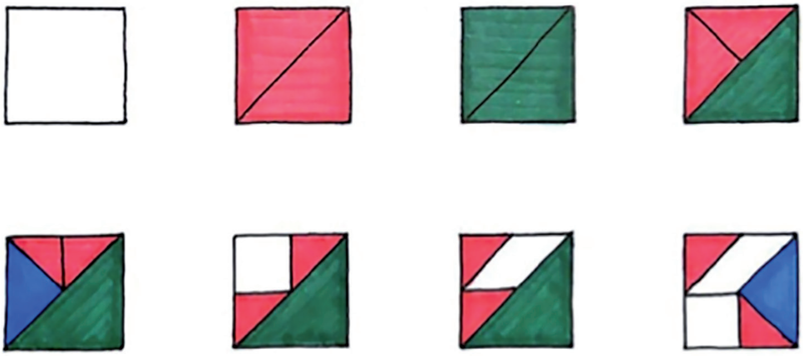
98

2018



epsilon

Revista de Educación Matemática

Editada por la S.A.E.M. "THALES"

epsilon 98

Revista de Educación Matemática

Sociedad Andaluza de Educación Matemática "Thales"

Página de la revista: http://thales.cica.es/epsilon
Revista: epsilon@thales.cica.es

Edita
Sociedad Andaluza de
Educación Matemática "Thales"
Centro Documentación "Thales"
Universidad de Cádiz
C.A.S.E.M.
Facultad de Ciencias
Departamento de Matemáticas
Campus del Río San Pedro
Torre Central, 4ª planta
11510 Puerto Real (Cádiz)
Teléfono: 956012833
Email: thales.matematicas@uca.es

Maquetación
mayteando@gmail.com

Depósito Legal
SE-421-1984

ISSN
2340-714X

Período
2018
Suscripción
Anual

SUMARIO / CONTENTS

Épsilon - *Revista de Educación Matemática* *2018, nº 98, 7-23*

La evaluación de la competencia matemática: ideas clave y recursos para el aula

Ángel Alsina
Universidad de Girona

Resumen: *En este artículo se presenta un decálogo que incluye diez ideas clave sobre la evaluación de la competencia matemática en Educación Primaria: 1) forma parte del proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas; 2) sólo tiene sentido si se trabaja en la línea de desarrollar la competencia matemática; 3) implica evaluar los procesos matemáticos, más que los contenidos; 4) requiere, a menudo, el uso de rúbricas o bases de orientación; e implica, además: 5) evaluar el grado de riqueza competencial de las actividades; 6) analizar la práctica docente del profesorado; 7) plantear claramente los aspectos que se quieren evaluar; 8) analizar si se han trabajado todas las competencias; 9) aportar evidencias; y, finalmente, 10) establecer niveles de adquisición.*
Se aportan también algunos recursos –principalmente en forma de rúbricas e indicadores– para valorar el grado de riqueza competencial de las actividades, para analizar la práctica docente del profesorado y para valorar la competencia matemática de los alumnos, además de establecer el nivel óptimo de adquisición.
Palabras clave: *Evaluación, competencia matemática, procesos matemáticos, rúbrica, indicadores de evaluación.*

Mathematical competence assessment: key ideas and resources for the classroom

Summary: *This article presents a decalogue that includes ten key ideas on the evaluation of mathematical competence in Primary Education: 1) it is part of the teaching-learning process of mathematics; 2) it only makes sense if you work in the line of developing mathematical competence; 3) involves evaluating the mathematical processes, rather than the contents; 4) it often requires the use of rubrics or guidance bases; and it also implies: 5) evaluating the degree of mathematical competence of the activities; 6) analyze the teaching practice of teachers; 7) clearly state the aspects that are*

to be evaluated; 8) analyze if all the competences have been worked on; 9) provide evidence; and, finally, 10) establish levels of acquisition.
Some resources are also provided –mainly in the form of rubrics and indicators– to assess the degree of mathematical competence of the activities, to analyze the teaching practice of the teaching staff and to assess the mathematical competence of the students, in addition to establishing the optimum level of acquisition.
Keywords: *Evaluation, mathematical competence, mathematical processes, rubric, evaluation indicators.*

1. INTRODUCCIÓN

El proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas en la etapa de Educación Primaria, que incluye también la evaluación, vive un periodo apasionante. Tan pronto como empezaron a aparecer Leyes de Educación, Decretos, Órdenes y otros documentos legislativos haciendo alusión al término "competencia matemática", los maestros se pusieron en marcha para intentar adaptar (y mejorar) sus prácticas. Inicialmente quizás algunos pensaron que era simplemente un cambio de nombre para seguir haciendo lo mismo, pero poco a poco la mayoría de maestros han visto que estamos ante un cambio de paradigma: dejamos atrás, por fin, la enseñanza centrada exclusivamente en los contenidos para que los alumnos tengan un buen rendimiento académico, para aventurarnos hacia una nueva forma de entender la enseñanza de las matemáticas en la que los alumnos aprenden a utilizar de forma comprensiva y eficaz los conocimientos aprendidos en la escuela en todos los contextos de su vida cotidiana en los que estos conocimientos son necesarios. De las matemáticas para la escuela a las matemáticas para la vida. En este nuevo escenario, adquieren un gran protagonismo los procesos de pensamiento matemático (Alsina, 2012).

En el año 2000 el Consejo Nacional de Profesores de Matemáticas de Estados Unidos puso de manifiesto de forma muy clara que, para promover una educación matemática de calidad, era necesario abordar dos tipos de conocimientos matemáticos (NCTM, 2000): los contenidos (numeración y cálculo, álgebra, geometría, medida, y datos y azar) y los procesos (resolución de problemas, razonamiento y prueba, comunicación, conexiones y representación). Desde entonces ha llovido mucho, que es otra forma de decir que han surgido diversas orientaciones para que paulatinamente los maestros incorporen en sus prácticas la enseñanza de los contenidos y de los procesos. Estas orientaciones se han focalizado principalmente en la planificación y la gestión de actividades matemáticas competenciales en el aula, y puede encontrarse una síntesis en Alsina (2016).

A grandes rasgos, el desarrollo de la competencia matemática en las aulas de Educación Primaria implica pensar y tomar decisiones acerca de dos cuestiones: ¿qué itinerario didáctico se propone a los alumnos para aprender matemáticas? y ¿qué conocimientos matemáticos deben aprender?

En Alsina (2010) se empezó a abordar la primera de las dos cuestiones aportando un diagrama piramidal donde se listaban los posibles contextos de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas en las primeras edades y, a la vez, se argumentaba su grado de frecuencia en las prácticas de aula para fomentar, en mayor o menor medida, la competencia matemática. En los primeros niveles de la pirámide había las situaciones de vida cotidiana, los materiales manipulativos y los juegos como recursos imprescindibles para el aprendizaje de las matemáticas desde lo concreto; en los niveles intermedios se encontraban los recursos literarios (cuentos, canciones, etc.) y los recursos tecnológicos (calculadora, *Apps*, etc.) como contextos también eficaces para aprender matemáticas; y finalmente, en la cúspide del diagrama piramidal se situaban los libros de texto y/o los cuadernos de actividades para abordar la enseñanza desde situaciones necesariamente más descontextualizadas y abstractas. No se descartaba ningún contexto, únicamente se hacían recomendaciones respecto a su frecuencia de uso en las prácticas matemáticas a la vez que se reflexionaba acerca del excesivo protagonismo del libro de texto como único recurso para abordar la enseñanza de las matemáticas en Educación Primaria. Actualmente, por suerte, este planteamiento está ya ampliamente superado, y son muy pocos los maestros que se siguen apoyando sólo en un libro para que sus alumnos aprendan matemáticas, y menos aún si lo que se busca es que los niños y niñas sean matemáticamente competentes.

En relación a la segunda cuestión, referente a los conocimientos matemáticos que los alumnos de Educación Primaria deberían aprender, el NCTM (2000) estableció la necesidad de trabajar los contenidos matemáticos y los procesos matemáticos, como se ha indicado anteriormente. Este interesante y necesario planteamiento lo han recogido la mayoría de currículos de matemáticas de Educación Primaria a nivel internacional, de manera que actualmente es habitual encontrar en dichos documentos referencias a la necesidad de trabajar el razonamiento, la comunicación y la representación de las ideas matemáticas o bien las conexiones tanto intradisciplinares como interdisciplinares, además de la resolución de problemas, que ya aparecía de forma explícita en documentos curriculares anteriores. El *quid* de la cuestión, a mi modo de ver, es que se ha hecho hincapié en la relevancia de trabajar de forma explícita y previamente planificada los contenidos matemáticos a través de los procesos matemáticos. Y esto no es una moda pasajera, conlleva mucho más y ha venido para quedarse. Es, como decía, un cambio de paradigma que implica dejar de enseñar contenidos matemáticos de forma aislada y descontextualizada para centrarse en dotar a los alumnos de procesos de pensamiento matemático. En este sentido, de Guzmán (2001, p. 9) ya puso de manifiesto que:

> "En la situación de transformación vertiginosa de la civilización en la cual nos encontramos, está claro que los procesos verdaderamente eficaces de pensamiento, que no se vuelven obsoletos con tanta rapidez, es lo más valioso que podemos enseñar a nuestros jóvenes. En nuestro mundo científico e intelectual tan rápidamente mutante vale mucho más proveerse de procesos de pensamiento útiles que de contenidos que rápidamente se convierten en ideas inertes ..."

Con más o menos fortuna, tanto el uso de diversos contextos de enseñanza-aprendizaje como el trabajo sistemático de los contenidos a través de los procesos, se han ido introduciendo progresivamente en las aulas de matemáticas, de manera que actualmente es habitual encontrar maestros de Educación Primaria que enseñan matemáticas combinando diversos recursos como materiales manipulativos, *Apps*, el entorno inmediato o el libro de texto, entre otros. De la misma forma, muchos maestros propician la interacción, la negociación y el diálogo, fomentado de esta manera la comunicación en el aula de matemáticas, o bien formulan situaciones problemáticas y plantean buenas preguntas que llevan a los alumnos a hacer diversos tipos de razonamientos, además de provocar que representen de diferentes formas las ideas matemáticas trabajadas y que hagan ciertos tipos de conexiones. Estamos, pues, como decía al principio, en un momento apasionante de cambio, de transformación, en el sentido de mejora.

Pero todo cambio conlleva crisis, por lo que el periodo apasionante que estamos viviendo viene también acompañado de dudas e incertidumbres que se focalizan principalmente en encontrar respuestas a la pregunta: ¿cómo evaluar las matemáticas desde un enfoque competencial?

Desde el momento en que los maestros han recibido instrucciones por parte de la Administración Educativa en relación a que la evaluación debe basarse en las competencias, se ha disparado la alarma, sobre todo porque a menudo estas instrucciones no han venido acompañadas de orientaciones suficientemente claras y concisas que faciliten esta tarea al profesorado.

En este artículo vamos, pues, a tratar de ofrecer algunas ayudas para que el profesorado de Educación Primaria preocupado por realizar una evaluación de la competencia matemática pueda acceder –a través de un lenguaje sencillo pero no por ello menos riguroso– a las principales ideas clave en relación a los aspectos que deben considerarse para llevar a cabo este tipo de evaluación, a la vez que disponga de algunos recursos para hacerlo de manera eficaz.

2. DIEZ IDEAS CLAVE SOBRE LA EVALUACIÓN DE LA COMPETENCIA MATEMÁTICA Y RECURSOS PARA EL AULA.

A continuación se van a desarrollar 10 ideas claves sobre la evaluación de la competencia matemática, dando lugar al “Decálogo sobre la Evaluación de la Competencia Matemática”

Idea clave 1: La evaluación de la competencia matemática forma parte del proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas.

La evaluación es una parte fundamental del proceso de enseñanza-aprendizaje. En este sentido, Goñi (2008, p. 184) indica que: “la evaluación es la palanca más poderosa de la que disponemos para inducir cambios en el currículo (…) si realmente se desea innovar en el currículo, hay que mejorar los procesos de evaluación”.

Desde este punto de vista, hay que pensar sobre todo en una evaluación formativa durante todo el proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas, a través de las actividades matemáticas competenciales que se van planteando a lo largo de un determinado periodo de tiempo.

En el contexto competencial, pues, la evaluación sumativa (a través de un examen final de contenidos matemáticos aislados) no tiene sentido dado que la evaluación debe ajustarse a la metodología de enseñanza-aprendizaje.



Figura 1. Alumnos de diversos niveles realizando actividades matemáticas competenciales en contextos de vida cotidiana y/o materiales manipulativos.

En este punto, y si se asume esta idea, alguien podría preguntarse entonces por qué razón se siguen realizando pruebas (como por ejemplo pruebas de competencias básicas, pruebas TIMSS, pruebas PISA, etc.). Al margen de la discusión teórica que puedan generar este tipo de pruebas, aquí se asume que se trata de pruebas diagnósticas, normalmente muy bien elaboradas por expertos, que a través de tareas de tipo competencial (es decir, contextualizadas) intentan medir el nivel de competencia matemática a través de evidencias (actuaciones) en relación a si se es capaz de hacer (o no) lo que una determinada competencia indica.

Idea clave 2: La evaluación de la competencia matemática* sólo tiene sentido si se trabaja en la línea de desarrollar la competencia *matemática.

De la idea anterior se desprende que sólo tiene sentido evaluar la competencia matemática cuando se trabaja desde un enfoque competencial. Ello implica conocer a fondo qué es la competencia matemática en general, y los procesos matemáticos en particular.

En relación a estos aspectos, en Alsina (2016) se analizan diversas definiciones de autores y organismos de prestigio (NCTM, 2000; Niss, 2002; OCDE, 2004) que contribuyen a poner de manifiesto que la competencia matemática es la habilidad para utilizar de forma comprensiva y eficaz los conocimientos matemáticos aprendidos en la escuela en todas las situaciones de la vida cotidiana en las que dichos conocimientos son necesarios. De forma más concreta, ser matemáticamente competente implica (Alsina, 2014a):

- Pensar matemáticamente: construir conocimientos matemáticos a partir de situaciones en las que tengan sentido, experimentar, intuir, relacionar conceptos y abstraer.
- Plantear y resolver problemas: leer y entender el enunciado, generar preguntas relacionadas con una situación problemática, planificar y desarrollar estrategias de resolución y validar soluciones.
- Razonar matemáticamente: realizar deducciones e inducciones, particularizar y generalizar; argumentar las decisiones tomadas, así como los procesos seguidos y de las técnicas usadas.
- Obtener, interpretar y generar información con contenido matemático.
- Usar técnicas matemáticas básicas (para contar, operar, medir, situarse en el espacio y organizar y analizar datos) e instrumentos (calculadoras y tecnologies de la información, de dibujo y de medida) para hacer matemáticas.
- Interpretar y representar expresiones, procesos y resultados matemáticos con palabras, dibujos, símbolos, números y materiales.
- Comunicar el trabajo y los descubrimientos a los demás, tanto oralmente como por escrito, usando de forma progresiva el lenguaje matemático.

Idea clave 3: La evaluación de la competencia matemática implica evaluar los procesos matemáticos, más que los contenidos.

Desde la perspectiva de la evaluación competencial, los contenidos matemáticos (por ejemplo: hacer multiplicaciones, calcular con fracciones, conocer los tipos de ángulos, etc.) se evalúan a través de los procesos (por ejemplo, saber resolver un problema, razonar cuál es la operación más adecuada, saber representar una fracción de diferentes formas, etc.). En este sentido, es importante conocer algunos de los aspectos clave vinculados a cada proceso matemático, con el propósito de poder observar bien qué es aquello que se hace y aquello que no se hace. Algunos de estos aspectos son los siguientes:

- Resolución de problemas: se trata de situaciones nuevas de la que no se conoce de antemano el método de resolución; sirven para crear conocimiento en relación a los distintos bloques de contenido matemático; y se aprende a resolver problemas haciendo, manipulando, simulando, discutiendo, compartiendo, imaginando, observando, visualizando, etc.
- Razonamiento y prueba: en las primeras edades el razonamiento es sobre todo intuitivo e informal, y la prueba implica principalmente comprobar; una gestión de las prácticas matemáticas que favorezca el razonamiento y la prueba requiere plantear buenas preguntas, más que dar explicaciones; y las preguntas deben servir para argumentar ("¿por qué piensas que es verdad?"); descubrir ("¿qué piensas que pasará ahora?"); justificar proposiciones ("¿por qué funciona esto?"); etc.
- Comunicación: implica integrar los procesos de interacción, diálogo y negociación alrededor de los conocimientos matemáticos y su gestión; el lenguaje oral y escrito son herramientas imprescindibles (y previas al lenguaje simbólico) para comunicar el pensamiento matemático.

- Conexiones: las conexiones entre los conocimientos matemáticos ponen de manifiesto que las matemáticas constituyen un campo integrado de conocimiento; las conexiones entre las matemáticas y otras áreas dan respuesta al enfoque interdisciplinar que deberían tener las actividades competenciales; y las conexiones entre las matemáticas y el entorno evidencian que el uso de contextos reales o realistas contribuyen a comprender cuál es el sentido de las matemáticas.
- Representación: la representación de las ideas matemáticas (con un dibujo, un esquema, etc.) es un proceso indispensable, ya que si no hay representación no hay comprensión; el desarrollo progresivo de la representación va de lo concreto a lo abstracto (abstracción progresiva); y representaciones y modelos diferentes aclaran diferentes aspectos de una idea matemática compleja.

Idea clave 4: La evaluación de la competencia matemática requiere, a menudo, el uso de rúbricas o bases de orientación

Martínez-Rojas (2008) indica que en el contexto educativo, las rúbricas son un conjunto de criterios o parámetros que sirven para juzgar, valorar, calificar y conceptualizar un determinado aspecto del proceso educativo. Asimismo, pueden anunciar criterios de logro y descriptivos en los procesos. Según Díaz-Barriga (2006) las rúbricas son guías o escalas de evaluación donde se establecen niveles progresivos de dominio o pericia relativos al desarrollo que muestra una persona respecto a un proceso o producción determinada. La rúbrica permite ser cambiada y ajustada durante la práctica para así encontrar el valor justo que se pretende que los alumnos alcancen. Cabe destacar que es una matriz con criterios específicos que permiten valorar el aprendizaje, los conocimientos o las competencias que se ha alcanzado en un determinado trabajo.

Goodrich (2000) expone algunas de las ventajas de la utilización de las rúbricas en los procesos educativos: 1) se trata de una herramienta poderosa para el maestro que le permite conocer los distintos niveles de adquisición, puesto que los criterios son explícitos y los mismos para todos los alumnos; 2) proporcionan criterios específicos para analizar y documentar el progreso del alumno; 3) son fáciles de utilizar y de explicar. Por otra parte, puede ser también un documento útil para el maestro, en el sentido que lo orienta sobre qué es lo que se espera de los alumnos o de él mismo.

Idea clave 5. La evaluación de la competencia matemática implica evaluar el grado de riqueza competencial de las actividades

Es necesario disponer de indicadores genéricos que permitan orientar al profesorado sobre el grado en que se cultivan las competencias matemáticas en una actividad concreta o en una pequeña secuencia de actividades. Desde esta perspectiva, hace ya algunos años el *Centre de Recursos per Ensenyar i Aprendre Matemàtiques* (CREAMAT) perteneciente a los *Centres Específics de Suport a la Innovació i la Recerca Educativa* (CESIRE) de la Generalitat de Catalunya (España) elaboró un documento de referencia para poder evaluar de forma sencilla, pero eficaz, el grado de riqueza competencial de una actividad. Este documento gira en torno a diez preguntas que pueden orientar el profesorado sobre el grado en que en una actividad se trabajan las competencias matemáticas del alumnado. En dicho documento, que se reproduce a continuación, se indica que el grado de riqueza competencial de una actividad depende de cómo se plantea la actividad, es decir, de sus características, pero también de cómo se gestiona en el aula. Por esto las diez preguntas se agrupan en dos bloques:

Tabla 1: Indicadores competenciales (CREAMAT, 2009)

Bloque 1: Planteamiento de la actividad
1. ¿Se trata de una actividad que tiene por objetivo responder a un reto? El reto puede referirse a un contexto cotidiano, puede enmarcarse en un juego, o bien puede tratar de una regularidad o hecho matemático. 2. ¿Permite aplicar conocimientos ya adquiridos y hacer nuevos aprendizajes? 3. ¿Ayuda a relacionar conocimientos diversos dentro de la matemática o con otras materias? 4. ¿Es una actividad que se puede desarrollar de diferentes formas y estimula la curiosidad y la creatividad de los niños y niñas? 5. ¿Implica el uso de instrumentos diversos como por ejemplo material que se pueda manipular, herramientas de dibujo, software, etc.?
Bloque 2: Gestión de la actividad
6. ¿Se fomenta la autonomía y la iniciativa de los niños y niñas? 7. ¿Se interviene a partir de preguntas adecuadas más que con explicaciones? 8. ¿Se pone en juego el trabajo y el esfuerzo individual pero también el trabajo en parejas o en grupos que implica conversar, argumentar, convencer, consensuar, etc.? 9. ¿Implica razonar sobre lo que se ha hecho y justificar los resultados? 10. ¿Se avanza en la representación de manera cada vez más precisa y se usa progresivamente lenguaje matemático más preciso?

Como se indica en Alsina (2013), se trata de un documento fuertemente inspirado en los procesos matemáticos del NCTM (2000), por lo que están estrechamente relacionados (Tabla 2).

Tabla 2. Relación entre los procesos matemáticos (NCTM, 2000) y los diez indicadores competenciales (CREAMAT, 2009).

Procesos	**Indicadores competenciales**
Resolución de problemas	• 1 ¿Se trata de una actividad que tiene por objetivo responder a un reto? El reto puede referirse a un contexto cotidiano, puede enmarcarse en un juego, o bien puede tratar de una regularidad o hecho matemático. • 4 ¿Es una actividad que se puede desarrollar de diferentes formas y estimula la curiosidad y la creatividad de los niños y niñas? • 5 ¿Implica el uso de instrumentos diversos como por ejemplo material que se pueda manipular, herramientas de dibujo, software, etc.? • 6 ¿Se fomenta la autonomía y la iniciativa de los niños y niñas?

Tabla 2. Relación entre los procesos matemáticos (NCTM, 2000) y los diez indicadores competenciales (CREAMAT, 2009).

Procesos	Indicadores competenciales
Razonamiento y prueba	• 9 ¿Implica razonar sobre lo que se ha hecho y justificar los resultados?
Comunicación	• 7 ¿Se interviene a partir de preguntas adecuadas más que con explicaciones? • 8 ¿Se pone en juego el trabajo y el esfuerzo individual pero también el trabajo en parejas o en grupos que implica conversar, argumentar, convencer, consensuar, etc.?
Conexiones	• 2 ¿Permite aplicar conocimientos ya adquiridos y hacer nuevos aprendizajes? • 3 ¿Ayuda a relacionar conocimientos diversos dentro de la matemática o con otras materias?
Representación	• 10 ¿Se avanza en la representación de manera cada vez más precisa y se usa progresivamente lenguaje matemático más preciso?

