A LA SESIÓN

ESTALMAT es un proyecto de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales de España (<https://www.estalmat.org/>), que en Andalucía asume la SAEM THALES como un programa para estimular y atender el talento matemático de los chicos y chicas que demanden más de esta aptitud en cuanto a la profundización en competencias matemáticas.

En Andalucía el proyecto se dirige directamente a unos 280 estudiantes de centros andaluces y se organiza en dos sedes, una para Andalucía Occidental en Sevilla (que abarca Cádiz, Córdoba, Huelva y Sevilla) y otra para Andalucía Oriental en Granada (que abarca Almería, Granada, Jaén y Málaga). Los estudiantes se agrupan en cuatro cursos: primero, segundo y dos cursos de veteranos. Además de los estudiantes seleccionados mediante una prueba de selección a nivel nacional, como novedad desde el curso 2021, se ha ampliado la atención no solo a este alumnado

sino a todo el alumnado inscrito para la realización de la citada prueba. Las sesiones en este último caso se realizan de manera online a través de Google Meet y permiten el acceso al estudiantado que se presentó a la prueba pero que no fue seleccionado. De manera aproximada, suelen ser unos 100 estudiantes los que se conectan a este tipo de sesiones. Las temáticas de estas sesiones son variadas: Resolución de problemas numéricos, geométricos y algebraicos; Generalización, Juegos Matemáticos o Justificación son ejemplos de las mismas. En este trabajo vamos a describir algunas de las tareas planteadas en la sesión de Justificación, que denominamos “Demostraciones sin palabras”.

Como en las sesiones presenciales para el grupo seleccionado, el profesorado del proyecto dirige al estudiantado, a través de la resolución de problemas, para que desarrollen su capacidad creativa y el fortalecimiento de sus habilidades de razonamiento, a la vez que se les acerca a algunos de los retos aún por resolver. El trabajo de investigación para resolver los problemas planteados se hace en grupos. La discusión de las ideas desarrolladas en cada grupo está guiada por el profesorado del proyecto y los resultados obtenidos se revisan por estos. La participación activa en estas actividades es esencial para conseguir los objetivos del proyecto. La duración de la sesión es de 3 horas, con un descanso de media hora y, en casi todas las sedes y en particular en las dos de Andalucía, se realiza los sábados por la mañana (desde la 10 hasta las 13:30)

Como sesión de enriquecimiento curricular (Ramírez y Flores, 2016), no se pretende adelantar contenidos que se trabajarán en el aula ordinaria, sino en presentar contenidos extracurriculares o profundizar en contenidos curriculares ya conocidos. En este caso, la sesión parte de tres competencias específicas de la nueva normativa (Ministerio de Educación y Formación Profesional, 2022):

- C1) Interpretar, modelizar y resolver problemas de la vida cotidiana y propios de las matemáticas, **aplicando diferentes estrategias y formas de razonamiento**, para explorar distintas maneras de proceder y obtener posibles soluciones.
- C3) Formular y comprobar conjeturas sencillas o plantear problemas de forma autónoma, **reconociendo el valor del razonamiento y la argumentación**, para generar nuevo conocimiento.
- C8) **Comunicar de forma individual y colectiva conceptos, procedimientos y argumentos matemáticos, usando lenguaje oral, escrito o gráfico, utilizando la terminología matemática apropiada**, para dar significado y coherencia a las ideas matemáticas.

Dependiendo de la actividad, aparecen saberes básicos especialmente asociados al sentido espacial como, por ejemplo: Figuras geométricas planas y tridimensionales: descripción y clasificación en función de sus propiedades o características. Relaciones geométricas como la congruencia, la semejanza, la relación pitagórica en figuras planas y tridimensionales: identificación y aplicación. Modelización geométrica: relaciones numéricas y algebraicas en la resolución de problemas. Relaciones geométricas en contextos matemáticos y no matemáticos (arte, ciencia, vida diaria...).

Atendiendo a las mismas, se plantea el siguiente esquema de trabajo:

1. Se muestra una representación visual y lanzamos la pregunta ¿qué se está demostrando aquí?
2. Cada miembro del grupo establece individualmente una conjetura y trabaja posteriormente en pequeños subgrupos para consensuar una única respuesta.
3. Se realiza una puesta en común para analizar las distintas propuestas.
4. Se plantea una nueva pregunta, ¿es válida la justificación para “cualquier caso”?

