

εpsilon

Revista de Educación Matemática

Editada por la Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales

“Enseñar
matemáticas
con sentido.
Un viaje
apasionante”

CEAM 2023.

114
2023

Equipo Editorial

Burgos Navarro, María José
Carrillo de Albornoz Torres, Agustín
Cecilia Gámiz, Lina María
Conde Fernández, Silvia
Contreras García, José Miguel
España Pérez, Francisco
Fernández Plaza, Jose Antonio
Flores Lamolda, Lucía
Flores Martínez, Pablo
Gallardo Jiménez, Sandra
Gámez Valero, Carmen
García Schiaffino, Margarita
Garzón Guerrero, José Antonio
López Centella, Esperanza
Lupiáñez Gómez, José Luis
Molina Muñoz, David
Molina Portillo, Elena
Montejo Gámez, Jesús
Moreno Verdejo, Antonio
Partal García, Daniel
Peñas Troyano, María
Pérez Martos, María del Carmen
Ramírez Uclés, Rafael
Rivas Olivo, Mauro Alfredo
Rodríguez González, Miguel
Roquette Rodríguez, Esther
Ruiz Hidalgo, Juan Francisco
Tizón Escamilla, Nicolás
Valero Terrón, Iván
Villegas Escobar, Adela María

114

2023

Edita
Sociedad Andaluza de
Educación Matemática "Thales"
Universidad de Cádiz
C.A.S.E.M.
Facultad de Ciencias
Departamento de Matemáticas
Campus del Río San Pedro
Torre Central, 4ª planta
11510 Puerto Real (Cádiz)
Teléfono: 956012833
Email: thales.matematicas@uca.es

Depósito Legal
SE-421-1984

ISSN
2340-714X

Período
2023

Suscripción
Anual

ÍNDICE / CONTENTS

APORTES DE LA INVESTIGACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

- 7 **Desarrollando el pensamiento matemático en la Escuela Infantil (0-3 años): el papel de los espacios y los materiales**
Ángel Alsina, Chaima Allouche, Martina Feliu y Anna Font
- 31 **Características del Discurso Matemático de un profesor durante la enseñanza de la Función Cuadrática**
Natalia Múnera
- 49 **Diseño, implementación y análisis de una sesión de pensamiento algebraico en Educación Primaria**
Lucía Flores Lamolda

EXPERIENCIAS DE AULA

- 61 **Construyendo el “mapamático”**
Antonio Lobo Santos, Pablo Martín Berná y Juan Núñez Valdés
- 83 **Aprendizaje de las sucesiones a través del uso de una notación de consenso**
Natalia Moreno Palma
- 99 **Introducción a la Inteligencia Artificial desde el aula de Matemáticas**
Álvaro Molina Ayuso

ACTIVIDADES EN LA SAEM THALES

- 113 **Crónica de un viaje: XVIII Congreso sobre Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas**
María Isabel Berenguer Maldonado y Pablo Montiel López
- 121 **Actividades SAEM Thales**
Esther Roquette Rodríguez

Desarrollando el pensamiento matemático en la Escuela Infantil (0-3 años): el papel de los espacios y los materiales

Ángel Alsina

Universidad de Girona (Girona, España), angel.alsina@udg.edu

Chaima Allouche

Universidad de Girona (Girona, España), chaimaallouche@gmail.com

Martina Feliu

Universidad de Girona (Girona, España), mfevi23@gmail.com

Anna Font

Universidad de Girona (Girona, España), annafonttaber@gmail.com

Resumen: *Se analizan los espacios y materiales de una Escuela Infantil y se documentan e interpretan matemáticamente las acciones que llevan a cabo 43 niños de 1 a 3 años. Los resultados muestran: 1) que los espacios y materiales consideran, en términos generales, los requisitos para promover el desarrollo del pensamiento matemático; 2) las acciones de los niños se vinculan con conocimientos referentes a las cualidades sensoriales, cantidades continuas y discretas, posiciones y formas y atributos mensurables, aunque algunos conocimientos de estos bloques no están presentes. Se concluye que es imprescindible que los equipos profesionales de la Escuela Infantil movilicen los conocimientos necesarios para promover el desarrollo del pensamiento matemático a través de los espacios y los materiales.*

Palabras clave: *Matemáticas Intuitivas e Informales, espacios globalizados, materiales manipulativos, documentación, Escuela Infantil.*

Developing Mathematical Thinking in Nursery School (0-3 years): the role of spaces and materials

Abstract: *The spaces and materials of a nursery school are analyzed and the actions of 43 children aged 1 to 3 years are documented and interpreted mathematically. The results show: 1) that the spaces and materials consider, in general terms, the requirements to promote the development of mathematical thinking; 2) the children's actions are linked to knowledge concerning sensory qualities, continuous and discrete quantities, positions and forms and measurable attributes, although some knowledge of these blocks is not present. It is concluded that it is essential that the professional teams of the Nursery School mobilize the necessary knowledge to promote the development of mathematical thinking through spaces and materials.*

Key words: *Intuitive and Informal Mathematics, globalized spaces, manipulative materials, documentation, Nursery School.*

1. INTRODUCCIÓN

Nosotros hablamos mucho del material inespecífico, a pesar de que esto no significa que descartamos el material comercial. Lo que creemos es que los juguetes tienen unos objetivos muy concretos, en cambio, los materiales inespecíficos, como corchos de botella o cordones, son más abiertos y dan muchas posibilidades al niño.

Además, se adecuan al 0-3, un periodo en el que los niños están en fases diferentes, porque son válidos para todo el mundo del aula. Por ejemplo, si les das tapas de lata, el niño más pequeño lamerá, pero el más grande podrá hacer ruido, esparcirlas, juntar muchas, distinguir las grandes de las pequeñas... Si como educadora, además, pones intención y añades trozos de moqueta de diferentes colores debajo de la tapa, podrán hacer un juego de emparejamiento. No es una propuesta cerrada, sino que a partir de lo que hace el niño, lo vas enriqueciendo.

En estas opiniones expresadas por dos educadoras de Escuelas Infantiles en el marco de una entrevista publicada en el Diari de l'Educació (2019), se evidencia la relevancia de pensar qué materiales se usan en la Escuela Infantil y con qué finalidad, junto con planificar cómo se diseñan los diferentes espacios para favorecer las primeras matemáticas. Alsina y Martínez (2016) señalan que los niños menores de 3 años ya tienen ideas previas sobre estas primeras matemáticas, que Baroody (1987) denomina informales al ser el punto de partida para el aprendizaje posterior de las matemáticas formales o escolares. Más tarde, Alsina (2015) las denomina intuitivas e informales, para recoger también la idea de Fishbein (1987) acerca del carácter de estas primeras matemáticas, que tienen que ver con el sentido común, el entendimiento, la comprensión y las creencias.

Debido al papel protagonista de los materiales y el diseño de los espacios en el desarrollo de las primeras matemáticas en la Escuela Infantil, nos planteamos la siguiente pregunta: ¿Cómo se favorecen las matemáticas intuitivas e informales a través de los espacios y los materiales en la Escuela Infantil?”. De esta pregunta derivan los dos objetivos del estudio: 1) analizar las características de los espacios y de los materiales para promover el desarrollo de las primeras matemáticas; y 2) analizar qué matemáticas intuitivas e informales emergen en la Escuela Infantil a partir de la interacción con los espacios y materiales.

2. LOS ESPACIOS Y LOS MATERIALES PARA DESARROLLAR LAS MATEMÁTICAS INTUITIVAS E INFORMALES EN LA ESCUELA INFANTIL (0-3)

Los niños de 0-3 años interactúan con el entorno y desarrollan habilidades asociadas a las primeras matemáticas desde su nacimiento (v.g., Alsina, 2015; Alsina y Xarxes d'Escoles Bressol Municipals de Girona, 2015; Alsina y Martínez, 2016; Edo, 2012; Clements y Sarama, 2015; Geist, 2014; Olmos y Alsina, 2021). En estas edades, los niños ya hacen acciones relacionadas con los cuatro bloques descritos por Alsina (2015): cualidades sensoriales, cantidades continuas y discretas, posiciones y formas, y atributos mensurables.

Las matemáticas informales, de naturaleza intuitiva (Fishbein, 1987), son los primeros conocimientos matemáticos que se aprenden en contextos cotidianos y de manera natural (Alsina, 2015; Alsina y Delgado-Rebolledo, 2022) y que sirven como fundamento para el aprendizaje de las matemáticas formales (NCTM, 2003). Por lo tanto, las Escuelas Infantiles

tienen un papel primordial en el desarrollo de las habilidades matemáticas dentro del desarrollo integral de los niños (Alsina y Xarxes d'Escola Bressol Municipals de Girona, 2015).

Siguiendo los planteamientos de la Pirámide de la Educación Matemática (Alsina, 2010) y el Enfoque de los Itinerarios de Enseñanza de las Matemáticas-EIEM (Alsina, 2022), se recomienda que el proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas en la Escuela Infantil (0-3) se planifique principalmente a partir de la exploración del entorno, la manipulación y experimentación con materiales y el juego. La manipulación es, pues, una acción primordial para aprender todo tipo de conocimientos matemáticos (Alsina y Planas, 2008), que permite un aprendizaje más significativo, autónomo y adecuado al ritmo de cada niño (Alsina y Martínez, 2016). Asimismo, si nos basamos en el principio dinámico de Dienes (1970), para llegar a la abstracción de las matemáticas formales, que es un proceso que se inicia en la Educación Infantil, es recomendable partir de la manipulación de los objetos concretos (Novo, 2021).

Los materiales deben permitir principalmente explorar para poder observar las propiedades y atributos de los objetos, identificar y discriminar sus cualidades y, posteriormente, establecer relaciones (v.g., Canals, 1989; Schiller y Peterson, 1999). Alsina y Martínez (2016) clasifican los materiales en dos grupos: a) según la finalidad, pueden ser materiales que promuevan el desarrollo integral o que promuevan un área en concreto (matemáticas, lenguaje...), y b) según el origen, pueden ser materiales de la vida cotidiana, materiales diseñados por el profesorado o materiales comercializados específicamente para el aprendizaje. Según Alsina (2015) se debería evitar el plástico, puesto que los materiales naturales y reutilizados aportan mucha más información sensorial a los niños, no tienen una finalidad predeterminada y les permiten hacer conexiones con la vida real.

Además, es importante incluir materiales que favorezcan el juego simbólico, puesto que los niños de 0 a 3 años dan infinitas finalidades ficticias a los objetos (Alsina, 2015). Por último, no debemos olvidar que estos materiales deben ser adecuados para la edad de los niños y si, además, los mismos niños ayudan a confeccionar el material, puede ser que hagan más acciones (Alsina y Martínez, 2016).

En relación con los espacios, Alsina y Xarxes d'Escola Bressol Municipals de Girona (2015) sugieren que deben abiertos, acogedores, organizados, cuidados, motivadores e integradores para favorecer la convivencia, el respeto y la participación de las familias. Además, tienen que promover la autonomía, el planteamiento de hipótesis, la resolución de problemas y la comunicación. Cada espacio y sus materiales favorecen más unas determinadas acciones matemáticas (Alsina y Martínez, 2016). Desde este prisma, Olmos y Alsina (2021) describen diversos tipos de espacios para promover el desarrollo de las primeras matemáticas:

- Espacios con diferentes materiales de exploración, materiales naturales, ordenados y al nivel de los niños para que permitan descubrir y explorar las cualidades sensoriales, las magnitudes, las cantidades discretas o las posiciones y formas.
- Espacios de juego heurístico que propician la exploración de los niños que tienen el reto de descubrir qué pueden hacer con los diferentes materiales a partir de sacar, tapan, encajar, poner, agrupar...
- Espacios con tablas de experimentación que tienen la finalidad que los niños hagan hipótesis y comprobaciones a partir del material continuo como la arena, los contenedores y los utensilios que están dentro de la misma bandeja.
- Espacios de juego simbólico que se trata de un ambiente y materiales que reproducen situaciones de la vida cotidiana como la cocina, la tienda, el taller mecánico... son

necesarios muchos materiales para crear un escenario rico porque a través de la expresión, la comunicación y el juego libre imitan situaciones de la vida cotidiana.

- Espacios de movimiento, diseñados específicamente como retos para vivir con todo el cuerpo. En estos espacios debemos incluir elementos que favorezcan el aprendizaje de las formas, las posiciones, las distancias, las cantidades, las cualidades sensoriales y las magnitudes como el peso y el volumen, como por ejemplo rampas, toboganes, cajones de diferentes medidas, túneles, hamacas, columpios, colchones para rodar, gatear..., pelotas pequeñas y gigantes, telas, puentes...
- Espacios de taller donde los niños pueden experimentar con muchos materiales diferentes, creando y formulando hipótesis por las diferentes posibilidades de creación y despertando los sentidos. Son espacios con diferentes materiales de apoyo para la creación, como las mesas, caballetes de pintura, papeles gigantes en horizontal o vertical para dibujar en gran formato. Además, se incluyen utensilios muy diversos como pinturas de diferentes composiciones y colores para pintar con los dedos o con pinceles, barro, papeles de diferentes medidas, colores y texturas, cartones, cartulinas, ceras duras y blandas, tizas, rotuladores y pinceles de diferentes grosores, elementos para moldear, recortar...
- Espacios de construcción, formados con una gran cantidad de piezas de madera lisas y de formas geométricas regulares, clasificadas según un criterio como la forma o presentada con una composición hecha por el adulto o con un juego iniciado. Normalmente, todas las piezas del material (excepto la más pequeña) pueden componerse utilizando otras piezas más pequeñas. También se pueden incluir piezas grandes para fomentar las construcciones colaborativas o bien, piezas pequeñas que fomenten el juego individual.
- Espacios con instalaciones artísticas inspirados del *Land Art*, que se basa en la creación de obras a la naturaleza utilizando materiales naturales como palos, piedras, piñas...

Olmos y Alsina (2021) concluyen que, sin una formación (inicial y/o continua) adecuada, es complejo que las profesionales de la Escuela Infantil saquen el máximo partido de las potenciales de estos espacios y los materiales que hay en ellos para desarrollar las matemáticas intuitivas e informales. Por esta razón, es imprescindible una agenda de investigación en torno a esta temática específica.

3. MÉTODO

De acuerdo con los objetivos del estudio, se ha llevado a cabo un estudio exploratorio-descriptivo (McMillan y Schumacher, 2005) en una Escuela Infantil municipal de Girona.

3.1. Contexto y participantes

La Escuela Infantil en la que se ha realizado el estudio forma parte de la red de Escuelas Infantiles Municipales de Girona (España). Se inauguró el curso 2012-2013 y está ubicada en un barrio de nivel socioeconómico medio-alto de la ciudad. El centro está distribuido en cinco clases de edades heterogéneas de 1 a 3 años, puesto que no ofrecen el servicio a lactantes. En cada aula hay seis niños y niñas de primer curso y nueve de segundo curso. La Escuela Infantil cuenta con un total de diez educadoras; una tutora por aula y el resto de las educadoras hacen de apoyo. La metodología de la escuela promueve el desarrollo integral a través de exploración del

entorno, la manipulación, la experimentación y el juego, dando mucha importancia a los vínculos afectivos y la autonomía.

La documentación se ha llevado a cabo durante una sesión de 90 minutos aproximadamente durante una mañana del mes de noviembre de 2022, con 43 niños y niñas de 1 a 3 años de las cuatro clases de la Escuela Infantil. Cabe señalar que un grupo reducido de alumnado (en concreto, dos niños y una niña) presentan necesidades especiales apreciables asociadas a trastornos cognitivos y de atención, pero están pendientes de diagnóstico definitivo.

3.2. Diseño y procedimiento

En cuanto al diseño y procedimiento del estudio, se han considerado tres fases: 1) planificación y selección de la documentación; 2) selección de la técnica de obtención de datos; y, por último, 3) selección de los instrumentos para la interpretación matemática de la documentación.

3.2.1. Planificación y selección de la documentación

Se planifica y se selecciona lo que se quiere documentar: se trata de una propuesta de juego libre en la que los niños se pueden mover por los diferentes espacios. De este modo, se parte de la hipótesis que se van a poder documentar muchas más acciones.

Un rasgo característico del juego libre de esta escuela es que es de libre circulación, es decir, permiten que los niños y las niñas puedan ir a todas las aulas para descubrir y experimentar los espacios de cada aula. La libre circulación tiene éxito porque cada aula consta de algún espacio diferente (por ejemplo, alguna tiene construcción y el otro juego heurístico), además de materiales diversos. A continuación, se describen las cuatro aulas de la Escuela Infantil y los diferentes espacios y materiales que se ofrecen.

Aula Amarilla

Hay seis espacios diferentes (Figura 1): espacio de construcción con bloques de corcho y animales; espacio de psicomotricidad con material de Pikler estructurado con una rampa y escalones y también material no estructurado que son siete cajas de cartón; espacio de conversación con dos bancos, dos taburetes de Pikler y dos taburetes; espacio artístico con un mural en blanco dónde pueden pintar con rotuladores; espacio de experimentación con una mesa con recipientes de diferentes medidas y objetos cilíndricos para poner dentro y una rampa con diferentes coches; y finalmente, un espacio de juego simbólico con ropas para disfrazarse, una muñeca, bolsas de mano, tazas y teteras y una mesa.

Aula roja

Consta de siete espacios diferentes (Figura 2): espacio del juego simbólico formado por una cocina pequeña y una mesa con diferentes materiales culinarios y cotidianos; espacio de psicomotricidad formado por tres estructuras de madera de diferentes medidas que unidas forman una escala; espacio de conversación formado por dos bancos y una silla para hacer el buen día y actividades dirigidas con los alumnos; otro espacio de experimentación que está formado por una mesa dónde en una parte hay una casa de madera y en el otro objetos de temporada, en este caso sobre el otoño con calabazas y mandarinas, para experimentar; espacio

de relajación que consta de dos almohadas cuadradas y dos cilíndricas y un colchón; espacio polivalente con un mueble donde hay diferentes materiales de juego simbólico: vías de tren, coches, muñecas, biberones...; y por último el espacio de construcción que está formado por piezas de diferentes formas y medidas que se encajan y círculos.

Figura 1

Aula amarilla. Fuente: elaboración propia.



Figura 2

Aula roja. Fuente: elaboración propia.



Aula azul

Hay seis espacios (Figura 3): espacio de psicomotricidad con una estructura de Pikler, por lo tanto, material estructurado, formado por una rampa y escalones de madera y dos cajas de cartón reutilizadas; espacio de experimentación con una mesa donde hay materiales para poner y sacar objetos de diferentes medidas que son estructurados y un panel a la pared donde hay enganchados diferentes objetos cotidianos que se abren y se cierran o se aprietan; espacio de conversación con dos bancos, libros en un estante elevado que los niños no llegan y dos hamacas; espacio de relajación con tres almohadas, una alfombra y álbumes ilustrados; espacio de juego simbólico con tres muñecas, dos biberones, bolsas, sombreros y telas; y finalmente, un

espacio de construcción en una madera un poco elevada del suelo con vías del tren de madera, bloques de corcho, coches y calabazas de dos medidas diferentes.

Figura 3

Aula azul. Fuente: elaboración propia.



Aula verde

Contiene cinco espacios (Figura 4): espacio de juego simbólico formado por una cocina pequeña con diferentes materiales culinarios y cotidianos y en una mesa también encontramos un mueble con sombreros y bolsas y en el banco muñecas; espacio de juego heurístico, que consta de una mesa con diferentes envases y objetos de temporada como calabazas; espacio de psicomotricidad que está formado por una estructura de madera elevada que acaba con dos rampas situadas delante de un espejo; espacio de conversación formado por dos bancos y una hamaca; y finalmente el espacio de coches que consta de una estructura de madera con diferentes rampas y pequeños coches de varios colores.

Figura 4

Aula verde. Fuente: elaboración propia.



3.2.2. Selección de la técnica para la obtención de datos

Para obtener los datos, se ha utilizado la técnica de documentación. Dahlberg et al. (2005) señalan que la documentación implica observar y evaluar tanto el contenido como el proceso; el contenido es el registro de las acciones de los niños y el proceso es la interpretación reflexiva entre los diferentes profesionales. Para Hoyuelos (2007), la documentación es un proceso de evaluación que permite analizar rigurosamente el desarrollo del aprendizaje de los niños, y también permite comprender la mirada educativa del observador. Más tarde, Alsina (2015) indica que para que la educación sea de alta calidad, se requieren profesionales competentes que observen las acciones de los niños y documenten la observación teniendo presentes diferentes interpretaciones para llegar a una confrontación de las interpretaciones a través el diálogo y así, poder analizar profundamente el proceso de aprendizaje de los alumnos.

Adicionalmente, Hoyuelos (2007) expone que para documentar procesos educativos es necesario planificar por qué se quiere documentar y qué, cuándo y cómo se quiere documentar. En esta investigación, inicialmente se decidió documentar previamente los cuatro bloques de contenido definidos por Alsina (2015), a través de imágenes y registro de las verbalizaciones durante el juego libre en los diferentes espacios de las aulas para poder responder a la pregunta de investigación. Sin embargo, finalmente se ha fundamentado en fotografías, puesto que los niños no dialogaron entre ellos y no fue posible hacer transcripciones. Las fotografías realizadas para elaborar la documentación han sido mayoritariamente con un encuadre de medio plano y primer plano para capturar el lenguaje gestual de los niños y la acción que realizan (Hoyuelos, 2007).

3.2.3. Selección de los instrumentos para la interpretación matemática de los datos

En primer lugar, para analizar los espacios y materiales de las diferentes aulas de la Escuela Infantil, se ha utilizado un instrumento previamente elaborado (Tabla 1)

Tabla 1

Principales finalidades y materiales de los espacios temáticos (Alsina y Xarxes d' Escola Municipal de Girona, 2015, pp. 43-50).

	Finalidades	Materiales
Conocimiento del cuerpo	Identificarse como persona, conociendo las características personales propias. Reconocer y manifestar las emociones. Lograr un grado de seguridad afectiva y emocional correspondiente al momento madurativo. Provocar el progreso y dominio de la coordinación y el control dinámico del cuerpo.	Telas grandes y pequeñas, pequeños elementos motrices, diferentes prendas de vestir, máscaras, sombreros, disfraces, zapatos, material continuo, piscina con propuesta de material continuo, pinturas, espejos grandes, espejos de colores, espejos que proporcionan deformaciones del cuerpo, bolsas con carteras, gafas, llaves, etc.

Manipulación y experimentación	<p>Potenciar las habilidades sensoriales. Descubrir las múltiples funciones de los diferentes materiales propuestos. Provocar la interacción de materiales, niños y adultos. Facilitar la cooperación entre iguales. Estimular la creatividad, la investigación, etc.</p>	<p>Materiales naturales, piñas, corchos, piedras, cartones, etc. Materiales continuos y discretos: arena, confeti de colores, pedazos de cortinas, tapones de plástico de botellas de agua, chapas, botones grandes, pedazos de cáscaras secas de naranja o mandarina seca y triturada, piedras planas y grandes de riera, piñas pequeñas, conchas, hierba, etc. Recipientes de diferentes materiales que sirvan de contenedores. Materiales de uso cotidiano: palas, cucharas, escobas, coladores, embudos, etc.</p>
Lenguajes	<p>Iniciar el conocimiento y el uso del lenguaje verbal, corporal, musical y plástico. Proyectar la creatividad en los diferentes materiales dispuestos. Potenciar la fantasía y la imaginación. Aprender a escuchar, mirar, respetar y disfrutar de los relatos cortos. Compartir músicas, instrumentos musicales, danzas, etc. propios y de los otros. Iniciar la visión y experimentación de diferentes obras de arte.</p>	<p>Pizarra de tiza, tizas, pizarra magnética, imanes, papel de gran formato, pinturas, ceras, tejidos, varios modelos de teléfonos, agendas, cuentos, revistas, titiritero, títeres, reproducciones de varias obras de arte, equipo reproductor de USB, instrumentos musicales, maquillajes, juego de sombras chinas, luces, etc.</p>
Juego simbólico	<p>Disponer de ambientes, facilitando situaciones de juego simbólico el máximo de reales posible. Ejercitar la comunicación mediante el lenguaje del adulto y de los otros niños. Comunicarse y expresarse, partiendo del movimiento, el gesto, el juego y la palabra. Adquirir progresivamente comportamientos sociales, valores, que faciliten la integración en el grupo y la aceptación de uno mismo. Establecer relaciones entre objetos e iguales según las características perceptivas.</p>	<p>Cocina, nevera, mesa, sillas, materiales de cocina variados (cubiertos, vasos, jarras, espumadera, etc.), mantel, escobas, fregona y cubo, animales, maderas, carro de la compra, muñecos, ropa de muñeco, cesta, cama, coches, garaje, etc.</p>

Presentar materiales que faciliten la identificación y discriminación de las diferentes cualidades sensoriales, sus atributos y otros aspectos matemáticos como la cantidad, la posición, la forma, los atributos mensurables, etc.

Potenciar el inicio del lenguaje matemático verbalizando las observaciones, las acciones y los descubrimientos que se hacen para favorecer la comprensión e interiorización de conocimientos.

Provocar retos (por ejemplo, con las diferentes disposiciones de los materiales) que conduzcan a los niños a tener que plantear hipótesis, razonar, argumentar, etc.

Ofrecer un ambiente idóneo para ayudar a relacionar conocimientos diversos entre las matemáticas y otras materias.

Objetos de la naturaleza: conchas marinas, palos, piedras, piñas, castañas, cáscaras de frutas, corchos, hojas, arena, maderas, etc. Material continuo y discreto: arena, confeti de colores, pedazos de cortinas, tapones de plástico de botellas de agua, chapas, botones grandes, pedazos de cáscaras secas de naranja o mandarina seca y triturada, piedras planas y grandes de riera, piñas pequeñas, conchas, hierba, etc. Objetos comprados: anillas de metal y madera, moldes para galletas, pinzas de pan, agujas de ropa, rulos, botones, cepillos, pelotas de tenis, cestas grandes y pequeñas, boles de diferentes diámetros, coladores, cadenas, telas, etc. Objetos de la vida cotidiana: bolsas, ropa, televisores, portátiles viejos, aparatos de TV que no se usan, menaje de cocina (cucharas, recipientes, contenedores de papel...), papeles de diferentes texturas, lanas, etc. Material de reciclaje: botellas de plástico de diferentes medidas, tapones, recipientes de yogures, cajas de cartón, cilindros, cintas, conos, llaves, etc.

En la Tabla 2 se muestra la vinculación entre estos espacios temáticos y los espacios de las cuatro aulas de la Escuela Infantil.

En segundo lugar, para llevar a cabo la interpretación matemática de las acciones documentadas, se consideran los indicadores de la Tabla 3. Para realizar esta interpretación, primero se llevó a cabo una formación sobre las acciones matemáticas intuitivas e informales que realizan los niños de 0 a 3 años, seguidamente se hizo una primera interpretación individual de las imágenes documentadas a partir de los indicadores de la Tabla 2 y, finalmente, se confrontaron las interpretaciones individuales para hacer una interpretación conjunta de la documentación.

Tabla 2

Vinculación entre los espacios temáticos y los espacios de las cuatro aulas de la Escuela Infantil.

	Conocimiento del Cuerpo	Manipulación y Experimentación	Lenguajes	Juego simbólico	Lógico-Matemático
Aula Amarilla	Espacio de Psicomotricidad	Espacio de construcción Espacio de Experimentación	Espacio de conversación	Espacio de juego simbólico	
Aula Roja	Espacio de Psicomotricidad Espacio de Relajación	Espacio de Experimentación Espacio de construcción	Espacio de conversación	Espacio de juego simbólico	Integrado en los otros espacios
Aula Azul	Espacio de Psicomotricidad	Espacio de Experimentación Espacio de construcción	Espacio de conversación	Espacio de juego simbólico	
Aula Verde	Espacio de Psicomotricidad	Espacio de juego heurístico Espacio de coches	Espacio de conversación	Espacio de juego simbólico	

Tabla 3

Principales conocimientos matemáticos en la Escuela Infantil (Alsina, 2015, p. 34).

Cualidades sensoriales	Reconocimiento de las características sensoriales de los objetos. Agrupaciones por criterios cualitativos.	Clasificaciones por criterios cualitativos. Ordenaciones por criterios cualitativos. Correspondencias cualitativas. Seriaciones.	Cambios cualitativos en los objetos y el entorno inmediato.
Cantidades	Comprensión de los principales cuantificadores (muchos, pocos y algunos) y de algunas cantidades elementales (uno, dos, ...) Inicio del conteo de los elementos de una colección. Distinción entre los números escritos y otros tipos de representaciones externas (letras, dibujos, etc.).	Correspondencias cuantitativas. Seriaciones.	Juntar, añadir, unir o reunir, agrupar, sumar, etc. Quitar, separar, restar.

Posiciones y formas	Reconocimiento de la posición relativa, la dirección y la distancia en el espacio. Reconocimiento de algunas propiedades geométricas elementales de las formas.	Relaciones espaciales elementales. Relaciones simples a partir de las propiedades geométricas de las formas: clasificaciones, correspondencias y seriaciones.	Observación de cambios de posición (a través de giros, etc.) Observación de cambios de forma (deformaciones, composición y descomposición de formas, etc.)
Atributos mensurables	Reconocimiento de algunos atributos mensurables de los objetos (tamaño, masa, capacidad, temperatura, etc.). Identificación del tiempo (día, noche, mañana, tarde, etc.).	Relaciones simples a partir de los atributos mensurables de los objetos: clasificaciones, ordenaciones, correspondencias y seriaciones. Secuencias temporales	Observación de algunos cambios a partir de composiciones y descomposiciones.

4. RESULTADOS

4.1. Análisis de los espacios y los materiales

De acuerdo con los objetivos del estudio, en primer lugar, se analizan los materiales de los distintos espacios a partir de los indicadores de la Tabla 1, teniendo en cuenta que las acciones relacionadas con las matemáticas informales se producen en todos los espacios, hecho que ayuda a relacionar los conocimientos matemáticos con otras áreas del conocimiento.

4.1.1. Espacios de conocimiento del cuerpo

La Tabla 4 muestra los materiales presentes y ausentes para desarrollar las finalidades del espacio de conocimiento del cuerpo y lógico-matemáticas:

Tabla 4

Materiales de los espacios de conocimiento del cuerpo.

MATERIALES PRESENTES	MATERIALES AUSENTES
<p>Conocimiento del cuerpo: Pequeños elementos motrices, diferentes piezas de vestir, sombreros diversos, espejos grandes, bolsas con carteras, telas grandes y pequeñas.</p> <p>Lógico-matemático: Objetos de la vida cotidiana: bolsas, ropa,</p>	<p>Conocimiento del cuerpo: Máscaras, disfraces, zapatos, material continuo, piscina con propuesta de material continuo, pinturas, espejos de colores, espejos que proporcionan deformaciones del cuerpo, llaves, gafas, etc.</p> <p>Lógico-matemático:</p>

menaje de cocina (cucharas, recipientes, contenedores de papel...), etc.

Material de reciclaje: botellas de plástico de diferentes medidas, tapones, recipientes, cajas de cartón, cilindros, cintas, etc.

Objetos de la naturaleza: conchas marinas, palos, piedras, piñas, castañas, cáscaras de frutas, corchos, hojas, arena, maderas, etc.

Material continuo y discreto: arena, confeti de colores, pedazos de cortinas, tapones de plástico de botellas de agua, chapas, botones grandes, pedazos de cáscaras secas de naranja o mandarina seca y triturada, piedras planas y grandes de riera, piñas pequeñas, conchas, hierba, etc.

Objetos comprados: anillas de metal y madera, moldes para galletas, pinzas de pan, agujas de ropa, rulos, botones, cepillos, pelotas de tenis, cestas grandes y pequeñas, boles de diferentes diámetros, coladores, cadenas, telas, etc.

Objetos de la vida cotidiana: televisores, portátiles viejos, aparatos de TV que no se usan, papeles de diferentes texturas, lanas, etc.

Material de reciclaje: recipientes de yogur, llaves, etc.

Por un lado, los materiales presentes en estos espacios (de psicomotricidad y de relajación), aparte de desarrollar las finalidades del espacio de conocimiento del cuerpo descritas en la Tabla 1, también permiten acciones asociadas a los diferentes bloques de contenido matemático: las cualidades sensoriales, las cantidades continuas y discretas, las posiciones y formas y los atributos mensurables. Asimismo, estos materiales también estimulan el uso del lenguaje matemático cuando observan o a partir de sus acciones. Finalmente, ofrecen un marco idóneo para relacionar conocimientos entre las matemáticas y otras áreas.

4.1.2. Espacios de manipulación y experimentación

La Tabla 5 muestra los materiales presentes y ausentes para desarrollar las finalidades del espacio de manipulación y experimentación y lógico-matemáticas.

Tabla 5

Materiales de los espacios de manipulación y experimentación.

MATERIALES PRESENTES	MATERIALES AUSENTES
<p>Manipulación y experimentación: Materiales naturales: calabazas, corchos, piedras, cartones, etc. Materiales discretos: tapones de plástico de botellas de agua, chapas, botones grandes... Recipientes de diferentes materiales que sirvan de contenedores.</p> <p>Lógico-Matemático: Objetos de la naturaleza: calabazas, corchos y madera. Material continuo y discreto: tapones de</p>	<p>Manipulación y experimentación: Materiales continuos y discretos: arena, confeti de colores, pedazos de cortinas, pedazos de cáscaras secas de naranja o mandarina seca y triturada, piedras planas y grandes de río, piñas pequeñas, conchas, hierba, etc. Materiales de uso cotidiano: palas, cucharas, escobas, coladores, embudos, etc.</p> <p>Lógico-Matemático: Objetos de la naturaleza: conchas marinas, palos, piedras, piñas, castañas, cáscaras de frutas, hojas,</p>

plástico de botellas de agua, chapas, etc. Objetos comprados: anillas de metal y madera, cestas grandes y pequeñas, boles de diferentes diámetros, cadenas, telas, etc. Objetos de la vida cotidiana: timbre, pestillos, pomos de puertas... Material de reciclaje: taponos y recipientes.	arena, etc. Material continuo y discreto: arena, confeti de colores, pedazos de cortinas, botones grandes, pedazos de cáscaras secas de naranja o mandarina seca y triturada, piedras planas y grandes de río, piñas pequeñas, conchas, hierba, etc. Objetos comprados: moldes para galletas, pinzas de pan, agujas de ropa, rulos, botones, cepillos, pelotas de tenis, etc. Objetos de la vida cotidiana: bolsas, ropa, televisores, portátiles viejos, aparatos de TV que no se usan, menaje de cocina (cucharas, recipientes, contenedores de papel...), papeles de diferentes texturas, lanas, etc. Material de reciclaje: botellas de plástico de diferentes medidas, taponos, cajas de cartón, cilindros, cintas, conos, llaves, etc.
---	--

Aparte de desarrollar las finalidades del espacio de manipulación y experimentación descritas en la Tabla 1, los espacios de manipulación y experimentación (espacios de construcción, experimentación, juego heurístico y de coches de las distintas aulas) también permiten desarrollar todas las finalidades lógico-matemática. En primer lugar, los materiales presentes facilitan la identificación de los diferentes bloques de contenido matemático descritos por Alsina (2015). También estimulan el inicio del lenguaje matemático a partir de la observación, sus acciones e interacción con los otros compañeros y los adultos. Asimismo, provocan retos que invitan a plantear hipótesis, razonar y argumentar. Finalmente, ofrecen también un marco idóneo para relacionar conocimientos entre las matemáticas y otras áreas.

4.1.3. Espacio de lenguaje

La Tabla 6 muestra los materiales que hay presente y ausente en los espacios de lenguaje de la Escuela Infantil, denominados de conversación.

Tabla 6

Materiales del espacio de lenguaje.

MATERIALES PRESENTES	MATERIALES AUSENTES
<p>Lenguaje: Materiales discretos: ceras e imanes. Materiales de uso cotidiano: papel de gran formato, pinturas, cuentos, equipo reproductor de USB.</p> <p>Lógico-Matemáticos: Objetos de la vida cotidiana: papeles Material de reciclaje: cajas de cartón</p>	<p>Lenguaje: Materiales de uso cotidiano: pizarra de tiza, tizas, pizarra magnética, tejidos, agendas, revistas, titiritero, títeres, reproducciones de varias obras de arte, instrumentos musicales, maquillajes, juego de sombras chinas, luces, etc.</p> <p>Lógico-Matemáticos: Objetos de la naturaleza: conchas marinas, palos, piedras, piñas, castañas, cáscaras de frutas,</p>

corchos, hojas, arena, maderas, etc.

Material continuo y discreto: arena, confeti de colores, pedazos de cortinas, tapones de plástico de botellas de agua, chapas, botones grandes, pedazos de cáscaras secas de naranja o mandarina seca y triturada, piedras planas y grandes de riera, piñas pequeñas, conchas, hierba, etc.

Objetos comprados: anillas de metal y madera, moldes para galletas, pinzas de pan, agujas de ropa, rulos, botones, cepillos, pelotas de tenis, cestas grandes y pequeñas, boles de diferentes diámetros, coladores, cadenas, telas, etc.

Objetos de la vida cotidiana: bolsas, ropa, televisores, portátiles viejos, aparatos de TV que no se usan, menaje de cocina (cucharas, recipientes, contenedores de papel...), papeles de diferentes texturas, lanas, etc.

Material de reciclaje: botellas de plástico de diferentes medidas, tapones, recipientes de yogures, cilindros, cintas, conos, llaves, etc.

Estos espacios, aparte de desarrollar las finalidades del espacio de lenguaje descritas en la Tabla 1, también permiten desarrollar algunas de las finalidades lógico-matemáticas. En este sentido, los espacios de conversación favorecen el correcto desarrollo del lenguaje matemático, por ejemplo, al explicar las experiencias y los cuentos infantiles. Asimismo, estimulan el planteamiento de hipótesis, razonamiento... aspectos relacionados con las matemáticas. Adicionalmente, cabe destacar que los espacios de lenguaje artísticos facilitan la introducción del lenguaje matemático y plantean retos para aplicar el razonamiento lógico-matemático. Para terminar, ofrece un espacio idóneo para relacionar conocimientos entre las matemáticas y otras áreas.

4.1.4. Espacios de juego simbólico y lógico-matemático

La Tabla 7 muestra los materiales presentes y ausentes para desarrollar las finalidades del espacio de juego simbólico y lógico-matemático.

Tabla 7

Materiales de los espacios de juego simbólico y lógico-matemático.