Idea clave 6. La evaluación de la competencia matemática requiere analizar la práctica docente del profesorado

La evaluación de prácticas docentes que incorporen los procesos matemáticos de forma sistemática requiere indicadores que permitan analizar la presencia, o no, de los procesos en dichas prácticas. En este sentido, a continuación se expone un instrumento de evaluación que incluye cinco categorías que se corresponden con los cinco procesos indicados por el NCTM (2000), elaborado a partir de un trabajo previo de Coronata (2014) y Alsina y Coronata (2014).

El diseño, construcción y validación del instrumento contempló seis fases: 1) análisis histórico-epistemológico de los procesos matemáticos y sus significados; 2) estudio de investigaciones sobre los procesos matemáticos en las prácticas docentes del profesorado de Educación Infantil; 3) análisis del tratamiento otorgado a los procesos matemáticos en el currículo; 4) construcción de la versión piloto del instrumento; 5) revisión mediante el juicio de expertos; y 6) construcción de la versión final del instrumento. Las fases 1, 2 y 3 consideran la revisión de literatura e investigaciones que permiten diseñar el instrumento, mientras que las fases 4, 5 y 6 se relacionan específicamente con la construcción y validación del instrumento.

Para cada una de las cinco categorías que componen el instrumento se aportan siete indicadores de evaluación, elaborados a partir de los aportes realizados por el NCTM (2000), Alsina (2011, 2014b) y el Departament d'Ensenyament de la Generalitat de Catalunya (2013). Y para valorar el grado de presencia de cada indicador en las prácticas de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas, se usa una escala graduada tipo *Likert* (1 nada, 5 mucho):

Tabla 3: Pauta de observación de la presencia de los procesos matemáticos en la práctica docente

1. Indicadores de RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS:	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
Plantea situaciones problemáticas usando diferentes tipos de apoyo (oral, concreto, pictórico).					
Contextualiza las situaciones problemáticas a la vida cotidiana de los alumnos.					
Propone situaciones problemáticas de diversos tipos.					
Realiza preguntas que generan la investigación y exploración para solucionar al problema.					
Permite a los niños la utilización de material concreto y/o pictórico con apoyo oral para la resolución de problemas.					
Mantiene a los niños comprometidos con el proceso de resolución de problemas.					
Promueve la discusión en torno a las estrategias de resolución de problemas y los resultados.					
2. Indicadores de RAZONAMIENTO Y PRUEBA:	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
Invita a hacer conjeturas.					
Permite que los propios alumnos descubran, analicen y propongan diversas vías de resolución.					
Pide a los alumnos que expliquen, justifiquen o argumenten las estrategias o técnicas que utilizaron durante la resolución.					
Plantea interrogantes para que los alumnos argumenten sus respuestas.					
Promueve que los alumnos comprueben conjeturas de la vida cotidiana.					
Promueve el apoyo del razonamiento matemático.					
Entrega retroalimentación con material concreto permitiendo el pensamiento divergente.					
3. Indicadores de CONEXIONES:	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
Considera las experiencias matemáticas cotidianas de los alumnos para avanzar hacia las matemáticas más formales.					
Realiza conexiones entre diversos contenidos matemáticos.					
Desarrolla actividades matemáticas vinculadas a contextos musicales.					
Trabaja las matemáticas vinculándolas con la literatura infantil.					

Tabla 3: Pauta de observación de la presencia de los procesos matemáticos en la práctica docente

Relaciona las matemáticas con la expresión artística.					
Genera conocimiento matemático a través de contextos vinculados a la psicomotricidad.					
Promueve que los alumnos apliquen el conocimiento matemático a las situaciones de la vida cotidiana.					
4. Indicadores de COMUNICACIÓN:	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
Promueve con mayor énfasis la comunicación en el aula que la entrega de información unidireccional.					
Favorece la interacción con otros para aprender y comprender las ideas matemáticas.					
Impulsa el intercambio de ideas matemáticas a través del lenguaje oral, gesticular, gráfico, concreto y /o simbólico.					
Pide al niño explicitar con lenguaje matemático adecuado sus estrategias y respuestas.					
Incentiva en los alumnos el respeto por la forma de pensar y de exponer sus puntos de vista en torno al contenido matemático.					
Fomenta la escucha atenta de los puntos de vista de los demás.					
Interviene mayoritariamente a través de preguntas, más que a través de explicaciones.					
5. Indicadores de REPRESENTACIÓN:	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
Pide a los niños que hablen, escuchen y reflexionen sobre las matemáticas para avanzar hacia la representación simbólica.					
Utiliza materiales concretos como recursos para representar ideas matemáticas.					
Utiliza modelos ejemplificadores (esquemas, entre otros) para mostrar maneras de resolver situaciones problemáticas.					
Trabaja en los niños las representaciones concretas (dibujos, etc.).					
Trabaja en los niños las representaciones pictóricas (signos, etc.).					
Trabaja en los niños las representaciones simbólicas (notación convencional).					
Muestra un trabajo bidireccional (de lo concreto a lo abstracto y de lo abstracto a lo concreto).					

A partir del análisis de la validez y la fiabilidad (Maurandi, Alsina y Coronata, en prensa), se puede concluir que este instrumento permite evaluar de forma fiable la presencia de los procesos matemáticos en la práctica docente.

Idea clave 7. La evaluación de la competencia matemática implica plantear claramente los aspectos que se quieren evaluar.

Ya en el ámbito concreto de los alumnos, evaluar la competencia matemática requiere aportar evidencias, es decir, actuaciones que muestren de forma clara y concisa que se es capaz de hacer lo que la competencia matemática en cuestión indica, además de demostrar que se sabe aplicar en un determinado contexto, como señala Goñi (2008). Partiendo tanto de la definición de competencia matemática como de las principales características de los procesos matemáticos, así como de las dimensiones de la competencia matemática planteadas por el Departament d'Ensenyament de la Generalitat de Catalunya (2013), los aspectos que a mi modo de ver son imprescindibles evaluar acerca de la competencia matemática de los alumnos son los diez siguientes:

1. Comprender y traducir una situación problemática a lenguaje matemático.
2. Aplicar estrategias de resolución de problemas y comprobar las soluciones.
3. Plantearse preguntas acerca de las ideas matemáticas.
4. Hacer conjeturas o suposiciones.
5. Argumentar sobre las ideas matemáticas.
6. Expresar ideas matemáticas.
7. Establecer relaciones entre diferentes ideas matemáticas.
8. Establecer relaciones con otras disciplinas y con el entorno.
9. Utilizar diferentes formas de representación.
10. Utilizar la tecnología.

Los tres primeros aspectos corresponden al proceso matemático de "resolución de problemas"; los aspectos 4 y 5 se vinculan con el proceso matemático de "razonamiento y prueba"; el aspecto 6 se refiere al proceso matemático de "comunicación"; los aspectos 7 y 8 se refieren al proceso matemático de "conexiones"; y, finalmente, los dos últimos aspectos (9 y 10) se vinculan con el proceso matemático de "representación", principalmente.

Idea clave 8. La evaluación de la competencia matemática implica analizar si se han trabajado todas las competencias.

Todos los maestros de Educación Primaria son capaces, al finalizar un curso académico, de valorar con mucho detalle el grado de conocimientos acerca de los contenidos matemáticos de sus alumnos. Dicho de otra forma, son capaces de hacer una radiografía muy exacta de los contenidos matemáticos trabajados durante el curso que domina cada alumno y los que no. Esto ocurre porque el profesorado de Educación Primaria, a diferencia por ejemplo del profesorado de Educación Secundaria, comparte mucho tiempo con los mismos alumnos, por lo que pueden edificar una visión muy profunda acerca de cada alumno. Este conocimiento profundo sobre cada alumno se acaba reflejando en un informe, normalmente mediante una valoración de tipo cuantitativo o bien con unos indicadores estandarizados que no permiten en ocasiones reflejar con exactitud lo que sabe el alumno y lo que no.

La evaluación competencial implica un cambio de *chip*, un cambio de mirada, que supone poder valorar con precisión cada uno de los diez aspectos de la competencia matemática expuestos. En lugar de poner el foco en si un alumno, a modo de ejemplo, sabe hacer divisiones, conoce los polígonos regulares o tiene la noción de media aritmética, se trata de identificar si el alumno sabe resolver problemas de reparto, si identifica distintos tipos de polígonos en un determinado contexto o bien si usa de forma comprensiva y razonada medidas de tendencia central (como por ejemplo la media aritmética) para interpretar los datos y obtener conclusiones de una determinada investigación estadística.

Desde este prisma, deberían fijarse previamente los aspectos que se quieren evaluar de cada actividad matemática competencial que se plantee a los alumnos, sin necesidad de que se evalúen todos los aspectos en cada actividad, pero garantizando que a lo largo del curso se trabajen (y evalúen) todos.

Idea clave 9. Le evaluación de la competencia matemática implica aportar evidencias.

Efectivamente, tal como señala Ascher (1990), la evaluación de la competencia matemática consiste en un tipo de evaluación que requiere aportar actuaciones que pongan de manifiesto, tal como se ha indicado, lo que cada alumno es capaz de hacer y saber aplicarlo a un determinado contexto, como una situación de vida cotidiana, un material manipulativo, un juego, una *App,* etc. Por esta razón, se ha expuesto anteriormente que la evaluación de la competencia matemática es una evaluación prioritariamente de tipo formativo a partir de la que se analiza el progreso del alumno a la largo de todo el proceso de enseñanza-aprendizaje.

Goñi (2008, p. 177) indica que “la evaluación de una competencia supone la emisión de un juicio valorativo sobre la pertinencia y la calidad de la evidencia aportada”. Esto significa, por un lado, que debe garantizarse que las evidencias estén relacionadas con la competencia que se quiere valorar; y por otro lado, que no todas las actuaciones de los alumnos son de la misma calidad, y por lo tanto se deberían determinar niveles de adquisición. En la literatura sobre evaluación, los niveles de adquisición tienden a denominarse “criterios de evaluación”, y se refieren a las normas de actuación que permiten la valoración de las competencias (Sanmartí, 2007).

Idea clave 10. La evaluación de la competencia matemática implica establecer niveles de adquisición.

Como se ha indicado, la evaluación de la competencia matemática invita a usar rúbricas o guías de orientación que sirvan tanto para valorar el nivel de conocimientos como para establecer cuál es el nivel óptimo de adquisición. Para facilitar esta tarea al profesorado, a continuación se aportan criterios de evaluación organizados en tres niveles (de menos a más adquisición) para cada uno de los diez aspectos vinculados a la competencia matemática.

Tabla 4: Rúbrica "Niveles de Adquisición de la Competencia Matemática de 6 a 12 años" (NACMAT 6-12)

Comprender y traducir una situación problemática a lenguaje matemático.	Usa materiales, dibujos, esquemas u operaciones para resolverla.	Usa conceptos, herramientas y estrategias matemáticas para resolverla y para explicar el proceso seguido.	Usa conceptos, herramientas y estrategias matemáticas para resolverla y para justificar los pasos seguidos en el proceso.
Aplicar estrategias de resolución de problemas y comprobar las soluciones.	Valora si la respuesta es razonable.	Comprueba si la respuesta es razonable y si cumple las condiciones dadas.	Plantea y explora si puede haber más soluciones.
Plantearse preguntas acerca de las ideas matemáticas.	Reconoce un concepto, una operación o bien interpreta un gráfico, tabla o figura.	Activa más de una etapa en la resolución, entiende un patrón o usa la información dada por un gráfico, tabla o figura.	Toma decisiones y busca datos, generaliza un patrón o usa varias representaciones.
Hacer conjeturas o suposiciones.	Hace conjeturas matemáticas a partir de la observación de casos concretos.	Hace conjeturas matemáticas en situaciones cotidianas y las comprueba usando ejemplos y contraejemplos.	Hace conjeturas matemáticas en situaciones cotidianas, las comprueba y, si hace falta, las mejora.
Argumentar sobre las ideas matemáticas.	Justifica las afirmaciones y los procesos matemáticos realizados en contextos cercanos dando ejemplos.	Argumenta las afirmaciones y los procesos matemáticos realizados en contextos cercanos dando razones lógicas.	Argumenta las afirmaciones y los procesos matemáticos realizados en contextos cercanos dando razones lógicas expresadas en lenguaje matemático.
Expresar ideas matemáticas.	Expresa oralmente de manera comprensible la propia percepción de una idea o de un proceso matemático previamente trabajado. Interactúa con los otros de manera oral.	Expresa oralmente la propia percepción de una idea o de un proceso matemático previamente trabajado y lo modifica, si hace falta, incorporando, también, las sugerencias de los otros. Hace aportaciones, en forma oral, a las expresiones de los otros.	Expresa por escrito de manera comprensible la propia percepción de una idea o de un proceso matemático previamente trabajado. Hace observaciones, aportaciones o preguntas a las expresiones de los otros de forma oral.

Establecer relaciones entre diferentes ideas matemáticas.	Identifica un concepto básico en situaciones donde tenga diferentes significados, expresándolo en lenguaje matemático.	Usa y describe relaciones entre conceptos y representaciones para resolver situaciones.	Usa y justifica relaciones entre conceptos y representaciones para resolver situaciones.
Establecer relaciones con otras disciplinas y con el entorno.	Identifica números, magnitudes y figuras implicados en situaciones cotidianas y escolares, y sabe encontrar ejemplos en situaciones cotidianas.	Identifica relaciones numéricas, entre magnitudes y entre figuras. Reconoce patrones simples en situaciones cotidianas y escolares.	Identifica conceptos, relaciones, patrones y representaciones matemáticas en situaciones cotidianas y escolares y sabe dar ejemplos.
Utilizar diferentes formas de representación.	Usa algunas de las representaciones de conceptos y relaciones para expresar matemáticamente una situación. .	Usa una de las diversas representaciones de un concepto o de una relación, que sea relevante en la expresión matemática de una determinada situación, y lo explica.	Usa el lenguaje matemático para expresar una situación y comprender las expresiones matemáticas realizadas por los iguales.
Utilizar la tecnología.	Usa algunas herramientas tecnológicas básicas e interpreta las representaciones matemáticas que ofrecen.	Usa herramientas tecnológicas propuestas para representar y comunicar situaciones de trabajo matemático.	Usa herramientas tecnológicas seleccionadas autónomamente para representar y comunicar situaciones de trabajo matemático.

Estos criterios deberían servir tanto para valorar el grado de competencia matemática de cada alumno como para conocer cuál es el nivel óptimo de adquisición.

CONSIDERACIONES FINALES

A lo largo de este artículo se han descrito algunas ideas clave acerca de la evaluación de la competencia matemática y se han aportado algunos recursos, principalmente en forma de rúbricas e indicadores, para facilitar esta tarea al profesorado de Educación Primaria. A raíz de las ideas aportadas parece obvio que la evaluación de la competencia matemática no es una labor sencilla, dado que implica dominar una serie de conocimientos tanto disciplinares (sobre la competencia matemática en general y sobre la naturaleza de los procesos matemáticos en particular) como didácticos (sobre formas de evaluación competencial) de los que muchos maestros no han recibido formación previa, ni durante su formación inicial en la universidad ni tampoco a través de cursos de formación continua. Ello implica un esfuerzo importante por parte de todos (Administración Educativa, instituciones de Educación Superior, organismos y expertos en materia de educación en general y de educación matemática en particular, etc.) para que el profesorado preocupado por mejorar sus prácticas y adaptarlas a las exigencias del S. XXI pueda tener acceso a estos conocimientos. Este acceso debe permitirle, por un lado, que pueda reflexionar sobre la necesidad del cambio y, por otro lado, que se le facilite la labor aportando recursos que sean factibles de ser usados, ya que como indican Hargreaves, Earl, Moore y Manning (2001, p. 128, 129, 132 y 134) "si el profesor no está dispuesto a hacerlo, no se puede hacer"; "si el profesor no sabe cómo hacerlo o a la hora de la verdad no se siente seguro haciéndolo, no se puede hacer"; "si un docente no está dispuesto a hacerlo, no se puede hacer", y "si el profesor tiene que hacer demasiadas cosas, no las hará bien".

Empezaba este artículo argumentando que vivimos un momento apasionante en el proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas, incluyendo la evaluación, en la etapa de Educación Primaria. Tenemos ante nosotros la oportunidad de dejar definitivamente atrás una enseñanza (y una evaluación) de las matemáticas centrada exclusivamente en los contenidos que se ha mostrado ineficaz para una buena parte de la sociedad, al comprobarse que muchos ciudadanos, tras haber cursado una asignatura de matemáticas cada curso académico a lo largo de toda su escolaridad, tienen dificultades para aplicar los conocimientos aprendidos en situaciones de la vida cotidiana en los que estos conocimientos son necesarios, como por ejemplo distinguir cual es la mejor oferta en un supermercado (3x2, 2x1 o 2º producto al 50%), interpretar adecuadamente las facturas del gas o de la electricidad, o bien negociar de forma eficaz una hipoteca en el banco (Alsina, 2012). No toda la responsabilidad de este cambio de paradigma debería recaer sólo en los maestros; si bien es cierto que son los que finalmente lo tienen que protagonizar, hace falta que reciban la formación necesaria para hacerlo. Deseamos que este artículo sea un pequeño grano de arena que contribuya a esta formación.

REFERENCIAS

Alsina, Á. (2010). La "pirámide de la educación matemática", una herramienta para ayudar a desarrollar la competencia matemática. *Aula de Innovación Educativa, 189,* 12-16.

Alsina, Á. (2011). *Aprendre a usar les matemàtiques. Els processos matemàtics: propostes didàctiques per a l'Educació Infantil.* Vic: Eumo Editorial.

Alsina, Á. (2012). Más allá de los contenidos, los procesos matemáticos en Educación Infantil. *Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia, 1*(1), 1-14.

Alsina, Á. (2013). Sobre el sentit de les matemàtiques a l'educació infantil. *Noubiaix, 33,* 49-62.

Alsina, Á. (2014a). Matemáticas en la educación primaria. En N. Planas y Á. Alsina (2009). *Educación matemática y buenas prácticas* (pp. 93-138). Barcelona: Graó (2ª edición).

Alsina, Á (2014b). Procesos matemáticos en Educación Infantil: 50 ideas clave. *Números 86,* 5-28.

Alsina, Á. (2016). Diseño, gestión y evaluación de actividades matemáticas competenciales en el aula. Épsilon, *Revista de Educación Matemática, 33*(1), 7-29.

Alsina, Á. y Coronota, C. (2014). Los procesos matemáticos en las prácticas docentes: diseño, construcción y validación de un instrumento de evaluación. *Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia, 3*(2), 21-34.

Ascher, C. (1990). *ERIC Clearinghouse on urban education.* Nueva York: ED327612.

Coronata, C. (2014). *Presencia de los procesos matemáticos en la enseñanza del número de 4 a 8 años. Transición entre la Educación Infantil y Primaria.* Girona: Universidad de Girona. Tesis Doctoral.

CREAMAT (2009). Preguntes que poden servir d'indicadors del nivell de riquesa competencial d'una activitat. Recuperado de: http:phobos.xtec.cat/creamat.

de Guzmán, M. (2001). Tendencias actuales de la educación matemática. *Sigma, 19,* 5-25.

Departament d'Ensenyament (2013). *Competències bàsiques de l'àmbit matemàtic.* Barcelona: Servei de Comunicació i Publicacions.

Díaz-Barriga, F. (2006). *Enseñanza situada: vínculo entre la escuela y la vida.* México D.F: McGraw-Hill.

Goñi, J. Mª. (2008). *3^2 – 2 ideas clave. El desarrollo de la competencia matemática.* Barcelona: Graó.

Goodrich, H. (2000). Using rubrics to promote thinking and learning. *Educational Leadership, 57*(5), 13-18.

Hargreaves, A., Earl, L., Moore, S. y Manning, S. (2001). *Aprender a cambiar. La enseñanza más allá de las materias y los niveles.* Barcelona: Editorial Octaedro.

Martínez-Rojas, J.G. (2008). Las rúbricas en la evaluación escolar: su construcción y su uso. *Avances en medición, 6,* 129-138.

Maurandi, A., Alsina, Á. y Coronata, C. (en prensa). Los procesos matemáticos en la práctica docente: análisis de la fiabilidad de un cuestionario de evaluación. *Educatio S. XX1.*

National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and standards for school mathematics.* Reston, Va.: The National Council of Teachers of Mathematics (Trad. Castellana, Principios y estándares para la educación matemática. Sevilla: Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales, 2003).

Niss, M. (2002). *Mathematical competencies and the learning of mathematics: The Danish KOM Project.* Roskilde: Roskilde University.

OCDE (2004). *Learning for tomorrow's world: First results from PISA 2003.* París: OCDE.

Sanmartí, N. (2007). *10 ideas clave. Evaluar para aprender.* Barcelona: Graó.

Evaluación de actitudes presentadas hacia la estadística en alumnos de educación primaria

Gerardo Gómez-García
José M. Contreras
Elena Molina-Portillo
Universidad de Granada

RESUMEN: *Actualmente vivimos en una sociedad donde la información estadística es prácticamente constante, y por tanto su aprendizaje es básico para poder interpretar la información que nos rodea de una manera crítica. Sin embargo, en el sistema educativo en el que nos encontramos, la estadística se encuentra como una materia abandonada, falta de afecto por los docentes y como consecuencia olvidada por los alumnos.*
A través de este proyecto pretendemos evaluar el nivel de actitudes que presentan los alumnos de educación primaria hacia la estadística, y planteamos factores de importancia que puedan ayudar a mejorar la educación estadística en la escuela.
PALABRAS CLAVE: *Actitudes, Estadística, Educación primaria, Trabajo por proyectos, Matemáticas.*

Evaluation of attitudes in students of primary school presented towards statistics

Abstract: *The statistical information in the current society is steady, therefore it is learning, it is essential to interpret the information around us with criticism. However, in the Spanish education system, statistics is a forgotten and abandoned subject by the students because of the teachers 'lack of affection.*
Through this project our aim is to evaluate the aptitudes of the primary school students to the subject, as well as establish the mayor factors that may improve the learning of statistics in schools.
Keywords: *Statistic, Attitudes, Primary education, Project work, Maths.*

INTRODUCCIÓN

La estadística ha supuesto, y supone, hoy en día, uno de los bloques de contenidos a tratar dentro del currículo básico del área de matemáticas en educación primaria. Sin embargo, existen factores que provocan que la estadística sea un área del conocimiento poco y mal trabajada. En los últimos años, hemos presenciamos una sociedad donde las ideas estadísticas van aumentando su presencia en las diferentes disciplinas, donde juega un papel fundamental en los equipos de trabajo interdisciplinario. Especificando esta idea, desde el sistema educativo, en la etapa de educación primaria, el papel de la estadística es marginal (Cox, 1997). Esto se debe, tanto a su ubicación en las programaciones didácticas del docente, ocupando casi siempre, el último lugar, como a la poca importancia que los docentes le otorgan a la misma. Como consecuencia de este proceso, se produce una retroalimentación que provocan personas sin una serie de conocimientos estadísticos básicos, los cuales, además, adquieren una serie de actitudes negativas hacia la estadística, dudando de su utilidad, y concibiéndola como algo complicado, solamente apto para matemáticos expertos (Watson, 2001).

