

94

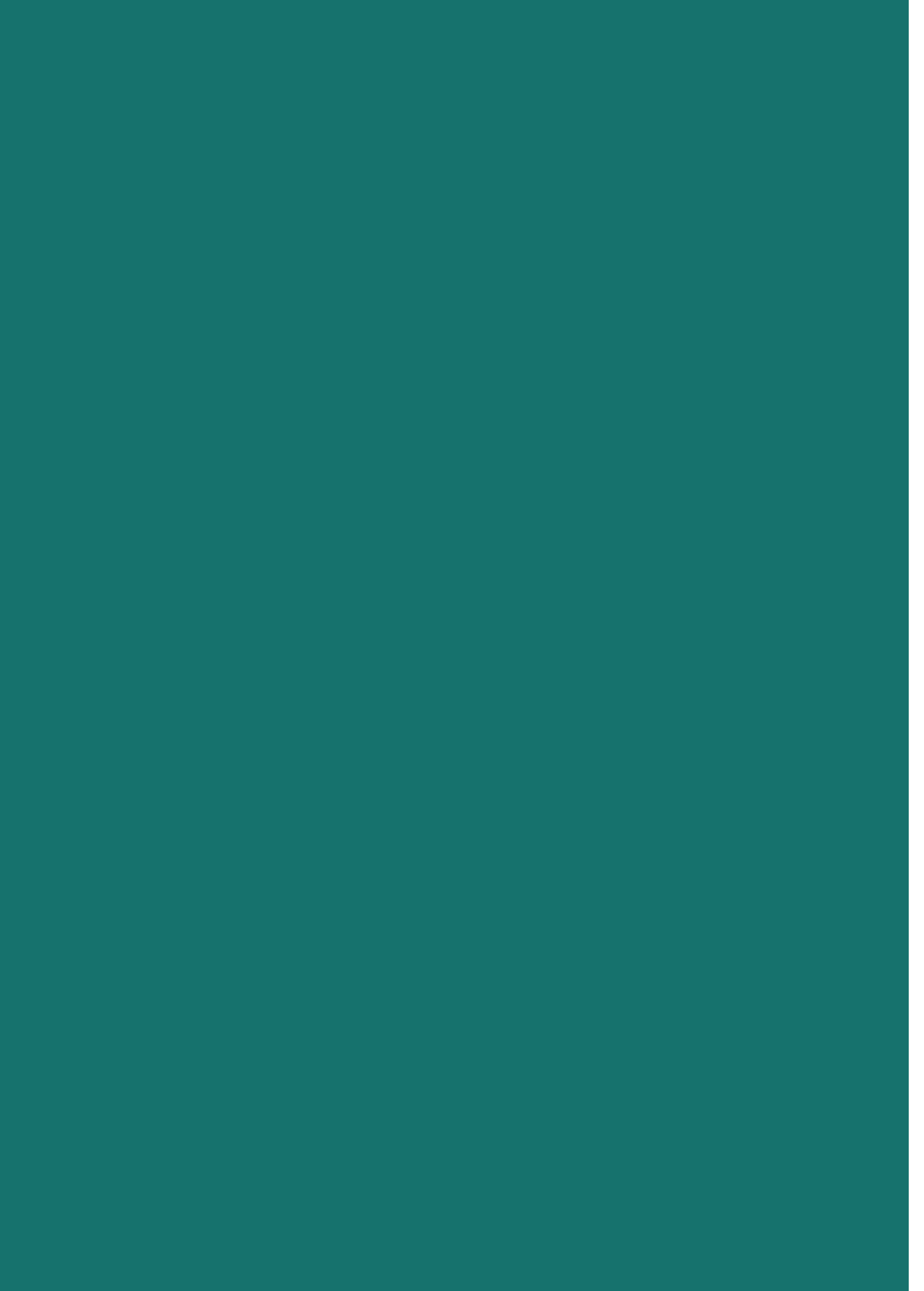
Vol. 34 (3)
2016



epsilon

Revista de Educación Matemática

Editada por la S.A.E.M. "THALES"



epsilon 94

Revista de Educación Matemática

Director

Alexander Maz

Comité Editor

Francisco España,

Inmaculada Serrano

José María Vázquez de la Torre

Salvador Guerrero

Noelia Jimenez

Comité Científico

Evelio Bedoya,

Universidad del Valle, Colombia.

José Carrillo

Universidad de Huelva, España.

José Iván López Flores,

Universidad Autónoma de Zacatecas, México

José Ortiz,

Universidad de Carabobo, Venezuela.

Liliana Mabel Tauber,

Universidad Nacional del Litoral, Argentina.

M^a Mar Moreno,

Universidad de Lleida, España.

Matías Camacho,

Universidad de la Laguna, España.

Roberto Alfredo Vidal Cortés,

Universidad Alberto Hurtado, Chile.

Página de la revista: <http://thales.cica.es/epsilon>
Revista: epsilon@thales.cica.es

Edita
Sociedad Andaluza de
Educación Matemática "Thales"
Centro Documentación "Thales"
Universidad de Cádiz
C.A.S.E.M.
11510 PUERTO REAL (Cádiz)

Maquetación e impresión
Utrera de Ediciones, s.l.
Cristóbal Colón, 12
41710 Utrera (Sevilla)

Depósito Legal
SE-421-1984

ISSN:
2340-714X

Período
3^{er} cuatrimestre 2016

Suscripción
(3 Números al año.)

S.A.E.M. THALES

SALVADOR GUERRERO HIDALGO

Presidente

FRANCISCO ESPAÑA PÉREZ

Vicepresidente

M^a BELÉN SEPÚLVEDA LUCENA

Secretaría General

AGUSTÍN CARRILLO DE ALBORNÓZ TORRES

Secretario de Administración y Tesorería

SEDE

FACULTAD DE MATEMÁTICAS

Edif. de la E.S.I. Informática. Ala L2

Avda. Reina Mercedes, s/n.

Aptdo. 1160

41080 SEVILLA

Tlfn. 954 62 36 58 - Fax: 954 236 378

e-mail: thales@cica.es

SEDE ADMINISTRATIVA DE LA SOCIEDAD Y REVISTA

CENTRO DE DOCUMENTACIÓN THALES

Facultad de Ciencias. Departamento
de Matemáticas

Campus del Río San Pedro, s/n

Torre Central, 4^a Planta

11510 Puerto Real (Cádiz)

Tlf. y Fax: 956 012 833

e-mail: thales.matematicas@uca.es

ALMERÍA

EVA ACOSTA GAVILÁN

Delegada Provincial

CÁDIZ

PALOMA PASCUAL ALBARRÁN

Delegada Provincial

CÓRDOBA

MARINA A. TOLEDANO HIDALGO

Delegada provincial

GRANADA

MARGARITA GARCÍA SCHIAFFINO

Delegada Provincial

HUELVA

ROCÍO BENÍTEZ CAMBRA

Delegada provincial

JAÉN

JUAN ANTONIO ESPINOSA PULIDO

Delegado provincial

MÁLAGA

SALVADOR GUERRERO HIDALGO

Delegado provincial

SEVILLA

ANA M^a MARTÍN CARABALLO

Delegada Provincial

7

INVESTIGACIÓN

7 **Tres enfoques históricos para la resolución del problema de los n herederos con reparto equitativo, desconociéndose la cantidad de herederos y el total a repartir. Three historical approaches to solve the problem of n heirs with equal distribution, where the number of heirs and the total amount is unknown**

Maria T. Sanz
Bernardo Gómez

19 **Las Matemáticas en la *Telescuola* de Portugal: Formación del profesorado y contribución del archivo personal del Profesor Bernardino Gonçalves Sobral. Mathematics in the Telescuola de Portugal: Formation of the professional and contribution of the personal archive of Professor Bernardino Gonçalves Sobral**

Ana Maria Vieira
Ana Santiago

33 **Actitudes hacia las matemáticas de maestros en formación: una visión sobre su futuro desempeño docente. Attitudes towards mathematics of teachers in training: a vision about their future as teachers**

María José Madrid
Alexander Maz-Machado, Carmen León-Mantero,
José Carlos Casas, Noelia Jiménez-Fanjul

43

EXPERIENCIAS

43 **Entre matemáticas y libros. Between mathematics and books**

Isabel María Eugenio Tinoco
José Manuel Jiménez Cobano

51 **Percepción de los alumnos acerca del teorema de Pitágoras. Students' perception of the Pythagorean theorem**

Juliana Troyano Dueñas
Pablo Flores Martínez

61

IDEAS PARA EL AULA

- 61 **El uso de álbumes ilustrados para potenciar el aprendizaje matemático en las primeras edades. Using picture books to enhance mathematics learning in the early years**

Carlos de Castro Hernández

Mónica Ramírez García

81

MISCELÁNEAS

- 81 **Sobre la forma y el crecimiento cordobés del *Nautilus pompilius*. On the form and the Cordovan growth *Nautilus pompilius***

José R. Galo Sánchez

Ángel Cabezudo Bueno

Ildefonso Fernández Trujillo

- 111 **Maria Antònia Canals i Tolosa. Renovación pedagógica y didáctica de las matemáticas.**

- 115 **RINCÓN “SAPERE AUDE”... ¿resolviendo problemas?**

Sixto Romero

Tres enfoques históricos para la resolución del problema de los n herederos con reparto equitativo, desconociéndose la cantidad de herederos y el total a repartir

Maria T. Sanz y Bernardo Gómez

Dpto. de Didáctica de la Matemática. Universidad de Valencia

Resumen: *En este trabajo se estudia un tipo de problemas descriptivos con fracciones que ha estado presente en los libros de texto desde tiempo inmemorial. El objetivo de este trabajo es presentar los tres métodos de resolución encontrados en los libros de texto históricos, así como sus lecturas analíticas, todo esto a través de un estudio histórico-epistemológico. Se completa el trabajo con un estudio preliminar en el aula, con una muestra de 27 estudiantes con alta formación matemática que realizan un cuestionario con los problemas objeto de estudio. Con esto se determina que el método de resolución dominante es el algebraico, además de resaltar dificultades del alumnado en la traducción al lenguaje matemático, así como en algunos casos operatoria con fracciones.*

Palabra Clave. *Métodos de resolución, Lectura analíticas, Fracciones, Problemas descriptivos*

Three historical approaches to solve the problem of n heirs with equal distribution, where the number of heirs and the total amount is unknown

Abstract: *In this paper, a descriptive fraction problem, which has been presented in textbooks from time immemorial, is studied. The aim of this paper is to present three resolution methods, which have been found in historical textbooks, and their analytical readings, all through a historical and epistemological study. The work is completed with a preliminary study in the classroom, with a sample of 27 students with high mathematics level who made a questionnaire with the fraction problems that are analyzed in this work. The main conclusions with the preliminary study are the following: the method that prevails is the algebraic resolution and the students have difficulties with the translation to the mathematical language, and in some cases with fraction operations.*

Keywords: *Resolution methods, analytical reading, fractions, descriptive problems*

INTRODUCCIÓN

En la actualidad el currículum escolar propone la resolución de problemas como una destreza básica en el desarrollo del pensamiento aritmético y algebraico, y son los métodos de resolución históricos los que permiten enriquecer y mostrar la diversidad de los mismos, siendo parte esencial en este desarrollo.

Para indagar sobre los distintos métodos de resolución de que son susceptibles los problemas escolares hay que acudir al análisis histórico y epistemológico de los libros de texto, en tanto análisis de la formación de los objetos matemáticos y de su enseñanza a lo largo de su historia. Este análisis necesita de una metodología de aproximación global basada en el análisis de contenido propio del análisis didáctico (Rico, Lupiáñez y Molina, 2013), ya que la metodología de estudiar textos aislados es insuficiente en la medida en que ignora las raíces y evolución del objeto de estudio. En este sentido adquiere sentido situar las subunidades del análisis de contenido en una selección de libros y documentos representativos de las etapas principales en que se puede dividir la historia de las matemáticas. En el caso de los problemas descriptivos, la subunidad fundamental que centran el estudio es la lectura analítica.

La lectura analítica orienta y determina el método para resolver el problema. En general, debe entenderse que la lectura analítica es la declaración de un problema reducido a una lista de números y la relación entre cantidades, de manera que puede conducir a una ecuación o una fórmula. La ecuación se obtiene como un resultado de búsqueda de dos expresiones algebraicas que representan la misma cantidad obtenida para describir las relaciones aritméticas, que una cantidad representada con expresiones algebraicas tiene con otros que han sido previamente representados por una letra o una expresión algebraica (Puig, 2003). La fórmula se obtiene encontrando el valor de la incógnita se expresa en términos generales, o lo que es lo mismo, las operaciones deben ser realizadas con la lista de datos. Las fórmulas traducidas al lenguaje ordinario dan lugar a reglas generales de resolución.

Este trabajo se centra en los problemas de los n herederos con reparto equitativo donde se desconoce tanto la cantidad a repartir como el número de herederos. Se trata de problemas de fracciones, donde el reparto se va encadenando, es decir uno depende del anterior.

En los libros de texto hay una gran variedad de estos problemas de fracciones cuya historia se remonta a las antiguas culturas de Mesopotamia, las matemáticas, la egipcia, china e hindú. Las declaraciones de estos problemas han evolucionado con el tiempo para adaptarse a los cambios sociales, los desarrollos matemáticos, y las teorías educativas dominantes en todo momento, al tiempo que conserva un contenido común matemática.

Estos problemas fueron usados como una parte esencial de la enseñanza de las matemáticas. Sin embargo, ya que estaba cambiando el modelo educativo, se disminuye la confianza en el poder educativo de estos problemas, hasta el punto de que muchos de ellos han desaparecido de los libros de texto actuales, o se han reducido a un mero entretenimiento.

Con la intención de recopilar evidencia histórica de los métodos de resolución de problemas descriptivos de fracciones, esta investigación se dirige, no sólo con el propósito de transmitir el conocimiento, sino con el objetivo de prestar atención a los aspectos de

la resolución de los problemas que tienen por objeto la producción de conocimiento significativo para el alumno.

A partir de aquí el trabajo consta de las siguientes partes: Lecturas Analíticas del Problema. Metodología y Estudio Preliminar, dónde se explica la muestra escogida y la metodología a seguir. Resultados, se analiza con detalle las respuestas de los estudiantes y por último las Conclusiones del trabajo.

LECTURAS ANALÍTICAS DEL PROBLEMA

En este trabajo se analiza el problema titulado por Singmaster (1998) como “el problema de herencias dando $1 + \frac{1}{7}$ de lo que queda y todo se llevan la misma cantidad”. Se trata de problemas verbales de varias etapas donde el todo es desconocido y las partes están relacionadas con el complemento aditivo.

Tal como dice Singmaster (1998) aparece este problema por primera vez en Fibonacci (1202/2002):

El legado de la fortuna de un hombre. Un hombre en sus últimos días decide hacer testamento entre sus hijos mayores de la forma siguiente. Al primero le dijo, te daré un bezante y un séptimo del resto, a otro le dijo, te daré 2 bezantes y un séptimo del resto, a un tercero le dijo, te daré 3 bezantes y un séptimo del resto, y así sucesivamente con todos sus hijos. Uno de los hijos dijo que el reparto no era justo. Pero el padre dijo que todos tenían el mismo dinero

La relación fundamental entre las cantidades para poder resolver estos problemas se puede plantear desde tres puntos de vista diferentes, y esto es lo que se va a analizar a lo largo de este apartado a través de lo que ha quedado reflejado en los libros de texto de diferentes. Para la revisión de los libros de texto se ha hecho uso de tres momentos históricos: Edad Temprana, el período medieval y los tiempos modernos (libros impresos y de enseñanza) (Gómez, 2011).

1. Todos se llevan la misma cantidad

En todos los problemas de este tipo se dice que el reparto es equitativo, así pues, todas las personas se llevarán la misma cantidad. A modo de ejemplo se presenta el problema escrito y resuelto por Aurel (1552)

Ducados y $\frac{1}{10}$. También ducados. Un enfermo hace su testamento, y manda que su hacienda sea partida entre sus hijos, igualmente, que tanto haya el uno como el otro. Muerto el padre, dan al hijo mayor un ducado, y $\frac{1}{10}$ de lo que queda; al segundo, 2 ducados y $\frac{1}{10}$ de la resta; al tercero 3 ducados y $\frac{1}{10}$ de lo que quedó; así a cada hijo un ducado más que al otro y $\frac{1}{10}$ de la resta. De esta manera es satisfecha la voluntad del padre, porque vino a cada uno tanto como al otro. Demando, ¿cuántos ducados dejó, y cuántos hijos tenía?

Pongo, que dejó x ducados de los cuales toma el mayor, o primer hijo 1 ducado, quedan $x-1$, el $\frac{1}{10}$ de esta resta es $\frac{x-1}{10}$, lo cual junta con 1 ducado, y vendrán $\frac{x+9}{10}$, tantos ducados vienen al hijo primero. Estos quita de x , y quedará para los otros hijos $\frac{9x-9}{10}$ ducados, de los cuales toma el segundo, 2 ducados, quedaran $\frac{9x-29}{10}$, cuyo $\frac{1}{10}$ es $\frac{9x-29}{100}$ el cual junta con los 2 ducados que el 2º tomó, y vendrán $\frac{9x+171}{100}$ tantos ducados vienen al 2º. Y pues el uno heredó tanto como el otro, conviene que los ducados del uno sean iguales a los ducados del otro. Por lo cual digo que $\frac{x+9}{10}$ ducados del primero son iguales a $\frac{9x+171}{100}$ ducados del segundo. Reduce la igualación a entero (que es multiplicar en cruz) y vendrán $100x + 900 = 90x + 1710$. Iguala y parte y vendrá x a valer 81. Tantos ducados dejó el padre. Ahora para saber cuántos hijos eran mira qué viene a cada uno de esta manera, toma 1 ducado de los 81, quedarán 80, cuyo $1/10$ es 8, el cual junto con el 1, y serán 9 ducado [que son los que] vienen a cada uno (Aurel, 1552, fo. 92)

Notar que en la solución escrita en este trabajo se usa la “ x ” en lugar del símbolo cósico utilizado por Marco Aurel.

Aurel resuelve el problema planteando una ecuación que representa que los dos primeros hijos heredan la misma cantidad, *Y debido a que cada uno heredaba tanto como el otro, ha acordado que los ducados de uno son iguales a los otros ducados*

$$\frac{x+9}{10} = \frac{9x+171}{100}$$

El desarrollo de la resolución de la ecuación se realiza paso a paso a partir de este planteamiento (últimas cinco líneas del problema).

2. La diferencia entre lo que se llevan dos es cero

Euler utiliza el método cartesiano, al igual que Aurel, pero en su lectura analítica plantea la condición crítica de este tipo de problemas en términos de la diferencia entre lo que se llevan los dos primeros hijos es cero. En este caso, la tabla que incorpora el autor en su solución explica el método de resolución.

Las libras. Un padre deja a su muerte varios hijos, quienes comparten sus bienes de la siguiente manera: el primero recibirá 100 libras y la décima parte del resto, el segundo recibirá 200 libras y la décima parte del resto, el tercero 300 libras y la décima parte del resto, el cuarto recibirá 400 libras y la décima parte del resto, así sucesivamente. Así se obtiene que la herencia queda dividida equitativamente entre sus hijos. Se requiere saber, cuántos hijos eran y cuánto recibió cada uno.

Supondremos que el total de la fortuna sea z libras; y que cada hijo recibirá la misma parte a la cual la llamamos x , con lo cual el número de niños vendrá determinado por $\frac{z}{x}$.

Ahora pasamos a la resolución del problema.

Suma o herencia que es dividida	Orden de los hijos	Parte de cada hijo	Diferencias
z	1°	$x = 100 + \frac{z-100}{10}$	
$z-x$	2°	$x = 200 + \frac{z-x-200}{10}$	$100 - \frac{x-100}{10} = 0$
$z-2x$	3°	$x = 300 + \frac{z-2x-300}{10}$	$100 - \frac{x-100}{10} = 0$
$z-3x$	4°	$x = 400 + \frac{z-3x-400}{10}$	$100 - \frac{x-100}{10} = 0$
$z-4x$	5°	$x = 500 + \frac{z-4x-500}{10}$	$100 - \frac{x-100}{10} = 0$
$z-5x$	6°	$x = 600 + \frac{z-5x-600}{10}$	y así sucesivamente...

Hemos insertado en la última columna las diferencias, las cuales se han obtenido cada parte menos la anterior, dado que todas las partes son iguales esta diferencia es igual a 0. Con lo que resolviendo esta ecuación $100 - \frac{x-100}{10}$ se obtiene que $x=900$.

Así pues ahora sabemos que cada hijo recibirá 900 libras, cogiendo cualquiera de las fórmulas de la tercera columna obtenemos $x = 100 + \frac{z-100}{10}$ que $z=8100$ libras, y en consecuencia, el número de hijos $8100/900=9$. (Euler, 1770/1821, p. 173).

3. La diferencia entre la cantidad que queda antes de la última distribución y el último reparto, es cero.

Solución del problema de Fibonacci, *The Bequest of a Man's Fortune*

Por los séptimos que él da a cada hijo tienes 7 y le quitas 1, entonces el resto son 6 y estos son el número de hijos que multiplicados por si mismos da 36 que es el número total de bezantes. (Fibonacci, 1202/2002, p.399).

Aunque, no hay nada en el texto que permita deducir cuál es la regla que utiliza Fibonacci, se va a suponer que la relación fundamental que utiliza el autor es que la diferencia entre la cantidad que queda antes del último reparto y este mismo es 0.

Esta relación se muestra con el lenguaje simbólico de la siguiente manera:

$$C - \left(1 \cdot n + \frac{1}{7} (C - 1 \cdot n)\right) = 0, \quad (1)$$

donde $1 \cdot n + \frac{1}{7} (C - 1 \cdot n)$, $n \geq 2$, es la cantidad que recibe el último niño, y n es el número de hijos y C son los bezantes que quedan tras el penúltimo reparto. De la relación fundamental (1) se sigue,

$$7C - C - 7n + n = 0 \rightarrow (7 - 1) C = (7 - 1) n \leftrightarrow C = n \quad (2)$$

Si $C=N$, la herencia, H , deber ser igual a n^2 (n niños and n bezantes cada uno de ellos). Ahora se necesita encontrar el valor de n , que se puede hacer, por ejemplo, resolviendo la ecuación de lo que recibe el primer hijo:

$$1 + \frac{1}{7}(n^2 - 1) = n \rightarrow n = 6. \quad (3)$$

Se puede pensar que Fibonacci no hizo uso de las ecuaciones de segundo grado para obtener su resultado, pero tal vez si que usó un método basado en la factorización y proporción, debido a que estos métodos eran más típico en aquellos tiempos. El siguiente ejemplo ayuda a ilustrar esta idea.

El mercader. Un mercader estando enfermo hizo testamento, dejando ciertos hijos, y cierta cantidad de hacienda, ordenando que al hijo primero le diesen la sexta parte de su hacienda, y 300 ducados más; al segundo la sexta parte del restante, y 600 ducados más; y al tercero la sexta parte del restante y 900 ducados más, y con este orden en los demás, dando siempre a cada uno la sexta parte del restante, y 300 ducados más al uno que al otro. Muerto el padre, partieron la hacienda, y hallaron que tanto vino al uno como al otro: pídense cuántos hijos dejó el padre, cuánta hacienda, y cuanto vino por cada uno

Quita el numerador del quebrado del denominador; esto es, 1 de 6 y quedaran 5 y tantos hijos dejó, luego multiplica los 300 ducados, que se dan de más a cada hijo, por 6, denominador del quebrado y montaran 1800 ducados y tantos ducados le tocaron a cada uno, los cuales multiplicados por los 5 hijos montaran 9000 ducados y tanta hacienda dejó el padre; pruébalo y hallarás ser verdad (Puig, 1715/2001, p. 209).

Razonando tal como se ha hecho con el problem anterior, con el lenguaje simbólico, lo que recibe el último niño,

$$300n + \frac{1}{6}C, n \geq 2 \quad (4)$$

donde n es el número de niños y C es lo que queda tras el penúltimo reparto,

$$C - (300n + \frac{1}{6} C) = 0, \quad (5)$$

$$6C - C = 6 \times 300n, \quad (6)$$

$$(6 - 1) C = 6 \times 300n, \quad (7)$$

El número de niños y la cantidad heredada deben ser números enteros. Si se observa la igualdad anterior y se continúa pensando en términos de factorización y proporción, la relación $\frac{6 \times 300}{6 - 1} = \frac{C}{N}$ muestra que $n = 6-1$ y $C=6 \times 300$, es una solución posible, y esta es la idea de que tal vez Fibonacci aplicó.

ESTUDIO COGNITIVO

Una vez identificadas las lecturas analíticas “históricas”, interesa conocer cuáles son las formas de proceder de los estudiantes actuales en la resolución de este tipo de problemas, ya que nunca antes se ha tenido ocasión de reflexionar propiamente sobre esto y su preparación es por tanto escasa. Así pues sería interesante para una posterior propuesta de enseñanza a los futuros profesores en la que se tengan en cuenta las dificultades, rigideces o rutinas de los estudiantes en relación con la resolución de los problemas verbales de fracciones.

Para ello se les presenta un problema, similar a los anteriores pero con un texto más motivador, titulado “The Raja’s pearls” que se encuentra en “El hombre que calculaba” (Tahan, 1993),

Un rajá dejó a sus hijas cierto número de perlas y ordenó que el reparto se hiciese del siguiente modo: a la hija mayor correspondería una perla más un séptimo de las que quedasen; la segunda tomaría dos perlas y un séptimo de las restantes; la tercera recibiría tres perlas y un séptimo de las que quedasen. Y así sucesivamente, para las restantes hijas. Las hijas más jóvenes presentaron su queja a un juez, alegando que por ese sistema complicado ellas serían fatalmente perjudicadas. El juez –dice la tradición–, que era hábil en la resolución de problemas, respondió rápidamente que las demandantes estaban equivocadas, y que la división propuesta por el Rajá era justa y perfecta. El juez tenía razón. Hecha la división, cada una de las hermanas recibió el mismo número de perlas. Se pregunta: ¿Cuál es el número de perlas? ¿Cuántas las hijas del Rajá? (Tahan, 1993, p. 76)

La muestra de 27 alumnos pertenece a estudiantes del Máster en Educación Secundaria, en adelante MES, procedentes de la Universidad de Valencia.

Los ítems que se estudian de las resoluciones de los alumnos son, el método de resolución y la relación fundamental entre cantidades que utilizan (1, 2 o 3 del apartado anterior).

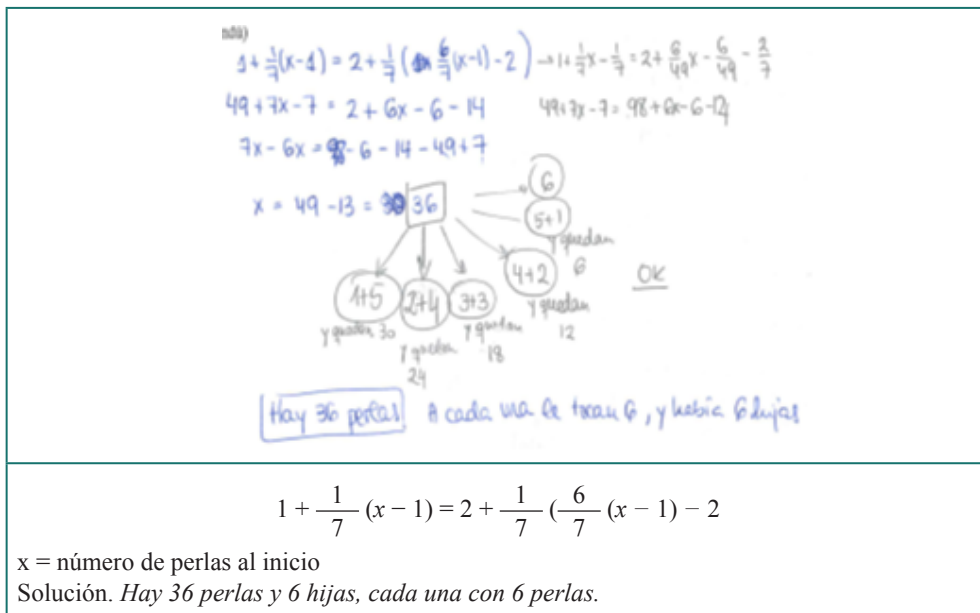


Figura 1. Ejemplo de resolución algebraica con criterio fundamental 1.

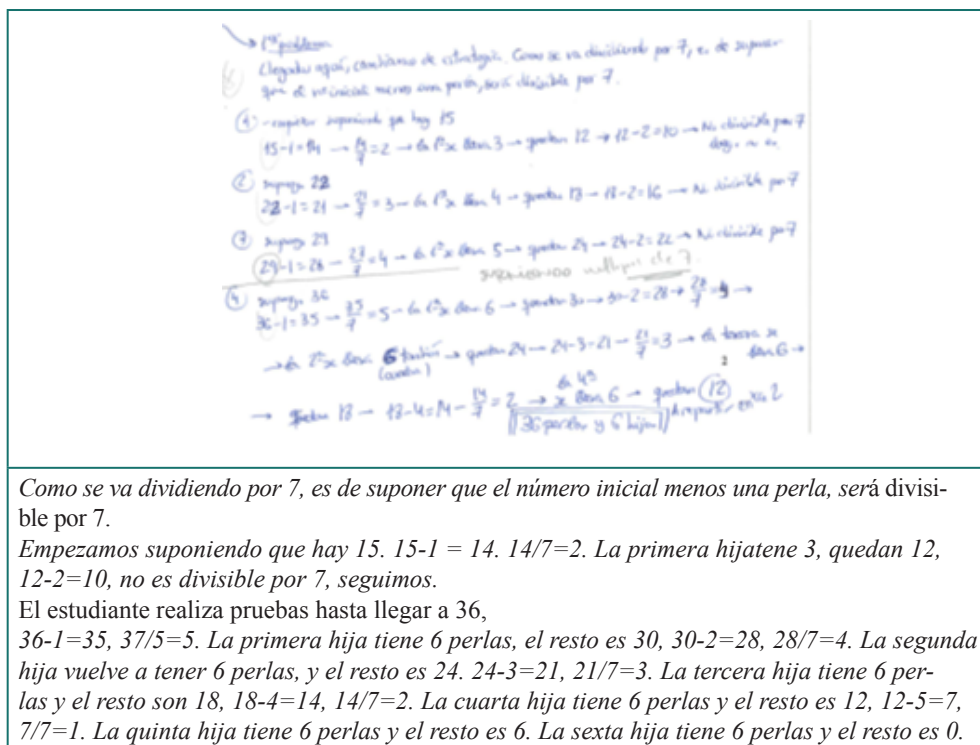


Figura 2. Ejemplo de resolución aritmética.



x = número de perlas al inicio

Se observan dos problemas:

- El estudiante calcula de forma correcta lo que le toca a la primera hija, pero ya no lo hace bien para la segunda (círculo)
- No es capaz de plantear una ecuación, correcta.

El estudiante escribe:

La última hija: n perlas + $1/7 \emptyset$ perlas

La penúltima hija:

$(n-1)$ perlas + $1/7$ de las que quedan.

$$(n-1) + \frac{1}{7} \left(-\frac{7}{6}n\right) = n$$

n hijas, x perlas

$$1 + \frac{1}{7}(x-1) = n + \emptyset$$

$$1 + \frac{x-1}{7} = 7 + x - 1 = 7n$$

$6 + x = n$ Se debe cumplir esta relación

Figura 3. Resolución con incorrecciones matemáticas. Círculo: Expresión de lo que queda.

RESULTADOS

El problema fue resuelto por 11 estudiantes (MES). Usaron el método algebraico, llamando x a la cantidad inicial a repartir. Además escogieron la relación fundamental que indica que todas las partes son iguales. Así pues, todos realizan un primer reparto, un segundo reparto, e igualan ambos, para obtener la cantidad inicial. En la Figura 1 se incluye la solución de uno de los alumnos.

De entre las soluciones, se destaca la de dos estudiantes (MES) que lo resolvieron suponiendo que la cantidad total menos uno debía ser un múltiplo de siete, y resuelven el problema empezando desde el último reparto. Esto lleva a pensar que tal vez Fibonacci

podría haber realizado el mismo proceso, aunque no se asume debido a que se trata de ensayo y error. Ambos alumnos van realizando pruebas con múltiplos de siete hasta que llegan a la solución.

El resto de estudiantes de la muestra considerada no resolvieron con éxito el problema por diferentes razones. Siete de ellos (MES) no entendieron algunos términos específicos del enunciado. Por un lado, no supieron traducir al lenguaje matemático la sentencia “de lo que queda” (círculo en la Figura 3). Por otro lado, existen otros alumnos de este grupo que no entendieron la frase “un bezante y un séptimo de lo que queda”, ellos traducen esto al lenguaje matemático como, $1+(1/7)x$ en vez de $1+(1/7)(x-1)$. Por último, hay estudiantes que tienen problemas con las operaciones aritméticas y con el planteamiento de la ecuación.

El resto de la muestra no realiza nada coherente, con lo que no cabe destacar nada.

CONCLUSIONES

En este trabajo, se ha estudiado un problema descriptivo de fracciones sobre herencias a través del análisis histórico y epistemológico. Para la selección de los problemas se han revisado libros de texto de distintas épocas o momentos históricos. Estos problemas formaban parte sustancial de la enseñanza de las matemáticas y se consideraron como la culminación del aprendizaje de la aritmética. Del estudio de las lecturas analíticas se desprende que estos problemas se han resuelto a través de tres relaciones fundamentales y dos métodos de resolución, uno aritmético y otro algebraico.

Al presentar este tipo de problemas a una muestra de 27 estudiantes, con alta formación matemática, se ha observado como traducían al lenguaje matemático la relación entre las cantidades y qué métodos de resolución utilizaban. Los resultados preliminares muestran una prevalencia en el método algebraico sobre el aritmético, como era de esperar dado la importancia que se otorga al método cartesiano en la enseñanza actual, y la relación fundamental que marca que todas las personas tienen la misma cantidad. Remarcar que los estudiantes tenían problemas con un sintagma característico de este problema „de lo que queda“ ya que les costaba la traducción al lenguaje matemático.

El hecho de que los problemas descriptivos puedan resolverse fácilmente y en general con el método cartesiano, como se demuestra en el estudio empírico aquí realizado, ha contribuido a perder de vista que estos problemas han servido para comunicar los usos, las técnicas, enfoques, métodos y el razonamiento de las matemáticas. Toda esta información puede ser útil para enseñar a utilizar los problemas como un objeto de estudio y no subproducto de otro tipo de aprendizaje. En la enseñanza tradicional, la resolución de problemas se presenta como „ejercicio y práctica“ para consolidar o aplicar el conocimiento previamente adquirido y no como estudio en sí mismo. Además, también puede ser útil para el investigador, ya que proporciona un modelo de la historia epistemológica para el estudio de los problemas clásicos, no como partes individuales de un contenido matemático, sino en relación con sus raíces y análisis de la evolución.

Por otra parte, el reto de los profesores e investigadores es mantener viva esta riqueza de conocimientos, para evitar que se caiga en el olvido. Se debe tener en cuenta el

objetivo del plan de estudios, que considera la resolución de problemas en una competencia básica y adaptarse a la enseñanza y las características de los alumnos.

REFERENCIAS

- Aurel, M. (1552) *Libro primero, de arithmetica algebraica*. Valencia: En casa de Ioan de Mey Flandro.
- Euler, L. (1770/1821) *Introduction to the Elements of Algebra. Selected from the Algebra of Euler*; by John Farrar. Cambridge: Hilliard, (2ª Ed.)
- Fibonacci, L. (1202/2002). Liber Abacci. In: Sigler, L.E. *Fibonacci's Liber Abaci A Translation into Modern English of Leonardo Pisano's Book of Calculation*. New York: Springer.
- Gómez, B. (2011). Marco preliminar para contextualizar la investigación en historia y educación matemática. *Epsilon* 28(1), 77, pp.9-22.
- Puig, Andrés. (1715/2001). *Arithmetica especulativa y practica y Arte de Algebra*. Barcelona: Por Joseph Giralt. Impresor, y Librero. (Facsimil). Valladolid: Maxtor.
- Puig, L. (2003) *Historia de las ideas algebraicas: componentes y preguntas de investigación desde el punto de vista de la matemática educativa*. En E. Castro, P. Flores, P.; T. Ortega, L. Rico y A. Vallecillos (Eds.). *Investigación en Educación Matemática. VII Simposio de la SEIEM*. Granada: U. de Granada. p. 97-108.
- Singmaster, D. (1998) *Chronology of recreational mathematics*. <http://utenti.quipo.it/base5/introduz/singchro.htm>
- Rico, L.; Lupiáñez, J. L. y Molina, M. (Eds.) (2013). *Análisis didáctico en educación matemática*. Granada: Comares
- Tahan, M. (1993) *The Man Who Counted - a collection of mathematical adventures. Translated by Leslie Clark and Alastair Reid*, W.W. Norton & Co. New York, London.

Las Matemáticas en la *Telescuola* de Portugal: Formación del profesorado y contribución del archivo personal del Profesor Bernardino Gonçalves Sobral

Ana Maria Vieira

Agrupamento de Escolas de Santiago do Cacém – ESMF

anamaria.aninhas@gmail.com

Ana Santiago

UIED – Universidade Nova de Lisboa

elisa_santiago@hotmail.com

Resumen: Desde hacía tiempo, el bajo nivel de alfabetización de la población, representaba una preocupación para el gobierno portugués. De este modo, en el 1964, el Ministro de Educación Galvão Teles, emitió el Decreto-Ley N° 46135 que creó el Instituto de Meios Audiovisuais, teniendo este como objetivo principal, motivar cambios en el sistema de enseñanza con el uso de la tecnología.

Después de la creación de este instituto, el Decreto Ley N° 46136, de diciembre del 1964, define la organización, el funcionamiento y los objetivos de los diferentes cursos creados a continuación. En este contexto, se destaca el programa “Enseñanza Telescuola”, en el que los cursos fueron diseñados con el apoyo de la radio y la televisión. Este programa innovador, fue decisivo en la enseñanza obligatoria en la población portuguesa durante décadas (en particular en las zonas más rurales), lo que contribuyó al aumento en el nivel de conocimientos en Portugal.

Este trabajo pretende caracterizar el tipo de formación impartida a los maestros monitores de Enseñanza Telescuola, particularmente en el área de las matemáticas, denominado “Formación de maestros monitores” basado en materiales creados por el ex orientador pedagógico de Telescuola, el Profesor Bernardino Sobral, que también fue profesor supervisor. Para este estudio fueron llevadas a cabo algunas entrevistas que nos permitieron complementar la información tomada de documentos.

Palabras Clave: Enseñanza de las Matemáticas, Matemática Moderna, Telescuola, formación de profesores monitores, Orientador Pedagógico.

Mathematics in the Telescuola de Portugal: Formation of the professional and contribution of the personal archive of Professor Bernardino Gonçalves Sobral

Abstract: The low level of literacy of the population had long been a concern for the Portuguese government. Thus, in 1964, the Minister of Education Galvão Teles, issued Decree-Law No. 46135 that created the Institute of Audiovisual Media, the main objective being to motivate changes in the education system with the use of technology .

After the creation of this institute, Decree Law No. 46136, of December 1964, defines the organization, operation and objectives of the different courses created below. In this context, the “Teaching Telescuola” program is highlighted, in which the courses were designed with the support of radio and television. This innovative program was instrumental in the compulsory education of the Portuguese population for decades (particularly in the more rural areas), which contributed to the increase in the level of knowledge in Portugal.

This work intends to characterize the type of training given to the teaching monitors of Teaching Telescuola, particularly in the area of mathematics, denominated “Training of teacher monitors” based on materials created by the former pedagogical advisor of Telescuola, Professor Bernardino Sobral, who Was also a supervising teacher. Some interviews were carried out for this study, which allowed us to complement information gathered from documents.

Keywords: Teaching of Mathematics, Modern Mathematics, Telescuola, teacher training monitors, Pedagogical Advisor

1. INTRODUCCIÓN

En 1911 la Educación primaria en Portugal, pasa a ser libre y obligatoria, constando de tres niveles: elemental, complementaria y superior. Sin embargo, sólo es obligatorio el primer grado, con una duración de tres años. Con la reforma de la educación en 1919, la enseñanza obligatoria pasa de 3 a 5 años, con el objetivo de que “el niño tenga todos los instrumentos fundamentales de las bases de conocimiento y de cultura general, preparándose para la vida social” (Valente, 2010, p.1).