MATERIALES PRESENTES	MATERIALES AUSENTES
<p>Juego simbólico: Cocina, mesas, sillas, materiales de cocina variados (cubiertos, vasos, jarras, espumadera, etc.), manteles, maderas, muñecos, ropa de muñeco, cesta, cama, coches, etc.</p> <p>Lógico-Matemático: Material continuo y discreto: pedazos de</p>	<p>Juego simbólico: Nevera, carro de la compra, fregona y cubo, escobas, garaje, animales, etc.</p> <p>Lógico-Matemático: Objetos de la naturaleza: conchas marinas, palos, piedras, piñas, castañas, cáscaras de frutas, corchos, hojas, arena, maderas, etc.</p>

cortinas, tapones de plástico de botellas de agua, etc. Objetos comprados: moldes para galletas, agujas de ropa, botones, cestas grandes y pequeñas, boles de diferentes diámetros, telas, etc. Objetos de la vida cotidiana: bolsas, ropa, menaje de cocina (cucharas, recipientes, contenedores de papel...), etc. Material de reciclaje: botellas de plástico, tapones, cajas de cartón, cilindros, etc.	Material continuo y discreto: arena, confeti de colores, chapas, botones grandes, pedazos de cáscaras secas de naranja o mandarina seca y triturada, piedras planas y grandes de riera, piñas pequeñas, conchas, hierba, etc. Objetos comprados: anillas de metal y madera, rulos, pinzas de pan, cepillos, pelotas de tenis, coladores, cadenas, etc. Objetos de la vida cotidiana: televisores, portátiles viejos, aparatos de TV que no se usan, papeles de diferentes texturas, lanas, etc. Material de reciclaje: botellas de plástico de diferentes medidas, recipientes de yogures, cintas, conos, llaves, etc.
--	---

Los materiales presentes en los espacios de juego simbólico, aparte de desarrollar las finalidades de juego simbólico descritas en la Tabla 1, también permiten desarrollar todas las finalidades lógico-matemáticas. Por lo tanto, dispone de ambientes facilitando situaciones de juego simbólico el máximo de reales posibles, para así ir adquiriendo progresivamente comportamientos sociales, valores que les faciliten la integración en el grupo y la aceptación de uno mismo. También, se permite una conexión con las matemáticas y otras materias que provoquen retos que lleven a hipótesis, a razonar, a argumentar, etc. Asimismo, permite que los niños y niñas trabajen a través de los cuatro bloques de contenido matemático y a través de la interacción se les permite mejorar el lenguaje matemático verbalizando las acciones y las observaciones.

Junto con el análisis expuesto, es preciso señalar dos cuestiones a partir de los comentarios de las maestras y las educadoras. Primero, en relación con el interés por las distintas aulas descritas, los niños y las niñas están acostumbrados a circular libremente por ellas, siendo conscientes que tienen la posibilidad de acceder a todos los materiales disponibles en algún momento. Este es un elemento fundamental que les permite autorregularse entre ellos, de modo que no hay ningún espacio con aglomeraciones y otro sin prácticamente nadie; todo el alumnado pasa por todas las aulas en algún momento, mostrando un muy similar interés en todas ellas. Segundo, respecto al uso de los materiales, las maestras y educadoras los van renovando periódicamente a partir de diversos criterios: si se han estropeado; si ven que no despierta mucha atención; si observan que es necesario que los niños y niñas hagan alguna acción concreta que con los materiales disponibles no se promueve, etc.









4.2. Documentación e interpretación de las matemáticas intuitivas e informales

4.2.1. Cualidades sensoriales

En la Tabla 8, se muestran los datos correspondientes al bloque de cualidades sensoriales. En general, se observa muchas acciones de identificar y relacionar cualidades, como por ejemplo el reconocimiento de atributos, las agrupaciones y clasificaciones, etc., pero no se ha documentado ninguna acción vinculada a los cambios de cualidades sensoriales.

Tabla 8

Cualidades sensoriales.

Reconocimiento de las características sensoriales de los objetos		
	Reconocimiento de la textura, la forma, la medida... del tapón	Reconocimiento de la textura y el sonido metálico del bol
Agrupación por criterios cualitativos (material y textura)		
	Agrupación por el material de las cajas de cartón	Agrupación de limones
Clasificación		
	Clasificación de las cadenas por el color	Clasificación de los recipientes por el material (madera y cartón)
Correspondencia por color, textura y material.		
	Correspondencia por el material y color; un plato verde de plástico con un vaso verde de plástico	Correspondencia por el material, textura y color; dos coches iguales

**Seriaciones
(inicio de
seriación)**



Inicio de seriación; una caja marrón, una caja negra y una caja marrón



Inicio de seriación; dos coches amarillos y dos coches azules

4.2.2. Cantidades continuas y discretas

En la Tabla 9, se observa que en términos generales los niños realizan muchas acciones de reconocimiento de los principales cuantificadores y cantidades discretas elementales, correspondencias cuantitativas, seriaciones y operaciones de añadir y separar.

Tabla 9

Cantidades continuas y discretas.

**Comprensión de
los principales
cuantificadores
(muchos, pocos y
algunos)**



Comprender que tiene muchos y necesita las dos manos para cogerlos



Comprender que en un cilindro tiene muchos y, en cambio, el otro cilindro tiene pocos

**Comprensión de
cantidades
discretas
elementales**



Comprensión de cantidades: uno, dos

**Correspondencia
cuantitativa**



Un vaso corresponde a un plato



Un muñeco de madera por cada agujero de la huevera

**Seriaciones (inicio
de seriación)**



Dos coches amarillos y seguidamente dos coches azules



Inicio de seriación: una caja marrón, una caja negra, una caja marrón...

**Juntar, añadir,
unir o reunir,
agrupar, sumar,
etc.
Sacar, separar y
restar**



Unión de las diferentes piezas de una vía, conectando una punta con la otra punta











Saca los tapones circulares del cilindro

4.2.3. Posiciones y formas

En la Tabla 10, se observa que la mayoría de las acciones documentadas son de identificar la posición relativa, el sentido de la dirección, el reconocimiento de la distancia en el espacio y de las propiedades geométricas elementales de las formas. También se observan acciones de relacionar a partir de correspondencias según la forma y observación de algunos cambios de posición. Ahora bien, del resto de contenidos del bloque de posiciones y formas no se observa.

Tabla 10
Posiciones y formas.

Reconocimiento de la posición relativa		
	Dentro del bol	Encima del taburete
Reconocimiento del sentido de la dirección		
	Reconocimiento de la dirección del coche sobre la vía: hacia adelante	Reconocimiento de la dirección: hacia adelante
Reconocimiento de la distancia en el espacio		
	Reconocimiento de la distancia respecto a la pared	Reconocimiento de la distancia respecto el suelo y el espejo
Reconocimiento de algunas propiedades geométricas elementales de las formas		
	Reconocimiento de la línea recta y curva	Reconocimiento de la propiedad geométrica de una circunferencia

Agrupación por forma



Agrupación por la forma rectangular de las cajas de cartón



Agrupación por la forma circular de los recipientes

Observación de algunos cambios de posición



Cambio de posición de los limones; fuera de la olla y dentro del bol



Un bote encima del otro

4.2.4. Atributos mensurables

En la Tabla 11, se observan muchas acciones de operaciones de atributos mensurables y en menor medida acciones de identificar y relacionar.

Tabla 11

Atributos mensurables.

Reconocimiento de algunos atributos mensurables de los objetos



Reconocimiento de la masa ligera de los objetos, puesto que puede coger más de un coche con sus manos



Reconocimiento de la masa ligera de los objetos, puesto que puede coger con su fuerza el plato y el vaso

Ordenaciones



Ordena los botes de más grande a más pequeño, poniendo uno dentro del otro.

Correspondencias (por medida)



Correspondencia de la medida de la vía con la medida del vagón.



Correspondencia del tapón con su recipiente

Observación de algunos cambios de composiciones y descomposiciones



Se añade cada vez una caja más y la fila es más larga.



Observación de cambio de capacidad: lleno-vacío

5. CONSIDERACIONES FINALES

En este estudio se han analizado los espacios y los materiales de una Escuela Infantil Municipal de Girona, en la que se han documentado e interpretado también las matemáticas intuitivas e informales según los cuatro bloques de contenido descritas por Alsina (2015).

En relación con los espacios y materiales, los resultados han evidenciado que los espacios de conocimiento del cuerpo, manipulación y experimentación y juego simbólico favorecen el aprendizaje de las matemáticas intuitivas e informales debido a sus características globalizadoras, abiertas, acogedoras y organizadas. Además, los espacios promueven la autonomía, la creación de hipótesis, la resolución de problemas y la comunicación. Asimismo, los materiales son estructurados, reciclados, globalizados sin una finalidad determinada, adaptados a la edad (1 a 3 años) y de varios tipos de materiales mayoritariamente de madera, ropa y plástico que aportan diferentes texturas. Estas características se reflejan en las ideas de los autores del marco teórico.

Aun así, siguiendo los planteamientos de Alsina y Xarxa d'Escoles Bressol Municipals de Girona (2015), se deberían incluir también materiales continuos, materiales naturales como

palos, piñas, piedras, etc.; enriquecer con más materiales los espacios de juego simbólico y poner otros elementos que representen comercios de la ciudad; también sería necesario enriquecer el aula con un espacio para fomentar la creatividad a partir de instalaciones artísticas y espacios de creación con diferentes materiales. Además, para dar valor al arte y tener de referentes otras creaciones, sería interesante que enmarcasen las creaciones artísticas de los alumnos. Por último, siguiendo las indicaciones de estos mismos autores, es necesario incluir más piezas en el espacio de construcción.

En relación a las acciones asociadas a las matemáticas intuitivas e informales, la literatura afirma que los niños de 0 a 3 años ya hacen acciones matemáticas intuitivas e informales de los cuatro bloques de contenido de las tres capacidades (Clements y Sarama, 2015; Alsina, 2006, 2015; Geist, 2014; entre otros). Los resultados de nuestro estudio muestran acciones de todos los bloques y capacidades, excepto la capacidad de operación de cualidades sensoriales, debido probablemente al hecho que las características de los materiales de las aulas no han favorecido estas acciones.

En el futuro, siguiendo los planteamientos de Olmos y Alsina (2021) serán necesarios diseñar planes de formación específicos que permiten sacar el máximo partido a los espacios y materiales para promover el desarrollo de las matemáticas intuitivas e informales en la Escuela Infantil.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Alsina, Á. (2010). La “pirámide de la educación matemática”: una herramienta para ayudar a desarrollar la competencia matemática. *Aula de Innovación Educativa*, 189, 12-16.
- Alsina, Á. (2015). *Matemáticas intuitivas e informales de 0 a 3 años: Elementos para empezar bien*. Narcea.
- Alsina, Á. (2022). *Itinerarios didácticos para la enseñanza de las matemáticas (3-6 años)*. Editorial Graó.
- Alsina, Á y Delgado-Rebolledo, R. (2022). ¿Qué conocimientos necesita el profesorado de educación infantil para enseñar matemáticas? *Matemáticas, Educación y Sociedad*, 5(1), 18-37.
- Alsina, Á. y Martínez, M. (2016). La adquisición de conocimientos matemáticos intuitivos e informales en la Escuela Infantil: el papel de los materiales manipulativos. *Revista Latinoamericana de Educación Infantil*, 5(2), 127-136.
- Alsina, Á. y Planas, N. (2008). *Matemática Inclusiva. Propuestas para una educación matemática accesible*. Narcea.
- Alsina, Á. y Xarxa d’Escoles Bressol Municipals de Girona (2015). *La descoberta del pensament matemàtic a l’escola bressol*. Rosa Sensat.
- Baroody, A. J. (1987). *Children’s Mathematical Thinking. A developmental framework for preschool, primary, and special education teachers*. Teachers College Press.
- Canals, M^a. A. (1989). *Per una didàctica de la matemàtica a l’escola. I. Parvulari*. Eumo.
- Clements, H. D. y Sarama J. (2015). *El aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas. El enfoque de las Trayectorias de Aprendizaje*. Learning Tools LLC.
- Dahlberg, G., Moss, P. y Pence, A. (2005). *Más allá de la calidad en educación infantil. Perspectivas postmodernas*. Graó.
- Diari de l’Educació (2019). *Totes les escoles bressol fan matemàtiques però no sempre en són conscients. Ajuntament de Barcelona i l’IMEB*. Recuperado de

<https://educa.barcelona/2019/10/16/totes-les-escoles-bressol-fan-matematiques-pero-no-sempre-en-son-conscients/>

- Dienes, Z. P. (1970). *La construcción de las matemáticas*. Vicens-Vives.
- Edo, M. (2012). Ahí empieza todo. Las matemáticas de cero a tres años. Números. *Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 80, 71-84.
- Fischbein, E. (1987). *Intuition in science and mathematics. An educational approach*. Holland Reidel Pub.
- Geist, E. (2014). *Children are born mathematicians: supporting mathematical development, birth to age 8*. Pearson.
- Hoyuelos, A. (2007). Documentación como narración y argumentación. *Aula de Infantil*, 39, 5-9.
- McMillan, J.H. y Schumacher, S. (2005). *Investigación educativa*. Pearson Educación S.A.
- National Council of Teachers of Mathematics [NCTM]. (2003). *Principios y Estándares para la Educación Matemática. National Council of Teachers of Mathematics* (traducción de la Sociedad Andaluza de Educación Matemática THALES).
- Novo, M.L. (2021). Matemáticas en el Grado de Educación Infantil: la importancia del juego y los materiales manipulativos. *Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia*, 10(2), p.28-50.
- Olmos, G. y Alsina, Á. (2021) Conocimientos matemáticos del profesorado de la Escuela Infantil (0-3 años): efecto en el diseño de espacios para desarrollar las matemáticas informales. *Magíster*, 33, 59-73.
- Schiller, P. y Peterson, L. (1999). *Actividades para jugar con las matemáticas 1*. Ceac.

Características del Discurso Matemático de un profesor durante la enseñanza de la Función Cuadrática

Natalia Múnera

Universitat Autònoma de Barcelona (Barcelona, España), munera.natalia@gmail.com

Resumen: *El discurso matemático de un profesor durante la enseñanza de la función cuadrática es estudiado en clase de secundaria con estudiantes entre 13 y 16 años. En este discurso son analizados diferentes tipos de funciones (usos de la lengua), como: ideacionales, aquellas que posibilitan la producción de significado alrededor de contenidos matemáticos; textuales, aquellas que combinan significados producidos en clase; y funciones con peticiones ideacionales o textuales. Los resultados del análisis muestran dos características en el discurso matemático del profesor: hay tipos de funciones predominantes en su discurso y su hilo conductor está marcado por funciones con peticiones.*

Palabras clave: *discurso matemático del profesor, funciones del discurso, funciones con peticiones.*

Characteristics of a teacher's Mathematical Discourse during the teaching of the Quadratic Function.

Abstract: *The mathematical discourse of a teacher during the teaching of the quadratic function is studied in a high school class with students between 13 and 16 years old. In this discourse, different types of functions (language uses) are analyzed, such as: ideational, those that enable the production of meaning around mathematical content; textual, those that combine meanings produced in class; and functions with ideational or textual requests. The results of the analysis show two characteristics in the teacher's mathematical discourse: there are predominant types of functions in his discourse and its common thread is marked by functions with requests.*

Key words: *mathematical discourse of the teacher, discourse functions, functions with requests.*

1. INTRODUCCIÓN

El discurso matemático del profesor es un objeto de estudio que permite interpretar y analizar procesos de enseñanza y aprendizaje en la clase de matemáticas. Este discurso ha sido estudiado de diversas maneras, por ejemplo desde: las oportunidades de aprendizaje que genera (e. g. Planas et al., 2019); el marco teórico del Mathematics Discourse in Instruction (e. g. Venkat y Adler, 2012; Adler y Ronda, 2015); las reacciones del profesor y los intercambios entre profesor y estudiantes con el modelo Initiation/Response/Follow-up (Ruthven y Hofmann, 2016); entre otras. Estas investigaciones muestran que el discurso matemático del profesor no es plano y predecible, por el contrario presenta diferentes y dinámicas características que generan unas u otras situaciones en clase de matemáticas. Con el propósito de hacer un aporte al campo de estudio del discurso en los procesos de enseñanza de las matemáticas, este artículo presenta dos

características del discurso matemático de un profesor las cuales se basan en el uso de diferentes tipos de funciones y el protagonismo que tienen las funciones con peticiones hacia los estudiantes. Estas características son analizadas e interpretadas en la enseñanza de la función cuadrática y son una base para analizar el discurso matemático del profesor durante la enseñanza de otros contenidos en investigaciones posteriores.

Las características del discurso matemático del profesor emergen del análisis de diferentes episodios. Estos episodios hacen parte de un conjunto de datos de dos sesiones de clase de matemáticas no consecutivas, las cuales son diseñadas y ejecutadas por el profesor del curso y son desarrolladas en una clase colombiana con estudiantes entre 13 y 16 años de cuarto de secundaria. El análisis de todos los episodios permite identificar e interpretar que el discurso matemático de este profesor presenta diferentes tipos de funciones: ideaciones, peticiones-ideaciones, textuales y peticiones-textuales.

Con el propósito de caracterizar el discurso matemático del profesor durante la enseñanza de la función cuadrática, este artículo se constituye en cinco partes: funciones en el discurso matemático del profesor, parte que presenta los elementos teóricos que son la base del análisis realizado; método, parte que describe aspectos generales de las fases metodológicas desarrolladas; características del discurso matemático de un profesor, parte que presenta el análisis de diferentes episodios de las sesiones identificando e interpretando funciones en el discurso y presentando características del mismo; y conclusiones derivadas del análisis.

2. FUNCIONES EN EL DISCURSO MATEMÁTICO DEL PROFESOR

La investigación base de este artículo tiene como punto de partida las funciones del discurso presentes en la enseñanza de la función cuadrática, estas funciones son usos del discurso en el contexto de la clase de matemáticas. Para comprender mejor estos usos, en este apartado se presentará: una mirada del discurso matemático en el contexto escolar a partir de las propuestas de Adler y Sfard; diferentes funciones del discurso que pueden ser analizables, las cuales se basan en las macrofunciones propuestas por Halliday; y por último una relación entre las funciones del discurso y la función cuadrática.

Primero, Adler y sus colegas (e.g., Venkat y Adler, 2012; Adler y Venkat, 2014; Adler y Ronda, 2015) proponen Mathematics Discourse in Instruction (en adelante MDI), esta es una herramienta para analizar la enseñanza de contenidos matemáticos. Desde esta perspectiva el discurso matemático tiene cuatro componentes estructurados: objeto de aprendizaje (puede ser un concepto, procedimiento, algoritmo o práctica meta-matemática), ejemplificación (mecanismo generativo que centra su atención en ejemplos y tareas durante la enseñanza de las matemáticas), habla explicativa (basada en nombrar y legitimar ejemplos y tareas; de esta manera nombrar es usar palabras para hacer referencia a otras palabras, símbolos, procedimientos, imágenes o relaciones matemáticas, y legitimar distingue qué cuenta como matemáticas o no de acuerdo a criterios específicos) y participación del estudiante (Adler y Ronda, 2015). El MDI esencialmente se enfoca en aspectos matemáticos que los profesores dicen, hacen y escriben, y en cómo profesores y estudiantes interactúan en clase de matemáticas para llegar al objeto de aprendizaje.

Segundo, Sfard (2012) define pensar como una actividad de comunicación con uno mismo, lo que genera que el pensamiento matemático, matemáticas o discurso matemático, sea un tipo de comunicación. Sfard (2008, 2012) expresa que el discurso matemático presenta cuatro

características: palabras clave (números y nombres de figuras), mediadores visuales (símbolos algebraicos y gráficas, los cuales son apreciables en procesos de comunicación), rutinas (patrones y regularidades en la realización de tareas matemáticas) y narrativas respaldadas (descripción de objetos matemáticos, relaciones entre objetos y procesos con ellos; estas narrativas corresponden a axiomas, propiedades, teoremas, reglas de cálculo o definiciones).

Tercero, Halliday propone la Gramática Funcional, la cual expresa que la lengua en uso (del profesor o de cualquier otra persona) está constituida por formas lingüísticas y funciones; la función hace referencia al papel de una forma lingüística en una estructura gramatical: “proporciona una interpretación de la estructura gramatical en términos del potencial de significado” en los usos de la lengua (Halliday, 2014, p. 76). La relación entre formas lingüísticas y funciones es compleja porque una misma forma puede tener funciones cambiantes si la gramática y el contexto se modifican. Por ejemplo, la afirmación ‘cada función tiene sus raíces’ en un contexto matemático hace referencia a que en cada polinomio existen valores para la variable independiente que generan el valor cero en la variable dependiente, mientras que en un contexto informal la misma afirmación puede hacer referencia a que cada tarea o responsabilidad tiene un origen. De igual manera las palabras tienen una definición descontextualizada, por lo que su significado potencial está ligado a usos del habla en una estructura gramatical, por esta razón Halliday introduce el concepto de función en términos de interpretación gramatical. La gramática funcional plantea tres macro funciones que se relacionan dialécticamente y de manera constante para la creación del discurso (Halliday, 2014, 2017). Estas macro funciones son: la interpersonal, posibilita construir significado en interacciones sociales; la ideacional, posibilita construir significado basado en la interacción e influenciado por la intención de comunicar ideas; y la textual, posibilita comunicar ideas de manera coherente y contextualizada. Las macro funciones ideacional y textual son habitualmente estudiadas en el análisis del discurso en educación matemática porque tratan sobre información y contenido; estas funciones están en textos escritos o hablados, lo cual permite hacer predicciones, sin ser deterministas, de situaciones matemáticas o de posibles respuestas en dichas situaciones (Morgan, 2006).

A partir de lo expuesto, el discurso matemático se entiende como un tipo de comunicación en contexto, el cual se compone de formas y funciones. Este discurso involucra tanto las características propuestas por Sfard como los componentes propuestos por Adler; ambas propuestas se relacionan, por ejemplo: palabras clave y narrativas se pueden identificar en el habla explicativa, y mediadores visuales y rutinas se pueden identificar en la ejemplificación. Aunque este artículo no utiliza la caracterización de Sfard ni de Adler como herramientas analíticas, sí considera la idea clave de que el discurso matemático del profesor durante la enseñanza es analizable a partir del estudio de sus partes; de ahí que las formas que presenta el discurso del profesor pueden ser interpretados y analizados a través de funciones del discurso.

El discurso del profesor presenta formas lingüísticas en las que se identifican diferentes tipos de funciones; las funciones son usos de la lengua en el contexto de la clase de matemáticas, las cuales permiten caracterizar el discurso durante la enseñanza de contenidos específicos. A continuación se presentan funciones del discurso matemático del profesor que son analizadas en este artículo y son relacionadas con el contenido algebraico de función cuadrática; estas funciones son: nombrar, representar, ejemplificar, narrar, explicar y conectar.

Nombrar es dar vocabulario matemático relacionado con contenidos algebraicos; este vocabulario que se identifica e interpreta en el discurso matemático del profesor es el relevante para la producción de significado en torno al contenido específico de álgebra. Esta función del

discurso es abordada a partir de Halliday (2014; 2017) y Adler y Ronda (2015). Por un lado, Halliday expresa que el vocabulario es léxico que expresa y produce significado en usos gramaticales; este léxico comprende conjuntos de palabras que pertenecen a sistemas de características. Sin embargo, el léxico requiere de la gramática para producir significado; la gramática surge de la selección y combinación de léxico, que a su vez se convierte en léxico cada vez más especializado. Por otro lado, Adler y Ronda definen nombrar como “el uso de palabras para referirse a otras palabras, símbolos, imágenes, procedimientos o relaciones” (2015, p. 8); estas palabras pueden ser vocabulario no matemático o matemático que centran la atención de estudiantes y profesor en aspectos particulares.

Representar es simbolizar contenidos algebraicos; estos símbolos o representaciones muestran diferentes concepciones de un contenido que posibilitan analizarlo, comunicarlo y proponer generalizaciones. Esta función del discurso es abordada a partir de Kaput, Blanton y Moreno (2008), ellos plantean que todas las situaciones matemáticas o no matemáticas pueden ser analizadas y comunicadas por medio de diferentes representaciones (orales, escritas, dibujos, tablas, diagramas, operaciones, notaciones, entre otras), las cuales son constantemente refinadas, pedagógicamente compartidas e influenciadas por otras representaciones más o menos convencionales; también expresan que hay diferentes tipos de representaciones simbólicas con múltiples propósitos, cada una con poder de ser usada en multiplicidad de contextos para simbolizar una misma situación. En particular, los símbolos algebraicos permiten procesos de generalización y razonamiento porque muestran un rango de múltiples aplicaciones en diversos contextos y posibilitan deducir inferencias.

Ejemplificar es presentar ejemplos que pretenden ofrecer una generalidad; estos ejemplos son casos particulares en contextos específicos para representar contenidos algebraicos. Esta función del discurso es abordada desde Zodik y Zaslavsky (2008), Bills et al. (2006), Watson y Mason (2005) y Adler y Ronda (2015). Los ejemplos son casos particulares de clases más grandes, a partir de los cuales se puede razonar y generalizar (Zodik y Zaslavsky, 2008); ellos son materia prima para la generalización porque informan de contenidos matemáticos a través de tareas en las cuales se demuestra, relaciona, explica y prueba (Bills et al., 2006). Un solo ejemplo no implica generalidad, por esta razón Watson y Mason (2005) hablan de espacios de ejemplos como colecciones de ejemplos centrales, los cuales presentan una generalidad que puede ser leída a través de sus ejemplos y permiten estudiar su variabilidad o sus invariantes. Similitud, contraste y fusión pueden ser características de los espacios de ejemplos: una colección de ejemplos similares brinda posibilidades para observar elementos que son invariantes, una colección de ejemplos contrastados pone la atención en elementos diferentes que permiten generalizar y una colección de ejemplos fusionados muestran aspectos del objeto que varían y no varían de manera simultánea, aportando más al proceso de generalización que los ejemplos contrastados (Alder y Ronda, 2015).

Narrar es describir características o procedimientos que involucran contenidos algebraicos: las características se centran en narrativas como axiomas, propiedades, teoremas, reglas o definiciones; y los procedimientos se centran en rutinas para solucionar situaciones matemáticas. Esta función del discurso es abordada a partir de Sfard (2008; 2012). Por un lado, las narrativas se corresponden con afirmaciones respaldadas y validadas por la comunidad matemática como axiomas, propiedades, teoremas, reglas de cálculo o definiciones; estas narrativas describen objetos matemáticos a partir de conjuntos de palabras y de mediadores visuales que los representan. Por otro lado, las rutinas se corresponden con formas de realizar tareas matemáticas que conservan patrones y regularidades; estos patrones repetitivos son

característicos del discurso usando palabras, mediadores y narrativas para realizar tareas o para crear y fundamentar nuevas narrativas.

Explicar es dar razones de dominio matemático a favor o en contra de una afirmación vinculada con contenidos de álgebra. Estas razones están basadas en dominios de conocimiento que permiten analizar las matemáticas que profesor y estudiantes legitiman en el contexto de la clase. Esta función del discurso es abordada a partir de Adler (2012) y Adler y Ronda (2015). El discurso matemático presenta dominios de conocimiento que valoran y reconocen el conocimiento matemático. Entre estos dominios de conocimiento tenemos: el dominio matemático que hace referencia a criterios relacionados con propiedades, procedimientos y demostraciones de objetos matemáticos; el dominio cotidiano que hace referencia a criterios basados en la práctica o criterios no matemáticos; el dominio profesional que hace referencia a criterios basados en el discurso del profesor, construidos a partir de su práctica pedagógica y la acumulación de conocimientos a través de su práctica investigativa; y el dominio curricular que hace referencia a criterios basados en el currículo oficial, el contenido de un libro de texto o en los aspectos a valorar en un examen.

Conectar es relacionar de manera coherente representaciones, características y/o procedimientos de contenidos aritméticos y/o algebraicos. Esta función del discurso se aborda a partir de Venkat y Adler (2012). Estas autoras señalan la importancia de la coherencia y la conexión entre transformaciones que constantemente sufren las representaciones de cualquier objeto de aprendizaje y presentan cuatro elementos que pueden ser analizados para determinar si hay conexión y coherencia: representación de entrada, representaciones producidas a través de la transformación, explicaciones que acompañan la transformación y relación con el problema planteado. En este artículo se analizan las conexiones presentes en el discurso matemático del profesor y no las transformaciones que sufren las representaciones presentes a lo largo de su discurso.

Para finalizar este apartado, las funciones del discurso anteriormente expuestas se relacionan de manera directa con la enseñanza de la función cuadrática. Kostić y Sekulić (2022) expresan que la forma más común de presentar la función cuadrática es $f(x) = ax^2 + bx + c$; a partir de diferentes ejemplos de esta función se explican algunas de sus características como las raíces, su forma parabólica, vértice, monotonía, dirección de la abertura de la parábola y la relación entre los coeficientes a , b y c . Las funciones del discurso se pueden analizar durante la enseñanza de la función cuadrática, por ejemplo cuando el profesor: nombra vocabulario como discriminante o fórmula cuadrática; representa verbal y algebraicamente la fórmula del discriminante; ejemplifica la función cuadrática con diferentes coeficientes; narra características de las raíces en los ejemplos que presenta; explica las razones matemáticas para desarrollar procedimientos en el cálculo de las raíces; y conectan representaciones, características y/o procedimientos para producir significado alrededor de los ejemplos que propone en clase.

3. MÉTODO

La investigación base de este artículo asume una perspectiva cualitativa, con un enfoque interpretativo, similar a las investigaciones realizadas por Adler y Ronda (2015) y Venkat y Adler (2012). Esta investigación propone una comprensión detallada del discurso matemático del profesor y no busca generalizaciones, dado que este discurso durante la enseñanza es producto de contextos sociales, culturales, históricos, políticos y personales específicos.

El conjunto de datos analizados para este artículo corresponde a dos sesiones de clase no consecutivas (Sesiones 1 y 2) planeadas y ejecutadas por el profesor Camilo (seudónimo), con un grupo de estudiantes entre 13 y 16 años de cuarto de secundaria en 2019 pertenecientes a una institución educativa pública en Medellín, Colombia. La Sesión 1 se compone de 5 episodios y la Sesión 2 se compone de 7 episodios. Los episodios son divisiones de las sesiones, los cuales tienen inicios y finales relativos de procesos matemáticos específicos desarrollados a lo largo de la clase, como por ejemplo la representación de una situación matemática en Geogebra; esta división en episodios facilita la interpretación de funciones del discurso. El concepto objeto de enseñanza desarrollado en las sesiones de clase es la función cuadrática.

El discurso matemático del profesor se caracterizó desarrollando tres fases: 1) transcripción y configuración de episodios, 2) análisis preliminar, 3) análisis y resultados. En la Fase 1 las sesiones de clase grabadas fueron transcritas y divididas en episodios. En la Fase 2 se realizó un análisis preliminar en el cual se interpretaron e identificaron en total catorce tipos de funciones del discurso en los turnos de habla del profesor; la mayoría de estas funciones fueron clasificadas, según su uso en el contexto de la clase, en ideacionales y textuales (Halliday, 2014), otras funciones no encajaban con las propuestas por Halliday y se denominaron peticiones-textuales, las cuales se basan en peticiones del profesor que buscan la participación de los estudiantes con producciones de su discurso desde lo textual. En la Fase 3, gracias a la concreción del marco teórico y a análisis posteriores de los datos, se refinaron las funciones del discurso, permitiendo así identificar dos características en el discurso matemático del profesor; en esta fase se proponen cuatro tipos de funciones principales del discurso entre las que están: ideacional, petición-ideacional, textual y petición-textual.

A nivel ideacional se presentan funciones del discurso en las cuales el profesor:

- *Calcula* operaciones matemáticas necesarias para averiguar un resultado.
- *Nombra* vocabulario matemático relevante para la producción de significado en torno a contenidos específicos.
- *Representa* contenidos matemáticos; estas representaciones muestran diferentes conceptualizaciones del contenido que posibilitan analizarlo y comunicarlo.
- *Ejemplifica* casos particulares de un contenido específico, que pretenden ofrecer una generalidad.

A nivel petición-ideacional se presentan funciones del discurso en las cuales el profesor:

- *Pide que los estudiantes calculen* operaciones aritméticas.
- *Pide que los estudiantes nombren* vocabulario matemático relevante.
- *Pide que los estudiantes representen* de diferentes maneras contenidos matemáticos.
- *Pide que los estudiantes ejemplifiquen* casos particulares de un contenido específico.

A nivel textual se presentan funciones del discurso en las cuales el profesor:

- *Narra* características de contenidos matemáticos o procedimientos que involucran dichos contenidos.
- *Explica* razones de dominio matemático a favor o en contra de una afirmación vinculada con contenidos matemáticos.
- *Conecta* representaciones, características o procedimientos de contenidos matemáticos.

A nivel petición-textual se presentan funciones del discurso en las cuales el profesor:

- *Pide que los estudiantes narren* características o procedimientos relacionados con contenidos matemáticos.
- *Pide que los estudiantes expliquen* razones de dominio matemático a favor o en contra de una afirmación vinculada con contenidos matemáticos.

- *Pide que los estudiantes conecten* representaciones, características o procedimientos de contenidos matemáticos.

La Tabla 1 resume las funciones identificadas, interpretadas y analizadas en el discurso matemático del profesor durante la enseñanza:

Tabla 1

Funciones del discurso matemático del profesor

Descripción	Abr	Función
IDEACIONAL. Usos de la lengua para introducir cálculos aritméticos, nombres, representaciones y ejemplos de contenidos algebraicos.	Cl	Calcula
	Nm	Nombra
	Rp	Representa
	Ej	Ejemplifica
PETICIÓN-IDEACIONAL. Usos de la lengua para pedir cálculos aritméticos, nombres, representaciones y ejemplos de contenidos algebraicos.	PCl	Pide que calculen
	PNm	Pide que nombren
	PRp	Pide que representen
	PEj	Pide que ejemplifiquen
TEXTUAL. Usos de la lengua para narrar, explicar y conectar contenidos aritméticos y algebraicos.	Nr	Narra
	Ex	Explica
	Cn	Conecta
PETICIÓN-TEXTUAL. Usos de la lengua para pedir narraciones, explicaciones y conexiones de contenidos aritméticos y algebraicos.	PNr	Pide que narren
	PEx	Pide que expliquen
	PCn	Pide que conecten

4. CARACTERÍSTICAS DEL DISCURSO MATEMÁTICO DE UN PROFESOR DURANTE SU ENSEÑANZA DE LA FUNCIÓN CUADRÁTICA

Las características del discurso matemático de un profesor durante su enseñanza de la función cuadrática son dos: su discurso se basa en el uso predominante de funciones de tipo ideacional, petición-ideacional y petición-textual, donde las funciones textuales emergen con poca frecuencia para responder preguntas y para anticipar respuestas; y el hilo conductor en este discurso son las funciones con peticiones para los estudiantes. A continuación se presenta dos partes para mostrar esta caracterización: primero, análisis de un episodio ilustrando la interpretación de las funciones del discurso en diferentes turnos de habla del profesor, y segundo, fragmentos de episodios que ilustran las características identificadas en el discurso matemático del profesor.

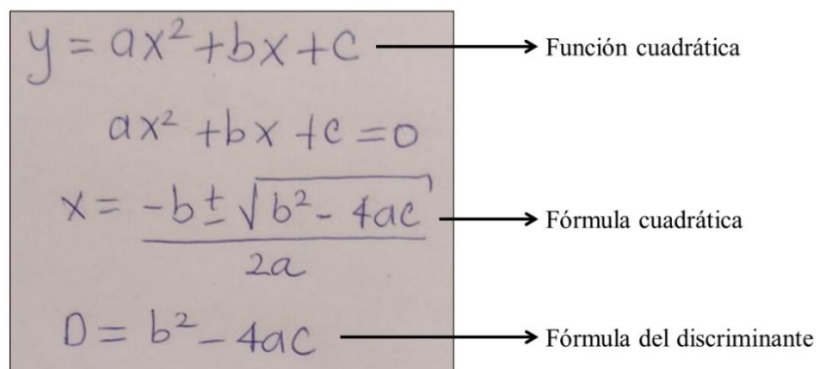
4.1. Análisis de funciones del discurso en la Sesión 1, Episodio 2 (E2₁): Representando y ejemplificando el coeficiente b .

Un elemento central de la Sesión 1 es la representación de los coeficientes a , b y c (de la función cuadrática) como deslizadores en GeoGebra. Las representaciones de b en el E2₁ y de a y c en el Episodio 3 de la misma sesión (E3₁) posibilitan a profesor y estudiantes ejemplificar funciones cuadráticas, calcular sus raíces y conectar estos resultados con los observables en la pantalla del software. E2₁ alude al proceso de construcción de un deslizador en Geogebra; este

deslizador muestra diferentes valores para el coeficiente b , símbolo vinculado a la función cuadrática, la fórmula cuadrática y la fórmula del discriminante (Figura 1).

Figura 1

Ejemplo 1. Representación de la pizarra



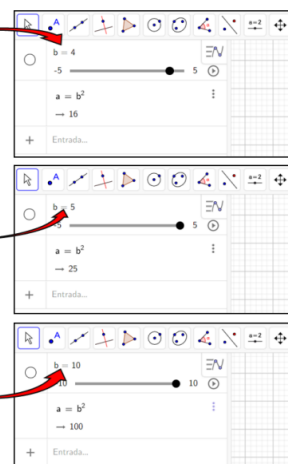
4.1.1. Función ideacional

En este episodio se identifican e interpretan las funciones nombrar, calcular y ejemplificar. El profesor nombra vocabulario relacionado con función cuadrática, como: raíz y discriminante, características del contenido matemático que se pueden calcular; fórmula, expresión algebraica que permite calcular el discriminante de la función; y parábola, representación gráfica de la función cuadrática. También, el profesor ejemplifica el coeficiente b de la función cuadrática asignándole diferentes valores y calcula b al cuadrado, cuando este coeficiente es cinco. En la Figura 2 se subraya los valores que adquiere b en diferentes ejemplos, los cuales son valores asignados al deslizador b en Geogebra (Figura 2); de esta forma el profesor: en [14] ejemplifica b con el valor cuatro y luego pide calcular b al cuadrado; en [16] ejemplifica b con el valor cinco y calcula el cuadrado de b ; y en [18] ejemplifica b con el valor diez y pide calcular su cuadrado. Estas funciones ideacionales permiten: especificar vocabulario asociado a la función cuadrática, mostrar que los coeficientes de la función cuadrática son variables y desarrollar cálculos aritméticos con los valores de estos coeficientes.

