92

Vol. 33 (1)
2016

epsilon

Revista de Educación Matemática

Editada por la S.A.E.M. "THALES"

epsilon 92

Revista de Educación Matemática

Página de la revista: http://thales.cica.es/epsilon
Revista: epsilon@thales.cica.es

Sociedad Andaluza de Educación Matemática "Thales"

Edita
Sociedad Andaluza de
Educación Matemática "Thales"
Centro Documentación "Thales"
Universidad de Cádiz
C.A.S.E.M.
11510 PUERTO REAL (Cádiz)

Maquetación e impresión
Utrerana de Ediciones, s.l.
Cristóbal Colón, 12
41710 Utrera (Sevilla)

Depósito Legal
SE-421-1984

ISSN:
2340-714X

Período
1er cuatrimestre 2016

Suscripción
(3 Números al año.)

S.A.E.M. THALES

Sixto Romero Sánchez
Presidente
Francisco España Pérez
Vicepresidente
Mª Belén Sepúlveda Lucena
Secretaría General
José María Vázquez de la Torre Prieto
Secretario de Administración y Tesorería

SEDE

Facultad de Matemáticas
Edif. de la E.S.I. Informática. Ala L2
Avda. Reina Mercedes, s/n.
Aptdo. 1160
41080 SEVILLA
Tlfno. 954 62 36 58 - Fax: 954 236 378
e-mail: **thales@cica.es**

SEDE ADMINISTRATIVA DE LA SOCIEDAD Y REVISTA

Centro de Documentación THALES
Facultad de Ciencias. Departamento de Matemáticas
Campus del Río San Pedro, s/n
Torre Central, 4ª Planta
11510 Puerto Real (Cádiz)
Tlf. y Fax: 956 012 833
e-mail: **thales.matematicas@uca.es**

ALMERÍA

Juan Guirado Granados
Delegado Provincial

CÁDIZ

Paloma Pascual Albarrán
Delegada Provincial

CÓRDOBA

Marina A. Toledano Hidalgo (provis.). *Delegado provincial*

GRANADA

Margarita García Schiaffino
Delegado Provincial

HUELVA

Mª Rocío Benítez Cambra (provis.). *Delegada provincial*

JAÉN

Mª Eugenia Ruiz Ruiz
Delegada provincial

MÁLAGA

Salvador Guerrero Hidalgo
Delegado provincial

SEVILLA

Ana Mª Martín Caraballo
Delegada Provincial

SUMARIO / CONTENTS

7 **INVESTIGACIÓN**

7 **Diseño, gestión y evaluación de actividades matemáticas competenciales en el aula. Design, management and evaluation of competence math classroom activities**
Ángel Alsina

31 **Percepciones de profesores en formación sobre la modelación como estrategia de enseñanza. Perceptions of teachers in training modeling teaching as a strategy**
Angela Mora Zuluaga y José Ortiz Buitrago

41 **EXPERIENCIA**

41 **Cambios de base en el sistema numérico. Una experiencia con el ábaco abierto. Changing bases in the number system. An experience with the vertical abacus**
Alexander Maz-Machado, Noelia Jiménez-Fanjul y Carmen León-Mantero

47 **IDEAS**

47 **Trenzado y combinatoria: diseño de una experiencia original para la formación docente. Braids and Combinatory: designing an original experience for teacher education**
Veronica Albanese
Francisco Javier Perales

55 **MISCELÁNEAS**

55 **Las matemáticas en la pedagogía de Manuel Siurot. Mathematics in the pedagogy of Manuel Siurot**
Irene González Huelva, Juan Núñez Valdés e Irene Ramos Ramírez

73 **Conocemos los números. Una experiencia basada en la manipulación. Knowing the numbers. An experience based on manipulation**
Mª Teresa García Pérez y Natividad Adamuz-Povedano

77 **RESOLVIENDO PROBLEMAS**

89 **Rincón “Sapere Aude”…**
Sixto Romero

Épsilon - *Revista de Educación Matemática* **2016, Vol. 33 (1), nº 92, 7-29**

Diseño, gestión y evaluación de actividades matemáticas competenciales en el aula

Ángel Alsina
Universidad de Girona

Resumen: *Se presenta una propuesta para el diseño, la gestión y la evaluación de actividades matemáticas competenciales: se realiza una revisión del término "competencia matemática"; se plantea una secuencia en cinco fases para el diseño de actividades: matematización del contexto, trabajo previo en el aula, trabajo en contexto, trabajo posterior y formalización; se aportan algunas ideas clave para la gestión de actividades; se presenta un instrumento para evaluar la competencia matemática; y se concluye con la presentación de ejemplos de actividades matemáticas competenciales implementadas en aulas de Educación Infantil y Primaria.*
Palabras clave: *práctica docente, competencia matemática, procesos matemáticos, actividad matemática competencial, evaluación de la competencia matemática.*

Design, management and evaluation of competence math classroom activities

Abstract: *A proposal for the design, management and evaluation of mathematical competence activities is presented: a review of the term "mathematical competence" is performed; a sequence of five phases for designing activities arises: mathematisation context, previous work in the classroom, work in context , further work and formalization; some key ideas for managing activities are provided; a tool for assessing mathematical literacy is presented; and it concludes with the presentation of examples of mathematical competence activities implemented in Pre-escolar and Primary Education.*
Keywords: *teaching practice, mathematical competence, mathematical processes, mathematical activity competence, mathematical competence assessment.*

INTRODUCCIÓN

En el ámbito de la educación matemática se ha producido una transformación de los currículos desde una visión tradicional orientada a la adquisición de contenidos hacia un enfoque renovado cuya finalidad es el desarrollo progresivo de la competencia matemática. Este cambio de orientación responde a la necesidad de alfabetizar a los alumnos para que, más allá de saber resolver adecuadamente ejercicios que plantean los libros de texto, tengan habilidades para usar las matemáticas cuando las precisan. En otras palabras, se pretende que junto con el éxito académico, los alumnos adquieran herramientas que les permitan desenvolverse de manera eficaz en todas las situaciones de la vida cotidiana en las que las matemáticas son necesarias.

El término “competencia” se ha incorporado en el argot del profesorado desde hace ya algunos años. Se trata de un término importado del mundo empresarial que es complejo de definir, por lo que prácticamente existen tantas definiciones como autores y organismos han tratado de definirlo (NCTM, 2000; Niss, 2002; OECD, 2004). De las palabras de estos reconocidos expertos pueden extrapolarse dos ideas opuestas: los más optimistas lo ven como la solución a todos los males, mientras que los más escépticos apuntan que este término no aporta nada nuevo, puesto que desde siempre la escuela ha formado a personas competentes.

Ni blanco ni negro. Por supuesto, no se comparte la opinión de los que consideran que la palabra “competencia” es un tecnicismo más en la lista de términos que aparecen cada vez que se aprueba una nueva ley de educación. Sólo podría compartirse esta idea, y además de forma parcial, si lo que se quiere expresar en realidad es que la escuela tradicional ha formado desde siempre a personas académicamente competentes. La implantación de un currículo orientado a la adquisición de competencias básicas significa un paso adelante y pretende, como se ha indicado, formar a personas con un mayor grado de eficacia para afrontar los problemas reales que plantea la vida, más allá de los estrictamente académicos. Este es un cambio substancial, pero de entrada no es garantía de nada puesto que implica –necesariamente– sacudir algunas creencias y estereotipos muy arraigados respecto a los procesos de enseñanza-aprendizaje.

En este artículo se indaga en uno de estos aspectos: las características de las actividades que se plantean a los alumnos de Educación Infantil y Educación Primaria para que aprendan matemáticas, puesto que la práctica del profesor acaba determinando el aprendizaje del alumno. Para ello, en primer lugar se realiza una revisión del término “competencia matemática”, en segundo lugar se presenta una propuesta para el diseño, la gestión y la evaluación de actividades matemáticas competenciales en las aulas de Educación Infantil y Primaria, y finalmente se presentan ejemplos de actividades matemáticas competenciales implementadas en aulas de Educación Infantil y Primaria.

1. LA COMPETENCIA MATEMÁTICA

1.1. La visión del *National Council of Teachers of Mathematics* (NCTM, 2000)

A partir del trabajo compartido de profesores de matemáticas de Educación Infantil, Primaria y Secundaria; de multitud de sociedades de padres; de grupos de expertos; de seminarios de estudio; de equipos de innovación; de editoriales; de matemáticos

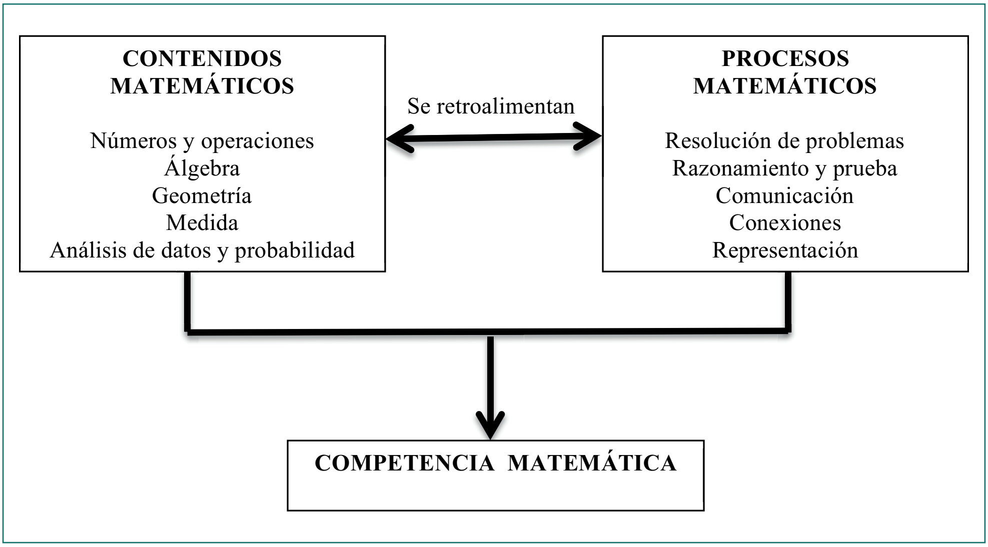


Figura 1. Interrelación entre contenidos y procesos matemáticos.

preocupados por la enseñanza; de investigadores en educación; y de responsables, en general, del currículum de matemáticas, se establecen (NCTM, 2003):

- Cinco estándares de contenidos: números y operaciones, álgebra, geometría, medida, y análisis de datos y probabilidad.
- Cinco estándares de procesos: la resolución de problemas; el razonamiento y la prueba; la comunicación; la representación; y las conexiones.

Los estándares y expectativas específicos referentes a los distintos bloques de contenidos y procesos pueden consultarse en NCTM (2003, p. 399-411). A raíz de la publicación de estos estándares, los currículos de matemáticas de la mayoría de países han ido incorporando paulatinamente los procesos matemáticos que, junto con los contenidos matemáticos, constituyen el conjunto de conocimientos matemáticos que favorecen la competencia matemática. En la Figura 1 se muestra la interrelación entre ambos tipos de conocimientos matemáticos:

Los procesos matemáticos, de acuerdo con Alsina (2012), ponen de relieve las formas de adquisición y uso del conocimiento matemático: pensar, razonar, modelizar, etc. La combinación de contenidos y procesos matemáticos favorece nuevas miradas que enfatizan no solo el contenido y el proceso, sino –y especialmente– las relaciones que se establecen entre ellos. Partir de este enfoque competencial ya desde las primeras edades, en las que todo está integrado, es especialmente significativo dado que cuando los niños usan las relaciones existentes en los contenidos matemáticos, en los procesos matemáticos y las existentes entre ambos, progresa su conocimiento de la disciplina y crece la habilidad para aplicar conceptos y destrezas con más eficacia en diferentes ámbitos de su vida cotidiana.

Desde este enfoque, pues, se insiste en la importancia y la necesidad de entender y ser capaz de usar las matemáticas en la vida diaria y en el trabajo: "en este mundo cambiante, aquellos que comprendan y puedan hacer usar matemáticas tendrán cada vez más oportunidades y opciones para determinar su futuro. La competencia matemática abre puertas a un porvenir productivo; su carencia las mantiene cerradas" (NCTM, 2003, p. 5)

1.2. La visión de Mogens Niss

En una línea similar, Mogen Niss señala la necesidad de substituir los currículos de matemáticas orientados a la adquisición de contenidos, ya que se centran exclusivamente en la adquisición de símbolos y de técnicas, por currículos orientados al uso significativo de estos contenidos en una variedad de situaciones, haciendo hincapié en el enfoque competencial. Desde este prisma, Niss define la competencia matemática como "la habilidad para comprender, juzgar, hacer y usar las matemáticas en una variedad de contextos y situaciones en las que las matemáticas juegan o pueden desempeñar un papel" (Niss, 2002, p 7). Este autor identifica ocho competencias matemáticas que tienen que ver con procesos mentales o físicos, actividades y comportamientos. En otras palabras, la atención se centra en lo que las personas pueden hacer. Dichas competencias se clasifican en dos grupos, según las habilidades implicadas (puede consultarse una versión ampliada en Alsina y López, 2014):

Tabla 1: Competencias matemáticas (Niss, 2002)

Grupo 1: Preguntar y responder preguntas "dentro de" y "con las matemáticas"	Grupo 2: Gestionar el lenguaje matemático y las herramientas matemáticas
Dominio de modos matemáticos de pensamiento (pensar matemáticamente). Planteamiento y resolución de problemas matemáticos. Modelización matemática. Razonamiento matemático.	Representación de las entidades matemáticas (los objetos y situaciones). Manejo de símbolos matemáticos y formalismos. La comunicación en, con, y acerca de las matemáticas. Hacer uso de los recursos y herramientas.

1.3. La visión de PISA (OECD, 2003, 2004)

En el marco de Pisa, en un primer momento se había utilizado el término "alfabetización matemática" (*mathematical literacy*) para referirse a las capacidades individuales de los alumnos para analizar, razonar y comunicar eficazmente cuando formulan y resuelven problemas matemáticos en una variedad de dominios y situaciones. En PISA 2003 se usa ya el término "competencia matemática (*mathematical competence*) para resaltar su carácter funcional, y se concibe como:

> La capacidad de un individuo para identificar y entender el papel que las matemáticas tienen en el mundo, hacer juicios bien fundados y usar e implicarse con las matemáticas en aquellos momentos en que se presenten necesidades para su vida individual como ciudadano constructivo, comprometido y reflexivo (OECD, 2003, p. 24)

Las competencias o procesos generales elegidos por el proyecto PISA son ocho:

Tabla 2. Competencias matemáticas (OECD, 2004)

Planteamiento y resolución de problemas: a) plantear, formular y definir diferentes tipos de problemas matemáticos (puros, aplicados, de respuesta abierta, cerrados); y b) resolver diferentes tipos de problemas matemáticos mediante una diversidad de vías.
Uso de herramientas y recursos: a) recursos y herramientas familiares en contextos, modos y situaciones que son distintos del uso con el que fueron presentados.
Pensamiento y razonamiento: a) plantear cuestiones propias de las matemáticas (¿Cuántos hay? ¿Cómo encontrarlo? Si es así, ¿entonces?); b) conocer los tipos de respuestas que ofrecen las matemáticas a las cuestiones anteriores; c) distinguir entre diferentes tipos de enunciados (definiciones, teoremas, conjeturas, hipótesis, ejemplos, afirmaciones condicionadas); y d) entender y utilizar los conceptos matemáticos en su extensión y sus límites.
Argumentación: a) conocer lo que son las pruebas matemáticas y cómo se diferencian de otros tipos de razonamiento matemático; b) seguir y valorar cadenas de argumentos matemáticos de diferentes tipos; c) disponer de sentido para la heurística (¿Qué puede –o no– ocurrir y por qué?); y d) crear y expresar argumentos matemáticos.
Comunicación: a) expresarse uno mismo en una variedad de vías, sobre temas de contenido matemático, de forma oral y también escrita; y b) entender enunciados sobre estas materias de otras personas en forma oral y escrita.
Representación y uso de operaciones y lenguaje técnico, simbólico y formal: a) decodificar, interpretar y distinguir entre diferentes tipos de representación de objetos matemáticos y situaciones, así como las interrelaciones entre las distintas representaciones; y b) escoger y relacionar diferentes formas de representación de acuerdo con la situación y el propósito.
Utilización del lenguaje simbólico, formal y técnico y las operaciones: a) decodificar e interpretar el lenguaje simbólico y formal y entender sus relaciones con el lenguaje natural; b) traducir desde el lenguaje natural al simbólico y formal; c) manejar enunciados y expresiones que contengan símbolos y fórmulas; y d) utilizar variables, resolver ecuaciones y comprender los cálculos.
Construcción de modelos: a) estructurar el campo o situación que va a modelarse; b) traducir la realidad a una estructura matemática; c) interpretar los modelos matemáticos en términos reales: trabajar con un modelo matemático; d) reflexionar, analizar y ofrecer la crítica de un modelo y sus resultados; e) comunicar acerca de un modelo y de sus resultados (incluyendo sus limitaciones); y f) dirigir y controlar el proceso de modelización.

Como puede apreciarse, las tres aproximaciones expuestas presentan diversas similitudes. En la Tabla 3 se realiza una comparación entre los estándares de procesos (NCTM, 2000) y las competencias matemáticas (Niss, 2002; OECD, 2004):

Tabla 3: Comparación entre los estándares de procesos (NCTM, 2000) y las competencias matemáticas (Niss, 2002; OECD, 2004)

Estándares de procesos matemáticos (NCTM, 2000)	Competencias matemáticas (Niss, 2002)	Competencias matemáticas en PISA 2003 (OECD, 2004)
Resolución de problemas	Planteamiento y resolución de problemas matemáticos	Planteamiento y resolución de problemas
	Uso de recursos y herramientas	Uso de herramientas y recursos
Razonamiento y prueba	Dominio de modos de pensamiento matemático	Pensamiento y razonamiento
	Razonamiento matemático	Argumentación
Comunicación	Comunicación en, con y acerca de las matemáticas	Comunicación
Conexiones	-	-
Representación	Representación de entidades matemáticas	Representación y uso de operaciones y lenguaje técnico, simbólico y formal
	Manejo de símbolos matemáticos y formalismos	Utilización del lenguaje simbólico, formal y técnico y las operaciones.
	Análisis y construcción de modelos	Construcción de modelos

Los procesos matemáticos y las competencias matemáticas que se exponen en la tabla 3 enfatizan una misma idea: la capacidad de usar de forma comprensiva y eficaz las matemáticas que se aprenden en la escuela en una variedad de contextos, además del escolar, reforzando de esta forma un enfoque social en torno al diseño, aplicación y evaluación de situaciones de aula que fomenten la competencia matemática.

2. EL DISEÑO DE ACTIVIDADES MATEMÁTICAS COMPETENCIALES EN EL AULA

La investigación contemporánea sobre medidas educativas eficaces para mejorar el rendimiento en matemáticas subraya la necesidad de considerar las siguientes medidas (EACEA P9 Eurydice, 2011):

- Atención a las diferentes necesidades del alumnado: adaptarse a las diferentes necesidades de aprendizaje de los alumnos, en lo referente a su disposición hacia el aprendizaje, su interés y su perfil individual de aprendizaje, incide positivamente sobre el rendimiento y la implicación en matemáticas.
- Hincapié en la importancia de las matemáticas: los métodos de enseñanza deberían partir de "grandes temas" y temas multidisciplinares que permitan establecer conexiones con la vida cotidiana y con otras asignaturas.

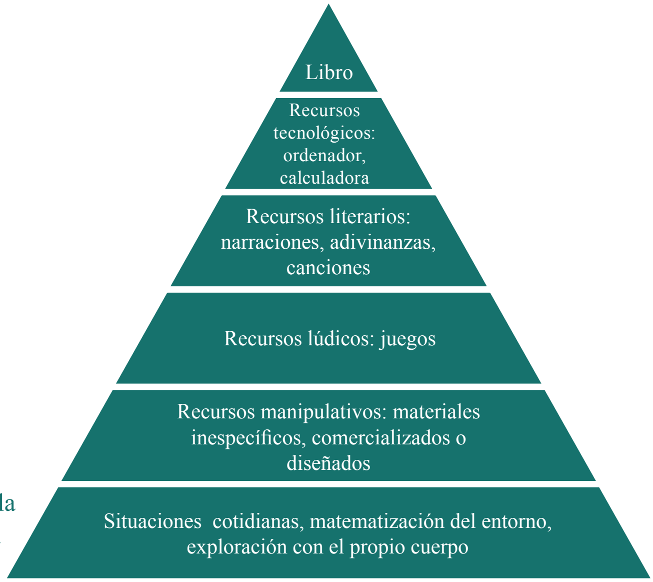


Figura 2. Pirámide de la Educación Matemática (Alsina, 2010).

- Intervención temprana: los primeros años de escolarización constituyen la base de los futuros aprendizajes en matemáticas, y la identificación de dificultades puede evitar que los niños desarrollen estrategias inadecuadas.
- Factores motivacionales: el profesorado necesita establecer y comunicar a sus alumnos unas expectativas de aprendizaje elevadas y fomentar la participación activa de todos ellos.
- Aumento de la participación de las familias: debe animarse a los padres a que ayuden a aprender y a disfrutar con las matemáticas.

En términos más generales, parece que para lograr cada vez mejores rendimientos es necesario trasladar el currículo de matemáticas a la práctica de aula; aplicar diversos enfoques didácticos para dar respuesta a las necesidades de todos los alumnos; usar de forma eficaz los métodos de evaluación; establecer objetivos y hacer un seguimiento de la eficacia de los programas de apoyo; aumentar la motivación y la implicación de los alumnos a través de iniciativas específicas; ampliar el repertorio didáctico del profesorado y fomentar la flexibilidad; promover políticas basadas en la evidencia; y, por supuesto, trabajar los contenidos a través de los procesos matemáticos.

Desde esta perspectiva, Alsina (2010) plantea que para favorecer el desarrollo de la competencia matemática es preciso partir de contextos de aprendizaje significativos y ajustados a las necesidades de los alumnos. Haciendo un símil con la pirámide de la alimentación, plantea la "Pirámide de la Educación Matemática" en la que se indica de forma sencilla el tipo de recursos necesarios para desarrollar el pensamiento matemático y su frecuencia de uso más recomendable (Figura 2). Como en el caso de la pirámide alimentaria, no descarta ningún recurso, sólo informa sobre la conveniencia de restringir algunos de ellos a un uso ocasional y, por eso, puede ser una herramienta útil para el profesorado preocupado por hacer de su metodología una garantía de educación matemática.

En la base están los recursos que necesitan todos alumnos y que, por lo tanto, se podrían y deberían "consumir" diariamente para desarrollar la competencia matemática: las situaciones problemáticas y los retos que surgen en la vida cotidiana de cada día, la observación y el análisis de los elementos matemáticos del entorno, la manipulación con materiales diversos, y los juegos, entendidos como la resolución de situaciones problemáticas. Después aparecen los que deben "tomarse" alternativamente varias veces a la semana, como los recursos literarios y los recursos tecnológicos. Por último, en la cúspide, se encuentran los recursos que deberían usarse de forma ocasional, concretamente los libros de texto. Sin embargo, el libro de texto continúa ejerciendo un control considerable en el diseño y el desarrollo de la enseñanza de las matemáticas, por lo que en realidad, en la práctica diaria de muchos docentes este organigrama está invertido: en la base están los libros de texto, mientras que la matematización del entorno, el uso de materiales manipulativos, juegos, etc. "se consumen muy poco". En nutrición, la inversión de la pirámide conlleva problemas de salud, como por ejemplo la obesidad. En educación matemática, la inversión del organigrama piramidal conlleva también graves problemas como los aprendizajes poco significativos, la desmotivación, la falta de comprensión, etc. Parece necesario, pues, repensar qué tipo de actividades se ofrecen a los alumnos para poder desarrollar su competencia matemática.

En este sentido, se proponen las siguientes fases para el diseño de actividades matemáticas competenciales en el aula:

Fase 1: Matematización del contexto de enseñanza-aprendizaje.

En esta fase todavía no intervienen los alumnos. Consiste en analizar todos los contenidos matemáticos (números y operaciones, álgebra, geometría, medida y análisis de datos y probabilidad) que pueden trabajarse en el contexto de aprendizaje, y establecer a través de qué procesos van a trabajarse.

Figura 3: Relación cartesiana entre contenidos y procesos matemáticos

	Resolución de problemas	**Razonamiento y demostración**	**Comunicación**	**Conexiones**	**Representación**
Números y operaciones					
Álgebra					
Geometría					
Medida					
Análisis de datos y probabilidad					

Partir de este enfoque globalizado del conocimiento matemático ya desde las primeras edades, en la que todo está integrado, es especialmente significativo, dado que cuando los alumnos usan las relaciones existentes en los contenidos matemáticos, en los procesos matemáticos y las existentes entre ambos, progresa su conocimiento de la disciplina y crece la habilidad para aplicar conceptos y destrezas con más eficacia en diferentes ámbitos de su vida cotidiana.

Fase 2. Trabajo previo en el aula

Cualquier actividad formativa requiere partir de los conocimientos previos de los alumnos, puesto que si la distancia entre lo que el alumno sabe y lo que se planifica que aprenda es demasiado grande, el aprendizaje dificilmente va a producirse. Y en el caso que se produzca, será un aprendizaje desconectado del resto, puesto que no será posible realizar ningún tipo de conexión.

Desde este punto de vista, una vez determinado el contexto de enseñanza-aprendizaje se inicia un diálogo con los alumnos para recoger sus conocimientos previos y experiencias. Existen diversos recursos posibles para hacer emergen los conocimientos previos, aunque uno de los más adecuados son las buenas preguntas. En los procesos de interacción, diálogo y negociación, las buenas preguntas se erigen como uno de los instrumentos de mediación más idóneos, ya que pueden hacer avanzar desde unos primeros niveles de concienciación sobre lo que uno ya sabe o es capaz de hacer hacia niveles más superiores (Mercer, 2001).

En el marco de este diálogo, entre todos se pacta el material para trabajar en contexto y documentar el trabajo que va a realizarse durante el transcurso de la actividad: una cámara digital para poder documentar en contexto, o bien otros materiales que sean necesarios para llevar a cabo la actividad: una cinta métrica, una calculadora, una libreta para anotar los descubrimientos o para representar una idea matemática, etc.

Fase 3: Trabajo en contexto

En esta fase es cuando se desarrolla la actividad matemática competencial en el contexto de enseñanza-aprendizaje establecido, y la práctica docente del maestro debería favorecer que los alumnos usen y comprendan las matemáticas en dicho contexto. Para ello, como se detallará en el apartado correspondiente a la gestión de actividades matemáticas competenciales, el maestro debería provocar situaciones que inviten a los alumnos a pensar, indagar, argumentar, razonar, descubrir, comprobar, comunicar, conectar, modelar o bien representar ideas matemáticas. Así, pues, durante la realización de la actividad competencial es recomendable que el maestro intervenga haciendo preguntas, más que dando explicaciones.

Otro elemento interesante a considerar es la documentación de la actividad. Aunque no se trata de un requisito imprescindible, la documentación a través de fotografías, vídeo, anotaciones en el diario del maestro, etc. pueden tener un papel muy importante: en primer lugar, pueden servir para llevar a cabo procesos de reflexión acerca de la propia actividad que permitan mejorar actividades posteriores; en segundo lugar, pueden servir a los propios alumnos para observar y ser conscientes de su propia práctica; en tercer lugar, pueden servir para comunicar el trabajo realizado a las familias; y finalmente, también puede ser útiles para mostrar a la comunidad el trabajo que se realiza a través, por ejemplo, de presentaciones en el blog de la escuela.

Fase 4. Trabajo posterior en el aula

Esta fase es fundamental para que los alumnos compartan los conocimientos adquiridos en contexto, consiguiendo de esta forma fomentar la co-construcción de nuevo conocimiento matemático a través del andamiaje colectivo así como la consolidación de aprendizajes ya adquiridos previamente.

Para lograr estas finalidades, de nuevo es aconsejable establecer un diálogo con los alumnos para que comuniquen lo que han aprendido, procurando en todo momento que utilicen un lenguaje matemático adecuado. Además, para interiorizar los aprendizajes adquiridos en contexto, puede resultar muy eficaz que los alumnos representen gráficamente el trabajo realizado.

Fase 5. Formalización de los aprendizajes adquiridos

Una de las finalidades de las matemáticas es representar de manera simbólica las situaciones concretas de la realidad que nos rodea. Por esta razón, una actividad matemática competencial debería finalizar, a medida que avanzan las posibilidades de representación de los alumnos, con la formalización de los aprendizajes matemáticos adquiridos.

Desde esta perspectiva, los alumnos deben ir adquiriendo progresivamente herramientas que les permitan formalizar los aprendizajes a través del lenguaje escrito en general, y el lenguaje algebraico en particular.

En la Figura 4 se representan esquemáticamente las diferentes fases que debería contemplar una actividad matemática competencial. Como puede apreciarse, se trata de una secuencia continua de fases en un flujo circular. Ello significa que, una vez finalizada la actividad competencial, el alumno dispondrá de un nuevo aprendizaje que va a servirle de base para emprender un nuevo ciclo. En esta nueva secuencia se planificarán otros aprendizajes para que, desde lo concreto, el alumno pueda conectar con lo formal interiorizado en una actividad competencial anterior, aumentando de esta forma la comprensión del conocimiento matemático.