5. Se realiza una puesta en común para discutir la validez de las argumentaciones más allá de las representaciones visuales concretas que se están utilizando.
6. Y una nueva pregunta final, ¿se podría justificar de otra manera diferente?
7. La intención de la puesta en común final es recoger argumentaciones y demostraciones diferentes, especialmente las que utilizan procedimientos algebraicos o analíticos que complementan la propuesta visual.

2. ¿ACEPTAS EL RETO?

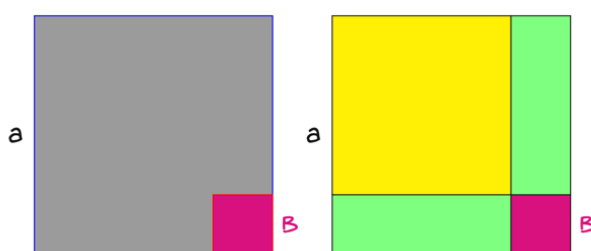
Os proponemos, lectores con motivación, que a continuación respondáis a las preguntas propuestas y que, si tenéis posibilidad, las compartáis. Para ello os sugerimos completar las seis fases del esquema de trabajo propuesto. Como a Fermat, a nosotros tampoco nos caben las demostraciones en el margen, y por otra parte, también somos fervientes seguidores de John Conway que publicó un trabajo científico con dos figuras y dos palabras (Conway y Soifer, 2005) y queremos escribir lo justo para completar este trabajo así que os animamos a investigar por vuestra cuenta cada una de ellas. Todas las podéis encontrar en algunos libros modernos pero que deseamos que en poco tiempo sean ya clásicos (Alsina y Nelsen, 2010; Nelsen, 1997, 2000, 2014).

Por último, decir que las imágenes requieren que quien las mire razone, pues en otro caso será poco probable que consiga llegar a una conclusión. Así que quien siga leyendo este trabajo, además de mirar debe pensar. Debe comprender qué hay dibujado, debe pensar y razonar y no solo mirar.

2.1. Identidad notable: ¿un poquito de álgebra?

Figura 1

¿A qué es igual el cuadrado de a menos el cuadrado de b ?

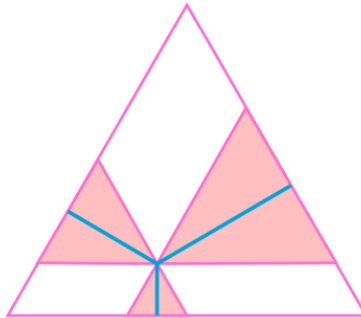


Para contestar a esta pregunta intenta formar con los rectángulos que tienes en el segundo cuadrado de la Figura 1 otra figura de la que conozcas el área. Por supuesto, es posible girar algunos de los rectángulos que se forman en el segundo cuadrado de la Figura 1.

2.2. Algo de geometría

Figura 2

Teorema de Viviani: En un triángulo equilátero la suma de las distancias desde un punto interior a cada lado es igual a _____?

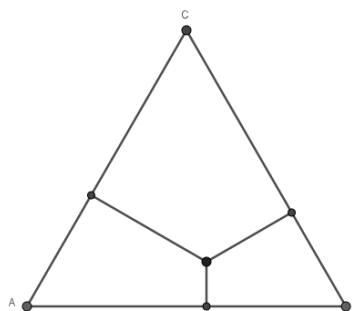


En la Figura se 2 se han formado tres nuevos triángulos equiláteros que girándolos y trasladándolos en el interior del triángulo donde están se podrá ver fácilmente la respuesta a la pregunta planteada.

¿Qué ocurre si no dibujamos triángulos equiláteros sobre las distancias a cada lado del triángulo? ¿Será posible demostrar el Teorema de Viviani de otra forma? Para ello, toma como referencia la siguiente figura (ver Figura 3) y además solo tendrás que utilizar que el área de un triángulo es la mitad del producto de la base por la altura del triángulo dado.

Figura 3.

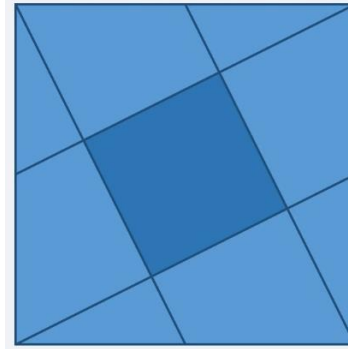
¿Otra demostración diferente?