Según Valente (2010) que cita Fernandes (1981, p. 167), quince años mas tarde, con el golpe de estado de 1926, la Enseñanza primaria elemental se redujo a cuatro años, pero centrada sólo en tres años, bajo el lema de enseñar a *leer, escribir y contar*. El cuarto año adquirió un estatus de estudio adicional que proporciona el conocimiento esencial para todos los estudiantes que no podían progresar en sus estudios. Sin embargo, la falta de personal cualificado en los diferentes sectores económicos y la tecnología del país, hizo que el Ministro de Educación, Pinto Leite, decretara el aumento de la educación obligatoria de tres a cuatro años, pero en dos fases distintas. La primera para los hombres en 1956 y la segunda en 1960 para las mujeres.

Más tarde, el Ministro de Educación, Galvão Teles, por el Decreto Ley N° 45810, de julio del 1964 aumentó la enseñanza obligatoria de cuatro a seis años para ambos sexos. Este incremento en la enseñanza obligatoria provocó una falta de escuelas en el país, especialmente en el interior (de naturaleza esencialmente rural) y la escasez de maestros cualificados para ejercer la práctica docente.

En este contexto, en el 1964, el Ministro de Educación Galvão Teles, creó bajo el Ministerio de Educación Nacional, el Instituto de Medios Audiovisuales de Educación con autonomía administrativa y cuyo principal objetivo era promover el uso de técnicas audiovisuales, como medio auxiliar de la difusión de la enseñanza. (Decreto-Ley N° 46135 31 de diciembre de 1964, p.1970).

La concretización del objetivo principal dio lugar a un sistema educativo innovador que hacía uso de la tecnología de comunicación más avanzada existente en el momento, la televisión, Así nació la Telescuola.

Este programa de enseñanza, inicialmente en forma provisional, iba a ser a lo largo de los años objeto de varias reformas, manteniéndose en funcionamiento durante más de cuatro décadas. La enseñanza de Telescuola fue estudiada por varios investigadores, en particular, con respecto a las matemáticas destacamos el trabajo de Costa (2010), Valente (2010), Barros (2012), Almeida (2013), Esteves (2013).

Este trabajo se centrará en la caracterización de la formación de maestros monitores de Telescuola en su perfil pedagógico, en su proceso de formación desde el principio de su carrera y en las actividades de formación que fueron ofertadas por el Ministerio de Educación sobre su carrera, en particular con respecto a las matemáticas. Con este fin se realizó un trabajo de búsqueda documental, complementado con entrevistas al Orientador Pedagógico Bernardino Gonçalves Sobral, inspector, ahora retirado que trabajó de forma continua en este tipo de enseñanza como maestro y como Orientador pedagógico durante más de 20 años, lo que nos permitió conocer este tipo de enseñanza, adquiriendo conocimientos reales; de hecho, proporciona un estudio objetivo desde su creación a los cambios y transformaciones que ha sufrido, particularmente en el nivel técnico y pedagógico.

2. METODOLOGÍA DE INVESTIGACIÓN

En este trabajo de investigación, los pasos de nuestro plan de trabajo siguieron la metodología de la investigación histórica. El método histórico consta de cuatro etapas: heurística, la crítica, la hermenéutica y la exposición (Ruiz Berrio, 1997).

En el tratamiento de fuentes impresas (documentos) y escritos a mano (notas del Orientador Pedagógico Bernardino Sobral) se hizo una lectura, análisis y selección crítica en el sentido de la identidad de quién las produjo, con qué intención y cuales fueron los criterios de selección de estos para la investigación. Además de estas fuentes de referencia, se utilizó una fuente oral complementaria, entrevistas informales al Orientador Pedagógico Bernardino Gonçalves Sobral.

Las entrevistas permitieron confirmar lo que encontramos en documentos de otro tipo, tales como las experiencias personales, información sobre documentos escritos y / orales (Alberti, 2005, pp. 22-23).

Para Almeida (2013) y citando a Camargo (1989) “la historia oral puede considerarse una fuente legítima, ya que no induce más errores que otras fuentes documentales e históricas. La historia oral tiene el mérito de introducir al investigador en la construcción de la propia historia, lo que permite una evaluación constante del documento durante su construcción” (pp. 13-14).

En nuestro estudio hemos optado por entrevistas no estructuradas propias de los estudios históricos (Bogdan & Bilken, 1994), es decir, conversaciones informales con Orientador Pedagógico Bernardino Gonçalves Sobral.

En nuestra investigación, hemos localizado las anotaciones originales, escritas a mano y impresas, folletos y también copias de otros documentos que formaban parte del archivo personal del Orientador Pedagógico Bernardino Gonçalves Sobral, que contienen fuentes primarias y secundarias, según McCulloch (2004).

3. LA ENSEÑANZA TELESUELA

El Ministro de Educación Galvão Teles creía profundamente en el papel que los medios de comunicación pueden desempeñar en el aprendizaje, llevar la educación obligatoria a más personas, con un gasto mínimo y rápidamente.

Para obtener beneficios económicos de los medios audiovisuales, como auxiliar fue creado en el Ministerio de Educación Nacional, el Instituto de Medios Audiovisuales de Enseñanza cuyo principal objetivo era «promover la difusión de la enseñanza, que contribuye de forma simultánea a aumentar el nivel cultural de la población» (Decreto Ley N° 46135, de 31 de diciembre de 1964).

Con la creación de este Instituto y la promulgación del Decreto Ley N° 46136, diciembre de 1964, el Ministro de Educación Galvão Teles implementa una enseñanza a través de cursos de radiodifusión y televisión escolar - Telescuela.

Pronto la Telescuela se convirtió en la escuela más difundida en el país, ya que permitía la posibilidad de que toda la población asistiera a estos programas, proporcionando así un aumento en el nivel cultural de los portugueses, cumpliendo uno de los objetivos recomendados por el Ministerio de Educación.

Se crea así una posibilidad, hasta ese momento inexistente, para reducir al mínimo la diferencia entre la escolarización de las zonas rurales y urbanas. El programa fue equivalente al ciclo de la educación técnica preparatoria, con la integración de la disciplina de francés, lo que permitió la continuación de estudios.

Segundo Santos (2003) señala que en 1974 la Telescuela funcionaba de forma consolidada llegando la O.C.D.E., en 1976, a elogiar este tipo de enseñanza, tanto por la calidad como por los niveles de éxito que presentaba.

Este tipo de enseñanza se destinaba al 5° y 6° grado de escolaridad, las clases funcionaban normalmente en establecimientos de Educación primaria, después del término de estas y los maestros eran mayoritariamente oriundos, también del mismo ciclo.

Después de varias orientaciones y variantes de actuación, la Telescuela cambió de nombre por tres veces hasta su extinción: Curso Unificado da Telescuela de 1965 a 1968; Ciclo Preparatorio TV de 1968 a 1990 y Enseñanza Básica Mediatizada de 1991 a 2006.

En 1980, podía considerarse que la Telescuela funcionaba de forma sólida y las emisiones pasaron a ser emitidas en color. Entre el archivo personal del Orientador Pedagógico Bernardino Gonçalves Sobral encontramos un documento, datado del 1980 que resalta la preocupación de la existencia o no de alternativa a la Enseñanza Telescuela.

La década de los ochenta marcó el comienzo de la decadencia de la enseñanza Telescuela debido a las divergentes corrientes de pensamiento. Hubo quienes frente a las dificultades económicas y el aislamiento de algunos estudiantes, defendieron la continuidad de este programa de educación alternativa. Por otro lado, también hubo quienes pusieron en duda la pertinencia de la Telescuela, tanto en lo referente a la calidad de la educación, nivel de exigencia y preparación, como a la creación de una red de transporte gratuito que permitiera a los estudiantes más aislados, y / o desfavorecidos tener acceso al sistema de educación regular. En este contexto, por orden ministerial, se instituyó un grupo de Evaluación Telescuela.

También los tutores se dividieron en opiniones. El libre acceso a la red de transporte provocó que muchos padres / tutores aceptaran que los estudiantes viajaran para asistir a las clases en la enseñanza regular. Sin embargo, hubo aquellos que por necesidad económica o necesidad de mano de obra libre para el trabajo agrícola, se manifestaron contra la extinción de Telescuela, ya que el tiempo de viaje y la espera para el transporte fueron (a los ojos de padres / tutores) vistos como una *pérdida de tiempo*.

Además de todo lo anterior, todavía había resistencia por parte de un gran número de familias y / o tutores, debido a las grandes contingencias más allá de los viajes de sus estudiantes, también la incorporación de los maestros demasiado tardía y factores económicos, a pesar de los alumnos tenían transporte gratuito garantizado. Los cambios en la forma en que los estudiantes podían continuar sus estudios han dado lugar a una desigualdad social marcada por una tasa de fracaso y un gran abandono escolar.

A pesar de que durante el año escolar 2001/2002 hubo cerca de 5.200 estudiantes matriculados en EBM, con una tasa de éxito de alrededor del noventa por ciento, la extinción de los Puestos de Telescuela continuaron siendo una realidad. En el año escolar 2001/2002, mediante Orden conjunta N° 598/2001 de 10 de julio, comienza la extinción gradual de la EBM y el año escolar 2005/2006 el EBM estaría totalmente extinguido.

4. FUNCIONAMIENTO DE LA TELESUELA Y AGENTES DE ENSEÑANZA

Era la Telescuela la que establecía las condiciones mínimas específicas para que un espacio pudiera ser adoptado como puesto de recepción y las horas de trabajo semanales. Los puestos de recepción, al inicio, fueron instalados en las escuelas primarias que operaban en un sistema de división horaria (por la mañana clases de primaria e por la tarde clases de Telescuela) o bien en locales prestados por las autoridades locales (Santos, 2003). A finales de los años sesenta y principios de los setenta, las emisiones de Telescuela llegaron a San Tomé y Príncipe y, algún tiempo después, a la isla de Madeira y las Azores.

Desde Lisboa y Vila Nova de Gaia se hacían las actividades de producción y coordinación de todos los materiales y desde Vila Nova de Gaia se llevaba a cabo el control de

las transmisiones televisivas. Por decreto, el Ministro de Educación Galvão Teles, reguló los cursos que podían ser impartidos en Telescola.

Esta enseñanza era impartida por un profesor oficial apoyado por directores para los distintos cursos. Preparaban todos los materiales necesarios para que los Profesores Monitores acompañaran a los estudiantes en los Puestos de Recepción. Los Orientadores pedagógicos / Inspectores hacían de puente entre los Profesores Transmisores que preparaban los materiales para los Profesores Monitores.

Los estudiantes siempre estaban acompañados en el salón de clases por ese profesor monitor, que era responsable de hacer de puente entre el profesor transmisor y los estudiantes, durante el programa que duraba aproximadamente entre veinte y veinticinco minutos. Durante la emisión, los estudiantes podían interactuar con el profesor transmisor como si estuviese presente en la clase.

Los Profesores Presentadores debían usar un discurso oral y escrito coherente para todas las materias y el nivel de exigencia en la evaluación debía ser consensuada, para que este tipo de enseñanza fuera lo más justo posible, a nivel nacional. Se justifica, por lo tanto, un plan de estudio y un programa de las diversas disciplinas de carácter unitario (Preámbulo del Decreto-Ley N ° 47480 de 2 de enero de 1967).

Se llegó a comprobar más tarde que las clases transmitidas por televisión permitían a los estudiantes un aprendizaje diferenciador, a su propio ritmo, lo que les permitía una satisfacción y bienestar en el aula. Las técnicas de transmisión televisiva motivaban y estimulaban el aprendizaje de los estudiantes, sin embargo, eran reducidas con respecto al nivel de actividad física, aunque se considera que *estimulaban la comprensión y la imaginación* (Gomes¹, 1967).

Este tipo de enseñanza, mientras estuvo en vigor, fue adaptándose a los avances tecnológicos innovando metodologías de enseñanza, tratando de sacar provecho de ellas. En 1975 la sede se trasladó sus instalaciones y R.T.P. sólo se utilizaba para la difusión de programas. En el año académico 1988/89 las emisiones en directo fueron sustituidas por las cintas de vídeo, esta enmienda se consideró una innovación en el sistema portugués (Santos, (2003), Barros (2012)). Se consolidó en una época en la que las clases fueron preparadas con antelación en vídeo y se introdujeron nuevas estrategias de enseñanza, especialmente en Matemáticas, que dieron los primeros pasos en el uso de calculadoras en el aula.

5. LOS MATERIALES UTILIZADOS EN LA TELESCUELA

Según Barros (2012) todos los materiales utilizados en la Telescola fueron desarrollados por equipos multidisciplinares que luego hacían llegar a los Profesores Monitores. Al comienzo de la implementación del sistema, los materiales eran fichas sueltas simples. Estas eran consideradas de buena calidad y eran enviadas a los Puestos de recepción, mensualmente. Estaban equipados con todos los materiales necesarios para la

1. Ejerció el cargo de Director de la Telescola a partir de 1965. Hasta el 25 de abril ejerció el cargo de Director General del Ministerio de Educación y continuó, por la voluntad de los trabajadores. Ejerció sus funciones durante dos legislaturas, además de ser Inspector General de Educación.

enseñanza y si había algo dañado, inmediatamente era sustituido. En cada sesión, todos los días, dicha hoja era distribuida por el Monitor y el estudiante al final de la sesión la dejaba archivada en el *dosier*. Las hojas estaban en blanco y negro, sin fotos. Hay que tener en cuenta que muchos Profesores Monitores se preocupaban en crear algunos materiales, en particular manipulativos, con el propósito de que el estudiante comprendiera mejor lo que sería transmitido durante la sesión. En algunas disciplinas los estudiantes no manipulaban materiales, pero las experiencias presentadas en las emisiones eran detalladas, apelativas y podían captar su atención, como por ejemplo en el caso de la geometría.

Según Almeida (2013) y citando António Augusto Lopes la colección de sólidos geométricos incluía modelos de papel y modelos de alambre, cada estudiante debía construir su propia colección. Si no era posible, el Puesto de Recepción debía tener al menos una colección de modelos suficientes para que cada estudiante pudiera en cualquier momento. Las colecciones de figuras planas estaban realizadas en cartón fuerte o plástico laminado, incluidos varios ejemplos de formas geométricas comunes (polígonos y círculo) de diversas dimensiones. (IMAVE, 1965, p.85). En algunos Puestos de Recepción, los Profesores Monitores, en la enseñanza de la geometría, construyeron con sus estudiantes sólidos geométricos.

Barros (2012) establece que, al final de los años sesenta, la Telescuela lanzó los primeros libros de texto, sustituyendo las fichas de trabajo. Estos libros de texto se editaron en blanco y negro, con pocas imágenes y poco formales, tal vez, para que pudieran ser vendidos a precios más asequibles, aunque muchos estudiantes los adquirieran gratuitamente.

En los servicios centrales, los equipos técnicos y pedagógicos trabajaban juntos en la producción y ejecución de los recursos didácticos, así como en las grabaciones necesarias para la concepción de los mismos, por eso eran responsables del desarrollo, la producción y presentación de todos los materiales de apoyo del sistema de visualización y ofrecieron su imagen en la televisión para explicar el contenido. Además, les competía también preparar material específico como la planificación de lecciones, directrices científicas y sugerencias pedagógicas, que eran publicadas con antelación en los folletos, Boletines de Profesores Monitores.

Les competía también hacer las pruebas de evaluación. Durante cada año escolar se elaboraron seis pruebas de evaluación de preguntas de elección múltiple (O.C.D.E., 1977). Estos equipos pedagógicos evaluaban los resultados obtenidos en las diversas disciplinas, los analizaban y trataban de encontrar justificaciones para obtener buenos resultados. Proponían soluciones para mejorar el aprendizaje del estudiante.

Los Orientadores / Inspectores pedagógicos eran el enlace entre los equipos educativos y monitores. Su objetivo era controlar todas las actividades, orientar y asesorar a los Profesores Monitores (Vieira, 2014). Su actividad se amplía además, a establecer contactos con las autoridades locales a nivel de parroquia y Ayuntamientos con el fin de satisfacer todo tipo de escasez, que pudiera poner en peligro el cumplimiento de funcionamiento /rendimiento escolar.

6. LA DISCIPLINA DE MATEMÁTICAS EN LA TELESCUOLA

Aunque los programas de disciplinas de la Telescuola fueron diseñados para que fueran semejantes a los del ciclo inicial de la Escuela Técnica, no fue así en el caso de las matemáticas. Fue la Telescuola la que introdujo la matemática moderna, ya que en Portugal, en los años sesenta, se estaban iniciando las experiencias curriculares y uno de los miembros de la Comisión de Estudio sobre Modernización de la Enseñanza de la Matemática fue el profesor Antonio Augusto Lopes, Profesor Presentador de la Enseñanza Telescuola.

En los boletines de Orientación de Monitores del IMAVE, distribuidos trimestralmente cada año escolar, podemos encontrar los objetivos de la disciplina de las matemáticas, bibliografía, notas e información científica.

La matemática moderna llega a Portugal en 1963 con el nombramiento por el gobierno de una Comisión de Estudio para la Modernización de la Enseñanza Matemática de revisión del programa de último ciclo de la enseñanza secundaria y presidido por Sebastião e Silva (Almeida, 2013).

Cabe señalar que José Sebastião e Silva contribuyó a una profunda renovación en los programas que llevaba a nuevas pedagogías. Tuvo siempre como objetivo principal fomentar el gusto por la investigación, la profundización de los conocimientos científicos, y el estudio de la historia del pensamiento matemático. Utilizó el llamado método heurístico, recorriendo de lo particular a lo general, de lo concreto a lo abstracto, para lograr un resultado preciso con las definiciones y las demostraciones lógicas.

También contribuyeron los profesores António Augusto Lopes y António de Almeida Costa, ambos profesores, presentadores en la Enseñanza Telescuola, para la introducción de la Matemática Moderna en ese tipo de enseñanza que se consideró una innovación en Portugal, ya que ambos integraban este movimiento y eran colaboradores de Sebastião e Silva. Además, presentaban semanalmente una clase sobre la Matemática Moderna y también otros programas en directo a través de TV. Estos programas de televisión, más que la difusión de la disciplina, se dirigieron a los profesores en formación de matemáticas, afirmado por ellos mismos y citadas por Esteves (2013).

La Matemática Moderna se implementó por primera vez en los programas de Enseñanza Telescuola siendo considerado una innovación en Portugal. Entre las disciplinas que se impartían en la Telescuola era, tal vez, la que exigía por parte del Profesor Monitor más atención en la exploración de contenidos. Entre el archivo personal del Orientador Pedagógico Profesor Bernardino Gonçalves Sobral, en sus notas personales manuscritas, se expresa su preocupación con respecto a las dificultades presentadas por los alumnos a la disciplina de Matemáticas (Vieira, 2014).

Casi todos los textos usados en las clases de matemáticas llevan un esquema estructural bien diseñado: resumen, esquema descriptivo, con el guión televisivo, indicaciones metodológicas para la explotación de los contenidos y en algunas ocasiones se incluyen ejercicios prácticos.

António Augusto Lopes, según Almeida (2013), afirma que el programa de matemáticas se define por la secuencia lógica de materias, y que, a pesar de utilizar los contenidos del programa del Ciclo Preparatorio de Telescuola, hay un ordenamiento nuevo, integrando contenidos de la teoría de conjuntos. Por lo tanto, hay un entendimiento de que las

Tenho o direito de sentir e ver as necessidades e os efeitos do meu estudo em Matemática.

Tenho o direito de não compreender.

Tenho o direito de dizer que não compreendo.

Tenho o direito de não gostar de Matemática.

Tenho o direito de dizer que não gosto de Matemática.

Tenho o direito de aprender a gostar de Matemática.

Tenho o direito de ser considerado como capaz de aprender Matemática.

Tenho o direito de "fazer" e não de "ver fazer" a Matemática.

Tenho o direito de contar com a criatividade do Professor para que também eu seja criativo em Matemática.

Tenho o direito de aprender de acordo com o meu ritmo de trabalho.

Tenho o direito de não concordar que a Matemática seja um mero instrumento de selecção.

Tenho o direito de não julgar o meu valor em Matemática apenas pelas minhas notas.

Fig. 1 - Declaración de los derechos del alumno de Matemáticas

unidades de programa pueden ser los mismos, pero tratados de una manera diferente y en este sentido, se trata de un nuevo programa, sin embargo, esto no se admite oficialmente por escrito. Se considera que el papel del Profesor Monitor es esencial para el aprendizaje y es el responsable de asegurar el pleno desarrollo de la actividad del estudiante.

Se entendía que la enseñanza de las matemáticas debe permitir que el estudiante pueda entenderlas y utilizarlas no sólo en la escuela, sino en la vida profesional y en la promoción del desarrollo científico y tecnológico.

Localizamos entre el archivo personal del Orientador Pedagógico Profesor Bernardino Gonçalves Sobral, documentos dirigidos a todas las disciplinas, en relación con la disciplina de matemáticas encontramos el documento “Bases para una metodología adecuada” y textos de apoyo que lo acompañan, por ejemplo un extracto de “Matemáticas en la leyenda y en la historia” de Malba Tahan y consideraciones “¿Cómo hacer matemáticas antes de los 11 años si la matemática es un pensamiento abstracto?” y consideraciones sobre el “Método didáctico” con las etapas/razonamientos: “Estadio sensorio motor”, “Estadio preoperatorio”, “Estadio operatorio concreto”, “Estadio operatorio formal”, “razonamiento operatorio-concreto” y “razonamiento operatorio-formal” y, además, una de las páginas de los derechos de los estudiantes “Declaración de Matemáticas”:

7. FORMACIÓN DE PROFESORES MONITORES

El Profesor Monitor, independientemente del uso de la televisión como herramienta de enseñanza, adaptaba su plan de clase para satisfacer la naturaleza cognitiva, emocional y / o psicomotoras de sus estudiantes, para proporcionarles un buen aprendizaje.

De la lectura hecha a los documentos del Orientador Pedagógico Profesor Bernardino Gonçalves Sobral, en particular, los folletos “ Orientación de Profesores Monitores”, por ejemplo, una de octubre de 1978, vemos la preocupación existente de que la función del Profesor Monitor no sólo se resume a un vehículo intermedio entre el conocimiento transmitido por la televisión y el estudiante; además, el profesor, realizar funciones de educador y buscar la cooperación de la familia, de los padres, con el fin de mejorar la educación / formación integral del estudiante. En conclusión, el profesor monitor tiene un papel diferente pero nunca pasiva y / o ausente.

7.1. Orientación de Profesores Monitores

La Enseñanza Telescuela tuvo como principal preocupación que los contenidos del programa fueran muy similares a la escuela regular que se impartía en los centros de población no rurales. Un Profesor Monitor para contestar a las preguntas de sus estudiantes de cualquier contenido del programa transmitido ya sea a través de Televisa y / o vídeo, exigía, de su parte una formación/preparación muy completa por lo que la Enseñanza Telescuela no descuidó la formación de los monitores de maestros Profesores Monitores.

Según Vieira (2014), al inicio del año escolar se distribuía a los Profesores Monitores guías de trabajo, resúmenes pedagógicos, con la preocupación y la prioridad de abordar los aspectos para los que se pensaba que los Profesores Monitores estarían menos dispuestos o capaces. En este tipo de formación les era aconsejado algunas referencias como complemento. El Orientador Pedagógico Profesor Bernardino Gonçalves Sobral afirma que:

(...)No había ningún tipo de enseñanza que acompañara el profesor como este. El profesor era supervisando por el lado positivo. Era ayudado, se iba a la escuela no para vigiar el profesor. Si el profesor decía que no tenía ninguna duda, se le preguntaba: ha leído su Boletín de Orientación? En cuanto al programa, hay que pensar en la forma de abordar este o aquel contenido (...) siempre una perspectiva de guía, sensibilización (...)

También Costa (2010) y Almeida y Matos (2010) son de opinion que la Telescuela proporcionaba a los Profesores Monitores sesiones de formación de preparación pedagógica y didáctica impartidas por los profesores de las materias respectivas en el curso de preparación para el año escolar.

Con el fin de superar algunas lagunas, tanto en el nivel científico / educativo o nivel técnico / administrativo que los Profesores Monitores podían encontrar en su práctica docente, eran proporcionadas emisiones de televisión como aclaración. Estas lecciones eran generales, o sobre una disciplina específica, que se procesa en dos etapas: programas diarios, generalmente relacionadas con dos tipos de materias, durante los quince días anteriores al inicio del año escolar; hasta el final del año escolar, sólo se emitieron dos programas semanales para el primer año (uno por televisión y uno por radio), y un programa de televisión semanal para el segundo año.

Desde 1967/1968, este tipo de entrenamiento pasó a tener una duración de una semana, con seis horas al día al inicio del año escolar para que los Profesores Monitores se

sintieran cómodos pedagógica y científicamente. Las emisiones de “Orientación de Profesores Monitores” constituían en sí, una tutoría didáctica para la aclaración de dudas y / o procesos de razonamiento para evitar problemas en las sesiones con los estudiantes en el aula.

El Instituto de Tecnología Educativa enviaba a los Puestos de Recepción de los Profesores Monitores a lo largo del año escolar, los documentos de orientación y procedimientos, no sólo de naturaleza pedagógica, sino también administrativa, que debían cumplir.

Según Vieira (2014), los Profesores Monitores eran durante el año escolar supervisados por los Orientadores Pedagógicos y de acuerdo con el Orientador Pedagógico Profesor Bernardino Gonçalves Sobral:

Cualquier profesor que ejercía en esta vía educativa fue objeto de una evaluación continua de su desempeño. De esta evaluación dependía su reelección o no a continuar con la enseñanza. Hubo muchas situaciones de no renovación. La no renovación estaba vinculada a la falta de adaptación a esta vía de enseñanza y al perfil singularizado de la Enseñanza Telescuela que era guiada por la competencia científica, junto con su capacidad y disponibilidad activa.

7.2. La Formación de Profesores Monitores con base en el archivo personal del Orientador Pedagógico Profesor Bernardino Gonçalves Sobral

Paralelamente a la lucha contra la analfabetismo de la población general, era necesario que el Ministerio de Educación se dotase de un cuerpo docente preparado para este tipo de educación. De este modo se formaron grupos de profesores que se llamaban equipos pedagógicos basados en Vila Nova de Gaia y Lisboa, que tuvo como uno de sus objetivos, apoyar a los Profesores Monitores, en su mayoría fueron profesores de la escuela primaria, que en las zonas rurales estarían en clase con los estudiantes.

Como se ha mencionado, nos fijamos en el archivo personal del Orientador Pedagógico Profesor Bernardino Sobral, con el fin de profundizar en la caracterización de la formación de Profesores Monitores. En este encontramos una serie de documentos relativos a la formación de Profesores Monitores, la correspondencia oficial (circular), documentos manuscritos personales, textos de apoyo a las acciones de formación, boletines informativos anuales y trimestrales de orientación para los Profesores Monitores (Vieira, 2014).

La circular con respecto a la formación de Profesores Monitores del inicio del curso escolar 1987/1988, de 28 de agosto de 1987, estaba acompañada de tres documentos: calendarización, textos de apoyo para los temas que debían abordarse y temas de reflexión. Las actividades propuestas constituían un conjunto seleccionado y muy bien organizado de sugerencias para que los Profesores Monitores las pudieran utilizar en sus planes de clase con el fin de conocer mejor a sus estudiantes en cuanto a su comportamiento y el conocimiento.

En este tipo de acción formativa los Profesores Monitores recibían textos de apoyo, complementados con actividades que permitían comprender mejor al estudiante principalmente, dentro de la evaluación de diagnóstico. Sugerían algunos juegos, con el fin de mirar a los estudiantes en las siguientes áreas: desinhibición; socialización, capacidad

de atención; capacidad de memorización; reacción a los estímulos: visuales y auditivos (Vieira, 2014).

También de acuerdo con Vieira (2014), en algunas reuniones entre los Equipos Educativos y Orientadores Pedagógicos, con objetivo de preparar el próximo año escolar eran programadas las sesiones de formación tal como figura en las notas personales de Orientador Pedagógico. Estas sesiones de formación se llevan a cabo, durante al menos tres días, cada día estaba destinado a un grupo de disciplinas. Por ejemplo, el 13 de septiembre de 1989, estaba dirigida a la disciplina de las matemáticas y otra.

Nota: Va a seguir habiendo actividades presenciales para Profesores Monitores:

6-7/11 – letras

8-9/11 – ciencias

13/9/89 – Matemáticas – el problema en la Matemática

Las notas tomadas de otra reunión en la que el Orientador Pedagógico Profesor Bernardino Gonçalves Sobral estaba presente se trataban las metodologías para cada una de las disciplinas, incluyendo la disciplina de las matemáticas:

Nota: en general a los estudiantes no les gusta esta disciplina – razones diversas contribuyen a eso.- Por lo tanto el Profesor Monitor tiene que motivar fuertemente la frecuencia puesto que las matemáticas se utilizan por los ciudadanos en el día a día.

Nota: La situación de los alumnos que aprobaban en el 1er ciclo con deficiencias graves de aprendizaje debe ser remediada en cuanto sea posible, utilizando el tiempo académico de apoyo u otras al alcance del profesor.

Nota: Los profesores deben leer cuidadosamente los contenidos del manual y los objetivos establecidos en el mismo - ya sea el libro del profesor o el libro de disciplina.

Nota: La programación de 5º y 6º año no se puede cambiar porque es el resultado de una orientación superior .

En la parte posterior de la nota se hace referencia a la preocupación del uso de la calculadora como instrumento de trabajo, excepto en la resolución de ejercicios escritos y pruebas de evaluación. La preocupación por la aprendizaje de alumno y los planes del Profesor Monitor se pone de relieve en estas notas. Además, el Profesor Monitor debía definir las estrategias de motivación para que los estudiantes vieran las matemáticas de una manera diferente.

Por fin, destacamos que también identificamos en el mismo archivo personal algunos libros: Boletines de Información para Profesores Monitores, Boletín de Orientación de Profesores Monitores, Apoyo Científico a los Profesores Monitores, Guías de Trabajo y Guía Administrativo. Estos no serán analizados en este texto una vez que están fuera de su ámbito.

CONCLUSIÓN

Era el propósito de este trabajo de investigación lograr aclarar qué tipo de formación proporcionaba el Ministerio de Educación a los Profesores Monitores de la Enseñanza

Telescola a lo largo de todo el año escolar y poder situarlo dentro de la historia de la enseñanza de la matemática.

A principios de este tipo de enseñanza los Profesores Monitores estaban sujetos a un programa de televisión al día de treinta minutos en el que se les dio información educativa, técnica y didáctica. Durante el período de nuestro estudio se evidencia que encontramos documentación de las actividades de formación de la que hemos retirado que al comienzo de cada año escolar había acciones de formación general y formación específica de cada una de las disciplinas. Esta formación fue impulsada por un profesor que pertenecía a los equipos pedagógicos. Las actividades se preparaban minuciosamente para que el Profesor Monitor no tuviera ninguna duda de cualquier nivel.

Al mismo tiempo se distribuyeron diversas actividades en el ámbito de cada disciplina para desarrollar con los estudiantes mientras el profesor monitor estaba en periodo de formación.

La evaluación de los estudiantes en Matemáticas fueron temas privilegiados en las sesiones de formación, sin embargo, también se observó para las otras disciplinas, más en particular con respecto a la lengua materna.

Fueron distribuidos a los Profesores Monitores, al año y al trimestre, documentación encuadrada y/o conjunto de hojas que contenían información muy precisa de instituciones educativas, científicas, administrativas y sociabilidad, más allá de los planes de estudio y los respectivos resúmenes.

Los planes de clase obedecían instrucciones detalladas sobre cómo explorar los contenidos durante la clase después de la transmisión. Acompañando a estos boletines de apoyo los monitores, boletines de información y Boletines de Apoyo Administrativo, había también un Boletín de apoyo científico para Profesores Monitores para cada una de las disciplinas.

Este trabajo también fue muy importante porque nos permite profundizar en el conocimiento de formación de los Profesores Monitores y desarrollar/mejorar las capacidades de búsqueda, selección, organización e información.

REFERENCIAS

- Alberti, V. (2005) Manual de história oral (3.^a ed.). Rio de Janeiro: FGV.
- Almeida, M.C e Matos, J.M. (2010). A comunicação de ideias Matemáticas no início da Telescola - linguagem, representações e práticas curriculares. Texto impresso. Comunicação apresentada no EIEEM, Caparica.
- Almeida, Mária C.R. C. de (2013). Um olhar sobre o ensino da Matemática guiado por António Augusto Lopes; Dissertação para obtenção do grau de Doutor em Ciências da Educação, Universidade Nova de Lisboa, Faculdade de Ciências e Tecnologia.
- Barros, R.A.C. (2012). A Telescola: perspetivas de Professores Monitores; Dissertação de mestrado, Universidade Nova de Lisboa, Faculdade de Ciências e Tecnologia.
- Bogdan, R.C. e Bilklen, S.K. (1994). Investigação qualitativa em educação. Uma Introdução à teoria e aos métodos. Porto: Porto Editora.
- Costa, A.R.S. (2010). Experiências na telescola: perspetivas de Professores Monitores; Dissertação de mestrado, Universidade Nova de Lisboa, Faculdade de Ciências e Tecnologia.

- Esteves, S.M.S. (2013). O Contributo de António de Almeida Costa na Matemática Moderna em Portugal; Dissertação para obtenção do Grau de Mestre em Matemática, Universidade Nova de Lisboa, Faculdade de Ciências e Tecnologia.
- Gomes A. (1967). A Telescola em Portugal. Lisboa (1966-1967). Separata da (4ª série) do Boletim do Instituto de Orientação Profissional.
- Mcculloch, Gary, (2004, 2011). Documentary Research in Education, History and the Social Sciences. 22 series, 2 Paper Tigers– Social Research and Documentary Studies. And 3 The Joy of Life– Doing Documentary Research. Universidade de Londres.
- O.C.D.E (1977) Uma revisão para a Avaliação da Telescola, com recomendações. Relator T. Taylor. Paris: CERI/OCDE.
- Ruiz Berrio, J. (1997) El método histórico en la investigación histórico-educativa. Em N. De Gabriel e A. Viñao (eds) *La investigación histórico-educativa*. Barcelona: Ronsel.
- Santos, R.F.D.(2003). A Telescola: Um contributo para a história do Ensino em Portugal; Tese de Mestrado, Universidade Portucalense, Porto.
- Valente, M.A.C. (2010). Telescola um método de ensino; Mestrado em Educação Matemática na Educação Pré-escolar e no 1º e 2º Ciclos do Ensino Básico, Instituto Politécnico de Lisboa, Escola Superior de Educação de Lisboa, Departamento de Educação.
- Vieira, A. M. R. M (2014). A Formação de Professores Monitores da Telescola: O Contributo do espólio do Orientador Pedagógico Professor Bernardino Gonçalves Sobral. Dissertação para obtenção do Grau de Mestre em Matemática, Universidade Nova de Lisboa, Faculdade de Ciências e Tecnologia.

Actitudes hacia las matemáticas de maestros en formación: una visión sobre su futuro desempeño docente

María José Madrid

Universidad Pontificia de Salamanca

Alexander Maz-Machado, Carmen León-Mantero,

José Carlos Casas, Noelia Jiménez-Fanjul

Universidad de Córdoba

RESUMEN: *Este trabajo presenta un estudio sobre las actitudes hacia las matemáticas y su enseñanza que poseen los estudiantes de primer curso del grado de Educación Primaria de la Universidad de Córdoba. Para ello, se ha utilizado un cuestionario abierto que se ha pasado a 53 estudiantes de primer curso de la Universidad de Córdoba. Se ha encontrado que todos los estudiantes valoran en mayor o menos medida la utilidad de las matemáticas centrándose fundamentalmente en su aplicación a la vida cotidiana. Pese a ello algunos no están interesados en impartir esta asignatura en su futuro como docentes, no conocen qué conocimientos deben poseerse para impartirla y sin embargo son plenamente conscientes de algunos de los diferentes obstáculos a los que se enfrenta un maestro de matemáticos.*

PALABRAS CLAVE: *ACTITUDES, FORMACIÓN DEL PROFESORADO, GRADO DE EDUCACIÓN PRIMARIA, MATEMÁTICAS.*

Attitudes towards mathematics of teachers in training: a vision about their future as teachers

Abstract: *This paper presents a study about the attitudes towards mathematics and its teaching which students who are in the first year of the degree in Primary Education from the University of Cordoba have. For this, it has been used an open test which was carried out by 53 first-year students of this university. The results of this research showed that these students value the usefulness of mathematics, although some of them consider it more relevant than others. Moreover, they focus mainly on its application to everyday life. Despite this, some of them are not interested in teaching this subject in their future career and they do not know what knowledge they need to have to be able to teach*

it. However, they are fully aware of some of the different obstacles that a mathematics teacher has to face.

Keywords: *Attitudes, teacher training, Degree in Primary Education, mathematics,*

INTRODUCCIÓN

La Ley Orgánica 2/2006 de Educación en su artículo 93 afirma que para impartir las enseñanzas de educación primaria es necesario tener el título de Maestro de educación primaria o el título de Grado equivalente. Esto indica que un elevado número de los estudiantes del Grado de Educación Primaria encaminan su futuro laboral a la docencia en este nivel, por ello es relevante que adquieran no solo los conocimientos necesarios para ejercer su futura labor docente sino también que sean capaces de adoptar actitudes adecuadas ante determinadas asignaturas o contenidos, ya que éstas pueden influir en su manera de impartir clases (Madrid, León-Mantero y Maz-Machado, 2015).

Durante las últimas décadas se ha extendido la preocupación por la calidad y la cantidad de matemáticas que se enseñan a las nuevas generaciones, pero también por los futuros profesores de matemáticas, considerando no sólo cómo impartirán sus clases sino si poseerán otras cualidades que permitan inspirar y motivar a sus alumnos (Galbraith, 1984). Así mismo, se ha desarrollado un creciente interés hacia la formación del profesorado de matemáticas, debido, entre distintas razones, al fracaso escolar, a la consecuente insatisfacción de muchos profesores y a las diferentes reformas curriculares, que exigen al profesorado una labor de continuo reciclaje en ciertas materias (Estrada, Batañero y Fortuny, 2004).

Las actitudes son un fenómeno de difícil definición ya que no se trata de entidades observables si no de concepciones teóricas que se infieren de comportamientos externos (Estrada, 2007). Entre las diversas definiciones existentes de actitud; Gil, Blanco y Guerrero (2005) consideran la actitud hacia las matemáticas o la estadística como la predisposición de los estudiantes a actuar de manera positiva o negativa respecto a ellas, lo cual determina su intención e influye en su comportamiento ante la asignatura. Análogamente, McLeod y Ortega (1993) consideran que se refiere a las respuestas de los estudiantes, que impliquen sentimientos tanto positivos como negativos y que sean relativamente invariables. Hidalgo, Maroto y Palacios (2004) definen las actitudes hacia las Matemáticas como la valoración y el aprecio de esta disciplina y el interés por esta materia y por su aprendizaje, y subrayan más la componente afectiva que la cognitiva, la cual se manifiesta en términos de interés, satisfacción, curiosidad, valoración, etc.

Estrada (2007) considera que las actitudes hacia una materia de estudio son bastante estables, de distinta intensidad y se expresan de forma positiva o negativa (agrado/desagrado, gusto/disgusto). Además, estas actitudes pueden también representar sentimientos vinculados a cuestiones externas a la materia (profesor, actividad, libro, etc.).

Durante las últimas décadas, el análisis de las actitudes hacia las matemáticas y la estadística de los futuros maestros y profesores es una línea de investigación ampliamente estudiada tanto a nivel nacional como internacional.

Existen diversos estudios relacionados con las actitudes de los futuros maestros y profesores, por ejemplo de estudiantes de matemáticas y futuros profesores de matemáticas

de Educación Secundaria (Camacho, Socas y Hernández, 1998); de estudiantes para maestro de Educación Primaria (Estrada, 2007; Fernández y Aguirre, 2010; Galbraith, 1984; Nortes y Martínez, 1992), o la comparación entre la actitud hacia la estadística de profesores en formación y en ejercicio (Estrada, Batanero y Fortuny, 2004).

