93

Vol. 34 (2)
2016

epsilon

Revista de Educación Matemática

Editada por la S.A.E.M. "THALES"

epsilon 93

Revista de Educación Matemática

Sociedad Andaluza de Educación Matemática "Thales"

Página de la revista: http://thales.cica.es/epsilon
Revista: epsilon@thales.cica.es

Edita
Sociedad Andaluza de
Educación Matemática "Thales"
Centro Documentación "Thales"
Universidad de Cádiz
C.A.S.E.M.
11510 PUERTO REAL (Cádiz)

Maquetación e impresión
Utrerana de Ediciones, s.l.
Cristóbal Colón, 12
41710 Utrera (Sevilla)

Depósito Legal
SE-421-1984

ISSN:
2340-714X

Período
2º cuatrimestre 2016

Suscripción
(3 Números al año.)

SUMARIO / CONTENTS

Épsilon *- Revista de Educación Matemática* ***2016, Vol. 33 (2), nº 93, 7-30***

Una trayectoria hipotética de aprendizaje para las expresiones algebraicas basada en análisis de errores

Mª Victoria Amador-Saelices
Universidad Complutense de Madrid
Jesús Montejo-Gámez
Universidad de Granada

Resumen. *Problema-Introducción: Hemos observado errores graves en el uso de expresiones algebraicas en estudiantes de secundaria. Objetivo general: analizar los relacionados con el lenguaje algebraico para prevenirlos. Metodología: Desarrollamos una Trayectoria Hipotética de Aprendizaje (THA) para el lenguaje algebraico en 1º E.S.O. y reflexionamos sobre los resultados obtenidos tras ponerla en práctica, lo que nos permite completar una iteración del Ciclo de Enseñanza de las Matemáticas. Utilizamos las herramientas del análisis de errores y los caminos de aprendizaje para diseñar las tareas de instrucción asociada a la Trayectoria Hipotética. Resultados y conclusiones: Un diseño instruccional que incidiera más en el uso de las expresiones algebraicas como lenguaje podría ayudar a prevenir los errores estudiados.*
Palabras clave: *enseñanza del álgebra, formación de profesores, Trayectoria Hipotética de Aprendizaje, caminos de aprendizaje, análisis de errores.*

A Hypothetical Learning Trajectory for algebraic expressions based on analysis of errors

Abstract. *Problem-Introduction: We have observed serious errors concerning algebraic expressions in Secondary School students. Main goal: to analyze errors related to algebraic language, in order to prevent them. Metodology: We develop a Hypothetical Learning Trajectory for the algebraic language in the 1st year of the Secondary School and think about the results obtained after putting it into practice, which allows us to complete one iteration of the Mathematics Teaching Cycle. We use the analysis of errors and the learning paths to design instructional tasks associated with the Hypothetical Learning Trajectory. Results and conclusions: An instructional design which is more focused on the use of algebraic expressions as a language could help to prevent the errors we have studied.*
Keywords: *teaching of algebra, teachers formation, hypothetical learning trajectory, learning paths, analysis of errors.*

JUSTIFICACIÓN Y PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

El contexto educativo de este trabajo es la iniciación al manejo del lenguaje algebraico de los estudiantes de 1º E.S.O. Buscamos analizar cómo se desarrolla el primer contacto de los alumnos con las expresiones algebraicas y mejorar su aprendizaje a través de la optimización de las tareas de instrucción para adaptarlas a sus conocimientos. Nuestra investigación tiene una finalidad doble: por una parte deseamos conocer cómo se produce el aprendizaje del lenguaje algebraico en alumnos de 1º E.S.O. Por otra parte, perseguimos construir herramientas didácticas que optimicen el aprendizaje. Los errores que cometen los estudiantes al enfrentarse a tareas relacionadas con el tema contienen la información básica que utilizamos para interpretar cómo se desarrolla su aprendizaje.

Justificación

La importancia de las matemáticas en la sociedad actual resulta indudable, ya no solo por las destrezas numéricas que podemos necesitar para desenvolvernos en la vida cotidiana, sino sobre todo porque nos ayudan a comprender la gran complejidad que encierra la realidad que nos rodea.

La descripción adecuada de situaciones reales en términos puramente matemáticos nos permite aprovechar la potencia de las matemáticas para resolver problemas de la vida cotidiana. El lenguaje algebraico es el lenguaje propio de las matemáticas, por lo que la formulación de expresiones algebraicas es la primera destreza que debemos adquirir para poder desarrollar modelos matemáticos eficientes. Por otra parte, el manejo de expresiones algebraicas favorece la abstracción y el razonamiento y dominar el lenguaje algebraico resulta fundamental para desarrollar la competencia matemática.

El currículo que establece la LOE para la Comunidad de Madrid refleja a la perfección esta prioridad (Consejería de Educación, Juventud y Deporte de la Comunidad de Madrid, 2007), ya que 2 objetivos del área y 1 criterio de evaluación, además de todos los contenidos del Bloque de Álgebra, están dedicados a las expresiones algebraicas. Los profesores de secundaria deben, en consecuencia, poseer un conocimiento exacto de cómo los alumnos aprenden a trabajar con el lenguaje algebraico y disponer de herramientas docentes que faciliten el aprendizaje y motiven de manera adecuada la importancia de las expresiones algebraicas para el desarrollo matemático global de los alumnos.

Nuestro interés por estudiar este tema tiene, además, una motivación de índole personal y profesional. Hemos sido testigos de los malos resultados que obtuvieron los alumnos de un grupo de 2º E.S.O. en un examen de polinomios. La observación de los errores cometidos puso de manifiesto carencias que no habríamos sabido predecir a priori, lo que nos convenció de la utilidad de tener en cuenta los fallos observados en estos alumnos de cara a afrontar la formación algebraica de los alumnos de otros cursos de secundaria. Este hecho nos animó a trabajar el lenguaje algebraico en 1º E.S.O., que es el curso donde los estudiantes establecen su primer contacto con la abstracción matemática. Nuestra consigna docente es lograr un diseño de la instrucción en el aula que sirva para prevenir en los alumnos de primer curso de secundaria los errores cometidos por los estudiantes de segundo.

La preocupación como docentes por evitar los errores de los alumnos constituye asimismo una inquietud científica que nos impulsa a tratar de comprender qué vías sigue el aprendizaje del manejo del lenguaje algebraico. Las Trayectorias Hipotéticas de Aprendizaje (Simon, 1995) son una herramienta metodológica que nos permite explorar de forma integrada las dos vertientes de nuestra investigación.

Planteamiento del problema

Nuestro interés se focaliza sobre dos cuestiones que materializan esta dualidad.

- **Cuestión 1**: ¿Cómo se produce el aprendizaje y por qué los alumnos cometen determinados errores?
- **Cuestión 2:** ¿Cómo se deben diseñar las tareas de instrucción para evitar estos errores?

FUNDAMENTACIÓN TEÓRICA

Simon (1995) describe los aspectos clave para planificar las clases de matemáticas a través de la noción de Trayectoria Hipotética de Aprendizaje. Se trata de una herramienta de diseño instruccional que describe desde una perspectiva constructivista cómo profesores, investigadores y desarrolladores del currículo pueden pensar sobre el diseño y el uso de las tareas matemáticas para promover el aprendizaje conceptual matemático.

Tal y como las presenta Simon, las THA son de gran utilidad tanto en la investigación como en la programación de la instrucción en el aula (Gravemeijer, 2004; Steffe, 2004). Para desarrollar las tareas asociadas a una Trayectoria Hipotética de Aprendizaje, Simon, Tzur, Heinz y Kinzel (2004) elaboran un constructo denominado reflexión sobre la relación actividad-efecto*,* que se basa en la noción de abstracción reflexiva de Piaget. En el contexto de formación inicial de profesorado la noción de THA debe adaptarse, ya que los profesores en formación inicial "no tienen experiencia docente y, en general, no tienen acceso a la práctica en el aula de matemáticas" (Gómez y Lupiáñez, 2007, p. 83). Para llevar a cabo dicha adaptación se introducen los caminos de aprendizaje (véase también Gómez, González y Romero, 2014) en los que la noción de capacidad, que definiremos en la Sección 2., toma relevancia fundamental. Gómez y sus colaboradores encuentran las capacidades asociadas a un tema a través de herramientas del análisis didáctico (Lupiáñez y Rico, 2008). En este trabajo seguimos parcialmente esta línea, ya que aprovechamos que las capacidades están íntimamente relacionadas con los errores en el proceso de aprendizaje de las matemáticas (Gómez y Lupiáñez, 2007) para definirlas a través del análisis de los errores que cometen los alumnos al realizar tareas sobre expresiones algebraicas. En torno a estas capacidades desarrollamos los caminos de aprendizaje y a partir de ahí obtenemos las tareas de nuestra THA.

Exponemos a continuación qué es una Trayectoria Hipotética de Aprendizaje, cuáles son sus elementos e introducimos las ideas que nos son útiles para diseñar nuestra THA, haciendo hincapié en el concepto de capacidad, los caminos de aprendizaje asociados a una tarea y el grafo de un objetivo de aprendizaje. Comentamos también algunos trabajos

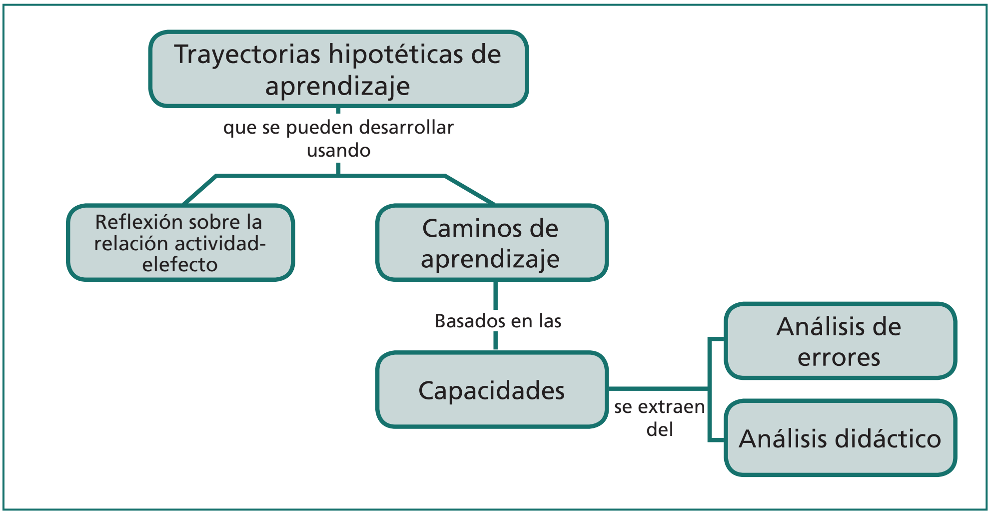


Figura 1. Esquema del fundamento teórico del trabajo.

dedicados al análisis de errores, que es la herramienta básica que nos permite describir las capacidades asociadas a las expresiones algebraicas en 1º E.S.O. De esta forma completamos el fundamento teórico de nuestro trabajo, que puede verse sintetizado en la figura 1.

Trayectorias Hipotéticas de Aprendizaje

La noción de Trayectoria Hipotética de Aprendizaje fue introducida por Simon (1995) como respuesta a la necesidad de conjugar el enfoque tradicional, que contempla una educación basada en objetivos preestablecidos, con una metodología constructivista (Gravemeijer y van Eerde, 2009). El propósito es establecer una predicción de cómo los alumnos pueden ir aprendiendo un contenido de matemáticas en función de sus conocimientos previos y desarrollar tareas para que se produzca el aprendizaje de forma eficaz. En particular, planificar el aprendizaje de ciertos contenidos a través de una THA implica asumir que las tareas son el elemento clave del proceso de instrucción.

Según Simon (1995), una Trayectoria Hipotética de Aprendizaje se construye en torno a tres elementos: (a) el objetivo de aprendizaje, (b) las tareas matemáticas que se usarán para promover el aprendizaje y (c) las hipótesis acerca del proceso de aprendizaje. Estos tres elementos no tienen la misma jerarquía como componentes de una THA. El objetivo de aprendizaje se suele tener de antemano y marca una pauta de los otros dos elementos, mientras que la selección de las tareas y las hipótesis son interdependientes: la formulación de las tareas se basa en las hipótesis que tengamos acerca del proceso de aprendizaje y a su vez estas hipótesis pueden verse alteradas cuando los alumnos resuelven las tareas (Simon y Tzur, 2004). Una THA es hipotética, por tanto, en el sentido de que la trayectoria de aprendizaje real de los estudiantes no tiene por qué ajustarse a la prevista teóricamente. De esta manera es natural establecer una secuencia

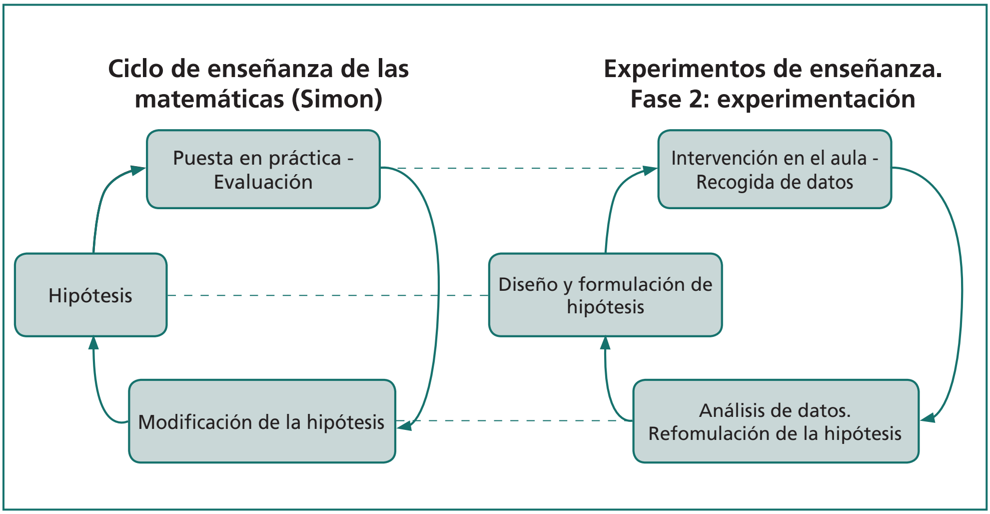


Figura 2: Paralelismo existente entre los experimentos de enseñanza (Molina et. al, 2011) y el Ciclo de Enseñanza de las Matemáticas (Simon, 1995).

hipótesis-puesta en práctica-evaluación y modificación de las hipótesis

que da lugar a un proceso iterativo denominado Ciclo de Enseñanza de las Matemáticas. Según Simon esta es la metodología idónea para enseñar matemáticas. De la Vega, Valls y Ciscar (2007) y posteriormente Gravemeijer y van Eerde (2009) destacan que existe un paralelismo entre el Ciclo de Enseñanza de las Matemáticas y los denominados experimentos de enseñanza, que son los estudios de investigación más frecuentes en la investigación de diseño. Puede observarse este paralelismo en la Ilustración 2 y consultarse más información sobre la investigación de diseño y los experimentos de enseñanza en Molina, Castro, Molina y Castro (2011) y las referencias allí citadas.

La noción de THA proporciona una herramienta metodológica que permite responder a nuestra doble inquietud docente e investigadora. Sin embargo, como indican Simon y Tzur (2004) “la descripción de la THA no llega a proporcionar un marco para pensar en el proceso de aprendizaje ni para diseñar o seleccionar tareas matemáticas” (p. 92). Por tanto, proponer una THA supone afrontar dos desafíos: cómo formular las hipótesis y cómo diseñar las tareas.

Caminos de aprendizaje

Para decidir qué tareas debe incluir una THA para enseñar el lenguaje algebraico debemos partir de un objetivo de aprendizaje. Gómez et al. (2014) señalan que

> un objetivo de aprendizaje expresa expectativas que involucran conexiones entre los conceptos y procedimientos del tema matemático, los sistemas de representación en que se representan y los fenómenos que organiza. (p. 325)

Sin embargo, los objetivos de aprendizaje suelen formularse en frases sintéticas cuyo significado parece evidente (Lupiáñez, 2009). Es necesario, por tanto, tener información más detallada sobre qué significa que el estudiante logre un objetivo de aprendizaje. Para recabar este tipo de información de forma ordenada trabajaremos con capacidades, caminos de aprendizaje y grafo del objetivo (Lupiáñez, Rico, Gómez y Marín, 2005; Gómez y Lupiáñez, 2007; Lupiáñez y Rico, 2008; Gómez et al., 2014).

Capacidad asociada a un tema

Utilizamos la noción de capacidad para analizar la gran cantidad de conexiones entre conocimientos que implica alcanzar un objetivo de aprendizaje.

> Definimos una capacidad como una expectativa del profesor sobre el conjunto de conocimientos elementales y de procedimientos rutinarios que los estudiantes tienen que aprender sobre un tema de las matemáticas escolares. (Gómez et al., 2014, p. 321)

Las capacidades constituyen el nivel de concreción más alto acerca de los resultados esperables del aprendizaje de un tema de matemáticas que vamos a considerar.

Camino de aprendizaje para una tarea

> Un camino de aprendizaje de una tarea es una sucesión de capacidades que el profesor prevé que sus estudiantes activarán al resolver la tarea, junto con los errores en los que pueden incurrir. (Gómez et al., 2014, p. 322)

La noción de camino de aprendizaje es útil para caracterizar el objetivo de aprendizaje, analizar el grado de incidencia de una tarea sobre el aprendizaje de dicho objetivo y evaluar la actuación de los estudiantes. Veamos un ejemplo de camino de aprendizaje para una tarea sobre el lenguaje algebraico.

EJEMPLO 1. Traducir la siguiente expresión del lenguaje natural al algebraico: un número aumentado en ocho.

Realizar esa tarea conlleva activar las capacidades C1, C2, C3, C4, C6, C7, C8 y se pueden cometer los errores E1.1, E1.2, E1.3, E2, E3, E6 y E7. Pueden verse en el anexo II los significados tanto de las capacidades como de los errores. Un camino que puede seguirse para llevar a cabo esta tarea puede verse representado en la figura 3 (izquierda).

Es usual que al comparar diferentes caminos de aprendizaje asociados a tareas relacionadas observemos conjuntos de capacidades que se activan siempre conjuntamente, constituyendo así unidades de significado dentro de los procesos de resolución de tareas. Estos conjuntos que describen un procedimiento particular dentro de la tarea concreta se denominan secuencias de capacidades (Gómez et al., 2014) y llevan asociados los errores propios del conocimiento al que van referidas. En la Ilustración 3 (derecha) puede verse el gráfico con las secuencias de capacidades de la tarea del Ejemplo 1. Las

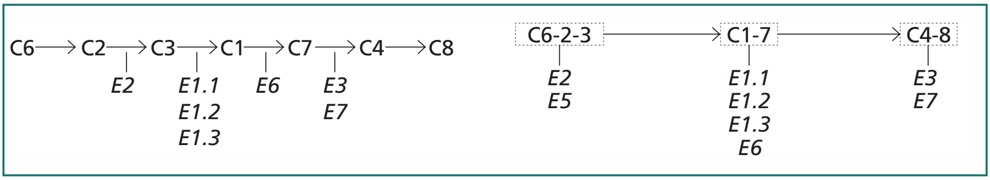


Figura 3: Grafo del camino de aprendizaje (izquierda) y grafo de la secuencia de capacidades (derecha) asociados a la tarea del ejemplo 1.

secuencias de capacidades son las unidades de significado que nos permiten describir objetivos de aprendizaje.

Grafo de un objetivo de aprendizaje

Los grafos de secuencias nos permiten analizar los procedimientos elementales involucrados en un objetivo de aprendizaje y las relaciones entre ellos. Para hacerlo basta con asociar al objetivo un conjunto de tareas prototipo, es decir, aquellas "*tales que si un estudiante las resuelve, entonces consideramos que dicho estudiante ha alcanzado el objetivo*" (Gómez et al., 2014). Una representación conjunta de los grafos de dichas tareas prototipo muestra de forma ordenada el conjunto de procedimientos que el alumno debe exhibir para que consideremos que ha logrado el objetivo de aprendizaje propuesto. Un gráfico de estas características se puede utilizar para proponer y calibrar la contribución de una tarea al logro de un objetivo de aprendizaje.

Análisis de los errores

Para decidir cómo formular las hipótesis sobre el aprendizaje en el contexto de formación de profesores no podemos recurrir a la experiencia profesional que puede ser muy corta o inexistente. Además, siempre es necesario disponer de una herramienta objetiva para analizar cómo se produce el aprendizaje de los alumnos.

Nuestra inquietud proviene de la observación de errores surgida en el ejercicio de la labor docente. Barbero, Fuentes, Azcárate y Ortiz (1993) señalan que observar los errores de los alumnos ayuda a conocer dónde están las dificultades. En relación con los caminos de aprendizaje, las dificultades y las capacidades están relacionadas.

> [Dificultades y capacidades] son las dos caras de una misma moneda. Cuando afirmamos que "un escolar tiene la capacidad para...", estamos mirando una cara de la moneda. La otra cara corresponde a la afirmación "el escolar tiene una dificultad al...". Tanto la capacidad, como la dificultad se evidencian cuando el escolar aborda una tarea. (Gómez y Lupiáñez, 2007, p.93)

Esta conexión entre capacidades y errores, entendiendo los errores como manifestación de las dificultades, relaciona íntimamente nuestra inquietud inicial (por qué los alumnos cometen ciertos errores y cómo pueden evitarse) con la noción nuclear (capacidades) de la herramienta metodológica que vamos a emplear (caminos de aprendizaje). Esto nos invita a utilizar el análisis de los errores para establecer las hipótesis de nuestra THA y seleccionar y clasificar las capacidades asociadas al aprendizaje de las expresiones algebraicas. Pero, ¿podemos aprovechar los errores de los alumnos para obtener información sobre qué y cómo han aprendido y usar esta información para prevenir los errores? Socas, Camacho, Palarea y Hernández (1996) señalan que

> El análisis de errores tiene un doble interés: de una parte, sirve para ayudar a los profesores a conducir mejor la enseñanza–aprendizaje del álgebra, insistiendo en aquellos aspectos en los que los alumnos cometen errores, y de otra, contribuye a una mejor preparación de estrategias para la corrección de los mismos. (p.109)

Existen diversos autores en la literatura que estudian y clasifican errores en la iniciación al álgebra. Socas (2011) estudia las dificultades que tienen los alumnos con el lenguaje algebraico desde dos perspectivas: los errores con origen en un obstáculo y los errores que tienen su origen en una ausencia de significado, bien debido a la complejidad de los objetos matemáticos o dificultades asociadas a actitudes emocionales hacia el álgebra. Hidalgo (2002) indica que existen errores en el aprendizaje del álgebra que se repiten y se pueden clasificar. Propone tres bloques de errores con el fin de elaborar en un futuro una unidad didáctica basada en los errores analizados: el bloque 1 está referido a errores en la equivalencia entre lenguaje habitual y algebraico, el bloque 2 contiene errores en el manejo de expresiones algebraicas y el bloque 3 está relacionado con los errores en la resolución de problemas. Nuestro trabajo sigue más bien esta segunda dirección, aunque nos centramos más en los primeros bloques a causa del objetivo de aprendizaje seleccionado.

En resumen, conocer el alcance real de un objetivo de aprendizaje en matemáticas requiere un estudio en profundidad de las capacidades que engloba dicho objetivo, las secuencias de dichas capacidades que se activan de forma conjunta y los posibles caminos de aprendizaje asociados a tareas que el profesor considera prototipo del objetivo de aprendizaje. El análisis de los errores que cometen los alumnos a la hora de realizar las tareas representativas del objetivo de aprendizaje es para nosotros la herramienta vertebradora de dicho estudio.

OBJETIVOS DE LA INVESTIGACIÓN

El objetivo de este trabajo es analizar el proceso de enseñanza–aprendizaje de las expresiones algebraicas en la iniciación al álgebra comprendiendo cómo se produce el aprendizaje y aprovechando esta comprensión para prevenir errores frecuentes. Para ello iniciamos el Ciclo de Enseñanza de las Matemáticas mediante el diseño de una Trayectoria Hipotética de Aprendizaje y la reformulación de las hipótesis a partir de la evaluación. Más concretamente, deseamos:

1) Construir una Trayectoria Hipotética de Aprendizaje para las expresiones algebraicas (utilizando las herramientas teóricas descritas en la Sección 2) y ponerla en práctica con alumnos de 1º E.S.O.,

2) Evaluar los resultados y reformular las hipótesis iniciales para completar una iteración del Ciclo de Enseñanza de las Matemáticas.

Los resultados de nuestra investigación son aquellos que se desprenden de la evaluación de los alumnos que siguen el diseño instruccional asociado a nuestra THA, que nos conducen a una reformulación de las hipótesis sobre el aprendizaje de las expresiones algebraicas de los alumnos de 1º E.S.O.

PROPUESTA DE TRAYECTORIA HIPOTÉTICA DE APRENDIZAJE

Para desarrollar una Trayectoria Hipotética de Aprendizaje actuamos como investigadores al definir con precisión el problema, reflexionar sobre la cuestión consultando la bibliografía, buscar herramientas para atacarlo, establecer hipótesis como consecuencia de este proceso de estudio, diseñar las actividades de instrucción para construir una THA y analizar los resultados de la evaluación para formular las hipótesis y poder así optimizar la instrucción. Asimismo, actuamos como docentes al poner en práctica en aula dicha instrucción en el colegio Mater Purissima de la Comunidad de Madrid, en las tres líneas de 1º E.S.O. (79 alumnos). Se trata de un colegio situado en el Sur de Madrid, concretamente en el barrio de Usera. Los alumnos, que son principalmente de clase media-baja, son en gran proporción españoles (aproximadamente un 10% son hijos de inmigrantes). Una gran cantidad de ellos pertenecen a familias desestructuradas, aunque no presentan un índice de fracaso escolar destacado.

Como ya hemos indicado, articulamos nuestra propuesta en torno a un objetivo de aprendizaje, un conjunto de hipótesis y unas tareas. El análisis de los errores que cometen alumnos de 2º de E.S.O., un total de 84 alumnos que estudiaron el tema de expresiones algebraicas el curso pasado, y la reflexión sobre estos errores nos llevan a dos procesos simultáneos en los que maduramos las hipótesis y concebimos las tareas de instrucción.

Teniendo en cuenta el objetivo y las consideraciones hechas en la Sección 2, elaboramos un test con tareas de traducción de expresiones del lenguaje natural al lenguaje algebraico, que es prototipo del objetivo de aprendizaje. El test (Amador, Montejo-Gámez y Ramírez, 2015) nos sirve para (a) formular nuestras hipótesis sobre el aprendizaje, (b) establecer las tareas de instrucción que proponemos a los alumnos de 1º E.S.O., (c) evaluar el aprendizaje de estos alumnos y (d) reformular así nuestras hipótesis iniciales. De este modo, construimos una THA, la ponemos en práctica en el aula y utilizamos la información obtenida para reflexionar y redefinir nuestras hipótesis iniciales, completando así una iteración del Ciclo de Enseñanza de las Matemáticas. (a) y (c) se llevan a cabo pasando el test a los alumnos de 2º E.S.O. y 1º E.S.O. respectivamente. A partir de los resultados obtenidos se describe (d). El diseño instruccional requiere un análisis detallado de las tareas del test que estudiamos por medio de los caminos de aprendizaje asociados a estas tareas.

Objetivo de aprendizaje

El objetivo de aprendizaje sobre el que vamos a realizar la investigación es el siguiente: *escribir expresiones algebraicas para describir relaciones numéricas y geométricas descritas en lenguaje natural utilizando un vocabulario adecuado.*

Hipótesis sobre el aprendizaje

Tomando cada tarea del test y estudiando todos los tipos de respuestas de los alumnos de 2º E.S.O. elaboramos la lista de errores que puede consultarse en el anexo II. El análisis de los errores nos lleva a la reflexión acerca de las hipótesis sobre el aprendizaje. Concretamente, podemos definir pautas que nos ayudan a comprender cómo se produce el aprendizaje del álgebra, que comentamos a continuación.

En primer lugar, es muy común la tendencia de los alumnos a dar resultados numéricos en lugar de expresiones algebraicas. Observamos que no utilizan adecuadamente letras para designar cantidades indeterminadas: ante la tarea de expresar "un número par" en el lenguaje algebraico, el 67.567 % escriben números pares concretos. Además, trabajando con expresiones algebraicas que describen una igualdad, hay alumnos que la resuelven: ante la tarea de expresar "un número más su doble más su triple es igual a doce" en el lenguaje algebraico, el 47.292 % da como resultado un número.

Por otra parte, existen errores de vocabulario: asociados a palabras menos usuales en el castellano (un 31.081 % de los alumnos deja en blanco la tarea de traducir al lenguaje algebraico "la suma de dos números consecutivos") y asociados a la relación entre las palabras y la operación que estas representan (aumentar, disminuir).

También existen errores relacionados con nociones geométricas, como utilizar la fórmula del perímetro para expresar el área de un rectángulo (y viceversa) o escribir la fórmula del área de un triángulo cuando se le pide el área de un rectángulo.

Los alumnos de este estudio muestran dificultades a la hora de escribir operaciones aritméticas en horizontal. Destaca en este sentido la omisión de los paréntesis en las expresiones algebraicas que lo requieren: ante la tarea de traducir al lenguaje algebraico "el área de un rectángulo de base x y altura x + 6", el 45.945 % de los estudiantes no escribe el paréntesis.

Además de estos errores, es palpable la gran inseguridad que los alumnos han sentido a la hora de responder al test: hay una gran cantidad de respuestas en blanco y detectamos también alta variabilidad en los errores encontrados: ante la tarea de traducir al lenguaje algebraico "la diferencia entre 7 y un número" los estudiantes asocian "diferencia" con hasta cinco operaciones diferentes de la resta. Pueden verse ejemplos de estos errores más frecuentes en el anexo I.

La reflexión sobre los errores encontrados nos lleva a formular las siguientes hipótesis sobre el aprendizaje de las expresiones algebraicas, que expresamos en clave de dificultades y posibles soluciones:

- **Hipótesis 1.** Los alumnos tienen dificultades en el uso de las letras como variables y no ven la utilidad de las expresiones algebraicas para la formulación matemática de situaciones reales. Es necesario mostrarles la potencia del uso de letras para designar valores desconocidos o indeterminados y la potencia del lenguaje algebraico como una herramienta de generalización.

- **Hipótesis 2.** Los alumnos tienen dificultades relacionadas con la relación entre la terminología del lenguaje natural y las operaciones matemáticas asociadas. Es necesario trabajar y reforzar el vocabulario aritmético en el lenguaje usual.
- **Hipótesis 3.** Los alumnos tienen dificultades relacionadas con la aplicación de fórmulas geométricas básicas, como área y perímetro de cuadrados, rectángulos y triángulos. Es necesario trabajar y reforzar la formulación de propiedades geométricas.
- **Hipótesis 4.** Los alumnos tienen dificultades a la hora de operar. Es necesario incidir en las propiedades aritméticas, en particular en la diferencia entre usar y no usar paréntesis.

La detección de los errores presentados y el desarrollo de estas hipótesis han ocurrido en paralelo con la preparación de las actividades que contribuyen a prevenir los errores observados. Explicamos cómo lo hacemos en el siguiente apartado.

Tareas de instrucción. Caminos de aprendizaje

Para diseñar las tareas de instrucción de nuestra THA caracterizamos el objetivo de aprendizaje a través de caminos de aprendizaje. Dichos caminos se escriben en términos de los errores observados y de las capacidades asociadas a dichos errores. Establecemos así capacidades que hemos dividido en cuatro categorías: (a) capacidades referidas a la concepción y manejo de expresiones algebraicas como una herramienta de formulación, (b) y (c) capacidades relacionadas con la terminología y con la geometría, y (d) capacidades que involucran habilidades aritméticas.

Como hemos comentado, es suficiente con dar los caminos de aprendizaje que conjeturamos para las tareas prototipo. Para algunas de ellas pronosticamos solo un camino de aprendizaje posible, como en el Ejemplo 1. Este es el caso del grafo de la izquierda en la figura 4, para el que prevemos la activación ordenada de las capacidades relacionadas con el manejo de las expresiones algebraicas (C2, C3, C4, C6, C7, C8, C12 y C13) y la de interpretación de la palabra “consecutivos”, relacionada con la terminología (C20). Por su parte, hay tareas cuyo camino queda descrito por un grafo con dos ramas, que reflejan dos estrategias posibles para realizar estas tareas. Como ejemplo tenemos el caso del grafo de la derecha en la Ilustración 4, donde consideramos que el alumno puede bien conocer la fórmula del perímetro (rama superior, asociada a la capacidad geométrica C25) o bien describir gráficamente la situación y calcular el perímetro interpretando la definición desde el gráfico (rama inferior, asociada a otras capacidades geométricas como C28 y C29). Puede consultarse la lista completa de capacidades en el anexo II. En Amador, Montejo-Gámez y Ramírez (2015), además, se pueden ver los grafos de los caminos de aprendizaje de todas las tareas del test con el que trabajamos.

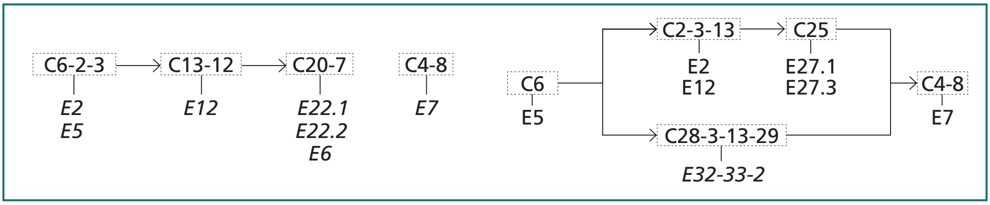


Figura 4: Dos caminos de aprendizaje para tareas de traducción de expresiones del lenguaje natural al lenguaje algebraico: "la suma de dos números consecutivos" (izquierda), relacionada con la terminología y "El perímetro de un cuadrado de lado x" (derecha), de contexto geométrico.

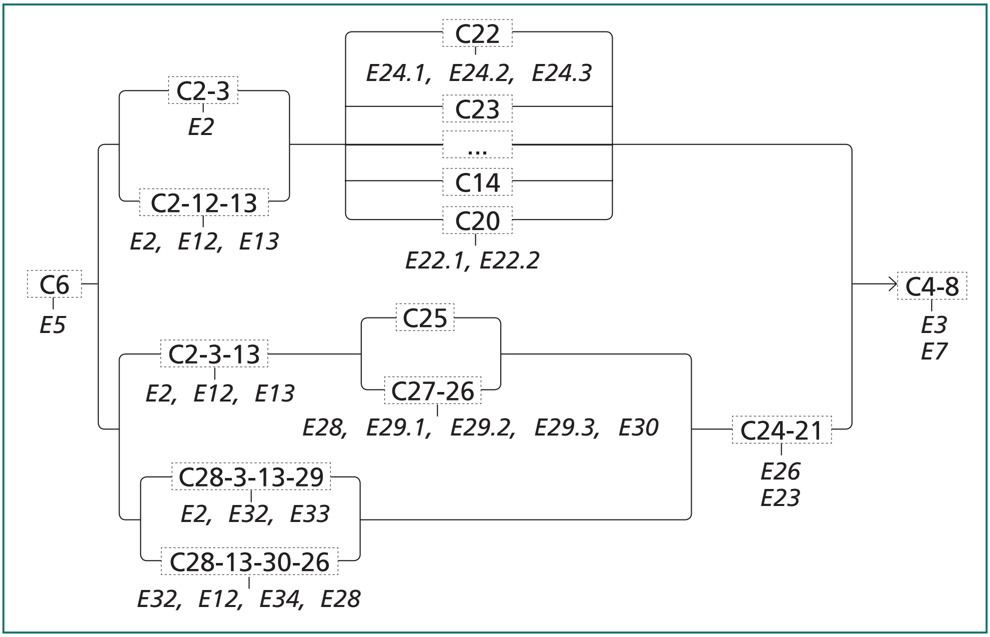


Figura 5: Grafo de nuestro objetivo de aprendizaje.

Grafo del objetivo de aprendizaje

El grafo de nuestro objetivo de aprendizaje muestra las diferentes capacidades que deben activarse en un alumno cuando este ha aprendido a traducir expresiones del lenguaje natural al algebraico y de los errores en los que puede incurrir cuando no se ha producido el aprendizaje. Aquel que se obtiene a partir del análisis de errores está conformado por la reunión de los grafos de todos los caminos que pronosticamos para las tareas del test y puede verse en la figura 5.

La rama superior representa las capacidades relacionadas con la terminología que deben desarrollar los alumnos (los lados en paralelo C22, C23, etc. muestran capacidades y errores referidos al vocabulario), mientras que en la rama inferior los dos caminos paralelos de abajo describen capacidades relacionadas con la geometría. Al igual que en

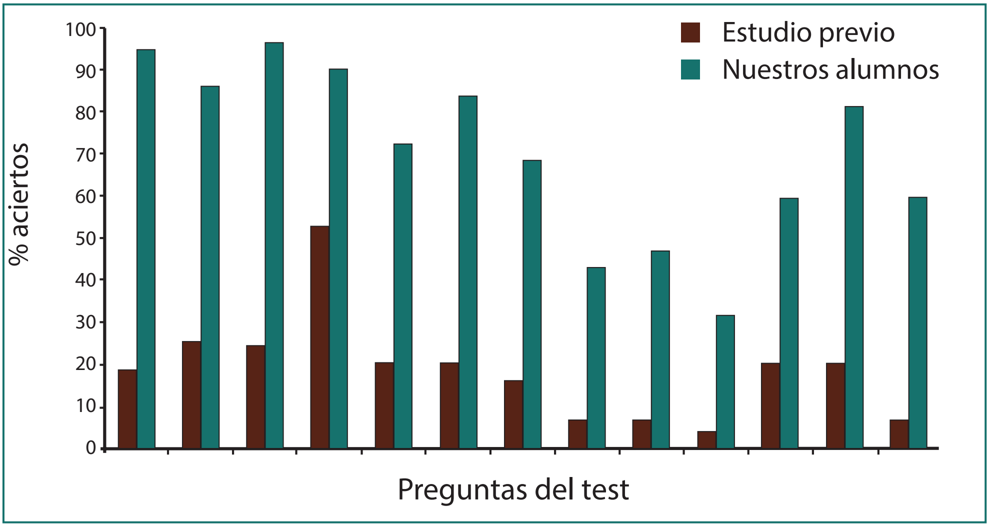


Figura 6: Comparativa entre los porcentajes de respuestas correctas entre los alumnos del estudio previo y los alumnos que siguieron la THA.

la Ilustración 4 (derecha), se observan las dos estrategias útiles para resolver las tareas de contexto geométrico. El resto de capacidades deben activarse en ambas ramas.

Este grafo constituye una herramienta efectiva para evaluar cualquier actividad que queramos proponer en relación al objetivo de aprendizaje. Para ello, debemos observar qué capacidades se activan a la hora de realizar la tarea y compararlas con las secuencias de capacidades incluidas en los posibles caminos del grafo. De esta manera seleccionamos las tareas de instrucción de nuestra THA, que pueden consultarse en Amador (2015).

PUESTA EN PRÁCTICA Y REFORMULACIÓN DE LAS HIPÓTESIS

Una vez trabajadas en el aula las tareas de instrucción, observamos la incidencia de los errores de que motivaron nuestro estudio, ya que tanto el éxito de nuestra investigación como la reformulación de nuestras hipótesis dependen de la corrección de los errores. A continuación, resumimos la comparación entre las respuestas de los alumnos que trabajaron a partir de las tareas de la THA y las de los alumnos del estudio previo (que se expone más extensivamente en Amador, 2015).

Resultados de los alumnos que siguieron nuestra instrucción

Ante la cuestión de si nuestra THA incrementa el número de respuestas correctas, observamos que nuestro alumnos dan un número mayor de respuestas correctas que los alumnos del estudio previo en todas las tareas, como puede verse en la figura 6.

Además de un aumento significativo del número de respuestas correctas, vemos una disminución de tareas sin responder y una menor variabilidad en los errores cometidos: hay menos tipos diferentes de errores y cada uno de ellos aparece con menor frecuencia. También observamos la desaparición casi absoluta de respuestas numéricas y una mejora moderada en el uso de la terminología y de las actividades de contexto geométrico. No hemos detectado disminución de errores asociados a omisión de paréntesis o habilidades aritméticas.