Figura 2

Ejemplo 2. Fragmento de E2₁ y reproducción en GeoGebra

- 14. P: Sebas mueva eso [el deslizador]. Si b vale cuatro (Ej), ¿cuánto vale b al cuadrado (PCI)?
- 15. A: Dieciséis.
- 16. P: Dieciséis. Qué pasa si yo quiero... llévalo hasta el extremo. Si b vale cinco (Ej), esto vale veinticinco (CI). ¿Cómo hago que me de los demás cuadrados (PNr)?
- 17. A: Poniéndole más en configuración.
- 18. P: En configuración. Cambiar configuración, vaya de menos diez hasta diez, de menos diez hasta diez (Nr). Listo. Dale ahí. Entonces si yo lo muevo me va a sacar todos los cuadrados hasta el diez (Nr). Al otro lado, dale hasta allá. Entonces ya, el cuadrado de diez... (Ej, PCI).

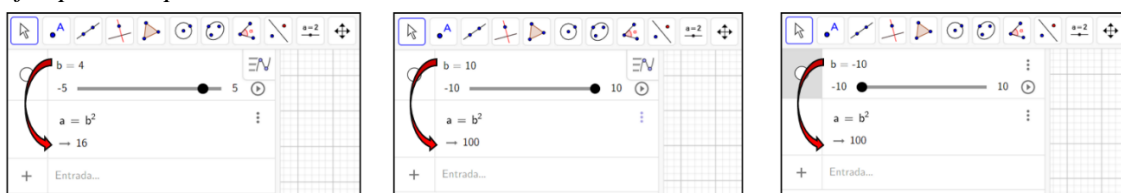


4.1.2. Función petición-ideacional

En este episodio el profesor pide a los estudiantes que calculen el cuadrado de b cuando el valor de este coeficiente es cuatro, diez y menos diez; estos cálculos se pueden verificar en la pantalla del software como muestra la Figura 3. Esta función petición-ideacional permite la participación de los estudiantes en el cálculo de un factor de la fórmula del discriminante, con el objetivo de identificar el tipo de raíces de una función cuadrática.

Figura 3

Ejemplo 3. Reproducción en GeoGebra



4.1.3. Función textual

En este episodio se interpretan e identifican una explicación y varias narraciones. El profesor: en [6] explica el sentido de construir el discriminante con deslizadores; en [1] narra una característica de funciones cuadráticas difíciles de ejemplificar (funciones con una sola raíz real); en [6] y [10] narra características de los valores del coeficiente b en el deslizador; en [18] y [32] narra características de los resultados arrojados por el deslizador b al cuadrado (Figura 4). Estas funciones textuales permiten reflexionar principalmente acerca de dos aspectos: primero, el beneficio que dan los deslizadores de Geogebra en la ejemplificación de funciones cuadráticas, dado que posibilitan variar fácilmente el valor de los coeficientes; y segundo, especificar los valores del coeficiente b y de su cuadrado en cada ejemplo, ya que cambiar el valor de b altera su cuadrado y también ejemplifica una función cuadrática diferente.

Figura 4

Ejemplo 4. Fragmentos de E2₁

1. P: Entonces la parte más difícil de esto es construirla [una función cuadrática] cuando tiene una sola raíz _(Nm, Nr).
6. P: [...] Aquí b vale menos cinco, o el número que aparezca en la pantalla _(Nr). Ahora. Voy a construir un discriminante _(Nm), esta fórmula _(Nm), para poder calcularlo para cualquier valor a , b y c _(Ex).
10. P: Dale configuración y aquí en deslizador... aquí dice que el mínimo es menos cinco y el máximo cinco, y el incremente póngale uno. Aquí uno. Ya cerrar acá, estaba en decimales _(Nr), mueve el deslizador. ¿Sí ven lo que pasa? Se mueve en enteros _(Nr) y así es más fácil.
18. P: Cambiar configuración, vaya de menos diez hasta diez, de menos diez hasta diez _(Nr). Listo. Dale ahí. Entonces si yo lo muevo me va a sacar todos los cuadrados hasta el diez _(Nr).
32. P: Más. Exacto. Entonces ya sacó todos los cuadrados _(Nr). Entonces ya hice... Acabé de hacer b y ya hice b cuadrado _(Nr).

4.1.4. Función petición-textual

En este episodio se interpretan e identifican peticiones para narrar, conectar y explicar. El profesor pide narrar: características de la pantalla al escribir b en la entrada del software; procedimiento a realizar con el coeficiente b ; característica del deslizador b ; procedimiento para obtener cuadrados del coeficiente b ; procedimiento a realizar tras obtener los cuadrados del coeficiente b ; y características de la pantalla al escribir a en la entrada del software.

Las peticiones para conectar se interpretan con peticiones para narrar. En la Figura 5 se subrayan preguntas del profesor: en [10] pide narrar procedimiento a realizar con el coeficiente b , lo cual sugiere conectar el símbolo con la fórmula del discriminante y así identificar que b debe estar al cuadrado; y en [32] pide narrar procedimiento a realizar luego de obtener los cuadrados del coeficiente b , lo cual sugiere conectar b al cuadrado con la fórmula del discriminante y así identificar que se debe escribir menos cuatro por a y por c .

Figura 5

Ejemplo 5. Fragmento del episodio

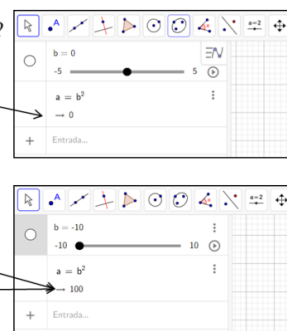
10. P: ... Entonces ya tengo b . ¿Qué más hay que hacerle a b (PCn, PNr)?
 ...
 32. P: ... Acabé de hacer b y ya hice b cuadrado. ¿Qué creen que voy a hacer ahora (PCn, PNr)?

Cuando el profesor ejemplifica el coeficiente b con distintos valores pide explicaciones. En la Figura 6 se subrayan preguntas asociadas con la Reproducción en GeoGebra mostrada: en [12] pide explicar por qué en la pantalla el resultado de b al cuadrado es cero; y en [22] pide explicar por qué en la pantalla el resultado de menos diez al cuadrado es cien, petición que se repite en [28].

Figura 6

Ejemplo 6. Fragmento de $E2_1$ y reproducción en GeoGebra

12. P: Señor, escriba b al cuadrado. ¿Por qué apareció este cero (PEX)?... ¿Cuánto vale la b (PNr)?
 13. A: Cero.
 ...
 21. A: Y el cuadrado de menos diez es cien.
 22. P: Por qué el cuadrado de menos diez es (PEX) ...
 23. A: Menos cien.
 24. P: Menos diez al cuadrado (Ej), ¿cuánto da (PCI)?
 25. A: Menos cien.
 26. P: Hágalo. Señor menos diez. Haga b al cuadrado.
 27. A: Cien.
 28. P: ¿Por qué (PEX)?



Las peticiones-textuales de este episodio sugieren reflexiones algebraicas y aritméticas. Las algebraicas son apreciables cuando el profesor pide a los estudiantes reflexionar en torno a la expresión algebraica que representa el discriminante de la función cuadrática, de manera que los estudiantes expresen procedimientos que se deben desarrollar con las variables. Las aritméticas son apreciables cuando el profesor pide a los estudiantes reflexionar sobre los valores de las variables en ejemplos específicos y los resultados de algunos cálculos realizados con estos valores.

4.1.5. Análisis conjunto de las funciones

De manera general se han analizado funciones en el discurso matemático del profesor de tipo ideacional, petición-ideacional, textual y petición-textual. En este episodio, las funciones se relacionan entre sí para representar el coeficiente b y ejemplificarlo con valores enteros positivos y negativos. Dos relaciones entre funciones son interpretadas en el discurso matemático del profesor durante la enseñanza de la función cuadrática: 1) calcular, ejemplificar, pedir cálculos y pedir explicaciones: estas funciones se relacionan para ejemplificar diferentes valores de b y calcular b^2 , así como para explicar por qué en la pantalla del software aparecen unos resultados y no otros; 2) explicar, narrar, pedir narraciones y pedir conexiones: estas funciones se relacionan para explicar el sentido de construir tres deslizadores, narrar características de valores que asume el deslizador b y conectar coeficientes con la fórmula del discriminante (estas conexiones permiten desarrollar un paso a paso de las operaciones que exige la fórmula).

En este episodio destaca la función ejemplificar. La representación del coeficiente b como un deslizador en GeoGebra es una parte importante al comienzo del episodio. Aunque ejemplificar solo se interpreta cuatro veces a lo largo del episodio, gran parte del discurso del profesor gira en torno a los ejemplos que presenta. Los ejemplos del coeficiente b con valores como cuatro, cinco y diez son similares entre ellos y facilitan observar la coherencia con el resultado de sus cuadrados, la cual se muestra en la pantalla del software. El contraste de estos ejemplos se genera cuando un estudiante presenta el cuadrado de un entero negativo, menos diez, lo cual produce una discusión frente a si el cuadrado de menos diez es menos cien o cien. Así, el episodio presenta ejemplos de similitud y de contraste, pero no de fusión; ejemplos de fusión se podrían encontrar en un momento de la sesión donde profesor y estudiantes: tomen valores para a , b y c , positivos y/o negativos, y calculen el discriminante de la función cuadrática. Las representaciones del coeficiente b como un deslizador y de b al cuadrado posibilitan al profesor hablar sobre diferentes ejemplos y vincularlos con narraciones y peticiones.

Las narraciones y la explicación en el episodio emergen cuando el profesor anticipa respuestas o responde a sus propias preguntas. La mayoría de las narraciones del profesor dan características de los objetos para anticiparse a posibles preguntas, al igual que la explicación se anticipa a la pregunta de por qué construir deslizadores para un discriminante. Esta idea se ampliará en el siguiente apartado con el análisis de más fragmentos de los episodios.

4.2. Características del discurso matemático de un profesor durante la enseñanza

El análisis de los diferentes tipos de funciones permitió identificar dos características en el discurso matemático de un profesor, las cuales se ilustran en este apartado con diferentes fragmentos de episodios de la Sesión 2. Al comienzo de esta sesión el profesor representa verbal y algebraicamente la función cuadrática y las fórmulas cuadrática y del discriminante; la fórmula del discriminante se convierte en una expresión algebraica importante para caracterizar las raíces de una función cuadrática y la fórmula cuadrática importante para calcularlas. La Sesión 2 aporta varios ejemplos de funciones cuadráticas para las cuales se calculan discriminante y raíces.

4.2.1. Uso de funciones textuales para responder preguntas y anticipar respuestas

El discurso matemático del profesor usa predominantemente funciones ideacionales, peticiones-ideacionales y peticiones-textuales, de manera particular las funciones textuales emergen con poca frecuencia para responder preguntas y para anticipar respuestas. A continuación se presentan tres fragmentos que ilustran la interpretación de funciones textuales en el discurso del profesor: dos para responder preguntas (planteadas por él mismo y por un estudiante) y uno para anticipar una respuesta sin tener alguna petición previa.

El primer fragmento es del Episodio 2 de la Sesión 2 (E2₂); este es un episodio en el que profesor y estudiantes ejemplifican una función cuadrática con dos raíces reales: $y = 10x^2 + 20x + 4$. La Figura 7 presenta un fragmento del episodio que sugiere varias peticiones, por parte del profesor, para escribir en la pizarra la fórmula cuadrática con los coeficientes de la función ejemplificada (Figura 7). La explicación interpretada en [82] surge luego de varias peticiones para narrar el valor de b^2 : primero los estudiantes expresan que b^2 es menos veinte y luego que es cuatrocientos, por lo que el profesor pide explicar por qué b^2 es cuatrocientos y él mismo responde a la petición explicando que ese es el resultado de veinte al cuadrado.

Figura 7

Ejemplo 7. Fragmento de E2₂ e imagen de la pizarra

75. ¿Qué sigue (PN_r)?
 76. A: Raíz.
 77. P: Raíz, eso. ¿Qué sigue (PN_r)?
 78. A: Es menos veinte.
 79. P: ¿Veinte?
 80. A: Menos veinte, menos veinte.
 81. A: Cuatrocientos.
 82. P: Cuatrocientos. ¿Por qué cuatrocientos (PE_x)?
 Porque era veinte al cuadrado (E_x).

Agosto 2/2013

$$y = ax^2 + bx + c = 0$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$D = b^2 - 4ac > 0$$

$$y = f(x) = 10x^2 + 20x + 4$$

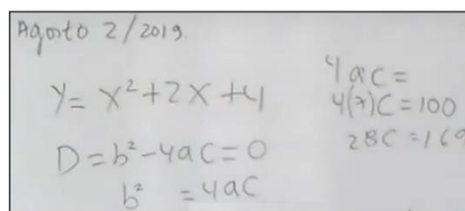
$$x = \frac{-20 \pm \sqrt{400 - 160}}{20} = \frac{-20 \pm \sqrt{240}}{20}$$

El segundo fragmento es del Episodio 4 de la Sesión 2 (E4₂); en este episodio el profesor propone ejemplificar una función cuadrática con una raíz real, lo que implica que su discriminante sea cero y que $b^2 = 4ac$. La Figura 8 muestra algunos aspectos en la ejemplificación de esta función: profesor y estudiantes buscan un b^2 de tal manera que sea divisible por 28, porque previamente decidieron que a era siete. La explicación en [180] surge cuando buscan el siguiente número cuadrado de ciento cuarenta y cuatro, resultado de doce al cuadrado: el profesor primero expresa que el siguiente número cuadrado es ciento cincuenta seis y luego se autocorrigió expresando que es ciento sesenta y nueve, ante este cambio de número un estudiante pregunta por qué la corrección y el profesor explica que es ciento sesenta y nueve porque es el resultado de trece al cuadrado.

Figura 8

Ejemplo 8: Fragmento del E4₂ e imagen de la pizarra

172. P: ¿Cuál es el siguiente cuadrado (PCI)? ¿Ciento cuarenta y cuatro me da entero (PNr)? ¿Ciento cuarenta y cuatro dividido veintiocho (PCI)? Saquen la calculadora y me ayudan. Ah, no me da.
 173. A: Siete, siete.
 174. P: Qué sigue, ciento (PCI)..
 175. A: Sesenta y nueve.
 176. P: Ciento cincuenta y seis (CI).
 177. A: Ah, ah.
 178. P: Ve perdón, ciento sesenta y nueve (CI).
 179. A: ¿Por qué?
 180. P: Porque la raíz es trece al cuadrado (Ex).

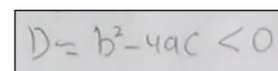


El tercer fragmento es del Episodio 5 de la Sesión 2 (E5₂); en este episodio el profesor propone ejemplificar una función cuadrática con raíces complejas, lo que implica que su discriminante sea menor cero (Figura 9), a y c tengan el mismo signo y sus valores absolutos sean mayores que el valor absoluto de b . La Figura 13 presenta tres funciones textuales en el discurso del profesor: en [14] narra una característica hipotética de a para pedir que los estudiantes narren una característica de c ; y en [16] por un lado conecta las características de a y c con un valor positivo del discriminante, y por otro lado explica que si el discriminante es positivo entonces las raíces de la función cuadrática son reales. Es de anotar que la narración, conexión y explicación presentes en este fragmento son funciones textuales que se anticipan ante cualquier escenario, dado que no hay peticiones previas que impliquen su presencia.

Figura 9

Ejemplo 9: Fragmento del E5₂ e imagen de la pizarra

11. P: La pregunta es, ¿para que esto me dé negativo (Nm) [el discriminante] me conviene que a y c sean muy grandes o que b sea muy pequeño (PNr)?
 12. A: Que a y c sean muy grandes.
 13. A: Los dos.
 14. P: Los dos, bien. Que a y c sean muy grandes y que b sea muy pequeño (Nr). Esa fue la pregunta ¡chicos! Sí a es negativo (Nm, Nr), ¿cómo tiene que ser c (PNr)?
 15. A: Negativo.
 16. P: Negativo, porque o sino me da positivo (Nm) [el discriminante] y me da es en reales (Nm, Cn, Ex).



4.2.2. Funciones con peticiones como hilo conductor del discurso matemático

El discurso matemático del profesor tiene como hilo conductor peticiones de tipo ideacional y textual; estas peticiones emergen en casi todos los turnos de habla del profesor y posibilitan la interacción directa de él con los estudiantes en la producción de significado. A continuación se presenta un fragmento de E5₂, en este episodio se ejemplifica una función cuadrática con raíces imaginarias y se calculan dichas raíces; en el fragmento se subrayan las diferentes peticiones identificadas e interpretadas en el discurso del profesor (Figura 10).

Figura 10**Ejemplo 10. Fragmento del E5₂ e imagen de la pizarra**

1. P: ¿Cómo garantizamos que eso tenga raíces imaginarias (Nm, PNR)?
2. A: Que a y c sean...
3. P: No, no, no. ¿Cómo tiene que ser el discriminante (Nm, PNR)?
4. A: Negativo.
5. P: ¡Bien! Discriminante (Nm) negativo. Entonces, ¿quién se acuerda de la fórmula del discriminante (Nm, PPR)?
6. A: a más b .
7. P: Discriminante (Nm):
8. A: b a las dos, menos cuatro a , c .
9. P: b a las dos, menos cuatro a , c . ¿Eso tiene que ser (PNR)?
10. A: Negativo.
11. P: Negativo. Chicos aquí les queda muy fácil de encontrarlas. La pregunta es, ¿para que esto me dé negativo (Nm) me conviene que a y c sean muy grandes o que b sea muy pequeño (PNR)?
12. A: Que a y c sean muy grandes.
13. A: Los dos.
14. P: Los dos, bien. Que a y c sean muy grandes y que b sea muy pequeño (Nr). Esa fue la pregunta ¡chicos! Si a es negativo (Nm, Nr) ¿cómo tiene que ser c (PNR)?
15. A: Negativo.
16. P: Negativo, porque o sino me da positivo (Nm) y me da es en reales (Nm, Cn, Ex). O sea que a y c tienen que tener el mismo signo (Nm, Nr). Entonces, aquí les sirve cualquier cosa, pero no coloquemos uno muy grande porque nos enredamos como ahora. Entonces, otra vez, ¿cuánto vale la a (PCn, PNR)?
17. A: Tres.
18. P: Tres. Voy a borrar este y ustedes me dicen qué escribo (PEI).
19. A: Tres equis a la dos.
20. P: Ye igual (PEI)...
21. A: Ye igual, tres equis a la dos, más equis, más tres.
22. P: Tres equis a la dos, más equis, más tres. ¿Él en qué pensó (PNR)? ¿En una equis o en una b muy grande o muy pequeña (PNR)?
23. A: Muy pequeña.
24. P: Muy pequeña. Pregunta, ¿esto va a tener raíces imaginarias o raíces complejas (Nm) o no (PNR)?
25. A: Sí, sí.
26. P: Va a tener raíces complejas (Nm). Veamos a ver cuáles son, ¿cuánto les da la a (PCn, PNR)?
27. A: Tres.
28. P: ¿La b (PCn, PNR)?
29. A: Uno.
30. P: Uno. Y ¿la c (PCn, PNR)?
31. A: Tres.

Agosto 2/2019

$$y = 3x^2 + x + 3$$

$$D = b^2 - 4ac < 0$$

$$a = 3$$

$$b = 1$$

$$c = 3$$

El fragmento de E5₂ ilustra cómo en el discurso del profesor las funciones con peticiones posibilitan la ejemplificación de una función cuadrática con diferentes características que se relacionan entre sí. Por un lado, las peticiones ideacionales en [5], [18] y [20] buscan que los estudiantes representen verbalmente la fórmula del discriminante y ejemplifiquen una función cuadrática con raíces complejas. Por otro lado, las peticiones textuales en [1], [3], [9], [11], [14], [16], [22], [24], [26], [28] y [30] buscan que los estudiantes narren un procedimiento para obtener una función cuadrática con raíces complejas y narren características de diferentes objetos matemáticos (discriminante, coeficientes y raíces de la función); las peticiones textuales en [26], [28] y [30] también buscan que los estudiantes conecten los coeficientes de la función cuadrática ejemplificada con las variables a , b y c y así puedan expresar el valor de cada variable en el ejemplo concreto.

En el fragmento de E5₂ se identifican e interpretan cinco pasos en la ejemplificación de una función cuadrática con raíces complejas: 1) narrar que la característica principal del discriminante de la función cuadrática debe ser negativo; 2) representar verbalmente la fórmula del discriminante; 3) narrar características de los coeficientes de la función cuadrática: a y c deben tener el mismo signo y sus valores absolutos deben ser mayores que el valor absoluto de b ; 4) ejemplificar una función cuadrática que cumpla las características narradas; 5) narrar y conectar los coeficientes a , b y c con los valores 3, 1 y 3, respectivamente.

Las peticiones ideacionales y textuales guían la producción de significado porque muestra el paso a paso en el manejo y la conceptualización de los objetos que se trabajan en clase. Cuando la respuesta a una petición es correcta, desde el punto de vista del profesor, se propone a los estudiantes otra petición para seguir con la producción de significado; cuando la respuesta a una petición es incorrecta, desde el punto de vista del profesor, se interpretan e identifican varias opciones por parte de este: repite o reformula la misma petición, amplía la petición, cambia la petición o responde a la petición con una función textual. Si bien en el discurso del profesor se presentan aspectos concretos de los objetos de enseñanza por medio de funciones ideacionales (nombrar, calcular, representar y ejemplificar) y de funciones textuales (narrar,

explicar o conectar), las funciones con peticiones son las que permiten una interacción directa entre profesor y estudiantes posibilitando producir significado.

Para finalizar este apartado, la Tabla 2 resume las características del discurso del profesor durante la enseñanza:

Tabla 2.
Características del discurso del profesor

	Función	Tipos de función	Característica del discurso matemático
Discurso Matemático del Profesor	Ideacional	Calcula Nombra Representa Ejemplifica	Estas funciones, junto con las peticiones, tienen un uso predominante el discurso
	Textual	Narra Explica Conecta	Emergen en el discurso para responder preguntas y anticipar respuestas
	Petición-ideacional	Pide que calculen Pide que nombren Pide que representen Pide que ejemplifiquen	Son el hilo conductor del discurso
	Petición-textual	Pide que narren Pide que expliquen Pide que conecten	

5. CONCLUSIONES

El discurso matemático del profesor permite interpretar algunas acepciones de los objetos de enseñanza desarrollados en las sesiones de clase. Por ejemplo, en la Sesión 1 y 2 mencionadas en este artículo, el discurso matemático del profesor expone la función cuadrática como una parábola $y = ax^2 + bx + c$ cuyas raíces pueden ser calculadas con procedimientos algebraicos y aritméticos (resolviendo la fórmula cuadrática) y cuyos coeficientes pueden ser cualquier valor en el conjunto de los números reales. Los coeficientes a , b y c de la función cuadrática son representados con deslizadores en GeoGebra, de forma similar al trabajo de Kostić y Sekulić (2022); estos coeficientes son valores variables sustituidos en la fórmula del discriminante, de manera que un cambio en ellos cambia el valor del discriminante y así poder analizar distintas funciones cuadráticas específicas a efectos de si tienen una, dos o ninguna raíz real.

El profesor aborda los objetos de enseñanza a partir de diferentes funciones en su discurso matemático. Las funciones hacen referencia a usos de la lengua y se presentan cuatro tipos: ideacional, petición-ideacional, textual y petición-textual. A partir de interpretar y analizar estas funciones, se identifican dos características en el discurso matemático del profesor:

1. Este discurso se basa en el uso predominante de funciones de tipo ideacional, petición-ideacional y petición-textual; las funciones textuales, con poca presencia en el discurso matemático, emergen para responder preguntas y para anticipar respuestas.
2. El hilo conductor en este discurso son las funciones con peticiones.

Como primera característica, en el discurso matemático del profesor se identifican los cuatro tipos de funciones, ampliando los tipos de funciones propuestos por Halliday (2014, 2017). Las funciones ideacionales se interpretan en usos de la lengua para introducir cálculos

aritméticos, nombres, representaciones y ejemplos; estas funciones posibilitan producir significado alrededor de contenidos matemáticos. Las funciones con peticiones ideacionales se interpretan en usos de la lengua para pedir cálculos aritméticos, nombres, representaciones y ejemplos; estas funciones se identifican en las preguntas que realiza el profesor alrededor de los significados producidos en clase. Las funciones textuales se interpretan en usos de la lengua para narrar, explicar y conectar contenidos matemáticos; estas funciones combinan significados producidos con el uso de funciones ideacionales. Las funciones con peticiones textuales se interpretan en usos de la lengua para pedir narraciones, explicaciones y conexiones de contenidos matemáticos; estas se basan en preguntas que esperan de los estudiantes el uso de funciones textuales. La base del discurso del profesor no son las funciones textuales (narrar, explicar y conectar), estas surgen en momentos específicos; las funciones textuales son precedidas por funciones ideacionales o por funciones con peticiones de diferente naturaleza que generan la necesidad de hacer diferentes aclaraciones, para seguir apoyando la producción de significado.

En el discurso matemático del profesor predominan las funciones de tipo ideacional, petición-ideacional y petición-textual. Estas funciones predominantes generan que el discurso del profesor gire en torno a nombrar, calcular, representar y ejemplificar en articulación con peticiones constantes de diferente naturaleza. Esta secuencia de tres funciones se ve interrumpida en algunos momentos por funciones textuales. Las funciones textuales emergen cuando el profesor responde preguntas realizadas por él mismo y que los estudiantes no responden, cuando los estudiantes responden de manera incorrecta o porque surgen preguntas dirigidas al profesor; las funciones textuales también surgen en algunos momentos cuando, sin una petición previa, el profesor anticipa la respuesta a una posible pregunta o situación narrando características o procedimientos, explicando razones matemáticas a favor o en contra de una afirmación, y conectando contenidos matemáticos.

Como segunda característica, el hilo conductor en el discurso matemático del profesor durante la enseñanza son funciones con peticiones para los estudiantes. Aun cuando este discurso presenta elementos expuestos por diferentes autores (e.g. Venkat y Adler, 2012; Adler y Venkat, 2014; Adler y Ronda, 2015; Sfard, 2008 y 2012), su guía son las preguntas. Por ejemplo, el profesor inicia su discurso con funciones ideacionales o textuales, pero estas siempre involucran peticiones a los estudiantes (de tipo ideacional o textual), esto genera que las respuestas de los estudiantes lleven a otras funciones en el discurso del profesor. Las peticiones en este discurso tienen un papel fundamental, lo que genera que el profesor constantemente pregunte a los estudiantes acerca de los significados producidos en clase y cómo estos significados se pueden relacionar para producir otros significados; de igual forma, una misma pregunta puede sugerir más de una petición, como se observa en el análisis de los fragmentos ilustrados. Sin embargo, las respuestas de estudiantes en ocasiones son concretas o poco profundas, generando una intervención del profesor con funciones textuales.

Para finalizar, es importante anotar tres aspectos:

- La interacción se reconoce como un elemento que posibilita la producción del discurso matemático del profesor, reflejado principalmente en funciones del discurso con peticiones; por esta razón la investigación base de este artículo continuará con el análisis de los efectos de la interacción, entre profesor y estudiantes, en la producción del discurso matemático durante la enseñanza de contenidos específicos.
- La relación entre las funciones del discurso puede variar de acuerdo al profesor o al objeto de enseñanza y aprendizaje de la sesión de clase que se analice; por ejemplo, es

posible que se presenten de forma diferente las funciones textuales si la clase tiene como objetivo de enseñanza introducir un contenido matemático. De esta manera se abre la posibilidad de investigar las funciones del discurso propuestas en este artículo en otros contextos y con otros objetos de enseñanza, permitiendo así analizar las relaciones entre estas funciones y la interpretación de otras posibles funciones del discurso.

- Los procesos de enseñanza y aprendizaje de la función cuadrática se pueden enriquecer con la presencia de diferentes funciones del discurso por parte del profesor; porque cada una tiene usos específicos que posibilitan la producción de significado. En este sentido, se invita a los profesores a que en su discurso durante la enseñanza de la función cuadrática expongan estos usos, por ejemplo: nombrando objetos matemáticos relacionados con la función; representándola gráfica, verbal y algebraicamente; ejemplificándola con diferentes coeficientes; calculando sus raíces, discriminante y vértice; narrando procedimientos a realizar con los ejemplos de la función cuadrática y explicando las razones para desarrollar estos procedimientos y no otros; narrando sus características; y conectando de manera coherente todo lo que se desarrolla en clase.

6. AGRADECIMIENTOS

Agradecimientos especiales a Nuria Planas Raig por sus comentarios a lo largo de la producción de este artículo.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Adler, J. (2012). Knowledge Resources in and for School Mathematics Teaching. En G. Gueudet, B. Pepin, y L. Trouche (Eds.), *From Text to «Lived» Resources* (Vol. 7, pp. 3-22). Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-007-1966-8_1
- Adler, J., y Ronda, E. (2015). A Framework for Describing Mathematics Discourse in Instruction and Interpreting Differences in Teaching. *African Journal of Research in Mathematics, Science and Technology Education*, 19(3), 237-254. <https://doi.org/10.1080/10288457.2015.1089677>
- Adler, J., y Venkat, H. (2014). Teachers' mathematical discourse in instruction: Focus on examples and explanations. En H. Venkat, M. Rollnick, J. Loughran, y M. Askew (Eds.), *Exploring mathematics and science teacher's knowledge. Windows into teacher thinking* (pp. 132-146). Routledge, Taylor & Francis Group.
- Bills, L., Dreyfus, T., Mason, J., Tsamir, P., Watson, A., & Zaslavsky, O. (2006). Exemplification in mathematics education. En J. Novotna, *Proceedings of the 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. PME.
- Halliday, M. A. K. (2014). *Halliday's introduction to functional grammar*. Routledge.
- Halliday, M. A. K. (2017). *Obras esenciales de M.A.K. Halliday*. (J. Arús, A. Montemayor-Borsinger, E. Ghio, A. Kevorkian, A. Lukin, F. Mónaco, F. Navarro, A. Noceti, V. Piaggio, & M. Picone, Trads.). Eudeba; Originales publicados en 2002, 2003 y 2004.
- Kaput, J., Blanton, M., y Moreno, L. (2008). Algebra from a symbolization point of view. En J. Kaput, D. Carraher, y M. Blanton (Eds.), *Algebra in the Early Grades* (pp. 19-55). Routledge, Taylor & Francis Group.

- Kostić, V., y Sekulić, T. (2022). Teaching quadratic functions in Classroom and online using mathematical software tools. *Proceedings TIE 2022*, 315-319. <https://doi.org/10.46793/TIE22.315K>
- Morgan, C. (2006). What does social semiotics have to offer mathematics education research? *Educational Studies in Mathematics*, 61, 219-245.
- Planas, N., Chico, J., García-Honrado, I., y Arnal-Bailera, A. (2019). Discursos del alumno y del profesor en clase de matemáticas. En *Investigación sobre el profesor de matemáticas: Práctica de aula, conocimiento, competencia y desarrollo profesional* (pp. 19-41). Universidad de Salamanca.
- Ruthven, K., y Hofmann, R. (2016). A case study of epistemic order in mathematics classroom dialogue. *PNA*, 11(1), 5-33.
- Sfard, A. (2008). *Thinking as Communicating: Human Development, the Growth of Discourses, and Mathematizing*. Cambridge, MA: Cambridge University Press.
- Sfard, A. (2012). Introduction: Developing mathematical discourse — Some insights from communicational research. *International Journal of Educational Research*, 51-52, 1-9. <https://doi.org/10.1016/j.ijer.2011.12.013>
- Venkat, H., y Adler, J. (2012). Coherence and connections in teachers' mathematical discourses in instruction. *Pythagoras*, 33(3).
- Watson, A., y Mason, J. (2005). *Mathematics as a constructive activity: Learners generating examples*. Lawrence Erlbaum Associates, Publishers.
- Zodik, I., y Zaslavsky, O. (2008). Characteristics of teachers' choice of examples in and for the mathematics classroom. *Educational Studies in Mathematics*, 69(2), 165-182. <https://doi.org/10.1007/s10649-008-9140-6> .

Diseño, implementación y análisis de una sesión de pensamiento algebraico en Educación Primaria

Lucía Flores Lamolda

Graduada en Educación Primaria (Universidad de Granada), luciaflores@correo.ugr.es

Resumen: *En este trabajo se presenta una propuesta para llevar a cabo el desarrollo del sentido algebraico en el aula de Educación Primaria. Para esto se han adaptado algunas de las tareas planteadas en la Unidad Didáctica realizada para la asignatura de Diseño y Desarrollo del Currículo de Matemáticas en Educación Primaria, que trataba acerca del trabajo con patrones a través de la búsqueda de regularidades. A partir de aquí se ha diseñado, desarrollado y analizado una sesión de clase que se ha puesto en práctica con alumnado de una clase de enriquecimiento curricular.*

Palabras clave: *pensamiento algebraico, patrones, generalización.*

Desing, implementation and analysis of an algebraic thinking session in Primary Education

Abstract: *This work presents a proposal to carry out the development of the algebraic sense in the Primary Education classroom. For this, some of the tasks proposed in the Didactic Unit carried out for the subject of Design and Development of the Mathematics Curriculum in Primary Education have been adapted, which outlined working with patterns through the search for norms. From here, a class session has been designed, developed and analyzed that has been put into practice with students of a curricular enrichment class.*

Key words: *algebraic thinking, patterns, generalization.*

1. INTRODUCCIÓN

La presencia del álgebra en el currículum de primaria en España ha cambiado en los últimos años. En la Orden de 17 de marzo de 2015, por la que se desarrolla el currículo correspondiente a la Educación Primaria en Andalucía, se articula la asignatura de Matemáticas en torno a “Bloques de contenidos”. Ninguno de estos bloques de contenidos es sobre álgebra, pero en el Bloque 1 “Procesos, métodos y actitudes matemáticas”, que se formula como eje vertebrador del resto de bloques, se establece que el alumnado de primaria ha de ser capaz entre otras acciones de “encontrar regularidades, patrones y leyes matemáticas, en contextos numéricos, geométricos y funcionales” (pág 221).

Por otro lado, el actual currículum de primaria, es decir el Real Decreto 157/2022 (RD, en adelante) queda articulado en torno a sentidos matemáticos, entre los cuales se incluye específicamente el sentido algebraico. En el RD se explica que el sentido algebraico incluye los saberes relativos, entre otros, al “reconocimiento de patrones y la expresión de regularidades o la modelización de situaciones con expresiones simbólicas” (p. 24486).

En cuanto a otros documentos que orientan la redacción del currículum de matemáticas, el Comité Español de Matemáticas (CEMAT), elaboró un documento llamado “Bases para la elaboración de un currículo de matemáticas en Educación no universitaria”. En este documento, se define el sentido algebraico como “ver lo general en lo particular, reconociendo patrones y relaciones de dependencia entre variables y expresando estas regularidades mediante diferentes representaciones, así como modelizar situaciones matemáticas o del mundo real con expresiones simbólicas” (Calvo et al., 2021, p. 14).

En el libro “Principios y estándares para la Educación Matemática” publicado en 2003, se establece el álgebra como uno de los estándares de la Educación Matemática desde la Educación Primaria.

2. MARCO TEÓRICO

2.1. Sentido matemático y sentido algebraico

En el actual currículo de matemáticas se ha introducido el concepto de sentido matemático. Este concepto hace referencia a un aprendizaje de las matemáticas en el cual el sujeto que aprende da sentido a los contenidos, a través de la elaboración de significados, poniendo los contenidos en su contexto, identificando las situaciones en las que se debe usar cada contenido y a través de la propuesta de soluciones a las distintas cuestiones que los usos en contexto puedan provocar (Ruiz-Hidalgo y Flores, 2022).

Además, Ruiz-Hidalgo y Flores (2022) y la CEMAT presentan 4 enfoques del álgebra escolar recogidos por Stacey, entre los que se encuentra:

- Generalización de patrones numéricos, geométricos y de las leyes que gobiernan las relaciones numéricas (p.15).

Dentro de este primer enfoque, tomando lo relativo a patrones, la CEMAT establece una serie de objetivos para el alumnado en función de la etapa escolar. De esta forma se indica que en Educación Primaria todo el alumnado debería:

- Describir regularidades de manera generalizada con palabras, gráficos o tablas.
- Crear patrones.
- Extender regularidades determinando un elemento concreto de una sucesión: el elemento siguiente, uno lejano y uno genérico (Calvo et al., 2021, p. 16).

2.2. Patrones

En la Tesis de Castro (1995), recogiendo las aportaciones de otros autores se explica que un patrón es aquello a lo que se da lugar al haber una situación repetida con regularidad (p. 26). Torres et. al, (en prensa), señalan que hay dos características clave de los patrones: regularidad y previsibilidad, siendo la regularidad la forma en la que se organizan y relacionan los elementos de una secuencia, lo que podemos llamar estructura del patrón. En este trabajo las tareas que se presentan a los estudiantes se basan en su mayoría en patrones con representación numérica y pictórica. La estructura numérica de los patrones es aritmética.

2.3. Generalización

Ureña et. al, (2022), señalan que “algunos de los elementos destacables del proceso de generalización son el reconocimiento de la regularidad, la generación de nuevos casos y la representación” (p.4).

Podemos distinguir entre dos tipos de generalización: la generalización cercana, que supone encontrar un patrón para elementos próximos o elementos que pueden hallarse por conteo y generalización lejana, que implica el hallazgo de un término general (Merino et. al, 2013).

Algunas de las estrategias que se usan para resolver las tareas planteadas son las siguientes, recogidas por Ureña (2021, p. 42):

- Funcionales: consisten en expresar, generalizar o usar implícita o explícitamente una relación funcional entre dos variables.
- Recursivas: se emplea la diferencia común entre dos términos consecutivos.

3. MARCO TEÓRICO

Las tareas planteadas en este trabajo parten de una Unidad Didáctica que se elaboró usando el método del análisis didáctico. El análisis didáctico empleado en este curso parte de una consideración funcional del currículo, por lo que se interesa por examinar el significado del contenido, las potencialidades cognitivas que encierra y los medios de los que dispone el profesor para lograr su aprendizaje (Rico, 2015).

El análisis cognitivo se concretará en los objetivos de aprendizaje que se seleccionarán para alcanzar con las tareas propuestas.

- Hallar la regularidad de un patrón y explicarla oralmente.
- Expresar oralmente los razonamientos llevados a cabo en el trabajo con patrones.
- Expresar oral y simbólicamente la generalización de un patrón dado.
- Representar patrones de manera geométrica y numérica.

3.1. Tareas

El análisis de instrucción consiste en examinar qué tareas podemos poner en juego para lograr el aprendizaje, estudiar sus cualidades formularlas con precisión, determinando todos los elementos que las hagan operativas (Gómez y Romero, 2015). En este apartado se presenta la gestión de las mismas, es decir, cómo se diseña la tarea para el aula, detallando cómo y cuándo va a intervenir el profesor.

