

εpsilon

Revista de Educación Matemática

Editada por la Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales

“La verdad solo se encuentra en las obras de los que celebran las vidas de los grandes hombres”

Henry Fielding “Joseph Andrews”

Book III.

Chapter 1, line 4.

113
2023

Equipo Editorial

Burgos Navarro, María José
Carrillo de Albornoz Torres, Agustín
Cecilia Gámiz, Lina María
Conde Fernández, Silvia
Contreras García, José Miguel
España Pérez, Francisco
Fernández Plaza, Jose Antonio
Flores Lamolda, Lucía
Flores Martínez, Pablo
Gallardo Jiménez, Sandra
Gámez Valero, Carmen
García Schiaffino, Margarita
Garzón Guerrero, José Antonio
López Centella, Esperanza
Lupiáñez Gómez, José Luis
Molina Muñoz, David
Molina Portillo, Elena
Montejo Gámez, Jesús
Moreno Verdejo, Antonio
Partal García, Daniel
Peñas Troyano, María
Pérez Martos, María del Carmen
Ramírez Uclés, Rafael
Rivas Olivo, Mauro Alfredo
Rodríguez González, Miguel
Roquette Rodríguez, Esther
Ruiz Hidalgo, Juan Francisco
Tizón Escamilla, Nicolás
Valero Terrón, Iván
Villegas Escobar, Adela María

113

2023

Edita
Sociedad Andaluza de
Educación Matemática "Thales"
Universidad de Cádiz
C.A.S.E.M.
Facultad de Ciencias
Departamento de Matemáticas
Campus del Río San Pedro
Torre Central, 4ª planta
11510 Puerto Real (Cádiz)
Teléfono: 956012833
Email: thales.matematicas@uca.es

Depósito Legal
SE-421-1984

ISSN
2340-714X

Período
2023

Suscripción
Anual

ÍNDICE / CONTENTS

7 **RELEVO**

APORTES DE LA INVESTIGACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

9 **Desarrollo del sentido algebraico en Educación Infantil a través de tareas con patrones**
M^a Lourdes Anglada Pozo, Sandra Fuentes Mardones y María C. Cañadas Santiago

21 **Progresiones aritméticas y ecuaciones con sentido. Preparación de un experimento de diseño**
Micaela Mazzola y Silvia Bernardis

39 **Diseño y análisis de tareas de proporcionalidad enriquecidas para estudiantes de tercer ciclo con talento matemático**
Carla López Segura y Lucía Flores Lamolda

EXPERIENCIAS DE AULA

49 **Matemáticas en la piscina: de la proporcionalidad a la aritmética modular sexagesimal**
Pablo Beltrán-Pellicer

57 **El papel de las Escape Room virtuales como recurso para el fomento de la comunicación en el aula de matemáticas de Bachillerato**
Francisco Luque Sánchez

71 **Díselo con *mates***
María del Carmen Galán Mata

ACTIVIDADES EN LA SAEM THALES

- 83** **¡Álbumes y pseudoálbumes de matemáticos!**
Antonio L. Rodríguez López-Cañizares y Alfonso Romero Sarabia
- 101** **Actividades SAEM Thales**
Esther Roquette Rodríguez
- 113** **XVIII Congreso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas**
- 121** **Instrucciones para la publicación**

RELEVO

A lo largo de la vida, tanto de las personas como de las instituciones, se van sucediendo etapas, una tras otra para ir cumpliendo su andadura vital. Con el último número nuestra revista EPSILON acabó una etapa y con este número comienza otra.

Desde el año 2010, cuando Alexander Maz comenzó con el número 75, recogiendo la revista de manos de Antonio Moreno, Alexander inició una etapa que terminó con el anterior número. Alexander deja la revista a petición propia para seguir con su trabajo profesional, y en la hora de la despedida de la dirección, a nuestra SAEM “THALES” no nos queda sino agradecerle todo el esfuerzo realizado durante estos años. Alexander ha realizado un trabajo excelente y ha conseguido llevar a la revista a los más altos índices de referencia. También le ha tocado a Alexander dirigir de manera acertada el cambio de la revista de la edición en papel a la edición digital (motivado por razones del coste económico para la Sociedad), sin que la revista perdiera ni un ápice de calidad. Un motivo más que agradecerle.

La revista de la “Thales” tiene un doble objetivo: En primer lugar, contribuir a la formación de los socios, exponiendo ante ellos las nuevas ideas que van apareciendo en el campo de la investigación en Educación Matemática, para que puedan servirles de guía e inspiración en su desarrollo del currículo de matemáticas que han de elaborar en el día a día de sus clases. Pero junto a esta ampliación “en vertical” de la formación permanente, la revista tiene también como objetivo una formación “en horizontal”, entre iguales, con la expresión de aquellos trabajos que muestren el desarrollo de las clases o de las intuiciones, de los compañeros que quieran mostrar formas o métodos de desarrollo de sus clases que les parezcan interesantes y útiles.

Ambos objetivos se han cumplido en estos años en los que Alexander ha dirigido la revista, y ahora en la despedida a Alexander Maz (triste como todas las despedidas, aunque esperamos mucho de su segura colaboración) le damos las gracias por el trabajo realizado en esta dura tarea.

Recoge ahora el testigo en la dirección de la revista, Rafael Ramírez Uclés, quien desde Granada y al frente de un equipo que le apoya, ha echado sobre sus hombros la tarea de continuar el nivel de nuestra revista. Saben que cuentan con todo nuestro apoyo, y desde la SAEM “THALES” les ofrecemos nuestra gratitud y esperamos que todo su trabajo se vea coronado con grandes éxitos, que serán en beneficio de toda la Sociedad.

Salvador Guerrero / Presidente de la SAEM THALES

Desarrollo del sentido algebraico en Educación Infantil a través de tareas con patrones

M^a Lourdes Anglada Pozo

Centro Adscrito de Magisterio M^a Inmaculada de Antequera (Málaga, España),
lourdesanglada@eummia.es

Sandra Fuentes Mardones

Universidad de Granada (Granada, España), *sandrafuentesm@gmail.com*

María C. Cañadas Santiago

Universidad de Granada (Granada, España), *mconsu@ugr.es*

Resumen: *En este trabajo proponemos diferentes tareas para trabajar con patrones para desarrollar el sentido algebraico de niños de educación infantil. Estas tareas se implementaron en tres clases de 3, 4 y 5 años en el marco de un proyecto de investigación (www.pensamientoalgebraico.es). Aquí describimos el desarrollo de las sesiones y las interacciones con los alumnos. Recogemos algunas consideraciones a tener en cuenta para el desarrollo del pensamiento algebraico desde el trabajo con patrones.*

Palabras clave: *Educación infantil, patrones, pensamiento algebraico, sentido algebraico, tareas algebraicas.*

Fostering algebraic sense at early ages. Task with patterns

Abstract: *In this paper we propose different tasks to work with patterns to develop the algebraic sense of children in early childhood education. These tasks were implemented in three classrooms of 3, 4 and 5 year olds in the framework of a research project (<https://pensamientoalgebraico.es>). Here we describe the development of the sessions and the interactions with the students. We collect some considerations to take into account for the development of algebraic thinking from working with patterns.*

Key words: *Early Childhood, Elementary education, patterns, algebraic thinking, algebraic sense, algebraic tasks.*

1. INTRODUCCIÓN

Recientemente se ha publicado en España el nuevo currículum de educación infantil (Ministerio de Educación y Formación Profesional (MEFP), 2022a). Aunque no hace referencia explícita al sentido algebraico, desde la investigación en Didáctica de la Matemática se viene apoyando su inclusión desde las primeras edades. Esto es especialmente relevante en la actualidad, cuando ya aparece reconocido en el currículum de educación primaria (MEFP, 2022b). En este nivel educativo, el sentido algebraico se relaciona con el reconocimiento de patrones y las relaciones entre las variables, la expresión de regularidades o la modelización de situaciones simbólicas.

Además de recomendable, también es posible incluir el sentido algebraico en educación infantil en muchos de los contenidos propuestos, particularmente en el trabajo con patrones, al establecer relaciones entre los elementos que se van repitiendo. Blanton y Kaput (2004), plantean la importancia de que el niño explore, argumente, modelice, haga predicciones y discuta.

2. PENSAMIENTO ALGEBRAICO EN EDUCACIÓN INFANTIL

Las investigaciones sobre pensamiento algebraico en infantil aún son escasas pero encontramos algunos trabajos a nivel internacional. Encontramos estudios desarrollados en España, centrados en el último curso de educación infantil y primer curso de educación primaria (4-7 años) (e.g. Anglada y Cañadas, 2021; Fuentes y Cañadas, 2022; Ramírez et al, 2020). En estas investigaciones se indaga en el pensamiento algebraico de los alumnos, específicamente en lo que pueden hacer cuando resuelven tareas algebraicas; o las estrategias, estructuras y representaciones que utilizan para resolver la tarea planteada. En diferentes estudios se manifiesta la necesidad de dar difusión al trabajo que hacen los profesores-investigadores en el aula. En este artículo presentamos algunas de las tareas con patrones que se han llevado al aula y que esperamos sean un recurso útil para los maestros.

La propuesta *early algebra* proporciona un marco curricular para trabajar contenidos algebraicos desde infantil. Es importante incorporar en el aula regular actividades que desarrollen el sentido algebraico, incorporando actividades motivadoras y desafiantes que lleven a los alumnos desde los primeros años de escolarización a pensar “algebraicamente”, donde se les guíe hacia la generalización a través de un proceso de razonamiento inductivo. El trabajo con este tipo de actividades desde infantil permite avanzar en la apropiación formal del contenido, el cuál va incrementando en los niveles escolares siguientes (MEFP, 2022b). Una de las formas más efectivas de insertar nociones algebraicas en los primeros años de escolaridad puede ser a través de actividades que involucren la generalización de patrones (Zapatera, 2018). “La exploración de patrones se puede considerar como una especie de trampolín útil para promover la generalización, la anticipación, la conjetura, la justificación, la representación y el inicio del uso preciso del lenguaje matemático” (Acosta et al., 2022, p. 92). Las actividades deben ser llamativas para los niños, con un contexto cercano y motivante, para que se apropien de cada una de las tareas propuestas. El docente debe permitir el desarrollo del pensamiento algebraico en los niños con preguntas que desarmen la estructura clásica de la clase y que los lleven a pensar más allá de solo casos particulares.

3. PATRONES EN EDUCACIÓN INFANTIL

Se considera patrón a “lo común, lo repetido con regularidad en diferentes hechos o situaciones y que se prevé que puede volver a repetirse” (Castro et al., 2010, p. 57). Se considera la estructura del patrón la relación entre sus diversos componentes (Castro-Rodríguez y Castro, 2016). También se entiende como patrón a las sucesiones de elementos que se construyen siguiendo una determinada regla. A partir de ahora nos referiremos a lo primero como patrón y a lo segundo como secuencia, seriación o serie.

Atendiendo a la estructura del patrón, se suele distinguir entre dos tipos de patrones que se pueden utilizar con los niños de educación infantil para el desarrollo del pensamiento algebraico: (a) patrones de repetición, y (b) patrones de desarrollo (creciente o decreciente). En

la Figura 1 podemos ver algunos ejemplos de estos dos tipos de series que atienden a diferentes patrones. De acuerdo con Warren y Cooper (2008), para trabajar con patrones en educación infantil debemos prever progresivamente la evolución de patrones de repetición a patrones de desarrollo, contribuyendo así a la transición de lo cualitativo a lo cuantitativo. La exploración de patrones de desarrollo se considera más compleja para trabajar en educación infantil.

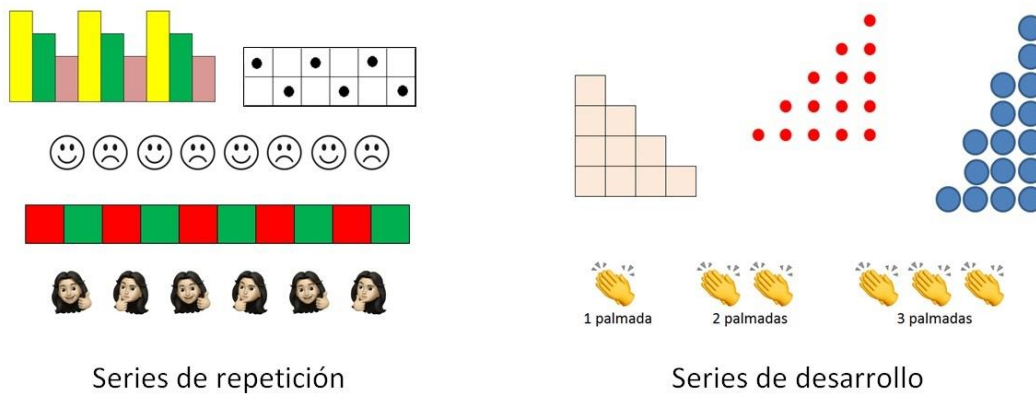
En los patrones de repetición, el núcleo al conjunto mínimo de elementos que se repite. Por ejemplo, en el primer dibujo de la Figura 1 el núcleo son las tres primeras regletas, amarilla, roja y verde claro.

Debemos proporcionar a los niños muchas oportunidades de descubrir y hablar acerca de patrones en matemáticas. Es importante provocar discusiones, hacerles preguntas adecuadas, tratar de no tener ideas preconcebidas de lo que tienen que hacer y prever que hay que dejarles tiempo para hacerlo (Copley, 2000; Torra, 2007). Con el trabajo en grupo, dialogando y negociando pueden alcanzar grados progresivos de generalización.

La regularidad puede estar en objetos, números, sonidos, movimientos o formas. Por tanto, podemos trabajar patrones desde una variedad perceptiva y usando diferentes elementos. Por ejemplo, podemos hacer series con sonidos (palmadas, palillos, instrumentos, sonidos variados en modulación, timbre y altura, ...); con posiciones del cuerpo; gestos de la cara; acciones (paso adelante, paso atrás,...); dibujando en una cuadrícula; usando barajas de cartas; con materiales de uso cotidiano: lápices, gomas, cubiertos, juguetes... o materiales del entorno: piedras, hojas...; recortes, estampaciones, mosaicos; cubos encajables; regletas de Cuisenaire; bloques lógicos de Dienes; con el material Montessori (cilindros, torre rosa, escalera marrón y varas de longitud) y a través de recursos TIC.

Figura 1

Tipos de patrones en educación infantil



En la Tabla 1 detallamos las posibles actividades que se pueden realizar con patrones de repetición, destacamos que las actividades 1, 2 y 3, son más intuitivas y pueden ser desarrolladas por los niños sin reconocer necesariamente el patrón, en cambio desde las tareas 4 a la 10 requieren que los niños sean conscientes de la estructura y la regla subyacente del patrón.

Tabla 1

Actividades a desarrollar con patrones de repetición en educación infantil

Actividad	Desarrollo
1. Leer una secuencia	Señalar y nombrar cada uno de los elementos de la secuencia de forma ordenada
2. Copiar una secuencia	Copiar una secuencia dado un modelo
3. Extender un patrón siguiendo una consigna	Continuar una secuencia ya empezada siguiendo un patrón que se les da de forma explícita mediante una consigna. Puede completarlo de izquierda a derecha o de derecha a izquierda, e incluso hacia ambos lados.
4. Extender un patrón por descubrimiento	Continuar una secuencia ya empezada descubriendo el patrón que sigue. Puede completarlo de izquierda a derecha o de derecha a izquierda, e incluso hacia ambos lados.
5. Completar una secuencia	Encontrar los elementos que faltan en una secuencia en la que hemos suprimido uno o más elementos.
6. Reconocer un patrón	Determinar la regla que sigue el patrón y argumentarla. Descubrir el núcleo del patrón.
7. Crear patrones	Crear nuevos patrones, explicando cuál es el patrón seguido.
8. Abstracción de un patrón	Recrear la estructura de un patrón modelo usando diferentes atributos o diferentes materiales.
9. Traducción de un patrón	A partir de una secuencia, construir otra con el mismo patrón. Por ejemplo, de una secuencia de palmadas y chasquidos construir una con multicubos que siga el mismo patrón.
10. Generalización de patrones	Comprender y reconocer que existe un patrón común en distintas secuencias y clasificarlas.

4. TAREAS CON PATRONES

Presentamos una situación de aprendizaje que involucra patrones de repetición. La hemos implementado en clase con niños de segundo ciclo de educación infantil (3, 4 y 5 años).

Tarea. El loro gruñón

Para esta tarea hemos adaptado la tarea realizada por Omohundro (2017). Esta se contextualiza en una selva, donde un loro tiene frambuesas muy ricas en un lado del río y otros animales

quieren cruzar para comerlas. El loro les dice que solo pueden cruzar si consiguen construir un puente mágico que siga un determinado patrón, si lo logran, pueden cruzar y él compartirá con ellos las frambuesas. Tenemos que ayudar a los animales a cruzar el río. Según se van gestionando las características del patrón, va cambiando el animal, de forma que para cada animal hay un patrón diferente. Esta tarea se ha realizado como una secuencia de actividades.

Actividad 1

Objetivo	Agrupación	Espacios	Materiales
Analizar el reconocimiento del patrón de repetición	Grupo clase	Alfombra	Alfombra de 2m x 1 m con el dibujo del río y las dos orillas, rectángulos de goma eva de colores de 4mm de grosor y animales de peluche (Figura 2)

Figura 2

Materiales



En la Tabla 2 recogemos los tipos de patrones que proponemos trabajar para las diferentes edades de educación infantil, ordenados progresivamente, de menor a mayor dificultad.

Tabla 2

Secuencia de patrones según nivel escolar

3 años	4 años	5 años
AB	AB	AB
ABC	ABC	ABC
	ABB	ABB
		ABBC
		ABBCD

Desarrollo

Esta actividad se desarrolla en varios pasos. Comenzamos sentando a los niños en un lateral de la alfombra, de forma que todos tengan la misma perspectiva. Vamos contando el cuento y realizando la actividad.

Paso 1. Continuar la secuencia

Siguiendo las indicaciones de Ontario Ministry of Education and Training (2008), presentamos al menos tres repeticiones completas del núcleo del patrón para ayudar a los niños a reconocer la regularidad involucrada.

Establecemos el siguiente diálogo:

Investigadora (I): ¿Qué veis? [Dejamos que digan lo que se les ocurra sin intervenir]

I: Pues este loro es el loro gruñón, vive solo y se pasa el día enfadado. Vive en un campo verde repleto de frambuesas. ¿Podéis ver las frutas rojas en el campo de nuestro loro gruñón? Todos los animales querían comer esas frambuesas, pero como podéis imaginar, el loro gruñón no las quería compartir con nadie. Las quería todas para él. Ningún animal, aparte del loro, las había probado nunca.

Un día, una gallina que tenía mucha mucha hambre estaba andando por el bosque y llegó a la orilla de un río [colocamos a la gallina en la orilla]. Desde allí pudo ver un campo lleno de frambuesas y al loro gruñón.

La gallina le gritó al loro: “Buenos días señor loro, ¡qué buena pinta tienen esas frambuesas! Estoy hambrienta, por favor, ¿podría comer algunas?”

El loro respondió enfadado: “De ninguna manera. No y no. Son solo para mí”.

La gallina insistió: “Por favor, serían solo unas pocas”.

El loro le respondió: “Está bien, podrás comer las que quieras cuando completes el puente mágico siguiendo el patrón jajajaja”.

¿Queréis ayudar a la gallina a construir el puente mágico? [2 niños ponen las piezas y todos intervienen]

La gallina consigue cruzar el río, se burla del loro, come unas cuantas frambuesas y le dice al loro: “Ya he comido bastante, me marchó. Adiós. La gallina vuelve al bosque caminando por el puente mágico”.

La gallina contó su aventura al resto de los animales del bosque. El pato dijo: – mañana lo intentaré yo, estoy deseando probar esas frambuesas. La gallina respondió: – está bien, pero ahora vamos a descansar, vamos a dormir.

[Los niños cierran los ojos y cambiamos el patrón. Podemos repetir este paso con más animales, teniendo en cuenta que para cada animal el patrón debe ser diferente. Pasamos al siguiente paso cuando lo consideremos conveniente]

Paso 2. Completar los elementos que faltan en la secuencia

I: Al día siguiente el pato fue hasta el río y le dijo al loro gruñón: “Hola señor loro, mi amiga la gallina me ha dicho que las frambuesas de su campo están muy ricas. Por favor, ¿podría comer unas cuantas?”

El loro le respondió: “Está bien, podrás comer las que quieras cuando completes el puente mágico siguiendo el patrón jajajaja”.

¿Queréis ayudar al pato a construir el puente mágico? [Dos niños ponen las piezas y todos intervienen]

El pato consigue cruzar el río, se burla del loro, come unas cuantas frambuesas y se dispone a volver caminando por el puente mágico. [Quitamos algunas piezas del puente]. Pero no puede, faltan piezas. Tiene que arreglarlo para poder volver.

¿Queréis ayudar al pato a reconstruir el puente mágico? [Dos niños ponen las piezas y todos intervienen]

Paso 3. Completamos por la izquierda

Elegimos otro animal con otro patrón y seguimos el proceso del paso 1. Ahora al volver, al puente le falta un trozo. Deben completar la secuencia por la izquierda.

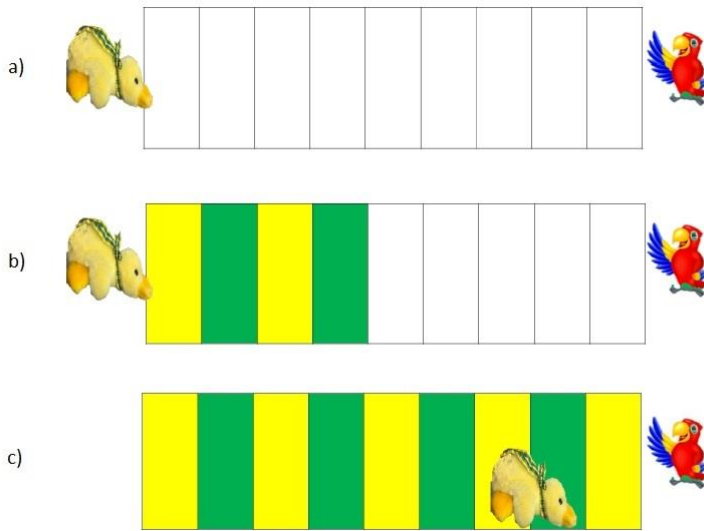
Paso 4. Crear un patrón (4 y 5 años)

Igual que el paso 1, con el animal que elijamos, pero ahora el loro gruñón pone como condición, que construya un puente creando un patrón distinto a los anteriores.

Para finalizar la actividad realizamos una puesta en común repasando todo lo anterior utilizando una presentación en la pizarra digital. Presentamos un ejemplo con uno de los animales. Con la primera diapositiva (ver Figura 3a) preguntamos si se acuerdan de cómo era el puente para el pato. A continuación, en la segunda diapositiva aparecen los primeros términos de la secuencia (ver Figura 3b). Vamos preguntando qué color irá después y pulsamos en la pizarra para comprobarlo. Continuamos así con cada rectángulo y al completarlo el pato cruza el puente (ver Figura 3c). Preguntamos cuál es el patrón y cómo ¹lo saben.

Figura 3

Presentación en la pizarra digital



Actividad 2 (3, 4 y 5 años)

Objetivo	Agrupación	Espacios	Materiales
Extender un patrón siguiendo una consigna	Individual	Mesas	Alfombra individual y rectángulos de colores con velcro

¹ Utilizamos “cómo” para preguntar en lugar de “por qué” ya que es menos restrictivo.

Desarrollo

Cada alumno tiene a su disposición una alfombra y rectángulos de colores, similar a los trabajados por el grupo completo, se les dan indicaciones de patrones según un animal y se les pide que completen: (a) la secuencia por la derecha, (b) la secuencia por la izquierda y (c) los espacios que faltaban. En la Figura 4 se aprecia el trabajo realizado en esta sesión. Una vez finalizada la actividad elegimos a algunos alumnos para que expliquen al resto de la clase cuál es el patrón que sigue la secuencia y cómo lo saben.

Actividad 3: Generalización (4 y 5 años)

Objetivo	Agrupación	Espacios	Materiales
Reconocer regularidades y clasificar secuencias según el patrón que siguen.	Pequeños grupos	Mesas	Tiras con las secuencias de cada animal (Figura 5). Para cada patrón los animales correspondientes son de un mismo tipo: domésticos, acuáticos, insectos etc. Además tiras en blanco y negro con cada patrón (Figura 6).

Figura 4

Trabajo individual



Desarrollo

Paso 1

Proyectamos en la pizarra digital una a una las tiras de las secuencias. Les preguntamos a todo el grupo qué patrón sigue. Cuando un niño responde, lo ponemos junto a la pizarra digital y le pedimos que nos explique a todos cómo lo sabe.

Paso 2

Repartimos un juego de tiras de secuencias a cada grupo y les damos la siguiente consigna: Poned juntos los que creáis que van juntos.

Una vez que han hecho la clasificación, correcta o no, preguntamos: ¿Por qué habéis puesto estos juntos?, ¿Por qué va este aquí?, etc.

En caso de que no se les ocurra realizar una clasificación, le damos las tiras en blanco y negro que les pueden servir de ayuda. En la Figura 7 podemos ver a una niña clasificando el material.

Figura 5

Tiras con secuencias

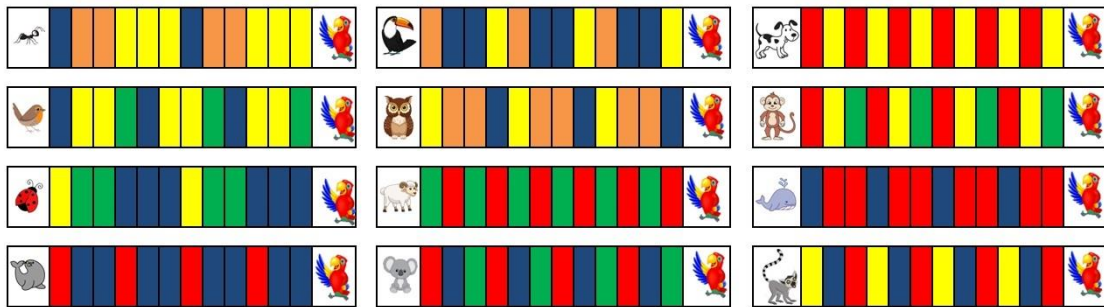


Figura 6

Tiras de patrones



Figura 7

Niña clasificando patrones



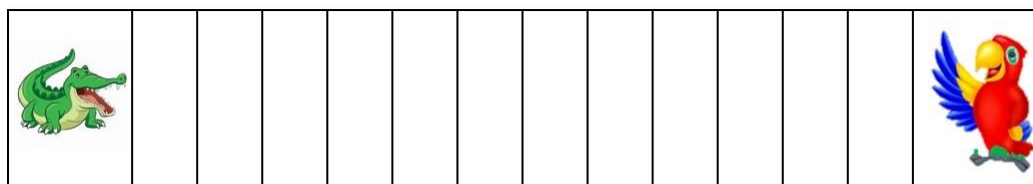
Paso 3

Le damos a cada niño una tira en blanco con un animal diferente a los que tenían y le pedimos que lo coloreen eligiendo un patrón. En la Figura 8 podemos ver un ejemplo.

Una vez coloreado les preguntamos: a) ¿Puedes explicarme tu patrón?, b) ¿En cuál de los montones anteriores colocarías tu patrón?

Figura 8

Ejemplo de ficha para construir un patrón



5. CONCLUSIONES

El sentido algebraico es novedad del currículo actualmente en vigor para educación primaria (MEFP, 2022b). En educación infantil no hay referencia explícita al sentido algebraico pero es recomendable trabajarlo por lo que apuntan diferentes estudios para prepararlos para el siguiente nivel educativo y en el currículo de educación infantil tiene cabida a través del trabajo con patrones. Este trabajo contribuye a vincular los patrones con el desarrollo del pensamiento algebraico, a través de búsqueda de regularidades, justificación de las mismas y la expresión de la generalidad.

Las tareas y actividades presentadas fomentan en el alumno la necesidad de cuestionar, indagar, experimentar y crear. Les planteamos patrones de repetición donde tienen que completar la serie por la derecha, por la izquierda y completar espacios faltantes. Esto los lleva a pensar de forma no lineal, no solo es lo que sigue, sino también lo que venía antes o lo que desapareció entre elementos. El contexto motivador y desafiante los lleva a apropiarse de cada una de las tareas que se les proponen, empatizan con los animales y los ayudan a completar la misión.

AGRADECIMIENTOS

Este trabajo se ha realizado en el proyecto con referencia PID2020-113601GB-I00, financiado por la Agencia Estatal de Investigación (AEI) de España.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Acosta, Y., Pincheira, N. y Alsina, Á. (2022). Tareas y habilidades para hacer patrones de repetición en libros de texto de educación infantil. *AIEM-Avances de Investigación en Educación Matemática*, 22, 91-110.
- Anglada, M. L. y Cañadas, M. C. (2021). Correspondencia y generalización de estudiantes de último curso de educación infantil. En P. D. Diago, D. F. Yáñez, M. T. González-Astudillo y D. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIV* (pp. 125-132). SEIEM.
- Blanton, M. y Kaput, J. (2004). Elementary grades students' capacity for functional thinking. En M. Jonsen Hoines y A. Fuglestad (Eds.), *Proceedings of the 28th Conference of the*

- International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 135-142). PME.
- Castro, E., Cañadas, M. C. y Molina, M. (2010). El razonamiento Inductivo como generador de conocimiento matemático. *UNO. Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 54, 55-67.
- Castro-Rodríguez, E. y Castro, E. (2016). Pensamiento lógico-matemático. En E. Castro y E. Castro (Eds.), *Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en educación infantil* (pp. 87-107). Pirámide.
- Copley, J. V. (2000). *The young child and mathematics*. National Association for the Education of Young Children.
- Fuentes, S. y Cañadas, M. C. (2022). Evidencias de pensamiento funcional en una niña de 4 años: Estrategias y representaciones. En T. F. Blanco, C. Núñez-García, M. C. Cañadas y J. A. González-Calero (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXV* (pp. 269-276). SEIEM.
- Ministerio de Educación y Formación Profesional [MEFP] (2022a). Real Decreto 157/2022, de 1 de marzo, por el que se establecen la ordenación y las enseñanzas mínimas de la Educación Primaria. *BOE*, 56, 24386-24504.
- Ministerio de Educación y Formación Profesional [MEFP] (2022b). Real Decreto 95/2022, de 1 de febrero, por el que se establecen la ordenación y las enseñanzas mínimas de la Educación Primaria. *BOE*, 28, 1-33.
- Ontario Ministry of Education and Training (2008). A guide to effective instruction in mathematics, Kindergarten to Grade 3 – Patterning and Algebra. Autor.
- Omohundro, K. (2017/10/13). The Tale of the Grumpy Parrot and the Purple Snazzleberries. Math Exchanges. <https://mathexchanges.wordpress.com/2017/10/13/the-tale-of-the-grumpy-parrot-and-the-purple-snazzleberries/>
- Ramírez, R., Brizuela, B. y Blanton, M. (2020). Kindergarten and first-grade students' understandings and representations of arithmetic properties. *Early Childhood Education Journal*, 50, 1-12.
- Torra, M. (2007). Les sèries, els patrons, una oportunitat per a l'educació matemàtica a educació infantil. *Escola Catalana*, 42, 34-36.
- Warren, E. y Cooper, T. J. (2008). Generalising the pattern rule for visual growth patterns: Actions that support 8 year olds' thinking. *Educational Studies in Mathematics*, 67, 171-185.
- Zapatera, A. (2018). Introducción del pensamiento algebraico mediante la generalización de patrones. Una secuencia de tareas para Educación Infantil y Primaria. Introducción del pensamiento algebraico mediante la generalización de patrones. *Números: Revista de didáctica de las matemáticas*, 97, 51-67.

Progresiones aritméticas y ecuaciones con sentido. Preparación de un experimento de diseño

Micaela Mazzola

Facultad de Humanidades y Ciencias, Universidad Nacional del Litoral (Santa Fe,
Argentina), *micamazola@gmail.com*

Silvia Bernardis

Facultad de Humanidades y Ciencias, Universidad Nacional del Litoral (Santa Fe,
Argentina), *email@email.com*

Resumen: *En este artículo presentamos el diseño de un experimento de enseñanza que incluye una Trayectoria Hipotética de Aprendizaje, con el propósito de potenciar un estudio de las ecuaciones de primer grado con una variable, en la que se dote de sentido a dicho objeto matemático y se inicie en las técnicas de resolución sobre la base de un trabajo activo por parte de los estudiantes. Se espera que por medio de este artículo se propicie un interés en cuanto al uso de la metodología que se propone en el estudio.*

Palabras clave: *experimento de enseñanza, ecuaciones, construcción de sentido.*

Abstract: *In this article we present the design of a teaching experiment that includes a Hypothetical Learning Trajectory, with the purpose of promoting the approach of first degree equations with a variable in which sense is given to said mathematical object and start in the resolution techniques on the basis of an active work by the students. It is hoped that through this article an interest in the use of the methodology proposed in the study will be fostered.*

Key words: *teaching experiment, equations, construction of meaning.*

1. INTRODUCCIÓN

El experimento de diseño (Cobb y Gravemeijer, 2008) surge como una de las metodologías de investigación alternativas a las existentes, de manera tal que sean sensibles a la complejidad de los contextos de enseñanza y aprendizaje y así incrementen la relevancia de la investigación para la práctica. Es una metodología de naturaleza principalmente cualitativa, que, según Molina et al. (2011), “persigue comprender y mejorar la realidad educativa a través de la consideración de contextos naturales en toda su complejidad, y del desarrollo y análisis paralelo de un diseño instruccional específico” (p. 75).

