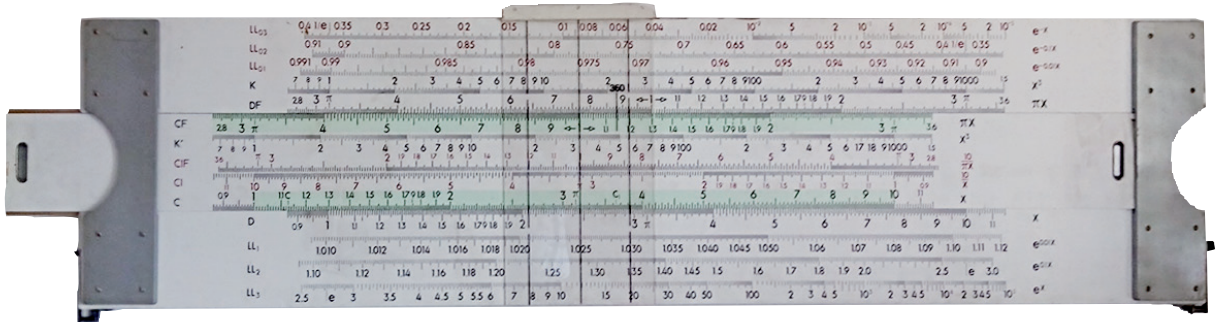


95

2017



epsilon

Revista de Educación Matemática

Editada por la S.A.E.M. "THALES"

epsilon 95

Revista de Educación Matemática

Director

Alexander Maz

Comité Editor

Francisco España,

Inmaculada Serrano

José María Vázquez de la Torre

Salvador Guerrero

Noelia Jimenez

Comité Científico

Evelio Bedoya,

Universidad del Valle, Colombia.

José Carrillo

Universidad de Huelva, España.

José Iván López Flores,

Universidad Autónoma de Zacatecas, México

José Ortiz,

Universidad de Carabobo, Venezuela.

Liliana Mabel Tauber,

Universidad Nacional del Litoral, Argentina.

M^a Mar Moreno,

Universidad de Lleida, España.

Matías Camacho,

Universidad de la Laguna, España.

Roberto Alfredo Vidal Cortés,

Universidad Alberto Hurtado, Chile.

Página de la revista: <http://thales.cica.es/epsilon>
Revista: epsilon@thales.cica.es

Sociedad Andaluza de Educación Matemática “Thales”

Edita
Sociedad Andaluza de
Educación Matemática “Thales”
Centro Documentación “Thales”
Universidad de Cádiz
C.A.S.E.M.
11510 PUERTO REAL (Cádiz)

Maquetación e impresión
Grafitrés, s.l.
Cristóbal Colón, 12
41710 Utrera (Sevilla)

Depósito Legal
SE-421-1984

ISSN
2340-714X

Período
2017

Suscripción
Anual

S.A.E.M. THALES

SALVADOR GUERRERO HIDALGO

Presidente

FRANCISCO ESPAÑA PÉREZ

Vicepresidente

M^a BELÉN SEPÚLVEDA LUCENA

Secretaría General

AGUSTÍN CARRILLO DE ALBORNÓZ TORRES

Secretario de Administración y Tesorería

SEDE

FACULTAD DE MATEMÁTICAS

Edif. de la E.S.I. Informática. Ala L2

Avda. Reina Mercedes, s/n.

Aptdo. 1160

41080 SEVILLA

Tlfno. 954 62 36 58 - Fax: 954 236 378

e-mail: thales@cica.es

SEDE ADMINISTRATIVA DE LA SOCIEDAD Y REVISTA

CENTRO DE DOCUMENTACIÓN THALES

Facultad de Ciencias. Departamento
de Matemáticas

Campus del Río San Pedro, s/n

Torre Central, 4^a Planta

11510 Puerto Real (Cádiz)

Tlf. y Fax: 956 012 833

e-mail: thales.matematicas@uca.es

ALMERÍA

EVA ACOSTA GAVILÁN

Delegada Provincial

CÁDIZ

PALOMA PASCUAL ALBARRÁN

Delegada Provincial

CÓRDOBA

MARINA A. TOLEDANO HIDALGO

Delegada provincial

GRANADA

MARGARITA GARCÍA SCHIAFFINO

Delegada Provincial

HUELVA

ROCÍO BENÍTEZ CAMBRA

Delegada provincial

JAÉN

JUAN ANTONIO ESPINOSA PULIDO

Delegado provincial

MÁLAGA

SALVADOR GUERRERO HIDALGO

Delegado provincial

SEVILLA

ANA M^a MARTÍN CARABALLO

Delegada Provincial

7

INVESTIGACIÓN

7 **La geometría analítica de Alberto Lista. Analytical geometry by Alberto Lista.**

Isabel M^a Sánchez Sierra
M^a Teresa González Astudillo

25 **Contextos y propuestas para la enseñanza de la estadística y la probabilidad en Educación Infantil: un itinerario didáctico. Contexts and proposals for teaching statistics and probability in Early Childhood Education: a didactic itinerary.**

Ángel Alsina

49 **La influencia del uso del tiempo en el rendimiento académico en Matemáticas. The impact of time use on the academic performance in mathematics.**

María Hurtado de la Peña
Carmen López Esteban

69

EXPERIENCIAS

69 **Desarrollo de procesos matemáticos a través del juego en Educación Infantil. Development of mathematical processes based on games in early childhood education.**

Miriam Seglar-Camúñez
Jesús Montejo-Gámez

77 **Sentido espacial en el inicio de la escritura en Educación Primaria. Spatial sense at the beginning of the writing in primary education.**

Fiamma María Molina Pleguezuelos
Pablo Flores Martínez

99 **Modelado e impresión 3D como recurso didáctico en el aprendizaje de la probabilidad. 3D modelling and printing as a didactic tool in probability learning.**

Pablo Beltrán-Pellicer

IDEAS PARA EL AULA

- 107** **La definición frecuentista de probabilidad a través de la simulación con el lenguaje de programación R. The frequentist definition of probability using R programming language simulation.**
José Carlos Casas
Carmen León-Mantero
Noelia Jiménez-Fanjul

MISCELÁNEA

- 115** **RINCÓN “SAPERE AUDE”... ¿resolviendo problemas?**
Sixto Romero

La geometría analítica de Alberto Lista

Isabel M^a Sánchez Sierra
IES Vía de la Plata. Guijuelo
M^a Teresa González Astudillo
Universidad de Salamanca

Resumen: *En este artículo se presenta el análisis de los contenidos de Geometría Analítica que se hallan en Los Elementos de Matemáticas Puras y Mixtas de D. Alberto Lista, uno de los autores más importantes del siglo XIX.*

Dicho análisis, que forma parte de un trabajo más amplio sobre la Geometría Analítica en España en el s. XIX (Sánchez, 2015), caracteriza cómo se aborda esta parte de las matemáticas en esta obra. En él mostramos una Geometría Analítica, propia del siglo XIX en España, que conserva aún reminiscencias de la geometría de Descartes y que se ha perdido en nuestros días.

Palabras clave: *Historia de las matemáticas, Análisis de textos, Geometría analítica, Alberto Lista.*

Analytical geometry by Alberto Lista

Abstract: *In this paper we present the content analysis of the analytical geometry in Los Elementos de Matemáticas Puras y Mixtas by Alberto Lista, one of the most important authors of the nineteenth century.*

This analysis, which is part of broader study about analytical geometry in Spain during the XIXth century (Sánchez, 2015), characterizes how this branch of mathematics is addressed in this book. We showed an analytical geometry that is typical of the nineteenth century in Spain, which retains reminiscences of the geometry by Descartes and which has been lost today.

Keywords: *history of mathematics, analysis of textbooks, Analytical Geometry, Alberto Lista*

ANTECEDENTES

La Geometría Analítica nace en el siglo XVII de mano de René Descartes (1596-1650) y Pierre Fermat (1601-1665). Podemos encontrar algunos vestigios del uso de sistemas de referencia o representaciones similares a las coordenadas actuales en la obra de

Apolonio de Perga (262-190 a. C.?) (González, 2007), y en la de Nicolás de Oresme (c. 1323 - 1382) (Chica, 2001); así como el uso del álgebra para la resolución de problemas geométricos en la obra de Al-Khwarizmi (Chica, 2001), pero no de forma general y sistemática. A diferencia de los matemáticos anteriores, tanto Descartes como Fermat desarrollaron un método general para la resolución de problemas geométricos mediante la aplicación del Álgebra. En un principio será Descartes quien pase a la historia como el padre de la Geometría Analítica gracias a su *Geometría* (1637), apéndice del *Discurso del método*, y ello a pesar de que la geometría que describe en esta obra se parece poco a lo que hoy consideramos como Geometría Analítica. Más similar a la concepción actual es la que Fermat desarrolla en su libro *Ad locos planos et solidos isagoge* (1679), obra que fue publicada póstumamente, aunque fue escrita antes de la aparición de *La Geometría*, por lo que en la actualidad se le reconoce igual mérito que a Descartes.

La geometría de Descartes se asemeja, en ciertos aspectos, a la Geometría Analítica actual, ya que ésta deriva de aquélla, pero también existen importantes diferencias entre las dos. La más importante es la interpretación que hace Descartes de las letras y los números que forman las ecuaciones; mientras que actualmente se considera que tanto los parámetros como las incógnitas representan números, Descartes considera que representan segmentos de rectas. Esto conlleva una serie de problemas: por una parte se hace necesario que las fórmulas sean homogéneas –principal problema que tuvieron los geómetras antiguos para aplicar el Álgebra a la Geometría– ya que si a representa un segmento, a^2 representa un área y a^3 un volumen, por tanto la expresión a^2b^2-b no tiene sentido. Descartes solucionará este problema introduciendo el concepto de *segmento unidad*, que utiliza de forma implícita, así, en la expresión “ a^2b^2-b debemos considerar la cantidad a^2b^2 dividida una vez por la unidad, y la cantidad b multiplicada dos veces por la unidad” (Descartes, 1637, /trad. 1947, p.52) lo que le permite operar libremente con expresiones de distinta *dimensión*.

Por otra parte, esta interpretación de las ecuaciones le lleva a ignorar las soluciones negativas por considerarlas *falsas*; hemos de tener en cuenta que, bajo su planteamiento, lo que se obtendrían serían segmentos de longitud negativa.

Otra importante diferencia entre el modo de hacer de Descartes y el actual se encuentra a la hora de dar la solución de un problema. En la actualidad una vez que se ha obtenido la solución algebraica simplemente se da su interpretación geométrica, sin embargo Descartes construye, a partir de la solución algebraica, la solución geométrica con regla y compás como se venía haciendo hasta entonces.

Muchas de estas características de la geometría de Descartes seguirán presentes en la Geometría Analítica que se estudiaba en España en el siglo XIX (Sánchez, 2015).

En España el primer texto sobre la Geometría Analítica de Descartes es *Elementos de Matemáticas* (1706) del jesuita Pedro de Ulloa. Anterior a ella es *Análisis geométrica* de Omerique (1634-1698), en la que trata la Geometría Analítica de manera muy distinta a Descartes o Fermat, a pesar de lo cual mereció los elogios de Newton (Peralta, 1999).

Durante el siglo XVIII la producción matemática española es muy extensa, siendo sus principales protagonistas los jesuitas y los militares, aunque no encontramos en nuestro país ninguna obra original sobre Geometría Analítica.

Al comienzo del siglo XIX los avances conseguidos en España en el estudio de las ciencias –en particular las Matemáticas– durante el siglo XVIII se paralizaron, en primer

lugar por la guerra de la Independencia y posteriormente por el clima de inestabilidad política y las sucesivas guerras presentes durante todo el siglo. Aunque en la primera mitad se llevará a cabo cierta obra en el campo de las Matemáticas, no será hasta mediados de siglo cuando se inicie la recuperación, aunque la verdadera modernización se llevará a cabo en el último tercio, fruto de la libertad ideológica existente en el sexenio junto a la calma política de la Restauración (Peralta, 2008; Etayo, 1992).

En relación a la Geometría Analítica, la podemos encontrar en los libros de texto utilizados en la segunda enseñanza y en los estudios universitarios, en un principio en la Facultad de Filosofía, y a partir de 1857 en la Facultad de Ciencias (Sánchez, 2015). Entre ellos destacaremos el *Tratado elemental de matemáticas* (1813) de Vallejo; la *Geometría Analítica-descriptiva* (1819) de Zorraquín; los *Elementos de Matemáticas puras y mistas* (sic) de Alberto Lista (1825); el *Curso completo de matemáticas Puras* (1829) de José de Odriozola; el *Tratado Completo de Matemáticas* (1846) de Agustín Gómez Santa María, el *Tratado de Geometría Analítica* (1862) de Juan Cortázar; las *Lecciones de Geometría Analítica* (1883) de Santiago Mundi; la *Geometría Analítica* (1883) de Ignacio Sánchez Solís y el *Tratado de Geometría Analítica* (1906) de Miguel Vegas. Dichas obras tuvieron gran difusión en su época, bien por la relevancia de sus autores, bien por aparecer en las listas de libros de texto aprobadas por los distintos gobiernos.

El análisis de estas obras, que forma parte de un trabajo más extenso (Sánchez, 2015), nos ha permitido caracterizar la Geometría Analítica en nuestro país en el siglo XIX. Este estudio nos muestra que hasta el último cuarto de siglo la Geometría Analítica que se hace en España conserva muchas características de la *Geometría* de Descartes. En primer lugar se sigue operando con segmentos, lo que obliga a que las ecuaciones sean homogéneas y por tanto se sigue haciendo alusión al *segmento unidad*, que permite hacer homogénea cualquier ecuación. Por otra parte se hace necesaria una interpretación de las soluciones negativas de un problema y por último, “tras la resolución algebraica del problema, ésta se construye geoméricamente, lo que obliga a insertar una parte teórica en la que se explique cómo se *construyen las fórmulas* (Sánchez, 2015).

Para mostrar esta forma de trabajar incluimos en el presente artículo el análisis realizado a uno de los libros citados anteriormente, en concreto los *Elementos de Matemáticas puras y mistas* (sic) de Alberto Lista (1825). En esta obra se muestra de forma clara y sencilla, mucho más que en otras más amplias y complejas, todos los elementos característicos de la Geometría Analítica decimonónica que acabamos de enumerar, por lo que hemos considerado pertinente utilizarla como muestra.

EL LIBRO DE TEXTO EN LA INVESTIGACIÓN HISTÓRICA EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA.

González (2004a, p. 17) señala que “si el conocer y el comprender el pasado componen el saber, ellos debieran ser la brújula que oriente nuestra manera de actuar y transformar la realidad“. Esta máxima se puede llevar al ámbito de la Educación Matemática y aunque mostrar el proceso de desarrollo de los conceptos matemáticos desde su origen hasta su forma final resulta ser una herramienta muy útil en este campo, pocos temas hay que se presenten más disociados de su historia que las Matemáticas.

Diversas investigaciones (Maz, 1999; González, 2004a; Maz, Torralbo y Rico, 2006) ponen de relieve que la integración de la historia de las Matemáticas en la enseñanza supone un elemento importante en la mejora de su calidad. Su estudio puede ayudar en la presentación de los temas del currículo, a descubrir los obstáculos y dificultades que se han presentado a lo largo del tiempo, y a dar una visión de la actividad matemática como una actividad humana insertada en el contexto socio-cultural de cada época. Por todo ello el papel de la historia de las matemáticas en la enseñanza es legítimamente considerada una parte de la investigación en educación matemática (Bagni, 2000).

Pero, ¿qué entendemos por investigación histórica en educación? González y Sierra (2003) consideran la investigación histórica como un proceso de búsqueda sistemática de datos que respondan preguntas acerca de fenómenos del pasado con el propósito de alcanzar una mejor comprensión de instituciones, prácticas, tendencias y aspectos relacionados con la educación. Dentro de este tipo de investigación existen varias corrientes entre las que se encuentra el análisis de los libros de texto (Gómez, 2003), en la que se incluye nuestro estudio.

Esta tendencia se fundamenta en que “los libros de texto determinan en la práctica la enseñanza más que los decretos de los distintos gobiernos” (Schubring, 1987). El libro de texto fue durante años un objeto de estudio olvidado por los historiadores en educación, sin embargo son múltiples los estudios que han puesto de manifiesto en los últimos años la importancia del manual escolar (Delgado 1983; Puelles, 2000; Collados, 2008).

Desde el punto de vista de la historia de la educación, el libro de texto es una fuente inestimable ya que permite conocer las opiniones e ideas de sus autores o editores, podemos encontrar sus orientaciones metodológicas, sus concepciones pedagógicas y los autores a los que se remiten. En este sentido, los libros de texto indican la cantidad de ciencia que fue capaz de incluir su autor para el consumo escolar, su nivel de conocimientos científicos, así como su nivel pedagógico y su habilidad didáctica (Delgado, 1983). Por otra parte los manuales escolares indican cómo ha sido llevada a la práctica la política educativa de un país, ya que seleccionan, priorizan e imponen unos contenidos frente a otros, así como una determinada forma de transmitirlos, son representaciones del currículo y su papel principal es y ha sido actuar como nexos entre el currículo y el aula (Collados, 2008).

Todas las características expuestas hacen del libro de texto una importante fuente documental a la vez que un objeto de difícil precisión conceptual y de una gran complejidad.

METODOLOGÍA

Para llevar a cabo el estudio de los textos citados utilizamos el método de análisis de contenido que diversos trabajos (Gómez, 2002; Maz, 2005; Rico, 2008; Maz, 2009) muestran como una herramienta eficaz para el análisis de manuales escolares. Para ello nos fijamos en tres aspectos del texto: la estructura conceptual, los sistemas de representación y el análisis fenomenológico (Gómez, 2002).

En relación a las representaciones nos centramos en las representaciones externas utilizadas por el autor, y dentro de estas en los símbolos y los gráficos.

En cuanto al análisis fenomenológico hemos de tener en cuenta que en el caso particular de la Geometría Analítica los problemas y situaciones que se plantean en estos libros son solamente de tipo matemático. El análisis de los problemas nos mostró una forma similar de resolución en todos los autores de la época, que siguen los mismos pasos: suponen el problema resuelto, realizan el planteamiento geométrico del que obtienen la ecuación algebraica correspondiente, y una vez resuelta se construye geométricamente la solución obtenida.

Por último señalar que para contextualizar la obra y el autor, y poner de manifiesto su importancia, incluimos una biografía sucinta del mismo y el nivel educativo donde fue utilizada.

ALBERTO LISTA: VIDA Y OBRA

Alberto Rodríguez de Lista y Aragón nació en Sevilla el 15 de octubre de 1775. En la Universidad de Sevilla estudió filosofía, teología y cánones (Pérez, 1848). Su primera formación científica la recibió en Sevilla en el Seminario Hispalense y en el Colegio de San Hermenegildo, regentado por la Sociedad Económica de Amigos del País. Profundizó en sus conocimientos matemáticos en la Escuela de Matemáticas de esta sociedad entre 1788 y 1790 (Ausejo, n.d.a), donde fue nombrado profesor de matemáticas a los quince años (Pérez, 1848). En 1796 ocupó la cátedra de Matemáticas en el Colegio de Náutica de San Telmo (Sevilla), en 1803 obtuvo la cátedra de Filosofía en el colegio de San Isidoro, en 1806 ocupó la cátedra de Humanidades en la Sociedad Económica de Amigos del País y en 1807 fue nombrado catedrático de Retórica y Poética en la Universidad de Sevilla, desempeñando algunas de esas cátedras simultáneamente (Pérez, 1848).

En 1803 se hace sacerdote y comienza su colaboración como poeta y escritor en periódicos y revistas hasta el comienzo de la Guerra de la Independencia. Desde los inicios de la contienda hasta 1810 colabora en periódicos de carácter político afectos al Gobierno patriota, pero en ese año los franceses entran en Sevilla y Lista se pone a su servicio (Ausejo, n.d.a), lo que le obliga a exiliarse en Francia cuando la guerra concluye.

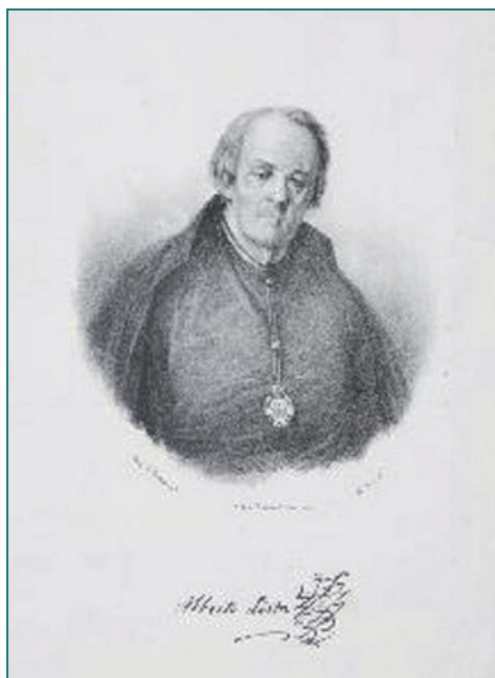


Ilustración 1. Retrato de Alberto Lista.
Litografía de “La Revista Médica”

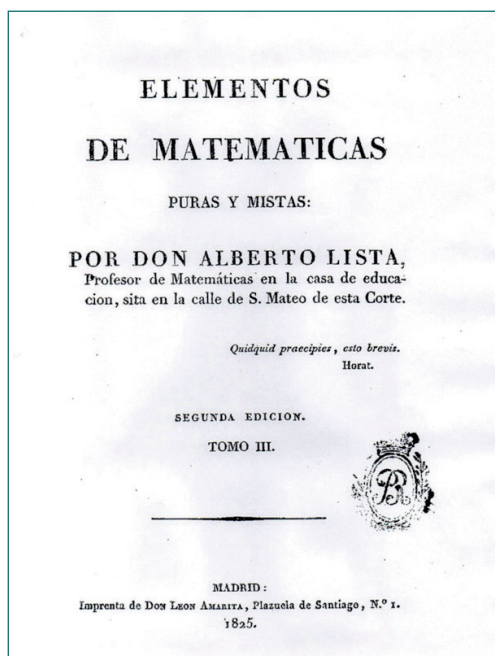


Ilustración 2. Carátula del libro.

Regresa a España en 1817 obteniendo en 1819 la cátedra de Matemáticas del Consulado de Bilbao. Allí publica el *Tratado elemental de Aritmética*, *Tratado elemental de Algebra* y *Tratado elemental de Geometría* (1819) (Ausejo, n.d.a).

En 1820, tras el triunfo de la revolución liberal, se desplaza a Madrid y se asocia con Juan Manuel Calleja fundando una Casa de Educación para la que escribió unos *Elementos de Matemáticas Puras para el uso de la Casa de Educación*, (...), *continuación de los de aritmética, álgebra y geometría, escritos para el uso de la escuela de matemáticas del ilustre consulado de Bilbao* (1822) (Ausejo, n.d.a). El Colegio es clausurado a raíz de la restauración del régimen absolutista y Lista se ve obligado a emigrar de nuevo a Francia.

En 1833 vuelve a la Corte como director de la *Gaceta de Madrid*. En esta etapa madrileña, participa en la Comi-

sión redactora del Plan de estudios de la Universidad de Madrid y es nombrado catedrático de la Universidad Central (1836). Pierde este cargo en 1838, trasladándose a Cádiz, donde durante cinco años es profesor del Colegio de San Felipe Neri. En 1843 se incorpora al claustro de la Universidad de Sevilla, en 1846 es canónigo de la catedral y en 1847 ingresa en la Academia de la Historia (Ausejo, n.d.a). Fallece en Sevilla el 5 de octubre de 1848 (Pérez, 1848).

La obra analizada es la segunda edición (1825) de los *Elementos de Matemáticas puras y mistas* de Alberto Lista. Consta de cuatro partes: Geometría elemental, Superficies, Trigonometría plana y Aplicación del Álgebra á la Geometría. Como vemos, no existe ningún epígrafe en el libro que haga referencia a la Geometría Analítica, pero esta se encuentra englobada bajo el título *Aplicación del Álgebra á la Geometría*.

Esta forma de hacer *Geometría Analítica* nada tiene que ver con el concepto actual que tenemos de ella, aunque gran número de matemáticos españoles de aquel siglo sí utilizaron este término moderno para designarla, como Mariano Zorraquín, Agustín Gómez Santa María, José Odriozola e Ignacio Sánchez Solís, entre otros (Sánchez, 2015). Por ello en este artículo utilizaremos ambos nombres –*Aplicación del Álgebra á la Geometría* y *Geometría Analítica*– para referirnos al mismo concepto.

Por tanto, de las cuatro partes en que está dividido el libro sólo hemos analizado la última, la cual está dividida a su vez en tres capítulos titulados *Construcción de las fórmulas*, *Teoría de los signos en la análisis geométrica* y *Problemas geométricos de 1º y 2º grado*, respectivamente.

Este texto no aparece en ninguna lista de libros oficial pues hasta el plan Pidal (1845) no se establecen oficialmente listas de libros de texto, dejando libertad a los profesores para su elección. Sin embargo con el título de *Elementos de matemáticas* –que es como se denominan las asignaturas de matemáticas en los primeros planes de estudios de segunda enseñanza– se publicaron multitud de textos para este nivel educativo a lo largo del siglo XIX (Vea, 1995). Dada la importancia del autor en su época, podemos suponer que esta obra fue una de las más usadas en la segunda enseñanza.

APLICACIÓN DEL ÁLGEBRA A LA GEOMETRÍA

En el capítulo I Lista da la definición de *Aplicación del Álgebra a la Geometría*, explica cómo obtener la solución analítica de un problema geométrico y analiza qué tipos de problemas se pueden resolver con este método. También define dimensión de una ecuación, ecuaciones homogéneas y heterogéneas y explica cómo convertir las segundas en las primeras, aunque gran parte del capítulo lo dedica a la construcción geométrica de las expresiones algebraicas de hasta grado tres.

El capítulo II trata íntegramente de la interpretación de las soluciones negativas en la Geometría Analítica y en el III se resuelven diez problemas que ejemplifican la teoría.

En nuestro análisis no seguiremos este orden exactamente, sino que insertaremos algunos de los problemas resueltos por el autor tras la explicación de los distintos conceptos.

Construcción de las fórmulas

Comienza Lista con la definición de aplicación del Álgebra a la Geometría, y las partes de que consta la solución analítica de un problema geométrico:

1. Llámase *aplicación del álgebra á la geometría* la solución de los problemas geométricos por medio de ecuaciones algebraicas.
2. La solución analítica de un problema geométrico consta de cuatro partes: 1^a, representar por letras los datos y las incógnitas: 2^a, poner el problema en ecuación, ya por las propiedades de la figura geométrica, ya por las condiciones del problema: 3^a, despejar las incógnitas: 4^a construir las fórmulas, es decir, hacer las operaciones geométricas que indica el valor de la incógnita (Lista, 1825, p. 121).

Es decir, Lista, al igual que Descartes, construye con regla y compás la solución geométrica a partir de la solución algebraica. Veremos que explica cómo hacerlo, pero antes trata otras cuestiones importantes, entre ellas los tipos de problemas que se pueden resolver con este método.

3. Las construcciones de la geometría elemental se hacen por medio de la línea recta y del círculo; y como las propiedades de estas dos líneas, demostradas en la geometría, solo producen ecuaciones de primero y segundo grado, se infiere que en la aplicación del álgebra á la geometría elemental solo se pueden construir fórmulas de primero y segundo grado (Lista, 1825, p. 121).

Esto es importante ya que para resolver el problema es necesario saber construir todos los tipos de soluciones que puedan surgir de la resolución algebraica. Con esta consideración se sabe que se presentarán polinomios, cocientes, radicales o una combinación de ellos.

También trata el problema de las ecuaciones homogéneas, y es que Lista, al igual que Descartes, considera que las letras y números de las ecuaciones representan segmentos, con lo cual sigue siendo necesario que las ecuaciones sean homogéneas:

4. Si suponemos que todas las letras del cálculo representan distancias, la ecuación debe ser homogénea, es decir, todos sus términos deben constar del mismo número de dimensiones ó factores literales; pues si la ecuación fuera por ejemplo, $a=bx-c^3$, querría decir que una recta es igual á un rectángulo menos un cubo.
5. Llámense ecuaciones eterogéneas aquellas cuyos términos no contienen igual número de factores literales, por haberse hecho alguno de ellos igual á la unidad. Para hacer homogénea una ecuación heterogénea se hace =1 una letra, por ejemplo r, y se multiplican por sus potencias los términos que tengan menos dimensiones. Ejemplo. Si la ecuación heterogénea es $a=bx-c^2m$ hecha homogénea será $ar^2=brx-c^2m$ (Lista, 1825, p. 122).

Es decir, sigue en todo el razonamiento de Descartes, y resuelve el problema de la misma manera, utilizando el segmento unidad, cosa que lleva a cabo de forma implícita ya que en ninguno de los ejemplos propuestos en el último capítulo hace una transformación explícita de ecuación heterogénea a homogénea. Lo que sí hace es plantear siempre los problemas en términos de ecuaciones homogéneas. Un ejemplo de esto lo vemos en el problema VIII:

Hallar dos rectas, dada la suma de sus cuadrados y el área del rectángulo que forman.

Sean x é y las dos rectas. Sea la suma de sus cuadrados a^2 , y sea b^2 un cuadrado igual á su rectángulo.

Las ecuaciones serán $x^2 + y^2 = a^2$, $xy = b^2$ (Lista, 1825, p. 134).

Obsérvese que iguala la suma de cuadrados y el producto de las longitudes a cantidades cuadradas.

Además, como las soluciones algebraicas deben venir dadas por expresiones homogéneas, deduce cómo deben ser estas:

6. De aquí se infiere: 1º, que si x representa una distancia, y su valor algebraico es un polinomio, no puede ser otra cosa que la suma ó diferencia de varias líneas representadas por los términos del polinomio: 2º, si el valor de x es fraccionario, debe tener en su numerador un factor mas que en su denominador, para que despejando quebrados, resulte la ecuación homogénea: 3º, si el valor de x es un radical de segundo grado, la cantidad que esté debajo debe tener dos factores, para que elevando al cuadrado ambos miembros, resulte la ecuación homogénea (Lista, 1825, p. 122).

Por último, una vez que ha deducido qué tipo de *fórmulas* podemos encontrar, pasa a explicar cómo se construyen. Indica cómo hacerlo en el caso de un polinomio, un valor fraccionario y radicales:

7. Construir un polinomio.

Sea $x=a+b-c+d-h$. Sobre una misma recta tómense las líneas positivas a, b, d , á continuación unas de otras. Quítesele á la línea que resulta la suma de las rectas c y h , y el residuo será el valor de x (Lista, 1825, p. 122).

En el caso de un cociente muestra diferentes variaciones del mismo, que se reducen al caso más sencillo en que $x = \frac{ab}{c}$, cuya construcción es la de una cuarta proporcional:

8. Construir un valor fraccionario.

Hay varios casos. 1^o, siendo los dos términos monomios. La fórmula más sencilla para este caso es $x = \frac{ab}{c}$; de donde $c:a::b:x$. Búsqese una cuarta proporcional á c, a y b , y dicha cuarta proporcional será el valor de x (Lista, 1825, p. 122).

Por último explica cómo se construyen los radicales cuadrados. Los casos más sencillos que podemos encontrar son $x = \sqrt{ab}$, $x = \sqrt{a^2 + b^2}$, $x = \sqrt{a^2 - b^2}$, cuyas construcciones se reducen a la de la media proporcional de tres factores, la de la hipotenusa de un triángulo rectángulo o la de un cateto. Como en el caso de los cocientes explica la construcción de radicales más complejos, que se reducirán a los casos anteriores.

Veremos un ejemplo de todo lo expuesto en la solución del problema I:

Inscribir un cuadrado en un triángulo dado (Lista, 1825, p. 127).

Sea el triángulo dado ABC , y supongamos ya inscrito el cuadrado, y sea $DEFG$.
Sea la base $AC=a$, la altura $BH=b$, y el lado del cuadrado $DE=IH=x$. Los triángulos

semejantes ABC, DBE dan $\frac{AC}{BH} = \frac{DE}{BI}$

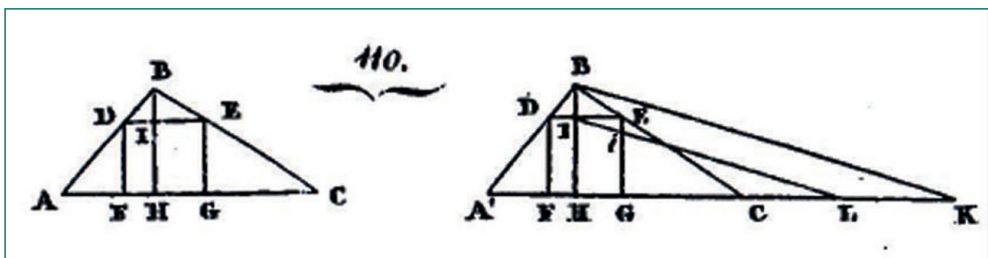


Ilustración 3. Lista, 1825, Figura 110

ó analíticamente $\frac{a}{b} = \frac{x}{b-x}$. Resuelta la ecuacion, da $x = \frac{ab}{a+b}$, fórmula, que se construye buscando una cuarta proporcional á $a+b, a$ y b . (Lista, 1825, pp. 127-128).

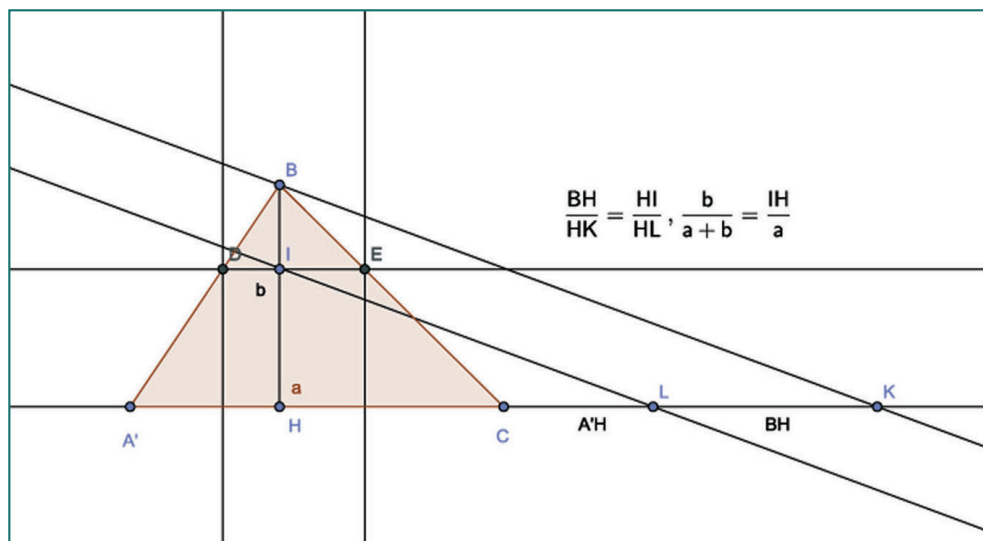


Ilustración 4. Reproducción de la figura 110 utilizando Geogebra.

Para ello toma sobre la prolongación de la base dos puntos L y K de manera que $HL=a$ y $LK=b$. Traza por este último punto la recta KB , y una paralela a ella por L , formándose así dos triángulos semejantes de los que se obtiene la proporción $\frac{b}{a+b} = \frac{IH}{a}$, es decir

el segmento IH es el segmento buscado. Para construir la solución traza una paralela a la base por el punto I , y seguidamente dos perpendiculares por los punto D y E respectivamente obteniéndose así el cuadrado inscrito pedido.

Teoría de los signos en la análisis geométrica

En el capítulo II trata el problema de las soluciones negativas, que Lista no rechaza como hacía Descartes, pero que sigue sin admitir con naturalidad. El hecho de que les dedique un capítulo da idea del problema que suponen para él.

Para explicar la construcción e interpretación de las soluciones negativas introduce el concepto de *figuras directas e indirectas*:

20. Cuando dos figuras no se diferencian sino en el tamaño de sus partes, y estas están colocadas ambas en un mismo sentido, se dice que las figuras están en correlación directa. La ecuación que ligue entre sí las partes de dichas figuras, debe ser la misma para ambas; pues son casos particulares de una misma cuestión. (Lista, 1825, p. 125)

Parece que está hablando de figuras semejantes pero después pone un ejemplo en el que vemos que eso no es así.

21. Cuando dos figuras están entre sí combinadas de tal manera, que una parte es en la una la suma de dos líneas, y en la otra es la diferencia de las mismas líneas, se dice que las figuras están en *correlacion indirecta*; y las ecuaciones, que las representan, deben diferenciarse en el signo de la línea, que es sumando en la una y sustrayendo en la otra. Las líneas que se añaden en una figura, y se restan en la otra, y que por consiguiente varían de signo en la ecuación, se llaman *indirectas*. Para abreviar la frase, se suelen llamar las figuras directas ó indirectas según su correlación.

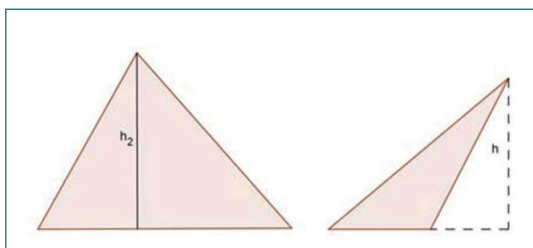


Ilustración 5. Figuras indirectas

Ejemplo. Comparando entre sí dos triángulos, cuyas alturas caigan una dentro y otra fuera, son indirectos, porque la distancia de un vértice A a la perpendicular en el uno es = a la base menos el otro segmento; y en el otro la distancia del vértice correspondiente a la perpendicular es igual a la base más el otro segmento. Este segmento, que es sustrayendo en la primera figura, y sumando en la segunda, es la cantidad indirecta¹. (Lista, 1825, p.126)

Este tratamiento de las soluciones negativas, introduciendo sistemas correlativos, aparece también en la *Geometría analítica-descriptiva* (1819) de Mariano Zorraquín, que se basa, así mismo en la *Geometría de la Posición* de Carnot, como el mismo Zorraquín señala en su obra (Sánchez, 2015).

Lista continúa explicando que en un problema, sirve la misma ecuación para las dos figuras, con tan sólo variar el signo de aquellas cantidades que pasan de directas a indirectas (p. 126), y finalmente cómo se han de interpretar y construir las soluciones negativas de una ecuación:

23. Cuando de la resolución de un problema geométrico resulta un valor negativo de la incógnita x , se muda el signo de esta en la ecuación, y se tendrá la condición a que satisface dicho valor negativo. Entonces se conocerán las líneas que se hacen indirectas en el problema, para que el valor negativo de x , hecho positivo, lo satisfaga (Al.21.3^o)² (Lista, 1825, p.126).

Es decir, cuando se obtiene una solución negativa se ha de cambiar de signo para convertirla en positiva, se observa el efecto que este cambio produce en la ecuación de la que hemos obtenido x viendo qué líneas pasan de ser directas a indirectas para construirlas en sentido contrario que en el caso de la solución positiva. Esto se muestra claramente en el problema III, que analizaremos con detalle posteriormente.

Tras esta explicación, que sería el modo general de obrar con una solución negativa, Lista explica cómo ha de construirse tal solución cuando la variable se toma sobre una recta desde un punto fijo.

1. En el libro no hay figuras, las hemos insertado para una mejor comprensión del concepto.
2. Es una referencia que él inserta. Suponemos que Al. se refiere a álgebra.