3.1.1. Tarea 1: *Formamos cuadrados*

Se comenzará presentando al alumnado la construcción mostrada en la Figura 1. Cada uno contará con una serie de palillos, de forma que se les pedirá que reproduzcan la figura. Después se preguntará qué cuántos cuadrados se observan en la figura y cuántos palillos se han necesitado para construirlos. Tras esto se construirá el siguiente término (Figura 2):

Figura 1

Primer término del patrón que se presentará a los alumnos



Figura 2

Segundo término que han de construir los alumnos



Se pedirá de nuevo que lo construyan con los palillos que tienen y que cuenten el número de cuadrados y la cantidad de palillos que han necesitado para construirlos.

Se plantean las siguientes cuestiones: *¿Qué ha cambiado de una figura a la siguiente?*
¿Cuántos palillos se han puesto?

Ahora rellenarán una ficha en la que aparece una tabla donde tendrán que dibujar algunos términos e indicar cómo se pasa de un término al siguiente. Se comenzará indicando cuál es el primer término que aparece en la ficha (el formado por dos cuadrados). Luego se aclarará que lo que deben hacer es poner las figuras que tienen 2, 3 y 4 cuadrados, contar los palillos que los forman y representar gráficamente la figura. A continuación, se explica el segundo ejercicio de la ficha en el que deben indicar la serie numérica, aclarando que el 4 que aparece en el primer círculo se refiere a los 4 palillos necesarios para construir el primer cuadrado.

Ahora se plantea la siguiente cuestión: *¿cuántos palillos se necesitan para construir la figura que tiene 10 cuadrados?* *¿Se os ocurre cómo se puede saber?*

Se comienza preguntando para 10 palillos, se apuntan respuestas en la pizarra y se pregunta si el resto está de acuerdo. Se pretende señalar que para hallar un término tienen que multiplicar uno menos que el número de cuadrados por 3 y sumarle 4, para llegar a la conclusión de que la figura que tiene 10 cuadrados se calcula de la siguiente forma:

Los palillos necesarios para construir la figura que tiene 10 cuadrados: $4+9 \times 3 = 31$.

En la Figura 10, el número de palillos sería: $4+9 \times 3 = 31$.

A continuación, se pregunta cómo se calcularía la cantidad de palillos para construir la figura que tiene 20 cuadrados. Se pide que, además de decir la expresión, se calcule la cantidad para comprobar si la cantidad de palillos necesaria para construir la figura que tiene 20 cuadrados es el doble de la necesaria para construir la figura que tiene 10 cuadrados.

Lo que se pretende es que el alumnado tome conciencia de que la forma de hallar un término cualquiera es calculando 4 más 3 por el número de cuadrados que tiene la figura menos uno. Para aproximarse a esto se empieza por números más o menos asequibles, como 10 o 20, pero se va llegando a números más grandes para poder hallar el término general. De esta forma pasamos a preguntar la expresión para calcular la cantidad de palillos necesarios para construir la figura que tiene 1200 cuadrados. En todos estos pasos se va pidiendo justificación oral del razonamiento llevado a cabo por el alumnado.

Para introducir la notación simbólica se hace la siguiente explicación: *los matemáticos llaman N a un número cualquiera, y si tú me dices la cantidad de cuadrados que quieres construir, yo te digo la cantidad de palillos que necesitas. Si por ejemplo quisiera saber cuántos palillos se necesitan para construir “tropeientos mil” cuadrados, ¿cuántos palillos habría?*

Una vez calculada la expresión con “tropeientos mil” se indica en la pizarra la notación simbólica usando N :

$$4+3\times(N-1)$$

Ahora se hace el proceso inverso. Se plantea a los alumnos una cantidad de palillos para saber cuántos cuadrados se pueden construir. Por ejemplo 34 y 67.

3.1.2. Tarea 2: Formamos triángulos

Se presenta a los alumnos la figura 3 para que la construyan con palillos.

Figura 3

Representación pictórica del tercer término del patrón



Se plantean las siguientes cuestiones: *¿Cuántos triángulos observas? ¿Cuántos lápices se han usado para construirlos? ¿Cómo construirías la siguiente figura?*

Después se repartirá una ficha para que la rellenen de forma individual. Tras esto se plantean algunas cuestiones:

¿Cuántos lápices necesitamos para pasar de una figura a la siguiente?

Sabiendo la cantidad de lápices para pasar de una figura a la siguiente, y sabiendo cuántos lápices necesitas para construir el primer triángulo, ¿cuántos lápices necesitamos en este caso para construir la figura formada por 10 triángulos? ¿Y para la figura que tiene 20 triángulos?

Ahora se pide que escojan un número muy grande para volver a calcular el número de palillos necesarios, por ejemplo, un millón. Se señala entonces que para calcular eso haríamos $3+2$ por un millón menos 1 y se les pide a partir de aquí que lo calculen en función de N , tal y como se había trabajado antes.

Ahora volvemos a hacer el proceso a la inversa, se plantea una cantidad de palillos y se pregunta cuántos cuadrados podrían construirse.

3.1.3. Tarea 3: Carrera a 21

Esta tarea se extrae de una propuesta por Brousseau “Carrera a 20” (1998). Para esto se comienza exponiendo las reglas del juego: este se juega por parejas y el objetivo es llegar a 21, de forma que se van diciendo números de forma alterna. Cada uno de los participantes puede únicamente sumar uno o dos al número anteriormente dicho. Se seleccionan distintas parejas de alumnos para que puedan practicar. Tras haber jugado algunas veces se hacen preguntas para ver cuál es la estrategia ganadora, identificando cuáles son los números que al decirlos ganas siempre y comprobando que las hipótesis expuestas son ciertas.

4. METODOLOGÍA

Las tareas descritas en el apartado anterior se llevaron a cabo en una clase de enriquecimiento curricular, en la que había 9 estudiantes: cuatro de cuarto de primaria, dos de quinto y tres de sexto.

Algunas de las características del alumnado con talento matemático recogidas de Greenes y otros autores por Ramírez (2012), son la “habilidad para la organización de datos” y la “habilidad para generalizar”. Es por esto que la sesión se desarrolló en una clase de enriquecimiento curricular donde el alumnado tiene características que le predisponen a resolver esta clase de tareas.

4.1. Elementos de análisis

Para analizar el desarrollo del sentido algebraico en el alumnado que participó en el desarrollo de la sesión, se han usado algunos de los elementos recogidos en la justificación y marco teórico de este trabajo, que se exponen a continuación.

En primer lugar, se han tenido en cuenta los objetivos planteados por la CEMAT para alumnado de educación primaria en cuanto al trabajo con patrones:

- Describir regularidades de manera generalizada con palabras, gráficos o tablas
- Extender regularidades determinando un elemento concreto de la sucesión:
 - a. El elemento siguiente
 - b. Un elemento lejano
 - c. Elemento genérico

También se ha estudiado qué tipo de generalización se lleva a cabo, teniendo en cuenta la distinción establecida por Merino et. al (2013): generalización cercana y generalización lejana. Para estudiar esto se tendrá en cuenta si el alumnado es capaz de identificar las regularidades además de generar nuevos casos y qué tipos de representaciones de la generalización se producen. En este caso entendemos la representación de la generalización como el modo en que el alumno evidencia y expresa de forma externa esta generalización (Ureña et al, 2022). De este modo se indicará si la representación es verbal o simbólica.

Por último, se ha hecho referencia a algunas de las estrategias usadas por los alumnos y alumnas para resolver las distintas cuestiones planteadas en las tareas, según las establecidas por Ureña (2021):

- Funcionales
- Recursivas

4.2. Resultados

Para analizar los resultados obtenidos tras implementar la sesión, se irán analizando las distintas tareas por separado. En el caso de las dos primeras tareas se comentarán en primer lugar las respuestas obtenidas en los cuestionarios y después se analizará la puesta en común.

En cuanto al cuestionario de la Tarea 1, 6 de los 9 alumnos dieron las respuestas esperadas. Con respecto a los otros tres cuestionarios, una alumna tuvo dificultades para completar la serie numérica, quedándose en el cuarto término. Otra alumna contó en vez de los cuadrados como los formados con palillos que habíamos construido en la realidad y aparecían como ejemplo, aquellos que quedaban dentro de los límites construidos con los palillos. Por último, un alumno señaló de forma incorrecta en algunos casos la regularidad, indicando “-3” en vez de “+3”, aunque completó los términos correctamente.

En cuanto a la puesta en común, se comenzó mostrando un término de la sucesión construido con palillos para que así los alumnos y alumnas pudieran construirlo de forma individual. Tras esto, se pidió que se contaran la cantidad de palillos y que construyeran el siguiente término. Al preguntar cómo se pasa de un término a otro una alumna estableció lo siguiente:

Añadiendo tres palos más, porque este palo (señala el último vertical del término anterior) sirve para el siguiente

Por lo tanto, se ha fijado en cómo continuar la estructura geométrica de la representación pictórica del patrón, pero ha establecido numéricamente cuál es la diferencia entre dos términos consecutivos de la sucesión aritmética. Vemos por tanto que ha sido capaz de identificar y describir regularidades con palabras además de establecer el elemento siguiente de una sucesión. Hasta aquí los resultados han sido hallados a través de estrategias de recursividad, ya que se parte del elemento anterior para construir el siguiente, contando los palillos que se añaden en cada caso.

Para continuar se quiere ver si son capaces de llevar a cabo una generalización cercana, es decir, ver si son capaces de generar nuevos casos. Para esto se preguntó la cantidad de palillos necesaria para construir la figura que tiene 10 cuadrados. Tras varias intervenciones, concluyeron en que debían de usar la siguiente expresión:

$$9 \times 3 + 4 = 31$$

Usaron una estrategia funcional para relacionar la cantidad de cuadrados que se quieren construir con la cantidad de palillos necesaria para hacerlo. Tras esto se les preguntó la cantidad de palillos necesarios para construir la figura que tiene 20 cuadrados. Ante esta situación comenzaron pensando que sería el doble a lo anterior, pero al compararlo con el caso de las figuras que tienen uno y dos cuadrados se dieron cuenta de que no funcionaba así. Al final establecieron la siguiente expresión:

$$3 \times 19 + 4 = 61$$

Se dieron cuenta por tanto que salía el doble que para construir 10 cuadrados menos 1.

Una vez comprobado que podían llevar a cabo la generalización hallando dos términos cercanos se les planteó si sabían calcular la cantidad de palillos necesaria para construir el término que tenía 1200 cuadrados, justificando la respuesta:

Alumno 1: 4 y después serían 3 por 1199. Porque yo creo que el cuadrado inicial como son 4 más 3 veces 1199 porque como 1200 cuadrados, como ya tienes el principal que son 4, solo tienes que multiplicarlo 3 veces por 1199 para que te salieran 1200 cuadrados.

Alumna 1: *lo que estamos haciendo siempre es $4+3$ y un número menos de lo que hemos dicho al principio.*

De esta forma vemos que los alumnos que participaron en la puesta en común fueron capaces de generar nuevos casos determinando elementos concretos de una sucesión. En este caso el elemento siguiente y elementos lejanos. Por tanto, se puede afirmar que se ha producido una generalización lejana usando una estrategia funcional.

Tras esto se les explicó que usamos “ N ” para llamar a un número que desconocemos, y que podemos saber para cualquier número de cuadrados que queramos construir la cantidad de palillos que necesitamos. Se les preguntó cuántos palillos necesitaríamos para construir “tropecientosmil cuadrados” y la respuesta fue: $4 + 3 \times \text{tropecientos mil menos } 1$. Tras esto se apuntó en la pizarra el término general en función de N :

$$4 + 3 \times (N-1)$$

Por tanto, los alumnos que participaron en la puesta en común llegaron a la representación simbólica de la generalización. A partir de la descripción verbal de la regularidad presente en el patrón tanto en su representación numérica como pictórica, y la extensión de regularidades determinando tantos elementos cercanos como lejanos, fueron capaces de expresar el elemento general tras haber llevado a cabo una generalización lejana. Además, se preguntó a los demás si estaban de acuerdo en la representación simbólica de la generalización obtenida y los demás asintieron.

Para finalizar la tarea se llevó a cabo el proceso correspondiente a la función inversa, es decir, dada una cantidad de palillos, hallar el número de cuadrados que podrían formarse. En el caso de 34 palillos un alumno estableció que se descompondrá multiplicando 3 por 10 y sumando 4. En el caso de 67 palillos otro alumno declaró “*le restaría 4 y dividiría ese número entre 3*”.

En cuanto a la Tarea 2, 7 de los 9 alumnos completaron como se esperaba al cuestionario. De los dos cuestionarios restantes, en uno de ellos una alumna no completó la serie numérica. En el otro, un alumno a la hora de representar el patrón de forma pictórica no lo hizo de manera secuencial.

En cuanto a la puesta en común, se procedió siguiendo los pasos de lo establecido en la gestión. Primero se pidió que construyeran algunos términos del patrón con palillos para que expresaran cómo se pasa de un término a otro.

Hasta aquí podemos extraer las conclusiones de la tarea anterior: el alumnado que participa en la puesta en común consigue describir regularidades con palabras y establecer el elemento siguiente del patrón. Es decir, identifica la regularidad. Las estrategias usadas inicialmente son de recurrencia, contando los palillos que se añaden para pasar de un término al siguiente. Al igual que en el caso anterior se han fijado en cómo continuar la estructura geométrica de la representación pictórica del patrón, pero habiendo establecido la diferencia aritmética entre ambos términos.

Se les volvió a preguntar cuántos palillos necesitaríamos para construir la figura que tiene 10 triángulos, y se obtuvieron las siguientes respuestas:

Alumno 1: *para 10 necesitamos 3 que son del primer triángulo más 2 por....*

Alumno 2: *tres más dos por nueve*

Entre todos establecieron en voz alta que el resultado de esto es 31. En esta ocasión, además, al preguntar la cantidad de palillos necesaria para construir la figura que tiene 20 triángulos responden que se tendría que calcular la expresión “ $3+2 \times 19$ ”. Y un alumno indica que el resultado de esto es 41.

A continuación, se les pidió que eligieran un número grande de triángulos y un alumno dijo que 1 millón, las respuestas de la cantidad de palillos necesarios fueron las siguientes:

Alumno 1: $3+2$ por 999.999

Alumno 2: *sería más fácil poner 1 millón menos 1*

De esta forma podemos afirmar que son capaces de generar nuevos casos a través de estrategias funcionales.

Al preguntarles la cantidad de palillos necesaria para construir “N” triángulos, rápidamente un alumno respondió que sería: $3+2 \times (N-1)$. Hallando de nuevo la generalización usando la representación simbólica. Asimismo, se les pregunta cómo se calcularía la cantidad de triángulos que podemos construir con 25 palillos y un alumno establece que se haría restando tres a 25, después dividiendo el resultado entre dos y por último sumando 1, de forma que con 25 palillos podemos hacer 12 triángulos. Es decir, hallan la relación inversa.

En cuanto a la Tarea 3, solo analizamos la puesta en común puesto que no se pasó ningún cuestionario. Al principio dos alumnos comenzaron a hacer el “juego”. Cuando uno de ellos dijo el número 18, los demás ya se dieron cuenta de que ese había ganado. Se les preguntó por qué y se obtuvo la siguiente respuesta:

Porque ya como que ha dicho 18, dijese el otro el número que dijese, como de 18 no se puede llegar a 21, pues si el siguiente dice 1 quedan dos y se dice dos queda uno.

La pretensión era que hallaran los números menores que 18 que al decirlos ganas seguro. Propusieron el 16 pero se dieron cuenta de que no valía, pero usando el mismo razonamiento que para hallar el 18, llegaron a la conclusión de que el que dice 15 gana. De la misma forma concluyen que el que dice 12 gana, y en este momento un alumno señala que están bajando de tres en tres, por lo que el primer número que gana es el tres y esto significa que es el segundo jugador el que gana. Tras esto jugaron entre ellos para comprobarlo.

Por tanto, fueron capaces de identificar la regularidad, es decir, ver que la estrategia ganadora en el caso de que el número al que se tiene que llevar es el 21, es decir múltiplos de 3. La estrategia usada en este caso es de recurrencia, puesto que se van obteniendo números “ganadores” a partir del anterior. Por tanto, expresan la generalización en ese caso concreto a través de la representación verbal.

5. CONCLUSIONES

Con este trabajo queríamos abordar el desarrollo del sentido algebraico en estudiantes de enriquecimiento curricular de educación primaria.

La mayoría de los alumnos y alumnas respondieron correctamente a los cuestionarios planteados y en cuanto a la puesta en común, prácticamente todos los alumnos y alumnas participaron en algún momento. En los resultados de las distintas tareas vemos como para los distintos patrones propuestos fueron capaces de identificar la regularidad, usando estrategias de recursividad, al explicar cómo se iba completando el patrón tanto en su representación numérica como pictórica fijándose en el paso de un término a otro. Tras esto son capaces de generar nuevos casos, que cada vez son más lejanos al primer término planteado. Se aprecia por tanto cómo hallan una generalización cercana usando la estrategia más sofisticada, que es la funcional.

Por último, al introducirles al uso de la notación simbólica, son capaces de generalizar el patrón usando la representación simbólica. Además de esto fueron capaces de hallar la relación inversa.

En el caso de la Tarea 3, salvo casos aislados, aquellos que participaron en el juego y los que lo observaban fueron conscientes de que al decir el número 18 se ganaba, y a partir de aquí pudieron obtener la estrategia ganadora. Esto implica haber identificado la regularidad de los “términos” ganadores, además de representar esta regularidad verbalmente al establecer que eran múltiplos de 3.

Tomando los objetivos que se recogen en el análisis cognitivo y relacionándolos con lo expuesto en el apartado de resultados, se observa que el alumnado es capaz de hallar la regularidad de un patrón y explicar oralmente. Además, es capaz de expresar oralmente la generalización de un patrón, llegando incluso al punto de representarlo simbólicamente.

Por tanto, concluimos que los alumnos y alumnas que realizaron la sesión fueron capaces de cumplir tanto los objetivos propuestos como los que se plantean en documentos oficiales como el presentado por la CEMAT y las directrices curriculares mostradas en el RD 157/2022. Además, cabe señalar que aunque el alumnado que participó en la sesión pertenecía a diferentes cursos la participación se llevó a cabo casi por igual entre todos, sin menoscabo de los de cursos más bajos que también dieron respuestas que fueron una pieza clave para hallar la generalización de los patrones planteados.

6. AGRADECIMIENTOS

Este trabajo se ha realizado en el proyecto con referencia PID2020-113601GB-I00, financiado por la Agencia Estatal de Investigación (AEI) de España.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Brousseau, G. (1998). *Théorie des situations didactiques*. La Pensée Sauvage.
- Calvo Pesce, C., Carrillo de Albornoz Torres, A., de la Fuente Pérez, A., de León Rodríguez, M., González López, M. J., Gordaliza Ramos, A., Guevara Casanova, I., Lázaro del Pozo, C., Monzó del Olmo, O., Moreno Verdejo, A. J., Rodríguez Muñiz, L. J., Rodríguez Taboada, J. y Serradó Bayés, A. (2021). *Bases para la elaboración de un currículo de Matemáticas en Educación no Universitaria*. Comité Español de Matemáticas. <https://matematicas.uclm.es/cemat/wp-content/uploads/bases2021.pdf>
- Castro, E. (1995). *Exploración de patrones numéricos mediante configuraciones puntuales*. Tesis Doctoral. Granada: Universidad de Granada. <http://hdl.handle.net/10481/25009>
- Gómez, P. y Romero, I. (2015). Enseñar las matemáticas escolares. En P. Flores y L. Rico. (Coord.), *Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en Educación Primaria*. (61-88). Pirámide.
- Orden de 17 de marzo de 2015, por la que se desarrolla el currículo correspondiente a la Educación Primaria en Andalucía. *Boletín Oficial de la Junta de Andalucía*, 60, de 27 de marzo de 2015. <https://www.juntadeandalucia.es/boja/2015/60/1>
- Merino, E., Cañadas, M. C. y Molina, M. (2013). Uso de representaciones y patrones por alumnos de quinto de educación primaria en una tarea de generalización. *Edma 0-6. Educación Matemática en la infancia*, 2(1), 24-40.

<https://doi.org/10.24197/edmain.1.2013.24-40>

- NTCM (2003). Estándares de las matemáticas escolares: desde Prekindergarden al nivel 12 inclusive. En NTCM, *Principios y Estándares para la Educación Matemática*, (pp. 30-75). NTCM
- Ramírez, R. (2012). *Habilidades de visualización de los alumnos con talento matemático*. Tesis doctoral. Universidad de Granada. <http://hdl.handle.net/10481/23889>
- Real Decreto 157/2022, de 1 de marzo, por el que se establecen la ordenación y las enseñanzas mínimas de la Educación Primaria. *Boletín Oficial del Estado*, 52, de 2 de marzo de 2022. <https://www.boe.es/buscar/act.php?id=BOE-A-2022-3296>
- Rico, L. (2015). Matemáticas escolares y conocimiento didáctico. En P. Flores, y L. Rico. (Coord.), *Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en Educación Primaria*, (pp. 21-40). Pirámide.
- Ruiz-Hidalgo, J.F. y Flores, P. (2022). Sentido matemático escolar. En L.J. Blanco, N. Climent, M.T. González, A. Moreno, G. Sánchez-Matamoros, C. de Castro, y C. Jiménez.(Eds.), *Aportes al desarrollo del currículo desde la investigación en educación matemática*, pp. 55-79. Editorial Universidad de Granada.
- Torres, M. D., Ayala-Altamirano, C. y Ramírez, R. (en prensa). Variabilidad en la invención de patrones en estudiantes de Educación Primaria.
- Ureña, J. (2021). *Representaciones de generalización y estrategias empleadas en la resolución de tareas que involucran relaciones funcionales. Una investigación con estudiantes de primaria y secundaria*. Tesis doctoral. Universidad de Granada. <http://hdl.handle.net/10481/66412>
- Ureña, J., Ramírez-Uclés, R., Cañadas, M.C. y Molina, M. (2022). Generalization strategies and representations used by final-year elementary school students, *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, <http://doi.org/10.1080/0020739X.2022.2058429> .

Construyendo el “mapamático”

Antonio Lobo Santos

Facultad de Matemáticas, Universidad de Sevilla (Sevilla, España),
alobosantos@gmail.com

Pablo Martín Berná

Facultad de Matemáticas, Universidad de Sevilla (Sevilla, España),
paumartin.2407@gmail.com

Juan Núñez Valdés

Facultad de Matemáticas, Universidad de Sevilla (Sevilla, España), jnvaldes@us.es

Resumen: *En este artículo se muestra el proceso de construcción, evolución y funcionamiento de una página web que alberga al “mapamático”, un mapa interactivo de las distintas calles que tienen nombres de matemáticos en una ciudad. Se comentan los problemas aparecidos en el proceso de construcción de la misma y se muestra su contenido en el caso particular de la provincia de Sevilla, provincia de nacimiento de los autores. Una propuesta final, dirigida a cualquier persona interesada, es también planteada.*

Palabras clave: *mapamático, calles con nombres de matemáticos, construcción de páginas web, rutas matemáticas, divulgación de las matemáticas.*

Constructing the “mapamático”

Abstract: *This article shows the process of construction, evolution and operation of a website that houses the “mapamático”, an interactive map of the different streets named after mathematicians in a city. The problems that have arisen in the process of its construction are discussed and its content is shown in the particular case of the province of Seville, the province of birth of the authors. A final proposal, addressed to any interested person is also presented.*

Key words: *mathematical map; streets named after mathematicians; construction of web pages; math paths; dissemination of Mathematics.*

1. INTRODUCCIÓN

La historia de las Matemáticas y de sus personajes principales en general, y cualquier otro asunto relacionado con esa disciplina en particular, que no consista exactamente en las explicaciones teóricas y prácticas de su contenido, no suelen ser aspectos muy tratados en las clases de esa asignatura en los centros de Enseñanza Secundaria y Bachillerato. Sin embargo, en opinión de los autores, ese tratamiento podría ser muy aprovechable y beneficioso en cualquier clase de Matemáticas, cualquiera que fuese el nivel y el concepto que se esté explicando en ese

momento, pues cualquier comentario que al profesor o profesora se le ocurra hacer con respecto a cualquiera de estos asuntos es siempre escuchado con mucha atención por los alumnos y alumnas y muchas veces provoca el interés de buscar más datos por parte de estos y poder ampliar así ese conocimiento (de aquí en adelante, y solo por razones de brevedad, en este artículo usaremos el masculino para referirnos a los dos géneros, reconociendo, no obstante, la igualdad de ambos géneros y asumiendo todos los últimos avances que se han producido en la sociedad en materia de igualdad, no solo los referidos al lenguaje y escritura).

Como experiencia pasada, a uno de los autores de este artículo se le ocurrió preguntarle en un momento dado a uno de sus alumnos de Instituto, que vivía en la calle María del Carmen Martínez Sancho, de Sevilla, si él sabía quién era esa mujer y si había oído hablar de ella. Aunque hubiera sido solo por motivos de curiosidad, el profesor pensaba que el alumno sí se habría interesado por saber quién era la persona que daba nombre a la calle en la que él vivía con su familia, pero sorprendentemente para él, el alumno le respondió que ignoraba quién era esa señora y qué es lo que había hecho, y cuándo, para que se le hubiese puesto su nombre a una calle de Sevilla. El profesor le comentó que María del Carmen Martínez Sancho era la primera mujer que había conseguido obtener un doctorado en Matemáticas en España y también la primera mujer catedrática de Matemáticas de instituto en nuestro país. Afortunadamente, el alumno, a quien se le pusieron los ojos como platos al oír eso, le aseguró al profesor que trataría de enterarse lo más posible de la vida de esa señora, lo cual fue cierto, pues luego mantuvo con él bastantes conversaciones al respecto en diferentes momentos.

Ciertamente, los autores pensamos que el nombre de esa mujer u otros similares es fácil que no les suenen a la mayoría, no solo de los alumnos de instituto, sino de los propios profesores, incluidos los de Matemáticas en este caso e incluso los de Universidad, puesto que quizás sea un aspecto demasiado selectivo y específico el interesarse por saber quiénes fueron los primeros doctores en determinadas disciplinas, pero sin embargo existen nombres en el callejero de las ciudades, como por ejemplo, Averroes, Juan de la Cierva, José de Echegaray (por cierto, matemático y primer Premio Nobel español, aunque no por sus trabajos en Matemáticas, sino por su producción literaria), Leonardo Torres Quevedo u otros similares que los alumnos no aciertan a indicar si fueron científicos o literatos o médicos o ni siquiera saben de quiénes se trata. Y, sin embargo, los autores pensamos que el conocimiento de todos estos personajes debería ser facilitado por el profesorado de las distintas disciplinas a sus alumnos, en primer lugar como aspecto de cultura general, y en segundo lugar, para motivarles en el estudio de aquellas cuestiones con los que todos estos personajes estuvieron relacionados. Es prácticamente seguro que si a los alumnos de Primaria, por ejemplo, cuando estén estudiando los triángulos se les habla del secretismo de la Escuela Pitagórica o de que el Teorema de Pitágoras quizás no fue descubierto por el propio Pitágoras, sino que quizá lo fue por alguno de sus discípulos (ya que estos no podían atribuirse ningún descubrimiento, pues las normas de la Escuela Pitagórica les exigían que cualquier descubrimiento que hiciese cualquiera de sus miembros debería ser atribuido al propio Pitágoras), los alumnos querrán saber más de todo esto y se motivarán mucho más por ese teorema, tanto por aprenderlo como por enterarse de más cosas (las razones de ese secretismo, por ejemplo) que si simplemente se les indica su enunciado y se pasa sin más a hacer algunos ejemplos de su aplicación.

Viene todo lo anterior a cuento aprovechando que la revista “La Gaceta” de la Real Sociedad Matemática Española dedicó la portada de su volumen 14, número 3, de 2011 a mostrar algunas placas de calles rotuladas en honor de matemáticos ilustres, con el objetivo de proporcionar un modesto homenaje a quienes se habían esforzado, y actualmente se esfuerzan,

por desarrollar las Matemáticas en España e hicieron posible que dicha Sociedad cumpliera 100 años (en aquella fecha). Las placas de matemáticos que aparecían en esa portada eran las siguientes (ver Figura 1): calle de Echegaray (en la ciudad de Madrid), carrer del matemàtic Marzal (en Valencia), calle García Galdeano y calle de Rubio de Francia (ambas en Zaragoza), calle del matemàtic José J. Guadalupe (en Santa Cruz de La Palma), carrer d'en Luis Santaló (en Gerona), calle Rey Pastor (en Logroño), calle matemàtic Pedrayes (en Oviedo) y calle L. Torres Quevedo (en Zaragoza).

Figura 1

Portada del volumen 14, n.º 3 de *La Gaceta*. Fuente: archivo fotogràfico de los autores.



Pues bien, desde la aparición de ese número de la revista, uno de los autores de este artículo se interesó en buscar los nombres de las calles de matemáticos o matemáticas que se encuentran en las localidades, tanto ciudades como pueblos, de su Comunidad Autónoma, de Andalucía. No obstante, y por diferentes razones, este interés no lo ha podido llevar a cabo hasta el presente, cuando contando con la colaboración de los otros dos autores, ha sido posible construir un programa informàtico que ha permitido facilitar esta tarea, teniendo además la ventaja de que también permite obtener no solo el nombre de las calles rotuladas con nombres de matemáticos, sino también el de las calles de cualquier ciudad con nombres de personas dedicadas a cualquier otra disciplina.

De ahí que el objetivo principal de este artículo es mostrar la construcción y aplicaciones del programa informàtico aludido, al que los autores han dado en llamar el “mapamàtico”, el cual que facilita de manera sencilla una búsqueda rápida y fiable de calles rotuladas con nombres de matemáticos. En realidad, el mapamàtico no es más que una herramienta que permite relacionar el paisaje urbano, en este caso el callejero, con las matemáticas y sus protagonistas.

Otro de los objetivos del artículo es enfatizar y poner en valor la pertinencia del uso del mapamàtico en relación al currículum LOMLOE (Reales Decretos 217/2022 y 243/2022) para trabajar las competencias específicas y la relación con los sentidos matemáticos del alumnado. Nótese que ese uso facilitaría grandemente el que el alumno fuese el protagonista de su propio

aprendizaje, permitiéndole construir conocimiento y ponerlo en práctica para poder activarlo en situaciones contextualizadas.

En las siguientes secciones del artículo se presentan el proceso de la construcción de ese programa en sus distintas etapas y algunos resultados obtenidos con su aplicación. De manera particular, se ha realizado el estudio de las calles dedicadas a matemáticos en la provincia de Sevilla, por ser esta la ciudad la de nacimiento y residencia de los autores.

Tras la sección de Conclusiones y Propuestas, en la que los autores han incluido también dos de estas últimas, dirigidas, respectivamente, al colectivo de profesores y a cualquier persona que pudiera estar interesada en este asunto, el artículo finaliza con las correspondientes Referencias utilizadas y también con un Anexo Final, muy relacionado con el contenido del mismo, que permite mostrar la vigencia y actualidad de este asunto que se trata.

2. EL PROCESO DE CONSTRUCCIÓN DEL MAPAMÁTICO

El primer problema que surgió en este proceso de construcción del mapamático fue el de conseguir un listado de las calles de todos los municipios españoles. Tras pensar, pero luego descartar, el envío de cartas a los ayuntamientos solicitando esa información, por entender que muchos de ellos no iban a responder y que además ese proceso podría demorarse mucho por el casi seguro retraso que se produciría en la recepción de las respuestas, los autores tuvieron la fortuna de hallar en Google unos archivos de dominio público, entre los que seleccionaron dos para empezar a trabajar: las “calles de Andalucía” (Junta de Andalucía, 2023) y las “calles de la Comunidad de Madrid” (Instituto de Estadística de la Comunidad de Madrid, 2023).

Una nueva dificultad añadida fue que esos archivos venían con una extensión no usual (.gpkg). No obstante, se pudo resolver esa dificultad gracias a la Comunidad de Python (2019), que permitió hacer un pequeño script para transformar esos datos a otro formato más cómodo. Recuérdese que Python es un lenguaje de programación Open Source que fue desarrollado en 1991 por el informático holandés Guido van Rossum, nacido en 1956, quien además de introducir el citado programa, tiene el honor de ser la primera persona en obtener el título BDFL (Benevolent Dictator for Life), título que se concede a personajes importantes en el mundo de la codificación abierta, teniendo asignada la tarea de fijar tanto las directrices sobre la evolución de Python, como la de tomar decisiones finales sobre el lenguaje que todos los desarrolladores acatan.

Un segundo problema que les surgió a los autores se produjo cuando estos se encontraron con que la cantidad de calles que aparecían en esos listados era elevadísima, lo que hacía inviable consultarlas todas manualmente. En concreto, solo en Sevilla y su provincia aparecieron unos 25000 nombres de calles, número que hacía materialmente imposible comprobar de manera manual si representaban o no a nombres de matemáticos.

Debido a ello y con el objetivo de cribar esos archivos y salvar esa dificultad, los autores elaboraron un programa informático que fuese comprobando si el artículo asociado al nombre de la calle en internet contenía la palabra “matemático/matemática”. Ese programa, usado para el caso de las calles de Sevilla y provincia, permitió descartar aproximadamente el 96% de los nombres de calles, quedando algo menos de 1000 de ellos tras esa criba.

No obstante, a pesar de ese cribado masivo, los autores se encontraron con muchos resultados erróneos, puesto que algunas personas que nombraban esas calles no eran matemáticos propiamente, sino científicos en general, como Albert Einstein o Marie Curie, por

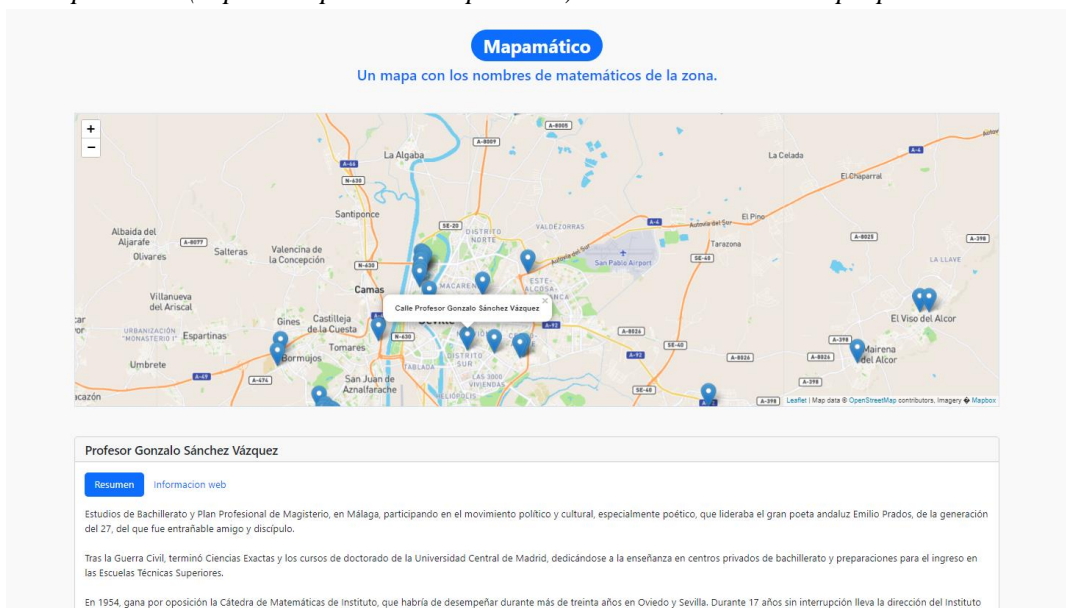
ejemplo. Eso hizo que, en principio, pensarán descartar manualmente a estos últimos mediante una búsqueda de confirmación en internet.

Sin embargo, este conjunto de calles de matemáticos les llamó la atención, ya que probando con otras disciplinas, como con la Literatura, por ejemplo, se obtenía un mayor número de calles e incluso otras ramas científicas, como la Física, con las que también probaron, superaban notablemente el número de calles que se encontraban con respecto a las mismas en el caso de los matemáticos, lo cual les llevó a la conclusión de que la escasa cantidad de calles dedicadas a matemáticos se debía a que estas se veían en muchos casos solapadas por las dedicadas a personas relacionadas con otras disciplinas, a pesar de ser las Matemáticas, como ya suele ser ampliamente reconocido, un pilar fundamental para el desarrollo de todas ellas. Debido a ello, los autores decidieron no descartar las calles rotuladas con los nombres de aquellos científicos en cuyas biografías se les tachaba también de matemáticos, aunque claramente no lo fueran en el sentido estricto del término.

Continuando con el proceso y una vez obtenida ya la información, a los autores se les plantearon dos dudas: cómo representar los datos de manera cómoda y sencilla de entender y cómo darla a conocer para que pudiera ser usada convenientemente.

Figura 2

Web mapamático (aspecto superior de la pantalla). Fuente: elaboración propia.



Para dar una buena respuesta a esas dos cuestiones los autores decidieron crear el “mapamático”, un mapa interactivo que permitiera poder mostrar tantas calles como se quisiese y que, además fuese muy fácil de usar por el usuario, quien pudiera ver fácilmente las calles cercanas a él y visitarlas sin ningún problema.

Para ello, tomaron como base el lenguaje de secuencia de comandos JavaScript, ya que este es bastante conocido y soportado por la mayoría de los sitios de hosting. Después, emplearon la librería Leaflet (<https://leafletjs.com/>), que contiene una gran cantidad de funcionalidades para la creación de mapas interactivos y finalmente, haciendo uso de la aplicación CSVJson (<https://csvjson.com/csv2json>), transformaron el csv filtrado a un JSON para que fuese más fácil su uso en la web. Todo ello, aderezado con el código JavaScript permitía mostrar las distintas calles, como se observa en la Figura 2.

3. EL USO DEL MAPAMÁTICO

Se muestran en esta sección tanto el uso del mapamático como un ejemplo de aplicación del mismo al caso de la provincia de Sevilla.