El Real Decreto 126/2014 por el que se establece el currículo básico de la Educación Primaria incluye entre las áreas del bloque de asignaturas troncales en cada uno de los cursos de la Educación Primaria las Matemáticas y entre las competencias del currículo la competencia matemática, por tanto muchos de estos futuros maestros en formación, pueden encontrarse en un futuro impartiendo esta asignatura o realizando actividades para favorecer el desarrollo de esta competencia junto con el resto.

Esto se corrobora en la Ley Orgánica 2/2006 de Educación que expone que la educación primaria será impartida por maestros, que tendrán competencia en todas las áreas de este nivel. Por eso, el objetivo de este estudio es analizar las actitudes de los maestros en formación hacia las matemáticas y hacia su papel en la enseñanza de estas.

METODOLOGÍA

Este estudio es exploratorio y descriptivo. Para el estudio fue seleccionada una muestra de 53 alumnos del Grado de Educación Primaria de la Universidad de Córdoba que cursaban la asignatura de primer curso Matemáticas durante el año académico 2015-2016. Está formada por 15 hombres y 38 mujeres cuyas edades oscilan entre los 18 y los 41 años.

Se aplicó un cuestionario de nueve preguntas abiertas que se diseñó *ad hoc* y se validó mediante triangulación con tres expertos del área de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Córdoba. Los participantes cumplieron el cuestionario de forma anónima y voluntaria, por tanto, se trata de una muestra intencional y a conveniencia, que refleja la población a la cual queremos destinar nuestro estudio.

La información se volcó a una base de datos y luego se realizó un análisis de contenido. Se agruparon las respuestas y se categorizaron. Las preguntas tenidas en cuenta para este análisis fueron:

- 1) ¿Consideras que las matemáticas son útiles en la Educación Primaria? Justifica tu respuesta.
- 2) ¿Qué conocimientos se necesitan para ser profesor de matemáticas en Educación Primaria?
- 3) ¿Te gustaría impartir matemáticas en Educación Primaria? Justifica tu respuesta.
- 4) ¿Cuál consideras que es la parte más difícil a la que se enfrenta un profesor de matemáticas al enseñar en Ed. Primaria?

RESULTADOS

Al preguntar si consideran las matemáticas útiles en la Educación Primaria, todos los futuros maestros respondieron que sí, aunque algunos especificaron que solo consideraban útiles las matemáticas básicas y otros incluso indicaron que no todos los contenidos que se imparten lo son, poniendo entre otros ejemplos de estos las raíces cuadradas.

Entre las justificaciones que dieron a dicha utilidad se encontraron varios motivos: aplicaciones a la vida real, futuro uso escolar, futuro laboral y pensamiento matemático. Las explicaciones dadas por los maestros en formación lo justificaban de la siguiente forma.

- **Aplicaciones a la vida real:** Un 83% considera las matemáticas presentes en aspectos cotidianos, mencionando situaciones de compras, de repartos, de ofertas, incluso la posibilidad de evitar estafas, y de ello deriva su utilidad en la Educación Primaria.
- **Futuro uso escolar:** El 22,65% de los maestros en formación dicen que es una asignatura que se cursa a lo largo de los distintos niveles escolares, por lo tanto es importante poseer una buena base que se obtiene en la Educación Primaria.
- **Pensamiento matemático:** El 13,2% menciona entre las utilidades de las matemáticas en la Educación Primaria favorecer el desarrollo del pensamiento matemático en los niños, su razonamiento lógico, su capacidad de abstracción, etc.
- **Futuro uso laboral:** El 3,8% consideran que las matemáticas pueden ser necesarias en el futuro laboral de algunos alumnos y de ahí su utilidad ya desde la Educación Primaria.

Como se puede observar aunque todos consideran las matemáticas, o al menos parte de ellas útiles, la gran mayoría de alumnos centran la utilidad en su aplicación a la vida cotidiana y las operaciones elementales que se realizan en el día a día y solo un pequeño número de ellos consideran la importancia de otras cuestiones como el desarrollo del pensamiento matemático y lógico.

Esto coincide con los resultados obtenidos en otros estudios como el realizado por Madrid, Maz-Machado y León-Mantero (2015) a maestros en formación de Educación Primaria aplicando una escala de actitudes, tipo Likert, hacia las matemáticas y que valoraron las matemáticas como útiles.

Un aspecto que interesaba conocer es qué conocimientos consideran los futuros maestros en formación que se necesitan para ser profesor de matemáticas en Educación Primaria. Señalaron los siguientes:

- **Conocimientos matemáticos:** El 98,1% de los alumnos considera necesario poseer conocimientos matemáticos para poder impartir esta asignatura en primaria, sin embargo se encuentran diferencias con respecto al nivel que deben alcanzar estos conocimientos.

Algunos consideran que basta con poseer unos conocimientos matemáticos básicos, otros concuerdan con esta teoría especificando que es suficiente poseer los mismos conocimientos que se van a impartir, es decir conocimientos matemáticos a un nivel de primaria.

Sin embargo, casi la mitad de los encuestados consideran que es necesario poseer conocimientos matemáticos superiores a los que se van a impartir. En esta última línea, los argumentos a favor se basan en que el profesor debe poseer soltura en el cálculo y comprender las razones matemáticas detrás de los contenidos que explica, porque solo de esta forma podrá responder correctamente a las dudas y dificultades del alumnado y podrá plantear cuestiones a alumnado que esté muy interesado en la materia y quiera saber más al respecto.

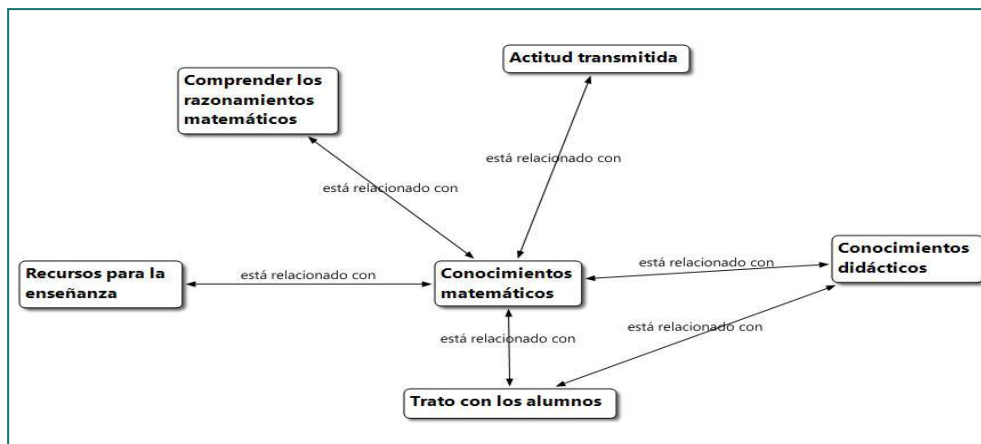


Figura 1. Relación entre las respuestas de los alumnos.

- **Conocimientos didácticos:** En cuanto a los conocimientos didácticos si bien algunos mencionan conocimientos de tipo pedagógico y psicológico la gran mayoría se centra en saber cómo explicar la asignatura, conocer métodos para la enseñanza, recursos y materiales para el aula, etc.
- **Actitud hacia las matemáticas:** Algunos consideran que una actitud adecuada hacia las matemáticas es más importante que los propios conocimientos que posea el profesor.
- **Trato con el alumnado:** Análogamente, algunos alumnos consideran que los conocimientos matemáticos y didácticos no son suficientes sino que juega una labor fundamental el trato adecuado con el alumnado.

Lo más destacado de sus respuestas es que pese a tratarse de futuros docentes estudiando una titulación centrada en los aspectos educativos y que les habilita precisamente para la docencia, solo un 34% considerará los conocimientos de tipo didáctico como necesarios para ser profesor de matemáticas. Esto puede deberse a que se trata de alumnos en su mayoría de primer curso y que por tanto no valoran aún en profundidad la importancia de los conocimientos didácticos.

La Figura 1 muestra la relación entre las respuestas de los alumnos a la pregunta ¿Qué conocimientos se necesitan para ser profesor de matemáticas en Educación Primaria?

En cuanto a si les gustaría impartir matemáticas en Educación Primaria el 71,7% contestó que sí, el 15,1 % dijeron que lo harían solo si no les quedaba otro remedio, el 11,3% dijo que no les gustaría y el 1,9% contestó que aún no lo sabía.

Entre las razones para el sí, destacan el gusto por la asignatura y las buenas calificaciones en etapas académicas previas, considerarla una asignatura básica e importante para la formación de los alumnos. Algunos destacaron que es una asignatura interesante, dinámica, entretenida, etc. y que eso abre un amplio abanico de posibilidades a la hora de impartirla.

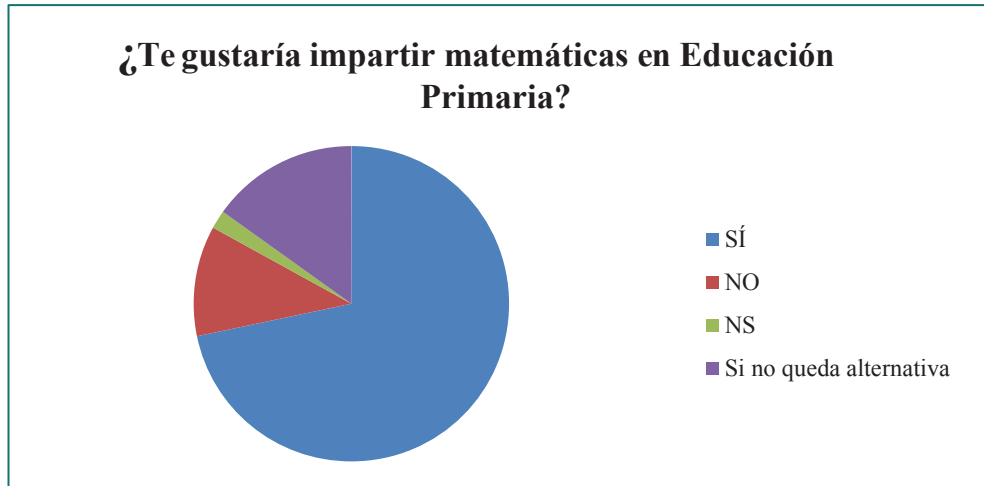


Figura 2. Diagrama de sectores con los resultados obtenidos para el gusto por impartir la asignatura.

Se encuentran también entre los motivos para querer impartirla el haber tenido buenas experiencias docentes previas, pero en el lado opuesto también aportaron como razón para el sí el haber tenido malas experiencias docentes previas que les motivan a ser ellos diferentes en su futuro profesional. Análogamente, aunque algunos consideran la asignatura complicada y difícil de impartir esto les resulta un reto a superar en su futuro como docentes. Si bien destacar que pese a decir que si les gustaría, varios dejaron claro tener otras preferencias.

Entre los que dijeron que no o que solo si no les quedaba otro remedio la principal razón es tener otras preferencias. Algunos consideran la asignatura difícil y además difícil de impartir, otros comentaron que se sentirían inseguros explicándola por falta de conocimientos propios e incluso mencionaron sus malas calificaciones en la etapa de la educación obligatoria. Un último motivo para no impartirlas es que les producen poco agrado.

La figura 3 muestra los tipos de razones que dieron los alumnos para contestar si o no a la pregunta sobre impartir clases en Educación Primaria.

Finalmente, los resultados sobre que parte consideran más difícil para un profesor de matemáticas muestran algunas de sus dudas e inquietudes respecto a su propia práctica docente, se diferencian entre las inquietudes relativas a la práctica docente de cualquier asignatura y las propias de las matemáticas.

Entre las propias de las matemáticas, a un 56,6% les preocupa cómo explicar los contenidos matemáticos para conseguir que los alumnos los entiendan, manifestando inseguridades a la hora de plantear la exposición de contenidos de una forma clara y que evite dificultades a los alumnos. El 11,3% considera difícil encontrar una metodología adecuada para explicar los distintos contenidos matemáticos.

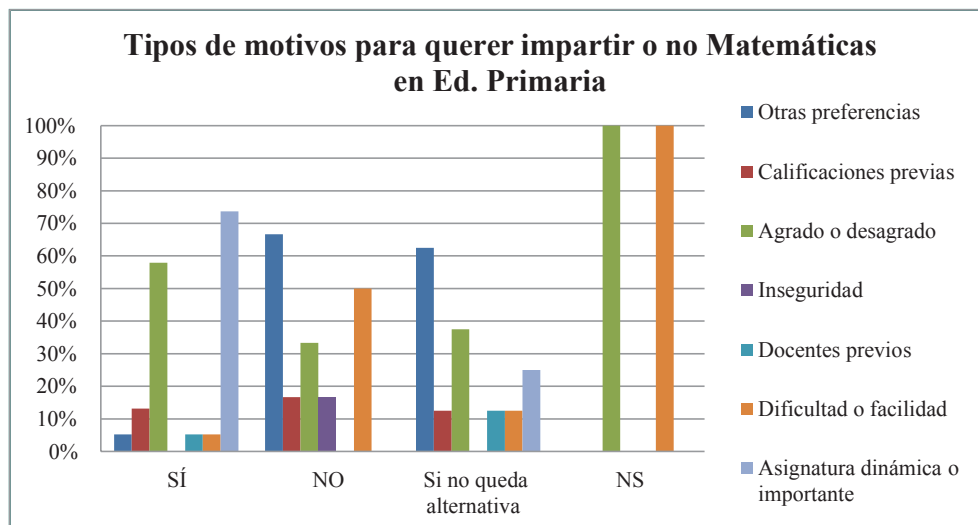


Figura 3. Relación entre la respuesta y la razón dada.

Incluso un 18,9% considera difícil encontrar una forma de explicar dinámica, entretenida y capaz de motivar a los alumnos. Y esto coincide con otra de sus preocupaciones, como conseguir que aquellos alumnos que o bien no valoran la asignatura, o no están motivados, interesados o incluso tienen “miedo” a las matemáticas o la consideran una asignatura aburrida, cambien su punto de vista.

Un 37,8% afirman que se trata de una asignatura difícil y eso mismo les supone un reto a la hora de explicarla. Entre los contenidos que más difíciles consideran mencionan la geometría y la resolución de problemas. En este sentido, también manifiestan miedo ante la incapacidad de resolver las dudas que les planteen los alumnos por falta de conocimientos matemáticos.

Finalmente, aparecen otras preocupaciones menos específicas como el no poder dar todo el temario establecido por la normativa legal, tratar con alumnos que tengan dificultades, captar la atención de sus alumnos sobre todo en los cursos inferiores y adaptarse a los distintos niveles del alumnado.

En definitiva, son diversas las cuestiones que ellos consideran difíciles para un profesor de matemáticas pero destacan principalmente las dudas sobre cómo explicar esta asignatura de la mejor forma posible, sobre todo cuando ellos mismos no se sienten seguros sobre su propio conocimiento matemático.

Si se comparan los resultados obtenidos en este estudio con los obtenidos también para los alumnos de primer curso del grado de Educación Primaria de la Universidad de Córdoba (Madrid, León-Mantero, Maz-Machado, 2015), este estudio mostraba que a los alumnos las matemáticas les generan ansiedad, inseguridad y poco agrado. Esto coincide con las respuestas obtenidas en el cuestionario abierto aplicado, mostrando que a algunos alumnos sus experiencias previas en sus estudios sobre matemáticas les generan inseguridad en su futuro como docentes y les hacen plantearse si ellos están o no capacitados para impartir la asignatura.

CONCLUSIONES

Las matemáticas son una de las asignaturas troncales de la Educación Primaria, considerando que los actuales maestros en formación pueden en un futuro ser profesores de educación primaria, un gran número de ellos puede en un futuro tener que impartir esta asignatura.

Los resultados muestran que los maestros en formación consideran en su mayoría únicamente las matemáticas útiles para aspectos sencillos de la vida real, dejando en general de lado otras cuestiones. En este mismo sentido, a la hora de enseñarlas la gran mayoría considera necesarios únicamente unos conocimientos matemáticos básicos y en menor medida conocimientos didácticos.

Si se les pregunta cuáles son para ellos las cuestiones más difíciles a las que se enfrenta un profesor de matemáticas, plantean grandes conflictos relacionados con la dificultad de la propia asignatura y sobre todo de cómo explicarla. Pese a esto a casi las tres cuartas partes de los encuestados les gustaría impartir matemáticas en su futuro como docentes.

Como línea de investigación futura, queda por plantear si al avanzar en su formación didáctica durante los siguientes cursos estas actitudes y esta visión sobre su futuro desempeño como docentes se modifica o permanece inalterable independientemente del tiempo, así como comparar los resultados con sujetos de características similares en otras instituciones universitarias.

REFERENCIAS

- Camacho, M., Socas, M. M. y Hernandez, J. (1998). An analysis of future mathematics teachers' conceptions and attitudes towards mathematics. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 29(3), 317-324
- Estrada, A. (2007). Actitudes hacia la Estadística: un estudio con profesores de Educación Primaria en formación y en ejercicio. En M. Camacho, P. Bolea, P. Flores, B. Gómez, J. Murillo y M.T. González (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XI* (p. 121-140). La Laguna: SEIEM.
- Estrada, A., Batanero, C. y Fortuny, J. M. (2004). Un estudio comparado de las actitudes hacia la estadística en profesores en formación y en ejercicio. *Enseñanza de las ciencias*, 22(2), 263-274.
- Fernández, R. y Aguirre, C. (2010). Actitudes iniciales hacia las matemáticas de los alumnos de grado de magisterio de educación primaria: estudio de una situación en el EEES. *Unión Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 23, 107-116.
- Galbraith, P. L. (1984). Attitudes to Mathematics of Beginning Undergraduates and Prospective Teachers: Some Implications for Education. *Higher Education*, 13 (6), 675-685.
- Gil, N., Blanco, L. J. y Guerrero, E. (2005). El dominio afectivo en el aprendizaje de las matemáticas. Una revisión de sus descriptores básicos. *UNION Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 2, 15-32.
- Hidalgo, S., Maroto, A. y Palacios, A. (2004). ¿Por qué se rechazan las matemáticas? Análisis evolutivo y multivariante de actitudes relevantes hacia las matemáticas. *Revista de Educación*, 334, 75-95.

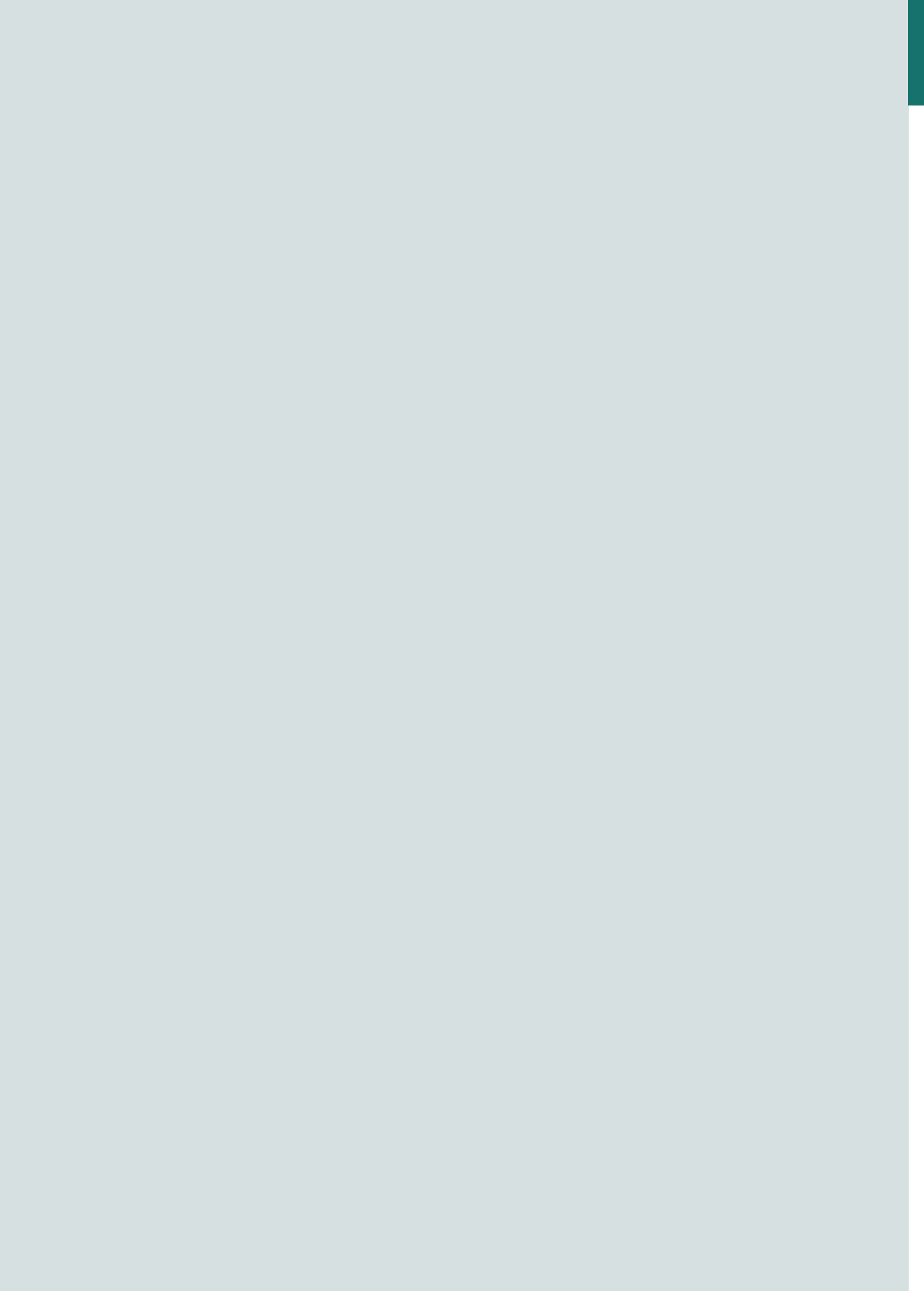
Ley Orgánica 2/2006, de 3 de mayo, de Educación.

Madrid, M. J., León-Mantero, C. y Maz-Machado, A. (2015). Assessment of the Attitudes towards Mathematics of the Students for Teacher of Primary Education. *Open Access Library Journal*, 2, e1936.

McLeod, D. B. y Ortega, M. (1993). *Affective issues in mathematics education*. En P. Wilson (Ed), *Research ideas for the classroom: High school mathematics* (21-36). New York: Macmillan.

Nortes, A. y Martínez, R. (1992). Actitud, aptitud y rendimiento en matemáticas: un estudio en primero de magisterio. *Suma*, 10, 36-40.

Real Decreto 126/2014, de 28 de febrero, por el que se establece el currículo básico de la Educación Primaria.



Entre matemáticas y libros

Isabel María Eugenio Tinoco

I.E.S. Jesús del Gran Poder, Dos Hermanas (Sevilla)

José Manuel Jiménez Cobano

I.E.S. Jesús del Gran Poder, Dos Hermanas (Sevilla)

RESUMEN: *Muchas veces nos encontramos con alumnos que se despistan o no terminan de integrarse en el aula, y en especial en la materia de matemáticas. Esto puede ser debido a cómo les mostramos las matemáticas desde el punto de vista académico, y casi siempre sin llevarlas a la vida cotidiana.*

Esta experiencia que venimos desarrollando los últimos cursos, sirve para involucrar a todo el alumnado, independientemente del nivel académico, en la adquisición de los conceptos matemáticos básicos.

Además, con esta metodología pretendemos homogeneizar el grupo, y crear colaboración entre todos los alumnos y alumnas.

Palabras Clave: *Secundaria, Primer Ciclo, Diversidad, Inclusión.*

Between mathematics and books

Abstract: *Many times we find students who do not finish mislead or integrated into the classroom, especially in the field of mathematics. This may be because of how we show mathematics from the academic point of view, and almost always without putting them into daily life.*

This experience we developed the last years, serves to engage all students, regardless of academic level, in the acquisition of basic mathematical concepts.

Furthermore, this methodology we intend to homogenize the group and create collaboration among all students.

Keywords: *Secondary, First Level, Diversity.*

1. INTRODUCCIÓN

Queremos presentar la experiencia que está siendo realizada por los departamentos de Matemáticas y Orientación del I.E.S. Jesús del Gran Poder de la localidad de Dos Hermanas. Esta experiencia, fundamentalmente ha consistido en la inclusión periódica de la profesora de pedagogía terapéutica en dos grupos de matemáticas de primer curso de E.S.O., para colaborar con el profesor responsable de la asignatura en la adquisición de los contenidos básicos, y el refuerzo específico de algunos alumnos, sin necesidad de salir del aula ordinaria.

El centro I.E.S. Jesús del Gran Poder tiene 15 unidades, de las cuales cinco corresponden al primer curso de E.S.O. La experiencia ha sido llevada a cabo con dos grupos de primer curso, con 30 alumnos en cada unidad.

En cada uno de los grupos en los que se ha llevado a cabo el trabajo, existen alumnos con necesidades educativas especiales, entre lo que cabe destacar:

- TDHA.
- Dificultades de aprendizaje con desfase curricular:
 - *Por causas socioculturales.*
 - *Déficit visual.*
 - *Déficit cognitivo.*

También disponemos de algunos alumnos que, sin llegar a pensar que poseen cualidades extraordinarias para las matemáticas, si es cierto que adquieren de forma más rápida los conceptos, y a los cuales, en pos de la atención a la diversidad, también debemos preparar un material complementario que trabajamos individualmente.

2. METODOLOGIA DE TRABAJO

2.1. JUSTIFICACIÓN TEÓRICA

Las bases teóricas fundamentales están en la filosofía del “aula inclusiva” y en el desarrollo de “competencias clave”.

Desde la inclusión se trata de sensibilizar al alumnado y hacer crecer en él la vivencia de los valores implícitos a la inclusión así como la satisfacción por vivir estos valores. Trabajar con los alumnos “lemas” parecidos a los siguientes:

- “Todos aprendemos de todos”
- “Aquí cabe todo el mundo”
- “Tengo derecho a aprender de acuerdo con mi capacidad.”

En cuanto al desarrollo de las competencias clave nos centramos fundamentalmente en:

- Competencia matemática y competencias básicas en ciencia y tecnología
- Competencia digital
- Sentido de iniciativa y espíritu emprendedor
- Aprender a aprender
- Competencia en comunicación lingüística
- Competencias sociales y cívicas.

Dentro de la competencia matemática en:

- El conocimiento y manejo de los elementos matemáticos básicos en situaciones reales o simuladas.
- Seguir procesos de pensamiento (inducción y deducción), aplicar algunos algoritmos de cálculo o elementos de la lógica que conduzcan a identificar la validez de los razonamientos y a valorar el grado de certeza asociado a los resultados derivados de los razonamientos válidos.
- Utilizar espontáneamente, en lo personal y en lo social, los elementos y razonamientos matemáticos para interpretar y producir información, para resolver problemas y para tomar decisiones.
- Aplicar destrezas y actitudes que permitan razonar matemáticamente y expresarse y comunicarse en el lenguaje matemático.

La resolución de problemas debe contribuir a introducir y aplicar los contenidos de forma contextualizada, a conectarlos con otras áreas de conocimiento contribuyendo a su afianzamiento, a la educación en valores y al desarrollo de destrezas en el ámbito lingüístico, ya que previamente al planteamiento y resolución de cualquier problema se requiere la traducción del lenguaje verbal al matemático y, más tarde, será necesaria la expresión oral o escrita del procedimiento empleado en la resolución y el análisis de los resultados. Por todo ello resulta fundamental en todo el proceso la precisión en los lenguajes y el desarrollo de competencias de expresión oral y escrita.

Según las Instrucciones de 22 de junio de 2015 por las que se establece el Protocolo de detección, identificación del alumnado con necesidades específicas de apoyo educativo y organización de la respuesta educativa, en base al punto referido a la organización de la respuesta educativa, se consideran Medidas generales de atención a la diversidad:

- Metodologías basadas en el trabajo cooperativo en grupos heterogéneos, tutoría entre iguales, aprendizaje por proyectos y otras que promuevan el principio de inclusión.
- Apoyo en grupos ordinarios mediante un segundo profesor o profesora dentro del aula para reforzar los aprendizajes instrumentales básicos del alumnado.

En cuanto al trabajo cooperativo nos unimos a estas palabras de Johnson y Johnson:

Ser capaz de realizar habilidades técnicas como leer, hablar, escuchar, escribir, calcular y resolver problemas es algo valioso pero poco útil si la persona no puede aplicar estas habilidades en una interacción cooperativa con las otras personas en el trabajo, en la familia y en los entornos comunitarios. La manera más lógica de enfatizar el uso del conocimiento y las habilidades de los alumnos dentro de un marco cooperativo, tal como deberán hacer cuando sean miembros adultos de la sociedad, es dedicar mucho tiempo al aprendizaje de estas habilidades en relaciones cooperativas con los demás. (Johnson y Johnson, 1997, p. 62-63)

2.2. Nuestro proyecto

Partiendo de recursos accesibles por el alumnado, bien en prensa local o nacional, medios audiovisuales o digitales que presentan datos de actualidad y relacionados muy directamente con la realidad, establecemos distintas actividades transversales.

El trabajo estará organizado en grupos colaborativos heterogéneos, como explicamos en el apartado anterior, donde los distintos roles se irán cambiando en las distintas sesiones de trabajo, con idea de que todos los estudiantes puedan experimentar las distintas funciones.

Las sesiones están diseñadas para una duración de una hora, si bien, es posible que no todos los grupos necesiten agotar la misma, o incluso que algún grupo tenga que necesitar de tiempo adicional para completar el trabajo de una sesión en concreto, con lo cual, al inicio de cada una de las sesiones, se prevé un tiempo dedicado a completar la sesión anterior si fuese necesario.

Estas actividades están confeccionadas con distintos grados de dificultad, con el objetivo, ya mencionado, de obtener un alto porcentaje de éxito en todos los grupos.

La evaluación de la actividad tiene dos aspectos a considerar. Por una parte el trabajo en grupo, es decir, cómo se han desarrollado los distintos roles de cada uno de los miembros del equipo siendo necesaria una posterior autoevaluación del mismo. Por otro lado, el nivel de adquisición de los conceptos y contenidos matemáticos trabajados, que serán revisados en el momento de la corrección de las actividades.

Además, esta evaluación no conlleva una calificación cuantitativa en los resultados académicos de los alumnos en la asignatura de matemáticas, pero sí cualitativa, en el sentido de la actitud e interés por la asignatura, así como en el desarrollo de las competencias clave.

3. PUESTA EN ESCENA

Para este ejemplo, tomamos como referencia el artículo aparecido en un semanal local donde aparece un artículo relacionado con las bibliotecas municipales, donde aparecen distintos datos estadísticos, a partir de los cuales se desarrollan las siguientes actividades.

El artículo que hemos tomos como referencia, está disponible en Internet a través del siguiente enlace: <http://www.periodicoelnazareno.es/las-bibliotecas-municipales-espacios-que-albergan-mucho-mas-que-palabras/>

3.1. Primera Sesión

En la primera sesión, además de establecer los grupos, comentaremos las normas y funciones de cada uno de los roles que desempeñaran los distintos alumnos.

Estas funciones son:

- **Responsable:** Coordina el trabajo del equipo. Anima a los miembros del grupo a avanzar en su aprendizaje. Procura que no se pierda el tiempo. Controla el tono de voz. Tiene muy claro lo que el profesor quiere que aprendan. Determina quién debe hacerse cargo de las tareas y las organiza.



Figura 1. Alumnado realizando la experiencia.

- **Secretario:** Se hace cargo del Cuaderno del equipo y lo rellena.
- **Responsable del material:** Cuida el material común del equipo. Se asegura que todos los miembros del equipo mantengan limpia su zona de trabajo.
- **Portavoz:** Es el encargado de exponer las ideas y los trabajos que se estén realizando en esa sesión.

Al inicio de cada sesión, los profesores eligen a los distintos responsables, quienes a su vez también reparten el resto de cargos. De esta forma, aseguramos que al menos el puesto de responsable vaya rotando.

3.2. Sesiones sucesivas

En las sesiones sucesivas, ya comenzamos a trabajar los distintos aspectos, ofreciéndoles distintos tipos de actividades, con una graduación en su dificultad. Estos son algunos ejemplos de las actividades, todas ellas pensadas para una sesión.

Actividad 1: Las bibliotecas en cifras. Datos 2015

- ¿Cuántos visitantes han faltado para llegar al millón?
- Redondea el número de socios acercándolo al millar, decenas de millar y centenas de millar.
- Localiza el número de fondos (libros y otros documentos que tienen las bibliotecas nazarenas) de 2015 y el número de fondos que han adquirido en este año. ¿Cuántos documentos había entonces en el 2014? Si en los próximos años se siguen adquiriendo el mismo número de documentos ¿Qué fondo habrá al finalizar el 2020?
- ¿Cuántas actividades han sobrepasado el millar?
- Si todos los socios hubieran hecho al menos un préstamo en el año pasado ¿Cuántos libros habrían retirado cada uno?
- ¿Y si sólo lo hubieran hecho la mitad de los socios?

Actividad 2: Ricardo y Sofía son alumnos de 1º de ESO del IES Jesús del Gran Poder. Son socios de la biblioteca de Dos Hermanas. El 1 de marzo visitan la biblioteca y realizan estos préstamos:

- Ricardo necesita un libro de biología para un trabajo y le gustaría llevarse una novela de ciencia-ficción
- Sofía se quiere llevar dos cómics y un libro de acertijos matemáticos curiosos.
- ¿Pueden llevarse todo lo que quieren? ¿Por qué?
- ¿Qué día deben devolverlos?
- ¿Si Ricardo no hubiera terminado el trabajo de biología? ¿Qué debe hacer? ¿Cuándo lo entregaría entonces?
- El número de socio de Ricardo es el 48837 y el de Sofía 47505. ¿Cuántos socios se han hecho después de cada uno?
- Si convencieran a un tercio de cada curso de 1º del instituto para hacerse socios de la biblioteca, ¿Cuántos socios nuevos habría?

Actividad 3: Busca en la siguiente dirección:

<http://www.bibliotecaspublicas.es/doshermanas/proyectos.htm>.

Allí encontramos un histórico de los datos de una de las bibliotecas de la ciudad. Con ayuda de un ordenador, busca los siguientes datos:

- Fondos en la biblioteca desde 2005.
- Actividades llevadas a cabo desde 2005.
- Realiza una gráfica descriptiva de los fondos existentes en la biblioteca desde el año 2005.
- Realiza una gráfica descriptiva de las actividades realizadas en la biblioteca desde el año 2005.

Estos son solo unos ejemplo, en los cuales, tratamos diferentes conceptos y contenidos, pero que por supuesto, está en constante cambio, en función de grupos, tiempos y posibles nuevos temas.

CONCLUSIONES

En relación a los objetivos propuestos en este proyecto, las conclusiones a las que llegamos son en general satisfactorias, detallándose de la siguiente manera:

Los objetivos que se consiguieron en mayor grado:

- La integración del alumnado.
- La mejora del clima de aula y de la solidaridad entre los compañeros
- La motivación

El alumnado fue consciente de la dificultad del trabajo en grupo: el reparto de tareas, la responsabilidad de cada uno y del grupo en los resultados, la regulación de sus conductas, el control del tiempo etc.

Fue importante la autoevaluación que hicimos al final, tanto del trabajo en equipo como de los resultados. Cada miembro evaluaba cuantitativamente al resto de los compañeros. Tuvieron una actitud asertiva, aceptando la evaluación de los demás.

Se vieron diferencias entre las dos clases en que se desarrolló el proyecto. En una de ellas se pudo avanzar más en los contenidos y tareas asignadas porque la cohesión era mejor.

La competencia más desarrollada fue la de “Aprender a aprender”, aunque se trabajaron todas dependiendo de la tarea a ejecutar.

En cuanto al área matemática lo más llamativo fue observar como estos objetivos se fueron desarrollando poco a poco con naturalidad, integrando el cálculo, la estimación y el debate sobre los resultados de forma más positiva que si fueran meras actividades del libro de texto. Principalmente se afianzaron estos objetivos:

- Seguir **procesos de pensamiento** (inducción y deducción), aplicar algunos algoritmos de cálculo o elementos de la lógica que conduzcan a identificar la validez de los razonamientos y a valorar el grado de certeza asociado a los resultados derivados de los razonamientos válidos.
- **Utilizar** espontáneamente, en lo personal y en lo social, los **elementos** y razonamientos matemáticos para interpretar y producir información, **para resolver problemas** y para tomar decisiones.

Al utilizar un material cotidiano, el periódico local, el alumnado lo manejó con familiaridad, incorporando aprendizajes significativos, e intercambiando experiencias de forma espontánea.

El alumnado NEAE se incorporó al trabajo por tareas sin plantear una dificultad especial. Los profesores estuvimos atentos a su participación, al ritmo de realización de las tareas y a facilitar estrategias concretas si era necesario.

A nivel de motivación, lo que más nos sorprendió en cuanto al trabajo y las sesiones, fue el interés que se tomaban por ello, si alguna semana por algún motivo no podíamos llevar a cabo la sesión, se mostraban bastante contrariados y molestos, y proponían otros días o momentos para realizar la sesión.

Otro aspecto muy interesante fueron los cambios de personalidad en los diferentes cambios de rol que se dieron, donde los alumnos que solían ser más distraídos, cuando tenían la responsabilidad de liderar el grupo, en muchas ocasiones buscaban delegar en compañeros pero en otras ocasiones aprovechaban la ocasión para hacerse oír y expresar sus puntos de vistas que en otros momentos no se veían capaces de ser oídos.

Sin dudar, es una experiencia que repetiremos en cursos sucesivos, pues seguro que tanto los alumnos como nosotros hemos aprendido mucho.

REFERENCIAS

- Johnson, D.W., Johnson, R.T. y Holubec, E. J. (1999): *El Aprendizaje Cooperativo en el aula*. Buenos Aires. Paidós.
- Marín, S. (2001): *El aprendizaje cooperativo. Una propuesta de atención a la diversidad para el área de Matemáticas en la Educación Secundaria Obligatoria*. [Tesis doctoral] ICE/ Universidad de Extremadura.

- Marín, S. y Blázquez, F. (2003): *Aprender cooperando. El aprendizaje cooperativo en el aula*. Junta de Extremadura. Ministerio de Educación y Ciencia.
- Ovejero, A. (1990): *Aprendizaje cooperativo. Una alternativa eficaz a la enseñanza tradicional*. Barcelona: PPU.
- Pujolàs, P. (2001): *Atención a la diversidad y aprendizaje cooperativo en la educación obligatoria*. Málaga: Aljibe.
- Pujolàs, P. (2004): *Aprender juntos alumnos diferentes. Los equipos cooperativos en el aula*. Barcelona: Eumo-Octaedro. Colección Recursos nº 62.
- Pujolàs, P. (2008): *9 ideas clave: el aprendizaje cooperativo*. Barcelona: Graó.
- Pujolàs, P. y Lago, J. R. (Coords.) (2008). *Programa CA/AC*. Vic: Universidad de Vic.
- VV. AA. (2005) Cooperar para innovar. *Cuadernos de Pedagogía*, 345, 50-83.
- STAINBACK, S. y STAINBACK, W. (2001): *Aulas inclusivas: un nuevo modelo de enfocar y vivir el currículo*. Narcea. Madrid.
- Ainscow, M. (2001): *Desarrollo de escuelas inclusivas. Ideas, propuestas y experiencias para mejorar las instituciones escolares*. Narcea. Madrid
- Tomlinson, C. A. (2008): *El aula diversificada. Dar respuesta a las necesidades de todos los estudiantes*. Octaedro. Madrid

Percepción de los alumnos acerca del teorema de Pitágoras

Juliana Troyano Dueñas
Pablo Flores Martínez
Universidad de Granada

Resumen: *La enseñanza del teorema de Pitágoras pretende tanto su comprensión como su aplicación. Este artículo profundiza en el teorema de Pitágoras a partir del Análisis Didáctico, y plantea una tarea para la comprensión del teorema. Hemos llevado esta tarea a una clase de secundaria y analizado la forma en que los alumnos comprenden el teorema de Pitágoras, apreciándose que está muy ligada a la fórmula.*

Palabras Clave: *Teorema de Pitágoras, tareas, percepción, educación secundaria.*

Students' perception of the Pythagorean theorem

Abstract: *The teaching of the Pythagorean theorem seeks both its understanding and its application. This article delves into Pythagorean theorem of didactic analysis, and shows a task for the understanding of the theorem. We have taken this task to a high school class and analyzed how students understand the Pythagorean theorem, appreciating that it is closely linked to the formula.*

Keywords: *Pythagorean theorem, tasks, perception, secondary education.*

INTRODUCCIÓN

El teorema de Pitágoras es un contenido habitual de las matemáticas de secundaria, que todo el mundo parece conocer, identificándose más con la fórmula que por el significado. Los criterios de evaluación y los estándares de aprendizaje del currículo de matemáticas de secundaria (MECD, 2015), proponen en esta etapa la comprensión del teorema y su utilización para obtener medidas y resolver problemas. Es difícil enseñar el teorema de Pitágoras para que lo comprendan, identifiquen cuándo pueden emplearlo, y lo apliquen.

