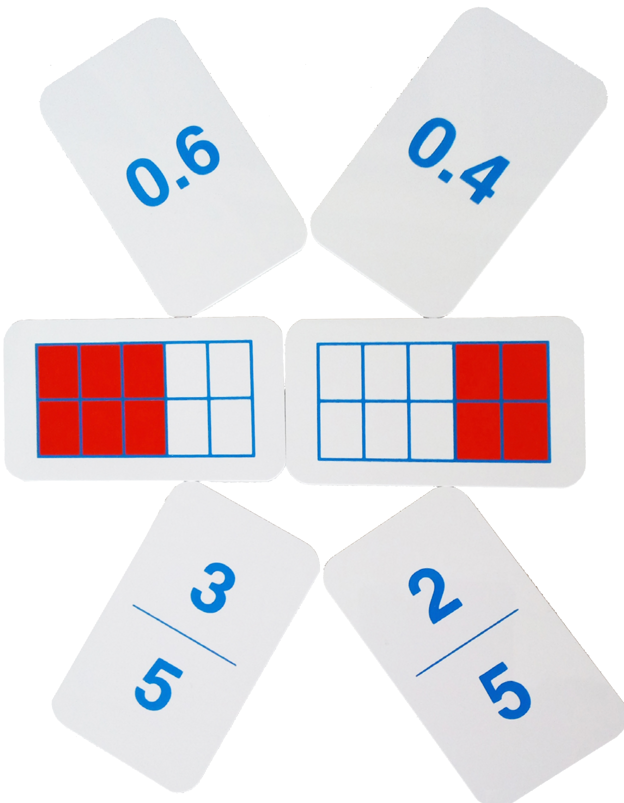
91

Vol. 32 (3)
2015



epsilon

Revista de Educación Matemática

Editada por la S.A.E.M. "THALES"

epsilon 91

Revista de Educación Matemática

Página de la revista: http://thales.cica.es/epsilon
Revista: epsilon@thales.cica.es

Sociedad Andaluza de Educación Matemática "Thales"

Edita
Sociedad Andaluza de
Educación Matemática "Thales"
Centro Documentación "Thales"
Universidad de Cádiz
C.A.S.E.M.
11510 PUERTO REAL (Cádiz)

Maquetación e impresión
Utrerana de Ediciones, s.l.
Cristóbal Colón, 12
41710 Utrera (Sevilla)

Depósito Legal
SE-421-1984

ISSN:
2340-714X

Período
3er cuatrimestre 2015

Suscripción
(3 Números al año.)

SUMARIO / CONTENTS

Épsilon - *Revista de Educación Matemática* *2015, Vol. 32(3), nº 91, 7-24*

Formas de razonamiento que emergen al resolver problemas de máximos y mínimos con un SGD

Aarón Reyes-Rodríguez
(Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo, México)

Verónica Vargas-Alejo, César Cristóbal-Escalante y Víctor Soberanis-Cruz
(Universidad de Quintana Roo, México)

Resumen. *En este artículo se caracterizan las formas de razonamiento que desarrollan estudiantes de primer semestre de una licenciatura en matemáticas al resolver problemas de máximos y mínimos. Los resultados indican que las funcionalidades dinámicas que ofrece GeoGebra propiciaron una ampliación en las formas de razonamiento en relación con el ambiente de lápiz y papel. Los cambios radican esencialmente en que la tecnología digital ofrece mayores recursos a los estudiantes para abordar los problemas, ya que no es necesario el uso explícito de un modelo algebraico para aproximar la solución.*
Palabras clave. *Razonamiento, tecnología, entendimiento, máximos y mínimos*

Ways of reasoning that emerge when students solve problems of maxima and minima with a DGS

Abstract: *In this paper we characterized the ways of reasoning showed by freshmen mathematics students when they solved maxima and minima problems. The results indicate that GeoGebra's dynamic features promoted an expansion in students' ways of reasoning in relation to a pencil and paper environment. Digital technology provide more resources to students to address problems since they did not require, in a first approach, the explicit use of an algebraic model.*
Keywords: *Reasoning, technology, understanding, maxima and minima*

INTRODUCCIÓN

El estudio de la variación y el cambio es un elemento importante en la formación matemática de los estudiantes de todos los niveles educativos, ya que estas ideas constituyen un eje que permite articular conceptos centrales de la disciplina, tales como función y derivada. Los fenómenos en los que está presente la variación y el cambio como el crecimiento de poblaciones, las fluctuaciones económicas, la propagación de enfermedades o las relaciones entre perímetro y área de figuras geométricas proporcionan contextos idóneos para que los estudiantes lleven a cabo procesos de modelización, así como la identificación de patrones, invariantes y estructuras. El análisis de estos fenómenos se puede abordar con distintos niveles de profundidad, incluso desde la educación básica, con la finalidad de que los estudiantes construyan los fundamentos que favorezcan la comprensión de conceptos clave del cálculo diferencial e integral, durante el bachillerato o la universidad (Camacho y Santos, 2004).