Reformulación de las hipótesis

En vista de los resultados obtenidos, reescribimos las hipótesis sobre el aprendizaje de la siguiente manera:

- **Hipótesis 1R.** Unas tareas de instrucción que profundizan en el uso de letras para designar variables y en el uso de expresiones algebraicas como lenguaje previenen el error de buscar resultados numéricos.
- **Hipótesis 2R.** Unas tareas de instrucción que trabajan la traducción entre el lenguaje usual y las operaciones matemáticas ayudan a prevenir errores relacionados con la terminología.
- **Hipótesis 3R.** Unas tareas de instrucción que inciden en propiedades geométricas básicas ayudan a prevenir errores de formulación matemática en contextos geométricos.
- **Hipótesis 4R.** Unas tareas de instrucción que no trabajan de manera directa propiedades aritméticas no son suficientes para proporcionar una formación algebraica sólida.

CONCLUSIONES

La comprensión de cómo se produce el aprendizaje de unos contenidos matemáticos determinados está estrechamente relacionada con el diseño y optimización de las actividades de instrucción necesarias para propiciar dicho aprendizaje. En este trabajo, la dependencia docencia–investigación que induce el constructo Trayectoria Hipotética de Aprendizaje nos ha permitido estudiar cómo se produce el aprendizaje de las expresiones algebraicas en los alumnos de 1º E.S.O. conjugando la investigación sobre el aprendizaje y la labor de mejora docente. En este contexto los caminos de aprendizaje pueden ser una herramienta útil para caracterizar un objetivo de aprendizaje y materializar tareas que puedan servir para alcanzar dicho objetivo. El estudio de los errores que cometen los alumnos al realizar estas tareas nos permite conjeturar las capacidades asociadas a este tema y, por tanto, es un instrumento adecuado para concretar una THA.

La observación de los errores invita a pensar que los alumnos de educación secundaria presentan dificultades relacionadas con la terminología que afectan a su aprendizaje del lenguaje algebraico, pero no siempre están directamente relacionados con el álgebra, ya que los alumnos de nuestro estudio escriben incorrectamente palabras del lenguaje ordinario (“consecutivos”, “cinco veces”, por ejemplo) en términos de las operaciones asociadas (sumar uno o multiplicar por cinco, respectivamente), aplican de forma incorrecta fórmulas geométricas básicas y cometen errores a la hora de hacer cálculos complejos. En particular, omiten el uso de paréntesis cuando estos son necesarios.

La puesta en práctica de nuestra THA nos muestra que unas tareas de instrucción que hacen hincapié en el uso de las expresiones algebraicas, como traducción de frases del lenguaje natural al matemático, dan seguridad a los alumnos y reducen la cantidad y la variabilidad de los errores que cometen a la hora de formular situaciones dadas en lenguaje natural. En base a nuestro estudio, pensamos que se debería reforzar la terminología, las propiedades geométricas y, sobre todo, las habilidades aritméticas de los alumnos de 1º E.S.O. para que estos se puedan introducir de forma satisfactoria en el aprendizaje del álgebra.

REFERENCIAS

Amador, M. V. (2015). Una trayectoria hipotética de aprendizaje para las expresiones algebraicas basada en análisis de errores. (Trabajo Fin de Máster, documento no publicado). Universidad Complutense de Madrid. Recuperado el 5 de noviembre de 2015 de http://ugr.es/local/jmontejo/MVAmador_TFM2.pdf

Amador, M. V., Montejo-Gámez, J. y Ramírez, M. (2015). Análisis de errores y caminos de aprendizaje en la iniciación al álgebra para alumnos de 1º E.S.O. Comunicación presentada en las 17 JAEM, Cartagena, España.

Barbero, C., Fuentes, I., Azcárate, A. G. y Ortiz, M. A. (1993). Ideas y actividades para enseñar álgebra. Madrid: Síntesis.

Consejería de Educación, Juventud y Deporte de la Comunidad de Madrid, 2007. Decreto 23/2007, de 10 de mayo, del Consejo de Gobierno, por el que se establece para la Comunidad de Madrid el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria. Boletín Oficial de la Comunidad de Madrid, 29 de mayo de 2007, número 126, pp. 48-139.

De la Vega, M. L. C., Valls, J. y Ciscar, S. L. (2007). Interacción y análisis de la enseñanza: aspectos claves en la construcción del conocimiento profesional. Investigación en la Escuela, 61, 5-22.

Gravemeijer, K. (2004). Local instruction theories as means of support for teachers in reform mathematics education. Mathematical thinking and learning, 6(2), 105-128.

Gravemeijer, K. y van Eerde, D. (2009). Design research as a means for building a knowledge base for teachers and teaching in mathematics education. The Elementary School Journal, 109(5), 510-524.

Gómez, P., González, M. J. y Romero, I. (2014). Caminos de aprendizaje en la formación de profesores de matemáticas: objetivos, tareas y evaluación. Profesorado. Revista de Currículum y Formación de Profesorado, 18(3), 319-338.

Gómez, P. y Lupiáñez, J. L. (2007). Trayectorias hipotéticas de aprendizaje en la formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria. PNA, 1(2), 79-98.

Hidalgo-Carranza, Mª José (2002). Memoria del periodo de docencia e investigación del programa de doctorado "Enseñanza de las ciencias experimentales y de las matemáticas" (trabajo no publicado). Universidad de Extremadura.

Lupiáñez, J. L. (2009). Expectativas de aprendizaje y planificación curricular en un programa de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria. Tesis doctoral, Universidad de Granada. Granada.

Lupiáñez, J. L. y Rico, L. (2008). Análisis didáctico y formación inicial de profesores: competencias y capacidades en el aprendizaje de los escolares. PNA, 3(1), 35-48.

Lupiáñez, J. L., Rico, L., Gómez, P. y Marín, A. (2005). Análisis cognitivo en la formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria. Conferencia presentada en V Congresso Ibero-americano de Educaçao Matemática (CIBEM) (18-22 Jul 2005). Oporto, Portugal

Molina, M., Castro, E., Molina, J. L. y Castro, E. (2011). Un acercamiento a la investigación de diseño a través de los experimentos de enseñanza. Enseñanza de las ciencias: revista de investigación y experiencias didácticas, 29(1), 75-88.

Simon, M.A. (1995). Reconstructing Mathematics Pedagogy from a Constructivist Perspective. Journal for Research in Mathematics Education, 26(2), 114-145.

Simon, M. A. y Tzur, R. (2004). Explicating the role of mathematical tasks in conceptual learning: An elaboration of the hypothetical learning trajectory. Mathematical thinking and learning, 6(2), 91-104.

Simon, M. A., Tzur, R., Heinz, K. y Kinzel, M. (2004). Explicating a mechanism for conceptual learning: Elaborating the construct of reflective abstraction. Journal for research in mathematics education, 6(3) 305-329.

Socas, M. (2011). La enseñanza del Álgebra en la Educación Obligatoria: Aportaciones de la investigación. Números, 77, 5-34.

Socas, M., Camacho Machín, M., Palarea Medina, M. y Hernández Domínguez, J. (1996). Iniciación al álgebra. Madrid: Síntesis

Steffe, L. P. (2004). On the construction of learning trajectories of children: The case of commensurate fractions. Mathematical Thinking and Learning, 6(2), 129-162.

ANEXO I: EJEMPLOS DE LOS ERRORES DE LOS ALUMNOS DEL ESTUDIO

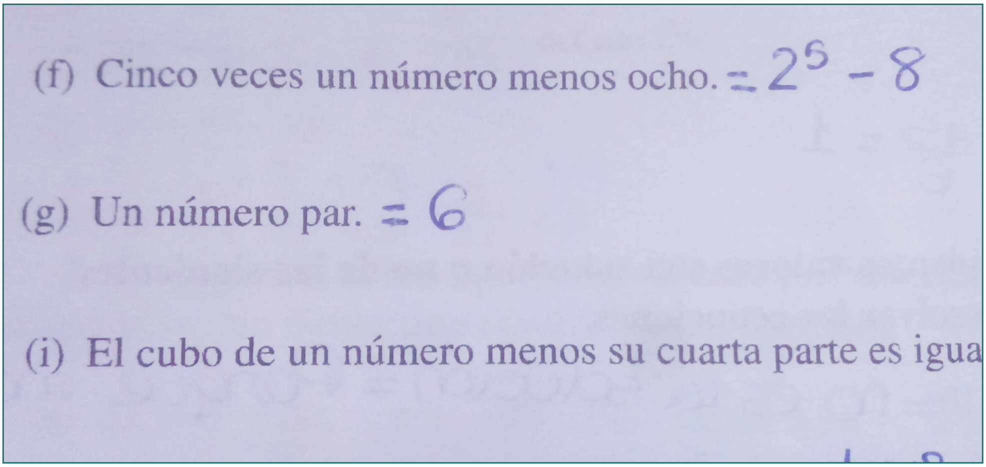


Figura I.1: Ejemplos de respuesta ante las tareas de traducir al lenguaje algebraico "la suma de dos números consecutivos" y "la suma de un número y su siguiente es 9".

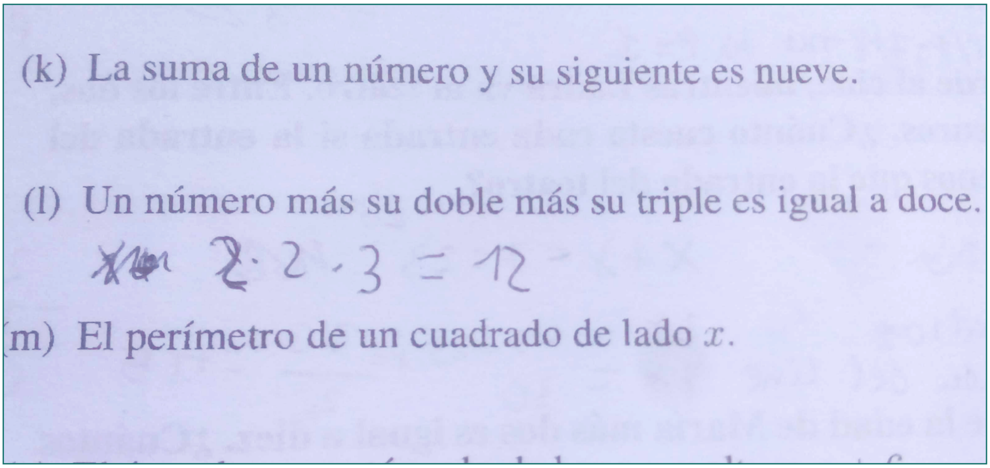
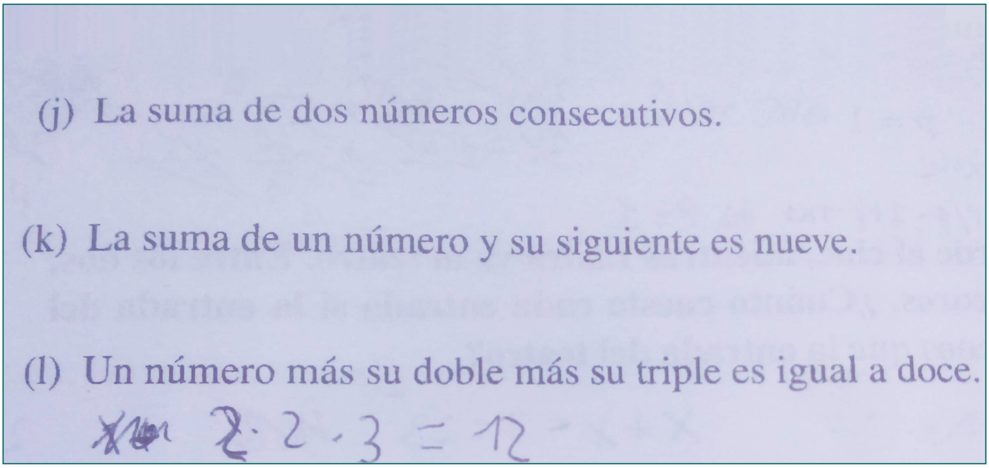


Figura I.2: Ejemplo de respuesta ante la tarea de expresar “un número más su doble más su triple es igual a doce”.



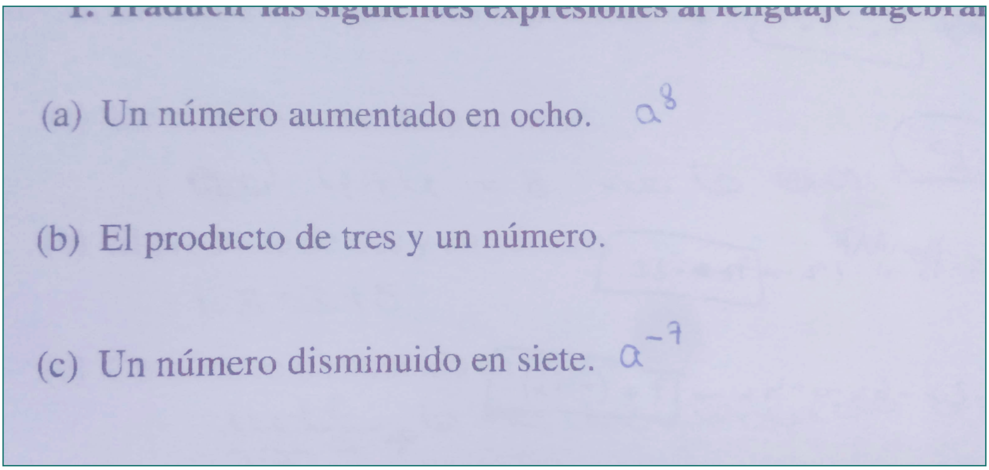
(j) La suma de dos números consecutivos.

(k) La suma de un número y su siguiente es nueve.

(l) Un número más su doble más su triple es igual a doce.

$2 \cdot 2 \cdot 3 = 12$

Figura I.3: Ejemplo de respuesta ante la tarea de traducir al lenguaje algebraico "la suma de dos números consecutivos".



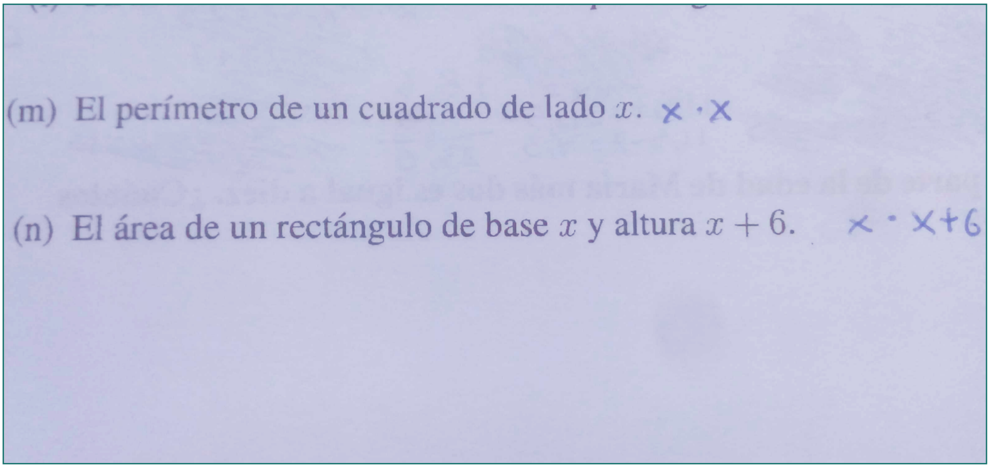
1. Traducir las siguientes expresiones al lenguaje algebraico

(a) Un número aumentado en ocho. a^8

(b) El producto de tres y un número.

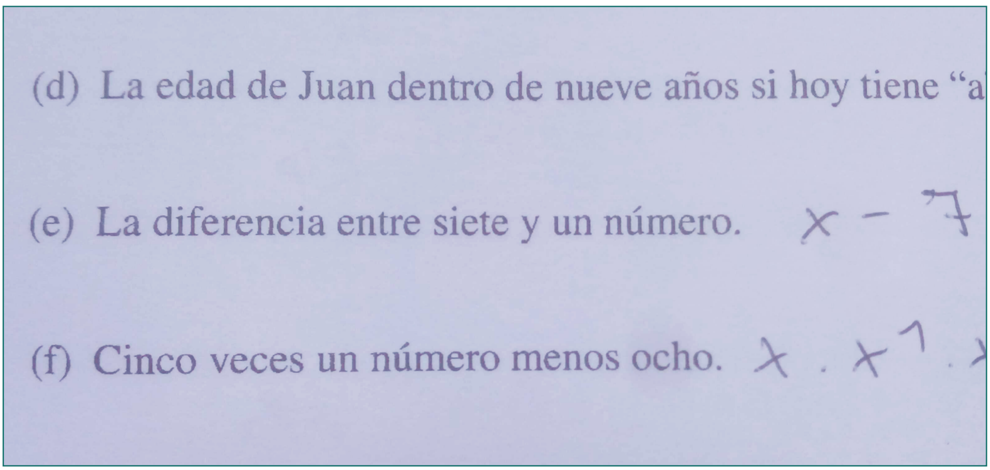
(c) Un número disminuido en siete. a^{-7}

Figura I.4: Ejemplos de otros errores de vocabulario.


(m) El perímetro de un cuadrado de lado x. x · x

(n) El área de un rectángulo de base x y altura $x + 6$. x · x+6

Figura I.5: Ejemplo de la omisión de paréntesis necesarios.


(d) La edad de Juan dentro de nueve años si hoy tiene “a

(e) La diferencia entre siete y un número. x − 7

(f) Cinco veces un número menos ocho. x . x

Figura I.6: Ejemplo de respuesta ante la tarea de traducir al lenguaje algebraico “la diferencia entre 7 y un número”.

ANEXO II: ERRORES Y CAPACIDADES (AMADOR, MONTEJO-GÁMEZ Y RAMÍREZ, 2015)

Errores

- E1: No asocia "aumentar" con la operación de sumar.
  - E1.1: Asocia "aumentar" con la operación de multiplicar.
  - E1.2: Asocia "aumentar" con la operación de elevar a cierta potencia.
  - E1.1: Asocia "aumentar" con el signo + pero no con la operación de sumar.
- E2: No utiliza letras para designar cantidades indeterminadas.
- E3: Ignora parte de la expresión del lenguaje natural.
- E4: No asocia "disminuir" con la operación de restar.
  - E4.1: Asocia "disminuir" con la operación de dividir.
  - E4.2: Asocia "disminuir" con la operación de elevar a potencias negativas.
  - E4.3: Asocia "disminuir" con el signo - pero no con la operación de restar.
  - E4.4: Asocia "disminuir" con una raíz.
  - E4.5: Asocia "disminuir" con elevar.
- E5: Proporciona resultados numéricos.
- E6: No utiliza operaciones aritméticas.
- E7: Escribe cualquier expresión algebraica en forma de ecuación.
- E8: No asocia "producto" con la operación de multiplicación.
  - E8.1: Asocia el producto con la suma.
  - E8.2: Asocia el producto con el cociente.
- E9: Asocia "y" con la operación de sumar.
- E10: No utiliza el producto como una operación binaria.
- E11: No asocia "dentro de" a la operación de sumar.
  - E11.1: Asocia "dentro de" a la operación de multiplicar.
  - E11.2: Asocia "dentro de" a la operación de elevar.
  - E11.1: Asocia "dentro de" a la operación de restar.
- E12: Añade letras que no deben estar.
- E13: Cambia la letra dada por otra.
- E14: No asocia "diferencia" con la operación de restar.
  - E14.1: Asocia "diferencia" con la operación de sumar.
  - E14.2: Asocia "diferencia" con el signo "menos" pero no con la operación de restar.
  - E14.3: Asocia "diferencia" con la operación de dividir.
  - E14.4: Asocia "diferencia" con la operación de multiplicar.
  - E14.5: Utiliza la palabra "diferencia" como equivalente a "distinto".
- E15: Cambia el orden de minuendo y sustraendo en una diferencia.
- E16: No asocia "cinco veces" con multiplicar por cinco.
  - E16.1: Asocia "cinco veces" con potencia.
  - E16.2: Asocia "cinco veces" con otras operaciones.
- E17: No asocia "número par" a multiplicar por dos.
  - E17.1: Asocia "número par" a elevar al cuadrado.

- E17.2: Asocia "número par" a sumar dos.
- E18: Escribe la cuarta parte de un número como 1/4.
- E19: No asocia el cubo con la potencia tres.
  - E19.1: Asocia el cubo de un número con el cuadrado de un número.
  - E19.2: Asocia el cubo con otras operaciones.
- E20: No asocia "la cuarta parte de un número" con dividir entre cuatro.
  - E20.1: Asocia "la cuarta parte" con la potencia cuarta.
  - E20.2: Asocia "la cuarta parte" con otras operaciones.
- E21: Cambia la información dada.
- E22: No escribe correctamente dos números consecutivos.
  - E22.1: Toma "números consecutivos" como dos números iguales.
  - E22.2: Toma "números consecutivos" con otras operaciones..
- E23: Concatena operaciones numéricas de forma equivocada.
- E24: No escribe "el doble de un número" de manera correcta.
  - E24.1: Identifica "el doble de un número" con el número dos.
  - E24.2: Identifica "el doble de un número" con el cuadrado de ese número.
  - E24.3: Identifica "el doble de un número" con otras operaciones.
- E25: No escribe "el triple de un número" de manera correcta.
  - E25.1: Identifica "el triple de un número" con el número tres.
  - E25.2: Identifica "el triple de un número" con el cubo del número.
  - E25.3: Identifica "el triple de un número" con otras operaciones.
- E26: Opera mal.
- E27: Escribe el perímetro de un cuadrado incorrectamente.
  - E27.1: Multiplica los cuatro lados del cuadrado para calcular el perímetro de un cuadrado.
  - E27.2: Escribe el área del cuadrado para calcular el perímetro de un cuadrado.
  - E27.3: Escribe dos por el lado para calcular el perímetro de un cuadrado.
  - E27.4: Escribe otras operaciones para calcular el perímetro de un cuadrado.
- E28: No escribe paréntesis en productos en los que algún factor es una suma.
- E29: Escribe incorrectamente la fórmula del área de un rectángulo.
  - E29.1: Escribe fórmulas sin sentido aparente en lugar de la fórmula del área de un rectángulo.
  - E29.2: Escribe el área del triángulo en lugar de la fórmula del área de un rectángulo.
  - E29.3: Escribe el perímetro del rectángulo en lugar de la fórmula del área de un rectángulo.
- E30: Escribe el perímetro cuando le preguntan por el área.
- E31: No escribe correctamente "el siguiente de un número".
  - E31.1: Toma el número y su siguiente como iguales.
  - E31.2: Toma "el siguiente de un número" como una variable independiente.
  - E31.3: Comete otros errores al escribir "el siguiente de un número".
- E32: Hace una descripción gráfica equivocada de una situación geométrica descrita en el lenguaje natural.
- E33: Escribe incorrectamente el perímetro de un cuadrado a partir de su representación gráfica.

- E34: Escribe incorrectamente el área de un rectángulo a partir de su representación gráfica.

Capacidades

Relacionadas con el vocabulario aritmético:

- C1: Denotar "aumentar" con la operación de sumar.
- C5: Denotar "disminuir" con la operación de restar.
- C9: Denotar "producto" con la operación de multiplicar.
- C10: Reconocer la función de "y" como conjunción (y no como suma).
- C11: Denotar "dentro de" con la operación de sumar.
- C14: Denotar la "diferencia" con la operación de restar.
- C16: Denotar"n veces" con la operación de multiplicar por n.
- C17: Denotar un "número par" con la operación de multiplicar por 2.
- C18: Denotar "la n-ésima parte" con dividir entre n.
- C19: Denotar "cubo" con una potencia de exponente 3.
- C20: Escribir "números consecutivos" como aquellos cuya diferencia es 1.
- C22: Denotar "el doble" con la operación de multiplicar por 2.
- C23: Denotar "el triple" con la operación de multiplicar por 3.
- C31: Denotar "siguiente" con sumar 1.

Relacionadas con el vocabulario geométrico:

- C25: Expresar adecuadamente la fórmula del perímetro de un cuadrado.
- C27: Expresar adecuadamente la fórmula del área de un rectángulo.
- C28: Representar gráficamente de forma adecuada una situación geométrica descrita en el lenguaje natural.
- C29: Expresar adecuadamente el perímetro de un cuadrado a través de la interpretación de un gráfico.
- C30: Expresar adecuadamente el área de un rectángulo a través de la interpretación de un gráfico.
- *Referidas a la concepción y manejo de expresiones algebraicas como lenguaje*:
- C2: Identificar cantidades desconocidas en un texto escrito en el lenguaje natural.
- C3: Emplear letras para representar cantidades desconocidas.
- C4: Incluir adecuadamente toda la información recibida.
- C7: Emplear las operaciones aritméticas como reflejo de su denominación en el lenguaje natural.
- C6: Utilizar las expresiones algebraicas como lenguaje en lugar de proporcionar resultados numéricos.
- C8: Utilizar las expresiones algebraicas como lenguaje en lugar de buscar "soluciones" a través del signo "=".

- C12: Utilizar solo una letra para describir cantidades desconocidas pero relacionadas.
- C13: Utilizar el mínimo número de letras necesarias al escribir las expresiones algebraicas.

Expresan habilidades aritméticas:

- C15: Respetar las propiedades de las operaciones involucradas al expresarlas.
- C26: Utilizar paréntesis para expresar productos en los que algún factor es una suma.
- C24: Operar correctamente.
- C21: Concatenar igualdades de forma adecuada.

Una propuesta didáctica en 3º E.S.O para trabajar el pensamiento matemático avanzado haciendo uso de Scratch

Miguel Ángel Baeza-Alba y Francisco Javier Claros-Mellado
Universidad Complutense de Madrid
Mª Teresa Sánchez-Campaña
Universidad de Málaga

RESUMEN: *En este trabajo se presenta una propuesta didáctica llevada a cabo con alumnos de 3º de E.S.O, basada en la programación del Algoritmo de Euclides para el Máximo Común Divisor, con la herramienta tecnológica Scratch. Esta propuesta permitió trabajar, elementos propios del Pensamiento Matemático Avanzado (PMA) como son la abstracción, la formalización y la generalización a través de una metodología basada en la Teoría de las Situaciones Didácticas (TSD). Se observó cómo el diseño de las fichas de trabajo, siguiendo la TSD, junto con la organización de la clase en grupos, favoreció el debate y la obtención de resultados.*
PALABRAS CLAVE: *Algoritmo, Scratch, Máximo Común Divisor, Pensamiento Matemático Avanzado, Teoría de las Situaciones Didácticas.*

A methodological approach in 3rd E.S.O to work the advanced mathematical thinking using Scratch

ABSTRACT: *In this document we will carry out a methodological approach with the students from 3º E.S.O based on programming Euclides Algorithm for the Greatest Common Divisor (MCD) with Scratch technological tool. This proposal allows working elements of Advanced Mathematical Thinking (PMA) such as abstraction, formalization and generalization. The methodology followed is based on the Theory of Didactic Situations (TSD). In addition, the design of the worksheets, following the TSD, along with the organization of the class into groups, favored the debate and achieving results.*
KEYWORDS: *Algorithm, Scratch, Greatest Common Divisor, Advanced Mathematical Thinking, Theory of Didactic Situations*

INTRODUCCIÓN

Las nuevas tecnologías de la información y la comunicación se definen según Adell (1997, p.7) como: "*... el conjunto de procesos y productos derivados de las nuevas herramientas (hardware y software), soportes de la información y canales de comunicación relacionados con el almacenamiento, procesamiento y transmisión digitalizados de los datos*".

La sociedad está cambiando y nuestros alumnos con ella. Cada vez más, las nuevas tecnologías de la información están en todos los ámbitos de nuestra vida y, por tanto, deben estar también en la escuela. Este hecho va a llevar emparejado una serie de cambios; Pérez (1998) sugirió reconceptualizar el alcance de lo educativo, reformular el currículo e innovar en las estrategias educativas.

Pero es claro que, para hacer un buen uso de la tecnología en el aula, el profesorado necesita formación en nuevas metodologías de trabajo que le permitan adaptarse al nuevo entorno en el que se encuentra. Pascual (1998) advierte que el uso del ordenador no supone una mejora si no va acompañado de un adecuado planteamiento metodológico en el que se deben incluir los objetivos y contenidos a trabajar y el software más adecuado para hacerlo; el uso que hagamos del ordenador en el aula, tiene que formar parte de una actividad que haya sido diseñada previamente por el profesor. Para llevar a cabo este planteamiento pedagógico, los profesores deben tener una sólida formación en las herramientas que se van a manejar.

Ricoy y Couto (2012) señalan los beneficios, controversias y mejoras que puede aportar la introducción de las TIC en el aula. Entre las dificultades en su utilización señalan como importantes la desmotivación de ciertos docentes ante su uso y la escasez de medios tecnológicos en algunos centros. Por el contrario, aseguran que ayuda a atender a la diversidad y favorece la comunicación bidireccional.

Han surgido muchos programas en los últimos años para trabajar las matemáticas, que pretenden ser una herramienta útil en la enseñanza de las mismas. Fernández y Muñoz (2007) hacen un recorrido sobre los programas matemáticos que más suelen emplearse en el aula. Mencionan, entre otros, Wiris, Geogebra, Cabri y Derive, así como páginas web que aportan información y ejercicios para trabajar las matemáticas. No hemos encontrado entre las actividades propuestas, ninguna relacionada con la programación.

Scratch es un software libre desarrollado por Lifelong Kindergarten Group de los Laboratorios Media-Lab en MIT. Es un lenguaje gráfico que permite programar uniendo bloques predefinidos. Su fácil manejo hace que pueda iniciarse en él a edades muy tempranas. En la actualidad, hay muchas funcionalidades que pueden aplicarse a Scratch y que son objeto de investigación. Carralero (2011) señala como funcionalidad importante el hecho de manejar la programación implícita en Scratch para trabajar un contenido de primaria y secundaria. Asimismo señala que para abordar determinados elementos de la programación (por ejemplo los bucles), es necesario que los alumnos se encuentren al menos en 3º ESO, ya que a esa edad éstos empiezan a poseer un pensamiento lógico-abstracto. En la construcción del programa a desarrollar, puede ser necesaria la resolución de algoritmos, elementos muy importantes en el desarrollo de las matemáticas.

De acuerdo con su origen, el término algoritmo debería hacer referencia a las distintas técnicas calculistas surgidas en el campo aritmético. No obstante, al haber sido traspasados en la actualidad los límites de la aritmética, se pueden encontrar definiciones como las siguientes:

> "Un algoritmo es una sucesión finita de reglas elementales, regidas por una prescripción precisa y uniforme, que permite efectuar paso a paso, en un encadenamiento estricto y riguroso, ciertas operaciones de tipo ejecutable, con vistas a la resolución de los problemas pertenecientes a una misma clase" (Ifrah, 2008, p. 1616)
>
> "Un algoritmo es una prescripción, una orden o sistema secuenciado de órdenes que encadenan una serie de operaciones elementales que llevan desde los datos iniciales al resultado" (Gairín y Sancho, 2002, p. 83)

Si las Matemáticas tienen como objetivo prioritario resolver problemas y encontrar soluciones a cuestiones cada vez más difíciles, parece que la necesidad de utilizar algoritmos está totalmente justificada.

Usiskin (1998), por su parte, enumera hasta nueve razones diferentes por las que es útil saber y enseñar algoritmos matemáticos: son eficaces, fiables, precisos, rápidos, proporcionan un registro escrito, establecen una imagen mental, son instructivos, pueden ser utilizados en otros algoritmos y pueden ser objetos de estudio (comparación de eficacia, características matemáticas, análisis de velocidad, entre otras características).

En este documento llevaremos a cabo una propuesta didáctica que pretende trabajar el Pensamiento Matemático Avanzado, en el sentido de Tall (1991), con alumnos 3º E.S.O en la asignatura Matemáticas para las Enseñanzas Académicas. Para ello se trabajará el Algoritmo de Euclides para el cálculo del M.C.D, utilizando la herramienta Scratch.

El carácter iterativo del algoritmo de Euclides para calcular el M.C.D, es una de las razones principales por las que consideramos que este concepto puede ser tratado a partir de la herramienta tecnológica Scratch, proporcionando un aprendizaje significativo del concepto e introduciendo a los alumnos en los procesos cognitivos propios del Pensamiento Matemático Avanzado. Marmolejo y Campos (2012) señalan la importancia de la introducción del Scratch incluso en primaria, ya que puede hacer que los alumnos desarrollen capacidades intelectuales de orden superior como son el análisis, la síntesis, la conceptualización, etc. Estas capacidades prepararán sin lugar a duda para el desarrollo de conceptos de una dificultad superior.

El documento se organiza en torno a seis apartados. El primero es la presente introducción. En el segundo señalamos los objetivos de la investigación. En el tercero, denominado marco teórico, describiremos dos teorías en las que nos apoyaremos: el Pensamiento Matemático Avanzado y la Teoría de las Situaciones Didácticas. En el cuarto describimos la metodología que vamos a utilizar. En el quinto describimos los resultados obtenidos en la ficha tres y por último, en el sexto, señalamos las principales conclusiones obtenidas, así como las perspectivas futuras que esperamos abordar.

OBJETIVOS

El DECRETO 48/2015, de 14 de mayo, del Consejo de Gobierno, por el que se establece para la Comunidad de Madrid el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria, establece para 3ºESO en el apartado dedicado a las matemáticas para las enseñanzas académicas, las siguientes recomendaciones:

- *Planificación en el proceso de resolución de problemas en la que se desarrollen estrategias de resolución y reflexión sobre los resultados obtenidos.*
- *Planteamiento de investigaciones matemáticas en las que se pongan en práctica los procesos de matematización y modelización.*
- *Utilización de los medios tecnológicos en el proceso de aprendizaje.*

En esta investigación tendremos en cuenta estos tres elementos para resolver el problema siguiente: "Diseñar e implementar un algoritmo en Scratch que permita calcular el MCD de dos números naturales".

La resolución de este problema lleva implícito el uso de unas formas de pensamiento denominadas Pensamiento Matemático Avanzado, que son propias de una matemática superior. Entre los elementos que forman parte de este tipo de pensamiento se encuentran: abstracción, generalización, formulación de hipótesis, modelización y desarrollo lógico de un proceso. Estos serán los elementos que pretendemos que los alumnos desarrollen y que tradicionalmente no están presentes en la enseñanza secundaria. Esto último, según nuestra experiencia como docentes, puede ser debido a temarios muy extensos que llevan más a la enseñanza de procedimientos que a la enseñanza de conceptos y aplicaciones de los mismos.

Los objetivos que pretendemos conseguir en esta investigación son los siguientes:

- O1. Iniciar a los alumnos en el razonamiento lógico-matemático a través del diseño del algoritmo del MCD en 3ºESO.
- O2. Potenciar en los alumnos el uso de la abstracción a través de la traducción a Scratch del algoritmo diseñado. Es decir, potenciar la abstracción a través de la implementación del algoritmo para el MCD en Scratch.
- O3. Formular hipótesis que permitan ser contrastadas a través del algoritmo diseñado e implementado.
- O4. Introducir en los alumnos el concepto de generalización a partir de la comprobación de casos particulares en la aplicación creada (números primos entre sí, números uno múltiplo del otro, números iguales, etc.)
- O5. Valorar el concepto de modelo matemático.

Para conseguir estos objetivos nos apoyaremos en el marco teórico que describimos a continuación.

MARCO TEÓRICO

Nuestro marco teórico se sustenta en dos teorías didácticas. La primera teoría, Pensamiento Matemático Avanzado (PMA), se usará para determinar los procesos implicados en el diseño e implementación del algoritmo de Euclides para calcular el MCD con Scratch. Nos basaremos en ella para elegir el contenido y la secuenciación de las actividades. A su vez, éstas estarán diseñadas siguiendo la Teoría de Situaciones Didácticas.

Pensamiento Matemático Avanzado (PMA)

En 1985, en el seno del grupo Psicologist Mathematic Education (PME), se formó un grupo de trabajo denominado Pensamiento Matemático Avanzado. El objetivo de dicho grupo era investigar los procesos implicados en la construcción de conceptos que por su naturaleza y dificultad formaban parte de la matemática superior. A partir de ese momento, el interés en didáctica de la matemática se empieza a centrar en la problemática del aprendizaje en términos de procesos cognitivos y no como una simple adquisición de competencias y habilidades; además, se produjo una evolución en las investigaciones que se empezaron a preocupar de tópicos que pertenecen a una "matemática superior", tales como los límites, las derivadas o las integrales.

Entre los procesos involucrados en el PMA, los más importantes son la abstracción y la generalización. Dreyfus (1991) define la abstracción como un proceso de construcción de objetos mentales a partir de objetos matemáticos y la generalización como la derivación e inducción de particulares para identificar generalidades y extender dominio de validez.

Señalamos las dificultades para distinguir la línea que separa el Pensamiento Matemático Elemental (PME) del Pensamiento Matemático Avanzado (PMA). Tall (1985; 1991) afirma que el paso del PME al PMA implica una transición significativa que requiere una reconstrucción cognitiva. Esta reconstrucción implica pasar del "describir" a "definir" y pasar del "convencer" a "demostrar".

Robert y Swarzenberger (1991) señalaron una serie de diferencias entre el pensamiento elemental y el avanzado:

- En el Pensamiento Matemático Avanzado los alumnos tienen que aprender más conceptos en menos tiempo y además éstos son presentados de manera formal.
- Los conceptos enseñados llevan asociadas las siguientes propiedades: generalización, abstracción y formalización; propiedades que pueden entrar en conflicto con el conocimiento anterior que se tenía sobre el concepto.
- Los alumnos se enfrentan a una amplia gama de problemas que nacen de una variedad de contextos, los cuales no pueden ser discutidos en todo detalle.

Estas diferencias entre el Pensamiento Matemático Elemental y el Pensamiento Matemático Avanzado propuestas por Tall (1985; 1991) y Robert y Swarzenberger (1991) fueron rebatidas por Edwards, Dubinsky y McDonald (2005); los cuales, además de proponer una definición alternativa de Pensamiento Matemático Avanzado, señalan que un concepto se considerará dentro del Pensamiento Matemático Avanzado dependiendo de los aspectos de este que se traten.

Edwards, Dubinsky y McDonald (2005; pp.17-18) proponen la siguiente definición de Pensamiento Matemático Avanzado:

> "Pensamiento que requiere deductivo y riguroso razonamiento acerca de nociones matemáticas que no nos son enteramente accesibles a través de los cinco sentidos".

Teniendo en cuenta todo lo anterior, si se realiza un tratamiento procedimental de un concepto, dicho concepto quedará fuera del Pensamiento Matemático Avanzado, a pesar de que sea uno que por su naturaleza debiera formar parte de él.

Teoría de las Situaciones Didácticas (TSD)

La Teoría de las Situaciones Didácticas (TSD) apareció en 1970. Nació como un método simple de descripción y de interrogación matemática de los dispositivos psicológicos y didácticos. Es una teoría para la enseñanza de las matemáticas que se basa en una concepción constructivista del aprendizaje. Según Brousseau (1986; p. 11):

> "El alumno aprende adaptándose a un medio que es factor de contradicciones, de dificultades, de desequilibrios, un poco como lo hace la sociedad humana. Este saber, fruto de la adaptación del alumno, se manifiesta por respuestas nuevas que son la prueba del aprendizaje."

Según Brousseau (2011), la teoría de las situaciones didácticas modeliza las condiciones bajo las cuales los seres humanos producen, comunican y asimilan los conocimientos matemáticos. Estas condiciones son modelizadas por sistemas llamados "situaciones", que conducen a agentes en interacción con ellas a manifestar este conocimiento. Son pues específicas del conocimiento en juego.

Algunas situaciones requieren de un conocimiento previo para poder tener éxito en alcanzar el nuevo conocimiento, pero hay otras situaciones en las que el sujeto puede construir por sí mismo el conocimiento requerido sin recurrir a ningún conocimiento anterior.

Brousseau (1998) distingue, en el campo de la enseñanza de las matemáticas, dos tipos de situaciones: las didácticas y la a-didácticas (generalmente incluidas como una fase, dentro de las situaciones didácticas).

Panizza (2003; p.4) define de forma concisa y clara el concepto de situación didáctica:

> "La situación didáctica es una situación construida intencionalmente con el fin de hacer adquirir a los alumnos un saber determinado."

Brousseau (1986) describe el término de situación a-didáctica (o fase a-didáctica dentro de una situación didáctica) refiriéndose a toda situación en la que se hace necesario que el alumno ponga en práctica los conocimientos que se pretende que aprenda sin la intervención del profesor, y que además, la situación en sí misma tiene la capacidad de verificar si las decisiones que toma el alumno son acertadas o no.

