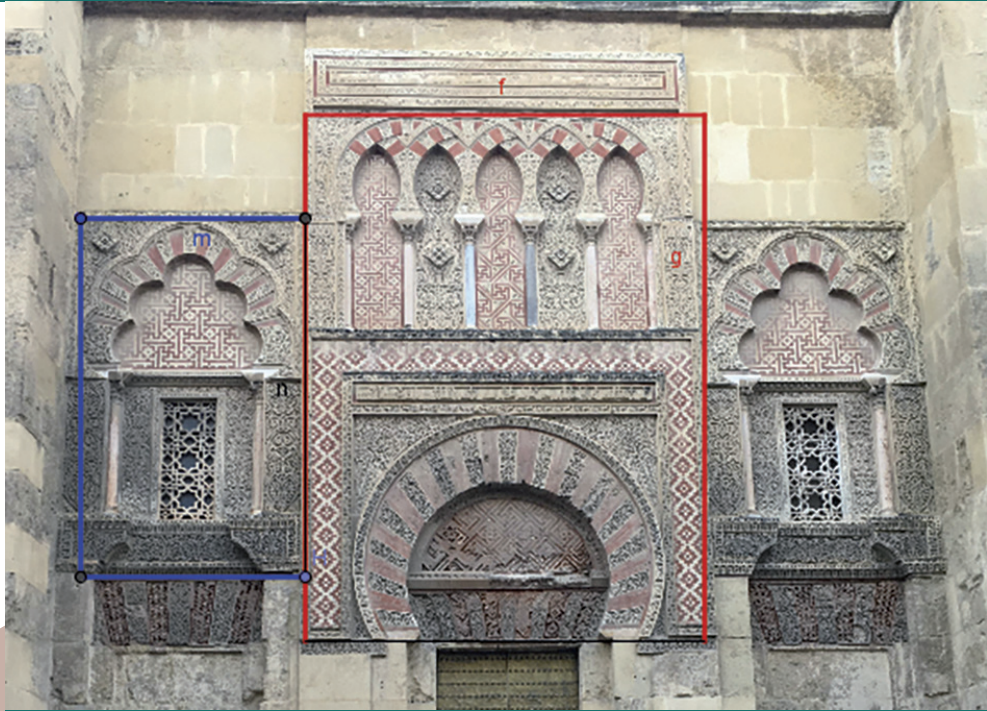


96

2017



epsilon

Revista de Educación Matemática

Editada por la S.A.E.M. "THALES"

epsilon 96

Revista de Educación Matemática

Director

Alexander Maz

Comité Editor

Francisco España,

Inmaculada Serrano

José María Vázquez de la Torre

Salvador Guerrero

Noelia Jimenez

Comité Científico

Evelio Bedoya,

Universidad del Valle, Colombia.

José Carrillo

Universidad de Huelva, España.

José Iván López Flores,

Universidad Autónoma de Zacatecas, México

José Ortiz,

Universidad de Carabobo, Venezuela.

Liliana Mabel Tauber,

Universidad Nacional del Litoral, Argentina.

M^a Mar Moreno,

Universidad de Lleida, España.

Matías Camacho,

Universidad de la Laguna, España.

Roberto Alfredo Vidal Cortés,

Universidad Alberto Hurtado, Chile.

Patricia Pérez Tyteca

Universidad de Alicante

Página de la revista: <http://thales.cica.es/epsilon>

Revista: epsilon@thales.cica.es

Sociedad Andaluza de Educación Matemática “Thales”

Edita
Sociedad Andaluza de
Educación Matemática “Thales”
Centro Documentación “Thales”
Universidad de Cádiz
C.A.S.E.M.
11510 PUERTO REAL (Cádiz)

Maquetación e impresión
Grafitrés, s.l.
Cristóbal Colón, 12
41710 Utrera (Sevilla)

Depósito Legal
SE-421-1984

ISSN
2340-714X

Período
2017

Suscripción
Anual

7

INVESTIGACIÓN

7 **El Tratado de Geometría Analítica de Juan Cortázar a través de sus ediciones.** The Tratado de Geometría Analítica written by Juan Cortázar through its editions.

Carmen León-Mantero

María José Madrid

Dieleny Castro

23 **Algunos Fenómenos Matemáticos que organiza el concepto de desigualdad.**

Some mathematical phenomena organizing the concept of inequality.

Silvia Bernardis

Liliana Nitti

Sara Scaglia

45

EXPERIENCIAS

45 **Un sierpinski en la fachada.** Sierpinski's Triangle on the Facade.

Pedro Carlos Moreno Ferrari

61 **Córdoba, una ciudad muy proporcionada.** Córdoba, a very provided city.

Fernando Arribas Ruiz

María del Carmen Galán Mata

Jaime González Cimas

Álvaro Luque Borrego

71

IDEAS PARA EL AULA

71 **Actividades para la Orientación Espacial en espacios reales.** Activities for Space Orientation in real spaces.

Teresa F. Blanco

Juan Jesús Freire Pérez

María Salgado

81 **El aprendizaje del conteo y el recitado de la secuencia de palabras número: Articulando las matemáticas importantes con las imprescindibles.** Learning counting and recitation of the number words sequence: The articulation of important and indispensable mathematics.

Carlos de Castro Hernández

Mónica Ramírez García

101

MISCELÁNEA

101 **RINCÓN “SAPERE AUDE”... ¿resolviendo problemas?**

Sixto Romero

109 **La superMATEsobrina y el enigma del gran astrolabio.**

Manuel García Piqueras

(Reseña: Rafael Pérez Gómez, Universidad de Granada)

El Tratado de Geometría Analítica de Juan Cortázar a través de sus ediciones

Carmen León-Mantero

Universidad de Córdoba

María José Madrid

Universidad Pontificia de Salamanca

Dicleny Castro

Universidad del Tolima

Resumen: *En las últimas décadas, los investigadores en Historia de la Educación Matemática han centrado su interés en el estudio de los manuales escolares, debido a que su análisis manifiesta los conocimientos científicos de la época, los conocimientos que se impartían en los centros y cómo se enseñaban, así como el modelo organizativo del plan de estudios vigente. El presente estudio analiza una de las obras del autor del siglo XIX, Juan Cortázar, el Tratado de Geometría Analítica, publicada por primera vez en 1855 y reeditada en cuatro ocasiones más. Se realizó un análisis de contenido que mostró la estructura conceptual de la obra, así como los cambios sufridos a través de las dos primeras ediciones publicadas. Para ello se atendió a los contenidos que incluyen y los ejemplos, ejercicios y problemas propuestos.*

Palabras clave: *libros de texto, análisis de contenido, libros antiguos, Juan Cortázar, Geometría.*

The Tratado de Geometría Analítica written by Juan Cortázar through its editions

Abstract: *During the past decades, researchers on History of Mathematics Education have focused their interest in the study of textbooks, because their analysis shows the scientific knowledge of the time, the knowledge that was given in the schools and how they were taught, as well as the organizational model of the curriculum. The present study analyzes one of the textbooks written by the 19th century author, Juan Cortázar, the Treaty of Analytical Geometry, published in 1855 and reprinting four more times. It has been made a content analysis that showed the conceptual structure of the textbook, as well as*

the changes undergone through the first two published editions. To do so, the contents included and the examples, exercises and problems proposed were considered.

Keywords: *textbooks, content analysis, old textbooks Juan Cortázar, Geometry.*

INTRODUCCIÓN

Las investigaciones realizadas dentro del campo de estudio de la Historia de la Educación matemática analizan la evolución histórica de los conceptos matemáticos, aquellos aspectos que permitan conocer las razones por las cuáles estos adquirieron su significado actual, así como los cambios que ha sufrido la enseñanza de la disciplina tras las sucesivas incorporaciones de avances científicos.

En este sentido, el análisis de libros de texto, que han sido herramientas fundamentales en la escuela, proporcionando soporte a alumnos y profesores y, estableciendo los escasos registros de información que han llegado hasta nuestros días, nos da acceso al conocimiento científico y académico de la época. (Maz-Machado y Rico, 2015).

A través de las numerosas publicaciones realizadas en este campo, se deduce el creciente interés de los investigadores, que toman al libro de texto como fuente documental y los analizan para determinar el tratamiento dado a conceptos y disciplinas matemáticas (Beyer, 2006; Frejd, 2013; Schubring, 1988). A nivel nacional encontramos estudios que analizan los distintos métodos usados en la historia para el cálculo mental (Gómez, 1995), la historia de las ideas algebraicas a través del texto *De Numeris Datis* (Puig, 1994), el concepto de continuidad en los manuales de segunda enseñanza de la segunda mitad del siglo XX (Sierra, González y López, 2003), la evolución de los números negativos en los textos publicados en el siglo XVII y XIX (Maz, 2005) o los contenidos matemáticos y didácticos de los libros de Aritmética publicados en castellano en el siglo XVI (Madrid, 2016).

El objetivo del presente estudio es analizar la estructura conceptual de la más tardía de las obras del ingeniero Juan Cortázar, el *Tratado de Geometría analítica*, publicada por primera vez en 1855, así como los cambios sufridos a través de las dos primeras ediciones, caracterizadas por haber sido publicadas en el contexto de dos planes de estudio diferentes.

La relevancia de este estudio se manifiesta por tratarse de uno de los autores de manuales escolares que mayor influencia tuvo en la difusión y constitución de las matemáticas escolares en España y la formación matemática de varias generaciones de españoles durante la segunda mitad del siglo XIX. Sus obras fueron reeditadas en 150 ocasiones y llegaron al medio millón de ejemplares vendidos, incluso fueron traducidas y publicadas sin la autorización de su autor en París y Nueva York (García, 1984).

Desde el año 1846, y de forma escalonada en el tiempo, los tratados elementales de Cortázar - *Aritmética, Álgebra, Geometría, Trigonometría y Topografía* - comenzaron a ser elegidos para formar parte de la lista oficial de libros de texto a usar en Universidades, Institutos y Escuelas Profesionales que el Estado publicaba periódicamente. Asimismo, los tratados superiores, *Álgebra superior* y *Geometría analítica* aparecieron en las listas oficiales para las Facultades, Escuelas Superiores y Profesionales a partir del año 1856 (Vea y Velamazán, 2011).

Su producción abarca un amplio número de temas, para todos los ámbitos de las matemáticas y para todas las etapas educativas, desde la educación Primaria hasta la

Superior y Técnica. Incluso publica la obra *Memoria para el cálculo del interés*, cuyo objetivo fue el de instruir a las personas que no tenían conocimientos de álgebra, en el cálculo de intereses y descuentos y así, evitar que fueran engañados al firmar este tipo de contratos. Además de la publicación de sus tratados, Cortázar es autor de obras incompletas inéditas, como son los *apuntes de Cálculo infinitesimal*, *Mecánica racional*, *Cosmografía* y *Lógica matemática* (Irueste, 1912).

METODOLOGÍA

Este estudio está enmarcado en el enfoque de investigación de tipo histórico, en el cual se realiza un análisis de contenido focalizado en la estructura conceptual de los contenidos matemáticos incluidos en él y que está basado en anteriores investigaciones que usan una metodología similar (Maz, 2005; Madrid, 2016).

Para ello se fijaron las siguientes unidades de análisis:

- La introducción y el prólogo, en los cuales el autor señala a quienes estaban dirigidas, el propósito de las obras y la secuenciación y justificación de contenidos propuestos con respecto a obras contemporáneas.
- Las definiciones, los ejercicios, los ejemplos, los problemas y las actividades que se incluyen en cada obra. Asimismo, el propio planteamiento de cada obra.
- Las notas incluidas tras cada uno de los bloques de contenido, que incluyen sugerencias y propuestas metodológicas, así como materiales manipulativos recomendados, para que el alumno optimice su trabajo y alcance los conocimientos requeridos en el correspondiente nivel educativo.
- Los anexos, en los que se incluyen láminas con representaciones gráficas, que sirven de apoyo a las explicaciones y demostraciones de resultados y teoremas principales.

Asimismo, se establecieron dos periodos históricos diferentes caracterizados por la implantación de los dos planes de estudio más influyentes del siglo XIX, para realizar una adecuada contextualización social y académica del tratado. Estos periodos son:

- PERIODO 1: Desde la implantación del Plan Pidal en 1845 hasta la implantación del Plan Moyano en 1857.
- PERIODO 2: Desde la implantación del Plan Moyano hasta la muerte de Juan Cortázar en 1873.

A continuación, fueron seleccionadas dos de las ediciones del tratado para su análisis, cada una de ellas escrita en un periodo diferente y en base a los siguientes criterios de selección:

- Que el autor fuese Juan de Cortázar o haya sido publicada antes de 1873, eliminando por tanto de la muestra, las ediciones corregidas y editadas tras su muerte por su hijo Daniel.
- Que la obra estuviera disponible, seleccionando una muestra intencional y por conveniencia de las obras que sí fueron publicadas y que en la actualidad no tienen acceso restringido.

- Que los textos hubieran sido publicados en España y en español, eliminando así, los textos que fueron traducidos y publicados en Nueva York y París ilegalmente, sin la supervisión de Cortázar.

Las ediciones elegidas para su análisis fueron:

- Cortázar, J. (1855). *Tratado de Geometría analítica*. Primera edición. Madrid: Imprenta de Don Agustín Espinosa.
- Cortázar, J. (1862). *Tratado de Geometría analítica*. Segunda edición. Madrid: Imprenta de D.F. Sánchez a cargo de D. Agustín Espinosa.

Posteriormente, se analizó la secuenciación de los contenidos, ejemplos, ejercicios y problemas y se construyó un mapa que recoge los focos conceptuales que se encuentran en cada una de ellas.

RESULTADOS

El *Tratado de Geometría analítica* salió a la luz con su primera edición en 1855 y, la última y quinta edición, se publicó entre los años 1883 y 1892. A partir de la segunda edición, la de 1862, se anuncia en la portada que la obra estaba señalada como libro de texto en las Universidades y Escuelas Superiores. Al igual que el *Tratado de Álgebra superior*, estaba destinada a los alumnos que cursaban la asignatura Álgebra Superior y Geometría Analítica de la cátedra de Cortázar en la Universidad Central. Apareció periódicamente en las listas oficiales de libros desde 1858 hasta 1868 (Vea y Velamazán, 2011).

En el análisis que realiza su alumno y sucesor Irueste (1912), a las últimas ediciones de las obras, destaca el desarrollo formal de los problemas generales de geometría plana y los del espacio hasta las superficies de segundo orden,

aunque se deje constancia en el prólogo que Cortázar no aplicara métodos diferenciales e integrales a la resolución de ejercicios porque no los comprendía. Para Irueste (1912), “La analítica es, quizá, la mejor de todas, dentro del cuadro de la Ciencia de entonces, y sobre todo, de las necesidades de la Facultad, para cuyas tres Secciones eran obligatorios los dos primeros años de Matemáticas superiores” (p. 287).

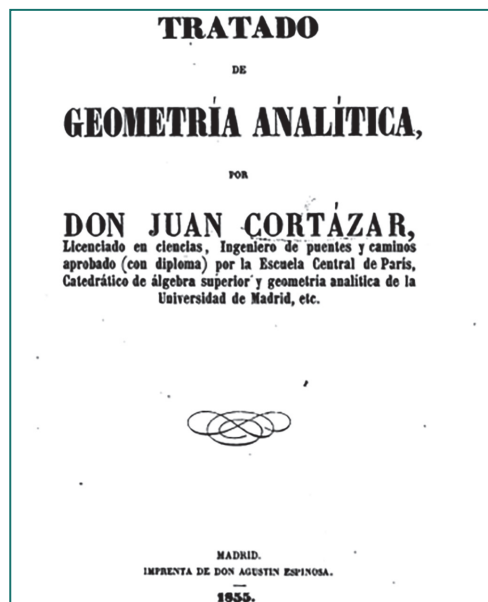


Figura 1. Portada del *Tratado de Geometría analítica* (Cortázar, 1855).

Primera edición

La edición más antigua de la obra fue impresa en Madrid en 1855 por la Imprenta de Agustín Espinosa. El ejemplar analizado está digitalizado por el repositorio Google Books y forma o ha formado parte del British Museum.

La obra tiene 464 páginas, divididas en dos partes: la primera está estructurada en dos libros dedicados a la geometría plana; y la segunda, otros dos libros dedicados a la geometría en el espacio. Los libros están divididos en capítulos, 37 en total y, además incluye al final del tratado, 10 láminas con representaciones gráficas que sirven de apoyo a las demostraciones y resolución de los problemas y, dos notas dedicadas al Teorema de Taylor extendido a las funciones algebraicas de dos y tres variables y a la construcción de las raíces de las ecuaciones de tercero y cuarto grado con una incógnita o resolución geométrica de estas ecuaciones.

Entre las referencias a otros autores en el texto, se cita a Tolomeo y su teorema sobre las diagonales de un cuadrilátero inscrito en una circunferencia y a Euler y sus ecuaciones para transformar las ecuaciones de las superficies de un sistema de ejes rectangulares a otro. También se citan las fórmulas de Descartes desarrolladas en su *Tratado de Álgebra elemental*, como aplicación algebraica a los signos de las raíces de las ecuaciones, pero no en relación con contenidos específicos de la obra. Y, por supuesto, hallamos referencias continuas al resto de tratados de Álgebra superior, *Geometría elemental* y *Trigonometría y Topografía*.

Cortázar incluye en el prólogo de la primera edición el objeto de estudio de la Geometría analítica en comparación con los que incluye esta obra (Tabla 1).

Tabla 1. Tabla comparativa entre el objeto de la Geometría analítica y los contenidos del Tratado de Geometría analítica de Juan Cortázar, 1855.

Objeto de la Geometría analítica	Objeto de la obra
Geometría plana <ol style="list-style-type: none"> 1. Tangentes 2. Asíntotas 3. Centros y diámetros 4. Semejanza 5. Número de condiciones necesario para determinar algebricamente las líneas 6. Curvatura 7. Cuadratura 8. Rectificación 	Geometría plana <ol style="list-style-type: none"> 1. Tangentes a las curvas algebraicas 2. Asíntotas a las curvas algebraicas y trascendentes 3. Centros y diámetros para curvas de segundo grado 4. Semejanza para curvas de segundo grado 5. Número de condiciones necesario para determinar algebricamente las líneas para curvas de segundo grado
Geometría del espacio <ol style="list-style-type: none"> 1. Planos tangentes 2. Centro y planos diametrales 3. Semejanza de las superficies 4. Número de condiciones necesario para determinar algebricamente las superficies 5. Curvatura 6. Curvatura de las superficies 7. Curvatura de los espacios limitados 	Geometría del espacio <ol style="list-style-type: none"> 1. Planos tangentes para superficies de segundo orden 2. Centro y planos diametrales para superficies de segundo orden

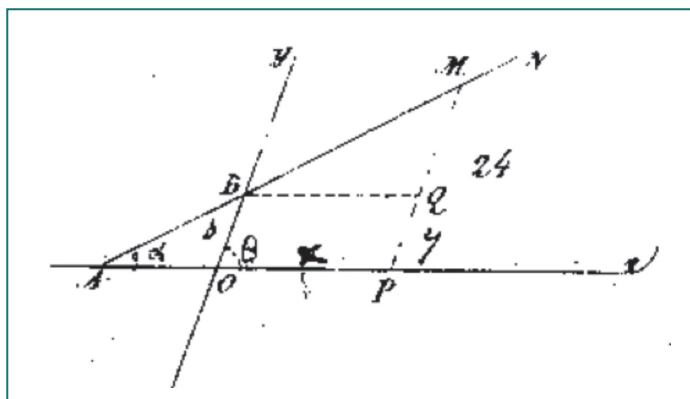


Figura 2. Construcción de la recta en el Tratado de Geometría analítica (Cortázar, 1855, lámina II).

El tratado comienza con una introducción previa al estudio de la Geometría analítica. En este se define aplicación del Álgebra a la Geometría elemental o el estudio de la Geometría analítica como, “la ciencia que trata de la resolución de las cuestiones de la geometría elemental por medio del cálculo algébrico ordinario” (p. 1). Esto le lleva a definir la representación algebraica de líneas, superficies y espacios como el producto de los valores numéricos de sus dimensiones y así, poder resolver ejercicios y problemas algebraicamente.

La parte fundamental del tratado comienza con el estudio de la geometría analítica plana, desglosada en el estudio de las ecuaciones de las líneas y el estudio de las líneas de segundo orden. Antes de ello, debe sentar las bases que le permitan determinar un punto cualquiera en un plano. Para ello, define ejes de coordenadas, eje de abscisas, eje de ordenadas y origen de coordenadas. Así, “la posición de un punto de un plano quedará determinada, con respecto á dos ejes que se hallen en dicho plano, conociendo su abscisa y su ordenada” (p. 54). El estudio de los ejes de coordenadas se realiza en los casos en los que los ejes son perpendiculares entre sí [ejes rectangulares] y, también, en el caso en el que no lo sean [ejes oblicuángulos].

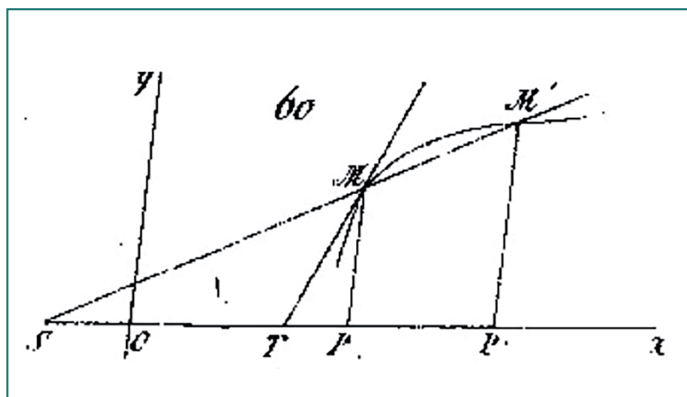
Previo al estudio de las ecuaciones de las líneas, se define lugar geométrico de una ecuación de dos variables como la línea plana correspondiente a la construcción de sus diferentes soluciones. Así, “la ecuación de una línea es la ecuación que indica la relación constante que hay entre las coordenadas de un punto cualquiera de dicha línea” (p. 57). Por tanto, la Geometría analítica plana “es la ciencia que se ocupa del estudio de las líneas planas por métodos generales, representándolas antes por medio de ecuaciones” (p. 57).

A continuación, se explica de forma general el método para hallar los puntos de intersección de dos líneas y los puntos de corte con los ejes de abscisas y ordenadas. Seguidamente se desarrolla el estudio de las ecuaciones de las líneas. En primer lugar, se estudian las ecuaciones de las líneas rectas por medio de los datos suficientes para determinar su posición (Figura 2).

Posteriormente estudia y desarrolla la ecuación de la línea recta en los casos particulares:

- la recta pasa por el origen,
- la recta es paralela al eje de abscisas,
- la recta coincide con el eje de abscisas,

Figura 3. Tangente a una curva en el Tratado de Geometría analítica (Cortázar, 1855, lámina III).



- la recta es paralela al eje de ordenadas y ,
- los ejes de coordenadas son rectangulares, por tanto, $\Theta=90^\circ$ y $\frac{(\text{sen } \alpha)}{(\text{sen } (\Theta-\alpha))}=\text{tga}$.

A continuación analiza la ecuación del círculo comenzando en el caso particular en el que el origen de coordenadas es el centro del círculo y los ejes de coordenadas son rectangulares, para después generalizar el resultado a un punto cualquiera.

En el siguiente apartado se define la elipse como la “curva en la que se verifica que la suma de las dos distancias de cada uno de sus puntos a dos puntos dados es una cantidad constante” (p. 71); la hipérbola como “una curva en la que la diferencia de las distancias de cada uno de sus puntos a dos puntos dados es constante” (p. 73); y la parábola como “la curva en la que se verifica que la distancia de uno cualquiera de sus puntos a un punto dado es igual a la distancia del mismo punto a una recta dada” (p. 75).

Para poder hallar la ecuación de una línea respecto a otro sistema de ejes diferentes, el siguiente capítulo expone la transformación del sistema de coordenadas distinguiendo entre los casos: cambio del origen de coordenadas, siendo los nuevos ejes paralelos a los originales, cambio de la dirección de los ejes de coordenadas, sin variar el origen y cambios del eje y origen de coordenadas. Al final del capítulo, se aporta un ejemplo concreto en el que se debe hallar la ecuación de una circunferencia respecto a los ejes rectangulares, dada su ecuación con respecto a los ejes oblicuángulos.

En los siguientes capítulos se expone la clasificación de las líneas planas, en particular las líneas planas algebraicas, cuya ecuación general es $f(x,y) = Ay^m + (Bx+C) y^{m-1} + (Dx^2 + Ex+F) y^{m-2} + \dots + (ax^m + bx^{m-1} + \dots + k) = 0$. Por otro lado, se realiza el estudio de las de primer orden, que corresponden a las líneas rectas; se resuelve una relación de ejercicios correspondientes a las líneas rectas y se aplican sus propiedades a varias demostraciones de teoremas de geometría elemental. Los ejercicios que se aportan son de tipo:

- Cálculo de la ecuación de la recta conociendo las coordenadas de uno de sus puntos y su dirección.
- Cálculo de la ecuación de la recta conociendo dos de sus puntos.
- Cálculo de la ecuación de la recta perpendicular a una dada, conocido uno de sus puntos.

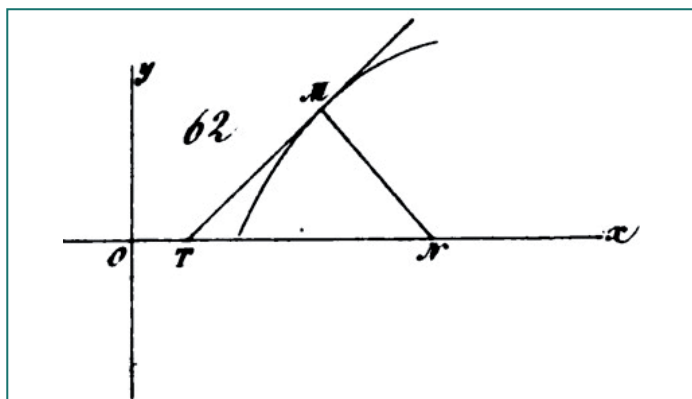


Figura 4. Ecuación normal en el Tratado de Geometría analítica (Cortázar, 1855, lámina III)

- Cálculo de la distancia entre dos puntos dados.
- Cálculo de la distancia entre un punto dado y una recta conocida.

En los primeros capítulos del siguiente libro, se definen los conceptos de tangente y asíntota de las curvas planas algebraicas (Figura 3).

Posteriormente se estudian dos casos particulares. El primero de ellos parte de la hipótesis de que la curva tiene la forma $y=f(x)$; el segundo estudia las curvas de segundo grado. Por último, se aportan los enunciados y resolución de algunos problemas relativos al cálculo de las ecuaciones de las tangentes. Los objetivos de los problemas se clasifican en:

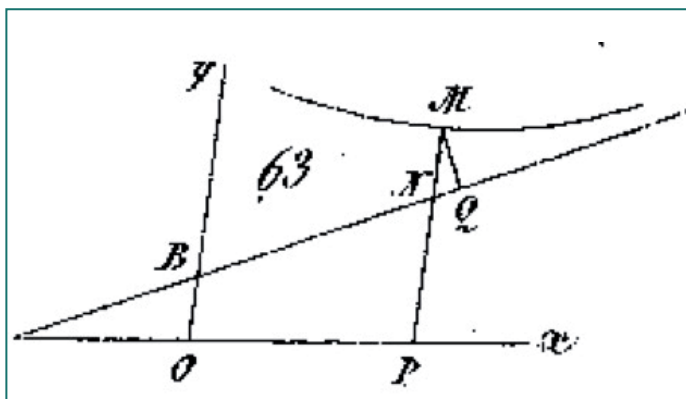
- Cálculo de la ecuación tangente a una curva de la que se conoce su ecuación por un punto dado que pertenece a la curva.
- Cálculo de la ecuación tangente a una curva de la que se conoce su ecuación y la posición de los ejes de coordenadas por un punto dado.
- Cálculo de la ecuación tangente a una curva de la que se conoce la dirección de la tangente.

Asimismo, se estudia el problema del cálculo de ecuaciones normales a una curva, entendiendo por normal a una curva (Figura 4)

La obra continua con el estudio de las asíntotas de una curva, a las que define de la forma, pero en contraposición al caso de las tangentes, el estudio de las asíntotas se realiza de forma general, tanto para curvas algebraicas como trascendentes (Figura 5). Se distinguen los siguientes casos:

- Las asíntotas no son paralelas al eje de ordenadas, en el que las ecuaciones de las asíntotas serán $y = cx + d$, siendo c “el valor que toma $\frac{y}{x}$ cuando $x = \pm \infty$ ” (p. 123) y siendo d “el valor que toma $y - cx$ cuando $x = \pm \infty$ ” (p. 123).
- Las asíntotas paralelas al eje de ordenadas, en el que basta con calcular las asíntotas paralelas al eje de abscisas, tomando $x = cy + d$ análogamente al caso anterior.

Figura 5. Asíntotas de las curvas en el Tratado de Geometría analítica (Cortázar, 1855, lámina III)



Para facilitar el cálculo de las asíntotas, se aporta un algoritmo de cálculo que reduce los cálculos y el tiempo de resolución. Por último, se aportan numerosos ejemplos que presentan las diferentes situaciones que los alumnos pueden encontrar a la hora de calcular las asíntotas de las curvas.

En el siguiente capítulo se discute la ecuación de segundo grado $Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex + F = 0$, es decir, se determinan “las diferentes líneas que esta ecuación puede representar según los valores de los coeficientes” (p. 147) y se hallan las formas que tienen dichas líneas. Esta explicación es complementada con numerosos ejemplos.

En particular, se estudian con detenimiento, a través de sus ecuaciones, las teorías de las tres curvas de segundo grado: elipse, parábola e hipérbola. Previamente, se reduce la ecuación general de cada curva a expresiones más sencillas representándolas en sistemas de ejes rectangulares y trasladando el centro de la curva al origen de coordenadas.

En las tres teorías se estudia de manera análoga:

- El valor de los coeficientes de las ecuaciones reducidas. En el caso de la elipse y la hipérbola con respecto a sus ejes y en la parábola, con respecto a su eje y vértice.
- La construcción de las curvas. En el caso de la elipse, dados sus ejes y en la parábola, dado el parámetro. La construcción de la hipérbola dados sus ejes se considera complicada para ser incluida en el tratado.
- Los focos y directrices de las tres curvas.
- Las tangentes y normales de las tres curvas.

Además, se estudian las cuerdas suplementarias de la elipse y la hipérbola, los diámetros conjugados de la elipse, las asíntotas de la hipérbola y los diámetros de la parábola. Las tres teorías desarrolladas permiten la resolución de los problemas planteados en el capítulo sobre tangentes de las curvas, a través de estrategias de resolución más sencillas.

El tratado continúa con la adopción de otro sistema de referencia, el de coordenadas polares, que Cortázar considera “el más ventajoso en la geometría analítica, después del rectilíneo” (p. 283). El sistema se basa en “Determinar la posición de un punto con respecto a una recta dada y a un punto dado en ella” (p. 283).

Definido el sistema, se desarrollan las ecuaciones polares de la línea recta, de la circunferencia, de la elipse, de la hipérbola y de la parábola, así como la correspondencia

para transformar las coordenadas rectilíneas en polares y viceversa, acompañadas de varios ejemplos que pueden clasificarse en:

- Hallar la ecuación polar de la elipse conocida su ecuación algebraica, siendo el centro de la elipse, el polo y el eje mayor, el eje polar.
- Hallar la ecuación polar de la línea recta conocida su ecuación algebraica.
- Hallar la ecuación algebraica de la circunferencia, conocida su ecuación polar.
- Hallar la ecuación algebraica de la parábola, conocida su ecuación polar, siendo el polo, el vértice de la parábola y siendo el eje de la parábola, el eje polar.