La toma de decisiones se encuentra ligada estrechamente con el análisis de la variación y el cambio, ya que constantemente tenemos que elegir entre lo "mejor" y lo "peor". Muchos problemas de toma de decisiones se presentan de esta manera; por ejemplo, al determinar qué forma dar a una lancha para que ofrezca la menor resistencia en el agua; al establecer las medidas de un recipiente cilíndrico, elaborado con cierta cantidad de material, para que tenga un volumen máximo (Courant y Robbins, 2006); al seleccionar el mejor plan de telefonía celular, con base en el precio y los beneficios que ofrece (minutos y MB para navegar por internet) o la mejor administradora de fondos de pensión, con base en las tasas de rendimiento y los porcentajes de comisión.

Propuestas curriculares de carácter internacional como los *Principios y Estándares para la Educación Matemática* (NCTM, 2000) y los *Common Core State Standards for Mathematics* (http://www.corestandards.org/) señalan la importancia de que los estudiantes adquieran habilidades para utilizar el lenguaje matemático en el diseño de herramientas conceptuales, reutilizables y modificables, que apoyen la construcción de un entendimiento profundo de la variación conjunta dos o más variables, y que sean capaces de interpretar esas relaciones entre cantidades en términos de un fenómeno de referencia, con la finalidad de tomar decisiones. Es decir, los estudiantes deben ser capaces de interpretar y representar matemáticamente afirmaciones tales como "la inflación está decreciendo", "el desempleo se incrementó con respecto al mismo trimestre del año anterior" o "el área de un rectángulo de perímetro fijo aumenta a medida que el cociente de las longitudes de sus lados se acerca a uno".

ANTECEDENTES

Los problemas de máximos y mínimos han sido el objeto de estudio de diversas investigaciones. En algunos casos se ha analizado el papel de las representaciones en la resolución de este tipo de problemas (Schoenfeld, 1985) o la relevancia de los métodos que no emplean cálculo diferencial (Niven, 1981; Birnbaum, 1982; Tomás-Blanquer, 2002). En otros casos, los problemas de máximos y mínimos han mostrado ser útiles para determinar si los estudiantes entienden conceptos como función (Lagrange y Artigue, 2009) o derivada (Kosić-Jeremić, 2012; Brijlall y Ndlovu, 2013).

Por otra parte, las estrategias utilizadas por los estudiantes para maximizar o minimizar alguna función, mediante tecnologías digitales tales como los Sistemas de Álgebra Computacional (CAS), se ha utilizado como indicador para determinar si el uso de estas herramientas puede incrementar la capacidad de los estudiantes para pensar matemáticamente (Han y Chang, 2007). También hay aportaciones que analizan las diferentes formas de solucionar problemas de máximos y mínimos en contextos geométricos (Andreescu, Mushkarov y Stoyanov, 2006) o la manera en que la construcción y análisis de diversas rutas de solución de estos problemas puede apoyar el aprendizaje de profesores o estudiantes (Leikin, 2010). Así mismo, existen investigaciones cuya finalidad es caracterizar los problemas sobre máximos y mínimos que aparecen en libros de texto (Gonzáles-Astudillo, 2004; González-Astudillo y Sierra-Vázquez, 2004).

Con base en la revisión de la literatura se identificó que existen pocos trabajos enfocados en analizar los procesos mentales, o formas de razonamiento, que llevan a cabo estudiantes o profesores al resolver problemas de máximos y mínimos (Brijlall y Ndlovu; 2013), o interesados en determinar la medida en qué las tecnologías digitales moldean las características de esos procesos. Considerar las formas de razonamiento que los estudiantes desarrollan al resolver problemas como objeto de investigación resulta relevante, ya que las matemáticas están integradas esencialmente por formas sistemáticas de razonamiento y argumentación (Kaput y Roschelle, 2013) que se emplean para analizar patrones, establecer relaciones entre conceptos mediante afirmaciones matemáticas; para determinar la certeza, generalidad y validez de esas afirmaciones, y como mecanismos que permiten el avance de la disciplina (D'Ambrosio, 2013).

La consideración de las herramientas digitales en el aprendizaje es importante porque las formas de razonamiento y argumentación cambian con el tiempo y son altamente sensitivas al tipo de medios y sistemas de representación que se utilizan durante el proceso de construcción del conocimiento. La introducción de las tecnologías digitales en el ámbito educativo está reconfigurando las formas de aprender matemáticas, al favorecer la construcción de relaciones o conexiones nuevas entre conceptos e ideas, lo cual constituye el medio para alcanzar mayores niveles de entendimiento (Hiebert, et al., 1997).