Se distinguen tres tipos de situaciones (véase, Panizza (2003)):

- Situaciones de acción: el alumno debe actuar sobre un medio (material, o simbólico); la situación requiere solamente la puesta en acto de conocimientos implícitos.
- Situaciones de formulación: un alumno (o grupo de alumnos) emisor debe formular explícitamente un mensaje destinado a otro alumno (o grupo de alumnos) receptor que debe comprender el mensaje y actuar (sobre un medio, material o simbólico) en base al conocimiento contenido en el mensaje.
- Situaciones de validación: dos alumnos (o grupos de alumnos) deben enunciar aserciones y ponerse de acuerdo sobre la verdad o falsedad de las mismas. Las afirmaciones propuestas por cada grupo son sometidas a la consideración del otro

grupo, que debe tener la capacidad de "sancionarlas", es decir ser capaz de aceptarlas, rechazarlas, pedir pruebas, oponer otras aserciones.

Otro concepto clave es el de institucionalización. Brousseau (1994) lo definió como la fase del proceso didáctico en la que, por un lado, el profesor verifica el aprendizaje del alumno, y por otro, el alumno verifica el objeto de enseñanza. En la institucionalización, el profesor realiza una revisión de las actividades realizadas y le da un estatus oficial. En ese momento, el contenido matemático pasa a formar parte del saber de la clase.

METODOLOGÍA

En este apartado describimos la metodología que se siguió a lo largo de toda la secuencia para cumplir con los objetivos propuestos.

Para ello se diseñaron siete fichas de trabajo que se llevaron a cabo con un grupo de 23 alumnos de 3º de la E.S.O de Matemáticas para las Enseñanzas Académicas del Colegio Concertado Liceo San Pablo de Leganés. Las fichas fueron realizadas por once equipos de dos alumnos cada uno y un último equipo de un único alumno. Los equipos fueron nombrados por el profesor, intentando que todos ellos estuviesen equilibrados. Al ser un número impar de alumnos, fue necesario formar un grupo de 3 o un grupo de 1. Finalmente se decidió formar un grupo de 1, situando en dicho grupo al alumno con mejores aptitudes para la tecnología. El tiempo dedicado a cada una de las fichas se describe a continuación. Las fichas de los diferentes grupos fueron recogidas por el profesor al acabar el tiempo fijado.

La ficha 0 tenía como objetivo familiarizar a los alumnos con el lenguaje de programación Scratch. Aunque los alumnos tenían ciertas nociones del mismo gracias a la asignatura de Tecnología, Programación y Robótica; no dominaban el uso de las variables y bucles, indispensables para nuestra secuencia. Por tanto, fue necesaria una introducción previa para no convertir la herramienta en un obstáculo para el aprendizaje. El tiempo dedicado para la misma fue de dos sesiones de 55 minutos cada una.

La ficha 1 tenía como objetivo introducir a los alumnos la noción de algoritmo, señalando la importancia que éstos tienen en matemáticas. La ficha se inició con la explicación del algoritmo de Euclides para el máximo común divisor. Se pusieron dos ejemplos sobre cómo llevarlo a la práctica y a continuación se pidió a los alumnos que realizaran 4 ejercicios de aplicación del mismo. El profesor creyó pertinente realizar los ejemplos resueltos en la pizarra, para así conseguir que todos los alumnos comprendiesen perfectamente el procedimiento de cálculo, ya que dicho algoritmo no era conocido previamente por los estudiantes. Durante la explicación del algoritmo, el profesor se ayudó de una tabla, que recogía en cada paso cual era el dividendo, divisor y resto. Para el caso del MCD de 150 y 90 (primer ejemplo explicado a los alumnos), la mencionada tabla fue la siguiente:

DIVIDENDO	DIVISOR	RESTO
150	90	60
90	60	30
60	30	0

Tabla 1. Tabla para la resolución del ejemplo 1 de la Ficha 1

El objetivo de la presente tabla fue el de hacer comprender a los alumnos cual era la condición de parada (resto 0) y hacerles comprender también cuál es el resultado que da el algoritmo al MCD (el último divisor). Cabe mencionar que dicha tabla constituyó una ayuda inestimable para la resolución de los ejercicios por los alumnos, ya que todos los grupos hicieron uso de ella para resolverlos. La duración asignada a esta ficha fue una sesión de 55 minutos.

La ficha 2 estaba encaminada a conseguir que los alumnos fueran capaces de diseñar diagramas de flujo, a partir de un determinado algoritmo. Estos diagramas son un instrumento útil y previo a la programación de una aplicación; no son más que una representación gráfica de los pasos que deberán seguir a la hora de programar el algoritmo. Con dicho diseño pretendemos iniciar a los alumnos en el razonamiento lógico matemático, además de potenciar la abstracción (objetivos 1 y 2). La ficha comenzó presentando tres ejemplos concretos sobre cómo realizar el diagrama de flujo para tres algoritmos: ordenación de dos números, cálculo de la suma, resta, multiplicación y división de dos números y por último, clasificación de un número en primo o compuesto. Dichos diagramas de flujo, fueron explicados por el profesor. A continuación se propuso que cada grupo realizara el diagrama de flujo correspondiente al algoritmo de Euclides. Para analizar los resultados de esta ficha, se diseñó una tabla de categorías (Tabla 2) que permitió clasificar las respuestas obtenidas.

La duración asignada a esta ficha fue una sesión de 55 minutos cada una: la primera para la ficha 3 se llevó a cabo en el aula de informática. El objetivo de la misma fue conseguir que los alumnos programaran en Scratch el algoritmo de Euclides para el cálculo del Máximo Común Divisor de dos números naturales. La ficha comenzó mostrando el código en Scratch de los tres algoritmos que se utilizaron en la ficha anterior para ejemplificar los diagramas de flujo. Los alumnos tenían que introducirlos en Scratch y validar su funcionamiento ejecutándolos varias veces. A continuación se les pidió que intentaran diseñar el código del algoritmo de Euclides. Se reservaron para esta ficha dos sesiones de 55 minutos cada una. La primera para la realización de los tres primeros ejercicios y la segunda para el desarrollo del código del algoritmo de Euclides. Para esta última, el profesor les repartió de nuevo su ficha 2 fotocopiada, ya que podían hacer uso del diagrama de flujo que diseñaron en la misma para implementar el programa en Scratch (se repartió la ficha fotocopiada ya que no nos interesaba que fuera modificada para su posterior análisis).

Tabla 2. Tabla de categorías para el análisis de la ficha 2

CATEGORÍAS	SUBCATEGORÍAS
C1. Identificación de las representaciones del diagrama de flujo	C1.1. Los polígonos del diagrama de flujo no se corresponden en absoluto con la instrucción que deben representar. C1.2. Falta algún polígono o alguno de ellos no es el que debiese ser. C1.3. Todos los polígonos del diagrama de flujo se corresponden con el tipo de función que desempeñan (Inicio/Fin, Entrada/Salida de datos, Proceso o Decisión). No obstante, falta alguna línea de flujo en el diagrama. C1.4. Todos los polígonos del diagrama de flujo se corresponden con el tipo de función que desempeñan (Inicio/Fin, Entrada/Salida de datos, Proceso o Decisión). Además, aparecen todas las líneas de flujo.
C2. Realmacenamiento las variables si N1<N2	C2.1. No realiza este paso en el diagrama de flujo. C2.2. Realmacena las variables, pero lo hace de forma incorrecta. C2.3. Realmacena las variables de forma correcta, pero no indica cómo se procederá en la programación C2.4. Realmacena las variables de forma correcta.
C3. Identificación de la condición de parada	C3.1. No aparece en el diagrama de flujo ninguna decisión que se corresponda con una condición de parada. C3.2. Identifica que existe un bucle, pero no establece ninguna condición de parada. C3.3. Identifica que existe un bucle y establece una decisión de parada, pero esta es incorrecta. C3.4. Identifica correctamente la existencia de un bucle y su condición de parada correspondiente.
C4. Reasignación de las variables dentro del bucle	C4.1. No existe reasignación de variables dentro del bucle. C4.2. Se reasignan variables dentro del bucle, pero de forma incorrecta. C4.3. Se reasignan variables dentro del bucle de forma correcta, pero el orden no es el adecuado C4.4. Se reasignan las variables correctamente dentro del bucle.
C5. Devolución del MCD	C5.1. No se muestra al usuario ninguna información de salida, por lo que el programa no devuelve correctamente el MCD. C5.2. Se muestra al usuario una información distinta del valor del último divisor, por lo que el programa no devuelve correctamente el MCD. C5.3. Se muestra al usuario el valor del último divisor, aunque el programa no devuelve correctamente el valor del MCD, al existir fallos a lo largo del algoritmo. C5.4. El programa devuelve correctamente el MCD.

La ficha 4 supuso la institucionalización del diseño del algoritmo de Euclides a través del diagrama de flujo. Los alumnos debían comparar el diagrama de flujo que se les entregaba en esta ficha con el que realizaron en la ficha 2 para subsanar los posibles errores que habían cometido. El objetivo de esta ficha era intentar conseguir que todos los alumnos fueran capaces de implementar bien el programa en Scratch y tuvo una duración de 25 minutos.

La ficha 5 supuso la institucionalización del programa en Scratch ya que permitió calcular el MCD de dos números naturales. En dicha ficha se hizo entrega del código que permitía programar el algoritmo de Euclides. Los alumnos tenían que compararlo con el suyo y corregir los errores que tuvieran. A continuación se presentaron tres ejercicios en los que se pedía calcular el MCD de varios pares de números; además, también se solicitó que contestaran a cuestiones relativas sobre los resultados que se esperaban. El objetivo de esta ficha era que los alumnos fueran capaces de formular hipótesis que permitieran ser contrastadas a través del algoritmo diseñado e implementado (objetivo 3), además de introducir a los alumnos en el concepto de generalización a partir de la comprobación de casos particulares en la aplicación creada (objetivo 4). Esta ficha tuvo una duración de 30 minutos.

Para cuantificar los resultados obtenidos por cada grupo se diseñó el criterio de puntuaciones que figura en la tabla 3:

Tabla 3. Tabla de criterio de puntuaciones para el análisis de la ficha 4

PUNTACIÓN	CRITERIO
0	No devuelven correctamente el M.C.D para los pares de números que se muestran y, consecuentemente, no pueden formular correctamente hipótesis ni generalizar a partir de la comprobación de particulares.
2,5	Devuelven correctamente el M.C.D para los pares de números que se muestran pero no formulan correctamente hipótesis ni son capaces de generalizar a partir de la comprobación de particulares.
5	Devuelven correctamente el M.C.D para los pares de números que se muestran y son capaces de formular hipótesis de forma parcial o muy parcial.
7,5	Devuelven correctamente el M.C.D para los pares de números que se muestran y son capaces de formular hipótesis de forma correcta para dos de las tres preguntas que se proponen.
10	Devuelven correctamente el M.C.D para los pares de números que se muestran y son capaces de formular hipótesis de forma correcta, además de generalizar a partir de la comprobación de particulares.

La ficha 6 debía suponer una mejora de la aplicación creada en la ficha 5, ya que debía permitir calcular tanto el MCD como el MCM de dos números naturales. Los objetivos de la misma eran que los alumnos valorasen el concepto de modelo matemático (objetivo 5), además de hacerles formular hipótesis que fueran contrastadas a través del algoritmo diseñado e implementado (objetivo 3) e introducir a los alumnos en el concepto de generalización (objetivo 4). Se pedía que diseñaran el diagrama de flujo que permitía

Épsilon, 2016, Vol. 33 (2), nº 93, 31-46, ISSN: 2340-714X

calcular el MCM y también el código del programa que realizaría en Scratch el cálculo del MCM de dos números. La ficha acabó con varios ejercicios para que los alumnos probaran la aplicación creada y formularan hipótesis sobre los resultados que observaban. Los alumnos debían considerar el programa diseñado como un modelo matemático que permitía calcular el MCD y el MCM de dos números naturales. Se incidió en que dicho modelo podía ser mejorado. Esta ficha tuvo una duración de 55 minutos y se realizó en el aula de informática.

Nuestra metodología propone la introducción del Pensamiento Matemático Avanzado, ya que se manejan conceptos como el de algoritmo, diagrama de flujo, bucles de programación, etc, que requieren un grado de abstracción bastante importante. También hay una formalización matemática que queda expresada a través del código del programa que permite crear la aplicación y que supone una traducción de expresiones matemáticas del lenguaje usual al lenguaje algebraico. La formulación de hipótesis se realiza de manera continua y la comprobación de las mismas se realiza al final de cada ejercicio de programación y de diseño del diagrama de flujo. La generalización entra en juego cuando los alumnos comprueban que el programa funciona para los diferentes pares de números elegidos. Además de trabajar elementos propios del Pensamiento Matemático Avanzado, la forma de trabajar se adecua a la Teoría de las Situaciones Didácticas. Cada ficha es una situación didáctica en la que los alumnos tienen que trabajar por grupos. Durante estas fichas se producen los momentos de acción (los alumnos interaccionan con el problema a resolver), de formulación (dentro de cada grupo, cada alumno propone al otro su idea sobre cómo resolver el problema) y de validación (el alumno puede comprobar si el algoritmo es correcto o no, sin ayuda del profesor, simplemente ejecutándolo para varios casos distintos). La fase de institucionalización se produce cuando el profesor entrega el diagrama de flujo para el algoritmo de Euclides en la ficha 4 y el código del programa en la ficha 5. Todas estas situaciones didácticas forman parte de la situación didáctica que pretende la enseñanza del algoritmo de Euclides a través del software Scratch.

RESULTADOS

En este apartado se analizarán solamente los resultados relativos a la tercera ficha, con el fin de simplificar el análisis. Dicho análisis se realizará teniendo en cuenta las producciones de los alumnos sobre la programación del algoritmo de Euclides en Scratch.

Como se puede observar en la figura 1, el grupo 1 programó el algoritmo de Euclides prácticamente de forma correcta. Arreglaron la asignación de variables dentro del bucle, con respecto a lo que elaboraron en el diagrama de flujo e introdujeron de forma correcta la condición de parada. No obstante, como se puede observar, el programa no devuelve un resultado correcto cuando el dividendo es menor que el divisor, ya que no utilizan una variable auxiliar dentro del condicional para intercambiar las variables dividendo y divisor, error que también manifestaban en el diagrama de flujo y que no fue corregido en la programación. Penalizamos este error con 1 punto, obteniendo dicho grupo una puntuación de 9.

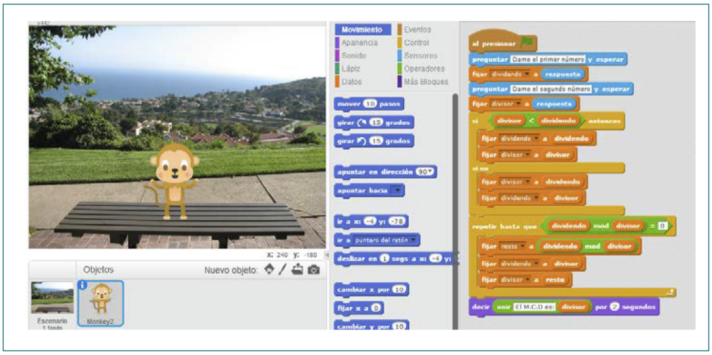


Figura 1. Resultados de la ficha 3 del grupo 1

El grupo 2 tuvo muchos más errores en la programación que el grupo anterior. Por un lado, la reasignación de variables dentro del condicional es incorrecta ya que asignan tanto a la variable dividendo como a la variable divisor, la variable dividendo. Por otro lado, la condición de parada del bucle se presenta de forma correcta, pero no asignan correctamente los valores a las variables dividendo y divisor. Penalizamos estos errores con 4 puntos (2 puntos cada uno), obteniendo dicho grupo una puntuación de 6.

Los alumnos del grupo 3, no asistieron a clase en la sexta sesión; por tanto, no se ha podido proceder al análisis de sus resultados.

El grupo 4 presentó un programa muy parecido al del grupo 1. En el caso en el que el dividendo es mayor que el divisor, el programa no funciona correctamente, ya que al no utilizar una variable auxiliar, asignan tanto a dividendo como a divisor el mismo valor en el condicional. Por otro lado, aunque el programa funciona para el caso en el que el dividendo es menor que el divisor, calculan el resto de dividir el número mayor entre el menor; algo poco intuitivo. Esto provoca una iteración más en el algoritmo y por tanto, una menor eficiencia de la que debiese tener. Penalizamos estos errores con 2 puntos (1 punto cada uno), obteniendo dicho grupo una puntuación de 8.

El grupo 5 comete el mismo error que el grupo 4 en la asignación de las variables dividendo y divisor dentro del condicional. Además, este grupo hace una asignación incorrecta de la variable divisor dentro del bucle (asignan divisor a dividendo), lo que provoca que el programa no devuelva un valor correcto para el MCD. No obstante, cabe mencionar que aunque el programa no funciona, introdujeron mejoras con respecto a lo que diseñaron en el diagrama de flujo. Penalizamos estos errores con 3 puntos (1 punto el primero y 2 puntos el segundo), obteniendo dicho grupo una puntuación de 7.

Los alumnos del grupo 6, no asistieron a clase en la sexta sesión; por lo tanto, no se ha podido proceder al análisis de sus resultados.

El grupo 7, al igual que sucedió en su diagrama de flujo, no introducen el condicional para situar en la variable dividendo el mayor de los números y en la variable divisor al menor. La condición de parada del bucle es correcta, pero calcularon dentro de éste el cociente en lugar de reasignar dividendo y divisor. Además, devuelven continuamente valores por pantalla, al situar una instrucción "decir" dentro del bucle. Los integrantes de este grupo no han asimilado que el programa únicamente debe devolver el último

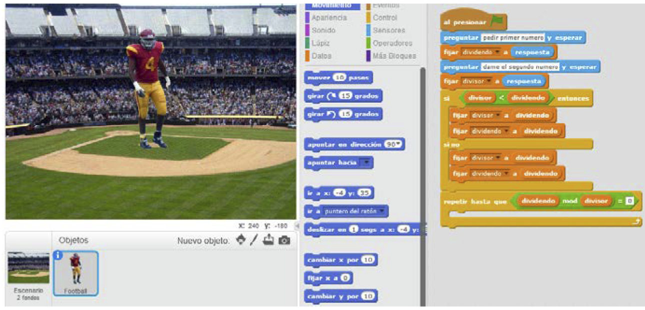


Figura 2. Resultados de la ficha 3 del grupo 11

divisor. Penalizamos estos errores con 7 puntos (1 punto el primero, 3 puntos el segundo y 3 puntos es tercero), obteniendo dicho grupo una puntuación de 3.

Los grupo 8 y 9 presentaron errores similares a los del grupo 2. La puntuación asignada a este grupo fue al igual que en el grupo 2, de 6.

El grupo 10 realiza una mejora muy sustancial en la programación en Scratch, con respecto al diseño que realizaron del diagrama de flujo. No obstante, el programa que realizan no devuelve correctamente el valor del MCD. Por un lado, piden por pantalla dos números que guardan en dos variables (n1 y n2) y que no utilizan posteriormente en el programa. Por otro lado y suponiendo que hubiesen asignado la variable n1 a dividendo y la n2 a divisor, se produce un error en el condicional cuando divisor es mayor que dividendo ya que asignan tanto a la variable resto como a la variable divisor, la variable dividendo (de nuevo por no hacer uso de una variable auxiliar). Por último, este grupo devuelve por pantalla la variable resto en lugar de la variable divisor por lo que se prevé que no han entendido correctamente el algoritmo. Penalizamos estos errores con 3 puntos (1 punto por cada uno), obteniendo dicho grupo una puntuación de 7.

El grupo 11 presenta el peor resultado, junto con el grupo 7. Establecen el condicional para intentar asignar al dividendo el mayor número y al divisor el menor pero, dentro del condicional, asignan tanto a dividendo como a divisor el valor del dividendo. Establecen el bucle e introducen la condición de parada correctamente, pero una vez ahí, no saben seguir. No devuelven nada por pantalla. Otorgamos por esto 2 puntos a dicho grupo: el primero de ellos por pedir correctamente los valores por pantalla y asignarlos a las variables dividendo y divisor y el segundo, por detectar la necesidad de un condicional para almacenar en la variable dividendo el mayor de los números y en divisor el menor, además de identificar que necesitan un bucle, aunque luego no sepan cómo usarlo. El resultado que entregan se puede observar en la figura 2.

El grupo 12 (formado por un único alumno) ofrece el mejor resultado, junto con el grupo 1. El único error que cometió este grupo fue la reasignación de las variables dividendo y divisor dentro del condicional (de nuevo y como se ha explicado antes, por la no introducción de una variable auxiliar). Penalizamos este error con 1 punto, obteniendo dicho grupo una puntuación de 9.

La siguiente tabla resume los resultados obtenidos.

Tabla 4. Tabla de puntuaciones

GRUPO	PUNTUACIÓN
1	9
2	6
3	-
4	8
5	7
6	-
7	3
8	6
9	6
10	7
11	2
12	9

CONCLUSIONES Y PERSPECTIVAS FUTURAS

En este documento hemos trabajado el MCD y el MCM, conceptos que aparecen por primera vez en 5º de Primaria y que siguen trabajándose en los primeros cursos de Secundaria. Aunque por la forma habitual de trabajar estos conceptos en el aula formarían parte de lo que denominamos Pensamiento Matemático Elemental, la manera de trabajarlos que proponemos en este documento los englobaría dentro del Pensamiento Matemático Avanzado, ya que con nuestra metodología de trabajo se favorece el razonamiento lógico-matemático, la abstracción, la generalización, la formulación de hipótesis y la justificación de las mismas. Además, el diseño de las fichas de trabajo sigue los principios de la Teoría de Situaciones Didácticas, ya que, además de favorecerse el trabajo en grupo, durante las mismas se producen los momentos de acción, de formulación y de validación. La fase de institucionalización se produce cuando el profesor entrega el diagrama de flujo para el algoritmo de Euclides en la ficha 4 y el código del programa en la ficha 5. A continuación se detallan la consecución de los objetivos:

- Consideramos que el objetivo 1 se ha alcanzado de forma satisfactoria. La mayor parte de los alumnos comprendió el funcionamiento del algoritmo de Euclides, ya que la media de las puntuaciones de todos los grupos en la ficha 1 es 7,54. Además, fueron capaces de diseñar el diagrama de flujo del mismo en un alto porcentaje de los casos; esto es así ya que 4 de los grupos obtienen una puntuación superior al 50% de la puntuación alcanzable y 3 obtienen una puntuación entre el 40% y el 50% de lo posible en el diseño del mismo.

- El objetivo 2 también consideramos que se ha cumplido. Un alto porcentaje de los alumnos, han sido capaces de diseñar el algoritmo de Euclides en Scratch (la media de las puntuaciones obtenidas por los grupos en el diseño del mismo es 6,3 (véase tabla 4). Además, tras el análisis de resultados de la ficha 3, observamos que, en general, los alumnos manifiestan un mejor resultado programando con Scratch que diseñando el diagrama de flujo. Intuimos que esto es por la validación que ofrece el lenguaje, que permite modificar el código hasta que se obtiene un resultado que se espera correcto. Por otro lado, también queremos señalar que ningún grupo utilizó la variable auxiliar para intercambiar las variables dividendo y divisor en el condicional. Quizá la creación de dicha variable requiera un grado de abstracción que los alumnos de 3º ESO no han logrado todavía adquirir.
- Tras el análisis de las fichas 5 y 6, observamos que los alumnos tienen serias dificultades para formular hipótesis (objetivo 3) y para generalizar (objetivo 4). Esto puede ser debido a la excesiva mecanización de algoritmos que se realiza diariamente con los estudiantes de secundaria y al poco ejercicio de reflexión al que se les somete. Por tanto, podríamos decir que los objetivos 3 y 4 no se han alcanzado con el nivel que esperábamos. En concreto, encontramos un grupo que sí habría alcanzado estos objetivos con un nivel notable (grupo 2), cinco grupos que los habría alcanzado de forma suficiente (grupos 4, 5, 7, 9 y 12) y seis grupos que no habrían alcanzado los objetivos mencionados (grupos 1, 3, 6, 8, 10 y 11).
- Nuestro objetivo 5 se ha conseguido ya que todos los alumnos comprendieron que, en el caso en que el algoritmo estuviese bien programado, proporcionaría siempre el valor del MCD y MCM para cualquier par de números naturales introducidos por pantalla.

Para acabar, señalamos que un concepto formará parte del Pensamiento Matemático Elemental o Avanzado dependiendo del tratamiento que se dé al mismo. Edwards, Dubinsky y McDonald (2005) señalaban que si un concepto que por su naturaleza debiese formar parte del Pensamiento Matemático Avanzado, es tratado de manera procedimental, dicho concepto estaría dentro del Pensamiento Matemático Elemental. En este documento hemos tratado el caso contrario: un concepto que por su naturaleza estaría dentro del Pensamiento Matemático Elemental, puede formar parte del Pensamiento Matemático Avanzado si éste es tratado con una metodología que favorezca la aparición de elementos del mismo. En este caso, la programación es el instrumento que nos ayuda a trabajar el MCD desde este punto de vista.

Como perspectivas futuras se encuentra la puesta en práctica en 3º E.S.O de otra secuencia didáctica, distinta de esta, para calcular el MCD de dos números naturales, que favorezca también el desarrollo del Pensamiento Matemático Avanzado y complemente la anterior. La secuencia consistiría en el diseño en Scratch un programa que calcule los divisores de dos números pedidos por pantalla y devuelva el mayor de ellos. Creemos que dicha secuencia complementaria, podría favorecer la consecución de los objetivos 3 y 4, no alcanzados en ésta.

REFERENCIAS

Adell, J. (1997). Tendencias en educación en la sociedad de las tecnologías de la información Edutec. Revista electrónica de tecnología educativa, (7).

Brousseau, G. (1986). Fundamentos y métodos de la didáctica de las matemáticas Recherches en didactique des mathematiques, 7(2), 33-115.

Brousseau, G. (1994). Los diferentes roles del maestro. En Parra, C. y Saiz, I. (Comp.), Didáctica de Matemáticas. Aportes y reflexiones. Buenos Aires: Paidós Educador.

Brousseau, G. (1998). Théorie des situationsdidactiques, [Textesrassemblésetpréparés par N. Balacheff, M. Cooper, R. Sutherland, V. Warfield], Grenoble: La PenséeSauvage-Éditions, coll Recherches en didactique des mathématiques.

Brousseau, G. (2011) La théorie des situations didactiques en mathématiques (Vol. 5, No. 1, pp. 101-104). Presses universitaires de Rennes.

Carralero, N. (2011). Scratch. Programación fácil para primaria y secundaria. Revista digital sociedad de la Información, 29, 1-10

Dreyfus, T. (1991). Advanced mathematical thinking processes En Tall, D. (Ed), Advanced mathematical thinking. Dordrecht: Kluwer Academic Publisher, 25-41.

Edwards, B.S., Dubinsky, E., y Mcdonald, M.A. (2005). Advanced mathematical thinking Mathematical Thinking and Learning, 7(1), 15-25.

Fernández, J., y Muñoz, J. (2007). Las TIC como herramienta educativa en matemáticas. Unión, 119-147.

Gairín, J.M., y Sancho, J. (2002). Números y algoritmos Madrid: Síntesis.

Ifrah, G. (2008). Historia universal de las cifras. Madrid: Espasa Calpe.

Marmolejo, J.E., y Campos, V. (2012). Pensamiento lógico matemático con scratch en nivel básico Vínculos, 9 (1), 87-95.

Panizza, M. (2003). II Conceptos básicos de la Teoría de Situaciones Didácticas. Disponible en Internet: http:// crecerysonreir.org/docs/Matematicas_teorico.pdf

Pascual, M.A. (1998). La nueva frontera educativa con nuevas tecnologías. Nuevas Tecnologías, medios de comunicación y educación. Formación inicial y permanente del profesorado. Madrid: CCS.

Pérez, R.P. (1998). Nuevas tecnologías y nuevos modelos de enseñanza. Nuevas tecnologías, medios de comunicación y educación: formación inicial y permanente del profesorado (pp. 105-150). Madrid: CCS.

Ricoy, M.C., y Couto, M.J. (2012). El acercamiento al contexto profesional como móvil para indagar sobre las TIC: un estudio cualitativo. Revista Complutense de Educación, 23 (2), 443-461.

Robert, A. y Schwarzenberger, T. (1991). Research in the teaching and Learning Mathematics at an Advanced Level. En Tall, D (Ed.): Advanced Mathematical thinking (127-139). Springer Netherlands..

Tall, D. (1985). Understanding the calculus. Mathematics Teaching, 49-53.

Tall, D. (1991). The psychology of advanced mathematical thinking. En Tall, D. (Ed.): Advanced mathematical thinking (pp. 3-21). Springer Netherlands.

Usiskin, Z. (1998). Paper-and-Pencil Algorithms in a Calculator-and-Computer Age. En L. J. Morrow y M. J. Kenney (Eds.) The Teaching and Learning of Algorithms in School Mathematics (pp. 7-20). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Épsilon - *Revista de Educación Matemática* **2016, Vol. 33 (2), nº 93, 47-62**

¿Influye la experiencia previa y la autoconfianza en los estados de flujo?

Ana Belén Montoro
Universidad Camilo José Cela
Elisa Berenguel, Francisco Gil, María Francisca Moreno
Universidad de Almería

Resumen: *Los estados de flujo, caracterizados por altos niveles de concentración y disfrute con una tarea, influyen en el rendimiento y nivel de compromiso con la actividad que los produce. Este trabajo tiene un doble objetivo. Por un lado, pretende analizar la influencia de la experiencia previa y la autoconfianza en matemáticas en la aparición del flujo al trabajar en grupo en la realización de tareas matemáticas en un curso de Formación de Maestros. El análisis de los datos recogidos a través de cuestionarios mostró que los estudiantes pueden experimentar flujo realizando dichas tareas, independientemente de su experiencia previa y de su grado de autoconfianza en matemáticas. Estos resultados nos hicieron marcarnos como objetivo el análisis de las características de las tareas matemáticas que provocaron flujo a una estudiante con baja autoconfianza y mala experiencia previa. El interés proporcionado por la utilidad de la tarea para su futuro trabajo y la necesidad de sentirse competente fueron los principales factores para fluir.*

Palabras clave: *estados de flujo, motivación en matemáticas, autoconfianza, experiencia previa, formación de maestros*

Do they influence past experience and self-confidence in "flow"?

Abstract: *Flow experiences, characterized by high concentration and high enjoyment doing a tasks, influence in students´ academic performance and their engagement with similar tasks. This paper has two goals. On the one hand, we analyze the influence of past experiences and self-confidence in flow experiences while students working in groups to solve mathematics tasks proposed in a Pre-service Teachers´ course. Data collected throw questionnaires show that students might experience flow doing this tasks, with independence of their previous experience and level of self-confidence in mathematics. On the other hand, this result made us to set other goal: analyze the characteristics*

of the mathematics tasks which provoked flow to a student with low self-confidence and bad past experience in mathematics. The relevance of the task in her future job and the necessity of feeling competent were the main factors for her to flow.
Keywords: *flow experience, mathematics motivation, self-confidence, past experience, pre-service elementary teachers*

INTRODUCCIÓN

En las últimas décadas, se ha puesto de manifiesto la importancia de los factores afectivos y motivacionales en el aprendizaje (McLeod, 1992; Gómez-Chacón, 1998). Nuestra preocupación por la falta de motivación detectada en el aula de matemáticas ha sido el origen de este trabajo. Estamos interesados en comprender aspectos clave para mejorar la motivación durante el aprendizaje de las matemáticas y para ello, consideramos fundamental estudiar aspectos afectivos y motivacionales. Este hecho cobra especial relevancia en el caso de maestros en formación, ya que sus creencias, actitudes y emociones hacia las matemáticas influirán en las de su futuro alumnado, y en consecuencia en su rendimiento académico (Caballero, Blanco y Guerrero, 2009; Madrid, León–Mantero y Maz-Machado, 2015).

La motivación es el proceso que regula la dirección, intensidad y persistencia del comportamiento humano (Kanfer, 1994). Según Deci y Ryan (1985) existen tres tipos de motivación:

- Motivación intrínseca, cuando se elige una actividad por el placer y satisfacción que se experimenta al realizarla.
- Motivación extrínseca, cuando los motivos por los que se elige una actividad son externos a ella. Es decir, la actividad es un medio para llegar a un fin, no un fin en sí misma. Según el fin, tenemos tres tipos de motivación extrínseca:
  - Regulación externa, cuando el sujeto realiza la acción para obtener una recompensa o evitar un castigo,
  - Regulación interna, cuando el fin es satisfacer demandas internas como pueden ser mantener la autoestima, el sentimiento de obligación o de culpa,
  - Identificación, que se produce cuando se valora la tarea que se está llevando a cabo, es decir, la considera importante.
- Desmotivación, cuando no existe una razón para realizar la actividad.

La teoría de flujo, introducida por Csikszentmihalyi en 1975, analiza lo que experimenta el ser humano cuando realiza actividades por puro placer y las condiciones en la se producen dichas experiencias. Cuando un estudiante experimenta flujo con una tarea está tan concentrado en lo que está realizando que se aísla de lo que sucede alrededor y pierde la noción del tiempo. Es una experiencia agradable que quiere volver a repetir. Es decir, experimentar flujo con cierta frecuencia durante la realización de una actividad favorece la motivación intrínseca hacia esa actividad, y en consecuencia, en el rendimiento académico (Larson, 1998).

La motivación es una actitud, una predisposición positiva a realizar una actividad, por lo que modificarla requiere tiempo y esfuerzo. Por ello, en este trabajo nos proponemos analizar los factores que favorecen la aparición de experiencias de flujo y el papel que juega en estas situaciones la confianza en las propias habilidades para afrontar con éxito una tarea.

MARCO TEÓRICO

En los resultados de las numerosas entrevistas realizadas por Csinkzentmihalyi a artistas amateur aparecieron tres aspectos clave necesarios para experimentar flujo: que la actividad proporcione desafíos acordes con las habilidades del sujeto, que establezca metas claras y el sujeto reciba retroalimentación inmediata (Nakamura y Csinkzentmihaly, 2002). Por su parte, Deci y Ryan (1985) afirman que el ser humano se siente intrínsecamente motivado por el sentimiento de competencia, autonomía y relación con los demás. Este sentimiento de competencia se ha puesto de manifiesto en otras teorías como la de la autoeficacia, en la que el aspecto clave para que un estudiante decida realizar una actividad es la creencia en las propias habilidades para resolverlo (Bandura, 1997).

La percepción del nivel de desafío y las habilidades del sujeto es un aspecto subjetivo, que podría estar relacionado con su autoconfianza. Para el propósito de esta investigación, y atendiendo a la relación del sujeto con los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, se adoptará el término autoconfianza como la creencia sobre la propia competencia matemática (McLeod, 1992), que consiste en la confianza que un sujeto tiene en su habilidad para aprender y desempeñar satisfactoriamente tareas matemáticas (Fennema y Sherman, 1976).

En un estudio con profesores de secundaria, Rodríguez, Salanova, Cifre y Schaufeli (2011) observaron que la autoconfianza de una persona en su habilidad es un facilitador para la experiencia de flujo. Dentro del campo de la educación matemática, Pérez-Tyteca (2012) consideró la autoconfianza como una variable afectiva que influye en la decisión sobre la elección de carreras cuyo currículo incluye matemáticas. Además, se han detectado diferencias, en cuanto al papel de los desafíos, entre estudiantes con talento y estudiantes con habilidades en torno a la media o bajas (Schweinleet al., 2006). Posiblemente, los estudiantes que tienen confianza en su habilidad para resolver problemas matemáticos buscan tareas matemáticas más desafiantes que aquéllos que no poseen tal confianza, por lo que experimentarían sentimientos de autonomía y competencia más fuertes, ambos sentimientos son precursores de la motivación intrínseca (Reeve, 1994). De ahí que nos planteemos analizar cómo influye la autoconfianza en el flujo.

No obstante, Csikszentmihalyi (1988) señala diferencias individuales respecto a la capacidad de experimentar estados de flujo, de forma que hay personas con mayor disposición a sentir flujo, o lo que es lo mismo, son propensas a disfrutar y a concentrarse más con la actividad que estén realizando. Por otro lado, haya actividades particulares en las que es más probable que aparezca el estado de flujo (Csikszentmihalyi, 1990). Es decir, la aparición del flujo depende de la persona, de la tarea y del entorno donde ésta se realiza. Esto nos hace distinguir entre flujo situacional, entendido como un estado de concentración y disfrute experimentado en un momento puntual o tarea concreta, y flujo disposicional o predisposición general de una persona a concentrarse y a disfrutar durante la realización de tareas.

En esta investigación nos centraremos en el flujo situacional. De modo que queremos comprobar si existen diferencias en el nivel de flujo que provocan distintas tareas matemáticas a estudiantes del grado de maestro. Siguiendo a Blanco (1997), admitimos tres tipos de tareas para formación de maestros: tareas matemáticas, que generan y desarrollan conocimiento matemático; tareas sobre currículo escolar y/o relacionadas con teoría sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, que generan y desarrollan conocimiento matemático escolar y sobre aprendizaje y enseñanza de las matemáticas; y tareas didácticas contextualizadas y personalizadas, que generan y desarrollan conocimiento didáctico del contenido.

OBJETIVOS

La mayoría de las investigaciones previas estudiaron la frecuencia del flujo en un curso o entorno de clase: durante un curso de matemáticas (Heine, 1997), un programa de educación física (González-Cutre, Sicilia, Moreno, y Fernández-Balboa, 2009), un curso usando software (Kiili, 2005), sistemas de aprendizaje a distancia (Liao, 2006), con nuevas tecnologías (Rodríguez-Sánchez, Schaufeli, Salanova, y Cifre, 2008). Otras, analizaron el flujo en la vida diaria (Whalen, 1998), trabajo, o la escuela sin centrarse en tareas o áreas específicas (Whalen y Csikszentmihalyi, 1991; Nakamura, 1998; Shernoff, Csikszentmihalyi, Schneider, y Shernoff, 2003).

En contraste, Schweinle, Turner and Meyer (2006) recogieron datos de varias clases de matemáticas con estudiantes de educación primaria y las analizaron para comprender por qué se experimentó flujo en unas y no en otras. De la misma manera, Egbert (2003) comparó el flujo producido en distintas tareas propuestas a estudiantes con talento que asistían a un curso de lengua extranjera.

Desde esta última perspectiva, recogemos información en distintas sesiones de trabajo donde los estudiantes de Maestro de Primaria que asisten a un curso de matemáticas y su didáctica resuelven tareas en grupo y la utilizamos para:

- Comparar el flujo experimentado por los estudiantes en las distintas tareas de formación de maestros (O1).
- Analizar la influencia de las creencias de autoconfianza en las experiencias de flujo de los estudiantes al realizar diferentes tareas matemáticas para formación de maestros (O2).
- Describir los principales factores que motivan a estudiantes con experiencias negativas y autoconfianza baja (O3).

Para tratar de alcanzar estos objetivos se ha planteado un estudio exploratorio e interpretativo que utiliza la encuesta como técnica de recogida de información. Por un lado, para dar respuesta a los dos primeros objetivos, se administraron cuestionarios cerrados a los estudiantes asistentes a la asignatura Enseñanza y Aprendizaje del Aritmética, el Azar y la Probabilidad de tercer curso de Maestro de Primaria de la Universidad de Almería (Fase I). Por el otro, para responder al último objetivo (Fase II), se entrevistó a una estudiante que declara mala experiencia previa en matemáticas y autoconfianza baja.

FASE I

Metodología

Por razones de disponibilidad, esta fase del estudio se llevó a cabo con los estudiantes de 3º curso del grado de Maestro de Educación Primaria de la Universidad de Almería. Se recogió información de 161 estudiantes, que colaboraron de forma voluntaria, contestando cuestionarios aplicados al terminar las sesiones de trabajo de prácticas.

Instrumentos de recogida de información

Como se ha puesto de manifiesto en los objetivos, este estudio cuenta con dos variables principales: autoconfianza y experiencia de flujo.

Para medir la primera se utilizó el cuestionario cerrado, adaptado al castellano y validado por Pérez-Tyteca (2012), de la escala de autoconfianza de Fennema-Sherman (1976). Está integrado por 12 ítems (Ej. "Me siento muy seguro cuando se trata de matemáticas"), de los cuales 6 están enunciados en positivo y 6 en negativo.