En este artículo utilizamos, en particular, los experimentos de enseñanza, que son los estudios más frecuentes dentro de este paradigma de investigación. En la ejecución de los experimentos de enseñanza se incluyen tres fases: preparación del experimento, experimentación en contextos de clase y análisis retrospectivos de los datos generados con el

propósito de extraer información sobre el diseño, permitiendo su mejora. Aquí nos enfocamos en la primera de estas fases, describimos las acciones a realizar en ella a partir de un experimento de enseñanza que realizamos en el área de la Didáctica de la Matemática, en relación con las ecuaciones con una variable. El objetivo general del estudio es explorar la iniciación al trabajo algebraico mediante las ecuaciones con una variable en primer año de la educación secundaria (12-13 años) de la provincia de Santa Fe, Argentina.

En la enseñanza de las ecuaciones distinguimos dos problemáticas. Por un lado, la asociada a la comprensión de las transformaciones algebraicas y al dominio de las técnicas de resolución. Por otro lado, la asociada al conocimiento más acabado del objeto matemático, ya que un abordaje reducido a las técnicas de resolución permite comprender de forma parcial dicho objeto.

Las investigaciones (Barallobres, 2007; Cambriglia y Sessa, 2011; Cambriglia, 2008; Sessa, 2005; Radford, 2001) destacan la necesidad de buscar otros caminos para la iniciación al álgebra escolar y proponen diversas alternativas para la entrada al trabajo algebraico, que contribuirían a mejorar las condiciones de los alumnos para dotar de sentido al objeto matemático ecuación en toda su riqueza. Sin embargo, las actividades que se proponen a los estudiantes solo permiten que construyan referencias para realizar y controlar las transformaciones algebraicas que respetan la equivalencia de expresiones; pero no se consideran las transformaciones que se aplican a una ecuación, aquellas que conservan el conjunto solución.

En esta dirección, se deriva como una actividad específica de la investigación el diseñar una serie de tareas para el estudio de las ecuaciones de primer grado con una variable para primer año de la escuela secundaria, en la que se dote de sentido a dicho objeto matemático y se inicie en las técnicas de resolución sobre la base de un trabajo activo por parte de los estudiantes.

En el siguiente apartado, presentamos en detalle los aspectos considerados en la preparación del experimento de enseñanza.

2. PREPARACIÓN DEL EXPERIMENTO DE DISEÑO

Para la preparación del experimento, se consideran cuatro aspectos, según Cobb y Gravemeijer (2008). El primero es la clarificación de los puntos finales de instrucción a los que se apunta. Si bien los objetivos instruccionales vienen marcados por las directrices curriculares actuales, no los aceptamos de manera incuestionada. En cambio, analizamos y problematizamos esos objetivos desde una perspectiva disciplinaria, identificamos las ideas organizadoras centrales. Para ello, es fundamental realizar previamente el rastreo documental del tema de estudio.

A partir de identificar las ideas organizadoras de los diseños curriculares y de la revisión de investigaciones previas, en este experimento de diseño proponemos los objetivos de aprendizaje que se detallan a continuación.

- O1: Construir la noción de ecuación como función proposicional, y de conjunto solución como el conjunto de valores de las variables que hacen que la proposición sea verdadera.
- O2: Analizar y discutir sobre el conjunto solución de una ecuación lineal con una variable y cómo determinarlo desde el contexto, la lectura de las expresiones algebraicas involucradas o las propiedades de los números y de las operaciones.

- O3: Elaborar las técnicas de resolución de ecuaciones lineales con una variable con sentido a partir de la generalización de conocimientos y relaciones sobre el conjunto de los números naturales.
- O4: Apropriarse de las técnicas elaboradas para resolver ecuaciones lineales con una variable en el conjunto de los números naturales.

En segundo lugar, de acuerdo a esta metodología, se deben documentar los puntos iniciales de instrucción, considerando los conocimientos previos de los estudiantes sobre los cuales elaboramos la propuesta y las restricciones instruccionales existentes para lograrlo.

Uno de los pilares de partida en este experimento es la siguiente premisa, los estudiantes de primer año de la educación secundaria (12-13 años) tienen una larga tradición de trabajo aritmético desarrollada durante toda su escolaridad primaria, y por tanto al comenzar el estudio del álgebra traen consigo las nociones y objetos que usaban en la aritmética. Es decir, asumimos que los conocimientos aritméticos con los que cuentan los estudiantes son insumos para sus primeros aprendizajes algebraicos, tanto en lo referido a las nociones matemáticas, como también al tipo de práctica desarrollada.

De este modo, tomamos como punto de partida el trabajo vinculado a los patrones numéricos, como resultado de su escolaridad primaria. Este trabajo tiene el potencial de permitir la entrada al álgebra desde la aritmética a partir de situaciones problemáticas que las requieran. Sin embargo, aunque la aritmética sea considerada como prerrequisito fundamental para el álgebra y aunque el álgebra se pueda abordar como una aritmética generalizada, la transición de la aritmética al álgebra implica rupturas y tensiones. El estudio y descripción de las mismas las podemos encontrar en Arcavi et al. (2017), Broitman, Castillo y Bernasconi Echeverría (2019), Grimaldi e Itzcovich (2013), Grimaldi, et al. (2017), entre otros. Cada una de estas rupturas es un punto en el cual los estudiantes pueden enfrentar restricciones instruccionales tanto conceptuales como procedimentales.

El análisis de ambos aspectos da lugar al tercero, que consiste en delimitar una trayectoria hipotética de aprendizaje (THA), formulando conjeturas sobre los cambios significativos que esperamos en el aprendizaje de los estudiantes sobre el concepto matemático y sobre los medios que dispondrán para apoyar y organizar estos cambios. En el siguiente apartado describiremos brevemente el modo de implementar las tareas de la THA, las herramientas, las normas y la naturaleza del discurso de la clase como factores condicionantes de los aprendizajes.

El último aspecto es situar el experimento en un contexto teórico, en nuestro caso en la Educación Matemática Realista (EMR), lo cual se abordará en detalle en una próxima publicación. El proceso de diseño lo realizamos sobre la base de tres características principales de la EMR: la reinención guiada, la fenomenología y la matematización progresiva. La base de esta corriente es el principio de actividad, que consiste en la concepción de la matemática como actividad humana cuya finalidad es organizar (matematizar) el mundo que nos rodea incluyendo a la propia matemática. En este sentido, un contexto es un “dominio de la realidad, el cual, en algún proceso de aprendizaje particular, es revelado al alumno en orden a ser matematizado” (Freudenthal, 1991, p. 73).

Además, desde esta corriente se plantea que la educación debe dar a los estudiantes oportunidades para que reinventen ellos mismos las ideas y herramientas matemáticas, abocándose a actividades similares a la de los matemáticos, en interacción con sus pares y bajo la guía del docente. Lo mencionado es lo que Freudenthal (1991) denomina el principio de la reinención guiada de la matemática como actividad de matematización.

La reinención guiada se apoya en otra característica de la EMR: la fenomenología. Adoptando la terminología de Puig (1997), la fenomenología de un concepto matemático o de una estructura matemática significa describirlo en relación con los fenómenos para los cuales es medio de organización. Como medio de organización se entiende a “la función de los conceptos cuando se consideran en su relación con los fenómenos” (Puig, 1997, p. 64).

Por tanto, la reinención guiada requiere encontrar contextos realistas que sean fuentes para generar los fenómenos que solicitan ser organizados matemáticamente por el objeto matemático en cuestión, para así partir de tales fenómenos y “desde ese punto de partida enseñar al estudiante a manipular esos medios de organización” (Freudenthal, 1983, p. 32).

3. PROPUESTA DE TRAYECTORIA HIPOTÉTICA DE APRENDIZAJE

Atendiendo a los resultados de un estudio previo (Mazzola y Bernardis, 2021) diseñamos la siguiente secuencia de enseñanza a partir de un contexto realista como punto de partida propicio para la identificación y la generalización de progresiones aritméticas hacia el trabajo formal con símbolos, expresiones algebraicas y ecuaciones. El estudio de patrones, como afirman Bressan y Gallego (2010), constituye un modo alternativo de abordar la brecha entre la aritmética y el álgebra, y facilita la transición paulatina desde el álgebra informal al álgebra formal. Esto se debe a que contribuyen a la comprensión de la noción de variable y de fórmula, y promueven procesos de modelización, tales como la generalización y la simbolización matemática.

En cuanto a los tiempos en los que se desarrollará la secuencia, si bien dependerá del ritmo de trabajo del grupo de estudiantes, consideramos que aproximadamente en tres clases de 80 minutos puede abordarse su totalidad. En una primera clase, las dos primeras tareas. En una segunda clase, las tareas 3 y 4. Finalmente, proponer un espacio de reflexión para abordar la tarea 5 en la tercera clase.

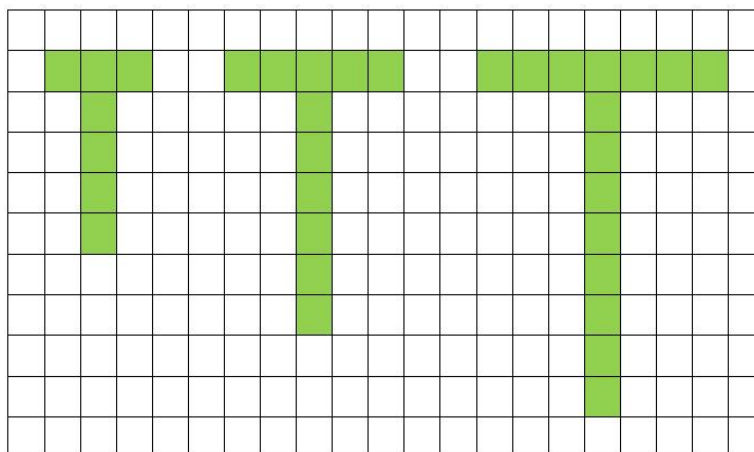
Tarea 1

Enunciado

En una hoja cuadriculada dibuja la inicial de tu nombre de manera que quede tu letra pixelada. Conservando siempre su forma, continúa agrandando la letra de la misma manera, una y otra vez. Por ejemplo, si tu inicial es la letra T, las dos primeras letras agrandadas se muestran en la Figura 1.

Figura 1

Imagen asociada a Tarea 1.



- ¿Cuántos cuadraditos pintados tiene tu inicial luego de agrandarla cinco veces?
- Muestra cómo va cambiando la cantidad de cuadraditos pintados a medida que vas agrandando tu inicial. Discute luego entre tus compañeros y acuerda la mejor manera de representarlo.

Modo de implementación

La tarea es introducida por el docente, el cual propone un diálogo colectivo para asegurar la comprensión de la situación, principalmente para debatir y acordar cómo dibujar su letra inicial, sobre lo que es válido y qué no, al momento de generar letras más grandes para que el patrón sea el esperado. Una vez lograda dicha comprensión, los alumnos resuelven la tarea en forma individual. Finalmente, se realiza un espacio colectivo con el propósito de discutir las producciones de los estudiantes.

Posibilidades que ofrece la tarea, estrategias previstas y posibles intervenciones docentes

En primer lugar, los estudiantes dibujan la inicial de su nombre. En el ítem a) solicitamos a los estudiantes que hallen la cantidad de cuadrados pintados que tiene la letra luego de agrandarla cinco veces, con el objetivo de comprender de qué se trata la situación planteada. Como conjetura suponemos que los estudiantes crearán y expandirán el patrón de su letra. Luego, para hallar la cantidad de cuadrados pintados que tiene la letra luego de agrandarla cinco veces, podrán realizar alguno de los siguientes procedimientos:

- Dibujan cada una de las letras hasta agrandarla cinco veces y cuentan todos los cuadrados.
- Reconocen la recursividad aditiva. Generan los siguientes elementos de la secuencia usando la diferencia numérica entre ampliaciones consecutivas como factor aditivo.
- Realizan correspondencias, expresando una relación entre cantidades variables basándose en las características pictóricas o numéricas de la representación.

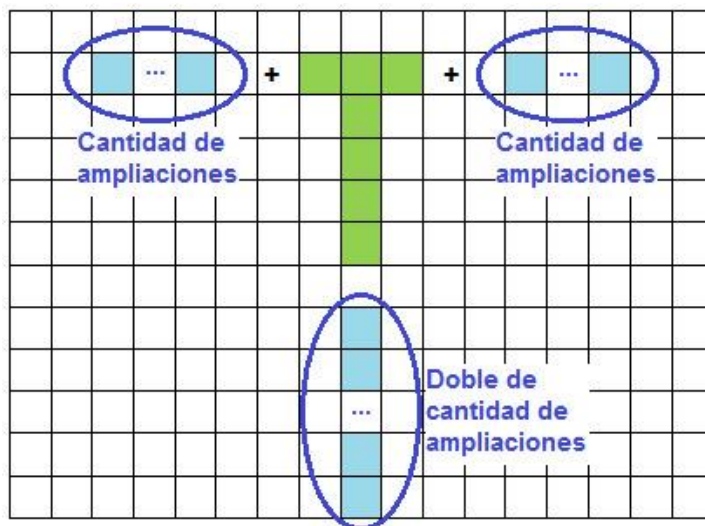
En el ítem b), proponemos a los estudiantes representar la forma en que cambia la cantidad de cuadrados pintados a medida que se agranda la letra, con el objetivo de que produzcan distintas representaciones sobre la situación planteada. En este sentido, conjeturamos que los estudiantes identificarán, generalizarán, esquematizarán y comunicarán el patrón con el que

armaron su letra, usando palabras, dibujos, diagramas, símbolos, expresiones o fórmulas. Si utilizamos como ejemplo la letra T, conjeturamos que podrían surgir como representaciones las siguientes:

- Representaciones con el lenguaje natural: como por ejemplo podrían escribir, “Cada vez que se agranda, le agrego a mi letra 4 cuadraditos” o “A los 7 cuadraditos iniciales le agrego el cuádruplo del número de veces que agrando la letra”.
- Representaciones pictóricas: utilizando un lenguaje icónico y apoyándose en conformaciones geométricas. Por ejemplo, como se muestra en la Figura 2.

Figura 2

Posible representación pictórica para la letra T.



- Lista de números: mediante las cuales los alumnos ubican los valores que van obteniendo en cada una de las veces que agrandan la letra. Por ejemplo, para la letra T, la lista de números es: 7, 11, 15, 19, 23, 27, 31, 35, 39, ...

No obstante, escribir los valores numéricos puede resultar una restricción instruccional para los alumnos, dado que como sostiene Arcavi et al (2017) les puede dificultar ver el patrón en juego y su estructura matemática.

En contrapartida, podrían surgir otras disposiciones de los valores numéricos obtenidos, tales como:

$$\begin{aligned} \text{Letra inicial} &\rightarrow 7 \\ 1^\circ \text{ vez} &\rightarrow 7 + 4 = 11 \\ 2^\circ \text{ vez} &\rightarrow 11 + 4 = 15 \\ &\dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Letra inicial} &\rightarrow 7 \\ 1^\circ \text{ vez} &\rightarrow 7 + 4 = 11 \\ 2^\circ \text{ vez} &\rightarrow 7 + 4 + 4 = 15 \\ &\dots \end{aligned}$$

Ambas disposiciones al ser no cerradas les brindan a los estudiantes la posibilidad de encontrar el patrón al mostrar una estructura que puede ser generalizable. Al revelar la estructura del patrón, este procedimiento es precursor de las expresiones algebraicas.

- Diagramas: tales como las siguientes cadenas de flechas (Figura 3). Mediante las

mismas, escriben los valores numéricos que van obteniendo cada vez que se agranda la letra, pero simbolizando con las flechas el paso de un valor al siguiente (primera cadena de flecha). También pueden recurrir al lenguaje simbólico (segunda cadena de flechas) para expresar la relación entre el número de veces que se agranda (n) y el número total de cuadraditos. En este caso, las flechas indican las cadenas de operaciones parciales.

Figura 3

Posibles cadenas de flechas para la letra T.



- Expresiones algebraicas: utilizando lenguaje simbólico para generalizar el procedimiento de cálculo que guarda una regularidad. La cantidad de cuadrados pintados según las veces que se agranda la letra puede ser expresada como $an + b$, donde b representa el número inicial de cuadraditos pintados, n las veces que se agranda y a el número de cuadraditos incrementados cada vez. Por ejemplo, para la letra T, la cantidad de cuadraditos T en relación a la cantidad n de veces que se agranda la letra está dada por $T = 7 + 4n$. Las expresiones algebraicas pueden surgir desde el marco aritmético, al apoyarse en varios ejemplos para inferir regularidades entre ellos, o desde el marco geométrico, al apoyarse en conformaciones geométricas. Aquí, surge la fórmula como modelo de la situación para generar y representar todas las soluciones y la variable como número general o generalizado, dado que con ella se generaliza sobre el conjunto de los números naturales, y no sobre algunos valores numéricos específicos.

Luego de esta instancia de trabajo individual, los estudiantes son convocados a explicar, justificar, acordar o disentir decisiones, estrategias y resultados; a la vez de cuestionar alternativas y reflexionar sobre ellas. Para ello, el docente juega un papel clave para guiar y organizar esta interacción en el aula, transitando por los distintos procedimientos que surgen.

Es importante que los alumnos describan verbalmente las regularidades que encuentran, siendo tarea del docente hacer fluida esta verbalización e impulsarlos a usar símbolos para representar sus generalizaciones. Esto es, la representación de sus ideas mediante una fórmula, lejos de ser espontánea, debe ser promovida por la discusión que posibilita el docente.

A partir de lo trabajado hasta el momento, resultará interesante que el docente solicite a cada estudiante la escritura de una fórmula que refleje el método de cálculo de la cantidad de cuadraditos de su letra según las veces que se agranda, para luego escribirlas en el pizarrón, analizarlas y ponerlas en discusión.

Suponemos que en la clase surgirán una variedad de fórmulas para una misma letra. Por ejemplo, para el caso de la letra T, de acuerdo a la forma de contar los cuadraditos podría surgir la expresión: $T = 7+4n$, al contar todos los cuadraditos de la letra inicial o bien $T = 3+2n+4+2n$, al contar los cuadraditos del trazo horizontal y del vertical por separado. Cuestión que consideramos propicia para discutir y reflexionar acerca de interrogantes como los siguientes: ¿Cuál es la variable en cada una de las fórmulas? ¿Qué fórmulas utilizan la misma variable, pero están expresadas de diferente manera? ¿Son equivalentes dichas fórmulas? ¿Cómo

verificar que efectivamente las fórmulas halladas funcionan? Estas discusiones permiten a los estudiantes dotar de sentido el trabajo algebraico.

Por un lado, las expresiones algebraicas que van elaborando empiezan a adquirir sentido al permitir describir y generalizar las relaciones que representan los patrones de sus letras. Además, son las transformaciones algebraicas las que adquieren sentido al dar cuenta de que expresiones algebraicas distintas representan el mismo patrón (por ejemplo, $7+4n$ y $3+2n+4+2n$ para la letra T), lo que testifica la posibilidad de pasar de una a otra a través de esas transformaciones. Esto es, se ofrece la posibilidad de apoyarse en el contexto para comprender la equivalencia entre expresiones algebraicas. Por tanto, se realiza un acercamiento semántico a la noción de equivalencia (Chalé-Can et al., 2017). A la vez, la manipulación algebraica realizada para pasar de una fórmula a otra permite recuperar diferentes propiedades de los números y de las operaciones, que redundará en mejores niveles de comprensión y control dotando de sentido a las transformaciones que necesitarán posteriormente realizar para resolver ecuaciones. Todas estas cuestiones contribuyen a O3.

Por otro lado, a partir del análisis de las fórmulas pueden surgir expresiones algebraicas para una misma letra que no sean equivalentes, dado que dependen de cómo se seleccionan las variables. Por ejemplo, para la letra T, puede surgir la expresión algebraica $7+4n$, donde n puede tomar valores naturales mayores o iguales a 0, siendo n el número de veces que se agranda la letra. Pero también puede surgir la expresión algebraica $3+4n$, donde n puede tomar valores naturales mayores o iguales a 1, siendo n en este caso la posición de la letra en la secuencia. Esta cuestión nos permitirá, por un lado, completar el concepto de equivalencia de expresiones algebraicas dado que: “dos expresiones no son equivalentes si, verificando en un solo valor de n , ambas arrojan resultados distintos” (Sessa, 2005, p. 89). Por el otro, discutir respecto de las variables seleccionadas y el conjunto de valores admisibles de las mismas.

Por último, a partir de las fórmulas producidas, el docente brindará la oportunidad de reflexionar respecto de las diferencias y similitudes de las mismas. A partir de involucrar a los estudiantes en un proceso de comparación de escrituras podrán abstraer la escritura común de las fórmulas. De esta manera, podrán visualizar que se trata de cuentas de la misma forma, con variables y parámetros diferentes.

Tarea 2

Enunciado

A partir de las ampliaciones de tu letra.

- Piensa un número grande de cuadraditos pintados que nunca obtendrás y uno que seguro encontrarás. Explica por qué.
- ¿Una de tus letras podría tener 1000 cuadraditos pintados? ¿Cómo lo sabes? En caso afirmativo, ¿cuántas veces necesitas agrandarla para lograrlo?

Modos de implementación

Los alumnos abordan la tarea en forma individual. Luego, por medio de un debate colectivo presentan los diferentes procedimientos y las relaciones matemáticas puestas en juego, con la

intención de exponer, relacionar, analizar, confrontar y cuestionar los procedimientos y estrategias que surgen.

Posibilidades que ofrece la tarea, estrategias previstas y posibles intervenciones docentes

El ítem a) de esta tarea propicia en los alumnos la “generalización lejana”, en términos de Stacey (1989), al pedir que establezcan un número “grande” que se puede obtener como cantidad de cuadrados pintados y un número que no.

Luego de realizar un análisis exhaustivo de las fórmulas elaboradas en la Tarea 1 y lo que permite contar cada una de ellas, a partir del ítem a) de esta nueva tarea los estudiantes podrán hacerlas funcionar para buscar los números pedidos. Es decir, se pone en acción la fórmula y así se la aborda desde su función como proceso de cálculo.

Conjeturamos que los estudiantes para hallar un número “grande” que se puede obtener como cantidad de cuadrados pintados realizarán el reemplazo de un valor en la variable y efectuarán los cálculos correspondientes. De igual forma, para hallar un número que no se puede obtener podrán reemplazar por otro valor o utilizar el mismo y proponer, por ejemplo, el siguiente o el anterior a la cantidad total obtenida de cuadraditos. Trabajar el reemplazo de valores numéricos en las variables permite dar sentido, a la vez que posibilita abordar la dependencia entre variables, en este caso la relación entre el número de veces que se agranda y el total de cuadraditos pintados.

En cuanto al ítem b) de la tarea, solicitamos indagar sobre si una de las letras puede tener 1000 cuadraditos pintados, cómo saber si esta cantidad de cuadraditos corresponde al número total de cuadraditos de una de las letras agrandadas, o cuántas veces es necesario agrandarla para llegar a dicha cantidad. De esta manera, se persigue que los estudiantes elaboren y resuelvan ecuaciones del tipo $an + b = c$, donde n representa las veces que se agranda la letra y b el número inicial de cuadraditos de su inicial, es decir corresponde a $n = 0$ (ninguna). Se arribará al concepto de ecuación como una restricción que se impone en un cierto dominio y a la variable como incógnita, dado que se indaga sobre para qué valor de la variable se obtienen 1000 cuadraditos pintados.

A partir de un trabajo reflexivo en el grupo-clase se genera un ambiente propicio para el análisis de diversas cuestiones, mencionadas en Sessa (2005), tales como: el estudio de distintas situaciones –en este caso, las distintas letras- que se resuelven con la misma ecuación y la resolución de ecuaciones sin solución, dado que en algunas de las letras será posible encontrar el valor de n y en algunas no (contribuyendo a O2). Desde esta última cuestión será posible lograr O1.

Van Ameron (2003) afirma que los estudiantes pueden resolver ecuaciones empleando métodos apoyados en razonamientos aritméticos y en representaciones no convencionales. Así, si bien el ítem b) conduce al planteo de una ecuación, la misma puede resolverse aritméticamente a partir de “desarmar” los cálculos implicados: para $7 + 4n = 1000$, debo buscar un número ($4n$) tal que al sumarle 7 obtengo 1000, y luego un número (n) tal que al multiplicarlo por 4 obtengo 993. Asimismo, pueden poner en juego la función de la fórmula como portadora de información, a partir de leer las que elaboraron y extraer información de ellas. Por ejemplo, $7 + 4n = 1000$ no es válida para ningún valor de n , al ser $4 + 4n$ un múltiplo de 4 y $7 + 4n$ es tres unidades más que un múltiplo de 4. Pero 997 no es un múltiplo de 4. No obstante, algunas fórmulas serán más convenientes o sencillas que otras para poder realizar este razonamiento.

Tarea 3

Enunciado

Compara tu letra con las de tus compañeros. Analiza si tu letra tiene el mismo número de cuadraditos pintados que la de algún compañero, cuando las agrandan las mismas veces. Explica por qué.

Modos de implementación

El docente propone dos momentos de trabajo con los estudiantes en torno a esta tarea. Primero, un momento de indagación, comparación y discusión en pequeños grupos. Luego, un momento de análisis colectivo con el grupo-clase, con la intención de estudiar sus producciones, analizar su validez, compararlas, confrontarlas y generalizarlas.

Posibilidades que ofrece la tarea, estrategias previstas y posibles intervenciones docentes

Esta tarea permite al alumno que analice y justifique si su letra tiene el mismo número de cuadraditos pintados que la de algún compañero de su grupo, cuando tienen la misma cantidad de veces agrandadas. De esta forma, surgen ecuaciones del tipo $an + b = cn + d$, donde n representa las veces que se agranda y b el número inicial de la secuencia que corresponde a $n = 0$. Este tipo de ecuaciones favorecen la interpretación del signo igual como equivalencia de expresiones: surge el signo igual como comparación de elemento a elemento entre ambas letras, siendo la tarea encontrar los valores de n que verifican la igualdad.

Dada la variedad de patrones, la tarea lleva a analizar y discutir sobre si las ecuaciones que se pueden establecer tienen solución, así como hallar él o los valores de la variable que hacen verdadera la igualdad (O2). Para responder esta cuestión, los estudiantes pueden apoyarse en la lectura y comparación de información que dan sus representaciones o sus expresiones. Concretamente, si generaron una lista de números como representación, los alumnos pueden comparar de a pares los números correspondientes.

Pero será oportuno que el docente guíe al grupo al tratamiento mediante las expresiones algebraicas generadas en la Tarea 1. Si los alumnos igualan las expresiones de sus fórmulas pueden empezar a comparar sus términos y recurrir a relaciones conocidas: por ejemplo, si plantean la ecuación $4n + 7 = 3n + 9$ para analizar dos letras determinadas, pueden escribirla como $3n + n + 7 = 3n + 9$ dado que $3n + n = 4n$ y así ver que tienen de igual ambas expresiones. Como $3n$ aparece en ambos lados de la igualdad, pueden considerar que esa parte da lo mismo para cualquier valor de n . Entonces, sólo deben hallar el valor de n tal que $n + 7 = 9$.

Otro procedimiento posible es realizar la diferencia entre las expresiones algebraicas a comparar e igualar a 0, apoyándose en la idea aritmética que dos cantidades serán iguales si su diferencia es 0. Por ejemplo, para la ecuación $4n + 7 = 3n + 9$ se puede plantear $4n + 7 - (3n + 9) = 0$. Mediante transformaciones algebraicas de la expresión del lado izquierdo, apoyadas por el trabajo realizado en la Tarea 1, los alumnos arriban a la ecuación $n - 2 = 0$. En ambos procedimientos se obtienen ecuaciones aritméticas -ya abordadas en la Tarea 2- y mediante ellas pueden concluir que $n = 2$ es la solución de la ecuación.

También consideramos que podrían generar estrategias para casos particulares. Por ejemplo,

- Dos letras que tienen igual incremento de cuadraditos cada vez que se agranda, pero distinta cantidad inicial de cuadraditos, nunca tendrán entre ellas igual cantidad de cuadraditos para el mismo número de veces que se agranda. Esto es, cuando tenemos el caso:

$$an + b = an + c, \text{ con } a, b, c \in N \text{ y } b \neq c$$

la ecuación no tendrá solución entre los valores posibles de la variable.

- Dos letras que tienen igual incremento de cuadraditos cada vez que se agranda e igual cantidad inicial de cuadraditos, siempre tendrán entre ellas igual cantidad de cuadraditos para el mismo número de veces que se agranda. Esto es, cuando tenemos el caso:

$$an + b = an + b, \text{ con } a, b \in N,$$

la ecuación tendrá solución para todos los valores posibles de la variable.

- Dos letras que tienen igual cantidad inicial de cuadraditos, pero distinto incremento de cuadraditos cada vez que se agranda, tendrán entre ellas igual cantidad de cuadraditos iniciales. Esto es, cuando tenemos el caso:

$$an + b = cn + b, \text{ con } a, b, c \in N, a \neq c$$

la ecuación tendrá como solución a $n = 0$.

- Dos letras que tienen una diferencia de uno en el incremento de cuadraditos cada vez que se agranda y una diferencia de uno (en el otro sentido) en la cantidad inicial de cuadraditos, tendrán entre ellas igual cantidad de cuadraditos la primera vez que se agranda. Esto es, cuando tenemos el caso:

$$an + b = cn + d, \text{ con } a, b, c, d \in N, a = c + 1 \text{ y } b = d - 1,$$

la ecuación tendrá como solución a $n = 1$.

- Cuando una letra tiene mayor incremento de cuadraditos cada vez que se agranda y mayor cantidad inicial de cuadraditos que otra letra, nunca tendrán entre ellas igual cantidad de cuadraditos para el mismo número de veces que se agranda. Esto es, cuando tenemos el caso:

$$an + b = cn + d, \text{ con } a, b, c, d \in N, a > c \text{ y } b > d,$$

la ecuación no tendrá solución entre los valores posibles de la variable.

Mientras que las primeras cuatro estrategias son válidas como resolución en los distintos conjuntos numéricos, la quinta ecuación tiene solución en los números racionales, pero no está en los naturales. Por otro lado, la segunda estrategia permite ampliar el trabajo que se venía realizando sobre la equivalencia de expresiones algebraicas, relacionándola con las ecuaciones: Si dos expresiones son equivalentes, entonces la ecuación obtenida al igualarlas tiene como solución a todos los valores posibles de la variable.

En síntesis, se evita el “pasaje de términos”, en cambio se elaboran estrategias con sentido para la resolución de las ecuaciones, a partir de la generalización de conocimientos y relaciones (O3). Asimismo, surge nuevamente la discusión en torno a la noción de conjunto solución y se estudia la cantidad y la existencia o no de soluciones, lo que permite a los estudiantes profundizar la noción de ecuación como función proposicional (O1 y O2).

Al terminar la etapa en pequeños grupos, el docente juega un papel clave para guiar y organizar un análisis colectivo y propone a los estudiantes explicar, justificar, acordar o disentir estrategias y soluciones; a la vez de cuestionar alternativas y reflexionar sobre ellas. De esta

manera, hace circular en el aula distintas situaciones y estrategias que surgen e indaga sobre las distintas soluciones de una ecuación. Luego, podrá formalizar las siguientes cuestiones:

Llamamos ecuación a una igualdad en la que intervienen expresiones con variables. En una ecuación se pueden dar las siguientes situaciones excluyentes en relación de la veracidad de la igualdad:

Que sea verdadera para cualquier valor de la variable.

Que sea verdadera para algunos valores de la variable y para otros, no.

Que sea falsa para cualquier valor de la variable.

Los valores de la variable que hacen verdadera la igualdad se llaman soluciones de la ecuación. Si la igualdad es verdadera para cualquier valor de la variable, las expresiones que están a uno y otro lado del signo igual son expresiones equivalentes.

Tarea 4

Enunciado

Introduce en Photomath las ecuaciones generadas por tu grupo en la tarea anterior. Copia los pasos que presenta para resolverla y escribe una explicación del método que utiliza para transformar la ecuación inicial en otras ecuaciones.

Modo de implementación

El docente presenta a la clase la aplicación Photomath que utilizarán los estudiantes en sus dispositivos tecnológicos, ya sea en una computadora o celular. Comenta su utilidad para resolver ecuaciones a partir de escanearla o de escribirla.