Específicamente, el uso de las tecnologías digitales puede favorecer que los estudiantes reflexionen sobre los conceptos matemáticos y comuniquen ideas mediante el uso e interacción de múltiples representaciones. Los *Sistemas de Geometría Dinámica* (SGD) proporcionan un dominio epistémico donde la visualización del movimiento y la variación pueden orientar y propiciar la identificación de propiedades, relaciones, invariantes y conexiones estructurales (Leung, Baccaglini-Frank y Mariotti, 2013). En un ambiente dinámico, los estudiantes pueden exhibir nuevas formas de expresividad, asociadas con la exploración de relaciones, mediante el apoyo de la herramienta, así como nuevas formas de entendimiento basadas en la capacidad de un sistema computacional para reaccionar a las acciones ejecutadas por el usuario y proporcionarle retroalimentación en tiempo real (Hegedus y Moreno-Armella, 2009).

Así, el objetivo de este artículo consiste en documentar y caracterizar las formas de razonamiento que desarrollan estudiantes de primer semestre de una licenciatura en matemáticas al resolver problemas donde se tiene que maximizar o minimizar el área o el perímetro de una familia de rectángulos que satisfacen ciertas condiciones, en un ambiente de lápiz y papel y al utilizar un SGD. Específicamente, interesa determinar si las funcionalidades dinámicas que ofrece GeoGebra puede propiciar una ampliación de los tipos y formas de razonamiento matemático que desarrollan los estudiantes, considerando el desarrollo o evolución del razonamiento y no sólo las características de éste.

Las preguntas que guiaron el desarrollo del trabajo son: ¿Cómo interpretan los estudiantes los datos de un problema y cuáles son las características del proceso de razonamiento empleado para obtener una solución? ¿Qué argumentos emplean los estudiantes para justificar resultados? ¿En qué medida el uso de GeoGebra modifica los procesos de razonamiento en relación con aquellos desarrollados en un ambiente de lápiz y papel?

MARCO CONCEPTUAL

Sostenemos que las matemáticas son el estudio culturalmente compartido de los patrones y los lenguajes, el cual constituye un medio a través del cual el ser humano trata de entender el mundo que le rodea. Además, consideramos que el avance del conocimiento matemático se lleva a cabo mediante el desarrollo de formas sistemáticas de razonamiento y argumentación (Kaput y Roschelle, 2013). El *principio de mediación instrumenta*l (Wertsch, 1993), el cual establece que toda actividad cognitiva está mediada por el uso de herramientas, es uno de los componentes principales del marco de investigación. Este principio implica que los *affordances* (Gibson, 1977) o cualidades de los artefactos utilizados durante el proceso de aprendizaje, favorecen formas particulares de interacción entre el estudiante y el conocimiento matemático, y por este hecho las restricciones y facilidades de los medios representacionales que proporciona cada herramienta juegan un papel crítico en la forma en que se construye y organiza el conocimiento, así como en las características de éste. En consecuencia, se espera que existan diferencias entre las formas de razonamiento que llevan a cabo los estudiantes al resolver problemas con el apoyo de un SGD, en relación con un medio estático como el de lápiz y papel.

Otro elemento del marco conceptual es la caracterización del *razonamiento* como la línea de pensamiento que se sigue para producir afirmaciones y obtener conclusiones al resolver un problema (Lithner, 2008). No es posible tener acceso directo a esos procesos de pensamiento, por tal razón se tomará como indicador de los mismos a las acciones que llevan a cabo los estudiantes y que se encuentran plasmadas en sus producciones escritas. Una herramienta útil para analizar una secuencia de razonamiento la constituyen las cuatro etapas por las que se transita al resolver un problema (Polya, 1945), ya que permiten segmentar el proceso de razonamiento, con la finalidad de facilitar el proceso de análisis de datos.

- *Etapa 1.* Entendimiento del problema. El resolutor se enfrenta a una situación para la que no conoce un camino o ruta que le permita obtener una respuesta de forma inmediata. Debe entonces identificar la información proporcionada en el enunciado del problema y determinar si ésta es suficiente, redundante o incompleta.
- *Etapa 2.* Concepción de un plan. Con base en sus conocimientos previos el resolutor lleva a cabo procesos mentales entre los que se encuentra el recordar, elegir, construir, descubrir, adivinar, entre otros, con la finalidad de determinar las herramientas y los posibles caminos que lo pueden ayudar a avanzar en el proceso de solución.