Por otro lado, para medir el flujo experimentado por los estudiantes en cada una de las onces tareas propuestas en la asignatura para trabajo en grupo en el aula se aplicó el cuestionario cerrado, diseñado y validado por Montoro (2015). Dicho cuestionario consta de 2 ítems de concentración (Ej. "Mi concentración era interrumpida por cualquier cosa") y 4 de disfrute (Ej. "Me he divertido con la actividad"), formulados por parejas en positivo y negativo.

Ambos cuestionarios usan una escala de valoración tipo Likert, de 1 (totalmente en desacuerdo) a 5 (totalmente de acuerdo).

Además, para recoger información sobre la experiencia previa en matemáticas se aplicó, a principio de curso, un cuestionario abierto de diez preguntas (Ej. "¿Cuál ha sido tu experiencia con los errores en matemáticas?").

Selección de tareas

Como se ha mencionado anteriormente, una de las principales lagunas detectadas en la revisión de la literatura sobre las experiencias de flujo es que la mayoría de las investigaciones se refieren a la frecuencia con la que aparecen, sin hacer alusión al tipo de tarea que se está realizando en esos momentos: tanto en el formato (exposiciones del profesor, exposiciones del alumno, discusiones, trabajo individual, trabajo en grupo, etc.), como en la demanda cognitiva que requiere (reproducción, interpretación, análisis, evaluación y creación) y el contenido.

Heine (1997) tras observar varias clases de matemáticas de un programa de enriquecimiento orientado a estudiantes con talento y analizar las diferencias entre los grupos que aumentaron o mantuvieron el nivel de flujo y los que lo disminuyeron, encontró que los métodos de enseñanza y aprendizaje centrados en el estudiante facilitan el flujo. Es decir, aquellas clases que dedicaban más tiempo al trabajo individual y en grupo experimentaban mayores niveles de flujo que aquellos que se centraban en exposiciones del profesor. Sin embargo, no todos los tipos de tareas produjeron los mismos resultados: mientras los estudiantes disfrutaron aplicando conceptos conocidos a nuevos contextos, los problemas conocidos fueron considerados aburridos y los novedosos reducían su percepción de habilidad.

Teniendo en cuenta esto, decidimos comparar las once tareas distintas, propuestas en clases prácticas durante un curso de la asignatura *Enseñanza y Aprendizaje de la Aritmética, la Estadística y el Azar*. Con estas tareas se pretende que trabajen distintos materiales y recursos para la enseñanza de la Aritmética y la Estadística, que exploren y profundicen en algunos de los usos de los números, así como que se familiaricen con diferentes modelos de enseñanza del número. Para trabajarlas, los estudiantes se agruparon libremente en grupos de 4 o 5 miembros, que se mantuvieron inalterables durante el curso. El término tarea se refiere a una propuesta que el profesor planifica como herramienta de aprendizaje o evaluación y que demanda una actividad en los estudiantes, por lo que tiene una meta específica y un propósito claro (Lupiáñez y Rico, 2006). La tabla 1 muestra una breve descripción de las tareas realizadas.

Análisis de datos y resultados

Tras recodificar las valoraciones de los ítems negativos de los cuestionarios, se calculó la puntuación media de los ítems correspondientes a cada una de las escalas (concentración, disfrute, autoconfianza). Las experiencias de flujo se caracterizan por niveles altos de concentración y disfrute, por lo tanto, consideraremos que un estudiante ha experimentado flujo si obtiene una puntuación superior o igual a 4. Es decir, el equivalente a estar de acuerdo con todas las afirmaciones del cuestionario. El grado de flujo situacional de cada sujeto se halló como la media geométrica de la concentración y el disfrute expresado en los correspondientes cuestionarios.

Como se puede ver en la Tabla 2, la media de flujo más elevada se alcanzó en la tarea 2 (*Materiales para los primeros números*) aunque el porcentaje más alto de estudiantes que lo experimentaron corresponde a la tarea 9, y el más bajo, en ambos aspectos, se obtuvo en la tarea 11 (*Hoja de* cálculo *Excel*). Las tareas 2 y 9 se centran en proponer actividades para el aula usando materiales didácticos. Además son tareas que los estudiantes perciben como sencillas y útiles para su futuro profesional, sin embargo la tarea 11 es vista como un desafío muy superior a su nivel de destreza pues la mayoría desconocen el manejo de la hoja de cálculo.

Tabla 1. Descripción de las tareas

Tarea	Descripción	Material
1	Diseñar un Poster sobre un uso de los números en nuestro entorno	Plano de la ciudad, DNI, ISBN, matrículas de coches, facturas de electricidad, agua, teléfono,…
2	Elaborar actividades con materiales para la enseñanza de los primeros números	Materiales de seriaciones y clasificaciones, bloques lógicos, regletas Cuisenaires, balanzas numéricas, alfombras numéricas, cuentos numéricos, …
3	Comprender y profundizar en el uso de determinadas teclas de la calculadora. Encontrar procedimientos alternativos para realizar las operaciones cuando no se pueden utilizar determinadas teclas	Calculadora escolar de operaciones elementales
4	Búsqueda de regularidades, su generalización y su justificación. Encontrar procedimientos alternativos para realizar las operaciones cuando los números tienen más cifras de las que caben.	Calculadora escolar de operaciones elementales
5	Realizar operaciones aritméticas usando ábacos y material multibase. Búsqueda de regularidades, su generalización y su justificación, a la vez que profundizan en la comprensión de los algoritmos.	Ábacos y material multibase
6	Situaciones y problemas con números enteros para que el estudiante se familiarice con los distintos modelos de enseñanza	Lista de situaciones y problemas, mariales para trabajar los enteros: termómetros, ascensores, autobuses donde suben y bajan pasajeros,…
7	Practicar conceptos relacionados con fracciones (fracción irreducible, número mixto, ordenar fracciones, fracciones propias e impropias) y resolver problemas de fracciones	Lista de actividades
8	Ejercicios relacionados con fracciones y decimales.	Lista de actividades
9	Uso del material multibase y el muro de fracciones para trabajar los decimales, las fracciones y sus operaciones	Material multibase y el muro de fracciones
10	Búsqueda e interpretación de gráficos en la prensa	Prensa en papel y digital
11	Uso de la hoja de cálculo para estadística	Ordenadores y Excel

Tabla 2. Flujo experimentado en cada tarea

	Concentración			Disfrute		Flujo		% Estudiantes en flujo
	N	**Media**	**Desv. típ.**	**Media**	**Desv. típ.**	**Media**	**Desv. típ.**	
Tarea 11	167	3,94	,82	3,52	,86	3,70	,76	40,61
Tarea 6	183	4,11	,78	3,83	,71	3,95	,65	50,56
Tarea 4	187	4,17	,75	3,70	,83	3,91	,69	51,61
Tarea 1	190	4,13	,80	3,93	,62	4,01	,62	53,72
Tarea 7	158	4,19	,75	3,91	,79	4,02	,67	55,13
Tarea 8	181	4,27	,67	4,00	,72	4,11	,62	56,67
Tarea 5	196	4,23	,73	3,99	,73	4,09	,65	59,07
Tarea 10	105	4,16	,68	3,99	,76	4,05	,65	60,95
Tarea 3	186	4,25	,69	4,03	,69	4,12	,60	63,39
Tarea 2	172	4,26	,74	4,21	,69	4,22	,64	66,67
Tarea 9	191	4,27	,73	4,17	,70	4,20	,61	67,89

Con estos datos se procedió al estudio de la significatividad de las diferencias en el flujo experimentado por los estudiantes en las once tareas. Observando el estadístico Lambda de Wilks aparecen diferencias significativas en las puntuaciones medias de la variable flujo (λ_{Wilks}=,323; *p*=,010). Estas diferencias se deben principalmente a las diferencias en el nivel de disfrute con las tareas (λ_{Wilks}=,251; *p*=,002), ya que no fueron significativas en la variable concentración (λ_{Wilks}=,428; *p*=,065).

Tabla 3. Correlación entre autoconfianza y flujo de cada una de las once tareas

	Flujo	Concentración	Disfrute
Tarea 1 (n = 137)	,183*	,860	,212*
Tarea 2 (n = 124)	,049	-,015	,129
Tarea 3 (n = 136)	,247**	,145	,275**
Tarea 4 (n = 141)	,078	-,012	,130
Tarea 5 (n = 139)	,137	,056	,186*
Tarea 6 (n = 132)	,099	,041	,130
Tarea 7 (n = 129)	,275**	,163	,302**
Tarea 8 (n = 137)	,233**	,129	,262**
Tarea 9 (n = 139)	,116	,061	,137
Tarea 10 (n = 71)	,044	-,001	,063
Tarea 11 (n = 120)	,053	,009	,065

* *p* <.05; ** *p*< .01

Dado que los datos no satisfacen el supuesto de normalidad, para estudiar la relación de la autoconfianza con el flujo de cada tarea se analizó la correlación entre estas variables a través del coeficiente *Rho de Spearman.* Como se puede ver en la tabla 3, existe una correlación moderada (entre 0,4 y 0,69), significativa y positiva entre la autoconfianza y el flujo en las tareas 3, 7 y 8.

Estos resultados indican que la autoconfianza afecta al disfrute de algunas tareas. Por tanto, a pesar de ser la autoconfianza una característica personal, influye sólo en situaciones concretas y de una forma moderada.

En el caso de la experiencia previa de cada individuo se procedió a analizar la información procedente del cuestionario abierto de experiencia previa utilizando las siguientes categorías emergentes: nota, disfrute, dificultad y experiencia con los errores. Se eligieron los criterios anteriores porque son los más objetivos que se encontraron en la categorización, en el sentido de que no son susceptibles de interpretación, ya que proceden de respuestas de “Sí o No”, “Facilidad o Dificultad”, “Buena o Mala”, o referentes a una calificación.

En primer lugar, encontramos que la nota sólo presentó correlaciones significativas en las tareas 3 y 8, aunque dicha correlación es baja. Por otro lado, sólo aparecieron diferencias significativas y relevantes en el nivel de concentración alcanzado en las tareas 7 y 11 (Tamaño del efecto de 0,42 y 0,40 respectivamente) en función de cómo había sido su experiencia con los errores. Y, aparecieron diferencias significativas y relevantes en el nivel de concentración en las tareas 1, 4 y 7 en función de las experiencias de disfrute en etapas anteriores (0,30<TE<0,41). Es decir, en general, la experiencia previa no influye en los estados de flujo, y en las ocasiones en que influye, el tamaño del efecto de las diferencias fue moderado.

De estas seis tareas, cuatro de ellas coinciden con las que presentaron diferencias en el nivel de autoconfianza. Siguiendo a Phelps (2010), decidimos analizar la autoconfianza y la experiencia previa están relacionadas. Para ello, calculamos la media y desviación típica de cada uno de los grupos formados por las distintas categorías de experiencia previa y realizamos un test de comparación de medias de autoconfianza para ver si las diferencias entre ellas son significativas. Como puede verse en la tabla 4, aparecen dos grupos que muestran diferencias significativas y relevantes en el nivel de autoconfianza, con un tamaño del efecto grande. Por un lado, encontramos los estudiantes cuya nota previa fue suspenso o aprobado y por otro, los estudiantes cuya nota fue notable o sobresaliente, es decir, lo que influye es que tenga una nota media-baja o una nota alta.

Tabla 4: Diferencias en la autoconfianza, según la nota en niveles previos

Nota		Autoconfianza	Tamaño del efecto	
	N	Media	Desv. típ.	Media
Suspenso	16	2,82	,78	
Aprobado	51	3,07	,73	
				0,83
Notable	59	3,76	,66	
Sobresaliente	6	3,96	,67	

Como ya dijimos anteriormente, el resto de componentes de la experiencia previa (experiencia previa con los errores, el nivel de dificultad que requería para ellos y si disfrutaron o no) dividen a los estudiantes en dos grupos: los que tienen experiencias positivas y los que tienen experiencias negativas. En la tabla 5, podemos ver, por filas, la media y desviación típica de autoconfianza de los grupos formados por cada componente y el tamaño del efecto de dichas diferencias entre ambos grupos. Todas las diferencias fueron significativas al p<,01** y con tamaño del efecto grande, destacando el nivel de dificultad y el disfrute.

Tabla 5: Diferencias en la autoconfianza, según algunos componentes de la experiencia previa

Componentes Experiencia previa	**Positiva**			**Negativa**			**Tamaño del efecto**
	N	**Media**	**Desv. típ.**	**N**	**Media**	**Desv. típ.**	
Errores	58	3,61	,80	39	3,15	,80	,52
Dificultad	12	4,07	,62	42	2,80	,77	1,45
Disfrute	81	3,71	,65	57	2,90	,77	,96

En definitiva, tal y como indica Phelps (2010) la experiencia previa puede influir en la autoconfianza. Sin embargo, es posible experimentar flujo realizando tareas matemáticas, independientemente de la experiencia previa y la autoconfianza.

FASE 2

Metodología

Tras observar que estudiantes con mala experiencia previa y autoconfianza baja en matemáticas pueden experimentar flujo realizando tareas matemáticas, nos proponemos analizar qué aspectos de las tareas matemáticas favorecen o dificultan la aparición de experiencias de flujo de una estudiante con experiencia previa negativa y autoconfianza baja.

Para ello, se entrevistó a una estudiante que afirmó experimentar flujo en tareas de trabajo en grupo propuestas en el aula a pesar de tener una experiencia previa negativa, puesto que en el cuestionario abierto administrado al comienzo del curso afirmó que no le gustaban las matemáticas porque "a lo largo de los años cursados me han resultado difíciles" y tener una autoconfianza baja ya que obtuvo una puntuación media de 1.6 (en una escala Likert de 1 a 5).

La entrevista pretende profundizar en cómo ha sido su experiencia con las matemáticas y su visión como aprendiz de matemáticas. En este sentido, las preguntas iban destinadas a contrastar su grado de autoconfianza y experiencia previa con los datos descritos anteriormente y profundizar en qué aspectos de las tareas propuestas en las clases prácticas le gustaron más (Anexo 1).

Resultados de la entrevista

Los datos recogidos en la entrevista reflejan la importancia del interés y la autoconfianza en las propias habilidades en matemáticas para disfrutar y concentrarse en estas clases.

Como se refleja en el fragmento, al preguntar por la experiencia, habla principalmente de las notas, señalando al profesor como la principal causa de su interés y rendimiento en etapas anteriores a la universidad. De hecho, en bachillerato, afirma disfrutar y concentrarse en las clases de matemáticas.

> *En Primaria, regular, ni bien ni mal, aprobando, pero siempre "raspaílla". Cuando llegué a la ESO, bajé, pero nunca llegué a suspender. Simplemente los profesores no me gustaba como explicaban, y eso hacía que mi rendimiento bajara. Siempre aprobaba, pero con "cinquillos". Y cuando llegué a Bachillerato, subió la nota. Por el tipo de maestra que tenía, se implicaba mucho en los alumnos y estaba muy pendiente tuya, cosa que en Bachillerato no se solía hacer, pero esa profesora sí, y elevé muchísimo la nota, hasta llegar a obtener un sobresaliente en la final, en segundo, y en Selectividad también me fue muy bien, la verdad, la nota. […] En Bachillerato las matemáticas era una asignatura que me encantaba, llegaba a clase de matemáticas y yo es que…no sé, me metía mucho en lo que era la clase.*

En la etapa universitaria, parece ser que la falta de constancia, debida al horario de clases presenciales (sólo dos sesiones semanales) y la cantidad de trabajo en otras asignaturas, la que hace que desconecte de la asignatura y le cueste más ponerse.

> *Ahora en la carrera, he vuelto a bajar. Sí, he vuelto a bajar, porque no sé, me resulta complicado. Hay cosas que estamos viendo en este cuatrimestre que lo di en Bachillerato, pero ya es como que se te ha olvidado y ya es ponerte otra vez, y es como que me cuesta más. El ponerme y el recordar…*
>
> *[…]Yo creo que tiene que ver también la dedicación de horas que tenemos en la Universidad… […] serían 3 horas a la semana que lo enfocas en dos clases, entonces es como que, llega la semana siguiente, y si no te has revisado los contenidos… porque, por ejemplo en Bachillerato siempre te mandaban ejercicios, entonces en casa tenías que practicar, no perdías el hilo, pero aquí en la Universidad, al no mandarte ejercicios, si tú no te pones, y con tra… la verdad, son muchas cosas, con trabajos de otras asignaturas y todo, yo por lo menos no me pongo.*
>
> *[…]como los exámenes son febrero y junio, te pones dos semanas antes y te cuesta más, te cuesta muchísimo más que antes, por lo menos en mi caso.*

Actualmente, afirma "cuando no las entiendo, no me gustan, las odio, y cuando las entiendo, me encantan". Y que en general, en la universidad no le gustan. Lo que le gustó fueron las tareas de trabajo en grupo sobre materiales y situaciones de enseñanza de los números.

> *El del bloque de fracciones me ha encantado. Que tenía yo ahí, por ejemplo, un medio más tres quintos, la equivalencia… Ese me encantó, la verdad (tarea 9). Y también uno que hicimos de instrumentos que le podías dar a los niños para que aprendieran, es que no me acuerdo como era… Uno que en el suelo tenías que ponerte… (tarea 2). Sí que estaba la alfombra*

numérica… Sí, ese también me gustó mucho… Y el de… el de cómo introducirías a los niños los números negativos, menos uno, menos dos… (tarea 6). Ese, ese también yo pienso que es muy práctico para introducir a los niños de tercer ciclo de primaria los números negativos. Porque es una cosa que a mí no me han hecho, directamente ha llegado la maestra y ha dicho "esto vamos a aprender". Pero no ha dicho el para qué te sirve a ti, para qué, entonces eso pienso que es muy útil para llamar la atención de los niños.

Sin embargo, el material y la tarea deben de ser relativamente sencillas. Si es muy compleja, baja su sentimiento de competencia, no lo comprende y lo asocia a emociones negativas.

El de los bloques multibase. En ese mismo taller [refiriéndose al del muro de fracciones, tarea 9] había uno con placas… esos ejercicios no me gustan. Hicimos otro que también iba de eso (tarea 5), que es que no me acuerdo. Pues esos talleres no me gustaban nada. Porque como no sabía y me costaba más… no, esos no me gustaban.

Para ella, es muy importante trasmitir seguridad cuando enseña a otros niños, de ahí la importancia de la asignatura de matemáticas en la Universidad.

Es importante, más que nada por revisar todos los contenidos que tienes que darles a los niños. A mí, se me olvida, aunque sean cosas básicas que tienes que saber. Por ejemplo yo llego a las prácticas, y a lo mejor en un sexto, te han puesto cosas de las fórmulas de cuadrado, triángulo, base por altura, y te quedas como un poco… que sabes lo que es, pero te quedas "pillaílla", porque no sabes explicarlo totalmente con la seguridad que al niño le tienes que transmitir. Porque si no le transmites eso con seguridad el niño… va a pensar "es que esta maestra no sabe, no sabe explicar…no, no entiende" [imitando voz de niño]

Parece ser que, es necesario que sea interesante, pero que el nivel de dificultad no sea muy elevado. Es decir, como se puede ver en la siguiente afirmación, la preferencia por estas tareas no viene dada por su sencillez.

¿Fue *más fácil? Sí, sí porque me gustaban… y el hecho de que me guste ya es prestar más atención a lo que estoy haciendo. Y, aunque a lo mejor me cueste un poquillo más, doy más de sí. Y las que no me gustan…no.*

En definitiva, para esta alumna hay una clara preferencia por tareas didácticas contextualizadas y personalizadas que permitan conocer aspectos didácticos sobre contenidos concretos, por su utilidad directa en su futura profesión. No obstante, necesita sentirse competente en matemáticas, por lo que evita aquellas tareas muy complejas que no comprende.

DISCUSIÓN Y POSIBLES VÍAS DE CONTINUACIÓN

Nuestro primer objetivo pretendía contrastar si se producían diferencias significativas en el flujo experimentado por estudiantes de maestro al realizar las tareas de trabajo en grupo. Como vimos, aparecieron diferencias en el porcentaje de estudiantes

Épsilon, 2016, Vol. 33 (2), nº 93, 47-62, ISSN: 2340-714X

que experimentaron flujo, encontrándose diferencias significativas únicamente en el disfrute con las tareas. Dado que el flujo se experimenta al combinar el disfrute y la concentración, apreciamos una cierta homogeneidad en el nivel de concentración, quizás debido a características comunes de la tarea y del entorno en el que se realizó, o a que la capacidad de concentración dependa más de la persona que de la tarea propuesta. En cuanto al disfrute, vimos una preferencia por tareas sobre materiales y recursos para el aula de primaria, sencillos de manejar (tarea 9) y con posibilidad de elegir (tarea 2) y/o adaptar su complejidad (tarea 5). Es decir, en el sentido de Blanco (1997) podríamos calificarlas como tareas didácticas contextualizadas y personalizadas que generan y desarrollan conocimiento didáctico del contenido. De hecho, la estudiante entrevistada destacó la utilidad práctica para su futuro profesional como el aspecto que incrementó más su interés por la tarea y que facilitó su concentración y disfrute al realizarla.

Sin embargo, aunque la autoconfianza correlaciona positivamente únicamente con el disfrute de algunas tareas, la información facilitada por la entrevista apunta a que, si la tarea es muy complicada, los estudiantes tienden a evadirla. En concreto, la estudiante entrevistada dio mucha importancia a sentirse competente a la hora de explicar los contenidos a los niños de primaria, pero manifestó odiar las matemáticas cuando no las comprende. En este sentido, afirma no experimentar flujo cuando se le plantean tareas didácticas contextualizadas más complejas y asocia el material multibase, utilizado en dicha sesión, a emociones negativas.

Es decir, la autoconfianza podría ser un factor que influye únicamente en tareas de complejidad alta, aspecto que coincide con los resultados del estudio de casos analizado en Montoro y Gil (En prensa). Por otro lado, las tareas que menos flujo proporcionaron fueron aquellas que trabajaban con material o situaciones didácticas sobre contenidos más abstractos, dejando en un término medio a las tareas de contenidos sencillos puramente matemáticos.

Los resultados hallados en este trabajo son alentadores ya que indican que cualquier estudiante, incluso con autoconfianza baja y mala experiencia previa en matemáticas, puede experimentar flujo al realizar tareas matemáticas. En el caso de la entrevistada, aunque reconoce que no le va bien en la asignatura del grado y no le gusta, pues requiere un esfuerzo diario que no realiza por falta de tiempo, experimenta flujo en tareas que no requieren un gran dominio de los conocimientos que se están impartiendo en la materia y le resultan útiles para su formación como futura maestra. Además, se ve como le fue mal en la Educación Secundaria Obligatoria y muy bien en Bachillerato. Es decir, la experiencia previa no condiciona totalmente experiencias posteriores.

En este sentido, el papel del docente y del diseño de tareas es fundamental. Debería llevarse a cabo más investigación sobre qué aspectos facilitan el flujo situacional en el aula de matemáticas en los distintos niveles académicos.

Por otro lado, sería conveniente analizar si experimentar flujo con frecuencia en clases de matemáticas influye en la capacidad de experimentar flujo en matemáticas en general y en la autoconfianza con estudios longitudinales.

REFERENCIAS

Bandura, A. (1997). Self-efficacy: Toward a unifying theory of behaviour change. Psychological Review, 84, 191-215.

Blanco, L. (1997). Tipos de tareas para desarrollar el conocimiento didáctico del contenido. En L. Rico, y M. Sierra, (Eds.), Primer simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática, 34-40. Zamora: SEIEM.

Caballero, A., Blanco, L.J., y Guerrero, E. (2009). El dominio afectivo en futuros maestros de matemáticas en la Universidad de Extremadura. Paradigma, 29(2), 157-171.

Csikszentmihalyi, M. (1988). The flow experience and its significance for human psychology. En M. Csikszentmihalyi, e I. Csikszentmihalyi (Eds.), Optimal experience: Psychological studies of flow in consciousness (pp. 15-35). Cambridge: Cambridge University Press.

Csikszentmihalyi, M. (1990). Flow: The psychology of optimal experience. New York: Harper & Row.

Deci, E. L., y Ryan, R. M. (1985). Intrinsic motivation and self-determination in human behavior. Nueva York: Plenum.

Egbert, J. (2003). A study of flow theory in the foreign language classroom. The modern Language Journal, 87, 499-518.

Fennema, E., y Sherman, J. A. (1976). Fennema-Sherman mathematics attitude scales. Instruments designed to measure attitudes toward the learning of mathematics by males and females. JSAS Catalog of Selected Documents of Psychology, 6(31), 324-326.

Gómez-Chacón, I.M. (1998). Una metodología cualitativa para el estudio de las influencias afectivas en el conocimiento de las matemáticas. Enseñanza de las Ciencias, 16(3), 431-450.

González-Cutre, D. (2008). Motivación, creencias implícitas de habilidad, competencia percibida y flow disposicional en clases de educación física. Tesis doctoral no publicada. Universidad de Almería.

Heine, C. A. (1997). Tasks Enjoyment and Mathematical Achievement. Tesis doctoral no publicada, Universidad de Chicago, Illinois

Kanfer, R. (1994). Motivation. En N. Nicholson (Ed.), The Black well dictionary of organizational behavior. Oxford: Blackwell publishers.

Kiili, K. (2005). Participatory multimedia learning: Engaging learners. Australasian Journal of Educational Technology, 21(3), 303-322.

Larson, R. (1998). Flujo y escritura. En M. Csikszentmihalyi e I.S. Csikszentmihalyi, Experiencia óptima: Estudios psicológicos del flujo en la conciencia (pp. 151-169). Bilbao: Desclée de Brouwer.

Liao, L. (2006). A flow theory perspective on learner motivation and behavior in distance education. Distance Education, 27 (1), 45-62.

Lupiáñez, J.L., y Rico, L. (2006). Análisis didáctico y formación inicial de profesores: organización de competencias y capacidades de los escolares en el caso de los números decimales. INDIVISA, Monografía IV, 47-58.

McLeod, D. (1992). Research on affect in mathematics education: A reconceptualization. En D.A. Grows (Ed), Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning, 575-596. New York: Macmillan Publishing Company.

Madrid, M. J., León-Mantero, C. y Maz-Machado, A. (2015). Assessment of the Attitudes towards Mathematics of the Students for Teacher of Primary Education. Open Access Library Journal, 2: e1936.

Montoro, A. B. y Gil, F. (en prensa). Aspectos que facilitan la motivación con tareas matemáticas. Un estudio de casos con estudiantes de Maestro de Primaria. PNA.

Montoro, A.B. (2015). Motivación y matemáticas: Experiencias de flujo en estudiantes de Maestro de Educación Primaria. Tesis doctoral. Universidad de Almería.

Nakamura, J. (1998). Experiencia óptima y las aplicaciones del talento. En M. Csikszentmihalyi e I.S. Csikszentmihalyi (Eds.), Experiencia óptima: Estudios psicológicos del Flujo en la Conciencia (pp. 71-90). Bilbao: Desclée de Brouwer.

Nakamura, J., y Csikszentmihalyi, M. (2002). The concept of flow. En C.R. Snyder y S.J. Lopez (Eds.), Handbook of Positive Psychology (pp. 89-105). Oxford: Oxford University Press.

Pérez-Tyteca, P. (2012). La ansiedad matemática como centro de un modelo causal predictivo de la elección de carreras. Tesis doctoral no publicada. Universidad de Granada.

Reeve, J. (1994). Motivación y emoción (A.M. Lastra. Trad.). Madrid: Ed. McGraw-Hill. (Trabajo original publicado en 1992).

Rodríguez-Sánchez, A.M., Schaufeli, W.B., Salanova, M. y Cifre, E., (2008). Flow experience among information and communication technology users. Psychological Reports, 102, 29-39.

Rodríguez-Sánchez, A.M., Salanova, M., Cifre, E., y Schaufeli, W.B., (2011). When good is good: A virtuous circle of self-efficacy and flow at work among teachers. Revista de Psicología Social, 26 (3), 427-441.

Schweinle, A., Meyer, D. K., y Turner, J. C. (2006). Striking the right balance: Students' motivation and affect in elementary mathematics. The Journal of Educational Research, 99(5), 271-294

Shernoff, D.J., Csikszentmihalyi, M., Schneider, B., y Shernoff, E.S. (2003). Student engagement in high school classrooms from the perspective of flow theory. School Psychology Quarterly, 18 (2), 158-176.

Whalen, S.P. (1998). Flow and the engagement of talent: Implications for secondary schooling. NASSP Bulletin, 82, 22-37.

Whalen, S.P., y Csikszentmihalyi, M. (1991). Putting flow theory into educational practice: The key School´s Flow Activities Room. Informe para Benton Center for Curriculum and Instruction, Universidad de Chicago. (No. de servicio de reproducción de documentos ERIC ED 338 381).

ANEXO I GUION DE ENTREVISTA

- Saludo. "Presentación"
- ¿Qué tal te va en la carrera? ¿Y en las matemáticas?
- En general, ¿cómo han sido tus experiencias con las matemáticas? (¿Te gustan?)
- ¿Cómo te describirías como estudiante de matemáticas? ¿Piensas que tenías más dificultades en matemáticas que en otras asignaturas?/ ¿Piensas que tenías más facilidad en matemáticas que en otras asignaturas?
- En el colegio y en el instituto, ¿te esforzabas en sacar buenas notas en matemáticas? , ¿Por qué?
- ¿Opinas que se reflejaba el esfuerzo en las calificaciones?
- ¿Esas calificaciones se correspondían con lo que realmente aprendías?

- ¿Te sientes más seguro con las matemáticas que estudias ahora, o con las del colegio y del instituto?, ¿Por qué?
- ¿Crees que es útil aprender matemáticas?, ¿Por qué?
- ¿Habrías elegido otra carrera con matemáticas superiores?, ¿Por qué?
- ¿Consideras necesario tener asignaturas de matemáticas en vuestra carrera?, ¿Por qué?
- Si te dijesen que ya tienes la asignatura de matemáticas aprobada, ¿seguirías estudiando los contenidos y asistiendo a clase?, ¿Por qué?
- Si una tarea matemática te resulta muy difícil, ¿cómo te sientes? ¿Cómo actúas frente a ella?
- ¿Te gusta trabajar en grupo en matemáticas?, ¿Por qué?
- ¿Es importante para ti que tus compañeros de grupo estén contentos con tus aportaciones?, ¿Por qué?
- De los talleres que habéis realizado en grupo, ¿cuál te ha gustado más?, ¿Por qué?, ¿Te pareció útil? , En esa tarea, ¿estuviste más concentrado que en otras? , ¿Tenías claro lo que había que hacer? , ¿Fue fácil?, ¿Tuviste problemas a la hora de confirmar si la estabas haciendo bien o no?, ¿Crees que era interesante esa tarea?, ¿Qué taller te ha gustado menos?, ¿Por qué?
- ¿Qué nota esperas obtener en la asignatura?
- ¿Te gustaría conseguir más nota?
- ¿Hay algo que te gustaría añadir sobre tus experiencias en matemáticas?

Épsilon - *Revista de Educación Matemática* **2016, Vol. 33 (2), nº 93, 63-78**

Errores en la construcción de ecuaciones a partir de enunciados que contienen relaciones de proporcionalidad

Juan Gutiérrez-Soto
Universitat de València,
Jose Antonio González-Calero
Universidad de Castilla-La Mancha
David Arnau
Universitat de València

Resumen: *Las dificultades en la traducción del lenguaje verbal a ecuaciones se mantienen incluso en niveles universitarios. En esta investigación pretendemos identificar modelos explicativos de los errores cometidos cuando se construyen ecuaciones a partir de enunciados que contienen relaciones de proporcionalidad. Con este fin, desarrollamos una experimentación, en la que participaron 106 estudiantes universitarios, con una metodología mixta consistente en un estudio de grupo y en un estudio de casos. Los resultados muestran que tanto el error de inversión como otros errores identificados parecen consecuencia de interpretar incorrectamente el signo igual como indicador de simetría entre los miembros o son consecuencia de una traducción lineal del enunciado.*
Palabras clave: *álgebra, problemas verbales, error de inversión, razón y proporción*

Errors in the translation from word problems involving ratios into equations

Abstract: *The difficulties in the translation of verbal language into equations remain even at the university level. This study aims to identify explanatory models of the committed errors when the students set up equations from statements that contain proportionality relationships. An experiment with 106 university students was carried out. The experimental design consists of a mixed methodology that combines a quantitative study with a case study. Results show that both reversal error and other identified errors seem to be the result of an erroneous interpretation of the equals sign, in which the equals sign works as an indicator of symmetry between both sides of the equation, or a consequence of a linear translation of the statement.*
Keywords: *algebra, verbal problems, reversal error, ratio and proportion*

ANTECEDENTES Y OBJETIVOS

Clement (1982) estudió las dificultades que presentaban estudiantes universitarios al simbolizar en lenguaje algebraico ciertas relaciones expresadas en lenguaje natural. En algunos ítems se proponía la traducción de relaciones de proporcionalidad como: “Escribe una ecuación usando las variables *C* y *S* para representar la siguiente afirmación: ‘En el restaurante de Mindy, por cada 4 personas que pidieron tarta de queso, hay 5 personas que pidieron strudel’. Donde *C* representa el número de pasteles de queso y *S* el número de strudels” (p. 17). Se encontró que solo el 27% daban la solución correcta y que el error más común era invertir el orden de los números en la ecuación ($4C=5S$). Sin embargo, la parte en la que más se profundizó fue en la traducción de comparaciones multiplicativas como, por ejemplo: “Escribe una ecuación usando las variables *S* y *P* para representar el enunciado siguiente: ‘Hay seis veces tantos estudiantes como profesores en esta universidad’. Usa *S* para el número de estudiantes y *P* para el número de profesores” (p. 17). Así, en la colección de trabajos publicados por John Clement y colaboradores (Clement, Lochhead y Monk, 1981; Clement, Lochhead y Soloway, 1980) se propusieron dos posibles explicaciones para interpretar el error de inversión cuando se traducían comparaciones multiplicativas: 1) la coincidencia del orden de las palabras; y 2) la comparación estática. Sin embargo, estos modelos no necesariamente darían cuenta del fenómeno de la inversión en la traducción de relaciones de proporcionalidad. Así, en Rosnick y Clement (1980) se muestran casos en los que estudiantes que no invertían en la traducción de comparaciones multiplicativas sí que lo hacía al traducir relaciones de proporcionalidad. De hecho, en las entrevistas realizadas a estudiantes en Rosnick y Clement (1980) se puso de manifiesto una falta de compresión conceptual en la interpretación de las situaciones de proporcionalidad que no se daba en la situación de comparación multiplicativa.

La novedad principal de la investigación que presentamos reside en que se ha intentado controlar el efecto de la variables de la tarea para observar su influencia sobre la mayor o menor incidencia del error de inversión y otros errores de traducción en situaciones de proporcionalidad. Esta misma línea ya ha sido seguida en los estudios dedicados al análisis del error de inversión en la traducción al lenguaje del álgebra de enunciados con comparaciones multiplicativas. Una de las líneas analizadas ha sido determinar el efecto de la información matemática implícita que proporciona el contexto descrito en el enunciado en la mayor o menor incidencia del error de inversión. Así, una situación en la que se describe una relación entre profesores y estudiantes permite decidir qué cantidad es mayor y, por lo tanto, el resolutor podría utilizar este conocimiento para determinar si la ecuación que acaba planteando tiene o no sentido dentro de la situación descrita. Sin embargo, en estudios como los de Cohen y Kanim (2005), González-Calero, Arnau y Belenguer-Laserna (2015) y Wollman (1983) se ha concluido que la incidencia del error de inversión no se veía influida por la presencia de estas pistas contextuales. No obstante, el diseño experimental de estos estudios impidió determinar si realmente la información implícita se tenía en cuenta, aunque no fuera relevante en relación con el error de inversión, o si ni tan siquiera era detectada por los sujetos.

El objetivo global de nuestra investigación es describir modelos plausibles que expliquen la aparición de errores, y en especial del error de inversión, en la traducción algebraica de relaciones de proporcionalidad. En este artículo nos proponemos, en concreto, (1) determinar

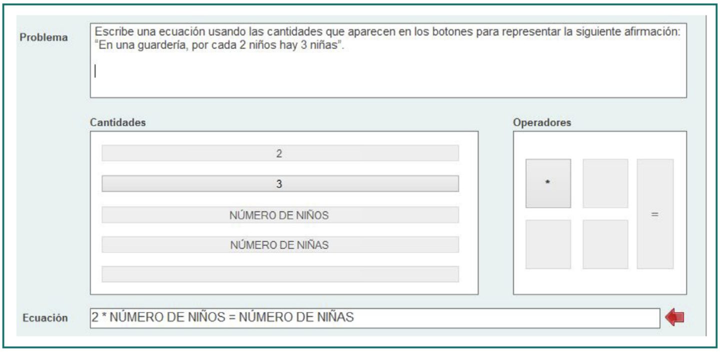


Figura 1: Aplicación informática diseñada para la recogida de datos.

si se observan diferencias en el tipo de respuestas con error de inversión según la inclusión o no en los enunciados de contextos que permiten detectar qué cantidad es mayor; (2) describir el tipo de respuestas erróneas que producen los estudiantes en este tipo de tareas; e (3) identificar los razonamientos empleados por los estudiantes cuando abordan estas tareas.

DISEÑO DE ESTUDIO EMPÍRICO

Participantes y metodología general

En el estudio participaron 106 estudiantes de tercer curso del Grado de Maestro en Educación Primaria de una universidad pública española. Los estudiantes estaban cursando una asignatura sobre didáctica de la aritmética y ya habían sido instruidos en la enseñanza de fracciones y razón y proporción. La elección de este nivel educativo respondió a que en las investigaciones realizadas sobre el error de inversión es habitual recurrir a estudiantes universitarios tanto de ciencias como de ciencias sociales (Clement, 1982; Fisher, Borchert y Bassok, 2011). Por otro lado, la existencia de estos estudios previos en este mismo nivel educativo nos permite contar con un referente a la hora de analizar los resultados de nuestra investigación.

Como es habitual en la investigación en educación, nuestro estudio empírico recurre a una muestra de conveniencia no aleatoria. El diseño experimental combina una fase inicial de estudio de grupo con otra posterior de estudio de casos, lo que permite una mayor comprensión de los hallazgos cuantitativos (Kelle y Buchholtz, 2015).

Instrumentos

Hemos empleado en esta investigación una herramienta informática en la que el estudiante construye las ecuaciones en un entorno gráfico. La aplicación se puede configurar para exigir que la respuesta del estudiante contenga algunos elementos de manera obligatoria o para restringir los signos de operación que puede utilizar (Fig. 1). Para construir las ecuaciones deben emplearse los botones con los signos de operación y con las etiquetas permitidas en cada problema. En el presente estudio se optó por restringir el tipo de operaciones que los estudiantes podían emplear, obligándoles a usar la multiplicación exclusivamente. Además se configuró el sistema para obligar que las respuestas de los estudiantes contuvieran al menos un signo igual.

Se elaboraron dos ítems usando el mismo modelo empleado en Clement (1982) para la "tarea del restaurante de Mindy". Se hizo variar la presencia o no de pistas contextuales en el enunciado, mientras se mantenía constante en ambos casos que se relacionaran cantidades discretas. Se decidió usar nombres, en lugar de letras, tanto en la descripción de la tarea como en las etiquetas de los botones para minimizar el posible efecto de que los estudiantes consideren las letras como abreviaturas de objetos en lugar de número de objetos (Küchemann, 1978). Por esta misma razón se optó por utilizar un nombre en el que apareciera la palabra número (número de profesores) en vez de otro en el que no apareciera (profesores), pues, como señala Rosnick (1981), esto podría ser un posible desencadenante del error de inversión. Además, el uso de la herramienta informática garantizaba que todos los estudiantes hiciesen uso de los mismos nombres para las cantidades a la hora de construir las ecuaciones.

Los ítems empleados fueron:

- *Tarea m*édicos-pacientes (pista contextual). Escribe una ecuación, usando las cantidades 3, 29, NÚMERO DE MÉDICOS, NÚMERO DE PACIENTES, para representar la siguiente afirmación: "En un hospital, por cada 3 médicos hay 29 pacientes".
- *Tarea niños-niñas (sin pista contextual)*. Escribe una ecuación usando las cantidades 2, 3, NÚMERO DE NIÑOS, NÚMERO DE NIÑAS, para representar la siguiente afirmación: "En una guardería, por cada 2 niños hay 3 niñas".