Luego, el docente propone un momento de indagación y análisis en pequeños grupos sobre cada uno de los pasos que desarrolla la aplicación para resolver una ecuación. Finalizado este momento, el docente invita a un representante de cada grupo a escribir estos pasos en el pizarrón para luego ponerlos en discusión. En este momento de análisis colectivo con el grupo-clase se debe generar en los estudiantes la posibilidad de comparar, generalizar y sistematizar las técnicas de resolución de ecuaciones utilizadas por la aplicación.

Posibilidades que ofrece la tarea, estrategias previstas y posibles intervenciones docentes

Photomath resuelve una ecuación a partir de transformarla en otra en la que la variable solo aparece en un lado del signo igual, sin modificar el conjunto solución. Es decir, en los sucesivos pasos que realiza obtiene ecuaciones equivalentes y en la última ecuación obtenida se lee la solución de forma sencilla.

A partir de esta tarea el alumno dispone de cada uno de los pasos que desarrolla Photomath, al resolver la ecuación que ingresa. En primera instancia, cuando ingresa la ecuación, automáticamente Photomath le brinda la solución de la misma. Además, muestra el gráfico cartesiano de las dos funciones lineales asociadas a los miembros que componen la ecuación. Por ejemplo, para la ecuación $4n + 7 = 3n + 9$ la aplicación muestra la pantalla de la Figura 4.

Figura 4

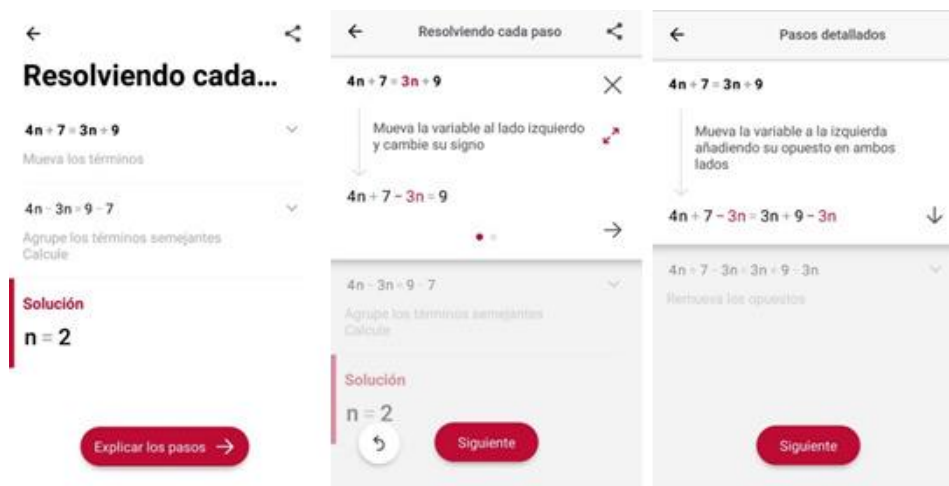
Pantalla de Photomath al incrustar una ecuación.



Al seleccionar “Mostrar la solución de cada paso”, la aplicación brinda, en forma breve a los estudiantes, el modo en que transforma la ecuación original en otras equivalentes (primera pantalla de Figura 4). Al seleccionar “Explicar los pasos” y sucesivamente seleccionar “Siguiente”, la aplicación amplía cada uno de los pasos (segunda pantalla de Figura 4). Asimismo, al seleccionar las dobles flechas que se encuentran al costado de cada paso aparece una nueva pantalla (tercera pantalla de Figura 5) donde se detalla dicho paso.

Figura 5

Sucesivas pantallas de Photomath para mostrar los pasos de resolución de una ecuación.



Con base en el trabajo realizado en la Tarea 3, los alumnos retomarán las relaciones aritméticas que se pusieron en juego y adjudicarán diversas justificaciones al tratamiento

algebraico realizado por la aplicación. Por ejemplo, pueden afirmar que se restó $3n$ a ambos miembros de la igualdad porque para cualquier valor de n se está restando la misma cantidad de cuadraditos pintados y, por tanto, no se cambian las soluciones.

Asimismo, en los casos donde la ecuación no tenía solución al no pertenecer al conjunto numérico de los números naturales, la aplicación le devolverá una solución –que puede pertenecer al conjunto de los números enteros o también al conjunto de los números racionales– dado que no tiene en consideración el contexto en que se genera dicha ecuación. Este momento resultará oportuno para que el docente genere un debate con el grupo-clase sobre el dominio de definición de la variable en la ecuación y hacer explícita la importancia del mismo en el proceso de resolución de una misma ecuación.

De esta manera, a partir del análisis colectivo el docente debe posibilitar que los alumnos amplíen y profundicen la discusión y el análisis iniciado en la Tarea 3 sobre las cuestiones de las soluciones de una ecuación y las transformaciones en otras ecuaciones equivalentes que facilitan la búsqueda de dichas soluciones (O4).

Tarea 5

Enunciado

Elabora una explicación y algunos ejemplos para contarle a un compañero que estuvo ausente en la clase, qué es una ecuación lineal y qué procedimiento recomiendas para su resolución.

Modo de implementación

El docente propone dos momentos de trabajo para los estudiantes en torno a esta tarea: primero en forma individual, para después pasar a un espacio de discusión colectivo con el propósito de discutir las producciones de los estudiantes.

Posibilidades que ofrece la tarea, estrategias previstas y posibles intervenciones docentes

Esta tarea permite al alumno registrar por escrito lo aprendido evocando su experiencia matemática. Broitman, et al. (2017) nos advierten que el desafío de poner en palabras lo aprendido para ser textualizado promueve en el alumno avances que tienden hacia una mayor profundización en la conceptualización matemática. Mientras escriben se transforman los conocimientos que se fueron construyendo al tener que explicitarlos, reorganizarlos y sistematizarlos.

Respecto a las técnicas elaboradas para resolver ecuaciones lineales, los alumnos pueden retomar distintas transformaciones algebraicas que realiza Photomath debido a la gradualidad que dicha aplicación muestra. Además, pueden resolver utilizando sus propios procedimientos elaborados en la Tarea 3 y compararlos con el que brinda la aplicación.

Luego de las producciones individuales, el docente puede proponer a la clase elaborar un escrito colectivo, lo que promueve formulaciones que van siendo progresivamente más generales. En las confrontaciones de ideas, debates y síntesis con los puntos de vista de sus compañeros, los alumnos se van distanciando de las tareas que dieron origen a los saberes que están en discusión.

El docente debe guiar hacia la sistematización de estos puntos de vista, atendiendo a las transformaciones algebraicas, centrándose en que los alumnos retomen las validaciones sobre la base de sus conocimientos. Estas técnicas utilizadas en el conjunto de los números naturales luego podrán ser retomadas y ampliadas a partir del trabajo con los números enteros y los números racionales. Por todo lo mencionado, se propicia O4.

4. CONCLUSIONES

En la THA en la que se fundamenta la propuesta, buscamos que los alumnos construyan, desde el inicio, la noción de ecuación como función proposicional desde las ideas de Grimaldi et al. (2017). Para dicha construcción, diseñamos un conjunto de tareas que posibiliten un trabajo algebraico que ofrezca condiciones para analizar y discutir que una ecuación no es una igualdad con una incógnita, ni cosas que se despejan con un número a develar, sino que la letra representa una variable y que la condición de igualdad puede cumplirse para algunos valores, para todos o para ningún valor de la variable.

Para ello, procuramos que en este trabajo algebraico se involucren cuestiones sobre qué es una ecuación y no solo cuestiones vinculadas a sus técnicas de resolución. En esta dirección, las tareas elaboradas apuntan a indagar las nociones de expresión algebraica, ecuación equivalente y conjunto solución; a estudiar la cantidad y la existencia o no de soluciones; y a elaborar procedimientos que luego derivan en técnicas de resolución.

Por último, la construcción de sentido de las ecuaciones no se logra solamente con las tareas, sino en las reflexiones y discusiones que se producen en torno a ellas. Esto pone de relieve el papel crucial de la interacción en el aula de matemática y el rol indispensable del docente como guía de estos momentos.

La THA es justamente eso, una hipótesis. Aunque nos provee un sentido de dirección para la enseñanza, la misma es tentativa y potencialmente transformable. Asimismo, la THA realizada es “una” propuesta para la enseñanza y el aprendizaje de las ecuaciones de primer grado con una variable (con dominio en el conjunto de los números naturales).

Finalmente, proponemos el uso de herramientas digitales en la enseñanza del álgebra, tales como Photomath y Geogebra. Estos recursos tecnológicos ofrecen la posibilidad de explorar regularidades y variaciones, visualizar situaciones de manera dinámica, analizar invariantes, estudiar y discutir con los estudiantes cuestiones que resultan insumos importantes para avanzar en el trabajo con las ecuaciones. Por ello, consideramos que desaprovechar estas potencialidades es una oportunidad que se pierde en la enseñanza del álgebra.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Arcavi, A., Drijvers, P. y Stacey, K. (2017). *The learning and teaching of algebra: Ideas, insights and activities*. Routledge.
- Barallobres, G. (2007). Introduction à l’algèbre par la généralisation: problèmes didactiques soulevés, *For the Learning of Mathematics*, 27(1), 39-44.
- Bressan, A. M. y Gallego, M. F. (2010). El proceso de matematización progresiva en el tratamiento de patrones. *Correo del Maestro*, (168), 5-21.

- Broitman, C., Castillo, C., y Bernasconi Echeverría, A. (2019). Hacia la ampliación de sentidos del símbolo igual en los primeros grados de la escuela primaria. *Yupana*, (11), 8-37. <https://doi.org/10.14409/yu.v0i11.8839>
- Broitman, C., Escobar, M., Ponce, H. y Sancha, I. (2017). *Enseñar a estudiar matemáticas en la escuela primaria*. Santillana.
- Cambriglia, V. (2008). El carácter local de las expresiones literales en un aula de séptimo grado. *Educación matemática*, 20(1), 5-30.
- Cambriglia, V. y Sessa, C. (2011). Construcciones colectivas en torno a lo general. El caso de la divisibilidad y las descomposiciones multiplicativas. *Yupana*, 1(6), 39-48. <https://doi.org/10.14409/yu.v1i6.266>
- Chalé-Can, S.; Font, V. y Acuña, C. (2017). La semántica y la sintáctica en la equivalencia de expresiones algebraicas. En J. M. Contreras, P. Arteaga, G. R. Cañadas, M. M. Gea, B. Giacomone y M. M. López-Martín (Eds.) *Actas del Segundo Congreso Internacional Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos*. <https://enfoqueontosemiotico.ugr.es/civeos.html>.
- Cobb, P. y Gravemeijer, K. (2008). Experimenting to support and understand learning processes. En A. E. Kelly, R. A. Lesh y J. Y. Baek (Eds.) *Handbook of design research methods in education. Innovations in Science, Technology, Engineering and Mathematics Learning and Teaching* (pp. 68-95). Lawrence Erlbaum Associates.
- Freudenthal, H. (1983). *Didactical phenomenology of mathematical structures*. Reidel.
- Freudenthal, H. (1991). *Revisiting Mathematics Education: China lectures*. Kluwer.
- Grimaldi, V. e Itzcovich, H. (2013). Tensiones en el paso de la escuela primaria a la escuela media. Algunas reflexiones en el área de matemática. En C. Broitman (Comp.), *Matemáticas en la escuela primaria II. Saberes y conocimientos de niños y docentes* (pp. 69-93). Paidós.
- Grimaldi, V.; Itzcovich, H. y Novembre, A. (2017). *Ecuaciones. Aportes para el debate acerca de su enseñanza*. Santillana.
- Mazzola, M. y Bernardis, S. (2021). Ecuaciones con sentido: un contexto realista inicial. En O. Lossio, M. Coudannes y J. Bernik (Comp.), *Pensar la enseñanza y la formación desde los desafíos del presente: libro de ponencias de las Terceras Jornadas de divulgación de experiencias de docencia, extensión e investigación educativa de la FHUC-UNL* (pp. 307-314). Universidad Nacional del Litoral.
- Molina, M., Castro, E., Molina, J. L., y Castro, E. (2011). Un acercamiento a la investigación de diseño a través de los experimentos de enseñanza. *Enseñanza de las Ciencias*, 29(1), 75-88.
- Puig, L. (1997). Análisis fenomenológico. En L. Rico (Coord.) *La educación matemática en la enseñanza secundaria* (pp. 61-94). Horsori.
- Radford, L. (2001). Factual, Contextual and Symbolic Generalizations in Algebra. En M. van den Huevel-Panhuizen (Ed.), *Proceedings of the 2th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 81-89). Freudenthal Institute.
- Sessa, C. (2005). *Iniciación al estudio didáctico del Álgebra. Orígenes y perspectivas*. Libros del Zorzal.
- Stacey, K. (1989). Finding and using patterns in linear generalizing problems. *Educational Studies in Mathematics*, 20(2), 147-164. <https://doi.org/10.1007/BF00579460>

Mazzola, M. y Bernardis, S.

Van Ameron, B. (2003). Focusing on informal strategies when linking arithmetic to early algebra. *Educational Studies in Mathematics*, 54(1), 63–75.
<https://doi.org/10.1023/B:EDUC.0000005237.72281.bf>

Diseño y análisis de tareas de proporcionalidad enriquecidas para estudiantes de tercer ciclo con talento matemático

Carla López Segura

Graduada en Educación Primaria (Universidad de Granada),
carlalopez16@correo.ugr.es

Lucía Flores Lamolda

Estudiante del Grado en Educación Primaria (Universidad de Granada),
luciaflores@correo.ugr.es

Resumen: En este trabajo se presenta el diseño de una tarea de enriquecimiento como respuesta educativa para estudiantes con talento matemático. La tarea en cuestión fue objeto de estudio de un Trabajo Fin de Grado. En esta sección de la revista *Épsilon*, se pretende llevar a cabo una transferencia del conocimiento que se produce gracias a la investigación en didáctica de la matemática a los profesionales de la educación. En este caso concreto a partir de trabajos académicos. Es por esto que lo principal de este artículo será presentar el diseño de la tarea, con objeto de que los docentes de matemáticas de educación primaria tengan ejemplos de tareas que pueden llevarse a cabo para alumnado con talento matemático. El contenido matemático que se trabaja es la proporcionalidad.

Palabras clave: enriquecimiento, talento matemático, diseño de tareas, proporcionalidad.

Design and analysis of enriched proportionality tasks for mathematically talented third-cycle students

Abstract: This work outlines the design of a rich task, focused on the concept of proportionality, as an educational offer for students with mathematical talent. The task, which was the subject of a Bachelor's Thesis, is presented in this *Épsilon* journal section with the objective of transferring the valuable knowledge gained from mathematics education research to education professionals. Specifically, the presentation of this task aims to inspire primary education mathematics teachers in designing challenging and engaging tasks for students with mathematical talent.

Key words: Enrichment, mathematical talent, task design, proportionality.

1. INTRODUCCIÓN

Con la intención de acrecentar características del talento que se esperan que desarrollen los estudiantes con altas capacidades para mejorar su sentido matemático, se han elaborado y analizado una serie de tareas de proporcionalidad. Para ello se ha utilizado el concepto de análisis didáctico, desarrollado por los estudiantes en la asignatura, Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas. En este artículo se presentan las tareas y los procesos de análisis que muestran

su interés educativo. Para ello comienza por presentar el marco teórico. Posteriormente se describen las tareas y su proceso de diseño y análisis. Finalmente se extraen unas conclusiones

Desde la educación inclusiva se pretende llevar a cabo una práctica educativa que permita el máximo desarrollo individual de cada estudiante y para conseguirlo los docentes deben estar preparados para afrontar la diversidad que demandan las aulas, incluyendo a los estudiantes talentosos. El propósito de la identificación de este alumnado, tal y como señala el Plan de actuación para la atención educativa al alumnado con necesidades específicas de apoyo educativo por presentar altas capacidades (Junta de Andalucía, 2011) es ofrecerle una respuesta ajustada a sus necesidades educativas.

El Ministerio de Educación y Formación Profesional del Gobierno de España, describe al alumnado con altas capacidades como un grupo muy heterogéneo que se caracteriza porque obtienen puntuaciones significativamente superiores a la media en test psicométricos de inteligencia general, y puntuaciones percentiles superiores a la media (desde 75 a 95 o más), en pruebas de aptitudes, dependiendo de su perfil.

Gardner (1993) habla de “altas capacidades” cuando existe capacidad superior generalizada a las diversas inteligencias, y utiliza “talento” como la presencia de una capacidad superior en alguna de las inteligencias.

En este trabajo nos centramos en estudiantes con talento matemático. Ramírez-Uclés (2013) estudia el concepto analizando las aportaciones de diversos autores y entiende al alumnado con talento matemático como aquel que, en virtud de sus habilidades sobresalientes, es capaz de un alto rendimiento en el ámbito matemático. Es fundamental que se utilicen prácticas docentes adecuadas para que este alumnado pueda desarrollar su máximo potencial.

2. MARCO TEÓRICO

2.1. Conceptos principales

El marco teórico arranca de examinar los siguientes apartados:

- Educación inclusiva
- Altas capacidades y talento
- Características del talento matemático
- Respuesta educativa

2.1.1. Características del talento matemático

En la tesis doctoral de Ramírez-Uclés (2012) se mencionan las siete características propuestas por Greenes (1981), de los estudiantes con talento matemático:

- Formulación espontánea de problemas.
- Flexibilidad en la manipulación de datos.
- Habilidad para la organización de datos.
- Agilidad mental para el flujo de ideas (pensamiento divergente).
- Originalidad de interpretación.
- Habilidad para transferir y generalizar ideas.

Lek y Sriraman (2005) sintetiza las características del talento matemático como la superioridad en determinados procesos, como la abstracción, generalización y discernimiento de estructuras matemáticas; el descubrimiento de manera independiente de principios matemáticos; el control de los datos; el uso de pensamiento analógico y heurístico (en la toma de decisiones en situaciones de resolución de problemas); además señala que estos sujetos hacen intervenir operaciones matemáticas; visualizan problemas o relaciones; distinguen entre principios teóricos y empíricos y aprecian las pruebas matemáticas.

El conjunto de las características de los estudiantes con talento matemático que se desarrollan en este apartado, serán puestas en práctica para la justificación del enriquecimiento de cada una de las tareas diseñadas. De esta forma, el objetivo que se pretende lograr es dar uso potencial a estas características, para que así los estudiantes con altas capacidades desarrollen los componentes del sentido matemático expuestos.

2.1.2. Respuesta educativa

Según Ramírez-Uclés et al.(2010) distintas organizaciones implicadas en el ámbito educativo reclaman la importancia de atender a los niños/as con talento, como por ejemplo, la OCDE y UNESCO inciden en la necesidad de atender a la diversidad y la NCTM (2000) en los Estándares considera a los/las estudiantes con talento dentro de las necesidades educativas especiales.

En España la necesidad de atender al alumnado con altas capacidades queda recogida por la normativa vigente, y concretamente en Andalucía, con las Instrucciones de 8 de marzo de 2017 (BOJA, 2017), se describen las adaptaciones curriculares para alumnado con altas capacidades intelectuales como respuesta educativa para promover el pleno desarrollo y equilibrio de este alumnado desde propuestas de profundización y/o ampliación.

En este artículo se describen tareas de enriquecimiento que se han diseñado, centrándonos en una adaptación curricular de profundización ya que, según las Instrucciones de 8 de marzo de 2017, la propuesta curricular de profundización de un ámbito/ asignatura es la modificación que se realiza a la programación didáctica y que supone un enriquecimiento del currículo sin modificación de los criterios de evaluación.

La Orden de 15 de enero de 2021, en el artículo 15, Programas de profundización (Junta de Andalucía, 2021) establece que estos programas tendrán como objetivo ofrecer experiencias de aprendizaje que permitan dar respuesta a las necesidades que presenta el alumnado altamente motivado para el aprendizaje, así como para el alumnado que presenta altas capacidades intelectuales. Dichos programas consistirán en un enriquecimiento de los contenidos del currículo ordinario sin modificación de los criterios de evaluación establecidos, mediante la realización de actividades que supongan, entre otras, el desarrollo de tareas o proyectos de investigación que estimulen la creatividad y la motivación del alumnado.

A la hora de diseñar tareas de enriquecimiento vamos a seguir las siguientes pautas de diseño de tareas propuestas por Ramirez-Uclés y Flores (2015):

- Establecer los contenidos matemáticos y los elementos de razonamiento matemático que se desean enriquecer, sin adelantarlos.
- Atender a las características del talento matemático y las metodologías propuestas para la atención de estos alumnos.

Para el diseño de tareas de enriquecimiento Ramírez-Uclés (2021) sugiere partir de una tarea rica y relacionar el análisis de dicha tarea con las características del talento matemático que se espera enriquecer. La complejidad de la tarea es esencial para la profundización y se va incrementando al pedirles que encuentren todas las soluciones posibles, que justifiquen y comuniquen sus argumentos. La secuencia de complejidad que plantea es la siguiente: resolver - discutir conjunto de soluciones - justificar - comunicar argumentos - generalizar y por último extender.

2.2. Relación con el análisis de contenido y análisis cognitivo

Según Lupiáñez (2009), el análisis didáctico permite al profesor abordar el diseño, puesta en práctica y evaluación de actividades de enseñanza y aprendizaje. Para realizar tareas ricas, el docente ha de establecer conexiones adecuadas con los conceptos matemáticos, sus propiedades, relaciones y procedimientos, para hacer un buen uso a través de los problemas y actividades planteadas, empleando diversos sistemas de representación. Dicho análisis de relaciones entre los contenidos matemáticos se recoge en el “Análisis de Contenido” descrito en el libro de “Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en Educación Primaria”(Flores y Rico, 2015).

El Análisis de Contenido es la herramienta técnica para establecer y estudiar la diversidad de significados de los contenidos de las Matemáticas Escolares. En el “Análisis Cognitivo” decidimos qué podemos y queremos que aprendan. Para realizar enseñanza finalista, que tenga como finalidad lograr el aprendizaje, se formulan objetivos y competencias con sentido, inspirándose en los criterios de evaluación y/o estándares de aprendizaje.

Tras realizar los análisis de contenido y cognitivo de la proporcionalidad, se han diseñado las tareas, y más adelante se ha analizado la riqueza de la tarea tomando en consideración los elementos obtenidos en dichos análisis.

Para proponer tareas acordes con las expectativas de aprendizaje, se ha realizado un análisis cognitivo, que ha dado lugar a los siguientes objetivos de aprendizaje. En cada uno de ellos se alude al sentido matemático al que se refiere y a las capacidades que contribuye a poner en juego o a desarrollar.

O.1. Comprender la noción de razón y proporción. Pretende desarrollar las siguientes capacidades del sentido numérico: reconocer cómo y cuándo usar los números, detectar y usar relaciones numéricas.

O.2. Conocer y aplicar las relaciones de proporcionalidad directa e inversa. Se refiere a las componentes siguientes del sentido numérico: Reconocer cómo y cuándo usar los números, detectar y usar relaciones numéricas, y realizar cálculos numéricos por procedimientos diferentes.

O.3. Calcular relaciones de proporcionalidad mediante la regla de tres. Aluden a las siguientes componentes del sentido numérico: Realizar cálculos numéricos por procedimientos diferentes, y conocer distintas representaciones de los números, detectar y usar relaciones numéricas.

O.9. Entender la proporción mediante escalas. Relacionado con la siguiente capacidad del sentido de la medida: reconocimiento de las cualidades comparables y medibles.

Para desarrollar una buena gestión de la tarea, se han tenido en cuenta una serie de criterios asociados al análisis del proceso de elaboración para crear así un contenido enriquecido de calidad.

1. Análisis de los contenidos matemáticos enriquecidos, identificando cómo se relacionan los conocimientos previos y el Análisis de Contenido de la tarea.
2. Elementos del razonamiento matemático que se favorecen, incorporando elementos del razonamiento matemático en el análisis de la actividad matemática. También se recoge el nivel de complejidad de la tarea.
3. Justificación de que se trata de una tarea de enriquecimiento.

Además, las tareas de enriquecimiento propuestas pretenden aumentar el grado de complejidad, siguiendo los niveles propuestos en Ramírez-Uclés (2021) (resolver - discutir conjunto de soluciones - justificar - comunicar argumentos - generalizar y extender, nivel más complejo).

3. TAREA: ESCALAS

Meta: “Crear una maqueta a escala del Sistema Solar”

Sesión 1: Materiales: regla, folio A4, cuerda de 2m, 8 bolas de poliespán de distintos tamaños (rotulador, pinturas para decorar las bolas) y un globo grande.

¿Os gustaría hacer vuestro propio Sistema Solar?

En primer lugar, pasaremos a escala, en una hoja A4, las distancias y tamaños reales de los planetas. Para ver que es muy difícil representar a escala tamaños tan grandes y distancias tan lejanas, se proyectarán los vídeos que aparecen en las siguientes direcciones: <https://www.youtube.com/watch?v=i93Z7zljQ7I> & <https://www.youtube.com/watch?v=chYOBBR1wU>

Una vez visualizados, en una hoja A4 trazarán la línea de la diagonal (que medirá 30cm) con una regla, y sobre ella se posicionarán los planetas. Ahora pasaremos a escala las distancias y tamaños reales de los planetas.

En segundo lugar deben calcular y recoger las distancias de los astros respecto al Sol en unidades astronómicas o UA, esto es la unidad más utilizada de distancias para medir órbitas y trayectorias dentro del Sistema Solar, donde 1 UA equivale a 149.597.870,691 km. Pero en nuestro caso vamos a redondear entonces 1 UA son 150.000.000 km.

Se les facilita una ficha con los datos necesarios sobre los que trabajar y recoger datos en las respectivas tablas.

Además, se les proporciona la siguiente información:

- Distancia Sol-Tierra: 1 UA = 150.000.000 km. 1 UA = 150 x 106 km.
- En el plano equivale a 1 cm.
- Escala = 1 : 1

Tendrán que hacer todas las conversiones y posteriormente deberán darse cuenta de que solo pueden establecer las distancias entre planetas respecto al Sol, no los tamaños. Representar los tamaños en el folio A4 es un problema, pues el Sol, astro principal, tendrá tan solo un diámetro de 0,01 cm. Y por ejemplo Júpiter, habrá que dibujarlo con un diámetro de una milésima de centímetro. (Esta conclusión deberá verse reflejada en el apartado “reflexión”). Una vez comentados dichos aspectos, individualmente contestan a las siguientes preguntas recogidas en la reflexión.

La recogida de los datos y las respuestas a las preguntas se pondrán en común en la puesta en común, en la que se espera que se justifique que la maqueta que realizan sólo mantiene proporcionalidad en distancias entre los planetas, pues no es tarea fácil encontrar objetos a escala con los tamaños reales de los planetas.

Para hacer nuestro sistema solar a escala necesitaremos 4,5 m de cuerda para posicionar los astros. Ubicamos al sol en un extremo y a Neptuno en el otro, pues la escala de referencia para la posición de los astros respecto al sol será de 1 cm por cada 10 millones de km, por lo tanto Neptuno serán 450cm o 4,5m de cuerda, donde:

$$4500 \times 1 : 10 = 450\text{cm}$$

cm	millones de km
10-----	1
450-----	x

Este procedimiento deberá aplicarse a todos los planetas para poder posicionar los astros.

El proceso de recogida de datos, los cálculos y la reflexión que se plantea se debe llevar a cabo de manera individual y en pequeños grupos. Una vez finalizado el proyecto, deberán hacer una comparativa sobre sus propuestas reflexivas y compartir tanto sus soluciones, para así comprobar si el procedimiento es correcto, como el proyecto o maqueta final de su sistema solar.

Sesión 2: Se les propone que realicen modelo con puntos del sistema solar con google maps, en el que se tomarán referencias de tamaño y distancia para establecer una comparativa del sistema solar con una ciudad o país que prefieran, como por ejemplo Granada. Una vez finalizado el proyecto lo presentarán a sus compañeros.

Para crear vuestro sistema solar como modelo con puntos, tomando como referencia bien Granada o España o cualquier otro lugar del mundo, deberéis establecer la escala para la distancia entre los planetas respecto al Sol como por ejemplo “1m a 6000 km”. Desde Google Maps dirígete al menú y selecciona: “Tus sitios”, clicka en el ajuste “mapas” y después selecciona “crear mapa”. Podrás así añadir marcadores que serán los puntos, los cuales representarán a los astros. Una vez marcados los astros podrás establecer las distancias con el ajuste “dibujar línea”, lo que permite visualizar las distancias entre tus puntos en el mapa. Si quieres averiguar las distancias en km de varias localizaciones puedes seleccionar la pequeña regla que dice “medir distancias y áreas”. Una vez hecho esto, vas a hacer lo mismo pero con los tamaños de los astros, estableciendo una escala, la que sea factible, identificando el radio del Sol con algún edificio o ubicación que se le pueda comparar, y a partir de esta referencia veremos como quedan reflejados el resto de planetas en comparación al tamaño a escala del sol, es decir, supongamos que al establecer nuestra escala el sol es tan grande como el ayuntamiento de Granada, entonces ¿Cómo de grande será Marte?

3.1. Justificación del enriquecimiento

En relación con los elementos del talento matemático que se potencian en la tarea: *establecen relaciones entre conceptos matemáticos*, en este caso relaciones de proporcionalidad, magnitudes y dimensiones; requiere *flexibilidad en la manipulación de datos*, por tener interiorizadas las unidades del Sistema Métrico, así como *habilidad para la organización de datos*, ya que al establecer su propio sistema solar deben posicionar correctamente los astros en el trozo de cuerda con el que disponen.

Sesión 1: En el apartado “Reflexión” se les pide que profundicen sobre varias preguntas. Dichas cuestiones han sido planteadas para establecer los distintos niveles de complejidad que han sido mencionados anteriormente, a lo largo de la sesión: *¿Qué planeta tiene el mayor tamaño? ¿Qué planeta es el más pequeño? ¿Qué planetas son los que están más cercanos entre ellos y cuáles más alejados entre ellos?* La justificación queda presente con preguntas del tipo: *¿Tiene sentido establecer una escala en A4 para cada uno de los tamaños de los planetas? ¿Podrías representar el tamaño de los planetas en una maqueta o escala a 3D, de ser así cómo lo harías?* Esto deberá quedar reflejado en un texto escrito que muestre la reflexión. Requiere generalizar para responder a la cuestión “*Conociendo que la Unidad Astronómica o UA = 149 597 870 700 m equivale a la distancia media entre la Tierra y el Sol, ¿Podrías explicar cómo hallar la distancia de cualquier planeta?*”. Finalmente extienden el conocimiento adquirido al desarrollar una maqueta o escala interesante que sea práctico o útil para la vida cotidiana.

Si bien se inicia la reflexión de manera individual, posteriormente deben hacer una comparativa sobre las propuestas reflexivas en pequeños grupos, compartiendo así tanto sus soluciones como el proyecto o maqueta final de su sistema solar.

Sesión 2: La justificación del proyecto quedará reflejada en la presentación de este a los compañeros. El proyecto permite generalizar y extender lo aprendido sobre escalas para crear un modelo del sistema solar con puntos en el mapa, experimentando con sentido los tamaños y distancias de los planetas respecto al sol al establecer escalas.

3.2. Análisis de la tarea

Para dar validez a las tareas se analizan las mismas, tal como se refleja en las siguientes tablas, en las que se relaciona con el análisis de contenido que se ha realizado, en el que se describen los contenidos tratados, las situaciones o fenómenos que abarca de proporcionalidad, así como los sistemas de representación.

- *Conocimientos previos:* Potencias, notación científica. Proporcionalidad, relaciones de proporcionalidad, procedimiento aritmético mediante regla de tres y noción de razón y proporción. Sistema Métrico Internacional. Conversiones y cambios de unidades.

- *Relación con el Análisis de contenido*

<p><u>Concepto:</u> Relaciones de proporcionalidad. Escala.</p>	<p><u>Procedimiento:</u> Elaborar un plano o maqueta a escala. Calcular y reconocer relaciones de proporcionalidad mediante regla de tres.</p>
<p><u>Fenomenología:</u> Escala. Física.</p>	<p><u>Representación:</u> Escala en mapas, planos y maquetas.</p>

Un aspecto importante de la tarea consiste en examinar qué tipo de actividad matemática propone. En el siguiente epígrafe aparece reflejado.

- *Actividad matemática:* Se trata de una tarea en la que tendrán que poner en práctica conversiones, reglas de tres, establecer relaciones de proporcionalidad y aplicar el Sistema Métrico Internacional. Se les pide que justifiquen y hagan deducciones cuando tienen que establecer una escala para el tamaño de los astros, deben justificar y deducir la imposibilidad de dibujar tamaños tan diminutos. Se profundiza en los conceptos matemáticos ya adquiridos. Esto incluiría por ejemplo las conversiones propias del área de física al trabajar con UA o las

conversiones con radios que se ponen en práctica con el nuevo conocimiento sobre escalas, como por ejemplo al incluir conversiones más complejas del área de física UA o trabajar con conversiones de radios para ponerlo en práctica con el nuevo conocimiento sobre escalas.

4. CONCLUSIONES

En resumen, el proyecto de fin de grado es resultado de la elaboración, análisis y justificación de tareas de enriquecimiento para alumnos con talento matemático.