3. LA GESTIÓN DE ACTIVIDADES MATEMÁTICAS COMPETENCIALES EN EL AULA

En la introducción se ha indicado que la práctica docente del maestro determina el aprendizaje que realizan los alumnos. En este sentido, parece evidente que el tipo de gestión de una actividad matemática competencial que contemple el ciclo de fases descrito en el apartado anterior requiere un maestro que participe activamente en el

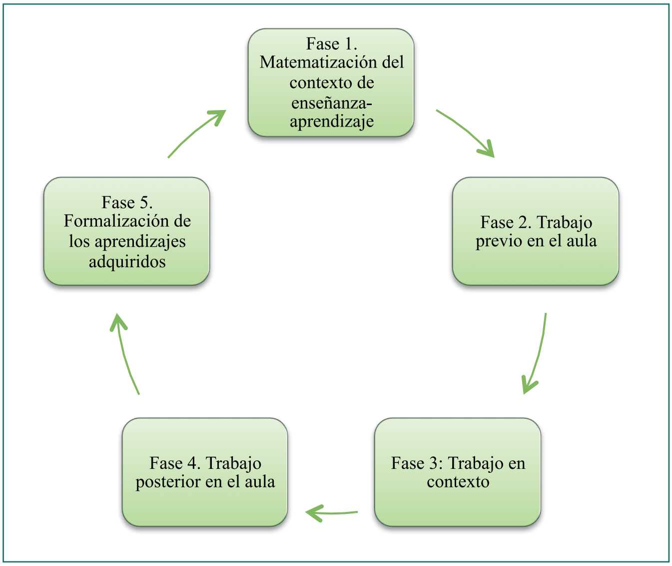


Figura 4: Fases de una actividad matemática competencial.

proceso de enseñanza-aprendizaje. Esta participación debería contemplar algunos aspectos básicos como por ejemplo plantear retos a los alumnos que despierten su curiosidad; formular buenas preguntas que lleven a razonar sobre lo que se ha hecho y justificar los resultados; fomentar la comunicación y el uso de lenguaje matemático cada vez más preciso en el aula; tener presente la importancia de la representación; conectar los conocimientos matemáticos entre ellos, etc. En otras palabras, se deberían trabajar de forma explícita los procesos matemáticos descritos por el NCTM (2003): resolución de problemas, razonamiento y prueba, comunicación, conexiones y representación.

Desde este prisma, a continuación se ofrece una síntesis de ideas clave en relación al trabajo sistemático de los procesos matemáticos que pueden servir de orientación para una gestión eficaz de las actividades matemáticas competenciales (para una ampliación, puede consultarse NCTM, 2003; Alsina, 2014).

Resolución de problemas

La resolución de problemas permite preguntar y responder preguntas dentro de las matemáticas y con las matemáticas (Niss, 2002). Si bien existe un consenso en este sentido, no parece existir el mismo grado de acuerdo respecto al significado y el uso de los problemas en el aula. Algunas ideas clave que deberían considerarse son:

- Hay cuatro aspectos referentes a la resolución de problemas que se deberían trabajar en el aula (NCTM, 2003): a) construir nuevo conocimiento matemático por medio de la resolución de problemas; b) resolver problemas que surgen de las matemáticas y en otros contextos; c) aplicar y adaptar una variedad de estrategias apropiadas para resolver problemas; y d) controlar y reflexionar sobre el proceso de resolver problemas matemáticos.

- Una situación problemática es una situación nueva de la que no se conoce de antemano el método de resolución. Deben distinguirse de los ejercicios de aplicación, en los que se conoce de antemano el método de resolución y sirven principalmente para poner en práctica un conocimiento previamente aprendido.
- La resolución de problemas se puede entender como el marco de aplicación de los diferentes bloques de contenido matemático. Además de considerar los problemas según el contenido, también se pueden interpretar en base al tipo de enunciado (visual o verbal), la finalidad (aprender una estrategia, aplicar una técnica, etc.), o bien la respuesta (abierta, cerrada).
- Se aprende a resolver problemas haciendo, manipulando, simulando, discutiendo, compartiendo, imaginando, observando, visualizando, etc. En el proceso de resolución se tendría que permitir que cada niño utilice la estrategia que se ajuste mejor a sus posibilidades: un dibujo, un esquema, el cálculo mental, la manipulación de un determinado material, etc.
- Una posible secuencia de tipos de problemas en las primeras edades es la siguiente (Alsina, 2006): situaciones reales; situaciones dramatizadas; situaciones manipulativas; una parte del enunciado con material y la otra parte verbal; situaciones gráficas, con imágenes e ilustraciones; enunciado oral-respuesta oral; enunciado oral-respuesta gráfica; enunciado gráfico-respuesta gráfica; introducción al enunciado escrito y la respuesta oral o gráfica; introducción al enunciado escrito y la respuesta escrita. Se trata, en definitiva, de partir de lo concreto (situaciones reales) para avanzar progresivamente a lo simbólico (lenguaje escrito).

Razonamiento y prueba

El trabajo sistemático del razonamiento y la prueba es fundamental en todas las edades para que los niños aprendan desde pequeños a razonar (argumentar, explicar, justificar) y probar (en las primeras edades comprobar, más que validar o demostrar) sus acciones y proposiciones, puesto que es el camino necesario para comprender el verdadero significado de las matemáticas. Algunas ideas clave que deberían considerarse son:

- Hay cuatro aspectos referentes al razonamiento y la prueba que se deberían trabajar en el aula (NCTM, 2003): a) reconocer el razonamiento y la prueba como aspectos fundamentales de las matemáticas; b) formular e investigar conjeturas matemáticas; c) desarrollar y evaluar argumentos y pruebas matemáticas; y d) escoger y usar varios tipos de razonamiento y métodos de prueba.
- En las primeras edades el razonamiento es sobre todo informal y se refiere a la capacidad de explicar, argumentar o justificar las acciones realizadas y las proposiciones, mientras que la prueba implica comprobar el resultado de dichas acciones y proposiciones. Desde este prisma, razonar y comprobar implica argumentar las afirmaciones que se hacen ("¿por qué piensas que es verdad?"); descubrir ("¿qué piensas que pasará ahora?"); justificar proposiciones ("¿por qué funciona esto?"); y hacer razonamientos inductivos, basados en la propia experiencia.

- A medida que los niños avanzan en la escolaridad deberían interiorizar otros tipos de razonamiento propios de las matemáticas: el razonamiento algebraico, por ejemplo al argumentar que el patrón de dos series de cubos "azul-verde" y "rojo-amarillo" es el mismo, y representarlo; el razonamiento geométrico, que se puede iniciar describiendo y comparando propiedades geométricas elementales de formas geométricas que no están físicamente presentes; o los razonamientos estadístico y probabilístico, que en las primeras edades se puede fomentar a través de tareas que impliquen la recogida y organización de datos, la comparación, etc.
- Las proyectos pueden favorecer el razonamiento y la prueba, junto a otras prácticas como las situaciones de experimentación y juego, en contraposición a otras prácticas docentes más descontextualizadas, poco significativas y a menudo orientadas a la adquisición de técnicas y símbolos a través de la repetición y la práctica.
- Una gestión de las prácticas matemáticas que favorezca el razonamiento y la prueba implica plantear buenas preguntas, más que dar explicaciones; favorecer la interacción y el contraste; e incentivar la indagación y el aprendizaje autónomo con la guía del adulto.

La comunicación

Nadie niega que la matemática es, entre otras cosas, un lenguaje universal que permite comunicarse. Así, pues, los niños que tienen oportunidades y se sienten motivados y apoyados para hablar, escribir, leer y escuchar en las clases de matemáticas se benefician doblemente: comunican para aprender matemáticas y aprenden a comunicar matemáticamente. Algunas ideas clave que deberían considerarse son:

- Hay cuatro aspectos referentes a la comunicación que se deberían trabajar en el aula (NCTM, 2003): a) organizar y consolidar el pensamiento matemático a través de la comunicación; b) comunicar el pensamiento matemático con coherencia y claridad a los compañeros, maestros y otras personas; c) analizar y evaluar las estrategias y el pensamiento matemático de los otros; y d) usar el lenguaje matemático para expresar ideas matemáticas con precisión.
- El lenguaje oral y escrito son herramientas imprescindibles (y previas al lenguaje simbólico) para desarrollar y comunicar el pensamiento matemático, ya que favorecen la comprensión del conocimiento y la estructuración del pensamiento.
- La comunicación se tiene que distinguir de la información: informar implica transmitir en sentido unidireccional desde un emisor hacia un receptor; en cambio comunicar implica interactuar en sentido bidireccional dos o más personas.
- El trabajo sistemático de la comunicación en el aula de matemáticas requiere integrar los procesos de interacción, diálogo y negociación alrededor de los contenidos matemáticos y su gestión, puesto que los niños a menudo interpretan las normas establecidas de maneras diferentes, y muy a menudo también estas interpretaciones difieren de las que los maestros esperan.
- A nivel curricular se insiste en la necesidad de plantear buenas preguntas para favorecer la comunicación, sin embargo ha habido escasas aportaciones sobre qué características debería tener una buena pregunta, qué tipos de preguntas se tendrían

que formular y cómo se tendrían que formular para favorecer el desarrollo del pensamiento matemático. Las buenas preguntas para enseñar matemáticas, de acuerdo con Sullivan y Lilburn (2002), tienen tres características: a) más que recordar un hecho o reproducir una acción, requieren comprensión de la tarea, aplicación de técnicas y estrategias y análisis y síntesis de los conceptos implicados; b) permiten que los niños aprendan respondiendo preguntas, y que los maestros aprendan a partir de las respuestas de los niños; y c) permiten diversas respuestas aceptables.

Las conexiones

Se refieren a las relaciones entre los diferentes bloques de contenido matemático y entre los contenidos y los procesos matemáticos (intradisciplinariedad); las relaciones de las matemáticas con otras áreas de conocimiento (interdisciplinariedad); y las relaciones de las matemáticas con el entorno que nos rodea. Algunas ideas clave que deberían considerarse son:

- Hay tres aspectos referentes a las conexiones que se deberían trabajar en el aula (NCTM, 2003): a) reconocer y usar las conexiones entre ideas matemáticas; b) comprender cómo las ideas matemáticas se interconectan y construyen una sobre otras para producir un todo coherente; c) reconocer y aplicar las matemáticas en contextos no matemáticos.
- Las conexiones entre los diferentes bloques de contenido matemático ponen de manifiesto que las matemáticas no son una colección fragmentada de bloques de contenido, aunque con frecuencia se dividen y presentan así, sino que constituyen un campo integrado de conocimiento. Hay unas mismas estructuras matemáticas que se repiten: identificar (definir o reconocer); relacionar (comparar); y operar (transformar), lo único que varía es el tipo de contenido.
- Las conexiones entre los contenidos y los procesos matemáticos evidencian que no son conocimientos independientes de una misma disciplina sino que se interrelacionan, se retroalimentan para favorecer la competencia matemática.
- Las conexiones entre las matemáticas y las otras áreas de conocimiento ponen de manifiesto la relevancia de trabajar las matemáticas en conexión con el arte, por ejemplo, trabajando las matemáticas a partir de pinturas y esculturas; con la música, trabajando a partir de canciones; con la psicomotricidad, trabajando aspectos diversos relativos a la orientación y la estructuración espacial, etc.
- Las conexiones entre las matemáticas y el entorno evidencian que el uso de contextos de vida cotidiana puede contribuir a comprender el papel social de las matemáticas, al fomentar el uso de las matemáticas en contextos no exclusivamente escolares.

La representación

Las representaciones se refieren a las formas de representar las ideas y procedimientos matemáticos, como por ejemplo imágenes, materiales concretos, tablas, gráficos, números, letras, entre otras. Muchas de las representaciones que existen actualmente son el resultado de una construcción cultural, que llevó muchos años determinar. Cuando los niños comprenden las representaciones matemáticas que se les presenta y además tienen oportunidades de crear otras, mejoran su capacidad para modelar e interpretar fenómenos físicos, sociales y matemáticos. La representación es, pues, un proceso indispensable para poder aprender. Si no hay representación del conocimiento no hay aprendizaje. Algunas ideas clave que deberían considerarse son:

- Hay tres aspectos referentes a la representación que se deberían trabajar en el aula (NCTM, 2000): a) crear y usar representaciones para organizar, registrar, y comunicar ideas matemáticas; b) seleccionar, aplicar y traducir representaciones matemáticas para resolver problemas; y c) usar representaciones por modelizar e interpretar fenómenos físicos, sociales y matemáticos.
- La representación de las ideas y procedimientos matemáticos puede tener formas diversas en las primeras edades, por ejemplo a través de objetos físicos (una pieza con forma de triángulo), el lenguaje natural (la palabra "triángulo"), dibujos (triángulos de diferentes características), y símbolos convencionales (un triángulo equilátero).
- El desarrollo progresivo de la representación de las ideas y procedimientos matemáticos va de lo concreto a lo abstracto (Freudenthal, 1973). En este sentido, se respeta y favorece su proceso de adquisición cuando se fomenta por ejemplo que las primeras representaciones sea concretas, a partir de objetos o dibujos y usando el lenguaje natural; posteriormente pictóricas, usando tablas o diagramas; y finalmente convencionales, usando símbolos abstractos.
- La adquisición progresiva de la representación de las ideas y procedimientos matemáticos aumenta la capacidad para modelar e interpretar fenómenos físicos, sociales y matemáticos. En otras palabras, permite hacer modelos e interpretar la realidad. Un modelo es, pues, una representación ideal de un aspecto concreto de la realidad usada con finalidades de interpretación.
- Pueden usarse distintos tipos de modelos: a) modelos manipulables (materiales físicos con los que trabajan los niños, como por ejemplo una regleta que representa el número cinco); b) modelos ejemplificadores o simuladores (por ejemplo el dibujo de un itinerario que puede hacer un niño, o en términos más complejos, el plano esquemático de la red del metro de una gran ciudad).

4. LA EVALUACIÓN DE ACTIVIDADES MATEMÁTICAS COMPETENCIALES EN EL AULA

La evaluación de prácticas docentes que incorporen los procesos matemáticos de forma sistemática como herramientas para trabajar los diferentes contenidos requiere elaborar indicadores de referencia que permitan analizar la presencia (o no) de los procesos en dichas prácticas. Desde este punto de vista, Coronata (2014) y Alsina y Coronata (2014) han elaborado y analizado la validez de un instrumento de evaluación que incluye cinco categorías que se corresponden con los cinco procesos indicados por el NCTM (2003). Posteriormente se ha analizado la fiabilidad del instrumento (Maurandi, Alsina y Coronata, en revisión). La presencia de cada indicador se mide con una escala tipo Likert que va de 1 (ausencia) a 5 (presencia):

	Ausencia → Presencia				
1. Indicadores de RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS:	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
Plantea situaciones problemáticas usando diferentes tipos de apoyo (oral, concreto, pictórico).					
Contextualiza las situaciones problemáticas a la vida cotidiana de los alumnos.					
Propone situaciones problemáticas de diversos tipos.					
Realiza preguntas que generan la investigación y exploración para solucionar al problema.					
Permite a los niños la utilización de material concreto y/o pictórico con apoyo oral para la resolución de problemas.					
Mantiene a los niños comprometidos con el proceso de resolución de problemas.					
Promueve la discusión en torno a las estrategias de resolución de problemas y los resultados.					
2. Indicadores de RAZONAMIENTO Y PRUEBA:	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
Invita a hacer conjeturas.					
Permite que los propios alumnos descubran, analicen y propongan diversas vías de resolución.					
Pide a los alumnos que expliquen, justifiquen o argumenten las estrategias o técnicas que utilizaron durante la resolución.					
Plantea interrogantes para que los alumnos argumenten sus respuestas.					
Promueve que los alumnos comprueben conjeturas de la vida cotidiana.					
Promueve el apoyo del razonamiento matemático.					
Entrega retroalimentación con material concreto permitiendo el pensamiento divergente.					
3. Indicadores de CONEXIONES:	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
Considera las experiencias matemáticas cotidianas de los alumnos para avanzar hacia las matemáticas más formales.					
Realiza conexiones entre diversos contenidos matemáticos.					
Desarrolla actividades matemáticas vinculadas a contextos musicales.					
Trabaja las matemáticas vinculándolas con la literatura infantil.					
Relaciona las matemáticas con la expresión artística.					

	Ausencia → Presencia				
Genera conocimiento matemático a través de contextos vinculados a la psicomotricidad.					
Promueve que los alumnos apliquen el conocimiento matemático a las situaciones de la vida cotidiana.					
4. Indicadores de COMUNICACIÓN:	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
Promueve con mayor énfasis la comunicación en el aula que la entrega de información unidireccional.					
Favorece la interacción con otros para aprender y comprender las ideas matemáticas.					
Impulsa el intercambio de ideas matemáticas a través del lenguaje oral, gesticular, gráfico, concreto y /o simbólico.					
Pide al niño explicitar con lenguaje matemático adecuado sus estrategias y respuestas.					
Incentiva en los alumnos el respeto por la forma de pensar y de exponer sus puntos de vista en torno al contenido matemático.					
Fomenta la escucha atenta de los puntos de vista de los demás.					
Interviene mayoritariamente a través de preguntas, más que a través de explicaciones.					
5. Indicadores de REPRESENTACIÓN:	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
Pide a los niños que hablen, escuchen y reflexionen sobre las matemáticas para avanzar hacia la representación simbólica.					
Utiliza materiales concretos como recursos para representar ideas matemáticas.					
Utiliza modelos ejemplificadores (esquemas, entre otros) para mostrar maneras de resolver situaciones problemáticas.					
Trabaja en los niños las representaciones concretas (dibujos, etc.).					
Trabaja en los niños las representaciones pictóricas (signos, etc.).					
Trabaja en los niños las representaciones simbólicas (notación convencional).					
Muestra un trabajo bidireccional (de lo concreto a lo abstracto y de lo abstracto a lo concreto).					

A partir del análisis de la validez y la fiabilidad, se puede concluir que este instrumento permite evaluar de forma fiable la presencia de los procesos matemáticos en las prácticas docentes.

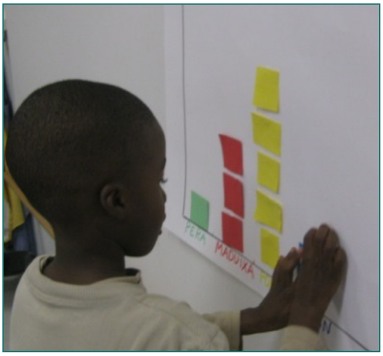


Figura 5. Recopilación previa de datos (tipo de fruta), organización, representación y comparación a partir de un gráfico de barras.

Figuras 6. Observación de las agrupaciones y clasificaciones de frutas según criterios diversos (tipo de fruta, tamaño, etc.), y situaciones de compra-venta.

5. ACTIVIDADES MATEMÁTICAS COMPETENCIALES EN EDUCACIÓN INFANTIL Y PRIMARIA

En este último apartado se muestra una selección breve de actividades matemáticas competenciales. Todas ellas tienen en común que, siguiendo las fases descritas para el diseño de una actividad matemática competencial, se realiza una planificación de los contenidos a trabajar en el contexto de aprendizaje y a través de qué procesos se trabajan, y durante toda la secuencia se lleva a cabo un tipo de gestión que prioriza la coconstrucción de conocimientos matemáticos mediante el andamiaje colectivo (trabajo por parejas, en pequeño grupo, en grupo medio o gran grupo).

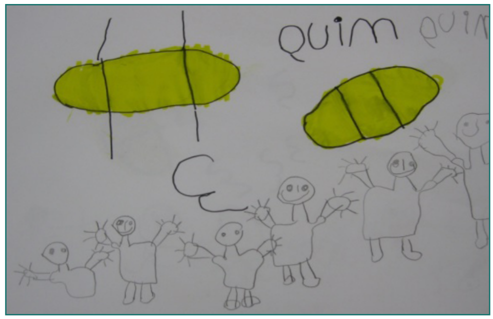
Actividad 5.1. El Mercado de la Devesa

- Escuela: Balandrau (Girona).
- Nivel: 5-6 años (Educación Infantil).
- Maestra responsable de la implementación y la documentación: Fátima Dalmau.
- Asesoramiento pedagógico: Ángel Alsina

La actividad central consiste consiste en ir al mercado a comprar fruta. Se realiza un trabajo previo en el aula para contextualizar la actividad en la que cada alumno elige la fruta que quiere comprar (figuras 5 a 11). El día siguiente los alumnos van al mercado a comprar la fruta y posteriormente, en el aula, surgen dos situaciones problemáticas que los alumnos resuelven a través del diálogo y la discusión de puntos de vista por parte del grupo, la búsqueda de alternativas, el tanteo, la manipulación directa con materiales, la verbalización y argumentación de ideas, del proceso seguido y de los resultados. Además, representan los resultados a través de materiales y/o dibujos.



Figuras 7-9. Reparto de cerezas en cuatro grupos.

Figuras 10-11. Partición de "plátanos" en tres trozos.

Actividad 5.2. El proyecto de los ajos

- Escuela: Bosc de la Pabordia (Girona).
- Nivel: 1º de Educación Primaria (6-7 años).
- Maestra responsable de la implementación: Anna Puig.
- Asesoramiento pedagógico: Ángel Alsina
- Documentación gráfica: Yenisel Acosta

La actividad se lleva a cabo en el contexto de dos asignaturas, que se trabajan de forma interrelacionada: Conocimiento del Medio Natural y Matemáticas. En primer lugar se plantea un reto a los alumnos: después de plantar ajos en el invernadero y en el huerto, se quiere analizar cómo se comporta la temperatura en estos dos lugares para ver cómo incide en el crecimiento de los ajos, y poder determinar donde crecen más.

En primer lugar se lleva a cabo un proceso de diálogo, discusión y negociación para pactar la forma más adecuada de recoger los datos (figura 12).

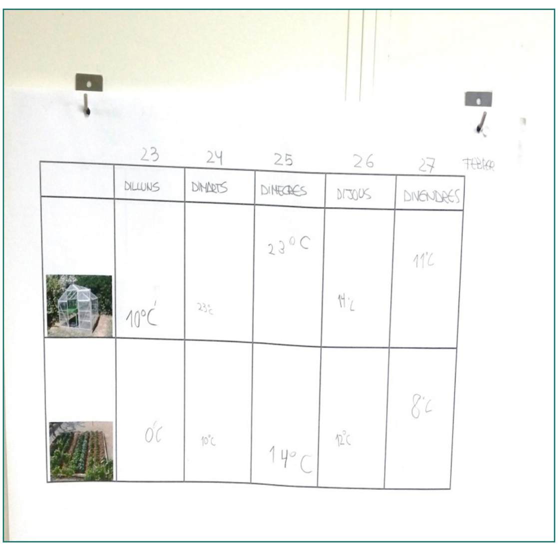
Se plantean diversas preguntas para recoger conocimientos previos sobre el funcionamiento de los termómetros y recogen las temperaturas durante una semana (figura 13 y 14).

Una semana después se ponen en común los datos, y los alumnos deciden la forma de representarlos (figura 15 y 16).

Posteriormente interpretan los datos y concluyen que en el invernadero la temperatura es más alta y los ajos crecen más en invierno que en el huerto que está en el exterior (figura 17 y 18).

Figura 12. Diseño de una tabla de recogida de datos entre todos.

Figuras 13 y 14. Recogida de temperaturas.



Figuras 15 y 16: Lectura y representación de temperaturas mediante policubos (azul: huerto exterior; rojo o rosa: invernadero).

Figuras 17 y 18: Interpretación del gráfico de barras.

Actividad 5.3. Gincana de medidas

- Escuela: L'Estació (Sant Feliu de Guíxols, Girona).
- Nivel: 3º a 6º de Educación Primaria.
- Maestro responsable de la implementación y documentación: Xavier Fernández.

La actividad consiste en llevar a cabo diferentes actividades de práctica de medida mediante pruebas que los alumnos, por parejas, deben ir superando. Tienen a su disposición diferentes instrumentos de medida, que eligen según el tipo de práctica que deben realizar (figura 19 y 20).

Una vez leída la prueba, cada pareja de alumnos la resuelve. A modo de ejemplo, se presentan tres de las pruebas (figuras 21a la 26):

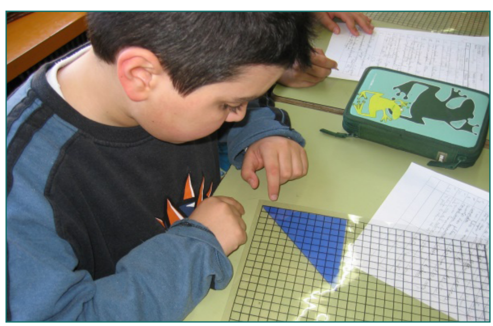
Una vez finalizada la gincana, los alumnos anotan sus resultados y recogen el material (figura 27 y 28):

A modo de consideraciones finales, las actividades descritas parten de un enfoque competencial que favorece la conexión entre varios tipos de contenidos matemáticos y sobre todo, del trabajo sistemático de los procesos matemáticos para ayudar a los alumnos a comprender los conocimientos matemáticos: la resolución de problemas, a través de la formulación de preguntas que invitan a hacer pequeñas investigaciones; el razonamiento y la prueba, potenciando que expliquen, justifiquen, argumenten y razonen las acciones y los descubrimientos que hacen, y en algunos casos que los comprueben; la comunicación y la representación, incentivando la expresión verbal de las acciones hechas y su representación gráfica; y finalmente, las conexiones con otras áreas curriculares.

Figuras 19 - 20: Pruebas e instrumentos de medida a disposición de los alumnos.


Figuras 21 -22: Medición del largo del pasillo del colegio.


Figuras 23-24: Miden ¾ de litro de agua.

Figuras 25-26: Mide la superficie de un triángulo.


Figuras 27 y 28:
Finalización de la gincana.

REFERENCIAS

Alsina Á. y López, P. (2014). Sobre la naturaleza de las Matemáticas en la formación inicial de maestros: los procesos matemáticos en el sistema de creencias de los estudiantes. *Epsilon, 31*(3), 7-20.

Alsina, Á (2014). Procesos matemáticos en Educación Infantil: 50 ideas clave. *Números 86,* 5-28.

Alsina, Á. (2006). *Como desarrollar el pensamiento matemático de 0 a 6 años.* Barcelona: Editorial Octaedro-Eumo.

Alsina, Á. (2010). La "pirámide de la educación matemática", una herramienta para ayudar a desarrollar la competencia matemática. *Aula de Innovación Educativa, 189,* 12-16.

Alsina, Á. (2012). Más allá de los contenidos, los procesos matemáticos en Educación Infantil. *Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia, 1*(1), 1-14.

Alsina, Á. y Coronota, C. (2014). Los procesos matemáticos en las prácticas docentes: diseño, construcción y validación de un instrumento de evaluación. *Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia, 3*(2), 21-34.

Coronata, C. (2014). *Presencia de los procesos matemáticos en la enseñanza del número de 4 a 8 años. Transición entre la Educación Infantil y Primaria*. Girona: Universidad de Girona. Tesis Doctoral

EACEA P9 Eurydice (2011). *La enseñanza de las matemáticas en Europa: Retos comunes y políticas nacionales*. Madrid: Secretaría General Técnica, Subdirección General de Documentación y Publicaciones del Ministerio de Educación, Cultura y Deporte.

Maurandi, A., Alsina, Á. y Coronata, C. (en prensa). Los procesos matemáticos en la práctica docente: análisis de la fiabilidad de un cuestionario de evaluación. *Revista de Investigación Educativa.*

Mercer, N. (2001). *Palabras y mentes.* Barcelona: Paidós.

NCTM (2000). *Principles and standards for school mathematics.* Reston, Va.: The National Council of Teachers of Mathematics

NCTM. (2003). *Principios y estándares para la educación matemática*. Granada: Servicio de Publicaciones de la SAEM Thales.

Niss, M. (2002). *Mathematical competencies and the learning of mathematics: the Danish Kom Project*. Roskilde: Roskilde University.

OECD (2003). *The PISA 2003 Assessment Framework – Mathematics, Reading, Science and Problem Solving Knowledge and Skills*. París: OCDE.

OECD (2004). *Learning for tomorrow's world: First results from PISA 2003.* Paris: OECD.

Percepciones de profesores en formación sobre la modelación como estrategia de enseñanza

Angela Mora Zuluaga
Universidad de Los Andes (GIPCD-ULA)

José Ortiz Buitrago
Universidad de Carabobo-Maracay

Resumen: *Se analizan las percepciones de grupos de profesores de matemáticas en formación, sobre la modelación como estrategia de enseñanza. Se desarrolló un estudio cualitativo con perspectiva teórica interpretativa. La información fue recabada durante la puesta en práctica de un programa formativo, donde participaron 27 profesores en formación, quienes abordaron el diseño de tareas con modelación. Se recurrió a procesos de observación y análisis sobre las expresiones de los grupos y una entrevista. Los resultados muestran que los futuros profesores pasaron de ver la modelación como un término desconocido a percibirla como una estrategia de enseñanza que les permitía conectar el contexto del estudiante con el contenido matemático escolar, mostrándole su utilidad y aplicación, y de este modo generarle interés por aprender. Adicionalmente, asignaron utilidades laborales y formativas a su trabajo con modelación para el diseño de tareas. Las dificultades percibidas, se relacionaron con su modelo de formación previo y con la ausencia de experiencias con modelación durante su Carrera. Por otra parte, de las valoraciones expresadas por los grupos sobre esta estrategia, se pudo concluir que los conceptos sobre matemática, enseñanza y aprendizaje, desarrollados durante su formación inicial, condicionaron su visión sobre la práctica educativa con modelación.*
Palabras clave: *Modelación, tareas, planificación de la enseñanza.*

Perceptions of teachers in training modeling teaching as a strategy

Abstract: *It's analyzed the perception of groups of mathematics teachers in training about modeling as a teaching strategy. A qualitative study was developed with interpretive theoretical perspective. The information was gathered during the implementation of a training program, with 27 pre-service mathematics teachers, who addressed the*

modeling design tasks. The observation processes and data analysis was made of the expressions of groups and interviews. The results show that prospective teachers went to see modeling as an unknown to perceive it as a teaching strategy that allowed them to connect the context of student with school mathematics content, showing its usefulness and applicability term, and thus carry potential interest to learn. Additionally, the prospective teachers were seeing utility with modeling to design tasks didactical. They perceived difficulties related to their prior training model and the lack of experience with modeling during his career. Moreover, the valuations expressed by the groups on this strategy, it was concluded that the concepts of mathematics teaching and learning, developed during their initial training, conditioned his vision of educational practice with modeling.
Keywords: *Modeling, tasks, planning for teaching.*

INTRODUCCIÓN

La modelación permite conectar un contenido matemático escolar con el contexto del alumno. Por esta razón, constituye un aspecto fundamental de la competencia de planificación de la enseñanza por sus implicaciones en el diseño de tareas u oportunidades de aprendizaje. En este sentido, la modelación influye y determina en el tipo de tareas que diseñan y seleccionan los profesores en formación durante el desarrollo de una unidad didáctica.