ESTUDIO DE GRUPO

La recogida de datos

La recogida de datos se realizó en una de las aulas de informática del centro con la aplicación informática diseñada *ad hoc*. Todos los estudiantes que participaron en el estudio resolvieron las mismas tareas, pero el orden en que se les presentó fue aleatorio para evitar la influencia de efectos como el aprendizaje.

Para instruir a los estudiantes en el uso de la aplicación, uno de los investigadores resolvió una tarea similar. En esta primera tarea se solicitaba construir una ecuación pero para evitar cualquier sesgo, el enunciado contenía relaciones aditivas no comparativas. En concreto, la tarea empleada decía: "Escribe una ecuación usando Z, Y, 5 y 3 para representar el enunciado siguiente: "Z menos 3 es igual a 5 más Y". Una vez los estudiantes manifestaron tener claro el funcionamiento del programa, se les indicó que podían iniciar la prueba.

Análisis de los datos

La aplicación informática almacena en una base de datos las respuestas de los estudiantes en cada ítem así como los tiempos empleados en la respuesta. Para contabilizar los tiempos de respuesta se toma el tiempo entre dos pulsaciones del botón "Validar", lo cual incluía tanto la lectura de la tarea como la construcción de la ecuación.

Las respuestas de los estudiantes se clasificaron en correcta, error de inversión y otro tipo de error. Así, en el ítem médicos-pacientes, se consideró como error de inversión cualquier respuesta equivalente a la ecuación 3*NÚMERO DE MÉDICOS = 29*NÚMERO DE PACIENTES, siendo la respuesta correcta cualquiera que pudiera transformarse mediante manipulaciones algebraicas a 29*NÚMERO DE PACIENTES = 3*NÚMERO DE MÉDICOS. Cualquier respuesta que no pudiera transformarse en ninguna de las ecuaciones anteriores se consideró otro tipo de error. Dentro de esta última categoría distinguimos las que se presentaban como un producto de números igual a un producto de literales (p. ej., "3*29=NÚMERO DE MÉDICOS*NÚMERO DE PACIENTES").

Por otro lado, también se tuvo en cuenta si el orden en que se simbolizaban las cantidades dentro de la ecuación era el mismo que el de aparición en el enunciado. En este análisis se determinó la aparición de los nombres (por ejemplo, NÚMERO DE MÉDICOS y NÚMERO DE PACIENTES en la tarea médicos-pacientes) a izquierda o derecha de la ecuación. Además, en el análisis se cuantificó la incidencia de la comisión del caso particular de error de inversión que supondría la construcción de la ecuación que coincide de manera lineal con el orden de las cantidades en el enunciado (por ejemplo, 3*NÚMERO DE MÉDICOS = 29*NÚMERO DE PACIENTES en la tarea médicos-pacientes).

Tabla 1: Frecuencia absoluta y porcentaje de los tipos de respuesta.

Tipo de respuesta	ítem médicos-pacientes	ítem niños-niñas
Correcta	6 (5,7%)	9 (8,5%)
Incorrecta, inversión	40 (37,7%)	41 (38,7%)
Incorrecta, producto de números igual a producto de literales	21 (19,8%)	26 (24,5%)
Incorrecta, otras	39 (36,8%)	30 (28,3%)

En la tabla 1 se observa un porcentaje de respuestas correctas muy bajo en ambos ítems. Un test de McNemar confirmó que no había diferencias significativas en la proporción de respuestas correctas entre ambos ítems, lo que parece descartar la influencia de la presencia de información contextual que permitía determinar qué cantidad era mayor en las actuaciones (véase tabla 2). Tampoco se observan diferencias significativas cuando se comparaba la incidencia del error de inversión (véase tabla 3).

El análisis de las respuestas desde el punto de vista del orden en que aparecen las cantidades en la ecuación también ofreció resultados similares en ambos ítems. Entre las respuestas consideradas como error de inversión, la cantidad NÚMERO DE MÉDICOS apareció 39 veces a la izquierda de la ecuación sobre un total de 40 y la cantidad NÚMERO DE NIÑOS apareció 38 veces a la izquierda de la ecuación sobre un total de 41. Además 3*NÚMERO DE MÉDICOS = 29*NÚMERO DE PACIENTES (y 2*NÚMERO DE NIÑOS = 3*NÚMERO DE NIÑAS en el ítem niños-niñas) fue la ecuación que mayoritariamente se construyó cuando los estudiantes cometían error de inversión (30 de 40 en el ítem de médicos-pacientes y 29 de 41 en el ítem de niños-niñas). Esto, en un principio, podría deberse a que los estudiantes realizan una lectura lineal del enunciado de izquierda a derecha que traducen literalmente al lenguaje del álgebra.

Tabla 2: Tabla de contingencia de respuestas correctas

	ítem niños-niñas			
ítem médicos-pacientes		**Correctas**	**Incorrectas**	**Total**
	Correctas	3	3	6
	Incorrectas	6	94	100
	Total	9	97	106

Tabla 3: Tabla de contingencia de respuestas con error de inversión.

	ítem niños-niñas			
ítem médicos-pacientes		**Error de inversión**	**No error de inversión**	**Total**
	Error de inversión	34	6	40
	No error de inversión	7	59	66
	Total	41	65	106

Por otro lado, es destacable la aparición del error que hemos llamado producto de números igual a producto de literales (véase la Tabla 1), el cual en principio podría asociarse a una representación simétrica de la información a ambos lados del signo igual. Es decir, se podría interpretar que los estudiantes en esta construcción multiplican a ambos lados número de médicos por número de pacientes (y proceden de manera análoga en la tarea niños-niñas). Este razonamiento parece basarse de forma implícita en que el producto de pacientes por médicos debía ser constante o que el signo igual tenía un significado distinto al de equivalencia. Sin embargo, tampoco sería descartable que fuera consecuencia de la necesidad de los alumnos por realizar operaciones con los números dados.

El orden en el que aparecen las cantidades en los errores catalogados como producto de números igual a producto de literales refleja que la mayoría de los que contestaron de esta forma buscaron una simetría al escribir las ecuaciones. Por ejemplo, en el ítem médicos-pacientes, identificaron 3 con NÚMERO DE MÉDICOS y 29 con NÚMERO DE PACIENTES, y construyeron la ecuación multiplicando 3*29 en un miembro y NÚMERO DE MÉDICOS y NÚMERO DE PACIENTES en el otro, manteniendo el mismo orden que se había usado al multiplicar los números. Así, se observa que en el ítem médicos-pacientes, las 21 respuestas catalogadas con este error son de la forma 3*29=NÚMERO DE MÉDICOS*NÚMERO DE PACIENTES, o su equivalente intercambiando los miembros de la ecuación o la ecuación NÚMERO DE PACIENTES*NÚMERO DE MÉDICOS=29*3. En el caso del ítem niños-niñas, 24 de las 26 respuestas catalogadas con este error son de alguna de las formas siguientes: 2*3=NÚMERO DE NIÑOS*NÚMERO DE NIÑAS, o su equivalente intercambiando los miembros de la ecuación; o la ecuación NÚMERO DE NIÑAS*NÚMERO DE NIÑOS=3*2 o su equivalente al intercambiar los miembros de la ecuación.

ESTUDIO DE CASOS

Selección de los participantes

La intención inicial de esta parte del estudio era identificar los razonamientos que habían llevado a los estudiantes a cometer error de inversión en el estudio de grupo. Sin embargo, la aparición del error no documentado al que hemos identificado como producto de números igual a productos de literales nos condujo también a interesarnos por su origen. Se seleccionaron cinco estudiantes: el sujeto 1 y sujeto 2 que construyeron las ecuaciones utilizando criterios distintos en los ítems del estudio de grupo; el sujeto 3 que igualó las cuatro cantidades en ambos ítems; el sujeto 4 que incurrió en ambos ítems en el error que hemos llamado producto de números igual a producto de literales; y el sujeto 5 que cometió en ambos ítems error de inversión construyendo ecuaciones en las que las cantidades se disponían en el mismo orden que aparecían en el enunciado.

Metodología

El estudio se realizó seis días después de que hubieran resuelto los problemas del estudio de grupo. Como la intención del estudio era que los estudiantes explicaran su razonamiento, se decidió, siguiendo las recomendaciones de Schoenfeld (1985), realizar entrevistas individuales con el menor grado de intervención posible por parte del entrevistador.

A partir de los vídeos obtenidos se elaboraron los protocolos escritos. En las transcripciones hemos intentado ser fieles al discurso de los estudiantes. Los puntos suspensivos se emplean dentro de la transcripción de las verbalizaciones para indicar una interrupción en el discurso, un final impreciso, una duda o una rectificación inmediata a lo que se acaba de decir. En algunos casos, hemos decidido eliminar algunos fragmentos cuando el discurso se alejaba de la línea de razonamiento. Esto lo hemos marcado con puntos suspensivos entre corchetes.

Análisis de los resultados

a) El caso del sujeto 1

El sujeto 1 fue seleccionado porque en el estudio de grupo dio una respuesta clasificada como error de inversión (2 * NÚMERO DE NIÑOS = 3 * NÚMERO DE NIÑAS) y otra incorrecta en la que no usaba las cuatro cantidades que se ofrecían (29 = 3 * NÚMERO DE MÉDICOS). La intención era observar qué explicación daba al error de inversión. Así, se le propuso en primer lugar resolver la tarea de niños-niñas pudiendo usar tanto el signo de multiplicación como de división. Construyó la ecuación inversa 2*NÚMERO DE NIÑOS=3*NÚMERO DE NIÑAS y cuando se le pidió que explicara por qué ha escrito esta ecuación, respondió:

Sujeto 1: He puesto que niños y niñas es equis. Por lo tanto, he multiplicado dos por número de niños, que sería como la incógnita por así decirlo… O sea... [...]... Es como… en la ecuación son cosas que valen lo mismo, entonces he multiplicado dos por niños es igual a tres por niñas, suponiendo que niños y niñas es la equis de la ecuación.

Observamos que en lugar de razonar sobre las relaciones matemáticas empleadas a la hora de construir la ecuación en esa disposición concreta, focaliza su atención en la representación de las cantidades, explicando que las palabras "NÚMERO DE NIÑOS" y "NÚMEROS DE NIÑAS" hacen el papel de letras.

A continuación se le ofreció la tarea médicos-pacientes, pero en este caso en la aplicación solo estaba disponible el signo de multiplicar tal y como se le había presentado en el cuestionario inicial. El sujeto construyó la ecuación inversa 3*NÚMERO DE MÉDICOS=29*NÚMERO DE PACIENTES y dio la siguiente explicación:

Sujeto 1: Aquí pone que en un hospital, por cada tres médicos hay veintinueve pacientes… Entonces, es que yo sinceramente no veo ninguna ecuación ahí, ¿sabes?

Entrevistador: Pero has escrito una…

Sujeto 1: Sí, o sea, he puesto lo de antes [parece referirse a la tarea que acaba de realizar]… tres por número de médicos igual a veintinueve por equis, [...], pero yo no le veo sentido a esta ecuación,… no veo que sea una ecuación.

El sujeto repite en dos ocasiones que en la expresión que ha construido no ve ninguna ecuación, lo que podría poner de manifiesto que el sujeto se ha limitado a representar la información que se ofrecía en el enunciado sin realizar un razonamiento sobre las cantidades implicadas. La acción y la posterior explicación podría ser modelada por la interpretación conocida como *coincidencia en el orden de las palabras* (Clement, 1982). Esto supondría considerar que ha realizado una traducción lineal de izquierda a derecha del enunciado al lenguaje del álgebra.

b) El caso del sujeto 2

El sujeto 2 fue seleccionado porque en el estudio de grupo dio una respuesta correcta (NÚMERO DE MÉDICOS * 29 = NÚMERO DE PACIENTES * 3) y otra incorrecta clasificada como producto de números igual a producto de literales (NÚMERO DE NIÑOS * NÚMERO DE NIÑAS = 2 * 3). La intención era observar si esta última respuesta era el resultado de un despiste o si realmente era fruto de algún razonamiento que evidenciara dificultades conceptuales serias.

En el estudio de casos, en primer lugar, se le propuso resolver la tarea de niños-niñas permitiéndoles usar tanto el signo de multiplicación como el de división. Construyó la ecuación 2/NÚMERO DE NIÑAS=NÚMERO DE NIÑOS/3 usando exclusivamente la operación división. Cuando se le pidió que explicara por qué había escrito esta ecuación, respondió:

Sujeto 2: He pensado que dos, que son los niños, partido por el número de niñas, equivaldría al número de niños que está representado por dos partido por tres que es lo que representa el número de niñas... He pensado que dos que es el número de niños partido por el número de

Épsilon, 2016, Vol. 33 (2), nº 93, 63-78, ISSN: 2340-714X

niñas, que no lo he puesto con el número sino con las letras, equivaldría al número de niños, en este caso el dos, partido tres que equivaldría al número de niñas.

La verbalización anterior nos permite deducir que el sujeto 2 replica en ambos términos de la ecuación un esquema *número de niños partido por número de niñas*. La base de este razonamiento podría apoyarse sobre la idea correcta de igualar razones, como sería igualar 2/3 a NÚMERO DE NIÑOS/NÚMERO DE NIÑAS. Sin embargo, el alumno entiende que 2 y NÚMERO DE NIÑOS, y 3 y NÚMERO DE NIÑAS, son dos representaciones de una misma cosa intercambiable, como se pone de manifiesto en "he pensado que dos que es el número de niños partido por el número de niñas, que no lo he puesto con el número sino con las letras". En definitiva parece centrarse en un razonamiento correcto quizá apoyado en la idea de que se cumpla una simetría respecto del signo igual, pero plantea una equivalencia no existente entre cantidades por el mero hecho de referirse a una colección formada por el mismo tipo de objetos (2, el número de niños usando para construir la razón, y NÚMERO DE NIÑOS, que sería un número de niños cualquiera).

A continuación, se le ofreció la tarea médicos-pacientes, pero, en este caso, la aplicación se configuró para que solo pudiera utilizar el signo de multiplicar. Construyó la ecuación 3*29=NÚMERO DE MEDÍCOS*NÚMERO DE PACIENTES y, cuando se le pidió que explicara por qué ha escrito esta ecuación, respondió:

> Sujeto 2: Éste es muy sencillo. Como dice que cada tres médicos hay veintinueve pacientes, lo que haríamos sería multiplicar el número de médicos por el número de pacientes, que es tres por veintinueve y eso equivaldría al número de médicos que se representa por el número tres por el número de pacientes que se representa por veintinueve. Una equivalencia entre número y las letras.

Al forzar al sujeto a usar el signo de multiplicación, construyó la ecuación empleando un esquema similar al caso anterior: *número de niños por número de niñas*. Esto vuelve a poner de manifiesto que interpreta el signo igual como un indicador de que la estructura de las expresiones algebraicas de ambos términos debe ser la misma. Nuevamente el estudiante considera intercambiables 3 y NÚMERO DE MÉDICOS como se refleja en "y eso equivaldría al número de médicos que se representa por el número tres por el número de pacientes que se representa por veintinueve".

c) El caso del sujeto 3

El sujeto 3 produjo dos respuestas erróneas incluidas en la categoría otros (NÚMERO DE NIÑOS = 2 = NÚMERO DE NIÑAS = 3 y NÚMERO DE MÉDICOS = 3 = NÚMERO DE PACIENTES = 29). La singularidad de las respuestas condujo a incluirlo en el estudio de casos.

Se le ofreció la tarea de niños y niñas, teniendo disponible tanto la multiplicación como la división. El sujeto construyó la ecuación correcta 2/3*NÚMERO DE NIÑAS = NÚMERO DE NIÑOS. Cuando se le pidió que explicara por qué había escrito esta ecuación, no proporcionó una explicación sino que se limitó a describir lo que había escrito:

> Sujeto 3: Para sacar el número de niños que hay, habría que calcular que … que si sabes el número de chicas, pues dos tercios equivaldría al número total de niños.

A continuación se le ofreció la tarea médicos-pacientes, pero esta vez teniendo disponible solamente el signo de multiplicar. El sujeto 2 construyó la ecuación correcta 29*NÚMERO DE MÉDICOS = NÚMERO DE PACIENTES*3, y al preguntarle por qué había escrito esa ecuación, respondió:

> Sujeto 3: Pues no sé, ¿puedo cambiar?
> Entrevistador: Prefiero que expliques por qué has escrito esta ecuación.
> Sujeto 3: No sé, había puesto una cosa… Es que es cada tres [señala al enunciado] Es que había puesto por ejemplo [señala la ecuación] tres por número de médicos por veintinueve, porque así, por cada médico... por cada… La cifra de los médicos, la multiplico por tres… Eso me da grupos de tres, que se multiplicaría por veintinueve, porque cada tres médicos le corresponden veintinueve… y me saldría el número de pacientes…. No sé…
> Entrevistador: ¿Cómo sería?
> Sujeto 3: He pensado que si a cada grupo de tres médicos le corresponden veintinueve pacientes, para saber el número de pacientes, lo que puedo hacer es multiplicar tres por el número de médicos, para agruparlos de tres en tres, por veintinueve… entonces tendría el número de pacientes. No sé si tiene sentido.

Como se observa en el diálogo anterior, cuando se le pide que razone la respuesta, el estudiante rechaza su validez y pretende modificarla. El estudiante se centra en la ecuación que hubiera querido construir y en su razonamiento introduce una idea incorrecta que llevaría a plantear la ecuación 3*29* NÚMERO DE MÉDICOS = NÚMERO DE PACIENTES. Parece que el estudiante intenta adaptar la ecuación que había construido anteriormente (cuando había construido correctamente 2/3*NÚMERO DE NIÑAS = NÚMERO DE NIÑOS) al caso actual en el que solo puede utilizar el signo de multiplicación. De todo lo anterior se puede concluir que el estudiante prioriza conservar la estructura espacial sin tener en cuenta la necesidad de equivalencia que debe haber entre los términos de la igualdad.

Tras este diálogo el entrevistador reconduce la situación hacia la ecuación que realmente había escrito el alumno.

> Entrevistador. Esto es lo que has pensado, pero no lo has escrito...
> Sujeto 3: No lo he escrito porque se me ha ocurrido después. Esto lo he escrito como para acabar el problema… Lo he escrito porque… No sé… por cruzar un poco los datos.
> Entrevistador: ¿Por qué has elegido ese orden?
> Sujeto 3: He elegido ese orden porque… Si hubiera hecho tres por el número de médicos… si cambio el orden tendría más sentido. He escrito eso porque, no sé, se tenía que cruzar los datos. La cantidad de unos se debería cruzar con la de los otros. Lo que pasa es que, si hubiera hecho tres por número de médicos igual a veintinueve por número de pacientes, habría hecho lo mismo que antes… habría tenido que por cada tres médicos… me habría salido esa proporción.

En el diálogo se pone de manifiesto que el estudiante al construir la ecuación correcta no estaba realizando un razonamiento correcto, sino que se apoyaba sobre una intuición en la que nuevamente no se tenía en cuenta la necesidad de que el signo igual conectara dos cantidades equivalentes. La guía en este caso era la idea de “cruzar un poco los datos”, la cual parece plausible asociar a un construcción mental de un esquema de regla de tres.

d) El caso del sujeto 4

El sujeto 4 fue seleccionado al contestar las dos veces igualando el producto de números al producto de literales (NÚMERO DE NIÑOS * NÚMERO DE NIÑAS = 2 * 3 y NÚMERO DE MÉDICOS * NÚMERO DE PACIENTES = 3 * 29). El objetivo era poner de manifiesto por qué había dado esas respuestas y si al permitirle el uso de la división construiría la misma ecuación pero con división, obteniendo así una solución correcta. Se le ofreció la tarea de niños-niñas, teniendo disponible tanto la multiplicación como la división y construyó la ecuación correcta NÚMERO DE NIÑOS/NÚMERO DE NIÑAS = 2/3. Lo justificó del siguiente modo:

> Sujeto 4: La he hecho igual.. de la misma forma que hice todos los problemas. [se refiere al estudio de grupo] Porque en clase hemos hablado de la fracción como dos partes, entonces pone de cada dos de cada tres... Lo que pasa a mí el… por cada dos niños hay tres niñas [leyendo] el por cada me lía bastante, pero lo he hecho… tal como lo hemos hecho en clase yo creo que es… dos… comparar dos partes. No es una fracción para operar ni nada de eso sino como comparar dos partes y lo pongo así porque... número de niños… o sea, pongo a una parte las letras y a la otra las... la fracción no sé por qué. Lo he hecho siempre así. No sé. Porque yo de normal cuando me dan dos niñ… por cada dos niños hay tres niñas, yo pongo la fracción, entonces, a una parte pongo las letras y a la otra la fracción.

La estudiante justifica su respuesta utilizando algunas de las ideas sobre fracciones, razón y proporción que posiblemente se han presentado a lo largo de su formación como maestra. Manifiesta las dificultades que le plantea la comparación “por cada” y afirma que se apoya sobre la idea de fracción como parte-parte. En la parte final de su explicación introduce un razonamiento que se apoya sobre la disposición de elementos a ambos lados del signo igual (“pongo a una parte las letras y a la otra las... la fracción no sé por qué”). Es decir, parece construir la ecuación atendiendo a una configuración espacial, pero sin tener en cuenta la necesidad de que ambos miembros del signo igual representen cantidades iguales.

A continuación se le ofrece la tarea médicos-pacientes, pero obligándole a usar el signo de multiplicar. Construye la ecuación NÚMERO DE MÉDICOS*NÚMERO DE PACIENTES = 3*29 y lo justifica de la siguiente manera:

> Sujeto 4: No tengo un porqué en sí, porque cuando hicimos los problemas que hicimos [se refiere al cuestionario del estudio de grupo] habían tanto de multiplicación como de división. Cuando me dejaba hacer solo la multiplicación yo veo un problema igual que el de división… Yo haría una división…
>
> Entrevistador: ¿Y cómo la harías?
>
> Sujeto 4: Igual que he hecho el anterior.
>
> Entrevistador: Venga.

Sujeto 4: Tres partido de veintinueve… Pero no puedo porque no tengo la división. Yo lo escribiría así, seguramente estaría mal porque no sé cómo lo escribiría… no sabría escribirlo de otro manera… Yo lo escribo así, bueno será lo mismo… [...]... Yo leo esto "por cada tres médicos hay veintinueve pacientes" y yo haría otra vez fracción. Pero si me das esos datos haciendo una multiplicación, no sabría qué hacer porque no puedo multiplicar las palabras por un número.

En el diálogo anterior, se observa que la estudiante es capaz de mantener el razonamiento que le llevaría a la producción de una ecuación correcta si pudiera usar la división. Sin embargo, afirma que no puede hacerlo usando multiplicación. En su razonamiento se pone de manifiesto que es capaz de transformar la ecuación que plantearía usando divisiones a una ecuación en la que solo haya multiplicaciones, pero considera imposible "multiplicar las palabras por un número". Nuevamente, parece que lo que gobierna las decisiones sobre la corrección de la ecuación son criterios de configuración espacial sobre la idea de expresar cantidades equivalentes. En este caso parece que intentar trasladar la idea de colocar una operación con los números en un lado y una operación con los literales en el otro. Esta interpretación se refuerza al continuar el diálogo:

Entrevistador: ¿No puedes?
Sujeto 4: Yo no puedo mult… O sea, si yo multiplico número de médicos por veintinueve estoy haciendo lo mismo que pone en la misma [sic] tres por veintinueve. Porque número de médicos es tres y número de pacientes es veintinueve daría igual que pusiera el número con las letras en todo caso porque sería lo mismo.

De hecho, la afirmación que realiza inicialmente ("si yo multiplico número de médicos por veintinueve") le llevaría a un planteamiento correcto. Sin embargo, supone una equivalencia incorrecta entre el número de médicos que aparece en la comparación (representado por 3) con un número de médicos cualquiera (representado por un literal) que le permite elegir una representación incorrecta en la que se conserve la idea de colocar números en una parte de la ecuación y literales en la otra.

e) El caso del sujeto 5

El sujeto 5 fue seleccionado por haber cometido dos veces el error de inversión en el estudio de grupo (3*NÚMERO DE MÉDICOS = 29*NÚMERO DE PACIENTES y 2*NÚMERO DE NIÑOS = 3 * NÚMERO DE NIÑAS). En primer lugar, se le ofreció la tarea de niños-niñas, teniendo disponible tanto la multiplicación como la división. Construyó la ecuación 2/NÚMERO DE NIÑAS = 3/NÚMERO DE NIÑOS lo que implicó cometer un error de inversión. Cuando se le pidió que explicase por qué había escrito esta ecuación, respondió:

Sujeto 5: Por cada dos número de niños [señala el botón 2], o sea de niñas, no lo voy a multiplicar por el número total... sino… Esto es la multiplicación, ¿no? [Señala el signo de la multiplicación]
Entrevistador: Sí.

> Sujeto 5: Si pusiera dos por número de niñas, estaría multiplicando los datos totales, y por eso he utilizado la barrita de división [señala la división]. He puesto que cada dos números de niñas (señala el primer miembro de la ecuación construida) tenemos tres números de niños (señala el segundo miembro de la ecuación). Cuando hice esto [se refiere al estudio de grupo] empecé haciéndolo así, y a mitad cambié, porque pensé en lo de las multiplicaciones, o sea, si esto es igual, yo diría, dos (señala dos en la ecuación que ha construido) por número de niños (señala NÚMERO DE NIÑOS en el otro miembro), y el tres por el número de niñas. La multiplicación en cruz y entonces me lie y lo cambié todo otra vez.

Al explicar la ecuación el sujeto se refirió a los miembros de la ecuación de manera idiosincrásica (2/NÚMERO DE NIÑAS como "dos número de niñas") y explicó que había llegado a esta ecuación partiendo de una representación mental de la ecuación invertida 2*NÚMERO DE NIÑOS =3*NÚMERO DE NIÑAS y pasando los literales dividiendo al otro término ("multiplicando en cruz").

A continuación se le ofreció la tarea de Médicos-pacientes, pudiendo disponer tan solo la multiplicación como en el estudio de grupo y construyó la ecuación incorrecta 3*NÚMERO DE MÉDICOS=NÚMERO DE PACIENTES. Cuando se le pidió que explicase por qué había escrito esta ecuación, respondió:

> Sujeto 5: El número total de pacientes tiene que ser el total de la operación... porque en un hospital por cada tres médicos, hay veintinueve pacientes… entonces, es que el veintinueve no lo quería multiplicar… cada tres médicos… tres por el número de médicos igual al número de pacientes… No lo entiendo!

La afirmación "El número total de pacientes tiene que ser el total de la operación" podría permitir explicar el comentario "Si pusiera dos por número de niñas, estaría multiplicando los datos totales" realizado en el ítem niños-niñas. Parece que la estudiante realiza un razonamiento que podríamos ligar a una concepción procedimental del lenguaje algebraico que se refleja en la dificultad para aceptar la falta de clausura (Collis, 1981).

CONCLUSIONES

El análisis de los datos del estudio de grupo nos lleva a concluir que la presencia de información en el contexto que permita determinar qué cantidad es mayor no repercute en la incidencia del error de inversión (objetivo 1). Este resultado se alinea con los obtenidos por Wollman (1983) y González-Calero, Arnau y Laserna-Belenguer (2015) al estudiar la traducción de enunciados con comparaciones multiplicativas al lenguaje del álgebra. El diseño experimental, sin embargo, no permite identificar si los estudiantes son conscientes de esta información pero no la usan o bien si ni tan siquiera la perciben. Esta limitación abre una línea futura de investigación sobre la gestión que realizan los estudiantes de las pistas contextuales presentes en el enunciado como un elemento de control a la hora de construir ecuaciones.

Por otro lado, en el estudio de grupo se observa que hay un porcentaje muy bajo de estudiantes que producen respuestas correctas (5,7% en médicos-pacientes y 8,5% en niños-niñas), mientras que el porcentaje de error de inversión alcanza casi un 40% de las respuestas (37,7% en médicos-pacientes y un 38,7% en niños-niñas). Hemos identificado un nuevo patrón incorrecto de respuesta que hemos codificado como *producto de números igual a producto de literales* que supone un 19,8% de las respuestas en la tarea médicos-pacientes y un 24,5% en niños-niñas. Además, en el análisis de las respuestas clasificadas como error de inversión, se observa que en el 75,0% de las ecuaciones producidas en el ítem médicos-pacientes y en el 70,7% en el ítem niños-niñas las cantidades se disponen en el mismo orden en el que aparecen en el enunciado. Esta coincidencia es prácticamente plena si sólo se atiende a la posición de los literales.

De hecho, y enlazando con la discusión del objetivo 3, las explicaciones que se ofrecen a los errores de inversión que se comenten en el estudio de casos se pueden encuadrar dentro del modelo conocido como coincidencia en el orden de la palabras. Es decir, una fuente del error de inversión puede ser que los estudiantes realizan una lectura de izquierda a derecha y lo traducen literalmente a la ecuación sin que exista una reflexión sobre la necesidad de producir una igualdad entre cantidades. Por otro lado, las ecuaciones que se han clasificado como *producto de números igual a producto de literales* parecen tener su origen en razonamientos apoyados sobre el respeto a una simetría de la configuración espacial, nuevamente, sin atender a la necesidad de igualdad entre cantidades. Además en la generación de este error también se pone en ocasiones de manifiesto la percepción errónea por parte de los estudiantes de que las cantidades que refieren a colecciones distintas formada por el mismo tipo de objetos son intercambiables. Esto podría interpretarse como el fenómeno inverso al conocido como error al asociar referentes múltiples a una misma representación, ya que en nuestro caso se asocian representaciones distintas a un mismo referente.

REFERENCIAS

Clement, J. J. (1982). Algebra word problem solutions: Thought processes underlying a common misconception. Journal for Research in Mathematics Education, 13(1), 16–30.

Clement, J., Lochhead, J., y Monk, G. S. (1981). Translation Difficulties in Learning Mathematics. The American Mathematical Monthly, 88(4), 286-290.

Clement, J., Lochhead, J., y Soloway, E. (1980). Positive effects of computer programming on students understanding of variables and equations. En Proceedings of the American Society for Computing Machinery 1980 Annual Conference (pp. 467-474). Nashville, TN: ACM.

Cohen, E. y Kanim, S. E. (2005). Factors influencing the algebra ”reversal error”'. American Journal of Physics, 73(11), 1072-1078. http://dx.doi.org/10.1119/1.2063048.

Collis, K. F. (1981). Cognitive Development, Mathematics Learning, Information Processing and a Refocusing (Report No WBDCIS-PP-B1-1). Centre for Science Education. Madison (WI): Wisconsin Research and Development Center for Individualized Schooling, The University of Wisconsin-Madison.

Fisher, K., Borchert, K., y Bassok, M. (2011). Following the standard form: Effects of equation format on algebraic modeling. Memory & Cognition, 39, 502-515.

González-Calero, J. A., Arnau, D., y Laserna-Belenguer, B. (2015). Influence of additive and multiplicative structure and direction of comparison on the reversal error. Educational Studies in Mathematics, 89(1), 133-147.

Kelle, U. y Buchholtz, N. (2015). The Combination of Qualitative and Quantitative Research Methods in Mathematics Education: A "Mixed Methods" Study on the Development of the Professional Knowledge of Teachers. En Bikner-Ahsbahs, A., Knipping, C. y Presmeg, N. (Eds.), Approaches to Qualitative Research in Mathematics Education. Examples of Methodology and Methods (pp. 321-361). Dordrecht, The Netherlands: Springer.

Küchemann, D. (1978). Children's Understanding of Numerical Variables. Mathematics in School, 7(4), 23-26.

MacGregor, M. y Stacey, K. (1993b). Cognitive models underlying students' formulation of simple linear equations. Journal for Research in Mathematics Education, 24(3), 217-232.

Rosnick, P. (1981). Some Misconceptions concerning the Concept of Variable.. Mathematics Teacher, 74(6), 418-420.

Rosnick, P. y Clement, J. (1980). Learning without understanding: The effect of tutoring strategies on algebra misconceptions. Journal of Mathematical Behavior, 3(1), 3-27.

Schoenfeld, A. (1985). Making Sense of "Out Loud" Problem-Solving Protocols. Journal of Mathematical Behavior, 4(2), 171-191.

Wollman, W. (1983). Determining the Sources of Error in a Translation from Sentence to Equation. Journal for Research in Mathematics Education, 14(3), 169-181.

AGRADECIMIENTOS

Los autores agradecen la financiación recibida a través del proyecto EDU2015-69731-R (MINECO/FEDER), y de los proyectos GV/2016/118 y GVPrometeo/2016/143 de la Conselleria d'Educació, Investigació, Cultura i Esport de la Generalitat Valenciana.

Épsilon - *Revista de Educación Matemática* *2016, Vol. 33 (2), nº 93, 79-86*

¿Qué percepción tienen los estudiantes de la relación entre el área y el volumen de figuras geométricas?

Miquel Ferrer Puigdellívol
Universitat Autònoma de Barcelona

Resumen: *El artículo detalla una experiencia de aula en la que se muestra la predisposición del alumnado de primer curso de bachillerato respecto de los problemas de extremos. Se discute si para estos alumnos la igualdad de volumen entre dos figuras implica, o no, igualdad de área, y si la igualdad de área implica, o no, igualdad de volumen. Se estudian las respuestas de dos tareas matemáticas y se concluye que el punto de partida de los estudiantes no es suficientemente favorable para resolver problemas de extremos que requieran la optimización del área o del volumen de figuras geométricas.*
Palabras clave: *perímetro, área, volumen, problema de extremos, geometría.*

What is the students' perception of the relationship between area and volume of geometric figures?

Abstract: *The study shows a classroom experience in which it is explained the 9th graders' disposition when they have to solve maximum and minimum problems. It is discussed whether for these students equal volume between two figures implies, or not, equal area; and whether equal area between two figures implies, or not, equal volume. The students' responses of two mathematical tasks are studied and it is concluded that the students' starting point is not enough appropriate to solve maximum and minimum problems that require the optimization of area or volume of geometric figures.*
Keywords: *perimeter, area, volume, maximum and minimum problem, geometry.*

INTRODUCCIÓN

Varios estudios ponen de manifiesto que los alumnos de primaria e incluso de los primeros cursos de la Educación Secundaria Obligatoria confunden frecuentemente la relación entre el área y el perímetro de figuras geométricas. Dickson, Brown y Gibson (1991) plantean una situación en la que el docente muestra a un alumno una hoja de papel cuadriculado formado por casillas de 1cm x 1cm, donde se había dibujado un rectángulo de 7cm x 3cm. El docente le preguntó cuál era el perímetro y el área del rectángulo. En los dos casos el estudiante respondió correctamente. Después, se hizo dibujar al alumno un rectángulo diferente, pero que mantuviese los 20cm de perímetro. Los primeros intentos del alumno consistieron en determinar el mismo rectángulo, pero cambiando su orientación, y le surgieron importantes dificultades para responder a esta pregunta. Era evidente que el alumno, aunque tenía 13 años, no se daba cuenta de que rectángulos del mismo perímetro podían tener áreas diferentes, es decir, que se podía mantener el perímetro de los rectángulos aunque se cambiase su forma y, por tanto, su área. Ahora bien, ¿cuál es la percepción de los estudiantes de la relación entre áreas y volúmenes de figuras geométricas?

El objetivo del presente artículo es mostrar una experiencia de aula que pretende determinar si para los alumnos (i) la igualdad de volumen entre dos figuras implica, o no, igualdad de área; y (ii) la igualdad de área entre dos figuras implica, o no, igualdad de volumen.

Hay que destacar que esta experiencia forma parte de un estudio más amplio en didáctica de las matemáticas, el cual pretende caracterizar cómo resuelven problemas de extremos los estudiantes que no están familiarizados con el cálculo diferencial. Concretamente, se quiere determinar la impresión y el punto de partida de los alumnos de primer curso de bachillerato al hacer frente a esta tipología de problemas, con los cuales no están habituados a trabajar porque aún no han practicado el cálculo con derivadas.

CONTEXTUALIZACIÓN: POBLACIÓN ESTUDIADA Y TAREAS MATEMÁTICAS

Se obtuvieron datos de aula a través de un cuestionario que constaba de seis tareas matemáticas resueltas por 138 alumnos de primer curso de bachillerato, 78 chicos y 60 chicas, que cursaban la asignatura de Matemáticas o de Matemáticas Aplicadas a la Ciencias Sociales en dos institutos públicos de Catalunya. Ambos centros eran institutos comarcales que pertenecían a un ámbito sociocultural medio y que cumplían con el desarrollo normativo del Departamento de Enseñanza de la Generalitat de Catalunya vigente en el momento de implementar la experiencia de aula (Departamento de Enseñanza, 2007). Desde los departamentos de matemáticas de estos institutos se fomentaba que los alumnos resolvieran problemas de matemáticas y que argumentaran, oralmente y por escrito, el procedimiento que habían seguido para llegar a la solución de los problemas. En el momento de la experimentación, los alumnos no estaban familiarizados con las reglas del cálculo diferencial y no habían resuelto previamente problemas de extremos en sus clases de matemáticas. Todos los alumnos respondieron el cuestionario individualmente y de forma anónima, en un máximo de 60 minutos.

Épsilon, 2016, Vol. 33 (2), nº 93, 79-86, ISSN: 2340-714X

A continuación se muestran las dos primeras tareas del cuestionario, un estudio más detallado de las cuales se introduce en la siguiente sección de este artículo.

Tarea 1. Hay latas de un refresco de cola de 330 ml con dos formas diferentes: una más alta y delgada, y otra más baja y ancha (Fig. 1). Ambas latas contienen la misma cantidad de refresco, es decir, tienen el mismo volumen. ¿Crees que es necesaria la misma cantidad de latón para fabricar cada una de ellas? Señala la respuesta que mejor se ajuste a tu punto de vista:

Figura 1. Latas de refresco de dos formas distintas.

1a. El recipiente más alto y delgado tiene más cantidad de latón.
1b. La cantidad de latón necesaria para fabricar los dos recipientes tiene que ser la misma, ya que ambas latas de refresco tienen el mismo volumen.
1c. El recipiente más bajo y ancho tiene más cantidad de latón.
1d. No lo sé. Ninguna respuesta se ajusta a mi punto de vista.

La primera tarea pretende estudiar si para los estudiantes la igualdad de volumen entre dos figuras geométricas (las dos latas de refresco) implica, o no, igualdad de área total.

La segunda tarea pretende determinar si para los alumnos la igualdad de área lateral de dos figuras geométricas (los dos cilindros) implica, o no, igualdad de volumen (véase página 82).

Respuestas de los alumnos a las dos tareas

Con relación a la primera tarea observamos que más del 76% de los alumnos respondieron que por el hecho de existir igualdad de volumen entre las dos latas de refresco también había igualdad de área total. Es decir, la cantidad de material que se necesitaba para construirlas era la misma en los dos casos, ya que el volumen era el mismo. Por otro lado, detectamos que muy pocos alumnos señalaron como correcta la respuesta *(1d)*, es decir, pocos alumnos afirmaron que no sabían cómo afrontar la tarea y, por este motivo, ninguna de las respuestas se ajustaba a su punto de vista.

Tarea 2. Se dispone de dos láminas iguales de cartulina (una de color gris oscuro y otra de color gris claro) de forma rectangular, que presentan 31,4 cm de largo y 6,28 cm de alto. Con cada lámina se quiere construir un cilindro, doblando las láminas de dos modos distintos, tal y como se observa en la siguiente ilustración (Fig. 2):

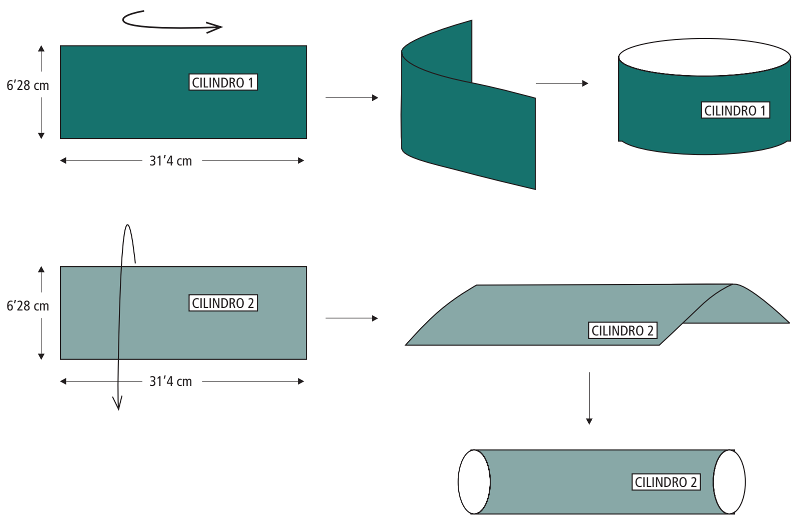


Figura 2. Cilindros correspondientes a la segunda tarea.