Las actitudes forman parte de la cultura estadística básica que cualquier ciudadano debería tener, y por tanto forma parte de los componentes que comprende la alfabetización estadística que todo ciudadano debe recibir para ser competente dentro de la sociedad en la que vivimos. (Gal, 2002). Actualmente, en el contexto escolar, nos encontramos a alumnos que, en su mayoría, no sienten ningún tipo de afectividad hacia la estadística, y que no le otorgan ningún valor. Estos factores pueden tener una influencia negativa en la adquisición cognitiva de los conocimientos de la materia.

La actitud hacia la estadística ha tomado protagonismo durante los últimos años, evaluándose en diferentes etapas educativas, especialmente en la universitaria, y a los profesores en ejercicio, demostrándose resultados negativos. A causa de esto, el estudio realizado tiene como función el evaluar las actitudes presentadas hacia la estadística en alumnos de educación primaria, etapa educativa donde se comienza a dar las primeras concepciones y actitudes sobre la estadística, y, por tanto, periodo donde tomarán lugar las primeras emociones y creencias acerca de la estadística y que tendrá un valor de cara al futuro. Por tanto, nuestra finalidad con el estudio realizado es la de demostrar las actitudes presentadas de 60 alumnos de sexto de educación primaria hacia el área de estadística dentro de la etapa de educación primaria utilizando los cuestionarios de evaluación de actitudes de Schau (SATS).

Tras la presentación y posterior discusión de resultados, procederemos a su análisis exhaustivo y la justificación de éstos, tomando siempre por referencia la literatura relacionada en el ámbito en cuestión. Además, profundizaremos en un factor fundamental que influye en la educación en actitudes en estadística: la formación permanente del profesorado y el trabajo por proyectos relacionados con la Estadística.

ANTECEDENTES

Con la realización de este estudio se pretende contribuir con el Proyecto Internacional de Alfabetización Estadística (ISLP), que tiene como objetivo: “apoyar, crear, y participar en actividades de alfabetización estadística y promoverlas alrededor del mundo para jóvenes y adultos en todos los ámbitos de la vida." (Serradó, 2013).

Gal (2002) introdujo la definición de alfabetización estadística, la cual se basa en dos componentes que están interrelacionados:

a) En primer lugar, la capacidad para evaluar e interpretar críticamente la información que nos encontramos en diversos contextos.
b) Capacidad para discutir o comunicar sus opiniones respecto a tales informaciones estadísticas.

De esta manera, a lo largo estos años, ha surgido la necesidad de desarrollar este proceso con la finalidad de que todas las personas obtengamos una mínima noción en estadística.

Batanero (2002) definía los componentes de la cultura estadística, dividiéndolos en los siguientes:

1. Conocimientos y destrezas básicas.
2. El razonamiento o sentido estadístico.
3. Las intuiciones sobre estadística.
4. Actitudes hacia la estadística.

Por tanto, dentro de esta cultura estadística que debe poseer cualquier ciudadano, nos hemos centrado en el estudio de las actitudes hacia la misma. Y es que, en los últimos años, el estudio acerca de estas ha tomado relevancia dentro de los equipos de investigación.

Tomaremos como definición de actitud la propuesta por Gal y Garfield (1997) donde se define como "Una suma de emociones y sentimientos que se experimentan durante el periodo de aprendizaje de la materia objeto de estudio"

A través de una revisión de la literatura acerca del sujeto de estudio, podemos diferenciar dos actuaciones en la investigación educativa sobre las actitudes hacia la estadística:

- Creaciones de instrumentos o escalas de medición de actitudes.
- Evaluación de actitudes presentadas hacia la estadística por los alumnos universitarios de diferentes grados y docentes de la etapa de educación secundaria.

Referente al primer ámbito, en los últimos años se han diseñado diferentes escalas de medición de actitudes, como la escala *ATS* desarrollada por Wise (1985), donde se mide el cambio producido en las actitudes del alumnado una vez recibe un curso de estadística; la escala de Auzmendi (1992) quien además de evaluar actitudes, analiza los factores que influyen en éstas o la escala SAS, a través de la que se evalúan diferentes componentes referentes a las actitudes.

Existen otras escalas producidas a partir de estas como es la llevada a cabo por Mondéjar (2008) o la AEE de Estrada (2002) que se han utilizado en diversas investigaciones. Destacamos la escala que utilizaremos en el estudio, desarrollada por Schau y cols (1995) denominada *The Survey of Attitudes Toward Statistics (SATS)* donde se evalúan las actitudes presentadas hacia la estadística diferenciando cuatro componentes diferenciales:

- Afectivo: sentimientos positivos o negativos hacia la Estadística.
- Competencia cognitiva: percepción de la propia capacidad sobre conocimientos habilidades hacia la estadística.

- Valor: utilidad, relevancia que le otorgan hacia el área tanto en su entorno como fuera de él.
- Dificultad hacia la materia percibida como asignatura.

En lo referente a las investigaciones sobre esta línea de investigación, observamos que existen evaluaciones de actitudes hacia la estadística en los siguientes cuerpos educativos:

- Educación secundaria.
- Educación universitaria.
- Profesores en ejercicio.

En la educación secundaria, solamente podemos destacar el estudio realizado por Anastasiadou (2005) a alumnos de bachillerato en la que, como en el presente estudio, evaluó utilizando la escala SATS a los alumnos de la asignatura específica impartida en tal curso de estadística.

En cuanto a los estudios sobre la evaluación de actitudes presentadas hacia la estadística por alumnos universitarios, destacamos los realizados por Mondéjar (2008) donde se comprobaba que los estudiantes universitarios demostraban un valor superficial hacia la estadística, relacionado más con su futuro laboral que con el presente momento de estudio, y se percibía una ligera ansiedad hacia la asignatura. Además, en este caso, alumnos pertenecientes a la rama de las ciencias de la educación, como es el caso del estudio de Ruiz de Miguel (2015), muestra que la mayoría de los futuros docentes y profesionales de la educación no reconocen un valor por la estadística en sus vidas. Así mismo, también se establecen correlaciones entre diferentes variables como el interés del alumno hacia la asignatura, la ansiedad que les produce y la utilidad que éstos le reconocen a la estadística.

También cabe destacar la evaluación de actitudes presentadas hacia la estadística de los profesores en ejercicio de educación secundaria en Perú (Aparicio, Bazán, 2006) y especialmente en España, (Estrada, 2004, 2007) donde, a través de la escala SATS, se lleva a cabo una correlación entre los componentes de las actitudes definidos por Schau (1995). El resultado de dicha evaluación demostraba como las actitudes del profesor hacia la propia materia son transmitidas de forma involuntaria al alumnado y como estas afectan en su proceso de aprendizaje.

Las actitudes no es un sentimiento que se refleje en un determinado momento, sino que tiene un carácter acumulativo, y, por tanto, si los alumnos crean una actitud negativa hacia la estadística. Esto se irá trasladando a cursos y etapas posteriores (Carmona, 2004), influenciada, en la mayor parte de los casos, por su vinculación a las matemáticas. Sin embargo, eso no quiere decir que las actitudes no sean permutables, ya que, si se lleva a cabo una formación adecuada sobre la estadística, se pueden llegar a crear una mejora de las emociones del discente, como en los estudios de Evans (2007) reflejan.

Es por las ideas expuestas previamente, que ha supuesto la motivación hacia la realización de este estudio, que pretende investigar sobre una etapa educativa, la educación primaria, donde la creación de actitudes hacia la estadística se esté llevando a cabo, y que, por tanto, será fundamental a la hora de desarrollar unas actitudes de un tipo o de otro.

METODOLOGÍA

Objetivos del estudio

Los objetivos que se pretenden conseguir con el desarrollo de este proyecto de investigación son los siguientes:

- Evaluar el nivel de actitudes que presentan los alumnos del tercer ciclo de educación primaria, concretamente, del curso de sexto de primaria.
- Hacer consciente a los discentes de la importancia del área de estadística en sus diferentes contextos diarios.
- Iniciar al alumnado en el proceso de alfabetización estadística, fundamental para su futuro dentro de la sociedad de información en la que viven.

Descripción del cuestionario

Según Gal y Ginsburg (1994) "las actitudes y creencias y especialmente las negativas, pueden tener un impacto directo en el clima de la clase y llegar a constituir un auténtico bloqueo del aprendizaje si no se controlan".

Por tanto, hemos trabajado utilizando el cuestionario SATS, desarrollado por Schau (1992) al cual le hemos "escolarizado" el lenguaje para su mejor comprensión por parte de nuestro alumnado de sexto de primaria, siguiendo los documentos *Guidelines for Adapting Educational and Phychological Test (1994)* y *Advances in translating and adapting educational and psychological tests (2003).*

Nuestra finalidad con el uso de este instrumento es la de medir el nivel de actitudes que presentan el alumnado hacia la estadística y analizar como estas influyen en el aprendizaje posterior de la materia de enseñanza.

Este instrumento presenta 28 ítems donde pretendemos evaluar los diferentes componentes de las actitudes hacia la estadística. (Schau y cols, 1995) Sin embargo, utilizaremos los más destacados de cada componente para posteriormente analizarlo: (Anexo I).

- Afectivo: sentimientos positivos o negativos hacia la Estadística. (Ítems 1 y 11)
- Competencia cognitiva: percepción de la propia capacidad sobre conocimientos y habilidades intelectuales en estadística. (Ítems 9,14 y 16).
- Valor: utilidad, relevancia y valor percibido de la estadística en la vida personal y profesional. (Ítems 4, 6, 10).
- Dificultad: se refiere a la percibida de la estadística como asignatura. (Ítems 2, 17)

A continuación, tras conocer los resultados de dichos componentes en los ítems más representativos, llevaremos a cabo un estudio correlativo para conocer dicha relación entre los componentes previamente explicados.

Población y muestra

La población está conformada por 75 alumnos de sexto de primaria de un colegio concertado de la provincia de Granada, de la cual hemos evaluado a 60 alumnos como muestra del estudio.

Para llevar a cabo el proceso de muestreo, se ha tenido en cuenta a aquellos alumnos que conocían previamente qué era la estadística, tras haber cursado una unidad de contenidos en la asignatura de matemáticas.

Cabe resaltar, por tanto, que se trata de un estudio descriptivo, y que, los resultados obtenidos no pueden inferirse a toda la población de estudio, sino que sólo son válidos para la muestra elegida.

DISCUSIÓN DE RESULTADOS

A continuación, presentamos las respuestas expuestas por los alumnos a los diferentes ítems que hemos destacado anteriormente, y procedemos al análisis de cada uno de los componentes de las actitudes que presenta nuestra muestra estudiada.

Mostramos todas las respuestas registradas de los 60 alumnos que han contestado nuestro cuestionario. Además, calcularemos la media aritmética de las respuestas obtenidas y su desviación típica.

Tabla 1. Resultados componente afectivo

Afectivo	1	2	3	4	5	Media	Desv.típica
Ítem 1	13	5	19	15	8	3	4,98
Ítem 11	19	12	18	6	5	2,43	5,83
Total	32	17	37	21	14	2,90	8,84

En el componente afectivo, podemos diferenciar, por una parte, analizando el ítem 1, cuya media aritmética de respuestas es 3, que los alumnos no muestran una afectividad ni positiva ni negativa hacia la estadística. Sin embargo, encontramos por otra parte, variabilidad en los datos estudiados, ya que existen una cantidad de alumnos que no sienten afectividad hacia la estadística (18 alumnos), pero también encontramos otra parte de la muestra analizada que si muestra una sensibilidad emocional hacia la misma. (23 alumnos). Sin embargo, encontramos que, a la hora de recibir las clases, el alumnado en cuestión no muestra una actitud positiva hacia el desarrollo de las clases de estadístico. Esto se refleja en el análisis del ítem 11, donde se observa la tendencia negativa de los datos, cuya media aritmética es 2,43.

Tras realizar algunas entrevistas con los alumnos que contestaron negativamente a estos ítems, obtuvimos las respuestas: “Las clases son muy aburridas”, “es un peñazo” “me aburro solo haciendo tablas”. Cabe resaltar, que gran parte de las emociones negativas que presentan los alumnos, aparte del desarrollo de las clases de estadística, que, a su juicio, no son entretenidas, se deben a la estrecha relación que tiene lugar con las matemáticas, y el desarrollo de toda la materia en sí, por lo que resulta ser una actitud homogénea. Es por ello, que se deben de tomar medidas para trabajar sobre las emociones en el aula, ya que las actitudes negativas presentadas hacia la estadística pueden influir de manera directa en la capacidad cognitiva del alumno hacia la materia, y en la accesibilidad de los conocimientos. (Gal y Ginsburg, 1994).

Como consecuencia, el componente afectivo, tiene una gran influencia en el rendimiento escolar del alumno en el desarrollo de la materia, y en el grado de consecución de competencias adquirido por el alumno a la finalización del curso escolar. (Auzmendi, 1992). Además de este fenómeno, las emociones hacia cualquier materia suelen permanecer en el alumnado en las siguientes etapas educativas, no solamente en las actitudes hacia la estadística, como se muestra en los estudios de Mondéjar (2008) y Ruíz de Miguel (2015) ya que los alumnos universitarios arrastran creencias y emociones negativas procedentes de estas etapas. De esta manera, a modo de conclusión, percibimos que la mayoría de los alumnos no sienten afectividad hacia la estadística y que, por tanto, presentan actitudes negativas hacia la misma, y hacia la matemática en general, algo que influirá, sin duda, en su nivel de motivación en clase y a la hora de trabajar la materia y asimilarla (Gordon, 2004).

Tabla 2. Resultados componente cognitivo

Cognitivo	1	2	3	4	5	Media	Desv.típica
Ítem 9	34	2	10	6	8	2,20	11,31
Ítem 14	14	20	13	8	5	2,50	5,18
Ítem 16	6	3	12	10	29	3,88	9,06
Total	54	25	35	24	42	2,86	11,19

En la competencia cognitiva, podemos observar que la gran mayoría conocen de que trata la estadística, como se refleja en el ítem 9, y que, además, no cometen demasiados errores a la hora de realizar las actividades de estadística, a las que no les ven demasiada dificultad. Debemos de hacer especial énfasis en el ítem 16, donde los alumnos se ven aptos para poder aprender estadística, y, por tanto, muestran una receptividad ante la asignatura.

Existe, en general, una tendencia positiva al estudio de la asignatura, al grado de confianza de los alumnos a la hora de poder aprender estadística y los aprendizajes que conlleva, ya que como muestra el ítem 16, se ven capaces de estudiar la materia. Aquellos alumnos, que han mostrado una incapacidad cognitiva a la hora de poder aprenderla, ha sido producida por el cúmulo de malas experiencias en otras áreas de conocimiento relacionadas con las matemáticas, y que, por tanto, tienen una influencia directa a la hora de estudiar estadística.

Estos datos no resultan similares a los mostrados en evaluaciones del componente cognitivo a futuros profesores realizado por Estrada (2007), donde el número de errores cometidos por los alumnos universitarios es mayor, debido al incremento de la dificultad de la asignatura. Sin embargo, se obtienen datos, al igual que en el presente estudio, positivos, referentes a la predisposición a estudiar estadística. Por lo tanto, observando los resultados en su totalidad, deberíamos de aprovechar que los alumnos se ven capaces de aprender estadística, y que lo ven como un contenido accesible dentro de un área que para ellos resulta complicada. Este es el caso de las matemáticas, para poder llevar a cabo una metodología basada en la investigación a través de datos familiares, a través de los cuales, los alumnos pueden realizar cálculos e inferencias sobre ellos, este uno de los puntos de partida de la enseñanza de la cultura estadística. (Gal, 2002).

Tabla 3. Resultados componente valor

Valor	1	2	3	4	5	Media	Desv.típica
Ítem 4	31	8	7	5	9	2,21	9,59
Ítem 6	4	7	16	8	25	3,72	7,62
Ítem 10	17	12	16	8	7	2,60	4,05
Total	52	27	39	21	41	2,84	10,92

En el caso del valor hacia la estadística, podemos observar aquí el dato más preocupante que encontramos en el estudio. Como podemos observar en la tabla, en el ítem 4 referido a que la estadística no vale para nada, podemos encontrar que los alumnos están en desacuerdo con eso en su totalidad, con más de la mitad de la muestra estudiada en desacuerdo con la cuestión (39 alumnos). Sin embargo, profundizando algo más en el ítem analizado, a la hora de hablar con ellos acerca de este ítem, ellos achacan la idea de que la estadística es algo "para expertos" o "para los que les gusta las mates", por falta de cercanía hacia la misma.

Respecto al ítem 6, referente al valor de la estadística en el futuro laboral de los alumnos, observamos que hay resultados positivos, ya que gran parte de la muestra estudiada opina que la estadística tendrá un papel importante en su futuro (25 alumnos que se encuentran convencidos de este papel protagonista de la estadística, y 8 alumnos que tienen esta creencia, algo menos acentuada, sobre esta idea). Sin embargo, también analizamos que hay alumnos dubitativos, que no encuentran un sentimiento definido acerca del papel de la estadística en su futuro (16 alumnos) y que, por lo tanto, deben de ubicar el papel de la estadística en su contexto, para a partir de ahí, evaluar su importancia. A pesar de esto, resultan ser unos resultados optimistas, puesto que su reconocimiento temprano del componente valor, hará que vaya creciendo de cara al futuro, como bien demuestran la escala valorativa realizada por Mondéjar (2008) como los alumnos universitarios de diferentes titulaciones universitarias.

Por último, en el análisis del ítem 10, analizamos datos algo más preocupantes, debido a que la respuesta de nuestros alumnos acerca del uso de la estadística diariamente es negativo, con una media aritmética de 2,60, es decir, expresando su desacuerdo con el papel interdisciplinar e intradisciplinar que la estadística ocupa, no solamente en la enseñanza en los centros, sino en sus vidas.

Para desarrollar este componente, es fundamental llevar a cabo una enseñanza basada en el contexto, que forma parte de uno de los componentes fundamentales del razonamiento estadístico. (Batanero, 2004). Mostraríamos a los alumnos diferentes gráficos y datos de su vida cotidiana, para que vean la importancia que tiene la estadística en sus vidas. A su vez podríamos hacer que valoren entre varios gráficos que les llame la atención y, de esta manera, desarrollar su capacidad crítica, para así demostrar que en su contexto la estadística es fundamental, tanto actualmente como en su futuro.

Tabla 4. Resultados componente dificultad

Dificultad	1	2	3	4	5	Media	Desv.típica
Ítem 2	14	17	14	5	10	2,67	4,15
Ítem 17	14	13	16	9	8	2,73	3,03
Total	28	30	30	14	18	2,70	6,69

Refiriéndonos a la dificultad, podemos observar que la mayoría de nuestros alumnos no ven gran dificultad en la materia de estadística. Como observamos en el ítem 2, sobre la inseguridad hacia los problemas de estadística, observamos cómo, en general, la media obtenida de respuestas (2,67) y vemos que los alumnos se ven dispuestos a realizar los problemas de estadística, debido a que ven factible la confrontación con los mismos, por la relación que se interpone con el ítem 17, donde demuestra que la mayoría de alumnos comprende los temas de estadística y que no les supone una dificultad excesiva el aprendizaje de dicho temario.

Indagando más sobre las respuestas obtenidas, tratando de justificar los datos presentados, observamos que los alumnos de sexto de primaria otorgan una dificultad algo inferior al tema de estadística dentro de la asignatura, en comparación con otros de la asignatura.

Este hecho es algo que luego va cambiando a lo largo del paso del alumnado por las distintas etapas educativas, cómo podemos observar en Estrada (2007), donde estos mismos ítems acerca del componente dificultad, cuentan con más grado de acuerdo por parte del alumnado estudiado.

ESTUDIO DE CORRELACIÓN ENTRE VARIABLES

Una vez analizados los componentes que conforman las actitudes hacia la estadística, llevaremos a cabo las correlaciones entre los componentes y la puntuación total que hemos recogido anteriormente del cuestionario de actitudes. Podemos comprobar que el componente con mayor valor que le han otorgado los alumnos es el componente del valor, donde se ha llevado a cabo 0,94 respecto a la parte total, y que tiene también una gran importancia para la parte tanto afectiva como cognitiva (Tabla 5).

Como consecuencia, debemos tener en cuenta la capacidad cognitiva elevada, es decir, que los alumnos se ven con cualidades y predisposición para aprender estadística, y que le otorgan un valor elevado al área, es decir, son conscientes de su pertinencia, aunque como previamente hemos apuntado, no saben exactamente para qué sirve.

Tabla 5. Correlaciones (Pearson) entre componentes

Componente	P. total	Afectiva	Cognitiva	Dificultad	Valor
P. total	1,00	0,71	0,87	0,60	0,94
Afectivo		1,00	0,37	0,53	0,47
C. Cognitivo			1,00	0,22	0,97
Dificultad				1,00	0,41
Valor					1,00

Es por esto, que consideramos que los alumnos se "aburren" en clase de estadística debido, en primer lugar, a la escasa dificultad otorgada a los conocimientos estadísticos, y, en segundo lugar, no les ven explicación o razonamiento lógico a aquellos ejercicios que están realizando. Por tanto, consideramos fundamental, y como pilar básico de la enseñanza de la cultura estadística, insistir en el porqué de la enseñanza y demostrar su utilidad, para conseguir una motivación más alta, y un nivel afectivo hacia la materia mayor.

FACTORES QUE INFLUYEN EN LAS ACTITUDES HACIA LA ESTADÍSTICA

Formación permanente del profesorado

Los estudios de Estrada (2007) a profesores que impartían el área de estadística, y también estudios como el de Gil Flores (1999) que trabaja con alumnos universitarios pertenecientes a la facultad de ciencias de la educación reflejan, el bajo nivel de actitudes que muestran los maestros y profesores actuales, así como los futuros docentes hacia el área de estadística. Se demuestra que existe una ignorancia sobre la materia, y, sobre todo, que es algo lejano y complicado de aprender (componente valor y dificultad). Por tanto, es fundamental, y aquí debemos de relacionar el componente actitud con el cómputo global al que pertenece, que es la cultura estadística.

En primer lugar, los maestros que ejercen actualmente, y los que están en formación, deben de formarse mínimamente, para adquirir una cultura estadística. Existe una clara relación entre la marginación hacia el área con el desconocimiento propio sobre esta por parte del profesorado actual. Es algo fundamental el tratar de producir un cambio de mentalidad sobre este sector, ya que son la pieza clave que pueden llevar a cabo un buen nacimiento de actitudes hacia los alumnos de educación primaria y posteriores etapas educativas.

El trabajo en las actitudes por parte del profesorado debe de ser algo prioritario y obligatorio a trabajar, ya que existen claras evidencias de la relación entre unas actitudes positivas y el rendimiento académico escolar, como se corrobora en los estudios de Auzmendi (1992), Sánchez-López (1996) o Gil Flores (1999).