El área matemática trabajada es la proporcionalidad, concretamente se enriquecen tareas ya ricas que han sido adaptadas y rediseñadas para que amplíen sus conocimientos sobre escalas y porcentajes y potenciar al máximo su desarrollo intelectual.

Se ha presentado el análisis y justificación del enriquecimiento de la tarea para así mostrar cómo se da un uso potencial a las características del talento descritas en el marco teórico y que de esta forma los estudiantes con altas capacidades puedan desarrollar los componentes del sentido matemático descritos.

La calidad del enriquecimiento destaca por el carácter argumentativo y reflexivo que pretende buscar la justificación de los problemas planteados; la puesta en práctica de las características del talento, como por ejemplo, se puede observar que la flexibilidad en la manipulación de datos es la característica del talento matemático que más se trabaja en las dos tareas, manipulan gran cantidad de conversiones que exigen comprender sus distintos significados para hallar una solución.

El enriquecimiento también atiende al componente de generalizar los contenidos adquiridos, buscar relaciones entre los datos y regularidades en cada una de las tareas desarrolladas que les dará cabida a extender el conocimiento.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Flores, P. y Rico, L. (2015). *Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en Educación Primaria*. Ediciones Pirámide.
- Gardner, H. (1993). *Multiple intelligences: the theory in practice*. Basic Books.
- Greenes, C. (1981). Identifying the Gifted Students in Mathematics. *Arithmetic Teacher*. *JSTOR*, 28(8), 14-17. <https://www.jstor.org/stable/41191796>
- Junta de Andalucía. (2011). Plan de actuación para la atención educativa al alumnado con necesidades específicas de apoyo educativo por presentar altas capacidades intelectuales en Andalucía. <https://www.juntadeandalucia.es/organismos/transparencia/planificacion-evaluacion-estadistica/planes/detalle/11676.html>
- Junta de Andalucía (2017). Instrucciones de 8 de marzo de 2017, de la Dirección General de Participación y Equidad, por las que se actualiza el protocolo de detección, identificación del alumnado con necesidades específicas de apoyo educativo y organización de la respuesta educativa. <https://www.juntadeandalucia.es/educacion/portals/web/ced/normativa/-/normativas/detalle/instrucciones-de-8-de-marzo-de-2017-de-la-direccion-general-de-participacion-y-equidad-por-las-que-se-actualiza-el-1xr2aw1d841lt>

- Junta de Andalucía. (2021). Orden de 15 de enero de 2021, por la que se desarrolla el currículo correspondiente a la etapa de Educación Primaria en la Comunidad Autónoma de Andalucía. BOJA, (7). <https://www.juntadeandalucia.es/boja/2021/507/BOJA21-507-01024.pdf>
- Lee, K. H. y Sriraman, B. (2011). *The Elements of Creativity and Giftedness in Mathematics*. Sense Publishers. <https://link.springer.com/chapter/10.1007/978-94-6091-439-3>
- Lupiáñez, JL. (2009). *Expectativas de aprendizaje y planificación curricular en un programa de formación de profesores de matemáticas de secundaria*. Editorial de la Universidad de Granada. <http://funes.uniandes.edu.co/798/2/TesisLupian%CC%83ezPublicada.pdf>
- National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principios y estándares para la educación matemática*. Centro de Documentación Thales.
- Ramírez-Uclés, R. (2021). Enriquecimiento de tareas en la formación inicial del grado de primaria para atender a los programas de profundización. *Contextos Educativos*, 28, 51-64. <http://doi.org/10.18172/con.5009>
- Ramírez-Uclés, R. (2012). *Habilidades de visualización de los alumnos con talento matemático*. Tesis doctoral. Universidad de Granada.
- Ramírez-Uclés, R., y Flores, P. (2015). *Planificación de sesiones de enriquecimiento matemático*. Research Gate. https://www.researchgate.net/publication/344898424_Planificacion_de_sesiones_de_enriquecimiento_matematico

Matemáticas en la piscina: de la proporcionalidad a la aritmética modular sexagesimal

Pablo Beltrán-Pellicer

Universidad de Zaragoza (Zaragoza, España), pbeltran@unizar.es

Resumen: *El cronómetro o segundero de piscina es un instrumento empleado en la práctica de la natación deportiva que ayuda a marcar los ritmos de entrenamiento. De esta forma, las consignas de los entrenadores deben ser interpretadas correctamente por los nadadores, quienes, además, pueden usar el segundero para controlar individualmente los tiempos de salida y llegada en cada repetición. En este artículo describimos el uso de este segundero, así como otras cuestiones relacionadas con este contexto real que proporciona la natación. Igualmente, planteamos ideas para elaborar propuestas de aula en las que el contexto pasa a ser realista, es decir, imaginable para el alumnado, puesto que solamente será cotidiano para nadadores y nadadoras. Además, incluso para estos últimos, gran parte de las tareas también serán realistas, porque, ¿quién hace álgebra mientras nada?*

Palabras clave: *contexto, educación matemática, natación, propuestas de aula, proporcionalidad, aritmética modular.*

Mathematics in the swimming pool: from proportionality to modular sexagesimal arithmetic

Abstract: *The swimming pool stopwatch is an instrument used in the practice of swimming that helps to mark training rhythms. In this way, the instructions given by the coaches must be correctly interpreted by the swimmers, who, in addition, can use the stopwatch to individually control the start and finish times in each repetition. In this article we describe the use of this stopwatch, as well as other issues related to this real context that swimming provides. Likewise, we propose ideas to elaborate classroom proposals in which the context becomes realistic, that is, imaginable for the students, since it will only be daily for swimmers. Also, even for the latter, much of the homework will also be realistic, because who does algebra while swimming?*

Key words: *context, mathematics education, swimming, classroom proposals, proportionality, modular arithmetic.*

1. INTRODUCCIÓN

La herencia cultural que nos han dejado aquellas civilizaciones que florecieron en la antigua Mesopotamia sigue estando muy presente. Sin ir más lejos, nuestra forma de medir ciertas magnitudes, como el tiempo. ¿Por qué cada minuto está compuesto de 60 segundos? ¿Por qué 60 minutos hacen una hora? ¿No sería más fácil dividir la hora en 100 minutos y cada minuto en 100 segundos? Si por lo menos fuéramos coherentes con el sistema de numeración empleado, otra cosa sería. Sin embargo, no lo somos, ya que un segundo se divide en 100 centésimas, valga la redundancia. De esta manera, se añade un grado de complejidad al mezclar el sistema

sexagesimal con el decimal, siendo que este último ya estaba presente en la forma de escribir simbólicamente los números. En efecto, es un lío.

Invitamos al lector a sumergirse en un contexto actual, donde no solo se emplea esta forma de medir el tiempo, sino que se opera constantemente con cantidades de esta magnitud, siguiendo muchas veces una aritmética modular. Y es que, en los entrenamientos de natación, a pesar de la proliferación actual de gadgets electrónicos, los segunderos de piscina o cronómetros de pared siguen ayudando a marcar el ritmo. Para los profanos en la materia estamos hablando del artilugio de la Figura 1. No tiene misterio, en su forma más habitual son cuatro agujas de diferentes colores distribuidas cada 90 grados (ah, esa es otra, que seguimos midiendo la amplitud angular en grados, gracias a las mismas personas de antes) que giran pasando cada minuto por el mismo punto. De esta forma se puede medir el tiempo transcurrido entre la salida y la llegada al nadar una distancia concreta.

Figura 1

Segundero, cronómetro de pared o “pace clock” empleado en la práctica de la natación



En deportes como el atletismo o la natación es importante planificar los entrenamientos, tanto para mejorar nuestra condición física como para rendir más en las competiciones. Esta planificación se organiza en ciclos y entrar a fondo en cómo se organiza se escapa de los objetivos de este artículo. En el ámbito profesional, ello requeriría considerar parámetros como concentraciones de lactato en sangre, consumo máximo de oxígeno o frecuencia cardíaca.

En cualquier caso, las sesiones de entrenamiento suelen incluir bloques de repeticiones de cierta distancia que deben realizarse en un tiempo determinado (a esto suele llamarse ritmo de nado), aunque también pueda basarse en la frecuencia cardíaca. Por ejemplo, nadar un bloque de 6 repeticiones de 100 metros a estilo libre cada minuto y medio. En ese caso, el nadador lo que hace es nadar 100 metros teniendo que llegar antes de ese tiempo, descansando lo que reste hasta el minuto y medio. El entrenador puede indicar, adicionalmente, el esfuerzo esperado; es decir, si se trata de nadar a ritmo de competición de 100 metros, o a un porcentaje determinado de este. En muchas ocasiones, a cada una de estas repeticiones se le llama, abusando del lenguaje, serie. Aunque pueda estar socialmente aceptado, los entrenadores lo tienen claro: una serie es cada uno de los bloques de varias repeticiones, no cada una de ellas. La confusión en el ámbito matemático es mayor, ya que la palabra serie se reserva para la sucesión de sumas parciales de los términos de otra sucesión.

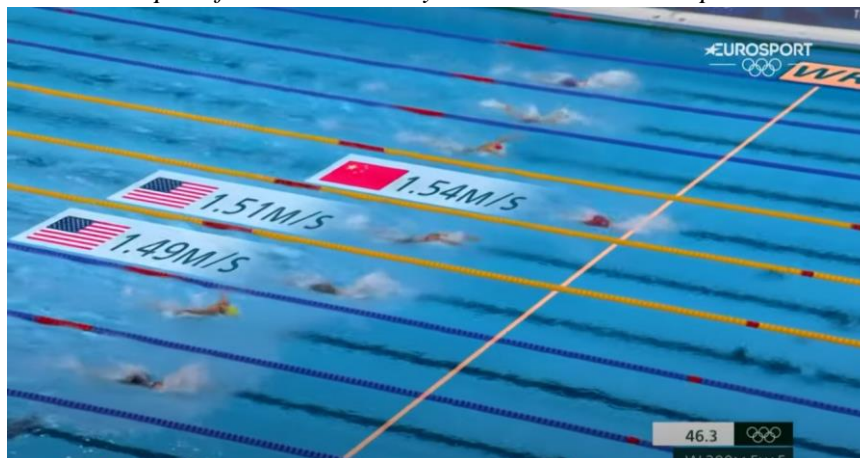
2. RITMO Y VELOCIDAD

Tanto en natación como en atletismo suele hablarse de ritmo (pace) en lugar de velocidad. Cuando decimos que «vamos a ritmo de uno veinte el cien», significa que tardamos 1'20" en

nadar 100 m. Siempre ritmos. En atletismo se indica el tiempo que se tarda en recorrer un kilómetro. En cambio, en los Juegos Olímpicos de Tokyo 2020 las retransmisiones de natación mostraban velocidades (Figura 2).

Figura 2

Final de los 200 m mariposa femeninos en Tokyo 2020. Fuente: Eurosport



¿Por qué en la retransmisión se indican velocidades en lugar de ritmos? Nos aventuramos a sugerir que puede ser debido a que la retransmisión va dirigida al gran público, más acostumbrado a utilizar velocidades para comparar lo rápido que se mueven los participantes de una carrera. En la Figura 2 esto nos ayuda a darnos cuenta de que, de las nadadoras que van en segundo y tercer lugar, hay una que lleva mayor velocidad instantánea en ese momento y, por lo tanto, lleva más empuje y tiene mejor pronóstico.

Ahora bien, a los aficionados y deportistas acostumbrados a hablar de ritmos, indicar que una nadadora nade a 1,51 m/s le da muy poca información. En efecto, viendo la imagen de la Figura 2 extraerán las mismas conclusiones que un espectador lego en la materia. Sin embargo, si quieren valorar si van muy rápido o muy lento, solo lo podrán hacer, en este caso, si nadan a un ritmo cercano al de la plusmarca mundial, que es cuando aparece la línea amarilla en pantalla (evidentemente, entonces, van muy rápido). De lo contrario, o bien se fijarán en los tiempos de paso o en el ritmo. Para esto último necesitarían convertir los 1,51 m/s a la razón que indica el tiempo que tarda en recorrer la distancia de referencia tomada como unidad (en natación suelen ser los 100 metros, mientras que en atletismo es el kilómetro).

El hecho de que en las retransmisiones de eventos de natación se privilegie la velocidad puede deberse a que esta última es lo que algunos autores denominan «magnitud bien compactada» (*well-chunked measure*) (Kaput, 1985; Lamon, 1993). Cuando se calcula una razón entre dos magnitudes, se dice que esta está «bien compactada» si es una entidad bien conocida. Es más, estos autores ponen como ejemplo paradigmático, precisamente, la velocidad, como razón que indica las millas o kilómetros que se recorren en una hora. En esta línea, Martínez-Juste (2022) observa una dificultad en la resolución de problemas de proporcionalidad directa relacionada con esta cuestión. Así, en los problemas de valor perdido que podrían resolverse multiplicando por una razón «mal compactada», hay un porcentaje significativo del alumnado que prefiere emplear la razón inversa cuando está bien compactada y tiene un significado más natural.

3. EL SEGUNDERO O CRONÓMETRO DE PISCINA

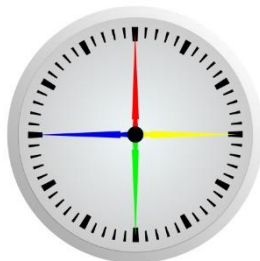
Es posible que el lector ya esté imaginando posibles preguntas o problemas que pueden surgir a partir de este contexto. Por ejemplo:

- Si tu entrenador te manda 10x100 cada 1' 30", ¿cuánto tiempo vas a estar entrenando?
- Si en 400 metros libres en una competición hago una marca de 4' 40", ¿a qué ritmo tendría que hacer cada 100 si me mandan 4x100 a ritmo del 400 de competición?

A continuación, vamos a explorar en detalle qué nos ofrece el cronómetro de pared y la cuestión de los ritmos. Como hemos dicho, si la entrenadora nos dice de hacer repeticiones de 100 estilos cada 2' significa que se sale cada ese tiempo. Es decir, que la idea es llegar antes y descansar hasta que toque salir. Habrá veces que la entrenadora haya calculado ese tiempo para que nos vaya justo y otras para que se descansa más, dependiendo del ritmo de nado que se esté trabajando. Si en la primera repetición hemos salido con la «roja arriba», y son cada 2', en la segunda (y en todas las demás) se sale con la «roja arriba» también (Figura 3).

Figura 3

Salir con la «roja arriba». Fuente: elaboración propia a partir de un dibujo de jonathan357 obtenido en openclipart.org (dominio público)



Sin embargo, si la cosa no cuadra tanto, nos empezamos a complicar. Pongamos que ahora toca hacer series (repeticiones) cada 1' 30". Si en la primera repetición se sale con la roja arriba, ¿cuándo saldremos en la segunda? Si nos fijamos en la aguja roja, en efecto, saldremos cuando esté abajo (a y media). Y si pensamos como si esto fuera una secuencia didáctica, aquí ya se podría plantear la siguiente pregunta al alumnado: ¿y en la quinta repetición? ¿si hiciéramos veinte?

Supongamos que hacemos repeticiones de 50 crol cada 50" y que, de nuevo, salimos con la roja arriba. Las mismas preguntas de antes nos llevarán a decir que en la segunda tocará salir con la roja a menos diez. En la tercera, con la roja a «menos veinte». Y así sucesivamente (ver Figura 4). Ahora bien, ¿cómo hacemos este cálculo? Está claro que aquí lo eficiente es ir quitando 10", pero en una secuencia didáctica no podemos dar nada por sentado, ya que también se puede ir sumando 50" en cada repetición. Si en una repetición hemos salido con la aguja a y 10, para calcular la siguiente podré hacer $10+50 = 60$ y decir que toca salir en punto. Y si hemos salido a y 20, puedo hacer $20 + 50 = 70$ y decir que toca salir a «y diez», porque nos pasamos 10" de la roja arriba.

Figura 4

Momentos de salida de la primera, segunda y tercera repetición en un bloque en el que se sale cada 50". Fuente: elaboración propia a partir de un dibujo de jonathan357 obtenido en openclipart.org (dominio público)



Si vas cansado o te despistas pensando en otra cosa, es habitual perder la cuenta. ¿Llevamos 5 o 6 repeticiones? Aunque la respuesta habitual, ante la duda, es 6, lo más probable es que llevemos 5. Claramente, este dilema puede ser resuelto con ayuda del segundero. Si estamos haciendo las repeticiones cada 55", y si hemos salido con la «roja arriba» y ahora vemos que marca «y veinticinco», ¿cuántas repeticiones llevamos?

Otro uso que se le da al segundero es controlar el ritmo de nado cuando se está nadando una distancia de fondo o medio fondo. A partir de un 200 m o un 400 m, una mirada al segundero cuando se sale de la vuelta permite controlar el ritmo. Claro, para eso tienes que saber cuándo has salido o cuándo has tocado la última pared. Si tenemos algún nadador entre nuestros lectores, ahora podría preguntarse cómo hace la cuenta.

Puestos a recoger en este trabajo el potencial de este instrumento, señalemos que también se emplea para tomar el pulso cardíaco. Una tarea interesante sería comparar diferentes maneras de hacerlo que conectan con proporcionalidad aritmética y estimación. ¿Cómo lo hacemos? ¿Contamos latidos en 10 segundos? ¿O en 15? ¿O a lo largo de todo un minuto?

Con todo lo anterior, el nadador habitual tendría la competencia matemática suficiente para tener cubiertas todas sus necesidades de entrenamiento. Ahora bien, supongamos que queremos explotar más el potencial de este contexto en el aula de Matemáticas. Observemos que la variedad de situaciones-problema que se pueden plantear no viene dada solo por el tiempo del intervalo de cada repetición. Así, hemos presentado un problema (cuándo salimos en la repetición n) y su inverso (si la aguja está en una posición determinada, en qué repetición estamos). Sin embargo, todavía se puede sacar más jugo al contexto. De esta manera, los procesos de generalización que se ponen en juego cuando preguntamos acerca del instante de salida para una repetición alta pueden llevarnos al álgebra con literales. La explicitación de este proceso implicaría, igualmente, aspectos propios de pensamiento computacional, tanto de manera desenchufada como mediante algún entorno software. En este último caso, basta imaginarnos que queremos programar una pequeña aplicación que obtenga las tablas con los instantes de salida para cada repetición.

4. OTRAS IDEAS Y CONCLUSIÓN

El momento de escribir este artículo coincide con la reciente implantación de los nuevos currículos en España al amparo de la LOMLOE. Dentro de esta normativa se introduce un concepto, las situaciones de aprendizaje, que se define de la siguiente manera (Real Decreto 217/2022, de 29 de marzo, Art. 2):

Situaciones de aprendizaje: situaciones y actividades que implican el despliegue por parte del alumnado de actuaciones asociadas a competencias clave y competencias específicas y que contribuyen a la adquisición y desarrollo de las mismas.

Existe cierto debate acerca de si estas situaciones de aprendizaje deberían estar contextualizadas o no, que, en mi opinión, tiene su origen en el Anexo III, de carácter no prescriptivo, del correspondiente Real Decreto 217/2022, de 29 de marzo (en el caso de Educación Secundaria) que proporciona orientaciones para el diseño de estas situaciones. Partiendo de la base de que se trata de orientaciones generales, es decir, no específicas para la enseñanza de las matemáticas, deberíamos preguntarnos qué es un contexto en matemáticas.

De todas las escuelas de didáctica de la matemática, a la que no se le puede acusar de negar el papel de un buen contexto para el aprendizaje es a la Enseñanza Matemática Realista. Una de sus autoras más representativas, Van Den Heuvel-Panhuizen (2005) indica, explícitamente que (p. 2, traducción del autor):

El mundo de la fantasía o de los cuentos de hadas e incluso el mundo formal de las matemáticas pueden proporcionar contextos adecuados para un problema, siempre que sean reales en las mentes de los alumnos y puedan experimentarlos como tales.

El contexto presentado podrá ser cotidiano para todos aquellos que practiquen la natación deportiva. Ahora bien, en el momento que empezamos a hacernos preguntas como las que se han propuesto aquí, el contexto deja de ser real para ser *realista*: ¿y yo para qué quiero saber si volveré a salir en punto en las repeticiones que sean múltiplo de tres? O, mejor todavía, ¿por qué tengo que preocuparme en obtener una expresión algebraica para saber en qué repetición estoy a partir de conocer la posición de la aguja?

Realista quiere decir, tal como describe Van Den Heuvel-Panhuizen (2005), imaginable. Podemos añadir adjetivos: cercano, significativo, etc. La cuestión es que sea real en la mente de nuestro alumnado. Para ello, conviene que el planteamiento de las preguntas que se han propuesto aquí se enmarque en una secuencia a través de la resolución de problemas (Beltrán-Pellicer y Martínez-Juste, 2021), en la que el alumnado se enfrente a ellas sin haber recibido instrucción explícita previa. Con el andamiaje adecuado, que, en este caso, prácticamente lo da el contexto, realista.

Las actividades aquí presentadas son solo algunas ideas. En una conversación con Javier Ostos, exentrenador de natación, emergieron otras cuestiones interesantes que enlazan, por ejemplo, con las funciones y la interpretación de gráficas. ¿Cómo sería la gráfica de la velocidad (y/o la del ritmo) frente al tiempo o la distancia? En particular, ¿qué ocurre en los virajes? En este sentido, son muy interesantes los contextos más complejos que proporcionan estudios como los de Arellano, et al. (2005, 2016) en los que se investiga la fuerza de impulso en la salida de natación o los diferentes ritmos de nado en cada tramo de una prueba.

Por otro lado, es un contexto que se ha empleado en la formación inicial de docentes de Educación Primaria. Así, Marqués (2015) explora en su Trabajo Fin de Grado diferentes actividades de matemáticas que parten del entorno de la piscina. Se trata, a nuestros ojos, de una línea de trabajo muy sugerente que permite un trabajo interdisciplinar con Educación Física.

AGRADECIMIENTOS

Este trabajo ha sido apoyado por el grupo S60_20R “Investigación en Educación Matemática” financiado por el Gobierno de Aragón. Quiero dedicar cariñosamente este artículo a todos mis

entrenadores y compañeros de entrenamiento, agradeciendo en especial las revisiones y conversaciones sobre este a Miguel Santolaya, Javier Ostos, Carlos Rodríguez y David Boudet. Omnes vulnerant, ultima necat.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Arellano, R., Ruíz-Teba, A., Morales-Ortiz, E., & López-Contreras, G. (2016). El desarrollo de modelos de rendimiento en pruebas de 50m y 100m: influencia del sexo y el nivel. En *XXXVI Congreso de Asociación Española de Técnicos de Natación*. INEF.
- Arellano, R., Llana, S., Tella, V., Morales, E., & Mercadé, J. (2005). Estudio de la fuerza de impulso en la salida de natación. En *Congreso Internacional de Técnicos de Natación (VIII Congreso Ibérico)*. Asociación Española de Técnicos de Natación.
- Beltrán-Pellicer, P., & Martínez-Juste, S. (2021). Enseñar a través de la resolución de problemas. *Suma*, 98, 11-21.
- Kaput, J. J. (1985). *Multiplicative Word Problems and Intensive Quantities: An Integrated Software Response* [Technical Report]. Educational Technology Center.
- Lamon, S. J. (1993). Ratio and proportion: Connecting content and children's thinking. *Journal for Research in Mathematics Education*, 24(1), 41-61.
- Marqués, J. A. (2015). Matemàtiques a la piscina. [Trabajo Fin de Grado]. Universitat de les Illes Balears. <https://dspace.uib.es/xmlui/handle/11201/145408>
- Martínez-Juste, S. (2022). *Diseño, implementación y análisis de una propuesta didáctica para la proporcionalidad en el primer ciclo de Secundaria* [Tesis Doctoral, Universidad de Valladolid]. <https://doi.org/10.35376/10324/52863>
- Van Den Heuvel-Panhuizen, M. (2005). The role of contexts in assessment problems in mathematics. *For the learning of mathematics*, 25(2), 2-23.

El papel de las *Escape Room* virtuales como recurso para el fomento de la comunicación en el aula de matemáticas de Bachillerato

Francisco Luque Sánchez

Departamento de Ciencias de la Computación e Inteligencia Artificial, Universidad de Granada (Granada, España), fluque@ugr.es

Resumen: Este trabajo presenta el diseño de una *escape room* virtual junto con una secuencia de problemas para trabajar la comunicación matemática en este formato, y una discusión final de las percepciones del profesorado tras su implementación en dos aulas del primer curso de Bachillerato. La *escape room*, cuyo material está disponible de forma abierta, permite la inclusión de herramientas de comunicación como videollamadas, hojas de cálculo o pizarras de GeoGebra compartidas. Estas herramientas son aprovechadas en el diseño de las tareas, que presentan información diferente a cada uno de los estudiantes de un equipo. Las experiencias de implementación de la *escape room* realizadas revelaron que los estudiantes hicieron un uso desigual de las herramientas de comunicación. También se observó la aparición de líderes de tarea que en algunos casos facilitaron la resolución de los problemas de forma colaborativa.

Palabras clave: bachillerato, recursos tecnológicos, comunicación matemática, *escape rooms*.

The role of virtual *Escape Rooms* as a resource for fostering communication in the high school mathematics classroom.

Abstract: This work presents the design of a virtual *escape room* together with a sequence of problems to promote the development of mathematical communication skills within this format, as well as a final discussion of some teachers' perceptions after the implementation of this proposal in two class groups of the first year of high school (16-17 year old students). The *escape room*, featuring open-access materials, enables the integration of various communication tools, such as video calls, spreadsheets, and shared GeoGebra boards. These tools are leveraged in the design of the tasks, which are tailored to provide unique information to each member of a team. The implementation of this *escape room* proposal revealed that the students used the communication tools differently. It was also observed that some students took on a leading role, in some cases facilitating collaborative problem solving.

Key words: high school, technological resources, mathematical communication, *escape rooms*.

1. INTRODUCCIÓN

Desde la instauración del modelo educativo basado en el desarrollo de competencias, las diferentes reformas curriculares vienen haciendo cada vez mayor hincapié en el desarrollo integral de los individuos, para fomentar su capacidad de desenvolverse en situaciones problemáticas cotidianas, profesionales o sociales. Respecto a la enseñanza de las matemáticas en educación secundaria y bachillerato, se promueve el desarrollo de destrezas matemáticas que

van más allá de la aplicación directa de procedimientos matemáticos: razonamiento, diseño de estrategias para resolver problemas, o establecimiento de conexiones entre diferentes contenidos. Estas ideas, que están alineadas con las diferentes concepciones de competencia matemática que se han desarrollado en los últimos años (p. e. National Council of Teachers of Mathematics, 2000; Niss & Højgaard, 2019; Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económicos, 2013, 2018) quedan también materializadas en el marco de la reciente normativa LOMLOE. Concretamente, los Reales Decretos 217/2022 y 243/2022, que establecen la ordenación y las enseñanzas mínimas de la Educación Secundaria Obligatoria (ESO) y Bachillerato, respectivamente, recogen un conjunto de diez competencias específicas que describen las habilidades matemáticas a desarrollar durante los niveles educativos preuniversitarios. Estas incluyen la competencia de comunicación matemática, que centra el interés del presente trabajo.

La comunicación matemática se puede entender desde diferentes enfoques teóricos. El marco PISA 2012 (Organización para la Cooperación y Desarrollo Económicos, 2013) asume un punto de vista funcional, en el que comunicarse implica reconocer y comprender problemas presentados en situaciones contextualizadas, leer e interpretar enunciados, resumir argumentos matemáticos para exponerlos de forma oral y escrita y explicar y discutir las implicaciones de los resultados de un problema matemático en el contexto original en el que este se presenta. Desde una perspectiva más cognitiva, el National Council of Teachers of Mathematics (NCTM, 2002) establece que la comunicación permite a los estudiantes expresar su pensamiento de forma coherente, utilizar un vocabulario apropiado para informar de ideas matemáticas, organizar y consolidar el pensamiento matemático propio y analizar y evaluar las estrategias de los demás. Estos dos enfoques quedan, en cierto modo, recogidos en el Real Decreto 243/2022, que describe la competencia específica de comunicación como la capacidad de “comunicar las ideas matemáticas, de forma individual y colectiva, empleando el soporte, la terminología y el rigor apropiados, para organizar y consolidar el pensamiento matemático” (p. 216).

En este contexto curricular, la importancia de trabajar la comunicación matemática en ESO y Bachillerato es doble. Por una parte, las habilidades involucradas facilitan al individuo enfrentarse a tareas cotidianas como comprender información o datos recogidos en los medios, seguir instrucciones o protocolos o elaborar argumentos matemáticos usando un vocabulario riguroso pero adecuado a diferentes interlocutores. Por otra parte, una capacidad de comunicación suficientemente desarrollada habilita a los estudiantes a aprender mejor matemáticas, ya que los individuos construimos los objetos matemáticos a través de la comunicación y de la interacción. En este sentido, Sfard (2008) afirmó que el razonamiento y pensamiento matemáticos pueden verse como formas particulares de comunicación en las que se activan los mismos procesos cognitivos que al mantener una conversación. Estas ideas teóricas fueron utilizadas para investigar la comunicación a través de recursos electrónicos. Por ejemplo, Ramírez et al. (2016) estudiaron el proceso de resolución colaborativa virtual de problemas de visualización por estudiantes con talento matemático, encontrando que este alumnado se involucró en la resolución de los problemas y que valoró positivamente el uso de videollamada como vía de comunicación.

Estudios como el mencionado sugieren la pertinencia de las videollamadas para trabajar la comunicación e invitan a aplicar otras herramientas tecnológicas con el mismo fin (Orrill & Polly, 2013). En este sentido, las *escape rooms* virtuales permiten combinar los beneficios del uso de la tecnología con el efecto motivador del entorno gamificado que proporcionan las *escape rooms* tradicionales. Una *escape room* se fundamenta en “encerrar” a un grupo de

personas en una habitación y pedirles que resuelvan un conjunto de enigmas para escapar, situación que da oportunidades al profesorado para plantear problemas matemáticos. El concepto de *escape room* virtual adapta este planteamiento a un formato digital en lugar de utilizar espacios físicos (Makri et al., 2021). Esta idea aporta un valor educativo añadido, ya que permite plantear situaciones que fuerzan la comunicación verbal a distancia y que no serían factibles en entornos presenciales. Los beneficios de este tipo de metodología han sido explorados para diferentes disciplinas (véase Makri et al., 2021), pero no se han estudiado específicamente para la comunicación matemática. Esto motivó el desarrollo de la propuesta didáctica que se presenta en este trabajo, que surgió con el fin de proporcionar una herramienta al profesorado que contribuya a desarrollar la comunicación matemática de los estudiantes de bachillerato.

La estructura del artículo es la siguiente. La siguiente sección describe la plataforma virtual sobre la que se ha desarrollado la *escape room*, junto con los problemas matemáticos que se incluyeron para fomentar la comunicación entre los estudiantes. Por su parte, la tercera sección recoge las observaciones del profesorado durante dos implementaciones de la propuesta, y extrae conclusiones y sugerencias de mejora.

2. DISEÑO DE LA PLATAFORMA Y PROBLEMAS DE LA ESCAPE ROOM

La *escape room* virtual se creó con la finalidad ya comentada de crear un recurso para fomentar la comunicación matemática y la resolución colaborativa de problemas entre los estudiantes de bachillerato, y que este recurso esté disponible de forma abierta. La plataforma utilizada para crear el espacio virtual es Gather Town (Gather Presence, 2022), que es una aplicación web concebida para crear espacios virtuales compartidos, en los que los participantes pueden moverse libremente e interactuar entre sí (Figura 1).

Figura 1

Ejemplo 1. Ejemplo de espacio virtual en Gather Town.



Gather Town proporciona a los usuarios diferentes herramientas para crear y gestionar sus propios espacios virtuales. En dichos espacios, los propietarios y usuarios autorizados pueden definir la distribución de salas, y colocar distintos objetos en ella. Estos objetos se pueden dotar de propiedades interactivas, de forma que se pueden mostrar notas, imágenes o vídeos, e incluso insertar páginas web externas por completo. Adicionalmente, la plataforma ofrece una Interfaz de Programación de Aplicaciones (API, por sus siglas en inglés), que permite a los propietarios del espacio virtual automatizar la colocación de los objetos. Además, utilizando dicha API, es posible implementar un programa sencillo que reaccione a ciertos eventos que ocurren en la sala. De esta manera, se ha creado un programa que comprueba automáticamente las respuestas que los participantes ofrecen a las tareas propuestas, y abre las puertas que bloquean el camino si la respuesta es correcta. Los jugadores pueden proporcionar sus respuestas utilizando una serie de ordenadores con los que pueden interactuar en el entorno virtual. Una explicación más profunda del sistema, así como el material necesario para replicar la actividad, se puede encontrar en Luque-Sánchez (2022).

El diseño de la *escape room* virtual incluye cinco habitaciones, cuyas puertas se desbloquean resolviendo sendos problemas matemáticos. Estos serán abordados por equipos de tres jugadores, que tendrán papeles distintos en función de la tarea: J1, J2 y J3. El diseño y formato de los problemas busca que la dificultad de su resolución radique en la comunicación entre los jugadores del mismo equipo más que en las matemáticas. El camino que sigue cada jugador durante la actividad está separado del de sus compañeros, de forma que las salas visitables por un jugador no pueden ser visitadas por el resto. Así, la información necesaria para resolver cada problema se presenta diseminada por las salas de todos los jugadores, y se necesita toda la información para la resolución. De esta manera, los participantes están obligados a comunicarse con sus compañeros e interactuar correctamente para obtener la solución. Si uno de los participantes no colabora, la tarea no se puede resolver.