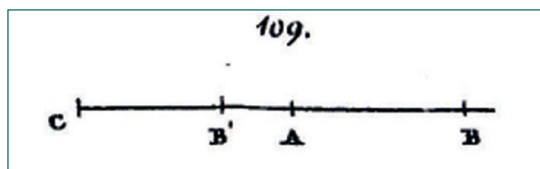


Ilustración 6: Lista, 1825, Fig. 109.

24. Si la x representa una parte, que se debe tomar sobre una recta desde un punto fijo, el valor negativo satisface al problema, tomándolo desde dicho punto fijo hacia la parte opuesta á aquella en que se hubiera tomado, si la x hubiera sido positiva (Fig. 109). Porque sea A el punto fijo, y sea la incógnita x la distancia de A á B , quedando este punto B determinado por una condicion establecida, sobre la cual se funda la ecuacion (2). Sea C otro punto cualquiera fijo tomado en la línea. Cuando este punto B está á la derecha de A , es $CB=CA+AB$: cuando está á la izquierda es $CB'=CA-AB'$: luego AB es cantidad indirecta, y su signo debe mudar de un caso para otro: luego el valor negativo de x debe interpretarse tomándolo á la izquierda del punto A (Lista, 1825, p. 127).

Tras esto hace una interesante reflexión:

La análisis da negativo este valor, por la absurdidad que se ha cometido en la figura hipotética, que nos ha servido para formar la ecuacion; pues en dicha figura hemos puesto el punto buscado B á la derecha de A , debiendo estar á la izquierda, segun lo ha hecho conocer el cálculo, dando negativo el valor de x . (Lista, 1825, p. 127)

Es decir, no considera las soluciones negativas absurdas, que en principio lo serían pues representan un segmento de longitud negativa, sino que deduce que se han obtenido tales soluciones porque se ha partido de una premisa errónea al plantear geométricamente el problema. Veremos esto también en el problema III.

Por último, considera cómo varía una cantidad que pasa de directa a indirecta de forma continua.

25. Toda cantidad variable, que de directa se hace indirecta, se hace igual á cero ó igual al infinito en el valor intermedio.

Dem. Si la cantidad x se hace indirecta, será sumando antes y substrayendo después; de modo que habrá dos cantidades a y b tales que $a=b+x$, cuando x es directa, y $a=b-x$, cuando es indirecta. En el primer caso $x=a-b$, en el 2º $x=b-a$: luego en el primer caso a era mayor que b , y en el 2º menor; luego en el intermedio ha habido un caso en que $a=b$, y $x=0$.

Puede suceder que el valor de x se determine por una fórmula de esta especie $x = \frac{A}{a-b}$,

y entonces en el caso intermedio en que $a=b$, será $x=\infty$: luego etc. (Lista, 1825, p. 127).

También podemos encontrar esta interpretación en la obra de Zorraquín:

Con este objeto observemos que si en un sistema se tiene $a+x=b$ y en otro $a-x=b$, para el 1º será $x=b-a$ y para el 2º $x=a-b$ y puesto que siendo $b>a$ ha pasado á ser $b<a$, y además la variación se ha verificado por continuidad, habrá habido un caso en que $a=b$ y $x=0$. Del mismo

modo cuando $x = \frac{l}{b-a}$ se convierte en $x = \frac{l}{a-b}$, resulta para x el valor intermedio

$\frac{1}{0} = \infty$. Concluiremos pues que *una cantidad inversa no puede hacerse directa por el movimiento continuo de las partes del sistema á que pertenece sin pasar por 0 ó?* (Zorraquín, 1819, p.31).

Y de nuevo esta idea proviene de Carnot, ya que:

In 1801, Carnot even sees a relation between his approaches for the analyse infinitesimal and the quantités directes et inverses: they show “much analogy.” In the former case, for an invariant system of quantities, one observes a second comparison system whose quantities transform into the quantities of the initial system through a continuous approximation to the limit. In the latter case, one likewise compares the quantities of two systems, and these are the absolute values in both systems that are equal to each other at the limit. (Schubring, 2005, p. 357)

Todo lo expuesto se observa claramente en las soluciones del problema que veremos a continuación:

Problema III: Dado un diámetro y una cuerda perpendicular á él, tirar desde el extremo del diámetro otra cuerda tal, que su parte comprendida entre la primera cuerda y su arco sea igual á una recta dada (m) (Lista, 1825, p.129).

Los datos son el diámetro AB y la cuerda CD , y supone el problema resuelto siendo AE la cuerda pedida, por lo que $IE=m$.

Toma $AD=a$, $AE=x$, $AI=u$, de donde se tiene $x-u=m$.

Demuestra que los triángulos ADE y AID son semejantes obteniendo de ellos la proporción

$$\frac{AE}{AD} = \frac{AD}{AI}$$

O $\frac{x}{a} = \frac{a}{u}$; de donde $xu = a^2$. Resuelve el sistema de ecuaciones $\begin{cases} xu = a^2 \\ x - u = m \end{cases}$ que tiene como

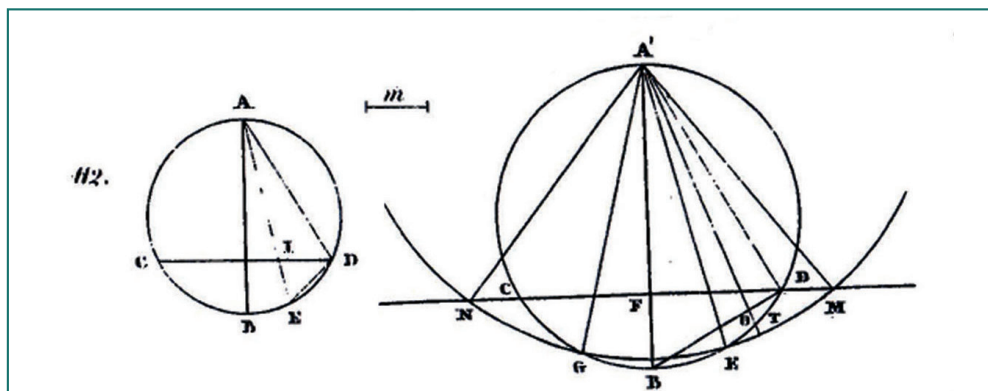


Ilustración 7. Lista, 1825, Figura 112, planteamiento del problema III construcción de las soluciones

soluciones: $u = -\frac{1}{2}m \pm \sqrt{\left(\frac{1}{4}m^2 + a^2\right)}$, y $x = \frac{1}{2}m \pm \sqrt{\left(\frac{1}{4}m^2 + a^2\right)}$. Los valores superiores de x y u son positivos, los dos inferiores negativos (Lista, 1825, p. 129).

Primero construye el valor positivo de la x :

Construyamos primero el valor positivo de x . Sea $A'B$ el diámetro, CD la cuerda: tiro $A'D$ y DB , que forman ángulo recto. Tomo $TO = \frac{1}{2}$: tiro la hipotenusa $A'O$, que será igual $\sqrt{\left(\frac{1}{4}m^2 + a^2\right)}$. Prolóngola, hasta que la prolongación $TO = \frac{1}{2}$. Será $A'T$ el valor de x . Hago centro en A' con él, y describo un círculo. Si este corta al dado en dos puntos, E y G , tirando las $A'E$, $A'G$, estas darán dos soluciones del problema. Se ve, pues, que un solo valor de la incógnita puede dar mas de una solución. (Lista, 1825, p. 130)

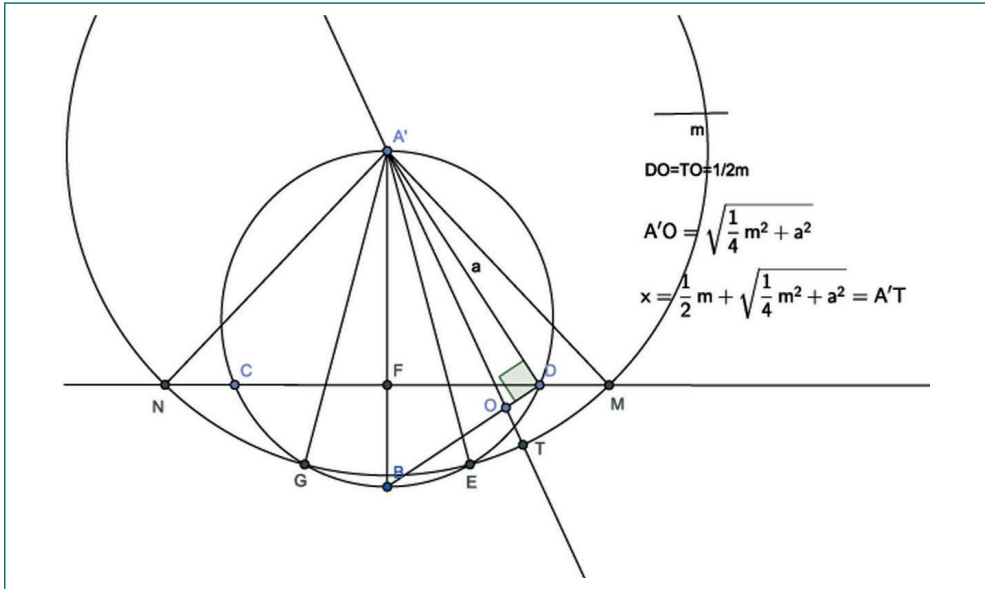


Ilustración 8. Construcción de las soluciones positivas.

Por último interpreta los valores negativos de x :

Vamos a interpretar los valores negativos de x y de u . Haciendo ambas incógnitas negativas en las ecuaciones del problema, $xu=a^2$ no se altera; pero $x-u=m$, se reduce á $u-x=m$ lo que prueba 1º que la m es la línea que se hace indirecta; pues era $x=u+m$, y ahora es $=u-m$. (Lista, 1825, p. 130)

Vemos que Lista construye las cuatro soluciones que tiene el problema partiendo de una de ellas sin más que interpretar los cambios de signo que aparecen en las demás.

Para terminar señalaremos que a diferencia del resto de autores del siglo XIX (Sánchez, 2015), Lista no incluye en su estudio de la Geometría Analítica los sistemas de coordenadas, ni hace mención al concepto de lugar geométrico de una ecuación, y por tanto no obtiene las ecuaciones de una recta, ni introduce conceptos tales como distancias o ángulos entre elementos del plano.

CONCLUSIONES

Tras todo lo expuesto podemos sacar dos conclusiones importantes del análisis realizado a la obra de Lista:

Por una parte, como hemos visto, la Geometría Analítica de este autor está más próxima a la de Descartes que a la actual, trabajando con segmentos en vez de con números, arrastrando por tanto el problema de las ecuaciones homogéneas y de las soluciones negativas, aunque Lista no utiliza los sistemas de coordenadas, ni siquiera en el sentido en que lo hacía Descartes.

Por otra parte, se observa que, a pesar de utilizar el Álgebra para resolver los problemas, no abandona la Geometría por completo en ningún momento; y este no desligarse de la Geometría tiene por una parte una ventaja, y es que Lista tiene una visión geométrica de la parte algebraica que se ha perdido en nuestros días, ya que actualmente una vez que se obtienen las ecuaciones algebraicas del problema se olvida la situación geométrica de fondo hasta llegar a la solución, de la cual sólo damos la interpretación geométrica.

Pero estar tan atado a la Geometría también tiene sus inconvenientes, ya que en muchas ocasiones se complican innecesariamente los problemas al verse obligado a plantear siempre ecuaciones homogéneas y a construir las soluciones, tanto positivas como negativas, siendo la interpretación y construcción de éstas últimas un asunto bastante complejo en algunos casos, como hemos podido comprobar en los problemas mostrados. Quizá fuera esta complicación innecesaria una de las razones de la desaparición de este modo de hacer Geometría Analítica, en favor de otros planteamientos más algebraicos.

REFERENCIAS

- Alberto Lista y Aragón. El autor: Vida y obra. (n.d.). En *Biblioteca Virtual Miguel de Cervantes*. Recuperado en junio de 2014 de http://www.cervantesvirtual.com/portales/alberto_lista/autor_biografia/
- Ausejo, E. (n.d. a). Rodríguez de Lista y Aragón, Alberto (1775-1848). En *divulgaMAT. Real Sociedad Matemática Española*. Recuperado el 28 de junio de 2014 de http://divulgamat2.ehu.es/divulgamat15/index.php?option=com_content&view=article&id=3415%3Arodrez-de-lista-y-aragalberto-1775-1848&catid=45%3AAbiograf-de-matemcos-espas&directory=67&limitstart=1

- Bagni, G. (2000). The role of the history of mathematics in mathematics education: reflections and examples. *Proceedings of CERME-1*, Schwank, I. (Ed.), II. Forschungsinstitut fuer Mathematikdidaktik, Osnabrueck, 220-231.
- Chica, A. (2001) *La matemática en sus personajes. Descartes. Geometría y método*. Madrid. NIVOLA.
- Collados, E. (2008) El concepto de dibujo y su práctica en los libros de texto de educación primaria publicados en España en el periodo comprendido entre 1915-1900. *Historia de la Educación*, 27, 323-346.
- Delgado, B. (1983). Los libros de texto como fuente para la historia de la Educación, *Historia de la Educación*, 2, 353-358.
- Descartes, R. (1637) *La Geometría*. Traducido por Pedro Rossell. Espasa-Calpe. Buenos Aires, 1947.
- Etayo, J.J. (1992). El reinado de la Geometría Proyectiva. *Historia de la Matemática*. pp. 115-138. Recuperado en enero de 2012 de <http://dmle.cindoc.csic.es/revistas/detalle.php?numero=5161>.
- Gómez, B. (2003). La investigación histórica en didáctica de la matemática. En E. Castro (Coord.), *Investigación en Educación Matemática. Séptimo Simposio de la SEIEM*. pp.79-85. Granada. España; Universidad de Granada.
- Gómez, P. (2002). Análisis didáctico y diseño curricular en matemáticas. *Revista EMA*. 7(3), 251-292.
- González, M. T. y Sierra, M. (2003) El método de investigación histórico en la didáctica del análisis matemático. En E. Castro, P. Flores, T. Orega, L. Rico y A. Valleciullo (eds.) *Investigación en Educación Matemática VII*, 109-130 Granada: Universidad de Granada.
- González, P.M. (2004a). La historia de las matemáticas como recurso didáctico e instrumento para enriquecer culturalmente su enseñanza. *Suma: Revista sobre Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas*, 45, 17-28.
- González, P.M. (2007). Raíces históricas y trascendencia de la geometría analítica. *Sigma: revista de matemáticas = matematikaaldizkaria*. 30, 205-236.
- Lista, A. (1825) *Elementos de matematicas puras y mistas (sic)*. Tomo III. Madrid. Imprenta de Don Leon Amarita.
- Maz, A. (1999) La historia de las matemáticas en clase: ¿por qué? y ¿para qué? En Berenguer, M.I; Cardeñoso, J.M. y Torquero, M. (Eds). *Investigaciones en el aula de matemáticas. Matemáticas en la sociedad*. (pp. 205-209) Granada: Sociedad Thales y Departamento de Didáctica de la Matemática.
- Maz, A. (2005). *Los números negativos en España en los siglos XVIII y XIX*. Tesis Doctoral. Universidad de Granada.
- Maz, A. (2009). Investigación histórica de conceptos en los libros de matemáticas. En M.J. González, M.T. González & J. Murillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIII* (pp. 5-20). Santander. SEIEM
- Maz, A., Torralbo, M., Rico, L. (Eds.) (2006). *José Mariano Vallejo, el matemático ilustrado. Una mirada desde la Educación Matemática*. Córdoba: Servicio de Publicaciones de la Universidad de Córdoba.
- Peralta, J (2008). La matemática española del siglo XIX. *La Ciencia antes de la Gran Guerra*. Fundación la Orotava de Historia de la Ciencia.

- Pérez, F. (1848). *Biografía de Alberto Lista y Aragón, seguida de una colección de poesías inéditas unas, y otras no comprendidas en las ediciones que se han hecho de las de dicho señor*. Madrid, Cuesta.
- Puelles Benítez, M. (2000). Los manuales escolares: un nuevo campo de conocimiento. *Historia de la Educación*, 19, 5-11.
- Rey, J y Babini, J (1986). *Historia de la Matemática. Vol. 2. Del Renacimiento a la Actualidad*. Barcelona, GEDISA.S.A.
- Rico, L y otros. (2008). Planificación de las matemáticas escolares en secundaria. El caso de los números naturales. *SUMA*. 58, 7-23.
- Sánchez, I.M. (2015). *La Geometría Analítica en los libros de texto para secundaria y universidad en España en el siglo XIX*. Tesis doctoral. Universidad de Salamanca.
- Schubring, G. (2005). *Conflicts between Generalization, Rigor and Intuition. Number Concepts Underlying the Development of Analysis in 17th-19th Century France and Germany*. New York: Springer.
- Schubring, G. (1987). On the Methodology of Analysing Historical Textbooks: Lacroix as Textbook Author. *For the Learning of Mathematics*, 7 (3), 41-51.
- Vea, F. (1995). *Las matemáticas en la enseñanza secundaria en España en el siglo XIX*. Zaragoza. Seminario de Historia de la Ciencia y de la Técnica de Aragón. Facultad de Ciencias (Matemáticas).
- Zorraquín, M. (1819). *Geometría Analítica-Descriptiva*. Alcalá de Henares, Oficina de Manuel Amigo. Impresor de la Real Universidad.

Contextos y propuestas para la enseñanza de la estadística y la probabilidad en Educación Infantil: un itinerario didáctico

Ángel Alsina

Universidad de Girona

Resumen: *Se presenta un itinerario didáctico para la enseñanza de la estadística y la probabilidad en Educación Infantil. En la primera parte se argumenta la incorporación de estos conocimientos en el aula: la importancia de garantizar una educación de alta calidad ajustada a los cambios sociales; la importancia de la estadística y la probabilidad en el desarrollo integral; y la importancia de la alfabetización estadística y probabilística. En la segunda parte se muestran propuestas en diferentes contextos: situaciones de vida cotidiana, materiales manipulativos, juegos, recursos populares (cuentos y canciones), recursos digitales y cuadernos.*

Palabras clave: *alfabetización estadística, alfabetización probabilística, contextos de enseñanza, Educación Infantil.*

Contexts and proposals for teaching statistics and probability in Early Childhood Education: a didactic itinerary

Abstract: *A didactic itinerary for teaching statistics and probability in Early Childhood Education is presented. In the first part three arguments for incorporating this knowledge into the classroom are discussed: the importance of ensuring high quality education according to social changes; the importance of statistics and probability in the integral development; and the importance of statistical and probabilistic literacy. In the second part some activities in different contexts are shown: everyday life, manipulatives, games, popular resources (stories and songs), digital resources and notebooks.*

Keywords: *statistical literacy, probabilistic literacy, teaching contexts, Early Childhood Education*

1. INTRODUCCIÓN

La inclusión de la estadística y la probabilidad en el currículo de Educación Infantil es reciente. Hasta hace pocos años las orientaciones curriculares para esta etapa educativa se centraban principalmente en la adquisición de contenidos de numeración y de geometría; sin embargo, aunque estos contenidos siguen ocupando un lugar protagonista, se han ido integrando otros tipos de conocimientos en el currículo que pretenden dar respuesta a las necesidades sociales, como es el caso de la estadística y probabilidad. En este sentido, el Consejo Nacional de Profesores de Matemáticas de Estados Unidos plantea que los alumnos deberían empezar a aprender conocimientos relacionados con el análisis de datos y el azar a partir de los tres años (NCTM, 2003).

La incorporación de estos nuevos contenidos no ha venido acompañada, en la mayoría de ocasiones, de las orientaciones necesarias para poder ser enseñados de forma eficaz en el aula.

En este artículo se asume que para que una enseñanza sea eficaz, “los profesores deben conocer y entender profundamente las matemáticas que enseñan y ser capaces de hacer uso de ese conocimiento con flexibilidad. Necesitan comprender a su alumnos, confiar en ellos, como aprendices de matemáticas y como seres humanos, y ser cuidadosos al elegir y utilizar las estrategias pedagógicas y de evaluación” (NCTM; 2003, p. 17). Desde este prisma, en este artículo se indaga, en primer lugar, acerca de los argumentos que justifican la enseñanza de la estadística y la probabilidad en Educación Infantil; y en segundo lugar se presentan algunas estrategias didácticas que permitan llevar a cabo una enseñanza eficaz de estos contenidos en el aula.

2. ARGUMENTOS EN TORNO A LA INCORPORACIÓN DE LA ESTADÍSTICA Y LA PROBABILIDAD EN EDUCACIÓN INFANTIL

Desde una perspectiva genérica, Alsina y Vásquez (2016) indican que en una sociedad altamente tecnificada como la actual es necesario que los ciudadanos tengan recursos a su alcance para conocer la realidad, representarla e interpretarla críticamente, con el objeto de poder transformarla o, simplemente, predecir su futuro. Con la incorporación de la estadística y la probabilidad en Educación Infantil se intenta promover que los alumnos aprendan desde pequeños conocimientos que les sirvan de base para la recogida, descripción e interpretación de datos. En definitiva, se trata de ofrecerles herramientas que les ayuden a responder preguntas cuyas respuestas no son inmediatamente obvias, a la vez que les faciliten la toma de decisiones en situaciones en las que la incertidumbre es relevante. Todo ello, para que progresivamente sean ciudadanos bien informados y consumidores inteligentes, es decir, personas con una adecuada alfabetización estadística y probabilística.

Existen por lo menos tres argumentos interrelacionados que justifican la necesidad de incorporar la estadística y la probabilidad en Educación Infantil:

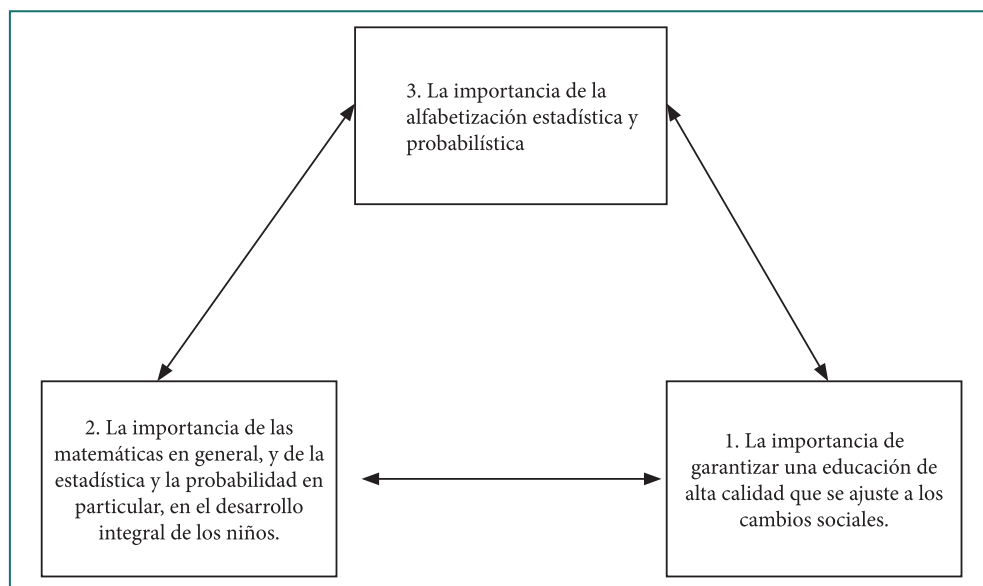


Figura 1. Argumentos entorno a la incorporación de la estadística y la probabilidad en Educación Infantil.

2.1. La importancia de garantizar una educación de alta calidad que se ajuste a los cambios sociales

La sociedad evoluciona a un ritmo acelerado, por lo que la escuela debería estar constantemente atenta para poder ofrecer una formación de alta calidad que se ajuste a estos cambios. De hecho, la formación de profesionales competentes y comprometidos con el desarrollo social constituye hoy día una misión esencial de la Educación Superior Contemporánea (UNESCO, 1998). Por esta razón, diversos países como por ejemplo España han concretado las competencias profesionales del profesorado de Educación Infantil, entre las que se incluye la necesidad de “asumir que el ejercicio de la función docente tiene que ir perfeccionándose y adaptándose a los cambios científicos, pedagógicos y sociales a lo largo de la vida” (ORDEN ECI/3854/2007, p. 53736). Esta competencia profesional alude a la necesidad de reflexionar sistemáticamente sobre lo que se sabe y sobre lo que se hace, con el objeto de ir mejorando la práctica profesional.

Parece, pues, que no deberíamos enseñar lo mismo que hace diez, veinte o treinta años. Ni enseñarlo de la misma forma. Por esta razón, se han producido cambios sustanciales en las últimas décadas como la definición del Proyecto DeSeCo (Definición y Selección de Competencias Clave) de la Red Eurydice de la Organización para la Cooperación y el Desarrollo (OCDE), que ha supuesto la substitución paulatina un currículo orientado a la adquisición de contenidos por un currículo orientado a la adquisición de competencias que fomente la comprensión y el uso eficaz del conocimiento en todos los contextos en los que se necesita (Rychen y Salganik, 2004).

2.2. La importancia de las matemáticas en general, y de la estadística y la probabilidad en particular, en el desarrollo integral de los niños.

Del argumento anterior se desprende que el conocimiento matemático no es importante por sí mismo, sino por su importante papel en la sociedad actual, tecnológica y científicamente avanzada (Goñi, 2008). Desde esta perspectiva, y tomando como referencia las orientaciones contemporáneas en materia de educación matemática, es imprescindible favorecer que todos los alumnos aprendan matemáticas desde las primeras edades, ya que nunca hasta ahora había sido mayor la necesidad de entender y ser capaz de usar las matemáticas en la vida diaria y en el trabajo. No se trata, sin embargo, de formar a matemáticos, sino de formar a personas que desde la etapa de Educación Infantil aprendan a usar progresivamente las matemáticas en una variedad de contextos en las que estos conocimientos son necesarios, además del escolar.

Las matemáticas que aprenden y usan los niños durante las primeras edades son matemáticas intuitivas, y las aprenden en el marco de experiencias informales (NCTM, 2003). Baroody (1987) acuña el término “matemáticas informales” precisamente para referirse a estas prácticas informales. Este autor pone de manifiesto que los niños de las primeras edades recopilan, a menudo, una gran riqueza de conocimientos sobre temas que les interesan, y a partir de estos intereses y actividades cotidianas es como van desarrollando su pensamiento matemático. Entre estos intereses están la recolección de datos, su representación e interpretación, como se ha puesto de manifiesto en diversos estudios preliminares (Alsina, 2006, 2013; Dalmau y Alsina, 2015). Estos datos revelan que los niños de las primeras edades tienen conocimientos informales sobre estadística y probabilidad, que son el eslabón imprescindible para que posteriormente puedan aprender conocimientos estocásticos más formales en el contexto de una enseñanza reglada. En educación matemática, pues, la conexión más importante en los primeros aprendizajes matemáticos es el existente entre las matemáticas intuitivas, informales, que los niños aprenden a través de sus experiencias, y las matemáticas más formales. Estos conocimientos son lo que van a permitir que progresivamente sean ciudadanos matemáticamente alfabetizados.

2.3. La importancia de la alfabetización estadística y probabilística.

El punto de partida imprescindible para abordar la alfabetización estadística y probabilística es poner de relieve que su enseñanza es esencial para ayudar a preparar a los alumnos para la vida en general, así como para el análisis de datos y los eventos aleatorios de su vida cotidiana en particular (Everitt, 1999). Es por esta razón que, como se ha indicado, la prestigiosa asociación norteamericana de profesores de matemáticas ha incorporado la estadística y la probabilidad en el currículo ya desde los tres años, caracterizándose por presentar un enfoque más experimental que permita proporcionar a los alumnos una experiencia estocástica desde las primeras edades.

Gal (2002) indica que la alfabetización estadística se refiere a la capacidad de las personas para interpretar datos, evaluarlos críticamente y, cuando sea pertinente, expresar sus opiniones respecto a la información estadística, los argumentos

relacionados con los datos o fenómenos estocásticos. Unos años después, este mismo autor define la alfabetización probabilística como la capacidad de acceder, utilizar, interpretar y comunicar información e ideas relacionadas con la probabilidad, con el fin de participar y gestionar eficazmente las demandas de las funciones y tareas que implican incertidumbre y riesgo del mundo real (Gal, 2005, 2012). Desde esta visión, indica que el comportamiento estadísticamente y probabilísticamente alfabetizado requiere la activación conjunta de componentes cognitivos y de disposición. Los componentes cognitivos implican cinco bases de conocimiento: habilidades de alfabetización, conocimientos estadísticos y probabilísticos (también informales), conocimiento matemático, contextual o del mundo del conocimiento, y que se plantee el conocimiento de cuestiones críticas. El componente disposicional consiste en la presencia de una posición crítica, es decir, la voluntad de adoptar actitudes cuestionando ciertas creencias, como la creencia en el poder de los procesos estadísticos, la creencia en sí mismo como persona capaz de pensar estadísticamente, y la creencia en la legitimidad de la adopción de una perspectiva crítica sobre información recibida de fuentes “oficiales” o de expertos. Es obvio que estos componentes se van adquiriendo a lo largo de la escolarización, a través de una planificación que considere los conocimientos que se deberían enseñar y una gestión que tenga presente las formas más eficaces de enseñarlos.

3. CONOCIMIENTOS DE ESTADÍSTICA Y PROBABILIDAD EN EDUCACIÓN INFANTIL

Como se ha indicado, el Consejo Nacional de Profesores de Matemáticas de Estados Unidos, comprometido con la excelencia de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas para todos los alumnos, ha señalado que los programas de enseñanza de la estadística y la probabilidad debería capacitar a todos los alumnos a partir de 3 años para dominar los contenidos de estadística y probabilidad que se indican en las Tablas 1 y 2.

Tabla 1. Contenidos de estadística de 3 a 8 años (NCTM, 2003)

Formular preguntas que puedan abordarse con datos y recoger, organizar y presentar datos relevantes para responderlas	Seleccionar y utilizar métodos estadísticos apropiados para analizar datos
Proponer preguntas y recoger datos relativos a ellos y su entorno. Ordenar y clasificar datos de acuerdo con sus atributos y organizar datos relativos a aquellos. Representar datos mediante objetos concretos, dibujos y gráficos.	Describir parte de los datos y el conjunto total de los mismos para determinar lo que muestran los datos.

Tabla 2. Contenidos de probabilidad de 3 a 8 años (NCTM, 2003)

Desarrollar y evaluar inferencias y predicciones basadas en datos	Comprender y aplicar conceptos básicos de probabilidad
Discutir sucesos probables e improbables relacionados con las experiencias de los alumnos.	-

Estas orientaciones pretenden ser un recurso y una guía para todos los que toman decisiones que afectan a la educación estadística y probabilística, por lo que progresivamente se van introduciendo en la mayoría de currículos contemporáneos de matemáticas de Educación Infantil.

Con base en los tres argumentos señalados en el apartado anterior y las orientaciones curriculares del NCTM (2003) expuestas en las tablas 1 y 2, Alsina (2011, 2013), ha realizado una propuesta que se ha ido reformulando en la que se intentan concretar los contenidos de estadística y probabilidad que deberían trabajarse en el 2º ciclo de Educación Infantil. Como señala dicho autor, se trata de una propuesta de organización de los contenidos, y no de una prescripción, en el sentido que las edades deben considerarse de forma relativa.

Tabla 3. Contenidos de estadística y probabilidad para niños de 3-4 años

Identificación de datos y hechos	Comparación de datos y hechos	Operaciones con datos
Identificación de datos muy sencillos del entorno cercano a partir de variables discretas (por ejemplo, recoger el tiempo que hace cada día: soleado, nublado, sol y nubes, lluvia). Representación de los datos identificados, principalmente con dibujos (por ejemplo, en el calendario poner cada día un dibujo del tiempo que hace: sol, nube, sol y nube, lluvia). Identificación posterior de la frecuencia absoluta de cada valor a partir del recuento. Reconocimiento de la posibilidad de ocurrencia de hechos: hechos seguros (por ejemplo, es seguro que un niño de 3º de Educación Infantil es mayor que uno de 1º, etc.).	Organización de los datos identificados, principalmente a través de clasificaciones, para facilitar la comparación y la representación (por ejemplo, realizar subgrupos con los dibujos de sol, nube, sol y nube, lluvia). Comparación e interpretación de los datos representados con dibujos, usando los comparativos “más ... que”, “menos ... que”, “tanto ... como” (por ejemplo, si ha habido más días nublados que soleados, etc.).	Resolución de situaciones aritméticas elementales a partir de los datos representados (por ejemplo, plantear qué frecuencia absoluta se obtendría si a un determinado valor de una variable se le añade un dato más, o se quita uno).

Tabla 4. Contenidos de estadística y probabilidad para niños de 4-5 años

Identificación de datos y hechos	Comparación de datos y hechos	Operaciones con datos
<p>Identificación de datos más complejos a partir de variables discretas (por ejemplo, el número de hermanos de cada alumno).</p> <p>Representación de los datos identificados, principalmente con objetos (por ejemplo, con cubos de madera o de plástico se puede representar el número de hermanos que tiene cada alumno).</p> <p>Identificación posterior de la frecuencia absoluta de cada valor a partir del recuento.</p> <p>Reconocimiento de la posibilidad de ocurrencia de hechos: hechos imposibles (por ejemplo, es imposible que un elefante sea rojo).</p>	<p>Organización de los datos identificados, principalmente a través de clasificaciones, para facilitar la comparación y la representación (por ejemplo, realizar subgrupos con los alumnos según el número de hermanos que tienen).</p> <p>Comparación e interpretación de los datos representados con objetos, usando los comparativos “más ... que”, “menos ... que”, “tanto ... como” (por ejemplo, si hay más alumnos que tienen un hermano que los que tienen dos hermanos, etc.)</p> <p>Comparación de la posibilidad de ocurrencia de hechos sencillos, según si son seguros o imposibles.</p>	<p>Composición y descomposición de las frecuencias absolutas (por ejemplo, si en una representación hay una barra con cinco cubos que pertenecen a un determinado valor, investigar cómo se podrían componer en dos grupos: 1-4, 2-3, etc.).</p> <p>Resolución de situaciones aritméticas algo más complejas a partir de los datos representados (por ejemplo, plantear qué frecuencia absoluta se obtendría si a un determinado valor de una variable se le añaden tres datos más, o se quitan dos).</p>

Tabla 5. Contenidos de estadística y probabilidad para niños de 5-6 años

Identificación de datos y hechos	Comparación de datos y hechos	Operaciones con datos
<p>Identificación de datos cada vez más complejos a partir de variables discretas (por ejemplo, el número de pie que calza cada niño).</p> <p>Representación de los datos identificados en gráficos de barras, con una correspondencia término a término (por ejemplo, pintando un cuadrado para cada caso de una variable, o haciendo una cruz).</p> <p>Identificación posterior de la frecuencia absoluta de cada valor a partir del recuento.</p> <p>Reconocimiento de la posibilidad de ocurrencia de hechos: hechos probables (por ejemplo, es probable que si se tira un dado salga un 3).</p>	<p>Organización de los datos identificados, principalmente a través de clasificaciones, para facilitar la comparación y la representación (por ejemplo, clasificar a los alumnos según el número de pie que calzan).</p> <p>Comparación e interpretación de los datos representados en gráficos de barras (por ejemplo, si hay más alumnos que calzan un 5 o un 6 de talla)</p> <p>Comparación de la posibilidad de ocurrencia de hechos sencillos, según si son imposibles, probables o seguros (por ejemplo, al tirar un dado es imposible que salga un 8, probable que salga un 3 y seguro que salgan un número entre 1 y 6).</p>	<p>Composición y descomposición de las frecuencias absolutas (por ejemplo, si en una barra de un gráfico hay ocho cruces, investigar cómo se podrían componer en dos grupos: 1-7, 2-6, 3-5, 4-4, etc.).</p> <p>Resolución de situaciones aritméticas más complejas a partir de los datos representados en un gráfico de barras (por ejemplo, plantear qué frecuencia absoluta se obtendría si a un determinado valor de una variable se le añaden cuatro datos más, o se quitan tres).</p>

Como puede apreciarse en las tablas 3 a 5, la propuesta de contenidos de estadística y probabilidad para el 2º ciclo de Educación Infantil se centra sobre todo en la identificación y la organización de los datos (sobre todo a través de la clasificación, aunque también se pueden realizar ordenaciones); la representación a través de objetos, dibujos o gráficos; y su posterior interpretación. Se trata de datos cercanos a la propia experiencia, que pueden ser propuestos por el maestro o bien por los propios alumnos. En relación a la probabilidad, de acuerdo con las orientaciones internacionales analizadas, en la propuesta presentada en las tablas 3 a 5 se propone que los alumnos empiecen a usar de forma comprensiva lenguaje probabilístico elemental: “imposible”, “probable” y “seguro” a partir de sucesos inciertos que forman parte del entorno de los alumnos.

4. CONTEXTOS Y PROPUESTAS PARA LA ENSEÑANZA DE LA ESTADÍSTICA Y LA PROBABILIDAD EN EDUCACIÓN INFANTIL.

Con el objeto de dar respuesta a la segunda finalidad de este artículo, en este apartado se aportan algunas propuestas de aula para trabajar contenidos de estadística y probabilidad. Para ello, se sigue el itinerario didáctico propuesto en la “Pirámide de la Educación Matemática” de Alsina (2010), donde se plantea que para favorecer el desarrollo de la competencia matemática en general (y la alfabetización estadística y probabilística en particular) es preciso partir de contextos de enseñanza-aprendizaje significativos y ajustados a las necesidades de los alumnos de las primeras edades. Haciendo un símil con la pirámide de la alimentación, propone distintos contextos y su frecuencia de uso más recomendable para desarrollar el pensamiento matemático:

En la base de este organigrama piramidal están los recursos que necesitan todos alumnos y que, por lo tanto, se podrían y deberían “consumir” diariamente para desarrollar la competencia matemática. Ahí están las situaciones problemáticas y los retos que surgen en la vida cotidiana de cada día; la observación y el análisis de los elementos matemáticos de nuestro contexto (matematización del entorno); la manipulación con materiales diversos, dado que la acción sobre los objetos posibilita que los alumnos puedan elaborar esquemas mentales de conocimiento; o bien el uso de juegos, entendidos como la resolución de situaciones problemáticas. Después aparecen los que deben “tomarse” alternativamente varias veces a la semana, como los recursos literarios con un contenido matemático o los recursos tecnológicos como el ordenador y la calculadora. Por último, en la cúspide, se encuentran los recursos que deberían usarse de forma ocasional, concretamente los libros de texto (Alsina, 2010, p. 13-14).

Con base en estos planteamientos, seguidamente se ofrecen algunas propuestas para cada uno de estos contextos de enseñanza-aprendizaje:

4.1. Contextos de vida cotidiana

El aprendizaje de las matemáticas a partir de contextos reales ha sido uno de los principales focos de la Educación Matemática Realista (Freudenthal, 1991). Desde este enfoque, Reeuwijk (1997) ha señalado las ventajas de trabajar a partir de situaciones de vida

cotidiana: 1) pueden motivar a los alumnos, ayudarles a comprender por qué las matemáticas son útiles y necesarias, aclarar por qué ciertos ámbitos de las matemáticas revisten importancia y también pueden contribuir a que los alumnos entiendan el modo en que se emplean las matemáticas en la sociedad y en la vida cotidiana; 2) pueden favorecer que los propios alumnos aprendan a usar las matemáticas en la sociedad, además de descubrir qué matemáticas son relevantes para su educación y profesión posteriores; 3) pueden incrementar el interés de los alumnos por las matemáticas y la ciencia en general; 4) pueden despertar la creatividad de los alumnos, impulsarlos a utilizar estrategias informales y de sentido común al afrontar, por ejemplo, la resolución de una situación problemática o de un juego; y 5) pueden actuar como mediadores entre la situación concreta y las matemáticas abstractas.