3.1. El uso del mapamático

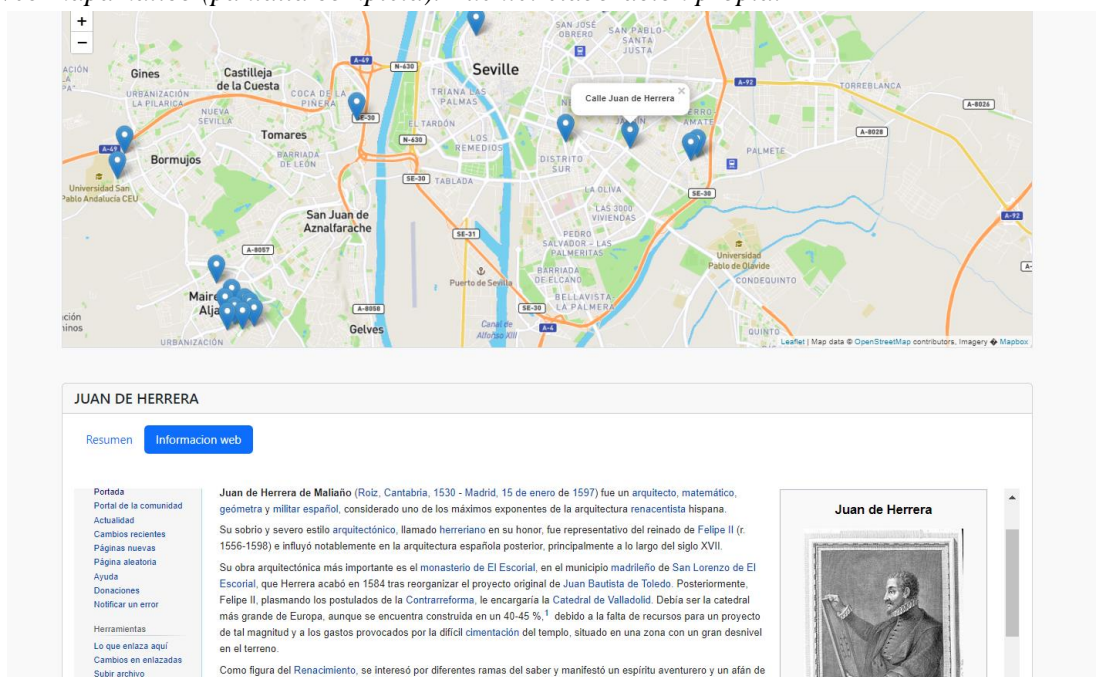
El interés del mapamático, radica en que es una herramienta que es asequible para cualquier persona en general y que tiene una relación clara con las Matemáticas, lo cual es una ventaja pues no hay muchas maneras convincentes de publicitar una aplicación concreta de las Matemáticas a la vida real.

El mapamático se encuentra albergado en la página Web Map (Lobo Santos et al., 2023), página en la que se puede navegar de forma similar a como se hace en Google Maps. Las chinchetas que aparecen en el mapa hacen referencia a las calles con nombres de matemáticos ilustres que se encuentren en la localidad de la que se trate.

Además, si el usuario pincha en el nombre de la calle, aparecerá debajo del mapa una breve biografía del matemático en cuestión, lo cual abre la puerta a poder realizar con comodidad una visita turística por las distintas calles con nombres de matemáticos que se encuentran en los municipios de cualquier región y enterarse de quién fue ese matemático y de cuál fue su obra. A efectos de simplicidad y rapidez, algunas de estas biografías se han obtenido de Wikipedia, si bien, para mayor fiabilidad y profundización en el conocimiento de los matemáticos indicados se han consultado otras fuentes de mayor garantía, como pueden ser MCN Biografías (<http://www.mcnbiografias.com/>), Biografía y Vidas(<https://www.biografiasyvidas.com/>), el Diccionario Biográfico Español (Real Academia de la Historia, 2018) o MacTutor (<https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/>), una página de la Universidad de Saint Andrews que contiene biografías de muy buena calidad, en inglés, de una gran cantidad de matemáticos.

Figura 3

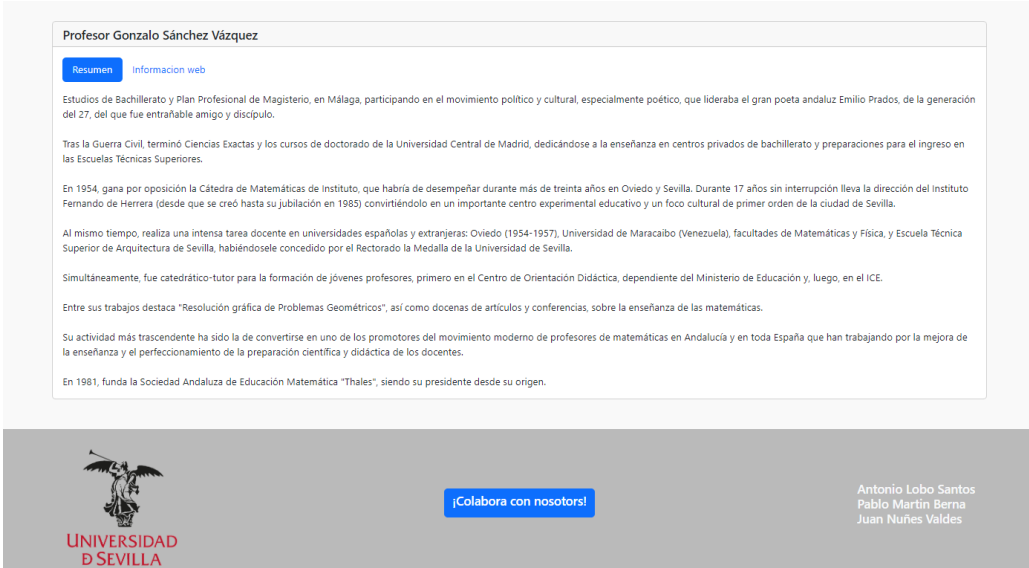
Web mapamático (pantalla completa). Fuente: elaboración propia.



Cabe destacar que pulsando en el botón de Información web podremos obtener información ampliada sobre el matemático en cuestión (Figura 3). Por último, en la parte inferior de la pantalla también aparece un listado con todas las calles registradas y la información asociada a cada una de ellas, así como la localidad donde se encuentra y sus coordenadas de posición (Figura 4). Igualmente, en esa parte se incluye una sección con instrucciones, por si algún lector estuviese interesado en contactar con los autores y/o ayudar en el proyecto (Figura 5).

Figura 4

Web mapamático (footer). Fuente: elaboración propia.



Profesor Gonzalo Sánchez Vázquez

Resumen Información web

Estudios de Bachillerato y Plan Profesional de Magisterio, en Málaga, participando en el movimiento político y cultural, especialmente poético, que lideraba el gran poeta andaluz Emilio Prados, de la generación del 27, del que fue entrañable amigo y discípulo.

Tras la Guerra Civil, terminó Ciencias Exactas y los cursos de doctorado de la Universidad Central de Madrid, dedicándose a la enseñanza en centros privados de bachillerato y preparaciones para el ingreso en las Escuelas Técnicas Superiores.

En 1954, gana por oposición la Cátedra de Matemáticas de Instituto, que habría de desempeñar durante más de treinta años en Oviedo y Sevilla. Durante 17 años sin interrupción lleva la dirección del Instituto Fernando de Herrera (desde que se creó hasta su jubilación en 1985) convirtiéndolo en un importante centro experimental educativo y un foco cultural de primer orden de la ciudad de Sevilla.

Al mismo tiempo, realiza una intensa tarea docente en universidades españolas y extranjeras: Oviedo (1954-1957), Universidad de Maracaibo (Venezuela), facultades de Matemáticas y Física, y Escuela Técnica Superior de Arquitectura de Sevilla, habiéndosele concedido por el Rectorado la Medalla de la Universidad de Sevilla.

Simultáneamente, fue catedrático-tutor para la formación de jóvenes profesores, primero en el Centro de Orientación Didáctica, dependiente del Ministerio de Educación y, luego, en el ICE.

Entre sus trabajos destaca "Resolución gráfica de Problemas Geométricos", así como docenas de artículos y conferencias, sobre la enseñanza de las matemáticas.

Su actividad más trascendente ha sido la de convertirse en uno de los promotores del movimiento moderno de profesores de matemáticas en Andalucía y en toda España que han trabajado por la mejora de la enseñanza y el perfeccionamiento de la preparación científica y didáctica de los docentes.

En 1981, funda la Sociedad Andaluza de Educación Matemática "Thales", siendo su presidente desde su origen.

UNIVERSIDAD DE SEVILLA

¡Colabora con nosotros!

Antonio Lobo Santos
Pablo Martín Berná
Juan Nuñez Valdés

Figura 5

Web mapamático (aspecto inferior de la pantalla). Fuente: elaboración propia.

Colabora con nosotros

Si te ha gustado la idea y te gustaría aportar al proyecto, aquí te explicamos todo:

1. Descarga el repositorio de [aquí](#)
2. Hazte con un listado de calles (recomendamos buscar callejeros "ciudad" csv):
 1. Si es un listado de calles sin filtrar, instala python 3 [install python](#) y las dependencias, que se encuentran en el repositorio en el archivo 'requirements.txt'. Para esto último, introduzca en una ventana de comandos la siguiente instrucción `python -m pip install -r requirements.txt`.
 2. Si es un listado de calles ya filtrado ir directamente al paso 5
3. Modifica en `search_matematician.py` fichIn con el nombre del fichero de las calles sin filtrar, y fichOut con el nombre que se le otorgara al fichero con el resultado de filtrar las calles. (si desea reiniciar el programa, borre el archivo `offset.txt`)
4. Introduciendo `python search_matematicians.py` en la ventana de comandos se ejecutara el programa, espere a que finalice. En el nuevo csv debería encontrarse el resultado.
5. Envíe el csv a mapamatico@gmail.com, intentaremos incluir su aportación en la mayor brevedad posible. Si tiene alguna sugerencia sobre como podríamos mejorar el proyecto, no dude en hacernos saber sus sugerencias a través de la misma dirección de correo.

3.1. Un ejemplo de aplicación del mapamático: las calles de matemáticos en la provincia de Sevilla

En esta subsección mostramos una aplicación del mapamático que nos permite conocer cuántas y cuáles son las calles de los municipios de la provincia de Sevilla, incluida la capital, rotuladas con nombre de matemáticos.

No obstante, conviene hacer una matización previa, ya insinuada ligeramente antes. Al no haberse podido hacer un filtrado final en la búsqueda del nombre de estas calles por razones tanto de tiempo como de trabajo, nos encontramos con calles con el nombre no solo de

matemáticos, como José Echegaray, José de Mendoza Ríos, Carmen Martínez Sancho o Julio Rey Pastor, entre otros, sino también de astrónomos, como Copérnico, Halley o Kepler, sabios griegos, como Pitágoras, Arquímedes o Euclides, científicos, como Newton, Leonardo da Vinci, Blas Pascal, Leonardo Torres Quevedo o Marie Curie, e incluso personajes de la antigüedad, como Hipatia de Alejandría. Esta aparición se debe a la característica común que cumplen todos ellos, consistente en que en sus biografías aparece la palabra “matemático” al realizarse el cribado programado por los autores, por lo que para quedarnos con los realmente matemáticos (es decir, aquellos poseedores de esa titulación) habría que realizar un cribado manual más preciso.

Como ejemplo, la Tabla 1 muestra los resultados obtenidos en la búsqueda de calles con nombres de matemáticos en la capital y municipios que componen la provincia de Sevilla. En la primera columna se encuentran los nombres de esos municipios, en la segunda el nombre de la calle o avenida y en la tercera una dirección URL en la que puede consultarse una breve biografía de los matemáticos que les dan nombre a las calles.

Tabla 1

Nombres de calles de matemáticos en la provincia de Sevilla. Fuente: elaboración propia.

Municipio	Nombre de la vía	URL (la mayoría en Wikipedia, por cuestiones legales)
Alcalá de Guadaira	Calle José Celestino Mutis	https://es.wikipedia.org/wiki/Jos%C3%A9_Celestino_Mutis
Alcalá de Guadaira	Calle José Echegaray	https://es.wikipedia.org/wiki/Jos%C3%A9_Echegaray
Arahal	Calle Isaac Newton	https://www.biografiasyvidas.com/monografia/newton/
Bormujos	Calle Averroes	https://es.wikipedia.org/wiki/Averroes
Bormujos	Calle Juan de Herrera	https://es.wikipedia.org/wiki/Juan_de_Herrera
Burguillos	Calle Isaac Newton	https://es.wikipedia.org/wiki/Isaac_Newton
Camas	Calle Averroes	https://es.wikipedia.org/wiki/Averroes
Cañada del Rosal	Calle Aristóteles	https://es.wikipedia.org/wiki/Aristóteles
Cañada del Rosal	Calle Arquímedes	https://es.wikipedia.org/wiki/Arquímedes
Cañada del Rosal	Avenida Copérnico	https://es.wikipedia.org/wiki/Nicol%C3%A1s_Cop%C3%A9rnico
Cañada del Rosal	Calle Galileo Galilei	https://es.wikipedia.org/wiki/Galileo_Galilei
Coria del Río	Calle Averroes	https://es.wikipedia.org/wiki/Averroes

Dos Hermanas	Calle Juan de la Cierva	https://es.wikipedia.org/wiki/Juan_de_la_Cierva
Dos Hermanas	Calle Echegaray	https://es.wikipedia.org/wiki/Jos%C3%A9_Echegaray
Dos Hermanas	Calle Albert Einstein	https://es.wikipedia.org/wiki/Albert_Einstein
Dos Hermanas	Calle Marie Curie	https://historia.nationalgeographic.com.es/a/marie-curie-madre-fisica-moderna_14453
Dos Hermanas	Calle Severo Ochoa	https://es.wikipedia.org/wiki/Severo_Ochoa
Dos Hermanas	Calle Isaac Peral	https://es.wikipedia.org/wiki/Isaac_Peral
El Viso del Alcor	Calle Leonardo Da Vinci	https://es.wikipedia.org/wiki/Leonardo_da_Vinci
El Viso del Alcor	Calle Isaac Peral	https://es.wikipedia.org/wiki/Isaac_Peral
Guillena	Calle Luis Pasteur	https://es.wikipedia.org/wiki/Louis_Pasteur
La Puebla de Cazalla	Avenida Marie Curie	https://historia.nationalgeographic.com.es/a/marie-curie-madre-fisica-moderna_14453
La Puebla del Rio	Calle Averroes	https://es.wikipedia.org/wiki/Averroes
La Rinconada	Calle Arquímedes	https://es.wikipedia.org/wiki/Arqu%C3%ADmedes
La Rinconada	Calle Nicolás Copérnico	https://historia.nationalgeographic.com.es/a/nicolas-copernico-y-revolucion-cosmos_13321
La Rinconada	Calle Marie Curie	https://es.wikipedia.org/wiki/Marie_Curie
La Rinconada	Calle Leonardo Da Vinci	https://es.wikipedia.org/wiki/Leonardo_da_Vinci
La Rinconada	Calle Michael Faraday	https://es.wikipedia.org/wiki/Michael_Faraday
La Rinconada	Calle Evangelista Torricelli	https://es.wikipedia.org/wiki/Evangelista_Torricelli
La Rinconada	Calle Albert Einstein	https://es.wikipedia.org/wiki/Albert_Einstein
La Rinconada	Calle Galileo Galilei	https://es.wikipedia.org/wiki/Galileo_Galilei
La Rinconada	Calle Edmundo Halley	https://es.wikipedia.org/wiki/Edmund_Halley

La Rinconada	Calle Alberto Lista	https://es.wikipedia.org/wiki/Alberto_Lista
La Rinconada	Calle Isaac Newton	https://es.wikipedia.org/wiki/Isaac_Newton
La Rinconada	Calle Louis Pasteur	https://es.wikipedia.org/wiki/Louis_Pasteur
La Rinconada	Calle Pitágoras	https://es.wikipedia.org/wiki/Pitágoras
Los Palacios y Villafranca	Calle Torres Quevedo	https://es.wikipedia.org/wiki/Leonardo_Torres_Quvedo
Mairena del Alcor	Calle José de Echegaray	https://es.wikipedia.org/wiki/Jos%C3%A9_Echegaray
Mairena del Aljarafe	Calle Andrea Casamayor	https://es.wikipedia.org/wiki/María_Andresa_Casamayor
Mairena del Aljarafe	Calle Aristóteles	https://es.wikipedia.org/wiki/Aristóteles
Mairena del Aljarafe	Calle Averroes	https://es.wikipedia.org/wiki/Averroes
Mairena del Aljarafe	Calle Nicolás Copérnico	https://historia.nationalgeographic.com.es/a/nicolas-copernico-y-revolucion-cosmos_13321
Mairena del Aljarafe	Calle Galileo Galilei	https://es.wikipedia.org/wiki/Galileo_Galilei
Mairena del Aljarafe	Calle Hipatia de Alejandría	https://es.wikipedia.org/wiki/Hipatia
Mairena del Aljarafe	Calle José Echegaray	https://es.wikipedia.org/wiki/Jos%C3%A9_Echegaray
Mairena del Aljarafe	Calle Madame de Chatelet	https://es.wikipedia.org/wiki/%C3%89milie_du_Ch%C3%A2telet
Mairena del Aljarafe	Calle Isaac Newton	https://www.biografiasyvidas.com/monografia/newton/
Osuna	Calle Rector Miguel Ángel Arroyo Castro	http://miguelangelcastroarroyo.us.es/equipo-de-gobierno/miguel-angel-castro-arroyo
Osuna	Calle Rector Miguel Florencio	https://www.us.es/trabaja-en-la-us/directorio/miguel-florencio-lora
Sevilla	Calle Arquímedes	https://es.wikipedia.org/wiki/Arqu%C3%ADmedes

Sevilla	Avenida Averroes	https://es.wikipedia.org/wiki/Averroes
Sevilla	Calle Blas Pascal	https://es.wikipedia.org/wiki/Blaise_Pascal
Sevilla	Calle Carmen Martínez Sancho	https://es.wikipedia.org/wiki/Carmen_Mart%C3%ADnez_Sancho
Sevilla	Calle Copérnico	https://historia.nationalgeographic.com.es/a/nicolas-copernico-y-revolucion-cosmos_13321
Sevilla	Calle Euclides	https://es.wikipedia.org/wiki/Euclides
Sevilla	Calle Galileo Galilei	https://es.wikipedia.org/wiki/Galileo_Galilei
Sevilla	Calle Isaac Newton	https://es.wikipedia.org/wiki/Isaac_Newton
Sevilla	Calle Johannes Kepler	https://es.wikipedia.org/wiki/Johannes_Kepler
Sevilla	Calle Juan de Herrera	https://es.wikipedia.org/wiki/Juan_de_Herrera
Sevilla	Calle Louis Pasteur	https://es.wikipedia.org/wiki/Louis_Pasteur
Sevilla	Calle Matemáticos Rey Pastor y Castro	https://es.wikipedia.org/wiki/Julio_Rey_Pastor
Sevilla	Calle Mendoza Ríos	https://es.wikipedia.org/wiki/José_de_Mendoza_y_Río
Sevilla	Calle Pitágoras Calle Profesor	https://es.wikipedia.org/wiki/Pit%C3%A1goras
Sevilla	Gonzalo Sánchez Vázquez	https://idus.us.es/handle/11441/47713
Utrera	Calle Echegaray	https://es.wikipedia.org/wiki/Jos%C3%A9_Echegaray

Por aplicación del mapamático, y teniendo en cuenta la Tabla anterior, puede observarse que de los 106 municipios de la provincia de Sevilla (incluida la capital), hay 19 de ellos con al menos una calle dedicada a un matemático, lo que representa aproximadamente un 18%, porcentaje que en principio parece bajo, aunque desconocemos por el momento los relativos a calles con nombres de personajes relacionados con otras disciplinas científicas, artísticas, literarias o de la salud, al igual que calles con nombres geográficos o religiosos.

De esos 19 municipios destaca Sevilla, la capital, con 15 calles, seguida muy de cerca por una localidad muy próxima a ella, La Rinconada, con 13, a la que le sigue, ya más alejada, Mairena del Aljarafe, con 9. Dos Hermanas tiene 6 y Cañada del Rosal 4 de estas calles, Alcalá de Guadaíra, Bormujos, El Viso del Alcor y Osuna, 2 cada una y hay 9 municipios en la

provincia con una sola calle de matemáticos cada uno de ellos: Arahal, Burguillos, Camas, Coria del Río, Guillena, La Puebla de Cazalla, La Puebla del Río, Los Palacios, Mairena del Alcor y Utrera.

Y en cuanto a los nombres de los matemáticos (en el sentido ya comentado anteriormente de este término) que aparecen con mayor frecuencia, de un total de 30, merecen destacarse Averroes, que tiene calles rotuladas a su nombre en 6 municipios, José de Echegaray e Isaac Newton, en 5 y Galileo Galilei y Nicolás Copérnico, en 4. El resto ya solo aparecen en 3 o menos localidades. Todos los titulares de estas calles son personas fallecidas, excepto los rectores Miguel Ángel Arroyo Castro y Miguel Florencio Lora, y curiosamente, hay el mismo número de titulares españoles que extranjeros: 15. Los matemáticos españoles que aparecen citados son Celestino Mutis, José de Echegaray, Juan de Herrera, Juan de la Cierva, Severo Ochoa, Isaac Peral, Alberto Lista, Torres Quevedo, Andrea Casamayor, los dos rectores ya citados, Carmen Martínez Sancho, Mendoza Ríos, Gonzalo Sánchez Vázquez y los matemáticos Rey Pastor y Castro, que comparten el nombre de una calle (Figura 6).

Figura 6

Dos calles de Sevilla rotuladas con el nombre de matemáticos que trabajaron en la ciudad.
Fuente: archivo fotográfico de los autores.



Como curiosidad final, en Sevilla, solamente 4 mujeres consideradas como matemáticas (dado que solo la última llegó a alcanzar esa titulación) llevan el nombre de una calle: Marie Curie, Andrea Casamayor, Madame de Chatelet y Carmen Martínez Sancho.

4. CONCLUSIONES, DOS PROPUESTAS Y APLICACIONES DIDÁCTICAS

La principal conclusión que los autores deducen del estudio realizado es la constatación del escaso reconocimiento que da la sociedad, o al menos sus representantes municipales, a los científicos, en general, y a los matemáticos en particular, en lo que se refiere a honrarlos dedicándoles una calle en alguna localidad, sobre todo si se compara ese reconocimiento con el que se le confiere a literatos (novelistas, dramaturgos o poetas), artistas (músicos, pintores, escultores, etc.) o a figuras o motivos religiosos. El número de calles dedicadas a los primeros en cualquier localidad, comparado con el de las dedicadas a todos estos últimos así lo atestigua.

Pues bien, aprovechando este estudio, los autores desean presentar por medio de esta publicación dos propuestas de posibles continuaciones de este trabajo, la primera dirigida a profesores de Institutos de Secundaria y Bachillerato de cualquier disciplina, y la segunda, a cualquier persona de cualquier lugar, interesada en el nombre de las calles de las ciudades. La primera, a modo de sugerencia y la segunda, a modo de petición de colaboración en este proyecto.

La primera propuesta, dirigida a profesores de niveles no universitarios, preferiblemente de Secundaria y Bachillerato antes que de Primaria, aunque sin excluir tampoco a este colectivo, consistiría en que primero les pidiesen a sus alumnos que investigasen en grupo sobre los científicos más famosos y conocidos que pudieran encontrar en las diferentes fuentes existentes (seguramente, los alumnos tratarían de buscar solo por internet, lo cual podría también ser aprovechado por el profesor para comentarles que sería bueno que también lo hiciesen en libros, enciclopedias, o bibliotecas) o bien, si se quiere evitar ese trabajo de búsqueda, proporcionarles ellos mismos a sus alumnos una lista de personas que hayan destacado en cualquier disciplina (que no tendría por qué ser necesariamente las Matemáticas, como ya se ha indicado antes en el texto), y pedirles por grupos que elaborasen unas breves biografías de ellos y buscasen las calles dedicadas a ellos usando el mapamático en una zona centrada en su Instituto o Colegio que no fuese muy amplia, con el fin de que ellos pudieran visitarlas una vez localizadas esas calles. Después, el profesor trataría de organizar una ruta que llevara a los alumnos a recorrer esas calles y, en cada una de ellas, el grupo que hubiese tratado esa biografía la explicaría al resto, comentando los aspectos más notables y relevantes de la vida de la persona que daba nombre a la calle. No cabe duda de que la utilización del mapamático como apoyo didáctico en esas clases sería muy bien recibido por los alumnos.

Concretando algo más todo lo anterior, la implementación de esta actividad podría ser la siguiente: una primera fase de preparación, en la que el profesor les explicaría a sus alumnos en qué consiste el mapamático y les mostraría cómo usarlo. En una segunda fase, les comentaría cuál iba a ser la ruta propiamente dicha, acompañando sus comentarios con breves reseñas sobre cada uno de los personajes que se iban a encontrar en ella y pidiéndoles, además, que ellos también indagasen algo sobre la vida, curiosidades y anécdotas sobre los mismos. En la tercera y última fase, una vez ya realizada la ruta, el profesor podría pedirles a los alumnos que, casi mejor por grupos que de manera individual, presentasen ante el resto un resumen (bien oral o en

forma de presentación) sobre la opinión que les ha merecido la ruta, conclusiones extraídas de su realización y comentarios particulares sobre la misma, así como cualquier otra cosa que los alumnos entendiesen relacionada con la actividad.

Para que los profesores tengan una primera idea de lo que se pretende conseguir en esta propuesta y de cómo llevarla a cabo, se muestran a continuación dos rutas que podrían hacerse por la ciudad de Sevilla (aunque también podrían planificarse igualmente varias más), a partir de los datos que aparecen en la Tabla 1.

La primera de ellas comenzaría en el lugar de encuentro (Punto Amarillo) del Parque del Alamillo, desplazándose desde allí el grupo de alumnos guiado por el profesor a la Isla de la Cartuja para visitar los distintos pabellones de la Expo 92, recorriendo las calles dedicadas a los matemáticos (recuérdese que estamos englobando en realidad bajo esta denominación a científicos relacionados con las Matemáticas): Matemáticos Rey Pastor y Castro, Marie Curie, Albert Einstein, entre otras. Esta ruta, que se puede finalizar con un paseo por la “Avenida Matemática”, de reciente inauguración (véase Anexo Final), llevaría prácticamente toda una mañana y es de muy fácil acceso pues esa zona está muy bien comunicada con el resto de los barrios de la ciudad.

De acuerdo con lo comentado sobre la segunda fase en el penúltimo párrafo anterior a este, el profesor, aparte de los datos biográficos más característicos de los personajes que entran en esta ruta (época en la que vivieron, fechas importantes y descubrimientos científicos que obtuvieron), les podría indicar a los alumnos, como breve reseña, algunas anécdotas, curiosidades o hitos trascendentes relacionados con estos personajes, datos que los autores no tienen inconveniente en incluir también en el mapamático. Así, por ejemplo, en esta ruta, el profesor les podría indicar a los alumnos que Julio Rey Pastor fue el matemático español más destacado de la primera mitad de siglo XX. Fue uno de los fundadores de la Sociedad Matemática Española (actual Real Sociedad Matemática Española) y está considerado como el verdadero impulsor de las Matemáticas en esa época, no solo en España, sino también en Argentina, país en el que vivió sus últimos años y falleció. De Antonio de Castro Brzezicki les podía comentar que fue el artífice de la creación en Sevilla de la Facultad de Matemáticas, en 1967, la séptima facultad de esta disciplina en España, después de las de Madrid (creada en 1857), Barcelona (1858), Zaragoza (1903), Santiago (1957), Granada (1964) y Valencia (1966). Con respecto a Marie Curie y Albert Einstein el profesor lo tiene fácil, pues lo más normal es que estos dos científicos sean ya muy conocidos por los alumnos, o al menos, les suenan mucho sus nombres. Marie Curie es la primera y única persona hasta el momento (hombre o mujer) que ha recibido dos premios Nobel en distintas especialidades científicas: Física y Química. También fue la primera mujer en ocupar el puesto de profesora en la Universidad de París y la primera en recibir sepultura con honores en el Panteón de París por méritos propios en 1995. Y a Albert Einstein se le considera el científico más importante, conocido y popular del siglo XX (fue proclamado “personaje del siglo XX” y el “más preeminente científico” por la prestigiosa revista Time). También es considerado por algunos como el “padre de la bomba atómica”, a pesar de haber abogado por el pacifismo durante toda su vida.

La segunda, que también llevaría una mañana, empezaría visitando las barriadas cercanas entre sí de Ciudad Jardín y El Cerro, donde se encuentran las calles Copérnico, Galileo y Juan de Herrera, continuando después a pie (un cuarto de hora) hacia la calle Profesor Gonzalo Sánchez Vázquez, ya en las proximidades de la estación intermodal de San Bernardo, que haría de punto de llegada y salida de la excursión.

Como se ha indicado antes, existen también otras rutas distintas de estas dos que también podrían realizarse e, incluso, podrían también combinarse varias de ellas para ser realizadas conjuntamente dependiendo del tiempo del que se dispusiera.

La segunda propuesta aparece como consecuencia de que, al no contar con el tiempo necesario para seguir con el filtrado de datos, los autores han decidido hacer de dominio público tanto el código de la web en la que se localiza el mapamático como el del programa que filtra los nombres de las calles y colgarlos ambos en el repositorio de Github de SOULIS (2021). En esa página web, cualquier programador de cualquier lugar puede subir sus códigos para que otras personas puedan reutilizar la parte que les convenga.

Procediendo de esa manera, los autores se permiten lanzar la siguiente propuesta, dirigida a cualquier persona que tenga tiempo e interés y que desee aportar su granito de arena en esta actividad: que esas personas envíen a los autores los datos de las calles con nombre de matemáticos de su comunidad autónoma, provincia o municipio, a la dirección mapamatico@gmail.com, con el fin de ir creando entre todos una base de datos pública de nombres de calles de matemáticos.

Obviamente esta base se podría hacer también de calles de personas de cualquier otro colectivo. Eso permitiría a su vez, disponer de mapas de calles de varias disciplinas conjuntas, para lo cual bastaría con usar chinchetas de distintos colores que las diferenciaran.

4.1. Aplicaciones para el aula

Como ejemplos de aplicación didáctica del mapamático pero ya en el aula, es decir, de actividades concretas que les saquen partido a este recurso en el propio centro (las rutas propuestas anteriormente, que los autores consideramos una de las tareas fundamentales que el profesor puede encargarles a los alumnos con respecto a este recurso tienen que realizarse forzosamente fuera del centro), los autores proponemos las 4 siguientes, de las cuales las dos primeras podrían ser más propias para alumnos de Secundaria y las dos últimas para Bachillerato (aunque, adaptando convenientemente cada una de ellas al nivel en el que se pretenda realizar, todas ellas se podrían poner en práctica en los dos niveles de enseñanza comentados). Con estas tareas se trabajarían varias de las competencias claves, como la competencia personal, social y de aprender a aprender, la ciudadana y la competencia en conciencia y expresión culturales, aparte, lógicamente, las de matemática y en ciencia, tecnología e ingeniería, y la digital.

4.1.1. Tarea 1: Kahoot Mapamático

Una vez los alumnos hayan usado el mapamático para conocer las calles con nombres de matemáticos (incluidos otros científicos en esta denominación) de su pueblo o ciudad, y se hayan familiarizado con los datos principales de cada uno de ellos que se muestran en la aplicación, el profesor podría proponerles la realización de un Kahoot sobre estas figuras destacadas de la ciencia, desarrollando así la competencia en conciencia y expresión culturales.

Indicamos a continuación, a modo de ejemplo, algunas de las preguntas que podrían ser incluidas en ese Kahoot, referidas a cuestiones relacionadas con el mapamático:

1. Fue la primera mujer doctora en Matemáticas en España.
 - a) Marie Curie
 - b) Sophie Germain
 - c) Carmen Martínez Sancho
 - d) Margarita Salas

2. Astrónomo polaco-prusiano del siglo XV que formuló la teoría heliocéntrica del sistema solar.
 - a) Ticho Brahe
 - b) Karl Friedric Gauss
 - c) Galileo Galilei
 - d) Ninguna de las anteriores

3. Fueron dos matemáticos importantes de la Matemática española del siglo XX.
 - a) Severo Ochoa y Ramón y Cajal
 - b) Gauss y Euler
 - c) Ruffini y Descartes
 - d) Julio Rey Pastor y Antonio Castro

4. Dijo que todo cuerpo sumergido en un fluido experimenta un empuje vertical y hacia arriba igual al peso de fluido desalojado.
 - a) Pitágoras
 - b) Arquímedes
 - c) Zenón de Elea
 - d) Euclides

5. Dicen que se interesó por la gravedad al caérsele una manzana en la cabeza desde un manzano.
 - a) Kepler
 - b) Pascal
 - c) Copérnico
 - d) Newton

[Las respuestas a estas preguntas son: 1-c); 2-c); 3-d); 4-b); 5-d)]

4.1.2. Tarea 2: Bingo Mapamático

Los alumnos harían uso en primer lugar del mapamático para averiguar quiénes son los matemáticos que dan nombre a calles de su ciudad (si no hubiera calles suficientes, el profesor podría proponer los nombres de otros matemáticos ilustres). Imaginemos que el centro se encuentra en un pueblo o ciudad en la que, al igual que en Sevilla, hay 15 nombres de matemáticos.

En ese caso, el profesor les propone a sus alumnos que cada uno de ellos escriba en una ficha 5 números distintos comprendidos entre el 1 y el 15 (este último número debe coincidir siempre con el de calles de matemáticos que hay en el lugar) y, previamente a esto, le ha asignado al azar un número distinto, del 1 al 15, a cada uno de los matemáticos que nombran las calles. A continuación, les pide a los alumnos que elijan a su matemático preferido de entre esos quince posibles, y, por el momento, adopten su nombre.

El profesor les dice ahora a sus alumnos que él va a ir haciendo una serie de preguntas y que ellos tienen que ver si la solución a cada una de ellas es uno de los cinco números que cada uno ha escrito en su ficha, y, en caso de que así sea, tache su número en la ficha (es decir, se sigue la sistemática del juego del bingo habitual, en el que ahora, los cartones son las fichas de los alumnos y los números de las bolas que salen de la cesta son los resultados de las preguntas que hace el profesor). Entre pregunta y pregunta el profesor dejará un tiempo de 1 minuto.

El juego termina cuando un alumno, que, no olvidemos, está representando a un matemático, ha conseguido tachar sus cinco números. Ese matemático elegido por ese alumno, y puede que por varios otros más, sería entonces el “Rey (o Reina) de los matemáticos” y todos los alumnos que lo hubiesen elegido, sus nobles cortesanos.

Como ejemplo de las preguntas que puede hacer el profesor en este caso que estamos contemplando, es decir, que haya 15 calles con nombre de matemáticos en la ciudad o pueblo donde se encuentre el centro, esas 15 preguntas podrían ser las siguientes, que no deberían preguntarse, obviamente, en el orden que sigue, sino que al inicio del juego deberían haberse mezclado aleatoriamente:

1. ¿Cuál es el número que divide a cualquier otro? (Solución: 1)
2. ¿Cuál es el único número primo par? (Solución: 2)
3. ¿Cuál es la solución positiva de la ecuación $x^2 - 9 = 0$? (Solución: 3)
4. ¿Cuál es la solución de la ecuación $2x + 3 = x + 7$? (Solución: 4)
5. ¿Cuál es el resultado de $3 + 5 - 2 + 5 \cdot 2 + 1 - 12$? (Solución: 5)
6. ¿Cuál es el mínimo común múltiplo de 4 y 6, dividido entre 2? (Solución: 6)
7. ¿cuál es el logaritmo en base 2 de 128? (Solución :7)
8. ¿Cuál es el resultado de dividir entre 3.75 el ángulo del primer cuadrante cuyo sen es $\frac{1}{2}$? (Solución: 8)
10. ¿Cuál es el cuadrado de un cateto en un triángulo rectángulo cuya hipotenusa es 5 y el otro cateto es 4? (Solución: 9)
12. ¿Cuál es la raíz cúbica de 1000? (Solución: 10)
13. ¿Cuál es el número primo comprendido entre 8 y 12? (Solución: 11)
14. ¿Cuál es el mínimo común múltiplo de 3, 4 y 6? (Solución: 12)
15. ¿qué número positivo tiene por cuadrado 169? (Solución: 13)
16. ¿Cuánto vale la derivada de $7x^2$ para $x = 1$? (Solución: 14)
17. ¿Cuál es el máximo común divisor de 30, 45 y 75? (Solución: 15)

Nótese que tal como se ha descrito esta tarea, es posible que varios alumnos resulten vencedores a la vez. Dejamos a la consideración del profesor el estudio de ver qué habría que modificar en el juego para que solo un alumno resultase ganador

4.1.3. Tarea 3: Juego “Yo nombro, tú respondes”

En este juego, cuyo fin principal es hacer un repaso lúdico en común de algún tema en concreto, en este caso sobre la historia de los matemáticos que dan nombre a las calles de la ciudad o pueblo en el que esté el centro, el profesor reparte a los alumnos en dos grupos de 15, que van a jugar separadamente, y le entrega a cada alumno de cada grupo una tarjeta que previamente ha confeccionado (si es posible plastificada, mejor) en la que por una cara aparece el nombre de uno de los matemáticos que da nombre a una de las calles de la ciudad y en la otra una característica personal o información sobre otro de esos matemáticos, distinto del que aparece en la otra cara.

Elegido aleatoriamente un alumno de uno de los grupos al azar, este comienza el juego diciendo: “Yo tengo” y a continuación nombra al matemático que aparece en su tarjeta. Seguidamente, el alumno que tenga una tarjeta con la información sobre ese matemático nombrado, la lee y seguidamente, dice “Yo tengo” y nombra al matemático que tiene en su tarjeta. El alumno (tercero por orden de aparición) que tenga la información de ese matemático lee esa información y procede como lo hizo el segundo, prosiguiéndose así el juego hasta que, si las tarjetas están convenientemente preparadas, el último de los 15 alumnos dice: “Yo tengo” y a continuación lee el nombre del matemático de su tarjeta, teniendo entonces que ser necesariamente contestado por el primer alumno que inició el juego, con la información que aparece en su tarjeta. Después, se repetiría todo este proceso con los alumnos del segundo grupo.

Lo de separar a los alumnos en dos grupos es para evitar que el profesor tenga que preparar 30 fichas, ya que eso puede llevar algún tiempo y trabajo, y también con el objetivo de que el repaso sea doble, aunque si el juego se desea hacerlo con un solo grupo, no habría el menor problema.

Como ejemplo, indicamos el caso particular de un centro situado en Sevilla, ciudad en la que, como se ha visto, hay 15 calles con nombres de matemáticos. Un ejemplo de las 15 tarjetas que se podrían preparar es el siguiente (cada fila de la siguiente tabla es una tarjeta, apareciendo en la primera columna lo escrito en su anverso y en la segunda lo escrito en su reverso).

Tabla 2

Tarjetas del juego. Fuente: elaboración propia.