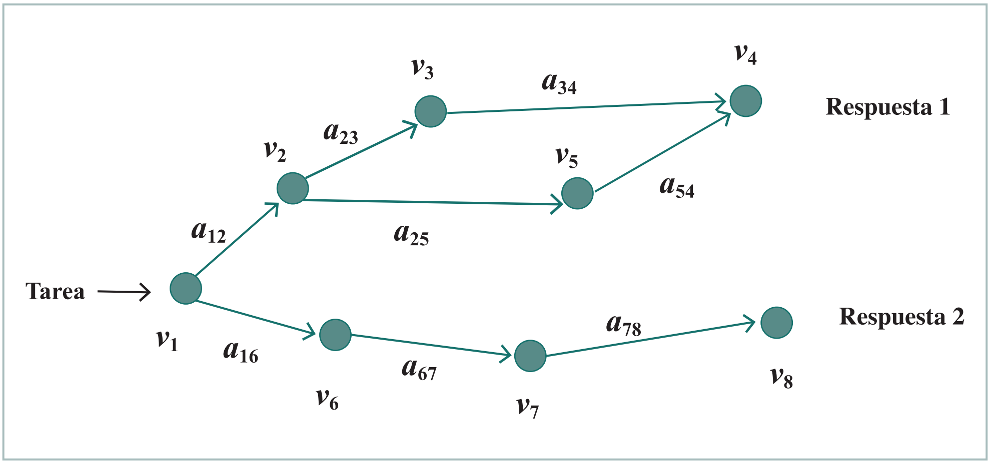


Figura 1. Rutas de solución de una tarea con dos respuestas (adaptado de Lithner, 2008).

- *Etapa 3.* Implementación del plan o estrategia de solución. El resolutor ejecuta la ruta planteada en la fase anterior, lo cual lo puede llevar a obtener una respuesta o a reconsiderar la ruta de solución.
- *Etapa 4.* Visión retrospectiva. Una vez obtenida la respuesta se analizan las razones para justificar por qué la respuesta es correcta y se pueden plantear extensiones o generalizaciones del problema.

Una secuencia de razonamiento se puede pensar como una gráfica dirigida (Figura 1) en la que un vértice representa tanto un estado momentáneo de conocimiento como una sub-tarea. Cada arco representa la implementación de una estrategia que implica el tránsito desde un estado de conocimiento a otro estado de conocimiento . Una razón es entonces la justificación que sustenta la transición entre dos vértices de la gráfica entre los cuales existe un arco (Lithner, 2008). Con la Figura 1 se ilustra la secuencia de razonamiento para una tarea que tiene dos respuestas (vértices 4 y 8), una de las cuales (la respuesta 1) se puede obtener por dos caminos diferentes.

METODOLOGÍA

Una tarea es una actividad cualquiera, mientras que un problema es una tarea para la cual no existe un procedimiento o algoritmo que permita obtener la solución de forma inmediata. Sin embargo, dadas las características de las tareas empleadas en este artículo, problemas que se pueden encontrar en libros de texto de cálculo diferencial (e.g. Philips, 1990), las palabras "tarea" y "problema" se utilizarán como sinónimos. Como parte del enunciado de cada problema se solicitó a los estudiantes argumentar por qué la respuesta es correcta, con la finalidad de que paulatinamente internalizaran el proceso de justificación y argumentación como un hábito de pensamiento (Cuoco, Goldenberg y Mark, 1996).

El uso de tareas provenientes de libros de texto para analizar el razonamiento desarrollado por los estudiantes, se justifica por el hecho de que la forma de enunciar o abordar las tareas en el salón de clase puede incrementar o disminuir la demanda cognitiva de estas (Stein y Smith, 1998). Resolver problemas con un SGD ofrece oportunidades a los estudiantes para desarrollar actividades centrales del pensamiento matemático entre las que se encuentran el explorar, identificar y expresar relaciones entre objetos matemáticos, en términos de aproximaciones visuales, numéricas, gráficas y algebraicas. Características propias de GeoGebra tales como los deslizadores, el arrastre, los lugares geométricos y los comandos de medida pueden favorecer la visualización y análisis del cambio. Así, los estudiantes tienen la oportunidad de desarrollar formas creativas de razonamiento al examinar patrones de variación que emergen como resultado de arrastrar objetos en una configuración dinámica (Santos-Trigo y Camacho-Machín, 2013) y conceptualizar estructuras invariantes en los fenómenos de cambio, las cuales son actividades clave de construcción de un conocimiento estructurado (Leung, 2008).

Los problemas

En el primer problema se solicitó a los estudiantes encontrar el rectángulo de perímetro mínimo entre todos los rectángulos de área 12, en el resto de los problemas se pidió encontrar el rectángulo de área máxima entre: (2) todos los rectángulos inscritos en una circunferencia, (3) todos los rectángulos de perímetro 20, (4) todos los rectángulos inscritos en una semicircunferencia y (5) todos los rectángulos inscritos en un triángulo equilátero.

Población y muestra

En esta investigación participaron 19 estudiantes de primer semestre, inscritos en una Licenciatura en Matemáticas Aplicadas en una universidad pública de México. Las edades de los estudiantes oscilaban entre 17 y 19 años. Todos los estudiantes habían cursado la asignatura de cálculo diferencial durante el bachillerato y habían resuelto problemas de máximos y mínimos mediante procedimientos algorítmicos. La información se recolectó en el marco de un curso denominado "razonamiento matemático", el cual tuvo una duración de 16 semanas, con una carga de cuatro horas a la semana, y cuya finalidad fue que los estudiantes adquirieran los fundamentos básicos para elaborar conjeturas y justificar resultados matemáticos. Además del curso de razonamiento matemático, los estudiantes cursaban las asignaturas de cálculo elemental y geometría analítica. En este artículo, utilizaremos la letra E seguida de un subíndice, por ejemplo E_{15}, para referirnos a cada uno de los estudiantes.