En definitiva, como referencia Batanero (2000) "es necesario una mejor preparación y formación del profesorado y un apoyo de los departamentos universitarios y grupos de investigación implicados para lograrlo"

De esta manera, conseguiríamos que desde educación primaria se creen unas actitudes positivas en el aprendizaje de la estadística, y es que, a través de una buena enseñanza basadas en las actitudes, se pueden superar diferentes barreras cognitivas que pueda presentar el alumno hacia la estadística. (Phillips, 1980)

La Estadística y el trabajo por proyectos

Una de las formas más efectivas para conseguir un buen nivel de actitudes en el alumnado de Educación Primaria es cambiar la línea metodológica. Nos encontramos en un momento en el que, sobre todo, el área de matemáticas se encuentra inmersa en una línea metodológica tradicional y antigua, donde nos imaginamos al profesor con una pizarra muy grande y a los alumnos copiando aquello que escribe, o simplemente haciendo cuadernos de ejercicios casi idénticos los unos a los otros. Pues bien, debemos de hacer énfasis en tratar de cambiar este aspecto, y dotar al alumnado de un papel mucho más activo, aspecto fundamental para mejorar su motivación y su afectividad hacia el área del conocimiento.

Como bien hemos obtenido en nuestros resultados anteriores, los alumnos no conocen la estadística, y no saben cómo esta se encuentra en sus vidas. Por tanto, el enfoque metodológico debe estar basado en estos dos pilares: conseguir la afectividad del alumno a través del papel activo del alumno y conocer el valor de la estadística. Nuestra propuesta de trabajo para conseguir esto es el trabajo por proyectos (ABP) relacionado con la estadística.

Consideramos que la estadística a través de los proyectos es la mejor opción de aprenderla, puesto que como bien afirma Anderson y Loynes (1987) "la estadística es inseparable de sus aplicaciones, y su justificación final es su utilidad en la resolución de problemas externos a la propia estadística". Mediante la estadística a través de proyectos, estamos forzando al alumnado a trabajar, basándonos en problemáticas reales, la aplicación de los contenidos aprendidos, que se ajustan en el aprendizaje basado en competencias que apoyan y fundamentan nuestra legislación educativa actual.

Además, de esta manera, trabajamos diferentes elementos de lo que se denomina el razonamiento y sentido estadístico (Batanero, Contreras, Roa, 2013), tales como:

- Importancia de los datos: a través de los proyectos estamos trabajando algo fundamental como la recogida de datos reales de nuestro contexto. De esta manera concienciamos a valorar la importancia que tienen los datos en los estudios estadísticos.
- Transnumeración: a través de nuestro proyecto, podemos trabajar las diferentes fases de las que se compone el proceso estadístico (recogida de datos, creación de tablas estadísticas, gráficos estadísticos).
- Percepción de la variación: es importante concienciar a los alumnos a que sepan, reconozcan y reflejen, de dónde vienen los datos e informaciones que extraen. De esta manera, realizaremos un punto de partida respecto a los orígenes de la información que será muy positivo de cara a etapas educativas posteriores. Debemos de reconocer que cada dato es diferente y hacer un buen juicio de ellos.

- Razonamiento con modelos estadísticos: los gráficos que se trabajan se pueden considerar como modelos estadísticos.
- Estadística y el contexto: conforma uno de los aspectos más trabajados a través de los proyectos, puesto que estamos demostrando que la estadística se encuentra en el entorno próximo de los alumnos.

Mediante la metodología que proponemos, el alumno aborda la temática, punto de vista integrado, donde partiendo de problemáticas de diferentes áreas del conocimiento, podemos plantear pequeños proyectos investigativos basados en la estadística. Así, el alumno toma un papel activo en su proceso de aprendizaje, y como consecuencia, un sentimiento de valor y afectividad hacia la estadística y el trabajo que conlleva.

CONCLUSIONES DEL ESTUDIO

Como conclusiones del estudio podemos afirmar que los resultados obtenidos reflejan que la cuna de la educación estadística, y, por tanto, el punto de partida del proceso de la alfabetización estadística no tiene porqué ser en etapas universitarias, sino que puede llevarse a cabo mucho antes, como es el caso de la educación primaria.

Debemos de tener en cuenta, como una conclusión importante, lo fundamental que suponen las actitudes dentro del proceso de alfabetización estadística. Y es que debemos de fomentar un crecimiento de las actitudes hacia la estadística, ya que, como hemos podido observan, su buen nivel influye directamente en otros factores de importancia. Nuestra obligación consiste en hacer especial énfasis en mostrar a los alumnos la cercanía de la estadística respecto a sus vidas, para así interiorizar su funcionalidad en su vida cotidiana, a la vez que debemos de hacerles interpretar las diferentes informaciones con las que desarrollaran un espíritu crítico. Por consiguiente, debemos de olvidar esas antiguas concepciones escolares donde la estadística ocupaba las últimas unidades de los libros de texto, y donde los maestros (muchas veces por ignorancia o desconocimiento propio) no le concedían demasiada importancia, incluso a veces, excluyéndola de las propuestas didácticas. Para ello, factores que serán fundamental a la hora de poder desarrollar la cultura estadística, y más concretamente, un buen nivel de actitudes será la formación adecuada del profesorado, tanto a nivel académico en cuanto a saberes matemáticos-estadísticos, como sus cualidades metodológicas y como motivador.

De la misma manera, debemos de abandonar antiguas concepciones, y apostar por metodologías cooperativas, por un trabajo colaborativo entre los profesores del área de matemáticas, que pueden llevar a cabo proyectos integrados estadísticos en el colegio, donde tengan que resolver hipotéticas situaciones que se les presentan (Batanero, 2009). A su vez, consideramos muy importante el trabajo de forma tanto interdisciplinar como intradisciplinar de la estadística en los centros educativos, y no solo ubicarla dentro del área de matemáticas, ya que trabajando de esta manera la materia, incrementará su valor y afectividad por parte del alumnado.

En conclusión, es imprescindible seguir investigando acerca de la importancia de la alfabetización estadística, dentro del área de didáctica de la matemática, en especial en el ámbito de las actitudes hacia la estadística, ya que es un proceso con el que pretendemos contribuir en un proceso educativo amplio y que el alumnado desarrolle una sensibilidad especial por el área de estadística.

Reconocimiento: Trabajo realizado en el marco del proyecto FCT-16-10974, FECYT-MINECO.

REFERENCIAS

Anastasiadou, S. (2005). Affective reactions and attitudes of the last class of greek high school students towards statistics. *Proceedings of CERME IV, European Research in Mathematics Education. Sant Feliu de Guíxols, Girona: CERME*.

Anderson, C. W. y Loynes, R. M. (1987). The teaching of practical statistics. New York: Wiley

Aparicio, A. y Bazán, J. (2005). Actitud y rendimiento en Estadística en profesores

Batanero, C. (2000). ¿Hacia dónde va la educación estadística? *Blaix*, *15*(2), 13.

Batanero, C. (2004). Los retos de la cultura estadística. *Yupana*, *1*(1), 27-37.

Batanero, C. (2009). Retos para la formación estadística de los profesores. *Actas do II Encontro de probabilidades e estatística na escola*, 7-21.

Batanero, C., & Díaz, C. (2011). *Estadística con proyectos*. *Granada: Universidad de Granada*.

Batanero, Díaz, C., Contreras, J. M., & Roa, R. (2013). El sentido estadístico y su desarrollo. *Números. Revista de Didáctica de las Matemáticas*, *83*, 7-18.

Carmona, J. (2004). Una revisión de las evidencias de fiabilidad y validez de los cuestionarios de actitudes y ansiedad hacia la estadística. *Statistics Education Research Journal, 3(1),* 5-28.

Cox, D. R. (1997). The current position of statistics: a personal view. *International statistical review*, *65*(3), 261-276.

Estrada, A, Batanero, C.y Fortuny, J. (2004). Un estudio comparado de las actitudes hacia la estadística en profesores en formación y en ejercicio. *Enseñanza de las Ciencias*, *22*(2), 263-274.

Estrada, A. (2007). Actitudes hacia la estadística: un estudio con profesores de educación primaria en formación y en ejercicio. *Investigación en educación matemática XI.* 122-139.

Evans, B. (2007). Student attitudes, conceptions and achievement in introductory undergraduate college statistics. *The Mathematics Educator*, *17*(2), 24- 30.

Flores, J. G. (1999). Actitudes hacia la estadística. Incidencia de las variables sexo y formación previa. *Revista española de pedagogía*, 567-589.

Gal I. y Ginsburg, L. (1994). The role of beliefs and attitudes in learning statistics: towards an assesment framework. Journal of Statistics Education, 2(2).

Gal, I. (2002). Adults' statistical literacy: Meanings, components, responsibilities. *International statistical review*, *70*(1), 1-25.

Gómez Chacón, I. M. (2000). Matemática emocional. Los afectos en el aprendizaje matemático. Madrid: Narcea.

Hambleton, R.K. (1994). Guidelines for adapting educational and psychological tests: A progress report. European Journal of Psychological Assessment, 10, 229-240.

Hambleton, R.K. y Jong, J.H. (2003). Advances in translating and adapting educational and psychological tests. Language Testing, 20, 127-134.

Mondéjar Jiménez, J., Vargas Vargas, M., y Bayot Mestre, A. (2008). Medición de la actitud hacia la estadística. Influencia de los procesos de estudio. *Electronic Journal of Research in Educational Psychology*, *6*(16).

Pérez, L, Aparicio, A, Bazán, J y Abdounur, O. (2015). Actitudes hacia la estadística de estudiantes universitarios de Colombia. *Educación matemática*, *27*(3), 111-149. peruanos. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa*, *19*, 644-650.

Phillips, J.L. (1980). *La lógica del pensamiento estadístico.* México D.F, México: El Manual Moderno.

Ruiz de Miguel, C. (2015). Actitudes hacia la estadística de los alumnos del Grado en Pedagogía, Educación Social y Maestro de Educación Primaria en la UCM. *Educación XX1, 18*(2), 351-374.

Sánchez-López, C. R. (1996). Validación y análisis ipsativo de la escala de actitudes hacia la estadística. *Análisis y modificación de conducta*, *86*(22), 799-819.

Schau, C. y otros (1995), The development and validation of the survey of attitudes towards statistics, *Educational and Psychological Measurement*, 55(5), 868-875.

Serradó, A. (2013). El proyecto internacional de alfabetización estadística. *Números. Revista de Didáctica de las Matemáticas*, *83*, 19-33.

Watson, J. M. (2001). Profiling teachers' competence and confidence to teach mathematics topics: The case of chance and data. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *4*(4), 305-337.

ANEXO. CUESTIONARIO DE ACTITUDES HACIA LA ESTADÍSTICA

ugr Universidad de Granada

didáctica de la matemática

Curso: **Alfabetización de la Estadística en Eduación Primaria**

Niño		Niña	

	1	2	3	4	5
1. Me gusta la Estadística.					
2. Me siento inseguro cuando hago problemas de Estadística.					
3. No entiendo mucho la Estadística debido a mi manera de pensar.					
4. La estadística no sirve para nada.					
5. La Estadística es algo complicado.					
6. La Estadística es aglo que necesitaré para cuando trabaje de mayor					
7. Mis habilidades sobre estadística me facilitarán el acceso al mundo laboral.					
8. La estadística no es útil para los adultos.					
9. No tengo ni idea de qué va la Estadística.					
10. Utilizo la Estadística en mi vida cotidiana.					
11. Disfruto en clase de Estadística.					
12. Las cosas que doy en estadística rara vez la veo en casa o en mi entorno.					
13. Cuando trabaje de mayor no usaré Estadística.					
14. Cometo muchos errores matemáticos cuando hago Estadística					
15. La Estadística no es importante en mi vida.					
16. Puedo aprender Estadística.					
17. Me resulta difícil comprender el tema de estadística.					
18. La mayoría de la gente debe cambiar su manera de pensar para hacer Estadística.					

1 = Muy en desacuerdo. 2 = en desacuerdo, 3 = regular, 4 = de acuerdo, 5= muy de acuerdo

Épsilon - Revista de Educación Matemática *2018, nº 98, 41-48*

Simetrías: Frutas, vegetales y cuentos

Teresa F. Blanco
Alejandro Gorgal Romarís
Universidade de Santiago de Compostela
María Salgado Somoza
CEIP Sigüeiro y Universidade de Santiago de Compostela

Resumen: *En este trabajo se presenta una experiencia realizada con estudiantes de cuarto de Educación Primaria en la que se realizan actividades centradas en el análisis y desarrollo del concepto de simetría.*
Palabras Clave: *simetrías, experiencia de aula, Educación Primaria.*

Symmetries: fruits, vegetables and tales

Abstract: *This paper presents an experience with primary school students in a series of activities focused on the analysis and development of the concept of symmetry.*
Keywords: *symmetry, classroom experience, elemental education.*

INTRODUCCIÓN

La simetría axial juega un papel importante en el aprendizaje de la geometría y en el desarrollo de habilidades relacionadas con la visualización y el dibujo (Acuña y Martínez, 2013). Geddes (1992) destaca la ventaja del estudio de las transformaciones geométricas, justificando que la naturaleza dinámica de las transformaciones favorece que los estudiantes investiguen las ideas geométricas a través de un acercamiento informal e intuitivo. Siguiendo en esta línea, la NTCM (2000) expone la necesidad de incluir la enseñanza de las transformaciones en los cursos medios de la Educación Primaria, comenzando a través de experiencias con variedad de materiales que permitan realizar las diferentes transformaciones a través de la manipulación de los objetos y figuras. Algunos trabajos como los de Acuña y Martínez (2013), Gutiérrez (1996) y Txaqui (2009), que analizan las dificultades relacionadas con las simetrías, inciden también en la relevancia de su instrucción en los niveles básicos. Estos autores sugieren que los estudiantes aprenden a ejecutar procedimientos manuales mediante el manejo de material manipulativo con el que realizar simetrías.

En la Educación Primaria se trabajan contenidos matemáticos básicos desarrollando distintas competencias, entre ellas la competencia matemática, con la finalidad de lograr que el alumnado adquiera la habilidad necesaria para resolver problemas de la vida diaria (Xunta de Galicia, 2014, p. 37631). Entre esos contenidos se encuentran el concepto de simetría axial. El primer acercamiento, en esta etapa educativa, a este tipo de transformación geométrica se realiza a través del concepto de figura simétrica, realizando actividades de identificación y reconocimiento de figuras simétricas **y** ejes de simetría en figuras planas y tridimensionales; dejando la simetría como transformación para los últimos cursos de la etapa y primeros de la etapa siguiente. (.

La propuesta que presentamos tiene como objetivo general incentivar el estímulo matemático a través de la realización de actividades competenciales (Alsina y García, 2014) motivadoras relacionadas con los conceptos de figura simétrica y eje de simetría. A continuación se describe la experiencia y las dos actividades que formaron parte de la misma. También intentaremos identificar las principales dificultades que presentan los estudiantes a la hora de buscar regularidades e identificar los ejes de simetría.

DESCRIPCIÓN DE LA EXPERIENCIA

El trabajo que presentamos se llevó a cabo dentro de un programa que se realiza en un colegio público de la comunidad autónoma de Galicia. Con la entrada de la LOMCE (MEC, 2013), los centros educativos tienen una mayor autonomía organizativa y pedagógica, dotando de horas de libre configuración el horario lectivo para atender necesidades especificas del alumnado. En el caso de este colegio, para el curso de cuarto de primaria, se decidió dedicar la hora semanal de libre configuración a trabajar contenidos matemáticos ya tratados en el horario ordinario mediante la realización de prácticas competenciales (Alsina y García, 2014). Este tipo de prácticas están enfocadas a realizar actividades que posibiliten que el alumnado construya conceptos matemáticos y adquieran las destrezas y habilidades necesarias para resolver problemas en la vida diaria.

En la realización de esta experiencia participaron 35 estudiantes que representan las dos líneas del tercer curso de Educación Primaria del colegio seleccionado. Previamente a la realización de la experiencia, la profesora explicó, en el aula, el concepto de figura simétrica y eje de simetría y todo el alumnado realizó la propuesta de ejercicios que se recoge en su libro de texto de referencia.

La metodología de trabajo se desarrolla en pequeño y gran grupo, incluyendo también algún momento de trabajo individual. La duración de la experiencia fue de una hora y media. Las puestas en común y la figura del profesor como moderador se utilizan para concretar los conceptos matemáticos trabajados en el proceso de aprendizaje. Se plantea el aprendizaje por descubrimiento dirigido, ya que será el profesor quien indique el ritmo a seguir y el aprendizaje se produzca por una reflexión en común sobre lo descubierto. Es importante destacar que para el desarrollo de la actividad se trabajará con material del contexto cotidiano de los alumnos como son las frutas y vegetales y utensilios de cocina. También se utilizarán espejos como instrumentos básicos en el estudio de la simetría axial.

En la experiencia se realizan dos actividades. La primera actividad está centrada en analizar si son o no simétricas una serie de frutas y vegetales. La segunda actividad tiene como objetivo que los alumnos hagan una composición, relacionada con figuras simétricas, tomando como referencia la estructura que sigue el cuento "M es mirarse en el Espejo" de Birmingham (2007) (Tabla 1).

Tabla 1: Presentación de las actividades

Actividades		**Esquema**
Actividad 1	Frutas y vegetales.	Presentación de los alimentos. Identificación de la simetría como regularidad Identificación de los ejes de simetría. Corte de los alimentos en dos partes simétricas. Representación plana de dichos cortes y de las secciones obtenidas.
Actividad 2	Escondemos la mitad de un figura simétrica.realizan cabo frutas y verduras. La segunda actividad uento	Lectura del cuento. Búsqueda de la mitad de una figura simétrica en el cuento. Creación de una lámina con una figura simétrica 'escondida'.

DESARROLLO Y ANÁLISIS DE LAS ACTIVIDADES

A continuación, se desarrollarán cada una de las actividades.

Actividad 1: Frutas y vegetales

En la primera actividad de la experiencia lo que se busca es trabajar el concepto de figura simétrica y de eje de simetría manipulando frutas y vegetales. Los materiales necesarios para realizar esta fase son: un cuchillo, una tabla de cortar, un plato, servilletas y un espejo.

La profesora pide al alumnado que lleve a clase frutas y vegetales que forman parten de su dieta diaria. De todos los alimentos recogidos (Plátano, naranja, manzana, kiwi, fresa, coliflor, hoja de col, zanahoria y berenjena), sólo la hoja es bidimensional (si despreciamos el grosor), los demás son tridimensionales lo que hace que debamos hablar de plano de simetría en vez de eje de simetría. Sin embargo, para facilitar la comunicación con los estudiantes usaremos eje de simetría en todos los casos.

Cada alumno hace una pequeña presentación de su aportación. En gran grupo todos observan, manipulan y reconocen las frutas y vegetales comentando en qué medida consumen dichos alimentos y la importancia de seguir una dieta sana. Se realiza una lluvia de ideas sobre lo que son figuras simétricas y después la profesora hace un breve recordatorio sobre el concepto de figura simétrica y de eje de simetría.

Imagen 1. Realización corte.

Imagen 2. Comprobaación.

Imagen 3. Explicación del proceso.

Imagen 4. Corte no simétrico.

Después los estudiantes se reparten libremente en pequeños grupos de 4 componentes. Cada grupo se dispone a buscar, de forma visual, en los alimentos que aportaron los integrantes de ese grupo, los distintos ejes que permitan cortar el alimento elegido en dos partes simétricas. Una vez identificado el (los) eje de simetría, los estudiantes procederán a realizar el corte por dicho eje (Imagen 1). Para comprobar que ese es, realmente, el eje buscado, se les entrega un espejo (Imagen 2).

Para finalizar, un representante de cada grupo explica a los demás grupos si sus vegetales y frutas son simétricas e indica el lugar por el que cortó la fruta (eje de simetría) (Imagen 3). La exposición por parte de cada grupo permite que todos ellos observen que una misma fruta puede tener varios ejes de simetría y que según el corte que se haga la forma de la sección de la fruta puede ser diferente. Un ejemplo de ello se puede ver en los cortes realizados en naranjas (Imagen 5). Por otro lado también surgen situaciones en las que se pone de manifiesto que cortar un objeto o figura en dos partes iguales no significa que sea un objeto o figura simétrica. Esta situación la observan en el corte no longitudinal que

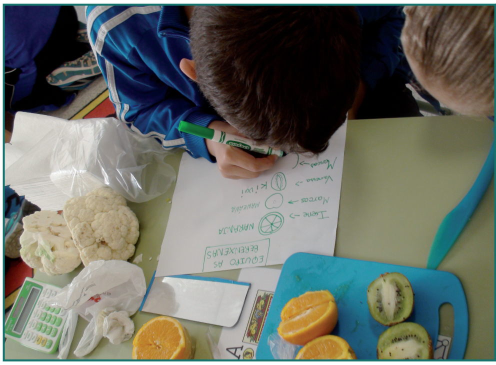


Imagen 5. Cortes distintos de una naranja.

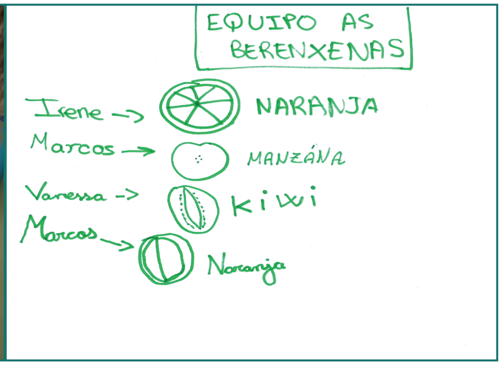


Imagen 6. Registro de los cortes.

realizan, por ejemplo, sobre un plátano (Imagen 4).

Después de comprobar el resultado cada grupo registra lo obtenido a través de una representación gráfica y con un pequeño comentario de cómo se realizaron todos los pasos de la actividad (Imagen 6).

Imagen 7. Búsqueda figura.

Actividad 2: Escondemos la mitad de una figura simétrica

La segunda actividad de esta experiencia complementa lo realizado en la primera fase con la lectura y análisis del cuento “M es mirarse en el Espejo” de Birmingham (2007). En cada lámina del libro aparece una pequeña historia sobre una figura simétrica a modo de acertijo. El objetivo es encontrar la mitad de la figura simétrica a la que hace referencia el acertijo y con un espejo comprobar que se trata de dicha figura al verla completa (Imagen 7). Para que todos los estudiantes participen se les da a cada uno una lámina del libro plastificada y un espejo para que descubran la figura a la que hace referencia el acertijo de su lámina.

Para complementar la actividad, cada uno de los alumnos, siguiendo la estructura del cuento, creará libremente su propia lámina. En esa lámina realizarán una representación pictórica en la que aparezca la mitad de una figura simétrica. Luego la camuflarán incorporando más elementos a su dibujo para que no sea identificable a simple vista. Le añadirán un pequeño texto, compuesto de una o dos frases, en el que darán una pista que sirva para identificar la mitad de la figura simétrica que han camuflado. Finalmente, cada alumno le presentará a los demás su dibujo y entre todos harán una valoración de cuál es mejor teniendo en cuenta la originalidad y el grado de dificultad. Las imágenes 8 y 9 son ejemplos de las producciones de dos de los estudiantes. En la imagen 8 podemos ver que

Imagen 8. Composición alumno A.