Considerando el conjunto de ventajas expuestas, a continuación se describen algunas investigaciones a partir de variables tanto cualitativas (con elementos no numéricos) como cuantitativas (con elementos numéricos):

Propuestas para realizar investigaciones estadísticas en contextos de vida cotidiana

- *Propuestas:* ¿qué tiempo hace?; ¿cómo has venido hoy a la escuela?; ¿cuál es tu fruta preferida?; ¿qué color te gusta más?; ¿qué vehículos pasan por la rotonda?; etc.
- *Contenidos:* recogida de datos; organización de datos; representación de datos; interpretación de datos.
- *Materiales:* para estas investigaciones estadísticas se requieren principalmente materiales discretos (contables uno a uno) que permitan representar las frecuencias absolutas (es decir, el número de casos de cada valor de la variable). Así, por ejemplo, se pueden utilizar tarjetas con dibujos, piezas de manera, fichas de colores, etiquetas o gomets de distintos colores, etc.
- *Desarrollo de la propuesta:* en primer lugar es aconsejable conocer los intereses de los alumnos para llevar a cabo una determinada investigación estadística. Una



Figura 2. Distintos momentos en los que los alumnos recogen datos de su entorno inmediato y los representan.

vez detectados dichos intereses se plantea alguna de las preguntas propuestas en forma de reto. A continuación se llevan a cabo propiamente las fases para trabajar conocimientos estadísticos en Educación Infantil: en relación a la recogida y organización de datos, los alumnos más pequeños pueden realizarlo de manera guiada (por ejemplo se puede proporcionar una plantilla o cuadro de doble entrada donde van recogiendo y organizando o clasificando los datos de cada valor de la variable, de manera que se facilite el conteo posterior para determinar las frecuencias absolutas), mientras que los alumnos de mayor edad son ya capaces de realizarlo de forma autónoma (pueden pensar la mejor forma de recoger los datos para poder cuantificarlos). Como se ha indicado, para la representación e interpretación posterior es aconsejable que usen sobre todo representaciones concretas (dibujos) o bien pictóricas (palos, cruces, etc.). El papel del profesorado debería consistir en fomentar buenas preguntas que induzcan a la interpretación de los datos representados (identificación de la frecuencia absoluta de cada valor y comparación mediante los comparativos “más ... que”, “menos ... que”, “igual ... que”).

Propuestas para introducir vocabulario vinculado a nociones de probabilidad en contextos de vida cotidiana

- *Propuestas:* situaciones del contexto cotidiano de los alumnos que muestren que la incertidumbre se hace presente.
- *Contenidos:* grados de posibilidad de un determinado suceso; utilización de lenguaje probabilístico (imposible, probable, seguro, etc.).
- *Materiales:* fotografías o dibujos que muestren situaciones inciertas del contexto cotidiano de los alumnos.
- *Desarrollo de la propuesta:* el maestro presenta fotografías o dibujos con diversas situaciones a los alumnos, como por ejemplo la imagen de un árbol en diferentes estaciones del año, y solicita a los niños que las clasifiquen e indiquen si son posibles de ocurrir o no en función del día en que se realiza la propuesta.

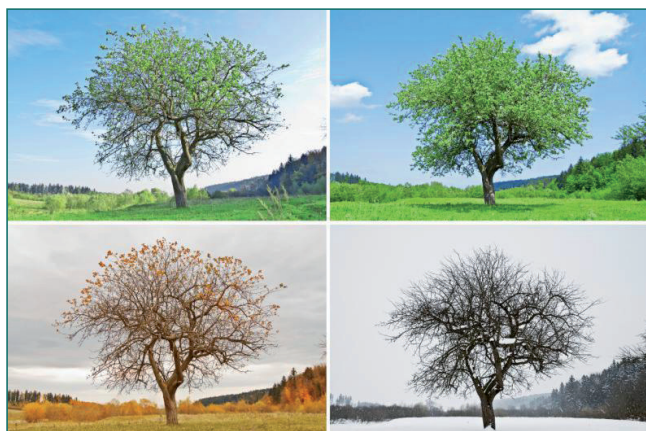


Figura 3. análisis de la posibilidad de ocurrencia de determinados fenómenos.

4.2. Materiales manipulativos

En relación a este contexto, Alsina y Planas (2008) señalan que desde inicios del siglo XX, la manipulación de materiales como herramienta para desarrollar el conocimiento matemático y científico ha sido un campo muy investigado por autores como Montessori, Piaget, Decroly, Freinet, Dienes y Mialaret, entre otros. Para todos ellos, la manipulación es mucho más que una manera divertida de desarrollar aprendizajes. La manipulación de materiales es en ella misma una manera de aprender que debe hacer más eficaz el proceso de aprendizaje, sin hacerlo necesariamente más rápido. Por otra parte, el uso de materiales es una manera de promover la autonomía del aprendiz ya que se limita la participación de los otros, principalmente del adulto, en momentos cruciales del proceso de aprendizaje. En el caso concreto de la estadística y la probabilidad, los materiales manipulativos pueden ser un buen recurso para el análisis de datos y para la realización de experimentos aleatorios.

Propuestas para realizar investigaciones estadísticas con materiales manipulativos

1. *Propuestas:* ¿cuántos coches hay de cada color?; ¿cuántos caramelos hay de cada tipo?; ¿cuántos animales hay de cada color?, etc.
2. *Contenidos:* recogida de datos; organización de datos; representación de datos; interpretación de datos.
3. *Materiales:* para estas investigaciones estadísticas se requieren principalmente materiales que puedan ser contados de uno en uno, como piezas de metal o de plástico de distintos colores (coches, animales), caramelos, etc.
4. *Desarrollo de la propuesta:* como en el contexto anterior, se plantea alguna de las preguntas propuestas en forma de reto. Los alumnos pueden pensar de forma autónoma la mejor forma de organizar los elementos (hacer una clasificación, etc.) y seguidamente se debe fomentar la representación, usando el propio material o signos como cruces, palitos, etc., de manera que visualmente puedan interpretar los datos obtenidos y dar respuesta al reto planteado.

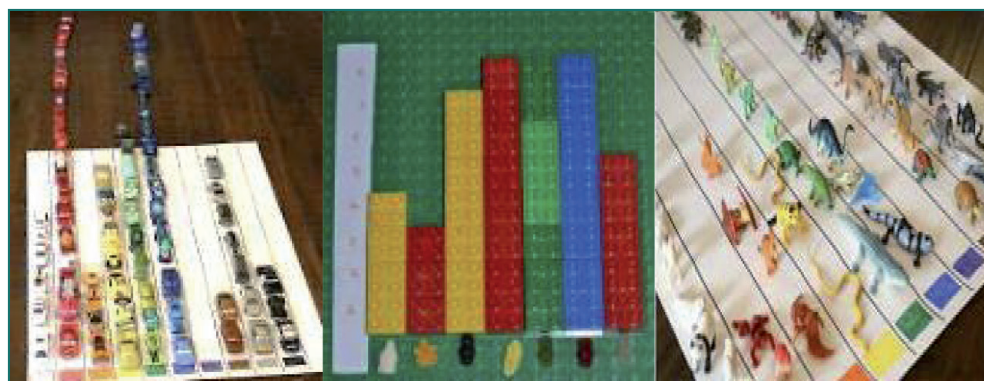


Figura 4. investigaciones estadísticas con materiales manipulativos discretos (contables uno a uno)

Propuestas para introducir vocabulario vinculado a nociones de probabilidad con materiales manipulativos

- *Propuestas:* ¿qué color sale más en la ruleta?; ¿qué bolita tiene más posibilidades de salir?, etc.
- *Contenidos:* grados de posibilidad de un determinado suceso; utilización de lenguaje probabilístico (imposible, probable, seguro, etc.).
- *Materiales:* materiales manipulativos discretos (contables uno a uno), dados, ruletas.
- *Desarrollo de la propuesta:* se presenta material contable como piezas de plástico de distintos colores y tamaños (por ejemplo ositos), bolitas de colores o dados que los alumnos deben manipular y responder a cuestiones del tipo: ¿qué color de osito piensas que va a salir más en la ruleta?, ¿qué bolita tiene más posibilidades de salir?, ¿qué número es imposible que salga si tiras el dado? Así, por medio de la realización de experimentos aleatorios con bolitas, fichas de colores, monedas, ruletas, dados, etc., se va introduciendo gradualmente el lenguaje probabilístico.



Figura 5.
experimentos
estocásticos
con materiales
manipulativos

4.3. Juegos

Dentro del itinerario didáctico descrito en la Pirámide de la Educación Matemática, el juego ocupa también un lugar protagonista. Son muchos los autores del ámbito de la educación matemática en general y de la educación matemática infantil en particular que han aportado argumentos y propuestas para implementar este contexto de aprendizaje en el aula de forma eficaz. En Alsina (2004, p. 14), por ejemplo, se aporta un decálogo del juego en el aula de matemáticas:

1. Es la parte de la vida más real de los niños. Utilizándolo como recurso metodológico, se traslada la realidad de los niños a la escuela y permite hacerles ver la necesidad y la utilidad de aprender matemáticas.
2. Las actividades lúdicas son enormemente motivadoras. Los alumnos se implican mucho y se las toman en serio.
3. Trata distintos tipos de conocimientos, habilidades y actitudes hacia las matemáticas.

4. Los alumnos pueden afrontar contenidos matemáticos nuevos sin miedo al fracaso inicial.
5. Permite aprender a partir del propio error y del error de los demás.
6. Respeta la diversidad del alumnado. Todos quieren jugar, pero lo que resulta más significativo es que todos pueden jugar en función de sus propias capacidades.
7. Permite desarrollar procesos psicológicos básicos necesarios para el aprendizaje matemático, como son la atención y la concentración, la percepción, la memoria, la resolución de problemas y búsqueda de estrategias, etc.
8. Facilita el proceso de socialización de los niños y, a la vez, su propia autonomía personal.
9. El currículum actual recomienda de forma especial tener en cuenta el aspecto lúdico de las matemáticas y el necesario acercamiento a la realidad de los niños.
10. Persigue y consigue en muchas ocasiones el aprendizaje significativo.

Edo (2002), Edo y Deulofeu (2006) y Alsina y Planas (2008), entre otros, han realizado también múltiples aportaciones en relación al juego como recurso para aprender matemáticas. Todas estas aportaciones, con sus matices, coinciden en que el juego lleva a la participación activa y a compartir conocimientos con los demás, aspectos indispensables para la construcción de aprendizajes significativos. La riqueza del juego y sus potencialidades, pues, deben llevar a reflexionar sobre su empleo en el aula de matemáticas, creando experiencias de aprendizaje lúdicas para enriquecer los procesos de pensamiento.

En el caso concreto del uso de juegos para aprender nociones de estadística y probabilidad en Educación Infantil, los juegos de azar son imprescindibles, junto con otros juegos que requieren el recuento de datos, por ejemplo. A continuación se exponen algunas propuestas:

Propuestas para realizar investigaciones estadísticas con juegos

- *Juegos*: juegos de cartas, juegos de tablero (parchís, dominó, etc.), juegos de patio, gincanas, juegos de pelota o de balón, etc.
- *Contenidos*: recogida de datos; organización de datos; representación de datos; interpretación de datos.
- *Materiales*: en función del juego.
- *Desarrollo de la propuesta*: para los alumnos de los primeros niveles podemos organizar juegos al aire libre con pelotas de distintos tipos y, durante la fase de recogida, fomentar un recuento de las pelotas que hay de cada tipo. Una vez en clase, se puede representar mediante dibujos o fotografías las pelotas que hay de cada tipo, o de cada color, etc. Para los alumnos de los últimos niveles de Educación Infantil, se puede plantear un pequeño campeonato a partir de un juego determinado (por ejemplo, el parchís): se reparte un tablero, fichas y dados para cada cuatro equipos (formados por dos jugadores cada uno); en la primera fase del campeonato cada equipo obtiene una puntuación que va de los 4 puntos (equipo ganador) hasta 1 punto (equipo que queda en último lugar); en la segunda fase juegan

entre ellos los equipos que han quedado en primer, segundo, tercer y cuarto lugar, y obtienen una nueva puntuación (el campeonato puede tener más fases siguiendo el mismo procedimiento y en todas las fases se anotan las puntuaciones de cada equipo en una tabla que hay en la pizarra por ejemplo). Una vez finalizado el campeonato, se hace el recuento de los resultados de cada equipo, se representan mediante gráficos de barras simples y finalmente se fomenta la interpretación entre todos para ver, por ejemplo, el equipo que ha ganado más veces, etc.



Figura 6. Algunos juegos para realizar recuentos.

Propuestas para introducir vocabulario vinculado a nociones de probabilidad con juegos

- *Propuestas*: juegos con dados, como por ejemplo el parchís, el juego del ganso, etc.; y los que se juegan a través de apuestas, como el *Craps*, también denominado *Seven Eleven*, con dos dados que tienen que entrar dentro de un límites marcados de la mesa; juegos de tablero como por ejemplo el tres en línea, cuya finalidad es conseguir poner tres piezas sobre el tablero (de 3 por 3 posiciones) de forma que estén en línea recta (horizontal, vertical o diagonal.); el bingo, que consiste en un bombo con un número determinado de bolas numeradas en su interior (los jugadores juegan con cartones donde hay números aleatorios escritos, dentro del rango correspondiente, y un locutor va sacando bolas del bombo y cantando los números en voz alta. Si un jugador tiene el número en su cartón lo tacha, y el juego continúa así hasta que alguien consigue marcar o bien una línea o bien todos los números de su cartón. Entonces el jugador tiene que decir con voz alta: “!BINGO!” y finaliza el juego); juegos de *memory*, en los que se tienen que hacer parejas destacando y tapando tarjetas, etc.
- *Contenidos*: grados de posibilidad de un determinado suceso; utilización de lenguaje probabilístico (imposible, probable, seguro, etc.).

- *Materiales:* dados, juegos de tablero, tarjetas para jugar al bingo, tarjetas para jugar al *memory*, etc.
- *Desarrollo de la propuesta:* en primer lugar se presentan las normas del juego, y en función de dichas normas, se propone a los alumnos que se organicen por parejas, en pequeño grupo, etc. Durante el juego, se fomenta el uso de lenguaje probabilístico a través del planteamiento de buenas preguntas y, una vez finalizado el juego, se establece un diálogo para que los alumnos comuniquen las estrategias que han utilizado para jugar, a la vez que se incentiva que describan las situaciones de incertidumbre implícitas en los juegos de azar.



Figura 7. Algunos juegos de azar.

4.4. Recursos literarios (cuentos, canciones, etc.)

Los cuentos y las canciones han generado también abundante literatura en el ámbito de la educación matemática infantil. Saá (2002), por ejemplo, presentó una gran variedad de estrategias y recursos para trabajar nociones matemáticas en el libro *Las matemáticas de los cuentos y las canciones*. En Alsina (2006) hay también una abundante recopilación de cuentos y canciones para trabajar contenidos matemáticos y, más recientemente, Marín (2013) ha hecho una magnífica recopilación de cuentos que se pueden trabajar desde el punto de vista de la educación matemática en el libro *Cuentos para aprender y enseñar matemáticas*. Algunas propuestas concretas para trabajar conocimientos de estadística y probabilidad a partir de cuentos son las siguientes:

Propuestas para realizar investigaciones estadísticas con cuentos

- *Propuestas:* “Ricitos de oro y los tres ositos”, “Blancanieves y los 7 enanitos”, “El lobo y las siete cabritas”; *etc.*
- *Contenidos:* recogida de datos; organización de datos; representación de datos; interpretación de datos.
- *Materiales:* murales o láminas; tarjetas u otros materiales para clasificar y hacer seriaciones, ordenaciones, *etc.*
- *Desarrollo de la propuesta:* Una vez elegido el cuento concreto, se presenta a los alumnos con el soporte de materiales como murales o láminas si se considera preciso. Una vez se ha explicado el cuento se puede dramatizar. Seguidamente, a través de la interacción, la negociación y el diálogo se van extrayendo todos los contenidos matemáticos que aparecen. Para finalizar pueden proponerse diversas tareas asociadas a conocimientos matemáticos a partir de materiales para hacer clasificaciones, seriaciones y ordenaciones (por ejemplo, según la cantidad de elementos como se aprecia en las imágenes). Todo ello, con el propósito de que organicen datos y los representen.



Figura 8.
organización y
representación
de datos a partir
de personajes de
cuentos

Propuestas para introducir vocabulario vinculado a nociones de probabilidad con cuentos y canciones

- *Propuestas:* “El lobo y las siete cabritas”; “Caperucita Roja”; “Los tres cerditos”, *etc.*
- *Contenidos:* grados de posibilidad de un determinado suceso; utilización de lenguaje probabilístico (imposible, probable, seguro, *etc.*).

- *Materiales:* grandes murales o láminas de menor tamaño que ilustren situaciones de incerteza; secuencias temporales, etc.
- *Desarrollo de la propuesta:* una vez elegido el cuento, se presenta a los alumnos con el soporte de materiales como grandes murales o láminas que reproduzcan diversas secuencias. A diferencia de la gestión propuesta para trabajar conocimientos de estadística y probabilidad, en este caso es conveniente focalizar la atención en la incerteza y el azar. Así, por ejemplo, se puede explicar un cuento mediante secuencias, y una vez presentada la situación inicial y el desarrollo, pedir a los alumnos que predigan lo que ocurrirá después (tal como se aprecia en la primera imagen, a partir del cuento de “El lobo y las siete cabritas”, se plantea a los alumnos que hay 7 cabritas y desaparecen 3, y a continuación se puede plantear que digan la cantidad segura de cabritas que quedan u otras cantidades de cabritas que sean imposibles y razonar porqué). Otra gestión posible es presentar un mural o láminas que ilustren el cuento o la canción y plantear preguntas acerca de la posibilidad de ocurrencia de los eventos (por ejemplo, a partir del cuento “Los tres cerditos” se puede plantear en qué casa es seguro que vive cada cerdito y a partir del cuento “Caperucita Roja” preguntar qué cosas hay seguro en el cesto que Caperucita Roja entrega a su abuela). Finalmente, otra posibilidad es empezar a plantear situaciones en las que entra en juego la combinatoria junto con el azar (en la segunda imagen, los alumnos lanzan las ruletas y aparece una combinación para vestirse representando un determinado personaje del cuento de la Caperucita Roja). En todos los casos, debe procurarse que aparezca vocabulario probabilístico vinculado al significado subjetivo de la probabilidad (imposible, probable, seguro, etc.)

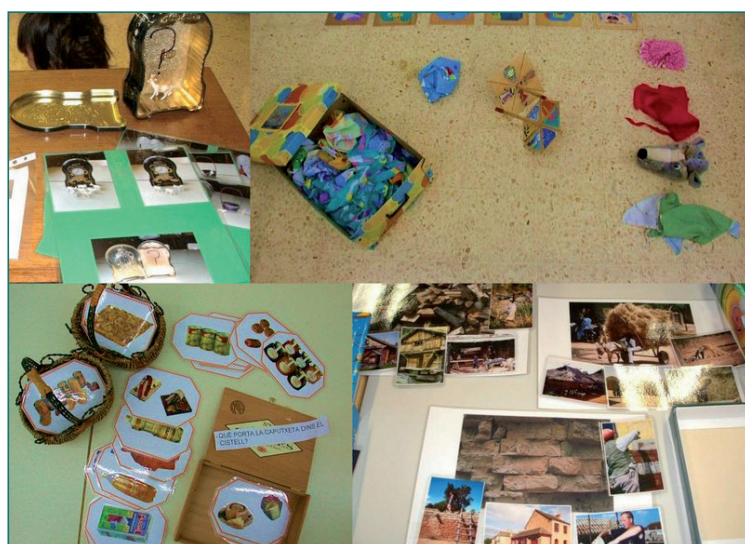


Figura 9. situaciones de incertidumbre a partir de cuentos.

4.5. Recursos digitales

En los últimos niveles del itinerario propuesto aparecen los contextos simulados o virtuales para fomentar el aprendizaje de las matemáticas en Educación Infantil. Ello, sin embargo, no significa que no sean relevantes puesto que tienen un papel destacado, por ejemplo, tanto para promover la comprensión de ideas matemáticas a través de *apps* como para incentivar el pensamiento computacional y, de forma más concreta, la habilidad de pensar lógicamente a través de la programación de juegos virtuales sencillos, la elaboración de una historia interactiva, la programación del comportamiento de un robot, etc. (Brennan y Resnick, 2012). Todo ello, por supuesto, considerando las posibilidades de los alumnos de las primeras edades. Así, pues, la posición de este contexto en los últimos niveles del diagrama piramidal planteado hace referencia exclusivamente a su frecuencia de uso, puesto que en este artículo se asume que los niños de las primeras edades necesitan aprender matemáticas principalmente a través de la exploración del entorno, la manipulación y experimentación de materiales manipulativos y el juego (Alsina, 2006, 2010). Sin embargo, ello no significa que no puedan usarse otros contextos para enseñar matemáticas que aportan otros tipos de beneficios. Desde este enfoque, presentamos algunos recursos posibles para trabajar contenidos de estadística y probabilidad a través de recursos digitales en las primeras edades:

Propuestas para realizar investigaciones estadísticas con recursos digitales

- *Propuestas*: existen varios recursos interactivos de acceso libre que plantean investigaciones estadísticas adecuadas a los alumnos de las primeras edades o bien que ofrecen soportes para realizar representaciones a través de gráficos de barras simples, etc. Entre ellos, por ejemplo: la Red Educativa Digital Descartes (Proyecto Canals), que ofrece recursos aptos para ordenadores, tabletas y *smartphones* gracias a la herramienta DescartesJS; la Biblioteca Nacional de Manipuladores Virtuales de la *National Science Foundation*, que ofrece recursos para todos los bloques de contenido y edades (requieren el programa Java); la zonaClic; etc.
- *Contenidos*: recogida de datos; organización de datos; representación de datos; interpretación de datos.
- *Materiales*: ordenadores, tabletas y/o *smartphones*. Según el recurso digital al que se accede, se requiere la instalación previa de determinados programas.
- *Desarrollo de la propuesta*: una vez seleccionado el recurso digital, los alumnos se organizan en parejas o bien trabajan individualmente en el entorno virtual. Dado que la mayoría de los alumnos de Educación Infantil todavía no tienen adquirida la lectura comprensiva, es importante explicar claramente las tareas que se proponen para que puedan comprender la tarea a realizar y llevarla a cabo. Después de un tiempo determinado en el que los alumnos realizan la tarea de forma autónoma, se puede proponer un diálogo para que expliquen qué han hecho, cómo lo han hecho, qué datos han obtenido, etc. Asimismo, se puede proponer que interpreten los resultados mediante preguntas que induzcan a la identificación y comparación de las frecuencias absolutas de los diferentes valores, etc.



Figura 10. Algunos recursos para la recogida y organización de datos de la Red Educativa Digital Descartes.

Propuestas para introducir vocabulario vinculado a nociones de probabilidad con recursos tecnológicos

- *Propuestas*: los mismos recursos digitales que para realizar investigaciones estadísticas.
- *Contenidos*: grados de posibilidad de un determinado suceso; utilización de lenguaje probabilístico (imposible, probable, seguro, etc.).
- *Materiales*: ordenadores, tabletas y/o *smartphones*. Según el recurso digital al que se accede, se requiere la instalación previa de determinados programas.
- *Desarrollo de la propuesta*: se puede llevar a cabo la misma gestión que para realizar investigaciones estadísticas mediante recursos digitales, aunque en este caso se debe enfatizar el uso de lenguaje probabilístico elemental.

4.6. Materiales didácticos impresos (cuadernos de actividades)

Olmos y Alsina (2010) señalan que este contexto de enseñanza-aprendizaje continúa ejerciendo un control considerable en el diseño y el desarrollo de la práctica docente o, dicho de otra manera, en el trabajo diario de muchos profesionales de Educación Infantil. Estos autores se plantean *cómo, cuándo, por qué y para qué* deberían usarse las fichas, puesto que una planificación pensada y estructurada en función de las necesidades del grupo clase, compartida con los alumnos que lo configuran y considerando el contexto donde se encuentran, puede contribuir mucho más significativamente a su desarrollo global y personal y, consecuentemente, a la adquisición de nuevos aprendizajes. Después de indagar alrededor de estas cuestiones, estos autores concluyen que los cuadernos de actividades deben entenderse como *un recurso* más para enseñar matemáticas que tiene sólo sentido al final del itinerario didáctico, cuando los niños han tenido

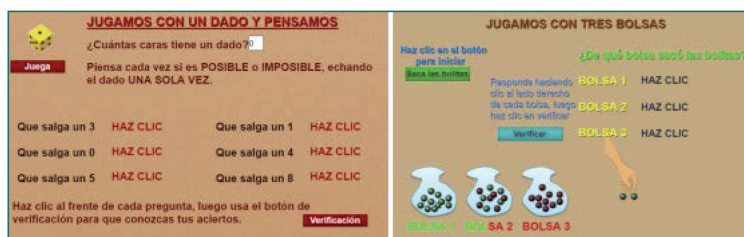


Figura 11. Experimentos estocásticos con dados y bolitas de colores de la Red Educativa Digital Descartes.

ESTADÍSTICA

¿Cuántos payasos hay con la nariz de un mismo color?

Márcalo en la tabla. Después, señala la cantidad.

con la nariz						1	2	3	4	5
con la nariz						1	2	3	4	5
con la nariz						1	2	3	4	5

¿Te ha gustado jugar con personajes del circo para aprender matemáticas?

12 ESTADÍSTICA Y PROBABILIDAD

5 ESTADÍSTICA

Figura 12. Propuestas de fichas para realizar investigaciones estadísticas.

previamente la oportunidad de aprender ideas matemáticas a través de la exploración del entorno, la manipulación y experimentación a través de materiales, juegos, etc. Enfatizan, además, que los cuadernos de actividades nunca deberían considerarse *el recurso* para llevar a cabo el proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas en las primeras edades, en el sentido que no deberían ser el eje que organice la práctica docente. Desde este prisma, presentamos brevemente algunas propuestas para trabajar conocimientos de estadística y de probabilidad en Educación Infantil a partir de cuadernos de actividades.

Propuestas para realizar investigaciones estadísticas con cuadernos de actividades

- *Propuestas:* Proyecto “A Volar. Matemáticas a partir de contextos de la vida cotidiana” (Alsina, 2014), Proyecto “Matecracks” (Alsina, 2015) y Proyecto “Vía Mates (Alsina, 2017).
- *Contenidos:* recogida de datos; organización de datos; representación de datos; interpretación de datos.
- *Materiales:* cuaderno, lápiz y goma.
- *Desarrollo de la propuesta:* se propone a los alumnos que realicen individualmente la tarea que plantea el cuaderno. Como en el caso de los recursos tecnológicos, dado que la mayoría de los alumnos todavía no tienen adquirida en muchos casos la lectura comprensiva, es importante explicar claramente las consignas dadas para que puedan comprender la tarea a realizar y llevarla a cabo. Después de un tiempo determinado en el que los alumnos realizan la recogida, organización y/o representación de datos que se propone en la ficha, se puede proponer un diálogo posterior para que expliquen qué han hecho, cómo lo han hecho, etc., haciendo énfasis en la interpretación de los datos (identificación y comparación de las frecuencias absolutas de cada valor de la variable, etc.).

Propuestas para introducir vocabulario vinculado a nociones de probabilidad con cuadernos de actividades

- *Propuestas:* Proyecto “Matecracks” (Alsina, 2015).
- *Contenidos:* grados de posibilidad de un determinado suceso; utilización de lenguaje probabilístico (imposible, probable, seguro, etc.).
- *Materiales:* cuaderno, lápiz y goma.
- *Desarrollo de la propuesta:* se puede llevar a cabo la misma gestión que para realizar investigaciones estadísticas, aunque en este caso se debe enfatizar el uso de lenguaje probabilístico elemental.

En el fondo del mar hay peces de estos colores:

¿Crees que el pescador podrá pescar estos peces? Márcalo en la tabla.

	IMPOSIBLE	PROBABLE

¿Te ha gustado aprender matemáticas con elementos de playa y del fondo del mar?

POCO MUCHO

32

Figura 13. Propuesta de ficha para la adquisición de lenguaje probabilístico elemental.

CONSIDERACIONES FINALES

En este artículo se ha argumentado, en primer lugar, la importancia de trabajar de forma sistemática conocimientos de estadística y probabilidad en Educación Infantil. A pesar de que en muchos casos el profesorado de esta etapa educativa ha tenido una formación deficiente en este ámbito (Alsina y Vásquez, 2016), los cambios sociales de las últimas décadas requieren conocimientos que permitan a los ciudadanos responder preguntas cuyas respuestas no son inmediatamente obvias, a la vez que les faciliten la toma de decisiones en situaciones en las que la incertidumbre es relevante. Desde este prisma, es necesario ofrecer a los alumnos una educación de alta calidad que se ajuste a estas nuevas exigencias.

Para asegurar que todos los alumnos reciben una educación matemática de calidad, “todas las partes interesadas tienen que cooperar para tener clases de matemáticas donde los alumnos, de variados conocimientos y capacidades diferentes, trabajen con profesores expertos, aprendiendo, con comprensión, nociones matemáticas importantes, en ambientes que, desde la igualdad, resulten estimulantes, presten apoyo y estén tecnológicamente equipados para el siglo XXI” (NCTM, 2003, p. 4). Esta constatación implica la cooperación de, por lo menos, tres agentes en el ámbito concreto de la estadística y la probabilidad en Educación Infantil: 1) la aportación de nuevos conocimientos disciplinares y didácticos procedentes de la investigación y la innovación en educación matemática infantil; 2) la integración de estos conocimientos en la formación inicial y permanente del profesorado de infantil, a través de planes de estudios que incorporen la didáctica de la estadística y la probabilidad en esta etapa educativa y de planes de formación permanente que ofrezcan seguridad al profesorado para enseñar los contenidos que se han incorporado de forma más reciente en el currículo; 3) la enseñanza sistemática y

eficaz de estos conocimientos por parte del profesorado de Educación Infantil en ejercicio, fruto de su propio desarrollo profesional.

Estamos en el buen camino, por varias razones:

En primer lugar, porque desde hace ya muchos años diversos autores del ámbito de la investigación e innovación en educación matemática no han ahorrado esfuerzos para aportar conocimientos disciplinares y didácticos sobre estadística y la probabilidad (Godino, Batanero y Cañizares, 1987; Batanero, 2006; Batanero, 2013; Batanero, Díaz, Contreras y Roa, 2013; Godino, Batanero, Rivas y Arteaga, 2013; entre otros). Estos conocimientos, que en algunos casos se refieren a otras etapas educativas, son un punto de referencia imprescindible.

En segundo lugar, porque la estadística y la probabilidad se están incorporando con fuerza en los currículos de matemáticas desde los tres años (NCTM, 2003), y como consecuencia se han realizado algunas propuestas de organización de los contenidos (Alsina, 2011, 2013). En estas propuestas, que sugieren expectativas por edades (no prescriptivas) se incide principalmente en la identificación, organización, representación y posterior interpretación de datos cercanos a la propia experiencia, junto con el uso comprensivo de lenguaje probabilístico elemental a partir de sucesos inciertos que forman parte del entorno de los alumnos.

Y en tercer lugar, porque el profesorado de Educación Infantil va implementando experiencias interesantes en el aula que tienen por objeto, principalmente, trabajar conocimientos vinculados a la estadística y/o la probabilidad.

Esperamos que las propuestas que se han aportado contribuyan a aumentar la presencia de la estadística y la probabilidad en las aulas de Educación Infantil y, a la vez, sean el punto de partida para el diseño de nuevas actividades que fomenten la alfabetización estadística y probabilística de los alumnos a partir de los 3 años.

REFERENCIAS

- Alsina, Á. (2004). *Desarrollo de competencias matemáticas con recursos lúdico-manipulativos para niños y niñas de 6 a 12 años*. Madrid: Narcea S.A. de Ediciones.
- Alsina, Á. (2006). *Como desarrollar el pensamiento matemático de 0 a 6 años*. Barcelona: Editorial Octaedro-Eumo.
- Alsina, Á. (2010). La “pirámide de la educación matemática”, una herramienta para ayudar a desarrollar la competencia matemática. *Aula de Innovación Educativa*, 189, 12-16.
- Alsina, Á. (2011). *Com desenvolupar el pensament matemàtic. Els continguts matemàtics: propostes didàctiques per a l'Educació Infantil*. Vic: Eumo Editorial
- Alsina, Á. (2013). La estadística y la probabilidad en Educación Infantil: conocimientos disciplinares, didácticos y experienciales. *Revista de Didàcticas Específiques*, 7, 4-22.
- Alsina, A. (2014). *A Volar. Matemáticas a partir de contextos de la vida cotidiana*. Barcelona: Editorial Casals.
- Alsina, Á. (2015). *Matecracks*. Barcelona: Editorial Combel.
- Alsina, Á. (2017). Trotacaminos, “Vía Mates”. Barcelona: Editorial Casals.
- Alsina, Á. y Planas, N. (2008). *Matemática inclusiva. Propuestas para una educación matemática accesible*. Madrid: Narcea S.A. de Ediciones.

- Alsina, Á. y Vásquez, C. (2016). La probabilidad en Educación Primaria. De lo que debería enseñarse a lo que se enseña. *Uno, Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 71, 46-52.
- Baroody, A.J. (1987). *Children's Mathematical Thinking. A developmental framework for preschool, primary, and special education teachers*. Nueva York: Teachers College Press.
- Batanero, C. (2006). Razonamiento probabilístico en la vida cotidiana: Un desafío educativo. En P. Flores y J. Lupiáñez (Eds.), *Investigación en el aula de matemáticas*. Estadística y Azar. Granada: Sociedad de Educación Matemática Thales. CD ROM.
- Batanero, C. (2013). La comprensión de la probabilidad en los niños. ¿Qué podemos aprender de la investigación? En J. A. Fernandes, P. F. Correia, M. H. Martinho y F. Viseu, (Eds.) *Atas do III Encontro de Probabilidades e Estatística na Escola*. Braga: Centro de Investigação em Educação. Universidade Do Minho.
- Batanero, C., Díaz, C., Contreras, J. M. y Roa, R. (2013). El sentido estadístico y su desarrollo. *Números*, 83, 7-18
- Brennan, K. y Resnick, M. (2012). New frameworks for studying and assessing the development of computational thinking. *Proceedings of the 2012 Annual Meeting of the American Educational Research Association (AERA 2012)*.
- Dalmau, F. y Alsina, Á. (2015). Matemàtiques i entorn a l'educació infantil. *Noubiaix*, 36, 66-79.
- Edo, M. (2002). *Jocs, interacció i construcció de coneixements matemàtics*. Tesis doctoral. Bellaterra: Universitat Autònoma de Barcelona.
- Edo, M. y Deulofeu, J. (2006). Investigación sobre juegos, interacción y construcción de conocimientos matemáticos. *Enseñanza de las Ciencias*, 24(2), 257-268.
- Everitt, B. S. (1999). *Chance rules: An informal guide to probability, risk, and statistics*. Nueva York: Copemicus/Springer-Verlag.
- Freudenthal, H. (1991). *Revisiting mathematics education*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Gal, I. (2002). Adults' Statistical literacy: Meanings, components, responsibilities. *International Statistical Review*, 70(1), 1-25.
- Gal, I. (2005). Towards 'probability literacy' for all citizens. En G. Jones (Ed.), *Exploring probability in school: Challenges for teaching and learning* (pp. 43-71). Nueva York: Springer.
- Gal, I. (2012). Developing probability literacy: needs and pressures stemming from frameworks of adult competencies and mathematics curricula. En S.J. Cho (Ed.), *Proceedings of the 12th International Congress on Mathematical Education* (pp. 1-7). Recuperado de: <http://www.icme12.org/upload/upfile2/tsg/2088.pdf>.
- Godino, J., Batanero, C. y Cañizares, M.J. (1987). *Azar y probabilidad. Fundamentos teóricos y propuestas curriculares*. Madrid: Editorial Síntesis.
- Godino, J.D., Batanero, C., Rivas, H. y Arteaga, P. (2013). Componentes e indicadores de idoneidad de programas de formación de profesores en didáctica de las matemáticas. *Revemat*, 8(1), 46-74
- Goñi, J. M^a. (2008). *3²-2 ideas clave. El desarrollo de la competencia matemática*. Barcelona: Editorial Graó.
- Marín, M. (2013). *Cuentos para aprender y enseñar matemáticas*. Madrid: Narcea, S.A. de editores.
- NCTM (2003). *Principios y estándares para la educación matemática*. Sevilla: Thales.
- Olmos, G. y Alsina, Á. (2010). El uso de cuadernos de actividades para aprender matemáticas en educación infantil. *Aula de Infantil*, 53, 38-41.

- ORDEN ECI/3960/2007, de 19 de diciembre, por la que se establece el currículo y se regula la ordenación de la educación infantil. *BOE*, 5, 1016-1036.
- Reeuwijk, M.V. (1997). Las matemáticas en la vida cotidiana y la vida cotidiana en las matemáticas. *UNO, Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 12, 9-16.
- Rychen, D.S. y Salganik, L.H. (2004). *Definir y seleccionar las competencias fundamentales para la vida*. México: Fondo de Cultura Económica.
- Saá, M.D. (2002). *Las matemáticas de los cuentos y las canciones*. Madrid: Editorial Eos.
- UNESCO (1998). Declaración mundial sobre la educación superior en el siglo XXI: visión y acción. Recuperado de: http://www.unesco.org/education/educprog/wche/declaration_spa.htm.

La influencia del uso del tiempo en el rendimiento académico en Matemáticas

María Hurtado de la Peña

Colegio San José de Salamanca.

Departamento de Matemáticas. mariahurtadope@usal.es

Carmen López Esteban

Universidad de Salamanca / Departamento de Didáctica de la Matemática y de las Ciencias Experimentales. lopezc@usal.es

Resumen: *El tiempo del que disponen los alumnos puede ser utilizado de muy diversas maneras, las cuales pueden influir positiva o negativamente en el rendimiento académico del alumno (Díaz-Mora, et ál., 2016). El objeto de la investigación es analizar el rendimiento académico de los alumnos de Secundaria en la asignatura de Matemáticas en función de la cantidad de tiempo que dedican a actividades académicas y no académicas y la calidad del mismo. El estudio se ha realizado con una muestra de estudiantes de Educación Secundaria Obligatoria, y las fuentes utilizadas han sido un diario en forma de tabla sobre el uso del tiempo para analizar la cantidad, un cuestionario sobre datos sociológicos y habilidades de estudio para analizar la calidad, y el expediente académico del alumno como materialización del rendimiento. Tras analizar los datos encontramos que de la concentración y del trabajo realizado en clase depende en gran medida el éxito académico. Todas las actividades académicas estudiadas tienen una correlación negativa, aunque no significativa, sobre las notas de los estudiantes, probablemente debido a la falta de calidad del tiempo empleado en estas actividades. Respecto a las actividades no académicas analizadas, aportamos cuáles de ellas tuvieron un impacto positivo sobre el rendimiento académico (tareas vitales) y cuáles mostraron correlaciones negativas significativas (actividades deportivas). Se concluye que la relación entre el uso del tiempo de los estudiantes y sus resultados académicos es compleja, y depende de factores de calidad de ese tiempo. El análisis de la influencia de estos factores en el rendimiento en la asignatura de Matemáticas puede convertirse en una guía para los tutores como orientación a los alumnos hacia un uso eficiente de su tiempo.*

Palabras clave: *uso del tiempo, estudiantes de secundaria, Matemáticas, rendimiento académico, actividades académicas y no académicas.*

The impact of time use on the academic performance in mathematics

Abstract: *The time that students have can be used in many different ways, which can positively or negatively influence on student achievement (Diaz-Mora, et ál., 2016). The aim of the research is to analyze the academic performance of Secondary School students in mathematics, depending on the amount of time they spend on academic and nonacademic activities and the quality of it. The study was conducted with a sample Secondary School students, and the sources used have been: a scheduled diary about the use of time (to analyze the quantity), a questionnaire on sociological data and study skills (to analyze the quality), and the student's academic transcript as proof of performance. After analyzing the data, we found that academic success depends on concentration and work done in class. All academic activities have a negative correlation, although non-significant, on students marks, probably due to the lack of quality of this time management. Regarding nonacademic activities, we provide which of them had a positive impact on student achievement (vital tasks) and which had significant negative correlation (sports). It is concluded that the relation between the student's use of time and their academic performance is complex and depends on quality factors of that time. The analysis of the impact of these factors on the performance in mathematics can become a reference for tutors to guide students towards efficient use of their time.*

Key words: *time use, secondary school students, mathematics, academic achievement, academic and non-academic activities.*

INTRODUCCIÓN

El uso positivo que den las personas a su tiempo, puede jugar un papel importante en el desarrollo personal, pero por otro lado puede ser un factor de riesgo si existen condiciones negativas en las actividades.