Posteriormente se estudian las secciones cónicas y cilíndricas, como las curvas de segundo grado que se generan mediante las secciones de las superficies cónicas y cilíndricas; la cuadratura de la elipse, hipérbola y parábola, así como las curvas semejantes a circunferencias, elipses, parábolas e hipérbolas.

El último capítulo, correspondiente a la Geometría analítica plana, estudia el número de condiciones necesarias para poder hallar la ecuación de las curvas de segundo grado. Se entiende que “una curva de segundo grado está algebraicamente determinada, cuando el número de ecuaciones distintas entre los datos y los coeficientes incógnitos a, b, c, \dots sea igual al número de estos coeficientes que sean independientes entre sí” (p. 322). Se aportan numerosos ejemplos que complementan las explicaciones. Podemos clasificarlos en:

- Hallar la ecuación de la circunferencia conocidos tres puntos.
- Hallar la ecuación de la elipse conocidos cinco puntos.
- Hallar la ecuación de la parábola conocidos cuatro puntos.
- Hallar la ecuación de la hipérbola conocido el centro y tres puntos de la misma.
- Hallar la ecuación de la elipse dados el centro, uno de sus focos y la directriz correspondiente a ese foco.
- Hallar la ecuación de la hipérbola conocido el centro, una directriz y un punto de la misma.
- Hallar la ecuación de la parábola dados el eje, la directriz y un punto de la misma.
- Hallar la ecuación de la elipse, dados el centro, un foco y una tangente a la misma.

La segunda parte del tratado estudia la Geometría analítica en el espacio. Análogamente al caso de la Geometría plana, para estudiar las ecuaciones de las superficies y líneas, se fijan los criterios que permiten determinar un punto cualquiera en el espacio. Para ello, define planos coordenados y coordenadas de un punto respecto a esos tres planos. El estudio de los ejes de coordenadas se realiza tanto en el caso en el que los ejes son perpendiculares entre sí como en el caso en el que no lo son.

Tras analizar las formas que toman que en espacio, las ecuaciones de las líneas en el plano, se estudia la ecuación de la forma $f(x, y, z)=0$. Así se demuestra que “toda ecuación con tres variables corresponde una superficie” (p. 337) y que la forma de dicha superficie se conoce, ya que “si hallamos las intersecciones de dicha superficie con varios planos paralelos a los coordenados las distancias que hay desde los planos secantes a los coordenados, y la forma de las respectivas intersecciones, manifestarán la forma de dicha superficie” (p. 338).

Posteriormente, se aporta la definición de las ecuaciones de las líneas y las superficies en el espacio y las soluciones de varios problemas relacionados. Con respecto a la línea recta son del tipo:

- Hallar las ecuaciones de una recta, que pasa por un punto dado, conociendo los ángulos que sus dos proyecciones verticales forman con el eje Oz.
- Hallar las ecuaciones de una recta que pasa por dos puntos dados.
- Hallar las ecuaciones de una recta que pasa por un punto dado y es paralela a una recta dada.
- Hallar la relación entre los coeficientes de las ecuaciones de dos rectas para que tengan sean secantes, además de calcular el punto de intersección.
- Hallar la distancia entre dos puntos siendo los ejes rectangulares.
- Hallar el ángulo que forman dos rectas en el espacio.
- Hallar los ángulos que una recta forma con los ejes rectangulares.
- Hallar el coseno del ángulo que forman dos rectas, conocidos los cosenos de los ángulos que ambas forman con los ejes rectangulares.

Análogamente, se aporta una relación de ejercicios con solución sobre las superficies, de los tipos:

- Hallar la ecuación de un plano que pasa por un punto dado y es paralelo a otro plano dado.
- Hallar la ecuación de un plano que pasa por tres puntos dados no alineados.
- Hallar la ecuación del plano que contiene a una recta dada y es paralelo a otra, no siendo esta última paralela a la primera.
- Hallar la ecuación de un plano que contiene a una recta dada y pasa por un punto dado no perteneciente a la recta.
- Hallar la ecuación de una recta que pasa por un punto dado, conociendo un plano al cual es perpendicular, en el caso en el que los ejes son rectangulares.
- Hallar la ecuación de un plano que pasa por un punto dado y es perpendicular a una recta dada, en el caso en el que los ejes son rectangulares.
- Hallar la distancia de un punto dado a un plano dado, en el caso en el que los ejes son rectangulares.
- Hallar el ángulo que forman dos planos, en el caso en el que los ejes son rectangulares.
- Hallar los ángulos que forma un plano con los planos coordenados, en el caso en el que los ejes son rectangulares.
- Hallar el ángulo que forman una recta y un plano dados, en el caso en el que los ejes son rectangulares.
- Hallar la ecuación de un plano que contiene a una recta oblicua o es paralela a otro plano, siendo el primer plano perpendicular al segundo y siendo los ejes rectangulares.

El estudio de las superficies continúa con los casos de la superficie cilíndrica, las superficies de revolución, como el cono de revolución o la esfera. Asimismo, se estudia el caso del paraboloides elíptico, paraboloides hiperbólico, elipsoide, hiperboloides de una hoja e hiperboloides de dos hojas (Figura 6).

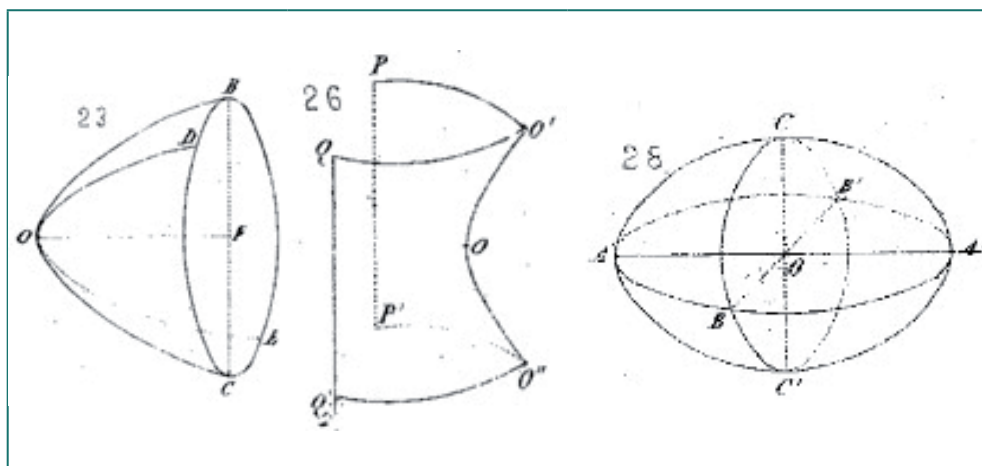


Figura 6. Paraboloide elíptico, hiperbólico y elipsoide en el Tratado de Geometría analítica (Cortázar, 1855, lámina 9)

Se expone a continuación, la transformación del sistema de coordenadas con el mismo objetivo en el caso de la Geometría plana, “teniendo la ecuación de una superficie con respecto á ciertos ejes, hallar la ecuación de la misma con respecto á otros ejes diferentes de los primeros, pero cuya posición esté determinada con respecto á estos” (p. 380). Se distinguen dos casos de transformación: cambio a ejes paralelos a los originales y cambio de ejes rectangulares a oblicuángulos o rectangulares. Se estudian también las fórmulas de Euler para pasar de ejes rectangulares a otros también rectangulares.

En el siguiente capítulo se expone la clasificación de las superficies, en particular las superficies planas, cuya ecuación general es . Se estudian planos tangentes, centros y planos diametrales de las superficies curvas algebraicas de segundo orden y el cálculo de la ecuación normal a una superficie. La obra continúa con el estudio de los centros y planos diametrales de las superficies de segundo orden.

En los siguientes capítulos se estudian las teorías de las superficies: elipsoide, hiperboloide de una hoja, hiperboloide de dos hojas, paraboloide elíptico y paraboloide hiperbólico (Tabla 2), aunque previamente, se reduce la ecuación general de cada superficie a expresiones más sencillas representándolas en sistemas de ejes rectangulares.

Además, se estudian los conos asintóticos en el caso de los hiperboloides y, las secciones cónicas en los casos del hiperboloide de una hoja y el paraboloide hiperbólico.

Se presenta el mapa conceptual (Figura 7) del contenido de la edición en el que se construye y demuestra algebraicamente los elementos y propiedades de la Geometría plana y del espacio.

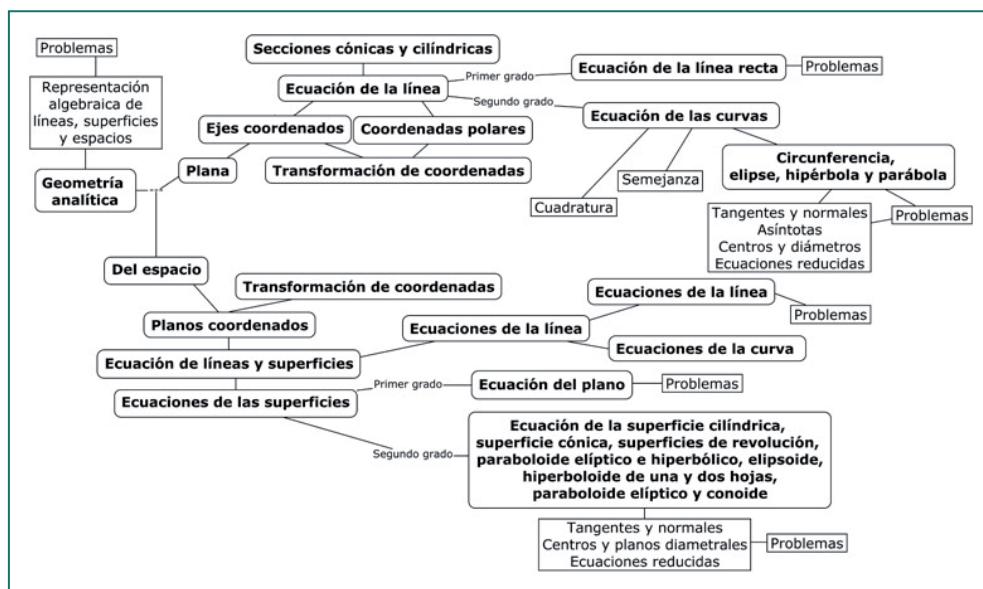


Figura 7. Mapa conceptual del Tratado de Geometría analítica de Cortázar (1855)

Tabla 2. Aspectos que se estudian en las superficies de segundo orden en el Tratado de Geometría analítica de Cortázar, 1855.

	Forma	Secciones circulares	Planos tangentes	Planos diametrales y diámetros conjugados
Elipsoide	X	X	X	X
Hiperboloide de una hoja	X	X	X	X
Hiperboloide de dos hojas	X	X	X	X
Paraboloide elíptico	X	X		
Paraboloide hiperbólico	X			

En esta nueva edición, se reduce el número de páginas a 379 y cuenta con un total de 34 capítulos. Se reduce también el número de láminas con representaciones gráficas a 8 en total. Con respecto al índice de contenidos, son eliminados algunos capítulos de la primera edición, para ser incorporados en otros, siguiendo una secuenciación diferente.

Una línea cualquiera se representará de una manera general por una letra, que será la razón comensurable ó incomensurable de dicha línea á otra que se haya tomado por unidad. Una superficie cualquiera se representará de un modo

2. Si llamamos a al valor numérico de una recta limitada, ó lo que es igual, si representamos dicha recta por a , es claro que toda línea limitada, recta ó curva, tendrá una razón m con la recta a , y por consiguiente su valor numérico será ma , ó lo que es igual, dicha línea limitada quedará representada por ma , siendo m un número abstracto y a el valor numérico de una recta.

Figura 9. Uso de expresiones algebraicas en la segunda edición del Tratado de Geometría analítica (Cortázar, 1855; 1862)

Segunda edición

La segunda edición fue impresa en Madrid en 1862 en la Imprenta de D. F. Sánchez, a cargo de D. Agustín Espinosa. Este ejemplar puede encontrarse en las bibliotecas de las Universidades Complutense y Politécnica de Madrid. Ha sido localizada a través del repositorio digital de Google Books.

La segunda edición posee aproximadamente, unas 100 páginas menos que la primera. Si bien es cierto que, son eliminados algunos de los capítulos y artículos de mayor dificultad, los contenidos que incluye la segunda edición, son similares. En concreto, se elimina el estudio de las ecuaciones de particulares de rectas y planos, pasando a estudiar ampliamente el caso general.

Por otro lado, se reorganiza la secuenciación de los temas, buscando una mayor conexión entre la exposición de los resultados y teoremas y su aplicación a la resolución de ejercicios y problemas. Por ejemplo, los problemas sobre las rectas y los planos, se sitúan tras la explicación teórica de sus ecuaciones y no, al final del bloque correspondiente.

En general, añade más ejemplos por cada concepto estudiado y particulariza los enunciados de algunos problemas, por ejemplo, centrando la atención en el estudio de las ecuaciones de líneas y superficies con respecto a ejes rectangulares. También acompaña con expresiones algebraicas algunas demostraciones de teoremas, que clarifican la secuencia de los razonamientos. Un ejemplo de lo anterior, puede observarse en la introducción de la obra, cuando expone la representación de las líneas, superficies y espacios, para poder resolver problemas geométricos a través del Álgebra (Figura 9).

Las curvas elipse, hipérbola y parábola son estudiadas en profundidad en ambas ediciones, sin embargo, la segunda edición incorpora numerosas notas sobre las principales características de estas curvas inmediatamente después de la definición de cada una de

ellas, lo que ayuda al lector a asimilar las propiedades de las curvas previamente a la exposición de cada una de las teorías.

CONCLUSIONES

Si bien Cortázar dejó constancia de que no comprendía la resolución de los problemas geométricos mediante métodos diferenciales e integrales, desarrolló formalmente los problemas generales de geometría plana y los del espacio de forma bastante completa, aunque sólo hasta las superficies de segundo orden (Irueste, 1912).

La formalidad y rigurosidad características de las obras de Cortázar, encuentran su máxima representatividad en los tratados destinados a los estudios superiores. Aun así, a lo largo de la obra se incluyen numerosas notas con sugerencias, además de láminas con representaciones gráficas que ayudan al lector en el estudio de la disciplina, en particular, para reforzar el aprendizaje de las curvas cónicas.

Todos los resultados vienen acompañados de su rigurosa demostración o de la referencia en la que se encuentran ubicados, en alguna otra de sus obras. Es destacable también la gran variedad de ejemplos y situaciones que se encuentran; desde el estudio de los números negativos, hasta la resolución de ecuaciones, pasando por el cálculo de expresiones algebraicas.

REFERENCIAS

- Beyer, W. O. (2006). Algunos libros de Aritmética usados en Venezuela en el período 1826-1912. *Revista de Pedagogía*, XXVII(78), 71-110.
- Freijd, P. (2013). Old algebra textbooks: a resource for modern teaching. *BSHM Bulletin*, 28, 25-36.
- García, E. (1984). La matemática en la España del siglo XIX. En M. Hormigón (coord.), *La ciencia y la técnica en España entre 1850 y 1936* (pp. 115-130). Jaca: SEHCYT.
- Gómez, B. (1995). Los métodos de cálculo mental vertidos por la tradición reflejada en los libros de aritmética. *UNO. Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 5, 91-101.
- Irueste, J. A. (1912). D. Juan Cortázar. *Revista de la Sociedad Matemática Española*, 1(8), 285-290.
- Madrid, M.J. (2016). *Los libros de aritmética en España a lo largo el siglo XVI*. (Tesis Doctoral), Universidad de Salamanca, Salamanca.
- Maz, A. (2005). *Los números negativos en España en los siglos XVIII y XIX*. (Tesis Doctoral), Universidad de Granada, Granada.
- Maz-Machado, A., y Rico, L. (2015). Principios didácticos en textos españoles de matemáticas en los siglos XVIII y XIX. *RELIME, Revista latinoamericana de Investigación Educativa* 18 (1), 49-76.
- Puig, L. (1994). El De Numeris Datis de Jordanus Nemorarius como sistema matemático de signos, *Mathesis*, 10, 47-92.
- Schubring, G. (1988). Discussions épistémologiques sur le statut des nombres négatifs et leur représentation dans les manuels allemands et français de mathématique entre 1795 et

1845. *Actes du premier colloque franco-allemand de didactique des mathématiques et de l'informatique* (pp. 137-145). Editions La Pensée Sauvage.
- Sierra, M., González, M.T. y López, C. (2003). El concepto de continuidad en los manuales españoles de enseñanza secundaria de la segunda mitad del siglo XX. *Educación Matemática*, 15(1), 21-50.
- Vea, F. y Velamazán, M.A. (2011). La formación matemática en la ingeniería. En M. Silva (ed.), *Técnica e ingeniería en España. Volumen VI. El ochocientos. De los lenguajes al patrimonio* (pp. 299-344). Zaragoza: Real Academia de ingeniería.

Algunos Fenómenos Matemáticos que organiza el concepto de desigualdad

Silvia Bernardis, Liliana Nitti, Sara Scaglia

Facultad de Humanidades y Ciencias.

Universidad Nacional del Litoral, Argentina

RESUMEN: *En este artículo presentamos un estudio teórico realizado en el marco de una investigación en torno a las desigualdades en matemática, cuyo propósito es contribuir a mejorar la calidad de su enseñanza.*

Realizamos un estudio fenomenológico que consiste en indagar en textos de matemática avanzada el tratamiento del tema, con la finalidad de identificar fenómenos matemáticos organizados por el concepto de desigualdad. Los fenómenos matemáticos que encontramos a partir de las definiciones formales son: la ordenación, la especificación y la generalización. Además analizamos en los textos los tipos de tareas propuestas para abordarlos. Consideramos que los fenómenos se vinculan con las tareas de: comparación de expresiones, resolución de inecuaciones y demostraciones de desigualdades absolutas.

Reflexionamos respecto del tipo de experiencias que es necesario ofrecer a los estudiantes para que construyan buenos "objetos mentales" (Freudenthal, 2002) de la desigualdad matemática.

PALABRAS CLAVES: *Fenómenos; concepto de desigualdad; análisis de textos; matemática elemental; matemática avanzada*

Some mathematical phenomena organizing the concept of inequality

Abstract: *In this article we present a theoretical contribution as part of an investigation about the inequality, in order to help to improve the quality of the teaching of this theme. We do a phenomenological study that consists on researching in texts of advanced mathematics, with the objective of identifying mathematical phenomena organized by the concept of inequalities in mathematics. The mathematical phenomena that we find from formal definitions are: ordering, specification and generalization. We also analyze in the texts the types of tasks proposed to deal with them. We consider that the phenomena are*

linked to the tasks of: comparison of expressions, resolution of inequalities and demonstrations of absolute inequalities.

We reflect on the type of experience that is necessary to offer students to create optimal “mental objects” (Freudenthal, 2002) of mathematical inequality.

KEYWORDS: *Phainomenon; concept of inequalities; textbook analysis; elementary mathematics; advanced mathematics*

INTRODUCCIÓN

En nuestras prácticas como docentes de las asignaturas del primer curso de la formación inicial del Profesor en Matemática, observamos recurrentemente las dificultades que se presentan en la comprensión de algunas definiciones y procedimientos que devienen del uso y análisis incorrecto de las desigualdades.

Algunos de estos problemas se observan en el tratamiento de la definición de límite de una función, en los procedimientos de acotación, en la comparación de expresiones algebraicas y en otras nociones relacionadas con el cálculo y el álgebra.

Uno de los procedimientos propios del cálculo es la acotación que requiere un uso hábil de las desigualdades. Según Noriega (1991, p. 99), es tan importante en el Análisis Matemático la acotación que hay quienes dicen que “*hacer Análisis es acotar*”. Como afirma Sinaceur (1992) fue Weierstrass quien eliminó del lenguaje del análisis toda relación con el movimiento. Considera que frases como “una variable se acerca a un límite”, que recuerdan las ideas temporales de Newton, fueron transformadas en desigualdades, intentando basarlas estrictamente en el manejo puramente algebraico de estas. Además agrega el autor que se debe al mismo matemático la definición de continuidad que hoy se llama épsilon-delta. Destaca que en su obra de 1968, Jean Diudonné define explícitamente el cálculo infinitesimal como “un aprendizaje en el manejo de las desigualdades”, un aprendizaje que puede resumirse en tres palabras: “minorización, mayorización, aproximación”. Claramente estos tres procedimientos requieren destreza en el trabajo con desigualdades.

Estas cuestiones se ven claramente observadas por Artigue (1995) cuando propone desarrollar investigaciones que se ubiquen en la transición álgebra-cálculo, ya que considera que no existe un paso natural entre estos dominios sino que se da un desarrollo caótico provocando una ruptura que impacta en la comprensión de los temas del cálculo. Consideramos que las desigualdades constituyen uno de los temas que forman parte de esta transición por lo que en este artículo abordamos su estudio desde el punto de vista fenomenológico, en el sentido de Freudenthal (2002).

Algunas investigaciones en torno a las desigualdades estudian las dificultades de los estudiantes al abordar el trabajo con desigualdades y formulan propuestas para mejorar el tratamiento en el aula. Tal es el caso de Diez (1996), Malara, Brandoli y Fiori (1999), Tsamir y Almog (2001), Garrote, Hidalgo y Blanco (2004), Garuti (2003), Kieran (2004), Sackur (2004), Alvarenga (2006). Otras se dedican a indagar concepciones de estudiantes y docentes sobre el tema, como por ejemplo, Borello, Farfán y Lezama (2008), Borello (2010) y Halmaghi (2011). Asimismo otros autores estudian las dificultades de los estudiantes en el aprendizaje de las nociones del cálculo como Artigue (1995),

Tall (1995), Azcárate y Camacho (2003) y Calvo (2001). Como Artigue (1995) afirma, generalmente se han atacado los problemas de incomprensión del cálculo con reformas e innovaciones al interior del mismo, sin estudiar todo el proceso que le antecede.

La investigación realizada tuvo como objetivos:

- Describir los fenómenos que organiza la desigualdad matemática.
- Identificar las tareas que se vinculan con los fenómenos, en relación con las cuestiones que necesita construir el estudiante en la etapa elemental¹ para comprender mejor la matemática en la etapa avanzada.

En este artículo presentamos una pequeña parte de un estudio más amplio que realizamos focalizado en los fenómenos que organiza el concepto de desigualdad matemática. Dicho estudio constó de dos etapas. En la primera, realizamos un estudio fenomenológico que consiste en indagar en la historia de la matemática, en la opinión de investigadores y en textos de matemática avanzada con la finalidad de identificar fenómenos matemáticos organizados por el concepto de desigualdad. El hallazgo de estos fenómenos constituye un aporte inédito de dicho trabajo. Con este insumo, en la segunda etapa analizamos el tratamiento del tema en la escuela secundaria, a partir del estudio de opiniones de docentes, libros escolares y producciones de estudiantes.

En este trabajo se pretendió proporcionar un aporte teórico con un estudio fenomenológico de la desigualdad matemática y un aporte práctico, con el propósito de contribuir a mejorar la calidad de la enseñanza del tema.

El objetivo de estos aportes es reflexionar en torno a las condiciones requeridas para que los estudiantes construyan buenos “objetos mentales” (Freudenthal, 1983) de la desigualdad durante la etapa elemental, para abordar en mejores condiciones el estudio de nociones matemáticas en la etapa avanzada.

Nuestro interés en este artículo es describir el análisis de libros de texto de matemática avanzada y presentar los fenómenos matemáticos que encontramos. La investigación se realizó en el contexto de enseñanza de precálculo en Santa Fe (Argentina), específicamente, el caso de estudio es la cohorte 2012 del primer año del Profesorado de Matemática de la Facultad de Humanidades y Ciencias de la Universidad Nacional del Litoral. Por lo tanto, las conclusiones reflejan las características del proceso educativo que impacta a esta población estudiantil. Los libros seleccionados para el análisis son los que utilizaron dichos estudiantes para el abordaje del tema.

MARCO TEÓRICO

El marco teórico en el que basamos nuestro estudio proviene principalmente de la perspectiva de Freudenthal (2002). Este autor afirma que los conceptos, ideas y estructuras (en la mente) sirven para organizar fenómenos del mundo físico, social y mental. La fenomenología de un concepto, estructura o idea matemática significa describirlo en su

1. Adoptamos de Calvo (2001) la distinción entre etapa elemental y etapa avanzada. La primera tiene lugar en las clases de matemática hasta la escuela secundaria obligatoria, y la segunda está asociada a la enseñanza matemática universitaria.

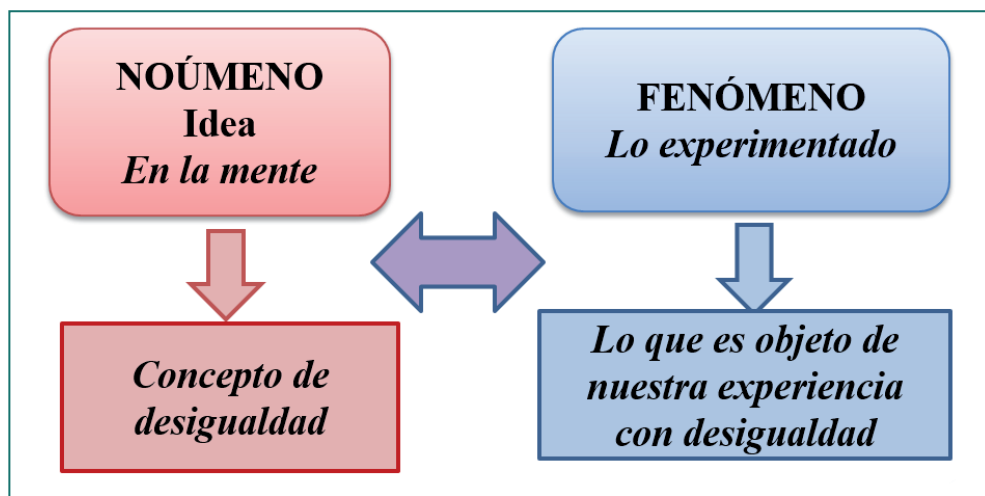


Figura 1. Términos de Freudenthal.

relación con los fenómenos para los que fue creado y a los que ha sido extendido en el proceso de aprendizaje de la humanidad. Cuando esta descripción se refiere al proceso de aprendizaje de las generaciones jóvenes, se habla de fenomenología didáctica, que consiste en una manera de mostrar al profesor los lugares en los que el alumno puede entrar en el proceso de aprendizaje.

Propone comenzar por los fenómenos que solicitan ser organizados y desde aquí enseñar a manipular los correspondientes medios de organización. En el proceso de construcción del conocimiento matemático, como se muestra en el Figura 1, distingue entre fenómeno y *noúmeno*. En palabras del mismo Freudenthal (2001):

Los objetos matemáticos son *noumena*, pero un trozo de matemáticas puede ser experimentado como un *phainomenon*; los números son *noumena*, pero trabajar con números puede ser un *phainomenon*. (p.1)

- *Fenómeno*: es aquello que se comprende a través de la experiencia, que queremos comprender y estructurar.
- *Noúmeno*: corresponde a las entidades de pensamiento, las ideas con las que organizamos tal fenómeno. Es decir, lo que es capaz de concebirse con la mente.

Una discusión detallada sobre estos términos e ideas de Freudenthal se encuentra en Puig (1997).

En su postura didáctica Freudenthal asume que el objetivo de la acción educativa en el sistema escolar ha de ser básicamente la constitución de buenos objetos mentales y solo en segundo lugar la adquisición de conceptos tanto temporalmente como en orden de complejidad.

En nuestra investigación nos proponemos encontrar los fenómenos matemáticos que son organizados por el concepto de desigualdad.

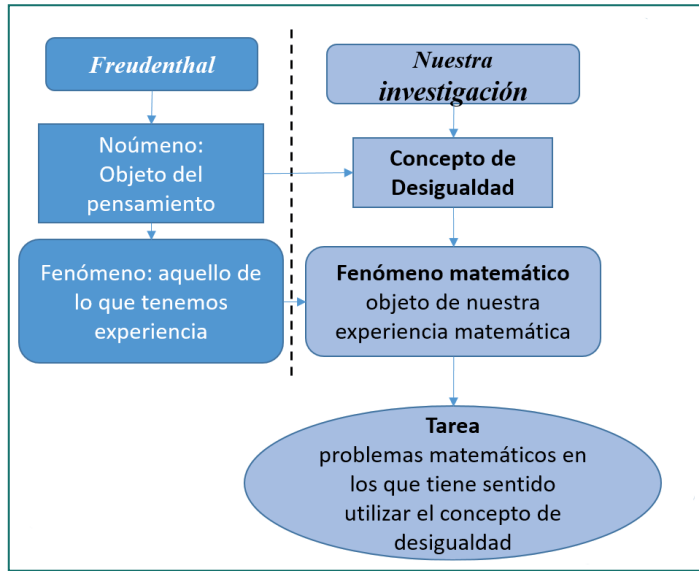


Figura 2. Términos en nuestra investigación.

En el Figura 2 mostramos los sentidos con los que utilizamos los términos en nuestro estudio. La expresión *concepto de desigualdad* para *noúmeno*, es decir lo que está en la mente del estudiante referido a la desigualdad. Con respecto a los *fenómenos* optamos por describir los del tipo matemático, aquellos de lo que tenemos experiencia matemática. En los textos analizados se presentan distintas *tareas*, llamamos así a los problemas cuya resolución se vincula con los fenómenos analizados.

ASPECTOS METODOLÓGICOS

En el marco de la modalidad cualitativa (McMillan y Schumacher, 2005), llevamos a cabo una investigación no interactiva, consistente en el análisis de libros de texto con el fin de identificar los aspectos enfatizados en el desarrollo de las desigualdades matemáticas. Los documentos de estudio son los textos de matemática avanzada utilizados por los estudiantes del primer año de la Formación Inicial de Profesorado en Matemática, por lo que se trata de un muestreo intencionado.

Para el desarrollo de la fenomenología didáctica de la desigualdad seguimos el criterio adoptado por Claros Mellado (2010) y Sanchez Compañía (2012), quienes realizan una búsqueda de fenómenos (del límite finito de una sucesión y de límite finito de una función en un punto, respectivamente) que surgen directamente de las definiciones formales, en nuestro caso las propuestas por los textos de matemática avanzada.

Los objetos matemáticos suelen presentarse en los textos mediante una definición; generalmente unido a la misma está el procedimiento en el que entran en juego las relaciones y propiedades que los involucran. Indagamos en la definición que presentan estos textos con el objetivo de analizar los fenómenos matemáticos que organizan. El estudio tiene un carácter exploratorio y la categorización inicialmente es inductiva. Para la

descripción detallada de los fenómenos recurrimos a herramientas teóricas que ayudaron a precisar y ampliar la fundamentación de la categorización, de modo que ésta adopta un carácter inductivo-deductivo.

Seleccionamos los libros que corresponden a la bibliografía básica que contiene el tema desigualdades en los planes de cátedra de las asignaturas Matemática Básica y Cálculo I, del primer año de la Formación Inicial del Profesorado en Matemática (ver Tabla1). Recordemos que dicha búsqueda la restringimos específicamente a aquellos fenómenos del tipo matemático.

Tabla 1. *Libros analizados*

Libro	Asignatura	Autores	Editorial	Título	Año
L1	Matemática Básica	Lehmann	Limusa	Algebra	1992
L2	Cálculo I	Salas, Hille y Etgen	Reverté	Calculus. Una y varias variables	2002

Los libros seleccionados fueron utilizados por los alumnos del caso de estudio.

El libro **L1** se utiliza en la asignatura Matemática Básica donde se trata por primera vez en la carrera el tema desigualdades. El propósito de la asignatura es ayudar al estudiante a pasar por una transición cómoda de la matemática en la etapa elemental al cálculo. Para ello, se estudian los temas y métodos esenciales del álgebra y el precálculo que se necesitarán en los estudios posteriores de matemática.