Los dos cilindros tienen la misma superficie lateral. ¿Crees que también tienen el mismo volumen? Señala la respuesta que mejor se ajuste a tu punto de vista:

- **2a.** Los dos cilindros tienen el mismo volumen, ya que tienen la misma superficie lateral.
- **2b.** El cilindro más bajo y ancho (el de color gris oscuro) tiene un volumen más grande.
- **2c.** El cilindro más estrecho y alto (el de color gris claro) tiene un volumen más grande.
- **2d.** No lo sé. Ninguna respuesta se ajusta a mi punto de vista.

A continuación resumimos los resultados de la tarea 1 en forma de tabla y de gráfico, obtenidos a partir de las respuestas de los 138 alumnos (véase la Tabla 1 y la figura 1):

Tabla 1. Número de respuestas y porcentaje en los cuatro apartados de la tarea 1.

Tarea 1	
Respuesta 1a.	8 (5,8%)
Respuesta 1b.	105 (76,09%)
Respuesta 1c.	20 (14,49%)
Respuesta 1d.	5 (3,62%)

La Tabla 1 muestra que 8 alumnos (5,8%) respondieron la opción *(1a)*, 105 estudiantes (76,09%) señalaron como correcta la respuesta *(1b)*, 20 alumnos (14,49%) respondieron la opción *(1c)* y solo 5 estudiantes (3,62%) señalaron como correcta la respuesta *(1d)*.

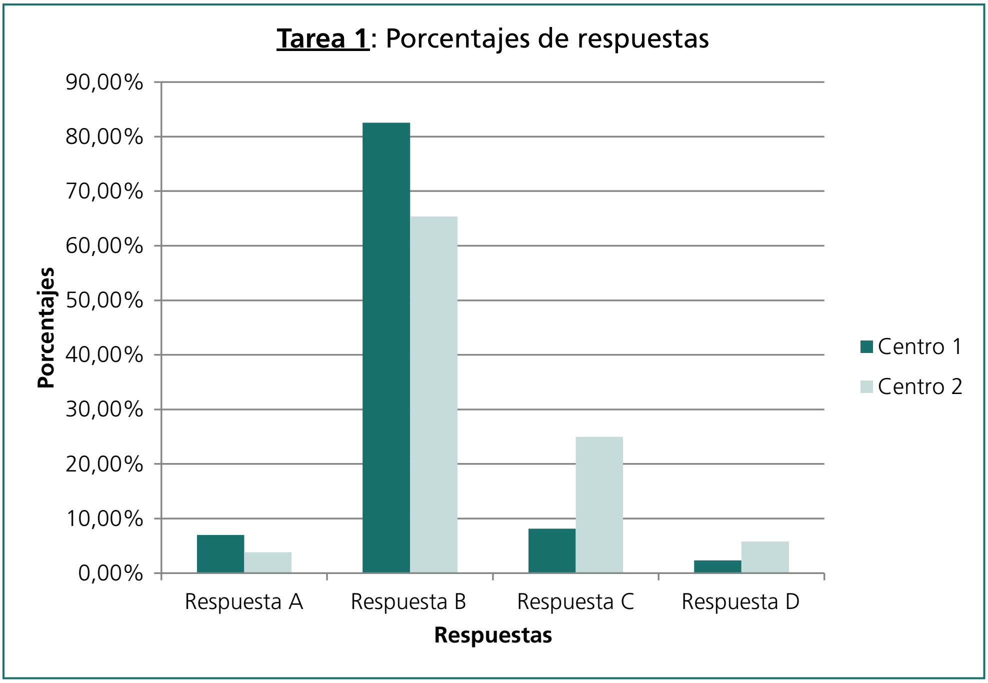


Figura 1. Porcentajes detallados de respuestas a la tarea 1 en los dos centros.

Con relación a la segunda tarea determinamos que más del 68% de los alumnos respondieron, en este caso, que por el hecho de existir igualdad de superficie lateral entre los dos cilindros también había igualdad de volumen. En cambio solo un 23,9% de los alumnos señalaron como correcta la respuesta *(2b)*, es decir, la adecuada desde el punto de vista matemático: "el cilindro más ancho y bajo (el de color gris oscuro) tiene un volumen más grande". Para más información, véanse la Tabla 2 y el Gráfico 2.

Tabla 2. Número de respuestas y porcentaje en los cuatro apartados de la tarea 2.

Tarea 2	
Respuesta 2a.	95 (68,84%)
Respuesta 2b.	33 (23,91%)
Respuesta 2c.	4 (2,9%)
Respuesta 2d.	6 (4,35%)

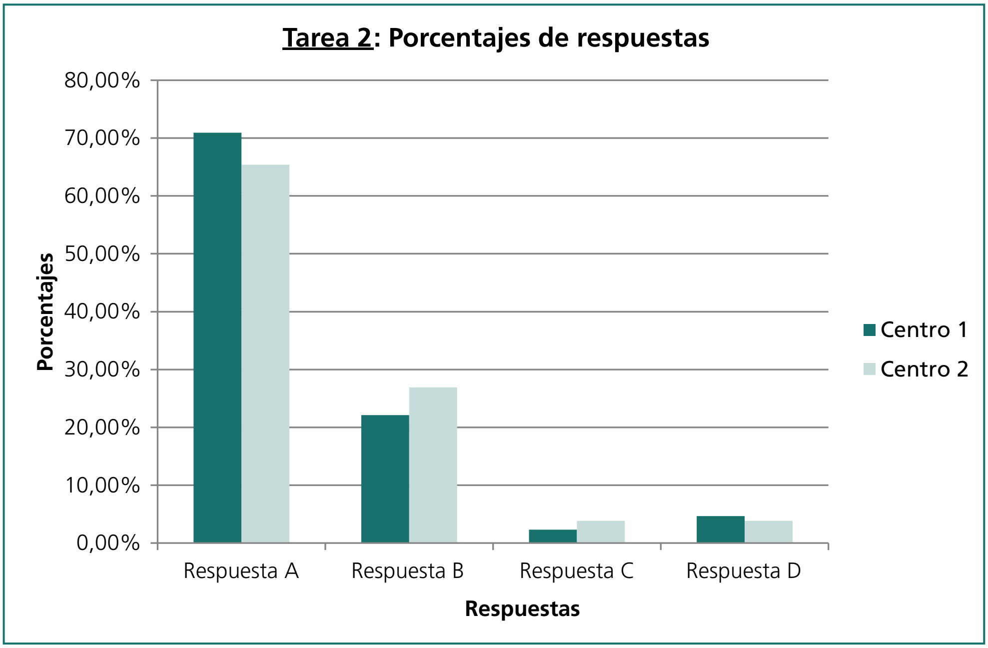


Figura 2. Porcentajes detallados de respuestas a la tarea 2 en los dos centros.

La Tabla 2 muestra que 95 alumnos (68,84%) respondieron la opción *(2a)*, 33 estudiantes (23,91%) dieron como correcta la respuesta *(2b)*, 4 alumnos (2,9%) señalaron la opción *(2c)* y 6 estudiantes consideraron que la respuesta correcta era la *(2d)*.

CONSIDERACIONES FINALES

Los problemas de extremos figuran de forma explícita en el currículo de matemáticas de segundo curso de bachillerato, como una aplicación del cálculo con derivadas. No obstante, como afirma Modica (2010), esta tipología de problemas se puede trabajar con alumnos que aún no conocen el cálculo diferencial, ya que muchos de estos problemas admiten soluciones por métodos elementales. En este artículo se ha analizado una experiencia didáctica que ha permitido observar la predisposición del alumnado de primer curso de bachillerato con relación a los problemas de extremos, estudiando cuál es su percepción de la relación entre áreas y volúmenes de figuras geométricas.

Se ha observado que para muchos alumnos la igualdad de volumen entre dos figuras puede implicar, erróneamente, igualdad de área. El análisis de las respuestas de la primera tarea pone en evidencia este hecho, ya que gran parte de los alumnos manifiestan, erróneamente, que el área total de dos figuras geométricas se conserva por el hecho de existir igualdad de sus volúmenes. Por tanto, es prudente concluir que el punto de partida de estos alumnos no es lo bastante favorable para trabajar problemas de extremos donde se requiera optimizar el área de figuras geométricas en las que el volumen se encuentra fijo.

Épsilon, 2016, Vol. 33 (2), nº 93, 79-86, ISSN: 2340-714X

Por otro lado, también se ha observado que la igualdad de área entre dos figuras puede implicar, erróneamente, igualdad de volumen. Las respuestas de los alumnos a la segunda tarea evidencian que, para muchos alumnos, el volumen de dos figuras geométricas se conserva por el hecho de existir igualdad de sus superficies laterales. Como en el caso anterior, el porcentaje de alumnos que manifiestan esta confusión es alto y, por este motivo, concluimos que el punto de partida de estos alumnos antes de hacer frente a problemas de extremos en los que se requiera optimizar el volumen teniendo fija la superficie lateral no es adecuado desde el punto de vista matemático.

Finalmente, los resultados de esta experiencia sugieren que, durante las clases de matemáticas, habría que trabajar tareas que ayudasen a los alumnos a mejorar su percepción matemática de la relación entre perímetro, área y volumen de figuras geométricas, antes de resolver problemas de extremos aplicando las complejas técnicas del cálculo diferencial.

AGRADECIMIENTOS

Al proyecto EDU2015-65378-P y a la Beca FPI BES-2012-053575 del Ministerio de Economía y Competitividad.

REFERENCIAS

Departamento de Enseñanza (2007). Currículum de l’Educació Secundària Obligatòria. Barcelona, España: Generalitat de Catalunya.

Dickson, L., Brown, M., y Gibson, O. (1991). *El aprendizaje de las matemáticas*. Barcelona: Labor.

Modica, E. (2010). Maximum / minimum problems solved using an algebraic way. *Teaching Mathematics and Its Applications*, 29, 41-47.

Épsilon - *Revista de Educación Matemática* 2016, Vol. 33 (2), nº 93, 87-106

Evaluación del alumnado mediante resolución de problemas asistida por software matemático

Ángel F. Tenorio
Universidad Pablo de Olavide

Resumen: *Este trabajo muestra una propuesta para evaluar una asignatura de matemáticas basándonos en dos principios: a) no memorizar, sino manejar y aplicar correctamente la información y realizar razonamientos correctos; y b) trabajar con software computacional. Explicaremos cómo evaluamos un semestre de Cálculo Numérico en Ingeniería Informática y cómo pasamos de la memorización y calculística a la comprensión, aplicación e interpretación razonada y correcta de los métodos. Focalizamos el proceso de enseñanza/aprendizaje en la adquisición de competencias matemáticas, de modo que el alumnado afronte un problema seleccionando la metodología y procedimiento más adecuado al contexto y datos disponibles, favoreciendo un aprendizaje constructivo y significativo en el alumnado.*
Palabras clave: *Evaluación, docencia con TIC, matemáticas, cálculo simbólico, competencia digital.*

Student's assessment via problem solving aided with mathematical software

Abstract: *This article shows our proposal to assess students in a mathematics course based on two criteria: a) no memorization, but use of information, applying it correctly and constructing valid reasonings; and b) data processing with symbolic computation packages. We discuss how to assess students in a semester on Numerical Analysis for Computer Science Engineering. The importance of assessment goes from memorization and calculus into correct and reasoned understanding, application and interpretation of numerical methods. The teaching-learning process is focused on the acquisition of mathematical competences, looking for students to be able to face problems choosing the most appropriate method and procedure according to context and given data, which favors students' meaningful and constructive learning.*
Keywords: *Assessment, ICT-aided teaching, mathematics, symbolic computation, digital competence.*

INTRODUCCIÓN

En el curso 2010/11, los grados en ingeniería habían comenzado su proceso de implantación, siendo solo unos pocos los que habían comenzado antes de ese curso. Dichos grados tuvieron una fase de experimentación gracias a las múltiples experiencias piloto para adaptar la docencia universitaria a la filosofía del Espacio Europeo de Educación Superior (EEES). Los cambios acontecidos no se han limitado a los puramente organizativos (BOE 2003, 2005, 2007), sino que también han influido en la docencia, causando una profunda reflexión sobre cómo entenderla y cómo adecuar las metodologías docentes y evaluativas en las aulas (incluso la renovación de estas).

En este artículo, expondremos cómo evaluar un semestre de Cálculo Numérico para una ingeniería informática (concretamente en la Ingeniería Informática en Sistemas de Información de la Universidad Pablo de Olavide) mediante la resolución de problemas asistida por software computacional. Pasar de una formación basada fuertemente en la componente teórica a otra eminentemente práctica, se fundamenta en primar el desarrollo de competencias en el alumnado y realizar una formación basada en "aprender a aprender" tal y como defiende el EEES (MECD, 2003; ANECA, 2005).

Basándonos en esta filosofía evaluativa de saber afrontar y resolver cualquier problema planteado, hemos ido generando un sistema de evaluación por competencias basado en la resolución de problemas asistida por ordenador. El germen reside en el sistema de evaluación usado en la experiencia piloto para la Ingeniería Técnica en Informática de Gestión (ITIG) (Bermudo et al., 2006; Hernández-Jiménez et al., 2008a), que ha evolucionado hasta un sistema de evaluación continua sin exámenes finales en el Grado de Ingeniería Informática en Sistemas de Información (GIISI) y del que algunos datos preliminares pueden verse en Tenorio et al. (2011). Este cambio gradual permitió dar un rodaje en la ITIG y depurar defectos previamente a implantarlo como sistema de evaluación continua en el GIISI. De este modo, hemos aprovechado los cambios educativos del último lustro para introducir modificaciones evaluativas y metodológicas en nuestra docencia para usar el software matemático y orientar el proceso de enseñanza/aprendizaje hacia la aplicación correcta y contextualizada por el alumnado de los conocimientos y competencias que trabajan, evitando meros automatismos operacionales y algorítmicos.

Nuestras asignaturas de matemáticas trabajan tres competencias esenciales (según nuestra opinión) en el alumnado:

a) Aplicar correcta, contextualizada y justificadamente procedimientos numéricos para resolver problemas (formación matemática).
b) Tratar computacionalmente estos problemas con las herramientas y técnicas computacionales actuales (formación computacional).
c) Seleccionar y actualizar conocimientos según las necesidades que le van surgiendo profesional o socialmente (actualización formativa).

La noción de competencia (McClelland, 1973) surge como alternativa a los test de inteligencia para saber si una persona podrá realizar su actividad profesional. Son múltiples las definiciones en el ámbito educativo (Mateo, 2007; Roe, 2002), pero todas la consideran la habilidad para seleccionar, actualizar, combinar y usar recursos y conocimientos al resolver un problema o situación en contexto.

La competencia digital en nuestras asignaturas es esencial en pleno siglo XXI ya que, como profesionales, el alumnado tendrá que usar software adecuado a sus diferentes tareas. En una ingeniería informática, ser competente digitalmente es una obligación.

Nuestro objetivo es mostrar cómo puede usarse un sistema evaluativo por competencias para evaluar nuestra asignatura y cómo la resolución de problemas asistida por ordenador resulta una propuesta educativa de gran utilidad para realizar dicha evaluación. En este sentido, mostraremos unos ejemplos que integran la competencia digital con las competencias matemáticas.

DESCRIPCIÓN DE LA ASIGNATURA Y DE SU EVALUACIÓN

Este artículo se encuadra en la asignatura "Métodos Matemáticos para la Ingeniería" (MMI) del GIISI de la Universidad Pablo de Olavide, formando un bloque de contenidos con las asignaturas "Álgebra" y "Cálculo", que habrán sido previamente cursadas. Para esta asignatura, el profesorado optó por actualizar su forma de enseñar matemáticas en base a la experimentación previa realizada en la experiencia piloto de la ITIG. Aunque describiremos brevemente la organización de la asignatura y su sistema de evaluación, una descripción detallada puede consultarse en Tenorio et al. (2011).

La docencia se organiza en sesiones teóricas y prácticas de cadencia semanal con en torno a 80 alumnos matriculados: las teóricas en un único grupo y las prácticas (en aulas de informática) en subgrupos de entre 20 y 25 estudiantes. Los contenidos corresponden a Álgebra Numérica y Cálculo Numérico, trabajándose con valores aproximados y procedimientos algorítmicos para obtener dichos valores.

La asignatura se plantea desde la perspectiva de la resolución de problemas por parte del alumnado, planteando problemas (y no meros ejercicios) para la evaluación del alumnado. Dicha resolución se trabaja desde una perspectiva tanto tradicional ("a mano") como computacional usando paquetes de cálculo simbólico (como Mathematica©). De hecho, la mayoría de los problemas tratados requieren de un tratamiento computacional, volviendo esencial el uso de dichos paquetes para las actividades a realizar (incluidas las evaluativas).

Las sesiones teóricas explican nociones y resultados con ejemplos numéricos y dificultades similares a las necesarias para superar la asignatura. En las sesiones prácticas, el alumnado trabaja esos contenidos en problemas con dificultades adicionales a superar. Aunque se apoye en el software Mathematica©, siempre debe razonar y justificar el procedimiento seguido y la respuesta dada.

En nuestra asignatura, buscamos que el alumnado aproveche los múltiples recursos a su alcance para continuar su proceso de enseñanza/aprendizaje en el semestre. Por ello, no solo hemos introducido las TICs en el manejo de software para resolver problemas, sino también como un recurso que complementase y apoyase nuestra actividad docente con el alumnado. La plataforma BlackBoard de formación a distancia (denominada aula virtual) es ya algo cotidiano y natural para el alumnado, encontrando allí toda el material de la asignatura y diversas herramientas de comunicación y de seguimiento y evaluación individualizado. Así, trabajamos transversalmente su competencia en el uso de herramientas digitales y de un entorno digital compartido. Esta competencia digital le será sumamente positiva al incorporarse al mundo laboral.

Proponemos un sistema de evaluación continua por competencias, en la que el alumnado (actor principal del proceso de enseñanza/aprendizaje) trabaja de manera autónoma diversas actividades supervisadas por el profesorado durante el semestre (supervisor y tutor de su evolución), tal y como sostienen Le Boterf (1997) o Morin (1999), para los que la evaluación debería centrarse en la habilidad adquirida para manejar, seleccionar, cambiar (actualizar y/o renovar) y combinar conocimientos con el fin de resolver problemas contextualizados y académicos. El seguimiento de tales actividades aportaría mucha y diversa información para evaluar al alumnado en el proceso de enseñanza/aprendizaje y no al final (como correspondería a un examen final) pues nos centraríamos en la aplicación coherente y reflexiva de conceptos y procedimientos como proponen Barberá (1999) y MacDonald et al. (2000).

Como seguimos una evaluación centrada en la comprensión significativa y constructiva de conocimientos y procedimientos por el alumnado, este debe ser capaz de aplicarlos y combinarlos argumentada y correctamente para resolver cualquier problema que se le plantee, llegando a completarlos y actualizarlos si fuese el caso. Por tanto, no buscamos la memorización de definiciones y resultados (de dudosa utilidad por la rapidez con la que los conocimientos quedan obsoletos). El centrar la evaluación en la aplicación e interpretación de procedimientos en lugar de en realizar meros cálculos está en consonancia con el uso de software para la resolución de problemas.

Nuestra evaluación emplea tres tipos de actividades, secuenciadas a lo largo del semestre, cada una con un porcentaje distinto en función de la complejidad que presenta su realización y el esfuerzo y dedicación necesarios. El alumnado trabaja todas las actividades bajo supervisión del profesorado. Concretamente, los tres tipos de actividades empleados y sus respectivos porcentajes en la evaluación son los siguientes: tareas de seguimiento supervisadas (60%), defensas orales (30%) y tutorías de seguimiento (10%).

Esta dinámica de tareas supervisadas para evaluar al alumnado se traduce en la elaboración de un portafolios por estudiante que recogerá todo su trabajo durante el semestre y permitirá ver su evolución y cómo va alcanzando competencias (Ballester et al., 2005). Precisamente, este portafolios será la principal herramienta de nuestra evaluación para valorar tanto el nivel de adquisición de competencias como el trabajo y esfuerzo empleado en su realización. Pero un portafolios no se limita a que el profesorado corrija y archive las tareas de su alumnado, sino que esta evaluación debe servir para que su alumnado corrija errores y falsas concepciones a lo largo de su evaluación.

Cada tarea de seguimiento se encomienda al alumnado al final de cada sesión práctica y consiste en una serie de problemas sobre conceptos, procedimientos y competencias de dicha sesión para trabajarlos autónomamente con el paquete Mathematica© y bajo supervisión del profesorado. El proceso es el siguiente:

1) Encomendar tarea tras sesión práctica: la tarea consiste en problemas tratados en dicha sesión para trabajarlos autónomamente.
2) Realizar tarea asesorado por el profesorado mediante tutorías: el alumnado plantea sus dudas y dificultades, buscando que el profesorado corrija los errores o falsas concepciones empleados.
3) Entrega (telemática) y evaluación por el profesorado, con emisión de informe incluyendo fallos y carencias encontrados.
4) Corrección de tarea usando informe y reenvío (telemático) de versión corregida para su evaluación.

El portafolios (Pozo Llorente, 2005; Pozo Llorente et al., 2006) es una de las estrategias evaluativas más ricas porque el alumnado construye su conocimiento de manera autónoma (aunque bajo supervisión del profesorado) y adquiere competencias al trabajar la asignatura. Por tanto, el trabajo del alumnado resulta esencial en nuestro sistema de evaluación, lo que nos lleva a un punto vital importancia (máxime en asignaturas de matemáticas): su motivación. El alumnado ve cómo su trabajo le hace avanzar en la consecución de los objetivos de la asignatura y la supervisión de sus tareas le permite llevar la asignatura al día evitándose la acumulación de contenidos y/o errores. Todo ello ha permitido evitar que el alumnado vea como algo imposible seguir el ritmo del semestre y a su vez reducir la tasa de abandono. Esto se debe a que ajustamos nuestra docencia a las necesidades del alumnado (función reguladora) y le permitimos tomar consciencia de sus errores, carencias y falsas concepciones para que puedan corregirlas mediante nuestra actuación individual como docentes sobre cada estudiante durante el semestre (función formativa). Además, todo ello hace que el alumnado participe activamente en su proceso de enseñanza/aprendizaje que, según Imbernon et al (2005), es esencial para una correcta evaluación por competencias.

Como el alumnado trabaja las tareas en su casa en las horas de trabajo no presencial, hemos tenido que habilitar mecanismos de control para comprobar y controlar que el trabajo realizado en las tareas fue realizado por cada estudiante y que ha asimilado los contenidos y procedimientos amén de alcanzar el nivel mínimo de competencias. Esa función la cubren tanto las defensas orales como las tutorías. Las defensas se centran en observar que el alumnado explica comprensiblemente las actividades encomendadas y que es capaz de responder a cuantas preguntas se le hagan al respecto.

Por otro lado, las tutorías nos permiten hacer un seguimiento continuado e individualizado del trabajo del alumnado y su evolución en la asignatura. Por tanto, la tutoría se vuelve una de las principales actividades (si no la más importante) no solo para que el alumnado realizar correctamente las tareas, sino también como nuestro principal recurso didáctico para evaluar, asesorar y supervisar al alumnado y que corrija sus errores y falsas concepciones para que llegue a ser competente (Arbizu et al. 2005). Por tanto, la tutoría se convierte en una acción formativa para orientar al alumnado en su trabajo y corregir las faltas cometidas y carencias detectadas. Además, podemos realizar parte de su evaluación observando y comprobando los procesos de resolución que sigue (cómo el alumnado trabaja las actividades) y su capacidad para comprender las indicaciones del profesorado y superar las dificultades que surgen durante el semestre. Toda esta riquísima información es básica para evaluar su evolución y la de sus competencias y la vamos almacenando en el historial de cada estudiante. Este seguimiento individualizado mediante las tutorías es también parte de la filosofía del portafolios porque requiere de un seguimiento y atención tutorial individualizada de cada estudiante durante el semestre.

Buscando usar la tutoría como un recurso más para evaluar a nuestro alumnado, hemos considerado los siguientes aspectos para una tutoría tanto sincrónica/asincrónica como presencial/virtual (esto último mediante BlackBoard):

1) Máxima disponibilidad para tutorías presenciales. Además de los horarios oficiales de tutorías, se posibilitan citas fuera del mismo para el alumnado que no pueda acudir por motivos justificados (e. g. compatilizar trabajo con estudios o asignaturas de distintos cursos).

2) Reducción del tiempo de espera del alumnado para entrar a tutoría. En ocasiones, se forman colas para las tutorías porque el alumnado opta por acudir simultáneamente a tutoría. Por tanto, quienes esperan fuera están perdiendo un valioso tiempo de estudio y quienes están dentro se sienten presionados y terminan la tutoría antes de tiempo. En nuestra asignatura, la tutoría es un recurso esencial para el seguimiento de cada estudiante, por lo que hemos establecido el mecanismo de cita previa. Las citas concertadas permiten reservar un intervalo de tiempo para su seguimiento en tutoría, de 20 a 30 minutos. Se habilitan unos 22 turnos de tutoría a la semana (18 en horario oficial y 4 fuera del mismo). Si un estudiante aparece sin cita y hay una tutoría concertada, esta será la que tenga prioridad. Debe tenerse en cuenta que el profesorado está disponible en su despacho en el horario oficial de tutoría aunque no haya cita concertada. Durante el curso, el alumnado aprovechó las tutorías concertadas y utilizó todos los turnos semanales. El alumnado es responsable de sus citas a tutoría y, en ese sentido, se le enfatiza a anular aquellas citas a la que no vayan a asistir para otro/a estudiante pueda aprovechar ese turno. En general, toda tutoría se concertaba en la misma semana que se solicitaba. A veces, varios/as estudiantes (no más de tres) acordaban asistir juntos, asignándoseles turnos consecutivos y preguntando sus dudas conjuntamente al igual que trabajan las tareas.
3) Tutorías virtuales. En ocasiones, el alumnado no puede asistir a tutoría en los turnos disponibles esa semana o quiere realizar una consulta puntual y concreta mientras trabaja un determinado problema. Para ello, usamos tres herramientas incluidas en la plataforma virtual BlackBoard: a) la mensajería interna; b) los foros; y c) la pizarra virtual y/o el "classroom". Las dos primeras permiten una comunicación asíncrónica para contestar dudas puntuales y concretas, mientras que la última permite una comunicación sincrónica para realizar una tutoría virtual solventando en la pizarra o en videoconferencia las consultas del alumnado. Todas las consultas se responden en menos de 48 horas. En alguna ocasión, el alumnado usó el chat para consultas rápidas cuando el profesorado está conectado. Por tanto, la tutoría virtual se convierte en uno de los principales mecanismos para evaluar el seguimiento individualizado del alumnado en su proceso de enseñanza/aprendizaje a distancia (Sáenz Castro, 2001).

Durante la exposición de nuestro sistema de evaluación continua por competencias no hemos hecho referencia en ningún momento al examen final. De hecho, al decidir cuál iba a ser nuestro sistema de evaluación tuvimos que plantearnos si una evaluación final nos permitiría evaluar las competencias del alumnado durante el semestre. Esta cuestión planteó un interesante debate en nuestro equipo docente ya que se suele ser muy reticente a suprimir dicha evaluación final por temor a no realizar un seguimiento adecuado del alumnado y equivocarnos al determinar el nivel de sus competencias. Pero ante esas dudas, solo hemos de pensar si seríamos capaces de determinar dicho nivel con una única prueba escrita al final del semestre. Esto se debe a lo complicado que resultaría evaluar las competencias del alumnado en una ventana temporal tan limitada, ya que impediría ver cómo el alumnado tantea distintas estrategias antes de optar por una concreta para resolver el problema planteado. Más aún, no podríamos supervisar (mucho menos de manera individualizada) al alumnado mientras realiza un examen final. Todo ello nos llevó a suprimir el examen final y realizar la evaluación mediante actividades durante el semestre. Así, este se ha relegado a la actividad de evaluación para la segunda convocatoria anual, una vez no alcanzadas las competencias mínimas en primera convocatoria.

En la próxima sección, discutiremos razones de índole formativo para incluir una perspectiva computacional en nuestra docencia.

USANDO PAQUETES DE CÁLCULO SIMBÓLICO PARA TRABAJAR LAS MATEMÁTICAS

Ya hemos hecho referencia al uso de las TIC en el aula por medio de las plataformas digitales como herramienta de seguimiento, pero no es el recurso informático que nos preocupa en el presente trabajo. En matemáticas, es esencial usar el software existente para tratar computacionalmente problemas matemáticos. Cada vez se hace más necesario el formar al alumnado en el uso de paquetes de cálculo simbólico, de simulación o de tratamiento estadístico de datos, buscando sacar el máximo provecho en su actividad profesional. Hemos de formar profesionales competentes en matemáticas, bajo una perspectiva actual evitando trabajar los problemas como en el siglo XIX y aprovechando los avances tecnológicos existentes. Debemos alfabetizar computacional y digitalmente a nuestro alumnado y eso conllevaría la actualización de nuestra forma de trabajar y resolver problemas matemáticos en el aula (Salinas, 2004).

Trabajar los problemas con ayuda de calculadoras y ordenadores no es nuevo como tampoco lo es evaluar al alumnado mediante la resolución de problemas. Esta filosofía educativa aparece previamente en la literatura como por ejemplo en Contreras el al. (2005), Tenorio (2008) o Tenorio et al. (2010). Tales trabajos no solo abogan por usar recursos TIC para realizar la actividad docente y evaluativa acorde a los tiempos en que vivimos, sino que trabajan los problemas matemáticos empleando el software apropiado.

Obviamente, el tratamiento de un problema matemático asistido por un paquete de cálculo simbólico puede distar mucho del tratamiento que dicho problema en una resolución tradicional, pudiéndose simplificar e incluso evitar pasos.

Por tanto, no podemos basar toda nuestra docencia y evaluación en la mera y correcta repetición de algoritmos de “lápiz y papel”, obviando los recursos informáticos o limitándonos a cuestiones puramente calculísticas. No estamos renegando de tales algoritmos, los cuales son esenciales para desarrollar el pensamiento matemático y la argumentación de cada paso realizado. Lo que queremos decir es que el alumnado universitario (que ya ha trabajado dichos algoritmos con esa finalidad) debe centrarse en la aplicación práctica y razonada de los distintos procedimientos trabajados, aunque también se trabajarán “a mano” para aprovechar las virtudes de los algoritmos tradicionales de cálculo. Es decir, nuestro alumnado debe ser capaz de resolver los problemas desde un punto de vista academicista y clásico (más distante del tratamiento práctico que realmente se hace). Así, se pueden plantear problemas que, se trabajen con ayuda de un ordenador, pero se requiere de una comprensión teórica de los procedimientos y conceptos involucrados para resolverlos correctamente e interpretar los resultados al contexto en cuestión. Es más, previamente a la asignatura MMI, el alumnado ha cursado sendos semestres de Álgebra y de

Cálculo en los que se trabajan conceptos más teóricos basados en resolver problemas sin usar un paquete de cálculo simbólico.

Las perspectivas tradicional y computacional deben convivir en nuestras aulas, pues hemos de formar a nuestro alumnado en el procedimiento de resolución formal de problemas matemáticos desde un punto de vista teórico (incluyendo formalidad en la notación, comprobación de hipótesis y aplicación correcta de resultados). Pero esa necesidad no puede llevarnos a dejar de lado que la gran mayoría de nuestro alumnado necesitarán las matemáticas como una herramienta (y no como un ente "per se"), con lo que la relación que tendrán con ella en sus ocupaciones será transversal y no dispondrán de tiempo para resolver un cálculo matemático, que con el software adecuado se resolvería en cuestión de segundos.

Pensando en una distribución temporal para planificar una actividad de evaluación, debemos decidir si nos interesa evaluar en el alumnado sus capacidades operativas o si, por el contrario, nos centramos en determinar si el alumnado selecciona los procedimientos apropiados, justifica su elección y posterior uso y aplica correcta y adecuadamente dicho procedimiento interpretando los resultados que obtiene.

Si solo nos interesa lo primero, entonces debemos preparar actividades cuyas complicaciones se encuentran en los cálculos, asumiendo que son cálculos en los que el alumnado invertirá su tiempo de trabajo. Si, por el contrario, queremos evaluar la competencia del alumnado, entonces tendremos que preparar actividades pensadas para trabajarlas con ayuda de un software matemático. Esto es lo que defenderemos en el presente trabajo.

Tenemos pues que plantear otra forma de proponer problemas al alumnado y, por ende, de evaluar la resolución de los mismos para percibir si se han asimilado realmente los contenidos y si se usa correctamente el software. Concretamente, los problemas a trabajar deben conllevar una traducción al lenguaje del software empleado para mostrar si se interpreta y utiliza correctamente la información devuelta por el software al resolver el problema planteado y continuar/finalizar el mismo.

Un paquete de cálculo simbólico solo realiza cálculos y permite comprobar (pero no probar) las propiedades que se le indican al alumnado siempre será este quien deberá indicar al software qué propiedad ha de comprobarse y cuáles son las operaciones que permiten realizar dicha comprobación. Es más, tendrán que interpretar el significado de los cálculos realizados por el software en el contexto del problema a resolver.

Por tanto, podemos seguir evaluando contenidos, pero cambiando la forma de preguntar y priorizando otros ítems distintos a la realización de cálculos (que ya no haría el alumnado). Lo importante sería el planteamiento, uso y aplicación de los resultados obtenidos, además de la interpretación de los datos obtenidos con el software. Los paquetes de cálculo simbólico permiten trasladar la importancia de la calculística (que en universidad pueden hacerse con ayuda de un paquete computacional) a la adquisición de competencias y, más concretamente a la correcta aplicación y uso de conceptos y procedimientos, amén de la interpretación y contextualización de los cálculos realizados. Ya no evaluaríamos cálculos y resultado final (que serían secundarios), sino que evaluaríamos la corrección y justificación en la aplicación de procedimientos, la manipulación de datos y la interpretación de los cálculos obtenidos tanto para continuar con el problema como para contextualizarlo a la situación (del mundo real) que se modeliza con el problema matemático resuelto. Por ejemplo, deberíamos plantear problemas con dificultades para satisfacer directamente las hipótesis de aplicación de los procedimientos y que requieren de su manipulación previa para traducirlo en otro equivalente que sí pueda resolverse con dicho procedimiento.

El software matemático le permite al alumnado "trastear" el problema y "manipularlo" con ejemplos que le permiten tener una intuición del comportamiento al modificar datos o el procedimiento aplicado. Así, le permitimos experimentar con el problema y aprender mediante acierto-error en un menor tiempo y sin tener que estar realizando un sin número de cálculos.

Tras hablar de las ventajas para la evaluación de la resolución de problemas asistido por un paquete de cálculo simbólico, queremos resaltar que también hay una motivación procedimental para trabajarlos desde una perspectiva computacional y evaluar al alumnado desde esta perspectiva: trabajar un problema matemático con un paquete de cálculo simbólico usualmente sigue un tratamiento muy diferente al de su resolución "a mano".

Aclaremos esta afirmación con un sencillo ejemplo sobre la resolución de sistemas de ecuaciones lineales. Manualmente, primero discutiríamos si el sistema tiene o no solución estudiando los rangos de la matriz de coeficientes y la ampliada para saber si tiene sentido realizar el elevado número de operaciones que conlleva resolver el sistema. Si el sistema no tiene solución, ¿para qué realizar dichos cálculos? Por el contrario, si en un paquete de cálculo simbólico se ejecuta la orden para resolver el sistema y ver que tiene solución sin estudio teórico previo de su número de soluciones. De este modo, al calcular las soluciones (o, en el peor caso, aproximaciones suyas), determinamos cuáles y cuántas, llegando a la conclusión de que no las hay si no son calculadas. No tiene sentido pues discutir el sistema previamente. Si el sistema es paramétrico, siendo algunos de los coeficientes un parámetro desconocido, se necesita un tratamiento teórico para no perder soluciones que el ordenador puede haber descartado para continuar su resolución. Esto ocurre, por ejemplo, al resolver ecuaciones polinómicas de grado elevado o ecuaciones en las que aparecen funciones algebraicamente trascendentes (e. g. trigonométricas, exponenciales, logarítmicas…). Entonces es necesario un estudio de casos para determinar todas las (familias de) soluciones, basándonos en las técnicas tradicionales aunque el ordenador nos facilitará los cálculos.

EJEMPLOS DE PROBLEMAS TRABAJADOS

A continuación, veremos algunos ejemplos de problemas trabajados en la asignatura MMI del GIISI. En cada problema, indicaremos los criterios utilizados para determinar si el alumnado está aplicando los conceptos y procedimientos correctamente y si la solución dada al problema es adecuada. Queremos resaltar que la mayoría de los problemas no tienen una única resolución, dando por válida cualquiera debidamente justificada y argumentada a partir de los recursos disponibles. Los problemas indicados en esta sección se resuelven con ayuda del paquete de cálculo simbólico Mathematica©, que permitirá obviar los pesados y repetitivos cálculos que conllevan la mayoría de los procedimientos numéricos.

Como estamos evaluando la capacidad del alumnado para resolver razonada y justificadamente un problema, no nos centramos en los cálculos al aplicar un método, sino en justificar todos los pasos, decisiones y razonamientos para llegar a la resolución final del mismo. Seguimos, pues, la filosofía de Pérez Jiménez (2005) y Jiménez Montero (2006), entre otros, para evaluar al alumnado resolviendo problemas o aplicando procedimientos algorítmicos sin interferencias de problemas calculísticos (que podrían estar enquistados de etapas anteriores), viendo de este modo si el alumnado presenta dificultades en los conceptos y procedimientos estudiados.

Con un tratamiento computacional, los cálculos los realiza un software a gran velocidad y, como docentes, nos centramos en preguntar sobre conceptos y procedimientos, sin necesidad de "preparar" cálculos para que no se compliquen. Precisamente, las complicaciones al resolver un problema es lo realmente enriquecedor para la formación del alumnado y lo que permite evaluar si se limita a repetir automáticamente un procedimiento o si lo ha asimilado y sabe adaptarlo a la situación planteada para resolver el problema en cuestión.

En general, si los problemas se trabajan manualmente sin un software, solo preguntar por un concepto conllevaría un gran gasto de tiempo y no se podría preguntar por un segundo concepto relacionado con el anterior.

En el semestre de MMI, todo problema numérico pueden incluirse apartados preguntando sobre la exactitud y precisión de las aproximaciones que van siendo calculadas en lugar de los valores exactos. Debe tenerse en cuenta que un paquete de cálculo simbólico permite realizar los cálculos para determinar tanto la exactitud como la precisión ejecutando sencillas órdenes cuya salida solo debe interpretar el alumnado para traducirlas en los términos apropiados de exactitud y precisión. Recuérdese que tanto exactitud como precisión de una solución aproximada (que no exacta) miden cuánto dista del valor exacto. Mientras que la exactitud lo hace en términos absolutos, la precisión lo hace en términos relativos (i. e. tanto por uno). Precisamente, precisión y exactitud permiten evaluar aspectos sobre la competencia del alumnado, ya que los problemas pueden prepararse para que el alumno tenga que tomar decisiones sobre la precisión y exactitud de los datos de partida para que el software calcule una aproximación con las restricciones impuestas en el problema. Veremos en el Problema 1 un ejemplo de cómo los errores se usan para decidir cuándo un método iterativo (i. e. obtener un valor aproximado más ajustado a partir de uno anterior mediante la aplicación de una expresión algebraica) debe detenerse con el fin de indicarle al software cuando debe truncar el proceso y dejar de calcular más iteraciones. Por su parte, en el Problema 2, observaremos cómo cambia radicalmente los ítems a evaluar en un problema basado en el uso de Mathematica©, primando el manejo de los conceptos y la interpretación de los resultados que se van obteniendo sobre los meros cálculos.

Problema 1: Métodos de Jacobi y de Gauss-Seidel (unidad didáctica de resolución numérica de sistemas de ecuaciones lineales).

Partimos de un sistema de ecuaciones $\boldsymbol{A} \bullet \vec{\boldsymbol{x}} = \vec{\boldsymbol{b}}$, con una matriz cuadrada $\boldsymbol{A} = \left(\boldsymbol{a}_{r,s}\right)$ de coeficientes de orden $\boldsymbol{n}$ y determinante no nulo, con un vector $\vec{\boldsymbol{b}} = (\boldsymbol{b}_r)$ de términos independientes y con un vector $\vec{\boldsymbol{x}}=(\boldsymbol{x}_r)$ de incógnitas. Si el determinante es no nulo, la solución del sistema es única y la convergencia del método será a dicha solución.