Desde la perspectiva de los estudiantes, buscan, o deberían buscar, la mejor forma de organizar su tiempo para obtener la mayor satisfacción presente (casi siempre relacionada con el tiempo dedicado a actividades de ocio), y la satisfacción futura (relacionada con encontrar un trabajo, para lo cual el rendimiento académico es importante) (Dolton, Marcenaro y Navarro, 2003).

Esta organización del tiempo es especialmente relevante en los estudiantes de Secundaria, ya que de esta mejor o peor organización de su tiempo depende en la mayoría de los casos el, a menudo elevado, fracaso escolar. Las malas calificaciones escolares, se presentan frecuentemente en la asignatura de Matemáticas, por lo que en este estudio se analizará la influencia de la organización del tiempo en el rendimiento en esta asignatura.

No sólo es importante la cantidad de tiempo invertido en unas o otras actividades sino que es fundamental la calidad de ese tiempo. Por ello se estudiarán cómo influyen variables de calidad del tiempo empleado, como las habilidades para el estudio.

En resumen, el objetivo general de la investigación es estudiar el efecto que tiene el tiempo empleado en diferentes actividades académicas y no académicas en el rendimiento

de los estudiantes de Secundaria en la asignaturas de Matemáticas, y concluir cuales de estas actividades contribuyen a mejorar sus calificaciones en esta asignatura.

MARCO TEÓRICO

La relación entre el rendimiento académico de los estudiantes y la organización de su tiempo se ha estudiado extensamente a niveles educativos universitarios, aunque estas investigaciones no son concluyentes. Creemos necesario realizar esta investigación a estudiantes de Educación Secundaria Obligatoria para comprobar si los resultados a niveles educativos no universitarios difieren de los resultados de estas investigaciones previas. Estos estudios no son concluyentes ya que se han obtenido resultados muy diferentes. Por un lado hay autores que han encontrado una correlación positiva entre el tiempo dedicado al estudio y el rendimiento académico (Lahmers y Zulauf, 2000; Stinebrickner y Stinebrickner, 2004), por otro algunos estudios concluyen que tienen una correlación negativa (Didia y Hasnat, 1998; Kember, Jamieson, Pomfret y Wong, 1995) y otros establecen una correlación no significativa (Nonis y Hudson, 2006).

La diversidad de estas conclusiones puede deberse al número y tipo de actividades académicas estudiadas, lo que hace que sea fundamental llevar a cabo una adecuada medida del tiempo dedicado a cada una de ellas (Dolton et ál., 2003). También puede ser debido al método empleado para obtener información sobre el uso del tiempo de los estudiantes, y a la calidad del tiempo dedicado a actividades académicas.

En cuanto al método, la mayoría de estudios emplearon una encuesta para obtener información de los estudiantes (Dolton et ál., 2003; Kamp, Dolmans, van Berkel y Schmidt, 2012). En esta encuesta les preguntaban cuánto tiempo dedicaban a una actividad durante un periodo de tiempo (una semana por lo general) o dividiendo el día en tres partes (mañana, tarde, noche). En el trabajo de Dolton et ál. (2003), aunque se detecta la dificultad para los estudiantes para recordar con exactitud la distribución del uso de su tiempo durante el día, se propone un cuestionario con apoyo en el trabajo de Mulligan, Schneider y Wolfe (2000), los cuales sugieren que en los estudios sobre el uso del tiempo a menudo la participación en encuestas u otros métodos de obtención de datos interfiere demasiado en la vida de los sujetos y por lo tanto en el uso de su tiempo. El problema de emplear una encuesta es que se informa sobre el uso del tiempo retrospectivamente, lo cual es poco adecuado para actividad esporádicas y de poca duración en el tiempo (Sonnenberg, Riediger, Wrzus y Wagner. 2012). Estos autores sostienen que las encuestas son válidas para actividades de larga duración y estructuradas, como por ejemplo ir a trabajar. En nuestro caso el equivalente sería ir a clase al colegio. Sin embargo en actividades de corta duración, o menos frecuentes, especialmente el tiempo libre, obtener información sobre el tiempo dedicado a ellas mediante una encuesta, es menos riguroso, por el hecho de hablar del tiempo dedicado a ellas de forma retrospectiva. Algunos estudios afirman que este hecho se trata de una limitación (Nonis y Hudson, 2010). Por todo ello otros autores prefieren utilizar un diario para registrar las actividades de los estudiantes durante un periodo determinado (Kember et ál., 1995; Krohn y O'Connor, 2005; Lahmers y Zulauf, 2000; Plat et al., 2005, Díaz-Mora et. al., 2016). En conclusión, no

está claro cuál es el mejor método para medir el tiempo empleado en realizar actividades esporádicas.

En cuanto a la calidad, algunos estudios recientes indican que la relación entre tiempo empleado y resultados académicos depende no sólo de la cantidad de tiempo dedicada a actividades académicas, sino también de la calidad de ese tiempo, la cual incrementa la efectividad del mismo. Michaels y Miethe (1989) introdujeron en su trabajo medidas de cantidad y calidad de tiempo de estudio para explicar las calificaciones de los estudiantes. Nonis y Hudson (2010) introdujeron tres indicadores de buenas habilidades de estudio como variables cualitativas (capacidad de concentrarse, acceso a buenos apuntes de clase, trabajo continuo y programado).

Además varias investigaciones incorporaron la medida del tiempo dedicado a actividades no académicas. Ackerman y Gross (2003) concluyeron que los estudiantes con menos tiempo libre obtuvieron mejores resultados académicos que aquellos con más tiempo libre. Sin embargo Nonis y Hudson (2006) encontraron que el tiempo dedicado a trabajar no influía directamente sobre el rendimiento académico. Brint y Cantwell (2010) realizaron una investigación con estudiantes universitarios sobre la influencia del uso de su tiempo en los resultados académicos en la que concluyen que el tiempo de estudio está fuertemente conectado con el aprovechamiento académico y con altas calificaciones. El uso del tiempo en actividades que “activan” a los estudiantes, como practicar deporte o voluntariado, están relacionadas con altos niveles de aprovechamiento académico, pero no directamente con buenas calificaciones. Sin embargo el tiempo dedicado a actividades “pasivas” se relaciona negativamente con la diligencia académica.

MÉTODO

Los objetivos principales de esta investigación son los siguientes:

- Estudiar el efecto que tiene el tiempo empleado en diferentes actividades académicas y no académicas en el rendimiento de los estudiantes de Secundaria en la asignatura de Matemáticas.
- Estudiar cómo influyen variables de calidad del tiempo empleado, como las habilidades para el estudio (acceso a buenos apuntes, capacidad para organizar los horarios y capacidad para concentrarse), y variables de control (sexo, si se es repetidor o no y las notas finales en la asignatura de Matemáticas en el curso anterior).
- Concluir la influencia de todos los factores anteriores en el rendimiento, y determinar qué tipo de actividades contribuyen a mejorar sus calificaciones en esta asignatura.

MUESTRA

Los participantes fueron 80 alumnos de los 115 estudiantes matriculados en los cuatro cursos de Educación Secundaria Obligatoria en el Colegio San José de Salamanca.

Se han excluido de la investigación los alumnos de integración, por las dificultades que podrían presentar a la hora de completar los diarios de tiempo, incluyendo en el trabajo a los alumnos asistentes a las clases ordinarias de Matemáticas.

El Colegio San José se encuentra ubicado al Norte de la ciudad de Salamanca y se trata de un Centro Privado Concertado. La procedencia de los alumnos es muy heterogénea. En el Centro concurren alumnos de barrios cercanos con un nivel sociocultural medio-bajo, alumnos de pueblos próximos, por la situación del colegio en la carretera de entrada a Salamanca desde varias de estas áreas, junto con otros de barrios residenciales y urbanizaciones con nivel medio-alto.

INSTRUMENTOS

Se han empleado tres fuentes de datos: un cuestionario, las calificaciones de los alumnos (incluidas como la primera parte del cuestionario) y un diario sobre el uso del tiempo.

El cuestionario se empleó para obtener datos sobre las características sociodemográficas de los estudiantes (edad, sexo, curso), calificaciones finales en la asignatura de Matemáticas en el curso anterior, rendimiento académico (cuantificado por la nota media en la asignatura de Matemáticas en el curso actual), y habilidades para el estudio (acceso a apuntes de clase, capacidad de programación y concentración). En cuanto a las características sociodemográficas se preguntaba la edad, el curso, si se repetía curso o no, la nota final en Matemáticas en el curso anterior y la nota media en Matemáticas en el curso actual, es decir, en el periodo de curso transcurrido (1ª y 2ª evaluación).

En cuanto a las habilidades para el estudio incluidas en el cuestionario, fueron las siguientes:

- Acceso a Apuntes:
Tomar buenos apuntes en clase
- Capacidad para organizar los horarios:
Hacer todos los días los deberes sin esperar al último momento
Preparar los exámenes con tiempo sin esperar al último momento
Repasar los apuntes de clase el mismo día.
- Capacidad para concentrarse:
Prestar atención en clase sin dificultad
Seguir la clase sin distraerse y sin pensar en otras cosas
Concentrarse durante la clase sin dificultad.

Se midieron empleando siete ítems procedentes del trabajo de Nonis y Hudson (2010), al igual que Díaz-Mora et ál. (2016). Estos ítems fueron adaptados al alumnado de Secundaria. Se puntuó cada ítem en una escala tipo Likert de cinco puntos, con las siguientes puntuaciones: “muy en desacuerdo” (1), “en desacuerdo” (2), “ni de acuerdo ni en desacuerdo” (3), “de acuerdo” (4), “muy de acuerdo” (5).

Además, se incluyen tres variables de control que pueden afectar al rendimiento académico: el sexo, si se es repetidor y las notas del curso anterior en la asignatura de Matemáticas. En el cuestionario se han incluido además la edad y el curso, pero sólo como

control interno de los cuestionarios y no como variable que pueda influir en el rendimiento académico.

Se podría esperar que las notas finales del curso anterior en la asignatura de Matemáticas tuvieran un efecto positivo en las notas actuales de los estudiantes. De la misma forma cabe esperar que influya en el rendimiento académico si un estudiante es repetidor (si repite el curso académico actual) o no, aunque se desconoce cómo. Y en cuanto al sexo de los encuestados, aunque no es posible determinar a priori ninguna dirección de su influencia sobre el rendimiento académico, se ha considerado variable de control para la investigación.

Para recoger los datos sobre el uso del tiempo se decidió emplear un diario, de forma similar a la investigación de Díaz-Mora et ál (2016). De acuerdo con autores como Sonnenberg, Riediger, Wrzus y Wagner (2012) o Nonis y Hudson (2010), se cree que utilizar una encuesta para obtener resultados sobre el uso del tiempo por parte de los alumnos es una limitación, y especialmente en estudiantes tan jóvenes. Según los resultados obtenidos en el diario empleado y en los hechos observados durante la realización del estudio, son plenamente conscientes del tiempo que emplean en actividades de larga duración y fijan cada semana, como es el acudir a clases en el Colegio. Sin embargo cuando se trata de actividades esporádicas o de uso de su tiempo libre, les cuesta mucho trabajo calcular cuánto tiempo le han dedicado.

Se utilizó por lo tanto un diario de tiempo para obtener el tiempo que los estudiantes de Secundaria dedican a diferentes actividades a lo largo del día para su posterior análisis para establecer la relación que tiene este uso del tiempo con su rendimiento académico. Era muy ambicioso pretender que todos los estudiantes participantes en el estudio escribieran diariamente en un diario el tiempo que dedican durante el día a las diferentes actividades. Además, debido a la diversidad de los alumnos, el analizar estos diarios sin establecer unas reglas o unos criterios prefijados podría ser excesivamente laborioso y probablemente inservible. Por ello se decidió elaborar una tabla semanal, dividida en los siete días de la semana. En esta tabla aparecían 13 actividades pre-especificadas (seis categorías académicas y siete no académicas) (Díaz Mora et ál., 2016) con una descripción para ayudar a completar el tiempo dedicado a cada una de ellas. Así debían completar diariamente el tiempo dedicado a cada actividad cada día de la semana. En cuanto a la medida del tiempo se contempló la posibilidad de hacerlo en horas, pero se llegó a la conclusión de que en periodos cortos (actividades con una duración de 20 minutos o media hora), medir el tiempo en horas podría llevar a confusión y a falta de rigor. Por esta razón se decidió hacerlo en minutos. Esta decisión acababa con el anterior problema, pero se planteaba uno nuevo, ya que tenían que pasar la duración de periodos de tiempo largos a minutos, lo cual dio lugar a confusión en algunos casos.

Tanto en el caso de los cuestionarios como en el de los diarios, se descartó plantearlos de forma digital, ya que algunos de los estudiantes podrían no tener acceso a este tipo de recursos. Por ello se distribuyeron en papel, ya que así se garantizaba que todos los alumnos tuvieran al menos la posibilidad de disponer de ellos y la posibilidad de entregarlos.

PROCEDIMIENTO

Se llevó a cabo el estudio durante las tres últimas semanas del mes de abril y la primera semana de Mayo, durante la 3ª evaluación, del año académico 2015-2016.

Tanto el cuestionario como el diario se entregaron a los alumnos de forma conjunta en forma de dossier el primer día de la primera semana del estudio. El cuestionario fue cumplimentado y recogido en ese momento. El diario de tiempo se planteó en cuatro tablas correspondientes a las cuatro semanas del estudio, las cuales se recogieron semanalmente. Los procedimientos utilizados en fueron realizados tras obtención de un consentimiento informado.

Una vez recopilados todos los datos a través de los cuestionarios y los diarios de tiempo correspondientes a las cuatro semanas, se procedió a analizarlos con el programa IBM SPSS Statistics 19.

En primer lugar se examinó la muestra, realizando un análisis descriptivo estudiando las medidas de dispersión. Se compararon las calificaciones académicas de los estudiantes en el pasado y en el presente curso en la asignatura de Matemáticas, así como entre los cuatro cursos a los que pertenecen los estudiantes.

A continuación se compararon las variables de control, una a una, con el rendimiento, cuantificado por la nota media del curso actual en la asignatura de Matemáticas. Las variables que se utilizaron para el estudio fueron el sexo, si se es repetidor o no, y la nota media final de curso anterior en la asignatura de Matemáticas.

En cuanto a los datos sobre habilidades para el estudio obtenidos mediante el cuestionario, se llevó a cabo un análisis factorial confirmatorio (alfa de Cronbach, α) para probar la fiabilidad y validez del instrumento de obtención de datos. Para ello se agruparon los siete ítems del cuestionario en tres bloques: “Acceso a apuntes”, “Capacidad para organizarse los horarios” y “Capacidad para concentrarse”.

Respecto a los diarios de tiempo, se calcularon las medias de los tiempos dedicados a las diferentes actividades y se compararon entre sí.

Por último se compararon, uno a uno, las habilidades para el estudio, y la cantidad de tiempo empleado en las diferentes actividades académicas y no académicas, con el rendimiento, cuantificado por la nota media del curso actual en la asignatura de Matemáticas, para ver la posible relación entre ellos.

RESULTADOS

Análisis de la muestra

En primer lugar, se estudió la muestra. Dentro de los 80 estudiantes participantes en el estudio 44 fueron hombres (55%) y 36 mujeres (45%). De todos ellos 4 alumnos son repetidores. La edad media de los alumnos es $13,69 \pm 0,14$ años, la nota media final del curso anterior en la asignatura de Matemáticas fue $7,14 \pm 0,24$, y la nota media en el curso actual en la asignatura de Matemáticas es de $5,96 \pm 0,25$. El 23,8% de los alumnos tuvieron una nota final en Matemáticas inferior a 5 en el curso anterior, y un 76,2% tuvieron una nota en

Matemáticas igual o mayor a 5 al finalizar el curso. Durante el presente curso el 40,5% de los estudiantes tiene una nota inferior a 5 mientras que el 59,5% tiene una nota igual o superior a 5.

TABLA I. Número y porcentaje de alumnos pertenecientes a cada curso.

	Frecuencia	Porcentaje
1° ESO	27	33,8%
2° ESO	17	21,3%
3° ESO	21	26,3%
4° ESO	15	18,8%
Total	80	100,0%

Fuente: elaboración propia.

En todos los cursos se puede observar un descenso de la nota media final del año pasado en Matemáticas y la nota media del presente curso. Este hecho puede deberse a que la nota final del año anterior es la nota después de realizar subidas de nota, mientras que la nota del año actual es la nota media de las dos primeras evaluaciones, sin realizar las subidas de nota que pueden proponerse a final de curso. Y también sin computar la nota de la tercera evaluación la cual, aunque se desconoce todavía, puede que suba la nota de los estudiantes. Este descenso se acentúa en 2° ESO, en el que los alumnos han bajado de una nota media de $7,18 \pm 0,38$ a una media de $5,35 \pm 0,53$. Las notas más igualadas entre el curso anterior y el actual se dan en 1° ESO con una media el curso anterior (en el último curso de Primaria) de $7,33 \pm 0,41$ y una nota media en el curso actual de $6,68 \pm 0,40$ (TABLA II).

TABLA II. Media de edad, media de la nota final en el curso anterior en la asignatura de Matemáticas y media de la nota media en Matemáticas en el presente curso. Por curso.

1° ESO		
	N	Media
Edad	27	$12,41 \pm 0,13$
Nota final curso anterior	27	$7,33 \pm 0,41$
Nota media presente curso	27	$6,68 \pm 0,40$
2° ESO		
	N	Media
Edad	17	$13,12 \pm 0,08$
Nota final curso anterior	17	$7,18 \pm 0,38$
Nota media presente curso	17	$5,35 \pm 0,53$
3° ESO		

	N	Media±e.t.
Edad	21	14,57±0,11
Nota final curso anterior	21	6,40±0,52
Nota media presente curso	20	5,05±0,42

4° ESO		
	N	Media±e.t.
Edad	15	15,40±0,13
Nota final curso anterior	15	7,80±0,54
Nota media presente curso	15	6,57±0,59

Fuente: elaboración propia.

e.t.: error típico

*Uno de los alumnos de 3° ESO no cumplimentó su nota media en el curso actual en el cuestionario, por lo que se desconoce este dato.

Se ha estudiado también el número y porcentaje de alumnos que han tenido una nota media final en el curso anterior en la asignatura de Matemáticas y una nota media en el presente curso en la misma asignatura menor o mayor que 5 (TABLA III). En este análisis se puede ver que en 1° ESO tanto en el presente curso como en el pasado, el número de alumnos con nota media inferior a 5 es notablemente inferior que el número de ellos con nota superior a 5. Lo mismo ocurre con la nota del curso anterior en 2° ESO. Sin embargo en el curso actual en 2° ESO y en 4° ESO el porcentaje de alumnos con nota inferior a 5 y con nota superior a 5 es bastante igualado (en el caso de 4° ESO un 46,7% tiene nota inferior a 5 y un 53,3% tiene nota superior a 5). Esta relación se invierte en 3° ESO donde en el curso actual es mayor el número de alumnos con nota inferior a 5 (60%) respecto a los alumnos con nota superior a 5 (40%) (Ver Tabla III página siguiente).

ANÁLISIS DE LAS VARIABLES DE CONTROL

Los datos obtenidos a través de los cuestionarios y diarios de tiempo, considerados posible influencia en el rendimiento académico, se analizaron con el programa IBM SPSS Statistics 19. Se compararon en primer lugar las variables de control con el rendimiento, cuantificado por la nota media del curso actual en la asignatura de Matemáticas. Las variables que se utilizaron para el estudio fueron el sexo, si se es repetidor o no, y la nota media final de curso anterior en la asignatura de Matemáticas. Las dos primeras, variables cualitativas y cuantitativas, se compararon mediante la prueba t-Student. Se obtuvo en ambos casos un resultado no significativo. En el caso de ser repetidor o no, el resultado no significativo probablemente se deba a que sólo hay 4 alumnos repetidores frente a 76 que no lo son.

TABLA IV. Resultados de la prueba t-Student: Sexo y repetidores y rendimiento académico.

Sexo		
	Media \pm e.t.	p
Hombre	5,65 \pm 0,31	0,17
Mujer	6,33 \pm 0,39	

Repetidor		
	Media \pm e.t.	p
No	6,01 \pm 0,25	0,371
Si	5 \pm 1,14	

Fuente: elaboración propia.
e.t.: error típico

La influencia de las notas del curso anterior en el rendimiento académico, variables cuantitativas, se estudió mediante un análisis de regresión lineal, donde se obtuvo que las notas del curso anterior en Matemáticas tienen un alto impacto positivo sobre el rendimiento académico ($B=0,705^{***}$, $p<0,01$). Los estudiantes con mejores notas en el curso anterior, y por tanto con mejores antecedentes académicos en Matemáticas, obtienen las mejores calificaciones en el curso actual. Es decir, aquellos que tuvieron un buen rendimiento académico en Matemáticas en el curso anterior, continúan haciéndolo en el curso actual.

TABLA III. Número y porcentaje de alumnos con nota media final en la asignatura de Matemáticas en el curso anterior y nota media en el presente curso en la asignatura de Matemáticas menor y mayor que 5 . Por curso.

1ºESO		
	N	Porcentaje
Nota anterior <5	4	14,8%
Nota anterior >5	23	85,2%
	N	Porcentaje
Nota presente <5	6	22,2%
Nota presente >5	21	77,8%

2ºESO		
	N	Porcentaje
Nota anterior <5	2	11,8%
Nota anterior >5	15	88,2%
	N	Porcentaje
Nota presente <5	7	41,2%
Nota presente >5	10	58,8%

3ºESO		
	N	Porcentaje
Nota anterior <5	9	42,9%
Nota anterior >5	12	57,1%
	N	Porcentaje
Nota presente <5	12	60,0%
Nota presente >5	8	40,0%

4ºESO		
	N	Porcentaje
Nota anterior <5	4	26,7%
Nota anterior >5	11	73,3%
	N	Porcentaje
Nota presente <5	7	46,7%
Nota presente >5	8	53,3%

Fuente: elaboración propia.

*Uno de los alumnos de 3º ESO no cumplimentó su nota media en el curso actual en el cuestionario, por lo que se desconoce este dato.

ANÁLISIS DE LAS HABILIDADES PARA EL ESTUDIO

En cuanto al análisis de las habilidades para el estudio, en primer lugar se llevó a cabo un análisis factorial confirmatorio para probar la fiabilidad y validez del instrumento de obtención de datos (cuestionario de siete ítems puntuados según una escala Likert de cinco puntos). Para ello se agruparon los siete ítems en tres bloques: “Acceso a apuntes”, “Capacidad para organizarse los horarios” y “Capacidad para concentrarse”. Los resultados de este análisis indicaron niveles de fiabilidad adecuados en el grupo “Capacidad para concentrarse” (el alfa de Cronbach estaba por encima de 0,7) y no aceptable para el grupo “Capacidad para organizarse los horarios” (TABLA V). Por esta razón en el análisis posterior no se ha utilizado este último grupo, es decir, debido a nivel de fiabilidad inadecuado se ha eliminado de la investigación.

TABLA V. Análisis de fiabilidad (alfa de Cronbach) de las habilidades para el estudio

Ítem	Alfa de Cronbach (α)
Acceso a Apuntes	n.a.
Tomar buenos apuntes en clase	
Capacidad para organizar los horarios	0,5 (<0,70)
Hacer todos los días los deberes sin esperar al último momento	
Preparar los exámenes con tiempo sin esperar al último momento	
Repasar los apuntes de clase el mismo día	
Capacidad para concentrarse	0,79 (>0,70)
Prestar atención en clase sin dificultad	
Seguir la clase sin distraerse y sin pensar otras cosas	
Concentrarse durante la clase sin dificultad	

Fuente: elaboración propia.

*n.a.: no aplicable.

Para el análisis de las habilidades para el estudio y la relación de éstas con el rendimiento académico, se realizó un análisis ANOVA, ya que se trata de varias variables cualitativas y una cuantitativa. En cuanto al análisis de los ítems “Tomar buenos apuntes en clase”, “Prestar atención en clase sin dificultad”, “Seguir la clase sin distraerse y sin pensar otras cosas” y “Concentrarse durante la clase sin dificultad”, las respuestas puntuadas del 1 al 5 se han agrupado en tres grupos: Respuestas 1-2, respuesta 3, y respuestas 4-5. Esto es debido a que algunas de las respuestas fueron elegidas por un único estudiante, restando por lo tanto significatividad a la misma. Según esta agrupación las respuestas se pueden clasificar en “respuesta negativa”, “respuesta neutra” y “respuesta positiva”.

Como resultado de este análisis se obtuvo que todas estas habilidades para el estudio son significativas en su relación con el rendimiento académico de los estudiantes. La más significativa es la habilidad de “Seguir la clase sin distraerse y sin pensar otras cosas”

con $p=0.008^{***}$, seguida por “Tomar buenos apuntes en clase” con $p=0,024^{**}$, “Concentrarse durante la clase sin dificultad” con $p=0,059^*$ y “Prestar atención en clase sin dificultad” con $p=0.077^*$.

TABLA VI. Resultados del análisis ANOVA: Habilidades para el estudio y rendimiento académico.

Tomar buenos apuntes en clase			
	N	Media ± e. t.	p
1--2	7	5,64±0,70	0,024**
3	22	4,95±0,42	
4--5	50	6,45±0,31	
Prestar atención en clase sin dificultad			
	N	Media ± e. t.	p
1--2	11	4,59±0,55	0,077*
3	17	6,32±0,44	
4--5	51	6,14±0,32	
Seguir la clase sin distraerse y sin pensar otras cosas			
	N	Media ± e. t.	p
1--2	16	4,50±0,34	0,008***
3	25	6,12±0,44	
4--5	38	6,47±0,36	
Concentrarse durante la clase sin dificultad			
	N	Media ± e. t.	p
1--2	10	4,90±0,63	0,059*
3	27	5,55±0,35	
4--5	42	6,48±0,36	

Fuente: elaboración propia.

* $p<0,1$, ** $p<0,05$, *** $p<0,01$ ***

e. t.: error típico

ANÁLISIS DE LOS DIARIOS DE TIEMPO

A continuación se estudiaron los datos obtenidos en los diarios de tiempo. Estos datos muestran que las actividades académicas a las que dedicaron más tiempo los estudiantes fueron la asistencia a clase (con una media de 361,02±0,91 minutos al día) y al estudio autónomo (media de 89,99±5,49 minutos al día). Las actividades académicas a las que dedicaron menos tiempo fueron la búsqueda de información (media de 33,51±4,05 minutos al día) y resolver ejercicios y problemas (con una media de 44,09±2,41 minutos al día). De

las actividades no académicas, a las que los estudiantes dedicaron más tiempo fueron las tareas vitales (dormir, comer, higiene personal con una media de 548,95±11,45 minutos al día) y a otras actividades como viajes, etc. no incluidas en las descripciones anteriores (con una media de 218,49±26,30 minutos al día). Dentro de las actividades no académicas dedicaron menos cantidad de tiempo al tiempo comprometido (ayudar a hacer las tareas de casa con una media de 31,93±2,05 minutos al día) y a asistir a cursos complementarios como clases de inglés, exposiciones, etc. (media de 78,46±4,03 minutos al día). Aunque el error típico aparentemente es elevado, no lo es tanto, ya que estamos hablando de minutos.

Dentro de este análisis, se puede ver (TABLA VII) que el tiempo medio diario dedicado a utilizar Whatsapp, correo electrónico, hablar por teléfono, etc. es superior al tiempo dedicado a estudiar de forma autónoma (tanto la teoría como la realización de ejercicios). Sin embargo, al contrario de lo que se piensa en ocasiones, el tiempo medio diario dedicado a la vida social (a salir con amigos, etc.) es superior al tiempo dedicado a las redes sociales, lo cual se puede considerar muy positivo.

TABLA VII. Media de tiempo total en minutos dedicado a actividades académicas y no académicas.

Actividad	Media ± e.t.
Actividades Académicas	
AA1_ Asistir a clase en el instituto/colegio (asistir a clase, realizar exámenes, participar en seminarios, etc.)	361,02±0,91
AA2_ Asistencia a clases particulares (asistir a clases fuera del instituto/colegio)	85,12±4,63
AA3_ Estudio autónomo (leer la teoría que se ha visto en clase, pasar apuntes, hacer resúmenes, estudiar, etc.)	89,99±5,49
AA4_ Resolver ejercicios y problemas (resolver individualmente ejercicios o problemas)	44,09±2,41
AA5_ Hacer trabajos/presentaciones en grupo (hacer trabajos o proyectos en grupo, hacer presentaciones en grupo mediante soportes digitales, en sayarlas, etc.)	55,19±7,40
AA6_ Búsqueda de información (quedar con los compañeros para estudiar juntos, intercambiar apuntes, buscar en la biblioteca, internet, libros, etc.)	33,51±4,05
Actividades No Académicas	
ANA1_ Asistencia a cursos complementarios (asistir a clases de inglés u otro idioma, exposiciones, etc.)	78,46±4,03
ANA2_ Hacer deporte (practicar algún deporte, ir al gimnasio, etc.)	79,01±5,80
ANA3_ Ocio y comunicación (utilizar Whatsapp, hablar por teléfono, usar el correo electrónico, usar redes sociales, ver la televisión, ir al cine, usar Internet para entretenerse, etc.)	117,94±10,02
ANA4_ Vida social (salir con amigos, etc.)	197,44±19,35
ANA5_ Tiempo comprometido (ayudar a hacer tareas de casa)	31,93±2,05
ANA6_ Tareas vitales (comer, dormir, higiene personal)	548,95±11,45
ANA7_ Otros (viajes y otras actividades no incluidas en las secciones anteriores)	218,49±26,30

Fuente: elaboración propia.

e.t.: error típico

Algunos trabajos como el de Dolton et. al. (2003) sostienen que debe resultar relativamente sencillo para los estudiantes distribuir el tiempo total diario en las distintas actividades. Conocen perfectamente el tiempo que emplean en actividades académicas dentro de su horario semanal, por lo que para saber el tiempo dedicado al resto de las actividades no tienen más que restar el tiempo fijo que dedican a las actividades de su horario y distribuir este tiempo restante en las demás actividades. En su estudio el 81% de los estudiantes registran una distribución del tiempo diario que suma 24 horas. El hecho de que la distribución del tiempo de algunos estudiantes no sume 24 horas lo atribuyen a que hay una serie de actividades varias que no se enumeran en su cuestionario.

Aunque, para subsanar esta posible confusión, en el diario de tiempo propuesto aparece una actividad no académica en la que introducir todas aquellas actividades que no aparecen enumeradas en el resto del diario de forma similar al trabajo de Díaz-Mora et ál. (2016) (ANA7_Otros (viajes y otras actividades no incluidas en las secciones anteriores), en el momento en que se distribuyeron los cuestionarios y diarios, y los estudiantes tuvieron que comenzar a completar los diarios de tiempo, se les planteó la duda de si la suma del tiempo destinado a las actividades tanto académicas como no académicas durante el día tenía que sumar 24 horas (1440 minutos). Se les dejó libertad para decidir por ellos mismos. Aunque en la investigación de Díaz-Mora et ál. (2016) con estudiantes universitarios, el tiempo destinado cada día por los estudiantes a las distintas actividades académicas suma 24 horas, en este caso se les dejó libertad para decidir por ellos mismos. Justificaron esta incertidumbre exponiendo que hay actividades que se pueden hacer al mismo tiempo, como por ejemplo estar con los amigos y utilizar el móvil, o estudiar y escuchar música. En efecto se puede dar la intersección de varias de las actividades, pero siempre habrá una que predominará sobre otra. Este concepto del uso del tiempo no lo tienen asumido los estudiantes objeto de la investigación, ya que ninguno de ellos ha distribuido el tiempo dedicado a cada actividad durante el día de manera que sume las 24 horas (1440 minutos) en todos los días de las cuatro semanas del estudio. Este dato frente al 81% de estudiantes que si establecen distribuciones de su tiempo que suman 24 horas diarias en el trabajo de Dolton et. al. (2003), puede atribuirse al hecho de que en aquella investigación los sujetos eran alumnos universitarios, mientras que en el presente trabajo se trata de alumnos de Secundaria. El 58,7% de los alumnos plantean una distribución del tiempo, en al menos un día de la semana, con un sumatorio de minutos superior a 1440. Existen por tanto momentos del día en los que se producen intersecciones de actividades y no distinguen cual es prioritaria respecto de la otra. Son capaces de aprovechar el tiempo realizando varias actividades a la vez, aunque esto no influye significativamente en su rendimiento académico. Sin embargo la mayoría de los alumnos plantea una distribución de su tiempo con un sumatorio de minutos inferior a 1440 minutos (la media del sumatorio de minutos diarios dedicado a las actividades es de $1222,08 \pm 33,23$ minutos), por lo que cabe decir que no son verdaderamente conscientes del uso del tiempo y del paso del tiempo, ya que hay momentos del día en que no son conscientes de las actividades que están realizando.

En cuanto al análisis de los datos sobre la cantidad de tiempo empleado en las distintas actividades académicas y no académicas, obtenidos de los diarios de tiempo, se han comparado uno por uno con el rendimiento académico en Matemáticas en el curso actual, ambas variables cuantitativas, mediante un análisis de regresión lineal. Se han obtenido los siguientes resultados (TABLA VIII).

TABLA VIII. Resultados del análisis de regresión lineal: Tiempo empleado en actividades académicas y no académicas y rendimiento académico.

Actividades Académicas		
AA1_ Asistir a clase en el instituto/colegio (asistir a clase, realizar exámenes, participar en seminarios, etc.)	B= -0,118	p=0,310
AA2_ Asistencia a clases particulares (asistir a clases fuera del instituto/colegio)	B= -0,085	p=0,592
AA3_ Estudio autónomo (leer la teoría que se ha visto en clase, pasar apuntes, hacer resúmenes, estudiar, etc.)	B= -0,021	p=0,855
AA4_ Resolver ejercicios y problemas (resolver individualmente ejercicios o problemas)	B= -0,018	p=0,880
AA5_ Hacer trabajos/presentaciones en grupo (hacer trabajos o proyectos en grupo, hacer presentaciones en grupo mediante soportes digitales, ensayarlas, etc.)	B= -0,009	p=0,957
AA6_ Búsqueda de información (quedar con los compañeros para estudiar juntos, intercambiar apuntes, buscar en la biblioteca, internet, libros, etc.)	B= -0,179	p=0,229
Actividades No Académicas		
ANA1_ Asistencia a cursos complementarios (asistir a clases de inglés u otro idioma, exposiciones, etc.)	B= 0	p=0,999
ANA2_ Hacer deporte (practicar algún deporte, ir al gimnasio, etc.)	B= -0,217	p=0,068*
ANA3_ Ocio y comunicación (utilizar Whatsapp, hablar por teléfono, usar el correo electrónico, usar redes sociales, ver la televisión, ir al cine, usar Internet para entretenerse, etc.)	B= -0,019	p=0,869
ANA4_ Vida social (salir con amigos, etc.)	B= 0,092	p=0,448
ANA5_ Tiempo comprometido (ayudar a hacer tareas de casa)	B= -0,064	p=0,585
ANA6_ Tareas vitales (comer, dormir, higiene personal)	B= 0,363	p=0,001***
ANA7_ Otros (viajes y otras actividades no incluidas en las secciones anteriores)	B= -0,179	p=0,171

Fuente: elaboración propia.

* $p < 0,1$, ** $p < 0,05$, *** $p < 0,01$ ***

Según los resultados obtenidos, se observa que el tiempo empleado en las actividades académicas no es significativo en su relación con el rendimiento académico. Lo que sí llama la atención, es que la correlación entre el tiempo dedicado a éstas y el rendimiento es negativa en el caso de todas las actividades académicas propuestas. Esto puede ser debido a la falta de calidad del tiempo empleado en las mismas. Es decir, a pesar de acudir a clase en el Colegio durante una media de seis horas diarias, si el tiempo dedicado a estar en clase no se aprovecha como se debiera (distracciones, falta de concentración,...) no puede influir positivamente en el rendimiento académico ya que es un tiempo “perdido”. De la misma forma llama la atención que la asistencia a clases particulares tenga

una correlación negativa con el rendimiento académico, y esto es debido a que son un apoyo positivo siempre y cuando se aprovechen debidamente.

En cuanto al tiempo dedicado a actividades no académicas, la asistencia a cursos complementarios (clases de idiomas, exposiciones, etc.) no tiene ninguna correlación con el rendimiento académico. Es interesante que este tipo de actividades, que a priori puede esperarse que tengan un impacto directo sobre las calificaciones, no tenga relación con ellas. La vida social y la realización de tareas vitales tienen una correlación positiva con el rendimiento académico, y actividades como practicar algún deporte, el uso de las redes sociales, el tiempo comprometido como ayuda a la realización de las tareas de casa o los viajes y otras actividades tienen con el rendimiento académico una correlación negativa. Esto puede ser debido, al igual que ocurre con las actividades académicas, a la falta de calidad del tiempo empleado en ellas, es decir, en el caso de las redes sociales o en el caso de los viajes, para qué y cómo se utilizan. Tras el análisis entre el tiempo dedicado a actividades calificadas como no académicas y el rendimiento académico, se obtienen resultados significativos en el caso de las tareas vitales, y en el caso de la práctica de algún deporte. En la primera de ellas la significatividad es alta ($B=0,363^{***}$, $p<0,01$) y su correlación es positiva. El tiempo dedicado a dormir, a comer, o a la higiene personal influye positivamente en el rendimiento académico de los estudiantes. Por el contrario, los minutos dedicados a hacer deporte, tuvieron un impacto negativo ($B=-0,217^*$, $p<0,1$), de forma similar a los resultados obtenidos en el trabajo de Díaz-Mora et ál (2016). Aquellos estudiantes que dedican más tiempo a esta actividad, obtienen peores calificaciones.

CONCLUSIONES

Tras analizar los datos obtenidos en el presente trabajo se puede observar que la relación entre el uso del tiempo de los estudiantes de Secundaria y su rendimiento académico en la asignatura de Matemáticas (cuantificado por la nota media en el presente curso) es muy compleja. El éxito académico no depende sólo de la cantidad de tiempo empleada en diferentes actividades académicas o no académicas, sino también de la calidad de ese tiempo.