ARQUÍMEDES	Matemático sevillano del siglo XX, fundador de la SAEM
	THALES
AVERROES	Todo cuerpo sumergido en un fluido experimenta un empuje vertical y hacia arriba igual al peso de fluido desalojado
BLAS PASCAL	Famoso filósofo y músico musulmán del siglo XII
CARMEN MARTÍNEZ SANCHO	Matemático francés del siglo XVII
COPÉRNICO	Primera mujer doctora en Matemáticas en España
EUCLIDES	Formuló la teoría heliocéntrica
GALILEO GALILEI	Matemático y geómetra griego del siglo III a.C. Se le considera el “Padre de la geometría”
ISAAC NEWTON	Dijo: “y sin embargo, se mueve”, para salvar su vida al ser condenado por la Iglesia
JOHANNES KEPLER	Físico y matemático inglés del siglo XVII. Introdujo el cálculo infinitesimal. En Física, destacó por sus estudios sobre la gravedad y por introducir sus famosas tres leyes del movimiento.
JUAN DE HERRERA	Matemático alemán del siglo XVI, conocido por sus leyes sobre el movimiento de los planetas en su órbita alrededor del Sol.

LOUIS PASTEUR	Arquitecto, matemático, geómetra y militar español del siglo XVI. Introdutor de la vacuna, su obra arquitectónica más importante es el monasterio de El Escorial, acabada en 1584
MATEMÁTICOS REY PASTOR Y CASTRO	Químico, físico, matemático y bacteriólogo francés del siglo XIX. Fue el inventor de las vacunas y de la técnica de la pasteurización
MENDOZA RÍOS	Dos matemáticos muy importantes de la Matemática española del siglo XX
PITÁGORAS	Astrónomo y matemático sevillano del siglo XVIII, famoso por sus obras en el campo de la navegación y la astronomía náutica.
PROFESOR GONZALO SÁNCHEZ VÁZQUEZ	Estudió la relación entre los catetos y la hipotenusa de un triángulo rectángulo.

Dejamos también a la consideración del profesor cómo elaborar las fichas para que el juego sea cerrado, es decir se inicie y se termine por un mismo alumno.

4.1.4. Tarea 4: Puzzle: enlosando el plano

Esta actividad consiste en enlosar la parte interior de un cuadrado n por n con n^2 baldosas también cuadradas, a modo de piezas de un puzzle, que llevan anotaciones internas en sus lados, de forma que para completar el puzzle deben estar relacionadas cualesquiera de esas anotaciones de los lados de los cuadrados internos con las de los cuadrados limítrofes a estos por cualquiera de sus lados.

Por ejemplo, un caso sencillo de puzzle 2×2 , relacionado con el mapamático sería el que consta de los siguientes cuatro cuadraditos (C1 y C2, arriba y de izquierda a derecha, y C3 y C4, abajo, en la misma disposición, y, que obviamente habría que desordenar para iniciar el juego). Para una mejor descripción de estos cuadraditos identificaremos el lado 1 como su base, el lado 3 será el lado opuesto a esta base, el lado 2 será el lado vertical a la izquierda del cuadradito cuando lo miramos y el lado 4 será el opuesto a este lado:

Tabla 3

Fichas de un puzzle 2x2. Fuente: elaboración propia.

Cuad.	Lado 1	Lado 2	Lado 3	Lado 4
C1	Pitágoras	No texto	No texto	Arquímedes
C2	Juan de Herrera	Líquido sumergido en agua	No texto	No texto
C3	No texto	No texto	$a^2 = b^2 + c^2$	Euclides
C4	No texto	Padre de la Geometría	Matemático español S. XVI	No texto

Otro ejemplo, ahora de un puzzle 3 x 3 con las mismas características, podría ser el siguiente:

Tabla 4

Fichas de un puzzle 3x3. Fuente: elaboración propia.

Cuad.	Lado 1	Lado 2	Lado 3	Lado 4
C1	Einstein	No texto	No texto	Submarino
C2	Arquímedes	Triángulo rectángulo	No texto	No texto
C3	Averroes	Isaac Peral	No texto	No texto
C4	Newton	No texto	Relatividad	Echegaray
C5	Carmen Martínez Sancho	Premio Nobel	Líquido en agua	Calle Julio Rey Pastor
C6	Juan de la Cierva	Calle Antonio Castro	Médico cordobés	No texto
C7	No texto	No texto	Libro Principia	Hipatia
C8	No texto	Alejandría	Doctora en Matemáticas	Louis Pasteur
C9	No texto	Vacunas	Autogiro	No texto

Como observación relevante referente a estas tareas cabe decir que, aparte de su flexibilidad, todas ellas se han planificado teniendo en cuenta su relación con el mapamático, al ser este el objeto de este artículo. No obstante, todas ellas pueden ser aprovechadas también por el profesor para tratar cualquiera de los temas del currículum de las asignaturas de Matemáticas, sin más que cambiar los contenidos y los textos de las preguntas que en ellas se utilizan. Así, se podrían tratar perfectamente otros temas, como la teoría de números, conceptos geométricos, aspectos de la combinatoria, ecuaciones y cualesquiera otros, de una manera lúdica y divertida, pero, sobre todo, muy eficiente y positiva, siendo el mapamático uno más de los recursos cuyo valor didáctico puede serle muy útil al profesor en el aprovechamiento de sus clases por parte de los alumnos. Este puede encontrar muchas más tareas para practicar en clase relativamente similares a estas que aquí se presentan en García Azcárate (2022)

Como conclusión final de este artículo y teniendo en cuenta las propuestas que se han planteado en esta sección, los autores pensamos que la creación del mapamático puede contribuir a divulgar las Matemáticas entre la Sociedad, sacando a la luz los nombres y breves biografías de muchos matemáticos que generalmente son muy desconocidos para ella, al tiempo que también permite a cualquier ciudadano conocer mejor su ciudad e interesarse por el nombre de sus calles.

Esta divulgación puede ser muy variada. Por una parte, los propios alumnos podrían realizar trabajos de investigación y estadísticos que les sirviesen de base para que fuesen ellos mismos quienes los presentaran en las jornadas culturales de sus centros o en exposiciones o podcasts.

Por otra, la divulgación del programa y de la página web del mapamático, tanto por parte de sus autores como de los profesores que lo hayan utilizado en sus clases, también sería muy útil e interesante hacerla en los diferentes congresos y Jornadas de Didáctica y Educación Matemática que se celebran regularmente en nuestro país, aprovechando la ya habitual masiva presencia de profesores de esta disciplina que participan en los mismos.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Comunidad de Python (12 de septiembre de 2019). Geopackage-python 2.2.0.2. <https://pypi.org/project/geopackage-python/>
- Diario de Sevilla (10 de enero de 2023). Sevilla ya tiene su Avenida Matemáticas http://www.diariodesevilla.es/Sevilla/Sevilla-Avenida-Matematicas_0_1755425830.html
- Real Academia de la Historia (2018). Diccionario Biográfico Español. <http://dbe.rah.es/>
- García Azcárate, A. (2022). Pasatiempos y juegos en clases de matemáticas. <https://anagarciaazcarate.wordpress.com/>
- Instituto de Estadística de la Comunidad de Madrid (25 de marzo de 2023). Nomenclador oficial y callejero. <http://www.madrid.org/nomecalles/Inicio.icm>
- Junta de Andalucía (25 de marzo de 2023). Callejero Digital de Andalucía Unificado. <https://www.callejerodeandalucia.es/portal/informaci%C3%B3n-alfanum%C3%A9rica>
- Lobo Santos, A., Martín Berná, P. y Núñez Valdés, J. (2023). Mapamático. <https://mapamaticous.000webhostapp.com/>
- Real Decreto 217/2022, de 29 de marzo, por el que se establece la ordenación y las enseñanzas mínimas de la Educación Secundaria Obligatoria. Boletín Oficial del Estado, núm. 76.
- Real Decreto 243/2022, de 5 de abril, por el que se establecen la ordenación y las enseñanzas mínimas del Bachillerato. Boletín Oficial del Estado, núm. 82.
- S0ULIS (2021). WikiCheck. <https://github.com/S0ULIS/wikiCheck>.

ANEXO FINAL

El 9 de enero de 2023, escasos días antes del envío de este artículo a la revista por parte de los autores, se celebró en Sevilla el acto de inauguración de la Avenida Matemáticas, en el barrio de San Jerónimo de la capital, en el distrito Norte. A dicho acto, que fue presidido por el Ilmo. Sr. Alcalde de la ciudad, al que acompañaba el Delegado del distrito, asistieron el equipo decanal de la Facultad de Matemáticas de la Universidad de Sevilla, antiguos y actuales miembros de la Junta Directiva del Instituto de Matemáticas de esa Universidad, varios miembros de la Junta Directiva de la Delegación Provincial de Sevilla de la Sociedad Andaluza de Educación Matemática THALES, profesores de Matemáticas, tanto universitarios como de Institutos de Enseñanza Secundaria y Colegios, algunos alumnos de todos esos centros y, como invitados especiales, antiguos y actuales alumnos y alumnas del Colegio Montaigne, de Sevilla, que habían sido los promotores de esta petición al Ayuntamiento y que asistieron en su día al pleno del mismo en el que se aprobó por unanimidad de todos los grupos políticos rotular con el nombre de Matemáticas esa avenida de la ciudad, junto con el profesor de Matemáticas responsable del proyecto, José Carlos Gámez, y el director del Colegio (Figura 7).

Figura 7

Inauguración de la Avenida Matemáticas. Fuente: archivo fotográfico de los autores.



Con esta nominación se compensa que Sevilla contase hasta la fecha con otros reconocimientos en el viario público a distintas ramas del conocimiento (astronomía, biología, tecnología, termodinámica, entre otras), pero no a las matemáticas, a pesar de su “inegable influencia en prácticamente todos los ámbitos de la vida y su aplicación en ámbitos como la economía, la física o la arquitectura, entre otros”, como reconoció el alcalde en su discurso en ese acto, en el que, para finalizar, anunció que en breve también se inauguraría cerca de esta nueva avenida la Rotonda de la Estadística, nominación también ya aprobada en pleno del Ayuntamiento (Diario de Sevilla, 2023).

Sirva esta noticia comentada en este breve anexo final como complemento al contenido de ese artículo, para mostrar de manera tangible y no figurada, la presencia real de las matemáticas y de los matemáticos en la propia vida de las ciudades, en este caso, en la ciudad de Sevilla.

Aprendizaje de las sucesiones a través del uso de una notación de consenso

Natalia Moreno Palma

Departamento de Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada (Granada, España), *nmoreno@ugr.es*

Resumen: *El presente trabajo desarrolló e implementó una propuesta de innovación docente cuyo fin es la enseñanza de las progresiones aritméticas en el tercer curso de la Educación Secundaria Obligatoria. Se propuso llevar a cabo una enseñanza focalizada en la notación. En particular, se buscó el consenso del alumnado en la elección de la notación utilizada como un elemento potenciador de la comprensión de los contenidos y facilitador para la resolución de problemas. Para implementar esta propuesta se utilizaron metodologías activas y participativas mediante las cuales se pretendió desarrollar un aprendizaje cooperativo basado en la resolución de problemas.*

Palabras clave: *Innovación educativa, notación, progresiones aritméticas, unidad didáctica, metodologías activas.*

Learning of sequences through consensus notation

Abstract: *The present work developed and implemented a teaching innovation proposal aimed at teaching arithmetic progressions in the third year of Compulsory Secondary Education. It was proposed to carry out a teaching focused on notation. In particular, student consensus was sought in the choice of the notation used as an element to enhance the understanding of the contents and to facilitate problem solving. To implement this proposal, active and participatory methodologies were used to develop cooperative learning based on problem solving.*

Key words: *Educational innovation, notation, arithmetic progressions, teaching unit, active methodologies.*

1. INTRODUCCIÓN

Actualmente, el desarrollo curricular de las matemáticas en la etapa de la Educación Secundaria se articula en torno al concepto de sentido matemático. El desarrollo en el alumnado de las destrezas o capacidades que conforman los diferentes sentidos matemáticos a través de los saberes básicos les ofrecerá las herramientas que les permitan desenvolverse satisfactoriamente en contextos personales, académicos, científicos, sociales y laborales (BOE, 2022).

El Real Decreto 217/2022, de 29 de marzo, por el que se establece la ordenación y las enseñanzas mínimas de la Educación Secundaria Obligatoria (BOE, 2022) incluye por primera vez en el currículo de la Educación Secundaria el sentido algebraico como componente del sentido matemático. Este sentido se relaciona con el reconocimiento de patrones y de relaciones de dependencia entre variables. Además, está íntimamente ligado al lenguaje matemático, al uso variado de representaciones, a la modelización y al uso de expresiones simbólicas. La alusión

concreta a capacidades o destrezas relacionadas con el lenguaje matemático, con la representación, la modelización y el uso de expresiones simbólicas por parte de la legislación educativa vigente justifica la importancia del estudio de este tipo de aprendizajes.

El trabajo que aquí se expone desarrolló e implementó una experiencia de aula centrada en los procesos de simbolización y de notación matemática del contenido concreto de progresiones aritméticas. Las progresiones aritméticas es un contenido cuyo dominio requiere principalmente destrezas asociadas al sentido algebraico y gran parte de las dificultades asociadas a la complejidad matemática del contenido se deben a la notación específica que se utiliza para denotar los diferentes conceptos que lo componen.

El contexto curricular de la propuesta es la Ley Orgánica 8/2013, de 9 de diciembre, para la Mejora de la Calidad Educativa (BOE, 2013). En base al Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato (BOE, 2015), el alumnado de la Educación Secundaria Obligatoria (ESO) iniciaba su estudio sobre el contenido de “progresiones aritméticas” en el tercer curso de la etapa. Previamente no se preveía la enseñanza de conceptos relacionados con sucesiones y por tanto tampoco se introducía notación específica de tales contenidos. Es por esta razón por la que se seleccionó el tercer curso de la ESO y el contenido general de sucesiones como el contexto más idóneo para desarrollar la propuesta didáctica centrada en la notación. A su vez, al ser la notación el centro de interés del estudio, se seleccionó el contenido concreto de progresiones aritméticas para llevar a cabo la intervención pues presentan menor dificultad que las progresiones geométricas y se evita así que la dificultad de los contenidos pudiera obstaculizar el logro de los objetivos de la propuesta didáctica.

En resumen, las progresiones aritméticas son un contexto matemático de contenido algebraico estrechamente ligado a una notación muy específica que hasta el tercer curso de la Educación Secundaria Obligatoria no se introduce al alumnado de esta etapa y por estas razones se seleccionó como un entorno conveniente para desarrollar la propuesta de innovación docente centrada en la notación que se pretendía.

Además de un proceso de enseñanza-aprendizaje focalizado en la introducción de la notación, otro aspecto innovador se llevó a la práctica: el uso de metodologías activas y participativas. Este trabajo sugiere un cambio de actitud con respecto a la idea que se tiene del rol del profesorado en las clases de matemáticas. Se buscó elaborar una nueva forma de trabajo en el aula de modo que la construcción del aprendizaje se llevase a cabo por el propio grupo de alumnos y alumnas aprovechando las individualidades del alumnado y la diversidad presente en el grupo como oportunidades para el aprendizaje (Davis, 2013; Mason, 2018).

El presente trabajo partió de los resultados obtenidos por Sánchez (2018), en los que se observó que el alumnado de tercero de la ESO tiene madurez suficiente como para abordar retos antes de estudiar el contenido curricular de “progresiones aritméticas”, sin embargo, se evidenció que, tras introducir el contenido, el alumnado presentó más dificultades y errores a la hora de enfrentarse a tareas concretas. Muchos de los nuevos errores y dificultades que aparecieron provienen de la notación puesto que el alumnado pierde la intuición matemática al intentar aplicar las fórmulas aprendidas. Al resolver tareas antes de aprender la notación asociada a las progresiones aritméticas, muchos alumnos y alumnas que después erraban, eran capaces de resolver las tareas e incluso eran capaces de obtener una “fórmula matemática” expresada con sus propios términos y notaciones que básicamente representaba el término general de una progresión. Este hecho justificó la siguiente pregunta que motivó la propuesta

didáctica expuesta en este artículo: ¿Es posible que una notación de consenso entre el alumnado favorezca el aprendizaje de las progresiones aritméticas?

Se propuso pues una secuencia didáctica que abarcaba cuatro sesiones en las que se partiría en todo momento del conocimiento previo del alumnado y cualquier aprendizaje surgiría del diálogo y del consenso grupal. Con esta metodología se pretendió enseñar las progresiones aritméticas partiendo de las ideas propias del alumnado, de su terminología y su notación personal. Se buscó que el proceso de abstracción que se necesita para generalizar al trabajar con progresiones se produjese progresivamente evitando introducir bruscamente una notación abstracta que dificultase la comprensión del contenido.

1.1. Notación asociada al contexto y notación de consenso.

Para abordar el diseño de la propuesta didáctica, previamente se debió definir el concepto de notación, ejemplificarlo y hacer referencia a dos nuevos tipos de notación que fueron los utilizados en la intervención llevada al aula: la notación asociada al contexto y la notación de consenso. Entenderemos por notación los conjuntos organizados de símbolos con características sintácticas, semánticas y funcionales concretas (Hernández, 2002). Puesto que hay diversas formas de dotar de significado un símbolo, se pueden tener diferentes notaciones de un mismo concepto. En el caso concreto del contenido “progresiones aritméticas” los conceptos que conforman este contenido pueden notarse usualmente de tres formas diferentes en función del significado o el carácter de la progresión aritmética.

Una progresión aritmética puede definirse como una aplicación del conjunto de los números naturales en el conjunto de los números reales tal que la diferencia entre cualquier par de imágenes sucesivas de la aplicación es una constante. A su vez, una progresión aritmética puede definirse como una lista ordenada e infinita de números tal que la diferencia entre cualquier par de valores sucesivos es una constante (Alcaide et al., 2015). Ambas definiciones podrían considerarse “equivalentes”, sin embargo, la primera tiene un carácter funcional y la segunda, la más utilizada en libros de textos escolares, tiene un carácter más numérico o de descripción por lista. En la tabla 1 se muestran estos significados y sus notaciones asociadas más habituales.

Tabla 1

Notaciones usuales de las progresiones

Conceptos	Notación 1	Notación 2	Notación 3
Número natural	n	n	n
Número real	a	a	a
Término n-ésimo	$\varphi(n)$	a_n	a_n
Diferencia	d	D	d
Progresión aritmética	$\{x_n\}$	$\{(1, a_1); (2, a_2); \dots; (n, a_n)\}$	(a_n)
Carácter de la definición de progresión aritmética	Funcional	Funcional/Lista	Lista

Tras definir el concepto de notación y en base al estudio de Sánchez (2018), se entiende por notación asociada al contexto como aquella notación que está estrechamente ligada a la tarea, actividad, problema o ejercicio en la que se utiliza. Un ejemplo de notación asociada al contexto es la propuesta por el alumnado para la siguiente tarea:

Esta mañana, antes de ir a clase, se te ha ocurrido subir una fotografía a tu red social favorita. Para ver el impacto que tiene, puedes observar el número de “me gusta” que va obteniendo cada hora. A las 08:00 tenía 5 “me gusta”. A las 09:00 y a las 10:00, vuelves a mirar la foto y observas que los “me gusta” son 25 y 45 respectivamente. A las 12:00 la foto tiene 85 “me gusta”, pero será la última vez que puedas mirarlo.

- ¿Podrías saber cuántos “me gusta” tendrá la foto a las 17:00? ¿Y a las 22:00?
- ¿Cuántos “me gusta” tendrá la foto pasadas 96 horas desde las 08:00?
- ¿Cuántas horas deben pasar para que los “me gusta” lleguen a 945?
- ¿Podrías calcular cuántos “me gusta” tiene la foto si conoces el número de horas que han pasado desde las 08:00?

En la Figura 1, se observan diferentes representaciones simbólicas propuestas por el alumnado del grupo en que se llevó a cabo la intervención.

Figura 1

Notaciones asociadas al contexto para la tarea descrita

a) ¿Podrías averiguar cuántos “me gusta” tendrá la foto a las 17:00? ¿Y a las 22:00? Explica de forma razonada tu respuesta.

c) Da una fórmula matemática que permita calcular los “me gusta”, conocidas las horas que han pasado desde las 08:00.

d) ¿Podrías calcular cuántos “me gusta” tiene la foto si conoces el número de horas que han pasado desde las 08:00? Explica por qué y cómo lo haces.

Handwritten work for a):
 17:00: Han pasado 9 h, contando con que por cada h el nº de “me gusta” aumenta 20, $20 \cdot 9 + 5 = 185$ “me gusta” en total.
 22:00: Han pasado 14 h, contando con que por cada h el nº de “me gusta” aumenta 20, mate $14 \cdot 20 + 5 = 285$ “me gusta” en total.

Handwritten work for c):
 $MG(x) = 20x + 5$; siendo x el número de horas que han pasado desde las 08:00 y $MG(x)$ el número de “me gusta”.

En la tabla 2 se muestran tres notaciones asociadas al contexto usadas por el alumnado para esta tarea concreta.

Tabla 2

Ejemplos de notaciones asociadas al contexto

Conceptos	Notación 1 (asociada al contexto)	Notación 2 (asociada al contexto)	Notación 3 (asociada al contexto)
Número natural (horas)	h	x	x
Número real (“me gusta”)	“me gusta”	MG	y
Término inicial	5 “me gusta”	5 MG	5 “me gusta”
Diferencia	20	20	20
Progresión aritmética	$h \cdot 20 + 5 =$ “me gusta”	$MG(x) = 20x + 5$	$20x + 5 = y$

Tras definir el concepto de notación asociada al contexto, se define el último tipo de notación que se utilizó a lo largo del trabajo: notación de consenso.

Llamaremos notación de consenso a aquella notación que resulta de una convención o acuerdo por parte del alumnado de un grupo clase, partiendo de sus propias representaciones simbólicas.

En base a las notaciones asociadas al contexto mostradas en la tabla 2, una posible elección convencional de notación podría ser aquella que denote por h a las horas, por MG a los “me

gusta” y al término general de la progresión con $20h + 5 = MG$. Esta elección muestra el carácter funcional de una progresión alejada de expresiones del tipo $\{x_n\}$ o $\{a_n\}$.

Esta propuesta de innovación se apoyará en la búsqueda de una notación de consenso para las progresiones aritméticas. Para saber si es posible que una notación de consenso entre el alumnado favorece el aprendizaje de las progresiones aritméticas se propusieron los objetivos de diseñar una Unidad Didáctica (UD) que incluyese la discusión sobre la importancia de la notación y de valorar la propuesta de UD a partir de su implementación y las observaciones y resultados obtenidos en el aula. Estos objetivos se desarrollan a lo largo del artículo siguiendo la siguiente estructura: la sección que continúa describe la propuesta de UD, las tareas que se llevaron al aula y las sesiones de trabajo. Por último, en una tercera sección se recogen las observaciones del profesorado, los principales resultados obtenidos tras analizar la implementación, las conclusiones a las que se llegaron y las sugerencias de mejora.

2. PROPUESTA DIDÁCTICA

Con respecto a la elaboración de la UD, se comenzó haciendo un análisis didáctico (Rico, 2016) del contenido matemático “progresiones aritméticas”, que puede consultarse en Moreno (2019), y que justificó los siguientes elementos curriculares necesarios para la propuesta:

Los contenidos específicos que se derivaron del análisis de contenido son:

- C1. Resolución de problemas.
- C2. Identificación de progresiones aritméticas.
- C3. Identificación de elementos característicos de las progresiones aritméticas.
- C4. Representación de los elementos característicos de las progresiones aritméticas.
- C5. Cálculo de términos concretos de una progresión aritmética.
- C6. Cálculo del término general de una progresión aritmética.
- C7. Elección de notaciones asociadas al contexto.
- C8. Elección de una notación de consenso.

Los objetivos específicos que se derivaron del análisis cognitivo son:

- O1. Identificar los elementos característicos de las progresiones aritméticas en secuencias numéricas.
- O2. Representar simbólicamente los elementos característicos de una progresión aritmética.
- O3. Modelar problemas utilizando progresiones aritméticas.
- O4. Calcular términos concretos de una progresión aritmética.
- O5. Obtener el término general de una progresión aritmética conocidos varios términos de la misma.
- O6. Apreciar la necesidad de la notación en matemáticas.
- O7. Elegir una notación de consenso para tareas concretas.
- O8. Elegir una notación de consenso para las progresiones aritméticas.

Los errores asociados a la notación y relacionados con el contenido a trabajar que se seleccionaron para el estudio a partir de Socas (2007) son síntomas de dos tipos de dificultades. Por un lado, destacamos la dificultad que conlleva identificar los elementos de las progresiones aritméticas que se manifiesta con errores como confundir los símbolos del término a_n , con el índice n de una progresión aritmética; errores al reemplazar el término inicial, la diferencia o el índice en la fórmula general de la progresión aritmética y errores al multiplicar el primer término con la posición en la expresión general.

Por otro lado, el segundo tipo de dificultad que se consideró relevante tener en cuenta fue la dificultad a la hora de formular generalizaciones y justificaciones de los procedimientos. Esta dificultad se manifiesta con errores como interpretar la expresión obtenida sin relacionarla con la situación problema; usar expresiones matemáticas que no corresponden a los términos de una progresión aritmética; confundir los elementos de la progresión aritmética al realizar operaciones y desconocer una representación para la progresión aritmética. En la tabla 3 se esquematiza la información más pertinente relativa al análisis didáctico y su temporalización a lo largo de las cuatro sesiones que conforman la UD.

Tabla 3

Distribución de elementos del análisis didáctico por sesiones

	Sesión 1: Toma de contacto	Sesión 2: Terminología de consenso	Sesión 3: Notación de consenso	Sesión 4: Evaluación del proceso
Objetivos de la sesión	Introducir el contenido y plantear varias resoluciones dadas por alumnos y alumnas	Elegir método de resolución consensuado y terminología de consenso	Elegir notación de consenso	Evaluación del progreso del alumnado
Objetivos didácticos	O1, O2, O3, O4, O5	O1, O3, O4, O5	Todos	O1, O2, O3, O4, O5
Contenidos didácticos	C1, C2, C3, C4, C5, C6, C7, C8	C1, C2, C3, C4, C5, C6, C7 y C8	Todos	Todos
Tareas	Inicial	1 y 2	3, 4 y 5	Final
Errores	Todos	Todos	Todos	Todos

2.1. Desarrollo de las sesiones

La unidad didáctica se compuso de siete tareas diferentes, secuenciadas en cuatro sesiones. Todas las tareas tuvieron una dificultad similar y permitieron trabajar todos los contenidos que establecía el currículo vigente. La finalidad del desarrollo del conjunto de tareas fue conseguir elegir de forma progresiva una notación de consenso para el contenido de progresiones aritméticas que facilitase su aprendizaje. Se procuró en todo momento que el aprendizaje de los conceptos partiese de los conocimientos previos del alumnado. La metodología de trabajo se basó de forma general en la resolución individual o en pequeños grupos de las tareas y posteriormente, en un debate en gran grupo en el que se habló de las diferentes resoluciones, de los términos usados y sobre todo de la notación que propuso el alumnado.

2.1.1. Primera sesión: Toma de contacto


En la primera sesión se introdujo el tema con una tarea inicial que se muestra en la Figura 2.


Figura 2
Tarea inicial

Tarea inicial Alumno: _____ Fecha: _____

Ayer, en el colegio, tu profesora dijo que hoy se realizaría una actividad con el móvil, de modo que estaría permitido llevarlo a clase, aunque sólo podría usarse para dicha actividad. Esta mañana, antes de ir a clase, se te ha ocurrido subir una fotografía a tu red social favorita. Para ver el impacto que tiene, puedes observar el número de "me gusta" que va obteniendo la fotografía cada hora. A las 08:00 tenías 5 "me gusta". A las 09:00 y a las 10:00, vuelves a mirar la foto y observas que los "me gusta" van por 25 y 45 respectivamente. A las 12:00 la foto tiene 85 "me gusta", pero será la última vez que puedas mirar los que tienes, puesto que la profesora te ha quitado el móvil por usarlo cuando no estaba permitido.

a) ¿Podrías averiguar cuántos "me gusta" tendrá la foto a las 17:00? ¿Y a las 22:00? Explica de forma razonada tu respuesta.





b) ¿Cuántos "me gusta" tendrá la foto pasadas 96 horas desde las 08:00? Explica razonadamente cómo lo has averiguado.

1 RESPUESTA:

Alumno: _____ Fecha: _____

c) ¿Cuántas horas deben pasar para que los "me gusta lleguen a 945? Explica razonadamente cómo lo haces.

RESPUESTA:

d) ¿Podrías calcular cuántos "me gusta" tiene la foto si conoces el número de horas que han pasado desde las 08:00? Explica por qué y cómo lo haces.

RESPUESTA:

e) Da una fórmula matemática que permita calcular los "me gusta", conocidas las horas que han pasado desde las 08:00.

2

Al comenzar la clase, la profesora explicó brevemente las normas para hacer el ejercicio que se les entregó a continuación. Se trata de una tarea que se debe resolver de forma individual, teniendo en cuenta el espacio para contestar y sin olvidar poner el nombre. Se especificó al alumnado que tenían un tiempo aproximado de 40-45 minutos para resolverla y que no se respondería a ninguna duda que les surgiese por lo que tendrían que escribir y responder lo que considerasen adecuado.

Tras explicar las normas, se repartió la tarea, se trabajó de forma individual durante el tiempo marcado y se recogió. En los quince minutos aproximados restantes de clase se llevó a cabo un debate, se preguntó al alumnado por la resolución llevada a cabo y se pusieron en común varios métodos de resolución de la tarea. A la hora de la puesta en común, se distinguieron en la pizarra los elementos más relevantes de las progresiones aritméticas, pero sin nombrarlos (índices, términos, orden, etc.). Es importante tener en cuenta la importancia de no influenciar al alumnado con ningún tipo de terminología o de notación respetando sus propuestas personales y usando en la medida de lo posible términos estándares como "nombre", "número" o "lugar".

2.1.2. Segunda sesión: Terminología de consenso

Durante el desarrollo de esta sesión, se pretendió consensuar un método de resolución de problemas del mismo tipo de la tarea inicial. (O una serie de "convenios" con los que toda la clase estuviese de acuerdo y que sirviese para trabajar con progresiones aritméticas). Para ello, se propusieron las dos tareas que se muestran en la Figura 3, para que se buscara un consenso en la resolución de cada una de ellas. Finalmente se generó la necesidad de consensuar una

terminología identificando en todas las resoluciones consensuadas los elementos característicos de las progresiones aritméticas.

Figura 3

Tareas 1 y 2

Alumno: _____ **Fecha:** _____

Tarea 1:

Tienes un saco de semillas antiguo que quieres plantar. En la etiqueta del saco pone que ese tipo de planta tarda unos cuatro meses en brotar y que es muy importante la época en la que se siembre la semilla, pero no viene indicada la fecha más adecuada para hacerlo. Decides plantar cada quince días un puñado de semillas y así te aseguras que algunas van a germinar.

La primera quincena que empiezas a ver germinar alguna semilla observas 17 brotes. La segunda quincena ves que hay 32 brotes. Te preocupa que cada vez germinen más semillas y sigues observando la tierra en la que las has plantado. La tercera quincena ves 47 brotes y en la cuarta observas ¡62 brotes!

- ¿Podrías averiguar cuántas quincenas han pasado desde que empezaste a ver los primeros brotes si un día cuentas 107 brotes?
- ¿Cuántas semillas germinarán cuatro quincenas después de empezar a ver los primeros brotes?
- Da una fórmula matemática que permita calcular los brotes, conocidas las quincenas que han pasado desde que empezaste a ver los primeros brotes.

Tarea 2:

Empiezas a sospechar que tu móvil no funciona bien porque crees que te dura poco la batería y decides comprobarlo. Cada noche pones el móvil a cargar y a la mañana siguiente, antes de salir de casa para ir al instituto lo desconectas del cargador y lo dejas en tu habitación con la batería completa.

El lunes pasado, cuando llegaste a tu casa del instituto miraste el móvil a la misma hora y tenía un 96% de batería. El martes, volviste a comprobarlo y tenía un 92% de batería. El miércoles, al repetir este “experimento” viste que tenía un 88% de batería y, por último, para corroborar tu teoría, volviste a comprobar la batería el jueves y tenía un 84%.

- ¿Podrías averiguar qué día de la semana es si tras volver del instituto miras el móvil y le queda un 64% de batería?
- ¿Cuánto tiempo debe pasar para que al llegar a casa te encuentres el teléfono apagado?
- Da una fórmula matemática que permita calcular la batería del móvil, conocidos los días que han pasado desde el lunes.

Se comenzó la sesión recordando la tarea resuelta en la sesión anterior y las diferentes propuestas de resolución que se expusieron. Posteriormente, se explicó que la clase en su

conjunto tiene que elegir un único método de resolución de la tarea y que puede ser uno de los expuestos en la sesión anterior o bien puede ser una mezcla, pero el grupo entero debía estar de acuerdo con el resultado final. Para desarrollar el debate de unos 20 minutos se les preguntó: ¿Tienen todos esos métodos algo en común? ¿Cuál os parece más ordenado? ¿Qué “nombres” os parecen más lógicos? ¿Preferís el orden de la primera propuesta y los nombres de la segunda?...

De esta forma se consiguió que el alumnado reconociese los procedimientos que se suelen utilizar para trabajar con progresiones aritméticas (identificar los elementos característicos, organizar los datos, reconocer el patrón, etc.). Tras elegir esa resolución de consenso, se realizaron las dos tareas propuestas para esta sesión con el fin de familiarizarse con el método. La interacción y la gestión del aula para las dos tareas fue la misma, se les entregó la tarea por escrito y se les pidió que la resolviesen de forma individual o por parejas. Tras resolver cada tarea, se pidió a varios alumnos o alumnas que la resolviesen en la pizarra y de nuevo se abrió debate para consensuar la resolución común aceptada por el grupo. Tuvieron un tiempo aproximado de 16 minutos por tarea para resolverla y ponerla en común en la pizarra. Una vez llegados a este punto, se consideró que el alumnado reconocía los elementos distinguidos de las progresiones aritméticas y se generó entonces la necesidad de consensuar una terminología identificando en todas las resoluciones consensuadas los elementos característicos de las progresiones aritméticas.

Para generar la necesidad de elegir una notación de consenso se abrió un debate final de una duración aproximada de unos 8 minutos en el que la profesora destacó las similitudes entre las resoluciones de las tareas. Por ejemplo, se señaló que en las resoluciones hay dos tipos de datos relevantes y una dependencia entre ellos además de un orden y un “patrón” que se sigue en cada caso. Se generó así una situación en la que existía la posibilidad de unificar terminologías de tal forma que sirviesen para todas las tareas propuestas. Para elegir esa terminología de consenso se les preguntó: ¿Cómo podemos llamar a los “números” que nos dicen la posición de los “datos”? ¿Cómo podemos llamar a los “datos”? ¿Cómo llamaríais a la “fórmula matemática”?... Al final se consiguieron una serie de términos para designar los distintos tipos de elementos distinguidos de las progresiones aritméticas (índice, término, diferencia, término general...).

2.1.3. Tercera sesión: Notación de consenso

Durante el desarrollo de esta sesión se pretendió consensuar una notación general con la que todo el alumnado estuviese de acuerdo y que sirviese para trabajar con progresiones aritméticas. Esta sesión se dedicó también a la resolución de tres tareas que se muestran en la Figura 4 para lo que se utilizaron los elementos característicos de las progresiones aritméticas, su terminología y su notación ya consensuada. Se buscó asentar los conocimientos y mecanizar la utilización de la notación de consenso.

La tercera sesión comenzó recordando lo trabajado en la sesión anterior, la propuesta de resolución de consenso y la terminología de consenso. Posteriormente se generó la necesidad de “denotar” los términos con la justificación de que puede ser muy tedioso escribir el nombre completo de cada elemento cada vez que se quiera hacer referencia a cada uno de ellos. Se explicó al grupo que tendrían que elegir una notación general teniendo en cuenta los términos seleccionados anteriormente. Se dedicó un tiempo aproximado de 20 minutos a este debate y

Figura 4
Tareas 3, 4 y 5

Alumno: _____ Fecha: _____

Tarea 3:

La luz de la cocina de tu casa está empezando a fallar, cada vez que le das al interruptor para encender la luz empieza a “parpadear”, es decir, se enciende y se apaga durante un tiempo hasta que se mantiene encendida por fin. La primera vez que le das al interruptor para encenderla, la luz “parpadea” 7 veces. La segunda vez que vas a la cocina y le das al interruptor, la luz “parpadea” 12 veces. La tercera y cuarta vez “parpadea” 17 y 22 veces.

- ¿Cuántas veces parpadeará la luz si pulsas el interruptor 20 veces?
- Da una fórmula matemática que permita calcular los “parpadeos”, conocidas las pulsaciones del interruptor.
- ¿Podrías averiguar cuántas veces han pulsado el interruptor si “parpadea” 42 veces?

Tarea 4:

En casa soléis actualizar el ordenador de sobremesa de forma habitual. Cada vez que se actualiza el ordenador de tu casa, necesita completar más pasos para terminar la actualización. Cuando aceptaste la primera actualización del ordenador, necesitó completar 7 pasos y en las dos siguientes actualizaciones, el ordenador completó 13 y 19 pasos respectivamente.

- ¿Podrías averiguar cuántas actualizaciones lleva el ordenador si un día necesita completar 43 pasos?
- Da una fórmula matemática que permita calcular los pasos a completar, conocidas las actualizaciones.

Tarea 5:

Cada sábado pones la alarma del despertador en el móvil a las 09:00 para ir a hacer deporte, pero odias levantarse tan temprano así que cada sábado cuando suena la alarma le das varias veces a la opción de “posponer”.