Proceso de implementación

La resolución de los problemas utilizando lápiz y papel se llevó a cabo durante la primera semana de clase, en una sesión de dos horas (*primera fase*). Se entregó a los estudiantes una hoja de trabajo con el enunciado de las tareas y se les indicó que podían trabajar individualmente o en parejas. Todos los estudiantes decidieron resolver los problemas de forma individual. A partir de la segunda semana de actividades y hasta la sexta semana (segunda fase), los estudiantes trabajaron con GeoGebra, centrando la atención en funcionalidades de la herramienta tales como el arrastre, el uso de deslizadores y lugares geométricos, con la finalidad de detectar invariantes en configuraciones dinámicas simples. Todas las actividades que se abordaron fueron de geometría, sin que se revisaran problemas de máximos y mínimos.

Algunas de las tareas que se abordaron en esta fase fueron: (1) conjeturar que la suma de los ángulos de un triángulo es 180° al trazar un triángulo cualquiera y arrastrar sus vértices; (2) determinar cuántos triángulos diferentes se pueden construir dados los segmentos de longitudes 6, 8, 10 y 12 cm, con el objetivo de conjeturar la desigualdad del triángulo, (3) conjeturar el teorema del ángulo inscrito, (4) establecer una relación entre un cuadrilátero ABCD y el cuadrilátero HKLM formado por las intersecciones de las mediatrices de los lados del cuadrilátero ABCD (Olivero, 2006). Este trabajo previo a la tercera fase, tuvo la finalidad de que los estudiantes lograran cierto grado de apropiación de las características del DGS, ya que usar una herramienta para hacer matemáticas requiere una apropiación específica de ésta (Laborde, 2003).

En la séptima semana de clases (tercera fase) se pidió a los estudiantes que resolvieran los mismos problemas pero ahora utilizando GeoGebra, durante una sesión de dos horas. Es importante señalar que la mayoría de ellos no recordaban haber resuelto estos problemas en la primera semana del curso. Las actividades se llevaron a cabo en un laboratorio de cómputo, donde cada uno de los participantes contó con una computadora personal y tuvo la oportunidad de trabajar individualmente o en pareja. Antes de concluir la sesión de trabajo, los estudiantes elaboraron y entregaron un reporte escrito en el que explicaron el procedimiento utilizado para resolver el problema, justificando por qué las respuestas que obtuvieron son correctas.

Instrumentos de recolección de la información

La recolección de la información se llevó a cabo mediante producciones escritas elaboradas por los estudiantes, archivos electrónicos de GeoGebra, así como notas elaboradas por el investigador durante la tercera fase. Se llevó a cabo la digitalización de las producciones escritas y posteriormente se resumió la información en tablas basadas en las cuatro etapas por las que se transita al resolver un problema, con la finalidad de identificar la secuencia de razonamiento empleada para abordar cada problema y las características de mayor relevancia que emergieron en cada uno de los contextos (SGD y lápiz y papel). Finalmente, se llevó a cabo un contraste entre las formas de razonamiento para identificar una posible evolución o cambio en las formas de razonamiento, derivada de utilizar GeoGebra.

FORMAS DE RAZONAMIENTO QUE EMERGIERON EN UN AMBIENTE DE LÁPIZ Y PAPEL

La mayoría de los estudiantes no resolvieron completamente ningún problema. El estudiante E_{19} proporcionó la solución correcta a cuatro de los problemas, sin

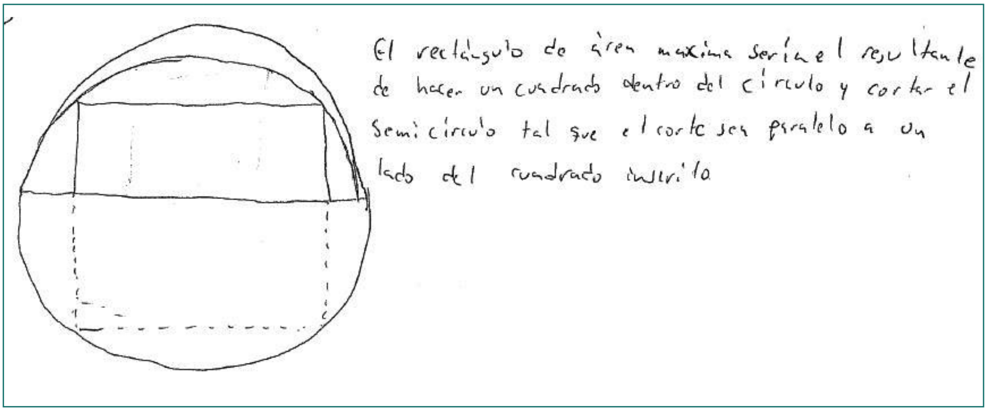
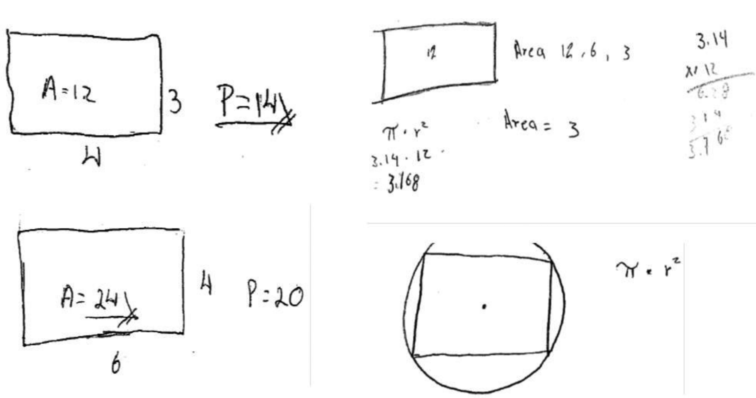