El libro **L2** de la Tabla 1 corresponde a la bibliografía utilizada en la asignatura Cálculo I de la carrera mencionada. El objetivo general de esta asignatura es que el alumno adquiera los conceptos esenciales del cálculo diferencial e integral de funciones de una variable, la habilidad para usar su lenguaje y sus técnicas en problemas analíticos, geométricos y físicos.

ANÁLISIS DE LOS TEXTOS

Libro L1

El autor presenta tres definiciones en el capítulo 6 titulado “Desigualdades e inecuaciones”. A continuación analizamos estas definiciones con la finalidad de identificar y caracterizar los fenómenos matemáticos que organizan.

Definición 1: Fenómeno de Ordenación

Como mostramos en la figura 3, el capítulo 6 titulado “Desigualdades e inecuaciones”, comienza con la sección 6.1 denominada “Introducción”, donde el autor relaciona explícitamente la idea de mayor y menor entre dos números con la de ordenación, y vincula esta última con la relación de orden en el conjunto de números reales.

Al concepto de mayor y menor entre dos números corresponde el de *ordenación*. La relación de orden queda restringida a los números reales y se puede interpretar geoméricamente en un sistema coordinado unidimensional (Art. 3.7). En otras palabras, *todo nuestro estudio con desigualdades se limitará a los números reales*. No tiene sentido decir que un número complejo es mayor o menor que otro.

Aunque ya hemos dado algunas definiciones de términos y símbolos asociados con las desigualdades, las vamos a repetir, por comodidad, en los siguientes artículos.

6.2. DEFINICIONES Y TEOREMAS FUNDAMENTALES

Hemos definido una ecuación como una igualdad entre dos expresiones (Art. 4.2). Si dos expresiones son desiguales, tenemos una *desigualdad*, diciéndose que una de las expresiones es mayor o menor que la otra.

Figura 3. Extracto del libro L1 (p.135)

En la sección 6.2, denominada “Definiciones y Teoremas Fundamentales”, el autor retoma la definición de ecuación para introducir por oposición la de desigualdad, concepto que utiliza para expresar la idea de que una expresión es mayor o menor que otra.

Si asumimos, como el autor lo hace para los números reales, que “al concepto de mayor y menor” entre dos expresiones “corresponde el de ordenación”, tenemos directamente vinculado el concepto de desigualdad con la idea de ordenación.

Como observamos en la Figura 4, a continuación el autor define *mayor y menor*. Además, destaca que dos desigualdades tienen el *mismo sentido* si sus símbolos apuntan en la misma dirección; en caso contrario tienen *sentidos opuestos*.

El autor habla de la desigualdad entre expresiones en las que aparecen variables. Considera que la variable toma valores en un subconjunto de números reales, nosotros lo llamaremos dominio de valores admisibles de la variable. Esto es, el conjunto de valores de la incógnita para los cuales tienen sentido (son definidos) su primero y segundo miembro. Es importante aclarar que el autor con el término “expresiones” se refiere a las expresiones algebraicas que define en los capítulos previos.

Así como el autor de L1 relaciona mayor y menor con la *ordenación*, extendemos esta idea a las expresiones algebraicas y consideramos que el *fenómeno de ordenación* surge en relación con la definición de desigualdad entre éstas.

Fenómeno de Ordenación: como su nombre indica, la relación de orden, o simplemente orden, es la herramienta matemática diseñada para ordenar los elementos de un conjunto. Los elementos de un conjunto no están ordenados, claramente a modo de ejemplo $\{1, 2, 3\}$ es el mismo conjunto que el $\{3, 2, 1\}$. En particular, cuando se trata del concepto de desigualdad, los elementos que resultan ordenados son las expresiones en las que aparecen variables.

El número real x se dice que es *mayor* que el número real y siempre que $x - y$ sea un número positivo. Entonces escribimos $x > y$ que se lee “ x es mayor que y ”. Así, $2 > -3$, pues $2 - (-3) = 5$ es un número positivo.

Se sigue de esta definición que el número real y es *menor* que el número real x siempre que $y - x$ sea un número negativo. Entonces escribimos $y < x$ que se lee “ y es menor que x ”. Así, $5 < 7$, pues $5 - 7 = -2$ que es un número negativo.

El estudiante debe observar que, para ambos símbolos de desigualdad, la cantidad mayor queda siempre en el lado hacia el cual se abre el símbolo, mientras que el vértice apunta hacia la cantidad menor. También vamos a introducir otros dos símbolos útiles: $a \geq b$, que se lee “ a es mayor o igual que b ”, y $c \leq d$ que se lee “ c es menor o igual que d ”. En particular, la desigualdad $a \geq 0$ es un modo conveniente de afirmar que a representa a todo número no negativo.

Se dice que dos desigualdades tienen el *mismo sentido* si sus símbolos apuntan en la misma dirección; en caso contrario tienen *sentidos opuestos*. Por ejemplo las desigualdades $a > b$ y $c > d$ tienen el mismo sentido, pero las desigualdades $a > b$ y $c < d$ tienen sentidos opuestos.

Figura 4. Extracto de la Sección 6.2 del libro L1 (p. 136)

Según Tarski (1977) la teoría de las relaciones es una de las ramas más desarrolladas de la lógica matemática. Agrega que en el cálculo de relaciones tenemos dos relaciones especiales, la identidad y la diversidad entre individuos. En el cálculo de relaciones se las denota por medio de los símbolos I y D, y no por los símbolos $=$ y \neq empleados en otras partes de la lógica.

El orden supone una estructura agregada al conjunto, y se adquiere mediante la definición en dicho conjunto de una relación apropiada. Para establecer un orden debemos señalar qué elementos preceden a cuáles, lo cual se indica mediante la relación R : “si a precede a b , entonces $(a, b) \in R$ ”. Claramente la pareja inversa no puede ser parte de la relación, por lo cual pediremos que sea asimétrica. Además, si un elemento precede a otro y éste a un tercero, entonces el primero debe preceder al tercero, por lo cual exigiremos transitividad.

La definición de desigualdad como una relación que cumple con ciertas propiedades (tricotomía y transitividad) en un conjunto, nos conduce a plantear la existencia del *fenómeno de ordenación*. Como resultado de la condición de orden en el conjunto de los números reales surgen en paralelo las desigualdades de expresiones. Es fácil entender que este fenómeno está presente en la necesidad de compararlas y ordenarlas.

Definición 2: Fenómeno de Generalización

El autor del libro L1 define dos tipos de desigualdades diferenciándolas de acuerdo a su dominio de validez: las “desigualdades absolutas” (ver Figura 5) y las “desigualdades condicionales o inequaciones” (ver Figura 6). Este hecho es relevante a nuestro entender para identificar cada uno de estos conceptos en relación con los fenómenos que organizan.

Además establece una coherencia con el caso de las igualdades en lo que se refiere a la definición de identidad y ecuación.

Una *desigualdad absoluta o incondicional* es aquella que tiene el mismo sentido para todos los valores de las variables para los que están definidos sus miembros. Son ejemplos de desigualdades absolutas $5 > -7$ y $x^2 + 1 > 0$.

Figura 5. Extracto de la Sección 6.2 del libro L1 (p. 136)

Observamos que la expresión “tiene el mismo sentido para todos los valores de las variables” supone la existencia de una función proposicional cuantificada universalmente que será necesario validar. Esta validación se concreta para todos los elementos del dominio de valores admisibles de la variable. Interpretamos que refiere al *fenómeno de generalización*.

Fenómeno de Generalización: se fundamenta en la lógica proposicional y en particular en el principio de generalización universal, que establece que: “del ejemplo de sustitución de una función proposicional respecto del nombre de un individuo cualquiera arbitrariamente elegido, se puede inferir válidamente la cuantificación universal de la función proposicional” (Copi, 1999, p. 375).

Por otro lado, observamos que el autor incluye la desigualdad $5 > -7$ como ejemplo de desigualdad absoluta, aun cuando no contiene variables. Este caso es considerado en nuestro estudio como una desigualdad numérica, que se rige por las nociones de orden en los reales que naturalmente nos remite al fenómeno de ordenación.

Definición 3: Fenómeno de Especificación

Por otro lado, como observamos en la Figura 6, define desigualdades condicionales.

En la definición de desigualdad condicional expresa que es aquella que tiene el “mismo sentido para ciertos valores de las variables”. Esta expresión es relevante ya que pone de manifiesto que existirán o no valores, que se toman de un dominio admisible, que harán cierta la desigualdad. Esta idea nos remite a la acción de particularizar las variables con valores del dominio. Desde el punto de vista matemático se trata

Una *desigualdad condicional* o *inecuación* es aquella que tiene el mismo sentido solo para ciertos valores de las variables, tomados entre los valores para los que sus miembros están definidos. Son ejemplos de desigualdades condicionales o inequaciones

$$x - 2 < 3, \text{ válida solo si } x < 5;$$
$$x^2 > 4, \text{ válida solo si } x > 2 \text{ ó si } x < -2.$$

Figura 6. Extracto del libro L1 página 136.

de una cuestión fundamental de la teoría de conjuntos, relacionada con la definición de estos objetos. En la teoría axiomática de conjuntos, uno de los axiomas que fundamenta la existencia o no de un conjunto, es el de especificación (Halmos, 1967, p. 15), el cual es utilizado para justificar la existencia de un subconjunto especificado por la cláusula o condición dada de un conjunto A. Este hecho se refiere también a la constatación de la verdad o falsedad de una proposición a partir de la verificación de la existencia o no de individuos que la satisfacen, tomados de un dominio admisible. Surge de esta manera el *fenómeno de especificación*.

Fenómeno de Especificación: refiere al dominio de validez de la desigualdad entre dos expresiones. Se basa en el llamado axioma (esquema) de especificación destinado a la formación de nuevos conjuntos a partir de un referencial, según Halmos (1967).

Axioma de especificación: a todo conjunto A y a toda condición $S(x)$ corresponde un conjunto B cuyos elementos son precisamente aquellos elementos x de A para los cuales se cumple $S(x)$. (...) Para indicar la forma en que B es obtenida de A y de $S(x)$, se escribe: $B = \{x \in A/S(x)\}$ (Halmos, 1967, p. 15)

Según Halmos, el axioma de especificación significa que dada una propiedad S, podemos formar un conjunto con los elementos de un conjunto A que satisfacen la propiedad. Esta restricción de la propiedad S a los elementos de un conjunto A previamente dado, es coherente con la descripción intuitiva del universo U: todos los elementos de A deben haberse definido en etapas anteriores, por lo tanto están disponibles para ser elementos de un conjunto.

Además menciona que esta restricción es la idea fundamental de Zermelo para evitar paradojas del tipo de la de Russell, cuando se daba por supuesta la existencia de un universo. Para especificar un conjunto no es suficiente dar la propiedad, sino que también hay que disponer de un conjunto a cuyos elementos pueda aplicarse esa propiedad.

Otra interpretación es considerar a una desigualdad con variable como una función proposicional o proposición abierta. Según Negrete (2002), una función proposicional o proposición abierta es aquella expresión de la que no puede decirse si es verdadera o falsa. Por ejemplo, $3x+1 < 4$ es una función proposicional. La característica de la función proposicional es que puede dar origen a una proposición si se sustituyen las variables

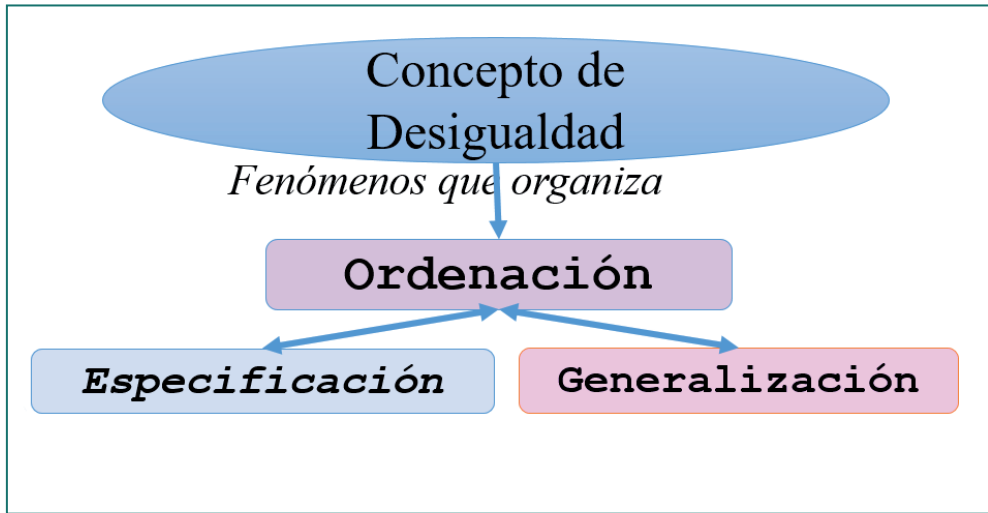


Figura 7. Fenómenos que organiza la desigualdad.

o si se la cuantifica. Al conjunto de valores que hacen verdadera una proposición, este autor lo llama “campo de variabilidad”, lo que coincidiría con lo que llamamos previamente especificación. En el ejemplo, el campo de variabilidad de la función proposicional $3x+1 < 4$ es $B = (-\infty, 1)$. Es decir, que al sustituir cualquier $x \in B$ en la función proposicional, la proposición resultante es verdadera.

También es interesante analizar que una inecuación expresa la propiedad que define por comprensión los elementos de un conjunto, es decir hay una variable y una propiedad expresada por medio de una relación de desigualdad, como por ejemplo en el conjunto $B = \{x \in \mathbb{R} / 3x+1 < 4\}$. La especificación de x , en cierta forma, refiere a condicionar la extensionalidad de un conjunto. Es preciso encontrar los elementos que forman este conjunto, es decir mostrar, en una especie de extensión, cuáles son los elementos de este conjunto. En el ejemplo, B es el intervalo $(-\infty, 1)$.

Es importante destacar que en las desigualdades condicionales se habla de “solución” de la desigualdad, y para abreviar razonamientos se dice a veces que la solución es un conjunto de valores de x (por ejemplo el intervalo $a < x < b$). En realidad se entiende de esta manera que cualquier valor x de este conjunto es una “solución”. Por ejemplo para todo x real, encontrar los x tales que $x - 3 < 2$ consiste en hallar los elementos del conjunto $B = \{x \in \mathbb{R} / x - 3 < 2\} = (-\infty, 5)$.

Resumiendo, en el libro **L1** identificamos tres fenómenos: ordenación, especificación y generalización. En la Figura 7 observamos los fenómenos matemáticos encontrados que organizan las definiciones de desigualdad analizadas. La disposición de los fenómenos en el esquema, obedece a que el de ordenación atraviesa el trabajo matemático que involucra una desigualdad y está presente en una primera instancia, es decir, subyace naturalmente debido al paralelo que se establece con el orden definido en el conjunto de los números reales.

Propiedades de orden

Si a y b son números reales, entonces a es menor que b ($a < b$) si $b - a$ es un número positivo. Esto es equivalente a decir que b es mayor que a ($b > a$). Desde el punto de vista geométrico, $a < b$ si el punto a está a la izquierda del punto b sobre la recta real. La notación $a \leq b$ significa tanto $a < b$ como $a = b$ (equivalentemente, $b \geq a$).

Los números reales están ordenados de manera que si a y b son números reales, entonces se verifica solamente una de las siguientes afirmaciones:

$$a < b, \quad a = b, \quad a > b. \quad (\text{tricotomía})$$

Los símbolos $<$, $>$, \leq , \geq se llaman *desigualdades*. Las desigualdades satisfacen las siguientes propiedades:

- (i) Si $a < b$ y $b < c$, entonces $a < c$. (propiedad transitiva)
- (ii) Si $a < b$, entonces $a + c < b + c$ para todos los números reales c .
- (iii) Si $a < b$ y $c < d$, entonces $a + c < b + d$.
- (iv) Si $a < b$ y $c > 0$, entonces $ac < bc$.
- (v) Si $a < b$ y $c < 0$, entonces $ac > bc$.

Estas propiedades también se verifican para $>$, \leq y \geq . La propiedad (v) es muy importante: si se multiplica una desigualdad por una cantidad negativa, entonces la “dirección” de la desigualdad se invierte. Las técnicas para resolver desigualdades utilizan estas propiedades, por lo que se volverán a ver en la sección 1.3.

Figura 8. Extracto de la Sección 1.2 del libro L2 (p. 6).

Libro L2

En la sección 1.2 los autores del libro L2 definen para números reales las nociones de mayor, menor y explican el significado de las notaciones que expresan las relaciones de menor o igual y de mayor o igual. A continuación enuncian la ley de tricotomía, que vincula el concepto de orden con las nociones de mayor, menor e igualdad entre números reales. Posteriormente enuncian propiedades del orden en \mathbb{R} , como mostramos en la Figura 8.

Después de la referencia a la sección anterior, los autores continúan en la sección 1.3 con la siguiente aclaración: “En esta sección nos ocuparemos de una clase de desigualdades que abundan en el cálculo: aquellas que incluyen una variable” (ver Figura 9).

Observamos que no definen formalmente la expresión desigualdades que incluyen una variable. En la explicación que realizan, la interpretación de ésta queda subordinada a la establecida para la desigualdad de números reales. Es decir, hacen referencia a la definición de mayor, menor, menor o igual y mayor o igual, la ley de tricotomía y las propiedades del orden.

Según nuestra interpretación, el fenómeno que organiza esta caracterización de desigualdad como la relación entre expresiones que no son iguales, mencionando las propiedades que cumple esta relación, es el de *ordenación*, en este caso de expresiones que incluyen variables.

1.3 DESIGUALDADES

(Todo nuestro trabajo con las desigualdades está basado en las propiedades de orden de los números reales enunciadas en la página 6.)

En esta sección nos ocuparemos de una clase de desigualdades que abundan en el cálculo: aquellas que incluyen una variable.

Resolver una ecuación en x es hallar el conjunto de los números x para los cuales se verifica la ecuación. Resolver una desigualdad en x es hallar el conjunto de los números x para los cuales la desigualdad se verifica.

La manera de resolver una desigualdad es muy parecida a la que usamos para resolver una ecuación, pero existe una diferencia importante. Podemos conservar una desigualdad sumándole el mismo número a ambos miembros, o restándole el mismo número a ambos miembros, o multiplicando o dividiendo ambos miembros por un mismo número *positivo*. Pero si multiplicamos o dividimos por un número *negativo*, entonces la desigualdad se *invierte*:

$$x - 2 < 4 \text{ da } x < 6, \quad x + 4 < 2 \text{ da } x < 2, \quad \frac{1}{2}x < 4 \text{ da } x < 8,$$

pero

$$-\frac{1}{2}x < 4 \text{ da } x > -8.$$

↑ observar

Figura 9. Extracto de la Sección 1.3 libro L2 (p. 13)

A continuación, los autores realizan una explicación referida a la resolución de una desigualdad. En la expresión “resolver una desigualdad en x es hallar el conjunto de los números para los cuáles la desigualdad se verifica” observamos el *fenómeno de especificación* que consiste en definir el dominio de validez de dicha desigualdad. Otra cuestión importante, a diferencia del texto anterior, es que no se realiza distinción entre desigualdades condicionales y absolutas. Es decir, bajo el nombre desigualdades se incluyen tanto las inecuaciones como las desigualdades absolutas. Cuando se describe la resolución de una desigualdad se hace en referencia a una desigualdad condicional.

Al final de la sección 1.3 “Desigualdades” (ver Figura 10) los autores presentan la desigualdad triangular para números reales, exhibiendo en este caso la demostración de una desigualdad absoluta. Según la caracterización realizada en el análisis de L1, consideramos que en esta propiedad está presente el *fenómeno de generalización*.

En síntesis, en el libro L2 los autores no presentan una definición formal de desigualdad, sino que exponen una descripción detallada de ejemplos de algunas tareas. En las mismas, observamos indicios de los fenómenos que encontramos en el texto anterior, a saber: ordenación, especificación y generalización.

TIPOS DE TAREAS

Según Rico, Marín, Lupiañez y Gómez (2008) el análisis fenomenológico de estructuras y conceptos matemáticos, desde una perspectiva funcional de la matemática escolar, aporta una técnica para mostrar cuáles son los sentidos con que se utilizan conceptos y estructuras. Esta perspectiva pone el acento en el uso y aplicación de los conceptos, en los medios y en los modos en que, con ellos, se abordan distintas tareas y cuestiones cuando dan respuesta a determinados problemas, en definitiva, cuando contribuyen a la comprensión de ciertos fenómenos.

Llegamos ahora a una de las desigualdades fundamentales del cálculo: para dos números reales a y b ,

$$(1.3.7) \quad |a + b| \leq |a| + |b|.$$

Se la denomina *desigualdad triangular* por analogía con el principio geométrico “en un triángulo, la longitud de cada lado es inferior o igual a la suma de las longitudes de los otros dos lados”.

Demostración de la desigualdad triangular La demostración es fácil si se piensa en $|x|$ como $\sqrt{x^2}$. Obsérvese, en primer lugar, que

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \leq |a|^2 + 2|a||b| + |b|^2 = (|a| + |b|)^2.$$

Comparando los extremos de la desigualdad y tomando raíces cuadradas, obtenemos

$$\sqrt{(a + b)^2} \leq |a| + |b|. \quad (\text{ejercicio 59})$$

El resultado se obtiene observando que

$$\sqrt{(a + b)^2} = |a + b|.$$

La variante de la desigualdad triangular que aparece a continuación también se presenta en el cálculo: para a y b números reales cualesquiera,

$$(1.3.8) \quad ||a| - |b|| \leq |a - b|.$$

La demostración se deja como ejercicio.

Figura 10. Extracto de la sección 1.3 del libro L2 (p. 18)

Los autores mencionan que el análisis fenomenológico se propone mostrar la vinculación de conceptos y estructuras matemáticas con ciertos fenómenos que están en su origen, y que los vinculan con el mundo natural, cultural, social y científico. Y esto, con la finalidad de dotar de sentido el aprendizaje de tales conceptos y estructuras.

Sostienen los autores que cuando se quiere presentar una estructura matemática en toda su plenitud de significados, se considera la conexión de sus diferentes subestructuras con distintas familias de fenómenos y se vincula con aquellos campos del conocimiento donde tiene una utilidad establecida.

Los textos de la Tabla 1 presentan distintas tareas que vinculamos con los fenómenos analizados. No existe una correspondencia lineal entre los fenómenos encontrados y las tareas, dado que en los procedimientos de resolución de estas últimas aparecen integrados los fenómenos descriptos. Es decir, una misma tarea puede comprender distintos fenómenos y viceversa. No obstante, es posible hallar una vinculación central entre cada tipo de tarea con alguno de los fenómenos, como veremos en breve.

La presentación siguiente de las tareas es pertinente para nuestra investigación ya que nos proponemos encontrar las necesidades conceptuales que requiere el estudio de

la matemática en la etapa avanzada, con el objetivo de analizar si es que existen rupturas con respecto al tratamiento del tema en la escuela secundaria.

Los tipos de tareas más relevantes que encontramos en los textos analizados son las siguientes:

- Tarea 1: Comparar expresiones (CE). Vinculamos esta tarea fundamentalmente con el fenómeno de ordenación, dado que la comparación conduce a establecer si una expresión es mayor o menor que otra.
- Tarea 2: Resolver inecuaciones (RI). Esta tarea está especialmente vinculada con el fenómeno de especificación, dado que se trata de encontrar el dominio de validez de la desigualdad dada.
- Tarea 3: Demostrar desigualdades absolutas (DDA). Esta tarea se vincula centralmente con el fenómeno de generalización, dado que se trata de validar la desigualdad para todos los elementos del dominio de valores admisibles de la variable.

Tarea 1: CE

En el libro **L1** el autor propone una única tarea de este tipo que mostramos en la Figura 11, en la que, para resolverla, será necesario encontrar primero la relación de orden que se establece para luego respaldar con una demostración lo que se afirma.

18. Si a y b son números positivos, determinar cuál de las dos siguientes expresiones es la mayor $\frac{a+2b}{a+3b}$ o $\frac{a+b}{a+2b}$.

Figura 11. Ejemplo de tarea CE del libro **L1** (p. 142)

En el libro **L2** encontramos en los ejercicios propuestos tres enunciados de tareas del tipo CE como se muestra en la Figura 12.

54. Ordenar los siguientes términos: 1 , x , \sqrt{x} , $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{\sqrt{x}}$ cuando $1 < x$.

55. Mismo ejercicio que el anterior con $0 < x < 1$.

56. Comparar

$$\sqrt{\frac{x}{x+1}} \text{ y } \sqrt{\frac{x+1}{x+2}}$$

cuando $x > 0$.

Figura 12. Ejemplo de tarea CE del libro **L2** (p. 19)

Tarea 2: RI

En el libro **L1** encontramos el tipo de tarea **RI** que corresponde al Grupo 22 en la página 149 y consta de 50 ejercicios de la sección 6.4 Desigualdades lineales y a la sección 6.5 Inecuaciones de segundo grado o cuadráticas.

En cada uno de los ejercicios 1-6, resolver la inecuación lineal dada y comprobar el resultado gráficamente.

1. $x - 5 > 3 - x$.

2. $x + 4 < 3$.

3. $2x + 1 < 3x - 1$.

4. $4x + 10 > 4 - 2x$.

5. $x - \frac{2}{3} > 2x + \frac{4}{3}$.

6. $x + \frac{1}{2} < 2 + \frac{x}{4}$.

Figura 13. Ejemplo de tarea **RI** del libro **L1** (p. 149)

En el libro **L2** encontramos esta tarea en los ejemplos propuestos en la presentación del tema. Es importante mencionar que en los Ejercicios 1.3 (página 19) presenta 66 tareas para esta sección y propone 43 tareas de tipo **RI**.

Resolver las siguientes desigualdades y representar el conjunto de soluciones en la recta real.

1. $2 + 3x < 5$.

2. $\frac{1}{2}(2x + 3) < 6$.

3. $16x + 64 \leq 16$.

4. $3x + 5 > \frac{1}{4}(x - 2)$.

5. $\frac{1}{2}(1 + x) < \frac{1}{3}(1 - x)$.

6. $3x - 2 \leq 1 + 6x$.

7. $x^2 - 1 < 0$.

8. $x^2 + 9x + 20 < 0$.

9. $x(x - 1)(x - 2) > 0$.

10. $x(2x - 1)(3x - 5) \leq 0$.

11. $x^3 - 2x^2 + x \geq 0$.

12. $x^2 - 4x + 4 \leq 0$.

13. $\frac{1}{x} < x$.

14. $x + \frac{1}{x} \geq 0$.

Figura 14. Ejemplo de tarea **RI** del libro **L2** (p. 13)

Tarea DDA

En el libro **L1** en la sección 6.3 Desigualdades absolutas presenta el Grupo 21 que consta de 25 tareas del tipo **DDA**. Como se muestra en los ejemplos de la Figura 15.

1. Demostrar que la suma de cualquier número positivo (excepto la unidad) con su recíproco, es mayor que 2.

2. Si a y b son dos números positivos desiguales, demostrar que

$$\frac{a+b}{2} > \frac{2ab}{a+b}.$$

3. Si a y b son positivos y $a > b$, demostrar que $\sqrt{a} > \sqrt{b}$ por un método independiente del Corolario 3 del Teorema 6 (Art. 6.2).

4. Si a y b son números positivos desiguales, demostrar que $a/b^2 + b/a^2 > 1/a + 1/b$.

5. Si a y b son números positivos desiguales, demostrar que $a + b < a^2/b + b^2/a$.

6. Si a y b son números positivos desiguales, demostrar que $a + b > 2\sqrt{ab}$.

Figura 15. Ejemplo de tarea DDA del libro L1 (p. 141)

En el libro L2 los autores presentan 10 tareas del tipo DDA de las 66 propuestas como ejercicios de la sección de Desigualdades. Mostramos algunas, a modo de ejemplo, en la Figura 16.

57. Sean a y b dos números que tienen el mismo signo. Demostrar que $(1/b) < (1/a)$.

58. Sean a y b dos números no negativos. Demostrar que

$$\text{si } a^2 \leq b^2 \text{ entonces } a \leq b.$$

59. Sean a y b dos números no negativos. Demostrar que

$$\text{si } a \leq b \text{ entonces } \sqrt{a} \leq \sqrt{b}.$$

60. Demostrar para dos números reales a y b cualesquiera

$$|a - b| \leq |a| + |b|.$$

Figura 16. Ejemplo de tarea DDA del libro L2 (p. 18)

CONCLUSIONES

Esta búsqueda fue orientada por la necesidad de encontrar fenómenos que surgen en las tareas que se abordan con los estudiantes y que pueden iniciarse en la etapa elemental. Es decir, nos preguntamos: ¿es posible iniciar a los estudiantes de la escuela secundaria en estos fenómenos?

En este artículo describimos los fenómenos matemáticos organizados por el concepto de desigualdad que encontramos en los textos de matemática avanzada seleccionados. Los mismos tienen su origen en procedimientos importantes en matemática: la ordenación, la especificación y la generalización.

En la Figura 17 representamos gráficamente dichos fenómenos matemáticos. Según la indagación realizada en la primera parte del estudio más amplio que llevamos a cabo, consideramos que la matemática avanzada necesita éstos como insumo. Consideramos que se vinculan con las tareas **CE**, **RI**, **DDA**.

A partir de los resultados obtenidos en la investigación mencionada, proponemos las siguientes recomendaciones para la enseñanza.

- Es necesario tener en cuenta los fenómenos matemáticos que organiza el concepto de desigualdad, y ofrecer experiencias a los estudiantes abordando distintos tipos de tareas que enriquezcan su *objeto mental desigualdad*.
- Las tareas **CE** involucran a los estudiantes en actividades enmarcadas en el *fenómeno de ordenación*, y aportan sentido de relación a la desigualdad. Por ello, es fundamental promover la interpretación de la desigualdad con un sentido de relación entre objetos sin restringirla solamente al concepto de inequación.
- Las tareas **RI** se enriquecen al incluir los casos no típicos, donde los procedimientos no se automatizan en una búsqueda algorítmica del conjunto solución. Comprender que la inequación no es una mera complejización de la ecuación, respecto del conjunto solución y de su signo, favorece un tipo de aprendizaje no rutinario. Para ello, estas tareas deben estar fundadas en el reconocimiento de que los “pasajes de términos” son las transformaciones de una inequación en otras equivalentes.
- Las tareas **DDA** contribuyen a introducir a los estudiantes en la problemática de la demostración matemática y brindan experiencias dentro del *fenómeno de generalización*. Es importante habituar a los estudiantes a que justifiquen sus decisiones con las herramientas matemáticas que poseen, respaldando las afirmaciones con propiedades conocidas. Como sostiene Dreyfus (2000), “no deberíamos esperar que nuestros estudiantes sean capaces de captar demostraciones sofisticadas y de alto nivel, sin haber estado expuestos durante muchos años al espíritu de la justificación y a la naturaleza del pensamiento matemático” (p. 130).

Finalmente, consideramos que es importante no retardar indebidamente las experiencias de los estudiantes con los distintos tipos de tareas requeridas en la matemática avanzada. De esta manera los estudiantes alcanzarán un conocimiento preciso y más profundo de las desigualdades y serán capaces de aplicarlas con flexibilidad en contextos distintos.