Imagen 9. Composición alumno B.

el texto dice 'F es la flor escondida en el paisaje' y en la imagen 9 el texto que aparece es 'C de cara más bonita que la casa'.

EVALUACIÓN

Todo proceso iniciado debe ser evaluado con la finalidad de conocer las aportaciones del mismo. En este trabajo interesa saber en qué medida el alumnado adquirió, a través de la realización de la práctica, la noción y el concepto de figura simétrica y eje de simetría y determinar así los resultados de todo el proceso llevado a cabo.

A la hora de evaluar al alumnado nos centramos en atender a su participación y aportación en pequeño y en gran grupo. Así mismo también se tuvieron en cuenta algunos de los criterios de evaluación fijados para el concepto de simetría en estas edades y que es pertinente evaluar en esta experiencia. Dichos criterios son:

- Reconocen figuras simétricas en el espacio y en el plano.
- Reflexionan sobre las propiedades que tienen las figuras simétricas.
- Identifican los ejes/planos de simetría de figuras planas y espaciales.
- Clasifican las figuras por el número de ejes de simetría
- Crean figuras con un eje de simetría.
- Utilizan los espejos para reconocer los ejes de simetría.
- Representan cortes de figuras y figuras simétricas.
- Interpretan representaciones espaciales en situaciones cotidianas.

Destacamos las dificultades del alumnado para identificar determinados ejes de simetrías en algunas frutas y vegetales como, por ejemplo, en la zanahoria y el plátano. Cabe señalar también que si bien han mejorado notablemente la manera de expresarse, en cuanto al uso que se hace del vocabulario relacionado con el concepto de simetría, los estudiantes siguen presentando grandes dificultades para expresar de manera fluida y precisa relaciones entre los elementos de los objetos implicados en la actividad. Es conveniente realizar más actividades donde se trabaje este concepto en diferentes contextos y con diferentes materiales.

CONCLUSIONES

El uso de frutas y vegetales para la realización de esta experiencia fue un aspecto clave a la hora de que la identificación de figuras simétricas fuese un hecho práctico, ya que la realización del corte y la posterior comprobación con el espejo les hizo darse cuenta de que existían frutas con esa propiedad (ser simétricas). También este hecho fue relevante para que al alumnado mantuviera un alto interés a la hora de resolver las actividades planteadas. Los estudiantes mostraron su asombro por 'las matemáticas que hay en los alimentos' y por ser capaces de reconocer contenidos matemáticos que ya fueron presentados en las clases ordinarias. En esto sentido, fueron capaces de trabajar con las matemáticas en contexto; y el aula se convirtió en un centro de experimentación. Por otro lado la lectura y análisis de las imágenes del cuento les ayudó a trabajar la visualización y a reconstruir una figura simétrica dada su mitad, lo cual puede considerarse como el proceso inverso al realizado en la primera actividad y un poco más complicado en estas edades.

La realización de esta práctica ha permitido a los estudiantes trabajar la interdisciplinariedad. En la primera actividad se trabajan contenidos del área de Matemáticas (figura simétrica y eje de simetría) y del área de Ciencias Naturales (frutas y verduras como alimentos para una dieta sana). En la segunda actividad se trabajan los mismos contenidos matemáticos que en la primera y se incorporan contenidos del área de Lengua (comunicación oral y comunicación escrita)

Las actividades que se llevaron a cabo les facilitaron la comprensión de los conceptos de figura simétrica y eje de simetría al experimentar sobre objetos cotidianos y próximos a ellos. Así mismo, adquirieron destreza a la hora de localizar ejes de simetría en otros objetos de su entorno, lo cual fomenta el desarrollo de la competencia matemática.

REFERENCIAS

Acuña, C. Martínez, A. (2013). El aprendizaje de la reflexión en geometría entre estudiantes de primaria. En CIAEM, CIAEM (Ed.), *Memorias XII CIAEM*, 1-8. México: CIAEM:

Alsina, A. y García, J.J. (2014). Prácticas matemáticas competenciales en educación Infantil. *Suma*, 77, 9-18.

Birmingham, D. (2007). "M" es de mirarse en el espejo. Reino Unido: Tarquin

Comunidad Autónoma de Galicia (2014). Decreto 105/2014, de 4 de septiembre, por el que se establece el currículo de la educación primaria en la Comunidad Autónoma de Galicia. *Diario Oficial de Galicia*, *171*, 37406-38087.

Geddes, D. (1992). *Geometry in the Middle Grades. Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics Addenda Series, Grades 5-8.* National Council of Teachers of Mathematics, Inc., 1906 Association Drive, Reston, VA 22091-1593.

España. Real Decreto 126/2014, de 28 de febrero, por el que se establece el currículo básico de la Educación Primaria. BOE, 1 de marzo de 2014, núm. 52, pp. 19349-19420

Gutiérrez, A. (1998). Las representaciones planas de cuerpos 3-dimensionales en la enseñanza de la geometría espacial, *Revista EMA, 3*(3), 193-220.

NTCM (2000). *Principles and standars for school mathematics*. Reston, Va: The National Council of Teachers of Mathematics.

Thaqi, X. (2009). *Aprender a enseñar transfor3maciones geométricas en Primaria desde una perspectiva cultural*. Universitat de Barcelona.

Épsilon - *Revista de Educación Matemática* *2018, nº 98, 49-56*

Propuesta de aplicación del ajedrez como apoyo a la enseñanza de la geometría analítica en el plano

Francisco Jiménez-Bernal
David Gutiérrez-Rubio
Universidad de Córdoba

Resumen: *Presentamos una propuesta de clase para la enseñanza de conceptos básicos de geometría analítica en el plano mediante el uso del tablero de ajedrez. Se trabajan representaciones de vectores y rectas a través de los movimientos posibles de las piezas y se aprovecha el carácter cartesiano del tablero para visualizar las rectas definidas por su ecuación implícita.*
Palabras clave: *Geometría analítica, geometría plana, ajedrez, Educación matemática.*

A class proposal using chess for the teaching of plane analytic geometry

Abstract: *We present a class proposal for the teaching of basic concepts of plane analytical geometry through the use of the chess board. Representations of vectors and lines are introduced through the possible movements of the pieces and the cartesian character of the board is used to visualize a line defined by its implicit equation.*
Keywords: *Analytic geometry, plane geometry, chess, mathematics education.*

INTRODUCCIÓN

Históricamente, el ajedrez y las Matemáticas han estado siempre relacionados de un modo u otro. La conocida leyenda hindú de Sisa y los granos de trigo en el tablero de ajedrez ya evidencia el uso de sucesiones geométricas y de la poca familiaridad con su ritmo de crecimiento para el no habituado a trabajar con ellas (Álvarez, 2004).

Si bien la difusión del ajedrez en el mundo occidental se debe a la expansión del mundo islámico durante los siglos VIII a XV, su origen se remonta a la civilización hindú en el siglo V aproximadamente, con la creación del Chaturanga, considerado el precursor del ajedrez moderno. Precisamente algo similar y paralelo ocurrió con nuestro sistema de numeración y el desarrollo del Álgebra, que pueden considerarse inicialmente desarrollados por los hindúes y cuya continuidad fue posteriormente garantizada mediante su transmisión a través de la cultura islámica.

Por la natural red cartesiana que conforma el tablero de ajedrez y el hecho de ser un juego que pertenece al ámbito cultural de prácticamente todo el alumnado, es candidato ideal como material para la enseñanza de la Geometría. Así, por ejemplo, podemos encontrar propuestas como las de Maz-Machado y Jiménez-Fanjul (2012) para el aula de primaria para trabajar conceptos como patrones geométricos y numéricos utilizando el tablero y los movimientos de las piezas. Una recopilación de una gran variedad de problemas que pueden plantearse a partir del tablero y los trebejos se puede ver en Ortega (2003).

Otros autores como Kovacic (2012) han estudiado la relación entre el rendimiento académico y la práctica del ajedrez, no sólo en Matemáticas, sino en otras áreas, obteniendo que en general los alumnos que practicaban ajedrez obtenían mejores calificaciones.

Incluso Euler en el s. XVIII, según Fernández (2007), ya estaba interesado en las *poligrafías de saltos de caballo* a lo largo del tablero por las figuras geométricas que resultaban.

No en vano, el otrora campeón mundial de ajedrez Anatoli Karpov, en uno de sus libros, establece una relación entre el Teorema de Pitágoras y el ajedrez (1999).

Duval (2006) recalca la necesidad de que el estudiante de Matemáticas no solamente debe conocer las distintas formas de representación de un objeto matemático sino que ha de saber alternar entre ellas. En este sentido, el tablero de ajedrez y los trebejos sirven como una forma de representación alternativa a la clásica representación geométrica en el plano.

Por su parte, el Real Decreto 1105/2014 de contenidos de Educación Secundaria Obligatoria, en vigor dentro del territorio español, establece como contenidos básicos en la materia Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Académicas de 4º ESO conceptos de geometría analítica en el plano como son las coordenadas, vectores y las ecuaciones de la recta.

Se empleará el juego del ajedrez como elemento auxiliar de apoyo en el tratamiento de los contenidos teóricos para el estudio de la geometría en el plano. Esto podría justificarse debido a la propia geometría plana del tablero de ajedrez y a su sistema de coordenadas para describir la posición de las piezas en las casillas.

Por último, hacer notar la naturaleza interdisciplinar del ajedrez, no solamente en Matemáticas, sino también en Filosofía por ejemplo, tal y como propugna Fernández (2010). Es precisamente este fenómeno de transferencia de unas competencias a otras, lo que justifica la inserción del ajedrez en el currículum, pues no solo se aprende a jugarlo, sino a utilizarlo como un medio para mejorar la percepción del mundo.

CONCEPTOS PREVIOS

Partimos de la base de que el alumnado conoce los movimientos básicos de las piezas del ajedrez. Utilizando un retroproyector mostraremos el tablero y definiremos el uso de las coordenadas asociadas a las casillas del tablero. De igual manera, si disponemos de material, se repartirán tableros a grupos de alumnos para la realización de las actividades.

Las actividades planteadas están pensadas para una introducción a conceptos básicos de geometría analítica, de modo que el alumno no necesita ningún tipo de conocimientos previos en esta área.

DESARROLLO DE LAS ACTIVIDADES

Las actividades se desarrollarán en 4 sesiones que pasamos a describir a continuación:

Primera sesión:

En esta sesión introduciremos al alumnado en la correspondencia entre notación algebraica del ajedrez y las coordenadas cartesianas. Para ello, con la ayuda del retroproyector mostraremos un tablero de ajedrez (también pueden usarse tableros de ajedrez en grupos de 3-4 alumnos).

Figura 1: Numeración de las casillas utilizando la notación algebraica.

Con algunos ejemplos mostraremos la notación algebraica que utiliza la forma letra-número donde la letra denota la columna (empezando por la izquierda) y el número denota la fila (empezando por abajo). Siempre asumimos que las piezas blancas están en la parte inferior del tablero.

Con esta notación se establece por convenio el origen de coordenadas (0,0) en la casilla a1 (esquina inferior izquierda, desde el punto de vista del jugador de blancas) (Figura 1).

Una vez establecida esta correspondencia, hacemos algunos ejercicios para consolidar lo aprendido, con preguntas como las siguientes:

- ¿En qué coordenadas se encuentra el rey blanco? ¿Y el negro?
- ¿Cuáles son las coordenadas del peón de dama blanca? ¿A dónde puede moverse?

Una vez que el alumnado coge soltura en la correspondencia entre las dos formas de notación de coordenadas en el tablero, cartesiana matemática y algebraica de anotación ajedrecística, introducimos cómo se representarían los vectores en el plano y para ello aprovechamos la estructura cartesiana del tablero.

La idea de este planteamiento consiste en que el movimiento de las piezas se puede asimilar a vectores, en tanto que la componente inicial del vector es la casilla donde se encuentra la pieza y la componente final sería la casilla a donde dicha pieza se mueve (Figura 2).

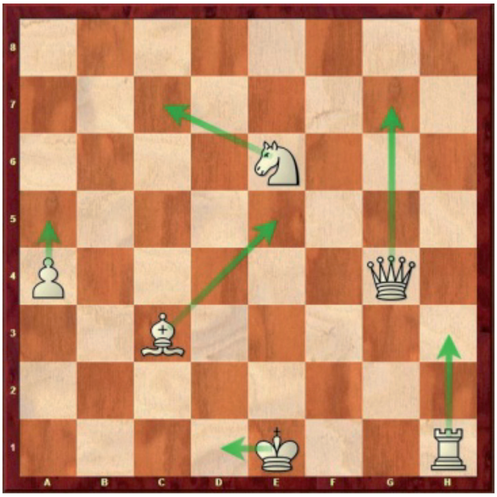


Figura 2: Movimientos de figuras y correspondencia con vectores.

Mediante el diagrama de la Figura 2 mostramos algunos ejemplos de movimientos de piezas y realizamos preguntas como las siguientes:

- ¿En qué coordenadas está el alfil? ¿A qué coordenadas puede moverse?-Según la flecha que aparece, ¿cuál es la casilla de destino?
- Si tuviéramos que describir al alfil cómo ha de moverse para llegar a la casilla de destino, ¿cómo se lo diríamos? Pista: Tienes que moverte X casillas a la derecha e Y casillas hacia arriba
- Repetimos las preguntas anteriores con la pieza del rey, con la dificultad de, al moverse hacia la izquierda, habrán de usar números negativos para representar "moverte X casillas a la derecha" y el 0 para "moverte Y casillas hacia arriba".
- Repetimos la dinámica con el resto de figuras, y cuando el alumnado haya asimilado correctamente que hay que usar dos números (positivos y/o negativos) para indicar cómo se mueve una pieza, estamos en condiciones de introducir el concepto de vector.
- Así, decimos, una forma abreviada de indicar el movimiento del alfil sería que se mueve con vector (2,2) o el caballo (-2,1).

Segunda sesión:

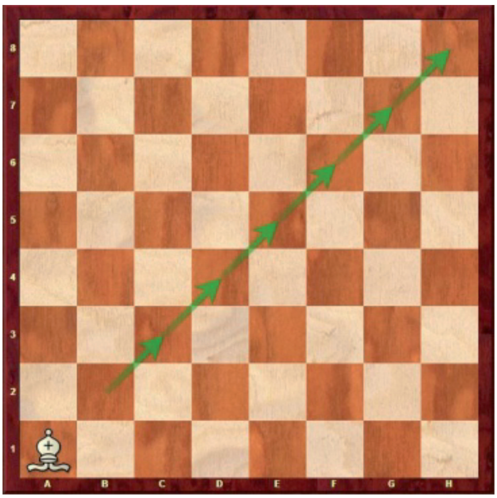


Figura 3: Recta definida por movimiento del alfil.

Mostraremos en la pantalla el tablero de la Figura 3, donde se muestran todas las posibles casillas en las que puede desplazarse el alfil en una misma dirección. Preguntaremos qué figura geométrica describe el movimiento de dicha pieza, que es una recta.

A continuación preguntaremos cuáles son las coordenadas cartesianas de las casillas que forman dicha recta y si ven algún patrón en ellas. Al alumnado no debe costarle trabajo inferir que las casillas son de la forma (n, n) donde n es un número natural.

Sabiendo que el alfil se encuentra en la casilla (0,0), podemos entonces obtener una forma de representar todas las casillas que forman la recta, que serán (0,0) + (1,1), (0,0) + (2,2) etc. Esto puede ponerse en la forma (0,0) + λ (1,1), donde λ es un número natural. Esto, decimos, se llama la ecuación vectorial de una recta (Figura 4).

Posteriormente, se aumenta el plano casuístico con los casos de alfiles que no están en el origen de coordenadas, como se aprecia en la Figura 4.

Adicionalmente, se plantea el siguiente reto: Si el caballo que aparece en la Figura 4 pudiera disparar un rayo láser en las posibles direcciones en las que se mueve, ¿cuáles serían las ecuaciones vectoriales de las correspondientes rectas?

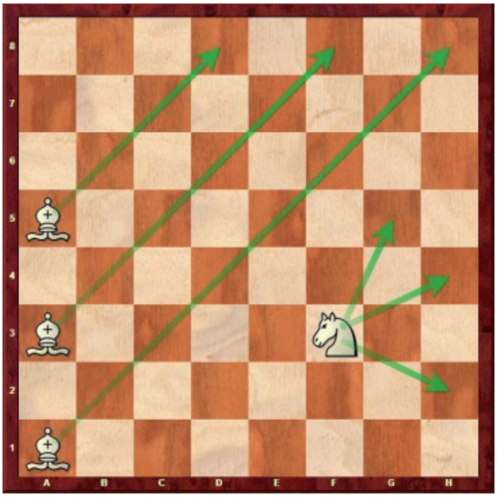


Figura 4: Movimiento de distintas piezas como vectores.

Por otro lado, introducimos a partir de aquí las ecuaciones paramétricas de la recta, que se obtienen directamente separando las componentes horizontal y vertical de la ecuación vectorial.

Así, en el ejemplo del primer alfil, la ecuación de la recta en su forma paramétrica sería:

$$x = 0 + \lambda \cdot 1$$
$$y = 0 + \lambda \cdot 1$$

Y dejamos como propuesta que los alumnos hallen las ecuaciones paramétricas de los alfiles y el caballo de la anterior figura.

Tercera sesión:

En esta sesión introduciremos la ecuación continua. El procedimiento se explicará con el habitual tratamiento algebraico. Se utilizará el tablero como refuerzo para que los alumnos, una vez calculada la ecuación continua de una recta, comprueben manualmente si las casillas de dicha recta cumplen o no la ecuación.

Cuarta sesión:

En esta sesión introduciremos la idea de ecuación general de la recta. Para continuar con la ayuda del ajedrez, se utiliza la tabla incluida en la Figura 5. En ella, se ha representado el tablero de ajedrez y en cada escaque aparece un número (-C), resultante de realizar la operación Ax + By con los valores arbitrarios A = 1 y B = -1 por ejemplo.

Es importante que los alumnos tengan claro cómo se han rellenado las casillas con los números, para poder relacionarlo posteriormente con la ecuación implícita de la recta.

A tenor de las cifras obtenidas y observando la repetición de patrones numéricos, mirando desde una casilla cualquiera a su alrededor en horizontal, vertical o diagonal, se desprende que existen relaciones lineales entre casillas según tales direcciones.

8	7	6	5	4	3	2	1	0
7	6	5	4	3	2	1	0	-1
6	5	4	3	2	1	0	-1	-2
5	4	3	2	1	0	-1	-2	-3
4	3	2	1	0	-1	-2	-3	-4
3	2	1	0	-1	-2	-3	-4	-5
2	1	0	-1	-2	-3	-4	-5	-6
1	0	-1	-2	-3	-4	-5	-6	-7
	1	2	3	4	5	6	7	8

Figura 5: Casillas de ajedrez con numeración para la ecuación implícita x-y=C

Podemos entonces contar que hemos convertido el tablero de ajedrez en una sopa de números, y preguntamos, por ejemplo, dónde están las casillas que tienen un 1 en su interior, y si forman alguna figura conocida. Los alumnos, después de algunos ejemplos, verán rápidamente que, dependiendo del número elegido, saldrán rectas paralelas.

Si cada casilla tiene coordenadas, llamémoslas (x, y) preguntamos entonces, qué condición cumplen las coordenadas de las casillas que tienen un 1. Deberán llegar a la conclusión de que son todas las que cumplen $x - y = 1$ (ya que en este ejemplo concreto hemos usado como coeficientes $A = 1$, $B = -1$).

Para reforzar, podemos pedir a los alumnos, que coloreen las casillas que cumplen una determinada ecuación, por ejemplo $x - y + 2 = 0$ o $x = y - 1$.

Podemos repetir esta actividad variando los coeficientes que utilizamos para numerar las casillas. Así por ejemplo, podemos usar $A = B = 1$ para las rectas de la forma $x + y = C$, los coeficientes $A = 1$, $B = 0$ para las rectas de la forma $x = C$, etc.

Por último, indicaremos que existe una forma de expresar la ecuación de la recta, llamada explícita, donde simplemente despejamos la variable y. La explicación, al igual que antes, es puramente algebraica y no precisa del tablero de ajedrez. Sí podemos, sin embargo, añadir una interpretación en el tablero con la siguiente actividad: En la Figura 4, el alfil de la casilla a3, supongamos que lo movemos hasta la columna f, nos preguntamos entonces si podemos deducir en qué fila estará, y si podemos expresar explícitamente su coordenada a partir de su coordenada x, como una función. Esta función, decimos, es la ecuación explícita de la recta.

Como ejercicio, se pedirá a los alumnos que deduzcan qué forma tienen que tener la ecuación implícita y explícita de las rectas que definen el movimiento de una torre, luego las de un alfil, y por último las de la dama.

CONCLUSIONES

Con la presente propuesta se pretende fomentar en los alumnos una representación de los conceptos de geometría plana, aplicada a algo tan cotidiano como es un tablero de ajedrez, cuya estructura no está únicamente vinculada al juego en sí, sino que aparece de forma natural en muchas otras situaciones de la vida cotidiana, como manzanas de una ciudad, losetas del suelo, etc. La propia estructura visual del tablero ayuda al alumno a visualizar y entender mejor las coordenadas cartesianas y los vectores en el plano y, por ende, la recta. Una vez adquirida la dinámica de representación, puede extrapolarse a conceptos como posiciones relativas de rectas, pertenencia de un punto a una recta, distancia entre 2 puntos, etc. El uso de piezas de ajedrez como medio de representación permite darle un dinamismo a conceptos que por lo general el alumnado concibe como estáticos, como el punto y la recta. Por otra parte, la propia naturaleza reflexiva del juego-ciencia, permite inculcar al alumnado una actitud reflexiva hacia la matemática en general y de que ésta se encuentra en muchas situaciones de la vida cotidiana.

REFERENCIAS

Álvarez, P. (2004). *Las 64 casillas*. Barcelona: Editorial Paidotribo.

Duval, R. (2006). Un tema crucial en la educación matemática: La habilidad para cambiar el registro de representación. *La Gaceta de la RSME*, 9(1), 143–168.

Fernández, F. J. (2010). *El ajedrez de la filosofía*. Pozuelo de Alarcón (Madrid): Plaza y Valdés.

Fernández, S. (2007). Leonhard Euler y el recorrido del caballo de ajedrez. *Revista Sigma, 31,* 225-228.

Karpov, A. (1999). *El ajedrez: Aprender y progresar*. Barcelona: Editorial Paidotribo.

Kovacic, D. M. (2012). Ajedrez en las escuelas. Una buena movida. *PSIENCIA. Revista Latinoamericana de Ciencia Psicológica*, *4*(1).

Maz-Machado, A. y Jiménez-Fanjul, N. (2012). Ajedrez para trabajar patrones en matemáticas en Educación Primaria. *Epsilon,* 81, 105-112.

Ortega, J. A. (2003). El juego-rey y la ciencia de los números. *Suma: Revista sobre Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas*, 44, 53-64.

Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato. *Boletín Oficial del Estado,* 3 de enero de 2015, núm. 3, p. 179, p. 193, pp. 395-398.

Tareas con tangram para favorecer el sentido espacial

María Aznarte Mellado y Rafael Ramírez Uclés
Universidad de Granada

Resumen: *Este artículo tiene como objetivo presentar tareas utilizando el TANGRAM que permiten la profundización en los contenidos relacionados con el sentido espacial en la Educación Primaria. Se proponen como modelo para implementar una experiencia de aula en los distintos niveles a partir de los contenidos mínimos recogidos por la normativa. La propuesta de trabajo vertical a lo largo de la etapa nos permite un análisis eficaz de la secuenciación de los contenidos a trabajar en cada curso. Es nuestra intención favorecer el uso de materiales manipulativos para el desarrollo de contenido y el sentido matemático.*
Palabras clave: *Sentido espacial, Tangram, Educación Primaria*

Fostering development of spatial sense using tangram tasks

Abstract: *The aim of this article is to present a sample of tasks in which the TANGRAM game allows to make progress into the contents related to spatial sense in Primary Education. These tasks are proposed as models to produce classroom experiences in the different levels from the minimal contents specified by regulations. This proposal of vertical work along the primary stage allows us for an effective analysis of the sequence of the contents being studied at every school year. Finally, it is our goal to promote the use of manipulative materials for the development of mathematical contents.*
Key-words: *spatial sense, tangram, primary education.*

INTRODUCCIÓN

El sentido espacial viene determinado por todas las habilidades y capacidades que nos ayudan a entender nuestro entorno, permitiéndonos reconocer los objetos que nos rodean. Así mismo, también hace posible que visualicemos movimientos y transformaciones de los mismos y que nos orientemos en el plano y en el espacio, usando la geometría de manera diferente a la tradicional (Flores, Ramírez y Del Río, 2015).

El desarrollo de este sentido en primaria capacitará al alumnado para interactuar con el mundo que le rodea y para la creación de representaciones mentales del mismo, conocimientos que serán de aplicación directa en su vida diaria. La geometría es uno de los campos de las matemáticas que más relación tiene con la realidad, en la que encontramos un sinfín de elementos geométricos, puesto que es una característica intrínseca del mundo que nos rodea, de ahí la importancia de su estudio.

Como se desprende de lo anterior, la importancia de estos contenidos es vital para el alumnado, puesto que no sólo se trata del desarrollo de destrezas y habilidades matemáticas, sino que además posee esta enorme relación con nuestro día a día, en el que ponemos en práctica los conocimientos geométricos para un sinfín de tareas comunes, como pueden ser: doblar una sábana, partir una pizza o buscar el camino más corto para llegar a un determinado lugar.

El sentido espacial, como no podía ser de otra forma, forma parte del bloque de contenidos de geometría que establece la normativa para la etapa de primaria, ya que su estudio es de gran relevancia para el alumnado.

En la Orden de 17 de marzo de 2015 viene recogido el objetivo establecido en el área de matemáticas para la etapa de primaria dentro del ámbito de la geometría:

> *"Identificar formas geométricas del entorno natural y cultural y analizar sus características y propiedades, utilizando los datos obtenidos para describir la realidad y desarrollar nuevas posibilidades de acción."*

Además, todo lo relacionado con el sentido espacial ha sido ampliamente desarrollado por Flores, Ramírez y Del Río (2015), sentando las bases teóricas de este y otros trabajos. Según esta referencia, se distinguen tres componentes básicas que podríamos definir de la siguiente manera:

- Elementos geométricos: Propiedades que permiten la identificación, ordenación y clasificación de figuras geométricas.
- Relaciones geométricas: Apreciar cualidades en las formas y en los cuerpos geométricos como la simetría, equivalencia, congruencia, igualdad, etc.
- Ubicación y movimientos: Disponer de referentes para describir posiciones en el plano o en el espacio, llevar a cabo movimientos y reconocer en ellos regularidades o elementos invariantes.

Así mismo, también hay que tener en cuenta las destrezas de visualización, que permiten comprender cómo están dispuestos los elementos en el espacio y recordarlos. De igual manera, también consisten en disponer de imágenes, capacidades y habilidades para trabajar con información sobre las posiciones entre elementos geométricos.

En la imagen 1 se muestra un esquema de cómo se relacionan estas componentes y las destrezas de visualización.

El aprendizaje de conceptos abstractos supone un reto para los alumnos de la etapa primaria. Los materiales manipulativos ayudan a salvar esta dificultad sirviendo de apoyo visual que les permite explorar los objetos físicamente a la vez que entienden los

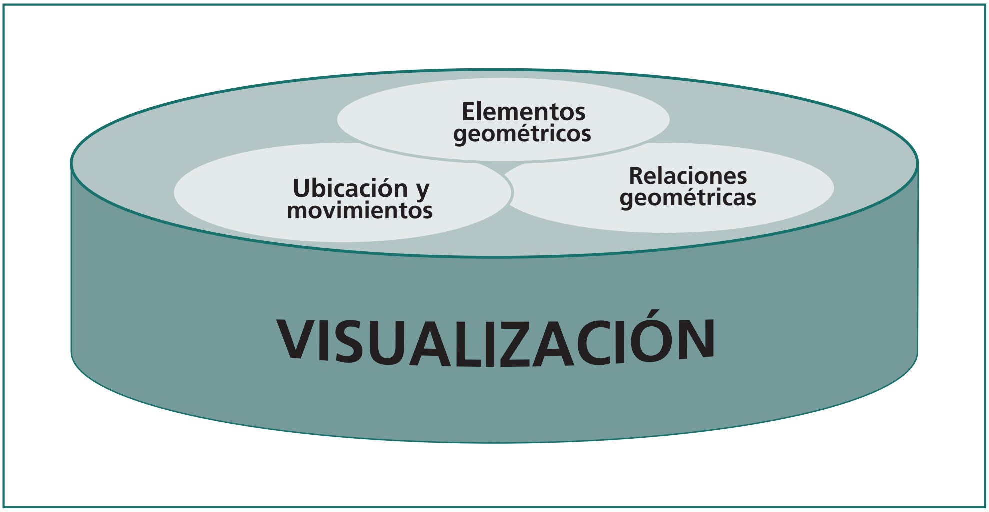


IMAGEN 1. Componentes del Sentido Espacial. Flores, Ramírez y Del Río (2015).

conceptos que están estudiando. "*Los materiales y recursos permiten al profesor plantear problemas reales o auténticos, es decir, basados en acciones sobre los objetos o relaciones entre ellos, en los que se ponen en juego los conceptos que se pretende enseñar mediante un modelo o situación familiar"* (Flores, 2016, pág. 276).

Uno de los materiales más conocidos para la enseñanza de la geometría es el TANGRAM. Puede utilizarse de la manera tradicional, para construir diferentes formas usando las 7 piezas que lo constituyen. No obstante, también nos ayuda a introducir conceptos geométricos, desarrollar habilidades mentales, mejorar la ubicación espacial, ilustrar las fracciones, etc., todo ello a través de tareas de diversa tipología, como veremos más adelante. El uso de este material se ha destacado para concienciar sobre las ventajas de la manipulación para el estudio de las propiedades geométricas y fomentar la creatividad (Fernández, 2003; Maheux y Roth, 2015). Además se ha destacado el TANGRAM como un material que permite realizar propuestas de enseñanza para favorecer el sentido espacial (Flores, 2016).

Así mismo, el alumnado presenta gran motivación cuando un material de carácter manipulativo es introducido en el aula y es por ello que apostamos por el uso del TANGRAM con una visión amplia, relacionada con la adquisición de las distintas componentes del sentido espacial.

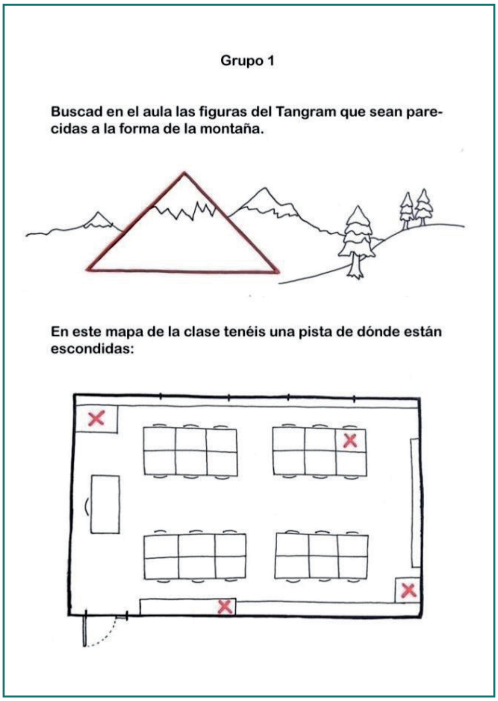
PROPUESTA

Sin duda es importante el desarrollo del sentido espacial desde un punto de vista general a lo largo de toda la etapa de primaria. De esta forma, se pretende trabajar desde un aprendizaje significativo que asiente profundamente estos conocimientos, utilizando redes conceptuales y procedimentales que se entrelazan firmemente. Cuando hablamos de aprendizaje significativo, nos referimos, por tanto, al proceso mediante el cual un nuevo conocimiento se relaciona de manera no arbitraria y sustantiva con la estructura cognitiva de la persona que aprende (Ausubel, 1963).Para ello, es fundamental el uso de un hilo conductor que vertebre la secuenciación de contenidos a lo largo de la etapa, huyendo de la compartimentación de conocimientos, principal enemigo del tipo de aprendizaje que queremos conseguir en nuestro alumnado.

Por todo lo anterior, nuestra propuesta se basa en la presentación de una tarea para cada uno de los tres ciclos de primaria, partiendo del uso del TANGRAM como recurso para apoyar la enseñanza del sentido espacial en el aula. Dichas tareas tienen en común la ambición de servir de ejemplificación de cómo la aplicación del mismo puede resultar beneficiosa para el proceso de enseñanza aprendizaje.

En cada tarea se incluyen los siguientes aspectos: el objetivo final que se quiere alcanzar a través de su realización; una descripción de cómo debe llevarse a cabo la tarea en cuanto a fases, agrupamientos, materiales, etc.; un breve análisis de qué componentes del sentido espacial se trabajan y por último, indicaciones para adaptar la tarea a la diversidad del alumnado con el que se trabaje.

PRIMER CICLO



Objetivo

- Identificar la situación de un objeto del espacio próximo en relación a sí mismo.
- Identificar, diferenciar y comparar, en los contextos familiar y escolar, las figuras planas.

Gestión de la actividad

Esta actividad se divide en tres fases:

Fase 1: Búsqueda del tesoro

Se divide al alumnado en grupos y a cada grupo se le da un folio con instrucciones como el que se muestra en la imagen. En él hay un dibujo en el que se incluye una figura plana que tienen que identificar y buscar, y un mapa sencillo de la clase con los distintos puntos en los que están escondidos las piezas. Cada grupo debe entrar en el aula y con ayuda de las instrucciones deben averiguar que pieza del tangram tienen que encontrar en las localizaciones indicadas en el mapa.

Fase 2: Reflexión

Cuando todos los grupos han encontrado las piezas se muestran a todos y se inicia una reflexión grupal dirigida por el docente. El objetivo es que reflexionen sobre cuántos tipos de piezas hay, sobre porqué saben que son diferentes, que elementos no cambian de unas a otras, etc.

Fase 3: Dibujo

Se reparte un folio a cada alumno y se les deja que escojan una pieza del tangram. La actividad consiste en que dibujen el contorno de la pieza en el folio y posteriormente realicen un dibujo integrando ese contorno con algo de su entorno que tenga esa forma (por ejemplo: dibujar una ventana a partir del cuadrado).

Componentes del sentido espacial

- *Elementos geométricos:* Desde el momento en que reconocen en las indicaciones la figura que tienen que buscar se fomenta que conozcan las figuras planas (su forma, su representación, etc.). En la segunda fase, son ellos mismos los que construyen su concepto de cada una de las formas y progresan afianzando el conocimiento sobre cómo identificarlas y construirlas.
- *Destrezas de visualización:* Se pone en práctica para interpretar el mapa y descubrir dónde están dispuestas las piezas dentro del aula.

Diversidad

Para graduar la complejidad se pueden modificar algunas variables de la actividad:
En la fase 1:

- El nivel básico sería esconder las fichas en un solo lugar dentro del aula, de forma que en el mapa solo hubiera una localización marcada. Los objetos se colocarían a simple vista.
- El nivel medio es el que se ha presentado en el ejemplo, con varias localizaciones.
- En el nivel avanzado, además de contar con varios puntos en el mapa, las fichas no estarían visibles a simple vista sino escondidas.

En la fase 3:

- El nivel más sencillo es generar un dibujo a partir del contorno de una sola pieza del TANGRAM.
- El siguiente nivel sería añadir una pieza más y con ellas hacer un dibujo en el que estén relacionadas.

Es importante destacar que puede ser el propio alumnado el que autorregule su aprendizaje añadiendo más piezas según crea conveniente.

SEGUNDO CICLO

Objetivo

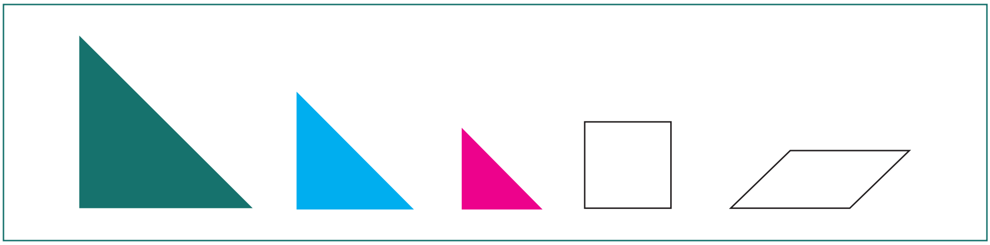
- Reconocer y describir, en el entorno cercano, las figuras planas (cuadrado, rectángulo, triángulo y romboide) e iniciarse en la clasificación de estos cuerpos.

Gestión de la actividad

Se dividirá la clase en grupos (de máximo 4 alumnos) y cada grupo tendrá un TANGRAM y una hoja cuadriculada. La actividad consiste en una competición entre grupos dónde se les pedirá que formen una figura con el TANGRAM del mayor número de formas posibles. Se recomienda empezar demandando una figura sencilla para posteriormente aumentar la dificultad poco a poco. No necesitarán utilizar todas las piezas, pueden empezar usando dos piezas y luego ir aumentando el número para encontrar más combinaciones.

Los grupos deberán de crear una hoja de registros donde pondrán una leyenda de colores para identificar las piezas que se han usado en cada combinación tal y como se muestra en la imagen.

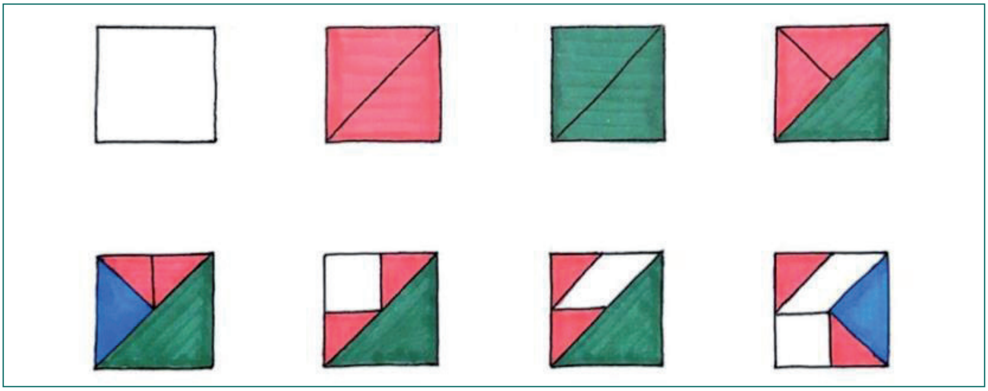
Leyenda:



Las figuras que se les pueden pedir son cuadrados, rectángulos, triángulos, romboides, trapecios isósceles, trapecios rectángulos, etc. Todas ellas pueden formarse con muchas combinaciones.

Pasado tiempo suficiente como para que los grupos crean que han encontrado todas las posibilidades, un grupo saldrá a dibujar en la pizarra las suyas. Deberán explicar que método de trabajo han usado y si creen que han hallado todas las opciones diferentes. Finalmente, si es necesario se completará con ayuda de los demás grupos.

Componentes del sentido espacial



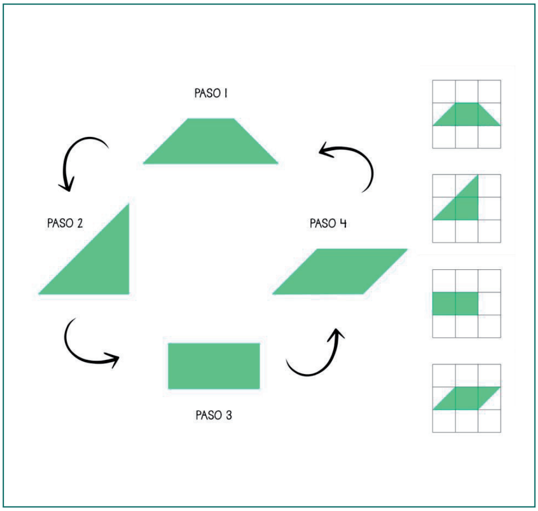
- *Elementos geométricos:* Conocer las propiedades de las formas les ayuda a saber qué condiciones tienen que tener las figuras que van a crear para corresponderse con la solicitada.
- *Reconocer y establecer relaciones geométricas:* Apreciar las cualidades y propiedades de las figuras del TANGRAM es fundamental para manejarlas de manera adecuada.
- *Ubicación y movimientos:* Los referentes les ayudarán a situar los elementos en el plano y a saber llevar a cabo los movimientos necesarios para encajar las piezas.
- *Destrezas de visualización:* Crear una representación mental será posible gracias a ellas. Aporta las habilidades necesarias para comunicar información relativa a las posiciones entre figuras que será útil a la hora de narrar al resto de la clase las conclusiones halladas por el grupo.

Diversidad

En cuanto a las figuras planas que se plantean como reto para que los grupos las formen, en esta actividad se propone empezar desde un nivel básico (un cuadrado), pero puede adaptarse según sea necesario al nivel de los alumnos. Por ejemplo, una opción es avanzar de la siguiente manera: cuadrado, triángulo, trapecio, romboide, etc.

Así mismo, se recomienda comenzar con un número limitado de piezas del TANGRAM para que el número de combinaciones posibles sea menor y los alumnos puedan controlar mejor las soluciones que pueden encontrar. Más adelante se irán incorporando más piezas, siendo un nivel básico 2 o 3 piezas y el más avanzado las 7 piezas del TANGRAM.

TERCER CICLO



Objetivo

•Interpretar, describir y elaborar representaciones espaciales utilizando las nociones geométricas básicas (situación, movimiento, paralelismo, perpendicularidad, escala, simetría, perímetro y superficie).

Gestión de la actividad:

Esta actividad consiste en la formación de figuras planas a través de modificaciones sobre una figura anterior.

Deben de usar solo el cuadrado y los dos triángulos pequeños para formar las figuras de la imagen pero para pasar de una a otra solo está permitido mover uno de los triángulos.

Los alumnos deben descubrir de qué manera realizar las transiciones y posteriormente deberán describir que translaciones, giros y simetrías hacen falta para cambiar de una figura a otra.

Componentes del sentido espacial

- *Relaciones geométricas:* Esta componente se trabajará a la hora de reconocer las relaciones entre las diferentes figuras.
- *Ubicación y movimientos:* Se pondrá en juego para saber llevar a cabo los movimientos así como para reconocer los elementos que resultarán invariantes.
- *Destrezas de visualización:* Necesarias para comprender como deben disponerse las piezas y transformar las posiciones de la figura.

Diversidad

En este caso se ha presentado la versión más sencilla de la actividad en la que se muestran los dibujos de las figuras que se piden. Además, la cuadrícula ayuda a reconocer la composición de las figuras.

Para darle mayor complejidad no se enseñarían los dibujos, para que sean los alumnos los que busquen una estrategia que les facilite el análisis y la descripción de los movimientos de la pieza.

Se les dará una hoja con una cuadrícula para que puedan tomar una referencia a la hora de describir los movimientos.

CONCLUSIONES

Este artículo pretende ofrecer una muestra de tareas que permitan la profundización en los contenidos relacionados con el sentido espacial en la Educación Primaria. Cabe destacar que un pequeño número de estas abarca gran parte del contenido establecido por la normativa para los tres ciclos. Estas tareas pueden complementarse con las recogidas por Aznarte (2017).

Para el diseño de nuevas tareas se debe partir de los contenidos mínimos recogidos por la normativa, en base a los cuales se redactarán los objetivos que se deben alcanzar con cada tarea. También deben tenerse en cuenta qué componentes del sentido espacial se activarán pues es conveniente que a lo largo de la unidad didáctica se trabajen todas. A partir de aquí, se debe pensar en la gestión de la tarea, decidiendo para cada factor (entorno, agrupamientos, método, etc.) de qué manera se ve más favorecida la consecución de los objetivos establecidos previamente. Por último, debe pensarse la adaptación a la diversidad ya que hemos de fomentar el máximo aprovechamiento de la actividad por parte de todos los alumnos, ya tengan dificultades específicas de aprendizaje o altas capacidades intelectuales.

Además, se ha desarrollado intencionalmente una propuesta de trabajo vertical a lo largo de la etapa de Primaria. Esto nos permite un análisis más eficaz de la secuenciación de los contenidos a trabajar en cada curso, apoyándonos siempre en los anteriores.

Finalmente, es nuestra intención favorecer el uso de materiales manipulativos, en este caso TANGRAM, para el desarrollo de contenidos matemáticos. De esta manera, ha quedado patente la versatilidad del TANGRAM como recurso didáctico, ya que permite el acercamiento a los contenidos matemáticos relacionados con la geometría (así como del resto de bloques de contenidos) partiendo de los principios metodológicos que favorecen el aprendizaje del alumnado.

REFERENCIAS

Ausubel, P. (1963). *The psychology of meaningful verbal learning*. New York: Grune&Stratton.

Aznarte, M. (2017). *Tareas con tangram para favorecer el sentido espacial.* Trabajo fin de Grado de la Universidad de Granada.

Boletín Oficial de la Junta de Andalucía (2015). Orden de 17 de marzo de 2015, por la que se desarrolla el currículo correspondiente a la Educación Primaria en Andalucía (BOJA nº 60, pp.9-696). Sevilla: Conserjería de Educación de la Junta de Andalucía.

Fernández, T. (2003). Geometría para futuros profesores de primaria: experiencias con el tangram chino. *SUMA*, *42*, 13-22.

Flores, P. (2016). Materiales y recursos en el aula. En L. Rico, y A. Moreno, *Elementos de didáctica de la matemática para el profesor de Secundaria* (pp. 275-291). Madrid: Pirámide.

Flores, P., Ramírez, R., y Del Río, A. (2015). Sentido espacial. En P. Flores, y L. Rico, *Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en Educación Primaria* (pp. 127-146). Madrid: Pirámide.