Los cinco problemas se muestran de forma secuencial y en orden ascendente de dificultad, que se define en función de la complejidad de los conceptos matemáticos que los jugadores tienen que comunicarse durante la resolución. Al principio del juego, los personajes de los jugadores se sitúan en la misma sala inicial, en el interior de un edificio, y el profesor les informa de que deben escapar del edificio abriendo una serie de puertas. Tras la explicación inicial, los jugadores se teletransportan a su punto de inicio y, a partir de ese momento, van encontrando una serie de salas, cada una con tres subespacios separados (uno por jugador), en las que se plantean los problemas. Tres puertas, una por subespacio, bloquean el avance del equipo a la tarea siguiente. En conjunto, los tres subespacios de cada sala contienen la información necesaria para resolver el problema correspondiente, así como un ordenador que permite introducir la solución para desbloquear la puerta de la habitación. Una vez se introduce en el ordenador la solución correcta del problema, las tres puertas se abren y permiten el paso a la siguiente sala. Cuando se resuelve el último problema, las últimas tres puertas se abren, los espacios de los jugadores se unen y se accede a la sala que permite la salida del edificio. En la Figura 2 se muestra la distribución de las dos primeras salas, donde se resuelven los dos primeros problemas.

Figura 2

Ejemplo 2. Distribución de las habitaciones para los dos primeros problemas.



Nota. La información de la tarea está fragmentada en los objetos marcados por (a). En el ordenador, marcado por (b), los jugadores pueden indicar su respuesta. Si es correcta, las puertas marcadas con (c) se abren para dar paso a la tarea siguiente.

2.1. Descripción de los problemas planteados en la experiencia

A continuación se muestra la descripción de los problemas propuestos para implementar la *escape room* con grupos de bachillerato de ciencias. Como se ha indicado anteriormente, se busca que la dificultad en la resolución de la *escape room* no sea matemática, por lo que los contenidos matemáticos involucrados en los problemas son conocidos por los jugadores (no presentan mayor dificultad que los que se trabajan usualmente en 4º ESO). Por el contrario, la dificultad de las tareas reside en que estas obligan a que los jugadores compartan información matemática. El esquema que se sigue para describir las tareas es el siguiente. Para dar una idea completa de la tarea, se presenta en primer lugar el enunciado completo, sin fragmentar. A continuación, se muestra la información fragmentada, tal y como la reciben los jugadores. Finalmente, se indica qué alumno tiene en su sala el ordenador que permite introducir la solución del problema.

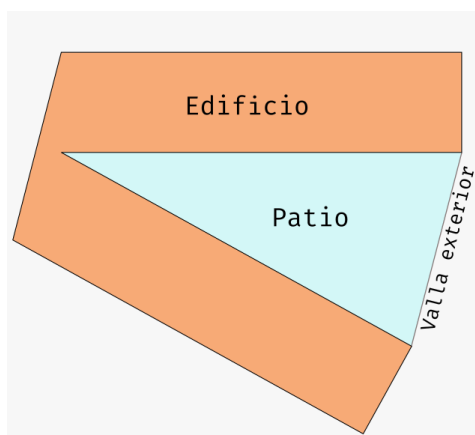
2.1.1. Problema 1. Cálculo de longitudes en un problema geométrico planteando sistemas de ecuaciones

En este problema los jugadores tendrán que plantear un sistema de ecuaciones a partir de información textual y visual. El enunciado completo es el siguiente:

Dado el siguiente esquema, y sabiendo que los muros del edificio que dan al patio tienen la misma longitud, que la valla exterior mide 5 m menos que cualquiera de los muros del edificio, y que el perímetro del patio son 25 m, ¿cuánto mide un muro del edificio?

Figura 3

Esquema del enunciado para el problema 1



Nota. La información anterior se presenta a los alumnos de forma fragmentada.

J1 encuentra una nota con la siguiente información: *Los muros del edificio que dan al patio tienen la misma longitud. El perímetro del patio mide 20 m.* J2 encuentra una nota con la siguiente información: *La valla exterior del patio mide 5 m menos que cualquiera de los dos muros del edificio.* J3 se encuentra el diagrama del enunciado completo (Figura 3). Adicionalmente, J2 encuentra un ordenador donde se formula la pregunta: *¿Cuánto mide un muro del edificio?*

2.1.2. Problema 2. Cálculo de un estadístico descriptivo a partir de información redundante

En esta tarea, los estudiantes deberán calcular la altura media de una población de personas. Dicha población se debe procesar correctamente a priori para eliminar cierta información redundante. Cada estudiante es capaz de ver a algunos individuos de la población, pero no la población completa. Además, algunos individuos aparecen repetidos. Los participantes deben filtrar la información y eliminar a los individuos repetidos antes de hacer el cálculo de la media. El enunciado completo de la tarea es el siguiente:

A través de las ventanas del edificio podéis ver a un conjunto de personas. Cada uno de vosotros puede ver algunas de ellas. Tened cuidado, porque a algunas de las personas las podéis ver más de uno, pero solo queremos tener en cuenta su información una vez. Sabemos que, en total, hay 9 personas. Necesitamos la media de las alturas de las 9 personas.

OJO: Al recopilar la información, os tendréis que poner de acuerdo para no contar a las personas repetidas varias veces.

Este enunciado completo está disponible para todos los jugadores, junto con una hoja de cálculo compartida en Google Sheets, que puede ser utilizada por todos para filtrar los datos repetidos y hacer los cálculos. Además, cada jugador puede ver información sobre cuatro individuos. Se les proporcionan diferentes atributos de cada individuo (Color favorito, talla de pie, altura y peso) para que los jugadores puedan discriminar individuos diferentes aunque tuvieran la misma altura. En este problema es J3 quien tiene el ordenador para introducir la media de las alturas de la población con el fin de desbloquear las puertas.

2.1.3. Problema 3. Cálculo del área de una figura construida con GeoGebra

En esta tarea, los jugadores tienen que construir una figura utilizando GeoGebra a partir de una serie de indicaciones que definen una ruta y calcular el área que queda encerrada por la figura. El enunciado de la tarea es el siguiente:

Uno de los espías del enemigo ha sido enviado en una misión secreta a visitar algunos de los edificios del gobierno. Para continuar, debéis trazar la ruta seguida por el espía a partir de las instrucciones que tenéis disponibles. El espía salió del edificio en el que os encontráis y volvió al mismo después de recorrer las demás localizaciones. La contraseña que os permitirá abrir la puerta es el área de la figura que aparece al trazar la ruta del espía por los distintos edificios. Podéis utilizar el sistema de dibujo de la sala para resolver este problema.

La ruta completa que sigue el espía está compuesta por 6 indicaciones: (i) *En primer lugar, el espía salió de estas instalaciones y recorrió 2 km hacia el norte, hacia el aeropuerto.* (ii) *Desde el aeropuerto, se desplazó 3 km hacia el este para llegar al hospital.* (iii) *A continuación, desde el hospital se desplazó a una base secreta, situada 4 km al norte.* (iv) *Desde la base secreta viajó 2 km al este para llegar a la estación espacial.* (v) *Luego, caminó 6 km hacia el sur para llegar a la estación de comunicaciones desde la estación espacial.* (vi) *Finalmente, recorrió 5 km hacia el oeste desde la estación de comunicaciones para volver a estas instalaciones.*

El párrafo introductorio está disponible para los tres jugadores. Además, J1 recibe una pizarra en la que puede ver la construcción de GeoGebra en tiempo real (pero no puede editarla), y las indicaciones (iii), (ii) y (v), en ese orden. J2 tiene disponible la pizarra editable de GeoGebra, en la que puede hacer la construcción, pero no tiene ninguna indicación disponible. J3 tiene una pizarra en la que puede ver la construcción en tiempo real (de nuevo sin poder de edición), y las indicaciones (vi), (iv) y (i), en ese orden. En este problema, J1 tiene disponible el ordenador en el que ofrecer la solución al problema, que consiste en el área de la figura que se forma cuando se completa el recorrido.

2.1.4. Problema 4. Selección de la función correcta para la trayectoria de un cohete y cálculo de su vértice

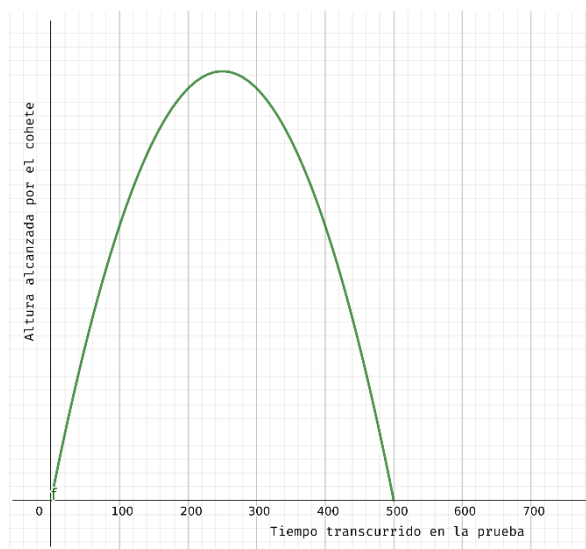
En este problema los participantes tendrán que identificar la expresión algebraica que corresponde a la gráfica que recibe uno de ellos. Uno de los participantes recibirá la representación gráfica de la función, mientras sus compañeros recibirán una serie de fórmulas

que pueden corresponderse con la gráfica en cuestión. Una vez identificada la fórmula correcta, se pide calcular la altura máxima que alcanza el cohete. El enunciado completo es el siguiente:

En el laboratorio en el que os encontráis se realizan investigaciones con instrumentos tecnológicos de última generación. Durante los últimos meses se ha probado un cohete de despegue vertical. En la última prueba, el cohete despegó desde el suelo en un tiempo $t=0$ s, se elevó hasta cierta altura (en m), y después volvió al suelo. Debéis averiguar qué función describe la trayectoria del cohete.

Figura 4

Esquema 2. Información accesible para el jugador J1 a la hora de resolver el problema 4



El párrafo introductorio está disponible para los tres jugadores. La gráfica con la trayectoria del cohete está disponible para J1 (Figura 4). El listado de funciones de la Figura 5 está disponible para J2. El listado de funciones de la Figura 6 está disponible para J3. Además, J3 tiene acceso al ordenador donde se pregunta por la altura máxima que alcanzó el cohete durante la prueba.

Figura 5

Esquema 3. Información accesible para para el jugador J2 a la hora de resolver el problema 4

Posibles trayectorias del cohete

$$h(t) = \frac{50}{t}$$

$$h(t) = 100t - 5$$

$$h(t) = \frac{1}{100}(500t - t^2)$$

Figura 6

Esquema 4. Información accesible para para el jugador J3 a la hora de resolver el problema 4

Posibles trayectorias del cohete

$$h(t) = -100t + 500$$

$$h(t) = \frac{1}{100}(t^2 - 500t)$$

$$h(t) = t^3 - 100t^2 + 50t - 200$$

2.1.5. Problema 5. Cálculo y ordenación de áreas de polígonos

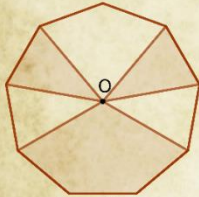
En esta tarea los estudiantes deberán ordenar una serie de polígonos en función de la fracción de área que aparece sombreada, en orden decreciente. Cada participante recibirá un documento como el que se muestra en la Figura 7, pero con cierta información eliminada. Concretamente, J1 recibe una versión en la que solo se puede ver el diseño A y el tercer y cuarto guión de la lista de información adicional. A su vez, J2 recibe un documento donde solo se pueden ver el diseño B y el segundo guión de la información adicional. Por su parte, J3 recibe una versión que solo permite leer el diseño C visible y el primer guión de la lista de información adicional. Adicionalmente, J2 tiene disponible un ordenador en el que se pregunta por el código de apertura de las puertas.

Figura 7

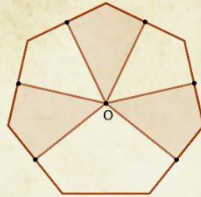
Esquema 6. Enunciado completo del problema 5

PROGRAMA DE ATERRIZAJE DE EMERGENCIA

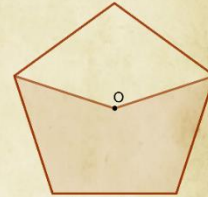
Algunas pruebas de vuelo de los cohetes disponibles en nuestras instalaciones no han salido como esperábamos, por lo que los ingenieros están diseñando estrategias de aterrizaje de emergencia para evitar riesgos en futuros ensayos. Se han obtenido los siguientes diseños para la zona de aterrizaje:



Diseño A



Diseño B



Diseño C

En los diseños anteriores, las partes oscuras representan las zonas de aterrizaje seguro. Los ingenieros quieren ordenar los diseños según la probabilidad de que el cohete aterrice de forma segura. La contraseña que abre las siguientes puertas se obtiene al ordenar los diseños anteriores por orden de probabilidad ascendente. Es decir, si la probabilidad de aterrizar de forma segura en el diseño A es $3/4$, la del diseño B es $2/4$, y la del diseño C es $1/4$, como $3/4 > 2/4 > 1/4$, la contraseña de apertura será ABC.

Además, conocemos la siguiente información adicional:

- Los puntos marcados como O son los centros de las figuras.
- Los polígonos exteriores son regulares.
- Los puntos marcados en la figura B son los centros de los lados.
- La probabilidad de aterrizar en cualquier punto de la figura es constante.

¿Cuál es el código que permite abrir las puertas?

Nota. Cada jugador puede acceder solo a algunos fragmentos de la información que se muestra.

3. DESARROLLO DE LAS EXPERIENCIAS Y CONCLUSIONES

La *escape room* virtual fue implementada en dos grupos de bachillerato de Ciencias de dos colegios andaluces. El primero de los grupos estuvo compuesto por 21 estudiantes, mientras que el segundo grupo tenía 15 alumnos. En ambos grupos los estudiantes fueron distribuidos en equipos de tres jugadores para abordar la actividad. Estos equipos fueron seleccionados por los profesores de la asignatura de matemáticas, procurando que el nivel académico entre los diferentes grupos estuviera todo lo equilibrado que fuera posible.

En cuanto al desarrollo de la actividad, los estudiantes del primer colegio trabajaron en un aula de ordenadores y fueron provistos con unos cascos y un micrófono, y distribuidos por el espacio disponible del aula de forma que ningún jugador pudiera ver las pantallas de otros. En el segundo colegio, por su parte, los estudiantes dispusieron cada uno de un portátil, también con cascos y micrófono, y trabajaron en dos aulas separadas, dos equipos de trabajo en un aula y los tres equipos restantes en otra. Todos los equipos de trabajo se conectaron a una copia de la *escape room* virtual creada en Gather Town y se unieron a una videollamada por equipo, para que los jugadores pudieran comunicarse oralmente. Una vez estuvieron todos los estudiantes conectados, se les indicó que debían escapar del edificio virtual tan pronto como pudieran, y que debían explorar el espacio virtual e interactuar con los objetos que encontraran para recabar información útil para desbloquear las puertas. A partir de este momento, los equipos dispusieron de una hora para completar la *escape room*.

3.1. Observaciones durante las experiencias de aula

En casi todos los casos, los equipos de trabajo lograron completar la *escape room*, aunque hay indicios de que algunos copiaron respuestas de sus compañeros. Más allá del resultado final, surgieron diferentes cuestiones de interés a la hora de valorar la utilidad de la propuesta didáctica para trabajar la comunicación matemática de los estudiantes de bachillerato. Las más destacadas se discuten a continuación.

Respecto al funcionamiento del entorno desde el punto de vista técnico, los alumnos del primer colegio sufrieron problemas con los auriculares. Como resultado, optaron por hablar en voz alta, lo que derivó en una sensación constante de ruido. Esto generó que, en ocasiones, algunos jugadores renunciaran a la comunicación por videollamada y optaran por conversar directamente (diciéndose en ocasiones las soluciones a los problemas), mostrarse las pantallas de sus ordenadores, o utilizar el chat de la videollamada para compartir información. En el segundo colegio no hubo problemas importantes con el audio ni los cascos. A pesar de ello, algunos jugadores pidieron silencio en diferentes ocasiones a los compañeros de los demás equipos, y otros estudiantes mostraron a distancia sus anotaciones en papel. Estas situaciones llevan a recomendar la implementación de esta actividad en una modalidad no presencial, con el fin de impedir interacciones que desvirtúen la comunicación matemática entre los jugadores.

Otro aspecto destacable de la implementación fue su efecto sobre la tendencia de los estudiantes a utilizar el papel y el lápiz para resolver problemas matemáticos. En el primer colegio se constató que el trabajo en la *escape room* virtual disuadió de utilizar papel y lápiz a casi todos los estudiantes. Estos usaron las herramientas de comunicación virtual (hoja de excel y pizarra de Geogebra) y renunciaron a tomar notas en papel. Por el contrario, en el segundo colegio se dio una situación bastante opuesta: los jugadores mostraron mayor tendencia a

trabajar en papel y apenas hicieron uso de las herramientas colaborativas de comunicación. Concretamente, la hoja de cálculo fue usada de calculadora, y la pizarra de Geogebra fue prácticamente ignorada. En este sentido, se percibe que los estudiantes de mayor rendimiento muestran más reticencia a emplear las herramientas digitales, quizá por la formación recibida en años anteriores, basada en el papel, y su apego a la misma (ya que han tenido éxito trabajando en papel).

Una tercera cuestión de relevancia está relacionada con la familiaridad de los estudiantes con el entorno virtual. A este respecto se observó que el alumnado tuvo ciertas dificultades para habituarse a la plataforma, sobre todo a la hora de interactuar con los objetos de las diferentes salas, y a la de poner en común y ordenar información recibida de forma diseminada. Estas dificultades, que fueron más acusadas en el primer colegio, sugieren la necesidad de dar a los estudiantes mayor tiempo de interacción libre con el entorno de la *escape room* antes de plantear el reto de “escapar”. En este sentido, se recomienda celebrar una sesión previa de toma de contacto con la plataforma en la que los estudiantes interactúen libremente con el entorno sin la premura de resolver un problema concreto. Esta interacción libre también se podría lograr si se plantea la *escape room* virtual durante un periodo de tiempo mayor a una hora.

Finalmente, y en relación directa con las interacciones entre jugadores que se observaron, debe destacarse la aparición de líderes de tarea emergentes durante la resolución de los problemas. Estos líderes fueron, en la mayor parte de los casos, estudiantes que ya ejercían liderazgo en otros ámbitos escolares, aunque en el primer colegio también se encontraron estudiantes que no suelen ser protagonistas en otras circunstancias de clase. En el segundo colegio también surgieron equipos de trabajo totalmente “horizontales”, en los que todos los jugadores del equipo colaboraron con idéntica jerarquía, sin que ninguno de los estudiantes fuera más proactivo en la toma de decisiones que sus compañeros de equipo.

3.2. Conclusiones

Este trabajo presenta una *escape room* virtual, cuyo material está disponible de forma abierta para su replicación. Por una parte, este recurso supone una herramienta didáctica que tiene potencial para estimular la comunicación matemática. De hecho, el uso de esta herramienta obliga a los compañeros de equipo a comunicarse de forma eficaz a la hora de resolver problemas, debido a que la información que se proporciona para resolver estos se presenta de forma fragmentada. Esta obligación para comunicarse da lugar a situaciones de aprendizaje que son poco usuales en entornos de aprendizaje tradicionales, lo que pone de manifiesto el interés del recurso presentado para promover una educación por competencias a los estudiantes de secundaria y bachillerato.

La experiencia de aula descrita puso de manifiesto la importancia de disponer de espacios adecuados para implementar la *escape room* virtual. Del mismo modo, se constató la pertinencia de utilizar este recurso en un formato puramente no presencial. También se constató la necesidad de conceder a los estudiantes un periodo de aclimatación al entorno antes de plantear los problemas a resolver. Por otra parte, también se encontraron estudiantes con dificultades para encontrar e interactuar con ciertos objetos, debido a que su posición en la sala, o su visibilidad no eran óptimas. Todas estas situaciones dan lugar a oportunidades de mejora que se espera poder incluir en el recurso para futuras implementaciones.

Agradecimientos

Muchas gracias al Colegio Ave María Casa Madre de Granada y al IES Medina Azahara de Córdoba por su colaboración con esta experiencia y, de forma especial, a Victoria y a Paco, por cedernos su tiempo para implementar la *escape room* virtual con su alumnado.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Gather Presence Inc. (2022). Gather Town. <https://www.gather.town>
- Luque-Sánchez, F. (2022). Mathematical Virtual Escape Room Based on Gather Town. https://github.com/fluque1995/maths_escape_room
- Makri, A., Vlachopoulos, D., & Martina, R. A. (2021). Digital escape rooms as innovative pedagogical tools in education: a systematic literature review. *Sustainability*, 13(8), 4587. <https://doi.org/10.3390/su13084587>
- National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principios y estándares para la matemática escolar*. National Council of Teachers of Mathematics (Traducido por la SAEM Thales).
- Niss, M., & Højgaard, T. (2019). Mathematical competencies revisited. *Educational Studies in Mathematics*, 102, 9-28. <https://doi.org/10.1007/s10649-019-09903-9>
- Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económicos (2013). *Marcos y pruebas de evaluación de PISA 2012. Matemáticas, lectura y ciencias*. OCDE. https://sede.educacion.gob.es/publivena/descarga.action?f_codigo_agc=16134
- Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económicos (2018). *Marco para la prueba de matemáticas PISA 2021*. <https://www.educacionyfp.gob.es/dam/jcr:b7f0ba60-38ec-4523-af38-5b4d752fec96/pisa-2021-mr-matem-ticas-es.pdf>
- Orrill, C. H. & Polly, D. (2013). Supporting mathematical communication through technology. In D. Polly (Ed.), *Common Core Mathematics Standards and Implementing Digital Technologies*, 23-37. IGI Global. <https://doi.org/10.4018/978-1-4666-4086-3.ch002>
- Ramírez, R., Beltrán-Meneu, M. J., Jaime, A., & Gutiérrez, Á. (2016). Resolución por Skype de una tarea de visualización cooperativa por una pareja de estudiantes con talento. En J.A. Macías, A. Jiménez, J.L. González, M.T. Sánchez, P. Hernández, C. Fernández, F.J. Ruiz, T. Fernández y A. Berciano (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XX*, 447-457. SEIEM.
- Real Decreto 217/2022, de 29 de marzo, por el que se establece la ordenación y las enseñanzas mínimas de la Educación Secundaria Obligatoria. Boletín Oficial del Estado, núm. 76 (2022).
- Real Decreto 243/2022, de 5 de abril, por el que se establecen la ordenación y las enseñanzas mínimas del Bachillerato. Boletín Oficial del Estado, núm. 82 (2022).
- Sfard, A. (2008). *Thinking as communicating: Human development, the growth of discourses, and mathematizing*. Cambridge University Press. <https://doi.org/10.1017/CBO9780511499944>

Díselo con mates

María del Carmen Galán Mata

Profesora de Matemáticas del I.E.S. Averroes (Córdoba, España),

toma26_6@hotmail.com

Resumen: Si buscas resultados distintos, no hagas siempre lo mismo (*Albert Einstein*). Siguiendo esta premisa, a pesar de que cada año repito actividades o situaciones de aprendizaje que me han funcionado bien en cursos anteriores, siempre intento motivar e innovar con actividades nuevas, cercanas al entorno e intereses del alumnado, y de ahí surgió esta idea que llevé a cabo el curso anterior con bastante buena acogida: el meme y el rap matemático; también retomo dos actividades que llevo haciendo algún curso más y que son tradiciones entre mi alumnado: las cartas de amor y el poema matemáticos (Galán et al., 2013).

Palabras clave: humor, cartas de amor, rap, poemas, meme.

Abstract: If you are looking for different results, do not always do the same (*Albert Einstein*). Following this premise, despite the fact that every year I repeat activities or learning situations that have worked well for me in previous courses, I always try to motivate and innovate with new activities, close to the environment and interests of the students, and from there came this idea that I took carried out the previous course with quite good reception: the meme and the mathematical rap; I also return to two activities that I have been doing for some other year and that are traditions among my students: love letters and the mathematical poem (Galán et al., 2013).

Key words: humor, love letters, rap, poems, meme.

1. INTRODUCCIÓN

Como citan Luís Menezes y otros (2020), en Humor para aprender matemáticas, "una buena disposición y bienestar facilitan el trabajo y el aprendizaje. El humor tiene esa particularidad, la de bien disponer y hacer reír a las personas, aliviando situaciones de estrés y facilitando la comunicación" (Op. cit, p. 7).

Las dificultades con las que nos encontramos los profesores y profesoras de matemáticas en el aula a veces están originadas por el miedo y el rechazo del alumnado hacia nuestra materia, que le hace cerrarse y en ocasiones pensar que no es capaz de asimilar ciertos conceptos. Uno de los objetivos que me planteo siempre a principio de curso es derribar esa barrera entre el alumnado y la materia, hacerle vez que es capaz, que las matemáticas nos rodean: las pueden apreciar en su entorno de forma habitual, y que pueden incorporar a su lenguaje términos y expresiones matemáticas. Por ello qué mejor forma de empezar que por un meme, para crear esa buena disposición en el aula con ese toque de humor, es un recurso que facilita la comunicación. Una vez relajado el ambiente, a lo largo del curso también hemos trabajado con la música, creando nuestro propio rap matemático, y con recursos que he empleado en cursos anteriores como son la poesía matemática y las cartas de amor matemáticas (Galán y otros, 2013). Todas

estas actividades tienen la misma estructura: empezamos viendo ejemplos, bien de sus compañeros y compañeras de cursos anteriores o bien de internet; el alumnado debate en lluvia de ideas sobre el propósito e identifica términos y conceptos matemáticos, y finalmente cada alumno o alumna, en grupo o de forma individual, crea su propio recurso.

Con estas actividades he conseguido que les den sentido a las matemáticas, que las incorporen en su discurso, que identifiquen términos y conceptos matemáticos en escenarios que le son próximos, favoreciendo con ello la adquisición de las competencias:

- Competencia lingüística: hemos trabajado la expresión oral (cuando han creado su rap y han recitado sus poemas) y la expresión escrita (con memes y cartas de amor).
- Competencia matemática: presente en todas las actividades.
- Competencia digital: para realizar los memes han utilizado páginas web y/o aplicaciones móviles, y a la hora de rapear han conseguido poner música de fondo y solaparla con su discurso.
- Aprender a aprender: en todas las actividades el propio alumnado ha llevado la batuta, marcando el ritmo de su aprendizaje.
- Iniciativa y espíritu emprendedor: han investigado por sí mismos las páginas o *app* para crear y presentar sus trabajos
- Social y cívica: se han ayudado y apoyado unos a otros, han trabajado por equipos en algunas de las propuestas.
- Conciencia y expresiones culturales: esta competencia está muy relacionada con la música y el arte, que se han empleado en las actividades.

2. EL MEME MATEMÁTICO

Según la RAE un meme es un texto, imagen, vídeo u otro elemento que se difunde rápidamente por internet, y que a menudo se modifica con fines humorísticos.

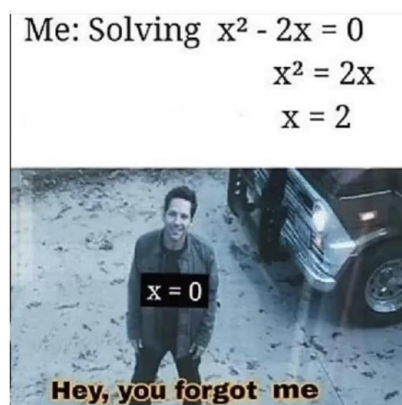
¿Quién no ha recibido un meme en los últimos años? Hay memes de todo tipo, y nuestro alumnado está más que habituado tanto a recibirlos como a pasarlos, así como incluso a generarlos. Hay varias *apps* que generan memes, y muchos de nuestros alumnos y alumnas las utilizan. También hay páginas, hilos de *Twitter* e incluso perfiles de *Instagram* dedicados exclusivamente a memes, que pueden ser de diferentes temáticas, desde series de televisión a materias de estudio. Y ahí es donde empieza nuestra historia. ¿Por qué no aprovechar estos recursos y aplicarlos a las matemáticas? Las premisas para realizar el meme matemático eran simples:

1. Deben girar en torno a temas relacionados con el ámbito de las matemáticas, con su estudio o con la asignatura en sí misma.
2. Es fundamental tono alegre, humorístico y originalidad.
3. Si en el meme aparece la cara de alguna persona que no es de imagen pública (películas, series, internet) debería ir acompañado de su autorización correspondiente para su publicación en redes.
4. Se deben respetar todas las personas, creencias o colectivos, el meme no debe ofender bajo ningún concepto.
5. Se pueden usar páginas o *apps* para generar los memes.

Partimos del análisis de varios ejemplos que encontramos en la red, para su proyección y debate en el aula.

Figura 1

Meme 1.



Este meme muestra a Antman (personaje de una saga cinematográfica muy popular) en una escena de la película *Los Vengadores End Game*, en la que sus compañeros y compañeras de batallas no se habían dado cuenta de su ausencia. La leyenda, en inglés, pide resolver una ecuación incompleta de segundo grado, dando solamente una de las dos soluciones, y justo debajo de Antman aparece la otra solución con el mensaje de que se habían olvidado de él. Planteamos al alumnado ¿por qué esto es gracioso? Las respuestas, atropelladas, no tardan en llegar. La solución de $x = 0$ se había olvidado, ¿es frecuente que ocurra esto?, es muy frecuente que ocurra, en estas y otras ecuaciones. El alumnado se ve identificado con un error que comete con cierta frecuencia y un contexto que le resulta amable y familiar, se olvidan de soluciones, como los compañeros han olvidado la ausencia de Antman.

Figura 2

Meme 2.



¿Quiénes aparecen en el meme? El alumnado no sabe exactamente quiénes son ni por qué son populares, pero esta viñeta se ha utilizado mucho para generar memes y, de hecho, aparece como plantilla en la mayoría de *webs* y *apps*. ¿Por qué es gracioso? La respuesta aquí es más sencilla que en el anterior y todos y todas identifican que la chica creía que solo iba a tomar dos cervezas (asociando un par con el número dos) y la respuesta del gato, muy ingeniosa, aclara que el número ocho también es par.

Figura 3

Meme 3.



En los dos memes anteriores no especifico autoría, pues la desconozco, pero en este caso se trata de un meme de Clara Grima.

¿Quiénes aparecen? Es una imagen de dos corredoras en las Olimpiadas de Tokio 2022, que están gesticulando y expresando mucha alegría. La leyenda, coincidencia de un resultado, imaginamos que de un examen, ¿por qué es graciosa? Aquí las respuestas del alumnado también son rápidas: la alegría que les da ante un examen que un compañero o compañera tenga los mismos resultados. Pueden estar los dos mal, pero al menos están acompañados en el camino. También se sienten identificados con la expresión de las atletas, a punto de abrazarse, pues muchos y muchas después de un examen en el que están inseguros se sienten así.

Muestro a continuación algunos de los trabajos del alumnado, acompañados de una breve reflexión que el propio alumnado aportó a la hora de exponer su meme al resto de compañeros y compañeras:

Figura 4

Meme 4. Importancia de los signos en matemáticas.



Figura 5

Meme 5. Importancia de las curvas en matemáticas.

- Me dijiste que te gustaban mis curvas!! - Sí, las de la gráfica



Figura 6

Meme 6. El lenguaje algebraico en matemáticas.

- Letras en el abecedario - Letras en matemáticas



Figura 7

Meme 7. El alivio que les supone el uso de la calculadora.

- Cuando la profesora manda muchos ejercicios - Pero dice que podemos usar calculadora



Figura 8

Meme 8. Evolución del alumno en el cálculo.

Yo a los 8 años	Yo a los 17 años
Hoy he hecho 50 divisiones de tres cifras de cabeza, 15 multiplicaciones y tres problemas sin calculadora	Profesora, necesito la calculadora para el examen de matrices



Figura 9

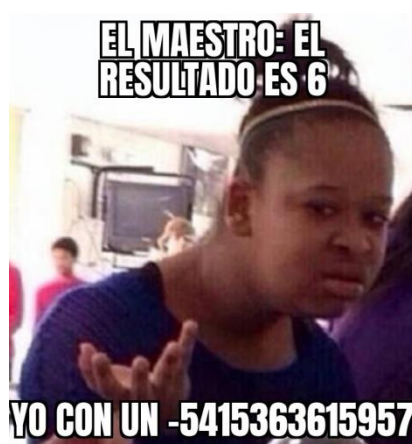
Meme 9. La importancia de los detalles.



Nota. Este meme fue presentado por un alumno de primero de Bachillerato, que en un examen de trigonometría tenía la calculadora en radianes y trabajó en grados, sin darse cuenta de su error, con lo cual todos los resultados estaban mal.

Figura 10

Meme 10. Los resultados de los exámenes.