Barbosa (2001) entiende la modelación como un ambiente de aprendizaje en el cual los alumnos indagan y/o investigan, por medio de la matemática, sobre situaciones que surgen en otras áreas de la realidad. Para Blomhøj (2004), la modelación constituye una práctica de enseñanza que focaliza el proceso de enseñanza y aprendizaje en la relación entre el mundo real y la matemática.

En este trabajo, la modelación se concibe como una estrategia de enseñanza que permite al futuro docente relacionar un contenido matemático escolar con el contexto del estudiante. Como estrategia, la modelación parte de un tema y desarrolla sobre éste preguntas y cuestiones para ser resueltas, comprendidas o inferidas, permitiendo al alumno construir conocimientos a los cuales puede asignar un significado y un sentido. De este modo, contribuye a que el estudiante pueda considerar importante un contenido y se interese en aprenderlo. En otras palabras, la finalidad principal del uso de la modelación como estrategia de enseñanza trasciende la de mostrar las aplicaciones de un contenido y se centra en el significado y el sentido que unos conceptos pueden tener para el estudiante.

Este trabajo forma parte de una investigación que analizó el desarrollo de la competencia de planificación de la enseñanza en profesores de matemáticas en formación, durante la puesta en práctica del programa formativo denominado "Enseñanza del álgebra utilizando modelización y sistemas de cálculo simbólico (EAMS)". Específicamente se hace referencia a las distintas percepciones que grupos de futuros profesores de matemáticas desarrollaron durante la ejecución de dicho programa, relativas al uso de la modelación como estrategia de enseñanza. En este caso, se pretende analizar las percepciones de grupos de profesores en formación referidas al concepto de modelación, su rol en la formación del docente y en el ámbito laboral, sus valoraciones sobre aspectos positivos y negativos sobre esta estrategia y las dificultades asociadas al uso de esta estrategia en el diseño de tareas u oportunidades de aprendizaje.

MODELACIÓN EN LA FORMACIÓN DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS

Mathews & Redd (2007) y Ortiz, Rico y Castro (2007) sostienen que la modelación permite a los profesores en formación manejar y utilizar conceptos y procedimientos matemáticos haciendo uso de una herramienta dinámica de enseñanza y aprendizaje, en el abordaje de situaciones problema. También permite desarrollar ideas sobre lo que significa enseñar matemáticas y desarrollar estrategias y técnicas para la enseñanza de un tema particular. Oliveira (2006) refiere que la modelación posibilita el desarrollo de conocimientos matemáticos, brinda una percepción del papel de las matemáticas en la sociedad y propicia el escenario para su integración en la práctica educativa de los profesores en formación. Por su parte Doerr (2007) sostiene que los profesores de matemáticas en formación necesitan experiencias sobre modelización, las cuales les provean de un rango de contextos y herramientas para la enseñanza y les permitan participar en el análisis de su propia actividad de modelización. Los estudiantes necesitan evaluar sus propias ideas y los profesores deben proporcionar oportunidades donde esa evaluación pueda ser productiva y formativa.

Adicionalmente, Mora (2014) afirma que el uso de esta estrategia de enseñanza permite desarrollar en el futuro docente su capacidad para identificar situaciones relacionadas con el contenido matemático y para construir los enunciados de las tareas u oportunidades de aprendizaje. Por otra parte, permite al profesor en formación, posicionarse en el aprendizaje del estudiante.

MODELACIÓN COMO ESTRATEGIA DE ENSEÑANZA

Para Mora (2014), la modelización como estrategia de enseñanza, permite a los profesores en formación reflexionar y negociar significados sobre el tipo de tareas u oportunidades de aprendizaje que elaboran cuando planifican una unidad didáctica. Para esto, establecen relaciones entre las expectativas de aprendizaje, las dimensiones de la competencia matemática implicadas en ellas, los errores y dificultades previstas y los recursos seleccionados para la enseñanza. También propicia procesos reflexivos sobre los contextos y problemas que pueden utilizar para la enseñanza, estableciendo relaciones con la fenomenología del contenido.

Por otra parte, Mora y Ortiz (2015) sostienen que cuando los profesores en formación utilizan la modelación como estrategia, llevan a cabo procesos de reflexión sobre la complejidad del concepto y su conexión con el contexto del estudiante, es decir, con su mundo real. Adicionalmente, afirman que la potencialidad de esta estrategia de enseñanza depende del análisis sobre aspectos de la planificación que son inherentes a cada tema y contenido matemático.

En otras palabras, el docente o futuro docente debe reflexionar sobre los conceptos, sistemas de representación y fenómenos implícitos o relacionados con las tareas; sobre la forma como estas pueden contribuir al logro de los objetivos de enseñanza y el desarrollo de competencias; sobre los errores y dificultades asociados al contenido y a los conceptos, y la forma como esas tareas pueden contribuir en su abordaje y superación; y sobre la forma de uso de la modelación, por ende el tipo de tareas y su organización.

METODOLOGÍA

El análisis de las percepciones de la modelación como estrategia de enseñanza en profesores en formación, se realizó durante la implementación del programa formativo denominado: Enseñanza del Álgebra utilizando Modelización y Sistemas de cálculo simbólico (EAMS), donde grupos de profesores de matemáticas en formación diseñaron tareas u oportunidades de aprendizaje con modelación. Las actividades de dicho programa se desarrollaron durante un periodo de 16 semanas. Se llevó a cabo un estudio cualitativo desde una perspectiva teórica interpretativa. Los informantes del estudio, profesores en formación que participaron en el desarrollo del programa EAMS, fueron 27 estudiantes del IX Semestre de la Carrera de Educación Mención Física y Matemática de la Universidad de Los Andes "Dr. Pedro Rincón Gutiérrez" durante el periodo B-2011, quienes conformaron seis grupos. Cada uno eligió libremente un tema del Currículo de Matemática de Educación Media venezolana, con la finalidad de planificar una unidad didáctica, que contempló el diseño de tareas utilizando la modelación como estrategia de enseñanza.

Los temas elegidos fueron Sistemas de Ecuaciones (SEC), Potenciación (POT), Productos Notables (PN), Polinomios (POL), Función Polinómica (FPOL) e Inecuaciones (INEC). Se recurrió a la entrevista para indagar sobre la percepción de los grupos. Estas entrevistas se realizaron al finalizar las actividades del programa EAMS. Adicionalmente, se analizó lo expresado por lo grupos durante las sesiones de trabajo del programa formativo. Al citar algunas intervenciones de los grupos durante las sesiones de trabajo y la entrevista, se utiliza la notación mostrada en la Tabla 1. Como ejemplo, lo expresado por el grupo sistemas de ecuaciones durante la segunda sesión de trabajo del programa se denotará como SEC.S02. Lo expresado por los grupos durante la entrevista, se denotará con el nombre abreviado de cada uno, seguido de la letra E, que indica entrevista. Lo mencionado por cada grupo durante las sesiones de trabajo fue grabado en audio y video, y la entrevista fue registrada en audio. Posteriormente, fue transcrito y asignado a una unidad hermenéutica del programa Atlas/Ti para facilitar su manejo y análisis.

Tabla 1. Códigos asignados para presentaciones y entrevistas de los grupos.

Nombre del grupo	Sesión	Entrevista
Sistemas de ecuaciones	SEC.S..	SEC.E
Potenciación	POT.S..	POT.E
Productos notables	PN.S..	PN.E
Polinomios	POL.S..	POL.E
Función polinómica	FPOL.S..	FPOL.E
Inecuaciones	INEC.S..	INEC.E

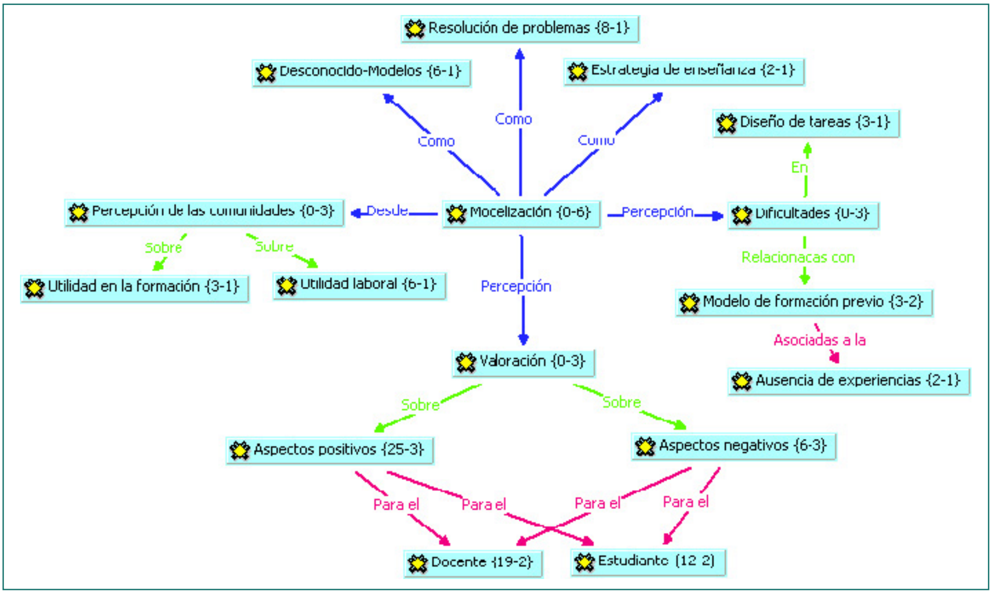


Figura 1. Percepción de los grupos sobre la modelación

RESULTADOS

La Figura 1 corresponde a la red generada con la herramienta Network para la percepción de los grupos sobre la modelación como estrategia de enseñanza, como resultado del proceso de codificación.

Con respecto a los conceptos de modelación, durante el desarrollo de las sesiones de trabajo del programa formativo EAMS, se consiguió identificar tres. El primero, expresado por los grupos durante las primeras sesiones de trabajo del programa formativo, se relacionó con la modelación como término *Desconocido* o asociado a *Modelos* de enseñanza, del docente o de aprendizaje.

> SEC.S8: "*...no hemos escuchado el término modelización. En este momento lo asociamos con imitar algo, por ejemplo al docente"*.
> FPOL.S8: "*...se nos había hablado de modelos de enseñanza, de modelos de aprendizaje, pero de modelación no. Puede que tenga que ver con modelos, pero no modelos matemáticos, sino como modelación o modelo del docente por ejemplo"*.

El segundo, identificado a mitad del desarrollo de las actividades del programa, estuvo relacionado con la visión de los profesores en formación de la modelación como *Resolución de problemas*.

> PN.S13: *"Estamos viendo la modelación como una especie de resolución de problemas, pero más contextualizados. Porque los ejemplos que hemos visto de resolución de problemas, son los que están en los libros clásicos, que hablan de granjas, de edades, de sacar una canica*

de un color y cosas así, pero igual que los compañeros, vemos que estas tareas que estamos analizando van más allá de eso, son más reales, más del contexto".

El último concepto, expresado durante la entrevista realizada a los grupos una vez finalizadas las actividades del programa, reconocía en la modelación una *Estrategia de enseñanza* que permitía conectar el contexto y el contenido matemático a través de las tareas, mostrar la utilidad del contenido al estudiante y ayudarle a darle sentido para que este logre construir conocimiento y conceptos.

PN.S17: *"La modelación vemos que es una estrategia de enseñanza de contenidos matemáticos, utilizada en el diseño de las tareas, que tiene como característica, que esas tareas deben conectar con la realidad, con el contexto del estudiante".*

POT.S17: *"…Una estrategia que permite al docente mostrar la utilidad de un contenido y al estudiante dar sentido a ese contenido, pues permite conectar la realidad con el contenido matemático".*

Con respecto a la percepción de los grupos sobre la modelación, referida a su *Utilidad en la formación* y *Utilidad laboral,* estos expresaron que esta estrategia les permitió pensar diferente, conectando la realidad con los contenidos mediante las tareas y a través de las aplicaciones del contenido. Además, les permitió dotar de sentido y significado a los conceptos de constructivismo y aprendizaje social. Por otra parte, percibieron que esta estrategia posibilita el trabajo con proyectos de aprendizaje, pues el análisis previo que conlleva, les permitiría plantear temáticas para desarrollar contenidos matemáticos escolares. Por último, los grupos expresaron que la modelación permite mostrar al estudiante la utilidad y aplicación del contenido matemático, y de este modo generar interés por su aprendizaje.

POL.E: "*Con esta estrategia vimos cómo realmente los estudiantes pueden construir conceptos, es la primera vez que sentimos que el constructivismo del cual nos hablaron durante la Carrera, es realmente viable, que no es solamente una teoría…En las experiencias con modelación que analizamos además de ver cómo se podían construir conceptos, también vimos cómo es que la colaboración entre pares puede ayudar a aprender algo…".*

POT.E: *"…tenemos entendido que se está pidiendo planificar por proyectos, y en este aspecto lo que trabajamos sobre la fenomenología y la modelización nos puede ayudar mucho, porque nos va a permitir plantear temas donde los contenidos puedan desarrollarse…".*

PN.E: *"Nuestra tarea es mostrar las utilidades de un contenido a los estudiantes, porque de esa forma podemos motivarlos a aprender. En ese sentido, la modelización representó un contenido y un conocimiento que puede ayudarnos como docentes a lograrlo…".*

Sobre las *Dificultades* percibidas por los grupos de profesores con respecto a la modelación, estas se relacionaron con el diseño de tareas y el modelo de formación previo, al cual se asoció la ausencia de experiencias con esta estrategia. Las dificultades referidas al *Diseño de las tareas*, se relacionaron con la construcción de los enunciados y redacción de tareas, la identificación de fenómenos y situaciones y su posterior uso para el diseño de estos.

Épsilon, 2016, Vol. 33 (1), nº 92, 31-40, ISSN: 2340-714X

SEC.E: *"Cuando diseñamos las primeras tareas, vimos el rol que tenía la fenomenología en ese diseño. Allá teníamos la información sobre los fenómenos asociados a los sistemas de ecuaciones, de allí salían las situaciones para plantear los problemas. Lo difícil era redactarlos, construir los enunciados con esa información. Redactar tareas donde la modelación se usara de distintas formas, dependiendo de la actividad del estudiante. Teníamos la información, pero no sabíamos cómo usarla".*

Las dificultades asociadas al *Modelo de formación previo*, tuvieron que ver con la percepción que los grupos tenían sobre su formación y sobre el modelo docente que pudieron observar durante su Carrera. De acuerdo con lo expresado, el diseño de tareas con modelación les hacía pensar de una manera diferente a la desarrollada durante su formación inicial. Sin embargo, expresaron que el modelo docente observado interfería en ese "pensar distinto" pues percibieron que al plantearse una actividad propia del docente, intentaban imitar o trabajar del mismo modo que los profesores de su Carrera universitaria.

POT.E: *"…durante la Carrera no se trabajó de esa forma, es decir, nosotros nunca resolvimos problemas con modelación para aprender aquí en la universidad, nosotros siempre hemos visto una sola forma de trabajar, llamémosla tradicional. Y eso lo hacía difícil, porque debíamos pensar diferente, teníamos que trabajar de una forma que no conocíamos".*

INEC.E: *"…la formación que aquí se da* [en la universidad] *es muy tradicional, hemos visto algunas aplicaciones de la matemática…es más, muy pocos profesores lo hacen o se preocupan por decirle a uno dónde se aplican los contenidos que están desarrollando…tal vez por eso nos costó tanto integrar la modelización, porque nunca la han utilizado con nosotros, no teníamos un modelo a seguir, un ejemplo en nuestra Carrera. Y es que cuando uno va a dar clase o piensa en planificarla, siempre trata de recordar a los que uno cree que son los mejores profesores en la Carrera, y trata de trabajar como ellos, hasta de imitarlos, de hacer lo que ellos hacen".*

De las dificultades relacionadas con la *Ausencia de experiencias*, los grupos refirieron que las actividades del programa formativo EAMS los enfrentó por primera vez, al diseño de tareas, redacción de enunciados y formulación de problemas; y al uso de la modelación como estrategia.

FPOL.E: *"Para nosotros las dificultades con la modelación radicaron en que debíamos realizar varias cosas por primera vez. Era la primera vez que diseñábamos tareas, eso fue complejo por las conexiones que debíamos lograr, y además debíamos diseñarlas tomando en cuenta la modelación, es decir, pensar y partir de situaciones cotidianas para enunciar la tarea, y eso tampoco lo habíamos hecho".*

Con respecto a la *Valoración* sobre la modelación, los grupos centraron sus apreciaciones en aspectos positivos y negativos de esta estrategia, tanto para el docente como para el estudiante de Educación Media. Con relación a los *Aspectos positivos* para el *Docente*, los grupos percibieron en la modelación, una estrategia mediante la cual pudieron desarrollar su capacidad para identificar situaciones relacionadas con el contenido matemático y para construir los enunciados de las tareas. Adicionalmente, apreciaron que el diseño de tareas con modelación, los posicionó en el aprendizaje del estudiante. Por otra parte, vieron en esta estrategia, una forma de presentar una matemática más funcional al estudiante, pues les permite conectar el contenido con su contexto, mostrarle sus utilidades, para que lo doten de sentido y significado. De este modo, esta estrategia podría permitirles generar interés en el estudiante de Educación Media hacia el contenido matemático. Con relación a los *Aspectos positivos* para el *Estudiante*, los participantes percibieron en la modelación, una estrategia mediante la cual los estudiantes podían conectar el contenido con la realidad, visualizar la aplicabilidad y utilidad del contenido matemático, dotar de sentido y significado al contenido, construir conceptos, aprender con significado, interesarse por aprender y desarrollar capacidades de trabajo grupal y colaborativo.

SEC.S17: *"La modelación…tenía que ver con desarrollar nuestra capacidad de identificar y representar matemáticamente muchas situaciones cotidianas…Porque podemos saber resolver sistemas de ecuaciones, pero cuando debimos pensar en situaciones cotidianas relacionadas con ellos para plantearlas, nos dimos cuenta que eso era importante, que debíamos aprender a identificar situaciones que nos permitieran redactar enunciados, diseñar tareas. Además, esta estrategia nos permite como docentes, presentar una matemática menos abstracta y más funcional, más experiencial y de la vida".*

PN.S17: *"Podemos llevar la utilidad de los contenidos al aula a través de las tareas con modelación. Esta estrategia nos posiciona en la situación de aprendizaje del estudiante, nos hace pensar en sus intereses y también, nos hace reflexionar sobre cómo hacer para que el estudiante le dé sentido al contenido, a través de la utilidad, de la aplicación, del para qué sirve y con qué se relaciona un determinado concepto".*

FPOL.S17: *"La modelación permite al estudiante construir conceptos y promueve en ellos el trabajo grupal o colaborativo. Además, les permite conectar el contenido con la realidad. Eso puede generar su interés, motivarlos a aprender y dotar de sentido y significado a ese contenido".*

Por otra parte, las valoraciones de los grupos sobre la modelación, no se centraron solo en los aspectos positivos. También identificaron algunos elementos de la práctica educativa con modelación, a los cuales se debe prestar especial atención. Estos se consideraron como *Aspectos negativos*, e hicieron referencia tanto al docente como al estudiante de Educación Media. Con respecto al *Docente*, de manera general los grupos vieron como limitante para el trabajo en aula con modelación, la capacidad del profesor para identificar fenómenos y situaciones para plantear problemas relacionados con el contexto del estudiante, la disposición del docente para permitirle al estudiante mayor autonomía, y su reserva sobre la disposición de los estudiantes de Educación Media para realizar actividades donde deban indagar información. Con respecto al *Estudiante* manifestaron reservas con respecto a la modelación, pues en su opinión esta estrategia podía beneficiar más el pensamiento concreto que el abstracto. Adicionalmente, expresaron dudas sobre la funcionalidad del trabajo en grupo a nivel de Educación Media.

SEC.S17: *"Las desventajas pudieran estar relacionadas con la capacidad del profesor para identificar fenómenos y situaciones para plantear problemas".*

INEC.S17: *"El modelo tradicional tanto en la formación como en ámbito laboral, dificulta al docente poder identificar fenómenos y situaciones asociadas al contenido, y por ende, diseñar tareas con modelación".*

PN.S17: *"Para el docente formado con una visión y una metodología tradicional, como nosotros y muchos otros, puede resultar difícil permitirle al estudiante que sea más autónomo. Sobre todo por la tercera forma de uso de la modelización, permitirles plantear un tema o solicitarles que indaguen información para desarrollar una tarea. Porque puede darse el caso en que ellos no lo hagan o eso es lo que uno teme que pueda pasar…Pero lo si vemos es que con* *la modelación se utiliza más el pensamiento concreto que el abstracto y la Educación Media tiene entre sus finalidades la de desarrollar la capacidad de abstracción".*

CONCLUSIONES

En términos generales, los grupos de profesores en formación pasaron de ver en la modelación un término desconocido a percibirla como una estrategia de enseñanza que les permitía conectar el contexto del estudiante con el contenido matemático escolar, mostrándole su utilidad y aplicación, y de este modo generarle interés por aprender. Adicionalmente pudieron visualizar las potencialidades de esta estrategia para la planificación de proyectos de aprendizaje. En este sentido, asignaron utilidades laborales y formativas a su trabajo con modelación para el diseño de tareas. Para los grupos, las tareas con modelación permiten la construcción de aprendizajes, de conceptos y de significados. Por otra parte, a lo largo del desarrollo del programa, desarrollaron un concepto pragmático y funcional de la modelación como estrategia de enseñanza.

Las dificultades percibidas por los grupos, se relacionaron con su modelo de formación previo y con la ausencia de experiencias con modelación durante su Carrera. Por otra parte, de las valoraciones expresadas por los grupos sobre esta estrategia, se pudo concluir que los conceptos sobre matemática, enseñanza y aprendizaje, desarrollados durante su formación inicial, condicionaron su visión sobre la práctica educativa con modelación.

La percepción de la modelación como estrategia de enseñanza por parte de los profesores en formación surgió del proceso reflexivo llevado a cabo durante el diseño de las tareas en el marco de la planificación de una unidad didáctica, durante el desarrollo del programa formativo EAMS. Los conceptos y valoraciones finales, fueron el resultado de procesos de negociación de significados dentro de cada grupo. En este sentido, desarrollaron conocimiento sobre una estrategia de enseñanza, mediante la reflexión y análisis de la simulación de una práctica educativa como la planificación y diseños de tareas u oportunidades de aprendizaje.

AGRADECIMIENTO

Al Consejo de desarrollo científico, humanístico, tecnológico y artístico (CDCHTA) de la Universidad de Los Andes, por su apoyo y financiamiento de la investigación, a través del proyecto codificado como NUTA-H.349.12.04.B.

REFERENCIAS

Barbosa, J. (2001). Modelagem matemática e os profesores: a questão da formação. *Bolema*, 15, 5-23.

Blomhøj, M. (2004).Mathematical Modelling.A theory for practice.En Clarke, B.; Clarke, D.; Emanuelsson, G.; Johnansson, B.; Lambdin, D.; Lester, F.; Walby, A. &Walby, K. (Eds.) *International Perspectives on Learning and Teaching Mathematics* (pp. 145-159). Suecia: National Center for Mathematics Educations.

Doerr, H. (2007). What Knowledge do teachers need for teaching mathematics through applications and modelling?.En Blum, Galbrait, Henn y Niss (Eds). *Modelling and applications in mathematics education.The 14th ICMI Study.* (pp. 69-78). New York: Springer.

Mathews, S. y Reed, M. (2007). Modelling for pre-service teachers. En C. Haines, P. Galbraith, W. Blum y S. Khan (Eds.), *Mathematical modelling (ICTMA 12): Education, Engineering and Economics.* (pp. 458-464). Chichester: Horwood Publishing.

Mora, A. (2014). Modelización matemática, recursos tecnológicos y planificación de la enseñanza en la formación inicial de profesores de matemáticas. Tesis Doctoral. Universidad de Los Andes. Venezuela.

Mora, A. y Ortiz, J. (2015). Capacidades didácticas en el diseño de tareas con modelación matemática en la formación inicial de profesores. *Perspectiva Educacional*, 54(1), 110-130.

Oliveira, A. (2006). *As experiências dos futuros profesores commodelagem matemática*. Trabajo presentado en el III Seminário Internacional de pesquisa en educação matemática. São Paulo, Brasil.

Ortiz, J., Rico, L. y Castro, E. (2007). Mathematical Modelling: A teacher's training study. En Haines, Galbraith, Blum y Khan (Eds.), *Mathematical modelling (ICTMA 12): Education, Engineering and Economics.* (pp. 441-249). Chichester: Horwood Publishing.

Épsilon - *Revista de Educación Matemática* **2016, Vol. 33 (1), nº 92, 41-45**

Cambios de base en el sistema numérico. Una experiencia con el ábaco abierto

Alexander Maz-Machado
Noelia Jiménez-Fanjul
Carmen León-Mantero
Universidad de Córdoba

Resumen: *Presentamos una experiencia de trabajo con materiales sobre el tema de las bases numéricas en sistemas numéricos posicionales con estudiantes para maestro de Educación Primaria utilizando una variante del ábaco abierto.*
Palabras Clave: *Maestros en formación, ábaco abierto, cambio de base, materiales didácticos.*

Changing bases in the number system. An experience with the vertical abacus

Abstract: *We present a classroom experience with prospective primary school teachers using a manipulative based on the vertical abacus for working the concept of base in positional number systems.*
Keywords: *Teachers in training, vertical abacus, rebasing, teaching materials.*

INTRODUCCIÓN

En la Educación Primaria se enseñan contenidos matemáticos básicos y se desarrollan distintas competencias que tienen como finalidad lograr que los alumnos sean capaces de actuar ante diversas situaciones de la vida diaria, para dar solución a problemas que requieran la adecuada articulación de uno o varios conocimientos adquiridos.

Para las matemáticas en Primaria, el Real Decreto 126/2014 establece la competencia matemática y competencias básicas en ciencia y tecnología. Así mismo, se define como uno de los objetivos para este ciclo escolar.

Desarrollar las competencias matemáticas básicas e iniciarse en la resolución de problemas que requieran la realización de operaciones elementales de cálculo, conocimientos geométricos y estimaciones, así como ser capaces de aplicarlos a las situaciones de su vida cotidiana.

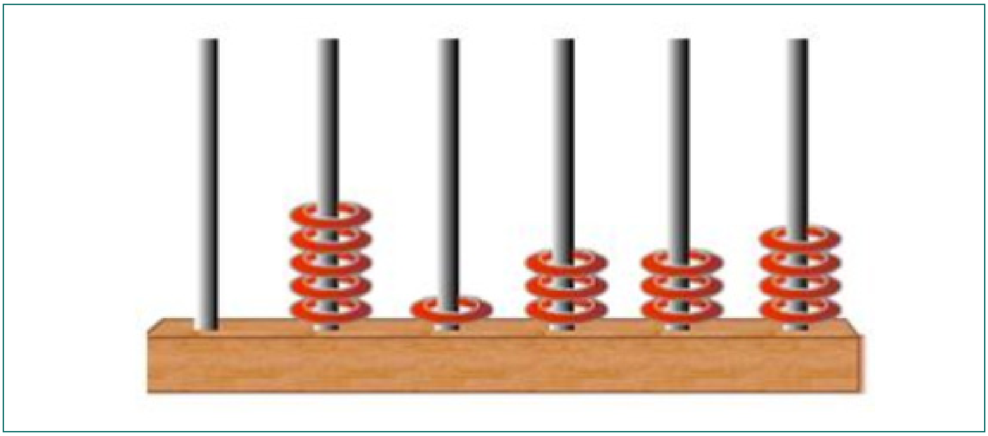


Figura 1 Ábaco abierto (Fuente: Estalmat-Canarias).

Lo anterior hace que sea necesario para los maestros de primaria durante su etapa de formación que reciban conocimientos tanto matemáticos como didácticos para poder brindar una enseñanza adecuada. Como afirman diversos estudios es necesario y beneficioso enfrentar a los maestros en formación a situaciones semejantes a las que se encontrarán en su futuro desempeño profesional y para ello las prácticas de aula con materiales didácticos manipulativos son adecuadas para tal fin (Llinares, 2009; Maz-Machado, León-Mantero, & Renaudo, 2015; Walsahaw, 2012).

Los materiales manipulativos crean ambientes favorables no solo para la comprensión de los conceptos matemáticos en Primaria sino también para inculcar en los alumnos actitudes positivas y de empatía hacia las matemáticas (Maz-Machado & Jiménez-Fanjul, 2012, 2014).

Uno de los conceptos básicos que debe comprender y dominar todo futuro maestro es de la "base" de todo sistema numérico posicional puesto que es condición necesaria para la enseñanza del sistema decimal. Por tanto su comprensión y la capacidad para realizar cambios de base entre sistemas posicionales es objetivo prioritario en la formación del futuro maestro. Por tal razón en este trabajo presentamos una experiencia en tal sentido utilizando una variación del ábaco abierto.

Originalmente el ábaco abierto está conformado por una base plana rectangular de la que salen seis barras, en las que se pueden insertar cuentas o arandelas según la base numérica y el número que se quiera representar.