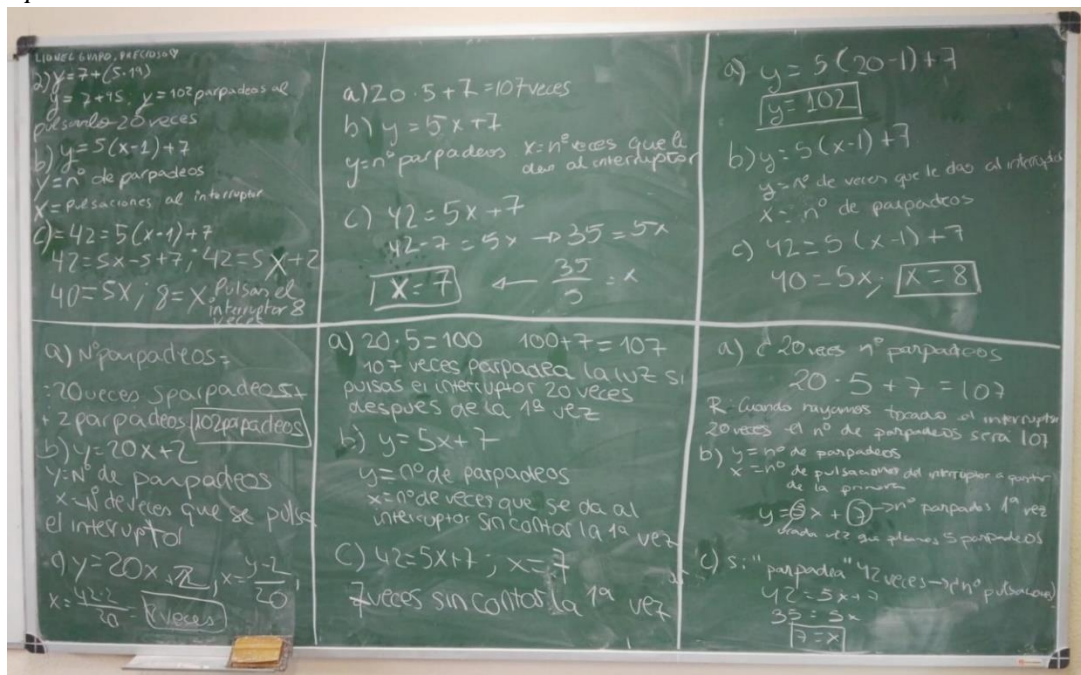
El sábado pasado, te despertó la alarma a las 09:00, le diste a “posponer” y te dormiste. Volviste a oírla a las 09:08 pero le diste de nuevo a “posponer” y otra vez te dormiste. A las 09:16 suena la alarma por tercera vez, pero sigues con mucho sueño y decides “posponer” una vez más hasta que a las 09:24 te levantas al fin.

- ¿Cuántas veces has pospuesto la alarma si ha sonado pasado 2 horas y 40 minutos desde las 09:00?
- ¿Podrías calcular cuántas veces has pospuesto la alarma si conoces el número de minutos que han pasado desde las 09:00?
- Da una fórmula matemática que permita calcular los “posponer”, conocidos los minutos que han pasado desde las 09:00.

posteriormente se resolvieron en gran grupo las tres tareas planeadas con el fin de afianzar la notación elegida (Figura 5), dedicándose aproximadamente 15 minutos a cada tarea.

Figura 5

Respuestas del alumnado a la tarea 3



Los tres grupos en los que se llevó a la práctica eligieron una notación funcional para las progresiones aritméticas, consiguiéndose el consenso rápidamente, sin discrepancias y de forma natural. Los tres grupos decidieron notar con “x” el índice de la progresión, con “y” el término general y el resto de elementos no han sido denotados pues los representaban con una tabla para cada tarea concreta.

2.1.4. Cuarta sesión: Evaluación del proceso

Durante el desarrollo de esta última sesión se quiso conocer si la elección de la notación de consenso ayudó al alumnado a comprender el contenido de “progresiones aritméticas”. La sesión se dedicó a la realización de una tarea final (Figura 6) de una dificultad similar a la inicial que permitió comprobar la evolución del alumnado. Al comenzar la sesión, la profesora explicó las normas para realizar la tarea que se debía entregar. La tarea debía hacerse de forma individual, teniendo en cuenta el espacio para contestar y sin olvidar poner el nombre. Tuvieron un tiempo aproximado de 45 minutos y no se respondieron dudas. Tras explicar estas normas se les repartió la tarea y se recogió al pasar el tiempo estipulado. Para finalizar la clase, se abrió un debate final de unos 10 minutos en el que se comentó la resolución en gran grupo y se le pidió al alumnado sus opiniones y consideraciones respecto a las tareas y la metodología usada a lo largo de las sesiones.

2.2. Evaluación del alumnado


Para llevar a cabo la evaluación del alumnado, se hizo una propuesta evaluativa acorde a la metodología utilizada. Puesto que el aprendizaje desarrollado ha sido un aprendizaje cooperativo basado en la resolución de problemas utilizando una metodología activa y

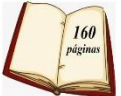
Figura 6
Tarea final

Tarea final: Alumno: _____ Fecha: _____

Te han regalado la saga de libros de Harry Potter y vas a empezar a leerlos. El primer día te lees 20 páginas y el segundo día 34 páginas. Te está gustando mucho la saga y el tercer día te lees 48 páginas. Te enganchas completamente a la saga y el cuarto día te lees 62 páginas y sigues aumentando el ritmo de lectura de la misma forma.

a) ¿Podrías averiguar cuánto tiempo llevas leyendo si un día te lees 104 páginas? ¿Y si te lees 160 páginas? Explica de forma razonada tu respuesta.





b) ¿Cuántas páginas te leerás 31 días después de empezar a leer la saga? Explica razonadamente cómo lo has averiguado.

RESPUESTA:

1

Alumno: _____ Fecha: _____

c) ¿Cuánto tiempo llevarías leyendo si un día te lees 272 páginas? Explica razonadamente cómo lo haces.

RESPUESTA:

d) ¿Podrías calcular cuántas páginas te lees cierto día, si sabes la cantidad de días que llevas leyendo? Explica por qué y cómo lo haces.

RESPUESTA:

e) Da una fórmula matemática que permita calcular las páginas que lees al día, conocidos los días que han pasado desde que empezaste a leer.

2

participativa, la evaluación y calificación se hizo de forma grupal y por sesiones. Las tablas 4, 5 y 6 recogen las rúbricas propuestas para la evaluación y calificación de cada sesión.

Tabla 4
Rúbrica de evaluación de la primera sesión

Identificadores	10	5	0
Introducción del tema	Más del 40% del alumnado del grupo resuelve la tarea inicial sin errores.	Entre el 40% y el 20% del alumnado del grupo resuelve la tarea inicial sin errores.	Menos del 20% del alumnado del grupo resuelve la tarea inicial sin errores.
Resoluciones del alumnado	El alumnado se muestra participativo a la hora de explicar sus resoluciones. La mayoría resuelve de forma correcta la tarea. Los errores que surgen son corregidos por el propio grupo.	El alumnado no se muestra muy participativo a la hora de explicar sus resoluciones. Hay errores en las resoluciones que se proponen	El alumnado no se muestra participativo

Tabla 5

Rúbrica de evaluación de la segunda y tercera sesión

Identificadores	10	5	0
Tareas	Más del 80% del alumnado del grupo resuelve las tareas.	Entre el 50% y el 80% del alumnado del grupo resuelve las tareas.	Menos del 50% del alumnado del grupo resuelve las tareas.
Consensos	El alumnado se muestra participativo a la hora de debatir para llegar a consenso. Son críticos, argumentan y justifican sus opiniones escuchándose entre ellos.	El alumnado no se muestra muy participativo a la hora de participar en el debate, pero se respetan entre ellos.	El alumnado no se muestra participativo y no se respetan entre ellos.

Tabla 6

Rúbrica de la evaluación de la cuarta sesión

Identificadores	20	10	0
Progresión del alumnado	Más del 60% del alumnado del grupo resuelve la tarea final sin errores.	Entre el 60% y el 40% del alumnado del grupo resuelve la tarea final sin errores.	Menos del 40% del alumnado del grupo resuelve la tarea final sin errores.
Notación de consenso	Más del 80% del alumnado utiliza la notación de consenso al resolver la tarea final.	Entre el 50% y el 80% del alumnado del grupo utiliza la notación de consenso al resolver la tarea final.	Menos del 50% del alumnado del grupo utiliza la notación de consenso al resolver la tarea final.

En base a la rúbrica de evaluación y a las valoraciones de la profesora que llevó a la práctica la UD se asignaron las puntuaciones a cada grupo que se muestran en la figura 7. La participación del alumnado fue muy alta, más del 80% del alumnado completaba las tareas en menos tiempo del establecido para ello. La mayoría de los miembros de los grupos quisieron salir a la pizarra a resolver los problemas y se llegó a consenso de notación desde prácticamente la primera sesión. Por tanto, las puntuaciones obtenidas asociadas a los indicadores “Resoluciones”, “Consensos” y “Tareas” son las máximas.

Figura 7

Calificación final de los grupos

Sesiones:	Sesión 1		Sesión 2		Sesión 3		Sesión 4		Nota final
Indicadores:	Introducción	Resoluciones	Tareas	Consensos	Tareas	Consensos	Progreso	Notación	
Grupo A:	5	10	10	10	10	10	10	20	8,5
Grupo B:	10	10	10	10	10	10	10	20	9
Grupo C:	5	10	10	10	10	10	10	20	8,5

3. RESULTADOS OBTENIDOS Y CONCLUSIONES

La propuesta de unidad didáctica fue llevada a la práctica en el Colegio Legamar, un colegio privado del municipio de Leganés, al sur de Madrid. Es un colegio aconfesional, con un alumnado que procedía de Leganés, Fuenlabrada y Getafe, de familias de nivel socioeconómico medio-alto. La muestra seleccionada para la evaluación de la propuesta estuvo compuesta por 72 estudiantes de 3º de la ESO, divididos en tres grupos: 3ºA, 3ºB y 3ºC compuestos por 24, 23 y 25 alumnas y alumnos, respectivamente. Todos los grupos compartieron la misma profesora para la asignatura de matemáticas, quien llevó a la práctica la unidad didáctica siguiendo las pautas explicadas en la sección anterior.

Para evaluar la propuesta se hizo uso de las respuestas a las tareas inicial y final del alumnado que conformaba los tres grupos en los que se llevó a la práctica y de las apreciaciones aportadas por su profesora sobre la dinámica de las clases. En la tabla 7 se muestra la correspondencia entre las variables de estudio propuestas para analizar las tareas y las preguntas que conformaron las tareas inicial y final.

Tabla 7
Correspondencia variables-preguntas

Variables	Preguntas				
	a)	b)	c)	d)	e)
Identificación del patrón	x	x			
Cálculo de Términos Concretos	x	x			
Problema Inverso			x		
Generalización				x	x

Una vez detalladas las variables de estudio se asignaron puntuaciones a los diferentes logros que se podían dar con cada variable y se obtuvieron las puntuaciones del alumnado. En la figura 8 se recoge esta información: el número de alumnos y alumnas que alcanzaron cada logro de las variables de estudio, tanto en la tarea inicial (IP0, CT0, PI0, GN0), como en la tarea final (IP1, CT1, PI1, GN1). Además, la última columna nos indica el número de estudiantes que utilizaron la notación de consenso (Not. Cons.) en la tarea final. La cifra que se encuentra en la fila del 0 muestra el alumnado que no usó la notación de consenso y la que se sitúa en la fila del 1 el que sí la utilizó.

Figura 8
Puntuaciones globales

Datos globales:		IP0	CT0	PI0	GN0	IP1	CT1	PI1	GN1	Not Cons
A+B+C	0	4	9	6	9	3	5	4	4	7
	0,33333333	1	20	5	12	3	7	4	8	
	Totales: 0,66666667	11	6	28	4	7	5	5	2	
	1	56	37	33	47	59	55	59	58	65
	Suma:	72	72	72	72	72	72	72	72	72
Media	0,884259	0,662037	0,740741	0,745370	0,898148	0,842593	0,884259	0,861111		
Varianza	0,066227613	0,14551817	0,09146235	0,14238828	0,06146757	0,09693966	0,07561728	0,08998435		
Mediana	1,000000	1,000000	0,666667	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000		

Si se observan los datos globales, el número de alumnas y alumnos que en la tarea inicial obtuvieron puntuaciones de 0, 1/3 y 2/3 disminuye en todas las variables con respecto a la tarea final. Se trata de un dato llamativo que conlleva además que el número de estudiantes que

obtuvieron 1 punto en las diferentes variables aumentó considerablemente. Las medias de las cuatro variables aumentaron y la que lo hace de forma menos acusada es la Identificación del Patrón (IP). También, la varianza de cada variable disminuyó, lo que indicó que los datos obtenidos de la tarea final están más próximos a la media que los obtenidos de la tarea inicial.

Con el fin de analizar la tipología de errores que se presentaron en la tarea inicial y final, se diferenciaron cinco tipos de errores: “despistes”, no considerar el término inicial de la progresión al hacer cálculos o al generalizar, no considerar resoluble la tarea por no ser realista, interpretar la tarea como un problema de proporcionalidad y error al generalizar o al hallar el término general de la progresión. En la figura 9 quedan recogidos los datos obtenidos al corregir las tareas.

Figura 9

Errores globales

Grupo	Número	IP0	CT0	PI0	GN0	Suma	IP1	CT1	PI1	GN1	Suma
A+B+C	Tipo 1:	10	9	5	0	24	8	5	6	4	23
	Tipo 2:	0	13	20	6	39	0	8	3	2	13
	Tipo 3:	1	2	3	3	9	0	0	0	0	0
	Tipo 4:	2	3	3	2	10	0	0	0	0	0
	Tipo 5:	4	7	8	14	33	5	4	4	7	20
	Suma:	17	34	39	25	115	13	17	13	13	56

Como se puede observar en la figura 9, el número de errores disminuyó en todas las variables y, además, en su totalidad pasó de ser 115 a 56. En la tarea inicial hubo más variedad de errores mientras que en la tarea final los errores del tipo 3 y 4 desaparecieron. Se pudo afirmar que, tras introducir el tema de progresiones, el alumnado no utilizó proporcionalidad para dar respuesta a las tareas ni se mostró crítico con la situación planteada. También se observó que se mantenían errores de tipo 1, 2 y 5. Los de tipo 1, ocasionados por despistes, son inevitables y los del tipo 2 se podrían explicar por la confusión que provocó la variable “páginas leídas al día” explicada en la siguiente sección. Por último, el tipo de error número 5, el que más nos concierne, pasa de presentarse en 18 estudiantes a presentarse en 9. El número de veces que aparece este error sigue siendo considerable, pero se concentra en un menor número de individuos.

3.1. Conclusiones y posibles mejoras

Tras evaluar la propuesta y a la vista de los resultados, se pudo afirmar que, al utilizar la notación de consenso, ninguna variable de estudio sufre disminución en su puntuación y en particular el proceso de generalización. Se pudo concluir finalmente que la introducción de las progresiones aritméticas mediante el uso de la propuesta de innovación ha ayudado al aprendizaje de los grupos en que se ha llevado a la práctica ya que evidencian mejoras en sus resultados.

Por otro lado, haciendo hincapié en los errores asociados a las progresiones aritméticas seleccionados, se concluyó que la propuesta de UD contribuyó a reducir a menos de la mitad el número de errores totales. Es más, también se redujo más de un 50% la presencia del tipo de errores ligados a la notación, los de tipo 2 y 5, que pasan de ser 72 a 33.

Con respecto a las observaciones hechas durante las experiencias del aula, se destacó la presencia de uno de los errores que más se ha presentado en la tarea final: la falta de justificaciones. Al tener una notación que permite modelizar las tareas, el alumnado dejó de utilizar el lenguaje natural para justificar sus ideas. Además, el hecho de haber utilizado tareas

que seguían el mismo esquema generó cierto desinterés o aburrimiento a la hora de enfrentarse a ellas. La idea original para la propuesta de la UD fue seleccionar tareas de dificultad y estructura similar para que estos factores no dificultasen el proceso de elección de una notación de consenso. Sin embargo, a la vista de la poca problemática que supuso esta elección, se cree conveniente introducir tareas que supongan un mayor grado de dificultad e incluso la introducción de nuevos contenidos como “la suma de los n primeros términos de una progresión aritmética”.

Otro error concurrente en las resoluciones de la tarea final fue el utilizar en una misma tarea dos expresiones del término general diferentes, cada una considerando un término inicial distinto. Es decir, la pregunta “¿cuántas páginas te leerás 31 días después de haber empezado?” fue interpretada de dos formas diferentes. La variable “páginas leídas al día” llevó a confusión ya que parte del alumnado entendió que “después de haber empezado” no incluía el primer día pues sería el día en que se comienza la lectura. La otra interpretación sí consideró que pasaba un día desde que comienzas a leer hasta que llega el segundo día. Para evitar este tipo de errores sería conveniente especificar este hecho en los enunciados de las tareas. Otra posible propuesta para continuar con la iniciativa presentada es realizar un tercer test más espaciado temporalmente con el fin de constatar si se mantiene el uso de la notación de consenso con el tiempo. También se considera relevante introducir al alumnado la notación estándar de las progresiones aritméticas tras llevar a la práctica esta propuesta para investigar si el uso de la notación de consenso facilita el aprendizaje de la notación estándar.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Alcaide, F., Hernández, J., Serrano, E., Moreno, M., Pérez, A., y Donaire, J. (2015). *Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas. 3º ESO. SM*
- BOE (2013). Ley Orgánica 8/2013, de 9 de diciembre, para la mejora de la calidad educativa. BOE núm. 295. (2013).
- BOE (2015). Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y de Bachillerato. BOE núm. 3 (2015).
- BOE (2022). Real Decreto 217/2022, de 29 de marzo, por el que se establece la ordenación y las enseñanzas mínimas de la Educación Secundaria Obligatoria. BOE núm. 76 (2022).
- Davis, B. (2013). *Teaching mathematics: Toward a sound alternative*. Routledge. <https://doi.org/10.4324/9780203054802>
- Hernández, M. A. (2002). *La construcción del lenguaje matemático* (Vol. 174). Graó.
- Mason, J. (2018). Structuring Structural Awareness: A Commentary on Chapter 13. En M. G. Bartolini Bussi y X. H. Sun (Eds.), *Building the foundation: Whole numbers in the primary grades: The 23rd ICMI Study* (pp. 325–340). Springer. <https://doi.org/10.1007/978-3-319-63555-2>
- Moreno, N. (2019). *Hacia una notación de consenso para el aprendizaje de las sucesiones* [Trabajo de Fin de Máster, Universidad de Granada].
- Rico, L. (2016). Matemáticas y análisis didáctico. En L. Rico y A. Moreno (Eds.), *Elementos de didáctica de la matemática para el profesor de secundaria* (pp. 85-99). Pirámide.
- Sánchez, G. (2018). *¿Influye la notación matemática en el aprendizaje de las progresiones aritméticas?* [Trabajo de Fin de Máster, Universidad de Granada].
- Socas, M. (2007). Dificultades y errores en el aprendizaje de las matemáticas. Análisis desde el enfoque lógico semiótico. En M. Camacho, P. Flores y M. P. Bolea (Eds.), *Investigación en educación matemática XI* (pp. 19-52). Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática.

Introducción a la Inteligencia Artificial desde el aula de Matemáticas

Álvaro Molina Ayuso

IES Blas Infante (Córdoba), molinaayuso@gmail.com

Resumen: La tecnología basada en algoritmos de inteligencia artificial (IA), y en especial el Machine Learning (ML), está cada vez más presente en nuestra vida diaria. Por este motivo es importante educar a la ciudadanía en general, y a los estudiantes de Educación Secundaria en particular, en el uso y conocimientos básicos de esta tecnología. La propuesta que se expone en este trabajo consiste en una aproximación inicial a los conceptos básicos de los algoritmos de Machine Learning empleando el recurso educativo learningml con estudiantes de 1º de E.S.O., con el objetivo de aprender cómo esta tecnología puede clasificar textos utilizando diferentes enunciados de problemas de Matemáticas.

Palabras clave: Alfabetización digital, Inteligencia Artificial, Machine Learning, Matemáticas.

Introduction to Artificial Intelligence in the Mathematics Classroom

Abstract: The use of technology based on artificial intelligence (AI) algorithms, specially the Machine Learning, is becoming more and more present in our daily lives. For this reason it's important to provide citizens in general, and Secondary Education students in particular, with basic knowledge and use of this technology. The proposal presented in this work consists of an initial approach to the basic concepts of Machine Learning using the educational resource learningml with students from the first year of Secondary Education, with the aim of learning how this technology can classify texts using different statements of Mathematics word problems.

Key words: Artificial Intelligence, Digital Literacy, Machine Learning, Mathematics.

1. INTRODUCCIÓN

Los cambios que vivimos en nuestra sociedad, así como las necesidades que van surgiendo de la mano de un desarrollo tecnológico cada vez más fuerte, plantean la necesidad de nuevos enfoques metodológicos que aporten los modelos de enseñanza y aprendizaje necesarios para potenciar en nuestro alumnado el desarrollo de capacidades relacionadas con la creatividad y resolución de problemas. Además, esto tiene que ir ligado a la adquisición de competencias técnico-científicas que permitan adaptarse y resolver nuevas situaciones que puedan plantearse en un futuro (Casado Fernández y Checa Romero, 2020). Para dar respuesta a esta necesidad o inquietud, es importante tener presente el término STEM, acrónimo de los términos en inglés Science, Technology, Engineering, Mathematics. Se puede considerar que el término STEM es un panel (variante y creciente) de herramientas tecnológicas, perspectivas pedagógicas y enfoques metodológicos (Couso, 2017) que se consideran de utilidad para los objetivos de un trabajo contextualizado en el ámbito de las disciplinas a las que hace referencia.

Desarrollar en un ámbito educativo un trabajo dentro de un enfoque STEM puede ayudar a desarrollar en nuestro alumnado un conjunto de habilidades, ligadas a la tan necesaria alfabetización digital, que son esenciales para desenvolverse como ciudadanos del Siglo XXI. Una alfabetización digital que, como todas, busca paliar diferencias entre los distintos sectores de la sociedad; unos conocimientos básicos que ayudan a mitigar la brecha digital fomentando la capacidad de la ciudadanía para utilizar de manera crítica la información de la que disponemos con acceso libre en Internet (Gurstein, 2011). La alfabetización digital se deriva en varias dimensiones, si bien en este trabajo cobra especial relevancia la denominada alfabetización en inteligencia artificial: un conjunto de competencias que permite a las personas valorar de forma crítica las tecnologías de IA, comunicarse, colaborar eficazmente con ellas y utilizarlas como herramientas en línea en un contexto particular o en el lugar de trabajo (Long y Magerko, 2020).

2. INTRODUCIR CONCEPTOS DE INTELIGENCIA ARTIFICIAL Y MACHINE LEARNING EN EL AULA DE SECUNDARIA

Cuando hablamos de Inteligencia Artificial y Machine Learning, es conveniente tener un referente para su definición. De forma general, la Inteligencia Artificial (IA) es el estudio de agentes que reciben percepciones del entorno y realizan acciones (Russell y Norvig, 2009). Esto incluye sistemas lógicos elaborados a partir de principios deductivos generales que resuelven problemas específicos, así como modelos de aprendizaje automático, o Machine Learning (ML), entrenados con grandes cantidades de datos para encontrar patrones de forma inductiva (Lao, 2020). Hoy día nos encontramos que para acercar los principios básicos de IA y ML son muchos los docentes, iniciativas educativas, trabajos de investigación o difusión que crean y comparten propuestas, recursos y proyectos educativos dirigidos a estudiantes de diferentes niveles educativos, incluso para los primeros ciclos de Educación Primaria (Ho y Scadding, 2019). Y para que esto sea efectivo, práctico y sirva para establecer unas bases adecuadas a las distintas edades de cara a familiarizar a la ciudadanía y a nuestro alumnado con los conceptos básicos de esta tecnología, es necesario destilar las abstracciones más importantes que ayuden a los docentes a llevar al trabajo de aula el uso de algoritmos de ML de forma adecuada.

Para abordar y contextualizar debidamente esta reflexión educativa general, pero centrándonos en el conocimiento básico y el adecuado desarrollo de la alfabetización en IA de nuestro alumnado, se puede tener como referente el conjunto de competencias y resultados esperados en el aprendizaje y alfabetización en IA propuestas por Long y Magerko (2020) y que recoge la UNESCO (2022) en el documento “K-12 AI curricula. A mapping of government-endorsed AI curricula”. De todas las competencias que se plantean en el artículo mencionado, en la Tabla 1 se destacan las más relevantes y que cobran especial interés en el desarrollo de este trabajo:

Tabla 1

Marco de competencias en IA

Competencia	Descripción
Reconocer la IA	Distinguir entre artefactos tecnológicos que utilizan y no utilizan IA.

Interdisciplinaridad	Reconocer que hay muchas maneras de pensar y desarrollar máquinas "inteligentes". Identificar diversas tecnologías que utilizan IA, como el ML.
Imaginar el futuro de la IA	Imaginar posibles aplicaciones futuras de IA y considerar los efectos de dichas aplicaciones en el mundo.
Pasos del ML	Comprender los pasos implicados en el Machine Learning y las prácticas y retos que cada paso conlleva.
El papel humano en la IA	Reconocer que los humanos desempeñan un papel importante en la programación, la elección de modelos y el ajuste de los sistemas de IA.
Alfabetización en datos	Comprender los conceptos básicos de la alfabetización de datos.
Ética	Identificar y describir diferentes perspectivas sobre las cuestiones éticas clave que rodean a la IA: privacidad, empleo, toma de decisiones o sesgo.
Programación	Comprender que los agentes son programables.

Atendiendo a estas competencias y teniendo en cuenta las consideraciones establecidas en el documento de la UNESCO citado anteriormente, en la Tabla 2 se definen los resultados de alfabetización en IA que se pretenden alcanzar con el desarrollo de este trabajo. Con todo esto, el profesorado puede tener una perspectiva clara sobre lo que deben saber sus estudiantes, qué deben ser capaces de hacer con este trabajo y para qué puede servirles, así como tener presente qué puede aportar a su aprendizaje la inclusión de estos conceptos tecnológicos.

Tabla 2*Resultados de la alfabetización en IA*

Algoritmos	Definición e implicaciones	Entender qué son y qué hacen los algoritmos.
	Conceptos	Comprender las partes de un algoritmo (entrada, pasos para modificar la entrada, salida). Comprender los procesos de formación, prueba y desarrollo de algoritmos.
Programación	Lenguajes de programación	Desarrollar el conocimiento de herramientas de programación basadas en bloques y de otro tipo.
Resolución de problemas contextualizados	Discutir y evaluar el poder y la aplicación de varios enfoques de IA a problemas prácticos.	
Alfabetización en datos	Comprender cómo recopilar, procesar, analizar y elaborar informes a partir de los datos.	
Técnicas de IA	Uso de datos en IA	Explicar cómo se utilizan los datos para hacer predicciones.
	Entender cómo funciona la IA	Explicar los tipos de técnicas de IA y cómo funcionan (supervisadas, no supervisadas, ML).
Implicaciones sociales de la IA	Ventajas e inconvenientes	Entender cómo la IA puede beneficiar a los humanos.

Todas estas consideraciones, además, ayudan a diseñar adecuadamente las distintas fases, procesos o etapas que se pueden establecer para el correcto desarrollo de la actividad y tener claro cuál es el conjunto de objetivos a alcanzar a la hora de acercar la IA y el ML al alumnado de Educación Secundaria de manera sencilla, clara y contextualizada en una práctica cotidiana, dentro del trabajo que puede hacer en la asignatura de Matemáticas.

3. UN MARCO EDUCATIVO PARA EL MACHINE LEARNING

Con el objetivo de aclarar los conocimientos y habilidades más esenciales que puede adquirir y desarrollar nuestro alumnado, o cualquier persona en general, Lao (2020) propone un marco educativo basado en principios propios de teorías educativas como el construccionismo (Papert y Harel, 1991), organizado en tres ejes principales: conocimientos, habilidades y actitudes. Un marco educativo muy similar e inspirado en el marco contextual propuesto por Brennan-Resnick (2012) para el pensamiento computacional.

Los conocimientos sobre ML son necesarios para que nuestro alumnado y cualquier persona prospere en el mundo actual impulsado por el uso cada vez más fuerte de la IA, mayormente dominado en nuestra interacción diaria con algoritmos de ML, y establezcan las bases para un mayor compromiso con la tecnología. Esto hace referencia a aprender qué es el ML y comprender los procesos de creación de estos algoritmos desde la identificación de un problema hasta su resolución, pasando por la recopilación de datos, entrenamiento y modelado de una solución planteando siempre una mejora reiterada del proceso.

Las habilidades ayudan a definir las acciones y actividades específicas que el alumnado implicado en el desarrollo de este tipo de trabajos debe realizar y practicar para convertirse en colaboradores activos y reflexivos de ML. Esto se puede focalizar en que nuestro alumnado debe ser capaz de discernir entre qué problema se puede o no resolver empleando tecnología de ML o cuando es útil emplear esta tecnología teniendo siempre presente la adecuada perspectiva lógica, cultural o ética.

La categoría de actitudes refleja los objetivos sociales a largo plazo para las iniciativas educativas en ML y aborda las perspectivas que nuestro alumnado debe desarrollar con actividades en las que se use tecnología de ML. Es importante que aprendan a identificar el ML como un elemento tecnológico útil e importante en nuestras vidas con el fin de ver y establecer su aplicación práctica y reflexiva en diferentes entornos y contextos.

Estableciendo estos ejes principales se define un marco adecuado para marcar los objetivos con los que se plantea el presente trabajo y establecer un diseño adecuado para la presente experiencia educativa tal y como se expone a continuación.

4. DISEÑO DE LA EXPERIENCIA

La experiencia educativa que se expone en este trabajo se ha diseñado para un grupo de 31 estudiantes de 1º de E.S.O., dentro de la asignatura de Matemáticas. Los alumnos y alumnas han trabajado agrupados en parejas y solo un grupo se ha formado por tres personas.

Como se ha dicho anteriormente, dicha experiencia se ha planteado para acercar los conceptos de inteligencia artificial y Machine Learning al alumnado a través de un elemento fundamental en el aprendizaje de las Matemáticas como es el trabajo de resolución de problemas.

Concretamente, trabajando el proceso de reflexión y análisis que nuestro alumnado debe llevar a cabo con el enunciado de un problema para identificar correctamente la información útil necesaria para su resolución. Para ello, se ha marcado como objetivo principal preparar un algoritmo de Machine Learning que permita clasificar un problema en función de la operación que conviene realizar para resolverlo: sumar, restar o multiplicar. Para ello se han tomado problemas de un nivel superado por todos los estudiantes, de tercer o cuarto curso de Educación Primaria, con el fin de que todo el alumnado pudiese entender el acierto o el error por parte del algoritmo a la hora de clasificar un enunciado. Los objetivos específicos derivan directamente de los elementos expuestos en las Tablas 1 y 2 mostradas anteriormente:

- Identificar un proceso programado con un algoritmo basado en inteligencia artificial.
- Conocer los pasos de un algoritmo de Machine Learning, destacando la importancia de
- recopilar los datos iniciales.
- Entender el papel de una persona para dar o no validez a la respuesta que da el algoritmo en este tipo de procesos.
- Comprender la necesidad de una mejora reiterada en el proceso de trabajo, reflexionando sobre los enunciados de problemas de Matemáticas identificando patrones y regularidades en sus enunciados.
- Entender cómo la IA puede aplicarse en situaciones cotidianas para mejorar o facilitar algunos procesos y reflexionar cuándo no es necesaria.

Además de todo esto, el hecho de plantear esta práctica educativa para acercar los conceptos de inteligencia artificial a través de una clasificación de enunciados de problemas matemáticos ayuda a desarrollar una importante acción cognitiva para el aprendizaje de las Matemáticas en general: la capacidad de planificar, una habilidad fundamental para desarrollar acciones de gran importancia como pensar, ser críticos, tener criterio propio, decidir o valorar (Mayoral et al., 2015). Especialmente, cabe destacar la importancia de desarrollar en nuestro alumnado un pensamiento crítico que le sirva para enfrentarse a problemas reales, persistentes y complejos desarrollando habilidades genéricas sin dejar a un lado el elemento clave para esta transformación: el conocimiento (Ross y Gautreaux, 2018). Por ello, esta actividad puede contextualizarse en la asignatura de Matemáticas de 1º de ESO para el desarrollo de la competencia específica 3: Formular y comprobar conjeturas sencillas o plantear problemas de forma autónoma, reconociendo el valor del razonamiento y la argumentación, para generar nuevo conocimiento (Ministerio de Educación y Formación Profesional, 2022). Además, el desarrollo de esta competencia específica se puede concretar en el mismo documento a través del criterio de evaluación 3.3: emplear herramientas tecnológicas adecuadas en la investigación comprobación de conjeturas o problemas.

Con este contexto se entiende que nuestro alumnado va a tener una primera toma de contacto con conceptos de IA a través de la planificación de datos correspondientes a los enunciados de problemas matemáticos y que va a llevar a cabo una reflexión del tipo de problema que es en cada caso y la operación matemática que se puede hacer para resolverlos a través de conjeturas sencillas. Esto a su vez le ayuda a entender cómo trabaja un algoritmo de ML supervisado al tener que establecer dichas argumentaciones de la forma más razonada posible. Para valorar el grado de desarrollo competencial y la correspondiente alfabetización en IA que se pretende iniciar en el alumnado participante, se ha elaborado un cuestionario individual con preguntas referentes a estos aspectos, que el alumnado debe completar tanto al inicio como al final de la experiencia.

5. DESARROLLO DE LA EXPERIENCIA

Para el desarrollo del trabajo de esta experiencia, se ha realizado un diseño de la tarea en una serie de fases a partir de una propuesta pedagógico-didáctica basada en el aprendizaje experiencial, la instrucción directa y la reflexión cognitiva (Dirección General de Tecnologías Avanzadas y Transformación Educativa, 2022). Durante el desarrollo de las diferentes fases de trabajo, el alumnado se encuentra con un planteamiento que parte de un desafío inicial para conectar con sus propios intereses. A partir de aquí, las diferentes fases ayudan a planificar sus propias hipótesis de resolución de diferentes situaciones, investigar, aprender y reflexionar sobre esos planteamientos con el fin de generar sus propias conclusiones finales. La forma en la que se ha hecho el diseño de las distintas fases también tiene como referente el modelo Aula del Futuro, basado en el proyecto Future Classroom Lab de European Schoolnet (Tena y Carrera, 2020). Los autores presentan un modelo de trabajo a partir del espacio educativo y el correspondiente diseño para las experiencias didácticas como algo abierto, con el fin de desarrollar una experiencia de aprendizaje flexible y reflexivo en un entorno en la que nuestro alumnado puede trabajar como un pensador crítico a la hora de afrontar la resolución de problemas (Dúo-Terrón et al., 2022).

Las fases que componen la secuencia didáctica, así como la finalidad de cada una, para realizar un proceso de aprendizaje a través de una estructura competencial se han definido tomando como referencia parte del recurso educativo abierto titulado Resolver problemas con Machine Learning (Molina Ayuso, 2022) y son las siguientes:

1. Vamos a crear un dispositivo que nos ayude a resolver problemas.

Esta primera fase sirve para movilizar el proceso de aprendizaje presentando al alumnado el trabajo, los objetivos, qué van a hacer y que pueden aprender con esta experiencia. Igualmente, se dan las instrucciones básicas para comenzar con el trabajo. Uno de los principales objetivos de esta primera fase es despertar el interés y motivación en el alumnado para el desarrollo de las distintas actividades.

2. ¿Podrá una máquina reconocer tu dibujo?

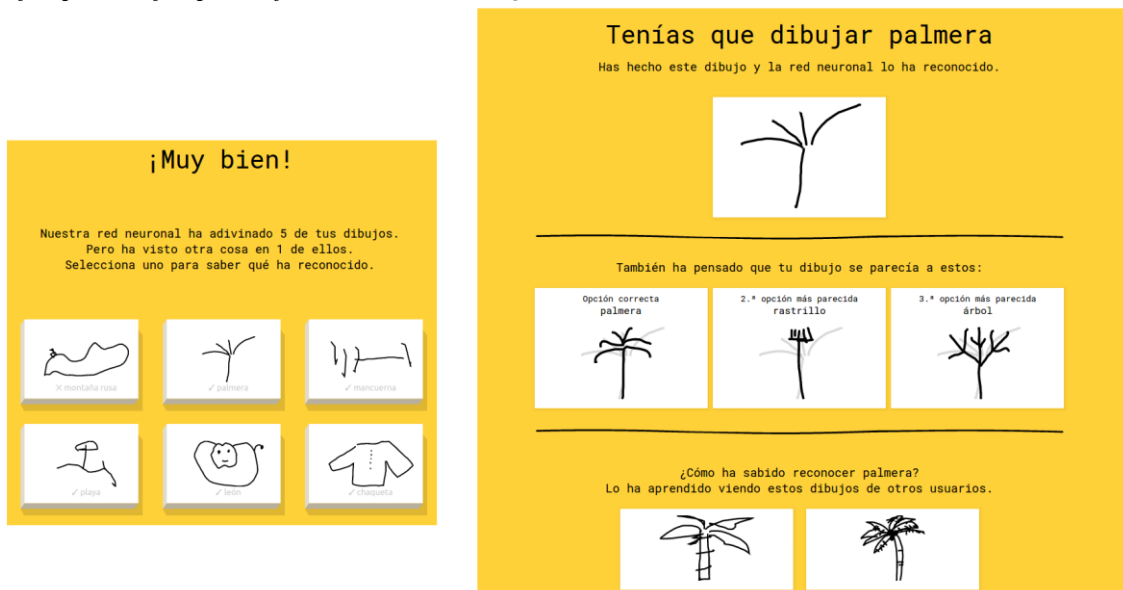
En esta fase se plantea una actividad que permita establecer unas conexiones básicas entre un razonamiento intuitivo y lo que se espera que una persona aprenda sobre el ML con el desarrollo de esta actividad. Para ello se usa el juego en línea abierto Quick, draw! de Google (Figura 1). En este juego, los jugadores reciben el nombre de un elemento que tienen que dibujar o esbozar en la pantalla en un tiempo máximo de 20 segundos. Durante este tiempo, un algoritmo de clasificación basado en una red neuronal intenta adivinar lo que está dibujando el jugador. El jugador gana si el algoritmo adivina correctamente el objeto que se está dibujando al clasificarlo en su correspondiente categoría (Fernández-Fernández et al., 2019). Una vez completada la actividad, se pide al alumnado que compruebe los dibujos que el algoritmo ha podido clasificar bien y cuáles no, con el objetivo de que entiendan que esta clasificación se hace comparando su esbozo con los que han hecho otros jugadores para el mismo objeto o categoría.

3. Investiga sobre inteligencia artificial y Machine Learning.

Una vez hecha una primera toma de contacto con un algoritmo de ML y habiendo reflexionado sobre cómo funciona de manera intuitiva, el alumnado debe explorar por su cuenta para conocer las definiciones de estos sistemas buscando información sobre qué es una inteligencia artificial y qué es un algoritmo de Machine Learning, así como los diferentes tipos que puede haber. Esta

Figura 1

Ejemplo 1. Ejemplo de funcionamiento de Quick, draw!



exploración tiene como objetivo el intentar formalizar la idea intuitiva que hayan podido generar a través de la experiencia y la reflexión propia o en grupo de cómo funciona el algoritmo de Quick, draw! Para realizar este proceso se plantean las siguientes preguntas: ¿qué es la IA?, ¿cuáles son sus posibles aplicaciones?, ¿qué es el Machine Learning?.