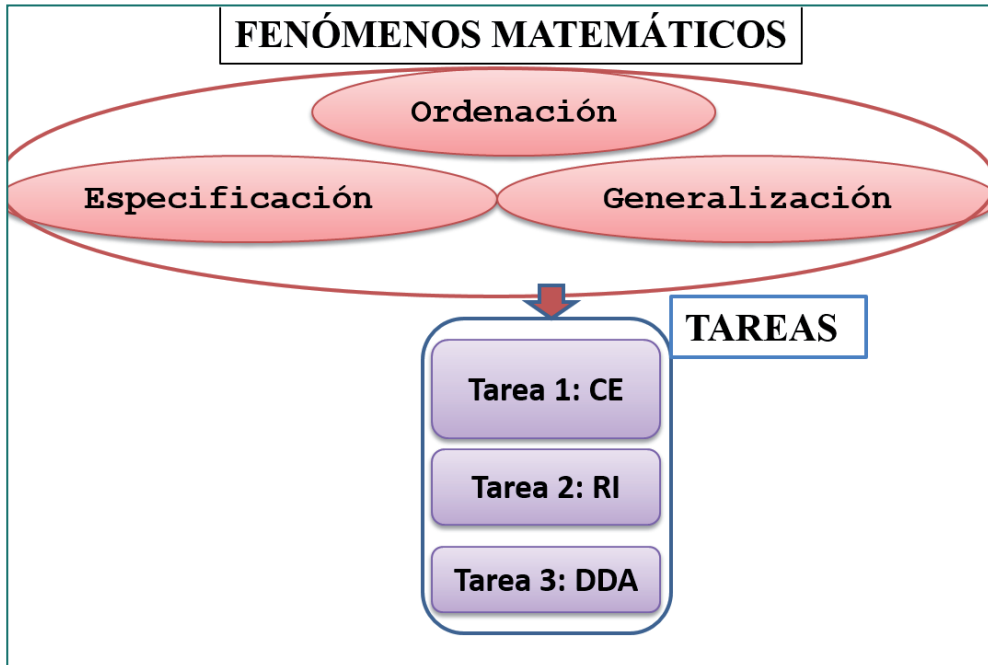


Figura 17. Fenómenos y tareas que requiere la matemática avanzada.

REFERENCIAS

- Alvarenga, K. (2006). *Inecuaciones: un análisis de las construcciones mentales de estudiantes universitarios* (Tesis doctoral no publicada). Centro de investigación en ciencia aplicada y tecnología avanzada, Instituto Politécnico Nacional, México.
- Artigue, M (1995). La enseñanza de los principios del cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos. En M. Artigue, R. Douady, L. Moreno y P. Gómez (Eds.), *Ingeniería didáctica en la educación Matemática*. (pp. 97-140). México: Grupo Editorial Iberoamérica.
- Azcárate, C. y Camacho, M. (2003). Sobre la Investigación en Didáctica del Análisis Matemático. *Boletín de la Asociación Matemática Venezolana*, X(2), 135-149.
- Borello, M. (2010). *Un planteamiento de resignificación de las desigualdades a partir de las prácticas didácticas del profesor. Un enfoque socioepistemológico* (Tesis de doctorado no publicada). Centro de investigación en ciencia aplicada y tecnología avanzada. Instituto Politécnico Nacional. México
- Borello, M., Farfán, R. M. y Lezama, J. (2008). Relazione tra le concezioni e le idee del docente e l'apprendimento dell'allievo nel caso delle disequazioni. Lo stato dell'arte. *La matematica e la sua didattica*, 22 (3), 331-361. Bologna, Italia: Pitagora.
- Calvo, C. (2001). *Un estudio sobre el papel de las definiciones y las demostraciones en cursos preuniversitarios de Cálculo Diferencial e Integral* (Tesis doctoral no publicada). Universidad Autónoma de Barcelona.

- Claros Mellado, F. (2010). *Limite finito de una sucesión: fenómenos que organiza* (Tesis de doctorado). Universidad de Granada. Disponible en: http://fqm193.ugr.es/~fclaros/produccion-cientifica/tesis/ver_detalle/7459/
- Copi, I. (1999). *Introducción a la lógica*. Buenos Aires: Eudeba.
- Diez, M. (1996). *Sobre la simbolización en el Álgebra. Aplicación al proceso de aprendizaje de las desigualdades en Educación Secundaria* (Tesis doctoral). Universidad Complutense de Madrid. España.
- Dreyfus, T. (2000). La demostración como contenido del currículum. En N. Gorgorió, J. Deulofeu y A. Bishop (Coords.): *Matemática y educación. Retos y cambios desde una perspectiva internacional*. Barcelona: ICE de la Universidad de Barcelona y Editorial Graó.
- Freudenthal, H. (2001). *Fenomenología didáctica de las estructuras matemáticas. (Textos seleccionados). 2ª Edición*. Traducción, notas e introducción de Luis Puig. México: Departamento de Matemática Educativa del CINVESTAV-IPN.
- Freudenthal, H. (2002). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*. New York: Kluwer Academic publishers.
- Garrote, M., Hidalgo, M. y Blanco, L. (2004). Dificultades en el aprendizaje de las desigualdades e inecuaciones. *Suma*, 46, 37-44.
- Garuti, R. (2003). Attività sulle disequazioni come contesto per lo sviluppo dei concetti di variabile e funzione. *Rivista di Matematica della Università Di Parma* 2001, 1-9.
- Halmaghi, E. (2011). *Undergraduate students' conceptions of inequalities: sanding the lens*. (Thesis Submitted in Partial Fulfilment of the Requirements for the Degree of Doctor of Philosophy). Faculty of Education. Simon Fraser University.
- Halmos, P. (1967). *Teoría intuitiva de los conjuntos*. México: Compañía editorial continental S.A.
- Kieran, C. (2004). The equation/inequality connection in constructing meaning for inequality situations. En M. Hoines and A.B. Fuglestad, eds., *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 1, (pp. 143-147). Noriega: Bergen. Lehmann, C. H. (1992). *Álgebra*. México: Limusa.
- Malara, N., Brandoli, M. T. y Fiori, C. (1999). Comportamenti di studenti in ingresso all'università di fronte allo studio di disequazioni. En Jean-Philippe y Maryse Maurel *Actes des Séminaires-SFIDA XII*. vol.III, Modena L'IREM de Nice, pp.XII 13-28.
- McMillan, J.H. y Schmacher, S. (2005). *Investigación educativa*. 5ª edición. Madrid: Pearson Addison Wesley.
- Noriega, R. (1991). *Cálculo Diferencial e Integral*. Cuarta edición. Buenos Aires: Docencia.
- Negrete, J. (2002). *Lógica elemental*. México: Limusa.
- Puig, L. (1997). Análisis fenomenológico. En L. Rico (Coord.) *La educación matemática en la enseñanza secundaria*. (pp. 61-94). Barcelona: Horsori.
- Rico, L, Marín, A., Lupiáñez, J. y Gomez, P. (2008). Planificación de las matemáticas escolares en secundaria. El caso de los Números Naturales. *Suma*, 58, 7-23.
- Salas, S., Hille, E. y Etgen, G. (2002). *Cálculus. Una y varias variables*. Volumen I. (4ta ed). España: Editorial Reverté, S.A.
- Sánchez, M. (2012). *Limite finito de una función en un punto: fenómenos que organiza* (Tesis de doctorado). Universidad de Granada.
- Sackur, C. (2004). Problems related to the use of graphs in solving inequalities. *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 1, (pp. 148-151). Noriega: Bergen.

- Sinaceur, H. (1992). *La construction algébrique du continu: calcul, ordre, continuité*. En Jean-Michel Salanskis y Hourya Sinaceur (Edit.) *Le labyrinthe du continu: Coloquio de Cerisy* (French Edition). Paris: Springer-Verlag.
- Tall, D. (1995). Cognitive Growth in Elementary and Advanced Mathematical Thinking. Plenary lecture, *Conference of the International Group Psychology of Learning Mathematics*, (1) (161- 175) Recife, Brazil.
- Tarski, A. (1977). *Introducción a la lógica y a la metodología de las Ciencias deductivas*. Madrid: Espasa-Calpe.
- Tsamir, P. y Almog, M. (2001). Students' strategies and difficulties: the case of algebraic inequalities. *International Journal of Mathematical Education in Science & Technology*. 32(4), 513-524.

Un sierpinski en la fachada

Pedro Carlos Moreno Ferrari
IES Averroes. Córdoba. España

Resumen: Nuestra idea fue crear una escultura de casi cuatro metros de altura basado en el Triángulo de Sierpinski. Este proyecto ha sido desarrollado por alumnos de 4º de ESO del IES Averroes de Córdoba de forma interdisciplinar incluyendo la componente social, medioambiental, matemática, artística, técnica y colaborativa.

En primer lugar estudiamos qué es un fractal. Posteriormente, se realizó una campaña de reciclaje de latas; después se realizó un modelo usando hojas de cálculo y Geogebra, para finalmente construir la escultura.

La evaluación se llevó a cabo a través de distintas herramientas y se obtuvieron resultados muy satisfactorios.

Palabras clave: Fractal, triángulo de Sierpinski, interdisciplinar, trabajo por proyecto.

Sierpinski's Triangle on the Facade

Abstract: Our idea was to create a nearly four-metre-high sculpture based on Sierpinski's Triangle. This project was developed by a group of 4 ESO students in Averroes Secondary School in Cordoba, by an interdisciplinary way which included social, environmental, mathematical, artistic, technological and collaborative components.

First, we studied what is a fractal. Then, we made a campaign for recycling cans. Afterwards, we made a model using worksheets and Geogebra and finally we made the sculpture.

The assessment was carried out by different tools and we got very satisfactory results.

Key words: Fractal, Sierpinski's Triangle, interdisciplinary, project.

PENSANDO, PENSANDO...

La práctica docente en el área de matemáticas está siempre sometida por una buena parte de la sociedad, y como consecuencia de nuestro alumnado, a la fatídica pregunta: ¿y esto para qué sirve?. El frágil equilibrio en una respuesta convincente marca la diferencia en muchas ocasiones entre el interés y motivación del alumnado, y su apatía o simple adoctrinamiento. Por eso, como profesores y profesoras tenemos la obligación de

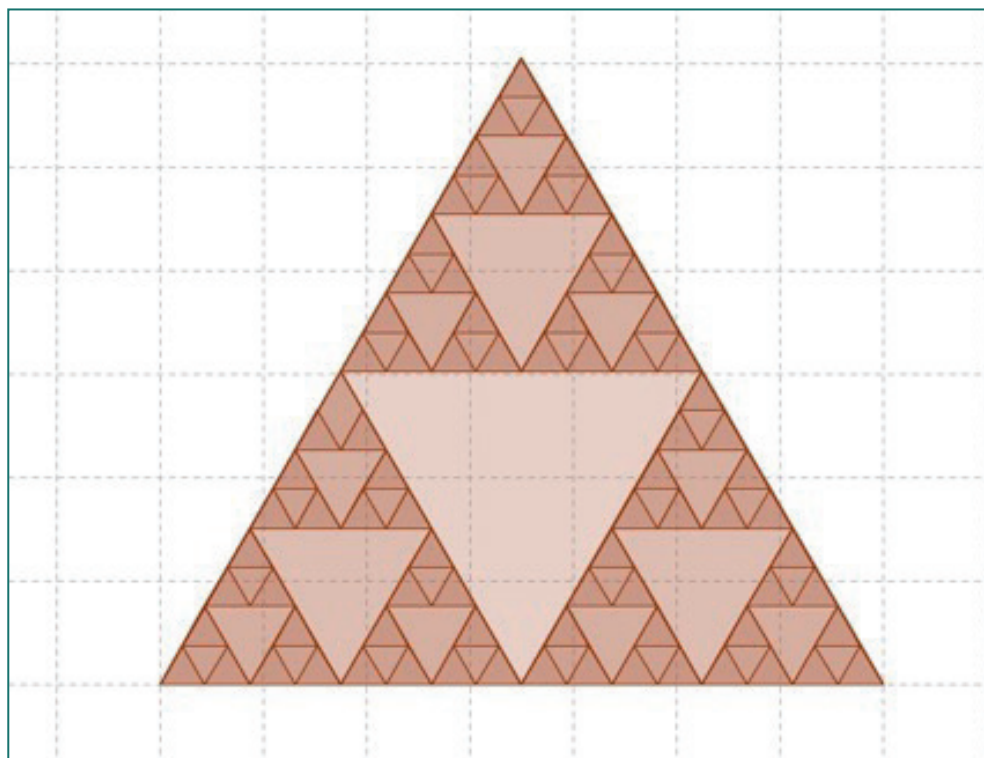


Figura 1: Triángulo de Sierpinski con Geogebra.

dar una respuesta que incline la balanza hacia lo primero, sabedores de que, como complemento nuestro alumnado se estará formando en procesos deductivos, lógicos, rigurosos y todo lo que la Matemática aporta a la comprensión del mundo que nos rodea. Es por eso que, inspirado en experiencias semejantes llevadas a cabo en muchos institutos de nuestro país, se recogió la idea, intentando sistematizar los procesos llevados a cabo y sus implicaciones como proyecto interdisciplinar.

En este sentido, el detonante fue la pregunta: ¿por qué no hacemos una escultura para decorar el instituto basada en las matemáticas?. La perplejidad mostrada por el alumnado (¿pero eso es posible?) fue la respuesta y la razón de ser para crear este proyecto cuyo final sería decorar la fachada del centro con una escultura de latas recicladas formando el Triángulo de Sierpinski.

La convicción de la necesidad de un nuevo marco de aprendizaje ha sido el motor de este proyecto. En este sentido se ha intentado que ese marco estuviera basado en la integración de espacios (dentro del aula – fuera del aula), en la multidisciplinariedad (necesitábamos conocimientos y capacidades diversas), en la creatividad (el alumnado puede participar abiertamente de la toma de decisiones), en el trabajo para la comunidad (se va a decorar el centro del que forman parte, la necesidad de limpieza, la conciencia medioambiental), en los materiales (ordenadores, papel, latas, pintura,...), y en un papel del docente en consonancia con Vergara (2015), quien afirma que “la tarea

del docente no consistirá solo ni principalmente en enseñar contenidos disciplinares descontextualizados, sino en definir y plantear situaciones en las cuales los alumnos puedan construir, modificar y reformular conocimientos, actitudes, habilidades, emociones y valores.”

Ante esta situación, una metodología activa, cooperativa e inclusiva (López, 2004), centrada en el aprendizaje basado en proyectos (ABP), pareció ser la fórmula que encajaba a la perfección con este proyecto. Por otro lado, la realidad del grupo, diverso en funcionalidades, expectativas e intereses, presentaba un buen escenario para su realización.

Además, el proyecto supuso al alumnado un reto en su proceso formativo que se ubicaba entre el dominio de la situación (pues en apariencia se sentían capaces de asumirlo) y el desconocimiento (comprendían que le faltaban herramientas para llevarlo a cabo). Este era el punto que Vygotsky (1986), establecía como el ideal para abordar un aprendizaje significativo.

PLANEANDO CON EL ALUMNADO

Aunque existen diferentes modelos en la confección del ABP, el hecho significativo es que esta elaboración surgió de varias sesiones con el propio alumnado, el cual, una vez presentado el reto final –la construcción de una escultura con latas recicladas basada en el triángulo de Sierpinski-, comenzó, a través de dinámicas grupales la organización de sus ideas previas y necesidades. Así, se establecieron diferentes comisiones de trabajo: comisión de campaña de reciclaje, comisión artística, comisión científica, comisión técnica y comisión divulgativa.

Se definieron contando con la opinión del profesor las tareas, subtareas, responsables y lugares, según puede consultarse en la Tabla 2 (Tareas, subtareas, responsables y lugares. Diseño del proyecto).



Figura 2: fase de limpieza y montaje.

¿Qué, cómo, cuándo?... ¿Para qué?

Desde el punto de vista de las competencias y la educación en valores, la realización de este proyecto ha supuesto el desarrollo de muchas de ellas en distintos ámbitos:

Competencia matemática y competencias básicas en ciencia y tecnología (CMCT):

En el desarrollo de la competencia matemática, según la orden de 14 de Julio de 2016 por la que se establece el currículo de las Matemáticas Orientadas a las enseñanzas Aplicadas 4.º ESO de Andalucía, estaríamos trabajando sobre los contenidos y criterios de evaluación del Bloque 1. Procesos, métodos y actitudes en matemática de manera muy intensa, así como del Bloque 2: Números y Álgebra y del Bloque 3: Geometría.

Así los contenidos relativos a la planificación, estrategia, modelos, medios tecnológicos, confianza, método científico, simulaciones, interpretación, comunicación, elaboración de informes compondrían un intenso trabajo curricular del primer bloque.

Sobre el bloque 2, se trabajan los contenidos de potencias, raíces e interpretación de decimales en la simulación de la construcción de la escultura, porcentajes (en la elaboración de presupuestos), uso de la calculadora, etc. En el mismo bloque del curso anterior se había trabajado el concepto de progresión geométrica que vuelve a ser necesario en este proyecto. El uso de la hoja de cálculo de Libre Office permitió la sistematización de datos y su predicción. En este caso aparecieron otro tipo de series de las que se obtuvo su término general como proceso de inducción (ver tabla 1).

En el bloque 3, correspondiente a geometría, se aplicó el Teorema de Thales y de Pitágoras en el diseño del modelo. Se usó el programa de geometría dinámica Geogebra para el diseño gráfico, con distintas herramientas para confeccionarlo que dieron pie a afianzar cuestiones de geometría: rectas, circunferencias, puntos de corte, simetrías etc. Así mismo se abordaron los conceptos de área y semejanza y al aproximarnos al mundo de la geometría fractal pudieron verse cómo aparecen en la naturaleza, así como cuestiones históricas y biográficas de algunos célebres matemáticos, como Mandelbrot (1985). También pudieron incorporarse resultados sobre la dimensión de los objetos fractales (Martín, Morán y Reyes 1998) (ver figuras 3 y 4).

Los procesos con Geogebra permitieron usar multitud de elementos para el desarrollo del modelo: puntos simétricos, circunferencias, triángulos, medidas, segmentos, perpendicularidad, etc. Además cada alumno pudo crear a su manera el triángulo de Sierpinski hecho con circunferencias, siempre que se asegurara el rigor en la construcción. Las herramientas de cálculo permitieron comprobar lo que el modelo teórico afirmaba.

Pero también, a medida que la investigación avanzaba, pudimos responder a dudas y cuestiones que se trabajaron a demanda del alumnado, lo cual permitió también para una parte del alumnado profundizar en conceptos como:

Área final: introducción al concepto de límite. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n \cdot a = 0$

Dimensión fractal: introducción al logaritmo e interpretación de la dimensión $d = \frac{\log 3}{\log 2} \approx 1,58$.

¿Qué relación existe entre el **triángulo de Pascal** y el triángulo de Sierpinski? (figura 5).

Tabla 1. Datos de la escultura y su contenido matemático.

Orden "n"	0	1	2	3	4	5	6	Término general	Total latas
Número de latas	1	3	9	27	81	243	729	3^n	1093
Peso de las latas en gr.	15	45	135	405	1215	3645	10935	$15 \cdot 3^n$	
Latas en la base	1	2	4	8	16	32	64	2^n	
Longitud de la base considerando radio=1	2	4	8	16	32	64	128	2^{n+1}	
Alturas en latas "a" considerando radio=1	1	$1+\sqrt{2^2-1^2}+1$ $2+\sqrt{3}$ 3,73	$1+\sqrt{6^2-3^2}+1$ $2+3\sqrt{3}$ 7,20	$1+\sqrt{14^2-7^2}+1$ $2+7\sqrt{3}$ 14,12	$1+\sqrt{30^2-15^2}+1$ $2+15\sqrt{3}$ 27,98	$1+\sqrt{62^2-31^2}+1$ $2+31\sqrt{3}$ 55,69	$1+\sqrt{126^2-63^2}+1$ $2+63\sqrt{3}$ 111,12	$2+(2^n-1)\sqrt{3}$	
Altura en cm sustituyendo el radio por su verdadero valor: 3 cm	3,00	11,20	21,59	42,37	83,94	167,08	333,36		
Longitud de la base sustituyendo el radio por su verdadero valor 3 cm	6	12	24	48	96	192	384		

En el desarrollo de las tareas de diseño, creación y montaje de la estructura, desde la óptica de la Competencia en Ciencia y tecnología se desarrollaron procesos para los que “se requiere igualmente el fomento de destrezas que permitan utilizar y manipular herramientas y máquinas tecnológicas, así como utilizar datos y procesos científicos para alcanzar un objetivo; es decir, identificar preguntas, resolver problemas, llegar a una conclusión o tomar decisiones basadas en pruebas y argumentos.” (Web del Ministerio de Educación, Cultura y deporte. Competencia matemática y competencia básica en ciencia y tecnología).

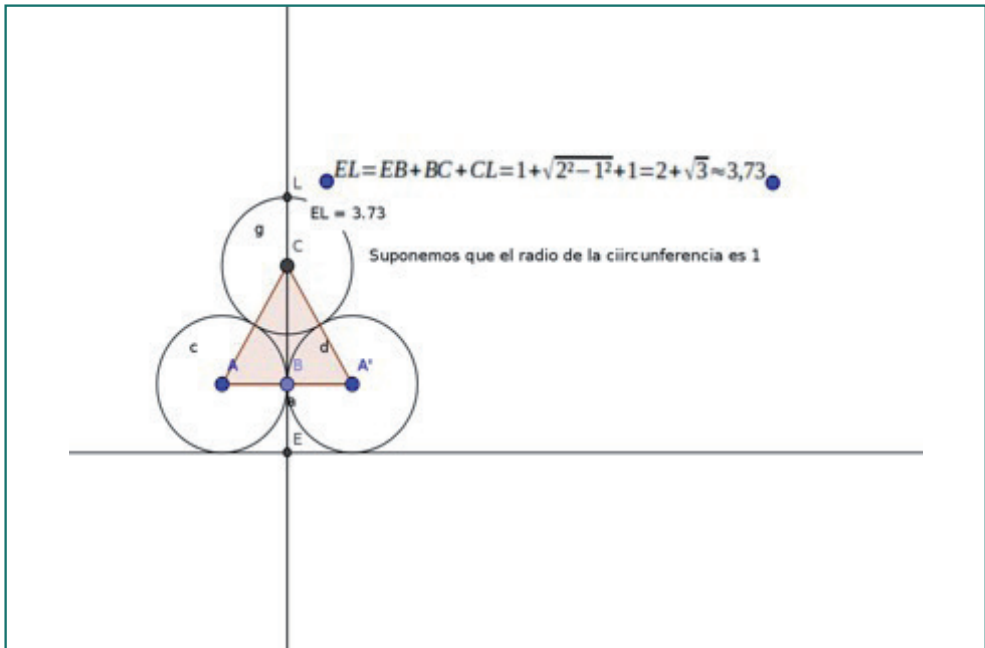


Figura 3. Cálculo de la altura del fractal de orden 1.

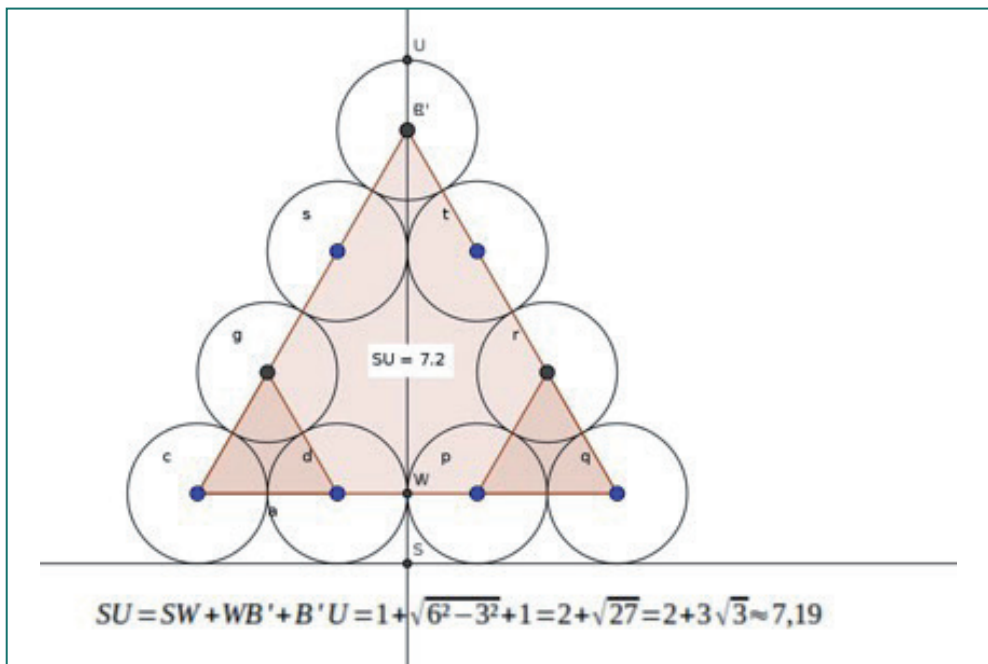


Figura 4: Cálculo de altura del fractal de orden 2

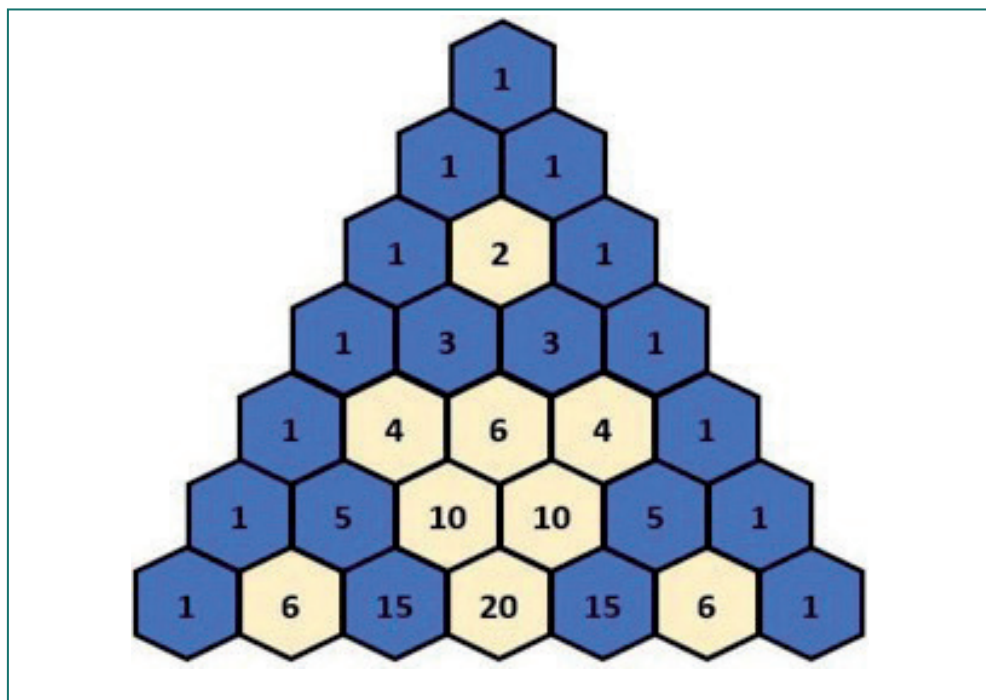


Figura 5: Triángulo de Pascal y Triángulo de Sierpinski



Figura 6.
Competencia digital.

De igual manera, la campaña de recogida de latas para la creación de la escultura supuso un trabajo de concienciación propio y al centro educativo que desarrolla lo enunciado para esta competencia: “Asimismo, estas competencias incluyen actitudes y valores relacionados con la asunción de criterios éticos asociados a la ciencia y a la tecnología,



Figura 7. Fase de pintado.

el interés por la ciencia, el apoyo a la investigación científica y la valoración del conocimiento científico; así como el sentido de la responsabilidad en relación a la conservación de los recursos naturales y a las cuestiones medioambientales y a la adopción de una actitud adecuada para lograr una vida física y mental saludable en un entorno natural y social.” (Web del Ministerio de Educación, Cultura y deporte. Competencia matemática y competencia básica en ciencia y tecnología.)

Competencias Sociales y cívicas (CSC):

La metodología participativa, activa y cooperativa con la que se ha llevado a cabo el proyecto ya ha supuesto de desarrollo de esta competencia en términos de cooperación, comunicación, empatía y solidaridad puesto que es inherente a la propia dinámica.

Los roles y su discusión en algunas tareas más creativas (diseño, difusión), más rutinarias (limpieza, orden) o más tecnológicas (montaje) supusieron elementos de debate para discutir y organizar las tareas, pudiendo así visibilizar cuestiones como la igualdad efectiva entre hombres y mujeres, o los conceptos de reparto y justicia, que el alumnado resolvió muy satisfactoriamente.

Conciencia y expresiones culturales (CEC):

El producto final ha sido una escultura de más de 3 metros de altura, junto con una boceto del proceso creativo hasta llegar a la misma. El sentido estético ha estado presente tanto en el diseño de esta creación, como en las diferentes expresiones usadas para su difusión (video, fotografía, redacción, presentación).



Figura 8. Fractal de orden 5.

Fue muy destacable el empeño del alumnado por lograr una perfección casi total en ajustar la composición a lo diseñado, sin permitir excesivos errores, lo cual da muestra de su buena actitud, lograda a través de la motivación por realizar un trabajo bien hecho.

Competencia para aprender a aprender (CPAA) y el sentido de la iniciativa y espíritu emprendedor (SIEE)

Estas dos competencias clave de igual manera han ido siendo el sustento de este proyecto desde sus inicios, pues han sido el motor de investigación, resolución de problemas, búsqueda de alternativas, etc. que dio como resultado la consecución del objetivo que el propio alumnado se había marcado.

Manos a la obra

En el currículo del área de Matemáticas, se disponen de 4 sesiones semanales. El proyecto se desarrolló durante 5 semanas en las que cada una de las tareas y subtareas se fueron encadenando. Muchas de ellas se iban realizando de manera simultánea obedeciendo al reparto decidido en las sesiones iniciales.

Disponíamos como recursos materiales: el aula de grupo, pizarra digital, ordenadores, un laboratorio de matemáticas con grifos y espacios suficientes, cajas de cartón, cartulinas, rotuladores, pistolas de silicona y recambios, papel secante, perfiles de aluminio y tornillos, pintura de spray, gafas protectoras, ropa de trabajo, guantes, cámara de fotos, cámara de vídeo y mucha ilusión.

Algunos de estos materiales fueron comprados por el alumnado que manejó presupuesto asignado del centro, asesorados por parte de algunos de los familiares de los



Figura 9. Resultado final.

alumnos. Se encargaron de hacer la gestión completa el alumnado a través de la Secretaría del mismo, con los requisitos que ésta les marcaba.

La organización de la actividad se configuró según la tabla 3 (cronograma).

Ahora corresponde evaluar

Como hemos venido viendo, el proyecto ha tenido tres tipos de intervención: individual, en comisión y en gran grupo, por lo que su evaluación se realizó también en esas tres categorías. Así mismo, existió una evaluación por parte del profesorado en las tareas propias de cada dimensión y una autoevaluación. Con todas estas herramientas se confeccionó finalmente una nota cuantitativa y una cualitativa que formaron parte del segundo trimestre del curso.

- **Individual:** El alumnado tuvo que demostrar sus conocimientos y dominio de los procesos en cuanto a las progresiones geométricas, conceptos básicos de geometría fractal y uso adecuado del teorema de Pitágoras y de Thales en una situación análoga al proyecto que se realizó. Por otro lado el alumnado tuvo que presentar una hoja de cálculo y un documento de Geogebra con el diseño del proyecto tal y como se había ido descubriendo.
- **Comisiones:** Cada una de las comisiones tenía encomendada una serie de tareas que fueron evaluadas por separado dependiendo de las mismas. Cada uno de los alumnos del grupo pertenecía a alguna de las comisiones. Algunas de ellas presentaron un proyecto final (presentación, vídeo, presupuestos, etc) evaluado con una rúbrica y documentos de autoevaluación adaptados del CeDeC (ver referencias).
- **Gran grupo:** La evaluación del gran grupo se llevó a cabo a través de una dinámica a tal efecto, señalando los logros, dificultades, y posibles mejoras, así como

aspectos de tipo actitudinal, como la colaboración, los roles, el apoyo, la empatía o la organización del trabajo. Esta dinámica fue muy enriquecedora.