En primer lugar, se observa que los estudiantes de Secundaria no tienen verdaderamente asumido el concepto del uso del tiempo. Muchos de ellos plantean distribuciones del uso del tiempo de más de 24 horas diarias, es decir, intervalos de tiempo con intersección de actividades, sin saber distinguir cuál es prioritaria respecto de la otra. Aunque sin influir significativamente en su rendimiento académico son capaces de aprovechar el tiempo realizando varias actividades diferentes a la vez. Pero la mayoría de los estudiantes plantea distribuciones de tiempo diario con sumatorio inferior a 24 horas, o en nuestro caso a 1440 minutos. Tras observar este hecho se puede afirmar que no son plenamente conscientes del paso del tiempo, puesto que hay períodos del día en los que no son conscientes de las actividades que están realizando.

En segundo lugar, tras analizar la relación de las variables de control establecidas (el sexo, si el alumno es repetidor y la nota media final obtenida en Matemáticas en el curso anterior) se concluye que el sexo y si el estudiante es repetidor no tienen una relación

significativa con el rendimiento académico. Sin embargo la nota del curso anterior tiene un fuerte impacto positivo sobre el rendimiento académico. Los estudiantes con mejores notas en el curso anterior, obtienen las mejores calificaciones en el curso actual.

Según los datos obtenidos en el análisis de la influencia de las habilidades para el estudio consideradas en este trabajo, se sostiene que todas ellas son significativas en su relación con el rendimiento académico de los estudiantes. La más significativa es la habilidad de “Seguir la clase sin distraerse y sin pensar otras cosas” por lo que se debe hacer hincapié en hacer las clases amenas y que los estudiantes no se distraigan, ya que de la concentración y del trabajo realizado en clase depende en gran medida su éxito académico.

Por último, se observa en los resultados que el tiempo empleado por los estudiantes de Secundaria durante el día en diferentes actividades académicas no es significativo en su relación con el rendimiento académico. Sin embargo, su correlación es negativa en el caso de todas las actividades académicas propuestas. Se considera que este hecho es debido a la falta de calidad del tiempo empleado en estas actividades. Si este tiempo no es aprovechado adecuadamente, no puede influir positivamente en el rendimiento académico ya que puede considerarse un tiempo “perdido”. Es el caso de las clases particulares, actividad que comúnmente se supone positiva para el éxito académico de los alumnos, las cuales si no se utilizan provechosamente, influirán negativamente en las calificaciones, ya que el tiempo dedicado a ellas es un tiempo que se ha dejado de emplear en otra actividad con una correlación positiva con el rendimiento. En cuanto al tiempo dedicado a actividades no académicas, se observa que la vida social y la realización de tareas vitales tienen una influencia positiva en el rendimiento académico, y actividades como practicar algún deporte, el uso de las redes sociales, el tiempo comprometido como ayuda a la realización de las tareas de casa o los viajes y otras actividades tienen una influencia negativa. Se cree que esto es debido, de forma similar a lo que sucede con las actividades académicas, a la falta de calidad del tiempo empleado en ellas. Dentro de estas, el tiempo destinado a dormir, a comer o a la higiene personal influye positivamente y de forma muy significativa en el rendimiento académico de los estudiantes. Cumplir unas horas mínimas de descanso es fundamental para alcanzar el éxito académico. Por el contrario en el caso del tiempo dedicado a hacer deporte, tuvo un impacto negativo en el rendimiento, por tanto, aquellos estudiantes que dedican más tiempo a esta actividad, obtienen peores resultados académicos.

Como conclusión, será necesario realizar muchos más estudios para determinar el impacto del uso que hacen del tiempo los estudiantes de Secundaria en su rendimiento académico. Esta relación es muy compleja, y en ella influyen muchas variables, especialmente la calidad del tiempo empleado en cada actividad. Sería necesario ampliar este trabajo analizando la relación del tiempo empleado en las diferentes actividades incorporando en este análisis las diferentes habilidades para el estudio, ya que puede suceder que algunas de las habilidades influyan en el éxito académico en mayor o menor medida, dependiendo de la actividad que se esté desarrollando.

Además, la investigación se podría extender a estudiantes de Bachillerato, ya que la organización de su tiempo, limitado por la inminente realización de la PAU, y a menudo presionados por la incertidumbre sobre su futuro académico o laboral, es fundamental para alcanzar el éxito académico.

Independientemente del nivel académico de los estudiantes con los que se realice la investigación, estos trabajos pueden resultar útiles tanto a los estudiantes como a los profesores. A los estudiantes para aprender a organizar su tiempo de forma más eficiente y los hábitos de estudio que deben consolidar. Y para los profesores para saber cómo organizar la estructura del curso, y en concreto de la asignatura de Matemáticas, proponiendo actividades académicas y una forma de enseñar que favorezca el desarrollo y el rendimiento académico de los estudiantes.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Ackerman, D. S., y Gross, B. L. (2003). Is time pressure all bad? Measuring the relationship between free time availability and student performance and perceptions. *Marketing Education Review* (nº 13, 21–32). Recuperado de http://www.marketingeducationreview.com/mer/toc_abstracts/toc_abstracts.asp
- Brint, S., y Cantwell, A. M. (2010). Undergraduate time use and academic outcomes: Results from the University of California undergraduate experience survey 2006. *Teachers College Record* (nº 112, 2441–2470). Recuperado de: <http://www.tcrecord.org/library/Abstract.asp?ContentId=15953>
- Díaz-Mora, C., García, J. A. y Molina, A. (2016). What is the key to academic success? An analysis of the relationship between time use and student performance. *Cultura y Educación* (nº 28(1), 157-195). Recuperado de: <http://dx.doi.org/10.1080/11356405.2015.1130294>
- Didia, D., y Hasnat, B. (1998). The determinants of performance in the university introductory finance course. *Financial Practice and Education* (nº 8, 102–107).
- Dolton, P., Marcenaro, O. D., y Navarro, L. (2003). The effective use of student time: A stochastic frontier production function case study. *Economics of Education Review* (nº 22, 547–560). doi:10.1016/S0272-7757(03)00027-X
- Kamp, R. J. A., Dolmans, D. H. J. M., Van Berkel, H. J. M., y Schmidt, H. G. (2012). The relationship between students' small group activities, time spent on self-study, and achievement. *Higher Education* (nº 64, 385–397). doi:10.1007/s10734-011-9500-5
- Kember, D., Jamieson, Q. W., Pomfret, M., y Wong, E. T. T. (1995). Learning approaches, study time and academic performance. *Higher Education* (nº 29, 329–343). doi:10.1007/bf01384497
- Krohn, G. A., y O'Connor, C. M. (2005). Student effort and performance over the semester. *The Journal of Economic Education* (nº 36, 3–28). doi:10.3200/jece.36.1.3-28
- Lahmers, A. G., y Zulauf, C. R. (2000). Factors associated with academic time use and academic performance of college students: A recursive approach. *Journal of College Student Development* (nº 41, 544–556).
- Michaels, J. W., y Miethe, T. D. (1989). Academic effort and college grades. *Social Forces* (nº 68, 309–319). doi:10.1093/sf/68.1.309
- Mulligan, C., Scheider, B. y Wolfe, R. (2000). Time Use and Population Representation in the Sloan Study of Adolescents. *NBER Technical Working Paper* (nº 265). Recuperado de: <https://core.ac.uk/download/files/153/6919515.pdf>

- Nonis, S. A., y Hudson, G. I. (2006). Academic performance of college students: Influence of time spent studying and working. *Journal of Education for Business* (n° 81, 151–159). doi:10.3200/joeb.81.3.151-159
- Nonis, S. A., y Hudson, G. I. (2010). Performance of college students: Impact of study time and study habits. *Journal of Education for Business* (n° 85, 229–238). doi:10.1080/08832320903449550
- Plant, E. A., Ericsson, K. A., Hill, L., y Asberg, K. (2005). Why study time does not predict grade point average across college students: Implications of deliberate practice for academic performance. *Contemporary Educational Psychology* (n° 30, 96–116). doi:10.1016/j.cedpsych.2004.06.001
- Sonnenberg, B., Riediger, M., Wrzus, C., y Wagner, G. G. (2012). Measuring time use in surveys: Concordance of survey and experience sampling measures. *Social Science Research* (n° 41, 1037–1052). doi:10.1016/j.ssresearch.2012.03.013
- Stinebrickner, R., y Stinebrickner, T. R. (2004). Time-use and college outcomes. *Journal of Econometrics* (n° 121, 243–269). doi:10.1016/j.jeconom.2003.10.013

Desarrollo de procesos matemáticos a través del juego en Educación Infantil

Miriam Seglar-Camúñez
CEIP Mare Nostrum, Ceuta
Jesús Montejo-Gámez
Universidad de Córdoba

Resumen. *Presentamos una experiencia de aula para iniciar a la lógica matemática y a los números a niños de 4 años. Integrando diferentes metodologías docentes y usando materiales manipulativos y juegos, hemos conseguido desarrollar los procesos matemáticos de los niños con actividades lúdicas y participativas.*

Palabras clave: *Educación Infantil; Lógica matemática; Números; Procesos matemáticos; Experiencia de aula.*

Development of mathematical processes based on games in early childhood education

Abstract. *We provide a classroom experience through which 4 years old children may be introduced to mathematical logic and the learning of numbers. By integrating several different methodologies and using manipulatives and games, we have contributed to develop kids' mathematical processes with playful and participatory activities.*

Keywords: *Early Childhood Education; Mathematical logic; Numbers; Mathematical processes; Classroom experience.*

1. INTRODUCCIÓN

El desarrollo de capacidades matemáticas desde el enfoque competencial se ha convertido en una de las prioridades de las autoridades educativas, tanto nacionales (como se puede observar en el currículo LOE para el segundo ciclo de Educación Infantil) como internacionales (desde el énfasis en los procesos que hace la National Council of Teachers of Mathematics –NCTM– a partir de los años 90 hasta el modelo en el que se basan las pruebas de evaluación de PISA). Sin embargo, como señala Alsina (2013), los

maestros no suelen disponer de directrices que permitan la incorporación de los procesos en el trabajo de aula. Esta es la razón que nos empujó a desarrollar nuestra propuesta, que persigue introducir procesos matemáticos en Educación Infantil a partir de tres características principales:

- Busca trabajar directamente los procesos, no sólo los contenidos matemáticos.
- Es de carácter globalizador y está adaptada a los intereses de los niños.
- Se basa en actividades manipulativas y juegos.

En relación a los procesos matemáticos en las prácticas de aula, partimos de las pautas que sugiere la NCTM (Thales, 2003) y las ideas que propone Alsina (2013). En particular, hacemos hincapié en la comunicación matemática y en las conexiones entre lógica y números para lo que trabajamos, por ejemplo, nociones como la enumeración como paso previo al dominio del conteo. También hemos introducido actividades para desarrollar la representación y la resolución de problemas, lo que hace que el trabajo sobre procesos matemáticos sea, por tanto, una de las características principales de la experiencia que presentamos.

Con respecto a la segunda característica, nuestra propuesta es globalizadora en el doble sentido que indica Alsina (2012):

- Establece conexiones interdisciplinares, ya que introducimos conexiones entre las Matemáticas y otras áreas de conocimiento.
- Establece conexiones intradisciplinares, ya que integramos contenidos matemáticos diferentes (en este caso lógica matemática y números) y también aunamos contenidos con procesos matemáticos, como ya hemos indicado.

Además, introducimos las Matemáticas en el contexto del centro de interés del aula. Van Reeuwijk (1997) señala que trabajar conceptos matemáticos en contexto real ayuda a que los alumnos valoren la importancia y utilidad de las Matemáticas, despierta su creatividad y sirve de mediador entre la concreción de la vida real y la abstracción de las Matemáticas más formales. En nuestro caso, el contexto (barcos) es un tema que los niños conocen y están trabajando, por lo que hemos logrado proponer una secuencia de actividades adaptada a los intereses de los alumnos.

Por otra parte, autores como Decroly o Montessori señalan que el aprendizaje parte de los sentidos, es decir, de lo concreto, para poder llegar a los conceptos abstractos. Freinet opina que el hombre aprende a partir de su experiencia y Dienes mostró cómo los materiales manipulativos son mediadores para aprender estructuras matemáticas en Educación Infantil. Bright, Harvey y Wheeler (1985) defienden, por su parte, que los juegos son una herramienta eficaz para que los niños aprendan las Matemáticas necesarias para ser ciudadanos de éxito y hacerlo disfrutando y mostrando entusiasmo para aprender más. No debemos olvidar tampoco la utilidad de los juegos para el desarrollo psicomotor de los niños, que es un objetivo básico en Educación Infantil y contribuye, según Piaget, a otras funciones del desarrollo como la cognitiva. Todas estas razones nos han empujado a basar la instrucción y la evaluación en juegos y en recursos manipulativos.

Con estas tres características hemos buscado crear una propuesta dinámica y motivadora para iniciar el desarrollo de los procesos matemáticos en Educación Infantil.

2. LA EXPERIENCIA

La experiencia se llevó a cabo durante los dos últimos trimestres del curso 2016, en la clase de 4 años B del colegio C.E.I.P. Mare Nostrum de Ceuta, aula que cuenta con una ratio de 29 alumnos. Trabajamos en torno al centro de interés que seguía el grupo en ese momento (los barcos). Diseñamos nuestra propuesta teniendo en cuenta la rutina diaria que se desarrollaban en el centro, como son el trabajo por rincones y la asamblea, de manera que los niños no advirtieron la presencia de las Matemáticas como un trabajo específico.

Instrucción en el aula

Las actividades de instrucción se crearon utilizando diferentes modelos metodológicos y en torno al desarrollo de 10 capacidades relacionadas con la lógica matemática y los números:

1. **Cuento interactivo: “El cumpleaños”**, con diferentes texturas que podrían tocar los alumnos tras contarlos en la asamblea (para así mantener la atención). A partir de la lectura del cuento se reforzó la secuencia de numerales y se trabajó la adquisición de la cardinalidad y los procesos de comunicación y representación.
2. **Sesión de motricidad** en la hora de educación física, en la que introdujimos el juego del pañuelo y otros donde los niños se ordenaron utilizando números, por lo que reforzamos la grafía de los números (procesos de representación y comunicación) y su carácter ordinal (conexión entre orden y números).
3. **Juego participativo: “los barcos”**. Se trabajó a través de la pizarra digital para reforzar lo aprendido sobre el centro de interés del aula. En voz alta comentamos series que había en la pizarra y preguntamos “¿Qué sigue ahora?” a lo que algunos alumnos respondían diciendo lo que tocaba. De igual manera, dada una colección de objetos, los alumnos decían en voz alta cuál era un barco y cuál no, y la profesora lo comprobaba. Trabajamos de esta manera la detección y continuación de series y la distinción de objetos a partir de atributos, los procesos de resolución de problemas y las conexiones. Véase figura 1.
4. **Juego participativo: el bingo**. Fue una de las actividades que más gustó a los alumnos, que propusimos al final de las sesiones de trabajo y con la que reforzamos la grafía y la secuenciación de los numerales, así como los procesos de comunicación, representación y resolución de problemas. Con esta actividad los niños trabajaron espontáneamente de forma colaborativa, ayudándose unos a otros. Véase figura 2.
5. **Juegos por rincones: “los lazos marineros”**. Estas actividades, que se desarrollaron en las sesiones de trabajo por rincones, fueron diseñadas siguiendo el esquema de situación a-didáctica que propone Brousseau (2007). Cada juego se compone de tres de situaciones problemáticas de dificultad creciente y gobernadas por reglas que los niños deben resolver utilizando su propia lógica (y la que le propone la propia situación), de forma que la superación de la última situación implica haber adquirido el aprendizaje deseado. Propusimos tres juegos de estas características.



Figura 1: alumnos participando en el juego de los barcos.

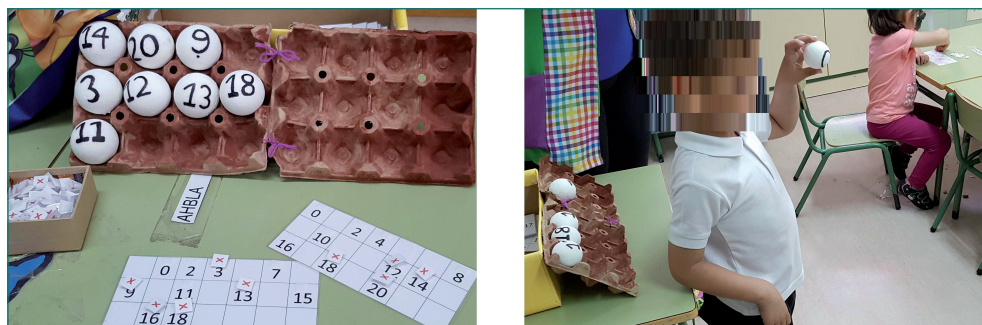


Figura 2: material para jugar al bingo (izquierda) y un alumno mostrando la bola que había salido (derecha).

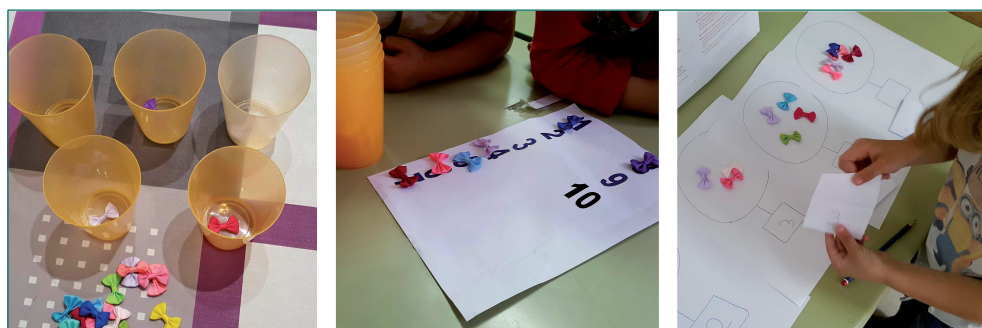


Figura 3: distintos momentos de las situaciones a-didácticas planteadas en los juegos de los lazos: enumeración (izquierda), numeración (centro) y conteo (derecha).

En el primer juego (Figura 3, izquierda), les proporcionamos una disposición irregular de vasos y varios lazos (tantos como vasos). Los niños debían meter un lazo en cada vaso sin que sobraran lazos ni vasos y no se metieran dos lazos en ningún vaso. En la primera situación, los vasos estaban boca arriba, por lo que los jugadores podían ver los vasos ocupados. En la segunda, los vasos estaban boca abajo pero se permitió marcar con una pegatina los vasos ocupados. En la tercera situación, los vasos siguieron boca abajo



Figura 4: material usado para evaluar (izquierda) y un momento de la evaluación (derecha).

y no se permitió el uso de pegatinas. Con esta actividad los niños trabajaron la enumeración y el proceso de resolución de problemas. Véase figura 3.

En el segundo juego (Figura 3, centro) los alumnos participaron por parejas y a un componente de cada pareja le vendamos los ojos. Les dimos 6 lazos distribuidos de forma irregular y el alumno que podía ver tenía que decir a su compañero qué números se tenían que usar para poder contar todos los lazos. Luego, el compañero se quitaba la venda y juntos le ponían a cada lazo un número, pero usando sólo los que había dicho el compañero al principio. En la primera situación, el niño sin venda podía tocar los números y los lazos. En la segunda, el niño sin venda puede tocar los lazos, pero no los números. En la tercera situación, el niño que veía no podía tocar lazos ni números. Con esta actividad se desarrolla la numeración y los procesos de resolución de problemas, representación, comunicación y las conexiones.

En el tercer juego (Figura 3, derecha) dimos a cada participante diferentes fichas con diagramas de Venn y números. En la primera situación les dimos 5 fichas: en la primera había un diagrama con un lazo y el cartel con el 1, en la segunda había dos lazos y un cartel con el 2 y en las tercera, cuarta y quinta fichas había 3, 4 y 5 lazos, distribuidos de forma regular y con los números de los carteles tapados con un post-it. Los alumnos tenían que escribir el número de elementos del diagrama en el recuadro y comprobar si lo habían hecho bien levantando el post-it correspondiente. En la segunda situación les dimos 5 fichas con 2, 3, 5, 6 y 7 lazos (dispuestos de forma irregular). En la tercera les dimos una cantidad variable de fichas con números cualesquiera de lazos, pero siempre entre 1 y 10 (también dispuestos de forma irregular). Este juego trabajó el conteo, reforzó la grafía de los números y desarrolló los procesos de representación y resolución de problemas.

Evaluación

La adquisición de los objetivos didácticos de nuestra propuesta fue evaluada a través de un juego basado en las cartas del UNO (Figura 4, izquierda), primero utilizando las reglas tradicionales y luego adaptando las reglas para evaluar el desarrollo de las 10 capacidades trabajadas. En particular, los alumnos debían realizar diferentes actividades,

como seriaciones y clasificaciones, atendiendo a diferentes atributos como los colores y los números. También debían decir cuántas cartas tenían en la mano o en la mesa durante el transcurso normal del juego. Se realizaron en total 6 actividades y cada una se repitió tres veces para no extraer conclusiones erróneas. Los resultados se anotaron en una lista de control de la que se extrajo la evaluación. Véase figura 4.

3. RESULTADOS

En cuanto al desarrollo exhibido por los alumnos, la mayoría de ellos supo completar todas las actividades de forma más que satisfactoria sin necesidad de grandes explicaciones. Se comprobó una progresión adecuada de todos los niños en casi todas las capacidades matemáticas trabajadas: las relacionadas con la lógica matemática, el conteo y el aspecto cardinal de los números. En la actividad del bingo, concretamente, pudimos observar cómo algunos niños, que no conocían números con dos cifras, aprendieron rápidamente los numerales del 1 al 20 jugando y siendo ayudados por sus compañeros. Hay, sin embargo, una excepción que no detectamos en el trabajo de aula pero sí en la sesión de evaluación: aproximadamente un 40% de los niños tuvieron problemas con los ordinales. Mostraron evidencias de que no tenían claro cuáles eran el primero, el segundo o el tercero, etc. e incluso algunos de ellos solían establecer el orden desde la derecha en lugar de desde la izquierda.

En cuanto a la viabilidad de la puesta en práctica, nuestra mayor dificultad fue la gran cantidad de alumnos presentes en el aula. En los juegos de los lazos todos los niños querían jugar a la vez y no era posible porque no teníamos material ni docentes. En la sesión de evaluación tuvimos muchos problemas para completar la lista de control necesaria para evaluar, debido a la atención que reclaman los alumnos. Una segunda dificultad fue la falta de medios, ya que debimos adaptar el juego de los barcos porque la función táctil de la pizarra digital no funcionaba, además de la falta de espacio para la asamblea, espacio idóneo para la actividad del cuento.

4. CONCLUSIONES

Consideramos que esta experiencia ha sido bastante satisfactoria, ya que tanto los alumnos como los docentes la hemos disfrutado y hemos aprendido los unos de los otros. El trabajo sobre procesos matemáticos tratados en contexto y a partir de juegos y material manipulativo resulta al menos tan efectivo como métodos más tradicionales, pero mucho más motivador para alumnos y docentes.

Uno de los puntos fuertes de nuestra propuesta ha sido utilizar juegos para el desarrollo de capacidades matemáticas, ya que de esta forma mostramos a los alumnos que pueden aprender Matemáticas y usarlas fuera del aula. Otra fortaleza de la instrucción presentada es su versatilidad ya que se puede adaptar fácilmente a otros contenidos. Trabajando los numerales, por ejemplo, podemos cambiar la secuencia a aquella que necesitemos reforzar o estemos trabajando. Además, hemos implementado actividades útiles

en cualquier momento del curso escolar, que pueden servir de refuerzo para diversas programaciones y lo hemos hecho utilizando materiales reciclados.

Como mejoras para una posible repetición de esta experiencia consideramos esencial reforzar el trabajo sobre el carácter ordinal, incluyendo alguna actividad más para fijar la atención de los niños. Debemos preparar las actividades para grupos algo más amplios y gestionar mejor el exceso de alumnos. El procedimiento de evaluación debe ser revisado: simplificar la lista de control para efectuar o buscar la colaboración de compañeros en la sesión del juego del UNO.

En resumen, la experiencia ha sido enriquecedora para los docentes y amena y formativa para los alumnos. Pensamos con más fuerza que al principio que, con más medios y algo más de experiencia en este tipo de propuestas, se pueden trabajar todos los procesos matemáticos en Educación Infantil a través de actividades contextualizadas, manipulativas o basadas en juegos.

5. AGRADECIMIENTOS

Esta experiencia no habría sido posible sin la colaboración del Colegio Mare Nostrium de Ceuta, que nos ha permitido llevar nuestras ideas a sus aulas. Gracias sobre todo a M^a Carmen Granados por abrirnos las puertas de su clase y estar dispuesta a trabajar todo tipo de actividades.

6. REFERENCIAS

- Alsina, A. (2012). Hacia un enfoque globalizado de la educación matemática en las primeras edades. *Números*, 80, 7-24.
- Alsina, A. (2013). Procesos matemáticos en Educación Infantil: 50 ideas clave. *Números*, 86, 5-28.
- Bright, G. W., Harvey, J. G. y Wheeler, M. M. (1985). Learning and mathematics games. *Journal for Research in Mathematics Education. Monograph*, 1, i-189.
- Brousseau, G. (2007). *Iniciación al estudio de la teoría de las situaciones didácticas*. Buenos Aires: Libros del Zorzal.
- Thales, S.A.E.M. (2003). *Principios y Estándares para la Educación Matemáticas*. Sevilla, SAEM Thales.
- Van Reeuwijk, M. (1997). Las matemáticas en la vida cotidiana y la vida cotidiana en las matemáticas. *Uno*, 12, 9-16.

Sentido espacial en el inicio de la escritura en Educación Primaria

Fiamma María Molina Pleguezuelos
Pablo Flores Martínez
Universidad de Granada

Resumen: Aprender a escribir requiere destrezas complementarias del aprendizaje lingüístico. Identificar el dibujo de letras, realizar trazos, unirlos formando sílabas, diferenciar sílabas, etc. Estas destrezas suponen aprendizajes geométricos, que requieren afinar y desarrollar sentido espacial. En ciertos métodos de escritura proponen series gráficas, que preparan para la escritura caligráfica. Durante el Practicum de Magisterio he observado alumnos realizando series iniciándose en la escritura. Este artículo examina el sentido espacial necesario para realizar series, y el que ponen de manifiesto niños de primer curso de un centro de Granada, cuando realizan las series.

Palabras clave: Sentido espacial, series geométricas, destrezas.

Spatial sense at the beginning of the writing in primary education

Abstract: To learn to write involves linguistic additional skills. To identify the drawing letter, to trace, to join them forming syllables, etc. These skills suppose geometric learning, what it needs to be precise and to develop spatial sense. Certain methods of writing propose graphical series that prepare pupils for the calligraphic writing. During the practice Teaching period I have observed pupils making series when they are beginning to learn to write. This article examines the spatial necessary sense to make series, that the children of the first primary course in Granada show.

Keywords: spatial sense, geometric series, skills.

INTRODUCCIÓN

El aprendizaje de la escritura se considera fundamentalmente un aprendizaje lingüístico, pero su complejidad hace que, necesite completarse con otros aprendizajes. Un aspecto fundamental de este aprendizaje corresponde a los elementos comunicacionales

relacionados con la lengua (identificación de los elementos básicos –las letras o sílabas–, agrupamientos para formar palabras o frases, establecimiento de correspondencias con su expresión oral, en la lectura, etc.). Pero otra parte importante está constituido por las destrezas de dibujo, así como las habilidades de visualización que permiten que un alumno diferencie los signos gráficos con los que construye su mensaje escrito.

Durante la estancia de una de las autoras en un centro de educación primaria, para realizar las prácticas de enseñanza, apreció el aspecto gráfico y de aprendizaje plástico que requiere la escritura. La maestra tutora, consciente de este aprendizaje, empleaba unas series gráficas que los alumnos debían copiar y continuar, empleando papel cuadriculado (pautado en cuadrados). Algunas de estas series son sencillas, pues los elementos que las componen son claramente diferentes. Otros, sin embargo, requieren distinguir entre figuras similares, con formas parecidas, diferentes en orientación respecto a la línea horizontal o a la vertical. Sorprendida por estas muestras y por lo que suponen de dominio espacial, relacionamos el aprendizaje de la escritura caligráfica con lo que se llama “sentido espacial”, es decir, el manejo de elementos geométricos para resolver situaciones cotidianas que los requieren.

Fruto de este interés realizamos un estudio de las series planteadas, las organizamos y clasificamos, examinando qué cualidades gráficas encierra cada una. Ello se completó estudiando qué elementos del sentido espacial se requieren para copiarlas y completarlas. Con estos referentes hemos podido apreciar qué cualidades del sentido espacial tienen los niños que están aprendiendo a escribir completando estas series.

En este artículo comenzamos por relatar la experiencia. A continuación describimos el marco teórico, el sentido espacial, que nos suministra elementos para apreciar las destrezas gráficas que requieren las series. Finalmente exponemos el análisis de las series y de las respuestas de los niños a la tarea planteada por la maestra, dirigida a su aprendizaje de la caligrafía.

UNA EXPERIENCIA EN EL APRENDIZAJE DE LA ESCRITURA

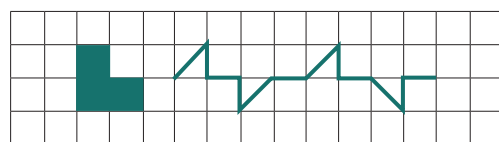


Figura 1: Ejemplo de serie gráfica.

Nos situamos en el primer curso de educación primaria, en un colegio de Granada. Desde el comienzo del curso la maestra está introduciendo series con formas geométricas para iniciar en la escritura (figura 1, ejemplo). De una manera globalizada, la maestra pretende

desarrollar destrezas gráficas, que se requieren para aprender a escribir.

Las series gráficas, tal como aparece en la figura 1, están antecedidas de una figura formada por tres cuadrados negros, que representan una locomotora, para indicar la dirección en que se completa la serie gráfica.

El estudio y continuación de la serie tiene por fin contribuir al aprendizaje de la caligrafía. Forma parte de lo que Rius (1989) llama fijación de la espacialidad en el plano, que tiene por objetivo descubrir el plano y la orientación y lateralidad.

Según González (2003) los alumnos de primero de primaria se encuentran en la etapa alfabética, que por lo general va de los 4 a los 6 años. En esta fase, el niño toma conciencia de que las palabras se componen de elementos o unidades fónicas y de que existe correspondencia entre estas unidades y sus representaciones gráficas o grafemas.

Por lo general, según González (2003), en los niños de esta edad, su percepción y discriminación visual se va agudizando y esto le permite distinguir disposiciones gráficas que hasta entonces le resultaban imperceptibles. Una de estas disposiciones es la que constituye las letras, luego las agrupaciones en forma de sílabas, en su manifestación gráfica en la escritura (que generalmente va acompañada de una diferenciación fonética, en la lectura, y de una identificación semántica en la lectura comprensiva).

Este artículo refleja una experiencia durante las prácticas de enseñanza, asistiendo a clases de primero de primaria. La maestra proponía cada día una serie con formas geométricas, para preparar la escritura caligráfica. El ejercicio planteado por la maestra se componía de una serie geométrica y unas sílabas caligráficas, aunque existía escasa relación entre la estructura gráfica de la serie y la de la escritura caligráfica del texto (figura 2).

SENTIDO ESPACIAL

La enseñanza actual (MECD, 2013), promueve un aprendizaje funcional, destinado a que los alumnos afronten situaciones problemáticas que se presenten en sus tareas cotidianas (Lupiáñez y Rico, 2015). Desde luego, el aprendizaje de la escritura tiene una intención funcional, relacionada con la competencia comunicacional (MECD, decreto de mínimos de Primaria). Pero, tal como hemos comentado, la escritura también requiere el aprendizaje gráfico, tanto desde el punto de vista del ámbito motor, como de la percepción y reproducción de formas. Por tanto se relaciona con el aprendizaje de la geometría.

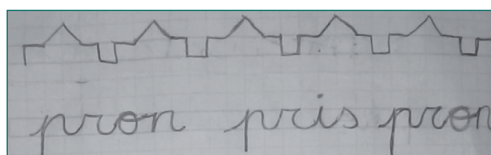


Figura 2: Ejemplo de estructura gráfica y escritura caligráfica.

Aprender geometría de manera funcional supone algo más que memorizar nombres, identificar formas, etc. Identificamos la intención funcional del aprendizaje geométrico con lograr que los alumnos desarrollen sentido espacial.

La idea de sentido espacial parte de la definición que aportó el NCTM (1991, 1998), y ha sido completado por diversos autores. En 1991, el NCTM define el sentido espacial como una relación intuitiva con el espacio y la forma, englobando los conceptos de la geometría, pero incluyendo la visualización para reconocer, representar y transformar formas geométricas. También incluye otras maneras menos formales de contemplar el plano y el espacio, tales como las transformaciones con papel doblado, o las proyecciones. Dado que la geometría está en el espacio que nos rodea, así como en muchas de las necesidades cotidianas, los estudiantes que aprenden geometría deben aplicar su sentido espacial y conocer las propiedades de las formas y del espacio en el mundo real.

Flores, Ramírez y Del Río, (2015), han sintetizado el concepto de sentido espacial, identificándolo como un objetivo de aprendizaje, pero también como una cualidad de las personas para interactuar con el entorno geométrico, es decir las capacidades de un individuo para trabajar e interactuar en un entorno amplio, elaborar o descubrir imágenes de formas y figuras, clasificarlas, relacionarlas y razonar con ellas.

El sentido espacial se requiere para situarse en el espacio, para reconocer las formas de los objetos, teniendo en cuenta las semejanzas y diferencias, y para adelantar qué movimientos se han hecho con una figura para convertirla en otra, sin tener que realizarlos.

En el caso que nos ocupa, los alumnos que están aprendiendo destrezas caligráficas, tienen que poner en juego ciertas destrezas espaciales, tanto para identificar las regularidades que encierran las secuencias gráficas que le propone la maestra, como para continuarlas y reproducirlas, y posteriormente para aplicar estas destrezas a la copia y creación de secuencias silábicas que constituyen la escritura.

Por tanto, los alumnos de esta clase están poniendo en juego su sentido espacial para copiar y continuar las series. Pero a la vez están desarrollando su sentido espacial, a partir de la apreciación, copia y continuación de las series propuestas, y recibir la aprobación de la maestra, cuando su resultado es adecuado.

Para poder afrontar el aprendizaje del sentido espacial, se han estudiado qué aspectos complementarios contribuyen a manifestarlo y desarrollarlo. A partir de las apreciaciones del NCTM, Flores et al., (2015), definen las siguientes componentes que muestran disponer de sentido espacial:

- Manejar elementos geométricos,
- Identificar y emplear relaciones geométricas,
- Determinar la ubicación de los elementos de las formas y figuras, y los movimientos necesarios para pasar a nuevas ocupaciones, llegando a realizar dichos movimientos,
- Disponer y ejecutar estrategias de visualización.

Para realizar cada serie, los niños tienen que poner de manifiesto estas componentes en diferente grado. Se espera que las afiancen a base de copiar y completar las series, siempre bajo la supervisión de la maestra, quien sanciona la corrección de los ejercicios.

Para nuestra experiencia decidimos examinar cuáles de las componentes del sentido espacial se requieren para realizar cada secuencia, con lo que hicimos una descripción de las destrezas espaciales que se requieren para continuar la serie. Con este análisis pudimos investigar qué sentido espacial manifiestan los alumnos, es decir, cuáles de las destrezas aparecen reflejadas en su resolución de la serie.

LA EXPERIENCIA: EXAMINAR EL SENTIDO ESPACIAL DE LOS NIÑOS.

La experiencia vivida en las prácticas nos llevó a interesarnos por apreciar el sentido espacial que tienen los alumnos de primer ciclo de Educación Primaria, cuando realizan las series geométricas.

En este caso, los alumnos no están aprendiendo geometría de forma directa, ya que las series que realizan no están dentro de un tema concreto de matemáticas. Sin embargo

nos encontramos con un alumnado que está identificando regularidades de las series y elementos geométricos para poder continuarlas, por lo que podemos decir que tienen que disponer de ciertos elementos del sentido espacial, a la vez que están ejecutando un aprendizaje del sentido espacial de forma indirecta.

Nos encontramos con una gran variedad de series, programadas en orden creciente de complejidad. A los alumnos se les plantean las series en la pizarra, apareciendo el modelo con una variable, que no corresponde con el motivo que se repite. El motivo que se le suministra para continuarlo encierra diversas formas geométricas para asemejarse a la escritura caligráfica, en la que se alternan formas próximas con significados diferentes (como la e y l, por ejemplo). En el momento en el que las series son planteadas a la clase, la profesora no da ninguna explicación, y son los alumnos los que tienen que observarlas y realizarlas en una hoja completa de su cuaderno de clase, acompañadas con la copia y repetición de una serie de sílabas.

Como hemos expuesto anteriormente la experiencia que describimos consiste en examinar el sentido espacial de alumnos de primer curso de primaria, tratando de comprender cuáles de las componentes aparecen con más facilidad, cuáles resultan más complicadas para el niño, qué habilidades de visualización están presentes y cuáles requerirían nuevas tareas para contribuir a desarrollarlas. Estudiamos cuál es el sentido espacial que tienen, pues las respuestas las producen de manera libre, con la única ayuda de la supervisión de la maestra, quien revisa las libretas para comprobar que el trabajo ha sido realizado, y, valora con B si considera que han reproducido las series con suficiente precisión. Para ello examinaremos cómo siguen y completan las series que los alumnos desarrollan casi a diario en clase.

Nuestro estudio se ha realizado en una clase de 25 alumnos de 1º A de Educación Primaria del colegio concertado Juan XXIII-Cartuja, Granada, de los que en ningún momento aparecerán los nombres por motivos de privacidad, y que por lo tanto se trabajará con códigos. En la recogida de datos solo disponemos de datos de 18 de estos 25 alumnos, pero al seleccionar las series que se van a estudiar, queda la muestra reducida a 7 alumnos.

ANÁLISIS DE LAS SERIES

La experiencia tiene dos partes bien diferenciadas. En primer lugar realizamos un análisis teórico de las series presentadas, apreciando qué componentes del sentido espacial hay que poner en juego para continuarlas. Posteriormente hemos seleccionado algunas series para examinar el rendimiento de los alumnos, es decir, apreciar el sentido espacial de los alumnos. Para ello hemos tenido en cuenta: a) qué elementos geométricos aparecen en la serie y en las respuestas, b) las relaciones geométricas, c) la ubicación y movimiento de los motivos, y d) las destrezas de visualización necesarias para completar estas series.

En la figura 3 aparece una tabla en la que se analiza la serie 4. En ella podemos apreciar que identificamos como elementos tanto los segmentos, como las figuras que componen, a las que llamamos triángulos y rectángulos, cuando la composición de segmentos recuerda estas figuras, pues se completan como tales añadiendo las líneas horizontales que aparecen en la cuadrícula. Es por ello que el motivo con el que se genera

Comenzamos por establecer tres grupos para obtener las tres series que tuvieran más componentes del sentido espacial en común. Comenzamos por el análisis de los elementos geométricos, y en caso de no obtener tres series con el mayor número en común, tomamos las que más tuvieran y analizaríamos las relaciones geométricas, y así sucesivamente, con la ubicación y movimiento, y finalmente con las habilidades de visualización.