4. Explora en busca de problemas.

Una vez completadas las primeras fases, es hora de que el alumnado comience a trabajar en la preparación de su algoritmo de Machine Learning. Para ello se le guía para que defina las clases o categorías que va a incluir en el algoritmo. Esta parte les ayuda a entender la diferencia entre las clases con las que trabaja el algoritmo y los elementos que se incluyen en cada una de ellas para generar un resultado. Por la forma en la que se ha presentado la actividad en la primera fase, lo más común es que se utilicen problemas de sumar, restar y multiplicar correspondientes a los primeros cursos de Educación Primaria, ya que son problemas con los que todo el alumnado trabaja cómodamente y tienen seguridad de cómo se debe realizar el proceso de resolución. Para comenzar con este trabajo se les ha pedido que escriban dos o tres problemas de elaboración propia para cada una de las clases, los cuales servirán para hacer pruebas en los siguientes apartados. En esta parte los estudiantes han escrito problemas como los siguientes:

- “En una bandeja había 27 patatas y se comieron 15. ¿Cuántas patatas quedan?” (Restar)
- “Lucía ha comprado 8 docenas de huevos. ¿Cuántos huevos ha comprado?” (Multiplicar)
- “Carlos tiene 5 coches y se compra 3. ¿Cuántos coches tiene Carlos?” (Sumar)
- “Pepe tiene 5 cartas, pero dos de ellas se le rompen. ¿Cuántas cartas tiene?” (Restar)
- “Cristian tiene 7 años y su primo tiene el triple. ¿Cuántos años tiene su primo? (Multiplicar)
- “¿Cuántas bolas hay en 5 cajas de 8 bolas cada una? (Multiplicar)

Estos primeros problemas suelen ser muy simples en cuanto a la redacción del enunciado, con muchas similitudes y alguna ambigüedad o error en la redacción. Pero son muy útiles para realizar las primeras comparativas entre los diferentes enunciados que van a utilizar en todo el trabajo.

Esto ayudará a que al ir avanzando en las actividades planteadas puedan desarrollar un proceso de análisis adecuado con el fin de identificar las estructuras y regularidades en los enunciados que servirán para que el algoritmo clasifique correctamente conforme se vayan incluyendo más elementos en cada clase, en este caso más problemas diferentes y con enunciados más complejos. Posteriormente, se ha guiado a los grupos para que a través de búsquedas en Internet recopilen entre 15 y 20 problemas de cada clase.

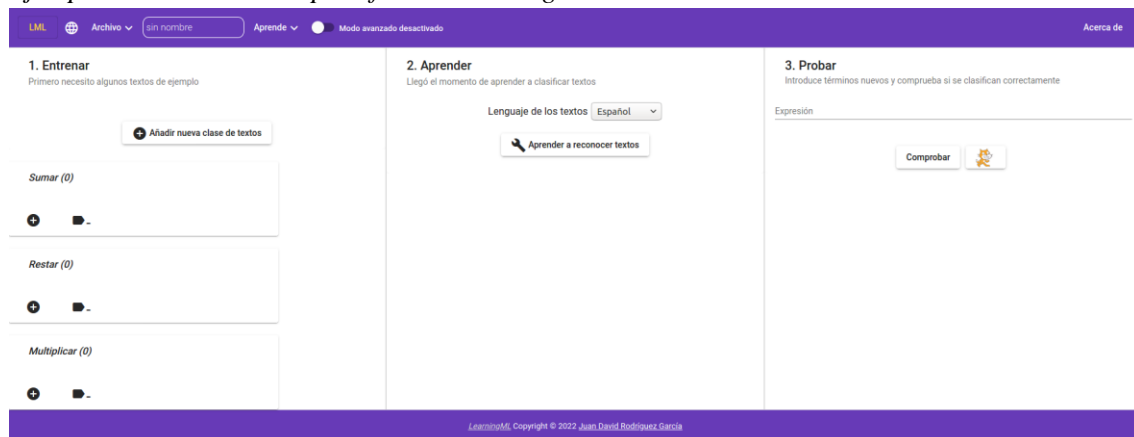
5. Interactúa con el algoritmo y mejora los resultados.

Esta es la fase en la que los alumnos y alumnas deben interactuar con el algoritmo de Machine Learning de la plataforma learningml (Figura 2). Esta plataforma web gratuita y de código abierto tiene como objetivo acercar los fundamentos del ML de forma práctica a estudiantes o personas interesadas en el campo de la IA (Rodríguez-García et al., 2020a). Una plataforma diseñada para acercar estos fundamentos de manera práctica, bajo el fundamento de “suelo bajo, techo alto y paredes anchas”: lo suficientemente fácil como para aprender y comenzar a usarla en poco tiempo pero que permite crear proyectos complejos y avanzados pudiendo además responder a distintos intereses y utilizarse en diferentes situaciones (Rodríguez-García et al., 2020b). Para trabajar en esta plataforma no es necesario crear un usuario. Solo hay que acceder a ella, seleccionar el tipo de clasificación que se va a hacer, en este caso clasificación de textos, y comenzar a trabajar. En primer lugar, en el apartado “Entrenar” hay que definir las clases con las que va a realizar la clasificación el algoritmo e introducir ejemplos de enunciados correspondientes a cada una de ellas.

Como se ha dicho anteriormente, para que el análisis y la reflexión que se busca por parte del alumnado sea efectiva y acabe identificado regularidades en los distintos enunciados de los problemas, se ha planteado una práctica iterativa con la que poder ver los efectos de una mejora paulatina en la clasificación que hace el algoritmo. Se le ha pedido que en primer lugar incluyan dos ejemplos en cada una de las clases que se han definido. Posteriormente, activará la opción “Aprender” con la que el algoritmo crea las relaciones y patrones para poder clasificar. Una vez ha completado esta acción, el usuario puede utilizar el apartado “Probar” escribiendo uno de los problemas que ha inventado en la fase anterior (conviene que sea distinto a los usados en el entrenamiento, para ver cómo se hace la clasificación).

Figura 2

Ejemplo 2. Entorno de la plataforma Learningml.



La acción se repite varias veces con diferente número de problemas en cada clase, lo cual hace que el proceso de trabajo en esta fase se realice de manera gradual. Así, en la primera prueba realizada con solo dos ejemplos el resultado suele ser erróneo, no se hace una correcta clasificación. Los enunciados incluidos en cada clase suelen tener diferencias claras con el que se ha usado en la prueba, uno de los redactados por el alumnado en la fase anterior. Pero este es el momento de comenzar a hacer un pensamiento analítico para ir incrementando la percepción de patrones y estructuras gramaticales presentes en los enunciados de los problemas, con el objetivo de favorecer la formulación de una conjetura final que ayude a relacionar las similitudes en los enunciados de los problemas de cada clase, la importancia de estos patrones para la clasificación que hace el algoritmo y la necesidad de aumentar el número de ejemplos para mejorar la correspondiente clasificación. No solo se busca introducir conceptos y nociones de IA, también está en los objetivos de este trabajo fomentar la reflexión sobre los enunciados de problemas de Matemáticas.

En este punto se le pide al alumnado escribir en su material de trabajo cuántos ejemplos hay en cada clase, si la prueba ha sido correcta o no y el motivo por el cual piensa que se ha dado el fallo, en caso de haberse producido. Este es el primer punto en el que deben reflexionar sobre las regularidades que puede haber en los enunciados de una misma clase y a partir de la cual avanzar a lo largo de la actividad para acabar formulando una conjetura que ayude a entender cómo funciona un algoritmo de ML. El material de trabajo que utiliza el alumnado es un documento que incluye los distintos pasos en los que está dividida la tarea con indicaciones para cada uno y las preguntas que sirven de guía.

Posteriormente se le pide que repita el mismo proceso, pero incluyendo 10 ejemplos en cada clase, teniendo que hacer otra prueba y recoger las mismas impresiones. Aquí la reflexión suele ser más concreta y les resulta más fácil encontrar similitudes e identificar regularidades que debe haber entre los problemas de una misma clase para que el algoritmo realice la clasificación correctamente. Esto se repite dos veces más hasta completar cada clase con un total de ejemplos comprendido entre 15 y 20. Como se ha dicho, la finalidad de este proceso de mejora reiterada es que concluyan con su propia experiencia estableciendo una conjetura que ayude a entender que la clasificación del algoritmo mejora conforme aumenta el número de ejemplos incluidos en cada clase y la comprueban identificando en los problemas con los que hacen las pruebas la similitud o regularidad que tiene con los incluidos en la correspondiente clase.

6. Cierra con tus conclusiones.

Para terminar, cada estudiante debe completar en su material de trabajo una explicación general sobre todo el proceso realizado con el fin de plasmar los aspectos básicos de cómo funciona un algoritmo de Machine Learning supervisado. Este apartado debe contener una explicación de las distintas tareas desarrolladas en cada fase, así como los resultados que se han obtenido en cada uno de las etapas de entrenamiento y mejora del algoritmo de ML.

Todo esto va acompañado de una explicación personal para intentar exponer el motivo por el que se ha llegado a los resultados obtenidos y una valoración con los aspectos más sencillos y los más complejos, así como una idea de para qué puede servir este tipo de tecnología.

6. RESULTADOS

En primer lugar, para poder valorar el trabajo realizado en relación con el grado de desarrollo de las competencias asociadas a la alfabetización en IA, el alumnado participante ha realizado un

cuestionario individual antes y después de realizar todo el trabajo. Este cuestionario estaba compuesto por las siguientes preguntas en las que los estudiantes debían responder escribiendo un texto corto:

- ¿Sabes lo que es un algoritmo? Intenta explicarlo con tus palabras.
- ¿Qué tipo de programa informático te gustaría hacer?
- ¿Sabes qué es la inteligencia artificial? Intenta explicarlo con tus palabras
- ¿Para qué puede servir la inteligencia artificial?
- Escribe tres palabras que te ayuden a explicar qué es y para qué sirve la inteligencia artificial
- ¿Crees que puede ser útil la IA para trabajar en el colegio? Explica alguna idea o ejemplo
- ¿En qué asignaturas crees que puede incluirse y para qué?

En el test inicial las respuestas han sido poco concisas y muchas de ellas referentes a aspectos relacionados con videojuegos o robots. Por ejemplo, en la pregunta que se hace para valorar si conocen qué es un algoritmo, muchos responden simplemente que no lo saben o responde que es una inteligencia artificial. Igualmente, cuando se pregunta si saben qué es una inteligencia artificial, muchos responden aludiendo a que es un robot o una inteligencia más avanzada. Pero no se establece una relación adecuada entre estos términos. Junto a estas preguntas, es interesante ver las respuestas que se han dado para la cuestión referente a uso de la IA. Aquí la mayor parte del alumnado ha relacionado esta tecnología con un proceso de ayuda: ayudar a hacer cálculos, ayudar a personas, ayudar en tareas de la casa o ayudar en nuestro día a día son algunas de las respuestas recogidas aquí. A la hora de pedir tres palabras con las que relacionar la IA, los resultados son muy variados y poco conclusivos, ya que se dan respuestas muy dispares entre las que destacan los términos robot, tecnología y futuro. Por último, la mayoría de los estudiantes creen que sí puede ser interesante trabajar con este tipo de tecnología y la mayoría de ellos la relacionan con la asignatura de Matemáticas. En general, con estas respuestas se observa la necesidad de que el alumnado participante debe conocer los principales aspectos de la IA y el uso que puede tener en nuestro día a día, lo cual denota una necesidad de alfabetización en este campo para conocer este tipo de tecnologías, sus funcionalidades y posibles aplicaciones.

Tras el desarrollo de la experiencia, los resultados obtenidos en el mismo cuestionario muestran un enfoque más acertado que apunta a un resultado positivo en el desarrollo de algunas de las competencias de IA citadas en la Tabla 1. Por ejemplo, al preguntar si saben qué es un algoritmo, la mayor parte del alumnado ha dado esa respuesta escribiendo una definición más o menos acertada construida por sí mismo sin tomarla de alguna fuente de información. Esto muestra que el haber trabajado en el proceso de preparación del algoritmo de ML les ha ayudado a comprender qué es este concepto, pudiendo destacar que en la mayoría de las definiciones se repiten las palabras “pasos” y “operaciones”. Igualmente, ha habido un cambio en el sentido de las respuestas dadas a la pregunta referente a qué es una IA, destacando que muchas aluden a qué es un algoritmo y que es un sistema que intenta imitar la inteligencia humana. Esto junto a las respuestas dadas a la pregunta sobre el uso de la IA son un indicador positivo del desarrollo de la alfabetización en IA de nuestro alumnado, ya que en los posibles usos destacan las respuestas que lo relacionan con la resolución de problemas. Igualmente, entre las palabras más repetidas en el test final que relacionan con la IA destacan aprendizaje, algoritmos y matemáticas, con lo que se muestra igualmente un enfoque correctamente dirigido a la comprensión de los fundamentos de estas tecnologías. Por último, al igual que en el test inicial, la mayor parte del alumnado cree que es interesante incluir estos trabajos en la asignatura de Matemáticas, aunque también se incluyen otras como Tecnología o programación.

Con la comparativa de estos cuestionarios para recoger información cualitativa vemos que se ha planteado un escenario adecuado para desarrollar en nuestro alumnado las habilidades y competencias propias de la alfabetización en IA y que además este trabajo ha servido para iniciar este desarrollo en un

sentido positivo. Pero para ver si se han alcanzado los objetivos planteados en este trabajo, se ha tomado la actividad final en la que el alumnado ha tenido que explicar todo el proceso de trabajo realizado: la fase denominada Cierra con tus conclusiones. Esta fase ha servido para que los alumnos y las alumnas puedan reflexionar sobre todas las actividades que han completado con el fin de establecer relaciones entre ellas para ver la propuesta de trabajo como un todo integrado facilitando así la comprensión de los principales aspectos como los pasos que se establecen para trabajar con un algoritmo de ML, la importancia de una mejora reiterada en estos procesos o el papel que juega una persona para que el algoritmo funcione correctamente. Así, en las respuestas que se han dado en esta última actividad destacan comentarios como los siguientes y que apuntan en un resultado positivo para alcanzar los objetivos referentes a estos aspectos citados anteriormente:

- “La inteligencia artificial son sistemas que imitan la inteligencia humana para realizar cosas”.
- “He tenido que ir poniendo problemas para que vaya aprendiendo, ha mejorado porque le he ido poniendo cada vez más problemas”.
- “Nuestra máquina mejoró cuando le añadimos muchos más problemas”.
- “El algoritmo tenía muchos fallos, así que tuvimos que agregar más problemas”.
- “El programa fallaba de vez en cuando, pero al ponerle más problemas ha aprendido y no falla”.

7. CONCLUSIONES Y FUTUROS TRABAJOS

El planteamiento de este trabajo ha servido para establecer un primer contacto entre nuestro alumnado y los conceptos básicos de la inteligencia artificial desde la asignatura de Matemáticas. No se busca crear un algoritmo de clasificación infalible o que ofrezca una solución perfecta a una problemática previamente establecida. Se ha planteado el trabajo para que los estudiantes vean de manera práctica y constructiva qué es un algoritmo de ML supervisado y para mostrar en qué se basan muchos recursos tecnológicos que puedan utilizar en su día a día y que se contextualizan en el tan llamativo, pero incierto para la mayoría de la ciudadanía, marco de la inteligencia artificial. Además, ha servido para plantear un escenario de trabajo transversal en el que el alumnado ha tenido que establecer una conclusión final y definir una conjetura sencilla que ayude a entender cómo funciona un algoritmo de ML supervisado. Algo muy importante en el desarrollo de las diferentes competencias que se pueden trabajar desde la asignatura de Matemáticas y que, como vemos en este caso, puede hacerse desde distintos enfoques o perspectivas para ayudar igualmente al desarrollo de otras competencias y habilidades necesarias para cualquier estudiante. Todo esto se ha desarrollado a través de la reflexión y comprensión de los enunciados de problemas de Matemáticas, que, aunque sean de un nivel básico para el alumnado participante, ayuda a entender la importancia de analizar correctamente la información dada en el enunciado de un problema.

Este planteamiento se ha podido realizar de manera efectiva, tal como se ha visto con los resultados obtenidos, teniendo como enfoque principal para el diseño del trabajo el

construccionismo de Seymour Papert, la idea de que los niños aprenden mejor cuando participan activamente en la construcción de algo que tiene un significado personal para ellos (Papert, 1980) y con el hecho de que a la hora de explicar conceptos informáticos es conveniente y más positivo hacerlo con ejemplos que puedan ser cercanos o cotidianos al estudiante (Tissenbaum et al., 2019). Esto también ayuda a que puedan desarrollar su identidad computacional, entendiendo esta como el hecho de verse a sí mismos como parte activa del proceso de creación e implementación de artefactos computacionales. Las funcionalidades que caracterizan a la plataforma educativa learningml, han permitido realizar un acercamiento a los conceptos básicos de inteligencia artificial para nuestro alumnado con el fin de, como se ha dicho en la introducción de este trabajo, comprender las implicaciones de la IA y aprovechar sus oportunidades para desarrollar las habilidades y competencias necesarias para la alfabetización en IA. Además, dada la creciente demanda de empleos y desarrollo profesional en el ámbito STEM y relacionados con este campo, se plantea un escenario adecuado para la inclusión de esta tecnología en la formación de todo estudiante del Siglo XXI (Rodríguez-García et al., 2020).

Como posible ampliación del presente trabajo, está la creación de una aplicación interactiva con Scratch que clasifique el enunciado de un problema de Matemáticas utilizando el algoritmo de ML desarrollado con learningml. Esta plataforma educativa permite utilizar el algoritmo de ML en un entorno de programación de Scratch, lo cual es un complemento perfecto para el desarrollo de las habilidades computacionales al combinar las dimensiones competenciales de la inteligencia artificial indicadas en la tabla 1 con las dimensiones del pensamiento computacional dadas en el marco de Brennan-Resnick (2012): conceptos, prácticas y perspectivas computacionales.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Brennan, K. y Resnick, M. (2012). New frameworks for studying and assessing the development of computational thinking. En *Proceedings of the 2012 Annual Meeting American Educational Research Association*, (pp. 1–25).
- Casado, R. y Checa, M. (2020). Robótica y proyectos STEAM: desarrollo de la creatividad en las aulas de educación primaria. *Pixel-Bit, Revista de Medios y Educación*, 51–69. <https://doi.org/10.12795/pixelbit.73672>
- Couso, D. (2017). Per a què estem a STEM? Un intent de definir l'alfabetització STEM per a atòthom i amb valors. *Ciències: Revista Del Professorat de Ciències de Primària i Secundària*, 34, 22-30. <https://doi.org/10.5565/rev/ciencies.403>
- Dirección General de Tecnologías Avanzadas y Transformación Educativa (2022). *Crea tu REA para el Proyecto REA Andalucía*. https://edea.juntadeandalucia.es/bancorecursos/file/6d215d5c-1983-41e3-80d1-50572b852eb9/1/guia_crea_tu_rea_proyecto_rea_andalucia.zip/index.html
- Dúo-Terrón, P., Hinojo-Lucena, F. J., Moreno-Guerrero, A. J. y López-Belmonte, J. (2022). Impact of the pandemic on STEAM disciplines in the sixth grade of primary education. *European Journal of Investigation in Health, Psychology and Education*, 12 (8), 989–1005. <https://doi.org/10.3390/ejihpe12080071>
- Fernández-Fernández, R., Victores, J. G., Estevez, D. y Balaguer, C. (2019). Quick, Stat!: A statistical analysis of the quick. Draw! Dataset, 1–12. <https://doi.org/10.11128/arep.58>
- Gurstein, M. (2011). Open Data: Empowering the empowered of effective data use for everyone. *First Monday*, 16 (2), 2–7. <http://firstmonday.org/article/view/3316/2764>
- Ho, J. y Scadding, M. (2019). Classroom activities for teaching artificial intelligence to primary school students. En *Proceedings of International Conference on computational thinking*

- education* (pp. 157–159). The Education University of Hong Kong, <http://hdl.handle.net/10722/271195>
- Lao, N. (2020). *Reorienting machine learning education towards tinkerers and ML-engaged citizens*. Massachusetts Institute of Technology. <https://dspace.mit.edu/handle/1721.1/129264>
- Long, D. y Magerko, B. (2020). What is AI Literacy? Competencies and Design considerations. En *Proceedings of the 2020 CHI conference on human factors in computing systems* (pp. 1–16). Association for Computing Machinery. <https://doi.org/10.1145/3313831.3376727>
- Mayoral, S., Roca, M., Timoneda, C. y Serra, M. (2015). Enhancing cognitive planning in first-year secondary education students. *Aula Abierta*, 43 (1), 9–17. <https://doi.org/10.1016/j.aula.2014.10.001>
- Ministerio de Educación y Formación Profesional. (2022). Real Decreto 217/2022, de 29 de marzo, por el que se establece la ordenación y las enseñanzas mínimas de la Educación secundaria Obligatoria, Boletín Oficial del Estado, núm 76 (2022).
- Molina, A. (2022). Resolver problemas con Machine Learning. <https://procomun.intef.es/ode/view/widget/1676257202053>
- Papert, S. (1980). *Mindstorms: Children, computers, and powerful ideas* (Second Edi). Basic Books.
- Papert, S. y Harel, I. (1991). Situating constructionism. *Constructionism*, 1–12.
- Rodríguez-García, J. D., Moreno-León, J., Román-González, M., y Robles, G. (2020a). LearningML: A tool to foster computational thinking skills through practical artificial intelligence projects LearningML. *Revista de Educación a Distancia*, 20 (63), 37.
- Rodríguez-García, J. D., Moreno-León, J., Román-González, M., y Robles, G. (2020b). Introducing artificial intelligence fundamentals with LearningML: artificial intelligence made easy. En *Proceedings of the TEEM'20: eighth international conference on technological ecosystems for enhancing multiculturalism* (pp. 18–20). ACM International Conference Proceeding Series. <https://doi.org/10.1145/3434780.3436705>
- Ross, E. W. y Gautreaux, M. (2018). Pensando de manera crítica sobre el pensamiento crítico. *Aula Abierta*, 47 (4), 383. <https://doi.org/10.17811/rifie.47.4.2018.383-386>
- Russell, S. y Norvig, P. (2009). *Artificial Intelligence: A Modern Approach*. Prentice Hall (3 rd Edition). <http://repo.darmajaya.ac.id/3800/1/Artificial%20Intelligence%20A%20Modern%20Approach%20%283rd%20Edition%29.pdf%20%28%20PDFDrive%20%29.pdf>
- Tena, R. y Carrera, N. (2020). La future classroom lab como marco de desarrollo del aprendizaje por competencias y el trabajo por proyectos. *Revista Mexicana de Investigación Educativa*, 25 (85), 449–468.
- Tissenbaum, M., Sheldon, J. y Abelson, H. (2019). Viewpoint from computational thinking to computational action. *Communications of the ACM*, 62 (3), 34–36. <https://doi.org/10.1145/3265747>
- UNESCO (2022). *K-12 AI curricula: A mapping of government-endorsed AI curricula*. UNESDOC. <https://unesdoc.unesco.org/ark:/48223/pf0000380602>

Crónica de un viaje: XVIII Congreso sobre Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas

María Isabel Berenguer Maldonado

Departamento de Matemática Aplicada, Universidad de Granada (Granada, España),
 maribel@ugr.es

Pablo Montiel López

Departamento de Didácticas de las Ciencias, Centro de Magisterio La Inmaculada
 (Granada, España), pablomontiel@cmlt.es

Resumen: *Del 3 al 5 de julio se ha celebrado el XVIII Congreso de Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas (XVIII CEAM). Con el lema “Enseñar matemáticas con sentido. Un viaje apasionante” más de 200 docentes de todas las etapas educativas se han dado cita en Granada para explorar nuevas perspectivas pedagógicas, intercambiar ideas innovadoras y fortalecer su compromiso con la mejora de la calidad de la enseñanza de las Matemáticas. Ha sido un encuentro donde se han dado cita y tendido puentes entre la investigación, la divulgación, el día a día del aula, etc. Una experiencia, que bien ha merecido la espera desde aquel lejano 2018 cuando se celebró el último CEAM, y que, sin duda, ha sido un espacio de aprendizaje y crecimiento profesional para todos los participantes.*

Palabras clave: *CEAM, enseñar, aprender, matemáticas con sentido.*

Chronicle of a trip: XVIII Congreso sobre Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas

Abstract: *From 3 to 5 July, the XVIII Congress on Teaching and Learning Mathematics (XVIII CEAM) was held. Under the motto "Teaching Math with Meaning. An exciting journey" more than 200 teachers from all educational stages met in Granada to explore new pedagogical perspectives, exchange innovative ideas and reinforce their commitment to improving the quality of mathematics teaching. A meeting in which bridges have been built between research, dissemination, day-to-day life in the classroom, etc. An experience that has been well worth the wait since that distant 2018 when the last CEAM was held, and which has undoubtedly been a space for learning and professional growth for all participants.*

Key words: *CEAM, teaching, learning, maths with meaning.*

1. PASAJEROS AL TREN

Durante los días 3, 4 y 5 de julio, se ha celebrado en la ETS de Ingeniería de Edificación de la Universidad de Granada la XVIII edición del CEAM. Esta edición ha sido especial en muchos sentidos. Debido a la pandemia mundial producida por el COVID-19, hemos tenido que esperar a este 2023 para celebrarlo, tres años más tarde de lo programado. Así que desde la Sociedad

Andalucía de Educación Matemática THALES y la delegación de Granada, había una gran ilusión por celebrar este congreso.

Han sido tres jornadas apasionantes, de enseñanza, y, sobre todo, de aprendizaje. Tres días con conferencias, ponencias, comunicaciones, talleres, paseos matemáticos y, sobre todo, vuelta a la presencialidad del CEAM.

Figura 1. Comité Local

Coordinadores comité local: Maribel Berenguer, Pablo Montiel y Rafael Ramírez



La implicación ha sido uno de los grandes éxitos de estas jornadas, tanto a nivel académico como humano. Buen ejemplo de ello es que, desgraciadamente, mucha gente se quedó sin poder asistir a la visita guiada a la Alhambra la tarde del domingo 2 de julio, en la que Francisco Fernández y Joaquín Valderrama nos dieron una clase magistral de matemáticas por los jardines y alrededores de este monumento. Fue una agradable tarde precongreso que sirvió para colocarnos en la casilla de salida de este viaje.

Figura 2. Alhambra

Visita a la Alhambra el domingo 2 de julio



2. PRIMERA ETAPA. LUNES 3 DE JULIO

Y con tres años de retraso, dimos comienzo al XVIII CEAM. Y qué mejor manera de comenzar este congreso que con una gran matemática y divulgadora de la tierra: Clara Grima (Universidad de Sevilla). Una conferencia muy amena y divertida, con un gran toque de incertidumbre.

Figura 3. Conferencia lunes 3 de julio

Clara Grima con Marga García y Carmen Méndez, componentes del Comité Local



Mientras tanto, Francis y Joaquín recorrían las calles de Granada con los acompañantes de los congresistas demostrando que cualquier rincón de Granada es un lugar mágico donde aprender matemáticas.

La mañana dejó el listón muy alto, cosa que no asustó para nada a Ana Serradó (Profesora en “La Salle-Buen Consejo”) y Rafael Ramírez (Universidad de Granada), que colgaron el cartel de “no quedan entradas”. Dos ponencias que dieron conversación a lo largo del congreso.

Durante el transcurso del congreso, los participantes tuvieron de visitar dos exposiciones que eran puro espectáculo visual. Por un lado, “*La música de las esferas*”, donde la métrica daba lugar a una representación 3d de poemas y canciones que hacía que nos quedásemos embobados observando estos cuerpos geométricos. Por otra parte, “*Viajando por Egipto y Grecia: laboratorio STEAM*” nos mostró que se puede viajar con los estudiantes sin salir del aula. Simplemente hace falta una gran profesora, una impresora 3d y muchas ganas de trabajar.

Figura 4.

Exposición “*La música de las esferas*” de Antonio Alcaide Soler, Rosa Herrero Salinero, María Peñas Troyano.

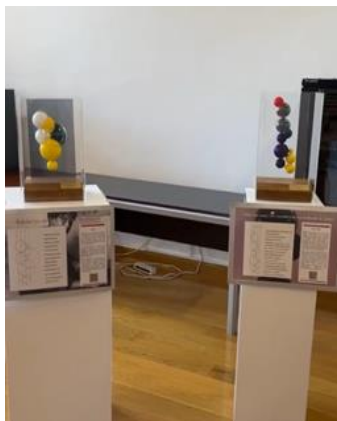


Figura 5.

Exposición “Viajando por Egipto y Grecia: laboratorio STEAM” de María Peñas



3. SEGUNDA ETAPA. MARTES 4 DE JULIO

Con mucho entusiasmo por parte de los asistentes comenzamos el segundo día de congreso, donde Pablo Beltrán (Universidad de Zaragoza) nos ayudó a entender un poco mejor el currículo y cómo llevarlo al aula mediante diversas situaciones de aprendizaje. Es muy difícil conseguir tanta expectación, pero más todavía esos silencios en un salón de actos donde no cabía un alfiler.

Figura 6. Conferencias martes 4 de julio

Pablo Beltrán durante la conferencia.



Con la cena de gala en el horizonte quedó clara una cosa: si necesitamos trabajar por proyectos, no tenemos más remedio que llamar a Francisco Benjumeda (Profesor en IES El Parador), el profesor que nos hubiese encantado tener en secundaria. Y la otra ponencia de la tarde corrió a cargo de Margarita Fuentes. Esta ponencia sobre los alumnos de infantil en entorno rural fue una demostración de cómo es posible aprovechar cualquier contexto y situación para generar conocimiento.

Figura 7. Asistencia

Todas las actividades siempre con gran participación.



Uno de los objetivos de este congreso era reunir al profesorado de todos los niveles educativos y en el contexto del congreso, el lema "todos aprendemos de todos" se manifestó en cada comunicación, taller, interacción y experiencia compartida entre los asistentes.

Figura 8. Zoco

Arte con sentido matemático en el metaverso ¡Disfrutando de otra realidad!



Después de dos días de congreso intensos, nos reunimos por la noche en el Carmen de los Mártires. Junto a la Alhambra, y con la ciudad de Granada de testigo, rendimos un homenaje a varias personas que han significado mucho en la enseñanza de las matemáticas en nuestra ciudad, nos han ayudado con la organización y que ya disfrutan de una merecida jubilación. Han dedicado toda su vida a esta profesión, pero lo que les ha diferenciado ha sido su pasión. Pensamos que merece la pena, y es de justicia, nombrarlos en estas líneas: Luis Berenguer, Belén Cobo, Francisco Fernández, Pablo Flores y Joaquín Valderrama. ¡Muchas gracias!

Figura 9. Cena de gala

¡Reconocimiento a los becarios jubilados!



4. ÚLTIMA ETAPA. MIÉRCOLES 5 DE JULIO

El último día, al igual que los dos anteriores, fue fructífero para todos los asistentes. Mientras se realizaba la visita matemática por el Parque de las Ciencias para los acompañantes de los congresistas, Jaime Martínez nos hizo reflexionar sobre los conceptos que han ido desapareciendo del currículo desde la perspectiva del ABN. Por su parte, Juan Miguel Ribera (Universitat de les Illes Balears) unió con gran acierto el pensamiento computacional, la modelización y la resolución de problemas.

Para terminar la mañana pudimos disfrutar de un momento de reflexión educativa del día a día en el cole gracias a una obra de teatro distendida y con un gran toque de humor a cargo de Ana Rodríguez.

Figura 10. Teatro

¡Ana en uno de sus monólogos!



Por la tarde trabajamos en diversos talleres, incluyendo el del Parque de las Ciencias, que nos dio a conocer todos los recursos que tenemos a nuestra disposición el profesorado de Andalucía.

El congreso se cerró con una conferencia de Pablo Flores. Fue especialmente emotiva, ya que Pablo se ha jubilado justamente entre el congreso que no se pudo celebrar y este. Nadie es capaz de mezclar conocimiento, humor y matemáticas de una forma tan natural (y entera). La didáctica de las matemáticas de Granada tiene una deuda impagable con él.

Figura 11. Conferencia miércoles 5 de julio
Pablo Flores en la magistral conferencia de clausura



5. EL FUTURO YA ESTÁ PRESENTE

Desde la delegación y el comité local se ha hecho una gran apuesta en este CEAM por el futuro de la asociación THALES y los profesores y profesoras que están por llegar. Más de 20 voluntarios de diferentes grados y másteres han trabajado porque todo fuese sobre ruedas.

Figura 12. Voluntarios
Reconocimiento a los voluntarios que nos ayudaron estos 3 días



Además, se han creado los premios CEAM para los trabajos Fin de Grado y Fin de Máster. En esta primera edición los premiados han sido: Francisco Jesús Zamora Picón (Universidad de Almería), Carmela Suárez González (Universidad de Oviedo) y Lucía Flores Lamolda (Universidad de Granada). Pensamos que transmitir la pasión por la enseñanza al futuro profesorado de las matemáticas es una de nuestras obligaciones.

6. EL FIN DE UN VIAJE, EL PRINCIPIO DE OTRO

Este viaje ha merecido la pena. Hemos conocido a gente, hemos aprendido y hemos enseñando. Como el final de cada viaje es el principio de otro, comenzamos ahora un viaje que no sabemos que nos deparará, pero sí que tendrá una parada obligada: Huelva. Nos vemos en el siguiente CEAM en 2025. Bon Voyage!

Actividades SAEM Thales

Esther Roquette Rodríguez

Secretaría General de la SAEM Thales, Esther.roquette@gmail.com

Resumen: *La SAEM Thales organiza actividades o participa en algunas para favorecer la divulgación matemática.*

Palabras clave: *actividades, concurso, divulgación, matemáticas.*

Activities SAEM Thales

Abstract: *SAEM Thales organizes activities or participates in some to promote mathematical dissemination.*

Key words: *activities, competition, promotion, mathematics.*

1. INTRODUCCIÓN

"Las matemáticas son el alfabeto con el cual Dios ha escrito el Universo". Esta célebre cita de Galileo Galilei resalta la importancia fundamental de las matemáticas en nuestra comprensión del mundo que nos rodea. Las actividades matemáticas no solo son cruciales para el desarrollo cognitivo de los individuos, sino que también desempeñan un papel crucial en la resolución de problemas en diversas áreas de la vida cotidiana.

Desde la SAEM Thales colaboramos en actividades en las distintas provincias de la Comunidad Autónoma de Andalucía.

2. ABRIL 2023

Durante el mes de abril tuvieron lugar las entregas de premios de las fases provincial de la OMT en las distintas provincias.

Figura 1.

Delegación de Jaén (izquierda) y Delegación de Málaga (derecha).



Cómo citar: Roquette Rodríguez, E. (2023). Actividades SAEM Thales. *Epsilon*, 114, 121-125.

3. MAYO 2023

La OMT celebró la fase regional para su XXXVIII edición en la provincia de Almería, donde cada provincia estuvo representada por sus 5 mejores alumnos y alumnas de la fase provincial.

Figura 2.

Alumnado participante en la Fase Regional



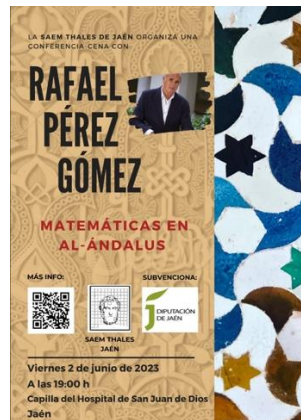
En el mes de mayo tuvo lugar un momento muy emotivo: la clausura de ESTALMAT, post COVID. En esta edición se despidieron 3 promociones de alumnos y alumnas de ESTALMAT con un campamento y un acto académico celebrado en Sevilla con el coordinador de la actividad Miguel Rodríguez.

4. JUNIO 2023

El mes de junio comienza con la Cena Conferencia de la Delegación de Jaén. Este año estuvo a cargo a D. Rafael Pérez Gómez y la charla con título “Matemáticas en Al-Ándalus” en la Capilla del Hospital de San Juan de Dios.

Figura 3.

Cartel de la Cena Conferencia.



La prueba de selección para ESTALMAT tuvo lugar el sábado 3 de junio en todas las provincias de la Comunidad.

En la Delegación de Granada celebraron unas Matemáticas en la Calle con un gran éxito de participación.

Figura 4.

Cartel de la actividad.



Figura 5.

Profesorado participante en la actividad.



El alumnado representante de la Comunidad Autónoma se trasladó a finales de junio a Canarias para la celebración de la Fase Nacional tanto de 2º de la ESO como de 6º de Ed. Primaria.

Figura 6.

Alumnado participante en la actividad junto con Beatriz Escabías y Paco Haro.



5. JULIO 2023

Después de 3 años esperando en julio llegó el CEAM Granada. En este Congreso de Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas se encontraron casi 200 profesores y profesoras de Matemáticas desde Infantil a Grados Universitarios.

Figura 7

Participantes en la visita a la Alhambra.



6. SEPTIEMBRE 2023

En el comienzo del curso 2023/2024 tiene lugar la reunión de la Junta Directiva donde se han tratado temas como los objetivos de esta para los dos próximos años o los objetivos de la Sociedad.

7. CALENDARIO DE ACTIVIDADES

Para el último trimestre del año tenemos varias actividades organizadas: el 6 de octubre, bajo el amparo de la Noche de los Investigadores, la SAEM Thales colaborará en las distintas provincias de nuestra comunidad.

En las provincias de Sevilla y Málaga se organizará el Concurso de Otoño organizado por la Real Sociedad Matemática Española.

El año se cierra con una actividad muy deseada y programada desde antes del COVID: el Congreso Internacional de GeoGebra que organiza la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas, donde la delegación de Córdoba organiza una visita matemática guiada por la Mezquita Catedral de Córdoba para los asistentes.

8. CONVOCATORIAS ABIERTAS PARA SOCIOS/AS

Como actividad permanentemente abierta se encuentra la [Convocatoria de Publicaciones](#). En ella cualquier socio o socia de la Thales o de cualquier otra sociedad de la Federación Española

Roquette Rodríguez, E.

de Sociedad de Profesores de Matemáticas (FESPM) puede presentar material de contenido matemático para ser publicado en formato online o en formato papel.

Otra actividad abierta a los socios y socias es la Convocatoria para el profesorado de ESTALMAT. Dicha convocatoria anima a todos nuestros socios a presentar sesiones para el Programa de Estimulación del Talento Matemático que comienza el último fin de semana de septiembre.