Si cada elemento $\boldsymbol{a}_{r,r}$, en la diagonal principal de $\boldsymbol{A}$, es distinto de cero, se puede construir una sucesión $\{\vec{\boldsymbol{x}}^{(k)}\}_{k\in\aleph}$ de “aproximaciones” de la solución exacta. En el método de Jacobi, el vector $\vec{\boldsymbol{x}}^{(k)}$ tiene las siguientes coordenadas en función de las del vector anterior $\vec{\boldsymbol{x}}^{(k-1)}$:

$$\boldsymbol{x}_r^{(k)}=\frac{\boldsymbol{b}_r-\sum_{s\neq r}\boldsymbol{a}_{r,s}\cdot\boldsymbol{x}_s^{(k-1)}}{\boldsymbol{a}_{r,r}}\text{ con }1\leq \boldsymbol{r}\leq \boldsymbol{n}$$

mientras que las coordenadas en el método de Gauss-Seidel serían:

$$\boldsymbol{x}_r^{(k)}=\frac{\boldsymbol{b}_r-\sum_{1\leq s\leq r-1}\boldsymbol{a}_{r,s}\cdot\boldsymbol{x}_s^{(k)}-\sum_{r+1\leq s\leq n}\boldsymbol{a}_{r,s}\cdot\boldsymbol{x}_s^{(k-1)}}{\boldsymbol{a}_{r,r}}\text{ con }1\leq \boldsymbol{r}\leq \boldsymbol{n}.$$

Como ya se indicó, la expresión iterativa del método requiere del vector $\vec{\boldsymbol{x}}^{(k-1)}$ para obtener el vector $\vec{\boldsymbol{x}}^{(k)}$. Por tanto, su aplicación necesita seleccionar una primera “aproximación” $\vec{\boldsymbol{x}}^{(0)}$ que generará las restantes “aproximaciones”. Esta elección de $\vec{\boldsymbol{x}}^{(0)}$ no es trivial ya que debemos asegurar que los vectores $\vec{\boldsymbol{x}}^{(k)}$ se van aproximando a la solución, que es cuando el método se dice convergente y los vectores $\vec{\boldsymbol{x}}^{(k)}$ estiman la solución.

La convergencia de ambos métodos se tiene si comprobamos que la matriz $\boldsymbol{A}$ es estrictamente diagonal dominante; i.e.:

$$\boldsymbol{a}_{r,r} > \boldsymbol{a}_{r,1}+\ldots+\boldsymbol{a}_{r,r-1}+\boldsymbol{a}_{r,r+1}+\ldots+\boldsymbol{a}_{r,n}\text{ con }1\leq \boldsymbol{r}\leq \boldsymbol{n}.$$

Entonces, cualquier vector $\vec{\boldsymbol{x}}^{(0)}$ sirve de aproximación inicial, aunque lo más cómodo computacionalmente resulta $\vec{\boldsymbol{x}}^{(0)}=\vec{0}$. Para cada elección de $\vec{\boldsymbol{x}}^{(0)}$, se obtendría una sucesión distinta de aproximaciones.

Con la fundamentación teórica del método, tenemos los primeros indicios para evaluar al alumnado sobre su aplicación correcta y razonada: Primero, tras expresar matricialmente el sistema de ecuaciones, debería comprobar que la matriz $\boldsymbol{A}$ tiene determinante no nulo (usando el comando pertinente) y concluir que la solución del sistema es única. Una vez hecho esto, tiene sentido usar ambos métodos de resolución numérica. Eso sí, deberá estudiar la condición de diagonalidad estrictamente dominante para justificar que la sucesión $\{\vec{\boldsymbol{x}}^{(k)}\}_{k\in\aleph}$ converge a la solución del sistema con la elección hecha de $\vec{\boldsymbol{x}}^{(0)}$. Por esa razón, en un problema de esta tipología, la matriz $\boldsymbol{A}$ no debería satisfacer la condición de diagonalidad estrictamente dominante para que el alumnado tenga que manipular previamente la matriz mediante transformaciones elementales y obtener un sistema equivalente al dado (i. e. con la misma solución) que sí satisfaga la condición. De este modo, evaluamos el que las hipótesis que permiten la aplicación adecuada del método y la capacidad de adaptar el sistema a otro equivalente que las satisfaga. En consecuencia, si no hace este estudio, veremos que el alumnado aplica automáticamente los procedimientos, pero sin saber cuándo, cómo y por qué debe aplicarlos.

Tras obtener el nuevo sistema (pues las transformaciones afectan al orden de incógnitas y/o términos independientes), el alumnado debe aplicar los métodos al sistema resultante para aproximar numéricamente la solución, por lo que el alumnado está mostrando su comprensión del procedimiento. Si obtiene la matriz equivalente, comprueba que es estrictamente diagonal dominante, pero aplica las fórmulas iterativas al sistema original, entonces no habrá comprendido que ha modificado el sistema para asegurar (con la diagonalidad estrictamente dominante) que los cálculos posteriores llevarán a una aproximación de la solución buscada.

Veámoslo mejor con un ejemplo numérico. Sea el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{array}{rrrr} 8{,}012x & -3{,}132y & +4{,}104z = & 2{,}101 \\ -1{,}132x & +3{,}096y & -6{,}013z = & -1{,}112 \\ 4{,}104x & -7{,}013y & +1{,}014z = & 1{,}011 \end{array}$$

cuya expresión matricial resulta ser:

$$\begin{pmatrix} 8.012 & -3.132 & 4.104 \\ -1.132 & 3.096 & -6.013 \\ 4.104 & -7.013 & 1.014 \end{pmatrix} \infty \begin{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{y} \\ \boldsymbol{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.101 \\ -1.112 \\ 1.011 \end{pmatrix}$$

en la que la matriz de coeficientes tiene determinante no nulo, pero no es estrictamente diagonal dominante (para la segunda fila, $3.096 < 1.132 + 6.013$).

Para este sistema, los método de Jacobi y de Gauss-Seidel podrían generar "aproximaciones" de la solución que no sabríamos con certeza si realmente lo son, pues la convergencia no está asegurada. Por tanto, se buscaría un sistema equivalente que si asegurase la convergencia. Intercambiando las filas 2 y 3, se obtiene el siguiente sistema resultante:

$$\begin{array}{rrrr} 8{,}012x & -3{,}132y & +4{,}104z = & 2{,}101 \\ 4{,}104x & -7{,}013y & +1{,}014z = & 1{,}011 \\ -1{,}132x & +3{,}096y & -6{,}013z = & -1{,}112 \end{array}$$

que sí es estrictamente diagonal dominante:

$$8.012 > 3.132 + 4.104$$

$$7.013 > 4.104 + 1.014$$

$$6.013 > 1.132 + 3.096$$

Por tanto, ahora ambos métodos serían convergentes y aplicaríamos las fórmulas iterativas de cada uno para calcular aproximaciones de la solución. Como las transformaciones elementales empleadas, han afectado a los términos independientes, podemos ver fácilmente si el alumnado las ha asimilado correctamente, ya que debe cambiar de orden las ecuaciones al completo y no solo la parte de la matriz de coeficientes.

Parte del alumnado no estudia si el método converge, por lo que no justifica que su resultado aproxime a la solución buscada. Otra parte solo justifica la convergencia viendo la dominancia diagonal estricta del sistema o de otro equivalente, pero aplica el método al sistema de partida y no al que satisface la convergencia. Todas estas acciones informan sobre fallos en el alumnado: la primera nos indica que no ve necesidad de comprobar las hipótesis necesarias de aplicación y que se limita a repetir los cálculos sin importarle llegar a conclusiones y resultados erróneos por una aplicación incorrecta; mientras que la segunda nos permite ver que entiende la necesidad de las hipótesis, pero no que las modificaciones realizadas para cumplir las hipótesis conlleva la modificación de los datos con los que trabaja. Todo este proceso mental de justificar la convergencia y aplicar el método requiere de la comprensión de los conceptos y no afecta el uso del ordenador.

Justificada la convergencia, puede tomarse como aproximación inicial $\vec{x}^{(0)}$ cualquier vector, siendo lo más habitual tomar $\vec{x}^{(0)} = \vec{0}$.

Seguidamente, el alumnado debe aplicar el método al sistema para resolverlo numéricamente con ayuda del paquete Mathematica©. Pese a su uso, el alumnado tendrá que emplear los procesos cognitivos necesarios para resolver el problema matemáticamente, llevando a cabo las interpretaciones de los resultados intermedios obtenidos con el software. En este ejemplo, debe aplicar correctamente la fórmula de iteración del método trabajado.

A continuación, volvemos a evaluar los conocimientos y competencias del alumnado, pues debería saber determinar cuántas aproximaciones ha de realizar antes de detener el algoritmo y dar el último valor calculado como la aproximación adecuada de la solución. Esa decisión debe basarse en el manejo de los siguientes conceptos: criterio de parada, error absoluto, error relativo, cifra decimal exacta, cifra significativa, precisión y exactitud. Explicaremos un poco más detalladamente a qué nos referimos con esto.

Cuando se pide una aproximación de la solución de un problema, esta debe tener una determinada exactitud (número de cifras decimales exactas) y/o precisión (número de cifras significativas), imponiendo la más restrictiva cuando se estudien ambas. Esta condición, de índole computacional, recibe el nombre de criterio de parada y debe explicitarse para testar si la cumple la aproximación calculada y dar como válido el resultado. Si el criterio de parada se expresa en función de la exactitud, el alumnado está estudiando cuándo el error absoluto (o una estimación) es menor que el valor fijado (llamado tolerancia). Si se usa la precisión, el error considerado es el error relativo (o una estimación).

Para el error absoluto, se usa la estimación $\boldsymbol{E_A} \approx \| \vec{\boldsymbol{x}}^{(\boldsymbol{k})} - \vec{\boldsymbol{x}}^{(\boldsymbol{k}-1)} \|_\infty$ con los dos últimos iterados calculados $\vec{\boldsymbol{x}}^{(\boldsymbol{k})}$ y $\vec{\boldsymbol{x}}^{(\boldsymbol{k}-1)}$, ya que la convergencia del método asegura que $\vec{\boldsymbol{x}}^{(\boldsymbol{k})}$ es una mejor aproximación de la solución. Tomaremos cómo aproximación aquella cuyo error absoluto puede estimarse menor que la tolerancia. Para el error relativo, la estimación suele ser $\boldsymbol{E_R} \approx \dfrac{\| \vec{\boldsymbol{x}}^{(\boldsymbol{k})} - \vec{\boldsymbol{x}}^{(\boldsymbol{k}-1)} \|_\infty}{\| \vec{\boldsymbol{x}}^{(\boldsymbol{k})} \|_\infty}$, usando la convergencia nuevamente para justificarlo. En ambos casos, el alumnado ha de asimilar que numéricamente no son necesarios los valores exactos de las expresiones sino solo aproximaciones coincidentes en un determinado número de cifras (decimales exactas o significativas).

En los problemas numéricos, realizar operaciones puede conllevar pérdida de precisión y/o exactitud en las aproximaciones obtenidas sucesivamente. Este aspecto debe ser controlado por el alumnado y, por tanto, debe ser evaluado. Para aproximar con una determinada precisión y/o exactitud, todas las aproximaciones y cálculos intermedios deberían tener al menos dicha precisión y/o exactitud. Por tanto, el alumnado debe comprobar si con los datos y cálculos empleados se produce esa problemática y, en tal caso, trabajar datos iniciales con la precisión y/o exactitud necesaria para compensar la pérdida detectada.

Esto es relativamente sencillo con un paquete de cálculo simbólico ya que: a) para trabajar el problema con mayor precisión/exactitud, basta con actualizar los datos iniciales y correr de nuevo todas las órdenes (por lo que los cálculos los repite el ordenador); y b) la pérdida de exactitud y/o precisión de las aproximaciones se reduce a que la cadena de cifras es más corta de una aproximación a la siguiente.

Estas cuestiones son sumamente importantes para determinar el nivel de competencia digital del alumnado al trabajar estos problemas, pues son tanto de índole computacional como matemática.

Cuando un mismo problema puede resolverse usando diferentes métodos (como en este caso), también puede trabajarse la noción de velocidad de convergencia (i. e. qué método necesita menos iteraciones para alcanzar la precisión y/o exactitud deseada). En nuestro ejemplo, el método de Gauss-Seidel es más rápido qu el de Jacobi por su propia construcción. Obviamente, el alumnado debe ser capaz de seleccionar el método a aplicar en base a su velocidad de convergencia, lo cual se traduciría en primar el uso del método de Gauss-Seidel sobre el de Jacobi.

Problema 2: Factorización LU (unidad didáctica de resolución numérica de sistemas de ecuaciones lineales)

Expliquemos cómo evaluar al alumnado en un problema sobre factorización. Dado el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} 2.01x + y + 2z = 5.01 \\ 2x + 3y + 2z = 7 \\ 4x + 16y + 4z = 24 \end{cases} \tag{1}$$

el alumando ha de expresarlo matricialmente como:

$$\begin{pmatrix} 2.01 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \\ 4 & 16 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5.01 \\ 7 \\ 24 \end{pmatrix}$$

con matriz de coeficientes $\boldsymbol{A}$ y vector de términos independientes $\vec{\boldsymbol{b}}$:

$$A = \begin{pmatrix} 2.01 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \\ 4 & 16 & 4 \end{pmatrix} \text{ y } \vec{\boldsymbol{b}} = \begin{pmatrix} 5.01 \\ 7 \\ 24 \end{pmatrix}$$

Al igual que en el Problema 1, se ha de comprobar que $\boldsymbol{A}$ tiene determinante no nulo para que exista solución única. Una vez hecho esto, tiene sentido la factorización LU. Una matriz cuadrada $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{a}_{r,s})$ de orden $\boldsymbol{n}$ con determinante no nulo admite una factorización LU si $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{L} \bullet \boldsymbol{U}$, siendo $\boldsymbol{U}$ una matriz cuadrada de orden $\boldsymbol{n}$ con ceros por debajo de la diagonal principal y $\boldsymbol{L}$ una matriz cuadrada de orden $\boldsymbol{n}$ con ceros por encima de dicha diagonal y con unos sobre la misma. Como esta factorización no siempre existe, el alumnado debe asegurar si la matriz de coeficientes $\boldsymbol{A}$ es factorizable y así aplicar la factorización. Si $\boldsymbol{A}$ es factorizable, no hay que manipular el sistema para aplicar el método; en otro caso, la matriz no es factorizable (que es lo habitual) y el alumnado debe considerar un sistema equivalente que sí sea factorizable.

Más concretamente, debe usar el resultado que dice: El sistema se resuelve mediante el método de reducción sin reordenar las ecuaciones (i.e. las filas de $\boldsymbol{A}$) si y solo si $\boldsymbol{A}$ admite una factorización LU.

Este resultado le indica al alumnado que si $\boldsymbol{A}$ no es factorizable, entonces basta con reordenar las ecuaciones para obtener un sistema equivalente que sea factorizable. Este sistema será el que deban utilizar desde ese momento.

Determinar si el sistema es factorizable y, en caso negativo, cuáles son los cambios de ecuaciones a realizar es una de las funcionalidades del Mathematica, aunque será el alumnado quien interpretará las salidas que devuelve Mathematica a este respecto.

Si el alumnado calculase manualmente las matrices $\boldsymbol{L}$ y $\boldsymbol{U}$, realizaría un número muy elevado de operaciones para obtener $\boldsymbol{U}$ a partir de la matriz escalonada del método de reducción (sin despejar las incógnitas). Posteriormente, $\boldsymbol{L}$ sería el producto de las matrices representando las transformaciones realizadas sobre $\boldsymbol{A}$ para obtener $\boldsymbol{U}$. Esto conllevaría invertir un tiempo considerable en volver a evaluar competencias de la asignatura Álgebra ya cursada y no las propias de MMI que se está cursando. Sin embargo, con Mathematica© podemos omitir el procedimiento algebraico, centrándonos solo en evaluar el numérico, ya que las matrices $\boldsymbol{L}$ y $\boldsymbol{U}$ se calculan rápida, aunque inmediatamente, aplicando un comando a la matriz $\boldsymbol{A}$ e interpretando razonadamente los datos devueltos. Comprobémoslo definiendo la matriz $\boldsymbol{A}$ con Mathematica y aplicándole el comando LUDecomposition:

```
In[1]:= a := ( 2.01  1   2
               2     3   2
               4    16   4 )

In[2]:= {lu, p, cn} = LUDecomposition[a]

Out[2]= {{{4., 16., 4.}, {0.5025, -7.04, -0.01}, {0.5, 0.710227, 0.00710227}}, {3, 1, 2}, 6262.8}

In[3]:= MatrixForm[lu]

Out[3]//MatrixForm=
( 4.       16.        4.
  0.5025   -7.04      -0.01
  0.5      0.710227   0.00710227 )
```

La última matriz expresa abreviadamente las matrices $\boldsymbol{L}$ y $\boldsymbol{U}$. De la diagonal principal hacia arriba, se obtienen los datos de $\boldsymbol{U}$, mientras que por debajo de dicha diagonal corresponde a $\boldsymbol{L}$. Por tanto, el alumnado ha de interpretar esta información para obtener ambas matrices:

$$U=\begin{pmatrix} 4. & 16. & 4. \\ 0 & -7.04 & -0.01 \\ 0 & 0 & 0.00710227 \end{pmatrix} \text{ y } L=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.5025 & 1 & 0 \\ 0.5 & 0.710227 & 1 \end{pmatrix}.$$

Más aún, el comando LUDecomposition siempre devuelve una factorización *LU*, pero no necesariamente de la matriz ***A*** introducida. El alumnado debe interpretar si la factorización es de ***A*** o si, por el contrario, corresponde a la matriz de un sistema equivalente. Para ello, solo debe comprobar si Mathematica© reordenó las filas, lo cual consiste en interpretar lo siguiente:

```
In[2]:= {lu, p, cn} = LUDecomposition[a]
Out[2]= {{{4., 16., 4.}, {0.5025, -7.04, -0.01}, {0.5, 0.710227, 0.00710227}}, {3, 1, 2}, 6262.8}
```

El dato resaltado debe interpretarse como el orden de las filas de ***A*** usado por Mathematica© para la factorización. El vector {3,1,2} indica que primero se considera la fila 3, después la fila 1 y por último la fila 2. Por tanto, ***A*** no pudo factorizarse y sus filas debieron reordenarse:

$$\begin{pmatrix} 4 & 16 & 4 \\ 2.01 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.5025 & 1 & 0 \\ 0.5 & 0.710227 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4. & 16. & 4. \\ 0 & -7.04 & -0.01 \\ 0 & 0 & 0.00710227 \end{pmatrix}$$

Ahora evaluamos competencias del alumnado: reordenar filas en ***A*** equivale a reordenar ecuaciones en el sistema (1). Por tanto, el sistema a trabajar es el resultante de dicha reordenación:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.5025 & 1 & 0 \\ 0.5 & 0.710227 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4. & 16. & 4. \\ 0 & -7.04 & -0.01 \\ 0 & 0 & 0.00710227 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 \\ 5.01 \\ 7 \end{pmatrix} \tag{2}$$

Por tanto, el alumnado habrá comprendido la factorización *LU* si reordena los términos independientes al expresar el sistema factorizado. Usando esa expresión factorizada, el alumnado de calcular la solución del sistema en dos etapas, cada una consistente en aplicar el método de reducción sobre un sistema con matriz triangular, que equivale al despeje directo y automático de las incógnitas. Es decir, multiplicar la expresión (2) consecutivamente por las inversas de ***L*** y ***U***. Ambas estrategias deben aplicarse tras factorizar el sistema, siendo el alumnado quien toma la decisión sobre cuál usar y explicará lo que está haciendo en cada momento.

El primer sistema a resolver, con matriz de coeficientes ***L***, sería:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.5025 & 1 & 0 \\ 0.5 & 0.710227 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 \\ 5.01 \\ 7 \end{pmatrix} \tag{3}$$

siendo ***x'***, ***y'*** , y ***z'*** incógnitas auxiliares, que representan el resultado de ***U*** por el vector de incógnitas original ***(x, y, z)^t*** (a determinar en el segundo paso). La solución del sistema (3) corresponde al valor de las incógnitas auxiliares:

$$(\boldsymbol{x} \quad \boldsymbol{y} \quad z)^t = (1 \quad 1 \quad 1)^t$$

Estas incógnitas auxiliares serán los términos independientes del sistema a resolver en el segundo paso, lo cual el alumnado debe tener completamente claro para continuar con el problema. La relación entre las incógnitas auxiliares y las incógnitas originales es:

$$\begin{pmatrix} 4. & 16. & 4. \\ 0 & -7.04 & -0.01 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

El alumnado debe usar las incógnitas auxiliares como términos independientes y así calcular las incógnitas del sistema (1). Por tanto, la solución del problema de partida resulta ser:

$$\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^t$$

El alumnado no es evaluado en resolver el sistema, ya que lo hace asistido por el paquete Mathematica©. Por tanto, nos centramos en evaluar el manejo del sistema y la interpretación de los resultados (tanto intermedios como finales).

Así, habríamos finalizado el problema y evaluado tanto conceptos teóricos como su aplicación práctica. Estos problemas pueden conllevar un contexto en el mundo real, permitiendo trabajar la modelización y matematización de la realidad: el alumnado traduciría la situación real a un sistema cuya solución se interpretaría en términos del contexto trabajado.

CONCLUSIONES

En el presente trabajo hemos mostrado nuestra percepción sobre el uso de los paquetes de cálculo simbólico para evaluar competencias matemáticas y digitales en nuestro alumnado. En este sentido hemos indicado algunas causas por las que el uso de dichos paquetes permite evaluar dichas competencias y cómo dicha evaluación se realizaría mediante de la resolución de problemas.

También hemos hecho énfasis en el cambio de las preguntas a realizar ya que la evaluación de dichas actividades no puede recaer en los cálculos, sino en los procedimientos y razonamientos. De este modo, aumentamos la complejidad en el tratamiento previo del problema y en la interpretación de los cálculos intermedios para que el alumnado demuestre su competencia al afrontar estos problemas y al aplicar los métodos trabajados, incluido el ser capaz de reducir un problema a otro resoluble con los métodos disponibles. Así evaluamos el manejo del alumnado en los métodos y procedimientos usados de manera razonada y argumentada, no por mera repetición mecánica.

Como queremos evaluar al alumnado con este tipo de actividades, hemos llegado a la tesitura de plantear un sistema de evaluación basado en realizar actividades de resolución de problemas durante todo el semestre para ir evaluando todo el proceso de enseñanza-aprendizaje y no solo el tramo final con un examen final. Por tanto, también hemos de evaluar la evolución del alumnado amén de las competencias adquiridas, aunque siempre exigiendo unos niveles mínimos. Por ello, el trabajo continuado del alumnado en el semestre es esencial para adquirir las competencias y superar la asignatura En estas actividades realizadas con ayuda de ordenador, se trabajan competencias transversales como el manejo de software y equipo informático (competencia digital) y la adquisición autónoma de conocimientos (aprender a aprender); todo ello además de trabajar pensamiento científico y tratamiento numérico (competencias matemáticas).

La resolución de problemas con ordenador nos ha permitido centrarnos más en los procesos mentales y de razonamiento realizados por el alumnado y trabajar las dificultades que presentan a ese respecto. En lugar de meras cuestiones de cálculo, las dudas del alumnado se centran en el planteamiento y resolución de problemas y en el tratamiento de datos, correspondientes a las competencias matemáticas y computacionales trabajadas.

Finalmente, este trabajo nos ha permitido mostrar cómo los problemas pueden trabajarse en clase con un paquete de cálculo simbólico y cómo esto nos permite centrar la evaluación en los conceptos y procedimientos. Tanto los cálculos como los algoritmos de "lápiz y papel" se vuelven auxiliares, no siendo en ocasiones materia propia de la asignatura sino herramientas a emplear. Así, los paquetes de cálculo simbólico nos ofrecen una vía para trabajar la asignatura con el alumnado pese a las carencias que pudiera traer de etapas previas, posibilitándole continuar su formación y convertir en actividad complementaria el solventar dichas carencias sin obstaculizar la asimilación de conceptos y procedimientos por su parte. Todo ello permitiendo la evaluación en el alumnado de los objetivos impuestos en la asignatura. Para ello, mostramos ejemplos de cómo evaluar problemas resueltos con ayuda de estos paquetes. Esto nos permite además integrar las TIC en nuestra docencia y trabajar específicamente la competencia digital tan importante en futuros ingenieros e ingenieras informáticas. En conclusión, creemos haber resaltado la importancia y utilidad como recurso didáctico y evaluativo de los paquetes de cálculos simbólicos siempre y cuando se replanteen las preguntas y actividades de evaluación que le proponemos al alumnado.

REFERENCIAS

ANECA (2005). *Libro Blanco del Título de Grado en Ingeniería Informática*. Madrid: Agencia Nacional de Evaluación de la Calidad y Acreditación.

Arbizu, F., Lobato, C. y del Castillo, L. (2005). Algunos modelos de abordaje de la tutoría universitaria. *Revista de Psicodidáctica*, 1, 7-22.

Ballester, L. y Nadal, A. (2005). La Evaluación del alumnado en la universidad: rutinas y concepciones del profesorado. *Revista Electrónica Interuniversitaria de Formación del Profesorado*, 8(4), 1-7.

Bermudo, S., Moreno, P. y Tenorio, A.F. (2006). Una experiencia piloto en la Universidad Pablo de Olavide: "Fundamentos Matemáticos de la Informática I y II" y "Estadística" de la Ingeniería Técnica de Informática de Gestión. En *Actas de I Jornadas Nacionales de Intercambio de Experiencias Piloto de Implantación de Metodologías ECTS* , 8pp. Badajoz: Universidad de Extremadura.

Boletín Oficial del Estado, 18 de septiembre de 2003, núm. 224 "Real Decreto 1125/2003, de 5 de septiembre, por el que se establece el sistema europeo de créditos y el sistema de calificaciones en las titulaciones universitarias de carácter oficial y validez en todo el territorio nacional”, pp. 34355-34356.

Boletín Oficial del Estado, 25 de enero de 2005, núm. 21 “Real Decreto 55/2005, de 21 de enero, por el que se establece la estructura de las enseñanzas universitarias y se regulan los estudios universitarios oficiales de Grado”, pp. 2842-2846.

Boletín Oficial del Estado, 30 de octubre de 2007, núm. 260 “Real Decreto 1393/2007, de 29 de octubre, por el que se establece la ordenación de las enseñanzas universitarias oficiales”, pp. 44037-44048.

Contreras, A., Font, V., García, M., Luque, L. y Marcolini, B. (2005). Aplicación del programa Matemática a las prácticas de cálculo en el primer año universitario. En Maz Machado, A.M.; Gómez Alfonso, B. y Torralbo Rodríguez, M. (eds.). *Actas Noveno Simposio de la Sociedad Española de Educación Matemática*, pp. 271-282. Córdoba: SEIEM y Universidad de Córdoba.

Hernández-Jiménez, B.; Moreno Navarro, P. y Tenorio Villalón, A.F. (2008a). ¿Cómo se enfoca la metodología ECTS y la virtualización en las asignaturas de contenido estadístico-matemático de la Ingeniería Técnica en Informática de Gestión de la Universidad Pablo de Olavide? En Peña Ros, R. y otros (eds.), *Actas de XIV Jornadas de Enseñanza Universitaria de la Informática*, pp. 377-384. Madrid: LibroTeX.

Imbernon, F. y Medina, J.L. (2005). *Metodología participativa en el aula universitaria. La participación del alumnado*. Cuadernos de Docencia Universitaria 04. Barcelona: Editorial Octaedro

Jiménez Montero, L. (2006). Enseñanza de la matemática dominada por algoritmos versus una enseñanza más conceptual. En *Actas de I Encuentro Enseñanza de la Matemática*. Costa Rica: Universidad Estatal a Distancia.

Le Boterf, G. (1997). *L'ingénierie et l'évaluation des compétences*. Paris: Editions d'Organisation.

Mateo, J. (2007). Interpretando la realidad, construyendo nuevas formas de conocimiento: el desarrollo competencial y su evaluación. *Revista de Investigación Educativa*, 25(2), 513-531.

McClelland, D.C. (1973). Testing for competence rather than for ‘intelligence’. *American Psychologist*, 28(1), 423-447.

MECD (2003). *La integración del sistema universitario español en el Espacio Europeo de Enseñanza Superior. Documento-marco*. Madrid: Ministerio de Educación, Cultura y Deporte.

Morin, E. (1999). *Seven complex lessons in education for the future.* Paris: UNESCO Publishing.

Sáenz Castro, C. (2001). Una nueva función formativa: la tutoría telemática. *Tarbiya: Revista de Investigación e Innovación Educativa*, 29, 119-133.

Salinas, J. (2004). Innovación docente y uso de las TIC en la enseñanza universitaria. *Revista de Universidad y Sociedad del Conocimiento*, 1, 1-16.

Pérez Jiménez, A.J. (2005). Algoritmos en la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas. *Unión. Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 1, 37-44.

Pozo Llorente, T. (2005). The viability of the portfolio for learning and teaching evaluation: an innovation experience carried out in a university context. *International Journal of Learning*, 12, 269-278.

Pozo Llorente, M.T. y García Lupión, B. (2006). El portafolios del alumnado: una investigación-acción en el aula universitaria. *Revista de Educación*, 341, 737-756.

Roé, R.A. (2002). What makes a competent psycologist? *European Psycologist*, 7(3), 192-202.

Tenorio, A.F. (2008). Propuestas de actividades con calculadora gráfica para el tratamiento de operaciones matriciales en el aula. *Unión. Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 15, 171-190.

Tenorio. A.F. y Oliver, E. (2011). Una experiencia docente sobre evaluación continua y seguimiento personalizado del alumnado de ingeniería en asignaturas de matemáticas. En García-García, M.J. e Icarán, E. (Eds.), *Actas de VIII Jornadas Internacionales de Innovación Universitaria* (8pp.). Madrid: Universidad Europea de Madrid.

Tenorio, A.F.; Paralera, C. y Martín, A.M. (2010). Evaluación mediante competencias digitales: una experiencia con Mathematica. *Epsilón: Revista de la Sociedad Andaluza de Educación Matemática THALES*, 75, 123-136.

Épsilon - *Revista de Educación Matemática* **2016, Vol. 33 (2), nº 93, 107-113**

Obtención de la raíz cuadrada de un número con pinchos insertables y un tablero perforado

Noelia Jiménez-Fanjul,
Alexander Maz-Machado
Carmen María León-Mantero
Universidad de Córdoba

Resumen: *Presentamos una actividad para trabajar el concepto de raíz cuadrada, ligado al concepto de cuadrado, realizando la conexión entre la aritmética y la geometría, e iniciando la extracción de la raíz cuadrada de un número de forma manipulativa con pinchos insertables y un tablero perforado.*
Palabras Clave: *Raíz cuadrada, Material manipulativo, Matemáticas, Aritmética.*

Square roots using pegboards

Abstract: *We present a class activity to work the concept of square root (arithmetics), linked to the concept of square (geometry), as well as, a graphical algorithm to find the square root of a given number by means of manipulative materials: pegboards.*
Keywords: *Square root, manipulative materials, Mathematics, Arithmetics.*

INTRODUCCIÓN

Existen numerosas experiencias del uso de materiales manipulativos para la enseñanza de las matemáticas en la educación primaria, de hecho, el uso de materiales manipulativos facilita la transición de la etapa de desarrollo cognitivo de "operaciones concretas" a la de "operaciones formales" (Piaget e Inhelder, 1997), promoviendo un aprendizaje de calidad. Sin embargo, y como ya apuntaba Bruner (Resnick y Ford, 1990), el uso de materiales concretos es fundamental para el desarrollo por parte del alumnado de los diferentes modos de representación (enactiva, icónica y simbólica) que deben promoverse para el aprendizaje de cualquier contenido matemático, resultando idóneo su uso para introducir nuevos conceptos que pudieran resultar complejos en cualquier nivel educativo y con todo tipo de alumnado (Brahier, 2016).

Aunque cabe recordar que el uso de materiales manipulativos *per se* no garantiza el aprendizaje, requiriéndose de la intervención del profesor para reflexionar junto al alumnado sobre sus ideas y ayudarle a alcanzar representaciones matemáticas cada vez más sofisticadas (Clements, 1999).

Entendemos por material manipulativo "todos aquellos objetos, aparatos o medios de comunicación que pueden ayudar a describir, entender y consolidar conceptos fundamentales en las diversas fases del aprendizaje" (Alsina, Burgués y Fortuny, 1988, p. 13), aunque otros autores realizan una distinción entre los materiales estructurados específicos diseñados con fines educativos y aquellos materiales cotidianos con posible uso didáctico (Coriat, 1997).

Los materiales facilitan la comprensión y establecimiento de representaciones diversas de los conceptos trabajados, creando además un ambiente agradable y lúdico que favorece el arraigo en nuestros estudiantes de actitudes positivas y de empatía hacia las matemáticas (Maz-Machado y Jiménez-Fanjul, 2012).

El concepto de raíz cuadrada se introduce en España en la educación secundaria, si bien el algoritmo para su cálculo no se considera como contenido específico en la legislación (Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato, 2015). El concepto de raíz cuadrada puede abordarse además en niveles más tempranos, en la educación primaria incluso, siempre ligado al concepto de cuadrado. En esta propuesta, trabajaremos el concepto de raíz cuadrada de un número e introduciremos su cálculo apoyándonos en el procedimiento manipulativo (que puede ser traducido a gráfico posteriormente) explicado por Montessori (1934). El profesor podrá además iniciar la relación entre el procedimiento manipulativo y el algoritmo escrito como ampliación para alumnos que lo demanden.

ACTIVIDAD

Con estas actividades se pretende que el alumnado comprenda el concepto de raíz cuadrada de un número y su relación con éste, interconectando la aritmética con la geometría, así como hallar la raíz cuadrada de un número de manera manipulativa.

1. Construcción de cuadrados

Conviene previamente, abordar la construcción de cuadrados de distintos números y enfatizar la relación de éste con su base o raíz. Hallar el cuadrado de un número es considerar una multiplicación en la que los dos operandos son el mismo número. Trabajaremos de forma manipulativa (o gráfica) estas multiplicaciones en su configuración rectangular. Así, se trabajará la construcción de cuadrados de números dados en el tablero perforado con los pinchos insertables, comenzando por la base, esto es, insertando el número de pinchos del cual se desea obtener el cuadrado, y repitiendo esa fila tantas veces como pinchos en su base, o lo que es lo mismo, hasta obtener una figura cuadrada. Se reparará en el número de pinchos que hay en la base o raíz –esto es, lado del cuadrado–, así como en la forma geométrica resultante –cuadrado– y en el número total de pinchos que conforman dicho cuadrado.

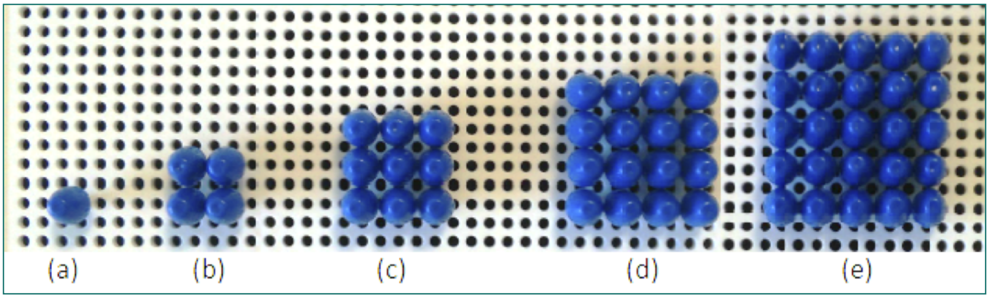


Figura 1. Números cuadrados.

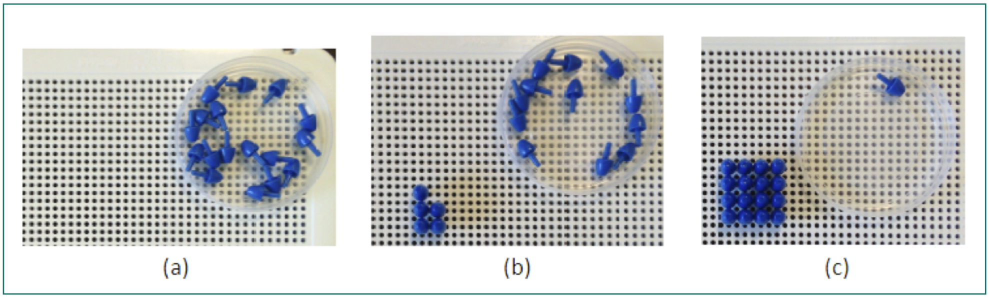


Figura 2. Procedimiento para hallar la raíz del número 17.

En la Figura 1 podemos ver varios ejemplos. Así, deberemos reparar en que el primer cuadrado (Figura 1.a), el cuadrado de dimensiones 1x1, está formado por un único pincho y que coincide con su base o raíz ($1^2=1$). El segundo cuadrado (Figura 1.b) está formado por 4 pinchos y en su base o raíz solo hay dos ($2^2=4$),…etc. Así el número de pinchos totales que conforman el cuadrado, es el número, y el número de pinchos en su base, es la raíz de dicho número.

2. Hallar la raíz de un cuadrado

Ahora realizaremos la operación opuesta a la anterior, esto es, la de dado un número averiguar su raíz cuadrada. Imaginemos que tenemos el número 17 (Figura 2.a) y queremos hallar su raíz cuadrada. Tan solo deberemos coger 17 pinchos e ir disponiéndolos en el tablero de manera que vayan resultando cuadrados. En la Figura 2 podemos ver este ejemplo concreto, vemos que la raíz de 17 es 4 y tenemos un resto de 1, ya que no podemos colocar este último pincho de manera que obtengamos un cuadrado. Por lo que $\sqrt{17}$ es 4 y el resto 1.

Es obvio que este procedimiento no es muy rápido para números más grandes, es decir, para números cuya raíz cuadrada sea de dos o más dígitos. Así que introduciremos la potencialidad de nuestro sistema de numeración para trabajarlos.

Antes repararemos en cómo construir cuadrados de números más grandes de forma manipulativa.

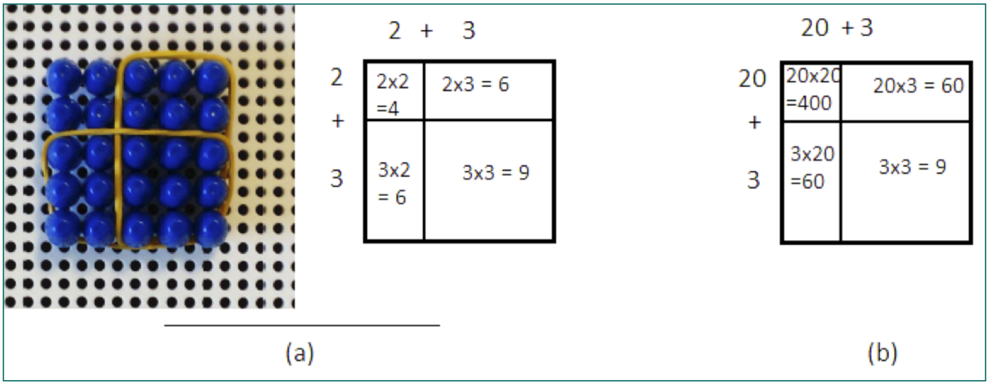


Figura 3. Cuadrado de 5(2+3) y cuadrado de 23.

3. Construcción de cuadrados grandes

Antes de construir cuadrados de números más grandes, deberemos abordar el caso concreto en el que el lado de un cuadrado no representa un único número sino la suma de dos, i.e., un binomio.

Así, en la Figura 3.a, podemos ver construido el cuadrado del número 5, resultando un cuadrado formado por 25 pinchos. Si en lugar de considerar el número 5 como tal, consideramos que está formado por la suma de 2 y 3; tendremos que elevar al cuadrado (o multiplicar por sí mismo) el binomio (2+3).

Esta operación nos llevará al mismo resultado:

$$(2+3)^2 = (2+3) \times (2+3) = 2x2+2x3 + 3x2 + 3x3 = 4 + 6 + 6 + 9 = 25$$

Lo que hemos realizado es dividir el cuadrado en 4 rectángulos, gráficamente podemos ver cómo en la diagonal principal, "\", esos rectángulos son cuadrados. Y cómo la figura resultante es simétrica respecto de esa diagonal.