Se necesita profundizar en qué significa este teorema para seleccionar tareas matemáticas con que enseñarlo. En este artículo relatamos una experiencia que hemos realizado en este sentido. Comenzamos por profundizar en el significado del teorema empleando

el Análisis Didáctico (Rico, 2009). Posteriormente presentamos una tarea matemática escolar encaminada a que los alumnos comprendan mejor dicho teorema. Ponemos en práctica la tarea y examinamos las respuestas de los alumnos, para apreciar cómo lo comprenden y a qué profundidad llegan. Cerramos con algunas conclusiones sobre la experiencia realizada.

SIGNIFICADO DEL TEOREMA DE PITÁGORAS

Para enseñar a comprender un concepto matemático el profesor tiene que disponer de una idea completa del mismo, para ello es importante realizar un análisis didáctico. Una forma de análisis con intención didáctica la propone Rico (2009), dividiendo la profundización en cuatro análisis parciales: contenido, cognitivo, de instrucción y de actuación. En nuestra experiencia hemos realizado los tres análisis primeros, que describimos.

El análisis de contenido pretende apreciar los significados del concepto matemático, que tiene una naturaleza abstracta, y examina tres componentes: estructura conceptual, fenomenología y formas de representación (Gómez, 2002).

La estructura conceptual de un tema matemático es la forma en que se organiza en los textos, preferentemente matemáticos (que suministran elementos, organización y focos de contenido) y textos legales, que establecen cómo hay que contemplarlo en la enseñanza. Realizando esta búsqueda sobre el teorema de Pitágoras apreciamos los contenidos especificados en el currículo de matemáticas de secundaria (MECD, 2015): triángulos rectángulos, teorema de Pitágoras, justificación geométrica y aplicaciones. Los libros de texto suelen comenzar enunciando el teorema, su fórmula y llegan a la demostración geométrica con áreas. A continuación, se identifican triángulos con el teorema de Pitágoras, enunciándose como el recíproco de este teorema. Finalmente aparecen las aplicaciones del teorema para calcular distancias desconocidas (diagonal de un rectángulo, altura de un triángulo isósceles, entre otras).

Los contenidos muestran diferencias cognitivas entre los aprendizajes que debemos lograr, diferenciando contenidos conceptuales y procedimentales. De los contenidos anteriores destacamos como focos conceptuales los triángulos rectángulos, enunciado del teorema de Pitágoras y justificación geométrica. Estos focos distinguen aspectos métricos (como longitud y área), formas geométricas (cuadrado, triángulo rectángulo), elementos de las figuras (catetos, hipotenusa), relaciones (igualdad, desigualdad), y clasificaciones (de triángulos según sus ángulos), entre otras. Entre los procedimientos son importantes destrezas para aplicar el teorema al resolver problemas relacionados con triángulos.

El teorema de Pitágoras no puede reducirse a una frase del tipo *suma de los cuadrados de los catetos es igual al cuadrado de la hipotenusa*, que es una de las expresiones del teorema, que puede representarse de forma simbólica ($h^2 = c_1^2 + c_2^2$). Los conceptos matemáticos no pueden confundirse con la forma de representarlos. Apreciar el significado de los conceptos requiere examinar los sistemas de representación que se emplean para expresarlos, y cobran especial relevancia en su comprensión. Las representaciones de un objeto, concepto o idea, son todas las formas de hacerlo presente (Rico, 2009).

La representación gráfica del teorema de Pitágoras aparece con la diversidad de demostraciones gráficas que se han hecho sobre el mismo (Cañadas, 2001), especialmente con cuadrados sobre los lados de triángulos rectángulos. Materializar estas representaciones facilita su expresión física, bien mediante puzzles o construcciones con otros materiales.

Por último, el análisis de contenido examina los problemas, fenómenos y situaciones en que se aplica el teorema de Pitágoras (Rico, 2009). Examinadas estas dimensiones distinguimos significados del teorema muy relacionados entre sí:

- Relación métrica entre las superficies de los cuadrados construidos sobre los lados del triángulo rectángulo (el área del cuadrado de lado la hipotenusa es igual a la suma de las áreas de los cuadrados de los catetos).
- Relación métrica entre longitudes de lados del triángulo rectángulo (el cuadrado de la longitud de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de las longitudes de los catetos). Útil para determinar longitudes empleando triángulos rectángulos.
- Condición necesaria y suficiente para que un triángulo sea rectángulo (Un triángulo es rectángulo sí, y sólo sí, verifica las condiciones anteriores). Útil para construir ángulos rectos, segmentos perpendiculares.

El análisis cognitivo organiza las capacidades que pretende que los alumnos desarrollen sobre el tema, partiendo del análisis de contenido (Lupiáñez y Rico, 2008). Este análisis examina las expectativas, limitaciones y oportunidades de aprendizaje (Rico, 2009, Lupiáñez y Rico, 2008).

Expectativas son los objetivos que se pretenden alcanzar. En los documentos curriculares identificamos los siguientes objetivos acerca del teorema de Pitágoras (MECD, 2015): Reconocer y construir triángulos rectángulos; Aplicar correctamente el teorema de Pitágoras para calcular longitudes desconocidas; Construir cuadrados sobre los lados de un triángulo; Determinar la relación entre el área de los cuadrados construidos sobre los lados de un triángulo; Asociar la relación entre el área de los cuadrados a la relación entre los lados del triángulo; Deducir y enunciar el teorema.

Entre las dificultades de aprendizaje, las investigaciones muestran que es complejo apreciar la doble implicación entre condiciones y relaciones numéricas, las dificultades para identificar triángulos rectángulos cuando sus catetos no son paralelos a los bordes del papel, y la de relacionar los enunciados analíticos y geométricos del teorema de Pitágoras (Cañadas, 2001).

Como consecuencia de estas dificultades surgen errores como son, aplicar el teorema de Pitágoras en cualquier tipo de triángulo o construir cuadrados sobre los lados de un triángulo sin que sus lados sean perpendiculares o tengan la misma longitud. Otros errores son aplicar el teorema de forma incorrecta, sin diferenciar los catetos y la hipotenusa. Son frecuentes los errores de cálculo al despejar.

Hemos revisado materiales didácticos para la enseñanza del teorema de Pitágoras, especialmente los dirigidos a alcanzar objetivos conceptuales de comprensión. Entre ellos está el papel cuadrículado o el geoplano, los materiales físicos (puzzles u otros objetos, para construir cuadrados sobre la hipotenusa con cuadrados sobre los catetos), y otros recursos, como el programa *geogebra*.

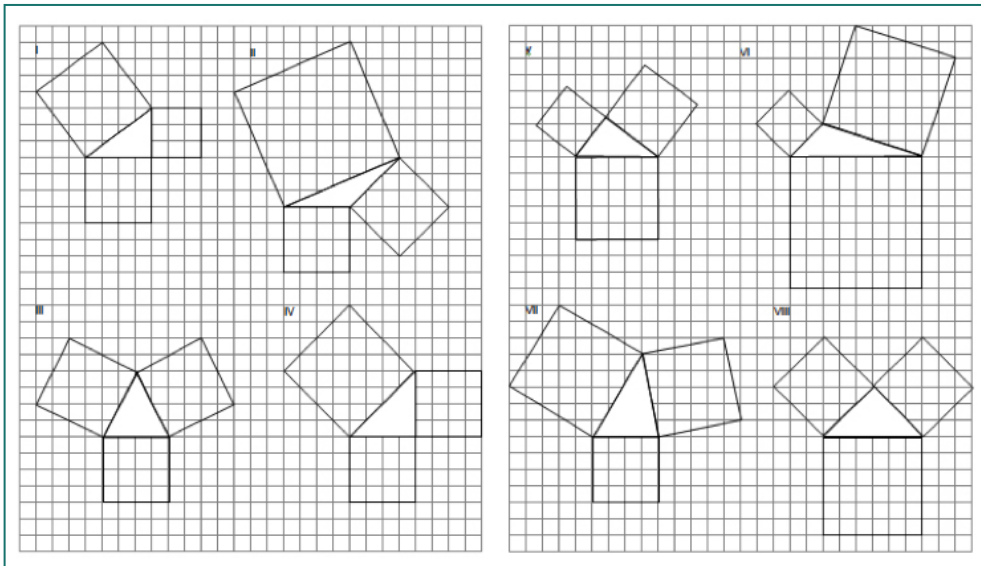
Estudiar materiales y otras oportunidades, nos ha llevado a plantear una tarea, que se presentará a continuación, para contribuir al logro de algunos objetivos y atendiendo a dificultades y errores. Esto ha constituido el análisis de instrucción, que es la parte del análisis didáctico en la que se identifican los procesos de modelización y de resolución de problemas, así como los materiales y recursos disponibles (Gómez, 2002).

Tareas dirigidas a comprensión no pueden limitarse a promover la reproducción, sino que requieren establecer relaciones y buscar regularidades, correspondiendo a los grados de complejidad de conexión y reflexión, según el estudio PISA (Rico, 2009). La tarea propuesta en este artículo promueve la reflexión, relacionar conocimientos y generalizar y justificar resultados obtenidos.

TAREA MATEMÁTICA ESCOLAR PARA COMPRENDER EL TEOREMA DE PITÁGORAS

La experiencia realizada analiza cómo los alumnos comprenden el teorema de Pitágoras, cuando van construyendo el teorema, comprobando propiedades métricas ligadas a tipos de triángulos, formulando el teorema de Pitágoras de varias formas.

Comprende dos partes. La primera consiste en obtener las medidas de lados y áreas de cuadrados construidos sobre triángulos, identificando el tipo de triángulo, llegando a una regularidad que generaliza el teorema de Pitágoras. La segunda es inversa, a partir de dibujar y calcular longitudes y áreas según el tipo de triángulo, para terminar estudiando tipos de triángulos de lados conocidos y formulando de varias formas el teorema de Pitágoras (figura 1).



Ejercicio 1: Completa la siguiente tabla:

		I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII
Longitud de lado	Pequeño								
	Mediano								
	Grande								
Área de cuadrado sobre	Lado Pequeño								
	Lado Mediano								
	Lado Grande								
Clase Triángulo									

Ejercicio 2: Expresa la propiedad que haya obtenido, que expresa la relación que existe entre las áreas de los cuadrados construidos sobre los lados de los triángulos.

Ejercicio 3: Empleando papel cuadriculado, dibuja cada triángulo, los cuadrados sobre sus lados y completa la siguiente tabla:

		A	B	C	D
Longitud de lado	Cateto Pequeño	1		2	
	Cateto Mediano	2			
	Hipotenusa			6	
Área de cuadrado sobre	Cateto Pequeño		36		
	Cateto Mediano		64		24
	Hipotenusa				81
Clase Triángulo		RECTÁNGULO	RECTÁNGULO	RECTÁNGULO	RECTÁNGULO

Ejercicio 4: Averigua cuál de los siguientes triángulos es rectángulo:

a) lados: 9, 12 y 15

b) lados: 2, 2 y 3

c) lados: 4, 5 y 6

Ejercicio 5: Enuncia de varias formas el Teorema de Pitágoras.

Figura 1: Enunciado de la tarea

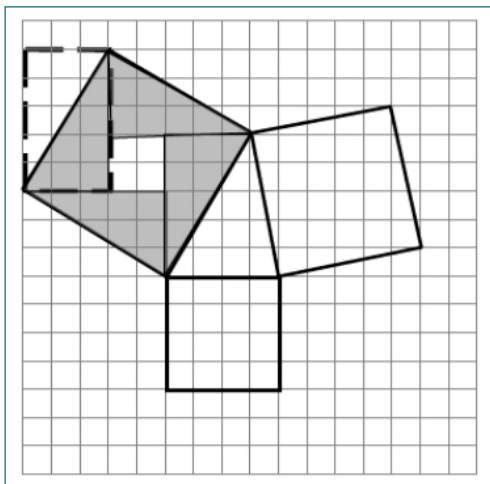


Figura 2: Forma de determinar el área de los cuadrados.

Se espera que los alumnos calculen el área de los cuadrados construidos sobre los lados de los triángulos contando cuadrillos, aprovechando el papel cuadrículado. Pueden emplear diversos métodos, como contar cuadrillos completamente interiores al cuadrado y apreciar cómo y cuáles de los demás se complementan, o bien descomponer cuadrados en diversas figuras, como triángulos rectángulos aprovechando las líneas de la cuadrícula, y contando los cuadrillos interiores, bien por el método anterior o determinando el número de cuadrados del rectángulo que lo contiene y dividiendo por dos (Figura 2).

Una vez obtenidas las áreas, aplicando la fórmula del área del cuadrado obtienen la longitud de los lados. Esto es

relativamente fácil en figuras con vértices en la cuadrícula, pero notablemente más difícil si no tiene todos los vértices en la cuadrícula (figura V).

Las figuras usadas son triángulos rectángulos (I, IV, V y VIII), con vértices en cuadrícula (I, IV y VIII), catetos en líneas de la cuadrícula (I y IV), hipotenusa sobre la cuadrícula (V y VIII). Dos acutángulos (III y VII) y obtusángulos (II y VI).

La tarea pretende que los alumnos hagan los siguientes razonamientos:

- Si la suma de áreas de cuadrados sobre dos lados es igual al área del cuadrado sobre el tercero, entonces el triángulo es rectángulo (especialmente interesante en VIII, que no deja claro el ángulo recto; y el V, más difícil de obtener longitud de catetos).
- Si la suma de áreas de los cuadrados sobre dos lados es mayor que el área del cuadrado sobre el tercero, entonces el triángulo es acutángulo (agrupando figuras III y VII).
- Si la suma de áreas de cuadrados sobre dos lados es menor que el área del cuadrado sobre el tercero, entonces el triángulo es obtusángulo (demás casos).

Experiencia de enseñanza

La experiencia se ha llevado a cabo en un I.E.S. de Granada, durante el período de prácticas del Máster de Formación Profesional de Profesorado de Matemáticas, proponiéndola en una clase de 3º E.S.O., de 33 alumnos con buen rendimiento en Matemáticas (sólo 6 suspendieron la segunda evaluación y un repetidor), trabajadores y con muchas ganas de aprender. Se propuso en el tercer trimestre, al comienzo de la unidad, sin enseñanza previa, resuelta en grupos de tres durante 50 minutos.

Para analizar la comprensión se utilizan anotaciones tomadas durante la enseñanza (razonamientos de alumnos, dudas, etc.), y respuestas de los alumnos.

Se organizan los datos mirando los siguientes aspectos:

- i. *Medición de lados de cuadrados.*
- ii. *Relación entre áreas de cuadrados y tipo de triángulo.*
- iii. *Construcción de cuadrados sobre lados de triángulos.*
- iv. *Diversidad de enunciados del teorema de Pitágoras.*

Medición de la longitud de lados de cuadrados

Cuando los lados de los cuadrados están en la cuadrícula obtienen su longitud contando los cuadritos. Los otros lados los obtienen aplicando la versión métrica de longitudes del teorema de Pitágoras, buscando triángulos rectángulos que los tengan como hipotenusas, como en la figura V. Con ello han pasado a figuras diferentes de las dadas, mediante aproximaciones.

Algunos alumnos empezaron a resolver la tarea a partir de la determinación del área, para determinar longitudes de lados que no están en las líneas de la cuadrícula, y con ello obtener la longitud aplicando la fórmula del área del cuadrado. Pero al comparar con sus compañeros y ver que ellos obtenían el mismo resultado de manera más rápida, acabaron buscando también triángulos rectángulos sobre los que aplicar la forma métrica de longitudes del teorema de Pitágoras.

La forma en la que los alumnos han resuelto la tarea denota que tienen muy asentada la fórmula aritmética del teorema de Pitágoras y ya la dan por supuesta, para ellos es sólo una fórmula que les permite calcular el lado desconocido de un triángulo rectángulo. Por tanto, el teorema de Pitágoras de longitudes, se ha convertido en la herramienta principal para obtener los datos, dejando de lado otras formulaciones.

Aun teniendo en cuenta que la tarea no ha sido resuelta por el método esperado, la mayoría de los alumnos han medido de forma correcta los lados de los cuadrados, exceptuando el caso de la figura V, cuyas medidas no han sido tomadas adecuadamente por ninguno de los alumnos.

Relación entre las áreas de los cuadrados y tipo de triángulo

Son muy pocos los alumnos que han expresado perfectamente esta relación. Aún así, podríamos decir que aproximadamente la mitad de los alumnos han obtenido la relación entre las áreas, siempre en el caso del triángulo rectángulo, aunque no todos la han expresado correctamente, debido a imprecisiones en el lenguaje matemático. Por ejemplo, una de las respuestas ha sido: *“En un triángulo rectángulo, la suma de las áreas de los lados pequeños es igual al área del lado mayor”*.

Se observa que los alumnos se contentan con descubrir la relación entre las áreas en el triángulo rectángulo, no sienten la necesidad de expresar esta relación para otro tipo de triángulos, y por tanto no discuten la relación entre las áreas en función de la amplitud de los ángulos de los triángulos. Algunos alumnos han afirmado que la suma de las áreas de los cuadrados pequeños es igual al área del cuadrado grande, pero no han especificado que esto ocurre sólo en el caso de que el triángulo sea rectángulo.

Otros alumnos han escrito que cuando los triángulos son rectángulos se verifica el teorema de Pitágoras, pero no hacen referencia al área de los cuadrados. Se pone de manifiesto lo interiorizado que tienen los alumnos la fórmula aritmética entre las longitudes de los lados, para el teorema de Pitágoras, pero en este caso se han obligado a añadir la condición de que el triángulo debe ser rectángulo.

Construcción de los cuadrados sobre los lados de los triángulos

En el ejercicio 3 de la tarea se dan informaciones directas, a partir de las medidas de las longitudes de dos de los lados (dos catetos A, o un cateto y la hipotenusa, C), o mediante las áreas de los cuadrados construidos sobre estos elementos (dos catetos, B; o un cateto y la hipotenusa, D). Los dos primeros pueden construirlos con facilidad, dibujando los catetos sobre las líneas de la cuadrícula, bien directamente los catetos (1 y 2, en A), o determinando esta longitud de catetos, a partir del área del cuadrado (6 y 8 en B, que además forman parte de una terna pitagórica). La construcción de los otros dos resulta muy complicada (para hacerla precisa hay que dibujar la hipotenusa sobre una línea de la cuadrícula y el “arco capaz”, o determinando antes la longitud del otro cateto), lo que se complica, al tener los catetos longitudes irracionales.

Éste ha sido el ejercicio en el que los alumnos han tenido más errores. Aquellos que han resuelto esta cuestión como se esperaba, han procedido de forma similar a la primera pregunta, esto es, han construido los lados de los cuadrados trazando previamente los catetos que junto al lado buscado forman un triángulo rectángulo.

Diversidad de enunciados del teorema de Pitágoras

Al enunciar el teorema de Pitágoras, la forma más frecuente ha sido la fórmula aritmética del teorema, en longitudes de hipotenusa y catetos, aunque también ha sido mayoritario el enunciado que hace referencia a las áreas de los cuadrados.

Un ejemplo de un enunciado dado por uno de los alumnos es el siguiente: “*La suma de los catetos al cuadrado es igual a la hipotenusa al cuadrado, en los triángulos rectángulos*”. Aplica perfectamente el teorema de Pitágoras, pero expresa de manera incorrecta la relación métrica entre longitudes.

En general, los alumnos no son precisos en la formulación, y sólo unos pocos mencionan la condición de que el triángulo debe ser rectángulo. Ninguno menciona la doble implicación del teorema de Pitágoras entre tipo de triángulo y relación métrica.

CONCLUSIONES

Como se mencionaba al principio de este escrito, en esta etapa educativa se pretende que los alumnos comprendan el teorema de Pitágoras y que ello les lleve a aplicar para resolver problemas. Con esta experiencia hemos podido comprobar que los alumnos tienen mucho más trabajado e interiorizado la aplicación, menos la comprensión.

En general, la tarea ha contribuido a ampliar algo la comprensión del teorema de Pitágoras por parte de los alumnos, pese a que les ha obligado a afrontarlo de una manera más completa. Hubiera sido interesante llevar a cabo una sesión de reflexión y puesta en común de los resultados, tanto para favorecer que algún grupo expusiera otra forma de actuar que ha sido menos frecuente, como para obligarlos a que expresen los razonamientos matemáticos, percatándose así de la necesidad de las hipótesis. Desgraciadamente la tarea planteada no ha favorecido apreciar la doble implicación del teorema, lo que nos obliga a revisar su formulación matemática o la forma de aplicarla.

REFERENCIAS

- Cañadas, M. C. (2001). Demostraciones del teorema de Pitágoras para todos. En J. M. Cardenoso, A.J. Moreno, J. M. Navas & F. Ruiz, (Eds.). *Actas de las jornadas Investigación en el aula de matemáticas: atención a la diversidad*, (pp. 111-116). Granada: Departamento de Didáctica de la Matemática y SAEM THALES.
- Gómez, P. (2002). Análisis didáctico y diseño curricular en matemáticas. *Revista EMA*, 7(3), 251-292.
- Lupiáñez, J. L., & Rico, L. (2008). Análisis didáctico y formación inicial de profesores: competencias y capacidades en el aprendizaje de los escolares. *PNA*, 3(1), 35-48.
- Ministerio de Educación, Cultura y Deporte (2015). Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, que establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato. *BOE núm. 3, de 3 de enero de 2015*, 169 – 546.
- Rico, L. (2009). Sobre las nociones de representación y comprensión en la investigación en educación matemática. *PNA*, 4(1), 1-14.

El uso de álbumes ilustrados para potenciar el aprendizaje matemático en las primeras edades

Carlos de Castro Hernández

Universidad Autónoma de Madrid

Mónica Ramírez García

Universidad Complutense de Madrid

Resumen: *Presentamos ideas para la utilización de álbumes ilustrados en la enseñanza de las matemáticas en las primeras edades. Las ilustraciones pueden facilitar el aprendizaje de contenidos matemáticos como la relación parte-todo, la relación uno a muchos o los patrones. También las usamos para mostrar representaciones de cantidades, acciones, situaciones de compra y venta, matrices, cuadrículas o mapas, a partir de las cuales proponemos tareas contextualizadas en el álbum. En la segunda parte, mostramos ejemplos de actividad matemática en las primeras edades (de 5 a 7 años) enfatizando la relación entre dicha actividad y las características de las ilustraciones.*

Palabras clave: *Educación Infantil, Educación Primaria, imágenes, literatura, matemáticas, resolución de problemas.*

Using picture books to enhance mathematics learning in the early years

Abstract: *We present ideas for the use of picture books in the teaching of mathematics in the early ages. Illustrations can facilitate learning of mathematical concepts as part-whole relationship, the one-to-many relationship, or patterns. We also use them to show representations of quantities, actions, shopping situations, matrices, grids or maps, that we use to propose tasks contextualized with the album. In the second part, we show examples of mathematical activity in the early ages (from 5 to 7 years) emphasizing relations between this activity and characteristics of illustrations.*

Keywords: *Primary Education, Early Years Education, images, literature, mathematics, problem solving.*

LOS ÁLBUMES ILUSTRADOS EN EL AULA DE MATEMÁTICAS

Presentamos unas ideas sobre la enseñanza de las matemáticas en las que tratamos de integrar las matemáticas con la literatura infantil, a través del uso de álbumes ilustrados, para potenciar el pensamiento matemático. Al igual que en el caso de los materiales manipulativos, o de los enfoques constructivistas, no se trata de ideas nuevas, pero sí de ideas cada vez más experimentadas y más sólidamente fundamentadas en resultados de investigación, de las que tratamos de mostrar una perspectiva diferente.

Una de las ideas clave para articular matemáticas y literatura infantil es la necesidad que ambas tienen de la imaginación. Alsina (2007) define la imaginación como la habilidad de crear imágenes mentales y plantea que la capacidad de imaginar, en matemáticas, debe desarrollarse potenciando en el aula la visualización de objetos matemáticos (figuras, gráficos) y a través del uso de dibujos y materiales manipulativos. La imaginación, según este autor, favorece también los procesos matemáticos de razonamiento y resolución de problemas. Uno de los ámbitos de encuentro en que conviven la imaginación, la visualización, el aprendizaje infantil y las matemáticas, es el universo de los álbumes ilustrados. La profesora Margarita Marín, experta española en matemáticas y literatura infantil, escribía:

La narración o lectura de un cuento estimula la capacidad de pensar y razonar, como nos confirman las interrupciones de los pequeños con sus preguntas sobre el relato; un cuento en soporte papel con correctas ilustraciones estimula el pensamiento visual y el aprendizaje de la lectura de dibujos e imágenes, siempre que ayudemos al niño las primeras veces a analizar la imagen en global, lo que significa y después a analizar los detalles que presenta; lo estamos preparando para comprender y analizar representaciones matemáticas más específicas. (Marín, 2007a)

En esta misma línea, Van den Heuvel-Panhuizen (2008), en su descripción del movimiento didáctico de la Educación Matemática Realista, aclara que el realismo –en ese contexto– evoca aquello que el niño es capaz de imaginar, haciendo referencia explícita a los cuentos como contexto para el aprendizaje matemático:

En cuanto a los problemas que se presentan a los estudiantes, esto significa que el contexto puede provenir del mundo real, pero ello no es siempre necesario. El mundo de fantasía de los cuentos de hadas, ..., aportan contextos idóneos para un problema en tanto éstos sean reales en la mente del estudiante. (Van den Heuvel-Panhuizen, 2008, p. 27)

Hay consenso en los antecedentes sobre literatura y matemáticas en que, para que un cuento ilustrado sea adecuado para la enseñanza de las matemáticas, no es en absoluto necesario que haya sido elaborado con este fin (Van den Heuvel-Panhuizen, Van den Boogaard, y Doig, 2009), pues como indica Marín (2007b):

... la clave no radica tanto en el cuento como en la lectura matemática del mismo por parte del docente. Esta lectura con ojos matemáticos nos conduce a encontrar las conexiones matemáticas del mismo, las ideas soportadas por el contexto de la narración, los conceptos explícitos e implícitos presentes en el relato. (Marín, 2007b, p. 14)

Además, McGrath (2014) advierte del riesgo de utilizar cuentos específicamente diseñados para enseñar matemáticas. Debe existir armonía entre la historia que se cuenta y el contenido matemático. Algunos cuentos resultan forzados, demasiado elaborados y estilizados, a fin de servir a un propósito matemático. En el extremo contrario, un ejemplo paradigmático de cuento ilustrado no escrito para enseñar matemáticas, pero ampliamente empleado para potenciar su aprendizaje es “Ser quinto” (Jandl y Junge, 2005). Marín (2007b) ensalza el valor de sus ilustraciones en los siguientes términos:

... sus magníficas ilustraciones no tienen desperdicio matemático. Además del orden descendente que se establece, las nociones topológicas de dentro/fuera están presentes en texto e ilustración; igualmente el concepto de sustracción, pues el niño observa la perfecta correspondencia biyectiva inicial paciente/silla y cómo según entran en consulta se van quedando vacías una a una las sillas. (Marín, 2007, p. 16)

Con este mismo cuento, Van den Heuvel-Panhuizen y Van den Boogaard (2008) realizaron una investigación en que analizaban los comentarios espontáneos de niños de 5 años durante la lectura y visionado del cuento. Al categorizar las respuestas encontraron, con cierta sorpresa respecto a sus expectativas previas, que más del 50% de los comentarios infantiles tenían un contenido matemático. Por el contrario, Elia, Van den Heuvel-Panhuizen y Georgiou (2010) registran los comentarios que realizan 4 niños sobre las ilustraciones de un cuento diseñado para aprender matemáticas (un cuento de conteo regresivo) al leerlo con su maestro, sin que este intervenga. Solo un 27% de las expresiones infantiles sugieren la presencia de un contenido matemático. Los autores concluyen que no basta con que un cuento esté diseñado para aprender matemáticas, sino que es necesario que al niño lo acompañe en su lectura un maestro con una formación adecuada que le permita formular preguntas al niño que estimulen la aparición y el desarrollo del pensamiento matemático.

A todo lo anterior se puede añadir que vincular matemáticas y literatura infantil parece haber demostrado ser provechoso para el aprendizaje de las matemáticas y el desarrollo de actitudes positivas hacia esta materia. Hong (1996) realizó un estudio experimental en que el grupo de control utilizaba literatura infantil y matemáticas de tipo manipulativo sin conexión entre ellas, mientras que en el grupo experimental, ambas estaban relacionadas. En la investigación se encontró que el grupo experimental obtuvo un mayor rendimiento en varias tareas matemáticas y que los alumnos mostraron una mayor preferencia por ir al rincón de matemáticas.

Resumiendo, vemos que cualquier cuento ilustrado podría servir para estimular el pensamiento matemático, siempre que el maestro o la maestra sepan verlo con “ojos matemáticos” y consigan indirectamente, a través de preguntas, guiar al niño en la adquisición de esta “mirada matemática”. También sabemos de los beneficios de conectar matemáticas y literatura infantil. El siguiente paso es volver la mirada hacia los maestros, para valorar sus necesidades formativas de cara a aventurarse con los pequeños en este tipo de experiencias en el aula. Ya contamos con procesos de formación para maestros con esta finalidad. Por ejemplo, Noda y Plasencia (2002) propusieron a estudiantes de magisterio que confeccionaran un cuento para enseñar matemáticas usando como recurso el recortado de papel. El siguiente apartado intenta contribuir a la formación de los maestros en su adquisición de la “mirada matemática”.

LECTURA DE LAS IMÁGENES DESDE LA EDUCACIÓN MATEMÁTICA

En este apartado, vamos a describir características de ilustraciones de álbumes incluidas intencionalmente para potenciar la actividad matemática de niños de 4 a 7 años. Después, propondremos ejemplos de la actividad matemática desarrollada por niñas y niños en el aula, mostrando la relación de esta actividad con las ilustraciones. Casi todas las imágenes que se incluyen en este apartado están tomadas de la adaptación del cuento de L. Frank Baum “El hipopótamo sonriente”, ilustrado por Mar Ferrero para el proyecto “¡A contar! Matemáticas para pensar”, de la editorial Santillana (De Castro y Hernández, 2015).

La relación parte-todo

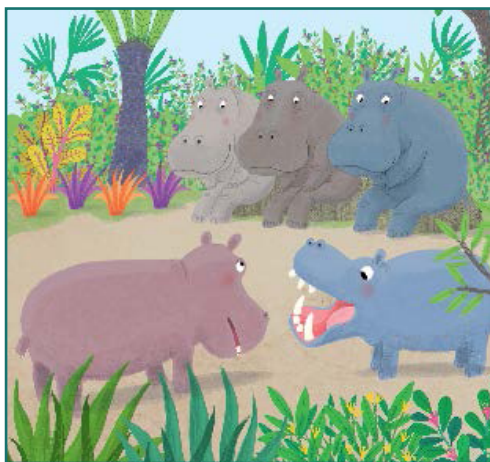


Figura 1. La relación parte-todo.

La relación parte-todo tiene un papel central en el aprendizaje de las matemáticas en los primeros años. En aritmética, la relación parte-todo aditiva se establece entre dos cantidades cuando una de ellas (la parte) está incluida física o mentalmente en la otra (el todo). Esta relación da lugar a otra cantidad: la complementaria de la parte con respecto al todo. La comprensión de la relación parte-todo es básica para la resolución de problemas de estructura aditiva de combinación, y para el aprendizaje de la suma y la resta (Castro-Rodríguez, Castro, 2013). Advertimos que, cuando en este trabajo aparecen expresiones del tipo “problemas de

sumar”, no queremos decir en absoluto que los niños de educación infantil deban aprender a “hacer sumas”. Los pequeños resuelven estos problemas mediante estrategias informales, representando las cantidades con objetos, realizando acciones con ellos (añadir, juntar) y contando el resultado de estas acciones. Más adelante, ya en la educación primaria, la relación parte-todo sirve para iniciar al alumnado en el estudio de las fracciones.

En la Figura 1 podemos considerar el total de los hipopótamos, los cinco, separados en dos partes: tres que están sentados, y dos “de pie”. Alternativamente, una parte podría estar formada por los que tienen la boca cerrada, y otra por el que tiene la boca abierta (o los grandes y los pequeños).

En una situación en que aparece representada la relación parte-todo, se pueden plantear (con niños de 4 a 6 años) problemas de combinación (de suma y de resta) y problemas de descomposición. Un ejemplo de cada uno de estos problemas serían los siguientes:

- Si hay 4 hipopótamos con la boca cerrada y 1 con la boca abierta, ¿cuántos hipopótamos hay? (Problema de combinación, con incógnita en el total, de suma).

- Si hay 5 hipopótamos y 2 de ellos son pequeños, ¿cuántos hipopótamos grandes hay? (Problema de combinación, con incógnita en una parte, de resta).
- Si hay 5 hipopótamos y algunos están sentados y otros de pie, ¿cuántos hipopótamos puede haber sentados? ¿Cuántos de pie? (Problema de descomposición aditiva).

En cualquiera de estos casos, la función de la imagen (desde el punto de vista didáctico-matemático) es facilitar que el niño pueda imaginar la situación descrita en el enunciado del problema, asociándola a la situación relatada en el cuento y presente en la ilustración. Imaginar la situación permite comprender el problema y elaborar una representación con dibujos o materiales manipulativos que servirá de soporte para el proceso de resolución del problema.

La representación de acciones

Las acciones físicas que se realizan con colecciones de objetos y cantidades (como añadir, quitar, separar, combinar, repartir, agrupar) tienen un estrecho vínculo con las operaciones aritméticas que se efectúan con números. Las operaciones aritméticas toman su significado básico, y lo amplían y enriquecen posteriormente, al irse asociando con diversas acciones, relaciones y situaciones de la vida diaria. Así, la operación aritmética de restar adopta un significado inicial de “quitar”, pero después complementa este significado con otros, como los de “encontrar la parte complementaria de una parte con respecto a un todo”, o “hallar la diferencia entre dos cantidades”. Esta correspondencia entre acciones con objetos y operaciones con números aparece bien reflejada en la teoría desarrollada por Resnick (1992) sobre los tipos de pensamiento matemático: las matemáticas de las protocantidades, de las cantidades, de los números y de los operadores. En la Tabla 1 se resumen las características principales de los tres primeros tipos, que son los que interesan en las primeras edades (ver tabla 1).

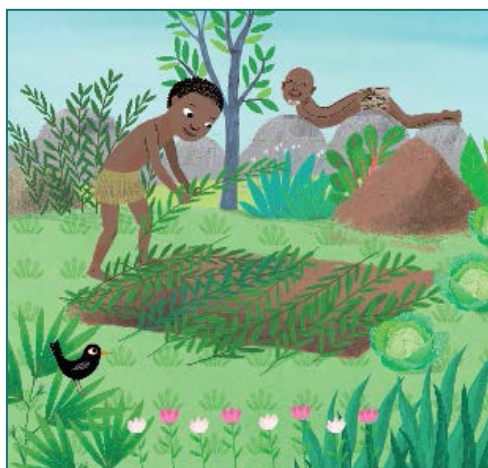


Figura 2. Acción de añadir.

La representación de cantidades indefinidas

En el Diccionario de la Lengua Española se define “cantidad”, en sus dos primeras acepciones, como: “Porción de una magnitud” y “Cierta número de unidades”. Cuando hablamos de cantidades podemos utilizar la cuantificación indefinida, que “indica la

cantidad de sustancia en una orientación aproximativa, sin la aparente concreción de la cuantificación numeral” (Lamíquiz, 1991, p. 52) o la cuantificación numeral.

Matemáticas de:	Objetos de razonamiento	Términos lingüísticos	Operaciones
Protocantidades	Material físico	Mucho, muchos, más, menos, pequeño, grande, etc.	Aumentar, disminuir, combinar, separar, comparar, ordenar.
Cantidades	Material físico medido	n objetos, n metros, n kilos, añadir, quitar, repartir.	Aumentar o disminuir una cantidad añadiendo o quitando otra cantidad. Repartir una cantidad en partes iguales.
Números	Números	n más que, n veces, más n , veces n , n más m , n dividido por m .	Suma, resta, multiplicación, división, aplicadas a números

Tabla 1. Tres tipos de pensamiento matemático (Resnick, 1992)



Figura 3. Representación de una cantidad indefinida.

Cuando aparecen representadas cantidades en ilustraciones, podemos tener interés en que se vea un número concreto de objetos, o que la cantidad quede indefinida. En la Figura 3, pueden verse varios hipopótamos. Dos de ellos están parcial, o casi totalmente, sumergidos en el agua, mientras que de otro de ellos solo se ve una pequeña parte. Podemos decir que hay algunos hipopótamos en la zona, pero la ilustración sugiere que posiblemente haya algunos más, totalmente sumergidos, o que queden fuera de la imagen.

Los dos ingredientes (que haya una cantidad y que esta sea indefinida) tienen interés desde el punto de vista matemático. Basándonos en esta ilustración podemos plantear el problema: “Si hay 10 hipopótamos, y dos están en el agua, ¿cuántos hipopótamos hay fuera del agua?” La ilustración permite a los niños imaginarse la situación y comprender la relación parte-todo (el total de hipopótamos dividido en los que están en el agua y fuera de ella). Sin embargo, si queremos poner números diferentes, con el mismo escenario y la misma relación, no habrá ningún problema.

Cuando la cantidad que aparece es una cantidad numeral concreta, como en la Figura 1 en la que se ven claramente 5 hipopótamos, algunos niños suelen protestar si cambiamos el número con respecto al que aparece en el cuento. Las cantidades nos permiten

plantear problemas, y que estas sean indefinidas nos facilita cambiar los datos ajustándolos, si fuera necesario, a las capacidades de conteo de los alumnos.

La relación de uno-a-muchos

La relación uno-a-muchos es un tipo especial de correspondencia en que a cada objeto de una colección le corresponde una colección equivalente de objetos. Por ejemplo, a cada caja le corresponden 6 madalenas, o a cada paquete de yogures le corresponden 12 yogures. Así, si hay dos cajas, tendremos 12 madalenas; en 3 paquetes de yogures, 36 yogures. Según Castro y Castro-Rodríguez (2010), hay una línea de estudios en educación matemática que sustentan la idea de que la relación uno-a-muchos está en el origen del pensamiento multiplicativo.

En la Figura 4, hay varios ejemplos de relación uno a muchos: Cada hipopótamo lleva tres niños, cada hipopótamo tiene dos sillas (o dos mantas), cada hipopótamo tiene 4 patas, y en uno de los árboles hay dos hojas en cada rama. En este caso, la relación que sirve de base para el planteamiento de problemas es la que hay entre hipopótamos y niños, que puede dar lugar a tres tipos de problemas diferentes, que los niños resuelven ya desde la Educación Infantil:

- Si hay tres hipopótamos, y cada uno lleva a tres niños, ¿cuántos niños transportarán entre los tres? (Problema de multiplicación)
- Si un hipopótamo transporta a 12 niños, y puede llevar a 3 en cada viaje, ¿cuántos viajes tendrá que hacer? (Problema de división agrupamiento)
- Si un hipopótamo transporta a 12 niños en 4 viajes, llevando los mismos en cada viaje, ¿cuántos tendrá que llevar en cada viaje? (Problema de división reparto)

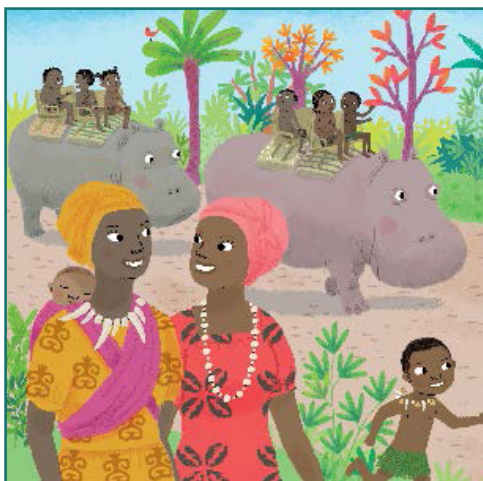


Figura 4. La relación uno-a-muchos.