Maheux, J.F., y Roth, W.M. (2015). Inventing (in) early geometry, or How creativity inheres in the doing of mathematics. *REDIMAT*, *4*(1), 6-29.

Épsilon - *Revista de Educación Matemática* *2018, nº 98, 67-85*

RINCÓN "SAPERE AUDE"… ¿resolviendo problemas?

Sixto Romero
Escuela Técnica Superior de Ingeniería
Universidad de Huelva
sixto@uhu.es

INTRODUCCIÓN

En el numero anterior incluíamos en la introducción que seguiría, en esta sección de la revista Épsilon, un parágrafo, una breve reseña histórica sobre Historia de las Matemáticas: ***Matemáticas: ¿dónde comenzó todo?***

Las matemáticas son la ciencia de la descripción, la demostración y el cálculo, según el matemático Ronald Brown.

Iremos ofreciendo una breve cronología (no demasiado exhaustiva) de las matemáticas que pretende esbozar los principales avances en matemáticas en el "edificio" del tiempo.

¿Dónde y cuándo comenzó la historia de las matemáticas?

¿Los egipcios serían los primeros en utilizar las matemáticas? En Mesopotamia, las primeras excavaciones en el siglo XIX han desenterrado las tablillas sumerias de arcilla golpeados con cuneiforme que data de la primera dinastía de Babilonia (Figura 1).

Estos objetos: atestiguan la capacidad de resolver ecuaciones de segundo grado, contienen descripciones de intercambio comercial, hablan de bolsas de grano,…etc.

Es con filósofos griegos conocidos, como Pitágoras, Tales y Platón, que la aritmética, también llamada ciencia de los números, ha sido teorizada y puesta en práctica.

En ese momento, las matemáticas comenzaron a viajar por todo el mundo hasta Alejandría y su famosa escuela.

Diofanto de Alejandría, se cree que nació alrededor del 200/214 d.C. y fallecido alrededor del 284/298 d.C. (¡No se sabe con exactitud cuándo vivió Diofanto!), marca el comienzo de la aproximación algebraica. Hay varias fuentes contradictorias que nos hablan sobre la vida de Diofanto. De la vida de Diofanto, conocemos su duración: 84 años, según se deduce de un epigrama recogido por Metrodoro de Bizancio hacia el año 500 en

Fig.1 Tablillas Sumerias con escritura cuneiforme
http://losdivulgadores.com/blog/2011/07/23/los-anunnaki-los-sumerios-y-el-planeta-nibiru/
https://alamosdeviento.files.wordpress.com/2015/10/tablilla-sumeria-con-escritura-cuneiforme.jpg

la Antología Palatina. El texto ejemplifica un ejercicio aritmético en el que la incógnita resulta ser la edad del matemático. Gracias al epitafio mencionado tenemos una clave para descifrar la cantidad exacta de años que esta singular persona vivió. El epitafio ha sido traducido a una gran cantidad de idiomas y en el español ha tomado diversas adaptaciones pero en su naturaleza siempre se pueden identificar ecuaciones de primer grado para resolver un problema.

Epitafio de la tumba de Diofanto (en una de sus varias versiones):

> *"Esta tumba contiene a Diofanto. ¡Oh gran maravilla! Y la tumba dice con arte, la medida de su vida. Dios hizo que fuera niño una sexta parte de su vida. Añadiendo un doceavo, las mejillas tuvieron la primera barba. Le encendió el fuego nupcial después del séptimo, y en el quinto año después de la boda le concedió un hijo. Pero. ¡Ay! niño tardío y desgraciado, en la mitad de la vida de su padre, lo arrebató la helada tumba. Después de consolar su pena en cuatro años con esta ciencia del cálculo, llegó al término de su vida".* Las expresiones algebraicas quedarían de la siguiente manera: (Figura 2)

A pesar de lo anterior, hay pocas referencias escritas acerca de Diofanto, por tanto, no estamos muy seguros respecto a la época en que vivió. En el ensayo *Sobre los números poligonales* menciona a Hipsicles de Alejandría, quien fue probablemente el autor del libro XIV de los Elementos de Euclides y que vivió en el siglo II antes de nuestra era. Por otra parte, Teón de Alejandría (ca. 335-405 d C.) nombra a Diofanto en su Comentario al Almagesto. Entre ambas fechas límite, varios estudiosos discrepan a la hora de situar históricamente a Diofanto, aunque probablemente vivió en el siglo II d C., según afirma Paul Tannery. Sabemos por el diccionario lexicográfico de Suidas que Hipatia, la hija de Teón, redactó un Gran Comentario de la Aritmética (ahora perdido), siendo además la autora de la primera copia de los seis libros griegos que conservamos. Originalmente,

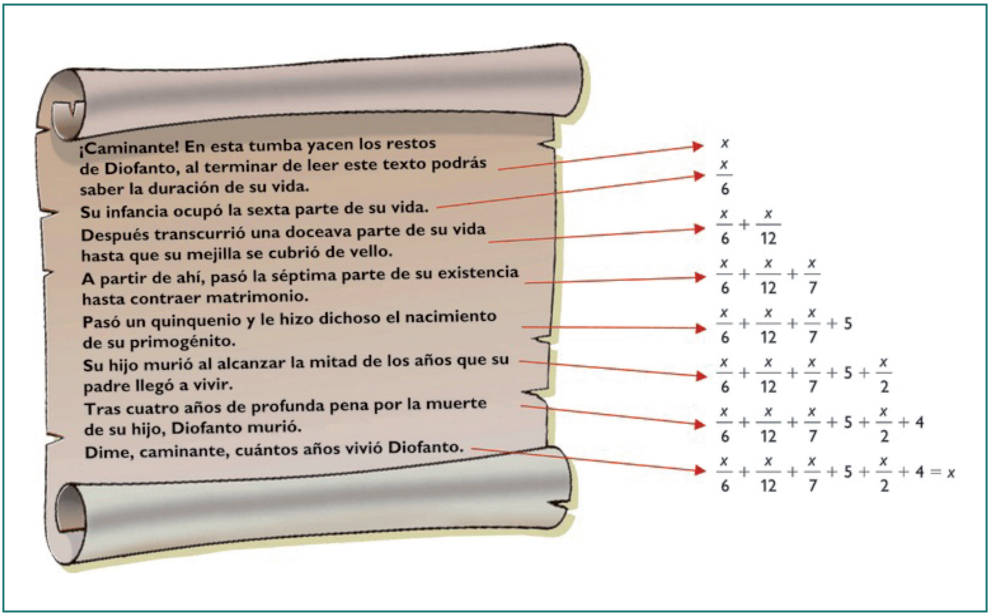


Fig. 2. Epitafio de Diofanto
http://www.ingenierogeek.com/2013/08/edad-diofanto-tiempo-vida-ecuacion-solucion.html

esta obra se componía de trece libros, según explica Diofanto en la introducción del Libro I. Pero no estamos muy seguros de ello. Su principal obra es la *Arithmetica*, Este libro, que constaba de trece libros de los que sólo se han hallado seis, fue publicado por Guilielmus Xylander en 1575 a partir de unos manuscritos de la universidad de Wittenberg, añadiendo el editor un manuscrito sobre números poligonales, fragmento de otro tratado del mismo autor. Los libros que faltan parece que se perdieron tempranamente ya que no hay razones para suponer que los traductores y comentaristas árabes dispusieran de otros manuscritos además de los que aún se conservan.

La *Arithmetica* no es una exposición sistemática de operaciones o funciones algebraicas o de la solución de ecuaciones algebraicas, sino una colección de 150 problemas concebidos en términos de ejemplos numéricos específicos (no es un texto de álgebra, sino una colección de problemas de álgebra aplicada).Su trabajo se aleja de la tradición euclidiana del álgebra geométrica y se aproxima más al álgebra babilónica numérica, aunque se diferencia de esta última por buscar soluciones exactas, positivas y racionales a ecuaciones determinadas (con una única solución) e indeterminadas, y también se diferencia por ser sus números totalmente abstractos y no referirse a medidas concretas, como dimensiones de campos o unidades monetarias, lo cual era característico de la tradición matemática del cercano Oriente.

En esta obra realiza sus estudios de ecuaciones con variables que tienen un valor racional (ecuaciones diofánticas), aunque no es una obra de carácter teórico sino una colección de problemas, adecuados para soluciones enteras. Importante fue también su contribución en el campo de la notación; si bien los símbolos empleados por Diofanto no son como los concebimos actualmente, introdujo importantes novedades como el empleo de un símbolo único para la variable desconocida (στ) y para la sustracción, aunque conservó las abreviaturas para las potencias de la incógnita (δς para el cuadrado, δδς para el duplo del cuadrado, χς para el cubo, δχς para la quinta potencia, etc.). En su época el concepto de números poligonales se extendió a los números espaciales, representados por familias de ortoedros, números piramidales.

En 1621, vio la luz una edición comentada de Bachet de Méziriac, edición reimpresa con posterioridad en 1670 por el hijo de Pierre de Fermat incluyendo los comentarios que el célebre matemático francés había realizado en los márgenes de un ejemplar de la edición de Bachet que poseía.

Los *Elementos* es considerado uno de los libros de texto más divulgado en la historia y el segundo en número de ediciones publicadas después de la Biblia (más de 1000). Durante varios siglos, el quadrivium estaba incluido en el temario de los estudiantes universitarios, y se exigía el conocimiento de este texto. Aún hoy se utiliza por algunos educadores como introducción básica de la geometría.

En estos trece volúmenes Euclides recopila gran parte del saber matemático de su época, representados en el sistema axiomático conocido como Postulados de Euclides, los cuales de una forma sencilla y lógica dan lugar a la Geometría euclidiana.

La matemática elemental nació con Euclides, Arquímedes de Siracusa y/o Apolonio de Perge. Euclides es el autor del famoso libro Los ***Elementos de Euclides*** es un tratado matemático y geométrico que se compone de trece libros, escrito por el matemático y geómetra griego Euclides cerca del 300 a. C. en Alejandría. Aunque la obra era conocida en Bizancio, era desconocida en Europa Occidental hasta alrededores de 1120, cuando el monje inglés Adelardo de Bath la tradujo al latín a partir de una traducción Árabe. En 1482, Erhard Ratdolt realizó en Venecia la primera impresión latina de la obra.

¡Hasta aquí, en esta edición!

SAPERE AUDE, GEOMETRÍA

1. Ejercicios de aquí y allá (solución a la Propuesta del número anterior 97)

Considerando las diferencias existentes entre los niveles educativos a los que nos dirigimos, se cumple en esta ocasión con la propuesta de un material atractivo que dará cuenta de teoremas y propiedades olvidadas y en la mayoría de los casos no contempladas en el curriculum.

En estas joyitas que presento se pone en evidencia, de nuevo la necesidad de reflexionar sobre las razones de por qué no se enseña la geometría elemental clásica dónde estén presentes, por ejemplo, los Elementos de Euclides. Reclamo la necesidad imperiosa de enseñar a nuestros alumnos una geometría creativa. Una vez más, traigo lo que indiqué en el número ant*erior:* "*…una razón para insistir en la enseñanza de la Geometría podemos encontrarla en nuestro entorno inmediato, basta con mirarlo y descubrir que en él se encuentran muchas relaciones y conceptos geométricos: la Geometría modela el espacio que percibimos: construcción y demostración teórica de esta parte de las Matemáticas...*" .

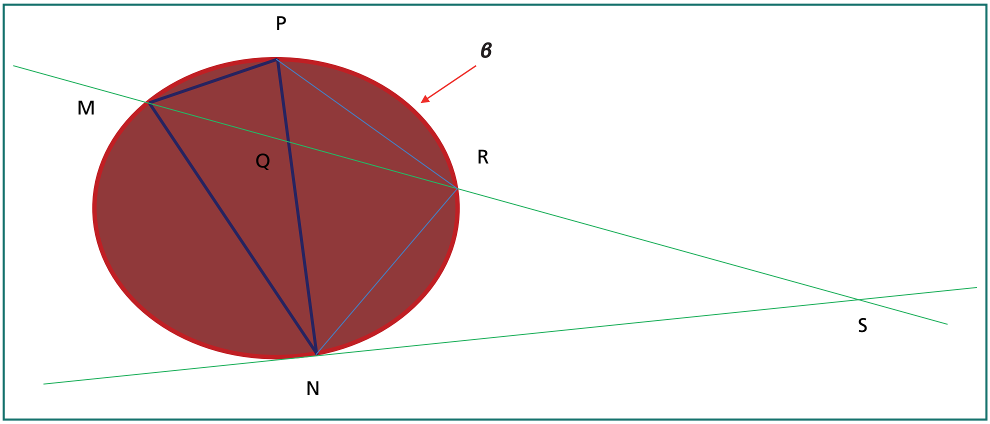


Fig.3. Joyita Geométrica (a).

En esta ocasión, trabajaremos la potencia de un punto, en las vertientes de punto interior, exterior y tangente a una circunferencia. Además, el teorema del coseno, denominado también como ley de cosenos, es una generalización del teorema de Pitágoras en los triángulos rectángulos en trigonometría que relaciona un lado de un triángulo cualquiera con los otros dos y con el coseno del ángulo formado por estos dos lados. *Los Elementos* de Euclides contienen ya una aproximación geométrica de la generalización del teorema de Pitágoras: las proposiciones 12 y 13 del libro II, tratan separadamente el caso de un triángulo obtusángulo y el de un triángulo acutángulo. La formulación de la época podemos considerarla en desuso ya que la ausencia de funciones trigonométricas y del álgebra obligó a razonar en términos de diferencias de áreas.

Propuesta 1: dos joyitas geométricas

JOYITA: a) *Sea MNP un triángulo acutángulo. La bisectriz del ángulo en M corta al lado NP en Q y el círculo β circunscrito al triángulo MNP en R. La tangente a β en N corta a MQ en S. Demostrar que si* $MQ^2=2\,PQ^2$*, entonces R es la mitad de MS (Figura 3).*

SOLUCIÓN

PASO 1

Por el teorema del ángulo inscrito $\widehat{PMR} = \widehat{PNR}$. Además, utilizando siempre este teorema y el del ángulo tangencial, $\widehat{RMN} = \widehat{RPN} = \widehat{RNS}$.

Puesto que MQ es la bisectriz de $\widehat{PMN}$, los cinco ángulos son iguales y NR es la bisectriz del ángulo $\widehat{SNQ}$.

PASO 2

Aplicando el teorema de la bisectriz al triángulo SNQ, obtenemos

$$\frac{QR}{NQ} = \frac{RS}{NS} \text{ y por lo tanto } \frac{(QR)^2}{(NQ)^2} = \frac{(RS)^2}{(NS)^2}$$

Teniendo en cuenta el teorema sobre la potencia de un punto (En geometría elemental, la expresión **potencia de un punto** se refiere a un resultado que relaciona las longitudes de segmentos de rectas que pasan por dicho punto y cortan a una circunferencia fija) que afirma: " *Si dos rectas que pasan por un punto, en nuestro caso, S (exterior a la circunferencia* ***β****) y Q (interior a β) cortan a* ***β*** *en los puntos, respectivamente, (N,R, M), y (M,P, R, N) , entonces:*

$$MS.RS = (NS)^2 \text{ \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ } QM.\ QR = QP.QN\text{"}$$

PASO 3

De aquí se deduce que la potencia del punto S con relación a la circunferencia ***β*** nos da como se cita ut-supra

$$(NS)^2 = MS.\ RS$$

$$\frac{(QR)^2}{(NQ)^2} = \frac{(RS)^2}{(NS)^2} = \frac{(RS).\ (RS)}{(MS).\ (MS)} = \frac{RS}{MS}$$

Análogamente, la potencia del punto interior Q con relación a la circunferencia ***β*** nos da $MQ.QR = NQ.PQ$,

$$\text{y por lo tanto } \frac{(QR)^2}{(NO)^2} = \frac{(PQ)^2}{(MO)^2} = \frac{1}{2}$$

De aquí sigue que como $\frac{(QR)^2}{(NO)^2} = \frac{RS}{MS}$

Se tiene que $\frac{RS}{MS} = \frac{1}{2}$, y por ende R es el punto medio del segmento MS csqd.

JOYITA: b) *Sea* ***MNP*** *un triángulo equil*átero ***de altura 1 unidad de longitud****. El círculo* β *de radio 1 y de centro situado en el mismo lado de* ***MN*** *que* ***P*** *es tangente a* ***MN*** *en un punto situado entre* ***M*** *y* ***N****. Mostrar que la longitud de arco de círculo situado en el interior del triángulo* ***MNP*** *es independiente del punto de tangente.*

SOLUCIÓN

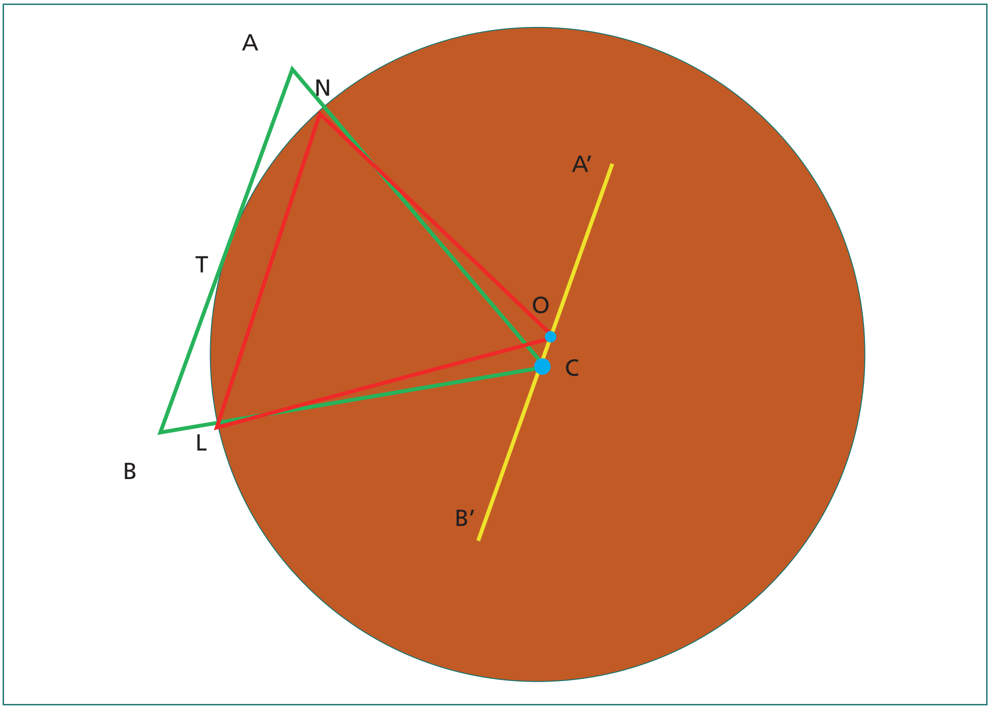


Fig. 4. Joyita Geométrica (b).

PASO 1

Un círculo de radio 1 unidad, teniendo su centro en el semiplano de frontera el lado *AB* conteniendo al punto C, es tangente en T al lado *AB*. Se deduce que le centro O de este círculo está situado sobre la paralela ***t*** a *AB* pasando por C.

Es más, si notamos respectivamente por A' y B' las proyecciones ortogonales de A y B sobre ***t*** , el centro O pertenece al segmento *A'B'*. Notemos que C es entonces la mitad del segmento *A'B'*. El círculo de centro O, radio 1 corta a *BC* en L y a *AC* en N.

PASO 2

Consideremos los triángulos *LCO y NCO.*

Supongamos, sin pérdida de generalidad ninguna que O está situado sobre *CA'*,

entonces el ángulo $\widehat{LCO} = 120^{o}$ y el ángulo $\widehat{NCO} = 60^{o}$.

a) Aplicando el teorema del coseno en el triángulo LCO se tiene:

$$OL^2 = OC^2 + CL^2 - 2\ OC.CL.\cos(120^o)$$

$$1 = OC^2 + CL^2 + 2.\ OC.CL.(1/2), \text{ por lo tanto}$$

$$\mathbf{1 = OC2 + CL2 + OC.OL} \qquad \mathbf{(Ec.\ i)}$$

b) Aplicando análogamente el teorema del coseno en el triángulo NCO, obtenemos:

$$ON^2 = OC^2 + CN^2 + 2.\ OC.CN.\ \cos(60^o)$$

$$\mathbf{1 = OC2 + CN2 - OC.CN} \qquad \mathbf{(Ec.\ ii)}$$

Se deduce que

$$\mathbf{OC^2 + CL^2 + OC.OL = OC^2 + CN^2 - OC.CN,} \text{ de dónde}$$

$$\mathbf{CL^2 + OC.OL = CN^2 - OC.CN} \Rightarrow OC.\ [CL+CN] = CN^2 - CL^2 = (CN+CL).(CN+CL)$$

PASO 3

Dado que $CL + CN \neq 0$, se tiene que $OC=CN=CL$
Sumando miembro a miembro las ***(Ec i)*** y ***(Ec ii)***, obtenemos

$$2 = 2.\ OC^2 + CL^2 + CN^2 + OC.[CL-CN]$$
$$2 = 2.\ OC^2 + CL^2 + CN^2 - OC^2$$
$$2 = OC^2 + CL^2 + CN^2$$
$$2 = [CN- CL]^2 + CL^2 + CN^2$$
$$2 = 2.\ CN^2 + 2.CL^2 - 2\ CN.CL$$
$$1 = CN^2 + CL^2 - CN.CL$$

O en el triángulo CLN se tiene que:

$$LN^2 = CL^2 + CN^2 - 2CL.CN\ \cos(60^o)$$

De aquí llegamos a que $LN = 1$, y esto prueba que le triángulo oln es equilátero. Por lo tanto, el arco LN del círculo de radio 1 tangente a al lado AB tiene por longitud $\pi/3$. Los casos particulares para los que O esté en C, A' o B'son triviales.

SAPERE AUDE, TEORÍA DE NÚMEROS

Propuesta 2: dos joyitas numéricas

La Teoría de números, rama de las matemáticas relacionadas con las propiedades de los enteros positivos, a veces llamado *aritmética superior*, se encuentra entre las actividades matemáticas más antiguas y naturales y siempre ha fascinado tanto a los aficionados como a los matemáticos profesionales. En contraste con otras ramas de las matemáticas, muchos de los problemas y teoremas de la teoría de los números pueden ser entendidos por legos, aunque las soluciones a los problemas y las pruebas de los teoremas a menudo requieren un fondo matemático sofisticado.