LA EXPERIENCIA

Participaron 140 estudiantes de primer curso de matemáticas de la titulación de grado en Educación Primaria de la Universidad de Córdoba durante el curso 2014/2015. Durante las clases teóricas se enseñó el algoritmo para cambiar la base de un número de base 10 a otra cualquiera y viceversa. Se observó que, si bien lo realizaban correctamente, en su mayoría tenían muchas dificultades para explicar el por qué y lo que significaba la nueva expresión del mismo número en la nueva notación.

 Épsilon, 2016, Vol. 33 (1), nº 92, 41-45, ISSN: 2340-714X

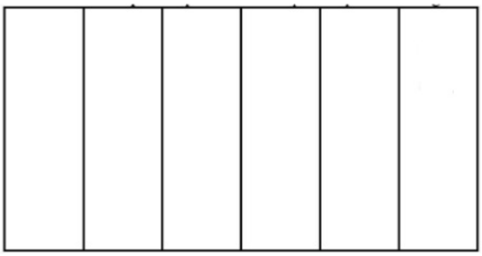


Figura 2.

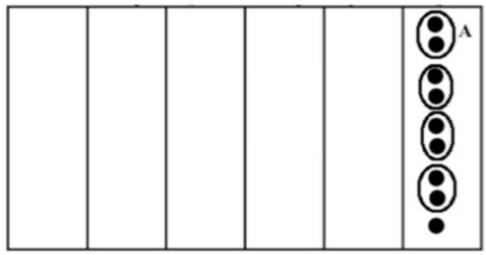


Figura 3.

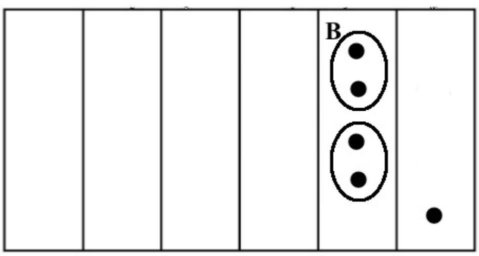


Figura 4.

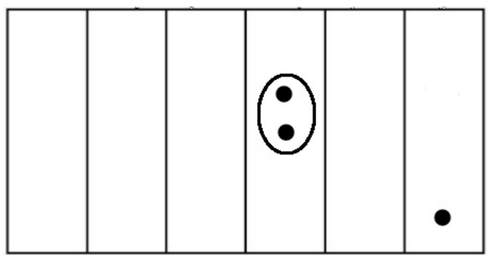


Figura 5.

Se decidió realizar una práctica utilizando una variación del ábaco abierto, esta consistía en dibujar sobre una cartulina o directamente sobre una mesa de trabajo seis columnas que representaban las varillas (fig. 2).

Se les pidió a los alumnos que trajesen un buen número de fichas, o monedas de 1 o 2 céntimos (algunos utilizaron lentejas porque su tamaño y forma facilitaba la actividad).

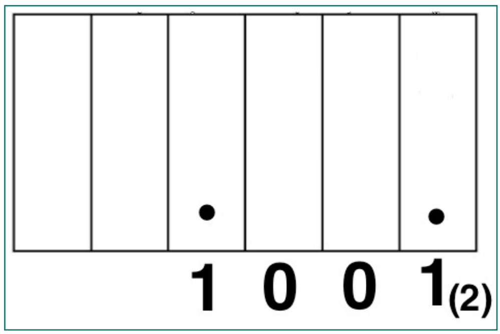


Figura 6.

Se les indicó que, por parejas de estudiantes, en la cartulina o sobre el ábaco dibujado sobre la mesa, tomara 9 fichas o lentejas, ya que iban a trabajar esa cantidad en sistemas de diferente base, primero en el sistema binario y luego en otros. Colocamos las 9 fichas en la primera columna de la derecha y formamos grupos de dos fichas. Como en el sistema binario las agrupaciones se producen de dos en dos, cada grupo que se forme pasará al siguiente orden de unidades como uno, por lo tanto no se permite que el número de la base se "escriba", teniendo solo dos dígitos posibles para cada orden de unidades, el 0 o 1. Una vez organizadas las parejas, pasaremos una ficha a la columna siguiente y retiramos la otra del ábaco. Esta ficha representa un paquete de fichas igual a la base agrupadas en la columna anterior. Volvemos a repetir el proceso en la nueva columna y así sucesivamente hasta que no quede en ninguna columna dos fichas (Fig. 3, 4, 5, y 6).

¿Cuántas parejas "A" se forman? Todo lo que sea par se pasa a la columna siguiente. A= {2 fichas y cada ficha representa 1 unidad}.

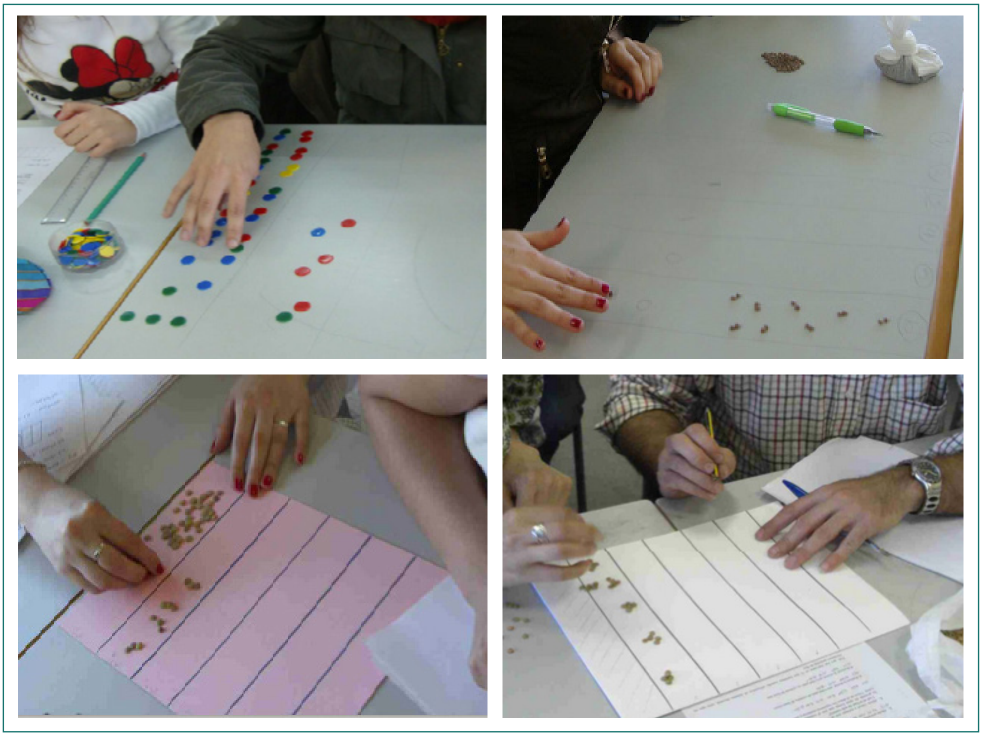


Figura 7. Alumnos durante la práctica.

Repitiendo el proceso, se han formado dos parejas fichas, tipo “B”, cada ficha de la penúltima columna representa a dos unidades. Por lo que se deben pasar estos “nuevos pares” a la columna siguiente y no queda ninguna ficha en esa columna.

B= {2 fichas y cada ficha representa 2 unidades}.

Se han formado una sola parejas de dos fichas, pero ahora cada ficha representa a 4 unidades. Por lo que se debe pasar este “nuevo par” a la columna siguiente y no queda ninguna ficha en esa columna.

Ahora no se pueden formar dos parejas, por lo que solo tengo una sola ficha que representa un paquete de 8 fichas. Procedemos a escribir el número de fichas en cada columna y esto nos da la equivalencia del número 9 en base decimal en base binaria.

$$9_{(10)} = 1001_{(2)}.$$

Una vez explicado el procedimiento y que los alumnos realizaban paso a paso con el profesor se les pidió que utilizando el mismo procedimiento cambiaran 5 números en notación decimal a otras binario. Luego debían pasar otros números a base 3, 5 y 6. Por ejemplo: Expresar $51_{(10)}$ en base 3 y 6. Se prohibió realizar los cambios de base mediante algoritmos, solamente mediante la manipulación de las fichas.

RESULTADOS

Al evaluar la práctica se obtuvo que el 92% de los alumnos realizó de manera correcta los cambios de base numérica. Los fallos detectados se debieron en gran medida a que los estudiantes transcribían los valores 0 y 1 resultantes de derecha a izquierda porque era la secuencia de trabajo que habían seguido en las columnas del ábaco.

Comprendieron que el resultado en cada columna era el valor de la base elevada a una potencia. La mayoría de alumnos optaban por escribir en la parte superior de las columnas, partiendo desde la primera de la derecha, la base elevada a 0, 1, 2, 4, etc.

Un aspecto que facilito la actividad fue que se visualizó que no era posible que el número de la base apareciese en la expresión numérica porque al obtenerse ese valor se obligaba a pasar una ficha a la siguiente columna.

A partir de ese momento eran capaces de realizar cualquier cambio de base y explicaban qué valor representaba cada dígito en la base numérica dada.

CONCLUSIONES

Esta práctica ha permitido a los estudiantes interactuar con materiales manipulativos. Tuvieron ocasión de conocer una estrategia didáctica diferente de la explicación formal.

La actividad facilitó a los estudiantes la compresión de lo que significa un sistema numérico posicional y adquirieron destrezas en el cambio de bases numéricas.

Este tipo de actividades permiten que los maestros en formación adquieran los conocimientos y habilidades para enseñar a sus futuros alumnos de Educación Primaria el sistema numérico decimal y a su vez fomenten en ellos el desarrollo de competencias matemáticas.

REFERENCIAS

España. Real Decreto 126/2014, de 28 de febrero, por el que se establece el currículo básico de la Educación Primaria. BOE, 1 de marzo de 2014, núm. 52, p. 19349-19420

Estalmat-Canarias. (2012). *El ábaco y los sistemas de numeración.* https://www.uam.es/proyectosinv/estalmat/ReunionCantabria2012/Canarias-Abaco.pdf

Llinares, S. (2009). Competencias del maestro en la docencia en matemáticas y el diseño de programas de formación. *Uno Revista de Didáctica de las matemáticas, 51*, 92-101.

Maz-Machado, A., & Jiménez-Fanjul, N. (2012). Ajedrez para trabajar patrones en matemáticas en educación primaria. *Epsilon. Revista de Educación Matemática, 81*(105-112).

Maz-Machado, A., & Jiménez-Fanjul, N. (2014). Construcción de polígonos en Educación Primaria a partir de círculos de papel. *Epsilon. Revista de Educación Matemática, 87*(99-102).

Maz-Machado, A., León-Mantero, C., & Renaudo, J. A. (2015). Student teachers valued the practices with materials in the subjects of mathematics. *Journal of Modern Education Review, 5*(1), 1-7.

Walsahaw, M. (2012). Teacher knowledge as fundamental to effective teaching practice. *Journal of Mathematics Teacher Education* 12, 181-185. doi: 10.1007/s10857-012-9217-0

Épsilon - *Revista de Educación Matemática* **2016, Vol. 33 (1), nº 92, 47-53**

Trenzado y combinatoria: diseño de una experiencia original para la formación docente

Veronica Albanese
Francisco Javier Perales
Universidad de Granada

Resumen: *Proponemos el diseño de una experiencia original para trabajar con estudiantes de secundaria, inspirada por una artesanía de trenzado. La experiencia fomenta el desarrollo del razonamiento matemático y, en particular, combinatorio. La descripción de la representación del trenzado que manejan los artesanos y la presentación de las tareas propuestas a los estudiantes permiten evidenciar los elementos que implican y promueven el razonamiento combinatorio. Finalmente se menciona la componente motivadora como valor añadido de la experiencia.*
Palabras clave: *Combinatoria, Educación matemática, Educación Secundaria, Etnomatemática*

Braids and Combinatory: designing an original experience for teacher education

Abstract: *We propose the design of an original experience for secondary education students, inspired by a braid craft. The experience fosters the development of mathematical thinking and in particular Combinatorial reasoning. The description of the representation of the braid handled by the artisans and the presentation of the tasks proposed to the students make evident the elements that involve and promote Combinatorial reasoning. Finally the motivational component is considered as an added value of the experience.*
Keywords: *Combinatory, Mathematics Education, High school, Ethnomathematics.*

INTRODUCCIÓN

Presentamos una experiencia original para estudiantes de secundaria inspirada en estudios etnomatemáticos realizados en el entorno argentino de la artesanía soguera (Albanese y Perales, 2014). La soguería es una práctica tradicional del gaucho, personaje típico de las llanuras de la pampa húmeda –principalmente de Argentina, pero presente también en Brasil, Uruguay y Paraguay–. Este suele ser un hábil jinete, de origen criollo (descendiente de indígenas y europeos), cuyas actividades se vinculan normalmente con el montar a caballo y cuidar el vacuno. El gaucho elabora por su cuenta las herramientas para cabalgar utilizando el material más abundante que tiene a disposición: el cuero crudo. Del más común entre los arneses que produce, la soga, deriva el nombre de la artesanía. Cabe mencionar que, por el parecido de los objetos fabricados, se vislumbra que la soguería tiene que proceder de la marroquinería, si bien en la cultura gauchesca se afirma un mayor interés para la calidad de las terminaciones, siendo un signo de distinción adornar el propio caballo con piezas de calidad.

Si bien los artesanos emplean diversas técnicas para trabajar el cuero, centramos este trabajo en la técnica de trenzado. Esta implica una generalización de la elaboración de la trenza simple de tres tientos para involucrar un número mayor de tientos.

En este documento nos proponemos describir el diseño de la experiencia para después analizar algunos de los aspectos implicados en el pensamiento matemático, en particular el razonamiento combinatorio y que, a nuestro juicio, es fomentado por la citada experiencia.

El diseño de la experiencia surge de la idea de reconstruir en el aula lo que la autora había vivenciado durante su investigación etnográfica en el entorno artesanal en el contexto de la realización de su tesis doctoral (Albanese, 2014; 2015b). En dicha investigación se puso de manifiesto que los artesanos han creado un lenguaje propio de símbolos (números, letras y signos) para representar el proceso de trenzar. Al entrar en contacto con los artesanos la investigadora se enfrentó a este lenguaje, al principio sin saber interpretarlo. Adquiriendo experiencia en la práctica de trenzar pudo después relacionar las acciones de la realización de trenzas con los códigos del lenguaje empleado por los artesanos.

RELEVANCIA

La Combinatoria es una rama de la Matemática que estudia los conjuntos finitos, o discretos, y las configuraciones que se realizan trasformando o componiendo elementos de conjuntos finitos (Batanero, Godino, Navarro-Pelayo, 1994).

Estudiar Combinatoria proporciona la posibilidad de desarrollar destrezas matemáticas como generalizar, optimizar, formular conjeturas e indagar la existencia de soluciones de un problema (Kapur, 1970).

Si bien desde la investigación educativa se promueve la introducción de la Combinatoria en la escuela, especialmente en Secundaria, no se suele dar al tema la importancia que desde la investigación se recomienda. De hecho, cuando en la ESO se trabaja este tópico, a menudo se limita a las fórmulas de las configuraciones combinatorias (variaciones, permutaciones, combinaciones) en relación al cálculo de la probabilidad (Batanero, Godino, Navarro-Pelayo, 1994).

Revisamos brevemente *las orientaciones curriculares* españolas sobre la Combinatoria.

En el *Currículo Base de la LOMCE* –BOE 3 de enero del 2015, RD 1105/2014– se incluyen explícitamente contenidos de Combinatoria en los diferentes niveles de ESO y Bachillerato. En el Bloque 5, “Estadística y probabilidad”, observamos que la mayoría de los contenidos hacen referencia a técnicas de recuento y al uso de diagramas de árbol al servicio del cálculo de la probabilidad.

Pero hay otros dos bloques en donde la Combinatoria se presenta de manera implícita. Algunos contenidos del Bloque 2 "Números y álgebra" se pueden relacionar indirectamente con la Combinatoria, pues se trata de un tema propicio al estudio de regularidades y propiedades, así como al uso del lenguaje algebraico. Si bien los criterios de evaluación de este contenido indican las expresiones simbólicas y el álgebra como medio matemático para tratar este contenido, no hay que olvidar que la Combinatoria también proporciona un amplio abanico de técnicas para investigar relaciones entre conjuntos de números, en particular con sus subconjuntos.

Además, el estudio de la Combinatoria contribuye al desarrollo de contenidos del Bloque 1 "Procesos, métodos y actitudes en matemáticas" que es trasversal y común a toda la etapa. Por ejemplo:

- "Estrategias y procedimientos puestos en práctica: uso del lenguaje apropiado (gráfico, numérico, algebraico, etc.), reformulación del problema, resolver subproblemas, recuento exhaustivo, empezar por casos particulares sencillos, buscar regularidades y leyes, etc...
- La recogida ordenada y la organización de datos.
- La elaboración y creación de representaciones gráficas de datos... "(MEC, 2015, p. 391).

DESCRIPCIÓN DE LA EXPERIENCIA

Comenzamos describiendo la representación que los artesanos emplean para describir las trenzas que realizan, para así poder identificar los patrones que rigen este lenguaje particular al cual recurren en su labor. Después indicamos los materiales que se necesitan para realizar esta experiencia. Finalmente detallamos el desarrollo de la misma, mencionando las tareas que la componen y lo que se espera que los estudiantes alcancen.

Lenguaje artesanal

En la siguiente Tabla 1 se muestra la representación según el lenguaje artesanal de todas las trenzas involucradas en la experiencia.

Tabla 1. Representación de las trenzas de la experiencia en lenguaje artesanal (Albanese, 2015a).

Trenzas de tientos impares	Lenguaje artesanal				
Trenza de 3	I +1	D +1	~	I -1	D -1
Trenzas de 5	I +2	D +2		I +1 -1	D +1 -1
Trenzas de 7	I +3 I +1 -2	D +3 D +1 -2		I +2 -1 I +1 -1 +1	D +2 -1 D +1 -1 +1

Los tientos que se trenzan se posicionan en un segmento imaginario, idealmente de manera equidistante entre ellos. La letra del primer renglón de cada representación indica el tiento externo –I por izquierdo, D por derecho– que trabaja en cada *pasada*, siendo una *pasada* el movimiento de un tiento, desde su posición inicial hasta su posición final, que se realiza hacia el punto medio del segmento imaginario donde se disponen los tientos (Albanese, 2015a). El segundo renglón de la representación indica por dónde tiene que pasar el tiento que se trabaja con respecto a los otros tientos que se encuentran por el camino hacia el centro del segmento; por ejemplo +2 -1 significa que hay que pasar primero *sobre* dos tientos, y después *bajo* uno, alcanzando así la posición central[1].

Entre los patrones que este lenguaje –y entonces el trenzado– respeta, encontramos:

1) Las pasadas son iguales por la derecha y por la izquierda (esto se cumple en caso de trenzas de número impar de tientos).

2) En cada pasada los tientos a los cuales se pasa *sobre* o *bajo* son en número igual al número total de tientos menos uno partido por dos.

3) No se puede encontrar una pasada +1+1 porque equivaldría a +2.

4) Las trenzas cuyas pasadas son, por ejemplo, +1-1 son iguales a las que tienen pasadas *opuestas* +1-1. Por ello las dos trenzas de 3 de la primera fila de la tabla son iguales.

Observamos que, respetando todos los patrones descritos, las trenzas de 7 presentadas en la Tabla 1 son todas las posibles trenzas de 7 que se realizan con esta técnica de trenzado y que se pueden representar por medio de ese lenguaje.

Materiales

Los materiales necesarios para la realización de las tareas propuestas consisten en unas fichas diseñadas para guiar el proceso y un manojo de tientos de unos 50 cm de largo (en la artesanía son de cuero crudo, pero en el aula aconsejamos utilizarlos de cuerda), de los cuales se emplean 3, 5, o 7, según la tarea.

Secuenciación y tareas

Describimos las tareas que proponemos para la experiencia:

Tarea 1: *Interpretación del lenguaje*. Se muestra la representación en lenguaje artesanal de la trenza de 3, trenza que en general es bien conocida, sobre todo por las adolescentes que suelen elaborar peinados trenzando tres mechones de pelo de la misma manera en que los artesanos (generalmente hombres) lo hacen con los tientos. Los estudiantes tienen que decodificar los símbolos y su significado para después realizar con los tientos las trenzas de 5. Se deja que realicen algunos intentos y finalmente se explica cómo interpretar el lenguaje, según lo descrito en el apartado anterior. Esta primera tarea

1. Alcanzar la posición central después de una pasada se verifica en todas las trenzas de tientos impares, las únicas que trabajamos en la experiencia. Con las trenzas de tientos pares las condiciones son diferentes.

es la que ocupa más tiempo (entre la media hora y la hora entera, dependiendo del tamaño del grupo) ya que los estudiantes tienen que acostumbrarse a manejar los tientos, entender cómo funciona el lenguaje en el caso de la trenza de 3 y después aplicar su intuición a la trenza de 5 para averiguar si su interpretación tiene sentido en el trenzado. Podría ser útil, después de un breve intervalo de tiempo, proponer que los estudiantes se emparejaran para confrontar los resultados antes de "revelar" la solución.

Tarea 2: *Reconocimiento de patrones*. Aquí se proponen las siguientes preguntas e indicaciones en forma de retos:

- ¿Hay alguna simetría?,
- Realiza una trenza cuya pasada derecha es +1-1 y derecha +2. Ahora describe qué ocurre,
- ¿Qué tienen en común todas las trenzas?,
- ¿Qué pasa en las dos trenzas cuyas pasadas de 5 son respectivamente +2 y -2?

Se espera que los estudiantes, a través del ensayo-error y la observación de las repeticiones, identifiquen y expresen los patrones que cumplen el lenguaje y el trenzado artesanal, patrones que hemos descrito anteriormente. Conviene realizar una puesta en común al final de esta tarea para que todos los estudiantes reflexionen sobre las respuestas de los compañeros. Para esta segunda tarea se calcula un tiempo menor con respecto a la anterior (entre quince y treinta minutos).

Tareas 3: *Inventar trenzas de 7*. Una vez que se ha trabajado con las trenzas de 3 y 5 e identificado los patrones, se pide a los estudiantes que inventen trenzas de 7, posiblemente todas y distintas. Finalmente tienen que explicar cómo llegan a la conclusión de que son todas y distintas, recurriendo a los patrones que se han descubierto durante la tarea precedente. A esta última tarea se le dedica un tiempo variable según el interés del docente en la precisión y exhaustividad de la respuesta (entre veinte y cuarenta minutos).

ANÁLISIS DEL CONTENIDO COMBINATORIO

Para llevar a cabo las tareas presentadas se ponen en juego diferentes estrategias combinatorias, sobre todo en el desarrollo de la tercera:

- la enumeración exhaustiva de las soluciones (¿identificaste todas las posible*s trenzas?*),
- el recuento de las mismas (¿cuántas son las trenzas de 7?),
- la identificación de la relación de equivalencia (¿hay trenzas repetidas?: se requiere la identificación de las representaciones que producen trenzas iguales).

Asimismo se emplea razonamiento matemático en:

- el reconocimiento de patrones (la simetría de las dos manos, los elementos comunes que se reflejan en el lenguaje),
- la generalización de los patrones a los casos que involucran un número mayor de elementos (aquí tientos) para después deducir las reglas generales (el cálculo del número de tientos en cada pasada).

Cabe destacar que el principal concepto combinatorio que se presenta es la partición o descomposición de un entero positivo en suma de enteros positivos[2], que proporciona un conjunto de combinaciones, de las cuales hay después que tener en cuenta las permutaciones (Fernández y Fernández, 2011).

Será decisión personal del docente que desarrolle la experiencia, institucionalizar el concepto o insistir más bien en los razonamientos y las estrategias de resolución. Esto último ha sido nuestro punto de partida para idear la experiencia, coherente con la perspectiva de nuestra investigación anterior que pretendía sacar a la luz los razonamientos y las estrategias de los artesanos.

CONCLUSIONES

Hemos comenzado destacando la importancia que la Combinatoria debería tener, según la investigación, en la educación secundaria, pasando por indicar la presencia de la misma en el currículo español en distintos bloques y no siempre de forma explícita.

Consideramos que la descripción del diseño de la experiencia y el siguiente análisis han destacado las evidencias que permiten afirmar que las tareas planteadas fomentan el desarrollo de ciertas estrategias combinatorias y del razonamiento matemático en general. En este documento solo procuramos ser exhaustivos y precisos en la descripción del lenguaje artesanal y de las tareas, dejando al docente que decida tomar inspiración de nuestro trabajo, resolver los detalles sobre la organización de las interacciones en el aula, si bien aconsejamos intercalar trabajo en pequeños grupos con trabajo individual y puestas en común entre todos.

Cabe mencionar además que la originalidad del trabajo manual y práctico con el trenzado dota a la experiencia de gran originalidad –así como destacamos en el pasado con propuestas basadas en otras artesanías de trenzado (Albanese, Oliveras y Perales, 2012)- y de una fuerte componente motivadora, siendo ambas cualidades un valor añadido de no escasa importancia en la difícil tarea de hacer atractiva la matemática a los ojos de los estudiantes.

REFERENCIAS

Albanese, V. (2015a). Etnomodelos de trenzado, etnomatemática de una artesanía argentina. *Bolema - Boletim de Educação Matemática, 29*(52), 493-507. DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v29n52a04

Albanese, V. (2015b). Etnomatemáticas en artesanías de trenzado y concepciones sobre las Matemáticas en la formación docente. *Enseñanza de las Ciencias, 33*(1), 277-278. http://dx.doi.org/10.5565/rev/ensciencias.1614

Albanese, V., (2014). *Etnomatemáticas en artesanías de trenzado y concepciones sobre las Matemáticas en la formación docente*. Tesis Doctoral (Doctorado en Educación). Granada: Universidad de Granada.

2. El número de particiones posibles se llama número de Bell y se relaciona con el número de Stirling, que a su vez cuenta el número de particiones de un conjunto en un determinado número de bloques no vacios.

Albanese, V., y Perales, F. J. (2014). Pensar Matemáticamente: Una Visión Etnomatemática de la Práctica Artesanal Soguera. *RELIME - Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa, 17*(3), 261-288. doi: 10.12802/relime.13.1731

Albanese, V., Oliveras, M. L. y Perales F. J. (2012). Modelización matemática del trenzado artesanal. *Revista Epsilon*, *29*(81), 53-62.

Batanero, C., Godino, J. D., y Navarro-Pelayo, V. (1994). *Razonamiento combinatorio*. Madrid: Editorial Sintesis.

Fernández, P., y Fernández, J. L. (2011). Las estructuras básicas de la Combinatoria. En: Fernández, P., y Fernández, J. L. *El discreto encanto de la Matemática* (pp. 121-189). Versión preliminar disponible en https://www.uam.es/personal_pdi/ciencias/gallardo/cap3-parte2-MD-2011-2012.pdf.

Kapur, J. N. (1970). Combinatorial analysis and school mathematics. *Educational Studies in Mathematics Education, 3*(1), 111-127.

MEC (2015). *Real Decreto* 1105/2014*, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato.* Madrid: Autor.

Épsilon - *Revista de Educación Matemática* *2016, Vol. 33 (1), nº 92, 55-72*

Las matemáticas en la pedagogía de Manuel Siurot

Irene González Huelva
Juan Núñez Valdés
Irene Ramos Ramírez
Universidad de Sevilla

RESUMEN: *En febrero de 2015 se cumplieron 75 años del fallecimiento del insigne pedagogo onubense, de La Palma del Condado, Manuel Siurot Rodríguez. Con motivo de esta efeméride, los autores, dos de ellos paisanas suyas, presentan esta contribución en su memoria, en la que glosan uno de los aspectos menos conocidos de su trabajo, el constante uso de las Matemáticas en su quehacer docente diario habitual.*
PALABRAS CLAVE: *Manuel Siurot; Pedagogía siurotiana; Las Matemáticas de Siurot.*

Mathematics in the pedagogy of Manuel Siurot

ABSTRACT: *February 2015 marked the 75th anniversary of the death of the famous pedagogue born in La Palma del Condado (Huelva), Manuel Siurot Rodriguez. To mark this anniversary, the authors, two of them are countrywomen of him, present this contribution in memoriam, which glosses one of the least known aspects of his work, the constant use of Mathematics in his usual daily teaching work.*
KEYWORDS: *Manuel Siurot; Pedagogy of Manuel Siurot; The Mathematics of Siurot.*

INTRODUCCIÓN

En este artículo, los autores deseamos conmemorar la fecha del 75 aniversario del fallecimiento del insigne pedagogo onubense, de La Palma del Condado, Manuel Siurot Rodríguez, mostrando una breve biografía suya, que nos sirva de envoltura para enfatizar, con mayor particularidad y extensión, uno de los aspectos quizás menos conocidos de su pedagogía diaria: el vasto y extenso contenido matemático que Manuel Siurot siempre utilizaba en las clases con sus alumnos.

En razón de la edad de estos alumnos, estas Matemáticas no podrían considerarse de nivel, ni tampoco innovadoras, pero lo que sí es cierto es que Manuel Siurot las utilizaba para resolver problemas que se les presentaban a sus alumnos.

Figura 1. Manuel Siurot Rodríguez (imagen tomada de (web3)).

Así, por ejemplo, como veremos más adelante con mayor detenimiento, Manuel Siurot usaba objetos y cosas cotidianos para los niños, como pudieran ser garbanzos, lentejas o botones para enseñarles a sus alumnos pequeños, generalmente hijos de familias pobres y desfavorecidas, las primeras ideas básicas de la Aritmética: ordenar, contar y sumar.