Figura 2. Solución de E19 al problema 4.

embargo, la forma de expresar las respuestas a los problemas 2 y 4 indica que solamente recordó soluciones previas. Este estudiante ya había aprobado un curso de cálculo diferencial en otra universidad, así que las formas de razonamiento que desarrolló al resolver los problemas no son representativas de los integrantes del grupo. La secuencia de razonamiento se caracterizó por la identificación de relaciones entre los problemas propuestos y otros resueltos previamente. El estudiante expresó que el rectángulo de área máxima es aquel que se "asemeja más" al cuadrado formado con las intersecciones de la circunferencia y dos diámetros perpendiculares de ésta. Este estudiante fue capaz de utilizar la solución del problema 2 para resolver el problema 4 (Figura 2) de encontrar el rectángulo de área máxima inscrito en una semicircunferencia, es decir, un aspecto relevante en el proceso de razonamiento radica en el uso de analogías y la identificación de relaciones entre problemas estructuralmente similares.

En términos generales la mayoría de los estudiantes trataron de dar sentido a los problemas elaborando una representación gráfica que capturara los elementos y relaciones esenciales especificadas en el enunciado. Todos los estudiantes realizaron representaciones adecuadas de los problemas que intentaron resolver. En lo que respecta al diseño de una estrategia de solución, se observaron diferentes formas de razonamiento. En algunos casos, junto con la representación gráfica, los estudiantes únicamente escribieron fórmulas o realizaron cálculos aritméticos, lo cual indica que no fueron capaces de determinar qué es lo que varía, o cómo varían los atributos de una familia de figuras geométricas, ni de establecer relaciones entre esas variaciones. Las abreviaturas D, DV, CP, ALG, R y A indican estrategias que caracterizan a las diferentes formas de razonamiento, las cuales se basan en construir un dibujo en el que se integran los datos del problema (sin considerar la variación de atributos **D** o haciendo referencia a ella, **DV**), considerar casos particulares (generalmente figuras con lados enteros), procedimientos algebraicos, recordar soluciones previas y usar analogías, respectivamente.

Para resolver los problemas 1 y 3 el estudiante E_1 únicamente realizó un dibujo en el que se integran los datos del problema (**D**) e hizo el cálculo del área y el perímetro



E$_1$ (problemas 1 y 3) **E$_3$** (problemas 1 y 2)

Figura 3. Representaciones en las que no hay evidencia de una reflexión acerca de la variación y el cambio.

en cada caso. Una forma de razonamiento similar fue exhibida por E$_3$ al resolver el problema 2, ya que además del dibujo, únicamente escribió la fórmula para calcular el área de una circunferencia y realizó cálculos para obtener al área de un rectángulo de área 12 (Figura 3). Estos estudiantes no identificaron que el problema hace referencia a una familia de rectángulos que tienen diferentes perímetros o áreas, incluso E$_{14}$ expresó explícitamente que todos los rectángulos inscritos en una circunferencia tienen la misma área:

- Cómo determinar un área si no se sabe la medida de una circunferencia y *aun así todos los rectángulos saldrían de la misma medida* [énfasis añadido] al menos que sea una elipse en el caso de que los rectángulos de mayor tamaño estén dentro y los rectángulos pequeños en la menor podría ser posible (comentario de E$_{14}$ utilizado como justificación de que no es posible resolver el problema 2).

Algunos estudiantes, como E$_1$ y E$_2$ únicamente intentaron resolver aquellos problemas en los que el enunciado indica medidas específicas para el perímetro, el área o longitudes de los lados de las figuras involucradas, sin que haya intentado abordar el resto de los problemas. Esta forma de pensamiento centrada en el uso de fórmulas, y en la cual se considera que un problema no se puede resolver si no se cuenta con datos numéricos específicos, se presentó también en otros estudiantes como E$_{10}$ y E$_{14}$.