Las autoevaluaciones consistieron en documentos de reflexión a nivel individual y a nivel de comisión donde, en ese mismo sentido, cada individuo y cada comisión valoró su aportación al gran grupo y su propio proceso de aprendizaje y cooperación con el resto.

Divulgar, difundir, disfrutar

Todas las experiencias enriquecedoras merecen ser compartidas. De la misma forma que nos hemos inspirado en otras, también, ¿por qué no?, ésta podría nutrir otras venideras. El espacio de la red, es un lugar en el que había que estar según opinaba el alumnado, para que compañeros, familiares y otras personas pudieran ver nuestra creación. La bitácora del centro y nuestro blog “verde” <http://iesaverroesenverde.blogspot.com.es/>, permitieron la visibilidad del proyecto. Por otro lado se difundió mediante la participación en la feria anual del programa ALDEA a través del proyecto RECAPACICLA en Junio de 2016, y en la colaboración con los compañeros de robótica en varios certámenes. El reciente premio a la experiencia en el Certamen de Experiencias Didácticas ALDEA del 2017, permite que ese compartir tenga un sentido más profundo. De la misma manera, recibir el reconocimiento por un trabajo bien hecho, es siempre algo agradable en la trayectoria del alumnado y del profesorado.

¿Y ahora qué?

Muchas veces en nuestra tarea buscamos dentro de nuestra propia materia aquellos elementos que nos resultan de interés. Por otro lado están las motivaciones e intereses de nuestro alumnado. Considero necesario que estos caminos no sean paralelos, pues las Matemáticas podrán pasar por la vida de nuestro alumnado sin pena ni gloria. En cambio, en la medida que algo –incluso aparentemente ajeno a las matemáticas– les proporcione satisfacción, orgullo, reconocimiento, alegría, etc. estos sentimientos podrán ser la espoleta para que el alumnado se cuestione, se pregunte, quiera conocer,... que es lo que el profesorado deseamos que ocurra.

Por otro lado esta experiencia anima a confiar en la capacidad de los y las jóvenes para organizarse, para autoregularse y ponerse retos, para detectar sus carencias y sus fortalezas. Creo que en este sentido, la figura del profesor como guía supone un lugar desde el que observar, apoyar y animar. La intervención a demanda es un comportamiento que permite situarnos como profesores en otro lugar desde el que mirar el proceso de enseñanza-aprendizaje y a nuestro alumnado como chicos y chicas más que como alumnos y alumnas, y ver con menos autoexigencia y más claridad qué está ocurriendo en nuestro grupo. Todo ello representa muchas ventajas para continuar en esta senda.

REFERENCIAS

- López, M. (2004). Construyendo una escuela sin exclusiones. Una forma de trabajar con proyectos en el aula. Málaga: Aljbe.
- Mandelbrot, B. (1975). La geometría fractal de la naturaleza. Barcelona: Tusquets.
- Martín, M.A.; Morán, M. y Reyes, M. (1998): Iniciación al caos. Madrid: Síntesis.
- Ministerio de Educación, Cultura y Deporte (s. f.) Competencia matemática y competencia básica en ciencia y tecnología. <http://www.mecd.gob.es/educacion-mecd/mc/lomce/el-curriculo/curriculo-primaria-eso-bachillerato/competencias-clave/ciencias.html>. Consultado 10/03/2016
- Rúbricas de CeDeC: dependiente del El Instituto Nacional de Tecnologías Educativas y de Formación del Profesorado, del Ministerio de Educación, Cultura y Deporte (s. f.) <http://cedec.ite.educacion.es/>. Consultado 10/03/2016
- Vergara, J. J. (2015). Aprendo Porque Quiero: El Aprendizaje Basado En Proyectos (ABP), Paso A Paso. Madrid: Ediciones SM
- Vygotsky, L. (1986) Pensamiento y Lenguaje. Barcelona: Paidós.

ANEXOS

Tabla 2: Tareas, subtareas, responsables y lugares. Diseño del proyecto.

Tarea	Subtarea	Responsable y lugar
1. Realización de una campaña de reciclaje de latas de refresco “Vamos a dar la lata”	1.1. Crear un cartel 1.2. Difusión de la campaña. 1.3. Recogida diaria de latas	Comisión de campaña de reciclaje. Todo el centro
2. Conocer el concepto de fractal	2.1. Investigar origen y propiedades 2.2. Elaborar una presentación sobre fractales. 2.3. Exponer presentación sobre fractales.	Comisión científica. Aula
3. Conocer el concepto de progresión geométrica	3.1. Conocer y practicar con concepto de progresión geométrica. 3.2. Conocer y practicar con la suma de progresiones geométricas	Todo el grupo en el aula
4. Diseño de un modelo	4.1. Uso de hoja de cálculo para sus dimensiones. 4.2. Uso del geogebra para definir el modelo	Todo el grupo en sala de ordenadores
5. Limpieza de latas y preparación	5.1. Quitar anillas 5.2. Lavar las latas 5.3. Limpiar espacios	Todo el grupo en el Laboratorio de Matemáticas
6. Ensamblaje	6.1. Crear fractal de orden 1 6.2. Crear fractal de orden 2 ... 6.6. Crear fractal de orden 6 6.7. Almacenamiento 6.8. Reforzar estructura	Todo el grupo en el Laboratorio de Matemáticas Profesorado FPB y personal de mantenimiento.
7. Cálculo del presupuesto	7.1. Elaboración de un presupuesto 7.2. Compras.	Comisión técnica. Aula del grupo
8. Pintura	8.1. Pintar los fractal de orden 6, 5, 4, 3, 2, 1 8.2. Limpieza espacios	Comisión artística. Patio del centro.
9. Montaje	9.1. Cálculo de dimensiones reales 9.2. Decisión de la ubicación y entrevista con la dirección del centro. 9.3. Realización del montaje	Comisión técnica. Fachada del instituto. Profesorado FPB y personal de mantenimiento.
10.- Divulgación	10.1. Realización de fotos 10.2. Realización de vídeo del proceso. 10.3. Creación de material multimedia de difusión y subida a la red. 10.4. Participación en la feria “Recapacicla” del programa ALDEA 2016	Comisión de divulgación. Todos los espacios.
11.- Evaluación	11.1. Actividades para la autoevaluación. 11.2. Actividades de evaluación.	Todo el grupo en su aula.

Tabla 3: Cronograma.

Sesión 1	Sesión 2	Sesión 3	Sesión 4	Sesión 5
Organización del proyecto y presentación del Triángulo de Sierpinski. Fotos y vídeos de la escultura	Organización del proyecto	1.1. Crear un cartel 2.1. Investigar origen y propiedades 10.1. Realización de fotos 10.2. Realización de vídeo del proceso.	1.2. Difusión de la campaña. 1.3. Recogida diaria de latas 5.1. Quitar anillas 5.2. Lavar las latas 5.3. Limpiar espacios	1.2. Difusión de la campaña. 1.3. Recogida diaria de latas 5.1. Quitar anillas 5.2. Lavar las latas 5.3. Limpiar espacios 10.1. Realización de fotos 10.2. Realización de vídeo del proceso.
Todo el grupo	Todo el grupo	1.1. Comisión de campaña de reciclaje. 2.1. Comisión científica. 10.1 y 10.2. Comisión divulgación	1.1. Comisión de campaña de reciclaje. 5.1, 5.2 y 5.3 Todo el grupo	1.1. Comisión de campaña de reciclaje. 5.1, 5.2 y 5.3 Todo el grupo 10.1 y 10.2 Comisión difusión

Sesión 6	Sesión 7	Sesión 8	Sesión 9	Sesión 10
1.2. Difusión de la campaña. 1.3. Recogida diaria de latas 5.1. Quitar anillas 5.2. Lavar las latas 5.3. Limpiar espacios	3.1. Conocer y practicar con concepto de progresión geométrica. 3.2. Conocer y practicar con la suma de progresiones geométricas	4.1. Uso de hoja de cálculo para sus dimensiones. 10.1. Realización de fotos	4.2. Uso del geogebra para definir el modelo. 10.2. Realización de vídeo del proceso.	6.1. Crear fractal de orden 1 6.2. Crear fractal de orden 2 6.3. Crear fractal de orden 3 6.7. Almacenamiento
1.1. Comisión de campaña de reciclaje. 5.1, 5.2 y 5.3 Todo el grupo	3.1 y 3.2. Todo el grupo	4.1 Todo el grupo. 10.1. Comisión difusión	4.2 Todo el grupo. 10.2. Comisión de difusión.	6. Todo el grupo

Tabla 3: Cronograma.

Sesión 11	Sesión 12	Sesión 13	Sesión 14	Sesión 15
6.2. Crear fractal de orden 2 6.3. Crear fractal de orden 4 6.5. Crear fractal de orden 5 6.7. Almacenamiento 10.1. Realización de fotos	6.4. Crear fractal de orden 4 6.5. Crear fractal de orden 5 6.6. Crear fractal de orden 6 6.7. Almacenamiento 7.1. Elaboración de un presupuesto 10.2. Realización de video del proceso.	2.2. Elaborar una presentación sobre fractales. 7.2. Compras 8.1. Pintar los fractal de orden 6, 5, 4, 3, 2, 1 8.2. Limpieza espacios 9.1. Cálculo de dimensiones reales. 10.1. Realización de fotos	2.2. Elaborar una presentación sobre fractales. 8.1. Pintar los fractal de orden 6, 5, 4, 3, 2, 1 8.2. Limpieza espacios 9.2. Decisión de la ubicación y entrevista con la dirección del centro. 10.2. Realización de video del proceso.	8.1. Pintar los fractal de orden 6, 5, 4, 3, 2, 1 8.2. Limpieza espacios. Completar trabajos individuales de tareas 3 y 4
6. Todo el grupo. 10.1. Comisión difusión	6. Todo el grupo. 7.1. Comisión técnica. 10.1. Comisión difusión	2.2. Comisión científica. 7.2. y 9.1 Comisión técnica 8.1 y 8.2. Comisión artística. 10.1. Comisión difusión	2.2. Comisión científica. 9.2. Comisión técnica. 8.1 y 8.2. Comisión artística. 10.1. Comisión difusión	8.1 y 8.2. Comisión artística. Resto del grupo
Sesión 16	Sesión 17	Sesión 18	Sesión 19	Sesión 20
2.3. Exponer presentación sobre fractales. 10.3. Creación de material multimedia de difusión y subida a la red. Exponer materiales individuales (tabla, geometría dinámica)	9.3. Realización del montaje. <i>¡Festear!</i>	Recopilación de materiales producidos por el alumando y recogida.	11.1. Actividades para la auto-evaluación. 11.2. Actividades de evaluación.	10.4. Participación en la feria "Recapacila" del programa ALDEA 2016
2.3. Comisión científica. 10.3. Comisión de difusión. Resto del grupo	Todo el grupo.	Todo el grupo.	Todo el grupo.	Todo el grupo.

Córdoba, una ciudad muy proporcionada

Fernando Arribas Ruiz
María del Carmen Galán Mata
Jaime González Cimas
Álvaro Luque Borrego
I.E.S. Averroes (Córdoba)

RESUMEN: *En este trabajo queremos presentar la experiencia tratando con nuestro alumnado tanto la proporción cordobesa, tan presente en nuestra preciosa ciudad, como otras proporciones notables que aparecen acompañándola en diversos rincones.*

La proporción cordobesa tuvo gran presencia en la arquitectura cordobesa cuando era capital del califato, y recuperó valor gracias a la labor del arquitecto Rafael de la Hoz. Hemos planteado una serie de actividades tanto con Geogebra como actividades in situ, donde el alumnado debe tomar medidas y comprobar proporciones y razones, con las que se analizan la presencia de dicha proporción en varios monumentos y elementos artísticos de la ciudad, abarcando etapas históricas desde la romana hasta la contemporánea, pasando por la tan importante etapa musulmana de la ciudad, y fomentando un aprendizaje atractivo de la geometría y de la historia de su entorno.

También se hará un estudio de todas las proporciones presentes en la Mezquita, a fin de comparar la cordobesa con otras más conocidas en todo el mundo, y de otros elementos de dicho monumento que tienen un especial interés geométrico, como sus arcos.

Córdoba, a very provided city

Abstract: *In this work we want to present the experience dealing with our pupils both the proportion Cordoba, so present in our beautiful city, and other notable proportions that appear accompanying it in various corners.*

The Cordovan proportion had a great presence in the Cordovan architecture when it was capital of the caliphate, and recovered value thanks to the work of the architect Rafael de la Hoz.

We have set up a series of activities with Geogebra as well as on-site activities, where students must take measures and check proportions and reasons, which will analyze the presence of this proportion in various monuments and artistic elements of the city, spanning historical stages since the Roman to the contemporary, passing through the

important Muslim stage of the city, and encouraging an attractive learning of the geometry and history of its surroundings.

A study of all the proportions present in the Mosque will also be made, in order to compare the Cordoba with other more known around the world, and other elements of this monument that have a special geometric interest, such as its arches.

Nivel educativo: Hemos desarrollado el proyecto para grupos de 4º E.S.O. Y 1º de Bachillerato

INTRODUCCIÓN

En el arte hay varias proporciones notables con gran valor estético e histórico. Entre las menos conocidas queremos citar la proporción cordobesa, que se define como la relación entre el radio de la circunferencia circunscrita al octógono regular y el lado de éste.

Esta proporción, que debió tener gran importancia en el arte musulmán, del que gran parte se destruyó en la Reconquista, toma su nombre de haber dejado sus mayores vestigios en la ciudad de Córdoba. Su descubrimiento y estudio matemático fue iniciado por el arquitecto Rafael de la Hoz Arderius (1924-2000), madrileño de nacimiento pero que se afincó y desarrolló gran parte de su carrera en esta ciudad.

Uno de nuestros objetivos este curso ha sido que nuestro alumnado conozca y valore esta proporción, mediante actividades de todo tipo, varias de ellas desarrolladas con Geogebra, cuyo resultado queremos analizar y compartir.

1. CONSTRUCCIONES BÁSICAS CON GEOGEBRA

Partimos de la razón entre el radio de la circunferencia circunscrita a un octógono regular y el lado del mismo, dicha razón es el conocido como **número cordobés** $\frac{1}{\sqrt{2-\sqrt{2}}}$

Hemos diseñado una construcción en Geogebra que hemos utilizado para explicar el concepto a nuestro alumnado. Consta de un octógono regular de lado variable, a través de un deslizador, la circunferencia circunscrita al mismo y el cociente entre el radio y el lado. Los alumnos pueden comprobar que al aumentar o disminuir el lado del octógono aumenta o disminuye también el del radio de la circunferencia circunscrita, pero el cociente entre ambas se mantiene invariable, dando lugar al número cordobés. Acompañando este polígono hemos hecho un decágono regular, con la circunferencia circunscrita también, asociando su lado al mismo deslizador que al lado del octógono, y presentando el cociente entre el lado y el radio, dando lugar al número áureo. El alumnado puede comprobar que también este cociente permanece invariante.

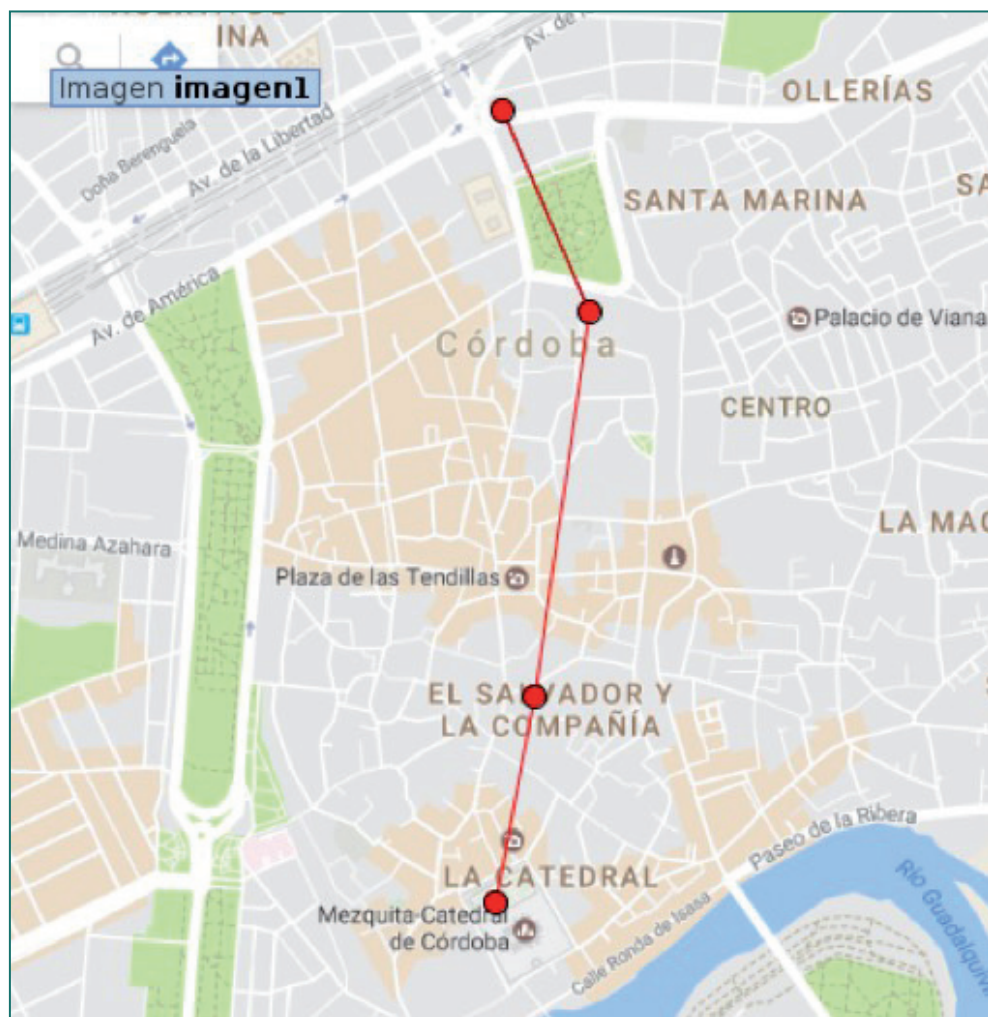


Figura 1. Plano ruta Córdoba.

2. RUTA DE LAS PROPORCIONES EN CÓRDOBA

Mostraremos la ruta que hemos diseñado para la visita con el alumnado. La proporción cordobesa aparece en más lugares de los que señalaremos aquí (Sinagoga, edificios de la calle Gran Capitán, convento de las Salesas, etc.); nuestra selección se ha basado en un recorrido para hacer un estudio posterior con el alumnado, visitando los lugares más emblemáticos de la ciudad de Córdoba donde aparecen ésta y otras proporciones notables (figura 1):

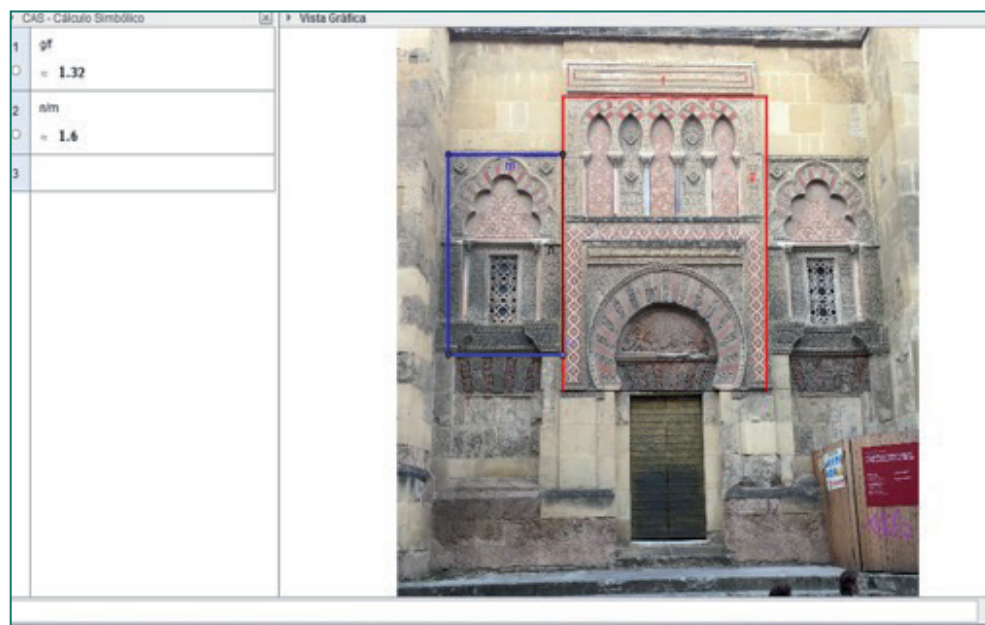


Figura 2. Puerta de al-hakam ii

3. LA MEZQUITA DE CÓRDOBA

3.1. Entorno

La proporción cordobesa aparece constantemente en la Mezquita (año 785), junto con otras proporciones notables. Ejemplo de ello es el Mirhab, del que hablaremos en profundidad más adelante, o los arcos de su interior que serán también objeto de estudio. Nos detenemos ahora en la fachada exterior, concretamente en la Puerta de Al-Hakam II, que contiene no solo la proporción cordobesa, sino también la proporción áurea (figura 2):

En los alrededores de la Mezquita nos encontramos también la puerta del Puente Romano (año 1572), una de las tres únicas puertas que se conservan de la ciudad de Córdoba, junto con la puerta de Almodovar y la Puerta de Sevilla. La puerta en sí se compone de un rectángulo cordobés, en cuyo interior se sitúa un rectángulo áureo (figura 3):

También en este privilegiado entorno nos encontramos el Triunfo de San Rafael (año 1781). El Arcángel San Rafael ostenta el honor de ser el Custodio de Córdoba, desde que en la Edad Media la peste asoló Europa diezmando a la población. Córdoba entera se encomendó a San Rafael y milagrosamente la peste pasó por la ciudad sin causar demasiados daños. En este Triunfo podemos apreciar la razón áurea (considerando el monumento en su totalidad) y la cordobesa, sin tener en cuenta la base de la figura (figura 4):

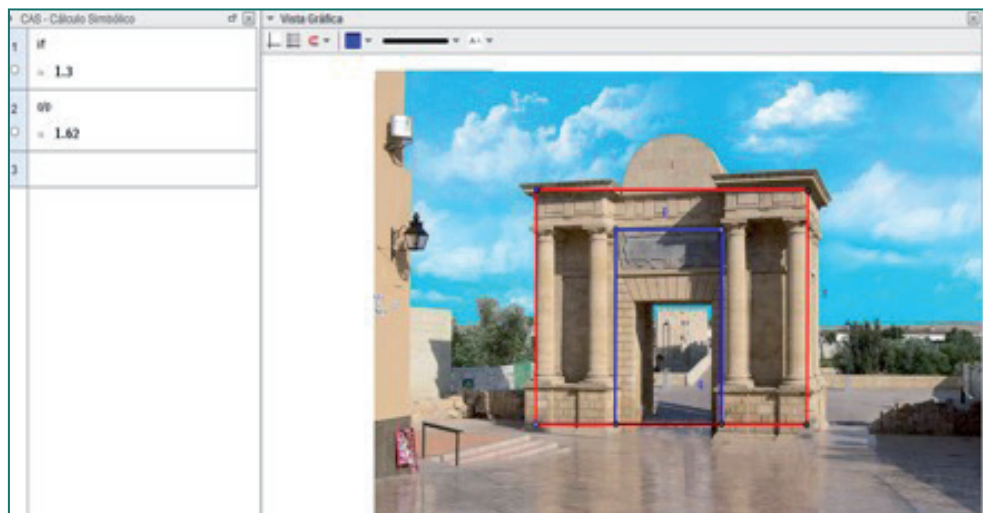


Figura 3. Puerta del puente romano

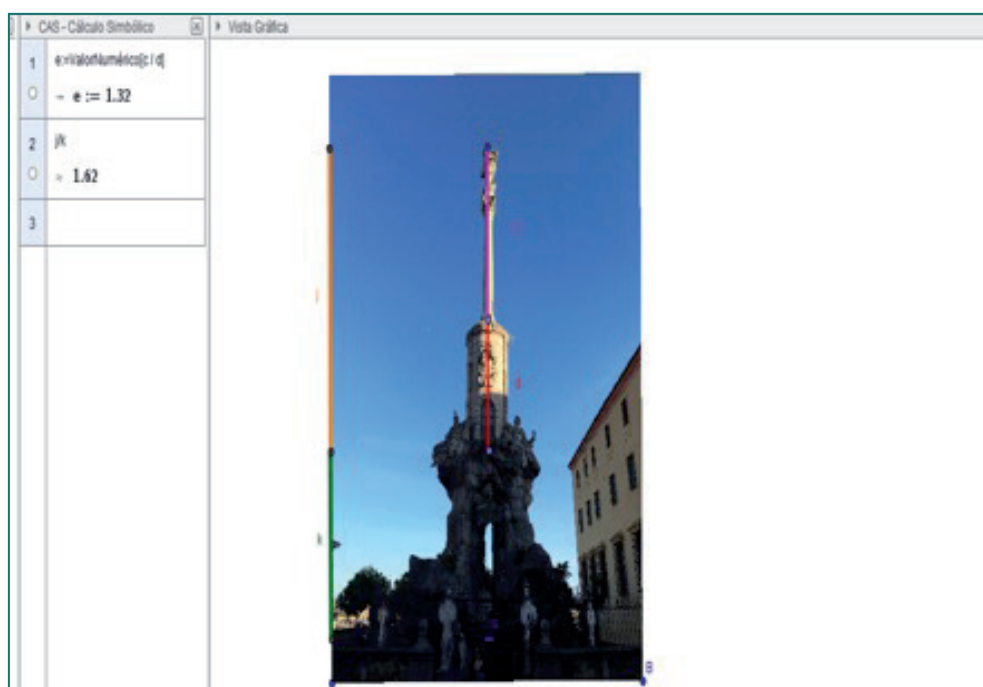


Figura 4. Triunfo de san Rafael

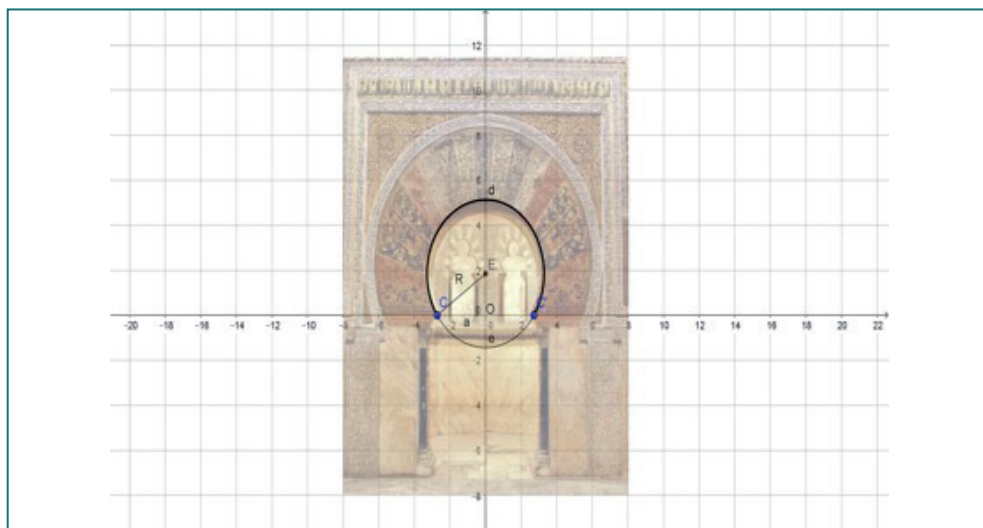


Figura 5. Arco del Mirhab

3.2 Arcos en la mezquita

El arco del Mihrab de la Mezquita de Córdoba es un arco de herradura califal que cierra a $\frac{1}{2}$ del radio. Pertenece a la Ampliación de Al-Hakam II (962-966).

El objetivo planteado es construir este arco utilizando el programa *Geogebra*, como se puede ver en la siguiente figura 5, a continuación, calcular el área del mismo para saber la cantidad de luz que deja pasar.

El área, en función del radio R , se puede calcular de la siguiente forma:

En el triángulo EOC se cumple que:

$$R^2 = a^2 + \frac{1}{4} R^2 \quad ; \quad a = \frac{R \cdot \sqrt{3}}{2}$$

$$\cos(\widehat{CEO}) = \frac{\frac{1}{2}R}{R} \quad (\widehat{CEO}) = 60^\circ$$

Área del arco del Mihrab = Área círculo completo – Área segmento circular

Área segmento circular = Área sector circular – Área triángulo

$$\text{Área segmento circular} = \frac{1}{3} \pi R^2 - \frac{R \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot R}{2} = \frac{1}{3} \pi R^2 - \frac{\sqrt{3}}{4} R^2$$

$$\text{Área del arco del Mihrab} = \pi R^2 - \left(\frac{1}{3} \pi R^2 - \frac{\sqrt{3}}{4} R^2 \right)$$

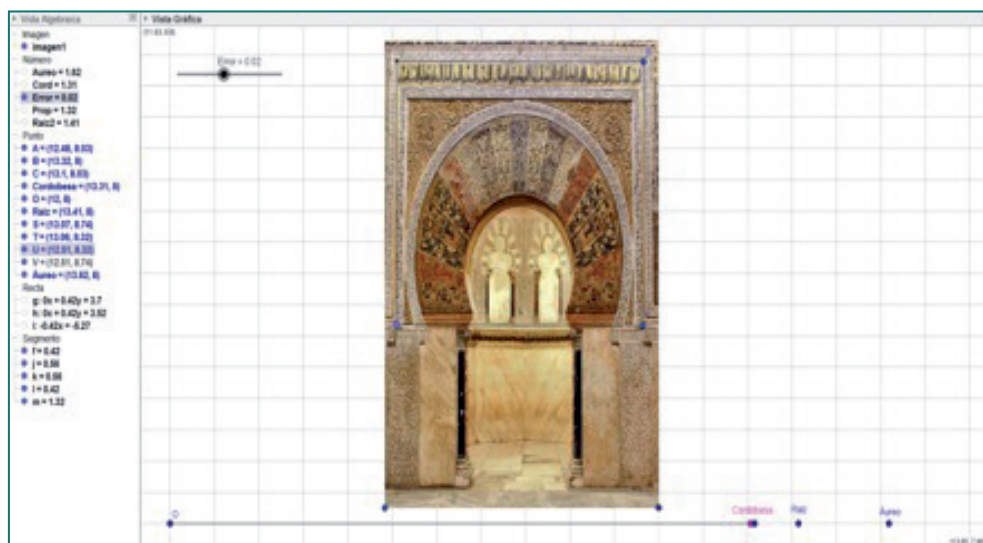


Figura 6. Mirhab

3.3 Mirhab

Es habitual que un mismo monumento de Córdoba contenga distintas proporciones notables en varios de sus elementos, como el Mihrab de la Mezquita, que contiene las proporciones cordobesa, áurea y raíz de 2. Esto enriquece su estudio pero también lo complica de cara al alumnado, por lo que hemos desarrollado una actividad en Geogebra que permite buscar distintas proporciones (con margen de error regulable) sobre la foto de cualquier monumento (figura 6).