ANÁLISIS 1:

Elementos geométricos

1. Segmentos horizontales.
2. Segmentos verticales.
3. Segmentos oblicuos.
4. Ángulos rectos.
5. Ángulos agudos.
6. Ángulos obtusos.
7. Triángulo.
8. Rectángulo.
9. Pentágono.
10. Hexágono.
11. Arco.
12. Cuadrado.
13. Espiral.

$$1 \left\{ \begin{array}{l} 4: 1/2/3/4/5/6/7/8. \\ 5: 1/2/3/4/6/9. \\ 6: 1/2/3/4/6/9. \\ 7: 1/10. \\ 8: 1/10. \end{array} \right.$$

$$2 \left\{ \begin{array}{l} 9: 1/3/4/6/7/10. \\ 10: 1/3/4/6/7/10. \\ 11: 1/10. \\ 12: 1/2/4/11. \\ 13: 1/2/3/4/6/7/9. \\ 14: 1/2/3/4/6/7/9. \end{array} \right.$$

$$3 \left\{ \begin{array}{l} 15: 1/2/3/4/6/7/9. \\ 16: 1/2/3/4/5/8/11. \\ 17: 1/2/3/4/6/8/12. \\ 18: 1/3/4/5/6/7/11. \\ 19: 1/2/3/4/6/7/8. \\ 20: 1/3/4/6/7/10. \end{array} \right.$$

4/9/15: 1/3/4/6/7. 4/9/16: 1/3/4. 4/9/17: 1/3/4/6. 4/9/18: 1/3/4/6/7. 4/9/19: 1/3/4/6/7. 4/9/20: 1/3/4/6/7.	4/10/15: 1/3/4/6/7. 4/10/16: 1/3/4. 4/10/17: 1/3/4/6. 4/10/18: 1/3/4/6/7. 4/10/19: 1/3/4/6/7. 4/10/20: 1/3/4/6/7.	4/11/15: 1 4/11/16: 1 4/11/17: 1 4/11/18: 1 4/11/19: 1 4/11/20: 1
4/12/15: 1/2/4. 4/12/16: 1/2/4. 4/12/17: 1/2/4. 4/12/18: 1/4. 4/12/19: 1/2/4. 4/12/20: 1/4.	4/13/15: 1/2/3/4/6/7. 4/13/16: 1/2/3/4. 4/13/17: 1/2/3/4/6. 4/13/18: 1/3/4/6/7. 4/13/19: 1/2/3/4/6/7 4/13/20: 1/3/4/6/7.	4/14/15: 1/2/3/4/6/7. 4/14/16: 1/2/3/4. 4/14/17: 1/2/3/4/6. 4/14/18: 1/3/4/6/7. 4/14/19: 1/2/3/4/6/7. 4/14/20: 1/3/4/6/7.
5/9/15: 1/3/4/6. 5/9/16: 1/3/4. 5/9/17: 1/3/4/6. 5/9/18: 1/3/4/6. 5/9/19: 1/3/4/6. 5/9/20: 1/3/4/6.	5/10/15: 1/3/4/6. 5/10/16: 1/3/4. 5/10/17: 1/3/4/6. 5/10/18: 1/3/4/6. 5/10/19: 1/3/4/6. 5/10/20: 1/3/4/6.	5/11/15: 1 5/11/16: 1 5/11/17: 1 5/11/18: 1 5/11/19: 1 5/11/20: 1
5/12/15: 1/2/4. 5/12/16: 1/2/4. 5/12/17: 1/2/4. 5/12/18: 1/4. 5/12/19: 1/2/4. 5/12/20: 1/4.	5/13/15: 1/2/3/4/6/9. 5/13/16: 1/2/3/4. 5/13/17: 1/2/3/4/6. 5/13/18: 1/3/4/6. 5/13/19: 1/2/3/4/6. 5/13/20: 1/3/4/6.	5/14/15: 1/2/3/4/6/9. 5/14/16: 1/2/3/4. 5/14/17: 1/2/3/4/6. 5/14/18: 1/3/4/6. 5/14/19: 1/2/3/4/6. 5/14/20: 1/3/4/6.
6/9/15: 1/3/4/6. 6/9/16: 1/3/4. 6/9/17: 1/3/4/6. 6/9/18: 1/3/4/6. 6/9/19: 1/3/4/6. 6/9/20: 1/3/4/6.	6/10/15: 1/3/4/6. 6/10/16: 1/3/4. 6/10/17: 1/3/4/6. 6/10/18: 1/3/4/6. 6/10/19: 1/3/4/6. 6/10/20: 1/3/4/6.	6/11/15: 1 6/11/16: 1 6/11/17: 1 6/11/18: 1 6/11/19: 1 6/11/20: 1
6/12/15: 1/2/4. 6/12/16: 1/2/4. 6/12/17: 1/2/4. 6/12/18: 1/4. 6/12/19: 1/2/4. 6/12/20: 1/4.	6/13/15: 1/2/3/4/6/9. 6/13/16: 1/2/3/4. 6/13/17: 1/2/3/4/6. 6/13/18: 1/3/4/6. 6/13/19: 1/2/3/4/6. 6/13/20: 1/3/4/6.	6/14/15: 1/2/3/4/6/9. 6/14/16: 1/2/3/4. 6/14/17: 1/2/3/4/6. 6/14/18: 1/3/4/6. 6/14/19: 1/2/3/4/6. 6/14/20: 1/3/4/6.
7/9/15: 1 7/9/16: 1 7/9/17: 1 7/9/18: 1 7/9/19: 1 7/9/20: 1/10.	7/10/15: 1 7/10/16: 1 7/10/17: 1 7/10/18: 1 7/10/19: 1 7/10/20: 1/10.	7/11/15: 1 7/11/16: 1 7/11/17: 1 7/11/18: 1 7/11/19: 1 7/11/20: 1/10.

7/12/15: 1 7/12/16: 1 7/12/17: 1 7/12/18: 1 7/12/19: 1 7/12/20: 1	7/13/15: 1 7/13/16: 1 7/13/17: 1 7/13/18: 1 7/13/19: 1 7/13/20: 1	7/14/15: 1 7/14/16: 1 7/14/17: 1 7/14/18: 1 7/14/19: 1 7/14/20: 1
8/9/15: 1 8/9/16: 1 8/9/17: 1 8/9/18: 1 8/9/19: 1 8/9/20: 1/10.	8/10/15: 1 8/10/16: 1 8/10/17: 1 8/10/18: 1 8/10/19: 1 8/10/20: 1/10.	8/11/15: 1 8/11/16: 1 8/11/17: 1 8/11/18: 1 8/11/19: 1 8/11/20: 1/10.
8/12/15: 1 8/12/16: 1 8/12/17: 1 8/12/18: 1 8/12/19: 1 8/12/20: 1	8/13/15: 1 8/13/16: 1 8/13/17: 1 8/13/18: 1 8/13/19: 1 8/13/20: 1	8/14/15: 1 8/14/16: 1 8/14/17: 1 8/14/18: 1 8/14/19: 1 8/14/21: 1

Relaciones geométricas

1. Igualdad/Semejanza en la longitud de segmentos.
2. Igualdad/Semejanza en la altura de las figuras.
3. Igualdad/Semejanza de la longitud de la hipotenusa del triángulo y segmento.
4. Igualdad/Semejanza en la longitud de las figuras.
5. Igualdad/Semejanza en la longitud del radio de semicírculo y segmento.
6. Igualdad/Semejanza en la separación de las figuras.

$1 \left\{ \begin{array}{l} 4: I \ 4/6. \ S \ 1/2. \end{array} \right.$ <hr style="width: 10%; margin-left: 0;"/> $2 \left\{ \begin{array}{l} 13: I \ 1\ 3/4/6. \ S \ 2. \\ 14: I \ 4/6. \ S \ 1/2/3. \end{array} \right.$ $3 \left\{ \begin{array}{l} 15: I \ 4/6. \ S \ 1/2/3. \\ 19: I \ 3/6. \ S \ 1/2/4. \end{array} \right.$	$1 \left\{ \begin{array}{l} 5: I \ 1\ 2/4/6 \\ 6: I \ 1\ 2/4/6 \end{array} \right.$ $2 \left\{ \begin{array}{l} 13: I \ 1\ 3/4/6. \ S \ 2. \\ 14: I \ 4/6. \ S \ 1/2/3. \end{array} \right.$ $3 \left\{ \begin{array}{l} 15: I \ 4/6. \ S \ 1/2/3. \end{array} \right.$
4/13/15: I 4/6. S 2. 4/13/19: I 6. S 2.	4/14/15: I 4/6. S 1/2. 4/14/19: I 6. S 1/2.
5/13/15: I 4/6. S2. 5/14/15: I 4/6. S2.	6/13/15: I 4/6. S 2. 6/14/15: I 4/6. S 2.

SERIE: 4 / 14 / 15.
Nº DE ALUMNOS: 7.

ANÁLISIS 2:

Elementos geométricos

1. Segmentos horizontales.
2. Segmentos verticales.
3. Segmentos oblicuos.
4. Ángulos rectos.
5. Ángulos agudos.
6. Ángulos obtusos.
7. Triángulo.
8. Rectángulo.
9. Pentágono.
10. Hexágono.
11. Arco.
12. Cuadrado.
13. Espiral.

$$1 \left\{ \begin{array}{l} 4: 1/2/3/4/5/6/7/8. \\ 5: 1/2/3/4/6/9. \\ 6: 1/2/3/4/6/9. \\ 7: 1/10. \\ 8: 1/10. \\ 9: 1/3/4/6/7/10. \end{array} \right.$$

$$2 \left\{ \begin{array}{l} 10: 1/3/4/6/7/10. \\ 11: 1/10. \\ 12: 1/2/4/11. \\ 13: 1/2/3/4/6/7/9. \\ 14: 1/2/3/4/6/7/9. \end{array} \right.$$

$$3 \left\{ \begin{array}{l} 15: 1/2/3/4/6/7/9. \\ 16: 1/2/3/4/5/8/11. \\ 17: 1/2/3/4/6/8/12. \\ 18: 1/3/4/5/6/7/11. \\ 19: 1/2/3/4/6/7/8. \\ 20: 1/3/4/6/7/10. \end{array} \right.$$

4/10/15: 1/3/4/6/7. 4/10/16: 1/3/4. 4/10/17: 1/3/4/6. 4/10/18: 1/3/4/6/7. 4/10/19: 1/3/4/6/7. 4/10/20: 1/3/4/6/7.	4/11/15: 1 4/11/16: 1 4/11/17: 1 4/11/18: 1 4/11/19: 1 4/11/20: 1	4/12/15: 1/2/4. 4/12/16: 1/2/4. 4/12/17: 1/2/4. 4/12/18: 1/4. 4/12/19: 1/2/4. 4/12/20: 1/4.
4/13/15: 1/2/3/4/6/7. 4/13/16: 1/2/3/4. 4/13/17: 1/2/3/4/6. 4/13/18: 1/3/4/6/7. 4/13/19: 1/2/3/4/6/7 4/13/20: 1/3/4/6/7.	4/14/15: 1/2/3/4/6/7. 4/14/16: 1/2/3/4. 4/14/17: 1/2/3/4/6. 4/14/18: 1/3/4/6/7. 4/14/19: 1/2/3/4/6/7. 4/14/20: 1/3/4/6/7.	5/10/15: 1/3/4/6. 5/10/16: 1/3/4. 5/10/17: 1/3/4/6. 5/10/18: 1/3/4/6. 5/10/19: 1/3/4/6. 5/10/20: 1/3/4/6.
5/11/15: 1 5/11/16: 1 5/11/17: 1 5/11/18: 1 5/11/19: 1 5/11/20: 1	5/12/15: 1/2/4. 5/12/16: 1/2/4. 5/12/17: 1/2/4. 5/12/18: 1/4. 5/12/19: 1/2/4. 5/12/20: 1/4.	5/13/15: 1/2/3/4/6/9. 5/13/16: 1/2/3/4. 5/13/17: 1/2/3/4/6. 5/13/18: 1/3/4/6. 5/13/19: 1/2/3/4/6. 5/13/20: 1/3/4/6.
5/14/15: 1/2/3/4/6/9. 5/14/16: 1/2/3/4. 5/14/17: 1/2/3/4/6. 5/14/18: 1/3/4/6. 5/14/19: 1/2/3/4/6. 5/14/20: 1/3/4/6.	6/10/15: 1/3/4/6. 6/10/16: 1/3/4. 6/10/17: 1/3/4/6. 6/10/18: 1/3/4/6. 6/10/19: 1/3/4/6. 6/10/20: 1/3/4/6.	6/11/15: 1 6/11/16: 1 6/11/17: 1 6/11/18: 1 6/11/19: 1 6/11/20: 1
6/12/15: 1/2/4. 6/12/16: 1/2/4. 6/12/17: 1/2/4. 6/12/18: 1/4. 6/12/19: 1/2/4. 6/12/20: 1/4.	6/13/15: 1/2/3/4/6/9. 6/13/16: 1/2/3/4. 6/13/17: 1/2/3/4/6. 6/13/18: 1/3/4/6. 6/13/19: 1/2/3/4/6. 6/13/20: 1/3/4/6.	6/14/15: 1/2/3/4/6/9. 6/14/16: 1/2/3/4. 6/14/17: 1/2/3/4/6. 6/14/18: 1/3/4/6. 6/14/19: 1/2/3/4/6. 6/14/20: 1/3/4/6.
7/10/15: 1 7/10/16: 1 7/10/17: 1 7/10/18: 1 7/10/19: 1 7/10/20: 1/10.	7/11/15: 1 7/11/16: 1 7/11/17: 1 7/11/18: 1 7/11/19: 1 7/11/20: 1/10.	7/12/15: 1 7/12/16: 1 7/12/17: 1 7/12/18: 1 7/12/19: 1 7/12/20: 1
7/13/15: 1 7/13/16: 1 7/13/17: 1 7/13/18: 1 7/13/19: 1 7/13/20: 1	7/14/15: 1 7/14/16: 1 7/14/17: 1 7/14/18: 1 7/14/19: 1 7/14/20: 1	8/10/15: 1 8/10/16: 1 8/10/17: 1 8/10/18: 1 8/10/19: 1 8/10/20: 1/10.

8/11/15: 1 8/11/16: 1 8/11/17: 1 8/11/18: 1 8/11/19: 1 8/11/20: 1/10.	8/12/15: 1 8/12/16: 1 8/12/17: 1 8/12/18: 1 8/12/19: 1 8/12/20: 1	8/13/15: 1 8/13/16: 1 8/13/17: 1 8/13/18: 1 8/13/19: 1 8/13/20: 1
8/14/15: 1 8/14/16: 1 8/14/17: 1 8/14/18: 1 8/14/19: 1 8/14/21: 1	9/10/15: 1/3/4/6/7. 9/10/16: 1/3/4. 9/10/17: 1/3/4/6. 9/10/18: 1/3/4/6/7. 9/10/19: 1/3/4/6/7. 9/10/20: 1/3/4/6/7/10.	9/11/15: 1 9/11/16: 1 9/11/17: 1 9/11/18: 1 9/11/19: 1 9/11/20: 1/10.
9/12/15: 1/4. 9/12/16: 1/4. 9/12/17: 1/4. 9/12/18: 1/4. 9/12/19: 1/4. 9/12/20: 1/4.	9/13/15: 1/3/4/6/7. 9/13/16: 1/3/4. 9/13/17: 1/3/4. 9/13/18: 1/3/4/6/7. 9/13/19: 11/3/4/6/7. 9/13/20: 1/3/4/6/7.	9/14/15: 1/3/4/6/7. 9/14/16: 1/3/4. 9/14/17: 1/3/4. 9/14/18: 1/3/4/6/7. 9/14/19: 11/3/4/6/7. 9/14/20: 1/3/4/6/7.

RELACIONES GEOMÉTRICAS

1. Igualdad/Semejanza en la longitud de segmentos.
2. Igualdad/Semejanza en la altura de las figuras.
3. Igualdad/Semejanza de la longitud de la hipotenusa del triángulo y segmento.
4. Igualdad/Semejanza en la longitud de las figuras.
5. Igualdad/Semejanza en la longitud del radio de semicírculo y segmento.
6. Igualdad/Semejanza en la separación de las figuras.

1 { 4: I 4/6. S 1/2.	1 { 5: I 1 1/2/4/6 6: I 1/2/4/6	1 { 9: I 1/2/3/4/5/6.
2 { 13: I 1/3/4/6. S 2. 14: I 4/6. S 1/2/3.	2 { 13: I 1/3/4/6. S 2. 14: I 4/6. S 1/2/3.	2 { 10: I 1/2/3/4/5/6.
3 { 15: I 4/6. S 1/2/3. 19: I 3/6. S 1/2/4.	3 { 15: I 4/6. S 1/2/3.	3 { 20: I 4/6. S 1/2/3/5

4/13/15: I 4/6. S 2. 4/13/19: I 6. S 2.	4/14/15: I 4/6. S 1/2. 4/14/19: I 6. S 1/2.	5/13/15: I 4/6. S2. 5/14/15: I 4/6. S2.
6/13/15: I 4/6. S 2. 6/14/15: I 4/6. S 2.	9/10/20: I 4/6.	

SERIE: 4 / 14 / 15.
Nº DE ALUMNOS: 7.

ANÁLISIS 3:

Elementos geométricos

1. Segmentos horizontales.
2. Segmentos verticales.
3. Segmentos oblicuos.
4. Ángulos rectos.
5. Ángulos agudos.
6. Ángulos obtusos.
7. Triángulo.
8. Rectángulo.
9. Pentágono.
10. Hexágono.
11. Arco.
12. Cuadrado.
13. Espiral.

$$1 \left\{ \begin{array}{l} 4: 1/2/3/4/5/6/7/8. \\ 5: 1/2/3/4/6/9. \\ 6: 1/2/3/4/6/9. \\ 7: 1/10. \\ 8: 1/10. \\ 9: 1/3/4/6/7/10. \end{array} \right.$$

$$2 \left\{ \begin{array}{l} 10: 1/3/4/6/7/10. \\ 11: 1/10. \\ 12: 1/2/4/11. \\ 13: 1/2/3/4/6/7/9. \\ 14: 1/2/3/4/6/7/9. \\ 15: 1/2/3/4/6/7/9. \end{array} \right.$$

$$3 \left\{ \begin{array}{l} 16: 1/2/3/4/5/8/11. \\ 17: 1/2/3/4/6/8/12. \\ 18: 1/3/4/5/6/7/11. \\ 19: 1/2/3/4/6/7/8. \\ 20: 1/3/4/6/7/10. \\ 15: 1/2/3/4/6/7/9. \end{array} \right.$$

4/10/16: 1/3/4. 4/10/17: 1/3/4/6. 4/10/18: 1/3/4/6/7. 4/10/19: 1/3/4/6/7. 4/10/20: 1/3/4/6/7.	4/11/16: 1 4/11/17: 1 4/11/18: 1 4/11/19: 1 4/11/20: 1	4/12/16: 1/2/4. 4/12/17: 1/2/4. 4/12/18: 1/4. 4/12/19: 1/2/4. 4/12/20: 1/4.
4/13/16: 1/2/3/4. 4/13/17: 1/2/3/4/6. 4/13/18: 1/3/4/6/7. 4/13/19: 1/2/3/4/6/7 4/13/20: 1/3/4/6/7.	4/14/16: 1/2/3/4. 4/14/17: 1/2/3/4/6. 4/14/18: 1/3/4/6/7. 4/14/19: 1/2/3/4/6/7. 4/14/20: 1/3/4/6/7.	4/15/16: 1/2/3/4. 4/15/17: 1/2/3/4/6. 4/15/18: 1/3/4/6/7. 4/15/19: 1/2/3/4/6/7. 4/15/20: 1/3/4/6/7.
5/10/16: 1/3/4. 5/10/17: 1/3/4/6. 5/10/18: 1/3/4/6. 5/10/19: 1/3/4/6. 5/10/20: 1/3/4/6.	5/11/16: 1 5/11/17: 1 5/11/18: 1 5/11/19: 1 5/11/20: 1	5/12/16: 1/2/4. 5/12/17: 1/2/4. 5/12/18: 1/4. 5/12/19: 1/2/4. 5/12/20: 1/4.
5/13/16: 1/2/3/4. 5/13/17: 1/2/3/4/6. 5/13/18: 1/3/4/6. 5/13/19: 1/2/3/4/6. 5/13/20: 1/3/4/6.	5/14/16: 1/2/3/4. 5/14/17: 1/2/3/4/6. 5/14/18: 1/3/4/6. 5/14/19: 1/2/3/4/6. 5/14/20: 1/3/4/6.	5/15/16: 1/2/3/4. 5/15/17: 1/2/3/4/6. 5/15/18: 1/3/4/6. 5/15/19: 1/2/3/4/6. 5/15/20: 1/3/4/6.
6/10/16: 1/3/4. 6/10/17: 1/3/4/6. 6/10/18: 1/3/4/6. 6/10/19: 1/3/4/6. 6/10/20: 1/3/4/6.	6/11/16: 1 6/11/17: 1 6/11/18: 1 6/11/19: 1 6/11/20: 1	6/12/16: 1/2/4. 6/12/17: 1/2/4. 6/12/18: 1/4. 6/12/19: 1/2/4. 6/12/20: 1/4.
6/13/16: 1/2/3/4. 6/13/17: 1/2/3/4/6. 6/13/18: 1/3/4/6. 6/13/19: 1/2/3/4/6. 6/13/20: 1/3/4/6.	6/14/16: 1/2/3/4. 6/14/17: 1/2/3/4/6. 6/14/18: 1/3/4/6. 6/14/19: 1/2/3/4/6. 6/14/20: 1/3/4/6.	6/15/16: 1/2/3/4. 6/15/17: 1/2/3/4/6. 6/15/18: 1/3/4/6. 6/15/19: 1/2/3/4/6. 6/15/20: 1/3/4/6.
7/10/16: 1 7/10/17: 1 7/10/18: 1 7/10/19: 1 7/10/20: 1/10.	7/11/16: 1 7/11/17: 1 7/11/18: 1 7/11/19: 1 7/11/20: 1/10.	7/12/16: 1 7/12/17: 1 7/12/18: 1 7/12/19: 1 7/12/20: 1
7/13/16: 1 7/13/17: 1 7/13/18: 1 7/13/19: 1 7/13/20: 1	7/14/16: 1 7/14/17: 1 7/14/18: 1 7/14/19: 1 7/14/20: 1	7/15/16: 1 7/15/17: 1 7/15/18: 1 7/15/19: 1 7/15/20: 1
8/10/16: 1 8/10/17: 1 8/10/18: 1 8/10/19: 1 8/10/20: 1/10.	8/11/16: 1 8/11/17: 1 8/11/18: 1 8/11/19: 1 8/11/20: 1/10.	8/12/16: 1 8/12/17: 1 8/12/18: 1 8/12/19: 1 8/12/20: 1

8/13/16: 1 8/13/17: 1 8/13/18: 1 8/13/19: 1 8/13/20: 1	8/14/16: 1 8/14/17: 1 8/14/18: 1 8/14/19: 1 8/14/21: 1	8/15/16: 1 8/15/17: 1 8/15/18: 1 8/15/19: 1 8/15/21: 1
9/10/16: 1/3/4. 9/10/17: 1/3/4/6. 9/10/18: 1/3/4/6/7. 9/10/19: 1/3/4/6/7. 9/10/20: 1/3/4/6/7/10.	9/11/16: 1 9/11/17: 1 9/11/18: 1 9/11/19: 1 9/11/20: 1/10.	9/12/16: 1/4. 9/12/17: 1/4. 9/12/18: 1/4. 9/12/19: 1/4. 9/12/20: 1/4.
9/13/16: 1/3/4. 9/13/17: 1/3/4. 9/13/18: 1/3/4/6/7. 9/13/19: 11/3/4/6/7. 9/13/20: 1/3/4/6/7.	9/14/16: 1/3/4. 9/14/17: 1/3/4. 9/14/18: 1/3/4/6/7. 9/14/19: 11/3/4/6/7. 9/14/20: 1/3/4/6/7.	9/15/16: 1/3/4. 9/15/17: 1/3/4. 9/15/18: 1/3/4/6/7. 9/15/19: 11/3/4/6/7. 9/15/20: 1/3/4/6/7.

Relaciones geométricas

1. Igualdad/Semejanza en la longitud de segmentos.
2. Igualdad/Semejanza en la altura de las figuras.
3. Igualdad/Semejanza de la longitud de la hipotenusa del triángulo y segmento.
4. Igualdad/Semejanza en la longitud de las figuras.
5. Igualdad/Semejanza en la longitud del radio de semicírculo y segmento.
6. Igualdad/Semejanza en la separación de las figuras.

1 { 4: I 4/6. S 1/2. 2 { 13: I 1/3/4/6. S 2. 14: I 4/6. S 1/2/3. 15: I 4/6. S 1/2/3. 3 { 19: I 3/6. S 1/2/4.	1 { 9: I 1/2/3/4/5/6. 2 { 10: I 1/2/3/4/5/6. 3 { 20: I 4/6. S 1/2/3/5		
4/13/19: I 6. S 2.	4/14/19: I 6. S 1/2.	4/15/19: I 6. S 1/2.	9/10/20: I 4/6.

Ubicación y movimiento

1. Ubicación en relación a la cuadrícula.
2. Posición de las figuras respecto al segmento.
3. Posición de las figuras respecto a la línea base.
4. Traslación de una pieza para obtener otra.
5. Rotación de una parte para obtener otra.
6. Simetría de una pieza respecto a otra.

1	{	4: ① / 2 F continuación Se/3 ↓ / ④ / 5	
2	{	14: ① ② F continuación Se/3 ↑ ↓ ④ ⑤ 6. 15: ① ② F continuación Se/3 ↓ ↑ ④ ⑤ 6.	
3	{	19: ① ② F continuación Se/3 ↓ / ④ / ⑤ 6. F: Figura	Se: Segmento

Visualización

- Orientación: tendremos en cuenta la consideración de los elementos en la serie. En esta destreza y con respecto al esquema del análisis, aparecerá una O seguida de diferente (dif) o igual (igu) dependiendo de la serie.
- Discriminación visual: observamos la posición de cada elemento. En esta destreza y con respecto al esquema del análisis, aparecerá DV seguida de la inicial de los elementos geométricos de los que encontramos posición en cada serie.

1	{	4: O: (dif) DV: (L) (A) (T) R.	
2	{	14: O: (dif) DV: (L) (A) (T) P. 15: O: (dif) DV: (L) (A) (T) P.	
3	{	19: O: (dif) DV: (L) (A) (T) R.	

Para elegir el grupo de series a analizar nos basamos en la cantidad de alumnos de los que teníamos respuestas a estas series, por lo que decidimos analizar las series 4, 14 y 15 ya que contaban con siete alumnos que las habían realizado.

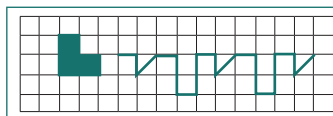


Figura 4: Serie gráfica 4.

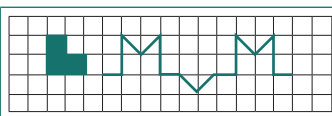


Figura 5: Serie gráfica 14.

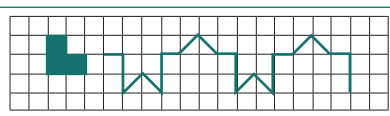


Figura 6: Serie gráfica 15.

La segunda parte del estudio consiste en estudiar qué elementos del sentido espacial ponen en juego los alumnos. Como en el análisis anterior, tendremos en cuenta qué elementos geométricos aparecen, las relaciones geométricas existentes, la ubicación y movimiento de las mismas y las destrezas de visualización encontradas.

SERIE 4	
Elementos geométricos.	Segmentos horizontales, verticales y oblicuos; ángulos rectos, agudos y obtusos; triángulo y rectángulo.
Relaciones geométricas.	<ul style="list-style-type: none"> • Igualdad en la longitud de las figuras. • Igualdad en la separación de las figuras. • Semejanza en la longitud de los segmentos. • Semejanza en la altura de las figuras.
Ubicación y movimiento.	<ul style="list-style-type: none"> • Ubicación en relación a la cuadrícula. • Alternativamente triángulos y rectángulos a continuación de segmentos. • Los trazos están siempre por debajo de la línea base. • Traslación de una pieza para obtener la otra (Identificación de la pieza que genera todo, por rotación y traslación).
Visualización.	<ul style="list-style-type: none"> • Orientación: considerar cada segmento orientado de manera diferente al anterior. • Discriminación visual: posición de las líneas, ángulos, triángulos y rectángulos. • Conservación de la percepción: aplica lo observado para continuar la serie de forma adecuada.

Figura 7: Análisis de la serie 4 del alumno 1.

Alumno	Serie	Elementos Geométricos	Relaciones Geométricas	Ubicación y movimiento	Visualización
1	4	1/2/3/4/5/6/7/8.	I 4/6 S 1/2	1/2 F continuación Se/3 ↓/4/5.	O: dif. DV: L/A/T/R. CP: SI
	14	1/2/3/4/6/7/9.	I 4. S 1/2/3.	1/3 ↑ ↓/4/5.	O: dif. DV: L/A. CP: NO
	15	1/2/3/4/6/7/9.	I 4/6 S 1/2/3.	1/2 F continuación Se/3 ↓ ↑/4/5/6.	O: dif. DV: L/A/T/P. CP: SI
2	4	1/2/3/4/5/6/7/8/13.	I 4/6 S 1/2	1/3 ↓/4/5.	O: dif. DV: L/A. CP: NO
	14	1/2/3/4/6/7/9.	I 4. S 1/2/3.	1/3 ↑ ↓/4/5.	O: dif. DV: L. CP: NO
	15	1/2/3/4/6/7.	I 4/6 S 1/2/3.	1/2 F continuación Se/3 ↓/4/5.	O: dif. CP: NO
		F: Figura. Se: Segmento. L: Línea. A: Ángulo.	T: Triángulo. R: Rectángulo. C: Cuadrado. P: Pentágono.	S: Semicírculo. H: Hexágono. Ar: Arco. E: Espiral.	

Figura 8: Esquema del análisis de las series realizadas por los alumnos.

Alumno	Serie	Elementos Geométricos	Relaciones Geométricas	Ubicación y movimiento	Visualización
3	4	1/2/3/4/5/6/7/8.	I 4. S 1/2.	1/3 ↓/4/5.	O: dif. CP: NO
	14	1/2/3/4/6/7/9.	S 1/2/3.	1/3 ↑ ↓/4/5.	O: dif. CP: NO
	15	1/2/3/4/6/7/9.	I 6 S 1/2	1/2 F continuación Se/3 ↑/4/5.	O: dif. DV: T/P. CP: NO
4	4	1/2/3/4/5/6/7/8.	S 1/2/4/6.	1/2 F continuación Se/3 ↓/4/5.	O: dif. DV: L/A/T/R. CP: SI
	14	1/2/3/4/6/7/9.	I 4/6 S 1/2/3.	1/2 F continuación Se/3 ↓ ↑/4/5/6.	O: dif. DV: L/A/T/P. CP: SI
	15	1/2/3/4/6/7/9.	I 6 S 1/2	1/2 F continuación Se/3 ↑/4/5.	O: dif. DV: L/A/T/P. CP: NO
5	4	1/2/3/4/5/6/7/8.	S 1/2/4.	1/2 F continuación Se/3 ↓/4/5.	O: dif. CP: NO
	14	1/2/3/4/6/7/9.	S 1/2/3/4.	1/3 ↑ ↓/4/6.	O: dif. CP: NO
	15	1/2/3/4/6/7/9.	I 4/6 S 1/2/3.	1/2 F continuación Se/3 ↓ ↑/4/5/6.	O: dif. DV: L/A/T/P. CP: SI
6	4	1/2/3/4/5/6/7/8.	I 4/6 S 1/2.	1/2 F continuación Se/3 ↓/4/5.	O: dif. DV: L/A/T/P. CP: NO
	14	1/2/3/4/6/7/9.	I 2/4/6. S1	1/2 F continuación Se/3 ↑ ↓/4/5/6.	O: dif. DV: L/A/T/P. CP: NO
	15	1/2/3/4/6/7/9.	I 4/6 S 1/2/3.	1/2 F continuación Se/3 ↓ ↑/4/5/6.	O: dif. DV: L/A/T/P. CP: SI
7	4	1/2/3/4/5/6/7/8.	I 4/6 S 1/2.	1/2 F continuación Se/3 ↓/4/5.	O: dif. DV: R CP: NO
	14	1/2/3/4/6/7/9.	I 4/6. S1/2/3.	1/2 F continuación Se/3 ↑ ↓/4/5/6.	O: dif. DV: L/A/T/P. CP: SI
	15	1/2/3/4/6/7/9.	S1.	1/3 ↓ ↑/4/5/6.	O: dif. CP: NO

F: Figura.	T: Triángulo.	S: Semicírculo.
Se: Segmento.	R: Rectángulo.	H: Hexágono.
L: Línea.	C: Cuadrado.	Ar: Arco.
A: Ángulo.	P: Pentágono.	E: Espiral.

Figura 8: Esquema del análisis de las series realizadas por los alumnos.

Tras este análisis podemos observar que la mayoría de las respuestas de los alumnos son correctas, presentando algunas respuestas erróneas, preferentemente en la copia y repetición, es decir, en los últimos renglones de la copia, dado que los alumnos realizan toda una página de su cuaderno de cada serie. No hemos apreciado errores sistemáticos que se manifiesten a lo largo de toda la copia, sino apareciendo de manera esporádica. Estas apariciones nos han llevado a buscar su regularidad en relación a los demás compañeros. En la siguiente sección recogemos como erróneas aquellas manifestaciones aisladas.

RESULTADOS

Tras el análisis de las series de los siete alumnos, a continuación comparamos las respuestas erróneas con la muestra presentada, y apreciamos qué componentes, y elementos de dichas componentes se han dejado de poner de manifiesto en la respuesta equivocada de cada uno de los alumnos.

De esta última comparación obtuvimos, que la componente que es más evidente, que se manifiesta de manera adecuada en la mayoría de las ocasiones, es la identificación y reproducción de los elementos geométricos, ya que pudimos observar como todos los alumnos realizaban siempre las figuras deseadas.

SERIE 14																							
Componentes	Elementos Geométricos								Relaciones Geométricas						Ubicación y movimiento						Visualización		
Presentada	1	2	3	4	6	7	9	S1	S2	S3	I4	I6	1	2	3	4	5	6	O: dif.	DV: L, A, T, P.	C.P.		
Alumno 1	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X			X	X	X	X				
Alumno 2	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X			X	X	X	X				
Alumno 3	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X			X	X	X	X				
Alumno 4	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X		
Alumno 5	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X			X	X	X	X				
Alumno 6	X	X	X	X	X	X	X	X			X	X	X	X	X	X	X	X	X	X			
Alumno 7	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X		
Frecuencia	7	7	7	7	7	7	7	7	7	6	6	5	3	7	3	7	7	6	4	7	3	2	

Figura 9. Tabla de resultados.

Pudimos observar que los alumnos aprecian las características geométricas de todas las series en la mayoría de las copias que realizaron en su cuaderno. Sin embargo, el poco cuidado en el dibujo hace que algunos alumnos dibujen formas deformes que no corresponden a la serie en sus últimas repeticiones.

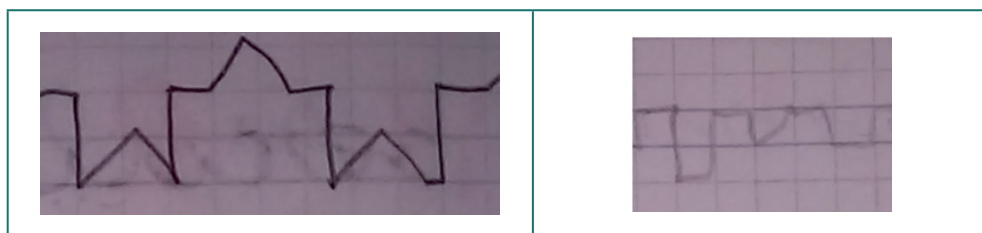


Figura 10: Dibujos deficientes de las formas geométricas

En el primer ejemplo de la figura 10 apreciamos como convierten un “pentágono cóncavo” en un “hexágono cóncavo”, quizás para hacer coincidir el vértice con la cuadrícula. En el segundo ejemplo apreciamos descuido en dibujar líneas rectas, así como en hacerlas coincidir con la cuadrícula en la que tienen que dibujarlas.

Además de esto, nos encontramos que los alumnos tienen más dificultades en las componentes de relaciones geométricas y ubicación y movimiento, aunque como están compuestas por distintos elementos hay unos en los que tienen mayor dificultad y otros en los que no aparece ninguna.

Por ejemplo, en las relaciones geométricas nos encontramos con que los alumnos aprenden con facilidad a observar la longitud de los segmentos, ya que todos ellos reflejan en sus series la semejanza de los mismos que aparece en las series propuestas.

En cuanto a la ubicación y movimiento, podemos señalar que identifican y reproducen con facilidad la ubicación en la cuadrícula y los movimientos de traslación y rotación de una pieza para obtener otra.

Referente a esto, también podemos observar que hay algunas de las relaciones geométricas que realizan los alumnos en las que cambian la igualdad por la semejanza o viceversa. Por ejemplo, el alumno 4 en la serie 4 realiza semejanza en todas las relaciones geométricas cuando en las dos últimas debería de realizar una igualdad (figura 11).

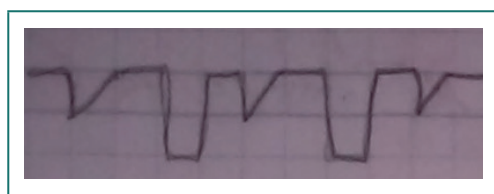


Figura 11: Deficiencia en percepción de figuras.

Fue en las habilidades de visualización donde más problemas reflejaron. Dentro de la visualización nos encontramos con tres variables, que son la orientación, la discriminación visual y la conservación de la percepción.

Los alumnos tienen en cuenta los elementos en las series y los orientan adecuadamente, por lo tanto podemos decir que la orientación es una habilidad que

los alumnos han adquirido.

Sin embargo, tanto en la discriminación visual como en la conservación de la percepción, tendríamos que realizar nuevas tareas en el aprendizaje, ya que la mayoría de los alumnos cometen errores de conservación de la posición de cada elemento en las series y por tanto a veces no aplican lo observado para el desarrollo adecuado de las mismas.

Aunque hay dificultades en la discriminación visual que generan errores, principalmente por no conservar la posición de cada elemento. Algún alumno conserva sólo algunas de ellas, como se aprecia en la figura 12 A, en la que solo conserva la posición de los rectángulos. Respecto a la conservación de la percepción, observamos que hay algunos alumnos que aunque lo hagan todo lo anterior de forma correcta, cometen errores no conservando siempre la percepción. Un ejemplo de estos casos es la figura 12 B.

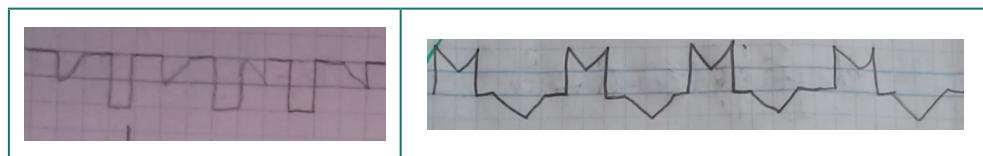


Figura 12 A: No conserva posición

Figura 12 B: No conserva percepción de longitudes de segmentos

CONCLUSIONES

En esta experiencia hemos mostrado la importancia del sentido espacial para el aprendizaje de la escritura, especialmente a partir de las series que la maestra (siguiendo algunos métodos de enseñanza de la caligrafía), introduce para el aprendizaje de la escritura. Para ello hemos tratado de comprender cuáles de las componentes del sentido espacial aparecen con más regularidad y facilidad. Su estudio nos ha mostrado la necesidad de desarrollar todas las componentes del mismo, en diverso grado de profundidad. Igualmente hemos apreciado cuáles resultan más complicadas para el niño, qué habilidades de visualización están siempre presentes y cuáles requerirían nuevas tareas para contribuir a desarrollarlas.

En general las series realizadas por los alumnos son bastantes correctas, pero si examinamos todas las repeticiones de las series apreciamos algunas deficiencias respecto al sentido espacial.