¿Y si hacemos algo parecido, pero en un cuadrado?

Figura 4.

Si se trazan rectas que unen los vértices de un cuadrado con los puntos medios de uno de los lados opuestos, como se muestra en la Figura 4, entonces probar que el área del cuadrado central es un quinto del área del cuadrado original (Wells, 1991).

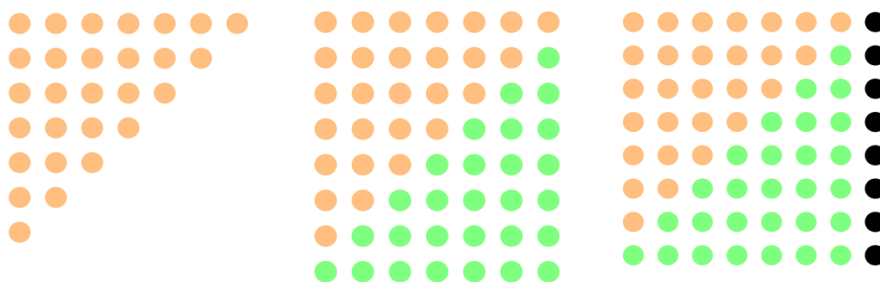


La relación entre las áreas se podrá calcular fácilmente girando y trasladando los triángulos y trapecios que se han formado.

2.3. Juguemos con números y sumas

Figura 5.

¿Qué representa esta secuencia?



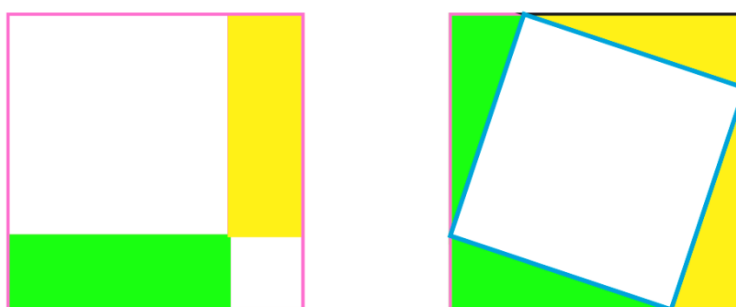
En la Figura 6 se tienen tres copias de cierta estructura geométrica, en primer lugar, piensa en lo que representa esa figura (solo una ya que las otras son iguales), ¿lo tienes? Pues ahora intenta unir las tres en una única estructura compacta, ¿cómo se llama la figura que se forma?

Seguimos con los retos, pero ahora para no abusar de los números y correr el riesgo de aburrirnos, volvamos al álgebra y las identidades notables, pero volveremos en un rato de nuevo con las relaciones de operaciones y números.

2.4. ¿Qué resultado se está demostrando?

Figura 7.

¿Sabes qué resultado se está demostrando en la siguiente imagen?

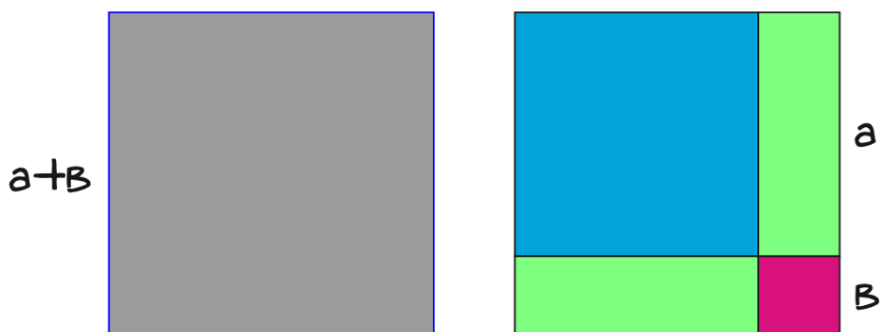


En matemáticas a los resultados importantes se les denomina Teoremas (a otros resultados que se utilizan para demostrar los teoremas se denominan lemas o también proposiciones, además a las propiedades que se deducen de los teoremas, lemas y proposiciones se les denomina corolarios) y en la Figura 7 se demuestra uno de los teoremas más conocidos por todos. La demostración anterior está descrita en un antiguo tratado chino llamado “Chou Pei Suan Ching”. Seguro que ya has descubierto de qué Teorema se trata, hay que tener en cuenta que los dos cuadrados de la Figura 7 tienen el mismo área.