4. MUSEO ARQUEOLÓGICO

En su interior se encuentran:

– **Sarcófago de Adán y Eva** (primer tercio del siglo IV) (figura 7): sarcófago paleocristiano columnado en mármol. Sarcófago ampliamente decorado, incluso las enjutas de los arcos han sido utilizadas para representar escenas secundarias, como los pasajes de la vida de Jonás. Las escenas principales están situadas en los cinco espacios en que se divide el frontal y son las siguientes, de izquierda a derecha:

1. Sacrificio de Isaac. Se representa el momento en que el ángel sujeta la mano de Abraham.
2. Negación de Pedro. Muestra a Cristo y a Pedro en el momento del anuncio de la negación de éste; sobre el árbol que hay entre ambos puede verse el gallo.
3. Multiplicación de los panes y los peces. Éste es el tema central de la composición. Cristo, que naturalmente ocupa el centro de la escena central, impone sus manos sobre un plato con un pez y un cesto de panes, que es sostenido por varios apóstoles.



Figura7. Sarcófago de Adán y Eva

4. Adán y Eva en el Paraíso. Representados cubiertos únicamente por hojas, con el árbol de la ciencia, en cuyo tronco se enrosca el cuerpo de la serpiente.
5. Milagro de la piedra de Horeb. Tema extraído de un evangelio apócrifo, según el cual Pedro, al igual que Moisés, hizo brotar el agua de una roca con su vara.

La proporción cordobesa también se encuentra en las esculturas romanas y griegas que posee el museo.

5. PLAZA DE CAPUCHINOS

Esta plaza constituye uno de los lugares más afamados de la ciudad de Córdoba, y de ella, el arquitecto Rafael de la Hoz dijo que "*Jamás en arquitectura se ha dicho más con menos*", o el poeta Ricardo Molina "*No es más que un rectángulo de cal y de cielo*".

La plaza de Capuchinos se abre en el siglo XVII sobre unas casas que el marqués de la Almunia mantenía en la parte noreste de la villa. Su conformación se produce mediante la construcción del convento de Capuchinos en 1633, así como la de la Iglesia de los Dolores, cuya terminación se produce en 1728.

6. TORRE DE LA MALMUERTA

Torre que formaba parte de un recinto fortificado, en el barrio de Santa Marina de Córdoba, construida a principios del siglo XV

Su planta octogonal es un claro ejemplo de la razón cordobesa:

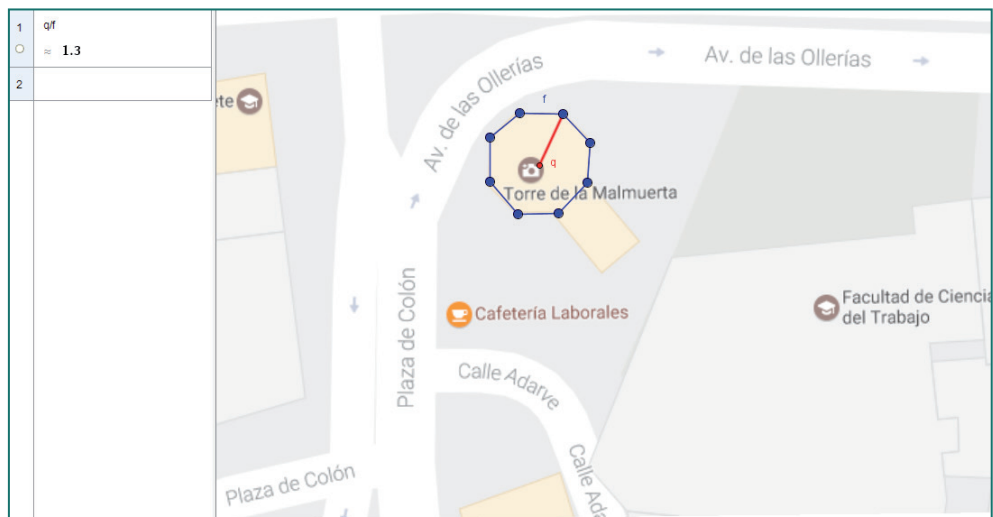


Figura 8. Planta Torre Malmuerta

7. CONCLUSIONES

Como hemos podido apreciar Córdoba es una ciudad de ilustres proporciones, que hemos visitado, comprobado y medido con nuestro alumnado, en ocasiones con ayuda de programas informáticos como Geogebra, y en otras ocasiones a la vieja usanza, con metro y calculadora. Para conocer más y poder compartir la experiencia que hemos tenido os invitamos a visitar la Bitácora del IES Averroes, donde podéis encontrar el cuadernillo de actividades que desarrolló el alumnado, fotografías de las visitas, opiniones, etc.

8. REFERENCIAS

- De la Hoz, R. (1996) *Presentación especial en las “VII Jornadas Andaluzas de Educación Matemática “THALES”*, Córdoba: Universidad de Córdoba.
http://www.webislam.com/media/2013/10/58409_proporcioncordobesa.pdf
- Doblado, M. (2007): *Rafael de la Hoz Arderius y la Proporción cordobesa*. Comunicación para el Segundo Congreso Internacional de Matemáticas en Ingeniería y Arquitectura. Madrid: Universidad Politécnica de Madrid
<http://www2.caminos.upm.es/Departamentos/matematicas/Fdistancia/PIE/Chip%20geom%C3%A9trico/LaHoz.pdf>
- Doblado, M. (2009): *La proporción cordobesa en la arquitectura*.
<http://docplayer.es/424344-La-proporcion-cordobesa-en-la-arquitectura.html>
- Departamento de Matemáticas del IES Gran Capitán (2014): *Visita matemática a la Mezquita de Córdoba*.

<http://www.iesgrancapitan.org/profesores/bvaquero/blogdepartamento/visitamaticasmezquitacordoba.pdf>

Bitácora IES Averroes

<http://www.juntadeandalucia.es/averroes/centros-tic/14002984/helvia/bitacora/>

Actividades para la Orientación Espacial en espacios reales

Teresa F. Blanco

Universidad de Santiago de Compostela

Juan Jesús Freire Pérez

Universidad de Santiago de Compostela

María Salgado

CEIP Sigüeiro y Universidad de Santiago de Compostela

Resumen: *La orientación espacial está presente en los contenidos curriculares de la Educación Primaria, sin embargo no existen una amplia variedad de actividades relacionadas con este tema. En este trabajo presentamos una propuesta didáctica que engloba cuatro ideas que se pueden llevar a cabo en un aula de los últimos cursos de Educación Primaria. El objetivo de este trabajo es que el alumnado desarrolle ciertas habilidades de orientación espacial y a la vez que conozca su entorno.*

Palabras clave: *Orientación espacial, primaria, mapas, itinerario.*

Activities for Space Orientation in real spaces

Abstract: *Spatial orientation is a topic included in Primary Education curricular contents; nevertheless it does not exist a large range of activities related with this field. In this article we present an educational proposal which includes four ideas that can be performed in the last courses of Primary Education. It is aimed that students will develop skills of spatial orientation and at the same time they will be able to discover their environment.*

Keywords: *Spatial orientation, visualization, primary, maps, itinerary.*

LITERATURA

En nuestro día a día debemos poner en juego habilidades de Orientación y Visualización Espacial. El empleo de estas habilidades resulta imprescindible en profesionales de la medicina, arquitectura, transporte, fontanería, carpintería, ingeniería, topografía, geografía, ... y no menos importante en situaciones cotidianas como el camino para ir a la

escuela, orientarse en tu ciudad, indicar una dirección, comprender un mapa, o interpretar las líneas del transporte público, es por ello que resulta importante que el alumnado desarrolle estas habilidades.

En torno a este tema de trabajo han surgido multitud de investigaciones y propuestas, aunque resulta controvertido y aparentemente anárquico en cuanto a la definición de Orientación Espacial y Visualización Espacial (Arrieta, 2003). Autores como McGee (1979) y Tatre (1990) establecen diferencias entre las tareas de Visualización y de Orientación Espacial: las primeras requieren que la representación o una parte de ella sean movidas mentalmente, mientras que las segundas el desplazamiento o cambio de la perspectiva observada por el sujeto.

Para Gonzato, Fernández y Godino, (2011) en el aprendizaje de la geometría, la visualización y orientación espacial son consideradas como un conjunto de habilidades relacionadas con el razonamiento espacial. Se observa “que en cualquier tarea de Orientación Espacial están también involucradas habilidades de Visualización Espacial” (Gonzato y Godino, 2010, p. 48). Por otra parte es importante distinguir los conocimientos o conceptos que tienen una naturaleza visual, perceptiva, a través de la observación y la intuición, de aquellos conceptos verbales o reflexivos a través de los cuales describimos o comunicamos conocimientos gráficos planos o espaciales.

Alsina, Burgués y Alsina (1997, p.15) escriben a este respecto:

La visualización espacial corresponde al saber ver el espacio en el cual la intuición es el motor que hace arrancar y avanzar la comprensión de las distintas relaciones espaciales. Ahora bien, para que se tenga un conocimiento correcto, hay que analizarlo con las leyes de la deducción lógica, para que de esta manera se pueda expresar y comunicar por medio del lenguaje.

Es decir, aunque en un primer momento debemos trabajar los aspectos, conocimientos o conceptos desde un enfoque visual y perceptivo; posteriormente deberemos trabajar y acercarnos al terreno lógico y reflexivo para poder asimilar correctamente los contenidos. Ambos modos podrían considerarse como partes del desarrollo del pensamiento y conocimiento geométrico.

Dentro de las tareas de Orientación y Visualización Espacial, Gonzato et al. (2011) nos proponen diferenciar entre tres familias según el tópico tratado:

- Orientación estática del sujeto y de los objetos.
- Interpretación de perspectivas de objetos tridimensionales.
- Orientación del sujeto en espacios reales.

La primera de las familias trata las tareas de orientación del sujeto con respecto a su propio cuerpo y en relación a otros objetos así como la posición de los objetos con respecto a otros. Comprender e interiorizar el propio esquema corporal es el objetivo de las actividades o tareas propias de esta familia.

La segunda está relacionada con tareas o actividades que “requieren reconocer y cambiar puntos de vista. En estas tareas se construyen técnicas para representar un objeto o un espacio, y se aprende a leer diferentes tipos de representaciones planas y sus códigos” (Gonzato et al., p.104).

La tercera y última de las familias recogen aquellas tareas en las que “se requiere que el sujeto comprenda el espacio donde se sitúa, su ubicación y orientación en el espacio” (Gonzato et al., p.109). Se incluyen tareas como leer planos, mapas o comprender una maqueta, del mismo modo que construirlos o dibujarlos. Además, es necesario para realizar este tipo de tareas conectar el esquema corporal con los espacios circundantes, en ocasiones proyectándolo y conectándolo con los puntos de referencia.

Para desarrollar este tipo de tareas se distinguen tres tipos de estímulos iniciales, estímulos que están directamente asociados a la acción requerida para resolver la tarea:

- Espacio real: la acción transcurre o ha transcurrido en el espacio real, sin apoyo de representación del espacio.
- Representación espacial: no se realizan las tareas físicamente, sino que se interpretan informaciones en un plano o mapa.
- Espacio real y representación del espacio físico: la acción del sujeto transcurre o ha transcurrido en un espacio físico y dispone del apoyo de una representación del espacio.

Independientemente del estímulo inicial se distinguen cuatro tipos de respuesta:

- De representación: que consiste en la representación de un espacio o trayecto en dos o tres dimensiones.
- De localización de objetos o personas: consistentes en localizar en un mapa o plano.
- De descripción de trayectos o posiciones.
- Física: consiste en orientar la representación del espacio, ejecutar trayectos, ubicar objetos en el espacio.

Tabla 1. Tareas para el desarrollo de habilidades de visualización y orientación espacial.

Estímulo inicial	Acción Inicial	Tipo de respuesta
Espacio Real	Explorar el espacio (con movimiento) Observar espacios, trayectos,... (sin movimiento)	De representación: <ul style="list-style-type: none"> • Del espacio: construir maquetas, dibujar mapas/planos • De trayectos De localización de objetos y personas: <ul style="list-style-type: none"> • En un mapa/plano/maquetas • Con coordenadas De descripción (verbalmente): <ul style="list-style-type: none"> • Trayectos • Posiciones Física: <ul style="list-style-type: none"> • Orientar la representación del espacio (de acuerdo a los puntos cardinales, de acuerdo a objetos fijos en la realidad) • Ejecutar trayectos • Ubicar objetos o personas en el espacio
Representación Espacial	Interpretar información gráfica (localizar elementos, leer trayectos, interpretar sistemas de coordenadas,...)	
Espacio real + representación del espacio	Relacionar el espacio con sus representación espacial	

Tomado de Gonzato, M., Fernandez, T., y Godino, J. (2011)

Para la elaboración de nuestra propuesta se han revisado trabajos como el de Galvez (1985), en el que se establecen un conjunto de situaciones didácticas entorno a la Orientación Espacial en un espacio Urbano. Para Galvez la pertinencia de estas actividades reside en la necesidad que tanto adultos como jóvenes tienen de desplazarse y orientarse en diferentes situaciones y espacios, por ejemplo cuando se viaja a una ciudad que no se conoce o en la necesidad de aprender a desplazarse de forma autónoma por su propia ciudad.

LA PROPUESTA:

Las actividades presentadas están justificadas curricularmente para el alumnado de quinto y Sexto de primaria. Tal y como aparece recogido en el Decreto 105/2014, de 4 de septiembre, por el que se establece el currículo de educación primaria en la Comunidad Autónoma de Galicia en el bloque cuarto de Geometría, aparecen recogidos los siguientes contenidos a desarrollar:

- “B4.3. Sistema de coordenadas cartesianas. Descripción de posiciones y movimientos”
- “B4.4. La representación elemental del espacio, escalas y gráficas sencillas”.

Siguiendo la clasificación propuesta en la tabla 1, en nuestra propuesta nos vamos a centrar en el tipo de respuesta, de forma que describiremos una actividad para cada uno de los cuatro tipos que aparecen en dicha tabla.

Durante el desarrollo de las actividades, el alumnado se organizará de diferentes formas (individual, por parejas o en pequeños grupos) pero siempre potenciando el trabajo en grupo y el aprendizaje cooperativo, a través del diálogo y la discusión de resultados. Para llevar a cabo estas actividades los materiales que emplearemos serán bolígrafo, lápiz, papel o cartulina, un callejero y láminas transparentes con un sistema de coordenadas impreso. En la tabla 2 se recogen los títulos de cada una de las actividades que se van a realizar, indicando el estímulo inicial y el tipo de acción requerida.

Tabla 2. Esquema actividades de la propuesta

Actividad	Estímulo inicial	Acción inicial	Tipo de respuesta
Este es mi cole	Espacio real	Explorar el espacio	De representación del espacio
Mis lugares favoritos	Representación espacial	Interpretación de la información gráfica	De descripción (verbal) de posición. De localización de objetos en un plano/mapa.
De camino a ...	Espacio real + representación espacial	Relacionar el espacio con su representación espacial	Física. Ejecución de un trayecto.
¿En dónde se esconden?	Espacio real + representación espacial	Relacionar el espacio con su representación espacial	Física. Ubicación de objetos en el espacio.

A continuación se describen cada una de las actividades propuestas.

Actividad 1. Este es mi cole

En esta actividad el estímulo inicial es el espacio real, la acción inicial que se requiere es explorar el espacio y finalmente el tipo de respuesta es de representación del espacio.

En primer lugar se entregará al alumnado una representación plana muy esquemática del recinto escolar y del edificio del colegio, en el cual aparecerán representados algunos puntos de referencia, por ejemplo la entrada principal, el patio y el comedor.

Una vez entregado este plano se les explicará que deberán completarlo situando algunos espacios más: las pistas de baloncesto, el despacho del director/a, el salón de actos, la biblioteca, el comedor y su aula.

Para ello, junto con el profesor harán un recorrido por el recinto escolar, partiendo desde uno de los puntos de referencia que aparece en el mapa: la entrada principal. Los alumnos deberán fijarse y memorizar dónde se encuentran algunas aulas, el parque de juegos, el patio cubierto, etc. Pueden ayudarse del punto de referencia proporcionado y así situar cada uno de los espacios solicitados.

Ya en el aula, deberán completar individualmente el plano marcando donde se encuentra su aula, la pista de baloncesto y la conserjería.

Para finalizar la actividad y con el fin de acercarnos al terreno más reflexivo, e ir de este modo asimilando correctamente los contenidos, se solicitará a los alumnos una pequeña descripción del mapa elaborado con el fin de presentarla al resto de compañeros, posibilitando un diálogo con la clase.

Actividad 2. Mis lugares favoritos

En esta actividad el estímulo inicial es una representación espacial, la acción inicial supone interpretación de la información gráfica y el tipo de respuesta que se busca en el alumnado es de descripción verbal de posición así como de localización de objetos en un plano/mapa.

Durante el desarrollo de esta segunda actividad entregaremos al alumnado un callejero de la ciudad donde viven. Divididos por parejas, cada alumno deberá describir verbalmente al compañero la posición de un espacio o construcción que tenga algún tipo de significado para él. Por ejemplo, el parque al que van a jugar, en el que viven sus abuelos o donde compra las golosinas (Descripción verbal de una posición).

En la segunda parte de la actividad la pareja deberá señalar en el callejero la zona o construcción descrita por su compañero (Localización de objetos en un mapa). Luego los roles se intercambian.

Finalmente, se entregarán unas láminas transparentes en las que aparecerá rotulado un sistema de coordenadas (Figura 1), y repetirán la actividad pero utilizando esta vez el material entregado.



Figura 1. Mapa de coordenadas alfa-numéricas. Callejero cedido por Turgalicia, ©Edileasa.

El objetivo es que los alumnos puedan comprobar que utilizando estos sistemas de intervalos alfa-numéricos o cartesianos puede resultar mucho más sencillo interpretar información gráfica y describir la posición de un objeto o espacio.

Actividad 3: De camino a...

ITINERARIO:
• Nos encontramos en Porta Faxeira y nuestro siguiente paso es avanzar por la calle Bautizados.
• Al final de la calle entraremos en la Praza do Toural, avanzaremos dejando en primer lugar a nuestra izquierda la fuente de la plaza por la calle Cantón do Toural hasta la calle Rúa das Orfas.
• En la intersección de la calle Bautizados con la calle Rúa das Orfas tomaremos la dirección en la que esta calle se cruza con las calles Cardenal Paya, Rúa Tras Salomé y Rúa da Calderería.
• Seguiremos avanzando por las calles Cinco Rúas y Rúa do Preguntoiro hasta la Praza de Cervantes.
• Desde la Praza de Cervantes continuaremos hasta el cruce de las calles Rúa Algalia de Arriba, Rúa Algalia de Abaixo y Rúa das Ánimas y tomaremos la calle de nuestra derecha.
• Cuando lleguemos a la plaza de S. Parga deberemos seguir caminando por la calle Rúa das Casas Reais hasta Porta do Camiño.
• De frente nos encontraremos las calles Rúa de San Pedro y San Domingos. De las dos, la que queda a nuestra izquierda es la que nos llevará a nuestro destino.

Figura 2. Itinerario que se entregará al alumnado.

En esta actividad el estímulo inicial es tanto el espacio real como la representación del espacio, la acción inicial es relacionar el espacio con su representación espacial y la respuesta deberá ser física, ya que ejecutarán un trayecto de acuerdo a un itinerario.

Se propone una salida escolar o se aprovecha una que ya esté autorizada que suponga la realización de un trayecto por la ciudad. Por ejemplo, visitar un museo, un monumento artístico, ir a la representación de una obra teatral, etc.

Presentamos aquí un ejemplo de una salida al Museo do Pobo Galego, en la ciudad de Santiago de Compostela. En primer lugar se dividirá el aula en grupos de tres o cuatro alumnos, a los que se le entregará un

Figura 3. Mapa con itinerario completo. Callejero cedido por Turgalica, ©Edileisa.



Figura 4. Intersección Rúa das Orfas con Cardenal Payá Tras Salomé y Calderería.

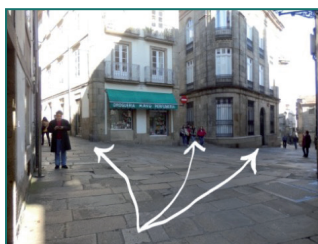


Figura 5. Intersección Rúa Algalia de Arriba con Rúa Algalia de Abaixo y Rúa das Ánimas.



Figura 6. Intersección Rúa das Casas Reais con Rúa da Oliveira.

callejero de la ciudad, y una descripción del itinerario (Figura 2) que deben seguir para llegar a su destino. El itinerario se inicia en Porta Faxeira (punto A) y terminará en el Museo do Pobo Galego (punto B) como se muestra en la Figura 3.

Durante el trayecto, el alumnado se encontrará con diversas intersecciones (Figura 4, 5 y 6) en las que deberá poner en juego habilidades de orientación espacial.

Actividad 4: ¿En dónde se esconden?

En esta última actividad el estímulo inicial es tanto el espacio real como la representación del espacio, la acción inicial es relacionar la representación espacial y el espacio y la respuesta requerida será física.

La actividad está planteada como un juego, donde el objetivo es encontrar objetos escondidos en un espacio real.

Para comenzar el profesor elige cuatro zonas del recinto escolar (por ejemplo el pabellón, el salón de actos, el parque y la biblioteca) a las cuales asigna un número que se sorteará entre los grupos de alumnos. Cada grupo deberá esconder en la zona que le haya correspondido dos objetos; y posteriormente realizar el mapa de esa zona incluyendo dos

Actividad 4. ¿En dónde se esconden?
Ficha de Registro:

Recinto:	Objeto:	Posición:
Pabellón		
Salón de actos		
Parque		
Biblioteca	Cubo de Rubik	En la estantería de los libros de Naturaleza

Figuras 7. Ficha de Registro.

elementos de referencia que permitan a los demás grupos orientarse en ese espacio; así como la posición de los dos objetos escondidos.

El juego se puede plantear de dos maneras:

- A cada grupo se les entrega una ficha de registro de los objetos encontrados (Figura 7). Gana aquel grupo que antes complete la ficha y la entregue al profesor.
- Los grupos competirán para encontrar los objetos escondidos, ganando aquel grupo que recoja el mayor número de ellos.

REFLEXIONES FINALES

Aunque presentes en el currículo oficial, son escasas las propuestas relacionadas con la orientación espacial, y más concretamente con aquellas en las que el sujeto debe orientarse en un espacio real.

Con estas actividades se pretende que el alumnado desarrolle habilidades espaciales de una forma lúdica, lo que creará un ambiente favorable tanto para la comprensión de los conceptos como para la creación de actitudes positivas y de empatía hacia las matemáticas (Maz-Machado y Jiménez-Fanjul, 2012).

Para finalizar, estas actividades pueden ser trabajadas de manera interdisciplinar con otras materias como pueden ser Ciencias Sociales o Educación Física, favoreciendo un aprendizaje más globalizado del alumnado.

REFERENCIAS

- Alsina, C., Burgués, C., y Fortuny, J. M. (1997). *Invitación a la didáctica de la geometría*. Madrid: Síntesis.
- Arrieta, M. (2003). Capacidad espacial y educación matemática: tres problemas para el futuro de la investigación. *Educación Matemática*, 3, 57-76.
- Carrillo, B. (2009). Dificultades en el aprendizaje matemático. *Revista digital. Innovación y experiencias educativas*, 16, 1-10.
- Decreto 105/2014, de 4 de septiembre, por el que se establece el currículo de educación primaria en la Comunidad Autónoma de Galicia. *Diario Oficial de Galicia*. Galicia, 9 de septiembre 2014, núm. 171, pp. 37406-38087
- Gálvez, G. (1985). *El aprendizaje de la orientación en el espacio urbano: Una proposición para la enseñanza de la geometría en la escuela primaria*. (Tesis doctoral inédita), Centro de Investigación del IPN México.
- Gonzato, M., Fernandez, T., y Godino, J. (2011). Tareas para el desarrollo de habilidades de visualización y orientación espacial. *Números*, 77, 99-117.
- Gonzato, M., & Godino, J. D. (2010). Aspectos históricos, sociales y educativos de la orientación espacial. *UNIÓN. Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 23, 45-58.
- Maz-Machado, A y Jiménez-Fanjul, N. (2012). Ajedrez para trabajar patrones en matemáticas en educación primaria. *Epsilon. Revista de Educación Matemática*, 81, 105-112.
- McGee, M.G. (1979). Human spatial abilities: Psychometric studies and environmental, genetic, hormonal, and neurological influences. *Psychological Bulletin*, 86(5), 889-918.
- Tatre, L. A. (1990). Spatial orientation skill and mathematical problem solving. *Journal for Research in Mathematics Education*, 21(3), 216-229.

El aprendizaje del conteo y el recitado de la secuencia de palabras número: Articulando las matemáticas importantes con las imprescindibles

Carlos de Castro Hernández

Universidad Autónoma de Madrid

Mónica Ramírez García

Universidad Complutense de Madrid

Resumen: *Los fundamentos del conteo se aprenden a edad temprana. Con tres años, el recitado de la secuencia de palabras número debe alcanzar hasta “diez” e, idealmente, hasta “quince”. El recitado es imprescindible para el conteo, y tiene regularidades que se infravaloran, poniendo énfasis solo en la memorización. Al tiempo, se aprenden ideas matemáticas importantes relativas al conteo como la correspondencia uno a uno, el principio de cardinalidad o la funcionalidad del conteo. Describimos el trabajo de elaboración de álbumes ilustrados para articular el aprendizaje de matemáticas importantes e imprescindibles para el conteo a los 3 años. Explicamos cómo el texto y las ilustraciones responden a pautas didácticas emergentes de la investigación sobre el pensamiento numérico infantil. Describimos los usos de los álbumes en el aula y nuestras expectativas sobre posibles relaciones entre las imágenes y la actividad matemática infantil.*

Palabras clave: *Conteo, cuentos, educación infantil, imágenes, literatura infantil, secuencia de palabras número.*

Learning counting and recitation of the number words sequence: The articulation of important and indispensable mathematics

Abstract: *Counting foundations are learned at an early age. With three years, recitation of the number words sequence should reach up to “ten” and, ideally, up to “fifteen”. Recitation is indispensable for counting, and has regularities that are undervalued, with emphasis on memorization only. At the same time, children learn important mathematical ideas related to counting, such as one-to-one correspondence, the cardinality principle, or functionality in counting. We describe the elaboration of children’s books to*

articulate important and indispensable mathematics for the learning of counting with 3 years. We explain how text and illustrations respond to mathematics education ideas that emerge of research on early numerical thinking. We describe the uses of children's books in the classroom, and our expectations about potential relationships between illustrations and children's mathematical activity.

Keywords: *Counting, children's books, early years education, images, children's literature, number words sequence.*

LA NECESIDAD DE ARTICULAR LAS MATEMÁTICAS IMPORTANTES CON LAS IMPRESCINDIBLES

El pensador español José Ortega y Gasset decía que era crucial no confundir lo importante con lo que solo es absolutamente imprescindible. Por ejemplo, comer es imprescindible para vivir, pero no podemos decir que sea lo más importante en la vida. Cualquier docente podría elaborar su propia lista de los aspectos que considera importantes, y otra con los imprescindibles, en la educación.

En este sentido, abarcar una gran cantidad de contenidos matemáticos en el aula puede provocar un aprendizaje superficial por parte de los estudiantes, corriendo el riesgo de no construir los cimientos para futuros aprendizajes. El *National Council of Teachers of Mathematics* (en adelante, NCTM) indica que un currículo debe estar centrado en *ideas matemáticas importantes*, bien articuladas a lo largo de la escolaridad, y que preparen a los niños para la resolución de problemas en el aula o en la vida cotidiana (NCTM, 2003). De acuerdo con esto, los contenidos matemáticos que mayor atención merecen son los que capacitan a los estudiantes para desarrollar otras ideas importantes y facilitan la construcción de conocimientos cada vez más complejos, y con mayor profundidad, a medida que avanza la escolaridad. Más concretamente, las ideas matemáticas:

...se consideran importantes por diferentes razones, tales como su utilidad en el desarrollo de otras ideas matemáticas, en la vinculación de diferentes áreas de las matemáticas, o en la profundización de la apreciación de los estudiantes de la matemática como disciplina y como creación humana (NCTM, 2003, p. 16).

En nuestro trabajo, también recogemos la apreciación de Clements y Sarama (2009) sobre los objetivos del aprendizaje de las matemáticas como *ideas matemáticas importantes*, refiriéndose con este término a los conceptos y destrezas matemáticas centrales y coherentes, consistentes con el pensamiento de los niños y que son generativas de futuros aprendizajes (Clements y Sarama, 2009). De este modo, ponemos también el énfasis en que la actividad matemática se adecúe al desarrollo infantil. Por otra parte, consideramos *matemáticas imprescindibles* a aquellos conocimientos matemáticos que pudiendo no tener aplicaciones directas a la vida cotidiana, constituyen prerrequisitos indispensables para otros conocimientos matemáticos. Suele tratarse de procedimientos que tienden a mecanizarse para centrarse en una actividad matemática más valiosa. Son más ricos en conexiones intramatemáticas que en relaciones de la matemática con otras disciplinas.

En el territorio de las matemáticas infantiles, quizá el contenido más *importante* sea el conteo (Clements, 2004). Dentro de los conocimientos requeridos para el aprendizaje del conteo está el recitado de la secuencia de las palabras número. Este recitado tiene por sí mismo aplicaciones a la vida cotidiana infantil, lo que hace que tenga sentido para los pequeños. Por ejemplo, se usa dentro de las rimas de conteo para echar a suertes quién comienza una actividad. También dentro de algunos juegos, como “el escondite”, como recurso para ocupar el tiempo necesario para que los participantes se escondan. En estos casos, el recitado tiene significados matemáticos relativos a la aleatoriedad o a la duración temporal. Sin embargo, este recitado podría ser sustituido por otros que no incluyan palabras número y cumplan las mismas funciones (Rodríguez Pastor, 2006), de modo que estas aplicaciones podrían considerarse de “bajo nivel matemático”. Así, el mayor valor del recitado reside en sus conexiones intramatemáticas con otros prerrequisitos del conteo como la correspondencia uno a uno (al usar las palabras número para etiquetar objetos) o el principio de cardinalidad (la última palabra número recitada indica el cardinal de los objetos contados).

Siendo el recitado de la secuencia de palabras número *imprescindible*, su aprendizaje no está muy prestigiado en ámbitos académicos. Suele considerarse un aprendizaje “de segunda”, fundamentalmente mecánico y memorístico, y que quizá no sea merecedor de una propuesta de enseñanza. En nuestra opinión, no nos parece adecuada la expresión tan habitual referida al recitado de la secuencia de palabras número como “la cantinela de los números”, debido a sus connotaciones negativas. Según el diccionario de la Real Academia Española (DRAE), la palabra “cantinela” es un término coloquial que significa “Repetición molesta e importuna de algo”. Como prototipo de frase que transmite el significado de la palabra, el DRAE propone: “Siempre vienen con esa cantinela”. Parece como si para privilegiar los contenidos matemáticos más “dignos”, los que implican mayor reflexión, razonamiento, simbolización, etc., hubiese que denostar otros contenidos que, por otra parte, son absolutamente imprescindibles. Esta doble condición de prerrequisito, que idealmente llega a mecanizarse para liberar recursos para tareas de un nivel superior, pero es poco valorado matemáticamente *per se*, se aprecia en el extraordinario texto de Borghi (2005), que utilizamos como referencia para organizar talleres en el aula.

La habilidad puramente lingüística de recitar una secuencia de palabras-número que coincida con la convencional (uno, dos, tres...) es el presupuesto sobre el que se basa la capacidad de contar objetos. La memorización de la secuencia convierte el recitado poco a poco en algo automático y permite desviar la atención hacia el procedimiento, más complejo, de contar objetos (Borghi, 2005, pp. 186-187).