Podemos sacar en claro que los alumnos aprecian, dibujan y cuidan de realizar con mayor facilidad los elementos geométricos que aparecen en estas series. En las repeticiones pueden dejar de lado algunas relaciones geométricas y la ubicación y movimientos, que les llevan a ajustar para mantener la cuadrícula, sin darle importancia a que no se respeten. Lo que más llama la atención es que en la visualización todos los alumnos suelen presentar problemas para repetir en todas las ocasiones respetando las habilidades de esta componente en las que nos basamos en el estudio.

En conclusión, podemos decir, que en general las series realizadas por los alumnos son bastantes correctas, tienen un sentido espacial adecuado para reproducirlas y continuarlas, aunque parece que la repetición del modelo genera más cansancio y dejadez que afianzamiento del aprendizaje logrado. Llama la atención que no detecten a simple vista desacuerdos visuales, que aparecen de manera aislada en algunas copias de series, aunque en otras copias de la misma muestren haber captado sus elementos principales. Podemos suponer que estas cualidades se reflejarán en la escritura caligráfica de los niños, especialmente cuando se demande su repetición excesiva.

El trabajo realizado ha servido, además, para apreciar en qué consiste una investigación educativa, contribuyendo a la formación como maestra de la autora.

REFERENCIAS

- Flores, P., Ramírez, R. y del Río, A. (2015) Sentido espacial. En Flores, P. y Rico, L. (Coords.). *Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en Educación Primaria*. (pp. 127-145). Madrid, Pirámide.
- González, C. (2003): *Enseñanza y aprendizaje de la lengua en la escuela infantil*. Granada: Grupo editorial universitario.
- Lupiáñez, J.L y Rico, L. (2015) Aprender las matemáticas escolares.. En Flores, P. y Rico, L. (Coords.). *Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en Educación Primaria*. (pp. 41-60). Madrid, Pirámide.
- MEC (2015): Descripción de las relaciones entre competencias, contenidos y criterios de evaluación de la educación primaria, educación secundaria y bachillerato. BOE-A-2015-738.
- MECD (2013). LOMCE, ley orgánica 8/2013, de 9 de diciembre, para la mejora de la calidad educativa. BOE nº 295
- National Council or Teachers of Mathematics (1998) *Principles and standards for school mathematics* [draft document]. Reston, VA: NCTM
- New Jersey Mathematics Coalition (1996). Geometry and spatial sense. Standard 7. En *New Jersey Mathematics Curriculum Framework*, (pp. 209-249).
- Rius, M.D. (1989), *Grafomotricidad*. Madrid, Seco Lea.

Modelado e impresión 3D como recurso didáctico en el aprendizaje de la probabilidad

Pablo Beltrán-Pellicer
Universidad de Zaragoza

Resumen: *Describimos una experiencia piloto en primer ciclo de secundaria sobre la enseñanza-aprendizaje de nociones probabilísticas, en la que los alumnos diseñan dados, los imprimen en 3D y posteriormente analizan si son sesgados. La experiencia se enmarca dentro del significado frecuentista de la probabilidad, facilitando su puesta en relación con el significado clásico o a priori.*

Palabras clave: *probabilidad, modelado, impresión 3D, educación secundaria.*

3D modelling and printing as a didactic tool in probability learning

Abstract: *We introduce a pilot experience in the beginning of secondary education about the teaching and learning of probabilistic concepts, where students design some dice, then print them in 3D printing and finally study their fairness. The experience is related to the frequentist meaning of probability, and help students to relate it to the classic or a priori meaning.*

Keywords: *probability, modelling, 3D printing, secondary education.*

INTRODUCCIÓN

En este trabajo presentamos una experiencia piloto de enseñanza-aprendizaje cuya finalidad fue articular los significados frecuencial y clásico de la probabilidad, a partir del modelado de cuerpos tridimensionales (dados), su posterior impresión y experimentación. El objetivo didáctico que se persigue mediante las tareas propuestas es evidenciar y corregir intuiciones primarias erróneas y sesgos en el razonamiento probabilístico, a la vez que se proporciona un punto de apoyo para la negociación de los significados frecuencial y clásico de la probabilidad.

La secuencia idónea de tratamiento de los diferentes significados de la probabilidad comienza con los usos informales del lenguaje y la distinción de fenómenos aleatorios

y deterministas (Godino, Batanero y Cañizares, 1987). Una vez clarificados los términos, se continúa con experiencias y simulaciones (dados, monedas, etc.) para introducir el significado frecuencial. Más adelante, entrará en juego la regla de Laplace y, con ella, el significado clásico, reservándose la aproximación formal a la teoría axiomática de la probabilidad para el bachillerato y primeros cursos universitarios. La experiencia que se ha realizado se inserta en el segundo paso de la secuencia, enriqueciendo las situaciones sobre las que articular el significado frecuencial, en un punto donde las simulaciones propuestas tradicionalmente en los libros de texto son escasas (Ortiz, Batanero y Serrano, 2007).

Las impresoras 3D (Jones et al., 2011) son máquinas de bajo coste, que poco a poco están encontrando su lugar en el ámbito educativo, principalmente en asignaturas como Tecnología (González-Gómez et al., 2012). No obstante, creemos que su utilización como recurso también ofrece múltiples posibilidades en Matemáticas, y no solamente en el bloque de geometría. Unidas a paquetes de software de diseño asistido por ordenador (CAD), muchos de ellos libres o gratuitos, permiten hacer realidad las más diversas creaciones, desde juegos hasta prótesis, pasando por la robótica. De esta manera, complementan y expanden el horizonte de otros recursos manipulativos virtuales, sobre los que ya se han realizado experiencias satisfactorias, como Geogebra 3D (Madrid, 2015). La complejidad de estos entornos CAD es variable, encontrando sofisticadas opciones libres, como Freecad (<http://www.freecadweb.org>) y Openscad (<http://www.openscad.org>), que permiten diseñar modelos en 3D utilizando parámetros y restricciones en los objetos que se van creando. Aunque el interés de introducir estos entornos en educación es innegable, existen alternativas que facilitan enormemente la curva de aprendizaje, como Tinkercad (<https://www.tinkercad.com>). Se trata de una aplicación web gratuita propiedad de Autodesk, en la que el diseño de los objetos se lleva a cabo uniendo formas geométricas básicas, como prismas, cilindros y esferas.

A continuación, se narra la experiencia de aula, la tarea que se planteó a los alumnos, cómo trataron de resolverla y algunos aspectos propios del recurso.

LA EXPERIENCIA

Para esta experiencia se ha optado por utilizar Tinkercad, que simplifica la tarea de diseño. Se planteó como actividad voluntaria en 2º de ESO, prácticamente a final de curso. Participaron un total de 10 alumnos, de rendimientos académicos y perfiles diversos. La consigna inicial fue la siguiente:

Consigna: la tarea consiste en diseñar un dado con ordenador. Es voluntario y añade 0,5 puntos al examen de geometría. Después, imprimiré en 3D vuestros dados, que os podréis quedar, y os pediré que los probéis para ver si están o no sesgados. A continuación, os explico cómo hacerlo (Figura 1).

No hizo falta explicar mucho en qué consistía la impresión en 3D, puesto que alguna vez ya se les había hablado de ello y sabían que su profesor había montado una impresora en casa. Seguidamente, se dedicaron alrededor de 15 minutos a describir Tinkercad desde el PC de aula, con la intención de que usaran como forma básica un cubo y de que

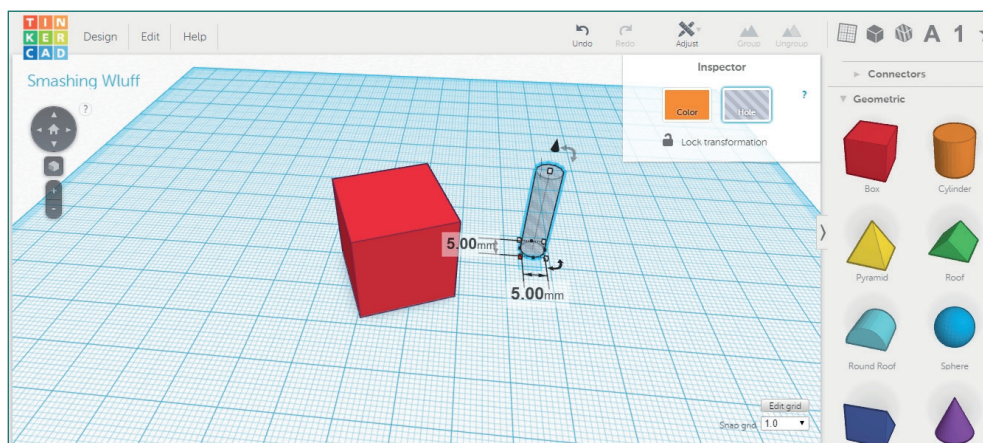


Figura 1: Descripción de Tinkercad en la sesión inicial.

utilizaran cilindros para poner los “puntitos” de las caras, como se observa en la Figura 1. Para ello, se le señaló que las piezas podían unirse entre ellas agrupándolas para formar piezas más complejas, como nuestro dado. Además, se indicó que cada pieza podía ser configurada como “sólido” o como “agujero”, de manera que al unirlas se podían obtener cuerpos sólidos o cuerpos con cavidades. Al finalizar, se les indicó que descargaran el archivo con el cuerpo producido, y que lo adjuntaran al profesor por correo electrónico o se lo dieran en una memoria USB.

Al día siguiente, un alumno ya había realizado la tarea, descubriendo que, aparte de lo que le había dicho el profesor, había una infinidad de formas para construir los modelos. Entre ellas, la inequívoca forma de un dado con las esquinas redondeadas y cifras en tres dimensiones, como se muestra en la Figura 2. Con el fin de homogeneizar los diseños, de manera que la forma de partida no fuera determinante, se propuso a los alumnos que diseñaran dos dados, uno obligatoriamente cúbico y con “puntitos”; el otro como quisieran.

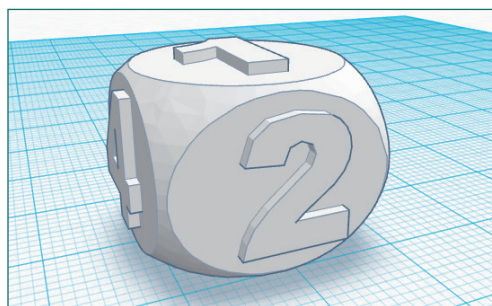


Figura 2: Dado con esquinas redondeadas construido a partir de la forma básica disponible.

Se dio de plazo una semana para la entrega de los diseños, recogiendo finalmente las producciones de 10 alumnos. A la semana siguiente, se les citó individualmente para hacerles una breve entrevista en la que se les preguntaba lo siguiente:

1. ¿Es este el dado que diseñaste? ¿Te gusta cómo ha quedado?
2. ¿Lo usarías para jugar a algún juego de mesa?
3. ¿Cómo sabrías si es un buen dado? ¿Hacemos la prueba?

La primera pregunta persigue constatar que, efectivamente, se le ha hecho entrega del dado que ha diseñado el alumno. Por otro lado, también se pregunta si opina que, efectivamente, se ha imprimido a su gusto y, por ejemplo, no observa fallos de impresión. Con la segunda, se cuestiona a los alumnos por la bondad de su creación (equitatividad del dado). Es decir, si sirve para jugar a juegos de mesa, donde se espera que el dado proporcione resultados equiprobables, el dado será un buen dado. De lo contrario, sería un dado sesgado, o como suele decirse informalmente, un dado trucado. La última pregunta vuelve a incidir sobre el posible error de diseño del dado, pero de una forma más explícita. Finalmente, se invita a los alumnos a probar el dado experimentalmente.

Convirtiendo en diseñadores a los alumnos, mediante el planteamiento de la fabricación de un simple dado, se permite la puesta en juego de sus concepciones y de su razonamiento probabilístico, además de fomentar su razonamiento geométrico. En la siguiente sección se comentan las producciones de los alumnos, los argumentos que dan y cómo afrontan la prueba de los dados.

PROCESO

Antes de comenzar con los resultados propiamente dichos, debemos decir que el diseño y la posterior fabricación de dados de calidad no es una cuestión baladí. Aunque teóricamente podamos diseñar un dado perfectamente equilibrado, teniendo en cuenta la distribución de la masa del dado, la formación de una minúscula burbuja en el interior durante la fabricación ocasionaría un sesgo. Por esta razón, los dados destinados a casinos y salas de juego son sometidos a un estricto control de calidad.

Las impresoras 3D que se están comenzando a montar en los institutos, son máquinas de construcción amateur, cuya precisión no aceptaría ningún casino. Por otro lado, el proceso de impresión en sí no está exento de consideraciones que deberían tenerse en cuenta en el diseño. Aunque no entra dentro de nuestros objetivos el que los alumnos tengan en cuenta estos aspectos, debido a que su impacto en la bondad del dado es insignificante comparado con los errores de diseño, sí que debemos mencionarlos en este artículo.

Una vez que se recibe el diseño en 3D del objeto en el mencionado formato STL, lo que se hace es abrirlo con otro software que traduce ese diseño a instrucciones propias de la impresora. Existen diferentes alternativas; por ejemplo, Slic3r (<http://slic3r.org/>) y Cura (<https://ultimaker.com/en/products/cura-software>), ambas de código abierto. Esto es necesario porque el hardware de la impresora lo único que entiende, básicamente, son instrucciones relativas a la activación de sus motores y de relés. Este software traductor divide el diseño en una serie de finas capas horizontales, de manera que cada una de ellas pueda ser construida depositando plástico fundido, que rápidamente se solidifica. Así, los motores de los ejes permiten el movimiento en los tres ejes de coordenadas cartesianas y el avance del extrusor, que empuja el plástico a través del fusor o punto caliente. Este proceso varía ligeramente dependiendo de varios factores, incluyendo el tipo de plástico que se use para imprimir la pieza. Podemos ver un dado imprimiéndose en la Figura 3.

El diseño de dados ha propiciado interesantes discusiones en los repositorios de modelos online, como Thingiverse (<http://www.thingiverse.com/thing:147883/#comments>).

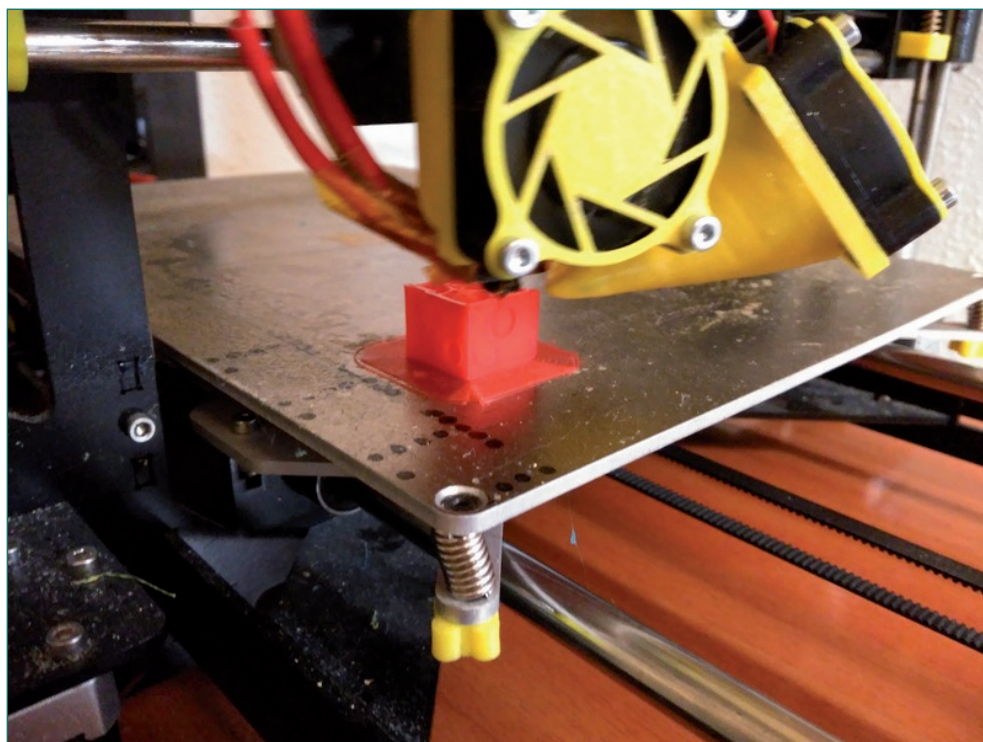


Figura 3: Dado en proceso de impresión.

Los usuarios han realizado, incluso, pruebas chi-cuadrado de significancia estadística para comprobar el correcto balanceo de los dados. Las conclusiones más relevantes son:

- Los dados con esquinas más redondeadas, evidentemente, ruedan más. Esto es algo que amplifica cualquier sesgo de diseño, lo que constituye una ventaja de cara a nuestros objetivos.
- Si colocamos el dado para que se imprima girado 45°, obtenemos mejores resultados.
- El porcentaje de relleno de los dados influye. El software traductor permite ahorrar plástico, relleno el interior de la pieza con un mallado rectangular o hexagonal. Se comprueba que es mejor imprimir dados sólidos al 100%.

De estas consideraciones, únicamente hemos tenido en cuenta la primera, permitiendo a los alumnos utilizar la forma básica de dado con esquinas redondeadas.

RESULTADOS

Analizados los dados construidos por los alumnos, los errores de diseño que se identifican son los siguientes:

1. Cuando se indican los puntos con cavidades, no se ha retirado la misma cantidad de material en todas las caras, por lo que unas caras pesan más que otras
2. Un error similar se produce cuando en lugar de retirar material, se añade, con lo que se propicia que se mantenga sobre ciertas caras mayor masa que en otras.
3. No se tiene en cuenta que la suma de las puntuaciones de las caras debería sumar 7 para facilitar el equilibrado del dado (esto está relacionado con el error de tipo 2), como ocurre en los dados estándar.
4. No se centran o alinean los puntos de cada cara, lo cual influye también en la distribución de masa del dado.
5. El dado no presenta las mismas dimensiones en todas sus caras.

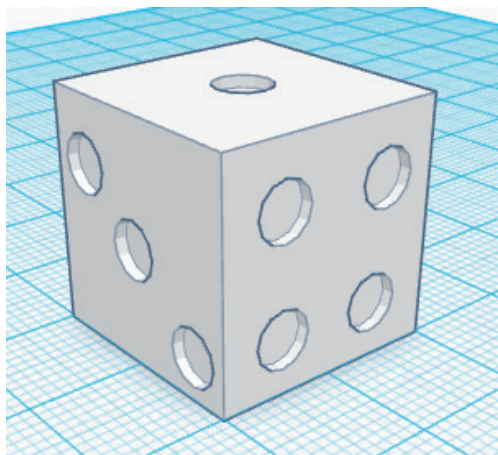


Figura 4: Diseño que presenta errores de tipo 1 y 3.

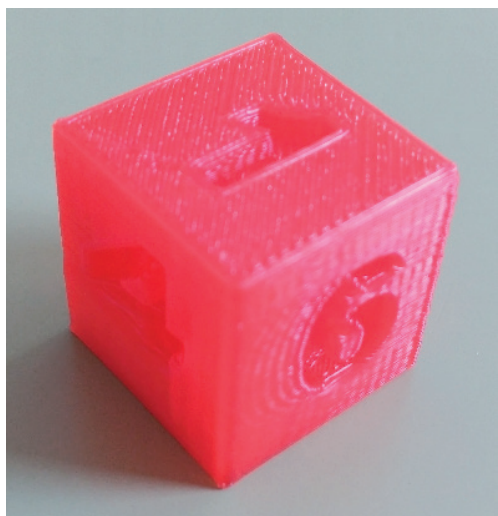


Figura 5: Dado impreso con cavidades en forma de cifras indoarábigas.

El error más habitual ha sido el de tipo 1, cometido por todos los alumnos que participaron y, normalmente, en conjunción con errores de otra clase. Por ejemplo, en la Figura 4 se muestra el diseño de un dado en el que no se tiene en cuenta que debería retirarse la misma masa de cada cara. Además, vemos que el 3 y el 4 están en caras contiguas, perjudicando todavía más el equilibrado (error de tipo 3).

Una variante del error de tipo 1 incluye los diseños de dados en los que se utilizan cavidades con forma de cifras indoarábigas en cada cara (figura 5). En este caso, todavía resulta más complicado calcular el volumen retirado, operación que no realizan los alumnos. En las entrevistas, mencionan que les parece más bonito el dado de esa manera.

Luego, están los errores aislados. Nos encontramos con el dado de la Figura 2, que aparece achatado en el eje Z, de manera que las caras superiores son distintas a las laterales (error de tipo 5). Dicho dado, además, presenta las cifras añadidas en sólido, como protuberancias de diferente masa (error de tipo 2). Cuatro de los alumnos, por otro lado, no utilizaron la herramienta de alineación de Tinkercad, de manera que los puntos no aparecen centrados (error de tipo 4). Y finalmente, dos de los alumnos cometieron otros errores, como usar formas

Resultado tras 30 tiradas con el dado (números)				Resultado tras 60 tiradas con el dado (números)			
nº	veces	Total	%	nº	veces	Total	%
1		5	16'6	1		8	13'3
2		9	30	2		13	21'6
3		4	13'3	3		11	18'3
4		3	10	4		7	11'6
5		6	20	5		11	18'3
6		3	10	6		10	16'6
Total		30	99'9	Total		60	99'7

Figura 6: Tabla de frecuencias de uno de los alumnos.

distintas a las solicitadas y caras con símbolos extraños (o repetidos, que es lo que invalida el diseño).

En lo que respecta a la comprobación de los dados, todos los alumnos responden afirmativamente a la pregunta de si jugarían a juegos de mesa con su dado. La respuesta que ofrecen inicialmente es un simple “sí”, mientras que al pedirles que lo razonen añaden “sí, es un dado, ¿no?”. Cuando se les pide que lo comprueben, 25 o 30 lanzamientos les parece suficiente. El alumno que más lanzamientos realizó para probar su dado hizo 60 intentos, quedándose satisfecho a pesar de la dispersión de los datos (11,6% para el 4 y 21,6% para el 2, como se aprecia en la Figura 6).

CONCLUSIONES

El trabajo que se ha presentado constituye una experiencia piloto que muestra que las aplicaciones educativas del diseño y la posterior impresión en 3D van mucho más allá de las meramente tecnológicas. En la asignatura de Matemáticas encuentran una aplicación directa dentro del bloque de geometría, pero sus posibilidades en cualquier campo son más que sugerente. La secuencia de actividades, que comenzaba con la simple tarea de diseñar un dado, presenta un recurso que permite cimentar el significado frecuentista de la probabilidad, así como servir de punto de articulación para la comprensión del significado clásico. En ese sentido, en el proceso de diseño se ha detectado cómo ninguno de los alumnos participantes ha sido consciente de que el peso de cada una de las caras influye en su probabilidad de ocurrencia. Un sesgo común es suponer que cualquier dado serviría para el juego, por lo que pensamos se debiera dedicar algo de tiempo a explorar la idea de equitatividad en el aula. Es posible que esta idea esté relacionada con el sesgo de equiprobabilidad (Lecoutre, 1992) por la que algunos alumnos suponen que, sólo por ser aleatorio, en cualquier experimento de este tipo los resultados son equiprobables.

La comprobación de los dados, una vez imprimidos, pone en juego técnicas de recolección de datos estadísticos, así como la idea intuitiva que pueden tener los alumnos en torno a la estabilidad de las frecuencias relativas. También en este punto se requiere un

tiempo de trabajo, pues los alumnos en nuestra experiencia no fueron conscientes de la necesidad de trabajar con muestra de tamaño suficiente.

AGRADECIMIENTOS

Debo expresar mi agradecimiento a la Dra. Carmen Batanero, por su buena disposición para hacerme sugerencias y comentarios sobre el artículo.

REFERENCIAS

- Batanero, C. (2005). Significados de la probabilidad en educación secundaria. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 8, 247-263.
- Godino, J. D., Batanero, C., & Cañizares, M. J. (1987). *Azar y probabilidad*. Madrid: Editorial Síntesis.
- Gonzalez-Gomez, J., Valero-Gomez, A., Prieto-Moreno, A., & Abderrahim, M. (2012). A new open source 3D-printable mobile robotic platform for education. En *Advances in autonomous mini robots* (pp. 49-62). Springer Berlin Heidelberg.
- Jones, R., Haufe, P., Sells, E., Iravani, P., Olliver, V., Palmer, C., & Bowyer, A. (2011). Re-pRap – the replicating rapid prototyper. *Robotica*, 29, 177-191.
- Lecoutre, M. P. (1992). Cognitive models and problem spaces in “purely random” situations. *Educational Studies in Mathematics*, 23, 557-568.
- Madrid, M. J. (2015). Enseñando geometría: Geogebra 3D en la formación para maestros. *Epsilon* 32(2), 31-38.
- Ortiz, J.J.; Batanero, C.; Serrano, L. (2007) Modelización y simulación de la estadística y la probabilidad en los libros de texto en Educación Secundaria. En P. Bolea; M. Camacho; P. Flores; B. Gómez; J. Murillo; M.T. González (Eds.), *Investigación en Educación Matemática. Comunicaciones de los grupos de investigación*. (pp.115-129). X Simposio de la SEIEM. Huesca.

La definición frecuentista de probabilidad a través de la simulación con el lenguaje de programación R

José Carlos Casas
 Universidad de Córdoba
 Carmen León-Mantero
 Universidad de Córdoba
 Noelia Jiménez-Fanjul
 Universidad de Córdoba

Resumen: *Presentamos una secuencia de actividades mediante simulación a través del lenguaje de programación R, para mostrar a los maestros de Educación Primaria que el cálculo teórico de probabilidades se verifica cuanto mayor sea el número de ensayos realizados del experimento. Se refuerza además la importancia de que los elementos del espacio muestral de un experimento sean equiprobables para el correcto uso de la Regla de Laplace.*

Palabras clave: *Definición frecuentista de probabilidad, simulación con R, equiprobabilidad, maestros en formación.*

The frequentist definition of probability using R programming language simulation

Abstract: *We present a sequence of classroom activities for primary school teachers to work out probability using R programming language simulation. It is shown that for a given experiment the larger the number of trials performed, the closer the frequentist probability is to the expected value. It is also reinforced that the elements of the experiment sample space must be equally likely so as to use Laplace's rule appropriately.*

Keywords: *Frequentist definition of probability, computer simulation using R, equiprobability, teacher training.*

INTRODUCCIÓN

Las recientes disposiciones curriculares en relación a la asignatura de Matemáticas buscan que los alumnos, tras finalizar la Educación Primaria, sean capaces de describir,

analizar, encontrar regularidades y hacer predicciones de situaciones que acontecen en la vida cotidiana, que les proporcione información para tomar decisiones y les permita abordarlas de manera adecuada.

Para ello es esencial que los maestros en formación dominen todos los contenidos matemáticos que en un futuro tendrán que enseñar en sus aulas a sus alumnos y, así, poder ejercer su labor docente con calidad.

El Real Decreto 126/2014 [RD 126/2014] (2014) organiza el currículo básico de la Educación primaria correspondiente a la asignatura de Matemáticas, en cinco grandes bloques. El último bloque, titulado *estadística y probabilidad*, incluye los contenidos:

- Carácter aleatorio de algunas experiencias.
- Iniciación intuitiva al cálculo de la probabilidad de un suceso.

Por otro lado, se establece el siguiente criterio de evaluación y sus correspondientes estándares evaluables, que definen los resultados de aprendizaje que los alumnos deben alcanzar con respecto a los contenidos anteriores:

- Observar y constatar que hay sucesos imposibles, sucesos que con casi toda seguridad se producen, o que se repiten, siendo más o menos probable esta repetición.
 - Identifica situaciones de carácter aleatorio.
 - Realiza conjeturas y estimaciones sobre algunos juegos (monedas, dados, cartas, lotería...).

Sin embargo, diversas investigaciones muestran que alumnos de todos los niveles educativos, presentan dificultades y obstáculos en relación a los contenidos anteriores. Serrado, Cardeñoso y Azcárate (2005) señalan que es común en los alumnos suponer que el resultado teórico de la probabilidad de un suceso va a cumplirse también en un número pequeño o limitado de pruebas, lo que podría estar fomentado porque en el aula se analice exclusivamente sucesos aleatorios de manera teórica.

Cuando lanzamos una moneda al aire, los resultados que se pueden obtener son CARA o CRUZ. Si la moneda está equilibrada, decimos que la probabilidad de que se obtenga CARA en el lanzamiento es $1/2$ ya que es uno de los dos posibles resultados equiprobables. Esto puede entenderse de la siguiente forma: *Cada dos lanzamientos que realizamos, uno de ellos será CARA*. No obstante, esto no es cierto, ya que, al intervenir el azar, puede ocurrir que, tras 10 lanzamientos, sólo en uno de ellos se obtenga CARA, pero esto no significa que la probabilidad de obtener CARA sea $1/10$.

Por otro lado, se ha observado en los alumnos la dificultad de establecer un espacio muestral que contenga los sucesos equiprobables de todo experimento aleatorio, lo que les lleva a calcular la probabilidad de manera incorrecta (Lecoutre, 1992).

Por todo lo anterior, esta propuesta presenta diversas actividades destinadas a mostrar a los alumnos del grado de Educación Primaria, que las probabilidades calculadas teóricamente con la regla de Laplace ocurren cuando el número de veces que se realiza el experimento aumenta considerablemente, así como, la necesidad de construir el espacio muestral de un experimento, de forma que, los elementos de éste sean equiprobables.

Batanero (2000) indica que la simulación de un experimento aleatorio en el aula, con un número elevado de ensayos, “permite condensar el experimento en el tiempo y en el

espacio y operar con el experimento simulado para obtener conclusiones válidas para el experimento original” (p. 11)

Por ello, calcularemos las probabilidades de cada uno de los sucesos elementales de un experimento, mediante la regla de Laplace, y posteriormente simularemos la realización del experimento, un número elevado de veces que muestre que esas probabilidades se acercan a las calculadas teóricamente.

Para realizar la simulación del experimento se utilizará, a nivel muy básico, el software de libre distribución R (Versión 3.3.2; 2016). Éste puede ser descargado desde la web del proyecto: <https://cran.r-project.org/>. R es un potente lenguaje de programación, especialmente pensado para la realización de estudios estadísticos y el cálculo de probabilidades, y ampliamente integrado en la comunidad universitaria, que tiene, aun hoy, una escasa implantación en secundaria.

La gran desventaja con la que partimos al utilizar este software es la dificultad propia que tiene el desconocimiento del lenguaje de programación utilizado. No obstante, la reducida cantidad de instrucciones necesaria, disminuye la dificultad significativamente e introduce al alumno en el uso de lenguajes de programación a un nivel muy básico.

ACTIVIDADES

Actividad 1

Empezaremos en primer lugar por uno de los experimentos aleatorios más sencillos: el lanzamiento de una moneda equilibrada.

Se establecen que los dos resultados posibles que pueden obtenerse son CARA y CRUZ, escribiendo el espacio muestral como:

$$E = \{Cara, Cruz\}$$

y que, al ser la moneda equilibrada, la probabilidad de que ocurran cada uno de los sucesos es $1/2$.

A continuación, realizaremos la simulación del lanzamiento de la moneda con R:

Abrimos el programa, y creamos un nuevo script con la opción correspondiente del menú Archivo. A continuación, escribiremos en la ventana del script el comando que creará el vector que contiene a los elementos del espacio muestral. Este es:

$$\text{Moneda} = c(\text{"Cara"}, \text{"Cruz"})$$

Es importante indicar que el lenguaje hace distinción entre mayúsculas y minúsculas. Para ejecutar el comando y crear la variable Moneda basta con situar el curso sobre la línea de éste, hacer clic con el botón derecho y seleccionar la opción “correr línea o seleccionar”. También con la combinación de teclas Ctrl + r.

Una vez creado, podemos comprobar que se ha generado correctamente, escribiendo el nombre de la variable y ejecutando dicha orden.

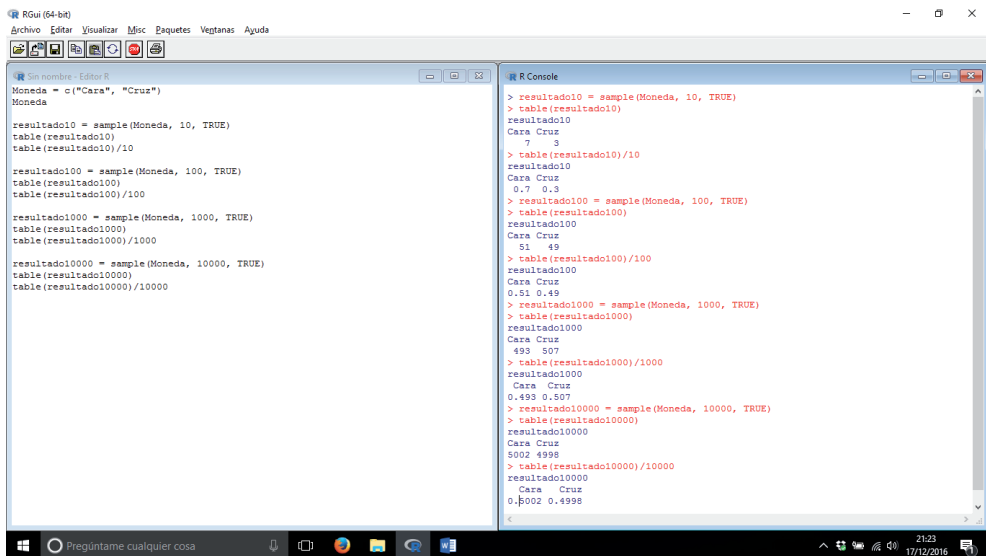
A continuación, generaremos los lanzamientos de la moneda con el comando *sample*. Su sintaxis es la siguiente:

sample(Espacio muestral, n° de repeticiones, valor lógico)

El valor lógico (TRUE o FALSE) indicará si en las repeticiones los elementos del espacio muestral pueden repetirse (con reemplazo) o no (sin reemplazo).

Para contar el número de veces que ha ocurrido cada resultado aplicaremos el comando *table*. Si además dividimos el resultado de éste por el número de veces que se ha repetido el experimento, éste nos devolverá la probabilidad obtenida en cada resultado.

Los comandos necesarios para la realización de 10, 100, 1000 y 10.000 lanzamientos se muestran en la Figura 1, junto con los resultados obtenidos.



```
Sin nombre - Editor R
Moneda = c("Cara", "Cruz")
Moneda

resultado10 = sample(Moneda, 10, TRUE)
table(resultado10)
table(resultado10)/10

resultado100 = sample(Moneda, 100, TRUE)
table(resultado100)
table(resultado100)/100

resultado1000 = sample(Moneda, 1000, TRUE)
table(resultado1000)
table(resultado1000)/1000

resultado10000 = sample(Moneda, 10000, TRUE)
table(resultado10000)
table(resultado10000)/10000

R Console
> resultado10 = sample(Moneda, 10, TRUE)
> table(resultado10)
resultado10
Cara Cruz
7 3
> table(resultado10)/10
resultado10
Cara Cruz
0.7 0.3
> resultado100 = sample(Moneda, 100, TRUE)
> table(resultado100)
resultado100
Cara Cruz
51 49
> table(resultado100)/100
resultado100
Cara Cruz
0.51 0.49
> resultado1000 = sample(Moneda, 1000, TRUE)
> table(resultado1000)
resultado1000
Cara Cruz
493 507
> table(resultado1000)/1000
resultado1000
Cara Cruz
0.493 0.507
> resultado10000 = sample(Moneda, 10000, TRUE)
> table(resultado10000)
resultado10000
Cara Cruz
5002 4998
> table(resultado10000)/10000
resultado10000
Cara Cruz
0.5002 0.4998
```

Figura 1. Resultado de la simulación del lanzamiento de una moneda.

Como puede observarse, cuando se lanza la moneda 10 veces, la cara se ha obtenido en 3 ocasiones y la cruz en 7, lo que representan probabilidades de 0.3 y 0.7 respectivamente. No obstante, cuando se aumenta el número de lanzamientos a 100, estas probabilidades se acercan hasta 0.51 para cara y 0.49 para cruz. Al aumentar a 10.000 el número de lanzamientos, las probabilidades son de 0.5002 y 0.4998 respectivamente.

Actividad 2

En el experimento consistente en lanzar 2 monedas, al alumno, se le presenta la disyuntiva entre estos dos espacios muestrales:

$$E = \{(Cara, Cara), (Cara, Cruz), (Cruz, Cruz)\}$$

$$E = \{(Cara, Cara), (Cara, Cruz), (Cruz, Cara), (Cruz, Cruz)\}$$

Es decir, ¿Es necesario especificar los distintos órdenes que pueden darse cuando los resultados son diferentes?

En el primero de los casos, la probabilidad de cada suceso elemental es $1/3$, mientras que, en el segundo caso, esta probabilidad disminuye hasta $1/4$, de modo que la probabilidad de obtener resultados diferentes es $1/2$.

Para la simulación, ejecutaremos dos comandos *sample*, y los uniremos con el comando *paste*, que sirve para unir las componentes de los vectores de resultados.

Los resultados para esta nueva simulación se muestran en la Figura 2.

```

Sin nombre - Editor R
Moneda = c("Cara", "Cruz")
Moneda

resultado10 = paste(sample(Moneda,10,TRUE),sample(Moneda,10,TRUE),sep="-")
table(resultado10)
table(resultado10)/10

resultado100 = paste(sample(Moneda,100,TRUE),sample(Moneda,100,TRUE),sep="-")
table(resultado100)
table(resultado100)/100

resultado1000 = paste(sample(Moneda,1000,TRUE),sample(Moneda,1000,TRUE),sep="-")
table(resultado1000)
table(resultado1000)/1000

resultado10000 = paste(sample(Moneda,10000,TRUE),sample(Moneda,10000,TRUE),sep="-")
table(resultado10000)
table(resultado10000)/10000

R Console
> resultado10 = paste(sample(Moneda,10,TRUE),sample(Moneda,10,TRUE),sep="-")
> table(resultado10)
resultado10
Cara-Cara Cara-Cruz Cruz-Cara Cruz-Cruz
1 3 1 5
> table(resultado10)/10
resultado10
Cara-Cara Cara-Cruz Cruz-Cara Cruz-Cruz
0.1 0.3 0.1 0.5
> resultado100 = paste(sample(Moneda,100,TRUE),sample(Moneda,100,TRUE),sep="-")
> table(resultado100)
resultado100
Cara-Cara Cara-Cruz Cruz-Cara Cruz-Cruz
20 25 26 29
> table(resultado100)/100
resultado100
Cara-Cara Cara-Cruz Cruz-Cara Cruz-Cruz
0.20 0.25 0.26 0.29
> resultado1000 = paste(sample(Moneda,1000,TRUE),sample(Moneda,1000,TRUE),sep="-")
> table(resultado1000)
resultado1000
Cara-Cara Cara-Cruz Cruz-Cara Cruz-Cruz
261 240 243 256
> table(resultado1000)/1000
resultado1000
Cara-Cara Cara-Cruz Cruz-Cara Cruz-Cruz
0.261 0.240 0.243 0.256
> resultado10000 = paste(sample(Moneda,10000,TRUE),sample(Moneda,10000,TRUE),sep="-")
> table(resultado10000)
resultado10000
Cara-Cara Cara-Cruz Cruz-Cara Cruz-Cruz
2514 2474 2514 2498
> table(resultado10000)/10000
resultado10000
Cara-Cara Cara-Cruz Cruz-Cara Cruz-Cruz
0.2514 0.2474 0.2514 0.2498
    
```

Figura 2. Resultado de la simulación del lanzamiento de dos monedas.