Por lo que respecta a la Geometría, puede decirse, sin temor a equivocarnos, que Manuel Siurot ya usaba en sus clases lo que en la actualidad puede llamarse un "Taller de Geometría", basado en la acción y en la construcción, y no en la memorización de definiciones y fórmulas. Para ello, Manuel Siurot explicaba la Geometría de forma intuitiva, descriptiva y activa, valiéndose para ello de los dibujos que hacían directamente los propios alumnos en las paredes de las aulas, y haciendo que éstos emplearan directamente el metro, el compás, la regla y el cartabón para realizar las actividades prácticas que él les indicaba. Así, él mismo escribía (1912, pp.228-229):

> *En la Geometría del espacio que elementalmente conocen, se hacen figuras de barro tierno. Otras veces me valgo de patatas gruesas. Los chicos construyen en otras ocasiones las figuras en cartón. Son preferibles las que se construyen sobre materia tierna para poder darles cortes, haciéndoles pasar planos, y explicar cortando por donde nos convenga, para ver primero con los ojos, y luego con la imaginación, el contenido de las fórmulas de las áreas y de los volúmenes.*

Todo lo anteriormente expuesto y lo que más adelante se indica en esta contribución muestra la enorme importancia que Manuel Siurot concedía a las Matemáticas como punto de partida y base de su obra pedagógica. Para él, *las Matemáticas no son difíciles de aprender, sino algo difícil de enseñar cuando se intenta hacer de una forma abstracta y de espaldas a la realidad vital de los alumnos*. Tratar de reflejar esta importancia es, precisamente, el objetivo principal de esta contribución.

La estructura de este artículo es la siguiente: tras esta Introducción, en la sección 2 se muestra una breve biografía de Manuel Siurot, desglosada en diferentes apartados. En la sección 3 se comentan las Matemáticas que él trató en su quehacer docente, sobre todo el uso de la Aritmética y de la Geometría en sus clases. La sección 4 muestra unas breves reflexiones personales de los autores, fruto del trabajo de investigación realizado.

Indicar finalmente que las fotos que ilustran este artículo se han sacado de (web3) y de páginas biográficas de los diferentes personajes, salvo aquéllas en las que se indica expresamente su procedencia.

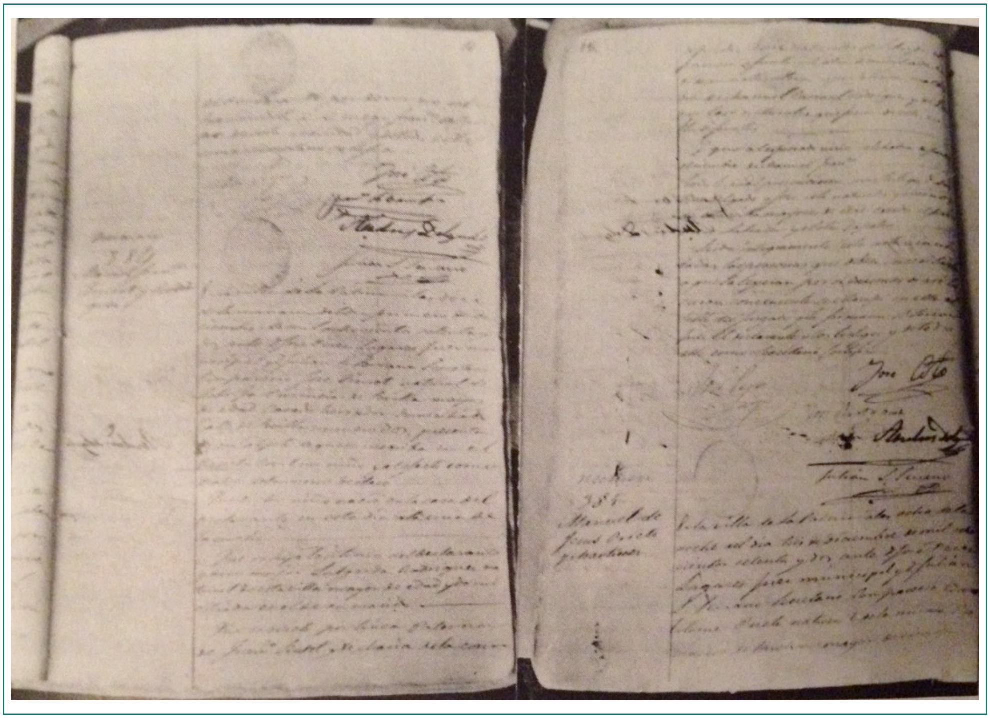


Figura 2. Partida de nacimiento de Manuel Francisco Siurot Rodríguez, de fecha 1 de diciembre de 1872 (tomada del Archivo del Registro Civil de La Palma del Condado).

BREVE BIOGRAFÍA DE MANUEL SIUROT

Se comentan, separados por apartados, algunos de los aspectos biográficos más notables y relevantes de la vida y obra de Manuel Siurot.

Los primeros años de Manuel Siurot

Tal como consta en su partida de bautismo, fechada el día siguiente al de su nacimiento, Manuel Francisco de Jesús Siurot Rodríguez, posteriormente conocido solo como Manuel Siurot, nació en La Palma del Condado, en la provincia de Huelva, el día 1 de diciembre de 1872. Sus padres fueron José Siurot Ruiz, nacido en Lebrija (Sevilla), en 1847, aunque de ascendencia catalana, y su madre, Lutgarda Rodríguez Caro, vecina de la localidad, quien fue un ejemplo siempre para él y le marcó su vida desde el punto de vista afectivo y religioso.

Miembro de una familia ejemplar, al tiempo que numerosa, Manuel Siurot nació y se crió junto a sus hermanos Francisco de Paula, José Francisco, Gumersindo y María Josefa, a los que sobrevivió, en su casa de la calle Sevilla, donde pasó los primeros años de su infancia.

Figura 3. Vista de la casa de Manuel Siurot en el siglo XIX (imagen tomada del Ayuntamiento de la Palma del Condado).

Aunque en aquellos años La Palma del Condado gozaba de un gran esplendor industrial y agrícola, la familia de Manuel Siurot no disponía de muchos medios, por lo que él nunca tuvo reparos en manifestar su origen humilde. Esa casi pobreza fue, precisamente, la que moldeó su carácter e hizo surgir en él su sensibilidad por los problemas de los más pobres.

Mucho fue el amor que Manuel Siurot sintió siempre por su tierra natal. Cada vez que pudo, escribió y habló de las cosas de su pueblo como pocos han sabido hacerlo. A La Palma del Condado le dedicó piropos muy hermosos, que quedaron expresados de forma ostensible y permanente en muchos de los textos que escribió (web1, Siurot (1993, p.8) y López (2012), por ejemplo):

> *La Palma es como una muchachita andaluza, blanca y oliente, que enseña con orgullo la peineta calada de su torre, la dentadura blanca de su caserío y el mantón oriental de sus viñedos de oro y de sus olivos perla.*
>
> *Mi pueblo es para mí una página sentimental escrita en el corazón con todos los perfumes de la infancia.*
>
> *La bella y luminosa torre de la Palma es como un madrigal que la tierra entusiasmada le tira al cielo…; parece una oración de gracia y de luz; la iglesia, un monumento de la piedad y el arte, y la población, una acuarela blanca, rodeada del oro de las viñas y del gris de los olivares.*
>
> *Quien dice La Palma, dice calles blancas, piso limpio, caras de hombres buenos, caras de mujeres honestas y bonitas…*

En 1881, cuando Manuel Siurot contaba 9 años de edad, su familia se trasladó a Gibraleón, otra localidad onubense, en la que vivieron más de cinco años, período en el que la infancia de Manuel Siurot llegó a su fin.

SUS ESTUDIOS

A primeros de 1887, la familia al completo de Manuel Siurot se trasladó a Huelva. Manuel Siurot también se sintió siempre orgulloso de haber vivido en esa capital (Siurot, 1993):

> *Aquí en Huelva nacieron mis ideas y tuve la lucha por el porvenir. Aquí nacieron mis amores que me dieron un hogar.*

Los primeros años de Manuel Siurot en Huelva fueron muy duros, al tener que compaginar sus estudios en el Instituto Profesional de Segunda Enseñanza de Huelva con el trabajo como herrador con su padre. No obstante y a base de un gran esfuerzo y tesón, logró terminar brillantísimamente sus estudios, obteniendo en 1892, a los 19 años de edad, el Grado de Bachiller con la máxima calificación, como puede verse en su expediente académico, que se muestra en la figura 4.

Curiosamente, ese año de 1892 se conmemoraba el IV Centenario del Descubrimiento de América, muy celebrado en los lugares colombinos de Huelva, en el que Manuel Siurot participó activamente formando parte de la Junta Directiva organizadora de los Festivales Escolares que se celebraron en conmemoración de tal evento. Pues bien, recién terminados los fastos de esa celebración y una vez finalizados sus estudios preuniversitarios, Manuel Siurot se matriculó en el curso de Preparatorio de Derecho de la Universidad de Sevilla. Como en todos los lugares donde Manuel Siurot había residido, Sevilla también pasó a ocupar un lugar preferente en su corazón. Como él mismo contaría (1993):

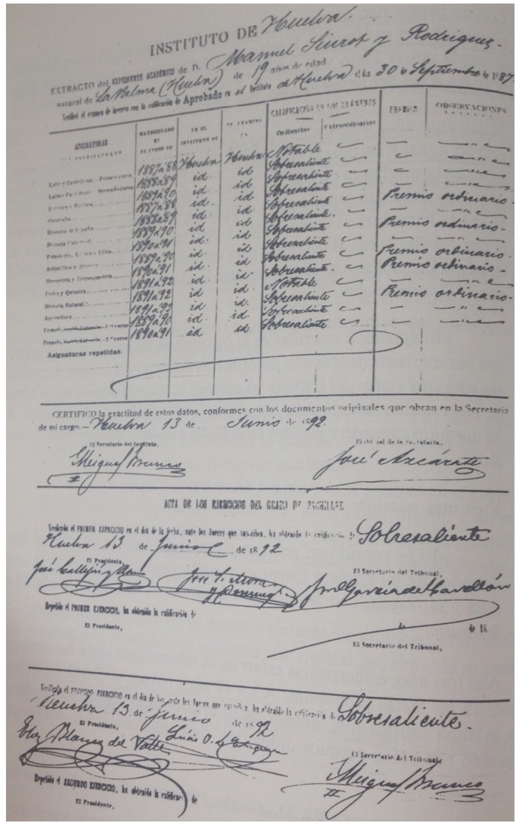
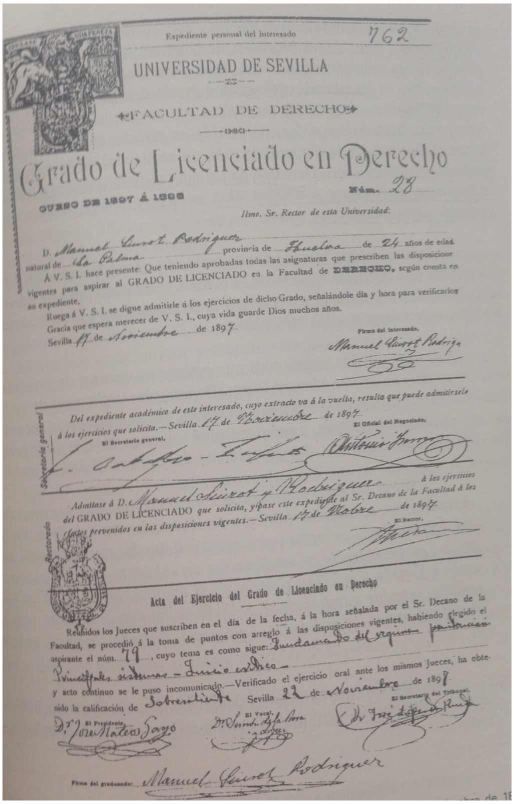

INSTITUTO DE Huelva.
EXTRACTO del expediente académico de D. Manuel Siurot y Rodriguez
natural de La Palma (Huelva) de 19 años de edad
CERTIFICO la exactitud de estos datos, conformes con los documentos originales que obran en la Secretaría de mi cargo. — Huelva 13 de Junio de 1892
ACTA DE LOS EJERCICIOS DEL GRADO DE BACHILLER
Sobresaliente
Huelva 13 de Junio de 1892
Sobresaliente.
Huelva 13 de Junio de 1892

Figura 4. Balance final de los estudios de bachillerato de Manuel Siurot (13 de junio 1892) (imagen tomada de (Llerena, 1993)).

> *El carro de mi vida de estudiante, repleto de lecciones, apuntes y rabonas, y tirado por los corceles de la libertad y de la locura, escondía entre su carga humana una dedicación responsable a los estudios.*

Sin embargo, y a pesar de ser Manuel Siurot un alumno muy prestigiado y querido por sus profesores y compañeros de la Universidad hispalense, ni él, a pesar de la vida prácticamente monástica que llevaba ni su familia pudieron soportar por más tiempo los gastos que exigía estudiar fuera de casa, por lo que en 1895 Manuel Siurot no pudo mantener su condición de alumno oficial de la Facultad de Derecho, teniendo que regresar a Huelva y realizar los dos últimos cursos de la carrera por enseñanza libre.

Allí en Huelva, y aunque de nuevo tuvo que alternar sus estudios con un trabajo que reforzara la muy escasa economía familiar, todavía pudo Manuel Siurot dedicar una parte del escaso tiempo libre que le quedaba para llevar adelante algo que empezaba a ser en él más que una simple afición: su inquietud por los temas sociales, traducida literalmente por una preocupación sincera hacia los más pobres (Llerena, 1993).


Expediente personal del interesado 762

UNIVERSIDAD DE SEVILLA

FACULTAD DE DERECHO

Grado de Licenciado en Derecho

CURSO DE 1897 Á 1898 Núm. 28

Ilmo. Sr. Rector de esta Universidad:

D. Manuel Siurot Rodriguez natural de La Palma provincia de Huelva de 24 años de edad

Á V. S. I. hace presente: Que teniendo aprobadas todas las asignaturas que prescriben las disposiciones vigentes para aspirar al GRADO DE LICENCIADO en la Facultad de DERECHO, según consta en su expediente,

Ruega á V. S. I. se digne admitirle á los ejercicios de dicho Grado, señalándole día y hora para verificarlos

Gracia que espera merecer de V. S. I., cuya vida guarde Dios muchos años.

Sevilla 17 de Noviembre de 1897

Firma del interesado, Manuel Siurot Rodriguez

Secretaría general

Del expediente académico de este interesado, cuyo extracto va á la vuelta, resulta que puede admitírsele á los ejercicios que solicita.—Sevilla 17 de Noviembre de 1897

El Secretario general, El Oficial del Negociado, Antonio

Rectorado

Admítase á D. Manuel Siurot y Rodriguez *á los ejercicios del* GRADO DE LICENCIADO *que solicita, y pase este expediente al Sr. Decano de la Facultad á los efectos prevenidos en las disposiciones vigentes.—Sevilla 17 de Nobre de 1897*

El Rector,

Acta del Ejercicio del Grado de Licenciado en Derecho

Reunidos los Jueces que suscriben en el día de la fecha, á la hora señalada por el Sr. Decano de la Facultad, se procedió á la toma de puntos con arreglo á las disposiciones vigentes, habiendo elegido el aspirante el núm. 79, cuyo tema es como sigue: Fundamento del régimen penitenciario. Principales sistemas – Juicio crítico – y acto continuo se le puso incomunicado.—Verificado el ejercicio oral ante los mismos Jueces, ha obtenido la calificación de Sobresaliente Sevilla 22 de Noviembre de 1897

El Presidente, Dr. José Mateos Gago — El Vocal, Dr. ... de la Rosa — El Secretario del Tribunal, Dr. José López Ruiz

Firma del graduando: Manuel Siurot Rodriguez

Figura 5. Documento de obtención del Grado de Licenciado en Derecho en la Universidad de Sevilla de Manuel Siurot Rodríguez (22 de noviembre de 1897) (imagen tomada de (Llerena, 1993)).

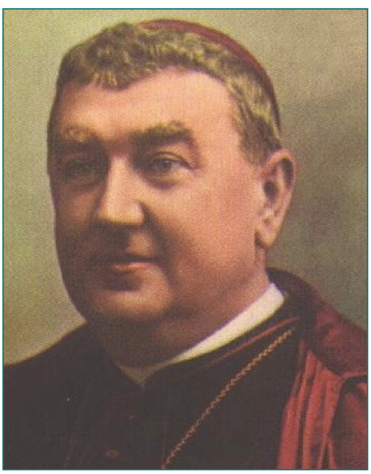


Figura 6. Arcipreste don Manuel González García (imagen tomada de wikipedia).

Manuel Siurot finalizó sus estudios de Derecho en el curso 1896-1897, obteniendo sobresaliente en el ejercicio del Grado de Licenciado, a pesar de, como se ha visto, las enormes dificultades de tipo económico que tuvo que padecer durante los mismos.

PRIMEROS TRABAJOS PROFESIONALES

Tras obtener su licenciatura, Manuel Siurot ejerció durante más de 10 años como abogado en Huelva, desempeñando los cargos de Juez Municipal, Magistrado Suplente, Primer teniente de Alcalde, y otros puestos similares. Sin embargo, abandonó su carrera jurídica y política al final de ese período, al descubrir su auténtica vocación, dedicarse a la gran obra social de la educación de los niños pobres, tras una visita que realizó a las Escuelas Ave-María creadas por el Padre Manjón en Granada y que acogían a esos niños pobres y abandonados.

Manuel Siurot fundó en Huelva, en 1907, en la Ermita de La Cinta y en los barrios de San Francisco y del Polvorín, junto con el arcipreste de esa ciudad, el Vicario, don Manuel González García, las Escuelas del Sagrado Corazón de Jesús, de inspiración católica y manjoniana.

A partir de 1916 y tras la marcha del arcipreste a Málaga, Manuel Siurot asumió la plena responsabilidad, continuando como maestro de las mismas y manteniéndolas en funcionamiento hasta su muerte en 1940. En esas Escuelas, Manuel Siurot puso en práctica sus ideas pedagógicas basadas en la psicología del niño, sus intereses y la vida cotidiana infantil, proporcionando a los niños más necesitados de Huelva toda clase de ayudas, tanto materiales como espirituales, a la vez que les daba educación, cariño, ilusión y comprensión.

En esas escuelas, Manuel Siurot procuró hacer agradable y atractiva la escuela a los niños, utilizando para ello como principios metodológicos el juego, la actividad y la intuición, movido siempre por el motor del amor al niño, fruto de un conocimiento directo y profundo de la psicología infantil.

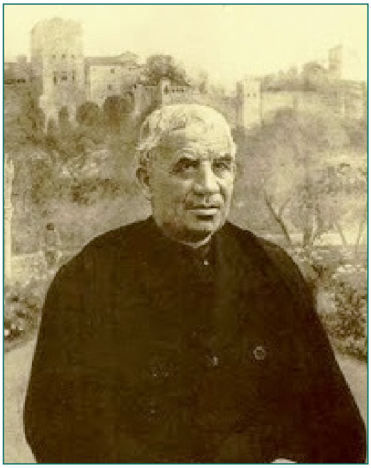


Figura 7. Padre Manjón (imagen tomada de wikipedia).

Además, y para hacer extensivos estos principios no solo a sus escuelas, Manuel Siurot fundó, en 1918, el internado gratuito de estudiantes del magisterio, cuya repercusión positiva traspasó nuestras fronteras. La eficacia de la metódica siurotiana fue constatada y reconocida a nivel nacional e internacional, como lo atestiguan los documentos, títulos y condecoraciones otorgados a una obra educativa de tal envergadura y trascendencia. Hoy día, el pensamiento pedagógico de Manuel Siurot y su buen hacer didáctico pueden ser considerados como un modelo a tener en cuenta a la hora de pensar seriamente en una autentica renovación pedagógica.

Hacemos a continuación un inciso para comentar que estas escuelas deben su nombre al sacerdote y pedagogo Andrés Manjón y Manjón (Sargentes de la Lora, 1846 - Granada, 1923). Se cuenta de él que un día, a finales de 1888, siendo ya sacerdote en Granada, cuando pasaba ante una de las cuevas en el barrio del Sacro-Monte, oyó a unos niños recitar el Ave-María, lo que le llevó a iniciar su obra pedagógica con esos niños, acompañando en un principio a la maestra que les enseñaba. Allí mismo fundó las Escuelas del Ave-María, su obra capital, a las que les dedicó todo su dinero, su empeño y su tiempo, comenzando de esa forma don Andrés Manjón una obra que revolucionaría los métodos pedagógicos del momento.

El Padre Manjón trasladó primero ese proyecto de escuela a su pueblo natal, extendiéndolo después a muchas poblaciones españolas, de forma que en 1918 ya había escuelas del Ave-María en 36 provincias españolas. A lo largo de su vida, se abrieron unas 400 escuelas por todo el mundo. Fundó, además, el "Seminario de Maestros" en 1905, para formar a los futuros responsables de las escuelas del Ave-María: "no hay escuela sin maestro". Manjón daba mucha importancia a la formación de los maestros, pues decía que el maestro podía ser formador o deformador de caracteres.

Finalizado este inciso y continuando con su biografía, Manuel Siurot, fundó el Seminario de Maestros en 1918 impartiendo en él hasta 1934 la enseñanza de magisterio a jóvenes sin recursos, dándoles una formación completa que proporcionaba la renovación de las enseñanzas escolares.

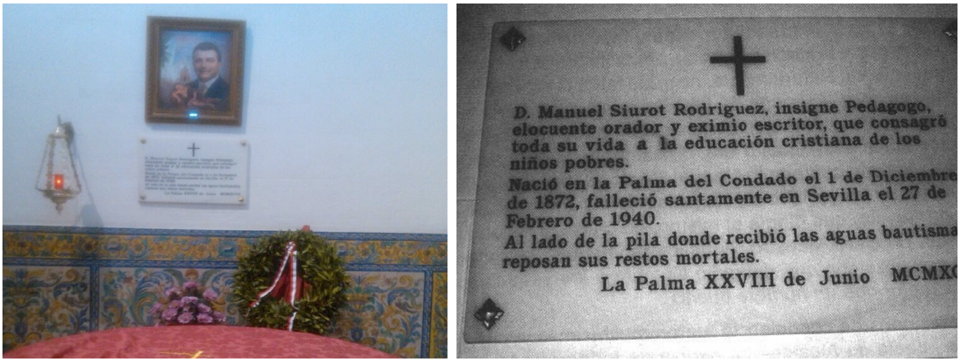


Figura 8. Placa en conmemoración a Manuel Siurot Rodríguez situada en la pila bautismal de La Palma del Condado, donde se encuentran sus restos (fotos de los autores).

ÚLTIMOS AÑOS

Tras una vida plenamente consagrada al magisterio, Manuel Siurot pasó los años previos a su muerte, los más difíciles desde 1937 con la reapertura de las Escuelas del Sagrado Corazón de Jesús de Huelva, tras el periodo de Guerra Civil, hasta que le sorprendió la muerte el 27 de febrero de 1940 en su domicilio sevillano, siendo sus restos primeramente trasladados a la iglesia del Corpus Christi de Sevilla y posteriormente a la capilla Bautismal de la Iglesia Parroquial de La Palma del Condado, siendo recordado desde entonces y por todos como *un hombre bueno, imprescindible, que dedicó su vida a mejorar el futuro de quienes más lo necesitaban*.

Según Nicolás Salas (2001), el mejor enunciado de toda una vida dedicada a los niños lo escribió el propio Manuel Siurot, cuando después de renunciar a cargos nacionales de los gobiernos monárquicos, y de la República Argentina; de recibir condecoraciones españolas y la Legión de Honor francesa y el Premio Mariano de Cavia en 1926 por un artículo “El triunfo de las carabelas” y otros trabajos periodísticos sobre la infancia; es decir, de apartarse de los éxitos sociales que le llegaban por sus méritos. Manuel Siurot (1993) justificaba todo eso con estas palabras:

> *Cuando el tren de mi existencia marchaba por la cuesta arriba de la elevación social, el genio de mi destino levantó los raíles de la vía y allá me fui por el terraplén abajo, para encontrar en el fondo del valle no el grito de la catástrofe, sino el fragor humano de la lucha por los niños pobres y abandonados, en cuyos ojos preguntones, bocas hambrientas, pies descalzos, en cuyas lágrimas y risas he acabado de aprender la trabazón sentimental del alma del pueblo.*

Varias son las biografías escritas sobre Manuel Siurot. En especial, dos de ellas pueden ser destacadas. Una, aparecida dos años después de su muerte, del abogado y político sevillano José Monge y Bernal y otra, bastante posterior, de su paisano Luis Llerena, en su Tesis Doctoral titulada “Las Escuelas de Siurot: un modelo de renovación pedagógica”

(Llerena, 1993), dirigida por la profesora Aurora Gutiérrez Gutiérrez, de más de 700 páginas, defendida en la Universidad Nacional de Educación a Distancia, en Madrid, en 1991, calificada con sobresaliente cum laude, en la que éste sintetiza la vida de Manuel Siurot en siete grandes apartados, a saber: ¿quién fue Manuel Siurot Rodríguez?, ¿qué hizo?, ¿cuáles fueron sus días de gloria?, Mucha hambre mitigada, Mucha justicia cumplida, Mucha ignorancia disipada, y, ¿por qué hizo todo eso Manuel Siurot?

Figura 9. Luis Llerena Baizán (imagen tomada de (web3)).

No obstante y pese a su indudable mérito, la figura de Manuel Siurot no está, para muchos, tan reconocida por la sociedad tal y como indudablemente debería estarlo y no ya por la sociedad en general, sino incluso por sus propios paisanos de La Palma o por los ciudadanos onubenses en general. En un artículo titulado "*Huelva está en deuda con Manuel Siurot*", escrito por Luis Llerena en el Diario de Huelva con motivo del 75 aniversario de su muerte (véase Llerena (3)), escribió:

> *Trato de escribir algo sobre Manuel Siurot con motivo del 75 aniversario de su muerte y… no me encuentro cómodo del todo. El día 27 fue un grupito de alumnos del Colegio Diocesano quien restó pena y dio gloria a la celebración que tuvo lugar ante el busto de Siurot, costeado íntegramente en 1966 –es justo decirlo– por Arturo Damas. Siento cierta decepción por parte de Huelva y de sus instituciones, al mismo tiempo que me pregunto sin encontrar una respuesta justificada: ¿qué más hay que hacer en Huelva para que Siurot no siga siendo un desconocido y, por lo tanto, muy poco apreciado entre los suyos? Más aún, ¿por qué no se habla hoy de "nuestro don Manuel" o solamente fue nuestro mientras amamantaba y apagaba con su vida prestigiosa y con sus obras solidarias la hambruna que presentaba esta noble ciudad choquera en todos los frentes vitales para su progreso y desarrollo? No cabe duda que Huelva no ha sabido corresponder al cariño, al sacrificio, a la abnegación y entrega de Manuel Siurot por su tierra, que era para él como "un pedazo de su alma".*

En ese artículo, Luis Llerena aporta los testimonios de muchas personas muy allegadas a Manuel Siurot en este mismo sentido: Antonia, su única hija, manifiesta en mayo de 1987 que: "*Huelva no ha hecho aún justicia a mi padre*" y para un un antiguo alumno de las Escuelas Diocesanas y del Internado, persona culta y de gran prestigio: "*Huelva no ha sabido reconocer debidamente toda la labor realizada por D. Manuel Siurot, porque sepa usted, querido amigo, que Huelva olvida*".

Y para Antonio López (2012),

> *La Palma, a pesar de nombrarle Hijo Predilecto, sigue estando en deuda con D. Manuel Siurot.*

Aunque también es cierto, no obstante, que la figura de Manuel Siurot ha sido notablemente ensalzada y reconocida. Según Llerena (1993):

Figura 10. Cada Maestrito… la obra más conocida y citada de Manuel Siurot (foto de los autores).

Con la muerte de Siurot, España ha perdido un gran corazón, un hombre de elevadísimo espíritu, cuya vida puede calificarse de verdadero paradigma.

Y para terminar esta sección, indicar también al respecto que a Manuel Siurot se le han dedicado calles con su nombre en La Palma del Condado, Sevilla, Huelva, Isla Cristina y varios otros municipios de la zona. Asimismo, también numerosos colegios de las provincias de Huelva y Sevilla llevan su nombre.

LA OBRA PEDAGÓGICA Y RELIGIOSA DE MANUEL SIUROT

Con referencia a su obra pedagógica y religiosa, Manuel Siurot destacó en muchas facetas: fue poeta, escritor, periodista, pedagogo, orador… Por ello, su obra literaria es extensa y variada, como su propia personalidad.

Entre sus libros de contenido pedagógicos destacan “Cada Maestrito…”, “Cosas de niños”, “Luz de las cumbres y resplandores de la Cruz”, que es una obra de meditación espiritual, que resume su intensa religiosidad, y “Filosofía en gotas”, en el que muestra sus inquietudes espirituales.

También escribió otros libros de temas diversos: “La romería del Rocío”, escrito en 1918 como prólogo a la coronación canónica de la Virgen del Rocío, que es la primera obra literaria que se escribió sobre la Romería del Rocío, “La emoción de España”, en el que narra el viaje que cuatro alumnos y un profesor realizan por España, dando a conocer las principales características de todo tipo de cada ciudad, “Sal y Sol”, una obra simpática y humorística, que recoge una serie de episodios cortos, verídicos, centrados en los marineros y en los chiquillos de Huelva, “Mi relicario de Italia”, libro de sus recuerdos del viaje que realizó a Italia en 1904 con motivo del quincuagésimo aniversario de la proclamación del dogma de la Inmaculada Concepción, “La obra maestra de España”, en 1930, en el que trata la obra cultural de España en América. “España, Las Castillas”, en el que habla de la grandeza de España y Castilla, describiendo el ambiente de Burgos y el Cid, Ávila y Santa Teresa, Segovia, Madrid, Toledo, etc. y “La nueva emoción de España” escrito en 1937, adaptación a ese año (en plena guerra civil) de su obra anterior (La emoción de España).