3. CARTAS DE AMOR

Para el 14 de febrero les planteo un reto a mis alumnos y alumnas: una carta de amor matemática. Dicha carta debe contener una declaración de amor (o similar) pero también algún contenido matemático; suelo empezar con una presentación donde constan los objetivos de la actividad y algunos ejemplos. Les doy la idea de utilizar los números (eres el número uno en mi corazón...), las formas geométricas (les hablo del cardioide..), las operaciones básicas y no tan básicas (la suma de nuestro amor, nuestras diferencias...), la estadística y la probabilidad (la probabilidad de conocerte...), etc. Los ejemplos que facilito son de sus compañeros y compañeras de años anteriores. De hecho se trata de una actividad que llevo una década realizando (Galán *et al.*, 2013) y que tiene mucha acogida entre el alumnado, al ver que pueden decir mucho con las matemáticas.

Con esta carta, que es voluntaria, pero que la práctica totalidad del alumnado suele realizar, trabajo múltiples contenidos matemáticos, algunos de los cuales incluso me sorprenden. Cito algunos ejemplos:

- El primer concepto que salió a relucir el curso anterior fue la forma en la que entregaban la carta, con formas geométricas utilizando papiroflexia. Una alumna entregó su carta antes de la fecha acordada y, como singularidad, su carta estaba plegada formando un corazón de papel. Ante mi sorpresa y admiración el resto del alumnado se esforzó por simular otras figuras (trapezios, cuadrados, pentágonos e incluso un cubo en 3D que me dio mucha pena deshacer para poder leer su interior), también en papel, para presentar sus cartas. La más popular fue el corazón y la alumna que inició la propuesta ayudó a sus compañeros y compañeras a plegar sus cartas de las formas más originales y sorprendentes, dando pie a un taller de papiroflexia al finalizar la segunda evaluación.
- La simbolización y el lenguaje matemático también salieron a relucir en el contenido de algunas de estas cartas. El alumnado utilizaba los símbolos matemáticos para el infinito, las operaciones básicas, desigualdades, etc.
- Los porcentajes se repasaron gracias a la carta de una alumna:

*Un 10% de sacrificio + Un 10% de esfuerzo +
Un 10% de fidelidad + Un 10% de mimitos +
Un 10% de respeto + Un 20% de detalles +
Un 5% de chispa + Un 25% de cariño =
AMOR
¡¡Aunque a veces hay un 10% de problemas!!*

Al aparecer los problemas ya nos pasamos del 100%

- Algunos números especiales, como pi (*Mi amor es incalculable, como los decimales de pi*).
- Operaciones básicas (*Eres mis sumas, resta y multiplicación*).
- Teorema de Pitágoras (*Tu eres mi cateto a la hipotenusa*).
- Números, como mostré en Galán *et al.* (2013).

Ante el éxito obtenido me animé a plantear algo parecido: la posibilidad de hacer un poema matemático, que no necesariamente trate del amor.

4. POESÍA MATEMÁTICA

Para esta actividad les doy varias posibilidades. La primera de ellas la cantidad de palabras de cada verso guarde relación con un número famoso. Por ejemplo, si escogen el número pi el primer verso del poema ha de contener tres palabras, el segundo verso una sola palabra, el tercero cuatro, el cuarto una, el quinto cinco (3.14159...), y así sucesivamente hasta completar el número de versos que quieran. Lo mismo se podría hacer con el número áureo, el número cordobés o incluso la raíz cuadrada de dos. Otra posibilidad es que su poema trate sobre algún

concepto matemático y para ello se les doy ejemplos de poemas famosos de Rafael Alberti (La divina proporción), Miguel de Unamuno (2 x 2 son cuatro), Wislawa Szymborska (El número pi), León Felipe (La tangente), etc.

Muestro algunos poemas elaborados por mi alumnado:

EL NÚMERO PI

El número deseado (3)
es (1)
por todos ya contado (4)
pi (1)

El número tiene muchos amigos (5)
y quiere hacerse el doble porque es muy querido (9)
pero tiene (2)
miedo a los que mucho cenén (6)

Todo el mundo lo quiere (5)
algunos dicen que (3)
sencillamente no se lo merece (5)
y yo pienso que es muy muy inteligente (8)
porque si no la gente pensaría sin una mente (9).

Ese es el número buscado por algunos (7),
porque estos suelen ser los más buenos y astutos (9)
Las personas enfadadas (3)
son hadas, (2)
que son aterciopeladas (3)
Nadie quiere decir donde se puede él encontrar (8)
porque si eso pasa (4)
lo tendrán que intentar seriamente asustar (6)

Es verdad, (2)
es muy cariñoso y lo puede (6)
demostrar, pero también tiene (4)
demasiada buena bondad (3).

POESÍA CON EL NÚMERO ÁUREO

Tú, (1)
el que ríe por no llorar, (6)
tú, (1)
el que me enseñó lo que es amar. (8)

CIFRAS DE PI

Tengo tres tesoros,

una casa enorme
con cuatro ventanas de oro.
Una madre ejemplar
que cada cinco minutos me ayuda.
Y nueve amigos que siempre
me sacan dos sonrisas por segundo.

5. EL RAP MATEMÁTICO

He tomado como referencia y punto de partida el rap de *Emprende Rapeando*, de los compañeros de México y Ecuador, que versa sobre las matemáticas. Dicho rap comienza hablando de los axiomas sobre los que se sustenta la materia, y repasa desde los bloques de contenidos (álgebra, geometría, estadística, etc.), pasando por las operaciones básicas (suma, resta, multiplicación) y los tipos de números (naturales, enteros, fraccionarios, etc.) hasta conceptos más complejos como sistemas no lineales, logaritmos, ecuaciones matriciales, derivadas, etc.

Hacemos varios visionados, en el primero de ellos la labor del alumnado es simplemente escuchar, y en los siguientes se va parando el vídeo cada vez que nombra algún concepto matemático. El alumnado debe tomar nota y posteriormente hacemos un debate acerca de los conceptos matemáticos que se han nombrado en el rap y su conocimiento o desconocimiento.

Un trabajo propuesto, voluntario también, consiste en que ellos y ellas creen su propio rap con los conceptos y términos matemáticos que conozcan y dominen. El trabajo se desarrolló en grupo, y, con el dominio de las *apps* y las redes casi todos pusieron su música de fondo mientras rapeaban. Hay grupos de solo de chicos, grupos solo de chicas y grupos mixtos; también me encuentro con alumnado que está orgulloso de que suba a las redes sociales del centro su rap y alumnado al que le da vergüenza que otros lo escuchen y me piden que solo lo haga yo. Muestro algún ejemplo de versos en los raps creados:

Las divisiones de polinomios nos hacen sentir nauseabundos, pero gracias a Ruffini lo aprendemos en segundos

Lado por lado igual a cuadrado, apréndetelo y acabarás bien parado

Un producto notable es $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ y si no lo aprendo me voy yendo

6. CONCLUSIONES

Debo decir que con estas actividades me he reído muchísimo en clase con mi alumnado, y he aprendido mucho de ellos y ellas. Mi intención es acercarles las matemáticas, que se den cuenta que pueden utilizarlas en su lenguaje habitual, en sus mensajes, favoreciendo que lo hagan mediante formas de comunicación que le son cercanas y familiares, y que dejen de percibir las con una asignatura aburrida, y creo que estoy en ese camino que ya inicié hace algunos años (Galán *et al.*, 2012, Galán *et al.*, 2013).

El nivel de participación que obtengo cada curso con este tipo de actividades es prácticamente del 100%, incluso en aquellas que planteo como optativas; despiertan la curiosidad y en interés de todo alumnado, especialmente de aquellos alumnos y alumnas que no suelen participar normalmente en clase.

Dada la buena acogida entre el alumnado a la hora de trabajar y la comunidad educativa en general, que pudo ver el producto final de algunas de estas actividades a través de las redes sociales del centro, continuaré ampliando recursos innovadores para favorecer que las matemáticas se perciban de modo amable y divertido, para así facilitar el proceso de aprendizaje.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Emprende rapeando. (2022). *Canal de Youtube (@EmprendeRapeando)*.
<https://www.youtube.com/watch?v=J7XxlyOvVqI>
- Fernández Serna, T. (2022). *La profe de mate mola*.
<https://laprofedematemola.com/index.php/curso/recursos/>
- Galán, M. C., González Ortiz, A. [Alicia], González Ortiz, A. [Alejandra], Expósito, M. y Madera, E. (2013). Matemáticas recreativas. *Épsilon*, 30(2), nº 84, 49-56.
- Galán, M. C., González Ortiz, A. [Alicia], González Ortiz, F., González Ortiz, A. [Alejandra]. (2012). Matemáticas recreativas. Zoco en XIV CEAM, Diversidad y Matemáticas. En F. España y B. Sepúlveda (Eds.), *Actas de XIV CEAM, Diversidad y Matemáticas*, (pp. 362-363), Málaga, SAEM THALES.
- Menezes, L., Flores, P., Viseu, F., Gomes, H., Ribeiro, A., Martins, A.P., y Guitart, M. B. (2020). *Humor para aprender Matemática. Tareas matemáticas para reír y aprender matemáticas*. Viseu, Instituto Politécnico de Viseu, Escola Superior de Educação.

¡Álbumes y pseudoálbumes de matemáticos¹!

Antonio L. Rodríguez López-Cañizares (=ALR)
Universidad de Granada (Granada, España), arlc@ugr.es

Alfonso Romero Sarabia (=ARS)
Universidad de Granada (Granada, España), aromero@ugr.es

*“La verdad solo se encuentra en las obras de los que celebran las vidas de los grandes hombres”
Henry Fielding “Joseph Andrews” Book III. Chapter 1, line 4.*

Resumen: *Las matemáticas, al igual que la Música o la Filosofía, existen o progresan gracias a sus cultivadores. Es comprensible que al narrar la historia de las mismas se pueda, y se deba, incluir detalles personales de esos cultivadores. De un matemático no hay detalle personal más destacable que la imagen de su rostro (¡al menos la más difundida!). Sin duda se puede llegar a saber el teorema de Bolzano-Weierstrass’s o el algoritmo de Ricci-Curbastro sin ese requisito pero conociendo los rostros asociados a estos resultados matemáticos se hace evidente que se trata de tres matemáticos y no de dos, ni tampoco de cuatro. En la presente nota aparecen muchos rostros de matemáticos y en torno a los mismos se conversa amablemente, como se haría al encontrarlos adornando una institución académica, en una visita ocasional.*

Palabras clave: *matemáticas, historia, álbum, transcripción fonética, Mac Tutor History Archive.*

Abstract: *Mathematics, like Music or Philosophy, exist or progress thanks to its cultivators. It is understandable that when narrating their history one can, and should, include personal details of those growers. There is no more remarkable personal detail of a mathematician than the image of his or her face (at least the most widespread!). Undoubtedly, one can get to know the Bolzano-Weierstrass’s theorem or the Ricci-Curbastro’s algorithm without this requirement, but knowing the faces associated with these mathematical results it becomes clear that we are dealing with three mathematicians and not with two, nor four. In this note many faces of mathematicians appear and around them we converse kindly, as one would do when finding them adorning an academic institution, on an occasional visit.*

Key words: *mathematics, history, album, Phonetic transcription, mathshistory.st-andrews.ac.uk*

1. INTRODUCCIÓN

Los álbumes de retratos de fotos o nos hacen revivir el pasado o simplemente nos ayudan a comprenderlo mejor. En cualquier caso, se suele considerar a casi todos los álbumes que están a nuestro alcance con libros cuya contemplación siempre resulta gozosa. Los álbumes de matemáticos no son en esto una excepción de los que, como la mayoría, tienen carácter familiar.

¹ La presente nota es un extracto, *mutatis mutandi*, de la clase impartida *on line* a 80 alumnos *egresados* de Estalmat de Andalucía el 7/11/2020 titulada “Una historia de las matemáticas -con muchas caras y algunos libros y artículos.

Muchas veces las ilustraciones de los álbumes matemáticos vienen acompañadas con jugosos comentarios que al margen del disfrute de su contemplación incrementan la cultura matemática de quienes los leen. Las dos imágenes adjuntas, junto con las explicaciones que las acompañan, aclaran la diferencia que, entendemos existen, entre álbum y pseudoálbum.

Figura 1



Estos cinco libros (Figura 1) son realmente álbumes pues cada imagen va acompañada de texto. Las dimensiones relativas de los mismos no son las reales y todos los textos se refieren a las imágenes. En la portada del álbum de Pólya están Einstein, Adolf Hurwitz (el maestro de Hilbert y Minkowski) y su hija Lisi que simulan un concierto.

Ninguna de estas tres obras puede ser considerada como un álbum. Especialmente tal juicio “negativo” le es apropiado a la grandiosa enciclopedia de 4 tomos Biographical Dictionary of Mathematicians, que con 2696 páginas a gran formato de doble columna y 7.1 kg de peso, no contiene ninguna imagen física de ningún matemático. Las dimensiones relativas de estas tres obras son las reales. El rotulador azul orienta sobre sus dimensiones.

El diálogo que, en esta nota, se recoge fue realizado a propósito de las 51 imágenes de matemáticos aquí incluidas, pero, como cabía esperar, no es exactamente el mismo diálogo que el que tuvo lugar durante el desarrollo de la clase on line en cuestión. Después de las cinco hojas de este miniálbum hay una lista alfabética que sirve, para reconocer a quien corresponde cada retrato, cuadro, escultura o imagen de comic (Por ejemplo, Tartaglia -A2- y Cayley -A3-)².

² Junto a cada retrato aparece la fecha de nacimiento y muerte (en su caso). A. Wiles, premio Abel 2016, está afortunadamente aún con vida, pero no es la primera vez que un matemático ha leído, con gran sorpresa, su propia esquelita fúnebre (ese fue el caso de Fermat que, ante la misma, dijo que al menos en el año había un error); hay en este álbum una sola mujer y no se han incluido otras a las que no les falta mérito para estar aquí (p.ej. Sophie Germain (1776-1831) o E. Noether (1882-1935)). Es bien sabido que los álbumes son muy caprichosos y posiblemente el nuestro no sea una excepción pero nos servirá para hacer rápidos comentarios comparativos.

Ninguna de las tres obras de la figura 2 puede ser considerada como un álbum. Especialmente tal juicio “negativo” le es apropiado a la grandiosa enciclopedia de 4 tomos Biographical Dictionary of Mathematicians, que con 2696 páginas a gran formato de doble columna y 7.1 kg de peso, no contiene ninguna imagen física de ningún matemático. Las dimensiones relativas de estas tres obras son las reales. El rotulador azul orienta sobre sus dimensiones.

El diálogo que, en esta nota, se recoge fue realizado a propósito de las 51 imágenes de matemáticos aquí incluidas, pero, como cabía esperar, no es exactamente el mismo diálogo que el que tuvo lugar durante el desarrollo de la clase *on line* en cuestión. Después de las cinco hojas de este miniálbum hay una lista alfabética que sirve, para reconocer a quien corresponde cada retrato, cuadro, escultura o imagen de comic (Por ejemplo Tartaglia -A2- y Cayley -A3-).

Figura 2

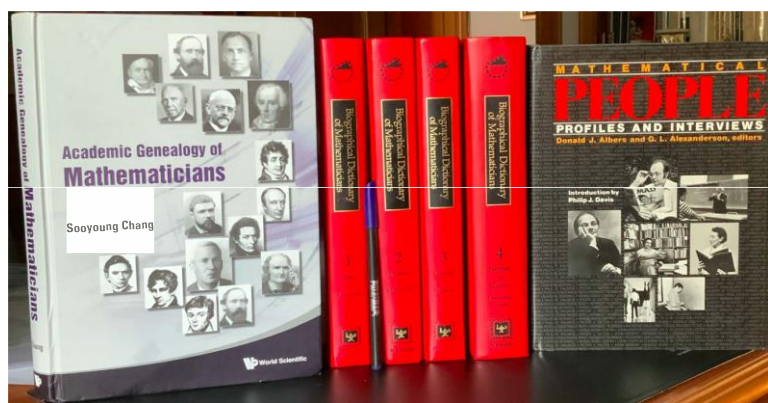
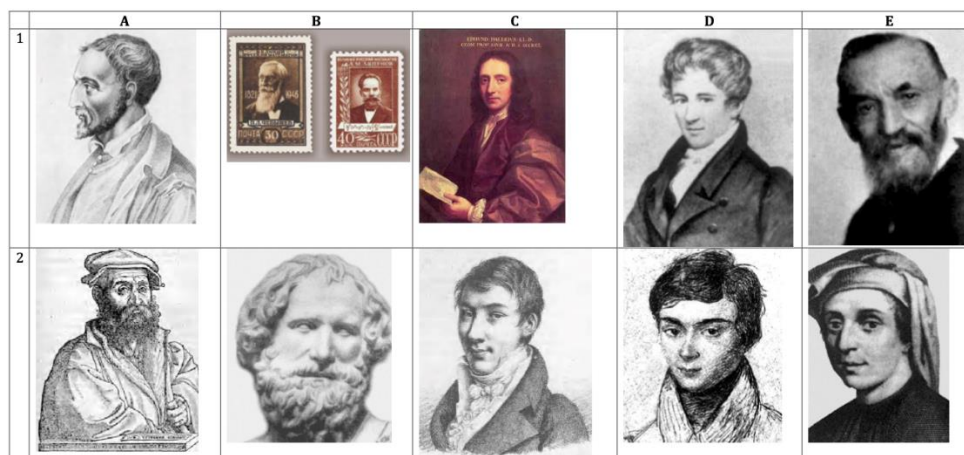


Figura 3

Hoja Primera



ALR: Vamos a comentar esta primera hoja de nuestro miniálbum ¿Qué te parecen estos matemáticos (Figura 3)?

ARS: Los que conozco me parecen bien pero ¿Quiénes son los que aparecen en la columna B?

ALR: Son Chebyshev y su discípulo Lyapunov² en B1. En B2 está ‘supuestamente’ Arquímedes.

ARS: Arquímedes está en los *top three* (Arquímedes, Gauss y Newton). Es una maravilla la imaginación que tuvo para cuadrar un sector de parábola.³

Cicerón descubre la tumba de Arquímedes gracias a que había un cilindro con una esfera inscrita grabada en la misma: “...*qui declarabant in summo sepulcro sphaeram esse positam cum cylindro*” \-CICERONIS TVSCVLANARVM DISPVTATIONVM LIBER QVINTVS-

Figura 4

Cuadro de Benjamín West de 1804, Yale University-



ALR: Voltaire que era admirador profundo de Newton y que asistió a su entierro dijo que había más imaginación en Arquímedes que en Homero. Cicerón descubrió la tumba de Arquímedes y diversos buenos pintores, como West (1738-1820), han imaginado en sus lienzos ese hallazgo (ver figura 4).

ARS: Cauchy aparece muy joven aquí en C2. Me sorprende lo mal que se portó con Abel, D1, pues no lo recibió. Liouville era, a este respecto, la otra cara de la moneda.

ALR: Cauchy era un católico *fundamentalista*, pero no sabemos bien las causas de ese lamentable desaire.

ARS: Cuesta trabajo perdonarle por este incidente teniendo en cuenta las penosidades sufridas por el joven Abel para llegar a París.

ALR: Algo parecido o peor fue lo que hizo Fourier con Galois, D2, al perder un importante trabajo suyo.

ARS: Al parecer la muerte de Galois, a los 20 años, no fue un simple duelo tras un desengaño amoroso con una tal Stéphanie, sino que el mismo fue algo amañado para ocasionar el fatal desenlace.

ALR: En este grupo tenemos a Cardano y a Tartaglia, en A1 y A2, que disputaron agriamente por la ecuación de tercer grado, cuya autoría no era de ninguno de los dos sino de Scipione del Ferro (1465-1526).

ARS: En E2 está Fibonacci que con su famosa sucesión es el héroe de las matemáticas recreativas.

² Se echa en falta a su otro discípulo A. Markov (por falta del sello postal y no por sus muchos méritos).

³ *Archimedes squaring of a parabola* (problema 56 del libro del alumno de H. Dorrie “100 Great Problems of Elementary Mathematics” Dorrie fue alumno de Hilbert).

ALR: Sí, claro la razón aurea $\varnothing = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ está por doquier y no digamos de la utilidad de tener el término general de la sucesión de Fibonacci, que es: $F_n = \frac{\varnothing^n - (-\varnothing)^{-n}}{\sqrt{5}}$, llamada -fórmula de Binet (1786-1856)-, pero que ya era conocida con anterioridad por De Moivre. Esta fórmula como la curva Gauss y la fórmula de Stirling, deberían llevar el nombre de De Moivre y no los de aquellos.

ARS: ¿Quién es el situado en la Casilla C1?

ALR: Es Halley, el amigo de Newton, que costeó la primera edición de los *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* del genio de Cambridge.

ARS: Sí, era amigo de Newton, pero Newton también tuvo muchos enemigos.

ALR: Sobre todo tuvo algunos importantes enemigos. Los tres más famosos fueron Leibniz, Hooke y Flamsteed (el astrónomo real).

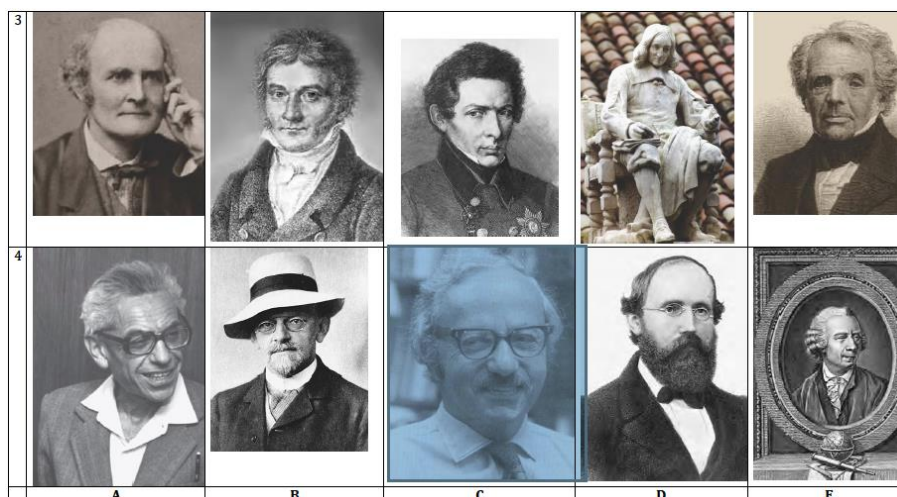
ARS: Pero a pesar de su fama de astrónomo no llegó joven a ocupar un puesto de astrónomo y a suceder a Flamsteed ¿No es así?

ALR: En efecto, Halley desde la muerte de Wallis en 1703, estuvo ocupando la cátedra saviliana de Geometría en Oxford que aquel regentaba desde 1649 (¡todo un record de docencia!). También fue capitán de barco. La muerte de Flamsteed en 1719 le permitió sucederle en la dirección del famoso observatorio de Greenwich. La viuda de Flamsteed, por fidelidad a las antipatías de su difunto marido, no quiso que Halley heredase el material astronómico del mismo, que a su muerte pasó a ser de su propiedad exclusiva.

ARS: ¡Toda una figura!

Figura 5

Hoja segunda



ALR: Comentemos algo de la página hoja segunda (Figura 5) de nuestro álbum. En esta hoja está 'la crème de la crème' ¿Verdad?

ARS: ¡Sí, claro! pues está nada menos que Gauss en B3. Fue una suerte que se beneficiara de un mecenazgo.

ALR: El duque de Brunswick, sobrino de Federico el Grande de Prusia, lo protegió estando Gauss en secundaria y prolongó su ayuda hasta que vino moribundo de una batalla contra las fuerzas napoleónicas.

ARS: En España parece que hubo pocos imitadores de ese duque para beneficio de los científicos.

ALR: Durante mucho tiempo los mecenazgos españoles se centraban principalmente en la pintura, la teología ... pero no en las ciencias.

ARS: ¿A quién corresponde la imagen de la estatua situada en D3?

ALR: Es Fermat, el matemático *amateur* por excelencia. Pero de todos estos matemáticos yo le profeso una admiración especial al, quizás, menos importante de los diez, al C4 que corresponde a George Bernard Dantzig. Por ser el padre de la Programación Lineal y el creador de método del Simplex para el que yo, en distintos lenguajes de programación, he construido muchos códigos (en distintas versiones de este método).

ARS: Yo, como geómetra, tengo una gran admiración por Riemann D4 a quien Gauss elogió, actitud infrecuente en él, cuando defendió su tesis doctoral.

ALR: En esta página tenemos también a dos de los más prolíficos matemáticos que ha habido: Euler en E4 y Erdős⁴ en A4.

ARS: Ya sabes que los matemáticos suelen hablar del número de Erdős que ellos tienen, a saber: el uno si han publicado un artículo con él, el dos si han publicado con otro que sea Erdős uno,... También se habla de la distancia Erdős entre dos matemáticos.

ALR: ¿Y cuál es tu distancia Erdős con Einstein?

ARS: Creo que el 4 o el 5, pero a bote pronto, no estoy seguro.

ALR: Ya sabes que Gauss aprendió ruso para leer a Lobatchevsky, C3, en su lengua. Tenemos también que decir algo de Cayley en A3.

ARS: Sí claro pues aparte de crear la Teoría de Matrices, ¡toda una hazaña! ejerció la abogacía y fue también un matemático prolífico y un buen montañero.

ALR: Para despedirnos de esta hoja es curioso recordar que la foto de Hibert, B4, corresponde a una postal que se vendía en Göttingen y que servía a los turistas para mandársela a sus amigos como recuerdo de su paso por esta ciudad. Hoy se pueden mandar postales de la banda de Möbius (E3) pero no creo que sea posible hacerlo de un matemático genial como se hacía entonces.

ARS: ¡Ah!, ¡Qué buenas costumbres se han perdido!

Figura 6

Hoja tercera



⁴ "El Hombre que Amaba Solo a los Números", es una atractiva biografía suya escrita por Paul Hoffman.

ALR: Bueno ya estamos en el Ecuador de nuestro álbum, es decir en la hoja 3 de 5 o dicho *racionalmente* en la página 3/5 (¡tres quintos!).

ARS: Sí, es una notación que ya todo el mundo entiende. ¡Qué sería de las matemáticas sin las notaciones! Veo que en esta página aparece al fin una mujer, en A6.

ALR: Sí, es Sofia Kowalevskaya, madre de Sonya (nacida en 1878), que tuvo muchos premios científicos y además, si es que esto puede decirse hoy en día, era muy guapa. De ella parece que estuvo enamorado Weierstrass que fue su profesor particular y que lamentablemente quemó la correspondencia que mantuvo con ella, cuando tuvo noticia de su muerte.

ARS: La imagen en D5 es muy poco conocida ¿Verdad?

ALR: En efecto es la única que se conserva de Abraham De Moivre que tuvo que exiliarse a Londres cuando en 1685 Louis XIV anuló el Edicto de Nantes, que su abuelo Henri IV, el primer borbón de Francia, dictó y que permitía libertad de culto a los hugonotes.⁵

ARS: ¡Cuántas lamentables expulsiones masivas se han producido en la historia! Precisamente nosotros, los españoles, no hemos tenido buena conducta al respecto.

ALR: Son muchos los matemáticos que han sufrido adversidades sin cuento, por culpa de los dirigentes del momento o por persecuciones religiosas. Aquí vemos en B2 una imagen de Kepler que sufrió lo indecible con la condena por brujería que recayó en su anciana y gruñona madre y a la que finalmente pudo salvar.

ARS: Kepler fue un gran matemático y un gran físico, no había distinción en su época entre estas dos ciencias. Ideó un ingenioso, aunque inservible, modelo del sistema solar a partir de los poliedros regulares. Junto a su imagen aparece la de Galileo, C6, con el que mantuvo correspondencia y que sufrió una condena, siendo Papa, su otrora amigo, Inocencio VIII, por defender que la Tierra no era el centro del Universo. Parece que la condena, el arresto domiciliario, no se le aplicó con excesiva severidad.

ALR: El telescopio construido por Galileo le permitió descubrir cuatro satélites de Júpiter y ver que ellos giraban en torno al mismo. Toda una evidencia para demostrar que no todo giraba en torno a la Tierra.

ARS: No hay nada más lamentable que la actitud de los que no quieren ver ni siquiera lo evidente. ¿Hablamos de Cantor que está en A5?

ALR: Cantor creó, según Hilbert, *un paraíso para nosotros*, i.e., la Teoría de Conjuntos. Tuvo como amigo fiel a Dedekind, en E5, que en 1872 (el año del programa de Erlangen) ideó sus famosas *cortaduras* para la construcción de los números reales.

ARS: Sí, pero hubo otros matemáticos, como Kronecker, que censuraban agriamente sus trabajos ¿Padeció Cantor algunos trastornos mentales?

ALR: Cantor tuvo que pasar temporadas en psiquiátricos y estaba obsesionado con demostrar que la obra de Shakespeare se debía a Francis Bacon, que fue canciller con Jacobo I Estuardo, pero detengámonos ahora, si te parece, en Jacobi, E6, y Lagrange, D6.

ARS: Jacobi, el gran *algorista* (i.e. creador de algoritmos) según E.T. Bell y dos años más joven que Abel, fue un excelente profesor, pero era brusco y no guardaba las maneras. Justamente la actitud opuesta a la de Lagrange, que nació en Turín, y era considerado mitad italiano y mitad francés. Lagrange, como Riemann, era un alma cándida y como su antecesor en la academia de Berlín, Euler, también escribía *claro*.

ALR: Lagrange en 1777 una vez muerto Federico el Grande, abandonó Berlín y se instaló en Paris. Tras el traslado sufrió una depresión y recibió el consuelo nada menos que de la reina

⁵ Protestantes calvinistas.

María Antonieta. No podemos olvidar a Georges Polya, C5, el autor del best seller “*How to solve it*” del que se han vendido, en varios idiomas, más de un millón de ejemplares. Polya era un hombre acogedor y un gran matemático. La portada de su atractivo álbum personal de fotos está en la figura 1 introducida antes.

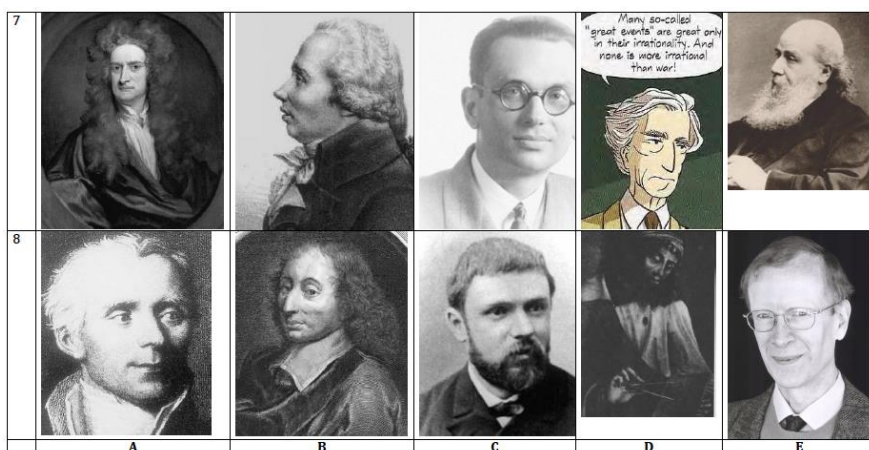
ARS: Finalmente nos queda Mandelbrot, en B5, el creador de los fractales. Una forma de apreciar su simpatía personal es viendo en la página WEB www.ted.com su breve charla titulada “*Fractals and the Art of roughness*”, dada poco antes de su muerte.

ALR: Sí, y es asombrosa la importancia que tiene la Geometría Fractal, de la que Mandelbrot es pionero y fundador, y que ilustró tempranamente con el famoso artículo “*How long is the coast of Britain?*” Esta Geometría encuentra aplicación en campos de lo más inesperados como es p. ej. el diseño gráfico.

ARS: Ah! ¡Los caminos del Señor son infinitos!

Figura 7

Hoja cuarta



ALR: En la cuarta hoja de nuestro álbum tenemos a Newton, en A7, que en 1687 dejó boquiabierto a la comunidad científica con la publicación, en latín, de *Principios Matemáticos de la Filosofía Natural*. El retrato que aquí aparece lo hizo Kneller en 1702. De Newton, al contrario que de Hooke (1635-1703) y de De Moivre, existen muchos retratos, algunas estatuas y sobre todo muchas biografías.

ARS: Sin duda Newton es un gigante de la ciencia y de su vida conocemos muchos detalles, algunos buenos y otros no tan buenos. La mayoría recogidos en la gigante biografía de Westfall, “*Newton, never at Rest*”.

ALR: De entre los buenos destaco su humildad cuando dijo “*Si he sido capaz de ver más lejos es porque me subí a hombros de gigantes*” y dentro de los malos su declaración: “*Me he sentido feliz de haberle roto el corazón a Leibniz.*” (tras la muerte en Hannover de su rival -por la prioridad en la invención del cálculo-).

ARS: Me quedo con la primera frase pues seguramente la segunda no la hubiera repetido tras un oportuno requerimiento o simplemente esté fuera de contexto.