Si en lugar de considerar 2 y 3 como números independientes, introducimos valores jerárquicos o de posición atendiendo a nuestro sistema de numeración, el resultado sería bien distinto, y nos permitirá manejar números más grandes. De esta manera la construcción mostrada en la Figura 3.a con las subdivisiones realizadas bien podría representar el cuadrado del número 23 en vez del cuadrado del número 5 (2+3). Este resultado se puede ver en la Figura 3.b.

$$(20 + 3)^2 = 20x20 + 20x3 + 3x20 + 3x3 = 400 + 60 + 60 +9 = 529$$

Hay que destacar que en la Figura 3 las divisiones, es decir, lo que nos diferencia cada orden de unidad (valor posicional) es una división física. Para facilitar este hecho, y no tener que realizar divisiones con gomillas, utilizaremos pinchos de colores diferentes respetando el siguiente código de color, común en numerosos textos escolares: azul para las unidades, rojo para las decenas, verde para las centenas y amarillo para las decenas

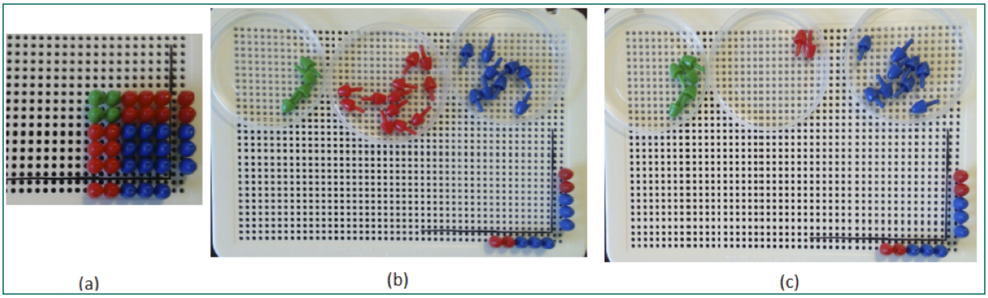


Figura 4. Cuadrado de 23.

de millar. Podremos volver a utilizar estos colores para órdenes de unidades siguientes, si fuera necesario.

En la Figura 4.a, vemos cómo quedaría la construcción que representa el cuadrado de 23 con el código de colores. Como se aprecia en dicha construcción, nos hemos ayudado de unas barras laterales auxiliares para tener el número de referencia, es este caso 23, en los lados inferior y derecho del cuadrado. Esto es prescindible pero por nuestra experiencia ayuda a los alumnos en la tarea. Hay que destacar sin embargo que conviene recordar que éstos no forman parte del cuadrado, son auxiliares.

Para obtener el resultado pues de dicho cuadrado, tan solo tenemos que contar el número de pinchos correspondientes a cada orden de unidad –denotada por los colores– y realizar las equivalencias oportunas (Figura 4.b). El resultado obtenido es 529 como puede verse en la Figura 4.c.

4. Raíz de números grandes

Para realizar la raíz de un número grande de forma análoga a lo visto hasta ahora, hay que trabajar y reparar en varias cosas con antelación, a saber: el número de dígitos de la raíz y cómo debe resultar el cuadrado formado (formas, colores, simetrías).

Para lo primero se pude estudiar las relaciones entre el número y su raíz cuadrada ($1^2=1$; $10^2=100$; $100^2=10000$; $1000^2=1000000$;…), llegando a la conclusión que por cada cifra de la raíz (base del cuadrado) le corresponde dos cifras en el número que representa su cuadrado.

En la Figura 5 podemos ver, además de esta relación, la simetría del cuadrado resultado –simetría respecto de "\"–, las formas geométricas resultantes –cuadrados en dicha diagonal y rectángulos simétricos en el resto–. Se aprecia además como los distintos órdenes de unidades (unidades, decenas, centenas,…) se distribuyen en diagonales perpendiculares al eje de simetría. El número de estas diagonales (sus colores), nos anticipará las conversiones que debemos realizar para trabajar el número del cuál queremos hallar su raíz.

Veámoslo con un ejemplo práctico. Hallaremos la raíz cuadrada del número 1236. Para ello construiremos un cuadrado con dicho número y repararemos en su base o raíz.

El número 1236, se representa con un picho amarillo, dos verdes, 3 rojos y 6 azules.

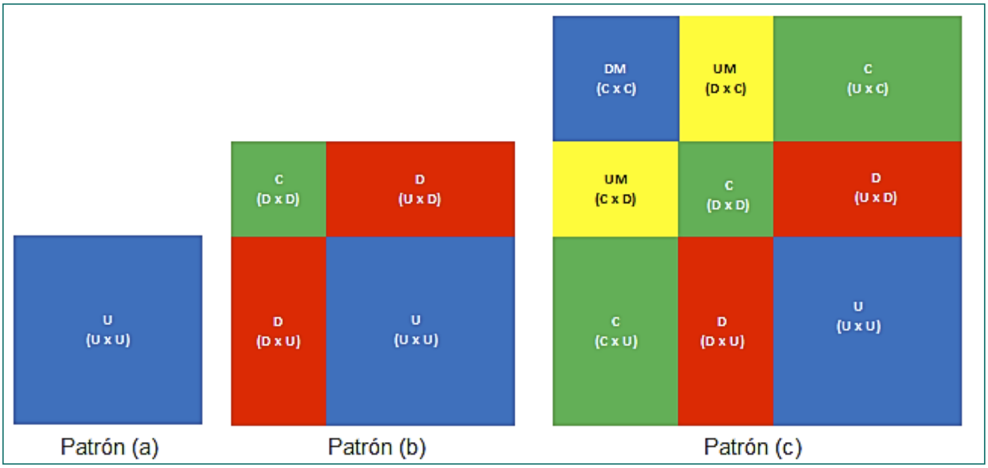


Figura 5. Cuadrados de números de una (a), dos (b) y tres cifras (c).

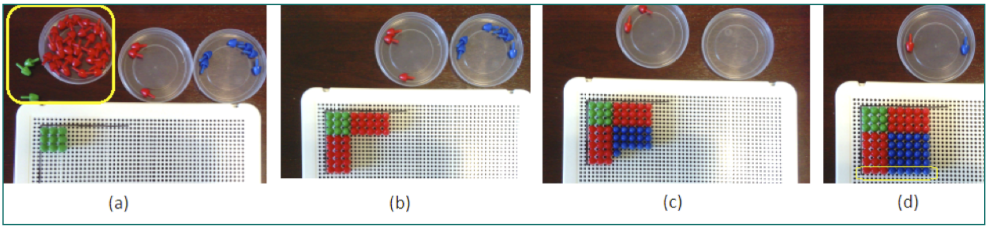


Figura 6. Raíz cuadrada de 1236.

Lo primero es anticipar el número de cifras que tendrá la raíz cuadrada de dicho número, que es dos, sabiendo entonces cómo será al patrón del cuadrado resultante. En este caso, es claro que la raíz cuadrada tendrá dos dígitos, por lo que el cuadrado resultante deberá seguir el patrón mostrado en la Figura 5.b.

Como este patrón trabaja tan solo con tres órdenes de unidades, a saber: con centenas, decenas y unidades; realizaremos la conversión de nuestra unidad de millar (pincho amarillo) a centenas (pinchos verdes); así pues el número 1236 queda representado con 12 centenas, 3 decenas y 6 unidades, con las que empezaremos a construir el cuadrado.

Si para elevar un número al cuadrado comenzábamos por la parte inferior derecha, parece lógico pues que para realizar la operación inversa, extraer su raíz cuadrada, comencemos construyendo por la parte superior izquierda. Así, comenzaremos a construir el cuadrado correspondiente a las centenas, mostrado en el patrón de la Figura 5.b. Como tenemos 12 centenas, solo podremos formar un cuadrado de 3x3, y nos sobrarán 3 centenas que cambiaremos convenientemente por decenas (Figura 6.a).

Tras esto, comenzaremos a formar los dos rectángulos simétricos de las decenas (rojos) resultando dos rectángulos de 3x5 y sobrando 3 decenas (Figura 6.b). Comenzaremos a rellenar el cuadrado de la diagonal principal que nos queda, el correspondiente a las unidades (Figura 6.c) y realizaremos los canjes necesarios hasta completarlo, de nuestras 3 decenas sobrantes, obteniendo el resultado final. Podemos ver en la Figura 6.d cómo el número 1236 ha formado un cuadrado cuya raíz (base) es 35, sobrando 11, una decena (pincho rojo) y una unidad (azul), en el platillo.

$$\sqrt{1236} = 35 \textit{ y resto } 11$$

Se recomienda comenzar hallando raíces exactas e incluso conectar este procedimiento y su representación pictórica o gráfica con el algoritmo en lenguaje matemático que subyace bajo el mismo. Esta actividad puede ser incorporada como actividad de ampliación para el alumnado.

REFLEXIONES

Queremos concluir que trabajar el concepto de raíz cuadrada de un número de esta manera manipulativa favorece la interconexión entre la aritmética y la geometría a la vez que puede servir para reforzar también nociones de álgebra, como la del cuadrado de un binomio.

La clave de esta experiencia que aquí se expone es sin embargo la asunción de un papel activo por parte del alumnado, que el docente deberá fomentar formulando preguntas adecuadas en cada etapa e incitando al alumno a reflexionar sobre los pasos que va realizando.

Consideramos además que esta idea de aula que utiliza la manipulación de estos materiales puede ser trasladada a representaciones gráficas (icónicas) que prescindan ya del material manipulativo y que sirvan de transición a otras representaciones más abstractas utilizando la simbología apropiada.

REFERENCIAS

Alsina, C., Burgués, C. y Fortuny, J. Mª. (1988). Materiales para construir la geometría. Madrid: Síntesis.

Brahier, Daniel J. (2016). Teaching Secondary and Middle School Mathematics (5th ed.). New York: Routledge.

Clements, D. H. (1999). Concrete manipulatives, concrete ideas. Contemporary Issues in Early Childhood, 1(1), 45-60.

Coriat, M. (1997). Materiales, recursos y actividades: un panorama. En L. Rico (Coord.) La Educación Matemática en la Enseñanza Secundaria. Barcelona: Horsori.

Maz-Machado, A. y Jiménez-Fanjul, N. (2012). Ajedrez para trabajar patrones en matemáticas en educación primaria. Epsilon. Revista de Educación Matemática, 81, 105-112.

Montessori, M. (1934). Psicoaritmética: la aritmética desarrollada con arreglo a las directrices señaladas por la psicología infantil, durante veinticinco años de experiencia. Barcelona: Casa editorial Araluce.

Piaget, J. e Inhelder, B.(1997). Psicología del niño. Madrid: Ediciones Morata.

Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato. (2015). BOE, 3, 169-546. Recuperado de http://www.boe.es.

Resnick, L. B. y Ford, W. W. (1990). La enseñanza de las matemáticas y sus fundamentos psicológicos. Madrid: Paidós-MEC.

Épsilon - *Revista de Educación Matemática* **2016, Vol. 33 (2), nº 93, 115-124**

RINCÓN "SAPERE AUDE"… ¿resolviendo problemas?

Sixto Romero
Universidad de Huelva
sixto@uhu.es

En esta entrega seguimos con la filosofía de que la actividad matemática, fundamentalmente, hay que encontrarla: por un lado, en todas aquellas actividades basadas en Situaciones Problemáticas (SP) con el convencimiento de obtener una mayor garantía del aprendizaje matemático por parte de nuestros estudiantes, y por otro en no olvidar el contexto teórico en el que nos movemos.

SAPERE AUDE, GEOMETRÍA

En el número anterior afirmábamos que la Geometría, una de las ciencias más antiguas, se propone ir más allá de lo alcanzado por la intuición. Por ello, es necesario un método riguroso, sin errores. Los antiguos griegos manejaban un único tipo de geometría, la geometría euclidiana, hábilmente codificada en los *Elementos de Euclides* por una escuela alejandrina encabezada por Euclides. En dicha geometría los axiomas y postulados son proposiciones que relacionan conceptos, definidos en función del punto, la recta y el plano.

1. Ejercicios de aquí y allá (solución a la Propuesta 1 del número anterior 92)

Sea $\widehat{ABC}$ *un triángulo isósceles con ángulo* $\hat{A}=20^o$*. Se traza el segmento BE y CD con ángulos de* 60^o *y* 50^o*, respectivamente en la base BC, según aparece en la figura.*

Calcular los ángulos en $\widehat{CDE}$ y $\widehat{DEB}$, según aparece la figura 1:

NOTA: Es un problema de geometría elemental muy abierto y fácilmente comprensible, pero la solución, aunque utilizando sólo las herramientas de un nivel de primaria y/o secundaria, no resulta fácil de encontrar.

La enseñanza de la Geometría en etapa escolar nos pone frecuentemente en situaciones paradójicas: permite enunciar problemas elementales fácilmente comprensibles para los alumnos pero la solución, utilizando exclusivamente los utensilios del nivel correspondiente, se nos antoja difícil de encontrar.

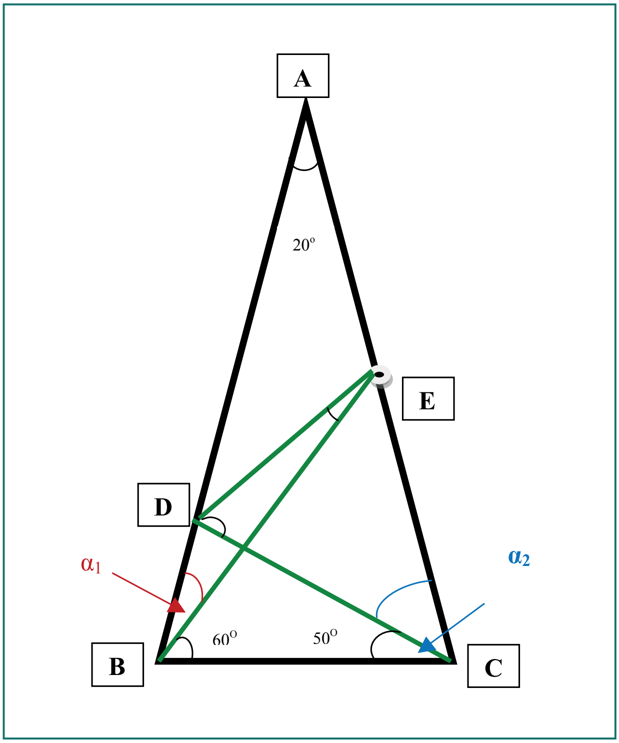


Fig. 1. Triángulo Isósceles.

SOLUCIÓN

* PASO 1

Nos piden calcular los ángulos: $\widehat{CDE}$ y $\widehat{DEB}$.
Con cálculos sencillos: $20º+60º+\alpha_1+50º+\alpha_2= 180º$; $\alpha_1+\alpha_2=50º$

Al ser isósceles el triángulo $\widehat{BAC}$: $60º+\alpha_1= 50º+\alpha_2$
Por lo tanto de: $\alpha_1+\alpha_2=50º$; $60º+\alpha_1= 50º+\alpha_2$ se deduce que $\alpha_1= 20º$, $\alpha_2=30º$

Se deduce que el valor en $\widehat{B}$ del triángulo triangulo $\widehat{ABE}$ vale 20° y el triángulo es isósceles.

* PASO 2

Sea B′ el simétrico del simétrico del punto B con relación al lado AC y C ′el simétrico de C con relación a AB. El triángulo $\widehat{AB'C'}$ es equilátero con el ángulo en A de 60º. Por ello, el ángulo $\widehat{B'C'B}$ vale 20° (80° de BC'A menos 60° de $\widehat{B'C'A}$) y el ángulo $\widehat{B'C'D}$ vale 30°.

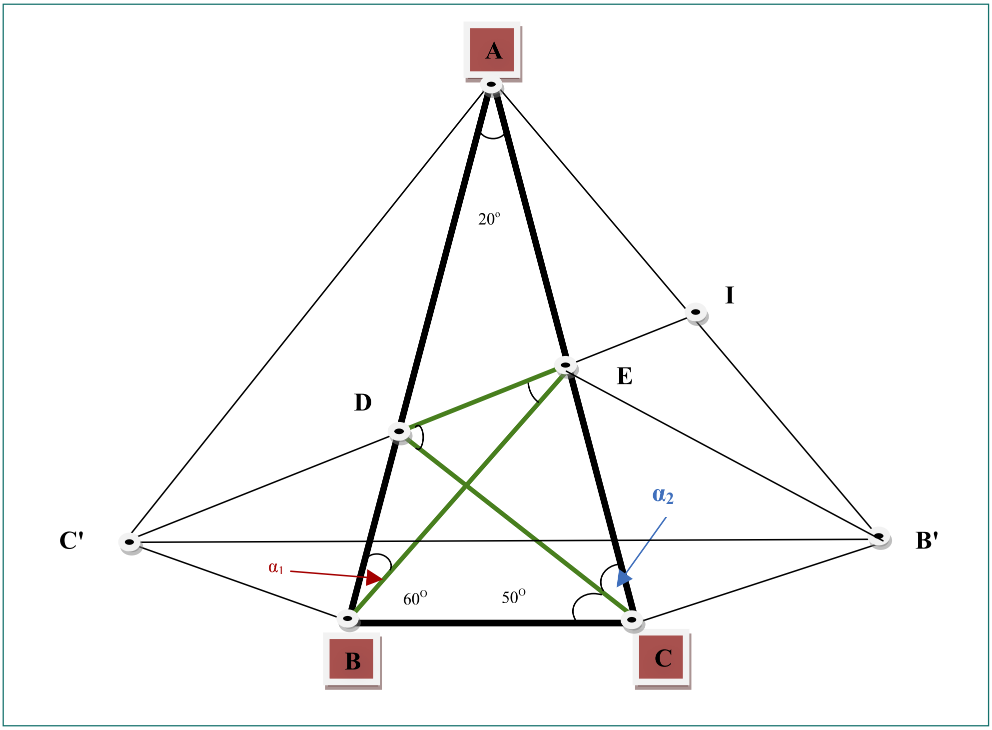


Fig. 2.

En la figura 2 podemos observar que C′D es la bisectriz del ángulo en C′ en el triángulo $\overset{\triangle}{AB'C'}$.

Y también podemos afirmar que la mediatriz de AB′ la corta en su punto medio I. Por otro lado, el triángulo $\overset{\triangle}{AB'E}$ es isósceles por ser simétrico del triángulo $\overset{\triangle}{ABE}$. En consecuencia la mediatriz de AB′ es la recta IE.

* PASO 3

Como conclusión: las rectas C′D y IE son idénticas y los puntos C′, D, E e I están alineados. Por lo tanto, es fácil calcular los ángulos que valen 80° et 30°.

* PROBLEMA GENERAL

Teniendo en cuenta el comentario citado ut-supra, podemos plantear el problema general cuyo enunciado podría ser:

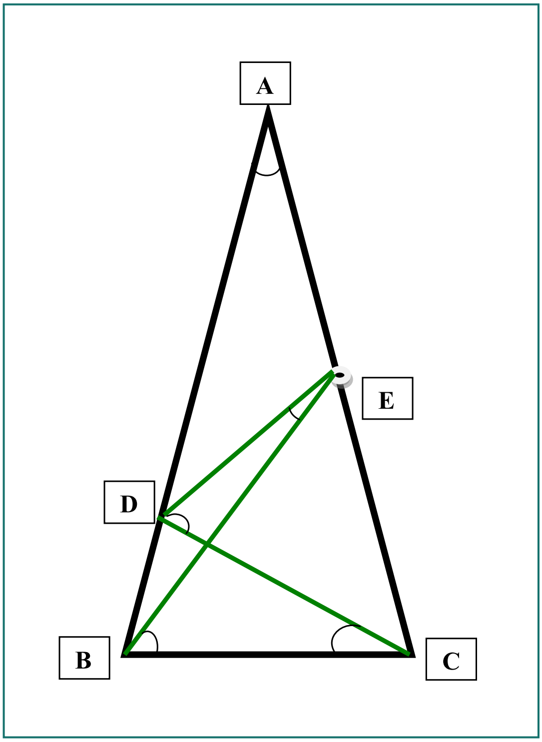


Fig. 3.

Sea $\overset{\triangle}{ABC}$ *un triángulo isósceles con ángulo* $\hat{A}=\alpha^o$*. Se traza el segmento BE y CD con ángulos* $\widehat{EBC}=\beta^o$ *y* $\widehat{DEB}=\gamma^o$ *(por simetría podemos suponer que* $\gamma<\beta$*) , respectivamente en la base BC, según aparece en la figura. Calcular los ángulos en* $\widehat{CDE}=\delta$ *y* $\widehat{DEB}=\varepsilon$*.*

NOTA: Invitamos al lector a explorar en profundidad este ejemplo, dependiendo del nivel en que nos encontremos.

a) Si designamos de forma general la 5-tupla ($\boldsymbol{\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon}$) una configuración como la que se ha planteado, tenemos como datos conocidos $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$ y $\boldsymbol{\gamma}$; y como datos a determinar $\boldsymbol{\delta}$ y $\boldsymbol{\varepsilon}$. A partir de aquí, por ejemplo, con trigonometría ya no es tan fácil de explorar, por parte de los alumnos (secundaria).

b) Partiendo de configuraciones particulares:

* El triángulo de oro con α=36º, β=54º y γ=36º nos da la 5-tupla (36º, 54º, 36º, 72º, 18º). Este tipo de configuración conduce a dos tipos de generalización:

- **b.1.** Elegir los ángulos de tal manera que los triángulos $\overset{\triangle}{BCD}$ y $\overset{\triangle}{BCE}$ sean todos isósceles.
- **b.2.** Tomar CD y BE perpendiculares, con CD bisectriz del ángulo en $\widehat{C}$.

c) Es interesante, proponer al alumno que trabaje y profundice en el término que Henri Bareil, denomina zigzag asociado a un triángulo isósceles, ***Des zigzags, des pavages et des constructions***, 2007:

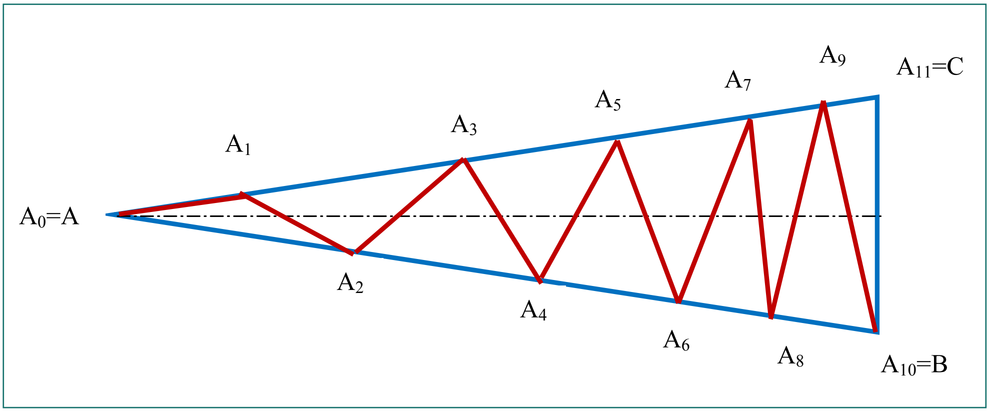


Fig.4.

Se llama ***iso-zigzag*** asociado a un triángulo isósceles, el zigzag definido por una sucesión de enlaces iguales entre ellos con la misma base, es decir una sucesión de "n" segmentos iguales definidos por puntos A_i $(0 \leq i \leq n)$ tomados alternativamente sobre los dos lados iguales de un triángulo isósceles de vértice $A=A_0$ y tal que $A_{n-1}A_n$ coincida con la base BC del triángulo isósceles, Fig. 4

Eligiendo una pareja de puntos (D,E) en la Fig.3 siendo D y E dos vértices del zigzag, uno sobre AB y el otro sobre AC, obtenemos configuraciones por las que podemos determinar los ángulos $\boldsymbol{\delta}$ y $\boldsymbol{\varepsilon}$ con el fin de preservar la condición $\boldsymbol{\delta<\varepsilon}$.

Así por ejemplo, en la Fig. 5 se tiene la configuración:

$$(\boldsymbol{\alpha,\beta,\gamma,\delta,\varepsilon}) = (20^o, 50^o, 20^o, 60^o, 10^o)$$

y en la Fig. 6 se tiene

$$(\boldsymbol{\alpha,\beta,\gamma,\delta,\varepsilon}) = (20^o, 70^o, 50^o, 110^o, 10^o)$$

d) Se puede proponer también el estudio con la demostración correspondiente en los siguientes casos:

$(\boldsymbol{\alpha,\beta,\gamma,\delta,\varepsilon}) = (20^o, 50^o, 20^o, 60^o, 10^o)$ (Fig. 5)
$(\boldsymbol{\alpha,\beta,\gamma,\delta,\varepsilon}) = (20^o, 50^o, 40^o, 60^o, 30^o)$
$(\boldsymbol{\alpha,\beta,\gamma,\delta,\varepsilon}) = (20^o, 60^o, 30^o, 80^o, 10^o)$
$(\boldsymbol{\alpha,\beta,\gamma,\delta,\varepsilon}) = (20^o, 60^o, 50^o, 80^o, 30^o)$ (problema de referencia)
$(\boldsymbol{\alpha,\beta,\gamma,\delta,\varepsilon}) = (20^o, 50^o, 20^o, 60^o, 10^o)$
$(\boldsymbol{\alpha,\beta,\gamma,\delta,\varepsilon}) = (20^o, 70^o, 50^o, 110^o, 10^o)$ (Fig. 6)

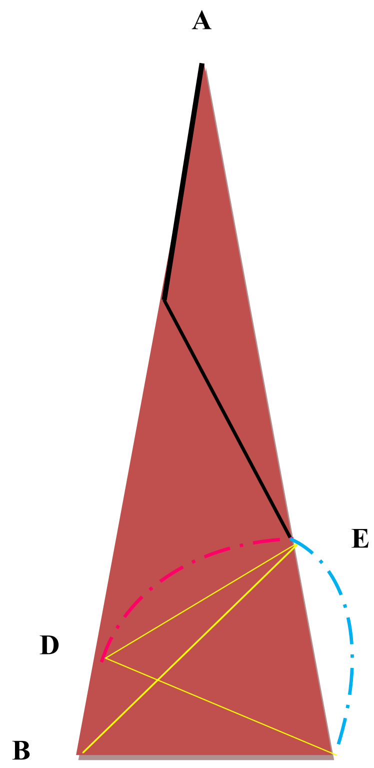


Fig. 5.

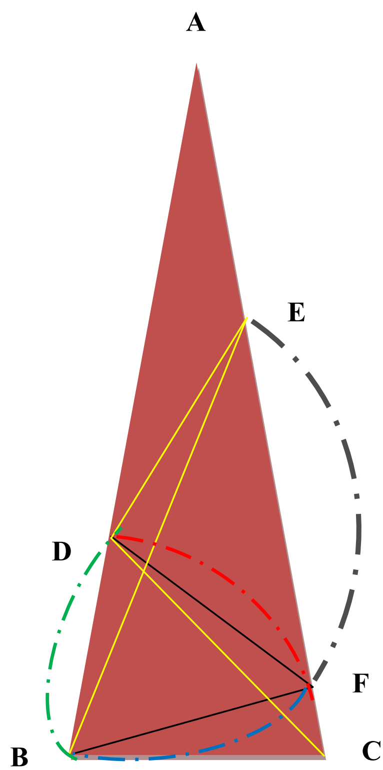


Fig. 6.

SAPERE AUDE, TEORÍA DE NÚMEROS

2. Ejercicios de aquí y allá (solución a la Propuesta 2 del número anterior 92)

Tomar conciencia del aspecto algorítmico es el objetivo de este ejercicio.

De decisión del uso de algoritmos: Hotel en la Meca

Actualmente se construye el hotel Abraj Kudai, en Manafia, zona central de La Meca, en Arabia Saudita, el cual será el más grande del mundo y requerirá de un inversión de 3.6 mil millones, el cual se prevé será inaugurado para el año 2017. El gran podio de 45 pisos de altura y 10.000 habitaciones, estilo fortaleza, será coronado por 12 torres de 10 pisos. También contará con 70 restaurantes, cuatro helipuertos, una estación de autobuses, patios de comida, un centro comercial y un centro de convenciones y estacionamientos.

Las habitaciones se enumeran en forma de caracol 1,2,3,4, 5,6, 7,……..,10000. A partir del algoritmo anexo construido en forma caracol infinito se trata de:

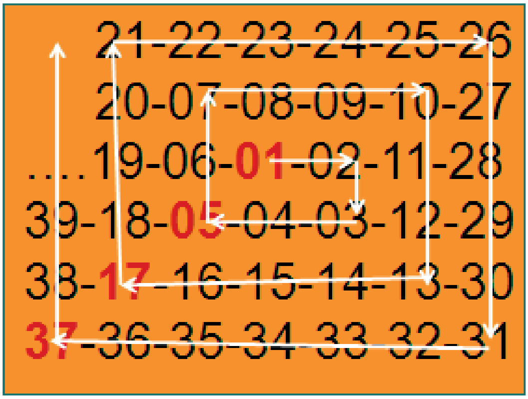


Fig. 7. Distribución de habitaciones en el Hotel de la Meca

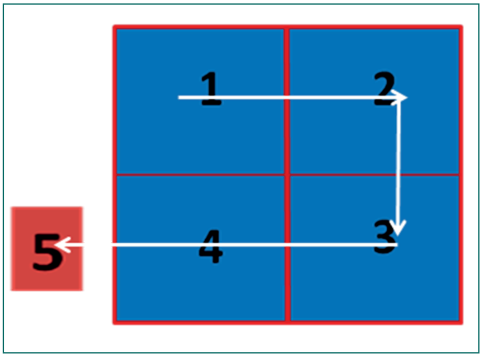


Fig. 8.

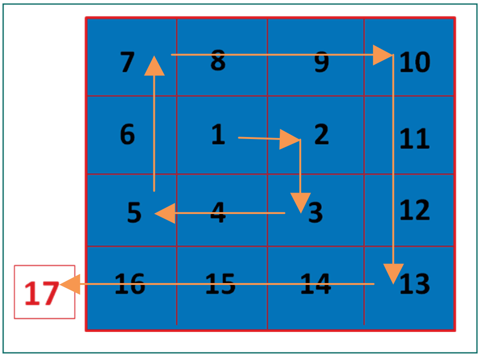


Fig. 9.

a) *Encontrar la fórmula recurrente que permita conocer todos los números de las habitaciones situadas sobre la diagonal dónde figuran los números escritos en fondo rojo.*

b) *¿Son todos primos los números que aparecen en la diagonal?*

*** PASO 1: En la vuelta 0**: el número es **1**

*** PASO 2: En la vuelta 1:** el número es **5**=4+1=2^2+1 según el esquema anterior que aparece en la Fig.7.

PASO 3: En la vuelta 2: el número es **17**=16+1=4^2+1

PASO 4: En la vuelta 3: el número es **37**=36+1=6^2+1

PASO 5: En la vuelta 4: el número es **65**=64+1=8^2+1

PASO n-ésimo: En la vuelta n-ésima: ¿Se podrá afirmar que el número buscado será **$(2n)^2+1$** según el esquema siguiente?

Supongamos que esta afirmación sea verdadera para la vuelta "n", entonces el número buscado para la siguiente "n+1" es: **$(2n)^2+ 4(2n+1)+1$** según la figura adjunta:

El número buscado que corresponde a la vuelta "n+1" se puede escribir más simplemente: **$4(n+1)^2+1$ ó $[2(n+1)]^2+1$**, y por lo tanto la afirmación es entonces correcta.

A modo de reflexión podemos afirmar que si existe una problemática que no conviene abordar en términos de contenidos, esta es la técnica algorítmica. Sabemos que

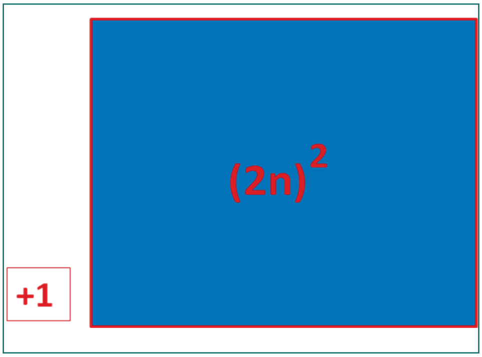


Fig. 10.

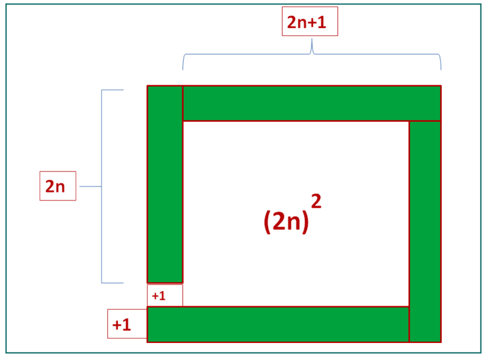


Fig. 11.

ALGORITMO es un conjunto de reglas operatorias que nos permite resolver un problema en un número finito de operaciones. La característica de un algoritmo es transformar grandes cantidades de datos de entrada, en otras grandes cantidades de salida, a partir de un conjunto bien definido de instrucciones de transformación:

¿Cuál es el problema que se le plantea al alumno de un determinado nivel de enseñanza?

a) Asegurar que, ante un problema a resolver, debe buscar primero el sentido de las cuestiones planteadas.

b) A continuación asegurarse una "buena utilización".

c) Ver que en la elaboración, de un algoritmo, la principal dificultad didáctica reside entonces en la investigación de un compromiso entre el aprendizaje, la destreza, la maestría y el control de las técnicas.

Con este ejem plo, el objetivo conseguido es:

- Llegar a obtener un algoritmo de construcción con una fórmula recurrente que sea decisiva para obtener los números de la diagonal señalada en rojo.
- Incitar a los alumnos a conseguir la construcción en caracol, lo que le permitirá constatar que no se obtiene un número primo (65) (¡esto se puede hacer a nivel de cursos finales de primaria y primeros cursos de secundaria!).

SAPERE AUDE, EJERCICIOS DE AQUÍ Y ALLÁ, PROPUESTAS

Propuesta 1: dos joyitas geométricas

La enseñanza de la Geometría, probablemente sea una de las disciplinas dónde más desencuentros podemos encontrar entre enseñantes e investigadores en Educación Matemática. Tal vez sea por los diferentes intereses y porqué no están claro los contenidos a enseñar, también con la manera de enseñarla: por un lado la Geometría es considerada como una herramienta para el entendimiento, parte de las Matemáticas dónde se utiliza más la intuición, la concreción y la realidad; y por otro la poca difusión de propuestas didácticas de la enseñanza de la Geometría.

Considerando las diferencias existentes entre los diferentes niveles, esta sección pretende, en una ***primera instancia***, insistir en la necesidad de hacer propuestas de ejercicios variados de geometría clásica tomando el triángulo como elemento básico del ***sapere aude*** en Geometría. En este número presentamos los dos siguientes:

a) Sea $\widehat{ABC}$ un triángulo de área S. Demostrar que la relación:

$$AB^2+AC^2+BC^2 \geq 4S\sqrt{3}$$

(Problema propuesto en las Olimpiadas Internacionales de Budapest de 1961)

b) ¿Existe un triángulo $\widehat{ABC}$ tal que la altura desde el vértice A, la bisectriz del ángulo $\widehat{BAC}$ y la mediana relativa al lado BC dividan al ángulo $\widehat{BAC}$ en cuatro ángulos con la misma medida?

Propuesta 2: dos joyitas numéricas

Sabemos que la teoría de números fue una de las disciplinas de estudio favoritas entre los matemáticos griegos de Alejandría a partir del siglo III a. C., quienes, ya tenían conciencia, por ejemplo, del concepto de ecuación diofántica en sus casos particulares. Los números son increíbles, tienen ciertas propiedades que nos asombran (o incluso que "nos engañan"), pero todo tiene una explicación.

Presentamos en este *sapere aude* estos dos ejercicios muy interesantes.

a) *Demostrar que, para toda terna de tres números reales,* **{a,b,c}** *cualesquiera se tiene que:*

$$|a+b|+|b+c|+|c+a| \leq |a+b|+|c+a|+|b+c|$$

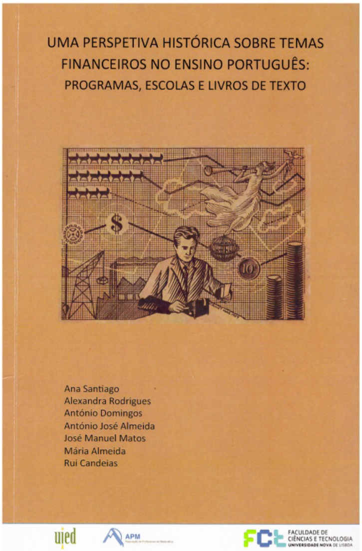
b) *Los enteros positivos p y q verifican* $3p^2-8q^2+3p^2q^2=2008$. *¿Cuál es el valor de pq?*

NOTA: Las respuestas pueden enviarla a la dirección electrónica:
sapereaudethales@ gmail.com

Épsilon - *Revista de Educación Matemática* **2016, Vol. 33 (2), nº 93, 125-128**

Uma perspetiva histórica sobre temas financieros no ensino portugués: programas, escolas e libros de texto

(Una perspectiva histórica sobre temas financieros en la enseñanza portuguesa: programas, escuelas y libros de texto)



Ana Santiago, Alexandra Rodrigues, António Domingos,
António José Almeida, José Manuel Matos, Mária Almeida, Rui Candeias
Editorial: UIED, Unidade de Investigação Educação e Desenvolvimento
Marzo 2016 (1ª Edición)
Idioma: portugués
ISBN: 978-972-8893-52-1
36 páginas

El libro *Una perspectiva histórica sobre temas financieros en la enseñanza portuguesa: programas, escuelas y libros de texto* surge ante el desafío propuesto a los autores de realizar una exposición de libros y materiales que ilustren la unión a lo largo del tiempo entre la educación financiera y las matemáticas en Portugal, exposición que finalmente se realizó entre el 22 y el 24 de junio de 2015 en la *Universidade Nova de Lisboa* y entre el 30 de marzo y el 3 de abril de 2016 en la *Escola Artística Soares dos Reis* de Oporto.

La obra está estructurada en cuatro capítulos que presentan de forma breve la relación entre la educación financiera y las matemáticas en diferentes instituciones portuguesas. En el primero de ellos se recoge la situación de la educación financiera en la actualidad a nivel internacional y de forma más específica en Portugal.

Los otros tres capítulos analizan desde la perspectiva histórica estas relaciones en tres niveles educativos distintos: la enseñanza secundaria (en los institutos), las escuelas normales para la enseñanza de maestros de primaria y la enseñanza comercial.

En el caso de la enseñanza secundaria se remontan a los libros de aritmética del siglo XVI y su diversidad de ejemplos comerciales mencionando la obra de Gaspar Nicolas. Pero consideran que será ya en los institutos creados en el siglo XIX donde sí se incluyen contenidos sobre educación financiera relativos a la aritmética, de la mano primero de autores de libros de aritmética extranjeros como Bézout y después portugueses como Osório. Comentan además que la educación financiera en los institutos decae a partir de las reformas educativas de 1931.

En cuanto a las escuelas de formación de maestros que aparecen en la segunda mitad del siglo XIX en Portugal, se imparten contenidos relativos a la educación financiera en asignaturas como Aritmética o Matemáticas elementales pero también en otras como Economía rural, doméstica, industrial y comercial mencionando entre otros autores a Manso-Preto. Estos contenidos nuevamente desaparecen de los planes de estudio a partir de 1930.

Finalmente, la obra repasa la educación financiera en otras instituciones de enseñanza portuguesas dedicadas al comercio por ejemplo el Aula de Comercio, la Escuela de Comercio de Lisboa, el Instituto Industrial y Comercial de Lisboa o la Escuela de Construcción, Industria y Comercio.

Finaliza esta obra con un listado de 32 libros de texto portugueses que incluyen temas sobre educación financiera y que se utilizaron en distintas instituciones de enseñanza.

En definitiva, se trata de una obra breve que presenta a grandes rasgos cómo se ha tratado la educación financiera en distintas instituciones portuguesas a lo largo de la historia y que abre la puerta a futuras investigaciones que permitirán profundizar en el tratamiento de la educación financiera a lo largo de la historia e incluso comparar el tratamiento recibido en Portugal con el que estos temas recibieron en España.

María José Madrid
Universidad de Córdoba