Épsilon, 2016, Vol. 33 (1), nº 92, 55-72, ISSN: 2340-714X

Además de estos libros, Manuel Siurot fue un extraordinario periodista, escribiendo numerosos artículos publicados en el ABC, de Madrid, en diarios de Sevilla, como Blanco y Negro, El Correo de Andalucía, El Debate, La Unión y también en el Diario de Huelva. Asimismo, publicó también en las revistas “El Granito de Arena” y “Cada Maestrito”, esta última fundada por él en el año 1918.

También es de resaltar en Manuel Siurot su impresionante obra oral, plasmada en importantes discursos y conferencias por muchas ciudades de España y del extranjero, en las que puso de manifiesto sus grandes y elocuentes dotes oratorias. En ellos explicaba sus métodos pedagógicos, o defendía la enseñanza de la Religión en las Escuelas, ante la corriente que trataba de implantar el laicismo escolar. En una ocasión habló sobre la obra mística de Santa Teresa de Jesús, en una conferencia titulada “Florales y Teresianas”, pronunciada en la Universidad de Salamanca.

Una vez fue el Mantenedor de los Juegos Florales de Sevilla; en otra ocasión pronunció el discurso titulado “Madre Cristiana” con el que se inauguró el Congreso de Educación Católica, en el Teatro Real de Madrid, con asistencia del rey Alfonso XIII, del Gobierno de la nación y de destacadas personalidades de la vida educativa española.

Comprometido al máximo con los aspectos sociales, Manuel Siurot defendió en una ocasión en la Asamblea Nacional el trabajo de los maestros, cuyo sueldo por aquel entonces era realmente paupérrimo y en otra el aumento de los presupuestos de Educación en España.

En 1938 fue nombrado miembro de la Real Academia Sevillana de Buenas Letras, y el tema de su discurso de ingreso fue “Sevilla la lírica”.

Sin embargo, es de destacar que Manuel Siurot, que se declaraba a sí mismo como un entusiasta partidario de la Pedagogía y de la Didáctica espontánea, presumía de no haber leído nunca un libro de Pedagogía, como queda presente en su libro “Cada maestrito...”, cuyo subtítulo es “Observaciones pedagógicas de uno que no ha visto en su vida un libro de Pedagogía”.

Los motivos religiosos de algunas de sus obras se pueden explicar por el hecho de que, en palabras de su principal biógrafo, el también palmerino Luis Llerena, la herencia espiritual de Manuel Siurot tiene como base la bondad de corazón, que él convirtió en meta de su vida y en la quintaesencia de sus enseñanzas y de su obra. Él siguió siempre los postulados educativos de los sacerdotes Spínola Maestre, Fernández Santana, González García Vicent y Manjón; de los maestros Maraver, Daza, Morón, Mora Batanero, Oliveira, Cádiz, Gálvez y Merello; de Menéndez Pelayo y Costa y asimismo explicó y practicó los postulados docentes de grandes figuras del catolicismo, como San Agustín, San Isidoro, San Ignacio, San Juan Bosco, San José de Calasanz, Luis Vives y Andrés Manjón.

Por todo ello, Manuel Siurot, “discípulo de Jesús”, como le definió de manera tan escueta como acertada su amigo Juan Ramón Jiménez (Premio Nobel de Literatura en 1956, por el conjunto de su obra), fue reconocido a todos los niveles como escritor, orador y pedagogo, pero sobre todo, fue admirado como *hombre bueno y cristiano comprometido.*

Y finamente, en palabras de Nicolás Salas, periodista y escritor, nacido en Valencia en 1933, quien desarrolló toda su vida profesional en Sevilla, ciudad a la que llegó en 1934 con sus padres (Salas, 2001),

> *La obra de Manuel Siurot, pese a no contar con los medios de comunicación modernos, saltó a las fronteras onubenses y sevillanas y transcendió a Madrid y el resto de España, y cruzó los Pirineos y el océano Atlántico. El periódico inglés The Times escribió "*si la fama de este sistema pedagógico promovido por Manuel Siurot no ha llegado aún a Inglaterra, sólo se debe a que su modestia no busca la publicidad*". En la revista norteamericana de Nueva York School and Society se publicó un informe sobre las Escuelas del Sagrado Corazón de Huelva, sonde se afirmaba:* "Si Huelva y don Manuel Siurot, en vez de pertenecer a España pertenecieran a este país de la publicidad, de seguro que la fama tanto de Huelva como de don Manuel Siurot se hubieran extendido de una a otra costa primero, y después a los países extranjeros*". Y en el periódico Mercurio chileno se escribió: "Hay en Huelva un hombre de alma grande, apóstol de una fe social, que se llama Manuel Siurot".*

LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMATICAS EN LA PEDAGOGÍA DE MANUEL SIUROT

Desafortunadamente, y como ya habitual desde hace muchísimo tiempo, las Matemáticas siguen siendo la disciplina en la que la tasa de fracaso de los escolares es mayor. Esta afirmación, compartida por profesores, padres y alumnos suele a menudo justificarse con la alegación de "carencia de base", lo cual lleva implícito el reconocimiento de que todo el problema arranca de una formación inadecuada en el primer nivel de los estudio de los escolares.

Actualmente, nadie discute que la construcción del conocimiento matemático es inseparable de la actividad concreta del niño sobre los objetos. También es un hecho ampliamente conocido que el grado de abstracción que impone en ocasiones el pensamiento matemático está fuera del alcance de la mayoría de los alumnos del nivel primario. Se postula, por tanto, un diseño de las actividades de Matemáticas de manera cíclica o espiral; partir de situaciones problemáticas reales y próximas al niño; combinar cuanto sea posible los contenidos aritméticos con los de geometría, y utilizar el carácter lúdico que ofrecen los juegos, los problemas creativos o los de desarrollo lógico como un factor motivador y atrayente en la enseñanza de las Matemáticas.

Pues bien, todas estas reflexiones, extraídas del libro de (Llerena, 1998), fueron consideradas por Manuel Siurot en la metodología que empleó en sus escuelas para la enseñanza de la Aritmética y de la Geometría, con las dificultades añadidas de la carencia de recursos existente en la situación contextual en que fue llevada a cabo. Para Manuel Siurot.

> *Es preciso ser culto. No exigimos una cultura extensa de sabio, sino cultura moral, religiosa y humana; enseñanza sana de derechos y deberes, adoración del amor fraternal que todos los hombres nos debemos, según la ley de Dios, y respeto sentido y afectuoso del derecho ajeno.*

LA ENSEÑANZA DE LA ARITMÉTICA

La didáctica empleada por Manuel Siurot en sus clases partía siempre del conocimiento del niño. Él mismo afirmaba (Llerena, 1993):

> *El entendimientos de los niños es demasiado joven y no abstrae ni generaliza bien (...), por eso hay que hablarles con la realidad a la vista, sin imaginaciones ni supuestos.*

Por ello, un principio pedagógico indiscutible en sus Escuelas fue la racionalidad de la enseñanza, es decir, empezar con lo que el niño conoce y comprende, y razonar desde lo que conoce y comprende. Se imponía, pues, al maestro descubrir todo los que los niños saben en lugar de presumir lo que conocen, sin meterse en más averiguaciones.

Manuel Siurot comenzaba la enseñanza de la Aritmética con el objeto, siguiendo después por la palabra que agrupa los objetos en un conjunto y, finalmente, el número simbólico, que es más general que el nombre del objeto.

Así, mediante puñados de trigo, garbanzos, bolas, botones o chinitas, Manuel Siurot materializaba la idea de número con los objetos que los niños manipulaban, hasta llegar a "*la penetración inteligente del contenido de la cantidad*" (Llerena, 1993). De esta forma, los niños se ejercitaban en el dominio práctico de las relaciones lógicas que se encuentran en la base de las estructuras matemáticas, principalmente las relaciones de correspondencia, ordenación, clasificación e inclusión.

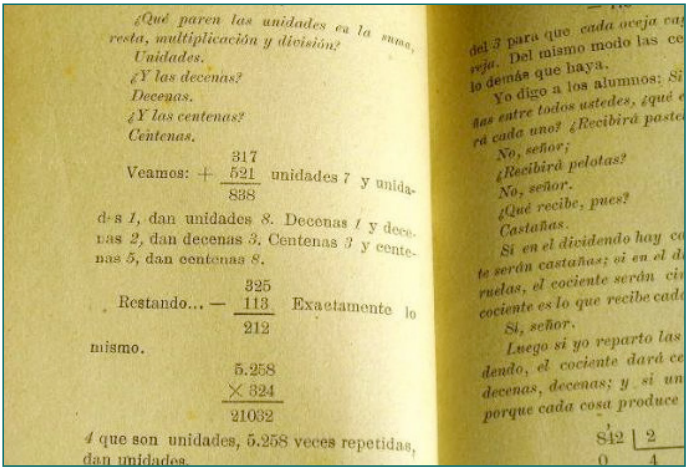
Las siguientes palabras del propio Manuel Siurot completan las que ya fueron expuestas como apoyo a la utilización del método intuitivo en las escuelas del Sagrado Corazón de Huelva (Llerena, 1993, pp. 198 y 200):

> *Coger a una clase de niños pequeños y empezar a contar números: 1, 2,3…99 y 100, con la musiquilla de costumbre, y luego, 100, 101,102…199 y 200, y así hasta 1000; y luego otra vez y otra y otra; hasta un sin fin de veces, es conseguir que el oído funcione y la cabeza se duerma o se atrofie (...). Yo he visto cientos y cientos de niños que multiplican y dividen y no tienen concepto práctico de la relación entre el número y la cantidad.*

Obsérvese que este enfoque intuitivo de la enseñanza de la Aritmética, y también de la Geometría, como más adelante se verá, equipara la pedagogía de Manuel Siurot con las tendencias más actuales en este ámbito didáctico. A diferencia de la didáctica tradicional del momento, que reducía al alumno al limitado papel de mirar y escuchar en lugar de actuar por sí mismo. Manuel Siurot empleó una didáctica verdaderamente intuitiva, a la vez que activa y lúdica. Así el cálculo operatorio, las fracciones, los decimales, el sistema métrico y todos los contenidos de la Aritmética, se les mostraban a los niños por las sendas apropiadas a sus características y siempre de una forma entretenida: *"Burla burlando–, chascarrilleo un poco, porque me conviene que las ideas fundamentales vayan mojadas de alegría*", según palabras del propio Manuel Siurot.

En sus Escuelas, el cálculo operatorio se enseñaba a partir de situaciones problemáticas concretas a distintos niveles: manipulativo, gráfico o simbólico, según la edad y capacidad de los alumnos. En el nivel manipulativo, la acción-solución era traducida por el alumno mediante el lenguaje oral. La explicación, a la par que lo reforzaba, preparaba para posteriores etapas, gráficas y simbólicas.

En ningún caso, se trabajaba una operación (suma, resta, multiplicación o división) o una combinación de operaciones desgajadas del contexto problemático que habían de resolver. Manuel Siurot consideraba poco pedagógico a la vez que innecesario, la realización de "cuentas kilométricas". Por el contrario, estimulaba a los alumnos para que



¿Qué paren las unidades en la suma, resta, multiplicación y división?
Unidades.
¿Y las decenas?
Decenas.
¿Y las centenas?
Centenas.

Veamos: + 317 521 / 838 unidades *7* y unidades *1*, dan unidades *8*. Decenas *1* y decenas *2*, dan decenas *3*. Centenas *3* y centenas *5*, dan centenas *8*.

Restando... — 325 113 / 212 Exactamente lo mismo.

5.258
× 324
21032

4 que son unidades, 5.258 veces repetidas, dan unidades.

del 3 para que *cada oveja ca*
veja. Del mismo modo las ce
lo demás que haya.
Yo digo a los alumnos: *Si*
ñas entre todos ustedes, ¿qué
rá cada uno? ¿Recibirá paste
No, señor;
¿Recibirá pelotas?
No, señor.
¿Qué recibe, pues?
Castañas.
Si en el dividendo hay ca
te serán castañas; si en el d
ruelas, el cociente serán ci
cociente es lo que recibe cad
Sí, señor.
Luego si yo reparto las
dendo, el cociente dará ce
decenas, decenas; y si un
porque cada cosa produce

842 | 2
0 | 4

Figura 11. Páginas de aritmética en Cada Maestrito (imagen tomada de (web3)).

plantearan problemas nuevos o variaran por sí mismos las condiciones de los que se les daban para resolver. De esta manera, según un testimonio de D. Francisco López García, antiguo alumno de Manuel Siurot, facilitado a Luis Llerena el 10 de abril de 1987, en su domicilio de Huelva, quien antes de ejercer como maestro en las Escuelas del Sagrado Corazón de Huelva, desempeñó la docencia en las escuelas de San Laureano, de Sevilla, dirigidas pedagógicamente por Manuel Siurot en sus años de estancia en la capital hispalense:

> *... cuando el discípulo abordaba un nuevo problema, procuraba plantearlo en una forma que ya conocía, esto es, buscaba una relación, y cuando la había encontrado, procedía a resolverlo por un procedimiento ya familiar para él.*

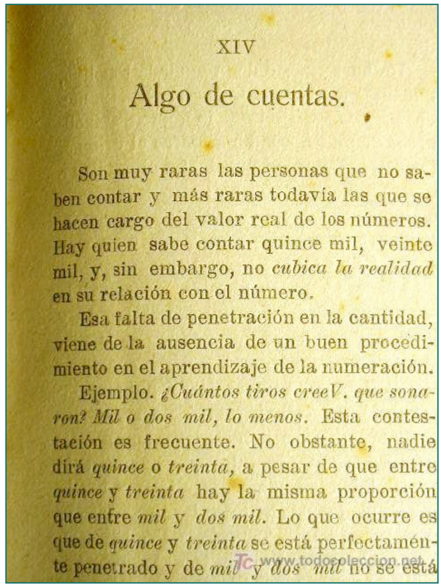
El maestro, en esta situación didáctica, era el guía en la construcción del conocimiento matemático del propio alumno, ayudándole a establecer relaciones sustantivas entre lo que ya conocía y lo que aprendía. Así, en palabras del propio Manuel Siurot en (Llerena, 1993, p. 208):

> *Las operaciones son como el instrumento, el azadón, por ejemplo, los negocios de la vida son como la tierra. Tenemos azadón y tenemos tierra. ¿Qué hace falta hacer ahora? Cavar. Esto es, hincar el instrumento, o sea, las cuatro reglas, en la tierra de los negocios (...). Por eso nunca me cansaré de decir: casos prácticos, casos prácticos, y casos prácticos, para que como dije antes las ideas se casen con los hechos.*

Como una consecuencia lógica de esta didáctica, las Escuelas de Manuel Siurot afrontaban, desde el comienzo del tratamiento de la numeración, las cuatro operaciones básicas de una manera global y simultanea, utilizando abundantemente la composición-descomposición de números, las seriaciones crecientes y decrecientes, con distintos intervalos, hasta llegar a lo que él llamaba *los centros de calculo,* consistentes en obtener un numero dado de todas las maneras posibles. En palabras de D. Francisco López:

Un ejemplo de los centros de cálculo podría ser el siguiente: tomando como centro de cálculo el número 16, los alumnos jugaban a buscar todas las formas posibles de llegar a ese centro. Así: 8+8; 2x8; 18-2; 32:2; 2+(2x7); etc.

Manuel Siurot usaba esta didáctica en sus clases durante la etapa preescolar porque consideraba al alumno capaz de realizar acciones tales como “unir”, “separar”, “repartir” y “repetir grupos iguales”, aunque siempre respetando los prerrequisitos mínimos de cada operación y la secuenciación correcta en su tratamiento, de menor a mayor dificultad lógica. Usaba también técnicas lúdicas, especialmente el *juego de la porra*, para los aspectos más áridos de las Aritmética, como la numeración y la memorización de las tablas.



XIV

Algo de cuentas.

Son muy raras las personas que no saben contar y más raras todavía las que se hacen cargo del valor real de los números. Hay quien sabe contar quince mil, veinte mil, y, sin embargo, no *cubica la realidad* en su relación con el número.

Esa falta de penetración en la cantidad, viene de la ausencia de un buen procedimiento en el aprendizaje de la numeración.

Ejemplo. *¿Cuántos tiros cree V. que sonaron? Mil o dos mil, lo menos.* Esta contestación es frecuente. No obstante, nadie dirá *quince* o *treinta*, a pesar de que entre *quince* y *treinta* hay la misma proporción que entre *mil* y *dos mil*. Lo que ocurre es que de *quince* y *treinta* se está perfectamente penetrado y de *mil* y *dos mil* no se está

Figura 12. Algo de cuentas, en las páginas de *Cada Maestrito* (imagen tomada de (web3)).

Todo este dinamismo que implicaban las ideas metodológicas anteriores ideas se extendía, asimismo, a la enseñanza de los decimales, las fracciones, el sistema métrico y demás contenidos aritméticos. Cerraban este círculo dinámico los materiales didácticos utilizados para hacer más intuitiva y activa la enseñanza, los cuales eran realizados principalmente por los alumnos de los grados superiores (nótese el enorme paralelismo existente entre esta metodología de Manuel Siurot y la relativamente moderna *Teoría de la Gamificación* en la enseñanza actual).

LA ENSEÑANZA DE LA GEOMETRÍA

Manuel Siurot enseñaba en sus escuelas la Geometría de una manera intuitiva, descriptiva y activa, valiéndose para ello de los dibujos que hacían directamente los propios alumnos en las paredes de las aulas, y haciendo que éstos emplearan directamente el metro, el compás, la regla y el cartabón para realizar las actividades prácticas que él les indicaba. Partía del reconocimiento de las formas planas y espaciales del entorno, proponiendo a los alumnos distintas clasificaciones según sus características. Posteriormente, se representaban las formas planas y se construían las espaciales, que eran descritas con todos sus elementos. Finalmente, los aspectos topológicos (de forma) y los perímetros se trabajaban paralelamente a las unidades de medida de longitud, y las áreas, a las medidas de superficie.

Esta pedagogía daba lugar en las Escuelas de Manuel Siurot a lo que en la actualidad puede llamarse un “Taller de Geometría”, basado en la acción y en la construcción, y no en la memorización de definiciones y fórmulas. Las palabras del propio Manuel Siurot (1912, pp.221 y 228) reflejan, por sí mismas, el realismo y la practicidad de este enfoque:

> *Yo tengo que pensar siempre que mis alumnos van a parar, la mayor parte, a los talleres de herrería, carpintería y albañilería, y me propongo, como ideal, que los muchachos sepan cubicar una caldera, medir los metros cuadrados de madera que pueden gastarse en las puertas de una casa, determinar los metros cúbicos de aire que hay en una habitación y el área del polígono regular o irregular sobre el que se construye el edificio [...]. Cuido también de que practiquen, todo lo que sea posible, resolviendo problemas de todos los órdenes: medir el área de esta clase y de la otra, medir el polígono de la granja escolar, medir el área del patio y de la azotea (que son polígonos irregulares), medir el área de la cara de una moneda de diez céntimos, averiguar la longitud de la circunferencia de la Plaza de Toros, etc.,etc.*

Para los conceptos de geometría plana, Manuel Siurot utilizaba el juego y las imágenes. Después de formar grupos de tres, cuatro o cinco niños, según los contenidos a explicar, "jugaba a los triángulos, a los cuadriláteros o a la circunferencia". Bastaban unos simples movimientos rítmicos de los alumnos y las distintas figuras geométricas quedaban formadas por los cuerpos. Según el propio Manuel Siurot (1912, p.224):

> *El maestro, mientras va pintando con los cuerpos de los niños las figuras en medio del patio, pinta con tiza la correspondiente en la pizarra, al aire libre. Es el momento ideal de la explicación de la materia.*

Los dibujos y la realización de manualidades completaban esta forma, sin duda muy original, de enseñar la Geometría. De nuevo, según Manuel Siurot (1912):

> *Se grafica aquí todo. El punto, poniendo la tiza en contacto con la pizarra. Las distintas líneas, con los niños puestos en fila. La superficie, repartiendo un pedazo de la clase entre varios muchachos, y obligando a cada uno que me diga cuántos ladrillos le tocan, y el volumen, obligándoles a que repartan los garbanzos contenidos en una medida (...). En el centro de mi amplia clase tengo trazadas con pintura de alquitrán y en grandes dimensiones, todo lo que creo necesario que mis alumnos tengan a la vista. Un triángulo rectángulo y la fórmula pitagórica. Un metro lineal. Un metro cuadrado. Un polígono regular y, escrita dentro, la fórmula de su área. Esta, como todas las fórmulas, ha sido perfectamente explicada con anterioridad a la factura del gráfico permanente. En la Geometría del espacio que elementalmente conocen, se hacen figuras de barro tierno. Otras veces me valgo de patatas gruesas. Los chicos construyen en otras ocasiones las figuras en cartón. Son preferibles las que se construyen sobre materia tierna para poder darles cortes, haciéndoles pasar planos, y explicar cortando por donde nos convenga, para ver primero con los ojos, y luego con la imaginación, el contenido de las fórmulas de las áreas y de los volúmenes.*

En palabras de Llerena (1993), este análisis descriptivo de la enseñanza de las Matemáticas en las Escuelas de Manuel Siurot puede aportar alguna luz al problema de la enseñanza de esta disciplina, en el nivel primario, que ha ido erigiendo en un punto de partida metodológico el postulado de la abstracción a ultranza. Manuel Siurot demostró, en contra de una opinión bastante generalizada, que las Matemáticas no son difíciles de aprender, sino algo difícil de enseñar cuando se pretende hacer de una forma abstracta y de espaldas a las características psicológicas de los alumnos. De una forma sencilla, mejor casi humilde, el pedagogo onubense consiguió, a partir de la acción y de la construcción, que las estructuras simbólicas, llenas de vida, fueran decantándose en las

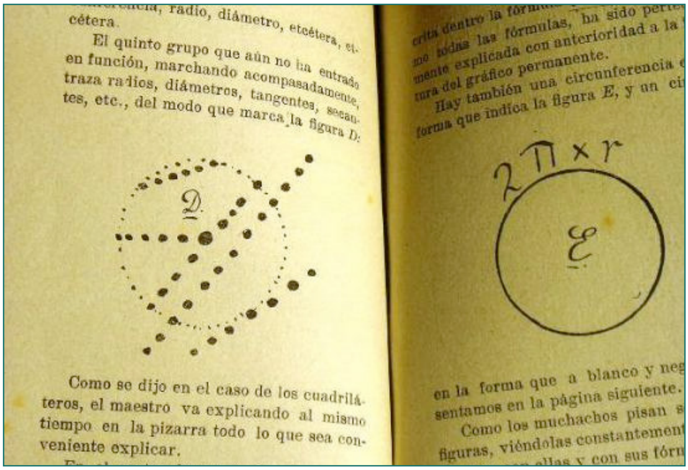


Figura 13. Páginas de Cada Maestrito dedicadas a la Geometría (imagen tomada de (web3)).

mentes de sus discípulos. En otras palabras: para Manuel Siurot, *la axiomática no estaba en el principio, sino en el fin de la enseñanza de las Matemáticas.*

CONCLUSIONES

Como resultado de nuestra investigación sobre la vida y obra de Manuel Siurot, realizada en parte en La Palma del Condado, su propia ciudad natal, a los autores nos han quedado perfectamente claras dos ideas. La primera, que Manuel Siurot ha sido un personaje fundamental en la evolución del magisterio español, sin el cual no se puede explicar el enorme impulso que ha llevado al desarrollo de la moderna pedagogía actual, y la segunda que, a pesar de lo anterior, su vida y obra es prácticamente desconocida por la sociedad en general, a pesar de la enorme importancia y extensión de esta última. Hacemos nuestra por tanto la reflexión personal del biógrafo de Manuel Siurot tantas veces citado en este artículo, D. Luis Llerena, que (véase Sección 2.4) llega a preguntarse *¿qué más hay que hacer en Huelva* (nosotros extenderíamos esta ciudad a toda España) *para que Siurot no siga siendo un desconocido y, por lo tanto, muy poco apreciado entre los suyos?*

Para reafirmarnos en la segunda de nuestras conclusiones, a los autores se nos ocurrió realizar una breve encuesta, de tipo cualitativo, que nos mostrara el grado de conocimiento que la sociedad tiene actualmente sobre la figura de Manuel Siurot. Para ello, tomamos dos muestras de 45 personas cada una, premeditada y contrariamente muy sesgadas, formada una por personas residentes en La Palma y otra formada por personas jóvenes, de ámbito universitario, nacidas en Sevilla, capital y provincia, en principio no muy familiarizadas con la figura de Manuel Siurot.

Pues bien, los resultados de la encuesta en ambos grupos han resultado ser demoledores. Desafortunadamente, no disponemos de espacio para mostrar ni el contenido completo de la misma ni el estudio estadístico realizado, pero baste decir que un 24,4% de sus paisanos no sabían quién era Manuel Siurot, mientras que el grado de desconocimiento de su figura entre los no paisanos se elevó al 82,2%. Un 83,3% de sus paisanos no conocía ninguna obra suya, pasando este porcentaje al 100% entre los no paisanos. De éstos, el 91,1% de ellos desconocía su lugar de nacimiento y referente a su fecha de nacimiento, para la cual se presentaban los tres ítems: *antes de 1900, entre 1900 y 1920, y después de 1920*, sólo el 39% de sus paisanos dio la respuesta correcta, bajando ese porcentaje hasta aproximadamente la mitad para el caso de los no paisanos.

Como aspecto "positivo" de la encuesta, decir que todos sus paisanos (100%) conocían algún edificio o calle que tuviera el nombre de Manuel Siurot (en La Palma hay una calle y un colegio), mientras que también entre los no paisanos este grado de conocimiento fue de un 65%. No en vano, ya se ha comentado que él tiene rotuladas con su nombre varias calles y colegios de las provincias de Huelva y Sevilla, fundamentalmente.

De ahí que, en nuestra opinión, la figura de Manuel Siurot merecería ser mucho más resaltada de lo que lo está en la actualidad. Ojalá que esta modesta contribución sirva para ese propósito.

REFERENCIAS

Llerena, L. (1993). Las escuelas de Siurot: un modelo de renovación pedagógica, Editorial Diputación de Huelva, 1993.

Llerena, L, (S. D.) *Manuel Siurot, Patrimonio espiritual de la Palma.* En http://www.arrakis.es/~flara/siurot/palma/patrimonio/patrimonio.htm

Llerena, L. (S. D.). *Manuel Siurot*. En http://www.huelvainformacion.es/article/huelva/1979632/huelva/esta/deuda/con/manuel/siurot.html

López, A. (2012). *Carta abierta a D. Luis Llerena.* En https://pinceladassiurotianas.wordpress.com/2012/01/22/carta-abierta-a-don-luis-llerena-baizan/

Salas, N. (2001). Recuerdo de Manuel Siurot, Diario de Sevilla 3-6-2001. En http://www.arrakis.es/~flara/siurot/n_salas/n_salas.htm

Siurot, M. (1918). *La Romería del Rocío*. Huelva. Imprenta A. Plata.

Siurot, M.. (1912). *Cada maestrito...Observaciones pedagógicas de uno que no ha visto en su vida un libro de Pedagogía.* Series "El Granito de Arena". Sevilla. Recuperado de http://realbiblioteca.patrimonionacional.es/cgi-bin/koha/opac-detail.pl?biblionumber=8913

Sobre Manuel Siurot. (s.f.). Recuperado de http://anecdotasycatequesis.wordpress.com/2010/02/27/maestro-de-ninos-pobres-manuel-siurot/

Sobre la obra de Manuel Siurot. (s.f.). Recuperado de http://www.ceimes.es/protagonistas/protagonistas/pedagogos

Imágenes relacionadas con Manuel Siurot. (s.f.). Recuperado de https://www.google.es/search?q=cada+maestrito+manuel+siurot

Conocemos los números. Una experiencia basada en la manipulación

Mª Teresa García Pérez
Natividad Adamuz-Povedano
CPR Bembézar de Hornachuelos de Córdoba y Universidad de Córdoba

Resumen: *En este artículo presentamos un trabajo relacionado con la numeración, como parte de una amplia propuesta metodológica que incide sobre el enfoque y tratamiento de los contenidos relativos a la aritmética escolar en primer curso de educación primaria. Esta propuesta se fundamenta en el uso de recursos manipulativos que nos van a servir tanto de soportes numéricos como aritméticos, así como en la implementación de actividades basadas en estos recursos y que están dirigidas al aprendizaje de conocimientos, habilidades y estrategias. El objetivo general es que el alumnado consiga un amplio desarrollo de su sentido numérico, favorecer el cálculo mental y adquirir procedimientos convenientes para el cálculo escrito.*
Palabras Clave: *Numeración, materiales manipulativos, sentido numérico, cálculo mental*

Knowing the numbers. An experience based on manipulation

Abstract: *In this article we show a work with numeration, it takes part of a wide methodological proposal about the focus and treatment of scholar arithmetic content in year 1 of Primary Education. The proposal is based on the use of manipulative resources as both numerical and arithmetical support as well as in the implementation of activities focused to the learning of knowledge, skills, and strategies. The main objective is to get children get a wide number sense development, improve their mental arithmetic and acquire appropriate written procedures for the calculation.*
Keywords: *Numeration, manipulative resources, number sense, mental arithmetic*

INTRODUCCIÓN

Los recursos y las actividades que se presentan a continuación se integran en una propuesta didáctica amplia para desarrollar el sentido numérico en los primeros años de aprendizaje en la escuela. Aunque se dirigen principalmente a los niños y niñas de primero de Educación Primaria, tienen también una extensa aplicación en aulas específicas y en situaciones de apoyo por dificultades relacionadas con la numeración y el cálculo.