ALR: En esta hoja también hay otro gigante de la producción matemática, Poincaré en C8. Aquí aparece muy joven, es la foto que encabeza en la página Web de la *MacTutor* su biografía. E.T. Bell dice que él fue el último *universalista*, i.e., que conocía todas las matemáticas de su época.

ARS: Bueno también se dice lo mismo de André Weil, fundador o cofundador del colectivo Bourbaki, pero en todo caso, siempre se debería decir el último universalista hasta la fecha tal o cual.

ALR: Poincaré, al igual que nuestro Menéndez Pelayo, también murió en 1912 (aunque Poincaré nació en 1854 y MP en 1956). En la Facultad de Ciencias de Granada aparece equivocada la fecha de su defunción en uno de los pósters de matemáticos que allí se exponen desde hace algunos años.

ARS: Está claro que también en los pósters hay errores. Posiblemente este error sea reparado si la decana, profesora Carrión Pérez, lee nuestra lección; pero retomemos a Weil y su relación con A. Wiles, que están en E8. Ambos tienen casi las mismas letras que sus apellidos. Weil ayudó a Wiles, a través entre otros de Taniyama (1927-1958) y Shimura (1930-), a ‘resolver’ el problema existente con el último teorema de Fermat.

ALR: Muchos de los teoremas intermedios que cubren la cadena de razonamientos que van desde la hipótesis “ $x^n + y^n = z^n$ con $x, y, n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$ ” a la tesis “ $n = 2$ ” no han sido demostrados por Wiles pero fue él quien consiguió enlazarlos todos y llevarse la gloria, reconocida con el premio Abel de 2016.

ARS: Einstein decía que se centró en la física y no en las matemáticas pues en la física, a diferencia de en las Matemáticas, las hipótesis deben ser sugeridas por la observación o por la posible verosimilitud y no por la imaginación desbordante de alguien. No es imaginable que en física se puedan sacar consecuencias a partir de una hipótesis absurda, esperando que alguien, en el futuro, encuentre sentido a esa hipótesis absurda de partida.

ALR: Ciertamente en matemáticas es eso lo que pasa. Sabemos que se han demostrado muchas proposiciones a partir de la posible veracidad de la hipótesis de Riemann (HR). Estas demostraciones tendrán mucho valor cuando se demuestre la HR. A propósito ¿Sabes de que tratan los libros de historia ingleses cuyo título comienza con “*What is ...*”?

ARS: No, pero supongo que tienen algo que ver con lo que estamos hablando.

ALR: Bueno, más o menos, se trata de libros que incluyen artículos de historiadores prestigiosos, con títulos parecidos a estos dos: ¿*Qué* es lo que hubiera pasado *si* Sócrates no hubiera bebido la cicuta? ¿Y si César no hubiera cruzado el Rubicón?

ARS: Eso no es comparable, pues esos historiadores hacen *historia ficción* sin posibilidad de sacar alguna utilidad de lo que escriben, pues no disponemos de una máquina del tiempo para viajar al pasado. En matemáticas, se comprenden las reservas de Einstein, sí que tienen utilidad los teoremas que provienen de una *hipótesis extraña*.

ALR: Pasemos a dos gémetras de verdadero *reconocido prestigio*: Euclides en D8 y Pascal en B8.

ARS: No sabemos si la imagen que aparece aquí de Euclides corresponde a la realidad. No así la de Pascal.

ALR: Las imágenes de los matemáticos del pasado incluyendo la de Euclides, de cuya biografía tenemos tantas incógnitas, son posiblemente erróneas. Son muchos los científicos, como Pascal y Einstein, que iniciaron su pasión matemática por la obra de Euclides. Y otros, como De Moivre, que derramaron lágrimas en su juventud al atrancarse en alguna proposición (¿la 5ª? Llamada ‘*pons asinorum*’) de *Los Elementos*.

ARS: Un matemático, en C7, con una relación especial con Euclides es Gödel. Euclides escribió o compiló sus *Elementos* utilizando el método axiomático (Kant añadió ‘*de acuerdo con Euclides*’ al dicho de Platón ‘*solo Dios hace Geometría*’). Hilbert, para celebrar el

centenario de la tesis de Gauss en 1899 publicó su *Fundamentos de la Geometría* que, con 21 axiomas, perfecciona y pone más rigor a la obra de Euclides.

ALR: En 1931 Gödel da un severo golpe al formalismo, defendido por Hilbert, con los teoremas de incompletitud. No destruye la idea fundamental del formalismo pero limita sus aspiraciones en el sentido p.ej. de que los axiomas de Peano no permiten demostrar todas las proposiciones que se pueden enunciar en la aritmética de los números naturales. Dicho de otra manera siempre, aunque se aumente el número de axiomas de la lista de Peano, quedarán proposiciones indecidibles (i.e. proposiciones que no se pueden demostrar si son ciertas o falsas). Las demostraciones que hizo Gödel se centraban en los sistemas axiomáticos semejantes al elaborado por Bertrand Russell y Whitehead (1861-1947) en sus *Principia Mathematica*.

ARS: Hablando de Russell, su imagen figura aquí como si fuera la viñeta de un comic y está en D7. Esta imagen está en el famoso y exitoso libro “*Logicomix. An Epic Search For Truth*” en forma de comic, que tiene cuatro autores: dos lógicos (Papadimitriou y Doxiadis que son autores del texto) y dos artistas dibujantes (Papadatos y Di Donna, autores de las magníficas ilustraciones *ad hoc*).

ALR: Finalmente nos quedan Legendre en B7, Laplace en A8 y Sylvester en E7.

ARS: Laplace aparece muy joven, seguramente corresponde al tiempo en que llegó a Paris con una carta de recomendación para D'Alembert, de la que éste no hizo ningún caso.

ALR: Sí, pero cambió de opinión cuando Laplace le hizo llegar uno de sus trabajos. Laplace fue muy acomodaticio con el poder, es decir se adaptaba bien al dirigente político o académico de turno. Sylvester, amigo íntimo de Cayley y autor de la ley de inercia de las formas cuadráticas, no era así, pues tuvo muchos problemas por mantenerse en sus trece. Sylvester en 1831 quedó segundo en los exámenes *Tripes* de Cambridge y a pesar de su brillantez no pudo graduarse pues para hacerlo tenía que jurar los 39 artículos de la fe anglicana y él era judío y nada dispuesto a cambiar su religión por la anglicana. Cayley fue Senior Wrangler (número 1 en los exámenes *Tripes*) en 1842.

ARS: ¡Cuántos juramentos inútiles han sido forzados a hacerse en el mundo académico! Recordemos lo de *Los 7 de Gotinga* que fueron expulsados por no jurar la nueva constitución impuesta por el nuevo rey, Ernest August, tío de la reina Victoria. La ley sálica impidió a la reina Victoria ser proclamada reina de Hannover para posterior desgracia de los hermanos Grimm y de otros cinco (incluido Weber y el yerno de Gauss).

ALR: Legendre, 25 años mayor que Gauss, tuvo varios desencuentros con él, entre ellos uno a propósito del *primer descubridor* del método de los mínimos cuadrados y también de la ley de la reciprocidad cuadrática. Pues fue Legendre el primero que los publicó y Gauss anunció que él los había descubierto con anterioridad.

ARS: Posiblemente era cierto pero ¿no hubiera sido más elegante por parte de Gauss que hubiera guardado silencio?

ALR: Veamos ahora la última página y finalicemos nuestro agradable recorrido ¿Con quién empezamos?

ARS: Felix Klein en C10 y su amigo Sophus Lie en E9 son un buen comienzo. Klein se ocupó de los grupos discretos y Lie de los continuos. En 1886 cuando Klein se trasladó definitivamente a Gotinga, Lie ocupó el puesto que aquel dejó en Leipzig.

ALR: Se hicieron muy amigos en el viaje que realizaron juntos a Paris poco antes de la guerra entre Prusia y Francia. La guerra la declaró el emperador Napoleón III, esposo de nuestra Eugenia de Montijo, granadina que tiene una calle con su nombre en nuestra ciudad (su ciudad natal). Bismark, el canciller de hierro, aprovechó la victoria de Prusia para lograr la unificación

de Alemania y el inicio del segundo Reich. El tercer Reich, con Hitler al mando, fue un desastre sin paliativos para Alemania y durante el mismo muchos profesores judíos, de inestimable valía y para beneficio principalmente de EEUU, tuvieron que abandonar sus puestos y el país, por miedo a la muerte.

ARS: Lie, al contrario que Klein, al no ser alemán no tuvo que abandonar París de prisa y corriendo. De todas formas sufrió un encarcelamiento temporal del que le liberó el influyente Darboux.

Figura 8

Hoja quinta



ALR: En 1893 surgió un conflicto entre Klein y Lie, pues Lie publicó: “*Yo no soy discípulo de Klein, ni él mío, pero esto es más cierto que lo primero*”.⁶ El oportuno silencio de Klein evitó la ruptura de la amistad entre ambos. Anna (1851-1927), la mujer de Klein y nieta del filósofo Hegel (1770-1831), relató un emocionante encuentro amistoso entre ambos en el portal de su casa en el número 3 de *Wilhelm Weber Strasse*, ocurrido poco después de la inoportuna publicación de Lie (Hilbert vivía en el número 29 de esa misma calle).

ARS: La fotografía peor de las diez que se encuentran en esta hoja está en B9 donde aparecen seis *bourbakistas* y Simone Weil (1909-1943), la filósofa y mística hermana de André Weil.

ALR: Sí, realmente es mala pues ahí ‘aparece’ oculto uno de los miembros y el que figura con gafas parece un mafioso. Yo solo consigo identificar a Dieudonné que está sentado. Se ve que mi capacidad para identificar rostros de matemáticos admite una mejora.⁷

ARS: En D10 aparece Rey Pastor (RM en adelante) que es el único español de nuestro álbum. Los libros que escribió tuvieron una gran influencia tanto en España como en Argentina. Yo estudié en la licenciatura su “*Análisis Algebraico*” y la lectura del mismo me fue grata y provechosa.

ALR: Una de las estancias de RP en Alemania la tuvo en Gotinga en 1915, donde conoció, entre otros, a Caratheodory (1873-1950) y Landau (1877-1938), que a la muerte de Minkowski (1864-1909) ocupó la plaza de profesor que aquel dejó vacante. Halmos (1916-2006) se

⁶ “*Ich bin kein Schüler von Klein, und das Gegenteil ist auch nicht der Fall, obwohl das der Wahrheit eher entsprechen könnte.*”

⁷ Las personas de la foto son: Simone Weil, Charles Pisot, André Weil, Jean Dieudonné, Claude Chabauty, Charles Eresmann y Jean Delsarte.

entrevistó con RP en el congreso internacional de Cambridge de 1950, y RP le dijo que para hablar entre ellos, podía elegir entre varios idiomas, pero no el inglés. Decidieron hacerlo en alemán pero Halmos tenía un alemán macarrónico y no llegaron a entenderse bien. Halmos creía equivocadamente que RP era argentino.

ARS: Parece que RP destacó más en el plano pedagógico y de gestión que en el de investigación. Son muy famosos sus libros didácticos que tienen como coautor a Puig Adam.

ALR: RP destacó mucho con sus obras de texto, de historia de las matemáticas y de divulgación, quizás eso hace que tengan menos renombre las de investigación, pero en la obra Julio Rey Pastor “*Selecta*” Sixto Ríos, Santaló y García Camarero (1932-) aparece una lista de sus exitosas conferencias y trabajos de investigación. En cualquier caso hay que sentirse orgullosos, como españoles, de su egregia figura.

ARS: Sea ahora el turno Janos Bolyai, en B10, el hijo de Farkas (1854-1956), al que Gauss dijo no poder elogiarlo, porque sería tanto como elogiarse a sí mismo. Este comentario dejó muy triste al joven Janos. Gauss resultó ser más generoso en elogios con Lobatchevsky que con Bolyai.

ALR: Farkas le pidió a Gauss que albergase a su hijo Janos en su casa para poderlo enviar a Gotinga, pero Gauss rehusó el ruego de su amigo. Janos no fue a la universidad, se hizo militar y se mostró excepcionalmente bueno aprendiendo otras lenguas y en el manejo de la espada ... además de en las matemáticas.

ARS: Estamos censurando a Gauss, quizás en exceso, pero es que sorprende que él no ejerciese el *patronazgo* habiéndose beneficiado tanto de esta forma de ayuda en el pasado. No quiero aumentar más la herida pero hay que recordar que cuando Gauss estuvo en Helmstedt haciendo su tesis doctoral, aprobada *in absentia* en 1799 residió en la casa de su profesor Pfaff (1765-1825) que como él también había sido alumno de Kästner.

ALR: Pasemos a Nepper, A9, su cálculo logarítmico fue recibido con albricias por los astrónomos que, como Kepler, estaban obligados a hacer cálculos *astronómicos* y con los logaritmos se ahorraron mucho tiempo. Kepler decía que Nepper había aumentado la vida de los astrónomos.

ARS: La estampa de Poncelet en A10 es poco reconocible. Como iniciador de la Geometría Proyectiva, que a juicio de Cayley era toda la geometría, sus descubrimientos fueron de manifiesta utilidad.

ALR: La Geometría Proyectiva se llamaba entonces, al menos en Francia, *Géométrie Descriptive*. En 1916 Rey Pastor publicó la obra *Fundamentos de la Geometría Proyectiva Superior* que había merecido dos años antes un importante premio de la Real Academia de Ciencias de Madrid. En el libro “*Julio Rey Pastor matemático*” de Sixto Ríos (1913-2008), Santaló (1911-2001) y Balanzat (1912-1994) se recoge una carta manuscrita de Hurwitz (1859-1919) de 19/12/1916 a RP, en francés y desde Zürich, acusando recibo del libro y alabando su contenido. Pasemos a Courant en D9.

ARS: Su obra “*Matemáticas Aplicadas a la Física*” fue traducida al español (en mis años de estudiante le llamábamos el “Courant-Hilbert”), pero sin duda la más divulgada de sus obras es “*¿Qué es la Matemática?*”, en colaboración con H. Robbins, y publicada en España por la editorial Aguilar en 1964.

ALR: Richard Courant es una figura importante, entre otras cosas, por haber fundado en N.Y. el Instituto que lleva su nombre. Su prima hermana era Edith Stein, judía como él, pero que, a diferencia de él, se hizo católica y fue declarada santa en 1987 por el Papa Juan Pablo II además de copatrona de Europa (Teresa Benedicta de la Cruz).

ARS: Pasemos a Poisson, en E10, trabajador infatigable y discípulo de Laplace. Para mí tiene mucha importancia no solo como físico sino como geómetra. La geometría de Poisson es el lado diferencial topológico de la geometría simpléctica.

ALR: Nos dejamos para el final a Turing, C9, que el Jueves Santo de 1930 estuvo en Granada viendo una procesión nocturna. Con la máquina de Turing, que aparece tan bien descrita en el libro “*Computational Complexity*” de Papadimitriou, se dio un paso de gigante en la aparición de los ordenadores sin los que hoy la vida sería más pobre en todos los sentidos.

ARS: Hemos llegado al final de nuestro álbum, pero a cualquier álbum se le pueden añadir hojas. ¿Qué otras figuras incluirías en esas páginas adicionales? Pongo un límite a tu respuesta ya que solo quiero dos nombres más.

ALR: Sobre la marcha mis elegidos son Donald Knuth que ideó el *TeX* a partir del cual Lammport creó el *LaTeX* y Maurice Fréchet (1878-1973), creador de los espacios abstractos, al que conocí personalmente en Madrid en 1968 cuando él contaba 85 años y yo muchos menos. Pero también, saltándome tus restricciones pues has hablado de páginas, añadido, en dibujos, otros doce que aparecen a continuación y sirven como disculpa de no haberlos incluido antes. Los dibujos han sido hechos por Mateo Mitchell y están incorporados al libro de G. F. Simmons titulado “*Calculus Gems. Brief Lives and Memorable Mathematics*”.

Figura 9

Tales (624 a.C.-547 a.C.), Pitágoras (570 a.C. - 490 a.C.), Hypatia (370-415), Cavalieri (1598-1647), Huygens (1629-1695) y Leibniz (1646-716).



Figura 10

Johan Bernoulli (1667-1748), Fourier (1768-1830), Dirichlet(1805-1859), Liouville(1809-1882), Hermite (1822 - 1901) y Weierstrass (1815-1897).



Parece preferible, como acertadamente hace Rey Pastor, transcribir fonéticamente $\Theta\alpha\lambda\eta\sigma$ como ‘Tales’ y no ‘Thales’, pues la transcripción fonética del griego al español no puede ser la misma que la que se hace al inglés. Por eso nadie escribe en español Pythagoras sino Pitágoras (del griego ΠΥΘΑΓΟΡΑΣ).

Los comentarios que hemos hecho al repasar las hojas de nuestro álbum pueden servir de ejemplo de una manera posible de ver un álbum de matemáticos. Los matemáticos, en ciernes o

maduros, deben saber reconocer los rostros de los matemáticos importantes. ¿Qué pensaríamos de un pianista que en el pasillo que lo conduce a la sala de conciertos confundiese un retrato de Beethoven con uno de Mozart? ¿Valdría entonces la pena escuchar su concierto?

Reconocer la imagen de un matemático en distintas épocas de su vida es una tarea difícil y más aún si las imágenes son dibujos, como se muestra gráficamente a continuación.

Figura 10

Tres dibujos sobre Georg Cantor de joven, en edad madura y en la vejez tomadas del libro de Robert Kaplan y de Ellen Kaplan (también ilustradora) “*El Arte del Infinito: Los Placeres de las Matemáticas*”.



Situación de las imágenes de los matemáticos en las cinco hojas de nuestro álbum y años de nacimiento y muerte. El año de defunción de Newton corresponde al calendario juliano y no al gregoriano (como aparece en la *Mac Tutor History Archive*). Andrew Wiles está vivo ¡felizmente!

Figura 11

Esquema de las hojas de estudio

1D	Abel, Niels	1902	1929	10C	Klein, Felix	1849	1925
2B	Arquímedes	-287	-212	6A	Kovalevskaya, Sofia	1850	1891
10B	Bolyay, Johan	1802	1860	6D	Lagrange, Joseph Louis	1736	1813
9B	Bourbaki, Nicolas	1935		8A	Laplace, Simon	1749	1827
5A	Cantor, Georg	1845	1918	7B	Legendre, Adrien-Marie	1752	1833
1A	Cardano, Gerolamo	1707	1788	9E	Lie, Marius Sophus	1842	1999
2C	Cauchy, Agustin-Louis	1789	1857	3C	Lobatchevsky, Nikolai	1792	1856
3A	Cayley, Arthur	1821	1895	1B	Lyapunov, Aleksandr M.	1857	1918
1B	Chebyshev, Pafnuty L.	1821	1894	5B	Mandelbrot, Benoit	1924	2010
9D	Courant, Richard	1888	1972	3E	Möbius, August	1790	1868
4C	Dantzig, George B.	1914	2005	9A	Napier, John	1550	1617
5D	De Moivre, Abraham	1667	1754	7A	Newton, Isaac	1642	1727
5E	Dedekind, Richard	1831	1916	8B	Pascal, Blaise	1623	1662
9A	Erdős, Paul	1913	1996	1E	Peano, Giuseppe	1858	1932
8D	Euclid	c.-325	c.-265	8C	Poincaré, Henri Jules	1854	1912
9E	Euler, Leonard	1707	1783	10E	Poisson, Denis	1781	1840
3D	Fermat, Pierre de	1602	1664	5C	Polya, George	1887	1985
2E	Fibonacci Leonardo de Pisa	1170	1250	107	Poncelet, Jean Victor	1788	1867
6C	Galilei, Galileo	1564	1642	10D	Rey Pastor, Julio	1888	1962
2D	Galois, Evariste	1811	1832	4D	Riemann, Bernhard	1826	1866
3B	Gauss, Karl Friedrich	1777	1855	7D	Russell, Bertrand	1872	1970
7C	Gödel, Kurt	1906	1978	7E	Sylvester, James Joseph	1814	1897
1C	Halley, Edmond	1656	1742	2A	Tartaglia, Niccolo	1500	1557
4B	Hilbert, David	1862	1943	9C	Turing, Alan Mathison	1912	1954
6E	Jacobi, Carl Gustav Jacob	1804	1851	8E	Wiles, Andrew John	1953	
6B	Kepler, Johannes	1671	1730				

Amir Aczel (1950-2015) en su libro “*The Artist and the Mathematician*” dice: “*Most mathematicians agree that Bourbaki is dead... The questions that remain are when Bourbaki died, and why*”. Sin embargo, la editorial Springer-Verlag ha publicado un nuevo libro del colectivo Bourbaki en 2016, de Topología Algebraica. En el libro de Maurice Mashaal “*Bourbaki. Une société secrète de mathématiciens*” se describe la evolución del grupo, su litigio legal con la editorial Hermann y el comportamiento extraño de Grothendieck -el gran defensor de las categorías sobre las estructuras- que dañó al colectivo. Ello puede explicar, en parte, el retraso notable del grupo en publicar el libro citado, y que tal retraso haya hecho pensar a algunos, como a Aczel, que los jóvenes Bourbakistas actuales, todos han de tener menos de 50 años, habían clausurado su actividad a perpetuidad.

Figura 11

Una actividad

Nombre	nació	Murió	País	rey o político coetano	obra importante	situación matrimonial	disputó Con	frase memorable	amigo De
Arquímedes	Siracusa 287aC					?			Eratóstenes
Descartes							Fermat	cogito ergo..	
Fermat				Luis XXIII					Pascal
Pascal	Clermont 1623		Francia						
Newton				Carlos II	Principia Mathem.				Halley
Leibniz					Monadología				
Jacob Bernoulli		Basilea	Suiza			casó y 2hijos	su hermano su hermano		
Johan Bernoulli									
Euler		San Petersburgo		Federico II		casó 2 veces			

EJERCICIOS

a) Rellenar, utilizando la página web facilitada, las casillas que aparecen en blanco.

b) Aprender de memoria, “hasta donde se pueda”, los datos que aparezcan en la tabla completada.

c) Ampliar la tabla con otros matemáticos.

visitar [http:// www-history.mcs.st-and.ac.uk](http://www-history.mcs.st-and.ac.uk) (St. Andrews University)

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS¹¹

1. Albers, D.J. & Alexanderson, G.L. (1975) (eds.) *Mathematical people Profiles and interviews*
2. Alexanderson, G.L. (2000) *The Random Walks of George Polya*. The Math. Assoc. Of America
3. Apostolos, P., Papadimitriou, C. (2010) *Logicomix*. Vuibert
4. Bellhouse, D.R. (2011) *Abraham De Moivre* A.K. Peters Book
5. Bell, E. T. (1986) *Men of Mathematics*. Simmond & Schuster
6. Bunt, L., Jones, P. & Bedient, J. (1988) *The historical roots of Elementary mathematics*. Dover
7. Chang, Sooyoung (2011) *Academic Genealogy of Mathematicians*. World Scientific
8. Cook, M. et al. (2009) *Mathematicians*. Princeton Un. Press
9. Curbera, G. (2009) *Mathematicians of the world, unite!* A K Peters, Ltd. (313 p.)
10. De Moivre, A. (1756) *The Doctrine of Chances*. AMS Chelse Pu.

¹¹ Las listas bibliográficas que suelen incluirse al final de muchos libros y artículos tienen esencialmente dos finalidades: (1) Proporcionar a los lectores una información útil donde proseguir la lectura de los temas tratados en los mismos y (2) Mostrarles que sus opiniones están respaldadas por otros autores de gran fuste y reconocimiento. En nuestro caso, añadimos, nuestro propósito de hacer prosélitos en la lectura, contemplación y posesión de libros que otrora y ágora nos produjeron y nos producen deleite. La brevedad de la lista y de los comentarios que aquí aparecen se debe a la exigencia que, aunque razonables, son ajenas a nosotros y ciertamente al tener que elegir hemos sentido lo que los franceses llaman “*l’embarras du choix*” ...pero sin olvidar la WEB: “mathshistory.st-andrews.ac.uk”

11. Fauvel, J. & Gray J. (1990) *The history of Mathematics – A Reader*- The Open University
12. Gass, S.I. & Assad, A.A. (2005) *An Annotated Timeline of Operations Research*. Kluwer Ac. Pu
13. Gribbin, John (2002) *Science A History 1543-2001*. BCA
14. Hoffman, P. (1999) *The man who loved only numbers*. Fourth Estate
15. Howard, Eves (1983) *Great Moments in Mathematics (before 1650)*. The Math, Assoc. of America
16. Howard, Eves (1983) *Great moments in Mathematics (after 1650)*. Mathematical Assn of America
17. James, Ioan (2002) *Remarkable Mathematicians*. The Math, Assoc. of America
18. Kline, F. (1990) *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times (3 vol)*. Oxford Un. Press
19. Odifreddi, P. (2004) *The 30 Greatest problems of the last 100 Years*. Princeton Un. Press
20. Ore, Oystein (1953) *Cardano the gambling scholar*. Princeton Un. Press
21. Pérez Bustamante, C. (1963) *Compendio de Historia*. Universal Atlas
22. Reid, Constance (1996) *Hilbert*. Copernicus
23. Rooney, Anne (2009) *The Story of Mathematics*. Arcturus
24. Schmalz, Rosemary (1993) *Out of the mouths of mathematicians*. The Math, Assoc. of America
25. Smith, David E. (1935) *History of Mathematics 2 vol*. Dover
26. Stigler, S.M. (2003) *The history of Statistics*. The Belknap Press
27. Stillwell, John (2020) *Mathematics and Its History*. Springer
28. Struik, Dirk J. (1987) *A Concise History of Mathematics*. Dover
29. Tent, M.B.W. (2009) *Gottfried Wilhelm. The Polymath who brought us Calculus*. A.K. Peters Book
30. Tent, M.B.W. (2009) *Leonard Euler and the Bernoullis*. A.K. Peters Book
31. Van der Waerden, B. L. (1983) *Geometry and Algebra in Ancient Civilizations*. Springer-Verlag
32. Vera, Francisco (1935-2000) *Los historiadores de la Matemática española*. Victoriano Suárez
33. Westfall, R.S. (1983) *Never at Rest. A Biography of Isaac Newton*. Cambridge University Press
34. Wussing, H.& Arnold, W. (1989) *Biografías de grandes matemáticos*. Univ. de Zaragoza

COMENTARIOS FINALES SOBRE LAS REFERENCIAS

En las referencias bibliográficas que preceden y que suman 15954 páginas, hay algunos libros que se ocupan de una historia extensa en el tiempo (13,15,16, 26, 18, 28 y el excelente y ‘breve’ 29) mientras que otros se centran en la biografía de un solo matemático (2, 3, 4, 14, 20, 23, 30 y 34 -destacable pues le costó escribirlo a su autor más de 20 años-y el 35). De estos libros causa admiración el 23, escrito por Constance Reid que no era matemática pero era hermana de Julia Robinson que sí lo era. Ella ayudó a resolver el problema 10º de Hilbert y reconoció que su vocación matemática surgió leyendo el maravilloso libro 5 de E. T. Bell.

Otro grupo de libros que reúnen una serie de biografías de notables matemáticos lo forman los libros 5, 7, 8, 12, 17 y 35. Los libros 5 y 17 tienen, guardando las distancias, cierto parecido

que es tanto como calificar de excelente al libro de Ion James, pues en las biografías descritas por él aparecen, como en el libro 5, muchos detalles personales y referencias del marco histórico en el que transcurren las vidas de los matemáticos (la historia en general no puede ser olvidada por los historiadores de las matemáticas o de las matemáticas. De ahí que aquí se incluya, entre los muchos posibles, el libro 22).

Hay un grupo de libros que se limitan a un periodo histórico concreto lo forman 12, 19, 21, 22 y 32. Sorprende sobremanera la cultura matemática del matemático italiano Odifreddi que puede contar con igual competencia el método de Simplex de Dantzig, la clasificación de los grupos finitos de Gorenstein o la teoría de la complejidad que se relaciona con el tercer problema del milenio. Los dos libros 21 se centran en la matemática griega, en las páginas pares aparece el texto en griego y en las impares su traducción en inglés. No es una tarea insuperable el intento de hacer la lectura de textos matemáticos antiguos directamente en griego y compensar la omisión que muchos matemáticos españoles han sufrido respecto de la lengua antigua griega (escribamos en lo sucesivo y en español Tales en vez de Thales, solo adecuada como transcripción fonética al inglés).

Van der Waerden es un matemático eminente que fue discípulo de E. Noether y maestro temporal en Leipzig en 1941 de nuestro Pedro Abellanas Cebollero. Su obra ajena a la más conocida sobre álgebra no solo se refiere a la historia de las matemáticas sino también a la Estadística. Su libro de Estadística fue elogiado por E. L. Lehmann, discípulo de J. Neyman, en su libro "*Reminiscences of a Statistician*" cuando ambos coincidieron en 1956 en Zürich. Análoga hazaña en estadística la hizo el geómetra Guido Castelnuovo en 1919 con su "*Calcolo della Probabilità*" que mereció los elogios de David Salsburg en su famoso libro "*The Lady Tasting Tea*". En los libros (1, 8 y 25) los mismos matemáticos expresan sus propias opiniones. Para conocer textos originales son de utilidad el 10 (donde se aprecia que la regla de Laplace de probabilidades debería llamarse regla de De Moivre) y el 11. El 33 es obra de F. Vera nació el mismo año que su amigo Julio Rey Pastor y al cual le sobrevivió en 5 años. Vera escribió libros de historia de las matemáticas (ed. Losada) y un excelente diccionario de matemáticas "Lexicón Kapelusz" de 734 páginas.

Finalmente más información útil se encuentra en los libros cuyas portadas aparecen en la presente nota, en particular los 4 tomos de "*Biographical Dictionary of Mathematics*" para cuya lectura recomendamos se utilice un atril 'ad hoc'.

Actividades SAEM Thales (Enero-Marzo 2023)

Esther Roquette Rodríguez

Profesora de Matemáticas del Colegio San Felipe Neri (Cádiz, España),

Esther.roquette@gmail.com

Resumen: La única forma de aprender matemáticas es haciendo matemáticas (*Paul Halmos*). Teniendo en cuenta algunos de los fines de la Sociedad como “Promover acciones para la divulgación y popularización de las matemáticas en la sociedad” o “Realizar acciones dirigidas al alumnado para fomentar el gusto por las matemáticas, así como para promover vocaciones científicas” la Sociedad Andaluza de Educación Matemáticas Thales ha realizado durante el primer trimestre del año 2023 una serie de actividades atendiendo a los fines descritos en sus Estatutos.

Palabras clave: actividades, olimpiadas, matemáticas, homenaje, pi, mujer, niña.

Abstract: The only way to learn mathematics is by doing mathematics (*Paul Halmos*). Taking into account some of the purposes of the Society such as “Promote actions for the dissemination and popularization of mathematics in the society” or “Carry out actions aimed at students to foster a taste for mathematics, as well as to promote scientific vocations” the Society Andalusia de Education Mathematic Thales has carried out during the first quarter of the year 2023 a series of activities in accordance with the purposes described in its Statutes.

Key words: activities, olympics, mathematics, tribute, pi, woman, girl.

1. INTRODUCCIÓN

En esta sección vamos a presentar brevemente algunas de las actividades realizadas en nuestra Sociedad en el primer trimestre de este año.

2. ENERO 2023

En el mes de enero destacamos tres actividades importantes: un homenaje y dos momentos de divulgación matemática.

La Delegación de Córdoba tuvo un momento de encuentro en torno a la persona de Miguel de la Fuente Martos para realizar un homenaje a su vida y a su persona. Se realizó en primer lugar un acto académico en el Rectorado de la Universidad de Córdoba y, posteriormente se llevó a cabo una visita matemática a la Mezquita Catedral de Córdoba.

Figura 1

Invitación al acto

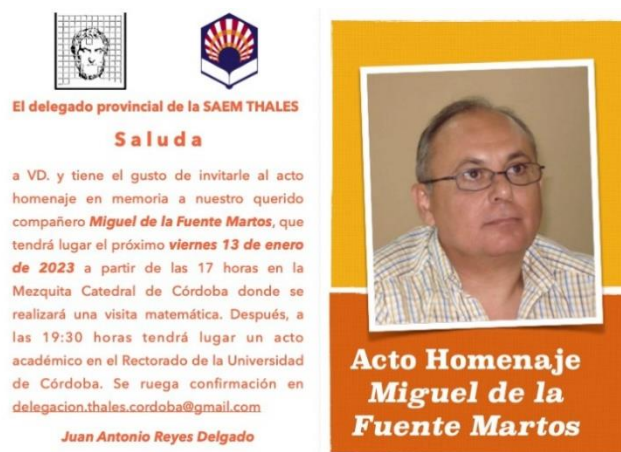


Figura 2

Juan Antonio Reyes, delegado de Córdoba, y la familia de Miguel de la Fuente



Por otro lado, la Delegación de Cádiz llevó a cabo la 2ª sesión del Ciclo de Conferencias “Matemáticas con Solera” contando con D. Rafael Pérez Gómez y la conferencia “Tarde de vino y mates” en un enclave magnífico como son las Bodegas san Ginés en Jerez de la Frontera.