2.5. ¿Y este resultado?

Figura 8.

¿A qué es igual el cuadrado de a más b ?

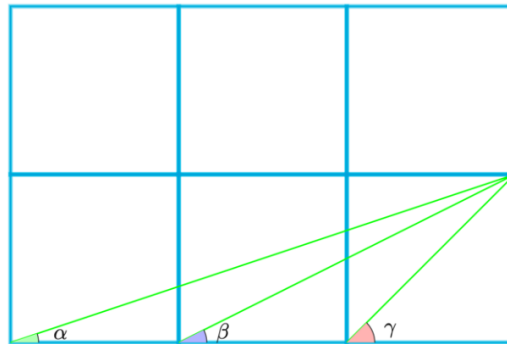


Deducir esta igualdad es fácil, solo hay que utilizar áreas de figuras muy conocidas, son cuadrados y rectángulos así que no habrá problema.

2.6. ¿Cuántos suman los ángulos?

Figura 9.

¿Cuál es el valor de la suma de los tres ángulos dibujados en la Figura 9?

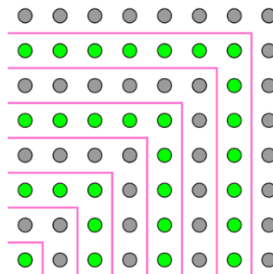


Podrás deducir esa suma si dibujas un triángulo más en el rectángulo dado, imagina que el dibujo es una mesa de billar, cuando la bola choca con un lado con un cierto ángulo ¿con qué ángulo sale despedida después de chocar con el lado?

2.7. ¡Otro de bolas! Volvemos a números y operaciones

Figura 10.

¿Qué representa la siguiente figura?

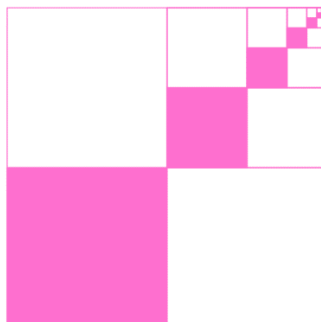


Vamos sumando... mira bien la figura a ver si ves qué números queremos sumar y cuánto vale esa suma.

2.8. ¡Una suma con muchos términos!

Figura 11.

Calcula el área de la parte coloreada en la siguiente figura.



Este reto se puede resolver de varias formas, una de ellas es geométrica y solo tienes que pensar en cuadrados sin colorear y coloreados y sus áreas, la otra forma podría decirse que es más analítica y solo tendrás que sumar áreas de los cuadrados coloreados, sin tener en cuenta los no coloreados.

3. AGRADECIMIENTOS

Los autores agradecen a la Fundación para la Ciencia y Tecnología la financiación, en convocatoria competitiva, concedida a Estalmat Andalucía con el proyecto con referencia (FCT-22-18347) y título “Aulas abiertas al enriquecimiento científico”.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Alsina, C. y Nelsen, R. B. (2010). *Charming Proofs, A Journey Into Elegant Mathematics*. Mathematical Association of America.
- Conway, J.H. y Soifer, A. (2005). Covering a triangle with triangles. *American Mathematical Monthly*, 112(1), 78.
- Ministerio de Educación y Formación Profesional (2022). *Real Decreto 217/2022, de 29 de marzo, por el que se establece la ordenación y las enseñanzas mínimas de la Educación Secundaria Obligatoria*.
- Nelsen, Roger B. (1997). *Proofs without Words: Exercises in Visual Thinking*. The Mathematical Association of America.
- Nelsen, Roger B. (2000). *Proofs without Words II: More Exercises in Visual Thinking*. The Mathematical Association of America.
- Nelsen, Roger B. (2017). *Proofs without Words III: More Exercises in Visual Thinking*. The Mathematical Association of America.
- Ramírez, R. y Flores, P. (2016), Planificar el enriquecimiento para alumnos de alta capacidad matemática: reposo curricular. *Revista SUMA*, 83, 33-41
- Wells, D. (1991), *The Penguin Dictionary of Curious and Interesting Geometry*. Penguin Books.