Tanto en la normativa vigente como en la normativa anterior, se destaca la importancia del desarrollo del sentido numérico del alumnado, entendido este como el dominio reflexivo de las relaciones numéricas. Para adquirir ese dominio reflexivo el alumnado deberá desarrollar una serie de habilidades como la habilidad para descomponer números de forma natural, o comprender y utilizar la estructura del sistema de numeración decimal (Junta de Andalucía, 2015). Además, se hace referencia expresa a que "la construcción de los distintos tipos de números a lo largo de las tres etapas y del sistema decimal como base de nuestro sistema de numeración,debe ser desarrollada de forma contextualizada buscando preferentemente situaciones cercanas a las niñas y niños, usando materiales manipulables específicos" (Junta de Andalucía, 2015, p.225)

La experiencia física tiene un papel fundamental en el desarrollo del pensamiento lógico matemático en los primeros años de aprendizaje (Bracho-López, Maz-Machado, Jiménez-Fanjul, & García-Pérez, 2011). Hay estudios, por ejemplo, que manifiestan la necesidad de asociar la construcción del concepto de número con el espacio a través de modelos concretos de conceptos abstractos (OCDE, 2009), por lo que creemos que es fundamental acompañar la información verbal con soportes materiales. Pero la manipulación de objetos concretos, por sí misma, no es suficiente para que niños y niñas entiendan ideas matemáticas abstractas o representaciones simbólicas (Uttal, O'Doherty, Newland, Hand y DeLoache, 2009), esa manipulación debe ir acompañadade una metodología en la que los materiales manipulativos estén bien estructurados y actúen como soportes en procesos de razonamiento numérico.

Los recursos que se utilizan en esta propuesta metodológica son elementos muy prácticos, resistentes y fáciles de manejar en los que contrasta la sencillez del diseño con su enorme potencial. En ningún momento anulan o reemplazan a los recursos tradicionales ni a los derivados de las nuevas tecnologías; todos ellos pueden y deben unirse para convivir en el aula formando un entramado rico y diverso al servicio de una enseñanza y un aprendizaje de calidad.

Actúan en interacción unos con otros proporcionando un conocimiento flexible y dinámico de los números y las operaciones. No solo ayudan al dominio en profundidad de la secuencia numérica, además, cada uno de ellos conecta con procedimientos abiertos para el cálculo, los llamados algoritmos transparentes, como por ejemplo, el cálculo por desplazamientos sobre la Línea Numérica Vacía (LNV) (Barba y Calvo, 2011), los Algoritmos Abiertos Basados en Números (ABN) (Martínez, 2008), el Cálculo Táctico (Reflexionar, seleccionar las habilidades y estrategias más convenientes y resolver) y otros igualmente creativos y eficaces.

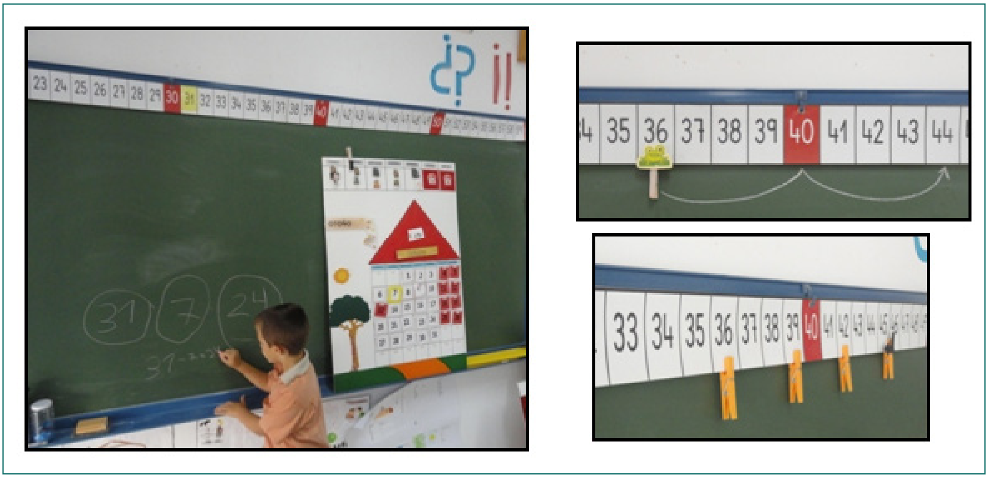


Figura 1. La cinta numérica con diferentes accesorios.

DESCRIPCIÓN DE LOS MATERIALES

La cinta numérica

Este recurso facilita la apropiación de los números del cero al cien como una secuencia linealmente ordenada, continua y ampliable. Apoyándonos en esta visualización y trabajando sistemáticamente con ella en el aula, cada niño y niña podrá ir construyendo su propia línea mental para pensar y operar con los números. En este aspecto, la cinta conecta directamente con estrategias secuenciales para el cálculo pensado y con representaciones gráficas como la Línea Numérica Vacía.

En las actividades diarias, nos proporciona un soporte constante para asociar el nombre de los números con su representación simbólica y para desarrollar actividades que profundicen en las nociones de cantidad y orden. Siempre podemos verla y recurrir a ella para consultar dudas o efectuar comprobaciones. Además, contribuye a enriquecer el contexto de aprendizaje, ya que cada número aporta información sobre sí mismo en relación con los demás: vemos los que le anteceden y le siguen, si está situado al principio, en la parte central o al final de la serie, compararlo con la posición que ocupan otros y cuantificar la distancia entre ambos, etc.

Es un excelente soporte para recoger información numérica de sucesos, situaciones o acontecimientos que afecten al aula, o para representar datos referidos a problemas que debamos resolver.

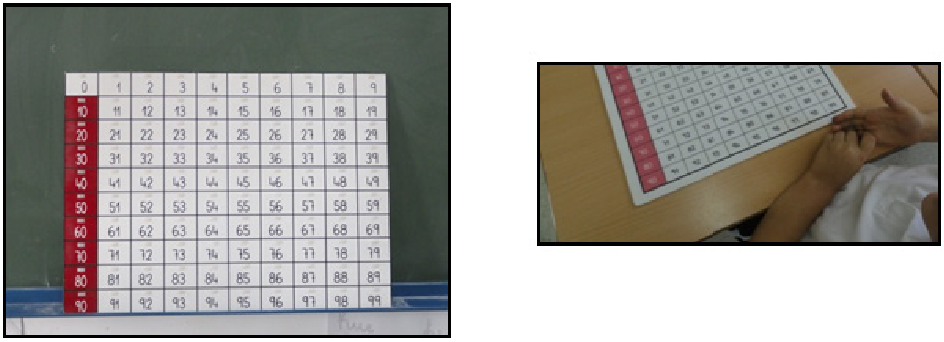


Figura 2. Panel numérico general e individual.

Paneles numéricos grande y pequeño

Los paneles presentan los números del cero al noventa y nueve por familias, lo cual nos permite nuevas posibilidades de análisis y de relación. Uno de ellos es grande y el docente puede utilizarlo como soporte material a sus explicaciones para toda la clase. El otro tiene un tamaño más pequeño y es de uso individual por parte del alumnado.

Las actividades que realizamos con los paneles se alternan y complementan con las que hacemos sobre la cinta y con otros recursos del aula. Esto proporciona al alumnado una mayor flexibilidad en el razonamiento sobre los números, aspecto directamente relacionado con la calidad de su sentido numérico.

La asociación número-espacio en el panel proyecta con mucha fuerza los patrones de nuestro sistema de numeración decimal. A medida que lo vamos conociendo y utilizando en el aula se nos hacen más fáciles las actividades que consisten en descubrir regularidades y definir la relación entre los elementos que pertenecen a la misma fila o a la misma columna. Sobre este “mapa preciso de los números” también haremos muchas sumas y restas trazando caminos horizontales (avanzamos o retrocedemos por las filas) y verticales (subimos o bajamos por múltiplos de diez por las columnas).

Caja de numeración

Se trata de un recurso que facilita al máximo la exploración y la manipulación de los números, favoreciendo una correcta comprensión del Sistema de Numeración Decimal. Es “reversible “ y concreto, esto facilita la interiorización de los principios de conservación y reversibilidad en los niños y niñas.

En ella, vamos construyendo los nueve primeros números, después la decena y las cantidades hasta el noventa y nueve. La labor realizada con las decenas abre de manera natural el camino hacia la construcción de la centena. Podemos comprobar la estructura de este nuevo elemento: constituye una unidad dentro del sistema de numeración,

Figura 3. Caja de numeración.

una centena, que a su vez está formada por diez decenas, cada una de las cuales contiene diez unidades. La equivalencia entre los distintos órdenes es visible y constatable con este recurso.

El trabajo con la caja de numeración produce un salto cualitativo en la comprensión del número y de su tamaño, ya que proporciona un modelo concreto y fiel a la realidad visible, que da sentido al uso de los símbolos escritos y a los conceptos relativos al valor posicional.

Debemos relacionar las cantidades en la caja con otros recursos del aula (cinta numérica, panel, reglas, cintas métricas, ábaco, etc.) para trabajar con representaciones intercambiables. Esto nos ayudará a desarrollar gradualmente una mayor flexibilidad en el razonamiento y a conectar con modos de representación que requieren mayor nivel de abstracción (Kilpatrick, Swafford y Findell, 2001).

En lo que respecta al cálculo, la caja de numeración conecta directamente con estrategias por descomposición y facilita la transcripción gráfica que se deriva de la manipulación de las cantidades.

ACTIVIDADES DE AULA BASADAS EN EL USO DE LOS RECURSOS

A continuación se exponen actividades basadas en los recursos cuando presentamos al alumnado el tramo del 50 al 59. Debe entenderse que esta progresión didáctica se desarrolla en el aula con un enfoque activo y participativo que otorga una importancia fundamental a los saberes previos, la reflexión, el diálogo, la cooperación y el clima emocional. También es muy importante tomar conciencia de que la manipulación, aunque imprescindible a estas edades, no es un fin en sí misma, ni sustituye el intenso trabajo que tanto alumnado como profesorado tendrán que realizar para formalizar la experiencia hasta convertirla en conocimiento matemático. En todo este proceso, el docente desarrolla una labor crucial e insustituible como instructor, guía y conductor del grupo, organizador del trabajo y precursor de actitudes y aptitudes encaminadas a un conocimiento en profundidad de los números y a un cálculo reflexivo.

Figura 4. Familia del 50.

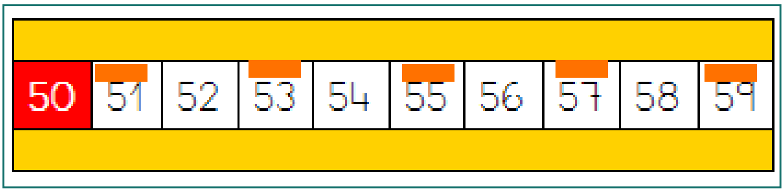


Figura 5. Números impares en la familia del 50.

Presentar una nueva familia de números

Presentamos al alumnado la familia del cincuenta en el panel grande, tapando los demás números con las tiras amarillas (Figura 4). Diremos sus nombres lentamente, pronunciando bien, tomando conciencia de que el primero da nombre a los demás. Recordamos que se escriben con tres palabras y cómo debemos estar atentos a la ortografía. Conversamos sobre si los conocemos, si están en el calendario, si los hemos visto en algún sitio, si significan algo para nosotros…Ponemos ejemplos de estos números en contextos diversos…

Nos fijamos en los símbolos y llamamos la atención sobre lo que tienen en común (el 5) y sobre cómo una vez más se van sucediendo los dígitos 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9. Percibimos rasgos especiales: el que es primero, el último, el que tiene las dos cifras iguales,... Recordamos la propiedad de ser par o impar y la aplicamos a los números de esta familia. Observamos la alternancia.

Practicamos este tramo hacia delante y hacia atrás a nivel oral. Llevamos este trabajo a los cuadernos y escribimos estos números con letra y la serie progresiva y regresiva.

Situar la nueva familia en la secuencia completa. Establecer relaciones de orden y cantidad

Localizamos estos números en la cinta (Figura 6) y los señalamos con pinzas. Los volvemos a nombrar hacia delante y hacia atrás.

Figura 6. Familia del 50 situada en la cinta numérica.

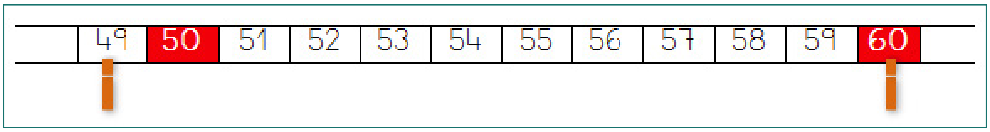


Figura 7. Detalle de la cinta numérica.

Desde la observación de todo el conjunto en la cinta (0 al 100), invitaremos a los niños y niñas a expresar sus percepciones sobre números que están cerca o lejos, muy cerca o muy lejos, de los señalados.

Por ejemplo: "Dime un número que creas que está lejos de esta familia", "Dime otro que para ti esté muy cerca", "¿Qué diríais del 13?", "¿Y del 62?", "¿Y del 98?", "¿Alguien sabe un número que no esté en esta cinta?, ¿Estaría cerca o lejos de los que hemos señalado?"...

Aquí se pondrán de manifiesto opiniones subjetivas que tienen que ver con la construcción mental que cada uno está haciendo de la línea numérica, con el conocimiento y la seguridad que tengan al manejar los números, con el valor relativo y la habilidad para considerar simultáneamente varias posiciones.

A continuación analizamos detenidamente la situación de este tramo dentro del conjunto total.

Podemos considerar primero el aspecto ordinal y dirigir la mirada sobre los anteriores al 50 (el docente se mueve en esa dirección) y los posteriores al 59 (ahora se mueve en paralelo a la cinta en la otra dirección). Pedimos que nos digan números en ambos casos. Resaltamos la posición del 49 como el anterior al 50 y del 60 como el posterior al 59 (Figura 7).

Destacando el aspecto cardinal, nos moveremos a lo largo de la cinta recorriendo los números que expresan cantidades menores que 50 y mayores que 59. Nuevamente solicitamos ejemplos y expresamos en la pizarra con los signos < y >.

En el trabajo con esta familia debemos otorgar especial importancia al 50 como la mitad de 100, en este momento aprovechamos para recordar que 5 era la mitad de 10 (Figura 9).

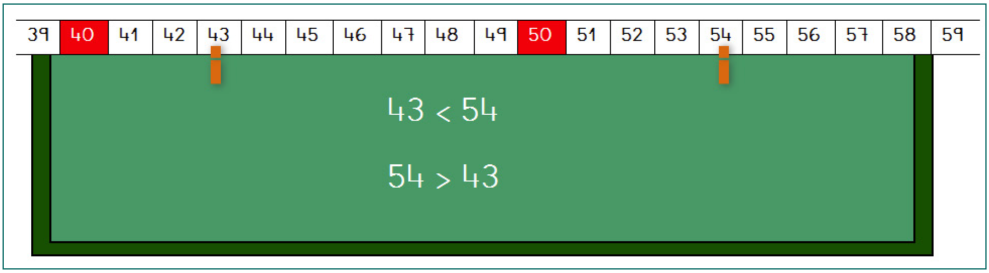


Figura 8. Formalización de ejemplos en la pizarra.

Figura 9. Detalle de la cinta numérica.

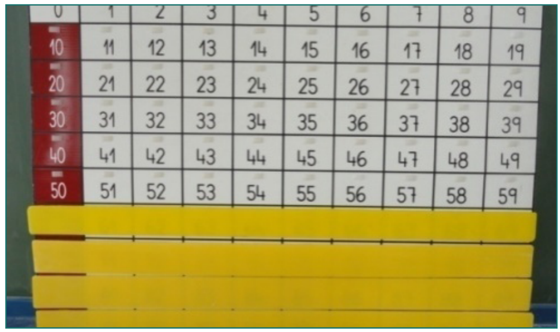


Figura 10. Panel con las familias conocidas al descubierto.

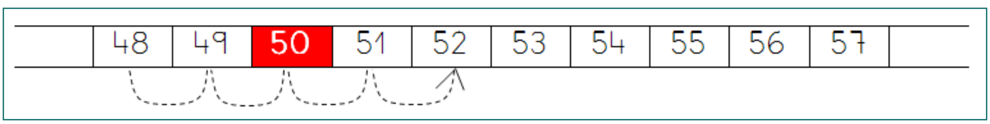


Figura 11. Cambio a la nueva familia en la cinta.

Verbalizamos y aprendemos: “5 y 5, 10”, “50 y 50, 100”.

Llega el momento de conectar la representación lineal de los números en la cinta con la representación fragmentada por familias en el panel. Para ello dejaremos al descubierto las familias que hemos trabajado y compararemos los dos recursos (Figura 10).

Comprobaremos que el orden de los números permanece estable independientemente del soporte elegido para representarlos. En la cinta practicamos el cambio a esta nueva decena (Figura 11).

> “*Cuarenta y ocho, cuarenta y nueve, cincuenta, cincuenta y uno, cincuenta y dos*”

A continuación lo constatamos señalando en el panel (Figura 12).

> “*Cuarenta y ocho, cuarenta y nueve, cincuenta, cincuenta y uno, cincuenta y dos*”

Continuamos comprobando primero en la cinta y después en el panel para recordar la regularidad que ya habíamos visto antes al pasar a otras familias (Figura 13):

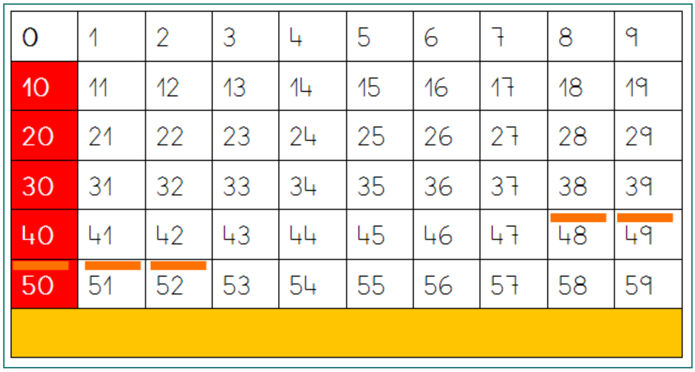


Figura 12. Cambio a la nueva familia en el panel.

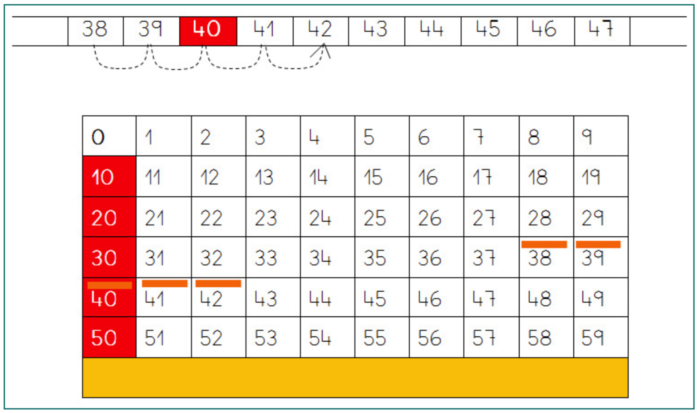


Figura 13. Cambio a la decena anterior.

"Treinta y ocho, treinta y nueve, cuarenta, cuarenta y uno, cuarenta y dos"

También es necesario localizar anteriores y posteriores en el panel, especialmente de aquellos números que terminan en cero o en nueve. Los niños y niñas tienen que asimilar perfectamente estas relaciones para avanzar o retroceder por la tabla con total seguridad en situaciones de cálculo.

Este trabajo debe afianzarse con ejercicios en el cuaderno en los que se practiquen destrezas como:

- Localizar anteriores y posteriores.
- Ordenar colecciones de números de menor a mayor y de mayor a menor.
- Escribir números que estén comprendidos entre otros dos.
- Colocar los signos < o > entre dos números para compararlos.

Contar a intervalos regulares

Cada vez que incorporamos un nuevo tramo tenemos que visualizarlo como una ampliación del conjunto de números que ya habíamos aprendido. La cinta nos ayuda en esta tarea de integración al presentar la serie numérica de manera lineal y continua. Sobre ella contaremos

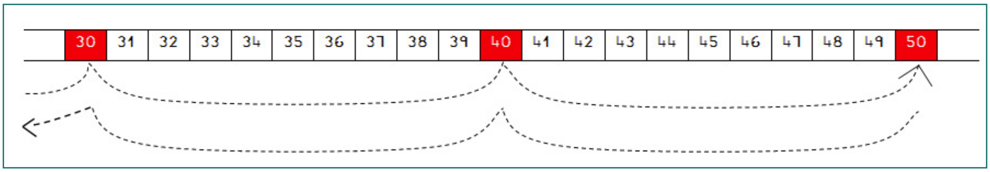


Figura 14. Representación del conteo de 10 en 10.

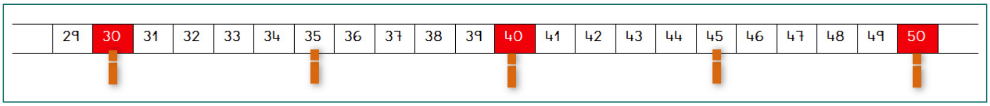


Figura 15. Detalle de la cinta con el conteo de 5 en 5.

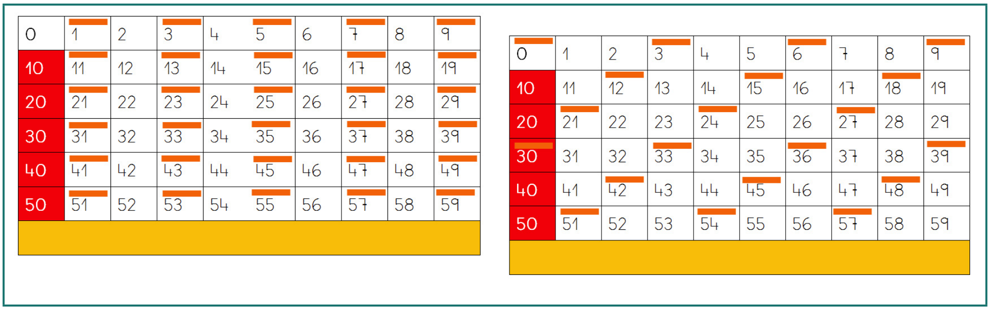


Figura 16. Representación de diferentes conteos a intervalos regulares

desde el 0 al 59, avanzando de uno en uno, y también de uno en uno retrocediendo desde el 59 al 0. El docente irá señalando los números y marcando el ritmo del recitado.

También contaremos saltando *"de rojo en rojo"*, es decir, de diez en diez, señalando y nombrando los números de estas casillas hacia delante: *"0, 10, 20, 30, 40, 50"* y hacia atrás; *"50, 40, 30, 20, 10, 0"*(Figura 14).

Igualmente debemos aprender a contar de cinco en cinco. Conviene marcar cada número colocando pinzas: *"0, 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50"* (Figura 15).

Los leeremos hacia delante y hacia atrás, lentamente y poniendo atención para interiorizar bien la serie. Nos percataremos del ritmo y de los espacios de este intervalo, de cómo cada número acabado en cinco es equidistante de dos casillas rojas. Practicaremos también señalando de dos en dos y de tres en tres, unas veces empezando en el cero y otras en el uno, sin olvidar la práctica progresiva y regresiva.

En otra sesión, repetiremos la actividad sobre los paneles. El docente irá marcando en el panel grande y el alumnado trabajará en el pequeño de modo individual o por parejas. Es muy interesante comprobar y comentar los "dibujos" que surgen gracias a la disposición de los números en este recurso. Descubrir regularidades y patrones nos ayudará a movernos con seguridad por el preciso "mapa de los números" (Figura 16).

Al terminar cada una de las dos sesiones expuestas (una con la cinta y otra con los paneles), propondremos realizar series de intervalos escritos en el cuaderno. Con estos ejercicios reforzaremos el trabajo realizado sobre ambos recursos.

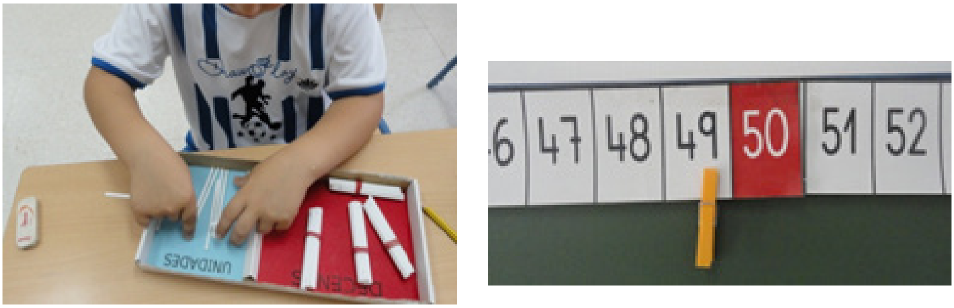


Figura 17. Representación del número 49 en la caja y en la cinta.

Construir números con la estructura del sistema de numeración decimal

Comenzaremos utilizando la caja de numeración. En ella tendremos que disponer 4 decenas y nueve unidades, la última cantidad que habíamos manipulado en la familia anterior.Colocamos las decenas en el lugar correspondiente a medida que contamos: diez, veinte, treinta, cuarenta. Ahora las unidades: cuarenta y uno, cuarenta y dos,….,cuarenta y nueve. Señalamos este número en la cinta (Figura 17).

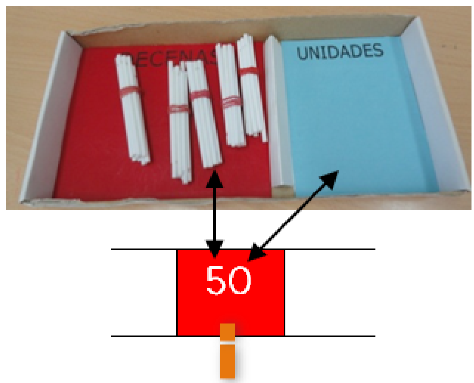


Figura 18. Representación del número 50.

Añadimos una unidad más: nueve y uno, diez; ahora hay diez unidades. Las atamos con la gomilla roja y llevamos esta nueva decena con las otras cuatro que ya teníamos. Hemos formado el 50 (Figura 18).

Conectamos la distribución de cantidades en lacaja con el símbolo de este número: cinco decenas (5) y ninguna unidad suelta (0). Llamamos la atención sobre que este número tiene cincuenta unidades que están agrupadas en las cinco decenas, y que el cero se debe a que no quedan unidades *sueltas*.

Seguimos añadiendo palillos uno a uno para formar el 51, 52, 53,…,59, verbalizando lo que vemos en la caja y conectando cada vez con los símbolos en la cinta (Figura 19):

Una vez que hemos formado hasta el 59, proponemos “dictados manipulativos” para que los niños y niñas construyan números en la caja, los de esta familia y también de otras familias que ya hemos estudiado. Cada vez que formemos un número, es conveniente decir el nombre a la vez que señalamos en la cinta, así conectaremos tres representaciones: la palabra oída, el símbolo y la cantidad organizada en decenas y unidades.

Para finalizar llevaremos este trabajo al cuaderno en forma de ejercicios en los que volvamos a conectar representaciones, esta vez a nivel gráfico.

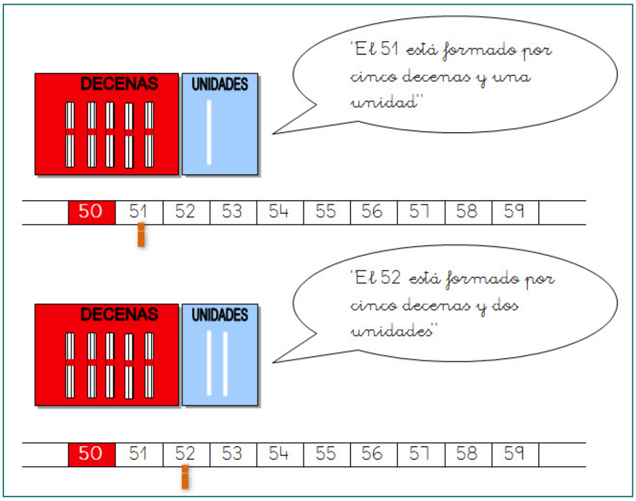
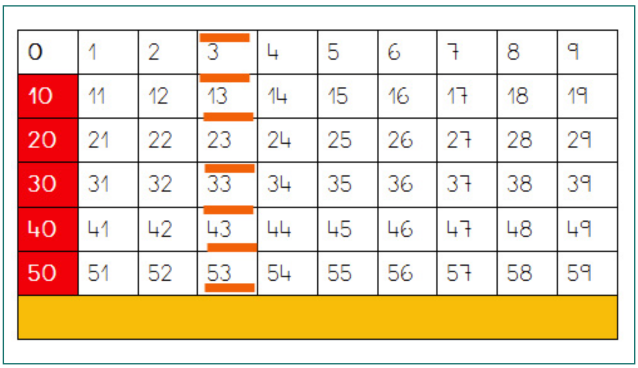


Figura 19. Construcción de los siguientes números de la familia.



0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
30	31	32	33	34	35	36	37	38	39
40	41	42	43	44	45	46	47	48	49
50	51	52	53	54	55	56	57	58	59

Figura 20. Representación del conteo de 10 en 10.

Afianzar los contenidos que se han trabajado y relacionar conocimientos sobre los números

En el panel grande tendremos a la vista las familias que ya conocemos, incluida la del cincuenta. Realizamos lecturas por filas de manera progresiva y regresiva, de uno en uno, de dos en dos, de tres en tres, etc. A continuación trabajaremos en las columnas. Contamos de diez en diez desde el 1, el 2, el 3,… y marcamos. Leemos los números que resultan, por ejemplo 3, 13, 23, 33, 43 y 53. También desde el 53 hacia arriba de diez en diez: 53, 43, 33, 23, 13, 3 (Figura 20). Constatamos cómo una vez más se mantienen los patrones de nuestro sistema de numeración.

A continuación se pueden desarrollar otras actividades de manera individual o por parejas en los paneles pequeños (Figura 21). Los niños y niñas deberán estar muy atentos para no equivocarse, pues repasaremos y relacionaremos contenidos que ya se han trabajado en otras sesiones. El docente dice la orden, espera un momento para que el alumnado la aplique y marca la respuesta en el panel grande para que todo el grupo pueda corregirse.