Estando de acuerdo en que hay situaciones de aprendizaje matemáticas mucho más ricas (digamos *importantes*) relacionadas con el conteo (Hernández, 2012; Rada, 2013; Sierra y Rodríguez, 2012), nos preguntamos: ¿Se trata verdaderamente de una “habilidad puramente lingüística”, de una secuencia a memorizar y automatizar sin más? Nosotros pensamos que no. Por eso en este trabajo queremos explicar, en primer lugar, los elementos matemáticos presentes en la secuencia de las palabras número. Después, presentaremos la propuesta de enseñanza planificada en el Proyecto “¡A contar! Matemáticas para

Algunas regularidades de este sistema de numeración oral son especialmente importantes en la educación infantil (Figura 1).

ORIENTACIONES CURRICULARES Y DE INVESTIGACIÓN SOBRE EL CONTEO Y EL RECITADO DE LA SECUENCIA DE LAS PALABRAS NÚMERO

Algunos documentos actuales sobre el currículo matemático de educación infantil presentan referencias por edades para el aprendizaje de la secuencia de las palabras número. Clements y Sarama (2004) recomiendan que, entre los 2 y los 4 años, se aprenda la secuencia hasta el “diez”. A los 4-5 años, hasta el “treinta” (o más) haciendo un especial énfasis en los patrones en el conteo oral; es decir, sabiendo que “veintiuno, veintidós...” acaba igual que “uno, dos...” (Figura 1). Con 5-6 años, la secuencia puede llegar a “cien”, incluyendo el conteo de diez en diez, con especial atención a los patrones. Por ejemplo, “sesenta, setenta, ochenta...” se parecen a “seis, siete, ocho...”. Los *Focos Curriculares para Prekindergarten* (Fuson, Clements y Beckmann, 2010) proponen para los niños más pequeños de 2-3 años iniciarse con el recitado hasta el “seis”; cuando avanzan en 2-3 años, llegar hasta el “diez”, familiarizarse con la segunda década (del once al veinte) y comenzar a percibir la regla de formación de las palabras de “veinte” a “treinta”. Se espera que, con práctica adecuada, en el curso de 4-5 años niñas y niños alcancen hasta “treintainueve” en el recitado y que el objetivo sea llegar al recitado hasta “cien” al final de la educación infantil (pp. 13-16).

El *National Research Council* organiza los contenidos importantes referentes al número en tres núcleos: números, relaciones y operaciones (NRC, 2009). La secuencia numérica es uno de los cuatro aspectos del núcleo del número para las primeras edades, junto con la cardinalidad, la correspondencia uno a uno y la escritura de los símbolos numéricos (NRC, 2009). Estos cuatro aspectos, que comienzan a adquirirse aisladamente, van después relacionándose y permitiendo el desarrollo de los tres núcleos del número, abarcando las relaciones y operaciones.

La secuencia de las palabras numéricas tiene un orden establecido y es infinitamente larga. Cada palabra-número es única y tiene un único sucesor. Se utiliza en el conteo de objetos para indicar la cantidad de objetos que hay en una colección. Para ello, se debe establecer una correspondencia uno a uno entre las palabras número enunciadas y los objetos señalados durante el conteo. El NRC (2009) distingue cuatro niveles de pensamiento para el camino de aprendizaje de los núcleos del número en las primeras edades. A continuación, describimos estos niveles haciendo referencia sobre todo a lo relacionado al aprendizaje de la secuencia numérica.

En el primer nivel, de 2 a 3 años, los niños comienzan a desarrollar los cuatro aspectos importantes del núcleo del número por separado. Los niños pueden aprender la secuencia numérica escuchando o recitando las palabras número sin hacer ninguna actividad o coordinándola con algún tipo de actividad (NRC, 2009). Inicialmente son capaces de enunciar la secuencia numérica hasta el 6 sin aplicarla a una colección de objetos. Realizan adecuadamente la correspondencia uno a uno al aplicar la secuencia numérica a una colección de hasta 3 objetos. Más tarde, recitan la secuencia numérica

hasta 10 y cuentan hasta 6 elementos, repitiendo la última palabra numérica como cardinal del conjunto. Comienzan a recitar términos irregulares de once a quince, y las primeras décadas irregulares (en inglés, *twenty*, hasta *fifty*, en español, *diez*, *veinte*) y algunas combinaciones de decenas y unidades hasta 29 como veintiuno, veintidós (NRC, 2009). En este nivel, respecto al núcleo relacional y operacional, las estrategias se basan en la correspondencia uno a uno entre colecciones de objetos o en la subitización.

En un segundo nivel, sobre los 4 años, los niños extienden los conocimientos anteriores a números más grandes. Los niños comienzan a dominar el recitado de términos irregulares hasta quince, las décadas hasta cincuenta y combinaciones de decenas y unidades hasta 39. Cuentan colecciones de hasta 15 objetos, y desarrollan la capacidad de formar una colección con n objetos, aplicando la secuencia, lo que supone recordar una palabra número durante el conteo. Esto permite comparar colecciones hasta 5 elementos mediante el conteo, y problemas verbales mediante modelización con objetos o dedos, formando pequeñas colecciones de objetos, realizando las acciones pertinentes y contando las colecciones resultantes, con la cantidad mayor del problema menor o igual que 8 (NRC, 2009).

En un tercer nivel, sobre los 5 años, los niños conocen las décadas hasta 100, cuentan oralmente de 10 en 10 hasta 100, lo que refuerza el concepto de agrupamiento de 10. También recitan la secuencia hasta 100. Dominan la correspondencia uno a uno entre palabras número y objetos hasta 25. En el núcleo de relaciones, comparan el cardinal de dos colecciones de hasta 10 objetos a través del conteo y resolver problemas por modelado directo con totales de hasta 10 objetos (NRC, 2009).

En el cuarto nivel, ya en la educación primaria, los alumnos deben haber integrado los cuatro aspectos del núcleo del número. Son capaces, tanto de contar de 10 en 10 hasta 100, como de contar decenas (una decena, dos decenas, ...). También aplican la secuencia de palabras número a colecciones de objetos distribuidas en grupos de 10, contando de 10 en 10 cada grupo, y de 1 en 1 el resto de objetos. En este nivel, los niños resuelven problemas verbales con estrategias de conteo, en las que comienzan a contar a partir de una palabra número diferente de “uno” (NRC, 2009).

La teoría de Karen Fuson sobre la adquisición y elaboración de la secuencia numérica

Fuson (1992) describe el aprendizaje de la secuencia de palabras número distinguiendo fases de adquisición y niveles de elaboración. Con “adquisición” de la secuencia se refiere al recitado de la lista de palabras, teniendo en cuenta las unidades de distinto orden (uno, dos, tres, ... diez, veinte, ...), las palabras irregulares, excepciones que no siguen la regla de formación general (“once”, “doce”... no siguen la regla “dieciuno”, “diecidós”), o no guardan similaridad fonética con las palabras del mismo número de unidades de orden inferior (“veinte” no suena igual que “dos”) y las reglas para combinarlas. La construcción de la secuencia de palabras número no se realiza de una vez. En las secuencias infantiles se pueden distinguir: una parte inicial convencional y estable, un segundo tramo no convencional, pero que sigue siendo estable y, finalmente, una parte no convencional ni estable (Figura 2).

Paralelamente, Fuson (1992) describe varios niveles en la elaboración de la secuencia numérica, basándose en las relaciones de orden y equivalencia, y operaciones que hacen que la secuencia de palabras se construya de forma más sofisticada y compleja. En un primer *nivel hiler*a, los niños enuncian la secuencia numérica como una estructura entera unidireccional sin distinción de elementos y sin establecer ninguna relación entre ellos. En el segundo nivel, llamado *cadena irrompible*, los niños distinguen las palabras número que la forman pudiendo establecer relaciones como anterior o posterior, pero tienen que empezar siempre desde el uno. El tercer nivel, *cadena rompible*, los niños establecen la relación “entre” dos numerales y son capaces de contar desde un número hasta otro en ambas direcciones. El cuarto nivel, *cadena numerable*, los niños utilizan los numerales como ítems que se pueden contar y son capaces de ver el número de numerales que hay entre dos números. Además, pueden llevar el rastro de las palabras número que van enunciando, controlando la cantidad de palabras que enuncian. Finalmente, el nivel *cadena bidireccional*, implica total dominio de la secuencia de numerales. Este permite evolucionar en las estrategias de resolución de problemas aritméticos, ya que cuando los niños están en el nivel de cadena numerable, su nivel de elaboración de la secuencia les permite emplear estrategias como contar a partir de un sumando sin objetos (Fuson, 1992).

La adquisición y la elaboración de la secuencia son necesarios para aprendizajes posteriores (Fuson, 1992). La adquisición permite alcanzar un recitado estable y convencional. Los niveles de elaboración explican cómo la secuencia recitada de palabras número va convirtiéndose poco a poco en un modelo, en una herramienta para resolver problemas aritméticos, que permite el paso de estrategias de modelización a las de conteo. Cuando los niños alcanzan el nivel de cadena numerable de la secuencia numérica pueden evolucionar del uso de estrategias de modelización directa a estrategias más eficientes como son contar a partir de un número o “contar hasta”. Las fases de adquisición y elaboración de Fuson son el perfecto ejemplo de articulación de matemáticas *importantes* (el uso de estrategias avanzadas como el conteo a partir de un número “*counting on*”) y matemáticas *imprescindibles* (el recitado de la secuencia). La adquisición de la secuencia es un prerrequisito para la elaboración.

Observaciones del aula de 3 años

La investigación y los documentos curriculares nos proporcionan una información fundamental para el trabajo en el aula. Sin embargo, en estas edades abundan las variaciones en el desarrollo, las influencias socioculturales, las diferencias en los estímulos y las oportunidades de aprendizaje recibidas (NRC, 2014). Pero más allá de las orientaciones que ofrecen la teoría y los documentos curriculares, resultan indispensables los ajustes en las propuestas. La Tabla 1 nos trae directamente del aula de 3 años las recitaciones recopiladas por la maestra Clara Pastor a mediados de enero.

Una primera inspección confirma la enorme variabilidad en las recitaciones de niñas y niños de tres años, cuyo rango abarca desde un inicial “uno, dos, tres”, a veces con repeticiones para prolongar la secuencia, como en el caso de Clara, hasta un recitado avanzado hasta “diez” o hasta “quince”, en los casos de Natalia o Diego. Los ejemplos de

Tabla 1. Recitaciones de niñas y niños de 3 años un 13 de enero

Nombre	Primera recitación	Segunda recitación	Tercera recitación
Zacarias	Uno, dos, cuatro, cinco, once.	Uno, dos, cuatro, cinco, once, doce.	Uno, dos, cuatro, cinco, once.
Natalia	---	---	Uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete, ocho, nueve, diez, once, doce, trece, catorce, quince.
Diego	Uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete, ocho, nueve, diez.	Uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete, ocho, nueve, diez.	Uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete, ocho, nueve, diez.
Daniel S.	Uno, dos, tres, cuatro, cinco, siete.	Uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis.	Uno, dos, tres, cuatro.
Nicolás	Dos, tres, quince, cinco.	Quince, catorce, tres, dos.	Cinco, cinco, doce, trece.
Clara	Uno, cuatro, nueve, cuatro, cuatro, nueve, diez, ocho, nueve, nueve.	Uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis, cuatro, seis, tres, cuatro, seis.	Uno, dos, tres, uno, dos, tres, uno, dos, tres.
Eric	---	Uno, dos, tres, cuatro, seis, ocho, nueve, diez, cinco, seis, ocho, seis, ocho, seis, seis.	Uno, uno, uno, uno, uno, uno, uno, uno, uno, uno, uno, cinco, uno.
Daniel H.	Uno, dos, tres, cuatro.	Uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis.	Uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete, ocho, nueve.

recitados nos permiten contrastar la teoría entendida como herramienta para reflexionar sobre la práctica. La Tabla 1 ejemplifica las teorías de Fuson (1988) sobre la adquisición y elaboración de la secuencia de las palabras número. La parte que el pequeño repite sistemáticamente, en varias recitaciones en el mismo día, y que coincide con la secuencia convencional, es la parte de la secuencia ya adquirida y en fase de elaboración. En el

ADQUIRIDA Y EN ELABORACIÓN	NO ADQUIRIDA	
Estable y convencional	Estable y no convencional	No estable y no convencional
Uno, dos,	cuatro, cinco,	once.
Uno, dos,	cuatro, cinco,	once, doce.
Uno, dos,	tres, cuatro,	siete.
Uno, dos,		cinco, seis
SECUENCIA CONVENCIONAL		

Figura 2. Tres recitados de Zacarías (3 años) en un mismo día para ilustrar Fuson (1988).

caso de Zacarías, ha adquirido hasta el dos. El resto de la secuencia está en fase de adquisición, distinguiendo en ella entre una parte estable y otra no estable (Figura 2).

Sintetizando las propuestas curriculares con nuestra experiencia y reflexiones sobre el aula, nos planteamos como objetivo que los niños de 3 años aprendan hasta el “diez”. No

obstante, el trabajo en el proyecto “¡A contar!” se extiende hasta el “quince” con rimas de conteo y esperamos también que los niños se familiaricen, y eventualmente puedan aprender hasta el treinta, a través de actividades cotidianas complementarias como contar, en la asamblea, a los compañeros que han venido a clase.

RECURSOS PARA EL APRENDIZAJE DE LA SECUENCIA DE PALABRAS NÚMERO: REINVENTANDO EL GÉNERO DE LAS RIMAS DE CONTEO

Dentro del Proyecto “A contar. Matemáticas para pensar” (De Castro y Hernández, 2015), la literatura infantil juega un papel primordial como eje articulador de toda la propuesta matemática. Entre los recursos para el aprendizaje de la secuencia de palabras número, uno de gran valor literario es el constituido por las rimas de conteo para “echar a suertes”, a su vez un recurso para el acercamiento a la literatura en educación infantil, según los objetivos del currículo establecido para esta etapa educativa:

Escucha y comprensión de cuentos, relatos, leyendas, poesías, rimas o adivinanzas, tanto tradicionales como contemporáneas, como fuente de placer y de aprendizaje. Recitado de algunos textos de carácter poético, de tradición cultural o de autor, disfrutando de las sensaciones que el ritmo, la rima y la belleza de las palabras producen. (MEC, 2008, p. 1029)

Algunos ejemplos de nuestra tradición literaria aparecen recogidos en el libro de “Fórmulas que preceden a los juegos infantiles” (Rodríguez Pastor, 2006), con las que además acercamos a los pequeños a la idea de azar (son fórmulas de echar a suertes) y presentamos la recitación en una situación práctica del aula que para niñas y niños tiene sentido en sí misma: Sortear quién de ellos realiza o inicia un juego o una actividad (Figura 3).

En nuestra propuesta para 3 años, Vanesa Pérez Sauquillo, autora de los cuentos, ha contribuido a la actualización de las rimas de conteo, y hemos completado la rima convirtiéndola en álbum ilustrado (Figura 4) con el fin de potenciar aún más las posibilidades matemáticas del recurso.

En un café se rifa un gato; a quien le toque el número cuatro; uno, dos, tres y cuatro.	Una mosca puñetera se cagó en la carretera, pín, pan, pun, fuera; y vinieron los bomberos a tirarse cuatro pedos: uno, dos, tres y cuatro.	En la casa de Espinete solo cuentan hasta siete: uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis y siete.
En la casa de Pinocho solo cuentan hasta ocho: uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete y ocho.	En la casa de Blancanieves solo cuentan hasta nueve: uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete, ocho y nueve.	En un café se rifa un pez; a quien le toque el número diez; uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete, ocho, nueve y diez.

Figura 3. Rimas de conteo para iniciar un juego (Rodríguez Pastor, 2006).



Figura 4. Ilustraciones de Carmen Saldaña para el álbum “El escondite de los animales”

Usos didácticos de los álbumes de rimas de conteo

Utilizamos durante el curso dos rimas: “El escondite de los animales”, al principio del curso, con palabras número hasta “diez” (Figura 4) y “En mi casa hay quince gatos”, que llega hasta “quince”. Como hemos visto, el objetivo que nos planteamos con niñas y niños de 3 años es el recitado de la parte de la secuencia de los numerales que debe aprenderse de memoria; Es la parte anterior a la aplicación de la primera regla de formación de numerales (diez y seis, dieciséis), que será un objetivo el curso siguiente (en 4-5 años). En principio, esperamos que toda la clase aprenda como mínimo a recitar hasta el “diez” durante el curso, pero el ámbito de trabajo (conjunto de las palabras número que utilizaremos en el aula) es mayor y conviene que vaya hasta el “quince”. Así, muchos pequeños de 3 años aprenderán a recitar hasta “quince”, aunque nuestro objetivo sea que todos aprendan hasta el “diez”.

Las ilustraciones de los cuentos están diseñadas con el fin de potenciar al máximo la actividad matemática (De Castro y Ramírez, 2016). Por ejemplo, algunos problemas de cuantificación y de enumeración para 3 años parten de situaciones cotidianas en las que se produce una correspondencia uno a uno. En la imagen de la izquierda de la Figura 5, se sugieren varias relaciones de correspondencia uno a uno entre colecciones de objetos: gatos y zapatos (cada gato duerme en un zapato), gatos y disfraces, gatos y gorros. La ilustración tiene la función didáctica de evocar la correspondencia y facilitar a los pequeños que imaginen la situación como base para que puedan desarrollar estrategias personales para la resolución de problemas de cuantificación y enumeración.

Por otra parte, los álbumes ilustrados con rimas de conteo están diseñados, desde un punto de vista didáctico matemático, buscando optimizar la flexibilidad en su uso. En



Figura 5. Ilustraciones de Anuska Allepez para el álbum “En mi casa hay quince gatos”.

línea con la propuesta de Paniagua y Palacios (2005, p. 222), con niños de 3 años, los cuentos podemos utilizarlos de tres formas diferentes: como actividad dirigida, como actividad libre, o compartiendo el cuento y acompañando en la lectura a los pequeños. La primera es propia del gran grupo, cuando en la asamblea el maestro o la maestra muestran el cuento a todo el grupo a medida que lo van leyendo y, posiblemente, dramatizando. En este formato lo más importante, desde un punto de vista matemático, es que los niños escuchen la secuencia de las palabras número en repetidas ocasiones para percibir que estas se dicen siempre en el mismo orden (principio del orden estable, de Gelman y Gallistel) y para descubrir los patrones que sigue (Figura 1). En momentos de actividad libre, la contemplación de las imágenes por parte de los pequeños puede conducirlos a establecer conexiones, como la relación gato-zapato, que contextualizará su actividad matemática posterior. Por último, en momentos en que los cuentos pueden ser compartidos con la maestra o el maestro, se puede hacer un trabajo de conteo. Para esto aprovecharemos que la disposición espacial de los gatos, en tres filas de cinco, facilita seguir un orden al contar. La separación de los gatos, evitando superposiciones y su tamaño, ayuda en el señalamiento y la correspondencia uno a uno. A su vez, en cada página aparece un número de gatos que, al ir pronunciando el numeral que les corresponde, permite a los niños ir desarrollando el significado cardinal del número.

LOS PROBLEMAS DE CUANTIFICACIÓN Y LA FUNCIONALIDAD EN EL CONTEO

Si en el apartado anterior describíamos nuestra propuesta para la enseñanza de la secuencia de palabras numéricas, en este abordamos la enseñanza indirecta de la

funcionalidad del conteo. Es decir, cómo plantear tareas de cuantificación para que niñas y niños lleguen a emplear el conteo espontáneamente (sin enseñanza directa) como estrategia óptima para resolver un problema; es decir, para que su aprendizaje del conteo sea funcional y se aplique efectivamente a la resolución de problemas cotidianos.

Este tipo de tareas de cuantificación están descritos en Kamii (1995), colaboradora de Piaget, que recomendaba proponer problemas de cuantificación más que enseñar a contar, enfoque conocido como “enseñanza indirecta del número”. También están recogidas en la tradición de la teoría de situaciones de Brousseau, que reconoce el origen de este tipo de situaciones en las tareas que Pierre Gréco (de nuevo, colaborador de Piaget) proponía a los niños para estudiar el desarrollo de su pensamiento matemático (Brousseau, 2007, p. 14). Dentro de esta línea, recomendamos a los lectores revisar tanto los trabajos de fundamentación (Ruiz-Higueras, 2005; Sierra y Rodríguez, 2012) como los que describen cómo implementar este tipo de situaciones en aulas de 3 a 5 años (Hernández, 2012; Rada, 2013; Aguilar, Ciudad, Láinez y Tobaruela, 2010).

Las tareas de cuantificación citadas consisten en la construcción de una colección equipotente a otra dada. Los niños de 2, 3 y 4 años pueden resolver esta situación utilizando la subitización perceptual si la cantidad de la colección dada es inferior a 4 elementos (Clements y Sarama, 2009). Otra estrategia que pueden utilizar es la correspondencia uno a uno, emparejando un elemento de la colección de elementos dada con un elemento de la nueva colección, siempre que la colección dada tenga como máximo 4 elementos (Clements, 2004). Y finalmente, como estrategia óptima, los niños de 4-5 años utilizan el conteo de los elementos de la primera colección, recordando la última palabra número enunciada en el conteo, y forman una colección de n elementos, con colecciones hasta 5 elementos (Clements, 2004). Para que los niños evolucionen de las estrategias iniciales, como la subitización perceptual y la correspondencia uno a uno, a la estrategia óptima que es el conteo, se utilizan aspectos de la tarea que provocan cambios en los procedimientos de los niños. Estos aspectos son las *variables didácticas*, que se modifican para forzar que las primeras estrategias no sirvan para resolver adecuadamente la tarea (Aguilar y otros, 2010; Rada, 2012; Ruiz-Higueras, 2005; Sierra y Rodríguez, 2012). Por ejemplo, para evitar el uso de la subitización, se aumenta la cantidad de la colección inicial de tal manera que los niños no puedan percibir de un golpe de vista el cardinal del conjunto. Para evitar que utilicen la correspondencia uno a uno, los elementos de la colección que deben formar se sitúan alejados de la colección dada, para que no puedan realizar el emparejamiento, incluso se les prohíbe hacer varios viajes para ir a recoger los elementos que faltan (o a devolver los que sobran). Estas nuevas condiciones provocan que los niños busquen nuevas estrategias más eficientes, llegando al utilizar en los casos más avanzados el procedimiento del conteo y dando sentido a su uso.

Problemas de cuantificación en el Proyecto “A Contar. Matemáticas para pensar”

En el Proyecto “A Contar” se plantean actividades de cuantificación, en las que los niños tienen que formar una colección con el mismo número de elementos que una dada, y tareas de enumeración, que consisten en pasar por todos los elementos de una colección, estableciendo un orden entre los elementos, sin repetir ninguno. En la Tabla 2 mostramos los contenidos relacionados con estas tareas y la organización por trimestres en 3 años.

Tabla 2. Organización de contenidos matemáticos relacionados con la enumeración y la cuantificación

Contenidos matemáticos	1 ^{er} Trimestre	2 ^o Trimestre	3 ^o Trimestre
<i>Enumeración</i> , con objetos móviles, sin marcado, comenzando por colecciones en línea, siguiendo por colecciones en dos líneas y finalizando con objetos desordenados.	Hasta 3	Hasta 4 desordenados y hasta 6 en fila o configuración	Hasta 8
<i>Cuantificación</i> mediante subitización, estimación (corrigiendo), correspondencia. Traer los que hacen falta (como al poner la mesa) para que haya uno para cada uno, o poner los mismos.	Hasta 3	Hasta 4 desordenados y hasta 6 en fila o configuración	Hasta 8
Contar, con correspondencia uno a uno y cardinalidad (diciendo cuántos hay) y poner n objetos.	Hasta 3	Hasta 4	Hasta 5

En este proyecto las ilustraciones de los cuentos se utilizan para potenciar la actividad matemática, para reflejar relaciones matemáticas que ayuden a los niños a imaginar la situación para poder construir esas ideas matemáticas. Hay situaciones evidentes como las representaciones de cantidades. Estas aparecen en las ilustraciones en orden creciente y dispuestas de tal forma que permitan ser contadas, ya sea en fila o con alguna configuración. Se intenta que las cantidades sean homogéneas, todas con las mismas cualidades. En la Figura 6, la imagen se acompaña por el texto “Al estanque de los patos siempre va con tres zapatos”. Esta frase, junto con los tres zapatos de la abuela en la imagen, apunta hacia la comprensión de la idea de cardinalidad (el “tres” representa tres cosas).

Otras relaciones resultan menos evidentes en una primera mirada a la imagen. En cada caseta hay un pato. Con esta ilustración deseamos sugerir la relación de correspondencia uno a uno entre la colección de los patos y las casetas. Esta relación facilitará la comprensión infantil de situaciones de enumeración (Hernández, 2013) o de cuantificación (Rada, 2013). La de enumeración consiste en introducir un único pato en cada una de las casetas, de modo que al meter el pato en su caseta este no permanezca visible, de modo que el niño debe llevar un control mental de qué casetas tienen pato y cuáles no, lo que implica una enumeración de la colección de las casetas. La tarea de cuantificación supone ofrecer a las niñas y niños una pequeña colección de casetas y solicitarles que traigan del otro extremo de la clase la cantidad exacta de patos necesarios para meter un pato en cada caseta. Los materiales que utilizamos son sencillos –pueden elaborarse con los alumnos en el aula (Rada, 2013). Lo importante en los mismos es que si queremos que los pequeños enumeren una colección de 5 o 6 casetas, introduciendo un pato en cada una, debe haber patos de sobra (10 en el material de la Figura 7) para evitar que el número de patos disponible determine cuándo ha concluido la enumeración. También en la Figura 7, vemos el material que se utiliza en tareas de cuantificación, basado en la correspondencia uno a uno entre niños y gorros. Esta correspondencia aparece contextualizada en el cuento ambientado en otoño “¡Qué cosas tiene mi abuela!” a través de sus ilustraciones, en las que en las imágenes de “exteriores” cada personaje lleva un gorro,



Figura 6. Ilustraciones de Ayesha L. Rubio para el álbum “¡Qué cosas tiene mi abuela!”.

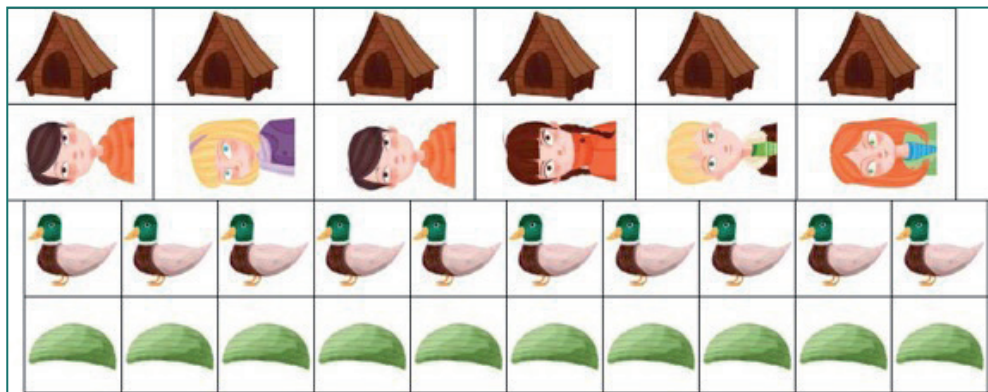


Figura 7. Material troquelado para problemas de cuantificación basados en el cuento.

aspecto con el que enfatizamos esta correspondencia (ver Figura 6), y que tampoco resulta evidente en una primera inspección.

Otras actividades relacionadas con la cuantificación se basan en el uso de configuraciones como las manos, los dados, el dominó, el *tetris* y representaciones gráficas (rayas). Un contenido importante en 3 años es aprender a poner números con los dedos con una mano (desde el 2 hasta el 4 o 5) y a reconocer cantidades de dedos. Este conocimiento es básico para la idea de cardinalidad y la resolución de problemas con los dedos (ver Tabla 3). La configuración de las cantidades que aparece en los dados, dominós y el *tetris* permite reconocer colecciones de elementos por su distribución, proceso que ayuda a la adquisición de la cardinalidad. En la Tabla 3 puede observarse los contenidos organizados por trimestres. Se plantean tareas con el objetivo de que

los niños cuantifiquen utilizando la subitización al reconocer la configuración de las manos, dados, dominó o figuras del tetrís.

Tabla 3. Organización de contenidos matemáticos relacionados con las representaciones numéricas

Contenidos matemáticos	1 ^{er} Trimestre	2 ^o Trimestre	3 ^o Trimestre
<i>Manos</i> . Poner los mismos con los dedos. Ante una cantidad de 3 objetos o dedos, ponemos 3 dedos. Asociar configuraciones de dedos distintas.	Hasta 2-3	Hasta 3-4	Hasta 4-5
<i>Manos</i> . Reconocer una cantidad de dedos contándolos, reconocer una cantidad de dedos sin contar, poner números con los dedos contándolos, poner números con los dedos sin contar.	Hasta 2-3 Sin contar y contando	Hasta 3-4 Sin contar y contando	Hasta 4-5 Sin contar dedos
Dados. Reconocer una cantidad de puntos contándolos, reconocer una cantidad de puntos sin contar. Asociar dos configuraciones.		Dado hasta 3	Dado hasta 3
Dominó. Asociar dos configuraciones.		Dominó hasta 6	Dominó hasta 6
Utilizar representaciones tipo tetrís		Hasta 3	Hasta 3
Representar gráficamente con rayas, redondeles, “dibujos”, puntos...		Hasta 3-4	Hasta 5

Para finalizar este apartado, aunque nos hemos centrado en dos contenidos concretos (secuencia de palabras número y los problemas de cuantificación), para dar una imagen cabal de cómo utilizamos las ilustraciones para potenciar la actividad matemática (De Castro y Ramírez, 2016) con pequeños de 3 años, mostramos una actividad de “patrones de crecimiento” (Figura 8) en las que los niños deben completar con *pattern blocks* los tres puzzles de la imagen, y eventualmente pueden llegar a adivinar el patrón de crecimiento que sigue la serie de los patos.

La ilustración con un “primer plano” de la receta de cocina (Figura 9) constituye una invitación al trabajo con recetas de cocina en el aula de infantil, para el que proponemos como ejemplo el artículo de Edó (2000). En la imagen se puede ver como se representan gráficamente cantidades necesarias para la receta y que habrá que formar con los ingredientes reales. Esta situación consiste en una cuantificación como la comentada anteriormente siendo las cantidades dadas por una representación gráfica.

Finalmente, los cuentos pueden sugerir el desarrollo de algún proyecto en el aula, metodología que también puede contribuir al aprendizaje matemático, como vemos en De Castro, González y Escorial, (2009), con el desarrollo de un proyecto entorno a la construcción de un castillo y un mercado medievales, lo que implica un gran número de contenidos matemáticos que incluyen la secuencia numérica y la cuantificación.



Figura 9. Invitación al trabajo con recetas.

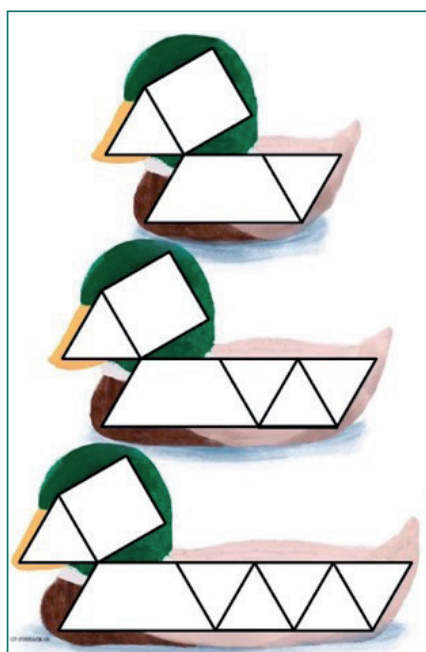


Figura 8. Actividades con patrones de crecimiento.