Representaciones con forma de matriz

Dentro de los problemas aritméticos verbales de estructura multiplicativa, están los problemas de matrices. Se trata de problemas en los que se describe una situación en la que hay una colección de objetos dispuestos en filas y columnas (Carpenter, Fennema, Franke, Levi, y Empson, 1999). Estos problemas pueden ser de multiplicación o división. Por ejemplo:

- Si hay 3 filas, y en cada fila van 4 ratones, ¿cuántos ratones marchan detrás del flautista? (Multiplicación).



Figura 5. Representaciones con forma de matriz en las ilustraciones de Mar Ferrero de *El Flautista de Hamelín* (Santillana, 2015).

- Si marchan 18 niños detrás del flautista en tres filas iguales, ¿cuántos niños van en cada fila? (División)

En la Figura 5, observamos las dos imágenes que sirven de soporte para el planteamiento de los enunciados anteriores. Para la comprensión, es crucial que los pequeños puedan imaginar la situación descrita en el enunciado, y esto se hace a través del vínculo del enunciado con las imágenes de matrices, que se repiten a lo largo del cuento.

Los problemas de matrices tienen una gran importancia en las primeras edades, pues facilitan una aproximación informal al aprendizaje de la multiplicación, a través de la relación uno a muchos entre las filas y los elementos de cada fila, y además proporcionan un tipo de representación de una gran riqueza matemática. Incluir este tipo de problemas hace que el futuro aprendizaje de la multiplicación pueda conectarse con situaciones complementarias a la de suma reiterada, que faciliten el paso del pensamiento aditivo al multiplicativo, que se produce al final de la educación primaria (Castro y Castro-Rodríguez, 2010).

Tiendas en el aula de infantil

Una actividad típica que suele plantearse en educación infantil, bien en el rincón de juego simbólico o en formato de proyecto, es hacer una tienda en clase. De Castro, González y Escorial (2009) describen el proyecto de elaboración de un mercado medieval que surge, con niños y niñas de 3 años, a raíz de la construcción de un castillo medieval en el aula. Edo y Masoliver (2008), con niños de 5 años, muestran otro proyecto en que los niños deciden crear una panadería en clase. Desde el punto de vista matemático, una tienda en clase constituye una oportunidad de realizar múltiples aprendizajes matemáticos significativos,

basados en la experiencia que suelen tener los pequeños de ir a hacer la compra con sus padres. Entre estos aprendizajes, podemos destacar el uso del dinero como medida, la clasificación y organización de los productos, la elaboración de una lista de la compra, la aparición de los numerales en los precios, el uso de instrumentos de cálculo (como la calculadora y la caja registradora), las sumas y las restas (al pagar varios productos y devolver el cambio), etc. En este contexto, la función que tienen imágenes como la de la Figura 6 es la de activar los conocimientos previos infantiles sobre las tiendas para entrar de forma significativa en la actividad matemática implícita en estas situaciones.



Figura 6. Tiendas.

Las formas geométricas en el entorno

El aprendizaje de las formas geométricas básicas es uno de los objetivos matemáticos de la educación infantil. Este aprendizaje no se reduce a la identificación de formas y el aprendizaje de sus nombres. También implica el juego de construcción de formas complejas partiendo de otras más simples, así como el análisis de formas a través de su descomposición (De Castro, 2015). En la geometría plana, el tangram es un recurso didáctico que permite este doble trabajo de composición, con el que trabajamos la creatividad sometida a unas reglas, y de descomposición, que implica más el análisis de las características de la figura (longitudes, amplitudes angulares, superficies, etc.). Un problema, que nos hemos encontrado en experiencias geométricas en el aula de infantil, es que las figuras compuestas con las siete piezas del tangram resultan excesivamente estilizadas o esquematizadas, y aparecen descontextualizadas, lo que permite a muchos niños resolver el puzle que plantea la figura sin que esta evoque para ellos un objeto de la vida cotidiana. Así, el aprendizaje matemático resulta parcial, al perderse el valor de las figuras geométricas como modelos matemáticos para comprender el mundo de los contornos de los objetos.



Figura 7. Imagen de “Valentina la costurera”, ilustrado por Mar Villar (Santillana, 2015).



Figura 8. Ejemplo de mapa.

En la Figura 7, procedente del cuaderno de actividades del alumno, se establece la relación entre la forma compuesta por las 7 formas geométricas del tangram y la figura del cuento que pretende evocar la composición. Esta relación, que habíamos visto en experiencias anteriores que no es en absoluto obvia para niños de 4 y 5 años, forma parte del aprendizaje infantil del proceso de matematización.

Usando mapas en las primeras edades

Otro aspecto importante de la geometría en las primeras edades (más allá de las formas geométricas básicas) es el de la orientación, cuyo aprendizaje requiere

moverse dentro de un entorno familiar, observarlo y describirlo. Actividades típicas dentro de este ámbito son la descripción del camino de la escuela a casa, cuando este se realiza andando y es muy familiar para el niño, explicar cómo puede venir la mascota de la clase desde la sala de psicomotricidad al aula de los pequeños (Van den Heuvel-Panhuizen, Veltman, Janssen y Hochstenbach, 2012), o dibujar el plano del aula o de una zona conocida del patio del colegio y utilizarlo como “mapa del tesoro” para localizar un objeto (Ruiz-Higueras, García, y Lendínez, 2013).

La Figura 8 presenta un mapa parecido al que pueden realizar niños de educación infantil. No es un mapa “adulto”, pero tampoco es un dibujo libre. Es una representación intermedia que sirve a los niños para iniciarse en la representación del espacio a través de dibujos que tratan de evocar un espacio familiar con fidelidad, mostrando en la representación puntos de referencia, y respetando sus posiciones relativas, de forma que se puedan localizar objetos en el espacio partiendo de su inclusión en el mapa.

Cuadrículas

Profundizando en la representación espacial, una cuadrícula puede pensarse como un sistema de referencia para localizar un objeto en el plano en función del número de fila y de columna. Las cuadrículas, desde este punto de vista, son antecedentes de los sistemas de coordenadas cartesianas que aparecen en la educación primaria y en secundaria. Hay juegos, como las guerras de barcos, en que la conexión entre la cuadrícula y las coordenadas se hace explícita. En la Figura 9, vemos que se presenta al rey una tela de cuadros en la que, para ubicar correctamente los cuadrados coloreados, debe tenerse en cuenta el número de fila y columna (en el fondo, las coordenadas).

Patrones

En el marco teórico de PISA 2012 (OCDE, 2013), la competencia matemática supone la capacidad de identificar situaciones de la vida cotidiana en las que se pueden utilizar las matemáticas para, después, dar estructura matemática a dicha situación. Estamos en el ámbito de lo que Van de Heuvel-Panhuizen (2008) llama “matematización horizontal”, que supone la creación de herramientas matemáticas para organizar y resolver un problema planteado en una situación de la vida real (p. 26) y una de cuyas actividades características es el descubrimiento de regularidades, relaciones y patrones (OCDE, 2013, p. 13). Devlin (2003) considera la matemática como “la ciencia de los patrones”. En un sentido muy amplio, como el que da al término este autor, podríamos identificar el patrón con el modelo matemático que nos sirve para explicar una situación, predecir que va a ocurrir, etc., dentro del proceso de matematización.

En la educación infantil, la búsqueda de patrones aparece continuamente. Flecha (2013) explica cómo el horario de un aula de 2-3 años está compuesto por una sucesión de rutinas (acogida, corro/asamblea, almuerzo, taller, jardín, etc.). La repetición diaria de estas rutinas permite a los niños descubrir el patrón (la regla) que siguen sus actividades y anticiparse y prever lo que va a ocurrir a continuación: “Después del taller, vamos al jardín”.

En la Figura 10, vemos varios elementos en los que podemos descubrir patrones. El ejemplo típico es el de los collares, en que aparece una serie del tipo: hueso largo, hueso mediano, hueso corto, hueso largo, etc. Es decir, un patrón de repetición con una unidad ABC que genera una serie del tipo ABCABCABC. El descubrimiento en estas series del patrón, o unidad que se repite, es un elemento importante en el desarrollo del razonamiento inductivo. Por esta razón, más allá de las actividades puntuales que podamos plantear en el aula, las ilustraciones de este cuento constituyen una continua invitación a



Figura 9. Imagen del cuento “Valentina la costurera”, ilustrado por Mar Villar (Santillana, 2015).

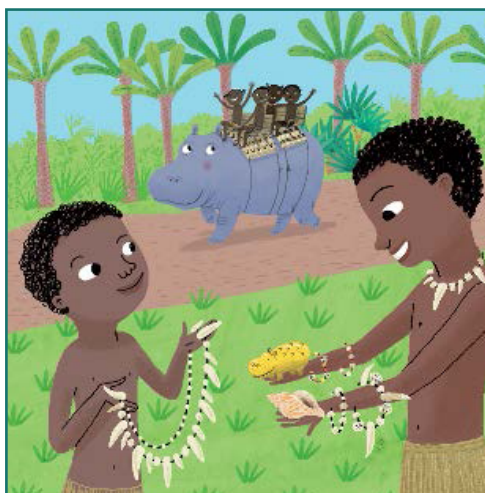


Figura 10. Patrones en las ilustraciones.

la búsqueda de regularidades y patrones. Estos pueden detectarse en la disposición que presentan las hojas en el tallo de las plantas (Figura 2), en la ropa de los personajes (Figura 6), en la decoración de las casas (Figura 5), etc.

LA ACTIVIDAD MATEMÁTICA POTENCIADA POR LAS ILUSTRACIONES

La literatura infantil ha demostrado, en numerosas investigaciones y experiencias, tener un gran valor para el desarrollo de la competencia matemática. Con el recurso de los álbumes ilustrados, hemos propuesto a pequeños de 5 y 6 años problemas de multiplicación y división (De Castro, Molina, Gutiérrez, Martínez, Escorial, 2012), problemas de descomposición factorial en los que hay que disponer una cantidad de 24 objetos en filas iguales (De Castro y Hernández, 2014), o situaciones que implican para los niños el cálculo de dobles y mitades (De Castro, Walsh, Del Coso, González, Escorial, 2009). También en primer curso de primaria (6-7 años) trabajamos con problemas de estructura multiplicativa, con agrupamientos de diez, orientados a la comprensión de las decenas (Ramírez y De Castro, 2014).

Otros autores han llegado a resultados similares en otras áreas de las matemáticas distintas del pensamiento numérico, como la medición, la geometría, o el análisis de datos (Van den Heuvel-Panhuizen y Elia, 2011). A continuación, vamos a ofrecer muestras de actividad matemática potenciada a través de imágenes. Comenzamos con situaciones conocidas como “juego de peticiones” (Aguilar, Ciudad, Láinez y Tobaruela, 2010; Ruiz-Higueras, 2005), experimentadas en el aula de 4 años. Seguimos con problemas de descomposición aditiva de cantidades en la clase de 5 años. Todas estas actividades están tomadas del proyecto “¡A contar! Matemáticas para pensar” (De Castro y Hernández, 2015). Finalizamos con ejemplos de resolución de problemas aritméticos en primer curso de primaria.

Los juegos de peticiones (4 años)

Un tipo de actividad desarrollada en clases de 4 años son los “juegos de peticiones”. Consisten en presentar al alumno una figura modelo decorada con formas geométricas. El alumno tiene una figura igual, sin decorar, y debe solicitar en su cuaderno (escribiendo, dibujando, pero sin comunicación oral) las pegatinas que necesita para reproducir el modelo original. Esta actividad tiene una gran riqueza matemática. Para resolverla, el niño tiene que poner en juego conocimientos numéricos utilizando la correspondencia uno a uno o el conteo para cuantificar la colección de pegatinas que necesita. También debe representar dos cantidades discretas, para hacer la petición en el papel. Por último, debe ubicar correctamente las pegatinas en el modelo vacío, copiando la posición de los cuadrados coloreados en el modelo original, utilizando las filas y columnas de la cuadrícula de la camisa como sistema de referencia (ver Figura 9).

En la Figura 11 vemos, en el cuaderno de un alumno, cómo ha intentado resolver esta actividad cometiendo dos errores. El primero de ellos está en la propia petición. Como vemos a la derecha, en el recuadro donde se hacen las anotaciones, el alumno ha pedido solo cuatro pegatinas cuadradas azules y cuatro rojas, pues el niño explicó al maestro que

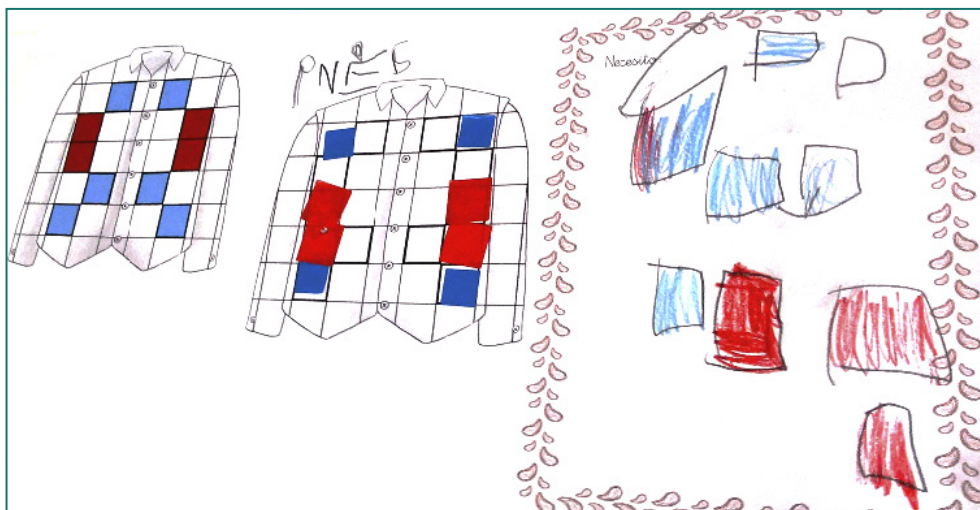


Figura 11. Planteamiento y resolución con errores en un juego de peticiones.

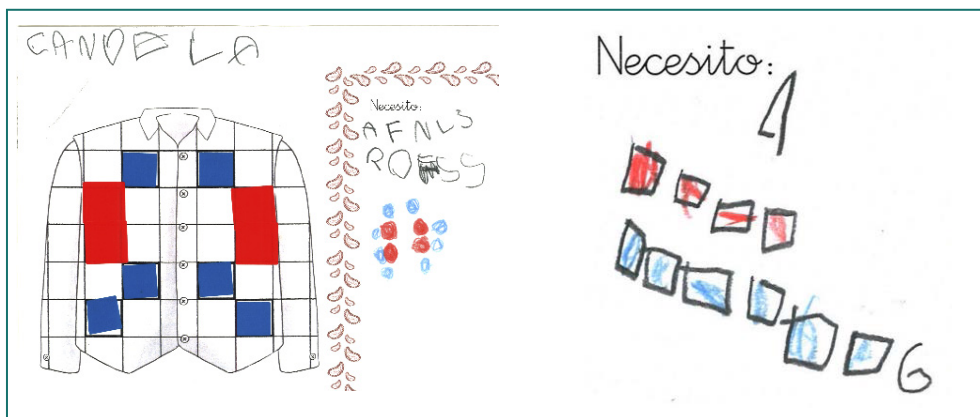


Figura 12. Resoluciones correctas en un juego de peticiones.

la pegatina coloreada en rojo y azul debía ser roja. Así, en la petición faltan dos pegatinas azules, lo que implica un fallo en la cuantificación (bien sea este en el conteo o en la correspondencia uno a uno). Por otro lado, el trabajo también presenta un error de tipo espacial, que se pone de manifiesto al pegar las 4 pegatinas rojas, y las dos pegatinas azules superiores, en lugares incorrectos.

En la Figura 12, vemos otras dos producciones de alumnos de 4 años. A la izquierda, la producción de Candela refleja un conocimiento espacial adecuado. Además, escribe “azules” y “rojos” con mayúsculas, aunque después rectifica y representa las pegatinas que necesita con puntos, copiando aproximadamente la disposición de las mismas. A la derecha, el alumno ha utilizado numerales escritos con cifras. Este es un objetivo a largo plazo, para los niños de 5 años. La actividad puede resolverse perfectamente a

través de dibujos o con numerales. Esto permite que cada alumno vaya evolucionando en su nivel de simbolización, pasando de representaciones icónicas a simbólicas, siguiendo su propio ritmo.

Problemas verbales de descomposición aditiva en último curso de infantil

A continuación, mostramos cómo resuelven niños de 5 años el problema: “En el arroyo había 10 cerdos negros y rosados. ¿Cuántos cerditos negros crees que había? ¿Y cuántos cerditos rosados?”. Se trata de un problema de descomposición aditiva con varias soluciones. Tras resolver el problema con materiales manipulativos, los niños deben

escribir las soluciones en su cuaderno de trabajo. Este problema está basado en la Figura 13, en la que se representa una cantidad indefinida de cerdos y, a la vez, la relación parte-todo, pues el total de los cerdos se puede dividir en dos partes: los cerdos rosas y los negros.

En la Figura 14, observamos el trabajo de dos alumnos. El de la izquierda ha dado 5 soluciones correctas (de las 11 soluciones posibles, desde 0 cerdos negros a 10). Aspectos interesantes en su representación son el uso del cero en una solución, lo cual no es habitual al empezar a resolver este tipo de problemas, o que da la impresión de tener en cuenta intuitivamente la propiedad conmutativa de la suma, pues pone algunas parejas de



Figura 13. Ilustración en la que se basa el problema de descomposición.



Figura 14. Soluciones a los problemas de descomposición.

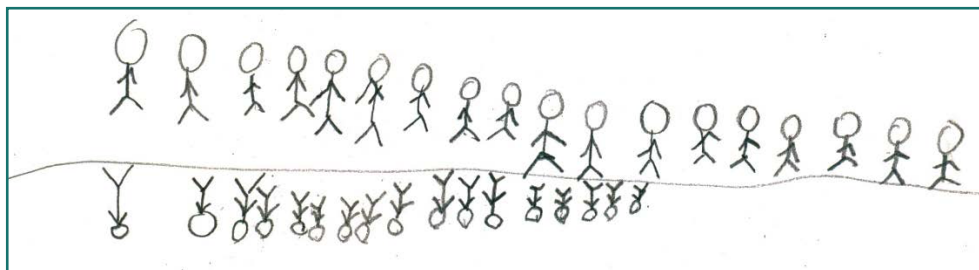


Figura 15. Ilustración para la resolución de un problema de combinación con parte desconocida.



Figura 16. Proceso de resolución imitando el conteo regresivo de “Once damas atrevidas”.

soluciones ligadas por esta propiedad. En su trabajo, predomina la representación icónica (mediante un dibujo) del tipo de objeto (los cerdos). Mientras tanto, a la derecha, el alumno da también 5 soluciones al problema y destaca el uso de palabras para indicar el color de los cerdos, lo cual muestra un nivel más avanzado de simbolización que el de su compañero.

Problemas aritméticos verbales en primero de primaria

Con niños de primer curso de educación primaria (6-7 años), planteamos un problema aritmético verbal de combinación con una parte desconocida: “Si en total hay 35 personas y 18 de ellas están arriba, ¿cuántas están abajo?”. Este problema se basa en el cuento “Los de arriba y los de abajo” (Valdivia, 2009) en el que la autora e ilustradora presenta un mundo dividido en dos partes: la de arriba y la de abajo. En las ilustraciones se muestran personas, animales, edificios y otros elementos orientados hacia arriba o hacia abajo, a ambos lados de una línea horizontal que divide en dos partes cada una de las páginas. En los dibujos de los alumnos de primer curso, se observa que la orientación de los dibujos esquematizados de personas reproduce la de las ilustraciones del cuento (Figura 15). Para la resolución del problema, el alumno dibuja la parte conocida: las 18 personas que hay en el mundo de arriba. A continuación, completa el total de 35, añadiendo personas en el mundo de abajo, la parte desconocida. Para terminar, cuenta las personas añadidas abajo. Así, el niño ha podido calcular el complementario de los de

arriba respecto del total de los habitantes. La ilustración estimula el dibujo que modeliza la relación parte-todo permitiendo alcanzar la solución.

También en primer curso de primaria hemos leído el cuento “Once damas atrevidas” (Thomassen, 2002), que narra un conteo regresivo, comenzando con once damas y acabando con una sola dama al final. Cada nueva escena del cuento describe la disminución del número de damas en una unidad: “Diez damas atrevidas siguieron a un berebere, una se cayó en las dunas y quedaron sólo nueve”. Tanto el texto, como la imagen que lo acompaña, muestran una situación de cambio decreciente ideal para contextualizar una sustracción ($10 - 1 = 9$) en la “vida real”. Utilizando este cuento, planteamos el problema: “Al principio había once damas atrevidas. ¿Cuántas quedaban cuando se habían ido seis?”. Una niña dibuja once “bolas” numeradas del 1 al 11 (Figura 16). La representación de las sucesivas acciones de quitar se puede observar en las bolas tachadas. Además, el tipo de conteo decreciente que describe el cuento, desde el once hacia atrás,

puede haber influido en que la niña comience a tachar desde la bola número 11 hasta la número 6 un total de 6 numerales.

Otra idea matemática importante reflejada en ilustraciones de álbumes es el agrupamiento de cantidades en grupos iguales. Esta idea es fundamental en el principio de agrupamiento propio de los sistemas de numeración y del pensamiento multiplicativo. En primero de primaria, la multiplicación y división no se introducen formalmente, pero los niños resuelven problemas multiplicativos de agrupamiento y reparto utilizando estrategias informales (Ramírez, 2015).

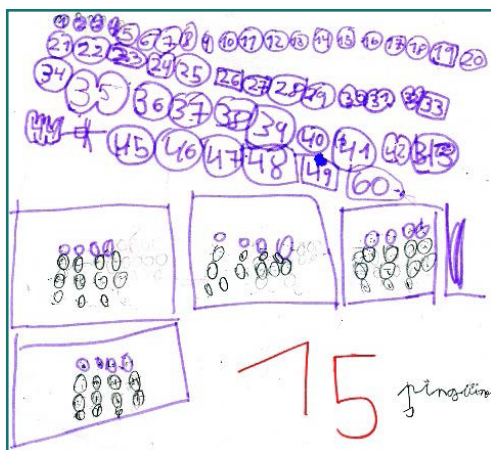


Figura 17. Ilustraciones para la resolución de un problema reparto.

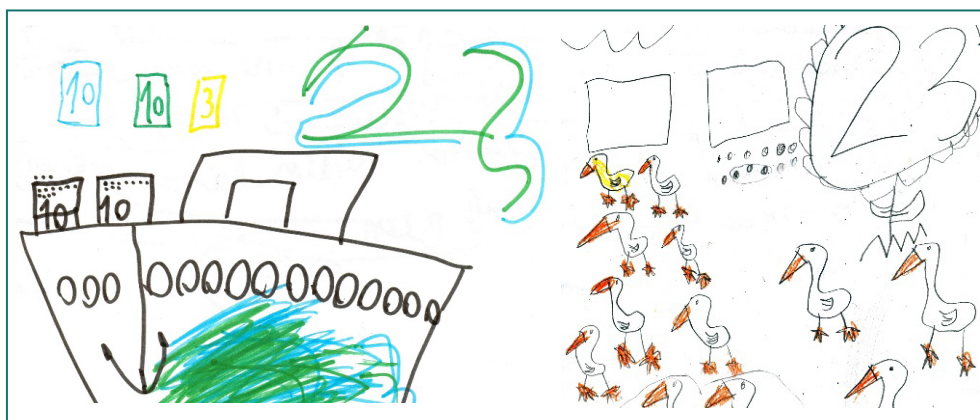


Figura 18. Procesos de resolución de un problema de multiplicación.

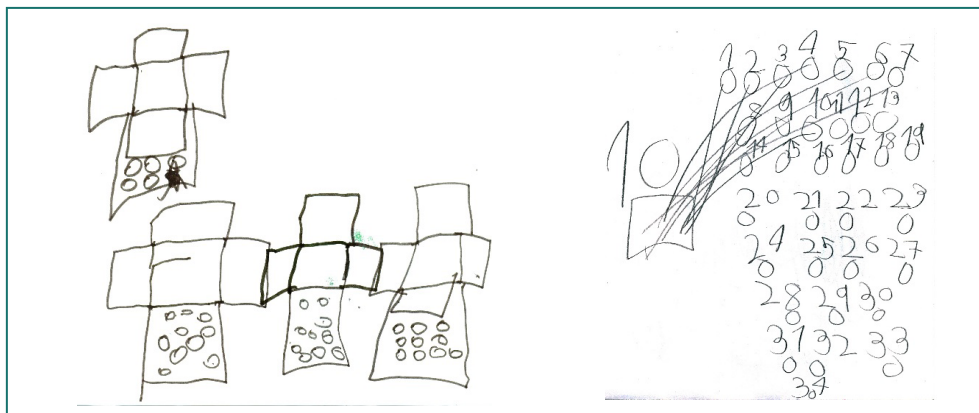


Figura 19. Ilustración para la resolución de un problema de división medida.

Para ilustrar los agrupamientos, utilizamos el cuento “365 pingüinos” (Fromental, 2007), en el que el ilustrador, Joëlle Jolivet, plasma en las imágenes grandes cantidades de pingüinos “almacenados” en cajas y cajones. Planteamos un problema de división reparto en primer curso de primaria: “Cuando llegaron a tener 60 pingüinos, decidieron poner los pingüinos en 4 grupos iguales. ¿Cuántos pingüinos pusieron en cada grupo?”. En la Figura 17 se observa que una niña dibuja “bolas” numeradas representando todos los pingüinos (saltándose la década de los cincuenta) y cuatro cajas. Representa la acción de repartir, dibujando una bola en cada caja a la vez que la marca con un puntito para saber que ya ha sido repartida. Para terminar, cuenta los pingüinos de cada caja, comprobando que en todas hay la misma cantidad. Esta situación de grupos iguales forma parte de la estructura multiplicativa.

En la misma línea, en el cuento “Diez patitos de goma” (Carle, 2006) las ilustraciones muestran cómo se van introduciendo patitos de goma en cajas que viajan por el mar en un barco. La Figura 18 muestra las producciones de dos alumnos para resolver el siguiente problema con agrupamientos de 10: “Si tenemos 2 cajas llenas de patitos con 10 patitos en cada caja y 3 patitos sueltos. ¿Cuántos patitos tenemos en total?”. Los niños han representado cajas con 10 patos en cada una de ellas, como se puede ver en la Figura 18, en la imagen de la derecha. Las ilustraciones del autor, en las que se observa la introducción de los patos en cajas, puede favorecer la formación de agrupamientos en las representaciones infantiles (Ramírez, 2015).

Hemos planteado también problemas de división medida con resto con alumnos de 6 y 7 años, por ejemplo: “Si tenemos 34 patitos y queremos guardarlos en caja de 10 patitos cada una. ¿Cuántas cajas podemos llenar? ¿Cuántos patitos quedarán sueltos?”. Los niños completan las cajas de 10 hasta que en la última solo introducen 4 (Figura 19, imagen de la izquierda). Para saber cuántas cajas han llenado, cuentan las cajas completas, lo que implica considerar cada grupo de 10 como una unidad a contar. Esto requiere un proceso de unitización de las colecciones. El término unitización consiste en el “proceso de detectar o crear una unidad” (Fuson, Clements y Beckman, 2009, p. 65) y es una de las ideas centrales en el desarrollo inicial del pensamiento matemático numérico.

La última caja no completa provoca que algunos niños calculen los patitos que faltan para llenarla, alcanzando la siguiente decena. Así, completan una decena para tener un grupo más, una caja más. Otros alumnos han mostrado la relación uno a muchos que existe entre las cajas y los patitos, como se puede ver en la Figura 19 en la imagen de la derecha. Tras dibujar una caja y las treinta y cuatro bolas numeradas que representan a los patitos, el niño traza líneas que unen las bolas con la caja, mostrando así la relación entre un grupo y sus elementos.

CONCLUSIONES

Las ilustraciones de un álbum pueden contener características que las hagan especialmente aptas para potenciar la actividad matemática. Para ello, no basta con las ilustraciones, son las tareas matemáticas las que deben evocar en su planteamiento la situación del cuento con su correspondiente ilustración, de modo que ésta pueda contribuir a dar sentido y facilitar la comprensión del contenido matemático. En este artículo, hemos visto ejemplos de producciones sorprendentes por su alto nivel matemático en relación con la edad. En ellas reconocemos el papel potenciador de la actividad matemática que juegan las ilustraciones.

Los niños de 4 a 7 años con los que trabajamos resuelven situaciones aritméticas basadas en los cuentos, apoyándose en imágenes que muestran ideas sobre contenidos matemáticos como la relación parte-todo de la estructura aditiva y el agrupamiento/reparto de la estructura multiplicativa. Además, los niños reflejan en sus dibujos aspectos geométricos como la orientación y situación de los objetos o individuos, como hemos visto en el problema del cuento “Los de arriba y los de abajo”.

Los problemas que hemos planteado son complejos y no se suelen proponer en las primeras edades. Una de las implicaciones de nuestras experiencias de cara al trabajo en el aula es que la contextualización de una situación matemática, a través del cuento y sus ilustraciones, conduce a convertir la situación en familiar, lo que facilita que los alumnos puedan desarrollar al máximo sus capacidades matemáticas.

Este trabajo pretende invitar a los maestros y maestras a completar su formación, a través del estudio de las fecundas relaciones que podemos establecer entre matemáticas e imágenes, a fin de poder proporcionar mejores oportunidades de aprendizaje a las niñas y niños a los que acompañamos en su proceso educativo.

REFERENCIAS

- Aguilar, B., Ciudad, A., Láinez, M.C. y Tobaruela, A. (2010). *Construir, jugar y compartir: Un enfoque constructivista de las matemáticas en Educación Infantil*. Jaén: Enfoques Educativos.
- Alsina, C. (2007). Educación matemática e imaginación. *Unión: Revista iberoamericana de educación matemática*, 11, 9-17.
- Carle, E. (2006). *Diez patitos de goma*. Madrid: Kókinos.
- Carpenter, T.P., Fennema, E., Franke, M.L., Levi, L., y Empson, S.B. (1999). *Children's mathematics: Cognitively guided instruction*. Portsmouth: Heinemann.

- Castro, E., y Castro-Rodríguez, E. (2010). El desarrollo del pensamiento multiplicativo. *Uno: Revista de didáctica de las matemáticas*, 54, 31-40.
- Castro-Rodríguez, E., y Castro, E. (2013). La relación parte-todo. En L. Rico, M.C. Cañadas, J. Gutiérrez, M. Molina e I. Segovia (Eds.), *Investigación en Didáctica de la Matemática. Homenaje a Encarnación Castro* (pp. 85-92). Granada, España: Editorial Comares.
- De Castro, C. y Hernández, E. (2015). *¡A contar! Matemáticas para pensar*. Madrid: Santillana.
- De Castro, C., González, A., y Escorial, B. (2009). El aprendizaje de las matemáticas a los tres años: Narración reflexiva sobre la construcción de un mercado medieval. *Números. Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 70, 53-65.
- De Castro, C. (2015). Romper para conocer: Procesos de composición y descomposición en la geometría infantil. *Aula de Infantil*, 79, 18-21.
- De Castro, C. y Hernández, E. (2014). Problemas verbales de descomposición multiplicativa de cantidades en educación infantil. *PNA*, 8(3), 99-114.
- De Castro, C., Molina, E., Gutiérrez, M.L., Martínez, S., Escorial, B. (2012). Resolución de problemas para el desarrollo de la competencia matemática en Educación Infantil. *Números. Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 80, 53-70.
- De Castro, C., Walsh, J., Del Coso, E., Salvador, C., González, V., Escorial, B. (2009). “Dos de todo”: El cuento chino de los problemas de comparación multiplicativa en la educación Infantil. *Épsilon. Revista de Educación Matemática*, 73, 33-42.
- Devlin, K. (2003). *Mathematics: The science of patterns*. New York: Owl Books.
- Edo, M., y Masoliver, C. (2008). Una tienda en clase. Creación y análisis de un contexto para aprendizajes matemáticos. *UNO. Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 47, 20-36.
- Elia, I., Van den Heuvel-Panhuizen, M., y Georgiou, A. (2010). The role of pictures in picture books on children’s cognitive engagement with mathematics. *European Early Childhood Education Research Journal*, 18(3), 125-147.
- Flecha, G. (2013). Literatura y matemáticas de 0 a 3: La mariquita gruñona. *Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia*, 2(1), 119-126.
- Fromental, J.L. (2007). *365 pingüinos*. Madrid: Kokinos.
- Fuson, K.C., Clements, D.H. y Beckman, S. (2009). *Focus in prekindergarten: Teaching with curriculum focal points*. Reston, VA/Washington, DC: National Council of Teachers of Mathematics & Naeyc.
- Hong, H. (1996). Effects of mathematics learning through children’s literature on math achievement and dispositional outcomes. *Early Childhood Research Quarterly*, 11, 477-494.
- Jandl, E. y Junge, N. (2005). *Ser quinto*. Salamanca: Lóguez Ediciones.
- Lamíquiz, V. (1991). *La cuantificación lingüística y los cuantificadores*. Madrid: UNED.
- Marín, M. (2007a). Contar las matemáticas para enseñar mejor. *Matemática: Revista digital de divulgación matemática*, 3(2).
- Marín, M. (2007b). El valor matemático de un cuento. *Sigma: Revista de matemáticas*, 31, 11-26.
- McGrath, C. (2014). *Teaching mathematics through story: A creative approach for the early years*. New York: Routledge.
- Noda, M.A. y Plasencia, I.C. (2002). La matemática de los cuentos. *Suma*, 41, 93-101.
- OCDE (2013). *Marcos y pruebas de evaluación de PISA 2012: Matemáticas, Lectura y Ciencias*. Madrid: MEC-INEE.
- Ramírez, M. y De Castro, C. (2014). Trayectorias de aprendizaje de la multiplicación y la división de cuatro a siete años. *Épsilon. Revista de Educación Matemática*, 31(3), 41-56.

- Ramírez, M. (2015). *Desarrollo de conocimientos matemáticos informales a través de la resolución de problemas aritméticos verbales en primer curso de educación primaria*. Tesis doctoral. Madrid: UCM. Recuperada el 3-10-2016 de: <https://dialnet.unirioja.es/servlet/tesis?codigo=47140>
- Resnick, L.B. (1992). From protoquantities to operators: Building mathematical competence on a foundation of everyday knowledge. In G. Leinhardt, R. Putnam, y R. A. Hat-trup (Eds.), *Analysis of arithmetic for mathematics teaching* (pp. 373-429). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Ruiz-Higueras, L. (2005). Aprendizaje y matemáticas. La construcción del conocimiento matemático en la Escuela Infantil. En C. Chamorro (Coord.), *Didáctica de las Matemáticas para Educación Infantil* (pp. 1-38). Madrid: Pearson Educación.
- Ruiz-Higueras, L., García, F. J. y Lendínez, E. M. (2013). La actividad de modelización en el ámbito de las relaciones espaciales en la Educación Infantil. *Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia*, 2(1), 95-118.
- Thomassen, O. (2002). *Once damas atrevidas*. Pontevedra: Kalandraka.
http://www.kalandraka.com/fileadmin/images/books/dossiers/Once-damas-atrevidas-C_01.pdf
- Valdivia, P. (2009). *Los de arriba y los de abajo*. Pontevedra: Kalandraka. http://www.kalandraka.com/fileadmin/images/books/dossiers/Los-de-arriba-C_01.pdf
- Van den Heuvel-Panhuizen, M. (2008). Educación matemática en los Países Bajos: Un recorrido guiado. *Correo del maestro*, 149, 23-54.
- Van den Heuvel-Panhuizen, M., y Elia, I. (2012). Developing a framework for the evaluation of picture books that support kindergartners' learning of mathematics. *Research in Mathematics Education*, 14(1), 17-47.
- Van den Heuvel-Panhuizen, M., y Elia, I. (2011). Kindergartners' performance in length measurement and the effect of picture book reading. *ZDM – The International Journal on Mathematics Education*, 43(5), 621-635.
- Van den Heuvel-Panhuizen, M., y Van den Boogaard, S. (2008). Picture books as an impetus for kindergartners' mathematical thinking. *Mathematical Thinking and Learning*, 10(4), 341-373.
- Van den Heuvel-Panhuizen, M., Van den Boogaard, S., y Doig, B. (2009). Picture books stimulate the learning of mathematics. *Australian Journal of Early Childhood*, 34(3), 30-39.
- Van den Heuvel-Panhuizen, M., Veltman, A., Janssen, C. y Hochstenbach, J. (2012). La geometría en preescolar. En M. Van den Heuvel-Panhuizen y K. Buys (Coords.), *Los niños pequeños aprenden medida y geometría* (pp. 141-215). México: Correo del Maestro/La Vasija.

Sobre la forma y el crecimiento cordobés del *Nautilus pompilius*

José R. Galo Sánchez

Ángel Cabezudo Bueno

Ildefonso Fernández Trujillo

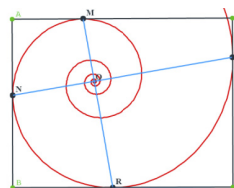
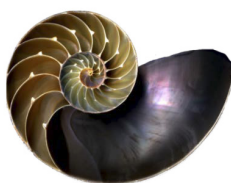
Red Educativa Digital Descartes

reddescartes.org proyectodescartes.org

Resumen: Hay una tendencia a tratar de asociar o encontrar en todo aquello que es bello la proporción áurea o divina o a construir objetos a partir de esta razón porque se presuponen serán apreciados como bellos por el simple hecho de seguir dicha pauta. Esto, como no, también ha

acontecido con la modelación matemática de la concha del *Nautilus pompilius* sobre la que suele afirmarse que su forma y crecimiento es áureo. Sin embargo, en este artículo se muestra y se analiza en detalle cómo dicha concha lo que realmente sigue es **un patrón ubicado en la denominada proporción cordobesa o humana**. Con apoyo en un recurso interactivo desarrollado con la herramienta Descartes se motiva el análisis y comportamiento y se procede a partir de la yocto-yotta realidad observada a construir el modelo matemático.

Palabras clave: Proporción cordobesa, número cordobés, espiral logarítmica, *Nautilus pompilius*, crecimiento gnomónico.



On the form and the Cordovan growth *Nautilus pompilius*

Abstract: There is a tendency to try to associate or to find the golden ratio or the divine proportion in everything that is beautiful, or to try to create objects according to this ratio or proportion because it is assumed that they will be appreciated as beautiful objects due to the

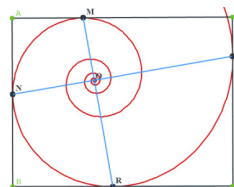
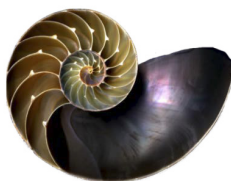




Fig. 1 *Nautilus pompilius* (fuente wikipedia).

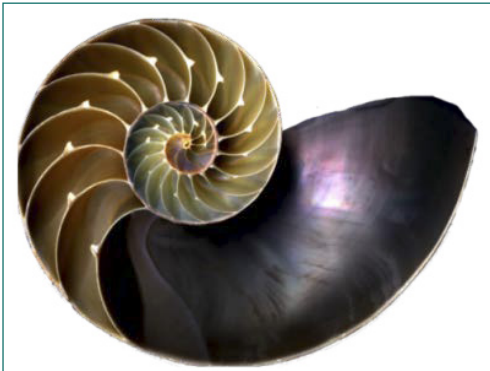


Fig. 2 Sección de la concha del *Nautilus pompilius* (fuente imagexia).