> [Para resolver el problema es necesario] conocer cuál es el área de la circunferencia para conocer cuál es el área que va a ocupar el rectángulo, y posteriormente utilizar las fórmulas para conocer el resultado. *Debemos conocer las dimensiones del triángulo* [énfasis agregado] para trazar nuestro rectángulo [inscrito] (comentario de E$_{10}$ utilizado para justificar que no es posible resolver el problema 2).

En otros casos sí hay evidencia de que los estudiantes consideraron la variación y el cambio en los atributos de las figuras geométricas, como parte del proceso de entendimiento

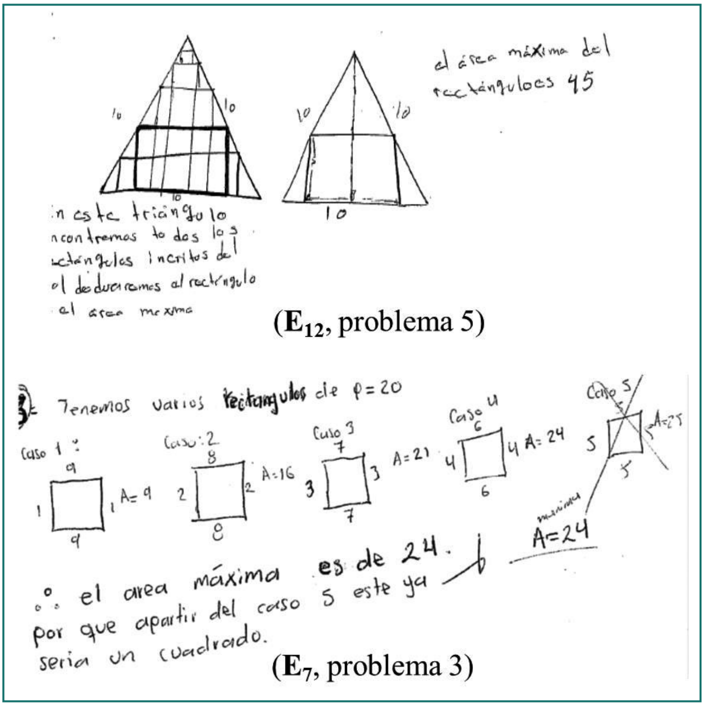


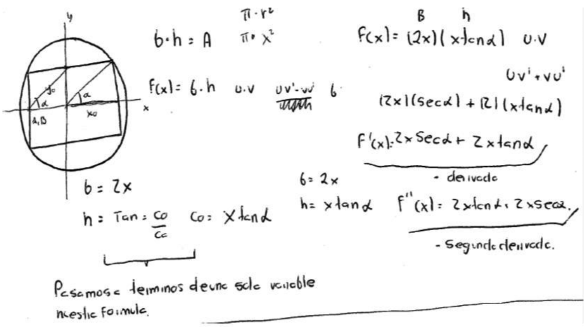
Figura 4. Rutas de solución basadas en la construcción de casos particulares.

del problema. Estos estudiantes consideraron diversos casos particulares (**CP**), específicamente figuras con lados de longitud entera, como estrategia para obtener la respuesta (Figura 4). Como resultado adicional, se puede observar que algunos estudiantes tenían una concepción errónea de rectángulo como una figura "con dos lados largos y dos lados cortos", y por esta razón eliminaron del conjunto de resultados posibles al rectángulo en el cual todos sus lados miden cinco centímetros (extremo inferior derecho de la figura 4).

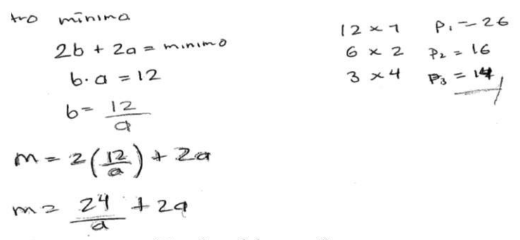
Otras formas de razonamiento que emergieron son aquellas en las que la construcción de una posible ruta de solución se basó en la realización de procedimientos algebraicos (**ALG**) con la finalidad de establecer una función que relacionara los datos que aparecen en el enunciado y aplicar las técnicas del cálculo para encontrar el máximo o mínimo. Los estudiantes que utilizaron esta aproximación solamente lograron plantear dicha función y en algunos casos intentaron derivar para llevar a cabo el procedimiento rutinario usual para calcular máximos y mínimos (Figura 5), el cual se revisa comúnmente en los cursos y textos de cálculo de nivel bachillerato (Stewart, 2008; Santaló y Carbonell, 1982).

En la Tabla 1 se muestra un concentrado de las estrategias utilizadas por los estudiantes al tratar de construir una ruta de solución. Las casillas sombreadas corresponden a problemas que los estudiantes no intentaron resolver, aquellas marcada con D indican problemas cuya ruta de solución consiste en un dibujo que captura los datos y relaciones especificadas en el enunciado, pero sin que se considere la variación y el cambio en los atributos de la figura.