CONCLUSIONES

La articulación de los contenidos matemáticos importantes a lo largo de la etapa infantil ayuda a que los niños adquieran conocimientos generativos de nuevos aprendizajes. La secuencia de palabras número es un conocimiento matemático imprescindible, base de posteriores aprendizajes. Permite el desarrollo del conteo, conocimiento estratégico vertebrador de los aprendizajes numéricos en la primera infancia. El dominio del conteo incluye el recitado de la secuencia, la correspondencia uno a uno, y el principio de cardinalidad, junto con el conocimiento de cuándo aplicar el conteo en situaciones de cuantificación en las que muestra su funcionalidad. Es también necesario en las estrategias de modelización y conteo en la resolución de problemas aritméticos verbales. Dependiendo de los niveles de adquisición y elaboración de la secuencia de palabras número, las estrategias de resolución mejoran en eficiencia y el nivel de pensamiento de niñas y

niños evoluciona por los caminos de aprendizaje relativos a otros ámbitos matemáticos como el número y la aritmética. Aunque en este artículo enfatizamos el aprendizaje de la secuencia de palabras número y el conteo, la propuesta que hemos descrito es para niñas

y niños de 3 y 4 años. Todo lo que planteamos en este trabajo es compatible con reconocer que, en los primeros cursos de educación primaria, los alumnos deberán ir prescindiendo paulatinamente del conteo para desarrollar estrategias más eficientes de cálculo mental (Gray, 2003).

Para finalizar, queremos destacar dos ideas generales, que tienen aplicaciones particulares a la enseñanza de las matemáticas. La primera, que una buena educación infantil puede, y debe, preparar bien para la educación primaria, sin dejar de ser “infantil”, ni adelantar contenidos (Paniagua y Palacios, 2005). La segunda es que, en nuestra opinión, algunos aspectos “ideológicos” ligados al constructivismo, pero que verdaderamente no pertenecen a su esencia epistemológica, (al niño no se le debe enseñar, solo debe aprender de forma indirecta a través de problemas, no se puede proponer modelos para aprender mediante la imitación, los contenidos solo pueden aprenderse si hay comprensión y un conocimiento funcional desde el principio, hay contenidos menos “dignos” que no merecen propuestas de enseñanza) nos han llevado a infravalorar el aprendizaje de contenidos como la secuencia de las palabras número. Pensamos que la comprensión y la funcionalidad de los aprendizajes es el objetivo final irrenunciable de cualquier aprendizaje matemático. Además, los procesos de enseñanza deben ir orientados desde el principio a dicho fin y las oportunidades de aprendizaje que ofrecemos en las primeras edades deben tener sentido tanto para los pequeños, como para sus maestras y maestros. No obstante, la comprensión y la funcionalidad se van adquiriendo gradualmente.

Coincidimos en que los problemas de cuantificación que proponen diversos autores (Aguilar y otros, 2010; Kamii, 1995; Hernández, 2012; Sierra y Rodríguez, 2012) son indispensables para un aprendizaje funcional del conteo. Pero otras actividades, como que la maestra cuente a los alumnos en la asamblea para ver si han venido todos, o utilizar rimas de conteo infantiles para iniciar un juego, son también necesarias. En primer lugar, para que los pequeños tengan ocasión de percibir las regularidades de la secuencia de las palabras número y, en segundo lugar, de adquirir esta secuencia, cuando los maestros les ceden la responsabilidad de realizar por sí mismos estas actividades en el aula. En este sentido, una parte del trabajo didáctico que debemos hacer los formadores con las maestras y maestros de educación infantil es dignificar gestos profesionales habituales como estas sencillas actividades con la secuencia de palabras número, o pedir a un niño que nos muestre su edad con los dedos, que es importante para el aprendizaje de la cardinalidad. Articular los conocimientos matemáticos importantes con los imprescindibles requiere un trabajo análogo de articulación de tareas matemáticas más “importantes”, como las de cuantificación, con otras de apariencia más trivial, pero con gran trascendencia para los primeros aprendizajes matemáticos.

El aprendizaje del recitado de la secuencia de las palabras número no debe dejarse al azar, ni podemos adjudicar a los pequeños la responsabilidad de desarrollar espontáneamente contenidos matemáticos que son simplemente imprescindibles. La adquisición y la elaboración de la secuencia de palabras número requiere proporcionar a niñas y niños oportunidades de aprendizaje adecuadas. Dada la importancia del conteo, y sus múltiples conexiones intramatemáticas y aplicaciones a la vida cotidiana, estas propuestas de enseñanza deben ser un ingrediente obligatorio en cualquier programa para el desarrollo del pensamiento matemático en las primeras edades.

REFERENCIAS

- Aguilar, B., Ciudad, A., Láinez, M.C. y Tobaruela, A. (2010). *Construir, jugar y compartir: Un enfoque constructivista de las matemáticas en Educación Infantil*. Jaén: Enfoques Educativos.
- Borghi, B.Q. (2005). *Los talleres en educación infantil. Espacios de crecimiento*. Barcelona: Graó.
- Brousseau, G. (2007). *Iniciación al estudio de la teoría de las situaciones didácticas*. Buenos Aires: Libros del Zorzal.
- Cid, E., Godino, J.D. y Batanero, M.C. (2003). *Sistemas numéricos y su didáctica para maestros*. Granada: Universidad de Granada. Recuperado de: <http://www.ugr.es/~jgodino/educat-maestros/> el 27/04/2017.
- Clements, D.H. (2004). Major themes and recommendations. In D. H. Clements, J. Sarama, & A. M. DiBiase (eds.), *Engaging young children in mathematics: Standards for early childhood mathematics education* (pp. 7-72). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Clements, D.H. y Sarama, J. (2009). *Learning and teaching early math: The learning trajectories approach*. Nueva York: Routledge.
- De Castro, C., González, A., y Escorial, B. (2009). El aprendizaje de las matemáticas a los tres años: Narración reflexiva sobre la construcción de un mercado medieval. *Números. Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 70, 53-65.
- De Castro, C. y Hernández, E. (2015). *¡A contar! Matemáticas para pensar*. Madrid: Santillana.
- De Castro, C. y Ramírez, M. (2016). El uso de álbumes ilustrados para potenciar el aprendizaje matemático en las primeras edades. *Epsilon. Revista de Educación Matemática*, 33(3), 61-80.
- Edo, M. (2000). Situaciones matemáticas: una merienda galáctica. *Revista Index/net*, 4, Santillana. Recuperado de: gent.uab.cat/mequeedo/sites/gent.uab.cat/mequeedo/files/merienda_galactica.pdf
- Fuson, K.C. (1992). Research on whole number addition and subtraction. En D.A. Grouws (ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 243-275). New York: Macmillan.
- Fuson, K.C., Clements, D.H. y Beckmann, S. (2010). *Focus in prekindergarten: Teaching with curriculum focal points*. Reston, VA & Washington, DC: NCTM & NAEYC.
- Gray, E. (2003). Compressing the counting process: developing a flexible interpretation of symbols. En I. Thompson (Ed.), *Teaching and learning early number (6ª reimp.)* (pp. 63-72). Maidenhead, PH: Open University Press.
- Hernández, E. (2012). El cohete: escritura de cardinales y ubicación en la cuadrícula con niños de 5 años. *Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia*, 1(2), 23-41.
- Hernández, E. (2013). Situaciones para el aprendizaje de la enumeración en el aula de tres años. *Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia*, 2(2), 39-55.
- Kamii, C.K. (1995). *El número en la educación preescolar* (4ª ed.). Visor: Madrid.
- MEC (2008). ORDEN ECI/3960/2007, de 19 de diciembre, por la que se establece el currículo y se regula la ordenación de la educación infantil. *BOE*, 5, 5 de enero de 2008, 1016-1036.
- NCTM (2003). *Principios y Estándares para la Educación Matemática*. Sevilla: Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales.

- National Research Council. (2009). *Mathematics learning in early childhood: Paths toward excellence and equity*. Committee on Early Childhood Mathematics, C.T. Cross, T.A. Woods, and H. Schweingruber (Eds.). Center for Education, Division of Behavioral and Social Sciences and Education. Washington, DC: The National Academies Press.
- National Research Council (2014). Variaciones en el desarrollo, influencias socioculturales, y dificultades en el aprendizaje de las matemáticas. *Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia*, 3(2), 1-22.
- Paniagua, G. y Palacios, J. (2005). *Educación infantil. Respuesta educativa a la diversidad*. Madrid: Alianza Editorial.
- Rada, M. (2013). Experimentación de una propuesta didáctica para la enseñanza funcional del número natural en Educación Infantil. *Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia*, 2(1), 57-81.
- Rodríguez Pastor, J. (2006). *Fórmulas que preceden a los juegos infantiles en Extremadura*. Badajoz: Departamento de Publicaciones de la Diputación de Badajoz.
- Ruiz-Higueras, L. (2005). Aprendizaje y matemáticas. La construcción del conocimiento matemático en la Escuela Infantil. En C. Chamorro (Coord.), *Didáctica de las Matemáticas para Educación Infantil* (pp. 1-38). Madrid: Pearson Educación.
- Sierra, T.A. y Rodríguez, E. (2012). Una propuesta para la enseñanza del número en la Educación Infantil. *Números. Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 80, 25-52.

RINCÓN “SAPERE AUDE”... ¿resolviendo problemas?

Sixto Romero

Escuela Técnica Superior de Ingeniería

Universidad de Huelva

sixto@uhu.es

La Geometría, como rama de las Matemáticas que se ocupa del estudio de las propiedades de las figuras en el plano o el espacio y base teórica de la geometría descriptiva que da fundamento a instrumentos de diseño como el compás o el teodolito, o el sistema de posicionamiento global, tiene su origen en la RdP's (Resolución de Problemas) relativos a medidas.

Comparando con otras ciencias o partes de ellas, Pascal la define como la “perfección e ideal inalcanzable”, para mostrarla como acercamiento a la medida de lo posible a una “ciencia humana”. Este ideal me lleva al convencimiento de que trabajar con Geometría “supone ver las cosas más claras”. Por eso, en este rincón, aparecerá en cada volumen problemas de Geometría sencillos que permitan al alumno trabajar con cierta pericia para conseguir estrategias y modelos que le conduzcan a la resolución definitiva de los problemas.

¿Y los números? ¿Qué es un número?

Partiendo de la base del planteamiento de estas dos cuestiones, sin los números, no podemos hacer mucho en Matemáticas, y en esto creo que coincidimos todo el mundo.

Tal vez sea provocador cuestionárselo, sobre todo cuando todos creemos saber lo que es un número.

El objetivo del Rincón Sapere Aude consiste de la misma manera que con la Geometría, introducirnos en la “manipulación” de los números, por lo que es preceptivo que estemos en armonía con ellos.

Por ello es interesante saber lo que traemos entre manos para ¿saber la diferencia entre una cifra y un número? Muchos piensan que es lo mismo, pero no es así. Todos los números están compuestos de símbolos, llamados las cifras, hay diez: 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9. Con estas diez cifras se pueden formar a todos los números que se desee. Diferentes enfoques y tipos de ejercicios sobre números abordaremos.

En esta sección, intentaré que aparezcan ejercicios y problemas relativos a la teoría de números, considerada como una rama de las Matemáticas que se ocupa de las propiedades de los números enteros y contiene muchos temas abiertos fáciles de entender, incluso para los no matemáticos. De manera más general, el campo de estudio de esta

teoría se refiere a una amplia clase de problemas que vienen de forma natural a partir del estudio de los números enteros. La teoría de números tiene un lugar especial en las matemáticas, y también a través de sus conexiones con muchas otras áreas.

SAPERE AUDE, GEOMETRÍA

1. Ejercicios de aquí y allá (solución a la Propuesta del número anterior 95)

Propuesta 2: dos joyitas geométricas

Apuntábamos en el número anterior que una situación problemática puede ser una "realidad" que se concibe como un estado ante el cual no se cuenta con un proceso de resolución inmediato; si ya se sabe cómo resolverlo, entonces no es un problema. En este Sapere Aude presentamos al triángulo, al cuadrado, a la circunferencia como elementos centrales de las dos joyitas.

JOYITA: a) Cada cuadrado pequeño mide $(2\text{cm}) \times (2\text{cm})$. Si elegimos dos puntos, uno sobre cada círculo, ¿cuál es la distancia mínima entre tales puntos?

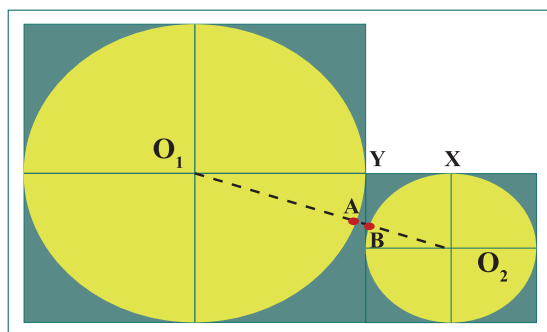


Fig. 1. Círculos en el interior de cuadrados.

SOLUCIÓN

PASO 1

Vamos a llamar O_1 y O_2 los centros de los dos círculos de la Fig. 1. Los segmentos: $[O_1Y]$ tiene de longitud 2cm , $[O_2B]$ 1cm . El segmento $[O_1O_2]$ corta, respectivamente, al círculo C_1 en A y al círculo C_2 en B.

Demostremos que la distancia mínima entre un punto de C_1 y otro punto de C_2 es justamente la distancia AB.

Efectivamente esta es la distancia.

Razonemos por reducción al absurdo. Supongamos que pudiésemos encontrar otros dos puntos C y D en los dos círculos tales que $CD < AB$. En este caso,

$$O_1C + CD + DO_2 < O_1A + AB + BO_2$$

Pero $O_1C = O_1A$ y $DO_2 = BO_2$, y por lo tanto

$$O_1C + CD + DO_2 < O_1A + AB + BO_2 = O_1O_2$$

La existencia de C y D implicaría entonces la existencia de un camino más corto que el segmento $[O_1O_2]$ para llegar de O_1 a O_2 lo cual es absurdo.

PASO 2

De aquí se deduce que para encontrar la distancia mínima entre dos puntos pertenecientes a los dos círculos diferentes C_1 y C_2 , es suficiente calcular la distancia entre los dos centros y después sustraerle los dos radios.

Cada lado de cada cuadrado pequeño, en YXO_2B por ejemplo, vale 2 cm, aplicando el teorema de Pitágoras en el triángulo O_1O_2X se tiene que

$$(O_1O_2)^2 = (2+1)^2 + 1^2 = 10 \Rightarrow O_1O_2 = \sqrt{10}.$$

Por lo tanto, la distancia mínima buscada es $\sqrt{10} - 2 - 1 = (\sqrt{10} - 3) = 0.16227766$ cm.

JOYITA: b) Si el radio del círculo más pequeño mide 2 cm y que el del segundo círculo es de 3 cm, ¿cuál es el radio del tercer círculo? (Figura 2).

SOLUCIÓN

PASO 1

Sea p la longitud del radio del círculo naranja, $AO_1 = p$ y sea s la distancia existe entre el vértice B y el centro del círculo rojo $BO_3 = s$ (figura 3).

$$AO_1 = p; BO_3 = s$$

Sabiendo que los triángulos $\triangle BCO_3$, $\triangle BDO_2$ y $\triangle BAO_1$ son semejantes, es decir, tienen sus ángulos iguales

$\widehat{CBO_3} = \widehat{DBO_2} = \widehat{ABO_1}$ y sus lados proporcionales, como $CO_3 = 2$ cm y $DO_2 = 3$ cm, tenemos por tanto que al ser $BO_2 = BO_3 + O_3O_2 = s + (2+3)$, por la semejanza de los

triángulos $\triangle BCO_3$ y $\triangle BDO_2$

$$\frac{s + 2 + 3}{3} = \frac{s}{2}$$

De esta ecuación en la variable s , se deduce que $2s + 10 = 3s \Rightarrow s = 10$

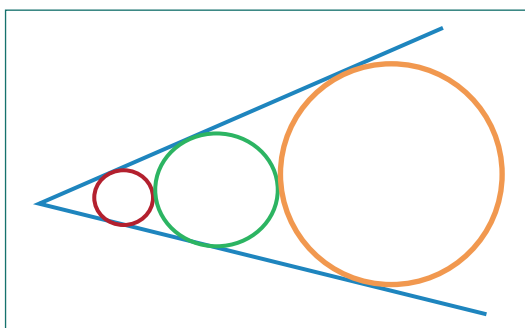


Fig. 2. Tres círculos tangentes entre dos rectas tangentes (I).

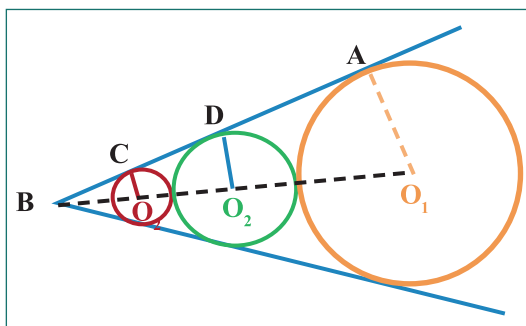


Fig. 3. Tres círculos tangentes entre dos rectas tangentes (II).

PASO 2

En el paso siguiente, utilizando la semejanza de los triángulos $\triangle BAO_1$ y $\triangle BCO_3$ se tiene que

$$\frac{s + 2 + 3 + 3 + p}{p} = \frac{s}{2} \Rightarrow \frac{s + 8 + p}{p} = \frac{s}{2} \Rightarrow$$
$$\frac{10 + 8 + p}{p} = \frac{10}{2} \Rightarrow \frac{p + 18}{p} = 5 \Rightarrow 5p = p + 18$$
$$4p = 18 \Rightarrow p = 4.5 \text{ cm}$$

NOTA: En este ejercicio se pone de manifiesto el uso de los criterios de semejanza de dos triángulos. Son un conjunto de condiciones tales que podemos aplicar al tener la seguridad de que se cumplen:

- **Criterio ángulo-ángulo** (*c-a-a*): Dos triángulos son semejantes si tienen dos ángulos respectivamente iguales.
- **Criterio lado-ángulo-lado** (*c-l-a-l*): Dos triángulos son semejantes si tienen dos lados proporcionales e iguales el ángulo comprendido entre ellos.
- **Criterio lado-lado-lado** (*c-l-l-l*): Dos triángulos son semejantes si tienen sus tres lados respectivamente proporcionales.
- **Criterio lado-lado-ángulo** (*c-l-l-a*): Dos triángulos son semejantes si tienen dos lados proporcionales y el ángulo opuesto al mayor de ellos son respectivamente iguales.

SAPERE AUDE, TEORÍA DE NÚMEROS

1. Ejercicios de aquí y allá (solución a la Propuesta 2 del número anterior 95)

Propuesta 2: dos joyitas numéricas

Siguiendo el mismo esquema que en números anteriores, en este Sapere Aude presentamos dos curiosas joyitas relativas a los números con diferentes grados de dificultad.

Importante recordar la idea esbozada en el número 95: "...presentar ejercicios de la teoría elemental de números, sin emplear técnicas de gran dificultad procedentes de otros campos de las matemáticas. Pertenecen a la teoría elemental de números las cuestiones de divisibilidad, el algoritmo de Euclides para calcular el máximo común divisor, la factorización de los enteros como producto de números primos, la búsqueda de los números perfectos y las congruencias..."

JOYITA: a) Cambiando las cifras de las unidades y de las decenas, los resultados de las multiplicaciones siguientes no cambian:

$$12 \times 42 = 21 \times 24 = 504$$
$$24 \times 84 = 42 \times 48 = 2016$$

¿Será posible encontrar otras tres multiplicaciones que tengan esta propiedad?

SOLUCIÓN

PASO 1

Consideremos dos números de dos cifras **pq** y **rs**, con **p, q, r, s** ∈ **N**.
Su producto vale entonces

$$(10p + q) \cdot (10r + s) = 100pr + 10(qr + ps) + qs$$

Si cambiamos las cifras de las unidades y las decenas, estos números se convierten en **qp** y **sr**, y por lo tanto su producto se puede escribir así,

$$(10q + p) \cdot (10s + r) = 100qs + 10(qr + ps) + pr$$

PASO 2

La cuestión planteada se satisfaría si se tiene que

$$pr = qs.$$

Es fácil encontrar tales números

p	q	r	s	pq	rs	qp	sr	pq.rs	qp.sr
1	2	6	3	12	63	21	36	12.63=756	21.36=756
1	2	8	4	12	84	21	48	12.84=1008	21.48=1008
1	3	9	3	13	93	31	39	13.93=1209	31.39=1209
1	4	8	2	14	82	41	28	14.82=1148	41.28=1148

NOTA: Nos solicitaron solo tres, y una buena decisión será insistir: ¿podemos encontrar más soluciones? Si es así: ¿cuántas?

Por ejemplo, una cuarta solución sería la que se presenta en la cuarta fila.

JOYITA: b) Se puede comprobar que

$$\begin{aligned} 3^2 + 4^2 &= 5^2 \\ 3^2 + 4^2 + 12^2 &= 13^2 \\ 3^2 + 4^2 + 12^2 + 84^2 &= 85^2 \end{aligned}$$

Determinar el valor más pequeño posible de $x+y$ si x e y son enteros estrictamente positivos tales que

$$3^2 + 4^2 + 12^2 + 84^2 + x^2 = y^2$$

SOLUCIÓN

PASO 1

De la expresión

$$3^2 + 4^2 + 12^2 + 84^2 + x^2 = y^2 \Rightarrow y^2 - x^2 = 3^2 + 4^2 + 12^2 + 84^2 = 85^2 \Rightarrow y^2 - x^2 = 85^2 \Rightarrow \\ \Rightarrow y^2 - x^2 = 85^2 = 5^2 \cdot 17^2.$$

PASO 2

Como $y^2 - x^2 = (y-x) \cdot (y+x)$ es el producto de dos números enteros positivos y que $y+x > y-x$ podemos contemplar estas cuatro posibilidades:

$y - x$	$y + x$	$x + y$
1	$5^2 \cdot 17^2$	7225
5	$5 \cdot 17^2$	1445
17	$5^2 \cdot 17$	425
52	17^2	289

Por lo tanto, la respuesta a la cuestión planteada es que, el valor más pequeño posible para la suma $x + y$ es **289**.

SAPERE AUDE, EJERCICIOS DE AQUÍ Y ALLÁ, PROPUESTAS

Propuesta 1: dos joyitas geométricas

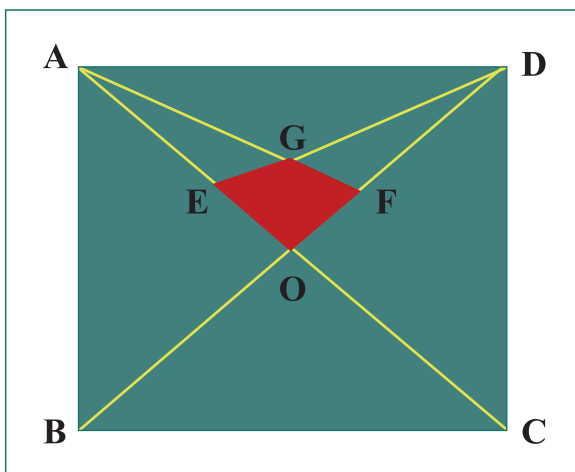
La Geometría constituye uno de los campos más unido a los problemas reales que se nos plantea en la vida diaria. Es por eso que podemos afirmar que existen profusas posibilidades para estudiar y experimentar ideas y conceptos en el aula mediante el uso de materiales apropiados adecuados.

Es cierto que desde los años setenta, en España, con la aparición de los Movimientos de Renovación Pedagógica (MRP's) el profesorado de los diferentes niveles de enseñanza de las Matemáticas con mayor concienciación, ha ido diseñando una cantidad importante de materiales para el trabajo en clase.

En geometría, existen casos en los que se presentan ciertas similitudes entre figuras; los conceptos de congruencia se establecen cuando las figuras son de la misma forma y tienen igual o diferente tamaño, para comprender un poco más la semejanza de triángulos.

En este número presentamos dos joyitas que utilizan para su resolución, aparte de la semejanza de triángulos, los teoremas de Thales y Pitágoras. Son con toda seguridad los resultados más importantes de la Geometría Elemental. Su aplicación en la RdP's

describe e interacciona con el espacio en el cual vivimos, es por ello que la Geometría puede ser considerada como "una herramienta" para el entendimiento, la tal vez la parte de las matemáticas más intuitiva, concreta y ligada a la realidad, como se dice ut-supra.



- a) Si $2EO=AE$, $2FO=FD$

y que $ABCD$ es un cuadrado de lado 4 cm, ¿cuál es el área de la región coloreada en rojo?

- b) Sea $ABCD$ un cuadrilátero tal que $\widehat{CAD}=25^\circ$, $\widehat{ACD}=45^\circ$ y $\widehat{BAC}=\widehat{BCA}=20^\circ$.
¿Cuánto mide el ángulo \widehat{DBC} ?

Propuesta 2: tres joyitas numéricas

Decía Gauss: "La matemática es la reina de las ciencias, pero la teoría de números es la reina de las matemáticas".

Siempre he pensado que los números deben tener sentido porque es la actividad central en Matemáticas como se ha puesto de manifiesto a lo largo de la historia. Por ello es la actividad central en la RdP's, y eso hace que el estudio de los números tenga sentido.

En este Sapere Aude presento tres ejercicios con diferentes grados de dificultad.

- a) Consideremos $x, y, z, t \in \mathbb{N}$ tales que

$$x < 2y, y < 3z, z < 4t, y < 40.$$

¿Cuál es el valor mayor que puede tomar el número x ?

- b) ¿Cuántas combinaciones de tres (tripletas) números primos $\{x, y, z\}$ satisfacen la ecuación

$$x + y^2 + z^3 = 200?$$

- c) En el siguiente cuadro de número

1	2	3
4	5	6
7	8	9

la suma de los elementos que están en las diagonales valen 15. Si escribimos cuadros que se construyen siguiendo el mismo criterio con:

C1. Los números del 1 al 64.

C2. Los números del 1 al 144.

¿Cuál será la suma de los elementos que están en cada una de las diagonales de los cuadros C1 y C2?

Generalizar al caso Cn: ¿cuál será la suma de los elementos de cada una de las dos diagonales del cuadro formado por los números del 1 a n^2 ?

NOTA: A este ejercicio se le puede sacar mucho jugo. Por ejemplo, pedir al alumno que investigue si hay alguna posibilidad de encontrar alguna relación entre las sumas obtenidas en los cuadros C1, C2, ... Cn. ¡Investigar en este sentido podemos llegar a obtener una expresión para las progresiones aritméticas de orden superior!

**NOTA: Las respuestas pueden enviarla a la dirección electrónica:
sapereaudethales@gmail.com**

La superMATEsobrina y el enigma del gran astrolabio



Manuel García Piqueras
Editorial Nivola Junior, 38
Mayo 2016 (1ª Edición)
Idioma: español
I.S.B.N.: 978-84-15913-26-9
174 páginas

En *Rayuela*, Julio Cortázar nos sorprende con un libro que, básicamente, son dos, aunque pueden hacerse otras lecturas segmentando los capítulos. En palabras de Carmen Guillén, se trata de una “novela abierta, fragmentada, inquietante y participativa que refleja el caos de la realidad pero ni lo ordena ni lo explica”. Manuel García Piqueras es un singular profesor de Matemáticas conocedor del valor de la Literatura, con mayúscula, como uno de los pilares básicos en los que se apoya su labor: la formación de

personas libres. Estoy convencido de que Manuel, al igual que la mayoría del profesorado de Matemáticas, ha leído y releído la obra de este argentino universal, nacido en Bruselas, cultivador del cuento fantástico, y nos regala este relato organizado en las dos series numéricas familiares a cualquiera, la de los impares, que siempre finalizan con un *sona*¹ de la cultura Tchokwe (el primero finaliza con el del cazador y el perro), y la de los pares que, la mayoría, contienen diferentes *lusona* (para saber más, Gerdes, P. (2006). Con este tablero de dirección, el libro se convierte en dos para converger en el Epílogo. El primero narra la historia del joven Isaac, conocedor del lenguaje de la geometría, la astronomía, la música y la medicina, que fue esclavizado en la ciudad de Djenné (también Djenné, Jenné y Jenne, nombre este último utilizado en esta narración) situada en la región del Delta del Níger Interior, del centro de Malí. La historia de esta comuna urbana está unida a la de Tombuctú, ciudad en la que se desarrolló durante los siglos XVII y XVIII gran parte del comercio trans-sahariano de mercancías como la sal, el oro y los esclavos. Aunque nos parezca mentira, aún hoy se sigue practicando la esclavitud en esa zona prácticamente olvidada del mundo. Brian Handwerk, en 2002, así lo denunció en declaraciones hechas para National Geographic News, cuyo titular es: *Kayaking to Timbuktu, Writer Sees Slave Trade, More*. Aunque hayan pasado 15 años desde entonces, lamentablemente, todo sigue igual y el mundo mira hacia otro lado: ¡África no existe!, de ahí un valor más de este libro que nos acerca a la cultura del continente olvidado y da pie para que nos acerquemos a él introduciendo, al menos, parte de su conocimiento en nuestras clases. El segundo recorrido puede hacerse siguiendo la serie par de los capítulos en los que se describe la fantástica aventura vivida por Julio, un profesor universitario del Departamento de Historia Medieval y Paleografía que está haciendo su doctorado –y, ¡cómo no!, sufre la deslealtad universitaria (fina ironía de nuestro querido autor)–, y su super-sobrina Martina, una de esas alumnas que podemos encontrar en programas como ESTALMAT u Olimpiadas Matemáticas. Su dormitorio es un laboratorio de Matemáticas. En él se encuentran figuras imposibles, cachivaches como el cubo de Rubik, juegos topológicos, etc., que le han hecho desarrollar unas destrezas y habilidades que le serán muy útiles para ir resolviendo los enigmas que junto con su **tío irán resolviendo** a partir de que decidiese descifrar un acróstico laberíntico que Julio tenía sobre su mesa de trabajo. Una vez transcrito el acróstico, entre otras cosas, puede leerse: «*Buscad la Trinidad que todo lo envuelve y en todo está presente, allá en las paredes de la Fortaleza Roja, morada de reyes de la ciudad primera.*». Así deciden empezar una gran aventura cuyo inicio está en la Alhambra de Granada en donde la decoración de la albanega del arco de entrada a una de las salas del Palacio de los Leones, cuya simetría, $p3m1$, reconoce Martina, está oculta la primera pista para descifrar el texto. Así comienza una yincana que les llevará tras múltiples avatares, hasta la Ermita mozárabe de San Baudelio de Berlanga, la Sixtina de Castilla, en Soria, cuya pilastra central se convierte en la **última clave** a resolver. Así, interpretando diagramas y descifrando enigmas, llegarán tío y sobrina a descubrir la apasionante historia vivida por el sabio Isaac. El recorrido permite al autor introducir diferentes tópicos matemáticos de la mano de la geometría, la poesía, el

1. Sona Geometry from Angola: Mathematics of an African Tradition. Monza, Italy: Plimetrica International Science Publishers).

arte, la música, la historia y la astronomía que actúan como claves ocultas del relato que no voy sino a incitar a descubrir.

Cabe destacar la enorme labor de investigación llevada a cabo por el autor del relato ya que se describen, con fina sutileza, espacios, costumbres, enfermedades, bienes, conocimientos científicos de personajes como, por ejemplo, Pitágoras o Ramón Llull, etc. Mención especial merecen la descripción del sistema de proporciones de las ermitas de Quintanilla de las Viñas, s. VII, y la de San Baudelio, s. XI. o la divulgativa del astrolabio. Todas están rigurosamente documentadas y permiten recrear la historia imaginándola por quienes la leen.

Felicidades, Manuel.

Rafael Pérez Gómez
Universidad de Granada