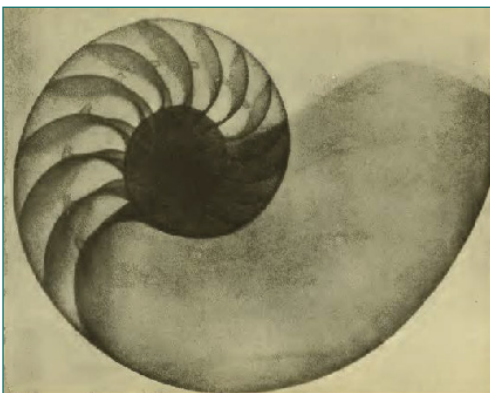


Fig. 3 Radiografía de la concha del *Nautilus Pompilius*.(fuente: (Thompson, 1945) procedente de Green and Gardiner, in *Proc. Malacol. Soc.* ii, 1897).

simple fact that they follow that pattern. This, of course, has also occurred with the mathematical modeling of the shell of *Nautilus pompilius*, which is said to have a golden shape and growth. Nevertheless, in this article it is shown and analysed in detail how this shell really follows a pattern that lies in the so-called Cordovan ratio or human proportion. With the help of an interactive resource developed with the Descartes tool, we motivate the analysis and behaviour and we proceed to create the mathematical model from the previously observed yocto-yotta reality.

Keywords: Cordovan proportion, Cordovan number, logarithmic spiral, *Nautilus pompilius*, gnomonic growth.

INTRODUCCIÓN

¿La Naturaleza es matemática o matematizamos la Naturaleza? Independientemente de cuál fuera la alternativa cierta –si alguna lo es, o si no lo fuera ninguna de ellas, o si lo son ambas– lo que sí parece obvio es que basta observar nuestro entorno para reconocer atractivas formas naturales y asimilarlas a modelos matemáticos que recíprocamente se mimetizan, estableciendo un hipertunel entre la concreción y la abstracción, entre el mundo real y el virtual, que permite observar lo que en otras ocasiones hemos ubicado o definido con la frase “Las Matemáticas en la belleza y la belleza de las Matemáticas” (Galo Sánchez J. , 2004).

El *Nautilus pompilius* (Fig. 1), cefalópodo del género *Nautilus*, es un ejemplo de esa belleza matemática-natural. Una belleza que parcialmente se oculta en el interior de su concha y que queda puesta de manifiesto efectuando una sección (Fig. 2) o bien mediante una radiografía (Fig. 3).

Un cefalópodo del orden de los nautilidos (Nautilida) que lleva haciendo matemáticas desde el periodo Devónico —hace más de 400 millones de años— hasta nuestra actualidad, y que nos invita a matematizar. Y esto es el objeto y el fin de este estudio: ¿Qué forma tiene la sección de la concha y sus cámaras? ¿Por qué adopta ese patrón y cómo se generan?

El estudio morfológico de los seres vivos es algo intrínseco a la Biología, pero pensamos que cuando se introduce una visión científica global, interdisciplinaria, es cuando se consigue un salto cualitativo esencial al aportarse no sólo la parte descriptiva —el qué— sino también la explicativa o justificativa —el por qué—. En esa línea, y centrados en el contexto aquí contemplado, podemos señalar el trabajo de D'Arcy Wentworth Thompson “On Growth and Form” (Thompson, 1945) y también, como referencia a la introducción del ordenador como medio para el análisis y la representación, indiquemos el trabajo de Raup “Computer as Aid in Describing Form in Gastropod Shells” (Raup, 1962).

En este artículo, nuestro centro de interés se ubica en la modelación matemática del *Nautilus pompilius* y para ello partiendo de la realidad de nuestro mundo físico tratamos de trasladar éste al mundo matemático virtual, es decir, entendemos que nuestro mundo o “yocto-yotta realidad”¹ es una proyección discreta del mundo matemático o “continuo virtual”. De manera que considerando la belleza concreta tratamos de realizar una sublimación o cambio de estado que nos permita admirar la belleza abstracta y a través de ésta tratar de comprender el por qué acontece la primera.

Hay una tendencia a tratar de asociar o encontrar en todo aquello que es bello la proporción áurea o divina

$$\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \simeq 1,618033\dots, \quad (1)$$

o a construir a partir de esta razón objetos que, por usar esta proporción, se presupone o se estima que serán apreciados como bellos. Y ello, como no, también ha acontecido con el *Nautilus pompilius* (Peterson, 2005), si bien sin éxito (Fig. 4) porque como se dice coloquialmente “la realidad es tozuda”. Aquí² (Fig. 5) mostraremos que la proporción por la que se rige el *Nautilus* es la denominada proporción cordobesa o humana³:

$$\zeta = \frac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{2}} \simeq 1,306562\dots, \quad (2)$$

Y no sólo observaremos que el perfil de esta concha sigue el patrón de la espiral logarítmica cordobesa, sino que todo su interior, el sífinculo y septos siguen el mismo patrón de crecimiento humano-cordobés. Así pues, en este caso, vemos cómo la empecinada

1. En longitud, el orden de magnitud de aquello que es físicamente apreciable o medible en nuestro entorno se ubica actualmente en el rango determinado por el intervalo $[10^{-35}, 10^{26}]$ metros, es decir, desde la longitud de Planck al tamaño del universo observable. Pero en el Sistema Internacional el rango de prefijos para múltiplos y divisores se sitúa en el intervalo [yocto, yotta], es decir, $[10^{-24}, 10^{24}]$, y de ahí surge nuestra denominación de yocto-yotta realidad.

2. En la sección primera de este artículo, “La espiral logarítmica”, se detalla por qué estas espirales logarítmicas son denominadas áurea y cordobesa.

3. El término proporción cordobesa o humana es debido a Rafael de la Hoz Arderius, quien introdujo ésta en su artículo (Hoz Arderius, La proporción cordobesa, 1973). Puede también consultarse en este documento (Hoz Arderius, La proporción cordobesa, 1996).

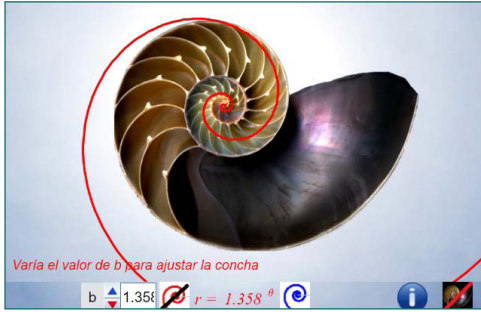


Fig. 4. Ajuste por una espiral logarítmica áurea o divina.



Fig. 5. Ajuste por una espiral logarítmica cordobesa o humana.

esperanza de encontrar el ideal de belleza divino se ve trastocada y lo que aparece es el ideal de belleza humano en nuestra “yocto-yotta realidad”.

1. LA ESPIRAL LOGARÍTMICA

En nuestro trabajo “El grillo y la espiral logarítmica” (Galo Sánchez, Cabezudo Bueno, & Fernández Trujillo, 2016) sintetizamos la construcción dinámica de la denominada espiral logarítmica —o también equiangular, geométrica o como más poéticamente Bernouilli la denominó: “*spira mirabilis*” o espiral maravillosa—, desglosamos las propiedades de esta espiral maravillosa e iniciamos nuestro estudio de modelización matemática del *Nautilus pompilius*. Incluimos aquí un resumen de todo ello, dado que utilizaremos estas propiedades y datos en el desarrollo del modelo global.

La espiral logarítmica es una curva plana que en coordenadas polares se puede representar mediante la ecuación:

$$r = a b^\theta \text{ con } a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}^+, \quad (3)$$

o bien estandarizándola tomando como base el número :

$$r = a e^{k\theta} \quad (4)$$

En las espirales logarítmicas podemos detallar:

- a) El análisis de la curva de ecuación (3) puede reducirse a los casos en que $a \in \mathbb{R}^+$ y $b > 1$.
 - a) Si $a = 0$, la ecuación (3) determina un único punto que es el origen de coordenadas.
 - b) Si $a < 0$ la espiral (3) es la curva simétrica, respecto al polo, de la espiral correspondiente a la ecuación $r = |a| b^\theta$.
 - c) Si $b = 1$, la ecuación (3) queda reducida a $r = a$ que es una circunferencia de radio $|a|$.
 - d) Si $0 < b < 1$, la espiral (3) equivale a la espiral simétrica, respecto al eje polar $\theta = 0$ y por tanto con inversión de giro, de la espiral $r = a c^{-\theta}$ con $c > 1$, pues basta reescribir $b = \frac{1}{c}$.

- b)** La ecuación (3) puede reescribirse usando cualquier otra base c sin más que considerar la expresión de b como una potencia

$$b = c^d \tag{5}$$

y de ahí se obtiene

$$r = a c^{d\theta}. \tag{6}$$

Es en particular lo realizado en (4).

- c)** El coeficiente a en (3) es un factor de escala o también puede interpretarse como un giro respecto a la espiral de ecuación $r = b^\theta$. Basta reescribir

$$a = b^{\theta_0}, \tag{7}$$

Es decir,

$$\theta_0 = \log_b a \tag{8}$$

y (3) equivale a $r = b^{\theta+\theta_0}$, es decir un giro de ángulo $-\theta_0$. Así pues, todas las espirales (3) que comparten la misma base b son coincidentes, son la misma espiral sólo que girada. O también puede interpretarse que comparativamente la espiral $r = a b^\theta$ tiene un ángulo de retardo⁴ θ_0 en su crecimiento respecto a la $r = b^\theta$, es decir, si representamos está última en el intervalo $(-\infty, \beta]$, entonces $r = a b^\theta$ es esta misma espiral sólo que representada en el intervalo $(-\infty, \beta - \theta_0]$.

- d)** La espiral de ecuación (3) es geométrica en el sentido de que las distancias al polo de todos los puntos de ella ubicados en una misma semirrecta $\theta = \alpha$ están en progresión geométrica de razón $b^{2\pi}$. Ello es debido a que todos esos puntos se corresponden con $r_n = a b^{\alpha+2\pi n}$ y por tanto

$$\frac{r_{n+1}}{r_n} = b^{2\pi}. \tag{9}$$

Este valor $b^{2\pi}$ se dice que es el factor de crecimiento de la espiral (3).

- e)** La espiral de ecuación (3) es equiangular⁵, es decir, en todo punto de ella el ángulo que forma el radio vector (segmento que une el polo con ese punto) y la tangente en él es siempre constante. Ese ángulo viene dado por:

$$\cos\psi = \frac{\ln b}{\sqrt{1+\ln^2 b}}. \tag{10}$$

Para determinarlo, por ejemplo, basta considerar las ecuaciones cartesianas del radio vector y del vector tangente

$$\begin{cases} x = a b^\theta \cos \theta \\ y = a b^\theta \sin \theta \end{cases} \quad \begin{cases} x' = a b^\theta \ln b \cos \theta - a b^\theta \sin \theta \\ y' = a b^\theta \ln b \sin \theta + a b^\theta \cos \theta \end{cases} \tag{11}$$

4. Esté término es el usado por (Thompson, 1945) en la p. 799.

5. Es bien conocido que la circunferencia es una curva equiangular, es decir, que en cualquier punto de la misma, el ángulo que forma el radio con la tangente es siempre constante e igual a un ángulo recto. René Descartes (1596-1650) fue quien se planteó la determinación de una curva que también fuera equiangular, pero que el ángulo fuera el que previamente se deseara, es decir, una generalización de lo que acontece en la circunferencia. Jakob Bernoulli (1654-1705) la analizó y la denominó “Spira mirabilis” o espiral maravillosa.

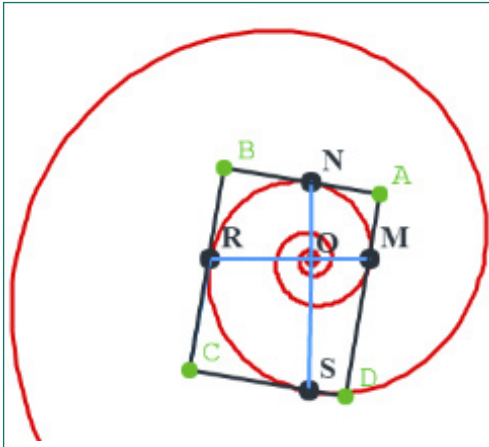


Fig. 6 Rectángulo circunscrito a la espiral.

y calcular $\cos \psi$ a través del producto escalar.

Si se considera la expresión (4) entonces ahí

$$k = \cotg(\psi). \quad (12)$$

f) Por el carácter equiangular, fijado un punto M de la espiral de ecuación (3) (ver Fig. 6), ésta puede inscribirse en un rectángulo de módulo o proporción

$$b^{\frac{\pi}{2}}. \quad (13)$$

Para los detalles puede consultarse nuestro recurso “El grillo y la espiral logarítmica” (Galo Sánchez, Cabezudo Bueno, & Fernández Trujillo, 2016).

Como consecuencia de esta propiedad denominaremos:

a) **Espiral logarítmica áurea** a aquella que su rectángulo circunscrito asociado es áureo, es decir, que el módulo o proporción de este rectángulo se corresponde con el número áureo (1). Por tanto, dado que ha de ser $b^{\frac{\pi}{2}} = \Phi$, o bien $b = \Phi^{\frac{2}{\pi}}$, tenemos que:

i) Su ecuación es:

$$r = a (\Phi^{\frac{2}{\pi}})^{\theta} = a (1,358456 \dots)^{\theta}. \quad (14)$$

ii) El factor de crecimiento (9) es:

$$(\Phi^{\frac{2}{\pi}})^{2\pi} = \Phi^4 = 6,854104 \dots \quad (15)$$

iii) El ángulo característico (10) de la espiral es:

$$\psi \approx 72,97^\circ. \quad (16)$$

iv) El ángulo característico del rectángulo áureo ($\angle CAD$ en la Fig. 6) aproximadamente:

$$31,72^\circ. \quad (17)$$

b) **Espiral logarítmica cordobesa** a aquella que su rectángulo circunscrito asociado es cordobés, es decir, que su proporción es la proporción dada por el número cordobés ζ (2). Para ello ha de ser $b^{\frac{\pi}{2}} = \zeta$ o lo que es equivalente $b = \zeta^{\frac{2}{\pi}}$.

i) Su ecuación es:

$$r = a (\zeta^{\frac{2}{\pi}})^{\theta} = a (1,185580 \dots)^{\theta}. \quad (18)$$

ii) El factor de crecimiento (9) es:

$$(\zeta^{\frac{2}{\pi}})^{2\pi} = \zeta^4 = 2,914214 \dots \quad (19)$$

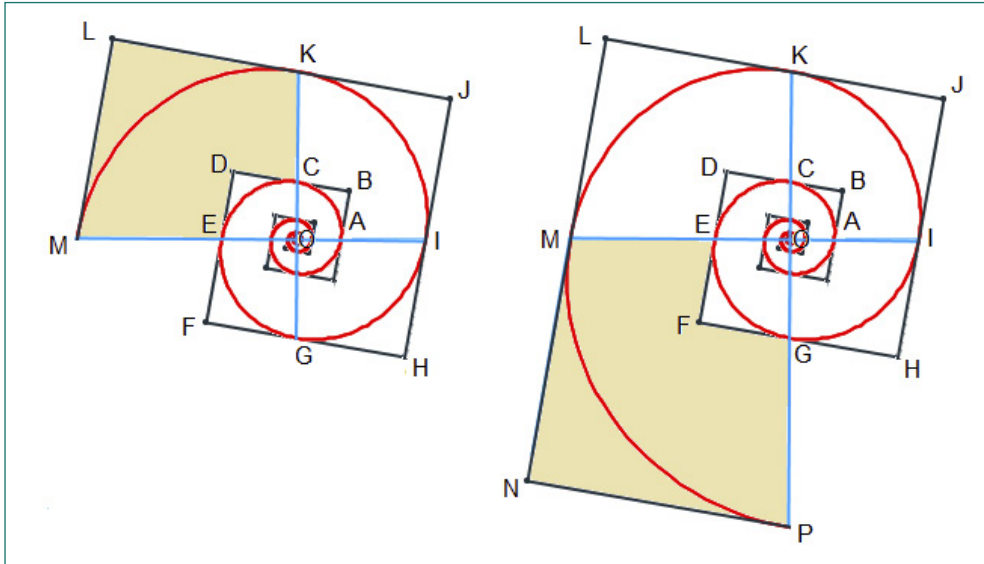


Fig. 7 Crecimiento gnomónico de paso $\frac{\pi}{2}$

iii) El ángulo característico (10) de la espiral es:

$$\psi \approx 80,32^\circ \quad (20)$$

iv) El ángulo característico del rectángulo cordobés ($\angle CAD$ en la Fig. 6) es aproximadamente:

$$37,43^\circ \quad (21)$$

g) La región plana delimitada por la espiral de ecuación (3) puede aproximarse por hexágonos construidos en base a los rectángulos circunscritos asociados a ella. En la figura Fig. 7 el hexágono CKLMED es el gnomon del hexágono CDFHJK, pues al añadirlo a éste el hexágono EFHJLM obtenido es semejante al CDFHJK con razón de semejanza $b^{\frac{\pi}{2}}$. Análogamente un nuevo gnomon es EMNPGF y además esos dos gnómones son a su vez semejantes, con igual razón. Así pues, de manera similar a (9), el factor de crecimiento en cada paso de esta aproximación discreta sería $b^{\frac{\pi}{2}}$.

De manera general puede aproximarse mediante gnómones obtenidos con paso $\frac{2\pi}{n}$ con $n \in \mathbb{N}$ y $n \geq 3$, y con factor de crecimiento en cada paso $b^{\frac{2\pi}{n}}$ (ver Fig. 8).

Y en el caso límite en el que $n \rightarrow \infty$ el factor de crecimiento sería $\lim_{n \rightarrow \infty} b^{\frac{2\pi}{n}} = 1$, es decir que el factor de crecimiento instantáneo es la unidad. Esto puede considerarse como una explicación al emblema empleado por Jakob Bernoulli en relación a la espiral logarítmica: “Eadem mutato resurgo” (Mutante y permanente, vuelvo a resurgir siendo la misma).

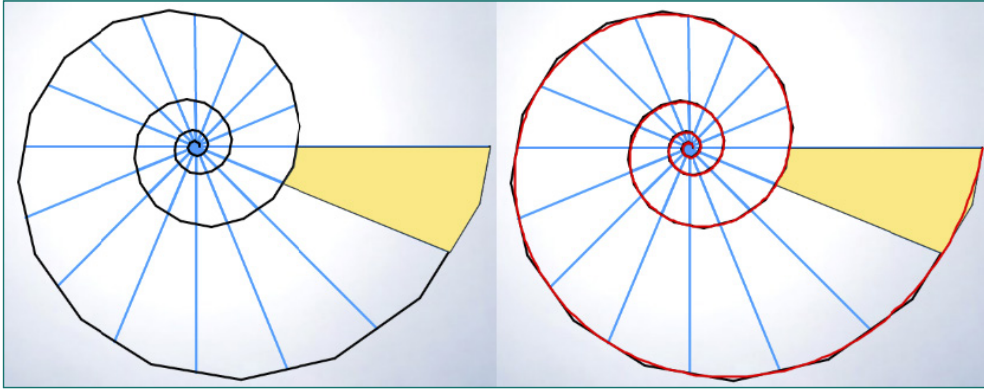


Fig. 8. Crecimiento gnomónico de paso $\frac{2\pi}{n}$ con $n \in \mathbb{N}$ y $n \geq 3$. Caso en que $n=16$.

A la izquierda aproximación gnomónica y a la derecha la misma aproximación y la espiral aproximada en rojo.

- h) La longitud del arco de la espiral de ecuación (3) comprendido entre el polo y el punto correspondiente a $r = a b^\beta$ es

$$l = \frac{\sqrt{1+ln^2b}}{\ln b} a b^\beta \quad (22)$$

o bien teniendo en cuenta (10) tenemos que

$$l = \frac{r}{\cos \psi'} \quad (23)$$

Para su cálculo basta aplicar que para la curva en polares $r = f(\theta)$, la longitud de arco entre dos puntos de argumento θ_0 y θ_1 respectivamente es

$$l = \int_{\theta_0}^{\theta_1} \sqrt{f'(\theta)^2 + f''(\theta)^2} d\theta \text{ y considerar } f(\theta) = a b^\theta \text{ y } \theta_0 = -\infty \text{ y } \theta_1 = \beta.$$

Consecuentemente la longitud del arco de espiral (3) comprendido entre los puntos P y Q correspondientes a $r = a b^\beta$ y $r = a b^\gamma$ respectivamente es:

$$l_{PQ} = \frac{\sqrt{1+ln^2b}}{\ln b} a (b^\gamma - b^\beta) \quad (24)$$

2. MODELIZACIÓN DEL NAUTILUS POMPILIUS

2.1. Consideraciones generales

La superficie tridimensional de cualquier concha puede considerarse que está generada por la revolución alrededor de un eje fijo de una curva cerrada, la generatriz, la cual incrementa sus dimensiones pero manteniendo la semejanza. Si seleccionamos un punto de esa generatriz, o bien un punto de la región que delimita, y unimos todos los puntos homólogos a él obtenemos otra curva que traza la dirección de crecimiento. Si esta traza está ubicada



Fig. 9. Visión frontal de la concha del *Nautilus pompilius* donde se observa su boca (generatriz).

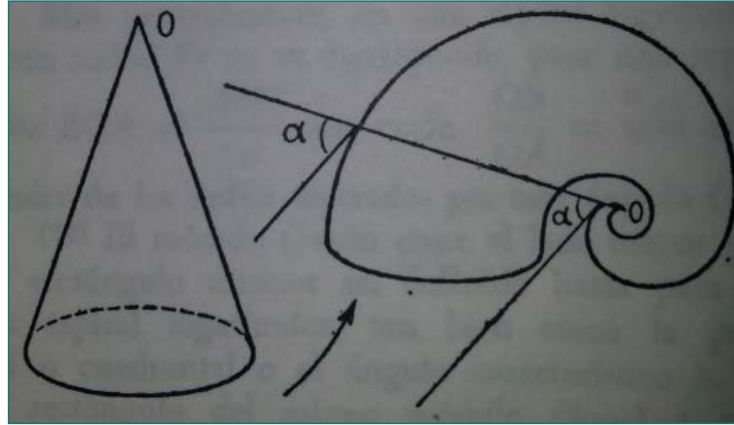


Fig. 10. La concha como deformación topológica de un cono.

en un plano perpendicular al eje de giro entonces se dice que la concha es discoidal —que es lo que acontece en el *Nautilus*— y si por el contrario tiene forma de una hélice cónica se dice que la concha es turbinada o helico-espiral. Como generatriz puede considerarse cualquier sección de la concha, sea paralela, normal o con cualquier inclinación respecto al eje de giro. Usualmente se considera la sección transversal obtenida por el corte con un plano que contenga al eje de giro y suele coincidir con la forma de la boca de la concha siempre que ésta se ubique en un plano (ver Fig. 9), pero se detectan diferencias⁶.

De manera muy resumida, en la imagen de la sección de la concha del *Nautilus pompilius* (Fig. 2), podemos observar diferentes detalles⁷ morfológicos que caracterizan la concha de estos y otros animales.

- a) La concha en sí, cuya sección a simple vista se observa que adopta una forma espiral. En ella podemos contabilizar el número de ciclos o verticilos.
- b) La protoconcha o cámara inicial formada en la vida embrionaria y larvaria. Y la teleoconcha o concha que se construye durante el crecimiento desde la forma juvenil a la adulta.
- c) La parte que presenta cámaras llamada fragmocono.
- d) Los septos o tabiques que conforman las cámaras y que se intersecan con la pared del fragmocono en la sutura.

6. En una nota al pie en (Thompson, 1945) p. 813 se especifica: “En el *Nautilus* la «capucha» tiene dimensiones algo diferentes en los dos sexos, y estas diferencias quedan impresas sobre la concha, es decir, sobre su «curva generatriz». Esta última constituye una elipse algo más ancha en el macho que en la hembra. Sin embargo, esta diferencia no es detectable en los ejemplares jóvenes; en otras palabras, la forma de la curva generatriz se altera perceptiblemente al avanzar en edad.”

7. Consultar la ficha de la Dra. Villaseñor (Villaseñor, 2007) sobre los Ammonoideos que son cefalópodos fósiles coetáneos del *Nautilus* hasta el Paleógeno.

- e) Los restos del canal en el que se ubica el sifúnculo⁸ o tubo sifonal que une las cámaras del fragmocono.
- f) La última cámara, que no tiene sifón, que es la zona donde reside el organismo, su habitación.

Del análisis realizado por Thompson (Thompson, 1945) para conchas discoidales⁹ se pueden establecer dos parámetros que son determinantes del crecimiento y de la forma:

- a) El ángulo característico de la espiral logarítmica.
- b) El ángulo de retardo o diferencia entre el crecimiento de la parte interior y exterior de cada verticilo, dado que la concha se puede asimilar a un cono enrollado sobre sí mismo (Fig. 10) —la imagen se ha tomado del libro de (Ghyca, 1983)—.

Si se desea abordar el modelo espacial es necesario considerar como tercer parámetro su curva generatriz.

2.2. Iniciando la modelización

En el apéndice I se aborda un reconocimiento visual de la sección de la concha del *Nautilus pompilius*. Efectuando un recuento de los verticilos, nos encontramos que las cámaras ocupan aproximadamente dos verticilos y medio y la cámara habitacional comprende un sector de amplitud $\frac{3\pi}{4}$ (Fig. 12), lo que totaliza $\frac{23\pi}{4}$, es decir, tres vueltas

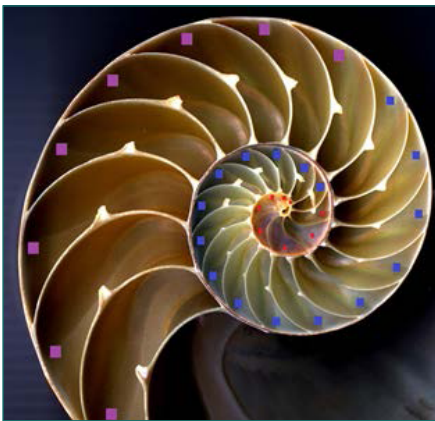


Fig. 11. Recuento de verticilos y cámaras en el Nautilus.

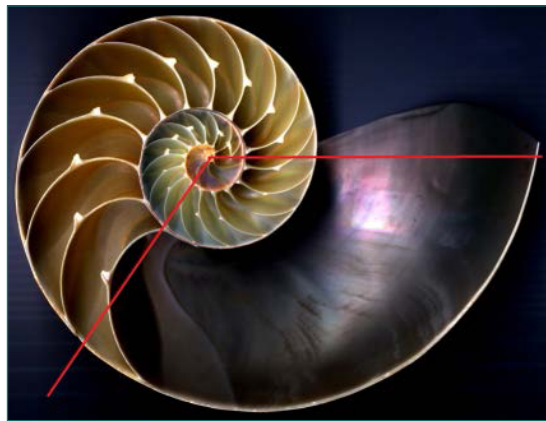
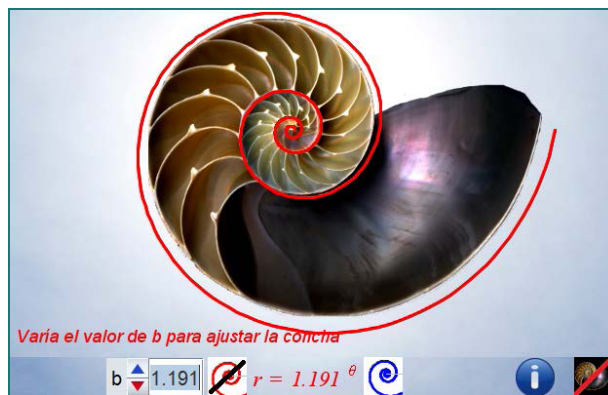


Fig. 12. Amplitud de la cámara habitacional.

8. Este enlace: <https://en.wikipedia.org/wiki/Siphuncle> aporta una descripción funcional del sifúnculo y de las cámaras.

9. Para conchas turbinadas o helico-espirales puede consultarse el libro de Thompson citado y las variaciones que introduce Raup en “The geometry of coiling in gastropods” (Raup, 1961)

Fig. 13. Espiral logarítmica con factor de crecimiento 3,00 y su comparación con la sección de la concha del *Nautilus pompilius*..



menos un octavo. En el primer verticilo se contabilizan ocho cámaras, dieciséis en el segundo y ocho en la siguiente mitad.

Según lo especificado en (9), para determinar si la espiral de la sección de la concha es logarítmica basta verificar que el crecimiento sea geométrico determinando la razón o factor de crecimiento. Para ello, la modelización tradicional se basa esencialmente en la medición, pero en nuestro caso, este análisis ha sido sustituido por la utilización de una escena desarrollada con la herramienta Descartes titulada “Sobre el crecimiento cordobés del *Nautilus pompilius*”¹⁰, en la que podemos dibujar diferentes espirales logarítmicas, superponiéndolas con la imagen, y entre ellas seleccionar aquella que mejor se ajusta¹¹. En la escena citada se puede seleccionar la base de la potencia que caracteriza a la espiral logarítmica $r = b^\theta$ y determinar qué valor es el que conduce a ese mejor ajuste. Puede observarse (ver Fig. 5 o interactuar con la escena) que esa mejor aproximación se alcanza cuando $b \approx 1,186$ y este valor se corresponde con la espiral logarítmica cordobesa (18), es decir, de base¹²:

$$\kappa = 1,18558... \quad (25)$$

Surge nuestra primera asociación entre el *Nautilus* y la proporción cordobesa, pero adelantemos que todo girará alrededor de ella —lo cual *a priori* es lo lógico, pues es de esperar un único patrón de crecimiento, y es lo que confirmaremos *a posteriori*—.

Así pues, en base a esta observación, el factor de crecimiento que asignamos al *Nautilus pompilius* es 2,914214... que es el factor correspondiente a la espiral logarítmica cordobesa determinado en (19). Este factor ya indicamos que difiere bastante del correspondiente a la espiral logarítmica áurea 6,854104... indicado en (15) (ver Fig. 4). Y también hemos de indicar que tampoco coincide con el factor de crecimiento de 3,00 que fue determinado por Moseley (Moseley, 1813) y referenciado en la página 770 de

10. Consultar la dirección: http://proyectodescartes.org/miscelanea/materiales_didacticos/Nautilus-JS/

11. Hemos de señalar que el procedimiento tradicional en base a mediciones puede decirse que es local (basado en algunas mediciones puntuales), mientras que el uso de la escena es global al ser un ajuste comparativo entre dos curvas, una la correspondiente a la sección de la concha y otra la aportada por la escena.

12. Dado que utilizaremos el valor 1,18558... reiteradamente asignamos el símbolo κ a éste.

(Thompson, 1945). Moseley¹³ indica en su artículo en las pp. 355-356 el procedimiento seguido y detalla la dificultad para determinar y establecer la curva sobre la que medir y consecuentemente los segmentos radiales que sirven de base en esa medida (ver Apéndice III), y sobre ello incide Thompson al señalar:

«Observe also that Moseley gets a very good approximate result by his measurements “upon a radius vector,” although he has to be content with a very rough determination of the pole.»¹⁴.

Un factor de crecimiento 3,00 se corresponde con la espiral logarítmica de base

$$b = 3^{\frac{1}{2\pi}} = 1,191067 \dots \quad (26)$$

y en la Fig. 13 puede observarse la diferencia existente entre ésta y la sección de la concha objeto de estudio.

Por tanto y en base a lo expuesto y observado nosotros marcamos, abogamos y defendemos el **carácter cordobés** del *Nautilus pompilius*.

2.3. Aproximación gnomónica de las cámaras (primera fase)

Ajustada la forma global de la sección de la concha fijémonos en el rastro dejado por el *Nautilus* en su crecimiento. Lo más ostensible son las diferentes cámaras que presenta, delimitadas por los denominados septos, y la conexión entre ellas correspondiente al paso del sifúnculo. Centrémonos y analicemos inicialmente dichas cámaras que, como hemos indicado, en el último verticilo se contabilizan en un número de dieciséis. Por tanto, dentro del crecimiento continuo de la concha y, consecuentemente, de la sección antes estudiada podríamos decir que los septos surgen como consecuencia de un crecimiento discreto de paso

$$\frac{2\pi}{16} = \frac{\pi}{8} \quad (27)$$

que casualmente o más bien por causalidad tiene una connotación en la proporción cordobesa dado que el gnomon de un triángulo cordobés es un triángulo escaleno de ángulos $\frac{\pi}{8}$, $\frac{2\pi}{8}$ y $\frac{5\pi}{8}$. Puede consultarse el artículo “La Geometría de los polígonos cordobeses” (Redondo Buitrago & Reyes Iglesias, 2009)¹⁵ y también observar las imágenes en la Fig. 14 y Fig. 15 que hemos tomado de ahí, retocando algunas etiquetas o denominaciones.

13. Puede consultarse desde <http://rstl.royalsocietypublishing.org/content/128/351.full.pdf+html> o bien localmente desde http://proyectodescartes.org/miscelanea/materiales_didacticos/Nautilus-JS/referencias/Phil.%20Trans.%20R.%20Soc.%20Lond.-1838-Moseley-rstl.1838.0018.pdf

14. «Obsérvese también que Moseley consigue un resultado aproximado muy bueno mediante sus mediciones “sobre un radio vector,” aunque tiene que contentarse con una determinación muy aproximada del polo.»

15. Accesible desde esta dirección: <http://www.mi.sanu.ac.rs/vismath/antonia2010/cord.pdf>

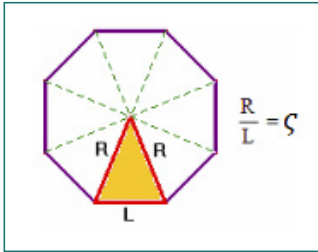


Fig. 14. Proporción cordobesa en el octógono y triángulo cordobés.

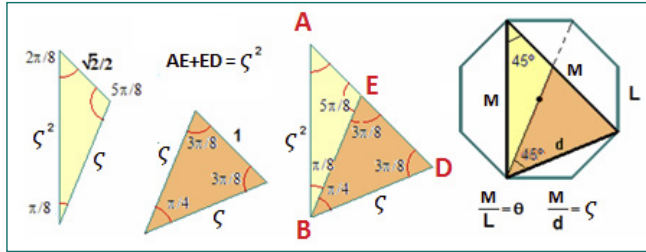


Fig. 15 Triángulo cordobés (naranja) y su gnomon (amarillo). El número cordobés ζ , el número de plata θ y su relación $\theta = \sqrt{2} \zeta^2$.

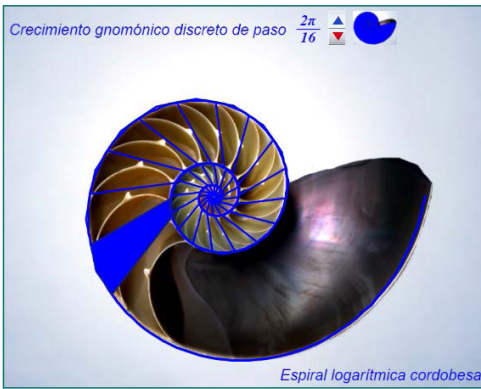


Fig. 16 Aproximación de las cámaras con hexágonos de paso $\frac{2\pi}{16}$. Comparativa.

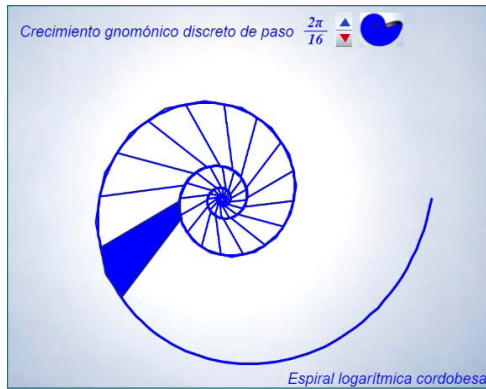


Fig. 17 Modelo de crecimiento gnomónico discreto de paso $\frac{2\pi}{16}$.

En la introducción (ver Fig. 8) indicamos cómo se puede aproximar de manera discreta la región de plano delimitada por cualquier espiral logarítmica mediante hexágonos, construidos en base a radios vectores y a las tangentes a la espiral, siguiendo un crecimiento gnomónico de paso $\frac{2\pi}{n}$ con $n \geq 3$. En la Fig. 16 se refleja la aproximación de las cámaras con gnómones de paso $\frac{2\pi}{16}$. Se tiene un primer modelo que muestra el crecimiento del *Nautilus*. Obviamente como modelo discreto es una primera aproximación que esboza un patrón o pauta. Además, se observa cómo al abordar una aproximación discreta de las cámaras, la espiral de la sección de la concha se aproxima mal dado que se está realizando una aproximación mediante una poligonal, mientras que el crecimiento de la concha es continuo. Hemos pues de tratar de mejorar el modelo (Fig. 17) y así mejorar la precisión de la aproximación.

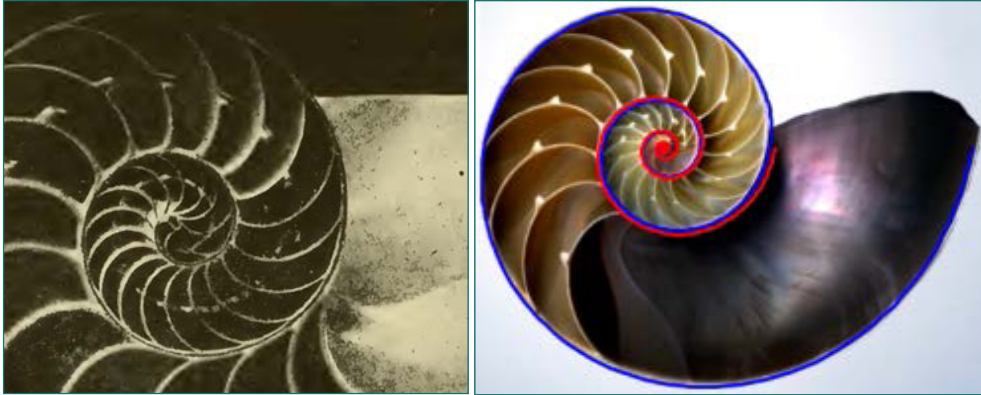


Fig. 18. Distinción de la capa interior y exterior en la sección de concha. A la izquierda fotografía (Thompson, 1945) p.843 y a la derecha modelación matemática.

2.4. Aproximación del sifúnculo

En los septos puede observarse los restos de los orificios que permiten el paso del sifúnculo por las cámaras. Estos, visualmente, siguen un patrón espiral y es de esperar que sea una espiral logarítmica $r = b^\theta$, pero si utilizamos el recurso interactivo para su aproximación, de manera análoga a como hemos hecho con la sección de la concha, podemos comprobar que no hay ninguna espiral que se ajuste bien al sifúnculo. Conceptualmente parece más lógico intuir que cualquier punto ubicado en el interior de la concha habrá surgido como consecuencia de un crecimiento análogo al de la concha, si bien afectado por un factor de escala, es decir, todo punto debería pertenecer a una espiral logarítmica cordobesa de ecuación $r = a \kappa^\theta$. Ello se puede observar en la escena sin más que cambiar el valor de a , y comprobar que todos los puntos del interior de la concha formarían parte de espirales cordobesas en las que $0,34 < a < 1$. En particular podemos comprobar que los puntos del sifúnculo están ubicados en una espiral de este tipo en la que aproximadamente toma valores en el intervalo: $0,65 \leq a \leq 0,7$. Y de esta observación surge la cuestión: ¿A qué valores teóricos se corresponden esos valores experimentales?