Para Pitágoras no solamente "el número gobierna el tono musical" sino que va más allá y piensa que el número es la clave de toda la naturaleza y del cosmos, pensamiento recogido en el aforismo "el número es la esencia de todas las cosas". El concepto matemático que estaba detrás de esta idea de que todo se puede medir, que las magnitudes son conmensurables, es el de los "números racionales", es decir, que cualquier magnitud –número- se podía expresar como la razón, o cociente, entre dos números naturales. O como lo expresaríamos hoy en día, solamente existirían los números racionales, aquellos que se pueden expresar como "p/q**.**

Una crisis profunda del pensamiento pitagórico la marcó la existencia de los números inconmensurables. Este hecho se escondía detrás del teorema de Pitágoras, puesto que si se considera un triángulo rectángulo cuyos catetos valgan 1, la hipotenusa h (que por el teorema es tal que $h^2 = 2$) no es racional. Aunque autores como los filósofos griegos neoplatónicos Proclo (410-485) o Jámblico (aprox. 245-330) atribuyen al propio Pitágoras el descubrimiento de los inconmensurables, se suele conceder su autoría a Hipasos de Metaponto (siglo V a.c.), hacia el año 480 a.c., de quien se dice que murió asesinado por los pitagóricos por difundir ese resultado fuera de la hermandad.

En una nota (atribuida a Proclo) a "*Los Elementos*" de Euclides se dice…

> "Es fama que el primero en dar al dominio público la teoría de los irracionales pereciera en un naufragio, y ello porque lo inexpresable e inimaginable debería siempre haber permanecido oculto. En consecuencia, el culpable, que fortuitamente tocó y reveló este aspecto de las cosas vivientes, fue trasladado a su lugar de origen, donde es flagelado a perpetuidad por las olas".

Sin embargo, Pitágoras creía en la definición absoluta de los números y esto le obligaba a no creer en la existencia de los números irracionales. Por esta razón estando ya desde el principio, en contra de esa demostración, sus compañeros pitagóricos sentenciaron a Hípaso a la pena capital, ahogándole en el mar. El matemático griego Teeteto (417 a.C.-369 a.C.) proponía el problema de encontrar el lado de un cuadrado, cuya área sea el doble de área de un cuadrado de lado {\displaystyle m}"l". Cuya solución conlleva la aparición de la raíz cuadrada de dos.

Hasta mediados del siglo XX, la teoría de números se consideraba la rama más pura de las matemáticas, sin aplicaciones directas al mundo real. La llegada de los ordenadores y de las nuevas tecnologías revelaron que la teoría de los números podría proporcionar respuestas inesperadas a muchos problemas del mundo real. Al mismo tiempo, las mejoras en la tecnología informática permitieron a los investigadores en teoría de números, realizar avances notables al *factorizar grandes números*, *determinar números primos*, *probar conjeturas* y *resolver problemas numéricos* que antes se consideraban inalcanzables.

La moderna teoría de números es una disciplina amplia que se clasifica en subtítulos tales como *teoría elemental, teoría algebraica, teoría analítica, teoría geométrica y teoría probabilística.* Estas categorías reflejan los métodos utilizados para abordar los problemas relacionados con los enteros.

Dos ejercicios, joyitas, con diferentes grados de dificultad presentamos en este Sapere Aude.

JOYITA: a) *Trabajemos con el número irracional raíz de dos. Consideremos unos cálculos algebraicos elementales donde interviene el número irracional* $\sqrt{2}$:

$$(\sqrt{2}-1)^1 = -1+\sqrt{2}$$
$$(\sqrt{2}-1)^2 = (\sqrt{2}-1).(\sqrt{2}-1) = 2-2\sqrt{2}+1 = 3-2\sqrt{2}$$

- ***a.1.*** *¿Cuál es el valor de las siguientes potencias,* $(\sqrt{2}-1)^3$, $(\sqrt{2}-1)^4$, $(\sqrt{2}-1)^5$,,,?
- ***a.2.*** *Después de algunos cálculos, ¿sabríais obtener, como generalización, una expresión para* $(\sqrt{2}-1)^n$*?*
- ***a.3.*** *Se podría pensar en una expresión de la forma* $(\sqrt{2}-1)^n = A_n - B_n\sqrt{2}$. *¿Cómo podemos escribir* A_n *y* B_n*?*

SOLUCIÓN

PASO 1

- ***a.1.*** Calculemos las potencias que se solicitan $(\sqrt{2}-1)^3$, $(\sqrt{2}-1)^4$, $(\sqrt{2}-1)^5$,,,?

Sabemos que

$$(\sqrt{2}-1)^1 = -1+\sqrt{2}$$

$$(\sqrt{2}-1)^2 = (\sqrt{2}-1).\,(\sqrt{2}-1) = 2-2\sqrt{2}+1 = 3-2\sqrt{2}$$

Entonces

$$(\sqrt{2}-1)^3 = (\sqrt{2}-1)^2(\sqrt{2}-1) = -7+5\sqrt{2}$$

$$(\sqrt{2}-1)^4 = (\sqrt{2}-1)^3(\sqrt{2}-1) = (-7+5\sqrt{2})\,(\sqrt{2}-1) = 17-12\sqrt{2}$$

$$(\sqrt{2}-1)^5 = (\sqrt{2}-1)^4(\sqrt{2}-1) = (17-12\sqrt{2})\,(\sqrt{2}-1) = -41+29\sqrt{2}$$

....

- ***a.2.*** Después de estos cálculos observamos que todas las potencias quedaran de la forma

$$(\sqrt{2}-1)^n = A_n - B_n\sqrt{2}$$

PASO 2

Estudiemos esta expresión última

El mayor número entero estrictamente inferior a $\sqrt{2}$ es 1, y esto hace que la expresión $\sqrt{2}-1$ sea un número estrictamente inferior a 1. Se puede escribir por lo tanto, sin temor a equivocarnos que:

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{2}-1)^n = 0.$$

Y consecuentemente

$$\lim_{n\to\infty}(A_n - B_n\sqrt{2}) = 0.$$

Por ejemplo, tomando la línea de más arriba $-41+29\sqrt{2}\approx 0$ que corresponde al exponente n=5 de dónde $\sqrt{2}\approx\frac{41}{29}\approx 1{,}41379310344828\ldots\ldots$

El valor aproximado de $\sqrt{2}$ es tanto mejor con el aumento de ***n***, es decir cuándo ***n*** es grande.

A partir de la expresión $(\sqrt{2}-1)^n = A_n - B_n\sqrt{2})$ se puede calcular fácilmente el término siguiente.

PASO 3

$$(\sqrt{2}-1)^n = A_n - B_n\sqrt{2}$$

$$(\sqrt{2}-1)^{n+1} = (\sqrt{2}-1)^n(\sqrt{2}-1) = (A_n - B_n\sqrt{2})(\sqrt{2}-1)$$

$$= A_n\sqrt{2} - A_n - 2B_n + B_n\sqrt{2}) = \underbrace{(-A_n - 2B_n)}_{A_{n\;1}} - \underbrace{(-A_n - B_n)}_{B_{n\;1}}\sqrt{2}$$

De dónde

$$(\sqrt{2}-1)^{n+1} = \underbrace{(-A_n - 2B_n)}_{A_{n\;1}} - \underbrace{(-A_n - B_n)}_{B_{n\;1}}\sqrt{2}$$

PASO 4

Así podemos considerar las tres sucesiones siguientes:

$$A_n := \begin{cases} A_1 = -1 \\ A_{n+1} = -A_n - 2B_n \end{cases} \quad ; \quad B_n := \begin{cases} B_1 = -1 \\ B_{n+1} = -A_n - B_n \end{cases} \quad ; \quad R_n := \frac{A_n}{B_n}$$

PASO 5

A partir de este resutado podemos calcular los términos consecutivos con un programa adecuado, por ejemplo MATLAB, SCILAB, MAPLE.

Fig. 5. Tabla Número

n	An	Bn	Rn
1	-1	-1	1
2	3	2	1,5
3	-7	-5	1,4
4	17	12	1,4166666666667
5	-41	-29	1,4137931034483
6	99	70	1,4142857142857
7	-239	-169	1,414201183432
8	577	408	1,4142156862745
9	-1393	-985	1,4142131979696
10	3363	2378	1,4142136248949
…	…	…	…
…	…	…	…
…	…	…	…
…	…	…	…
20	22619537	15994428	1,4142135623731

Obsérvese que verdaderamente para R_n: $= \dfrac{A_n}{B_n}$

su límite: $\lim\limits_{n \to \infty} R_n = \sqrt{2}$

JOYITA: b) *La sucesión de números denominada sucesión de Padovan (en honor a Richard Padovan, arquitecto y matemático nacido en 1935) es la sucesión recurrente definida así:*

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{u_{n-1}}{u_n}+\frac{u_{n-2}}{u_n}$$

La sucesión puede ser anodina, ***1,1,1,2,2,3,4,5,7,9,12, 16,…***

pero si nos fijamos en el cociente $p_n=\frac{u_{n+1}}{u_n}$ *y calculamos el valor hacia el que tiende en el límite cuando n tiende a infinito, nos encontraremos el número denominado* ***número de plata*** *en similitud con el* ***número de oro*** *o número plástico en el sentido de la belleza arquitectónica.*

- ***b.1.*** *Calcular el valor del límite:* $\Psi = \lim_{n\to\infty}\frac{P_{n+1}}{P_n}$
- ***b.2.*** *La idea de dibujar una sucesión de triángulos equiláteros en los que la longitud de los lados sean los números de la sucesión de Padovan nos lleva a conseguir una bella figura denominada* ***Espiral de triángulos de Padovan****.* ¿Sabrías dibujarla?.*Utilizar cualquier programa para obtener el dibujo.*

SOLUCIÓN

- ***b.1.*** Calculemos $\Psi = \lim_{n\to\infty}\frac{P_{n+1}}{P_n}$

PASO 1

Para poder tener una idea inicial de cómo va a converger la sucesión p_n calculemos los primeros 20 términos en la siguiente tabla, utilizando una Excel-2016:

Fig. 6. Tabla Sucesión de Padovan

SUCESIÓN DE PADOVAN		
n	**u(n)**	**p(n)**
1	1	1
2	1	1
3	1	2
4	2	1
5	2	1,5
6	3	1,333333333
7	4	1,25
8	5	1,4
9	7	1,285714286
10	9	1,333333333
11	12	1,333333333

SUCESIÓN DE PADOVAN		
n	**u(n)**	**p(n)**
12	16	1,3125
13	21	1,333333333
14	28	1,321428571
15	37	1,324324324
16	49	1,326530612
17	65	1,323076923
18	86	1,325581395
…	…	…
80	696081	1,32471779572

Se constata rápidamente que no es necesario avanzar mucho en la sucesión para afirmar que los resultados de la segunda columna crecen indefinidamente,

$$\lim_{n \to \infty} u_n = +\infty$$

y que los resultados de la tercera columna, la sucesión de los p_n, se van acercando a $\lim_{n \to \infty} p_n = 1{,}3247179572$ a partir del lugar 80.

PASO 2

Abordemos el ejercicio desde el punto de vista del análisis.
Partamos de la igualdad $u_{n+1} = u_{n-1} + u_{n-2}$ dividiendo los dos términos por u_n ϕ, escribamos esta nueva expresión así

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{\frac{u_n}{u_{n-1}}} + \frac{u_{n-2}}{u_n}$$

Que a su vez se puede escribir

$$\Psi$$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{\frac{u_n}{u_{n-1}}} + \frac{1}{\frac{u_{n-1}}{u_{n-2}}} \cdot \frac{1}{\frac{u_n}{u_{n-1}}}$$

Suponiendo que existe el límite de este cociente, llamémosle Ψ

$\Psi = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n}$, el límite entre ***(término siguiente)/(término)***. Suponiendo que exista y tomando límites en la igualdad anterior obtenida ut-supra, Ψ deberá verificar la igualdad

$$\Psi = \frac{1}{\Psi} + \frac{1}{\Psi} \cdot \frac{1}{\Psi}$$

De dónde

$$\psi^3 = 1 + \psi \Rightarrow \psi = \sqrt[3]{1+\psi} = \sqrt[3]{1+\sqrt[3]{1+\psi}} = \sqrt[3]{1+\sqrt[3]{1+\sqrt[3]{1+\psi}}} =$$
$$= \sqrt[3]{1+\sqrt[3]{1+\sqrt[3]{1+\psi}}} = \sqrt[3]{1+\sqrt[3]{1+\sqrt[3]{1+\sqrt[3]{1+\ldots\ldots\ldots}}}}$$

PASO 3

Esta ecuación de grado 3 en Ψ admite una solución real, que se puede calcular, por ejemplo, utilizando la fórmula de Cardano.

NOTA: Fórmula de Cardano. Dado la ecuación de grado tres:

$x^3 + ax^2 + bx + c = 0$. Hacemos el cambio $x = y - \frac{a}{3}$ de dónde la ecuación quedaría así $y^3 + \frac{3b - a^2}{3} y + \frac{2a^3 - 9ab + 27c}{27} = 0$, que podemos escribir en forma reducida cuya solución es

$$y = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

En el caso que nos ocupa ***a* = 0, *b* = -1**, y ***c* = -1**.

Por ello

$$p = \frac{3(-1) - 0^2}{3} = \frac{-3}{3} = -1; q = \frac{2.0^3 - 9.0.(-1) + 27(-1)}{27} = -1$$

$$\psi = \sqrt[3]{\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{27}}} = \sqrt[3]{\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{23}{4.27}}} + \sqrt[3]{\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{23}{4.27}}} =$$
$$= \sqrt[3]{\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{23}{2^2 27}}} + \sqrt[3]{\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{23}{2^2.27}}} = \sqrt[3]{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{23}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{23}{27}}} =$$
$$= 1{,}3247179572\ldots$$

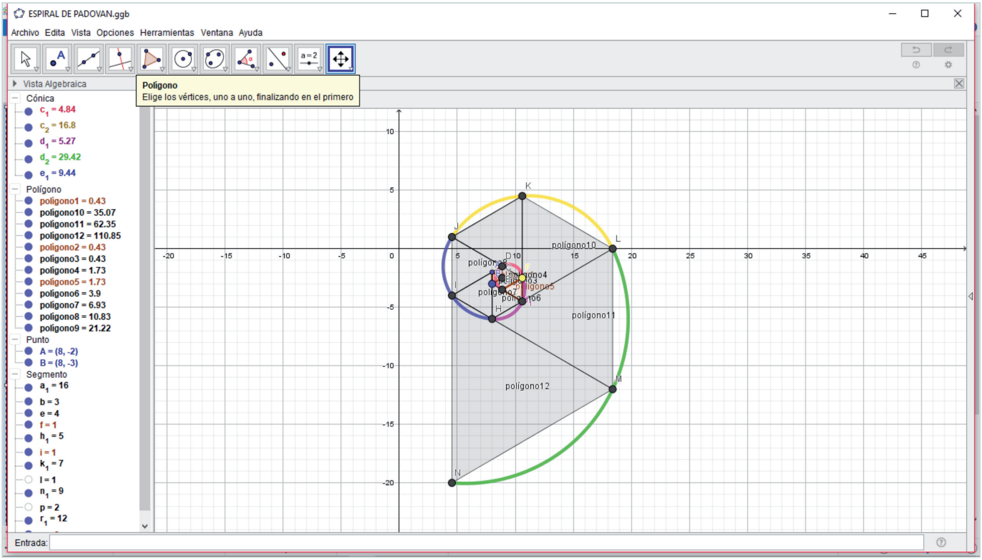


Fig. 7. Espiral de Padovan

Es decir, $\Psi = 1{,}3247179572...$

NOTA: La ecuación $\Psi^3 - \Psi - 1 = 0$ se puede escribir

$$\psi^3 = 1+\psi \Rightarrow \psi = \sqrt[3]{1+\psi} = \sqrt[3]{1+\sqrt[3]{1+\psi}} = \sqrt[3]{1+\sqrt[3]{1+\sqrt[3]{1+\psi}}} =$$

$$= \sqrt[3]{1+\sqrt[3]{1+\sqrt[3]{1+\psi}}} = \sqrt[3]{1+\sqrt[3]{1+\sqrt[3]{1+\sqrt[3]{1+\text{.........}}}}}$$

$$\psi = \sqrt[3]{1+\sqrt[3]{1+\sqrt[3]{1+\sqrt[3]{1+\text{.........}}}}}$$

Este número Ψ se denomina ***número de plata*** por su similitud con el ***número aúreo***, ϕ, y también se le suele llamar nombre de plástico, en el sentido de la belleza arquitectónica.

- ***b.2.*** Para obtener la **Espiral de triángulos de Padovan**, hemos utilizado Geogebra (Figura 7).

Como es necesario utilizar los tres primeros términos de la sucesión, dibujemos los tres triángulos primeros en el sentido de las agujas del reloj. Y después el resto.

SAPERE AUDE, EJERCICIOS DE AQUÍ Y ALLÁ, PROPUESTAS

En esta ocasión voy a proponer dos ejercicios de características muy diversas. El primero de geometría clásica en la misma línea que he ido proponiendo en números anteriores. Y en el segundo propongo lo que se podría llamar ***Geometría para reír y para llorar***, utilizando los "smileys". Un *smiley* (del inglés *to smile*, 'sonreír') es una representación esquemática de una cara sonriente. La mayoría de las veces es de color amarillo, con dos puntos negros como ojos y medio círculo mostrando una expresión de completa y plena felicidad (Figura 8).

Fig. 8. Smiley sonriente.
https://es.wikipedia.org/wiki/Smiley#/media/File:Smiley.svg

A veces se usa «smiley» como sinónimo de emoticono, si bien no lo es, ya que no todos los emoticonos son *smiley.*

Propuesta 1: dos joyitas geométricas

a) Sea PQRST un pentágono convexo tal que los lados cumplen que PQ = PR, PS = PT y los ángulos RPS = PQT + PTQ. Si el punto M es la mitad de QT, probar que el lado RS = 2 PM (Figura 9).

b) Con un poco e imaginación, para conseguir un smiley, utilizaremos puntos, círculos, segmentos, cónicas,… . ¡Ánimo!

Construir un smiley con tres círculos (la cabeza y los dos ojos), cuatro puntos (las dos pupilas y los dos orificios de la nariz), dos segmentos (la nariz), y un arco de parábola (para la boca) (Figura 10).

Propuesta 2: dos joyitas numéricas

Presento dos ejercicios de diferente corte y con un cierto grado de dificultad.

Por un lado, el primero representa una curiosidad, como puede comprobar el lector. Una resolución de ecuaciones ciclométricas (funciones trigonométricas inversas) hacen intervenir cocientes de números que forman la sucesión de Fibonacci.

Y en el segundo se plantea la resolución de la suma de factoriales de números positivos. El factorial de un entero positivo ***n***, se define como el producto de todos los números enteros positivos desde 1 (es decir, los números naturales) hasta *n*. Por ejemplo:

1! =1___2!=1.2=2___ 3!=1.2.3=6___4!=1.2.3.4=24___5!=1.2.3.4.5=120……….

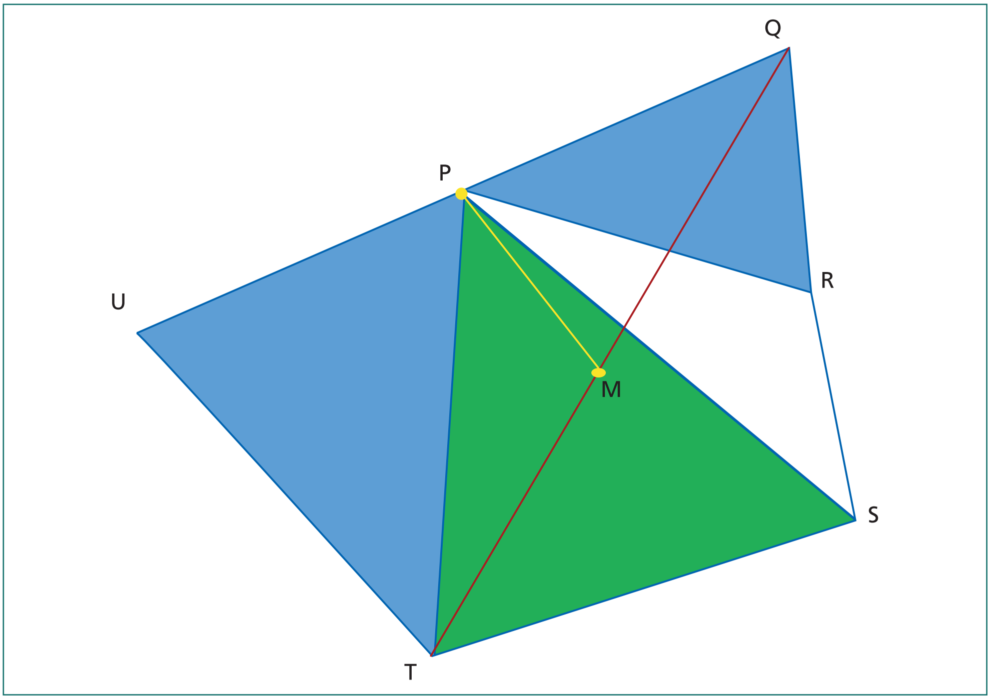


Fig. 9. Pentágono Convexo.

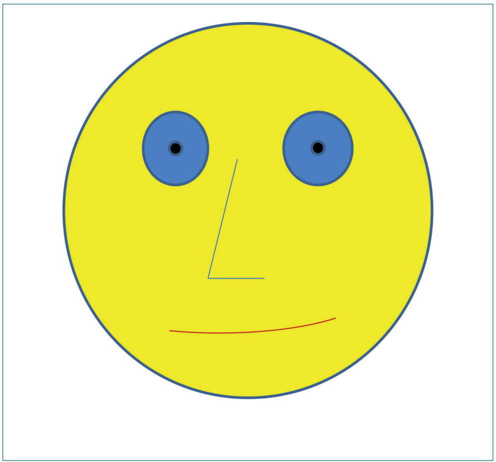


Fig. 10. Smiley para construir.

La operación de factorial de un número aparece en muchas áreas de las matemáticas, particularmente en combinatoria y análisis matemático. Estructuralmente, ***el factorial de n*** representa el número de formas distintas de ordenar n objetos distintos (elementos sin repetición). Este hecho ha sido conocido desde hace varios siglos, en el siglo XII por los estudiosos hindúes.

La definición de la función factorial también se puede extender a números no naturales manteniendo sus propiedades fundamentales, pero se requieren matemáticas avanzadas, particularmente del análisis matemático.

La notación matemática actual ***n!*** fue usada por primera vez en 1808 por Christian Kramp (1760–1826), un matemático francés que trabajó en especial sobre los factoriales toda su vida.

a) Demostrar sin ayuda de ninguna calculadora que

$$arctg\ \frac{144}{233} + arctg\ \frac{89}{377} = \frac{\pi}{4}$$

b) *En este segundo ejercicio, sin necesidad de utilizar calculadora y sin desarrollar, de forma razonada resolver las cuestiones siguientes:*

b.1. *¿En qué cifra termina **1!+2!+3!+4!+5!** ?*

b.2. *¿Y **1!+2!+3!+4!+5!+…..+10!** ?*

b.3 *¿Y **1!+2!+3!+4!+5!+6!+………..100!** ?*

b.4. *Tal vez asuste un poco la pregunta. ¿y **1!+2!+3!+……………+1000!** ?*

b.5. *¿Podemos sacar una conclusión para la suma*

$$\sum_{i=1}^{n} i!$$

siendo ***n*** cualquier número positivo?

NOTA: Las respuestas pueden enviarla a la dirección electrónica:
sapereaudethales@ gmail.com