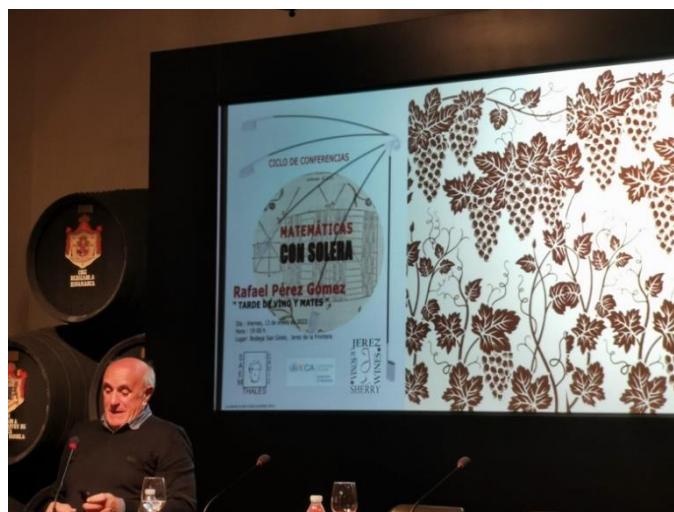
Figura 3

Cartel II Ciclo de Conferencias



Figura 4

Rafael Pérez Gómez



La última actividad del mes de enero se llevó forjando durante todo el año 2022 y vio sus frutos en enero del 2023: la rotulación de la Avenida de las Matemáticas y la Rotonda Estadística en la ciudad de Sevilla, promovido por la Delegación de Sevilla, la Universidad de Sevilla, el Ayuntamiento de Sevilla y el Colegio Montaigne.

Figura 5

D. Antonio Muñoz Martínez, alcalde de Sevilla junto los alumnos del Colegio Montaigne.



Figura 6

Avenida Matemática, Sevilla.



3. FEBRERO 2023

El mes de febrero comienza con la celebración del Día Internacional de la Mujer y la Niña en la Ciencia (#11defebrero) y desde la Delegación de Cádiz, se celebró en Algeciras un concurso de disfraces de científicas.

Roquette Rodríguez, E.

Figura 7

Cartel de la actividad.



Figura 8

Foto del grupo.



Por otro lado, la Delegación de Málaga llevó a cabo la Fase Provincial de la Olimpiada Alevín. Los ganadores de esta fase podrán disfrutar de la Fase Regional y posteriormente de la Fase Nacional en Canarias.

4. MARZO 2023

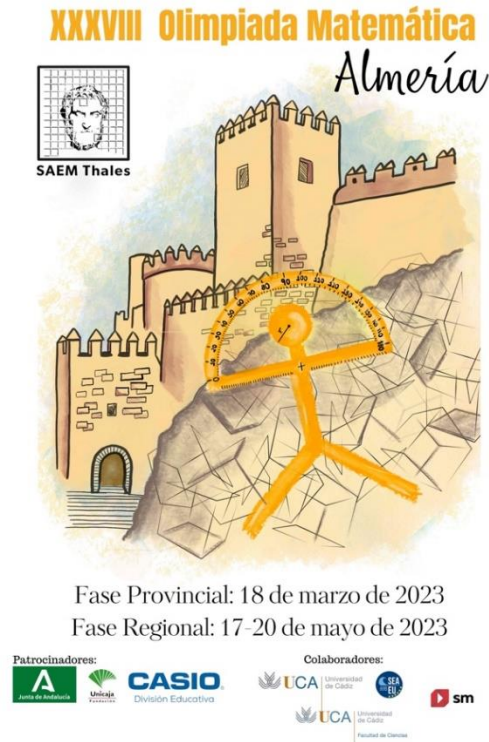
Quizás el mes de marzo sea el más prolífico de la SAEM Thales en cuanto a actividades con alumnado, contando con la actividad estrella para nuestro alumnado de Andalucía: la Olimpiada

Roquette Rodríguez, E.

Matemática Thales. En esta actividad contamos con más de 2500 participantes repartidos por las 8 provincias. La Fase Regional se celebrará en Almería del 18 al 20 de mayo.

Figura 9

Cartel de la actividad.



También se han celebrado las Olimpiada Alevín en Sevilla, Cádiz y Almería, junto con los ganadores de Málaga formaran el grupo de 4 para representar a Andalucía en la Fase Nacional (junio, Gran Canaria). En Granada se ha celebrado la Olimpiada de Primaria en la que los estudiantes de sexto compiten en grupos de tres para resolver problemas de equipos, de velocidad y de relevos.

Figura 10

OMT Alevín Cádiz



Pero no todo ha sido olimpiadas, hemos disfrutado de momentos de divulgación como la Feria de la Ciencia en Sanlúcar de Barrameda (Cádiz), Matemáticas en la Calle (Mezquita de Córdoba), Maths City Map (Granada) e incluso una cadena humana para celebrar el Día Internacional de las Matemáticas (14 de marzo, Sevilla).

Figura 11

Feria de la Ciencia (Sanlúcar, Cádiz)



Figura 12

Matemáticas en la Calle (Mezquita, Córdoba)



Figura 13

Maths City Map (Granada)



Figura 14

Cadena humana (DIM, Sevilla)



En la Delegación de Granada, continuamos con las sesiones que hemos denominado "El rincón del jueves". Son unos encuentros mensuales, aproximadamente los últimos jueves de cada mes por la tarde en la Facultad de Ciencias de la Educación. El funcionamiento es algo similar a un club de lectura, pero sustituyendo el libro por un contenido matemático: retos, lecturas, problemas, enriquecimiento, materiales, programación, visitas matemáticas, etc. Dicho contenido se propone en cada sesión por los asistentes y se aborda en la sesión anterior mediante un taller de puesta en común. Durante este trimestre hemos abordado las temáticas dedicadas a los juegos de mesa, las olimpiadas matemáticas, matemáticas en la calle y Map City

Map. Continuaremos en los meses siguientes con esta actividad como punto de encuentro de diferentes iniciativas del profesorado.

5. CALENDARIO DE ACTIVIDADES

Para el último trimestre del curso 2022-2023 la actividad continua. Destacamos tres eventos relevantes para nuestra sociedad: Los cursos de formación THALES-ONLINE, la fase regional de las Olimpiadas THALES y el próximo Congreso

En mayo podemos disfrutar de los Cursos Online de la Thales; cursos de 40h homologados por la Junta de Andalucía donde podremos aprender a diseñar Situaciones de Aprendizaje, aprender nuevas apps o retomar el GeoGebra.

Figura 15

Cursos Online (mayo, online)



Para mayor información sobre estos cursos, os remitimos a la web

<https://mileto.cica.es/ed17/cursos/>

Recordamos aquí algunos datos de interés:

El periodo de matriculación comprenderá desde el día 28 de Marzo de 2023 hasta el 28 de Abril de 2023, ambos incluidos.

Cursos de 40 horas lectivas:

- ED23-01-RECREAMAT: Matemáticas Recreativas en el Aula
- ED23-02-DSAM: Diseño de Situaciones de Aprendizaje de Matemáticas
- ED23-03-ARTEMAT: Matemáticas y Arte
- ED23-04-TALENMAT: Diseño de tareas de enriquecimiento para estimular el talento matemático

Roquette Rodríguez, E.

- ED23-05-GEOINICIO: Iniciación a GeoGebra como Recurso para la Enseñanza de las Matemáticas
- ED23-06-GEO3D: GeoGebra y la Tercera Dimensión
- ED23-07-ENSELINE: Aplicaciones para la enseñanza obligatoria: Un modelo didáctico online
- ED23-08-SECTIC: Creación de secuencias de enseñanza de contenidos matemáticos, bien estructuradas y con un fuerte carácter lúdico, con ayuda de los programas Scratch y GeoGebra

El proyecto en su conjunto se basa en la realización de actividades de formación a distancia usando Internet como herramienta.

Como comentamos anteriormente, se celebrará la Fase Regional de la XXXVIII OMT en Almería (Figura 9).

<https://thales.cica.es/olimpiada2/>

En julio tendrá lugar el XVIII Congreso de Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas en Granada y la Asamblea Ordinaria de socios y socias.

<https://thales.cica.es/xviiiiceam/>

Figura 16

XVIII CEAM (julio, Granada)



6. CONVOCATORIAS ABIERTAS PARA SOCIOS/AS

Como actividad permanentemente abierta se encuentra la Convocatoria de Publicaciones. En ella cualquier socio o socia de la Thales o de cualquier otra sociedad de la Federación Española

de Sociedad de Profesores de Matemáticas (FESPM) puede presentar material de contenido matemático para ser publicado en formato online o en formato papel.

7. ¿POR QUÉ QUIERO SER SOCIO/A DE SAEM THALES?

Gracias a la colaboración de los socios/as es posible realizar múltiples actividades **sin ningún tipo de coste** para nuestros estudiantes y/o el público en general:

- Olimpiadas Matemáticas
- Matemáticas en la calle
- ESTALMAT
- Math City Map
- Exposiciones
- Revista Epsilon
- Charlas divulgativas
- ...y muchas más, como verás en nuestra sección de ACTIVIDADES THALES

Y económicamente, por una cuota anual de 28 Euros (estudiante) o 55 Euros (ordinaria), puedes beneficiarte:

- Descuentos en Congresos (cada año CEAM o JAEM) (50 Euros aprox. de descuento)
- Recepción de la revista SUMA (se recibe gratis, lo que supone al menos 25 euros de descuento)
- Descuentos en los cursos thales-online (25 euros de descuento en cada curso)
- Descuentos en las exposiciones, publicaciones y materiales de la SAEM THALES (depende del material, puede suponer más de 50 euros de descuento)
-

Es decir, que **los descuentos pueden llegar a triplicar el coste por la cuota**. Además de beneficios en convocatorias abiertas de publicaciones, participación en Seminarios de la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemática y estar al día de numerosas actividades sobre las matemáticas y su enseñanza en todos los niveles.

Consulta otras modalidades de cuotas y el formulario de inscripción en: <https://thales.cica.es/>

8. REDES SOCIALES

¿Conoces nuestras redes sociales?

Para estar totalmente informados de todo lo que ocurre en la SAEM THALES, os aconsejamos que os suscribáis en éstas redes sociales donde podréis encontrarlos:

- Canal de Telegram: https://t.me/+u6M_NJkU63tjM2E8
- Twitter
 - General @saemthales
 - Cursos @ThalesCursos
 - CEAM @xiiiiceam

Roquette Rodríguez, E.

- Provincias: @ThalesGranada @ThalesSevilla @ThalesCordoba @ThalesAlmeria @ThalesCadiz @ThalesHuelva @ThalesJaen @ThalesMalaga
- Estalmat Andalucía @estalmatand

- FACEBOOK
 - General @saemthales
 - Exposiciones @expothales
 - Estalmat @estalmatandalucia

- Instagram
 - General @saemthales
 - CEAM @thalesgranada

- YouTube
 - General @saemthales2453

- Página WEB: <http://thales.cica.es/>

Por supuesto, como siempre podéis contactar con nosotros a través de:

- Email thales.matematicas@uca.es
- Teléfono 956 012 833

XVIII CONGRESO DE ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS



Del **3 al 5 de julio de 2023** en **Granada**, se va a llevar a cabo la décimo octava edición del CONGRESO DE ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS (XVIII CEAM). La delegación provincial de la SAEM Thales en Granada recoge con entusiasmo el testigo de anteriores ediciones y tiene el placer de invitarle a participar en el congreso.

Desde los Comités Organizador y Científico queremos ofrecerle todo cuanto esté en nuestras manos para que el resultado sea un congreso interesante y atractivo en torno al lema “**ENSEÑAR MATEMÁTICAS CON SENTIDO. Un viaje apasionante**”.

En la web del congreso, <https://thales.cica.es/xviiiiceam/>, podrá encontrar toda la información. Si tiene alguna pregunta o duda sobre el XVIII CEAM, puede contactar con nosotros vía el correo electrónico: ceam2023@thales.cica.es

SI NO QUIERES PERDERTE NINGUNA NOVEDAD, SÍGUENOS EN NUESTRAS REDES



FECHAS IMPORTANTES

<i>1 de enero de 2023</i>	<i>Inicio del registro al Congreso</i>
<i>15 de enero de 2023</i>	<i>Inicio del envío de trabajos</i>
<i>30 de abril de 2023</i>	<i>Fecha límite para el envío de trabajos</i>
<i>1 de junio de 2023</i>	<i>Fecha límite para la comunicación de la aceptación de los trabajos</i> <i>Último día para la inscripción con cuota reducida</i>
<i>26 de junio de 2023</i>	<i>Último día para el registro</i>

BLOQUES TEMÁTICOS



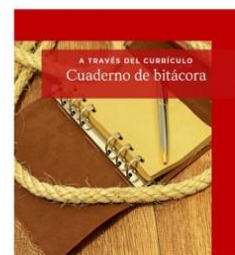
B1. Menudo viaje. Infantil y primaria.

Bloque dedicado a presentaciones de experiencias y buenas prácticas en las etapas de Infantil y Primaria



B2. Un viaje de ida y vuelta. Matemización.

Bloque dedicado a la presentación de experiencias que muestren procesos de matemización y aplicaciones de las matemáticas escolares a la realidad.



B3. Cuaderno de bitácora. A través del currículo.

En este bloque se presentarán reflexiones y experiencias que nos permitan conducirnos a través del currículo.



B4. Llena tu maleta de experiencias. Metodología y recursos.

Este bloque tratará sobre las distintas metodologías que se pueden utilizar en el aula para mejorar la práctica docente, así como el uso de distintos recursos materiales y tecnológicos.



B5. Rutas alternativas. Otras.

Este es un bloque que muestra ejemplos de actividades o trabajos que muestran la parte creativa de las matemáticas y su relación con otras ramas del conocimiento

PREMIOS CEAM TFG Y TFM Ed. 1

BASES DE LA CONVOCATORIA

1. CONTEXTO

Con el lema “**Enseñar matemáticas con sentido. Un viaje apasionante**”, la Sociedad Andaluza de Educación Matemática THALES va a celebrar el XVIII Congreso de Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas en Granada. El Congreso se celebrará los días **3, 4 y 5 de julio de 2023** y tendrá su sede en la ETS de Ingeniería de Edificación.

Los CEAM son congresos bianuales que llevan celebrándose desde 1983 y que vienen constituyendo un punto de encuentro clave en el proceso de actualización de la práctica docente, de la actualización científica y de discusión entre el profesorado de matemáticas de todos los niveles educativos.

2. OBJETO

Para dar a conocer los CEAM y la Sociedad Andaluza de Educación Matemática THALES y a fin de conectar a los actuales maestros/as y profesores/as de matemáticas con los potenciales, se convocan los **PREMIOS CEAM TFG (TRABAJO FIN DE GRADO) Y TFM (TRABAJO FIN DE MÁSTER) Ed. I.**

3. DIRIGIDO A

Recién graduados o estudiantes del Grado en Educación Primaria, Grado en Educación Infantil, Grado en Matemáticas y Máster en Profesorado de Enseñanza Secundaria Obligatoria y Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanzas de Idiomas **que hayan defendido el TFG o el TFM durante el curso 2021/2022 y alumnos/as que, aun no habiéndolo defendido, vayan a presentarlo en el curso 2022/2023.**

4. TEMÁTICA

Los trabajos deben estar orientados a la enseñanza y/o el aprendizaje de las matemáticas.

5. PRESENTACIÓN DE TRABAJOS

Los participantes deben crear un video de 3 minutos 14 segundos en el que expongan su TFG o su TFM utilizando las herramientas que consideren y subirlo a una plataforma de video digital como Youtube o Vimeo. Después, deben mandar un correo a ceam2023@thales.cica.es con el siguiente formato:

Asunto: PREMIOS CEAM TFG Y TFM

Cuerpo del mensaje:

Nombre y Apellidos.

Grado o Máster en el que se haya realizado el TFG o TFM. Universidad de defensa.

Datos del TFG y TFM (título, tutor/a, enlace a repositorio si existe, etc.)

Enlace del video de la plataforma de video digital.

Número de teléfono.

6. CRITERIOS DE EVALUACIÓN

Se valorará en mayor medida la aplicabilidad directa de la propuesta en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Además, se tendrá en cuenta la originalidad en la elaboración del vídeo, así como su capacidad comunicativa.

7. PLAZO DE PRESENTACIÓN

La fecha límite de presentación de trabajos es el 5 junio de 2023.

8. RESOLUCIÓN Y PREMIOS

La resolución se hará pública el día 12 de junio de 2023 en la WEB del CEAM.

De entre todos los videos de TFG presentados, el jurado seleccionará dos. Dichos trabajos recibirán la inscripción gratuita al CEAM y un reconocimiento económico de 100 €, que será entregado presencialmente en la ceremonia de clausura del CEAM que tendrá lugar el 5 de julio.

De entre todos los videos de TFM presentados, se seleccionará uno. Dicho trabajo recibirá la inscripción gratuita al CEAM y un reconocimiento económico de 100 €, que será entregado presencialmente en la ceremonia de clausura del CEAM que tendrá lugar el 5 de julio.

9. JURADO

El jurado se compone de los miembros del comité local del CEAM.

PONENTES Y CONFERENCIANTES

PABLO BELTRÁN PELLICER

Conferencia:

Situaciones de aprendizaje en matemáticas y cultura de aula



Es profesor Titular en el área de Didáctica de la Matemática en la Universidad de Zaragoza, donde imparte clases en los grados de Magisterio de Infantil y de Primaria y en el Máster Universitario en Profesorado de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato. Además, ha sido profesor funcionario en Educación Secundaria y Bachillerato en Aragón, compaginando durante varios años la práctica de aula en niveles no universitarios con la investigación en didáctica.

Es socio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática, vicepresidente de la Sociedad Aragonesa “Pedro Sánchez Ciruelo” de

Profesores de Matemáticas y miembro de la Comisión de Educación de la Real Sociedad Matemática Española. Colabora en diversas actividades, como en las olimpiadas matemáticas de secundaria y de bachillerato y el Taller de Talento Matemático de la Universidad de Zaragoza. Divulga sobre educación matemática desde su cuenta de Twitter @pbeltranp y desde su web www.tierradenumeros.com, donde mantiene un blog y recoge sus publicaciones.

FRANCISCO JAVIER BENJUMEA MUÑOZ

Ponencia:

Cómo utilizar proyectos para enseñar matemáticas en Secundaria



Es licenciado en Matemáticas por la Universidad de Granada y doctor en Investigación Didáctica (Línea de investigación en Educación Matemática) por la Universidad de Almería. En la actualidad es profesor de matemáticas en el IES El Parador. Además de haber impartido numerosas charlas, talleres y ponencias en los CEP de Córdoba, Almería y El Ejido y la universidad de Almería, es autor de varias comunicaciones en diferentes Congresos de Investigación en Educación Matemática. Está especialmente interesado en la enseñanza de las Matemáticas en Secundaria mediante el Aprendizaje Basado en Proyectos.

JOSÉ MIGUEL DE LA ROSA

Ponencia:

Seguimiento y evaluación sistematizada de la resolución de problemas semánticos de una operación



Es diplomado en Magisterio por la especialidad Físico-Naturales por la Escuela de Formación del Profesorado de Granada y lleva ejerciendo como maestro en activo desde 1990 en centros educativos de Granada, Sevilla y Córdoba. Durante este tiempo ha sido coordinador de varios proyectos, centrados principalmente en TIC y proyectos digitales y ha ejercido cargos de gestión, entre ellos la dirección en el CEIP Santa Teresa de Estepa. José Miguel se ha especializado en ABN. De hecho, ha sido el vicepresidente en los Congresos Nacionales sobre cálculos ABN. Reconocido ponente en cursos sobre ABN, además de contar con

numerosos artículos y libros sobre la temática y sobre la resolución de problemas en Educación Primaria.

PABLO FLORES MARTÍNEZ

Conferencia:

Hacer matemáticas para aprender con sentido



Doctor en Matemáticas, Profesor Titular de Didáctica de la Matemática, de la Universidad de Granada. Licenciado en Matemáticas y en Ciencias de la Educación. Profesor de bachillerato desde 1973 a 1990, y posteriormente en Facultad de Ciencias de la Educación hasta la jubilación en 2021, impartiendo asignaturas relacionadas con Didáctica de las Matemáticas. Director de diez tesis doctorales en Didáctica de la Matemática. Autor de más de 70 publicaciones de investigación y docencia. Conferenciante invitado en diversos eventos académicos, y participante con más de 80 comunicaciones.

Revisor de artículos de revistas de investigación y de congresos nacionales e internacionales, así como de proyectos de investigación en el área. Participante en diversos proyectos de investigación y de innovación docente. Miembro de sociedades de profesores como la SAEM THALES y la FESPM desde 1985, y de investigación, socio fundador de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática, sociedades en las que ha ocupado cargos de gestión. Línea de investigación es el conocimiento y desarrollo profesional del profesor de matemáticas, aprovechando la experiencia en la docencia para caracterizar al profesor de matemáticas como profesional. Otros campos de trabajo son los recursos didácticos para la enseñanza de las matemáticas, especialmente los juegos y recursos manipulativos y el humor

MARGARITA FUENTES CABEZAS

Ponencia:

Necesito un taxi: Salimos de viaje al país de las matemáticas



Es diplomada en Magisterio (especialidad preescolar) y licenciada en Psicopedagogía. Desde 1986 ha estado destinada en diferentes centros de la provincia de Granada como profesora de Educación Infantil y Educación Primaria. Durante los años de labor docente, siempre se ha preocupado por mejorar su práctica docente con una fundamentación teórica lo más amplia posible dentro de las posibilidades de formación ofertadas por los CEP de referencia y otras organizaciones, participando en más de 1000 horas de formación.

Ha sido coordinadora del Grupo de Trabajo “Trabajando en Educación Infantil” en el CEP de Granada durante los últimos cursos académicos y ha participado como ponente en actividades formativas del ámbito matemático para los CEP de Baza, Motril, El Ejido y Granada. También ha sido ponente en diferentes ediciones de las JAEM.

RAFAEL RAMÍREZ UCLÉS

Ponencia:

Cómo convertir el talento en estupidez y viceversa



Profesor titular de universidad en el Departamento de Didáctica de las Matemáticas de la Universidad de Granada. Ha desarrollado su formación matemática especializada en el departamento de Geometría y Topología de la Universidad de Granada, donde obtuvo la suficiencia investigadora y el Diploma de Estudios Avanzados. Durante quince años, compaginó su investigación con la experiencia como profesor de Secundaria y Bachillerato. Su labor docente le encaminó a investigar en educación matemática.

En este campo, desarrolló su tesis doctoral centrada en el estudio de prácticas docentes adecuadas para que los estudiantes de alta capacidad matemática desarrollen sus habilidades. Desde el curso 2006, ha sido profesor y miembro del consejo asesor del proyecto ESTALMAT en el que se imparten clases a alumnos con talento matemático. Coordina secciones sobre tareas para la atención de estos estudiantes en varias revistas de profesorado y participa como docente en los Campus Científicos y el proyecto PIISA de la Universidad de Granada, donde se atiende a alumnos de alto rendimiento. Ha participado en varios proyectos de investigación con la Universidad de Valencia para diseñar tareas para los alumnos con altas capacidades matemáticas.

JUAN MIGUEL RIBERA PUCHADES

Ponencia:

Modelizando matemáticamente el mundo que nos rodea a través del pensamiento computacional



Matemáticas.

Licenciado en Matemáticas (UV), Máster en Investigación Matemática (UV-UPV), Máster en Formación al profesorado (VIU) y doctor en Matemáticas (UPV). Actualmente profesor de Didáctica de la Matemática en el Grado de Educación Primaria en la Universitat de les Illes Balears. Anteriormente, director académico de formación al profesorado e innovación docente de la Universidad de la Rioja. Investigador en atención a las altas capacidades matemáticas a través de la resolución de problemas, el pensamiento computacional y el uso de tecnologías educativas. Profesor de los programas Estalmat Comunidad Valenciana e Illes Balears y preparador de Olimpiadas

ANA SERRADÓ BAYÉS

Ponencia:

¿Estocástico?



LECLIC “Living in the Era of Climate Change” del programa ERASMUS+ N°2020-1-ESO1-KA229 082206.

Es miembro de la Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales, vicepresidenta del Comisión de Educación de la Real Sociedad Matemática Española, miembro de la Comisión de Educación de la Sociedad Matemática Europea, vicepresidenta de la CIEAEM (Commission for the Study and Improvement of Mathematics Teaching) y miembro del International Association for Statistical Education. Interesada en la innovación e investigación en Educación Estadística, Educación en género, Educación STEAM y desarrollo profesional del profesorado.

Instrucciones para la publicación

Épsilon es la revista de la Sociedad Andaluza de Educación Matemática THALES. Su finalidad es compartir ideas, experiencias y recursos sobre el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas en todos los niveles educativos.

Las principales líneas de publicación son:

- Experiencias de aula.
- Aportes desde la investigación en Educación Matemática.
- Difusión de actividades desarrolladas en la SAEM Thales.

1. EXPERIENCIAS DE AULA

En esta sección se compartirán experiencias fruto del trabajo en el aula y la formación realizada por docentes de todos los niveles educativos: infantil, primaria, secundaria y bachillerato, así como formación universitaria. Tiene cabida cualquier iniciativa adecuada a las nuevas orientaciones educativas y que podamos compartir con los/las compañeros/as. Resultan de especial interés los siguientes tipos de trabajo:

- Prácticas innovadoras en el aula de matemáticas.
- Diseños de tareas de “matemáticas y”: matemáticas y STEM/STEAM, Matemáticas y coeducación, pensamiento computacional, comunicación y matemáticas, o cualquier propuesta interdisciplinar.
- Tareas basadas en materiales manipulativos, juegos y herramientas digitales con fines de aprendizaje matemático.
- Propuestas de problemas o concursos de “ingenio” desarrollados en los centros, que pueden incluir el análisis de los problemas o de respuestas del alumnado.
- Proyectos de divulgación de las matemáticas realizados por el alumnado: el papel de la mujer, problemas de otras disciplinas, investigaciones sobre avances en las matemáticas, historia de las matemáticas, matemáticas y naturaleza, matemáticas y sociedad, etc.
- Análisis de errores y dificultades del alumnado.
- Reflexiones del profesorado sobre su experiencia en el aula (en formato entrevista).
- Experiencias de formación del profesorado. El profesorado detallará la puesta en práctica de lo aprendido como docentes en sus formaciones, además de los resultados de esa puesta en práctica en el aula con el alumnado.
- Descripción de jornadas especiales realizadas en los centros educativos por distintas efemérides, como pueden ser "semanas de la ciencia" o "mes de las matemáticas". Se busca que sea un escaparate de ideas para otros centros, siempre que todas las actividades/situaciones de aprendizaje/tareas/etc que aparezcan propuestas se relacionen con el currículo de matemáticas y la nueva legislación vigente.
- Diseño de situaciones de aprendizaje relacionada con las matemáticas.

La extensión mínima de los manuscritos para esta sección es de 5 páginas (ver normas de publicación). En la sección de la web se podrán “colgar” las “pequeñas” ideas, reflexiones o

iniciativas de aula, mientras que para la revista en pdf seleccionaremos aquellas que puedan resultar más innovadoras o fundamentadas.

2. APORTES DESDE LA INVESTIGACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

En educación matemática es indispensable la retroalimentación entre la investigación y sus ámbitos de estudio. Este vínculo teórico-práctico se refuerza mediante la transferencia del conocimiento producido en la investigación actual en didáctica de la matemática a los profesionales de la educación, así como difundiendo la experiencia docente en el proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas. En ambos aspectos es necesaria la comunicación de los resultados obtenidos, destacando los aportes que el conocimiento generado proporciona. Así pues, la finalidad de este espacio es acercar a la educación matemática los hallazgos que la investigación produce. En esta sección tienen cabida los siguientes trabajos:

- Artículos de investigación en los que se destaque la aplicación al aula de matemáticas.
- Contribuciones al aula de matemáticas de trabajos académicos (tesis, trabajos fin de Grado, trabajos fin de Máster...).
- Revisiones de publicaciones en Educación Matemática (revistas, libros, Congresos de profesorado...) en las que se destaquen y sintetizen los aportes que ofrecen al profesorado de matemáticas de los distintos niveles educativos.

3. ACTIVIDADES EN LA SAEM THALES

En esta sección se publican noticias, eventos y recursos derivados de las actividades organizadas desde la Sociedad THALES.

Son de especial interés los recursos para el aula derivados de:

- Problemas de Olimpiadas THALES
- Pruebas de selección y sesiones de ESTALMAT
- Materiales y trabajos derivados de los cursos THALES-CICA

Esta información se irá mostrando en la web para facilitar la divulgación de contenidos, mientras que en la versión final en pdf de la revista se publicará una memoria de estas actividades. Para los recursos, la extensión mínima de los manuscritos para esta sección es de 5 páginas (Ver normas de publicación).

NORMAS DE PUBLICACIÓN

Los artículos enviados a la revista Épsilon pasan por un proceso de revisión por pares. Para enviar un artículo para su evaluación, siga las siguientes instrucciones:

1. Los artículos deben ser originales y de Educación Matemática. No deben haber sido publicados con anterioridad en una revista y los autores enviarán una carta firmada donde certifiquen que no está en proceso de evaluación en otras revistas
2. Los autores deben poseer los derechos de autor correspondientes del documento que se envía y, en su caso, haber obtenido los derechos para publicar aquel material de otros

autores que se incluya en el documento. Una vez aceptado el artículo para su publicación, se solicitará al autor de contacto que firme una carta de cesión de derechos de autor en nombre de todos los autores del trabajo

3. El formato de párrafo debe ser: letra Times New Roman tamaño 11 e interlineado de 1,15 y sin sangrado. Los subtítulos deben estar sin numeración. En la web está disponible la plantilla de artículo.
4. El artículo debe incluir en español e inglés: (a) el título del trabajo, (b) un resumen con un máximo de 100 palabras, y (c) de tres a seis términos clave .
5. Todo artículo debe estar escrito en castellano y debe incorporar referencias bibliográficas, en todo caso, deben seguir las normas del manual de publicación de la APA (última edición) de acuerdo con el siguiente modelo:

- Para artículo de revista:

Moreno, A., Martín, M. y Ramírez-Uclés, R. (2021). Errores de profesores de Matemáticas en formación inicial al resolver una tarea de modelización. *PNA*, 15(2), 109-132, <https://doi.org/10.30827/pna.v15i2.20746>

- Para libro:

Rico, L. y Lupiáñez, J. L. (2008). Competencias matemáticas desde un punto de vista curricular. Alianza.

- Para capítulo de libro:

Flores, P. (2006). Pirámides rellenas de... pirámides. Puzzles espaciales que favorecen la visualización. En P. Flores, F. Ruiz, F. y M. De la Fuente (coords.), *Geometría para el siglo XXI* (pp. 221-247). Federación Española de Profesores de Matemáticas y SAEM THALES.

- Para actas de congreso o similar:

Carrillo, J., Climent, N., Contreras, L. C., y Muñoz-Catalán, M. C. (2013). Determining Specialised Knowledge For Mathematics Teaching. En B. Ubuz, Ç. Haser, y M. A. Mariotti (Eds.), *CERME 8: Proceedings of the Eight Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 2985–2294). ERME.

- Para artículo de revista electrónica o información en Internet:

Molina, A. (2021). Aplicación del REA de matemáticas En línea recta en 3º de ESO. <https://cedec.intef.es/experiencia/aplicacion-del-rea-de-matematicas-en-linea-recta-en-3o-de-eso/>

6. El archivo con el artículo debe enviarse en formato doc y pdf.
7. Los esquemas, dibujos, gráficas e imágenes deben enviarse por separado (en una carpeta aparte del documento de texto) en formato TIFF o JPG con una resolución mínima de 300 puntos por pulgada. Cada archivo debe estar claramente identificado y se debe indicar en el texto el lugar donde se ubica. Las fotos en las que aparezcan menores deberán estas pixeladas o tener autorización escrita del tutor (se adjuntara copia con el archivo).
8. Se debe enviar una segunda versión del artículo en la que no aparezcan los nombres de los autores, ni información relativa a ellos o que pueda servir para identificarlos (e.g., institución a la que pertenecen, citas y referencias bibliográficas propias, agradecimientos, datos del proyecto en el que se enmarca el trabajo). En esta versión, reemplace las citas y referencias bibliográficas por “Autor, 2008” o “Autor et al., 2008”. En las referencias

bibliográficas propias se debe eliminar el título y el nombre de la revista o el título del libro donde se publica.

9. Los datos de los autores (nombre, institución a la que pertenecen, dirección de correo electrónico, dirección postal y número de teléfono y fax) deben incluirse en un archivo aparte. Utilice únicamente un apellido o los dos, pero separados por un guion.
10. Cuando el artículo tenga más de un autor, éstos designarán a un autor de contacto quien se encargará de toda la comunicación con la revista *Épsilon*.
11. Los archivos se deben enviar al centro de documentación Thales thales.matematicas@uca.es indicando la sección.
12. Una vez aceptado el trabajo y previamente a la publicación en el número correspondiente, se podrán publicar en la web en la sección “Próximamente”.