Aunque, en nuestro mundo matemático, hemos aproximado la sección de la concha como una única curva, realmente el crecimiento del *Nautilus* se produce siguiendo ese cono que hemos reflejado en la Fig. 10 —pero en este caso curvándose lo suficiente para que haya un solapamiento—, es decir, al crecer podemos ver cómo lo que era el exterior de la concha pasa a ser el interior y ello acontece superponiéndose una nueva capa sobre la anterior, una capa diferente¹⁶. En la Fig. 18 se observa esa separación en la fotografía de la izquierda y en la imagen de la derecha se ha reflejado esa distinción utilizando dos

¹⁶. La necesaria distinción de estas capas, para poder abordar la medición necesaria para deducir el factor de crecimiento, era manifestada por Moseley (Moseley, 1813), ver Apéndice II.

espirales logarítmicas cordobesas próximas y diferenciando con dos colores, azul y rojo, ambas capas. Matemáticamente podemos expresarlo como dos espirales de ecuaciones¹⁷:

$$r = \kappa^\theta \qquad \text{y} \qquad r = \kappa^{\theta - 2\pi} \qquad (28)$$

o bien

$$r = \kappa^\theta \qquad \text{y} \qquad r = \kappa^{-2\pi} \kappa^\theta = 0,3431\dots \kappa^\theta \qquad (29)$$

lo cual puede interpretarse como que la velocidad o razón de crecimiento entre la capainterior y la exterior es de 0,3431... a 1, o bien que la capa exterior crece $\frac{1}{0,3431\dots} = 2,914214\dots$ veces más rápido que la interior (en definitiva

el factor de crecimiento), o bien según lo indicado en (7) que la capa interior tiene un ángulo de retardo de 2π .

Consecuentemente la sección del *Nautilus* es una región del plano de ecuación:

$$r = a \kappa^\theta \qquad \begin{cases} \kappa^{-2\pi} \leq a \leq 1 \\ 0 < \theta \leq 2\pi n \end{cases} \qquad (30)$$

donde remarcamos que $\kappa = 1,1885580\dots$ es la base correspondiente a la espiral logarítmica cordobesa y n el números de ciclos o verticilos. Siendo precisos podemos señalar que la región anterior se corresponde con la teleoconcha, mientras que la protoconcha se ajustaría teóricamente con los valores

$$-\infty < \theta \leq 0 \qquad (31)$$

¿Cuál de las espirales anteriores (30) se corresponde con el sifúnculo? Si consideramos la espiral intermedia entre la interior y la exterior —lo cual sería consistente con el hecho de que el sifúnculo fuera el eje del cono citado— entonces tendría que ser que

$$a = \frac{\kappa^{-2\pi} + 1}{2} = \frac{0,3431\dots + 1}{2} = 0,6715\dots$$

que está en el rango aproximado de valores determinado en la escena. Consecuentemente según (8) el sifúnculo tiene un ángulo de retardo $\theta_0 = \log_\kappa 0,6715\dots = -2,3394\dots \simeq -\frac{3\pi}{4}$ frente a la concha exterior.

2.5. Aproximación gnomónica de las cámaras (segunda fase)

Ajustado el sifúnculo, éste divide el interior de la sección del *Nautilus* y cada una de las cámaras en dos regiones que pueden aproximarse gnomónicamente con el paso discreto indicado de $\frac{2\pi}{16}$, lo cual puede observarse en Fig. 19 y Fig. 20. La aproximación

¹⁷. Según (8) la espiral correspondiente a la capa interior tiene un ángulo de retardo de -2π , respecto a la exterior.



Fig. 19. Aproximación de las cámaras con hexágonos de paso $\frac{2\pi}{16}$ apoyándose en el sífinculo. Comparativa.



Fig. 20. Modelo de crecimiento gnomónico discreto de paso $\frac{2\pi}{16}$ apoyándose en el sífinculo.

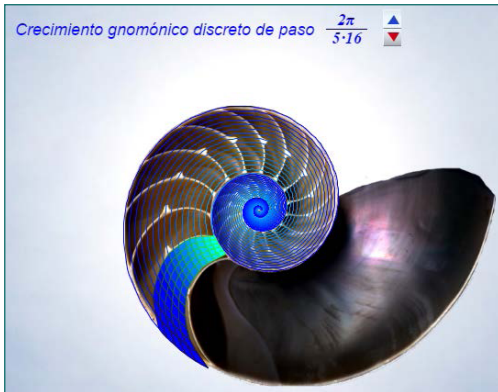


Fig. 21. Aproximación de las cámaras con hexágonos de paso $\frac{2\pi}{16}$ apoyándose en familias de espirales cordobesas. Comparativa.



Fig. 22. Modelo de crecimiento gnomónico discreto de paso $\frac{2\pi}{16}$ apoyándose en familias de espirales cordobesas.

mejora, si bien en la espiral exterior y el sífinculo, en los espacios entre cámaras, sigue denotándose esa aproximación angulosa de las tangentes como consecuencia de la aproximación discreta.

2.6. Aproximación gnomónica de las cámaras (tercera fase)

Los pasos para abordar una mejora en la aproximación se muestran obvios:

- Ampliar el número de espirales logarítmicas cordobesas intermedias (ver Fig. 21 y Fig. 22).



Fig. 23. Aproximación de las cámaras con hexágonos de paso $\frac{2\pi}{5 \cdot 16}$ apoyándose en 15 espirales cordobesas. Comparativa.



Fig. 24. Modelo de crecimiento gnomónico discreto de paso $\frac{2\pi}{5 \cdot 16}$ apoyándose en varias espirales cordobesas.

- Considerar un paso menor entre septos abordando una división de las cámaras y por tanto acercándose el modelo al crecimiento continuo (ver Fig. 23 y Fig. 24).

2.7. Hacia el modelo continuo

La proporción cordobesa se ha manifestado como patrón único en la morfología y crecimiento del *Nautilus pompilius*. Pero siguiendo la misma pauta, posiblemente no nos equivocaremos si formulamos la conjetura de que los septos deberían seguir también un patrón cordobés. Para iniciar su verificación podemos utilizar nuestro recurso interactivo y abordar una comparación de dichos septos, al igual que hicimos con la sección de la concha, con espirales logarítmicas y en particular con la espiral logarítmica cordobesa. Como fruto de esa comparativa, en la que se puede desplazar el polo y la base de la potencia que define a la espiral para ir cotejando, se observa que cuando la espiral es cordobesa (en concreto cuando aproximadamente¹⁸ $r = 0,5 \kappa^{\theta}$) los septos encajan, según puede verse representado en la espiral gris de la Fig. 25. En concreto se observa que todos los septos son arcos de esa espiral.

Es más, en el proceso de cotejar con la espiral logarítmica cordobesa (ver espiral amarilla en la Fig. 26) se puede observar cómo una vez encajado un septo, para encajar el siguiente es necesario trasladar el polo de esa espiral y que la curva que describe ese polo se asemeja a una espiral (la magenta en la Fig. 26) —analizando las coordenadas se comprueba que es también una espiral logarítmica cordobesa—. Adicionalmente al pasar de un septo a otro, el arco de la espiral con el que coteja es uno que se obtiene como consecuencia de un desplazamiento en esa espiral, es decir, si al pasar de un septo

¹⁸. Posteriormente determinaremos el valor teórico del factor de escala de esta espiral cordobesa. Ver (49).

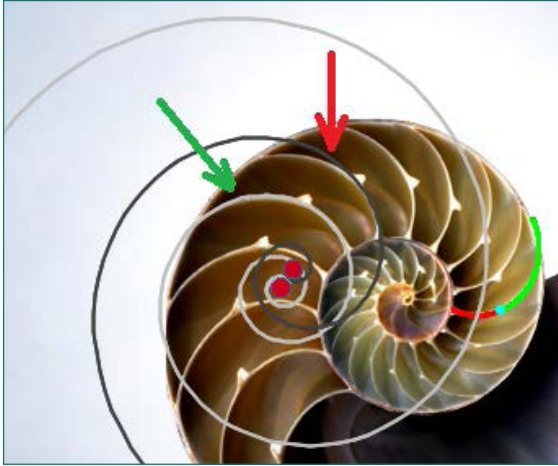


Fig. 25. Ajuste de los septos con arcos de espirales logarítmicas y en particular con la cordobesa (color gris).

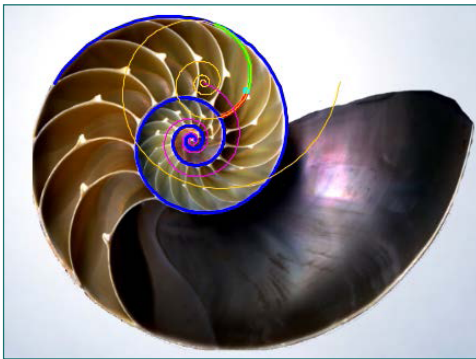


Fig. 26. Espiral que aproxima los septos (amarilla) y la que describe el polo (magenta).

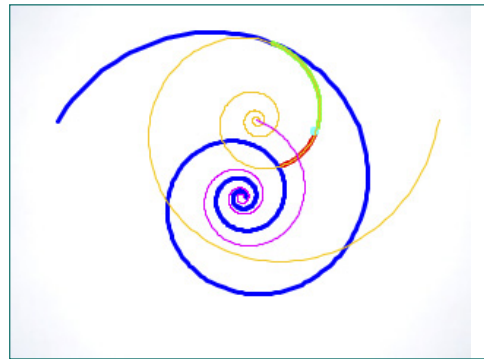


Fig. 27. Detalle de la espirales sobre las que se aproximan los septos.

otro equivale a incrementar el ángulo en la espiral azul de la Fig. 26 en $\frac{2\pi}{16}$, el arco del segundo septo es una traslación en la espiral amarilla del septo anterior en ese mismo ángulo según veremos más adelante. Ver el detalle de las espirales citadas en la Fig. 27 e interactuando en el recurso.

En la Fig. 28 puede observarse la modelización de los septos donde se ha distinguido cada uno de los arcos en los que queda dividido por el sifúnculo con colores diferentes (rojo y verde). En la Fig. 29 podemos ver una comparativa entre el modelo matemático y la sección de la concha, en él puede observarse y señalarse que en los últimos septos hay cierta discrepancia, situación que concuerda con referencias biológicas en las que indican diferentes estadios de crecimiento y marcan un estadio adulto caracterizado por cambios morfológicos que afectan a los últimos septos¹⁹. En nuestro caso (Fig. 29) se

¹⁹. En (Villaseñor, 2007) pueden consultarse los estadios de crecimiento de los Ammonoideos y en particular el estadio adulto.

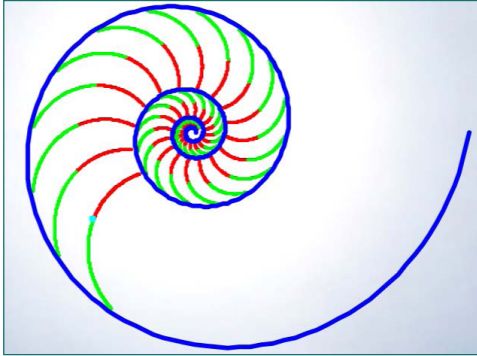


Fig. 28. Aproximación de los septos. Modelo matemático.

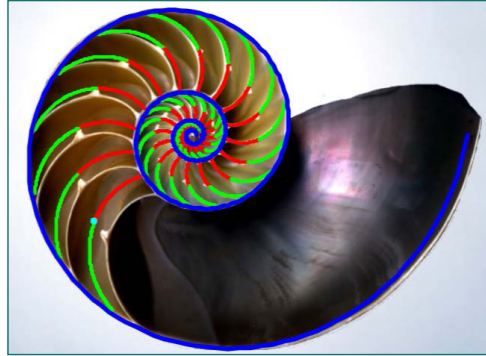


Fig. 29. Comparación del modelo matemático con la sección de la concha.

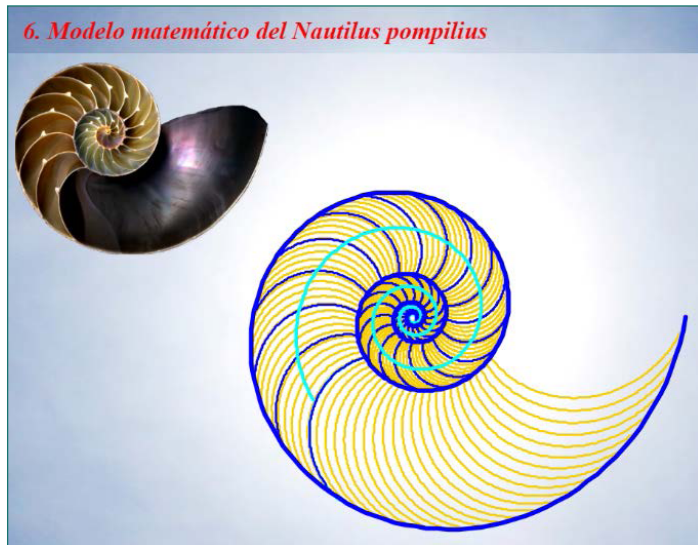


Fig. 30. Modelo matemático del *Nautilus pompilius*.

muestra un aumento en el espacio real entre septos frente al teórico esperado. No olvidemos, lo ya indicado, que un modelo matemático no es más que una proyección idealizada y de pautas fijas. No obstante aquí es fácil, si se desea, introducir en el modelo matemático la simulación de ese cambio en el crecimiento adulto, pues basta hacer una traslación²⁰ del polo y septo en un ángulo aproximadamente de $\frac{\pi}{16}$. Es más puede considerarse un modelo matemático mixto contemplando un tipo de crecimiento hasta la fase juvenil e incluir esa traslación en el comportamiento adulto, pero en lo que sigue optamos por un modelo matemático puro, sin incluir los cambios señalados en dicho estadio.

²⁰. En las Fig. 21 y Fig. 23 hemos reflejado esa traslación y ahí puede observarse cómo las cámaras del estadio adulto se ajustan muy bien y las del estadio juvenil son las que ahí presentan ese desfase.

La pauta observada hasta ahora se prolonga y todo encaja en un patrón único cimentado en la proporción cordobesa. Y esto nos permite establecer un modelo matemático global que reproduce globalmente la morfología y el crecimiento continuo del *Nautilus pompilius* (Fig. 30). Modelo que puede observarse en una animación del recurso interactivo y que procederemos a describir y a analizar.

2.8. El modelo matemático

El modelo matemático tiene como patrón básico el crecimiento cordobés del *Nautilus pompilius*. Por tanto, todo punto del interior y concha (Fig. 30) pertenece a la región plana de ecuación (30), en definitiva a una espiral de ecuación $r = a \kappa^\theta$ que denominaremos “longitudinal” y a su vez pertenece a un arco de una espiral logarítmica cordobesa²¹ “transversal” (como parte de un septo o de un arco semejante) de ecuación paramétrica:

$$\begin{cases} x = P_x + d \kappa^\theta \cos(\theta) \\ y = P_y + d \kappa^\theta \sin(\theta) \end{cases} \quad \theta \in [\alpha, \beta] \quad (32)$$

donde $d \simeq 0,5$ en base a lo observado en el recurso interactivo y lo reflejado en la Fig. 25, y tendremos que determinar para cada septo tanto el valor del polo (P_x, P_y) como el de α y β .

Así pues, según lo analizado previamente, en el instante de crecimiento dado por un ángulo λ :

- Los puntos de la concha exterior son los que verifican

$$r = \kappa^\theta \quad 0 < \theta \leq \lambda \quad (33)$$

- Los puntos de la concha interior pertenecen a

$$r = \kappa^{\theta-2\pi} \quad 0 < \theta \leq \lambda \quad (34)$$

- Los puntos del sífinculo

$$r = \kappa^{\theta-\frac{3\pi}{4}} \quad 0 < \theta \leq \lambda \quad (35)$$

Y las cámaras siguen un crecimiento gnomónico.

2.8.1. Análisis de las cámaras

Los puntos A, A', A'' reflejados en la Fig. 31 expresados según sus coordenadas en polares de acuerdo con (27) y (33) serían:

$$A(\kappa^{\theta_1}, \theta_1), A'(\kappa^{\theta_1+\frac{2\pi}{16}}, \theta_1 + \frac{2\pi}{16}), A''(\kappa^{\theta_1+2\frac{2\pi}{16}}, \theta_1 + 2\frac{2\pi}{16}) \quad (36)$$

y análogamente B, B', B'' por (34) son:

²¹. Todos esos arcos no son más que traslaciones de arcos de la espiral logarítmica cordobesa de ecuación $r = d \kappa^\theta$.

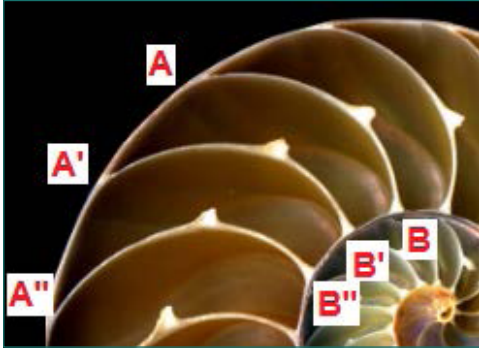


Fig. 31. Detalle de las cámaras.

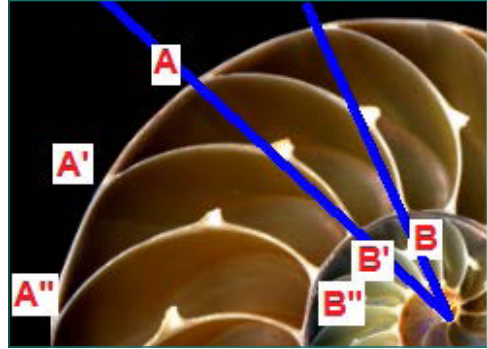


Fig. 32. Desfase angular entre el punto inicial y el final de un septo.

$$B(\kappa^{\theta_2-2\pi}, \theta_2), B'(\kappa^{\theta_2-2\pi+\frac{2\pi}{16}}, \theta_2 + \frac{2\pi}{16}), B''(\kappa^{\theta_2-2\pi+2\frac{2\pi}{16}}, \theta_2 + 2\frac{2\pi}{16}) \quad (37)$$

donde θ_1 y θ_2 y puede observarse en la Fig. 32 que son diferentes, hay un desfase angular entre el punto inicial de un septo y el punto final del mismo.

Por el crecimiento gnomónico la cámara $A'A''B''B'$ es semejante a la $AA''B'B$, consecuentemente:

$$\frac{d(A', A'')}{d(A', A)} = \frac{d(A'', B'')}{d(A'', B')} = \frac{d(B'', B')}{d(B', B)} = \frac{d(A', B')}{d(A, B)} \quad (38)$$

donde $d(\cdot, \cdot)$ representa la longitud del arco de espiral correspondiente.

Aplicando (24)

$$d(A', A'') = l_{A'A''} = \frac{\sqrt{1+ln^2\kappa}}{\ln} (\kappa^{\theta_1+2\frac{2\pi}{16}} - \kappa^{\theta_1+\frac{2\pi}{16}}) \quad (39)$$

$$d(A, A') = l_{AA'} = \frac{\sqrt{1+ln^2\kappa}}{\ln \kappa} (\kappa^{\theta_1+\frac{2\pi}{16}} - \kappa^{\theta_1}) \quad (40)$$

Y por tanto

$$\frac{d(A', A'')}{d(A, A')} = \kappa^{\frac{2\pi}{16}} \quad (41)$$

Análogamente de (37) y (24)

$$\frac{d(B', B'')}{d(B, B')} = \kappa^{\frac{2\pi}{16}} \quad (42)$$

Por lo que por (38)

$$\frac{d(A'', B'')}{d(A'', B')} = \frac{d(A', B')}{d(A, B)} = \kappa^{\frac{2\pi}{16}} \quad (43)$$

Dado que B y A son puntos de un septo, según (32), el arco \widehat{BA} puede representarse mediante la ecuación

$$\begin{cases} x = C_x + d \kappa^\theta \cos(\theta) \\ y = C_y + d \kappa^\theta \sin(\theta) \end{cases} \quad \theta \in [\theta_3, \theta_3 + \Delta\theta_3] \quad (44)$$

donde $\Delta\theta_3$ representa un incremento del ángulo θ_3 y (C_x, C_y) es el polo de la espiral a la que pertenece ese arco. En la figura Fig. 33 es el arco de color verde que pertenece a la espiral pintada con igual color, pero con menor grosor.

Análogamente para B' y A' tendríamos

$$\begin{cases} x = C'_x + d \kappa^\theta \cos(\theta) \\ y = C'_y + d \kappa^\theta \sin(\theta) \end{cases} \quad \theta \in [\theta_4, \theta_4 + \Delta\theta_4] \quad (45)$$

que en la figura Fig. 33 sería el arco de color rojo correspondiente a la espiral de igual color.

Por lo que por (24):

$$\frac{d(A',B')}{d(A,B)} = \frac{\kappa^{\theta_4} \kappa^{\Delta\theta_4 - 1}}{\kappa^{\theta_3} \kappa^{\Delta\theta_3 - 1}} \quad (46)$$

Y por (43) ha de ser

$$\frac{\kappa^{\theta_4} \kappa^{\Delta\theta_4 - 1}}{\kappa^{\theta_3} \kappa^{\Delta\theta_3 - 1}} = \kappa^{\frac{2\pi}{16}} \quad (47)$$

y por tanto $\theta_4 - \theta_3 = \frac{2\pi}{16}$ y $\Delta\theta_3 = \Delta\theta_4$.

Es decir, dos septos consecutivos se corresponden con dos arcos de igual amplitud Δ de la espiral de ecuación (32), pero que se diferencian en un ángulo de $\frac{2\pi}{16}$. Así pues, si en (44) $\theta \in [\alpha, \beta]$, entonces en (45) $\theta \in [\alpha + \frac{2\pi}{16}, \beta + \frac{2\pi}{16}]$.

2.8.2. Los septos

Utilizando el recurso interactivo, se observa que los polos C (C_x, C_y) y C' (C'_x, C'_y) y todos los análogos correspondientes al resto de septos son puntos pertenecientes a una espiral cordobesa, la dibujada de color magenta en la Fig. 33, y que aproximadamente es la de ecuación:

$$r = 0,5 \kappa^\theta \quad (48)$$

Ésta, quizás, realmente podría corresponderse con la espiral intermedia entre la de la concha interior (34) y la del sifúnculo (35), es decir, $r = e \kappa^\theta$ con

$$e = \frac{\kappa^{-2\pi+1} + \kappa^{-2\pi}}{2} = \frac{3\kappa^{-2\pi+1}}{4} = 0,507359 \dots \quad (49)$$

que es el valor teórico que le asignaremos en nuestro modelo.

$$0,507359 \dots = \kappa^{-1,268782 \dots \pi} \simeq \kappa^{-\frac{10}{8}\pi} \quad (50)$$

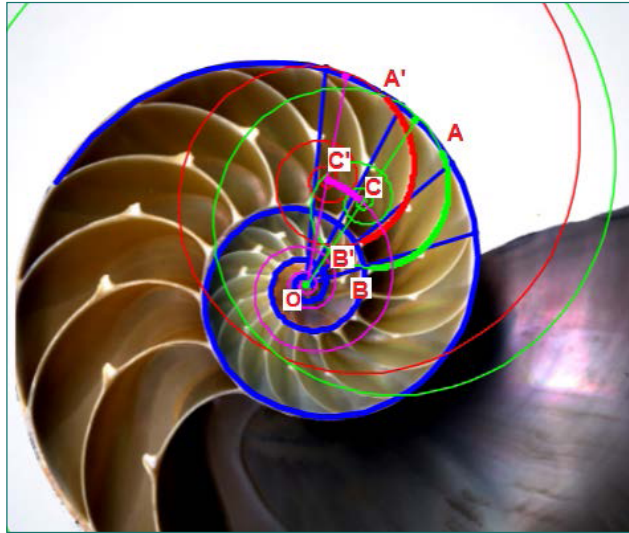


Fig. 33 Ubicación del polo en la espiral de cada septo y arco de cada uno de ellos.

Y de acuerdo a lo denotado en (36) y (37) las coordenadas polares de esos dos polos serían

$$C(e \kappa^{\theta_5}, \theta_5) \quad (51)$$

$$C'(e \kappa^{\theta_5 + \frac{2}{16}}, \theta_5 + \frac{2\pi}{16}) \quad (52)$$

Es decir, hay un desplazamiento de $\frac{2\pi}{16}$ que se corresponde lógicamente con el crecimiento angular gnomónico entre septos. Para justificar esto último basta aplicar lo realizado anteriormente con las cámaras, por ejemplo, a los triángulos OAC y $OA'C'$.²²

Con la escena interactiva hemos determinado que si denotamos por n la posición del n -ésimo septo contabilizado en el sentido de crecimiento del *Nautilus*, entonces los ángulos antes citados se corresponden con los siguientes valores

$$\theta_1 = n \frac{2\pi}{16} \quad (53)$$

$$\theta_2 = (n - 1) \frac{2\pi}{16} - \frac{\pi}{32} \quad (54)$$

$$\theta_3 = (n - 6) \frac{2\pi}{16} + \frac{3\pi}{64} \quad (55)$$

$$\Delta\theta_3 = \frac{5\pi}{8} \quad (56)$$

$$\theta_5 = (n + 1) \frac{2\pi}{16} - \frac{\pi}{16} \quad (57)$$

²². Todo esto puede considerarse que son excesivas coincidencias, pero muy al contrario no es más que consecuencia de las propiedades de esta espiral maravillosa, resumidas por Bernoulli en su “Eadem mutato resurgo”. Ver en el Apéndice II la propiedad básica que conduce a lo aquí obtenido e indicado.

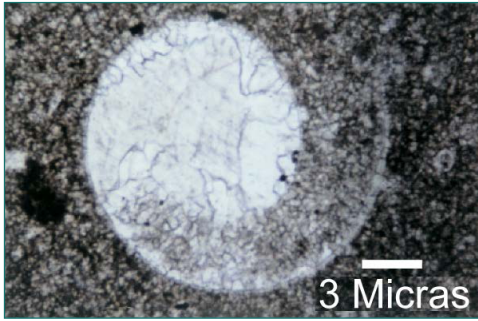


Fig. 34. Protoconcha e inicio del fragmocono en un ammonites (Villaseñor, 2007).

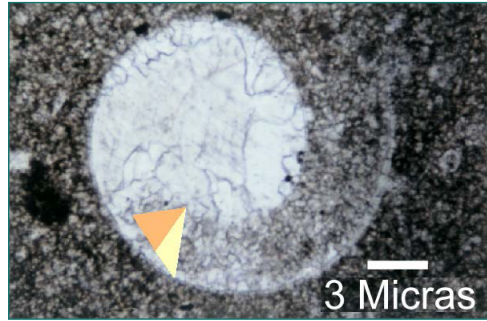


Fig. 35 Base inicial teórica del fragmocono (triángulo naranja) y gnomon del mismo (triángulo amarillo).

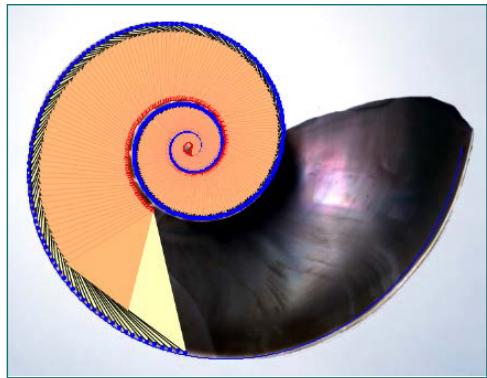
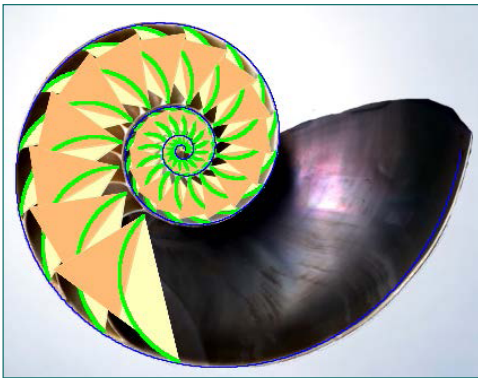


Fig. 36. Simulación del crecimiento discreto del *Nautilus* a partir del triángulo cordobés como base teórica del fragmocono. A la izquierda paso $\frac{2\pi}{16}$ y a la derecha con paso $\frac{2\pi}{160}$.

2.8.3. Base teórica del fragmocono

El fragmocono se configura como adicción a la protoconcha. En la Fig. 34 se puede observar una fotografía de la protoconcha y el inicio del fragmocono en un ammonites y en la Fig. 35 hemos superpuesto lo que podría considerarse como la base inicial teórica del fragmocono (triángulo naranja) y de su gnomon (triángulo amarillo) en el que se ubica el primer septo.

La amplitud angular de los septos (56) es significativa porque nos aporta información acerca de cuál sería esa base inicial teórica del fragmocono, pues en relación a ella se establece el modelo de crecimiento de la concha y de los septos (ver Fig. 36). En el *Nautilus* dicha base se corresponde con un triángulo semejante al triángulo cordobés dibujado en la Fig. 37, el cual se obtiene a partir del triángulo cordobés y de su gnomon . En esa imagen se observa que el ángulo

$$\widehat{ABE} = \frac{\pi}{8} = \frac{2\pi}{16} \quad (58)$$

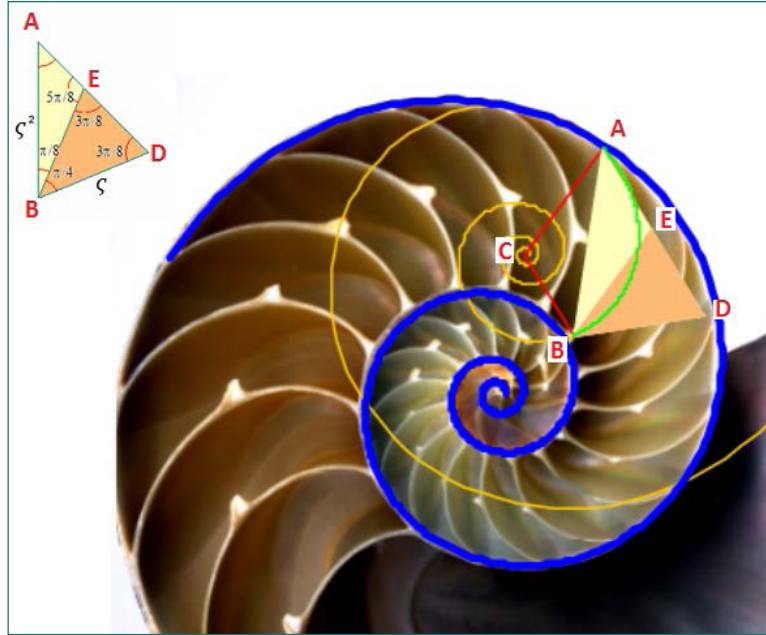


Fig. 37. Base teórica de crecimiento del fragmocono.

es el ángulo de crecimiento gnomónico discreto interseptos el cual fue determinado desde el principio del análisis. Y el ángulo

$$\widehat{BEA} = \frac{5\pi}{8} \quad (59)$$

que coincide con el \widehat{ACB} , es la amplitud del arco de espiral cordobesa que determina cada septo. El triángulo cordobés y su gnomon se configuran como la base del crecimiento del *Nautilus pompilius*, es el germen a partir del cual el *Nautilus* muestra la razón primigenia de su forma y de su crecimiento.

3. CONCLUSIONES

A través del detallado y progresivo análisis realizado en este artículo hemos ido construyendo la base teórica o modelo matemático que soporta a la bella morfología del *Nautilus Pompilius* y hemos tratado del encontrar el modelo de crecimiento que conduce a poder explicar y a comprender por qué adquiere esa forma. Desde su inicio la espiral logarítmica cordobesa tomó presencia y a medida que la mirada se deslizaba hacia algún nuevo detalle esta espiral ha vuelto a imponer su presencia marcándonos y alumbrándonos el camino del descubrimiento y de la adquisición del conocimiento. La belleza del *Nautilus pompilius* se sustenta en la proporción cordobesa o humana y todo punto de su concha o del interior ha quedado determinado por la intersección de dos espirales cordobesas. El germen o base inicial matemática que explica el por qué acontece todo lo observado se ha

ubicado en el crecimiento gnomónico de un triángulo cordobés, las propiedades de éste se trasladan al desarrollo y comportamiento global detectado y modelado.

BIBLIOGRAFÍA

- Galo Sánchez, J. (2004). *Las matemáticas en la belleza y la belleza de las matemáticas*. Recuperado el 11 de 10 de 2016, de Red Educativa Digital Descartes: http://proyectodescartes.org/uudd/materiales_didacticos/belleza-JS/index.htm
- Galo Sánchez, J., Cabezudo Bueno, Á., y Fernández Trujillo, I. (2016). *El grillo y la espiral logarítmica*. Recuperado el 11 de 10 de 2016, de Red Educativa Digital Descartes: <http://proyectodescartes.org/descartescms/blog/difusion/item/1978-el-grillo-y-la-espiral-logaritmica>
- Ghyca, M. (1983). *Estética de las proporciones en la naturaleza y en las artes*. Barcelona: Poseidon.
- Hoz Arderius, R. d. (1973). La proporción cordobesa. *Actas de la quinta asamblea de instituciones de Cultura de las Diputaciones Provinciales*. Córdoba: Diputación Provincial de Córdoba.
- Hoz Arderius, R. d. (1996). La proporción cordobesa. *Actas de las VII Jornadas Andaluzas de Educación matemática "Thales"* (págs. 67-84). Córdoba: Servicio de Publicaciones de la Universidad de Córdoba.
- Moseley, H. (1813). On the geometrical forms of turbinated and discoid shells. *Phil. Trans. R. Soc. Lond.*, 128, 351-370.
- Peterson, I. (2005). *Sea shell spirals*. Recuperado el 11 de 10 de 2016, de ScienceNews: <https://www.sciencenews.org/article/sea-shell-spirals>
- Raup, D. M. (1961). The geometry of coiling in gastropods. *Proc Natl Acad Sci U S A.* 1961 April; 47(4):, 602-609.
- Raup, D. M. (1962). Computer as Aid in Describing Form in Gastropod Shells. *Science*, vol. 138, no. 3537, 150-152.
- Redondo Buitrago, A., y Reyes Iglesias, E. (2009). *La Geometría de los Polígonos Cordobeses*. Recuperado el 11 de 10 de 2016, de Visual Mathematics: <http://www.mi.sanu.ac.rs/vismath/antonia2010/cord.pdf>
- Thompson, D. (1945). *On Growth and Form*. New York: Macmillan Co.
- Villaseñor, A. B. (2007). *Los ammonoideos*. Recuperado el 07 de 08 de 2016, de Instituto de Geología, UNAM: <http://www.geologia.unam.mx/igl/deptos/paleo/villasenor/ammonoideos/>

HIPERENLACES

En el texto se han incluido hiperenlaces accesibles siempre que se esté usando como documento digital. Para quienes estén leyendo este contenido en un documento estático detallamos la dirección web correspondiente

- iii. *Las Matemáticas en la belleza y la belleza de las Matemáticas*: http://proyectodescartes.org/descartescms/matematicas/item/1756-las-matematicas-en-la-bellezaNautilus_pompilius: https://es.wikipedia.org/wiki/Nautilus_pompilius
- iv. *Nautilus*: <https://en.wikipedia.org/wiki/Nautilus>

- v. *Imagexia*: <http://www.imagexia.com/concha-de-nautilus/>
- vi. *nautilidos (Nautilida)*: <https://es.wikipedia.org/wiki/Nautilida>
- vii. *On Growth and Form*: <https://archive.org/details/ongrowthform00thom>
- viii. *yocto-yotta*: <https://es.wikipedia.org/wiki/Yocto>
- ix. *también ha acontecido*: <https://www.sciencenews.org/article/sea-shell-spirals>
- x. *el orden de magnitud*: [https://es.wikipedia.org/wiki/%C3%93rdenes_de_magnitud_\(longitud\)](https://es.wikipedia.org/wiki/%C3%93rdenes_de_magnitud_(longitud))
- xi. *Sistema Internacional*: https://es.wikipedia.org/wiki/Prefijos_del_Sistema_Internacional
- xii. *El grillo y la espiral logarítmica*: <http://proyectodescartes.org/descartescms/blog/difusion/item/1978-el-grillo-y-la-espiral-logaritmica>
- xiii. *Rafael de la Hoz Arderius*: https://es.wikipedia.org/wiki/Rafael_de_La-Hoz_Arderius
- xiv. *su artículo*: http://proyectodescartes.org/miscelanea/materiales_didacticos/Nautilus-JS/referencias/PROPORCIONCORDOBESA.pdf
- xv. *este documento*: http://proyectodescartes.org/miscelanea/materiales_didacticos/Nautilus-JS/referencias/VILJAEMproporcioncordobesa.pdf
- xvi. *Jakob Bernoulli*: https://es.wikipedia.org/wiki/Jakob_Bernoulli
- xvii. *hélice cónica*: [https://es.wikipedia.org/wiki/H%C3%A9lice_\(geometr%C3%ADa\)](https://es.wikipedia.org/wiki/H%C3%A9lice_(geometr%C3%ADa))
- xviii. *Teleoconcha*: https://books.google.es/books?id=dG9JgajDIJsC&pg=PA275&lpg=PA275&dq=teleoconcha&source=bl&ots=Bauiryn1Ql&sig=cdbIDlk8pS09bU5R8CNKw_AuN-g&hl=es&sa=X&ved=0ahUKEwj1mLCboJPOAhWBThoKHVbsBTAQ6AEIITAB#v=onepage&q=teleoconcha&f=false
- xix. *Sifúnculo*: <https://en.wikipedia.org/wiki/Siphuncle>
- xx. *Ammonoideos*: <http://www.geologia.unam.mx/igl/deptos/paleo/villasenor/ammonoideos/>
- xxi. *recuento de los verticilos* https://en.wikipedia.org/wiki/Whorl_%28mollusc%29
- xxii. *The geometry of coiling in gastropods*: <http://www.pnas.org/content/47/4/602>
- xxiii. *Descartes*: <http://reddescartes.org/>

APÉNDICE I

Un reconocimiento visual de la sección de la concha del *Nautilus pompilius* nos permite ubicar los elementos que la componen y caracterizan.

1. El perfil sigue la pauta de una espiral, es decir, una línea curva que es descrita por un punto que se va alejando progresivamente de otro punto fijo (el polo) a medida que va girando alrededor de él.
2. En el interior de la concha se observan tres zonas diferenciadas:
 - a) El núcleo inicial correspondiente al estado embrionario o protoconcha (Fig. 38).
 - b) Una segunda zona que está dividida en cámaras por los septos (tabiques de separación), los cuales en su parte central presentan restos del sifúnculo.
 - c) La cámara habitacional del animal que se sitúa en la parte final (Fig. 39).



Fig. 38. Protoconcha.



Fig. 39. Cámara habitacional.

3. Las cámaras interseptos, ver Fig. 11, comprenden dos vueltas (verticilos) y media y podemos contabilizar:
 - a) Ocho cámaras en el primer verticilo.
 - b) En el segundo dieciséis.
 - c) Otras ocho cámaras en la media vuelta final.
4. La cámara habitacional que abarca aproximadamente un ángulo de $\frac{3\pi}{4}$.

En la literatura biológica están documentadas diferentes fases de crecimiento postembrionario distinguiendo un estadio neánico, uno juvenil y otro adulto lo cual puede asociarse en este caso respectivamente a las primeras ocho cámaras —que tienen una amplitud angular de paso $\frac{\pi}{4}$ —, a las dieciséis siguientes —con paso $\frac{\pi}{8}$ — y a las ocho últimas —en las que el paso es algo superior a $\frac{\pi}{8}$ —. El análisis matemático realizado en este artículo permite reproducir sin dificultad este comportamiento diferenciado, sin embargo nuestro objetivo principal es la obtención del modelo matemático a partir de lo observado en la yocto-yotta realidad, pero sin necesidad de proyectarlo de nuevo en ésta. Así pues, el paso entre septos lo consideraremos constante e igual a $\frac{\pi}{8}$, que como se detalla en este documento tiene un fundamento teórico en todo el modelo.

APÉNDICE II

Procedimiento seguido por Mosley para determinar el factor de crecimiento del *Nautilus pompilius*.

“These conclusions were directly verified by the following observations. A shell of the *Nautilus pompilius* was cut through the middle in a direction perpendicular to its axis, and a tracing was taken of the section of its spiral surface; this tracing is copied in Fig. 40.