Como se observa en los resultados las probabilidades se aproximan, cuando aumentamos el número de repeticiones, a 0.25, por lo que el espacio muestral correcto es el segundo, si se quiere expresar éste con elementos equiprobables.

Este experimento puede repetirse para el lanzamiento de 3 o más monedas, añadiendo términos dentro del comando *paste*, separados por comas. También puede modificarse el número de repeticiones como se desee, para adaptarlo a otros ejemplos.

Actividad 3

Veamos ahora el experimento consistente en lanzar un dado. En este caso, repetiremos el lanzamiento de éste 60, 600, 6.000 y 60.000 veces, y analizaremos el número de veces que ha sucedido cada uno de los seis resultados posibles.

El espacio muestral del experimento es:

$$E = \{1,2,3,4,5,6\}$$

Y si el dado es equilibrado, la probabilidad de cada uno de los sucesos elementales es $1/2=0.1\bar{6}$.

La Figura 3, muestra las simulaciones realizadas en este caso.

```
Sin nombre - Editor R
Dado = c(1, 2, 3, 4, 5, 6)
Dado
resultado60 = sample(Dado,60,TRUE)
table(resultado60)
table(resultado60)/60
resultado600 = sample(Dado,600,TRUE)
table(resultado600)
table(resultado600)/600
resultado6000 = sample(Dado,6000,TRUE)
table(resultado6000)
table(resultado6000)/6000
resultado60000 = sample(Dado,60000,TRUE)
table(resultado60000)
table(resultado60000)/60000

R Console
> resultado60 = sample(Dado,60,TRUE)
> table(resultado60)
resultado60
 1  2  3  4  5  6
 8  5 16 12 10  9
> table(resultado60)/60
resultado60
 1  2  3  4  5  6
0.1333333 0.0833333 0.2666667 0.2000000 0.1666667 0.1500000
> resultado600 = sample(Dado,600,TRUE)
> table(resultado600)
resultado600
 1  2  3  4  5  6
110 104 104 98 87 95
> table(resultado600)/600
resultado600
 1  2  3  4  5  6
0.1833333 0.1766667 0.1733333 0.1633333 0.1450000 0.1583333
> resultado6000 = sample(Dado,6000,TRUE)
> table(resultado6000)
resultado6000
 1  2  3  4  5  6
997 989 1004 994 989 1027
> table(resultado6000)/6000
resultado6000
 1  2  3  4  5  6
0.1661667 0.1648333 0.1673333 0.1656667 0.1648333 0.1711667
> resultado60000 = sample(Dado,60000,TRUE)
> table(resultado60000)
resultado60000
 1  2  3  4  5  6
10063 9997 9877 9949 10000 10114
> table(resultado60000)/60000
resultado60000
 1  2  3  4  5  6
0.1677167 0.1666167 0.1646167 0.1658167 0.1666667 0.1685667
```

Figura 3. Resultado de la simulación del lanzamiento de un dado.

Cuando se repite el lanzamiento 60 veces, el único resultado con una probabilidad igual a la teórica es el 5, que se ha obtenido 10 veces. Cuando se repite 60.000 veces, la proporción de veces que se obtiene cada uno de los resultados difiere de la teórica en menos de dos milésimas.

Actividad 4

Por último, analizaremos el experimento consistente en el lanzamiento de dos dados y la suma de los resultados.

En este caso, el espacio muestral que en primer lugar viene a la mente del alumno es:

$$E = \{2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\}$$

No obstante, los elementos que lo forman no son equiprobables, lo que obliga a expresarlo de la siguiente forma:

$$E = \left\{ \begin{array}{l} (1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), \\ (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6), \\ (3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (3, 6), \\ (4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4), (4, 5), (4, 6), \\ (5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (5, 5), (5, 6), \\ (6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6) \end{array} \right\}$$

Por lo que las probabilidades son:

Suma	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Probabilidad (Fracción)	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$
Probabilidad (Decimal)	0.027̄	0.05̄	0.083̄	0.1̄	0.138̄	0.16̄	0.138̄	0.1̄	0.083̄	0.05̄	0.027̄

En este caso, basta con sumar dos simulaciones del lanzamiento de un dado, como el realizado anteriormente. Los resultados para 36, 360 y 3.600 lanzamientos de dos dados se muestran en la Figura 4. En ésta se puede observar cómo las probabilidades se aproximan, también en esta ocasión, a las teóricas.

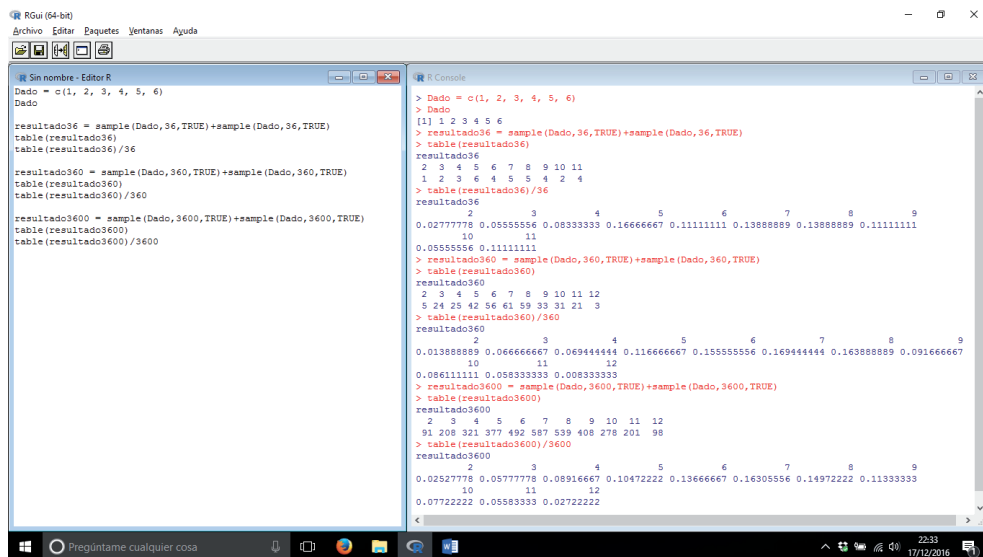


Figura 4. Resultado de la simulación del lanzamiento de dos dados y su suma.

Los resultados de estas simulaciones pueden también representarse mediante un diagrama de barras con el comando *barplot*. Este gráfico para el caso de las 3600 repeticiones, cuyo comando completo es:

```
barplot(table(resultado3600)/3600)
```

El gráfico obtenido se muestra en la Figura 5, donde puede observarse que la mayor probabilidad se concentra en los valores centrales por el mayor número de resultados que contienen.

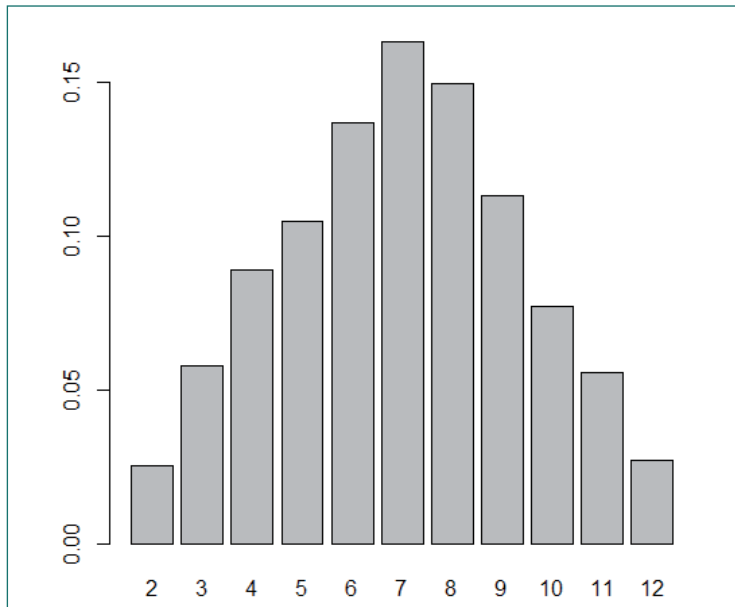


Figura 5. Gráfico de barras del resultado obtenido al lanzar 3600 veces un par de dados.

CONCLUSIONES

Como puede observarse, con unos sencillos comandos, puede simularse, en R, un gran número de experimentos aleatorios para analizar de forma experimental la probabilidad de cada suceso elemental y compararla con la probabilidad teórica de cada suceso. Esto puede ayudar, además, a comprender dos conceptos fundamentales como son la definición frecuentista de probabilidad y la necesaria equiprobabilidad en el espacio muestral para la aplicación de la regla de Laplace.

REFERENCIAS

- Batanero, C. (2000). ¿Hacia dónde va la educación estadística? *Blaix*, 15(2), 13.
- Lecoutre, M. P. (1992). Cognitive models and problem spaces in “purely random” situations. *Educational studies in mathematics*, 23(6), 557-568.
- Real Decreto 126/2014, de 28 de febrero, por el que se establece el currículo básico de la Educación primaria (2014). BOE, 52, 19349-19420.
- Serrado, A., Cardeñoso, J.M. y Azcárate, P. (2005). Los obstáculos en el aprendizaje del conocimiento probabilístico: su incidencia desde los libros de texto. *Statistics Education Research Journal*, 4(2), 59-81.

RINCÓN “SAPERE AUDE”... ¿resolviendo problemas?

Sixto Romero

Escuela Técnica Superior de Ingeniería

Universidad de Huelva

sixto@uhu.es

Con el número 94, hemos acabado el año 2016 con las entregas al día de nuestra revista. Con esta aportación modesta aparte, tal vez sea necesario, con el enfoque que le he dado a este “rincón”, formular por mi parte algún tipo de exégesis para una interpretación crítica de los problemas que he venido resolviendo y planteando en los números anteriores. Los ejemplos propuestos pueden distinguirse entre lo que puede llamarse problema y lo que puede considerarse ejercicio. La idea es que con los ejercicios consigamos que el alumno ejercite en alguna técnica o procedimiento, que requiere poco razonamiento original o propio. De esta manera cuándo un estudiante empieza el estudio de algunas partes del álgebra, teoría de números, geometría... deberíamos los profesores ofrecerles un tipo de ejercicios asequibles y que los pueda resolver con las fórmulas o procedimientos adquiridos. La resolución de estos ejercicios ayudará a consolidar su dominio de las fórmulas, expresiones,... y asegurará su capacidad de emplearla. Por lo tanto, un ejercicio siempre puede resolverse con una razonable prontitud y con un mínimo de razonamiento creativo. Por el contrario, con un problema, moviéndonos en el nivel adecuado, se requerirá que el alumno piense y razona en profundidad.

Debemos con ello incentivarle para que idee estrategias, con las que el éxito, a priori, no esté garantizado totalmente, pero que deben seguir adelante con esa idea de descubrimiento heurístico con la ayuda de textos, materiales, NNTT's que le impulse a llevar a buen término su plan. Una vez resuelto el problema y de manera positiva haber obtenido la solución, impliquémosle en la idea de la reconsideración por si tiene que recurrir a nuevas estrategias de resolución que mejore la solución hallada: más deducciones, generalizaciones, aplicaciones u otros resultados. No hay posibilidad de exagerar la importancia de la Resolución de Problemas (RdP's) en Matemáticas, por medio de ella se requiere bastante dominio de esta ciencia, y ser motivación de la introducción en el alumno de la permanente idea de la búsqueda de nuevas formas de atacar un problema. En definitiva, iniciarle en el mundo de la investigación en esta ciencia donde la creatividad es un parámetro definidor del buen estudiante.

SAPERE AUDE, GEOMETRÍA

1. Ejercicios de aquí y allá (solución a la Propuesta 1 del número anterior 94)

Propuesta 1: dos joyitas geométricas

Ya hice el comentario en números anteriores que: "... la enseñanza de la Geometría, probablemente sea una de las disciplinas donde más desencuentros podemos encontrar entre enseñantes e investigadores en Educación Matemática... ". Debemos dar respuesta a esta "encrucijada" planteándonos algunas cuestiones tan elementales como:

- ¿Cuál es la razón objetiva para aprender geometría?
- Nuestros estudiantes, ¿saben tan poco acerca de los contenidos geométricos desarrollados en los curricula?
- ¿Se está enseñando bien la Geometría en la etapa de formación de un estudiante de primaria? ¿Y de secundaria?
- ¿Se están utilizando adecuadamente las nuevas herramientas que ofrecen la NNTT's para que el alumno visualice gráficamente los elementos matemáticos?
- ¿Qué debe aprender de Geometría?

Invito, una vez más a trabajar con ejercicios de geometría plana. Es una buena oportunidad de presentarla como una herramienta recia, útil y potente que faculta la mejora de la percepción y pensamiento deductivo que va a incidir en desarrollo de la competencia y capacidad de conceptualización y abstracción

Las dos joyitas que propusimos en el anterior número:

JOYITA: a) *En una hoja de papel se corta un agujero circular de 3cm. de diámetro. ¿Se puede hacer pasar una pieza de 4 cm. de diámetro?*

SOLUCIÓN

Es un ejercicio muy interesante que puede dar posibilidad a nuestros estudiantes de trabajar con papel. Sabemos que el papel aparte de servir para escribir desde su creación para tal fin, ha tenido un importante uso en las matemáticas, para lo que se ha requerido siempre una gran capacidad de observación cuando se manipula (S. Ferrero, 2008)

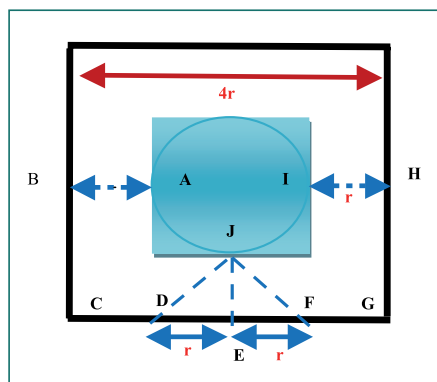


Fig.1. Agujero de radio r .

PASO 1

Supongamos el agujero de radio r perforado en el centro de una hoja cuadrada de lado $4r$

PASO 2

Marquemos los cinco pliegues en líneas discontinuas, como se indican en la fig. 1, con las distancias $DE=EF=r$.

Repleguemos la mitad superior de la fig.2 por el pliegue BH como se observa en la fig.3.

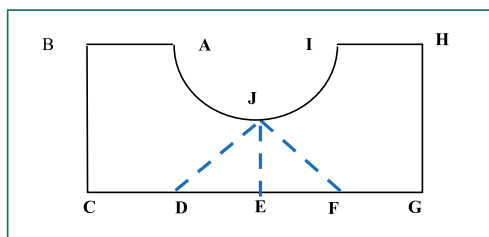


Fig.2. Esquema Simétrico.

PASO 3

Cada una de las manipulaciones que realicemos a continuación la haremos de forma simétrica sobre las dos mitades que aparecen:

Continuamos hasta llevar D sobre F para obtener la figura plana que aparece en la figura 4; en ella el triángulo isósceles (DEJ) aparece en perspectiva, con un "doble espesor" como sigue:

AJ y JI son dos cuartos de círculo de radio "r", estando los tres puntos alineados. Veamos cuánto miden (figura 5):

$$AO = JO = r \Rightarrow AJ = \sqrt{(AO)^2 + (JO)^2} = \sqrt{r^2 + r^2} = \sqrt{2r^2} = \sqrt{2}r \Rightarrow AI = 2\sqrt{2}r$$

Por lo tanto, si $r = \frac{3}{2} \text{ cm}$, el objeto descrito en la Fig. 4 está unido a su simétrico, pero la muesca AI es de longitud:

$$2\sqrt{2} \frac{3}{2} \text{ cm} = 3\sqrt{2} \text{ cm} = 3.(1.41421356) \text{ cm} = 4.24264068 \text{ cm}$$

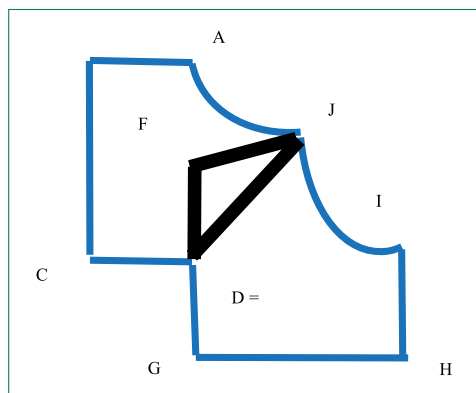


Fig. 4. Despliegue 2.

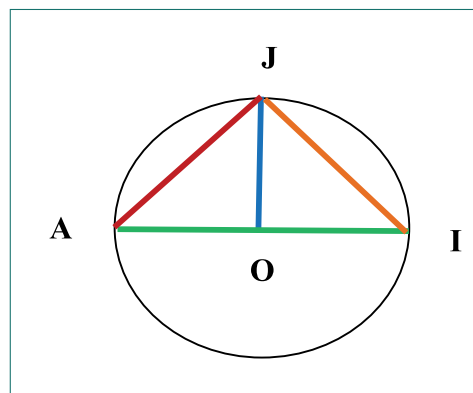


Fig. 5. Cuartos de círculos.

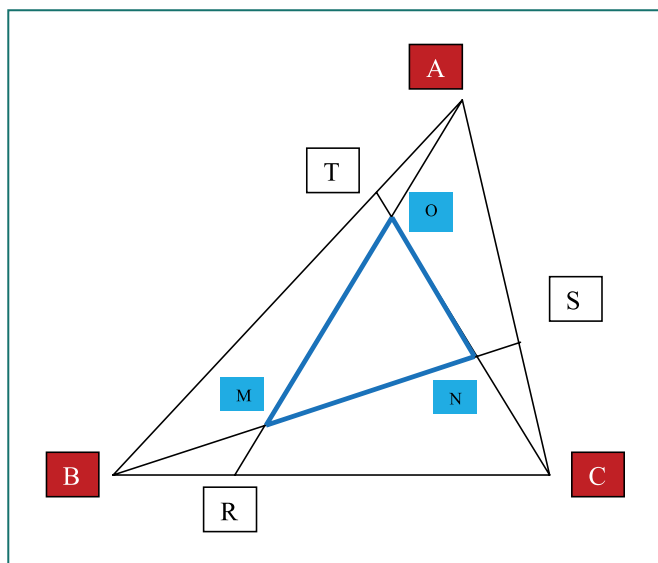


Fig. 6. Jardín Triangular.

Lo que permite que la pieza de 4 cm pase con facilidad y holgura por el agujero circular de 3 cm .

NOTA: ¡Lo más interesante y curioso es que el modelo anterior podría funcionar incluso con una madera contrachapada en la que se perfora un agujero circular, donde los pliegues estuvieran ajustados por bisagras!

JOYITA: b) Enrique quiere construir un jardín de forma triangular, MNO , limitado por un terreno también de forma triangular ABC y de área S , según aparece en la figura 6.

Se sabe que moviendo los puntos R , S y T respectivamente sobre los lados BC , CA y AB , va a conseguir construir el jardín MNO de la siguiente forma: las rectas que pasan por A y R , B y S , y C y T se cortan en los puntos M , N y O . Si conocemos el valor de las razones BR/BC , CS/CA y AT/AB , determinar el área del jardín en forma triangular, MNO , que quiere construir Enrique en función del área S y las razones citadas.

SOLUCIÓN

Se trata de un ejercicio en el que aparece, de nuevo, el teorema de Menelao de Alejandría (alrededor de 70-130 d.C.) proporcionándonos un criterio de alineación.

PASO 1

De partida supongamos que las rectas BS y CT , (respectivamente, CT y AR , y AR y BS) no tienen más que un punto en común N , (respectivamente M , y O).

Designemos las razones BR/BC , CS/CA y AT/AB , por, respectivamente x , y , z .
Los casos $y=0$, $z=1$, o de $z=0$ y $x=1$, o de $x=0$ e $y=1$ son excluidos, por razones obvias.

Sin pérdida de generalidad ninguna podemos admitir que el triángulo \widehat{MNO} es interior al triángulo \widehat{RAC} .

Sea $S=a(\widehat{ABC})$ el área del triángulo \widehat{ABC} y sea $S'=a(\widehat{MNO})$ el área del triángulo MNO . Es evidente que el área de los triángulos

$a(\widehat{RAB})=Sx$, $a(\widehat{SAB})=Sy$, $a(\widehat{TAC})=Sz$, $a(\widehat{RAC})=S(1-x)$, $a(\widehat{SAB})=S(1-y)$, $a(\widehat{TBC})=s(1-z)$

Aplicando el teorema de Menelao, atribuido a Menelao de Alejandría que dice:

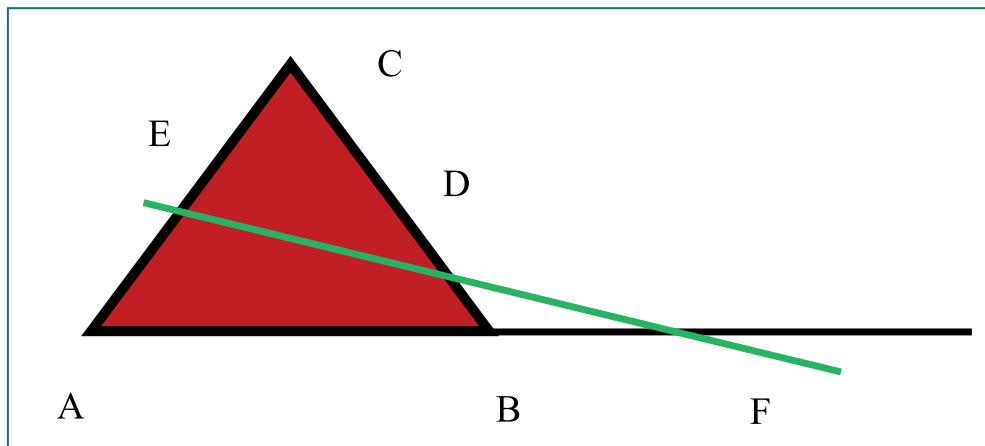


Fig. 7. Teorema de Menelao.

“Dados tres puntos A, B y C que forman el triángulo ABC, y los puntos E, D y F que se encuentran en las líneas de AC, BC, AB, entonces el teorema de Menelao dice establece que D, E, F son colineales si y solo si:

$$\frac{EA}{EC} \cdot \frac{DC}{DB} \cdot \frac{FB}{FA} = 1$$

Y si son segmentos dirigidos (concepto no muy habitual en los currícula de nuestro sistema educativo en España, basta con agregar una idea al concepto de segmento $AB=-BA$, es decir, permutar el orden de los vértices hace variar de signo el segmento)

$$\frac{AE}{EC} \cdot \frac{CD}{DB} \cdot \frac{BF}{FA} = -1$$

PASO 2

Si además tenemos en cuenta que si $y \neq 0$ y $z \neq 0$, se tiene que $\frac{NB}{NS} \cdot \frac{CS}{CA} \cdot \frac{TA}{TB} = 1$, de dónde se deduce que

$$\frac{NB}{NS} = \frac{CA}{CS} \cdot \frac{TB}{TA} = \frac{CA}{CS} \cdot \frac{AB-TA}{TA} = \frac{1}{y} \left(\frac{1}{z} - 1 \right) = \frac{1-z}{yz}$$

$$S_1 = a(SNC) = \frac{NS}{BS} S \cdot y = \frac{1}{\frac{NB}{NS} + 1} \cdot S \cdot y = \frac{1}{\frac{1-z}{yz} + 1} \cdot S \cdot y = \frac{S \cdot y^2 z}{1-z+yz}$$

NOTA: En el caso de que $yz = 0$, esta última expresión proporciona un resultado válido. Análogamente, se obtienen

$$S_2 = a(TAO) = \frac{S \cdot z^2 y}{1-z+yz}$$

$$S_3 = a(MBR) = \frac{S \cdot x^2 y}{1-y+xy}$$

Resulta por lo tanto que

$$a(MNCR) = S \cdot y - S_3 - S_1$$

$$a(NOAS) = S \cdot z - S_1 - S_2$$

De dónde

$$S' = S(1-x) - S_1 - (S \cdot y - S_3 - S_1) - (S \cdot z - S_1 - S_2)$$

$$S' = S(1-x-y-z) + (S_1 + S_2 + S_3)$$

$$S' = S \frac{(-1+x+y+z-yz-zx-xy+2xyz)^2}{(1-z+yz)(1-x+zx)(1-y+xy)}$$

PASO 3

Por lo tanto

$$S' = S \frac{[xyz - (1-x)(1-y)(1-z)]^2}{(1-z+yz)(1-x+zx)(1-y+xy)}$$

NOTAS:

- a) Las áreas coincidirán, $S=S'$, si se cumple $z=0$
 $x=1, y=1, z=1$

b) Se tiene un área nula $S'=0$ para cuando

$$xyz = (1-x)(1-y)(1-z)$$

c) Es interesante proponer al alumno que investigue casos particulares:

– Caso 1: $x = y = z = \frac{1}{2}$, y comprobar que $S'=0$

– Caso 2: $x = y = z$, y comprobar que

$$a(MNO) = S' = S \cdot \left(1 - \frac{3x(1-x)}{x^2 - x + 1}\right)$$

– Caso 3: $x = y = z = \frac{1}{3}$, y comprobar que

$$a(MNO) = S' = S \left(1 - \frac{6}{7}\right) = \frac{S}{7}$$

Proporciona un método muy curioso para redescubrir que este resultado lo podemos encontrar en el puzzle de Mikuzinski.

SAPERE AUDE, TEORÍA DE NÚMEROS

1. EJERCICIOS DE AQUÍ Y ALLÁ (SOLUCIÓN A LA PROPUESTA 2 DEL NÚMERO ANTERIOR 94)

Propuesta 2: cuatro joyitas numéricas

Siguiendo el mismo esquema que en números anteriores, en este Sapere Aude presentamos cuatro curiosas joyitas relativas a los números. Está en el espíritu del que suscribe estas líneas presentar ejercicios de la teoría elemental de números sin emplear técnicas procedentes de otros campos de las matemáticas. Pertenecen a la teoría elemental de números las cuestiones de divisibilidad, el algoritmo de Euclides para calcular el máximo común divisor, la factorización de los enteros como producto de números primos, la búsqueda de los números perfectos y las congruencias.....

En este *sapere aude* presento cuatro ejercicios con diferentes grados de dificultad tocando diferentes enfoques de la teoría de números en relación con otras partes de las Matemáticas.

JOYITA: a) Demostrar que cada número de la sucesión

49, 4489, 444889, 44448889, 4444488889,.....es un cuadrado perfecto, es decir, en cada número de la sucesión hay "n" números 4, "n-1" números 8 y solo "1" 9.

(Propuesto en la competición matemática de Slovenia en 1998)

SOLUCIÓN

PASO 1

Sea el número

$$n = 444\dots4888\dots89$$

dónde hay n cuatros, $n-1$ ocho y un solo nueve.

Se tiene que

$$n = 444\dots4888\dots89 = 4a \cdot 10^n + 8a + 1$$

con

$$a = 111\dots1$$

escribiendo n veces el número 1.

PASO 2

Por otro lado,

$$n = 4a(10^n + 2) + 1$$

$$10^n = 9a + 1$$

De aquí que

$$n = 4a(9a + 1 + 2) + 1$$

$$n = 36a^2 + 12a + 1 = (6a + 1)^2$$

que es un cuadrado perfecto.

JOYITA: b) *Cvada una de las cifras 1,2,3,4 y 5 es utilizada una sola vez para formar un número de 5 cifras. ¿Cuál es el valor de la suma de todos los números de cinco cifras que de esta manera se pueden formar?*

SOLUCIÓN

PASO 1

Con las cinco cifras 1,2,3,4 y 5 se pueden formar 120 números distintos, es decir, las permutaciones de los cinco elementos,

$$P_5 = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5!$$

$$P = \{[n = a_5 a_4 a_3 a_2 a_1] / n = a_1 + 10a_2 + 100a_3 + 1000a_4 + 10000a_5\}$$

siendo el cardinal de P, $\text{card}(P)=120$. Nos piden calcular la suma de todos ellos

$$S = \sum_{i=1}^{120} a_5 a_4 a_3 a_2 a_1$$

PASO 2

De los 120 números distintos habrá:

- 24 que terminen en 1 (bastaría fijar el número 1 y permutar los otros cuatro), obtendríamos

$$P_4 = 4.3.2.1. = 4! \text{ que terminan en 1.}$$
$$a_5 a_4 a_3 a_2 1$$

- Análogamente podemos decir de los números que terminan en 2,3,4 y 5.

$$P_4 = 4.3.2.1. = 4! \text{ que terminan en 2}$$
$$a_5 a_4 a_3 a_1 2$$

$$P_4 = 4.3.2.1. = 4! \text{ que terminan en 3}$$
$$a_5 a_4 a_2 a_1 3$$

$$P_4 = 4.3.2.1. = 4! \text{ que terminan en 4}$$
$$a_5 a_3 a_2 a_1 4$$

$$P_4 = 4.3.2.1. = 4! \text{ que terminan en 5}$$
$$a_4 a_3 a_2 a_1 5$$

Cada columna en la suma de los 120 números vale,

PRIMERA COLUMNA

$$24 \times 1 = 24$$

$$24 \times 2 = 48$$

$$24 \times 3 = 72$$

$$24 \times 4 = 96$$

$$24 \times 5 = 120$$

$$\text{En total: } 360$$

SEGUNDA COLUMNA

$$360 + 36 = 396$$

TERCERA COLUMNA

$$360 + 39 = 399$$

CUARTA COLUMNA

$$360 + 39 = 399$$

QUINTA COLUMNA

$$360 + 39 = 399$$

PASO 3

Por lo tanto, la suma de los 120 números vale:
=3.999.960

$$S = \sum_1^{120} a_5 a_4 a_3 a_2 a_1 = 3.999.960$$

Que podemos obtenerlo, también, de la expresión:

$$360 (1 + 10 + 102 + 103 + 104) = (360)(11.111) = 3.999.960$$

JOYITA: c) *Se dispone de monedas sin ser capaces de sumar sólo 1 €, al tomar la totalidad o tomar unas pocas. ¿Cuál es la cantidad máxima que podemos juntar de estas monedas? (No hay ninguna con valor superior a € 1).*

SOLUCIÓN

PASO 1

Sea E el conjunto de los portamonedas que no permiten realizar la operación de obtener 1 €, y que no contienen ninguna pieza de valor superior a 1€, por ejemplo, uno de los casos, si las expresamos en céntimos contiene monedas de,

$$E = [50; 20; 20; 5]$$

Si P es uno de los portamonedas de E, su montante es limitado ya que P, al no poder llegar a 1€=100 céntimos contiene a lo sumo: una moneda de 50 ó 4 monedas de 20 ó 9 monedas de 10 ó 19 monedas de 5 ó 49 monedas de 2 ó 99 monedas de 1.

PASO 2

Sea P' el conjunto que contiene portamonedas de E de máximo montante.

Sea P subconjunto de P'.

- Si P contiene [1;1], se puede reemplazar [1; 1] por [2] y el nuevo portamonedas está en P'. Incluso [2;2;2;2] puede ser reemplazado por [10], y así sucesivamente. Existe entonces en P' un porta moneda P'' que contiene: a lo sumo una moneda de 1; 4 monedas de 2; una de 5; una de 10; 4 de 20 y una de 50. El montante de P'' es inferior o igual a 154 céntimos.
- También la combinación [2;2;1] puede ser reemplazado por [5] y la combinación [20;20;10] puede ser reemplazada por [50] entonces existe en P' un porta moneda P'' que contiene: a lo sumo una moneda de 1; 4 de 2; una de 5; una de 10; 4 de 20; una de 50 y no la combinación [2;2;1] ni la combinación [20;20;10].
 - O bien P'' contiene [10]. De lo anterior se deduce que P'' no contiene [20;20]. Entonces su montante no excede de $154 - 20 = 134$ céntimos.

- O bien P'' no contiene [10] y entonces: a) o bien P'' contiene [1]. De lo anterior se deduce que P'' no contiene [2;2]. Entonces su montante no excede de $154 - 10 - 2 = 142$ céntimos; b) o bien P'' no contienen [1] y entonces su montante no excede de $154 - 10 - 1 = 143$ céntimos.

PASO 3

El montante máximo realizable es 1,43€ y se realiza la con el portamonedas

$$[5 ;20; 20 ;20 ;20;5;2;2;2; 2].$$

JOYITA: d) Resolver el sistema de ecuaciones:

$$(a + b + c)d = 420$$

$$(a + c + d)b = 403$$

$$(a + b + d)c = 363$$

$$(b + c + d)a = 228$$

$$\forall a, b, c, d \in \mathbb{N}$$

SOLUCIÓN

Como se indicaba en el número anterior, este ejercicio no presenta grandes dificultades, pero los alumnos de secundaria no están habituados a una presentación como esta: no se trata de un sistema de ecuaciones lineales.

PASO 1

Una solución muy ocurrente puede ser la dada por (M. Bauval-APMEP-Bulletin 504). Llamemos $p = a + b + c + d$, se tiene que

$$(p - d)d = 420$$

$$(p - b)b = 403$$

$$(p - c)c = 363$$

$$(p - a)a = 228$$

Teniendo en cuenta que 403 se puede descomponer en el producto de 13x31, podemos construir la tabla

b	1	13	31	403
p-b	403	31	13	1
p	404	44	44	404

PASO 2

En la ecuación

$$(p-d)d = 420 \Rightarrow pd - d^2 = 420 \Rightarrow d^2 - pd + 420 = 0$$

El discriminante $\Delta = p^2 - 4.420 = p^2 - 1680$, no es un cuadrado perfecto y por lo tanto

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{p^2 - 4.420} = \sqrt{p^2 - 1680}$$

a) No es una raíz entera para cuando $p=404$, ya que

$$\sqrt{404^2 - 1680} = \sqrt{161536} = 401,915441\dots$$

y por lo tanto $p \neq 44$

b) Por otro lado, para $p=44$ los discriminantes de las ecuaciones son respectivamente:

$$d^2 - 44d + 420 = 0$$

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{44^2 - 1680} = \sqrt{1936 - 1680} = \sqrt{256} = 16$$

$$c^2 - 44c + 363 = 0$$

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{44^2 - 1452} = \sqrt{1936 - 1452} = \sqrt{484} = 22$$

$$a^2 - 44a + 228 = 0$$

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{44^2 - 912} = \sqrt{1936 - 912} = \sqrt{1024} = 32$$

Que da lugar a las soluciones para:

$$d = \frac{44 \pm 16}{2} \Rightarrow (d_1 = 30 \wedge d_2 = 14)$$

$$c = \frac{44 \pm 22}{2} \Rightarrow (c_1 = 33 \wedge c_2 = 11)$$

$$a = \frac{44 \pm 32}{2} \Rightarrow (a_1 = 38 \wedge a_2 = 6)$$

PASO 3

En definitiva, se tiene la tabla

a	b	c	d
6	13	11	14
ó	ó	ó	ó
38	31	13	30

Eligiendo el más pequeño de los valores para a , b , c y d , respectivamente la solución encontrada es

$$\begin{aligned}a &= 6 \\b &= 13 \\c &= 11 \\d &= 14\end{aligned}$$

y es la ÚNICA SOLUCIÓN, ya que cualquiera de los otros valores significaría que

$$p=a+b+c+d > 44$$

NOTA: ¡Es tarea del profesor la orientación al alumno en las diferentes estrategias de resolución del problema, como por ejemplo utilizar en este caso la teoría de la divisibilidad y los números primos!

SAPERE AUDE, EJERCICIOS DE AQUÍ Y ALLÁ, PROPUESTAS

Propuesta 1: dos joyitas numéricas

En este *Sapere Aude* presentamos dos joyitas con diferentes grados de dificultad tocando distintos enfoques.

Insisto en la idea de presentar ejercicios de la teoría elemental de números, sin emplear técnicas de gran dificultad procedentes de otros campos de las matemáticas. Pertenecen a la teoría elemental de números las cuestiones de divisibilidad, el algoritmo de Euclides para calcular el máximo común divisor, la factorización de los enteros como producto de números primos, la búsqueda de los números perfectos y las congruencias.. Usar la visualización, el razonamiento espacial y la modelización geométrica para resolver problemas...., predecir y describir los resultados de deslizar, girar formas bidimensionales,...

- a) *Cambiando las cifras de las unidades y de las decenas, los resultados de las multiplicaciones siguientes no cambian:*

$$\begin{aligned}12 \times 42 &= 21 \times 24 = 504 \\24 \times 84 &= 42 \times 48 = 2016\end{aligned}$$

¿Será posible encontrar otras tres multiplicaciones que tengan esta propiedad?

- b) *Se puede comprobar que*

$$\begin{aligned}3^2 + 4^2 &= 5^2 \\3^2 + 4^2 + 12^2 &= 13^2 \\3^2 + 4^2 + 12^2 + 84^2 &= 85^2\end{aligned}$$

Determinar el valor más pequeño posible de $x+y$ si x e y son enteros estrictamente positivos tales que

$$3^2 + 4^2 + 12^2 + 84^2 + x^2 = y^2$$

Propuesta 2: dos joyitas geométricas

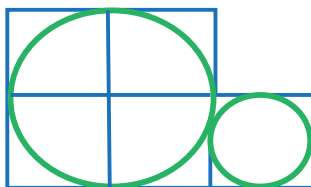
Decíamos en el número anterior que la enseñanza de la Geometría, probablemente sea una de las disciplinas dónde más desencuentros podemos encontrar entre enseñantes e investigadores en Educación Matemática. En esta sección quiero dejar patente que trabajar en la geometría plana se presenta como un instrumento potente desarrollar el pensamiento deductivo, el cual implícitamente considera el desarrollo de la capacidad de abstracción. También considero que trabajando en este estadio se consigue que el alumno se mueva en un espacio de erudición en el que es viable alcanzar la idea de matematización como reconocimiento de patrones, generalizaciones, elaboración de conjeturas, demostraciones, ... piezas claves en el proceso binomial de Enseñanza/Aprendizaje de las Matemáticas.

Las actividades o tareas de investigación en geometría pueden ser aquéllas en las que el alumno indaga acerca de las características, propiedades y relaciones entre objetos geométricos con el propósito de dotarlas de significados. Probablemente es en este tipo de tareas donde se aprecia de mejor manera el enfoque de resolución de problemas en la enseñanza de la Geometría.

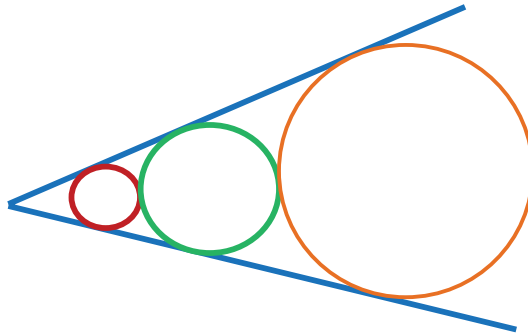
Un problema se concibe como una situación ante la cual no se cuenta con un proceso de resolución inmediato; si ya se sabe cómo resolverlo, entonces no es un problema. Es decir, podemos plantear a los alumnos problemas para *practicar* un conocimiento o problemas para *construir* un conocimiento, estos últimos son los que entran dentro de las tareas de investigación.

En este número presentamos al triángulo, al cuadrado, a la circunferencia como elementos centrales de las dos joyitas en el *sapere aude*.

- a) Cada cuadrado pequeño mide $(2\text{cm}) \times (2\text{cm})$. Si elegimos dos puntos, uno sobre cada círculo, ¿cuál es la distancia mínima entre tales puntos?



- b) Si el radio del círculo más pequeño mide 2cm y que el del segundo círculo es de 3cm , ¿cuál es el radio del tercer círculo?



¡Espero que disfrutéis con la propuesta!

NOTA: Las respuestas pueden enviarla a la dirección electrónica:

sapereaudethales@gmail.com