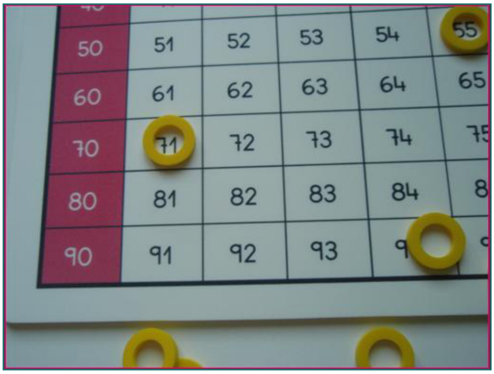


Figura 21. Panel individual.

Los siguientes ejemplos pueden dar buena idea del trabajo a realizar:

- *Señala…*
- *El número 52,…*
- *El anterior a 53,…*
- *El posterior a 49,…*
- *Un número que esté entre 48 y 53,…*
- *Un número que esté entre 50 y 59 y que sea par(o impar),…*
- *Un número que sea mayor que 35 y menor que 51,…*
- *Un número que tenga 5 en las decenas y 6 en las unidades,…*
- *Un número que tenga la misma cifra en decenas y unidades.*
- *Un número que sea anterior a 80 y que tenga un siete en el lugar de las unidades,…*
- *Un número con cuatro decenas que sea mayor que veinte,…*
- *Un número que tenga dos unidades más que el 43,…*
- *Un número que tenga tres unidades menos que el 59,…*
- *Un número que tenga cinco decenas más que el 9,…*
- *Un número que tenga una decena menos que el 51,…*

Tomar conciencia de lo que ya sabemos sobre los números

Al trabajar con los recursos vamos avanzando en el conocimiento que tenemos sobre los números: nombre, localización y orden, decenas y unidades que los componen, cómo se relacionan con otros números a través de las operaciones…, pero también es mucho lo que aprendemos cuando recibimos información numérica de otras situaciones y materiales, dentro y fuera de la escuela. Una actividad muy interesante consiste en solicitar a los niños y niñas que expongan todo lo que saben de un número concreto. Aunque al principio parece que tienen poco que decir, pronto se dan cuenta de lo mucho que pueden aportar al conocimiento que surge de la colaboración de todo el grupo. A continuación mostramos algunas respuestas de niños y niñas de 1º a la pregunta ¿Qué sabéis del número cincuenta y siete?

- *Que tiene un cinco y un siete.*
- *Que tiene cinco decenas y siete unidades.*
- *Que es el anterior a cincuenta y ocho.*
- *Que es el posterior a cincuenta y seis.*
- *Que es mayor que veinte y menor que setenta.*
- *…(Más comparaciones con otros números)*
- *Que es cincuenta más siete.*
- *Que es sesenta menos tres.*
- *Que si le doy tres llego al sesenta.*
- *…(Más operaciones de suma y resta)*
- *Que es impar.*
- *Que es un precio de euros.*
- *Que es casi los años de mi abuelo, pero menos.*
- *…(Más asociaciones a magnitudes de peso, longitud, capacidad…)*
- *Que es el número de una casa.*
- *Que puede estar en una matrícula de un coche,….*
- *…*

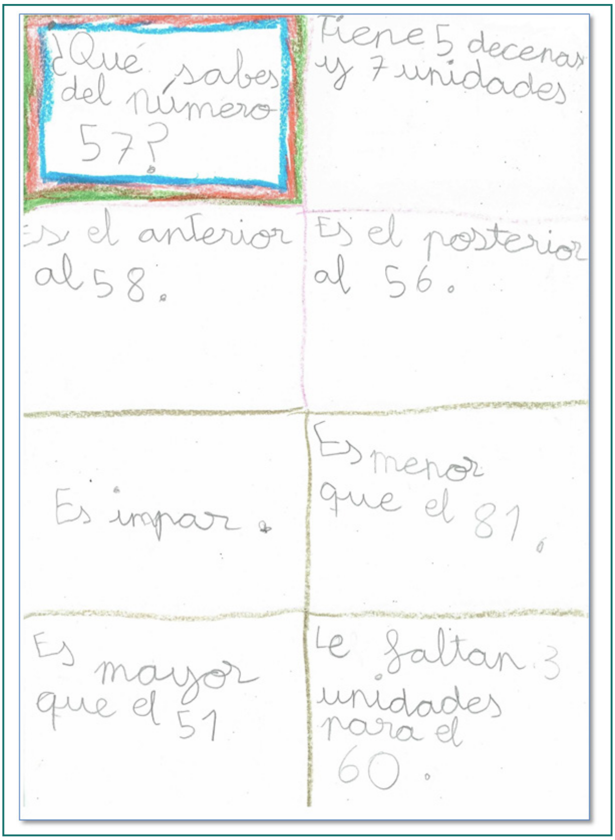


Figura 22. Ejemplo de actividad ¿Qué sabes del número 57?

En otras ocasiones se puede plantear la actividad a nivel individual por escrito y después realizar una puesta en común en la que cada uno cuente al grupo lo que sabe sobre ese número. En la figura 22 tenemos un ejemplo.

CONCLUSIONES

Creemos que el uso de los materiales manipulativos de forma ordenada y sistemática en el proceso enseñanza y aprendizaje de las matemáticas provoca enormes beneficios en los primeros años de aprendizaje, en este caso, en el primer curso de Educación Primaria. Por otro lado, tanto el planteamiento como el desarrollo de las actividades que se han expuesto están en consonancia con las orientaciones metodológicas establecidas en el currículo vigente.

Otra cuestión importante observada en los centros escolares que ya trabajan con estos recursos y esta metodología es el cambio de actitud hacia las matemáticas por parte del alumnado. Los niños y niñas adoptan una disposición más favorable al aprendizaje, se hacen más participativos y se muestran más atentos, seguros y motivados.

REFERENCIAS

Barba, D., & Calvo, C. (2011). Sentido numérico , aritmética mental y algoritmos. In J. E. Garcia & J. L. Álvarez (Eds.), *Elementos y razonamientos en la competencia matemática*.

Bracho-López, R., Maz-Machado, A., Jiménez-Fanjul, N., & García-Pérez, T. (2011). Formación del profesorado en el uso de materiales manipulativos para el desarrollo del sentido numérico. *Unión. Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, *28*, 41–60.

Junta de Andalucía. Orden de 17 de marzo de 2015, por la que se desarrolla el currículo correspondiente a la Educación Primaria en Andalucía (2015). España: Boletín de la Junta de Andalucía.

Kilpatrick, J., Swafford, J., & Findell, B. (2001). *Adding it up*. Washington, D. C: National Academy Press.

Martínez, J. (2008). *Competencias básicas en matematicas: una nueva práctica*. Madrid: Wolters Kluwer.

OCDE. (2009). *La comprensión del cerebro. El nacimiento de una ciencia del aprendizaje*. Santiago de Chile: Ediciones UCSH.

Uttal, D. H., O'Doherty, K., Newland, R., Hand, L. L., & DeLoache, J. (2009). Dual Representation and the Linking of Concrete and Symbolic Representations. *Child Development Perspectives*, *3*(3), 156–159.

Épsilon - *Revista de Educación Matemática* 2016, Vol. 33 (1), nº 92, 89-98

Rincón "Sapere Aude"…

Sixto Romero
Escuela Técnica Superior de Ingeniería
Universidad de Huelva
sixto@uhu.es

INTRODUCCIÓN

La actividad matemática se encuentra en el corazón de toda enseñanza de las ciencias, en general, y en la de las matemáticas, en particular. Es a la vez un instrumento de motivación de los alumnos, un medio de contextualizar los conceptos estudiados y de hacer la conexión con otras materias escolares, y concebida por diferentes estatus: enseñantes, pedagogos, autores de manuales escolares e investigadores en didáctica de las matemáticas. Se dirige a un público variado y puede ser entendida de varias formas.

La investigación en educación matemática ha centrado, desde hace tiempo, su atención en el diseño de actividades basado en la Resolución de Problemas (RdP) concernientes a situaciones reales con el convencimiento de obtener una mayor garantía del aprendizaje matemático por parte de nuestros estudiantes.

Con esta nueva sección se quiere poner de manifiesto como la vida real, y no tan real, nos ofrece bellos ejemplos de reflexión para que el matemático pueda realizar cualquier trabajo susceptible de ser modelado. Con el estudio de casos queremos conseguir motivar al profesorado de los diferentes niveles la necesidad de afrontar una enseñanza problematizada y modelizada de las matemáticas. Se propondrán como ejercicios o actividades de clase aquellas que sean verdaderos problemas o situaciones problemáticas en las que haremos un estudio de las estrategias y alternativas para su resolución. Además en cada número se plantearán varios ejercicios para que el lector interesado pueda utilizarlos como recurso didáctico en el aula cuyas soluciones aparecerán en el siguiente número al de su publicación. Una situación problemática atractiva para el alumno puede ser más valiosa que una docena de ejercicios formales o problemas rutinarios. Los referentes que iremos exponiendo en cada número servirán para la motivación para el profesorado, y por ende al alumno, y la funcionalidad y utilidad del contenido matemático. Presentaremos varias situaciones que corresponden a diferentes niveles de enseñanza, y se deja al lector la opción de usarlo en el nivel que estime oportuno pero siempre con la filosofía de base del gran matemático Félix Klein: *enseñar matemáticas elementales desde el punto de vista superior*. Hay muchos dominios matemáticos, en cuanto a RdP se refiere, casi inexplorados en la Enseñanza Primaria y/o Secundaria que, organizados de una manera original y creativa, permitirían el diseño de actividades del aula enriquecedoras. Muchos de estos dominios pueden ser planificados de manera que puedan transformarse en potentes generadores de importantes competencias, no sólo matemáticas, sino de carácter transversal: teoría de números, teoría de grafos y optimización, teoría del caos, topología, tratamiento de la Información, teoría de códigos y criptografía , modelos matématicos fractales, …

¡De esta manera, pretendemos hacer realidad en el alumno el ***Sapere Aude*** (atrévete a saber) en Matemáticas!

Como no podía ser de otra manera comencemos con explicar que significa ***Sapere Aude.*** Es una expresión del latín, que indica «atrévete a saber»; también suele interpretarse como «ten el valor de usar tu propia razón». Su divulgación se debe a Immanuel Kant, en su ensayo *¿Qué es la Ilustración?*, aunque parece que su uso original se da en la Epístola II de Horacio del *Epistularum liber primus*:

Dimidium facti qui coepit habet: sapere aude (Quien ha comenzado, sólo ha hecho la mitad: atrévete a saber).

La frase fue acuñada por Horacio en el siglo I a. C., y fue encontrada en una carta a su amigo Lolius. Tiene muchas traducciones pero, en el contexto de la carta (en la cual habla sobre los múltiples mecanismos que Ulises, en su regreso de Troya, usó para superar todas las pruebas con que se enfrentó) se puede entender como «tener el valor de usar tu habilidad para pensar». Otros la traducen como «atreverse a pensar».

Con esta sección pretendemos, humildemente, realizar una actividad tan importante, como la de introducirnos en el campo de la resolución de problemas (RdP) a toda persona, desde el convencimiento: ¿debe usar su valor, su conocimiento cómo lo usaba el héroe mitológico Ulises?

SAPERE AUDE, GEOMETRÍA

La Geometría, además de un conjunto de definiciones y fórmulas para el cálculo de superficies y volúmenes, consiste, sobre todo, en describir y analizar propiedades y relaciones, y en clasificar y razonar sobre formas y estructuras geométricas. El aprendizaje de la geometría debe ofrecer continuas oportunidades para construir, dibujar, realizar modelos, medir o clasificar de acuerdo con criterios libremente elegidos. Su estudio ofrece excelentes oportunidades de establecer relaciones con otros ámbitos, como la naturaleza o el mundo del arte, que no debería quedar al margen de atención.

Situación 1

Teorema de Ptolomeo y Teorema de Pitágoras

El teorema de Pitágoras es abordado y se presenta por primera vez en las clases de 2º de ESO, y se aplica según la necesidad, en clases de ciclos superiores. Es entonces necesario que los métodos desarrollados para justificar este teorema se inscriban en el cuadro de las competencias que deban ser asimiladas por los alumnos de estas clases.

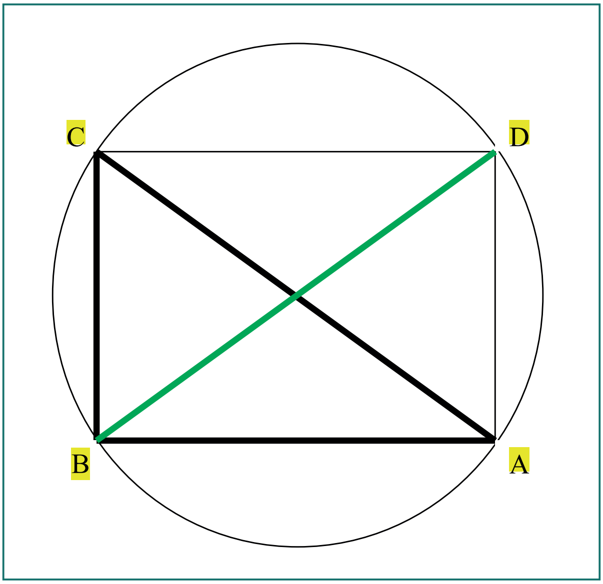


Figura 1. Teorema de Ptolomeo y Pitágoras.

El Teorema de Pitágoras es de los que cuentan con un mayor número de demostraciones diferentes, utilizando métodos muy diversos. Una de las causas de esto es que en la Edad Media se exigía una nueva demostración del teorema para alcanzar el grado de *Magíster matheseos*. Algunos autores proponen hasta más de mil demostraciones. Otros autores, como el matemático estadounidense E. S. Loomis, catalogó 367 pruebas diferentes en su libro de 1927 *The Pythagorean Proposition*. En ese mismo libro, Loomis clasificaría las demostraciones en cuatro grandes grupos: las **algebraicas**, donde se relacionan los lados y segmentos del triángulo; **geométricas o puzzles**, en las que se realizan comparaciones de áreas; **dinámicas** a través de las propiedades de fuerza, masa; y las **cuaterniónicas**, mediante el uso de vectores. Estas demostraciones pueden ser directamente explotadas en clase de 2º de ESO puesto que las competencias-saber descomponer las superficies, su recombinación, cálculo de áreas, etc.- puestas en evidencia para demostrar el teorema son supuestamente adquiridas por los alumnos en las clases. Existen otras demostraciones utilizando métodos que excede el cuadro de competencias de estas clases (salvo las clases de bachillerato, qué tampoco). La demostración que propongo es un ejemplo de lo que se afirma. Con seguridad que existe ya esta demostración pero la bibliografía que he consultado hasta el momento no he encontrado ninguna referencia. A pesar de su importancia, no puede ser explotada en estas clases puesto que tenemos que hacer uso del Teorema de Ptolomeo (¡desgraciadamente muy poco conocido en los diferentes niveles de nuestro sistema educativo!) que sobrepasa el cuadro de saberes ya encontrados por los alumnos de este nivel. Presentamos una demostración del teorema de Pitágoras rápida y sencilla.

Consideremos un rectángulo ABCD inscrito en un círculo

Aplicando el teorema de Ptolomeo al rectángulo ABCD: *En un cuadrilátero convexo inscrito en un círculo, el producto de las diagonales es igual a la suma de los productos de los lados opuestos,* se tiene:

$$AC.\ BD= AB.CD+AD.BC$$

Las propiedades del rectángulo utilizadas en nuestro caso: AD=BC, AB=CD, y como las diagonales son iguales AC=BD nos lleva a la siguiente relación que es el teorema de Pitágoras en el triángulo ABC:

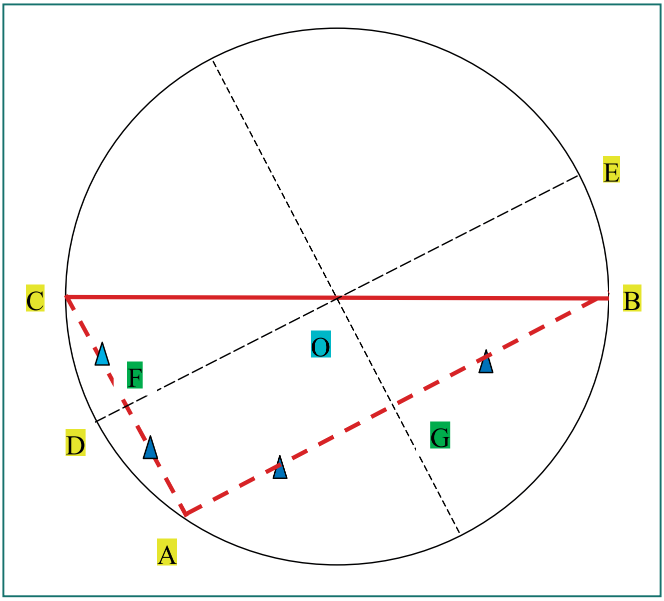


Figura 2. Teorema de las cuerdas secantes y Pitágoras.

$$AC.\ AC = AB.AB + BC.BC \quad AC^2 = AB^2 + BC^2$$

Concluimos diciendo que el ***sapere aude*** aquí nos permitiría una explotación en clase que nos parece necesaria en los ideas innovadoras que utilizan competencias y conocimientos realmente adquiridos por lo alumnos a la finalización de los estudios anteriores. A nuestro juicio debemos proponer ideas originales para demostrar de otra manera que ciertos resultados son extremadamente formadores desde un punto de vista científico.

Situación 2

Teorema de las cuerdas secantes y el teorema de Pitágoras

Esta es una demostración reciente de (A. Wajnberg de la Universidad Libre de Bruxelas). Consideremos un círculo circunscrito al triángulo rectángulo ABC donde el radio ***R*** es igual a la mitad de la hipotenusa

$$R = \frac{h}{2}$$

En la figura, DE es el diámetro perpendicular al lado AC, y F y G son respectivamente los puntos medios de los catetos AC y AB.

En virtud del teorema de de las cuerdas secantes: *Cuando dos cuerdas se cortan en un círculo, el producto de las medidas de los segmentos de una de ellas es igual al producto de los segmentos de la otra*, se tiene que

$$AF.\ FC=DF.FE=(DO-FO).(FO+OE) \Rightarrow (b/2).(b/2)= (a/2-c/2)(c/2+a/2) \Rightarrow$$

$$b^2/4=(a/2)^2-(c/2)^2=a^2/4-c^2/4 \Rightarrow a^2/4= b^2/4+c^2/4 \Rightarrow$$

$$a^2/4= (b^2+c^2)/4$$

Se deduce que

$$a^2= b^2+c^2$$

NOTA: Estas demostraciones pueden ser directamente explotadas en clase de 2º de ESO puesto que las competencias-saber descomponer las superficies, su recombinación, cálculo de áreas, etc.- puestas en evidencia para demostrar el teorema son supuestamente adquiridas por los alumnos en las clases. Existen muchas otras demostraciones utilizando métodos que excede el cuadro de competencias de estas clases (¡salvo las clases de bachillerato, qué tampoco!).

SAPERE AUDE, TEORÍA DE NÚMEROS

Fuera del campo de la Física, en Matemáticas algunos procesos repetitivos dan lugar a resultados que ya no varían en sucesivas iteraciones. Esto permite presentar dichos procesos como efectos de pseudomentalismo con números. Así como **un agujero negro** es un cuerpo con una gravedad tan fuerte que nada puede escapar de él, ni siquiera la luz, también existen números que atraen a otros al efectuar ciertas operaciones. Los números son increíbles, tienen ciertas propiedades que nos asombran (o incluso que "nos engañan"), pero todo tiene una explicación**.**

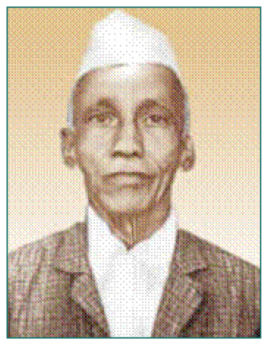


Figura 3. Dattatreya Ramachandra Kaprekar (1905– 1986) (http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Biographies/Kaprekar.html).

Situación 3

Agujero negro numérico: el número curioso 6174

El número **6174** es conocido como la **Constante de Kaprekar** en honor de su descubridor el matemático indio Kaprekar.

Nació en Dahanu, cerca de Bombay. **Se interesó por los números siendo muy peque**ño. Desde 1930 hasta su jubilación en 1962, trabajó como profesor de escuela en Devlali, India. Kaprekar descubrió muchas propiedades interesantes en la **teoría recreativa de números**

Consideremos el número 6174, reordenemos sus dígitos para construir con ellos el mayor número posible; es decir, coloquémoslo en orden decreciente. Reordenémoslo también para construimos el menor número posible y restemos.

Obtenemos así:

7641-1467=6174 que es el número con el que empezamos.

Consideremos otro número por ejemplo 4959. Obtenemos,

9954-4599=5355

Hasta aquí no parece que haya sucedido nada interesante. Hagamos lo mismo con la diferencia 5355

5553-3555=1998.

Nada especial. Seguimos con 1998:

9981-1899=8082
8820-0288=8532
8532-2358=6174.

¡Otra vez el dichoso número!

Con respecto a este problema, surgen las siguientes preguntas:

¿Siempre será así? ¿Habrá restricciones al problema?

Las respuestas a estos dos interrogantes las comenzará a vislumbrar el estudiante al notar que esto siempre ocurre, con la única condición que los cuatro dígitos no sean iguales.

A medida que el estudiante se introduzca en la resolución del problema, pueden surgir interrogantes como el siguiente: si ello siempre ocurre, ***¿cuál es el número máximo de restas necesarias para obtener el número 6174?***

Dado cualquier entero de cuatro dígitos, ¿se puede saber cuántos pasos son necesarios para obtener el 6174?

Las respuestas a estos interrogantes las dan las siguientes afirmaciones, que se demostrarán a continuación.

- 1. Siempre es posible llegar al 6174.
- 2. El número máximo de pasos es siete.
- 3. El número de pasos está determinado por la relación entre los dígitos y no por la forma de ellos.

Todos los números de cuatro cifras, ordenadas de mayor a menor, se van a agrupar en algunas de las formas siguientes:

9-9, 9-8,…,9-0;
8-8, 8-7,....,8-0;
7-7, 7-6,…,7-0;
6-6, 6-5,…,6-0;
5-5, 5-4,…,5-0
4-4, 4-3,…,4-0;
3-3,3-2,…,3-0;
2-2,2-1, 2-0;
1-1,1-0.

En estas agrupaciones, el número 6872 es de la forma 4-1, donde 4 es la diferencia entre 6 y 2; 1 es la diferencia entre 8 y 7.

El número 8651 es de la forma 7- 1, donde 7 es la diferencia entre 8 y 1; 1 es la diferencia entre 6 y 5.

En general, un entero ***pqrs*** es de la forma ***x-y***, si se cumple que

$$p-s=x,\ q-r=y$$

ordenados sus dígitos de mayor a menor.

Se demostrará enseguida la siguiente afirmación: Todo número ***pqrs*** conduce al 6174 en un sólo paso si y sólo si es de la forma 6 -2.

En efecto, sea ***pqrs*** ese número. Si es de la forma 6 - 2, entonces se cumple:

$$p-s=6;\ s=p-6$$
$$q-r=2\ ;r=q-2$$

Escribiéndolo en potencias de 10 de mayor a menor y luego de menor a mayor y restando, y sustituyendo se tiene:

$\mathbf{pqrs-srqp}=1000p+100q+10r+s-(1000s+100r+10q+p)=$
$1000p+100q+10(q-2)+(p-6)-[1000(p-6)+100(q-2)+10q+p]=$
$10^3p+10^2q+10(q-2)+(p-6)-[10^3(p-6)+10^2(q-2)+10q+p]=$
$10^3p+10^2q+10q-20+p-6-[10^3p-6.10^3+10^2q-2.10^2+10q+p]=$
$10^3p+10^2q+10q-20+p-6-10^3p+6.10^3-10^2q+2.10^2-10q-p=$
$6.10^3+2.10^2-20-6=6.10^3+174=\mathbf{6.10^3+1.10^2+7.10+4}$
que corresponde a la escritura en base 10 del número 6174.

De otra parte, sea ***pqrs*** con $p\geq q\geq r\geq s$ tal que

$$pqrs-srqp=6174$$

Necesariamente, $p\geq s$, porque si $p=s$ los cuatro dígitos serían iguales.

Como $p>s$, y $s-p=4$, necesariamente se debe cumplir que $p-s=6$.

Necesariamente, $q>r$ porque si $q=r$ como se está "llevando 1", luego $r-q = 9$. Esto no es posible.

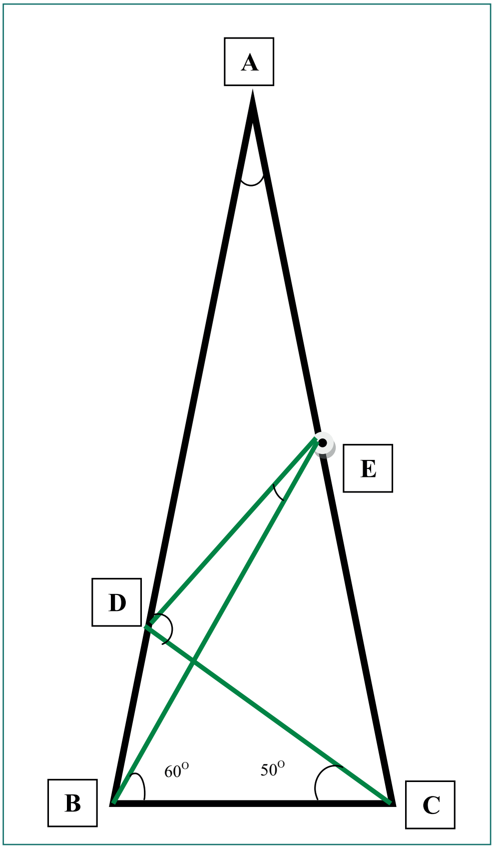


Fig. 4. Triángulo isósceles.

Luego como ***r-q=7*** y se está "llevando 1" se sigue que ***q-r=2.***

De las condiciones

p-s=6
q-r=2

Se concluye que el número es de la forma 6 - 2. Números de esta forma son 8532; 9863; 6420…

A pesar de que el número de pasos necesarios para obtener el 6174 depende de la relación entre los dígitos, es bueno aclarar que a partir del primer paso se obtiene un número completamente determinado.

Así dos números de la forma 4-2, como son 9865 y 7753, dan como resultado después del primer paso, el número 4176.

Dos números de la forma 8-4, como son 8400 y 9621, dan como resultado, después del primer paso, el número 8352.

Después de resuelto este interesante problema, siguen otras preguntas como las siguientes:

¿Qué ocurre si el entero es de 2,3, 5, 6 ó cualquier otra cantidad de dígitos?

Es decir, en estos otros casos ¿qué entero juega el papel que cumple 6174?

¿Ocurre lo mismo si el número se escribe en cualquier otra base diferente de la base 10?

Con estas cuestiones en el aire se puede trabajar dando lugar a nuevos e interesantes problemas de aritmética.

SAPERE AUDE, EJERCICIOS DE AQUÍ Y ALLÁ, PROPUESTAS

Propuesta 1

La enseñanza de la geometría en primaria y secundaria nos pone frecuentemente ante una situación paradójica: permite el enunciado de problemas elementales, fácilmente comprensible, pero la solución, aunque utilizando sólo las herramientas de su nivel, resulta muy difícil de encontrar.

De Geometría elemental, un ejercicio muy abierto

Sea ABC un triángulo isósceles con ángulo $\hat{A}=20^o$. Se traza el segmento BE y CD con ángulos de 60^o y 50^o, respectivamente en la base BC, según aparece en la figura. Calcular los ángulos en CDE y DEB, según aparece la figura

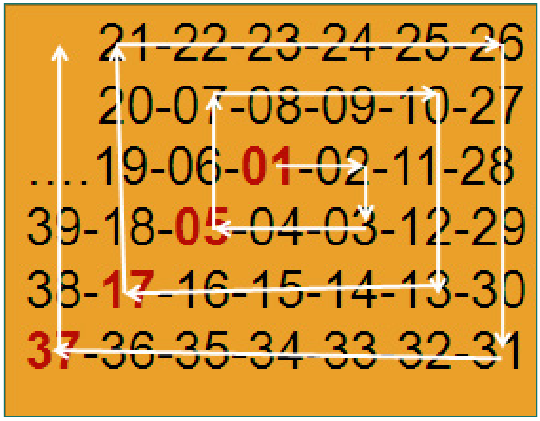


Figura 5. Distribución de habitaciones en el Hotel de la Meca.

Propuesta 2

En general, cualquier situación que pueda ser problematizada o modelizada matemáticamente lleva asociada actividades susceptibles de descomponerse en términos de algoritmos. Es decir, tomar conciencia del aspecto algorítmico de ciertas actividades dónde el control no pasa por el significado, si no por la corrección de su desarrollo.

De decisión del uso de algoritmos: Hotel en la Meca

Actualmente se construye el hotel Abraj Kudai, en Manafia, zona central de La Meca, en Arabia Saudita, el cual será el más grande del mundo y requerirá de un inversión de 3.6 mil millones, el cual se prevé será inaugurado para el año 2017. El gran podio de 45 pisos de altura y 10.000 habitaciones, estilo fortaleza, será coronado por 12 torres de 10 pisos. También contará con 70 restaurantes, cuatro helipuertos, una estación de autobuses, patios de comida, un centro comercial y un centro de convenciones y estacionamientos.

Las habitaciones se enumeran en forma de caracol 1,2,3,4,5,6, 7,……..,10000. A partir del algoritmo anexo construido en forma caracol infinito se trata de:

a) *Encontrar la fórmula recurrente que permita conocer todos los números de las habitaciones situadas sobre la diagonal dónde figuran los números escritos en fondo rojo.*

b) *¿Son todos primos los números que aparecen en la diagonal?*

NOTA: La respuesta pueden enviarla a:la dirección electrónica: sapereaudethales@gmail.com