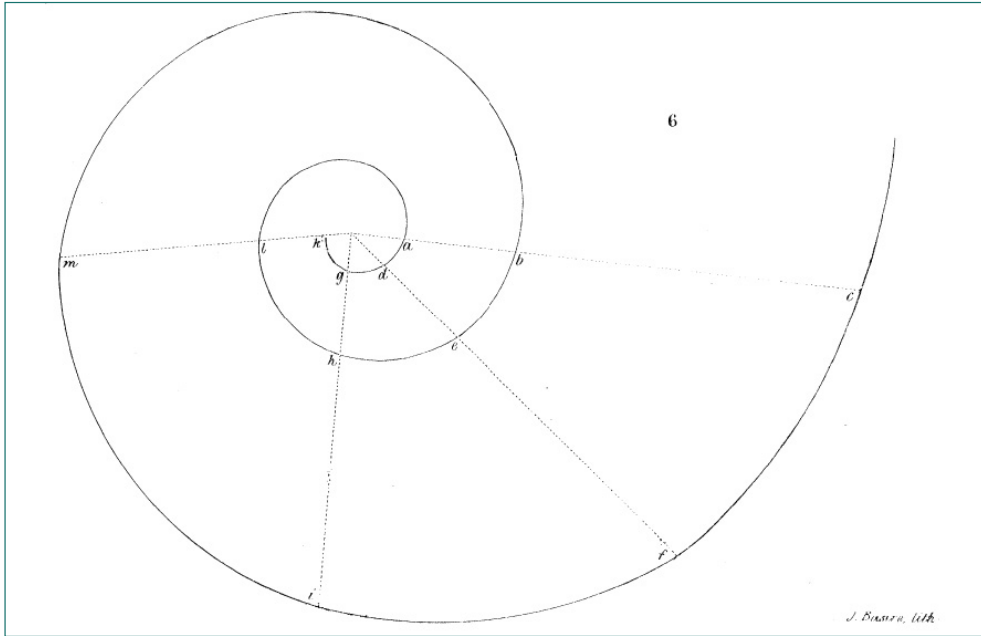


Fig. 40. Determinación empírica del factor de crecimiento.

It was made from the dark line which shows, on the section of the internal whorls of the shell, the line of that pearly surface which the animal deposits as a covering to its completed portion, as it advances in the construction of it. It is important to make this observation, because as it extends one whorl of its shell over another, the animal deposits continually upon the pearly surface of this last a new coating of shell, and thickens it; and it is in the centre of this thickened section that is to be found that section of the pearly surface, of which the edge of the external whorl is a continuation, and from which this tracing was taken.

It will be found that the distance of any two of its whorls measured upon the same radius vector. Thus

ab is one-third of bc ,
 de is one-third of ef ,
 gh is one-third of hi ,
 lk is one-third of lm .

The curve is therefore a *logarithmic spiral*.”

APÉNDICE III

En la página 777 de (Thompson, 1945) se enuncia una propiedad de las espirales logarítmicas de gran interés:

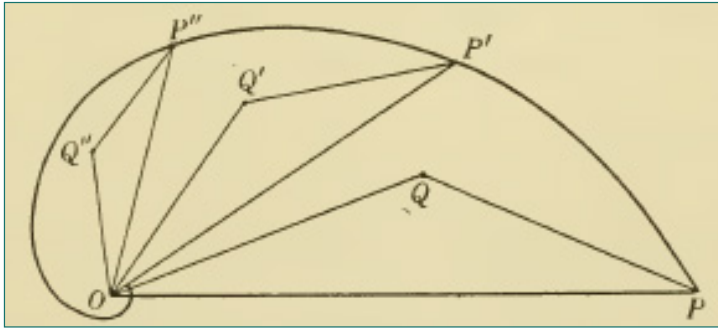


Fig. 41. Semejanza en la espiral logarítmica.

Si sobre cualquier radio polar de una espiral logarítmica se dibuja un triángulo OPQ , el lugar geométrico de los puntos Q correspondientes a triángulos semejantes a él contruidos sobre radios polares es una espiral semejante a la inicial. En la Fig. 41, Q, Q', Q'' están en una espiral semejante a la dibujada.

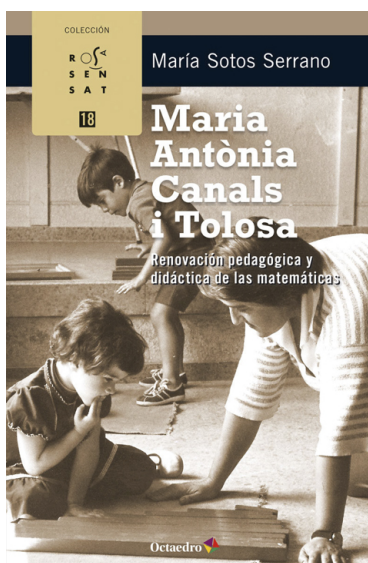
La demostración es sencilla ya que al ser los triángulos semejantes entonces:

$$\frac{OQ}{OP} = \frac{OQ'}{OP'} = \frac{OQ''}{OP''} = \kappa \quad (60)$$

De donde $OQ = \kappa OP$, y dado que OP es el radio vector de una espiral logarítmica $r = a b^\theta$, entonces $OP = a b^\theta$ y por tanto $OQ = \kappa a b^\theta$, es decir los puntos Q pertenecen a una espiral logarítmica de ecuación $r = \kappa a b^\theta$ semejante a la anterior y con igual razón de semejanza que la existente entre los triángulos.

Esta propiedad se puede generalizar a cualquier otra figura o curva construida sobre un radio vector y así se muestra evidente cómo se reproducen las mismas formas al crecer la espiral.

Maria Antònia Canals i Tolosa. Renovación pedagógica y didáctica de las matemáticas.



Autora: María Sotos Serrano

Fecha: septiembre de 2016

Lugar: Barcelona

Editorial: Ediciones Octaedro Colección: Rosa Sensat núm. 16

ISBN: 978-84-9921-829-8

Depósito legal: B. 14.954-2016

Número de páginas: 144

Edición: 1ª edición.

Web: <http://www.octaedro.com/es/producto:Cos/1/ensenar/rosa-sensat/maria-antonia-canals-i-tolosa/536>

Si tuviéramos que recomendar una obra a cualquier estudiante de Bachillerato que esté barruntando el matricularse en una Facultad de Educación, sin duda, este libro podría indicarle si dicha inclinación es un bluf pasajero o una verdadera vocación.

El estudio, realizado por la Dra. María Sotos Serrano, comienza poniendo al lector en antecedentes sobre la situación en que se encontraba la educación en el período previo al que Maria Antònia se incorporaría a la docencia. Recoge la época en que la Escuela Nueva se desarrolló en el primer tercio del siglo XX, el retroceso que sobrevino con la Guerra Civil Española y la posterior situación política de posguerra. Sin embargo, es paradójico observar cómo, durante una etapa completamente adversa, los

principios de la Escuela Nueva vuelven a hacer acto de presencia durante la dictadura franquista, gracias a la labor desarrollada por un grupo de docentes entre los que se encontraba M. Antònia.

María Sotos hace un ejercicio titánico de investigación al navegar en las raíces personales de Maria Antònia Canals, pues sin la visión familiar e íntima no es posible comprender cuáles fueron las razones que llevaron a tomar decisiones, tan poco habituales, como rechazar una prometedora carrera en la Facultad de Ciencias Exactas o la de cambiar un colegio, sin problemas de financiación económica y alumnado bien situado socialmente, por otro encuadrado en la marginalidad. La autora se sumerge por completo en la historia e intrahistoria del personaje, no solo a través de toda la literatura y multitud de materiales que M. A. Canals nos ha legado, también realiza un buen número de reveladoras entrevistas personales, tanto a ella como a una amplia colección de personajes relevantes en su entorno profesional.

La investigación se construye sobre un complejo entramado: la entrevistadora debe adentrarse en los recuerdos de la entrevistada, pero al mismo tiempo tiene la obligación de no dejarse llevar por la proximidad y realizar una tarea seria, reflexiva y crítica.

Nos imaginamos a la autora descubriendo caminos e hipótesis sobre las claves del pensamiento de M. A. Canals a través de los distintos actores y circunstancias que la rodearon, enumerando aquello que se considera esencial en su pensamiento: los juegos matemáticos que compartió con su padre, fallecido cuando ella contaba tan solo con 8 años, las clases particulares durante la Guerra Civil en Lloret de Mar de su tía Dolors (quien había sido becada para viajar a Italia y conocer el método Montessori de primera mano), la confirmación de su inclinación matemática, el respaldo materno a su decisión de matricularse en Ciencias Exactas, el profesor Botella y la significativa entrevista en la pizarra, su brillante paso por la facultad, la renuncia a una carrera profesional de investigación matemática por un puesto de parvulista, los contactos con Marta Mata y sus primeras informaciones sobre la historia de la renovación pedagógica catalana, los años de docente en la escuela Talitha, que propició el intercambio de ideas constante con figuras como M^a Teresa Codina, el descubrimiento de la filosofía del padre Foucauld que le lleva a una espiritualidad intensa en el compromiso evangélico y el servicio a los más necesitados, las críticas, sugerencias y definitivo espaldarazo a Ton i Guida, escuela fundada por Canals en el popular barrio barcelonés de Verdum, de Alexandre Galí (contrario en algunos aspectos a Montessori y personaje clave en el renacimiento de la Escuela Nueva), la amargura producida al ver cómo su proyecto de escuela se difumina casi por completo, el paso como asesora en el Ayuntamiento de Barcelona y los primeros encontronazos políticos...

También es un requisito principal el reconocimiento y dominio de las bases teóricas asociadas a las distintas escuelas pedagógicas que influyeron en M. A. Canals: el método Montessori, crucial en el desarrollo de su labor educativa, la obra de Jean Piaget, de Zoltan P. Dienes... Todo ello unido a la consciencia de la dimensión más íntima y personal, así como de la amplia e intensa interacción social en la que se enmarca el itinerario pedagógico de M. A. Canals.

Sin todo lo anterior esta obra no hubiera podido llevarse a buen término. El resultado es completo y exhaustivo, a la vez que sintético en lo fundamental. Una monografía sobre uno de los personajes más destacados de la educación en nuestro país, donde se establecen cuáles han sido los hitos fundamentales en la historia personal de M. A. Canals,

cómo han influido en ella, cuál es su visión sobre la educación en general y sobre la enseñanza de las matemáticas en particular, y cómo el saber pedagógico se construye a partir de la reflexión compartida sobre la práctica escolar.

La autora plantea que esa forma de construir pedagogía permite integrar la práctica y la teoría en un mismo proceso, tan diferente al de quienes no se dignan a bajar a pie de aula y observar qué es lo que realmente pasa en los procesos de enseñanza-aprendizaje. Esto hace que la figura de M. A. Canals encuentre difícil acomodo en el plantel del Área de Didáctica de las Matemáticas de la universidad española, en algunos casos más interesado en formar parte de selectos grupos de investigación y así hacer carrera en las facultades, que de mejorar la enseñanza de las matemáticas que tiene lugar en las aulas de Educación Infantil y Primaria. Ambas estrategias son legítimas, pero cada una obedece a intereses diferentes, y esta crítica, que sin duda no agrada a todos los sectores educativos, debería ser un tema sobre el que desarrollar otro debate sosegado pero que, al menos en este libro, queda claramente planteado.

Este trabajo es un justo reconocimiento a M. Antònia Canals, un homenaje a la altura de su encomiable trayectoria. Es posible que no compartamos la totalidad del pensamiento de M. Antònia, asumir que hay un sector¹ que discrepa abiertamente de las *tesis logsianas* que Canals apoyó en su momento (aunque no estuviera de acuerdo en su totalidad, pues criticó la forma en que se había diseñado el acceso del profesorado a las Facultades de Educación sin pasar por la práctica docente directa, queja que trasladó personalmente al ministro de educación Javier Solana Madariaga).

Sin embargo, es inverosímil no reconocer la labor desempeñada por M. Antònia, así como el valioso cuerpo de conocimiento y metodología pedagógica práctica que nos ha transmitido, en el que cualquier profesional de la educación encontrará un excelente aliado. M. A. Canals ha sabido promover, articular y coordinar una amplia red de docentes; comportamiento propio de aquellos que hacen de la educación su proyecto vital, tanto en el aspecto pedagógico como en la dimensión humana más amplia de la palabra, pues no se concibe su itinerario educativo si lo separamos de esa faceta humanística que acompaña toda su obra.

Una metodología que presupone en todo escolar, por muy malos resultados académicos que obtenga, una facultad que le hace especial, alguien que no podemos abandonar a su suerte y sobre el que debe centrarse la labor docente, con la certeza, como dice Canals, de que *todo el mundo sabe hacer algo muy bien*. Será por medio de la observación directa como seremos capaces de descubrir su potencial y así, proporcionarle las herramientas necesarias para que aflore y se desarrolle.

En resumen, una vida por y para la educación que la Dra. María Sotos ha sabido destilar en esta investigación y que toda persona relacionada con el universo educativo debería leer alguna vez.

Manuel García Piqueras.
Profesor asociado de la Facultad de Educación de Albacete.

1. MORENO CASTILLO, Ricardo (2016). *La conjura de los ignorantes. De cómo los pedagogos han destruido la enseñanza*. Madrid: Pasos Perdidos.

RINCÓN “SAPERE AUDE”... ¿resolviendo problemas?

Sixto Romero

Escuela Técnica Superior de Ingeniería

Universidad de Huelva

sixto@uhu.es

Cuándo me comprometí con la dirección de la revista en el periplo de colaboración con este rincón, pretendía comenzar una especie de expedición a través del campo de la Geometría y la Teoría de Números, inicialmente, sin abandonar la idea de trabajar en otros estadios de las Matemáticas.

Con respecto a la primera, se trata de un apasionado romance en torno a la ciencia que es capaz de modelizar el espacio que percibimos. Permite también introducirnos en estructuras de pensamiento avanzado: la Geometría trabaja con objetos mentales que no dependen de lo que perciben nuestros sentidos. Además, este recorrido permite tener la ocasión de conocer a una ciencia en la que, a partir de postulados y definiciones tomados como verdaderos, se construye un compacto, firme y sólido edificio de afirmaciones cuya formalidad puede argumentarse.

Por el momento, hasta ahora hemos tratado y trataremos, ejemplos en los que se muestra la Geometría como sólo una de las representaciones del entorno, una manera de modelizar el espacio. Sabemos que existen otras geometrías, que sobresalen del nivel para el que está concebida esta sección, aunque no descarto la posibilidad de abordarlas. Particularmente plantearé ejemplos y figuras susceptibles de ser tratados en dos y tres dimensiones.

Como ya indiqué en trabajos anteriores, trato de incitar al docente a la reflexión relativa a toda la riqueza que gira alrededor de la enseñanza de la Geometría, que actualmente ha levantado el vuelo, gracias entre otras cosas al empuje dado, fundamentalmente, por el uso de las nuevas tecnologías. Iré tratando propiedades, teoremas, ..., geométricos que desgraciadamente, han sido junto a la Estadística, campos muy mal tratados por los diseños curriculares desde hace mucho tiempo. No se trata solo de una mera exposición de ejemplos más o menos complicados si no que pretendo que se tome conciencia de que su estudio en el aula no consiste sólo en la transmisión de los contenidos sino en adentrar al alumno en todo un mundo de experiencias en el conocimiento del espacio que percibe y en formas de pensamiento propias de la Geometría.

Con respecto a la segunda, la Teoría de Números, como la rama de las matemáticas puras que estudia las propiedades y de las relaciones de los números, incluye gran parte de las matemáticas, en particular del análisis matemático. La mayoría de sus estudios se

han referido y se refieren a ejemplos a los números enteros y, en ocasiones, a otros conjuntos de números con propiedades similares al conjunto de los enteros. Contiene una gran cantidad de problemas que son "cómodamente" entendibles e interpretados por los no matemáticos. Una prueba de ello, son los dos ejercicios que hemos propuesto para su resolución en el número anterior.

SAPERE AUDE, GEOMETRÍA

1. EJERCICIOS DE AQUÍ Y ALLÁ (SOLUCIÓN A LA PROPUESTA 1 DEL NÚMERO ANTERIOR 93)

Propuesta 1: dos joyitas geométricas

a) Sea $\triangle ABC$ un triángulo de área S . Demostrar que la relación:

$$AB^2 + AC^2 + BC^2 \geq 4S$$

(Problema propuesto en las Olimpiadas Internacionales de Budapest de 1961)

SOLUCIÓN

NOTA 1: Este es un bello ejemplo en el que aparecen propiedades de los triángulos que no se tratan o no se estudian normalmente en los currícula en nuestro país, salvo trabajos en profundidad que encarguen profesores interesados en la Geometría Euclidiana. Es una buena oportunidad para incidir en algunas relaciones notables de los elementos de un triángulo.

Las relaciones métricas en el triángulo son aquellas que tratan los vínculos entre lados o ángulos, entre los cuales se destaca el Teorema de Pitágoras que es válido exclusivamente en el triángulo rectángulo y se aplica sobre la longitud de los catetos, e hipotenusa, la altura relativa a la hipotenusa y los segmentos determinados sobre ésta como proyecciones de los catetos del triángulo en el teorema del cateto y el teorema de la altura.

Al estudiar las relaciones métricas en el triángulo oblicuángulo Euclides vio inconvenientes. En un triángulo rectángulo, $c^2 = a^2 + b^2$ ¿cuánto debería valer numéricamente el lado a en un triángulo oblicuángulo? Euclides dio respuesta a estas cuestiones con los dos teoremas:

1. El **primer teorema de Euclides** para los triángulos oblicuángulos:

"En cualquier triángulo el cuadrado del lado opuesto a un ángulo agudo equivale a la suma de los cuadrados de los otros dos lados menos dos veces uno de ellos por la proyección del otro sobre él".

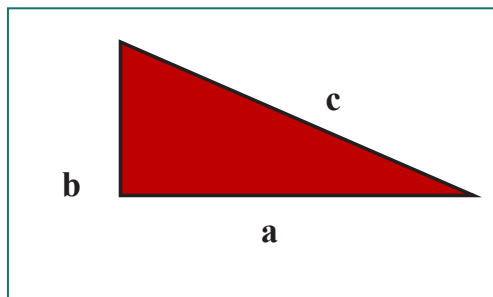


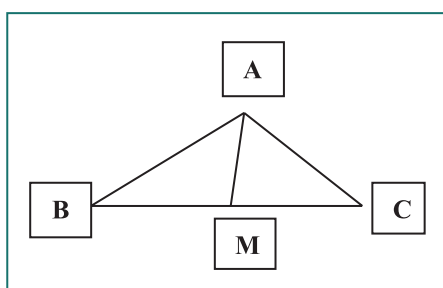
Fig.1. Triángulo Rectángulo.

2. El **segundo teorema de Euclides** para triángulos obtusángulos:

“En cualquier triángulo obtusángulo, el lado opuesto al ángulo obtuso al cuadrado es igual a la suma de los cuadrados de los catetos más el doble de la base por la proyección de la altura trazada desde uno de los ángulos menores”.

A partir de los teoremas citados se pueden obtener fórmulas para el cálculo de las líneas notables de un triángulo, como por ejemplo el teorema de **Apolonio**, también llamado **teorema de la mediana**, que relaciona la longitud de la **mediana** de un **triángulo** con las longitudes de sus lados:

“En todo triángulo la suma de los cuadrados de dos lados cualesquiera, es igual a la mitad del cuadrado del tercer lado más el doble del cuadrado de su mediana correspondiente”.



$$AB^2 + AC^2 = (1/2)BC^2 + 2AM^2$$

Fig.2. Triángulo Oblicuángulo.

PASO 1

Sea este nuestro caso el triángulo \widehat{ABC} de área S , en la Fig.2. Se tiene según el teorema de Apolonio

$$AB^2 + AC^2 = (1/2)BC^2 + 2AM^2$$

Si se deja B et C fijos y se desplaza el punto A sobre una paralela al lado BC , entonces el área S queda invariante y $AB^2 + AC^2$ es mínimo para un valor mínimo de AM , es decir si A se encuentra en la mediatriz de BC .

Por lo tanto el problema se reduce a demostrar la desigualdad para los triángulos que sean isósceles en el ángulo en \widehat{A} . Sea h ahora la altura, AM , del triángulo \widehat{ABC} , tomada desde A , y sea a el lado BC .

PASO 2

Tenemos que demostrar que

$$AB^2 + AC^2 + BC^2 \geq 4\sqrt{3} S$$

Podemos escribir $AB^2+AC^2= (1/2)BC^2+2AM^2= (1/2)a^2+2h^2$, Por lo tanto, la desigualdad $AB^2+ AC^2+BC^2 \geq 4 \sqrt{3} S$ se puede escribir así $(1/2)a^2+2h^2+a^2 \geq 4(1/2)ah$ ya que el área del triángulo es $S=(1/2)ah$.

Es decir, $(3/2)a^2+2h^2 \geq 2 \sqrt{3} ah$. Realizando operaciones y pasando todo a un miembro la desigualdad es equivalente a

$$3a^2+4h^2-4 \sqrt{3} ah \geq 0$$

PASO 3

Y esta desigualdad es cierta ya que siempre se cumple porque el primer miembro de la desigualdad es $(2h-\sqrt{3} a)^2$, que evidentemente al tratarse de un cuadrado es siempre mayor o igual que 0.

Se puede verificar que la igualdad a cero se cumple cuando y solo cuando $h= \sqrt{3} a/2$ y esto corresponde a los triángulos equiláteros.

NOTA 2. Esta joyita puede ser enfocada de diferentes maneras utilizando la fórmula de Herón, geometría analítica y trigonometría. ¡Lanzo este reto para el lector interesado dirigiéndose para cualquier duda, si lo desea, al e-mail sapereaudethales@gmail.com.

b) ¿Existe un triángulo \widehat{ABC} tal que la altura desde el vértice A , la bisectriz del ángulo \widehat{BAC} y la mediana relativa al lado BC dividan al ángulo \widehat{BAC} en cuatro ángulos con la misma medida?

SOLUCIÓN

PASO 1

Sea el triángulo \widehat{ABC} (ver figura 3).

Dibujemos el círculo circunscrito con centro en O , M el pie de la altura tomada desde el vértice A sobre el lado BC , A' la intersección de la mediatriz de BC con el arco \widehat{BC} , por lo tanto A' está en el punto medio del arco \widehat{BC} . Entonces:

- Como AA' es la bisectriz del ángulo \widehat{BAA}' , entonces $\widehat{BAA}' = \widehat{A'AC}$.
- AM y OA' son paralelos porque son perpendiculares al lado BC .
- $\widehat{MAA}' = \widehat{AA'O}$ por ser ángulos alternos-internos y $\widehat{AA'O} = \widehat{A'AO}$ por ser ángulos en la base del triángulo isósceles \widehat{AOA}' .

En función de la propiedad transitiva $\widehat{MAA}' = \widehat{A'AO}$, de dónde se deduce que AA' es la bisectriz del ángulo \widehat{MAO} (ver figura 4).

PASO 2

¿Cuál será la respuesta al problema inicialmente planteado?

Para ello es necesario que \widehat{AO} se la mediana relativa al lado BC , de modo que O sea el punto medio de BC , por lo tanto ha de ser el centro del círculo circunscrito al triángulo

\widehat{ABC} , y consecuentemente este triángulo debe ser rectángulo en el vértice A . Es una condición necesaria pero no suficiente (ver figura 5).

$\widehat{MAO} = \widehat{B} - \widehat{C}$ (Para cualquier triángulo sea rectángulo o no).

Para un triángulo rectángulo:

$$\widehat{MAO} = 45^\circ = \frac{\pi}{4}, \widehat{C} = \widehat{OAC} = 22,5^\circ = \frac{\pi}{8}, \widehat{B} = 67,5^\circ = \frac{3\pi}{8}.$$

PASO 3

A modo de conclusión, podemos afirmar que existe un triángulo \widehat{ABC} tal que la altura trazada desde el vértice A , la bisectriz del ángulo \widehat{BAC} y la mediana relativa al lado BC dividen a \widehat{BAC} en cuatro ángulos iguales. Se trata de un triángulo rectángulo en el ángulo A tal que el ángulo C es igual a $\frac{3\pi}{8}$.

NOTAS ORIENTATIVAS:

- Como orientación al alumno: hacerle ver que otra solución válida y que se puede obtener, si se trabaja el planteamiento de que los

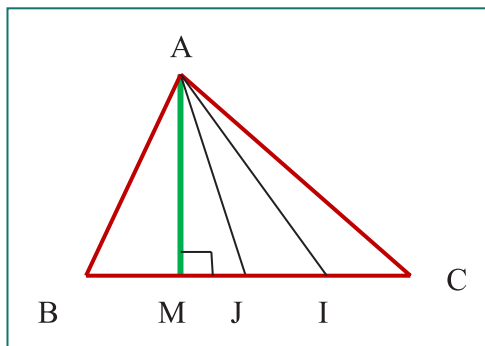


Fig. 3. Triángulo Cualquiera.

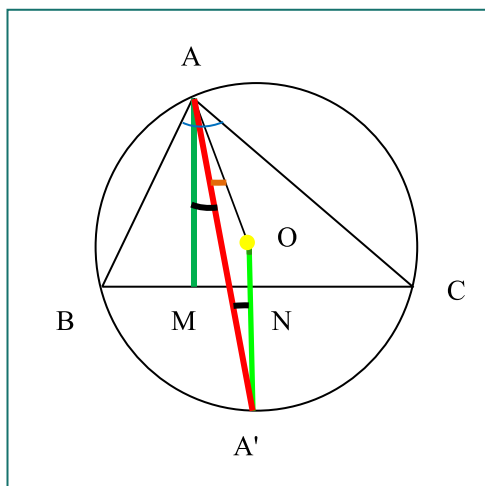


Fig. 4. Triángulo \widehat{ABC} y Círculo Circunscrito.

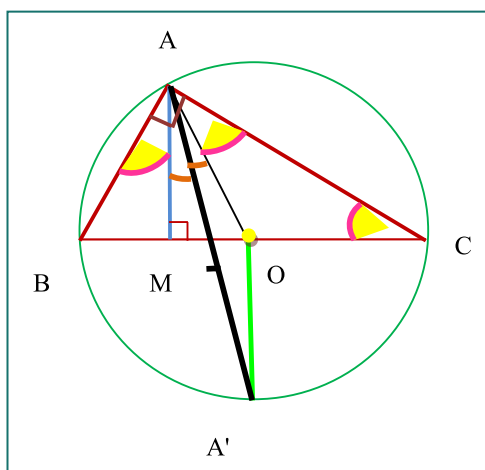


Fig. 5. Triángulo Rectángulo en el ángulo \widehat{A} .

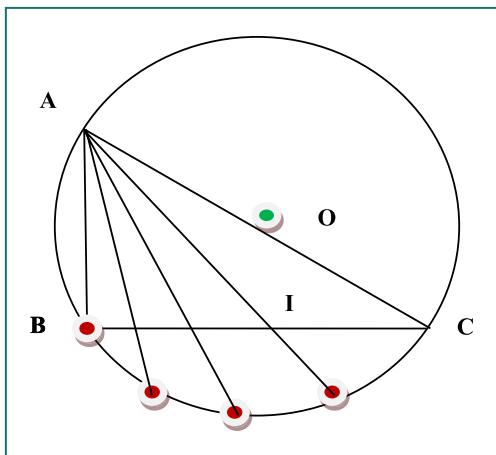


Fig. 6. Círculo Circunscrito al triángulo $\triangle ABC$.

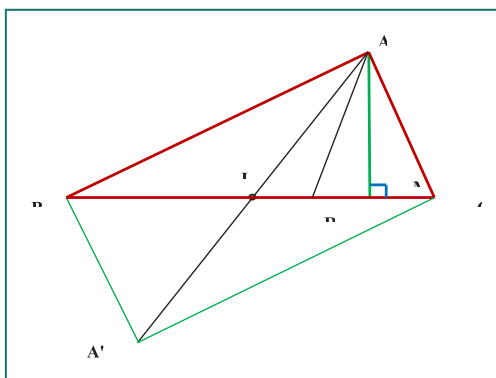


Fig. 7. Rectángulo $ABA'C$.

cuatro ángulos iguales interceptarán cuatro arcos de la misma longitud sobre el círculo circunscrito al triángulo $\triangle ABC$ (ver figura 6).

b) Otra idea para obtener la solución consiste en demostrar que el paralelogramo $ABA'C$, siendo A' el simétrico con relación al punto medio del lado BC , es un rectángulo (ver figura 7).

SAPERE AUDE, TEORÍA DE NÚMEROS

1. Ejercicios de aquí y allá (solución a la Propuesta 2 del número anterior 93)

Propuesta 2: dos joyitas numéricas

Sabemos que la teoría de números fue una de las disciplinas de estudio favoritas entre los matemáticos griegos de Alejandría a partir del siglo III a. C., quienes, ya tenían conciencia, por ejemplo, del concepto de ecuación diofántica en sus casos particulares. Los números son increíbles, tienen ciertas propiedades que nos asombran (o incluso que “nos engañan”), pero todo tiene una explicación.

Presentamos en este *sapere aude* estos dos ejercicios muy interesantes.

a) *Demostrar que, para toda terna de tres números reales, $\{a,b,c\}$ cualesquiera se tiene que:*

$$|a+b| + |b+c| + |c+a| \leq |a| + |b| + |c| + |a+b+c|$$

SOLUCIÓN

PASO 1

Notemos en primer lugar que para la terna de números reales a, b, c, p, q, r :

$$a = (1/2)(p+q-r)$$

$$a+b=p; a+c=q; b+c=r \text{ se tiene que } \Leftrightarrow b=(1/2)(p-q+r)$$

$$c=(1/2)(-p+q+r)$$

De ahí que:

$$|a+b| + |b+c| + |c+a| \leq |a| + |b| + |c| + |a+b+c|$$

realizando operaciones, podemos escribir así:

$$|p| + |q| + |r| \leq (1/2) (|p-q+r| + | -p+q+r |) + (1/2) (|p+q-r| + |p+q+r|)$$

PASO 2

Nuestro objetivo, a continuación es demostrar esta última desigualdad. Para ello, utilizaremos algunas propiedades de la función valor absoluto: $f(x) = x$.

- a) Una de ellas es: $\forall x, y \in \mathbf{R} \Rightarrow |x - y| + |x + y| = 2 \cdot \max(|a|, |b|)$ se puede aplicar, por lo que se deduce que en nuestro caso

$\forall p, q, r \in \mathbf{R}$, si llamamos $H = (1/2) (|p-q+r| + | -p+q+r |) + (1/2) (|p+q-r| + |p+q+r|)$ se tiene que $H = \max(|r|, |p-q|) + \max(|r|, |p+q|)$. Por ello, para todos los números reales p, q, r se cumple que:

$$\begin{aligned} H &\geq |r| + |p-q| \\ H &\geq |r| + |p+q| \end{aligned} \quad : (i)$$

- b) Utilizando otra propiedad de la función valor absoluto $\forall x, y \in \mathbf{R}$:

$$|x| + |y| = \begin{cases} |x - y|, & \text{sig}(x) \neq \text{sig}(y) \\ |x + y|, & \text{sig}(x) = \text{sig}(y) \end{cases}$$

para la expresión anterior (i) se tiene $\forall p, q, r \in \mathbf{R}$:

$$|p| + |q| + |r| \leq H$$

quedando demostrada la desigualdad inicial.

PASO 3

Toda vez que ha sido demostrada esta propiedad se puede proponer al alumno que estudie los casos de igualdad a partir de la expresión (i):

- Si $\text{sig}(p) \neq \text{sig}(q)$ se tendrá la igualdad sí y solo si

$$|p+q| \leq |r| \leq |p-q|$$

- Si $\text{sig}(p) = \text{sig}(q)$ se tendrá la igualdad sí y solo si

$$|p-q| \leq |r| \leq |p+q|$$

En definitiva, un resultado interesante en la teoría de números dónde la igualdad se produce si y solo si $|r|$ está comprendido entre $|p-q|$ y $|p+q|$, es decir, $\forall a,b,c \in \mathbf{R}$, si $|a+c|$ está comprendido entre $|b-c|$ y $|2a+b+c|$.

- También se puede insistir en que la igualdad es evidente si los tres números son del mismo signo o bien si uno de ellos es el cero.
- Eventualmente se podría profundizar si tratamos las permutaciones de las letras (con signos incluidos) que designan genéricamente a los números.

- b) Los enteros positivos p y q verifican $3p^2 - 8q^2 + 3p^2 q^2 = 2008$. ¿Cuál es el valor de pq ?

SOLUCIÓN

PASO 1

Escribamos el primer término de la igualdad $3p^2 - 8q^2 + 3p^2 q^2 = 2008$ así:

$$3p^2 - 8q^2 + 3p^2 q^2 = (3p^2 - 8)(q^2 + 1) + 8$$

De aquí se deduce que

$$3p^2 - 8q^2 + 3p^2 q^2 = 2008 \Leftrightarrow (3p^2 - 8)(q^2 + 1) = 2000.$$

Pero el número 2000 se puede descomponer factorialmente así: $2000 = 2^4 \times 5^3$.

Utilizando la fórmula para saber cuántos factores tiene un número natural n sin la necesidad de conocer cuáles son:

$$\forall n \in \mathbf{N} \Rightarrow n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} p_3^{\alpha_3} \dots p_t^{\alpha_t} \text{ siendo}$$

- $p_i, \forall i=1,2,3,\dots,t$, número primos tales que $p_i \neq p_j, i \neq j$
- α_i , la potencia correspondiente al número primo p_i

Se tiene que el número D de divisores de n es $D = (\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1)(\alpha_3 + 1) \dots (\alpha_t + 1)$

NOTA: En este momento, al alumno se le puede indicar que para calcular el número de divisores también existe el método de la raíz cuadrada. A modo de recordatorio:

1. Para obtener los divisores de un número n , se obtiene la raíz cuadrada del número, \sqrt{n} , exacta (o truncada por defecto, de no ser exacta).
2. Se cuenta el número de divisores que son menores o iguales que .
3. Multiplica esta cantidad por dos, y si es exacta la raíz se le resta la unidad

PASO 2

Aplicando lo citado ut-supra se tiene que el número 2000 posee, $(4+1) \times (3+1) = 20$ divisores que podemos reagruparlos de dos en dos, y por ello conseguimos los diez pares:

$$(1;2000)-(2;1000)-(4;500)-(5;400)-(8;250)9 \\ (10;200)-(16;125)-(20;100)-(25;80)-(40;50)$$

Entre los **20** divisores de **2000**, solo cuatro pueden escribirse de la forma q^2+1 con q natural, son los números:

2, 5, 10 y **50** que corresponden respectivamente a los valores de q

↓ ↓ ↓ ↓

1, 2, 3 y **7**

PASO 3

Discutamos a continuación los diferentes casos:

a) $q=1 \Rightarrow q^2+1=2$, y por ello: $3p^2-8=1000$. De ahí que:

$$3p^2 = 1008 \Rightarrow p = \sqrt{\frac{1008}{3}} = \sqrt{336} = 18,3303\dots \text{No conduce a ninguna solución}$$

válida para p entero y por ende para pq .

b) $q=2 \Rightarrow q^2+1=5$, y por ello: $3p^2-8=400$. De ahí que:

$$3p^2 = 408 \Rightarrow p = \sqrt{\frac{408}{3}} = \sqrt{136} = 11,6619\dots \text{No conduce a solución válida}$$

para p entero y por ende para pq .

c) $q=3 \Rightarrow q^2+1=10$, y por ello: $3p^2-8=200$. De ahí que:

$$3p^2 = 208 \Rightarrow p = \sqrt{\frac{208}{3}} = 69,3. \text{ No conduce a solución válida para } p \text{ entero y por}$$

ende para pq .

d) $q=7 \Rightarrow q^2+1=50$, y por ello: $3p^2-8=40$. De ahí que: .

$$3p^2 = 48 \Rightarrow p = \sqrt{\frac{48}{3}} = \sqrt{16} = 4$$

PASO 4

Se ha obtenido solo los valores $p=4$ y $q=7$. Por lo tanto, la solución única para pq es $pq=28$.

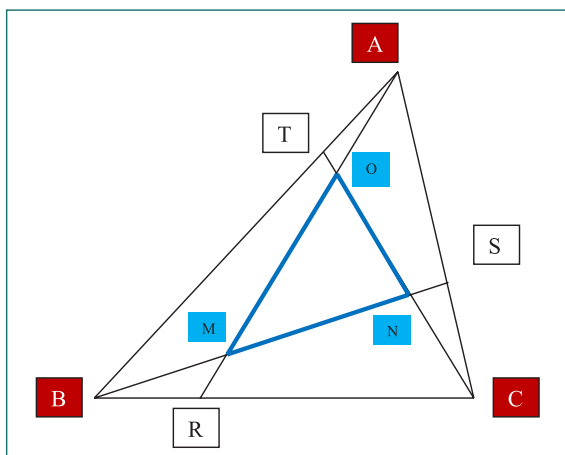
SAPERE AUDE, EJERCICIOS DE AQUÍ Y ALLÁ, PROPUESTAS

Propuesta 1: dos joyitas geométricas

Decíamos en el número anterior que la enseñanza de la Geometría, probablemente sea una de las disciplinas dónde más desencuentros podemos encontrar entre enseñantes e investigadores en Educación Matemática. En esta sección quiero dejar patente que trabajar en la geometría plana se presenta como un instrumento potente desarrollar el pensamiento deductivo, el cual implícitamente considera el desarrollo de la capacidad de abstracción. También considero que trabajando en este estadio se consigue que el alumno se mueva en un espacio de erudición en el que es viable alcanzar la idea de matematización como reconocimiento de patrones, generalizaciones, elaboración de conjeturas, demostraciones, ... piezas claves en el proceso binomial de Enseñanza/Aprendizaje de las Matemáticas.

En este número presentamos las dos joyitas siguientes:

- En una hoja de papel se corta un agujero circular de 3cm. de diámetro. ¿Se puede hacer pasar una pieza de 4 cm. de diámetro?*
- Enrique quiere construir un jardín de forma triangular, MNO, limitado por un terreno también de forma triangular ABC y de área S, según aparece en la figura. Se sabe que moviendo los puntos R, S y T respectivamente sobre los lados BC, CA y AB, va a conseguir construir el jardín MNO de la siguiente forma: las rectas que pasan por A y R, B y S, y C y T se cortan en los puntos M, N y O. Si conocemos el valor de las razones BR/BC , CS/CA y AT/AB , determinar el área del jardín en forma triangular, MNO, que quiere construir Enrique en función del área S y las razones citadas.*



Propuesta 2: cuatro joyitas numéricas

En este *Sapere Aude* presentamos cuatro curiosas joyitas con diferentes grados de dificultad tocando distintos enfoques.

Está en el espíritu del que estas líneas suscribe presentar ejercicios de la teoría elemental de números, sin emplear técnicas de gran dificultad procedentes de otros

campos de las matemáticas. Pertenecen a la teoría elemental de números las cuestiones de divisibilidad, el algoritmo de Euclides para calcular el máximo común divisor, la factorización de los enteros como producto de números primos, la búsqueda de los números perfectos y las congruencias.....

- a) *Demostrar que cada número de la sucesión*
49, 4489, 444889, 44448889, 4444488889,.....es un cuadrado perfecto. Cada número de la sucesión está formado por "n" números 4, "n-1" números 8 y solo "un" 9.
(Propuesto en la competición matemática de Slovenia en 1998).
- b) *Cada una de las cifras 1,2,3,4 y 5 es utilizada una sola vez para formar un número de 5 cifras. ¿Cuál es el valor de la suma de todos los números de cinco cifras que de esta manera se pueden formar?*
- c) *Se dispone de monedas sin ser capaces de sumar sólo 1 €, al tomar la totalidad o tomar unas pocas. ¿Cuál es la cantidad máxima que podemos juntar de estas monedas? (No hay ninguna valor superior a € 1)*
- d) *Resolver el sistema de ecuaciones:*

$$(a + b + c)d = 420$$

$$(a + c + d)b = 403$$

$$(a + b + d)c = 363$$

$$(b + c + d)a = 228$$

$$\forall a, b, c, d \in N$$

Nota: Este último ejercicio no demasiado complicado pero que en un principio a los alumnos de secundaria les puede chocar al no ser un sistema de ecuaciones lineales. Es tarea del profesor indicar la orientación al alumno en las diferentes estrategias de resolución del problema, como por ejemplo utilizar en este caso la teoría de la divisibilidad y los números primos.

NOTA: Las respuestas pueden enviarla a la dirección electrónica:

sapereaudethales@ gmail.com