Actividades SAEM Thales

Esther Roquette Rodríguez

Colegio San Felipe Neri, Cádiz, España, Esther.roquette@gmail.com

Resumen: “La matemática es el alfabeto con el cual Dios ha escrito el universo” (Galileo Galilei). *Tal y como se hace referencia en la cita de Galileo, las matemáticas están por todo nuestro mundo, nos rodea. Y con esta idea de dar a conocer y mejorar la relación de nuestra sociedad con ellas, la Sociedad ha realizado una serie de actividades durante de mayo hasta final de año con Concursos, las fases regionales y nacionales de las Olimpiadas o dos Congresos, uno de ellos con carácter internacional.*

Palabras clave: *actividades, olimpiadas, matemáticas, congreso, GeoGebra,.*

Activities SAEM Thales

Abstract: "Mathematics is the alphabet with which God has written the universe" (Galileo Galilei). *As referenced in Galileo's quote, mathematics is everywhere in our world; it surrounds us. With the aim of raising awareness and enhancing our society's relationship with mathematics, the Society has organized a series of activities from May to the end of the year, including competitions, regional and national phases of the Olympiads, and two congresses, one of which has an international character.*

Key words: *activities, olympics, mathematics, congress, GeoGebra.*

1. SEPTIEMBRE 2023

El inicio del curso ha dado lugar al V Concurso de Otoño, de la Delegación de Málaga, donde nuestros alumnos y alumnas, de esta provincia, ha podido echar a volar su imaginación.

2. OCTUBRE 2023

La Delegación de Sevilla convocó el XIV Concurso de Otoño (CO+) con la colaboración de la Universidad de Sevilla y Junta de Andalucía entre otros.

Figura 1

Cartel de la actividad



3. NOVIEMBRE 2023

El mes de noviembre ha sido un mes de reuniones y votaciones, distintas provincias han celebrado las asambleas anuales, donde se han podido volver a elegir los delegados que representan a estas provincias y organizar las actividades del próximo curso.

Por otro lado, el I Congreso Internacional de GeoGebra se celebró en Córdoba, contando con la presencia de Markus Hohenwarter y con la garantía de un segundo encuentro.

4. DICIEMBRE 2023

Desde la Delegación de Granada, seguimos realizando las actividades mensuales del Recreo de los Jueves. Las correspondientes a este trimestre se han correspondido a temáticas diversas como la métrica del Taxista, la belleza matemática de la Alhambra y Exploting Dots coordinadas respectivamente por Rafael Ramírez, Francisco Fernández y Daniel Partal.

Destacamos como última actividad del curso un reto propuesto para el alumnado de ESTALMAT. Este es un concurso de invención de problemas de VELOCIDAD Y RELEVOS para las olimpiadas de sexto de primaria de la SAEM THALES.

Los ganadores de esta edición han sido: Sabina Zavalisca Sancarenco, Adrián Ruano Romero, Silvia Rosales Romero y Amanda Gil Puebla, que han recibido unos interesantes premios matemáticos por parte de AMPROES.

La entrega de premios se hará el día de Matemáticas al Sprint, jornada en el que el estudiantado compite en grupos con otros equipos del resto de comunidades que participan en el proyecto ESTALMAT..

5. CALENDARIO DE ACTIVIDADES

Para el primer trimestre del curso 2023-2024 tenemos las siguientes actividades: en enero podremos disfrutar de una nueva convocatoria de Cursos Thales Online, que se está preparando bajo el amparo de la normativa de Competencia Digital Docente y, como es habitual, se volverá a solicitar la homologación por parte de la Consejería de Educación y Desarrollo Educativo.

Para alumnado tenemos las pruebas de Canguro, las OMT de Primaria, Secundaria tanto 2º como 4º de la ESO, tanto en sus fases provinciales, regionales y nacionales, contando como primicia la presencialidad de la Fase Nacional de la OMT de 4º de la ESO.

Para el profesorado, se siguen ofertando todas las convocatorias de Encuentro de la FESPM y como colofón al curso escolar podemos encontrarnos en la Jornadas de Aprendizaje y Enseñanza de las Matemáticas a comienzos de julio en Santander.

6. CONVOCATORIAS ABIERTAS PARA SOCIOS/AS

Como actividad permanentemente abierta se encuentra la Convocatoria de Publicaciones. En ella cualquier socio o socia de la Thales o de cualquier otra sociedad de la Federación Española de Sociedad de Profesores de Matemáticas (FESPM) puede presentar material de contenido matemático para ser publicado en formato online o en formato papel.

Por otro lado, también tenemos abierta la convocatoria para profesorado de ESTALMAT.