Comentarios. Dado que la mayor parte de los estudiantes no explicitaron en sus producciones escritas la forma de comprender los datos, y no llevaron a cabo una visión



E$_{17}$ (problema 2)



E$_{18}$ (problema 1)

Figura 5. Rutas de solución basadas en procedimientos algebraicos.

retrospectiva del proceso de solución, la información relacionada con los procesos de razonamiento se determinó con base en el diseño e implementación de las estrategias de solución.

Los datos de la tabla indican que los problemas 2, 4 y 5 fueron los problemas que presentaron mayor nivel de dificultad para los estudiantes, dado que no se especifica la medida de algún atributo de la circunferencia o del rectángulo inscrito, en el caso de los problemas 2 y 4; o del triángulo equilátero y el rectángulo inscrito, en el problema 5 (ver tabla 1). En estos tres problemas los estudiantes, en general, no identificaron el cambio en el perímetro y el área del rectángulo inscrito, ni la relación entre la variación de estos atributos, es decir, hubo dificultades en la etapa de comprensión del problema y por esta razón, en la mayoría de los casos realizaron únicamente un dibujo en un intento por dar sentido a la información proporcionada en el enunciado del problema.

En el caso de los problemas 1 y 3, en los que se proporciona como dato, la medida específica de un atributo del rectángulo (el perímetro o área), la estrategia más utilizada para abordar la actividad consistió en la consideración de casos particulares, es decir, rectángulos cuyas medidas de sus lados son números enteros. La respuesta del problema consistió en elegir al caso particular que tuviera la mayor área o perímetro, respectivamente. Esta forma de razonamiento permite observar que los estudiantes no fueron capaces de determinar que la familia de rectángulos que debía considerarse en el problema contaba con una mayor cantidad de elementos, ya que existen rectángulos cuya área es 12 o su perímetro es 20, pero que no tienen lados enteros.

Tabla 1. Estrategias utilizadas un ambiente de lápiz y papel.

	Problema 1	**Problema 2**	**Problema 3**	**Problema 4**	**Problema 5**
E_1	D		D		
E_2	DV		DV		
E_3		D			
E_4	CP	D		D	D
E_5	CP		CP		DV
E_6	CP		CP		
E_7	CP	D	CP		
E_8	CP	D	CP	D	CP
E_9	CP	D	CP		CP
E_{10}	D	D	X	D	D
E_{11}	CP	D	CP	DV	DV
E_{12}	D	D	D	D	DV
E_{13}		D		D	D
E_{14}	CP	DV	CP		DV
E_{15}	D	DV			
E_{16}	D	DV	D	DV	
E_{17}	CP	ALG	CP	DV	A
E_{18}	ALG y CP	ALG	ALG	DV	DV
E_{19}	CP	R	CP	A	CP

FORMAS DE RAZONAMIENTO QUE EMERGIERON AL UTILIZAR GEOGEBRA

La sesión en que los estudiantes resolvieron los problemas utilizando el software dinámico se llevó a cabo durante la octava semana del curso, durante una sesión de dos horas. A la sesión únicamente asistieron 15 de los 19 estudiantes (faltaron E_2, E_6, E_{15} y E_{16}). La mayoría de los estudiantes decidió trabajar en parejas a excepción de E_{10}, E_{18} y E_{19}. El uso de GeoGebra permitió a todos los estudiantes considerar la variación y el cambio, ya que las funcionalidades propias de la herramienta, particularmente el arrastre favoreció la visualización de una mayor cantidad de integrantes de la familia de objetos geométricos bajo consideración, además de visualizar el cambio en los atributos, al realizar una medición de estos y arrastrar un punto de la construcción. Por otra parte, el uso de medidas también favoreció la consideración de la variación conjunta entre cantidades y la elaboración de conjeturas respecto de cómo se relacionan esas variaciones.

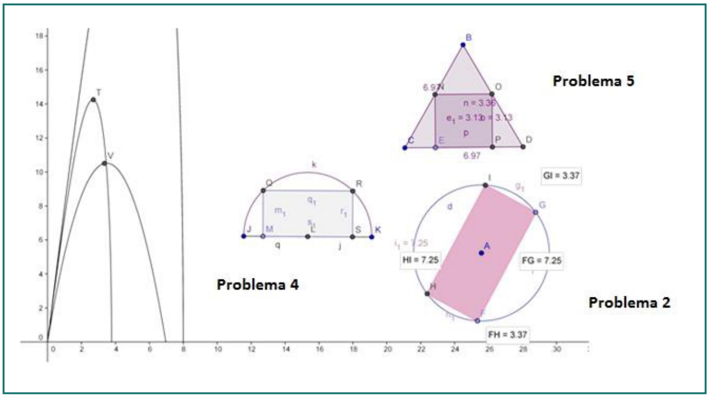


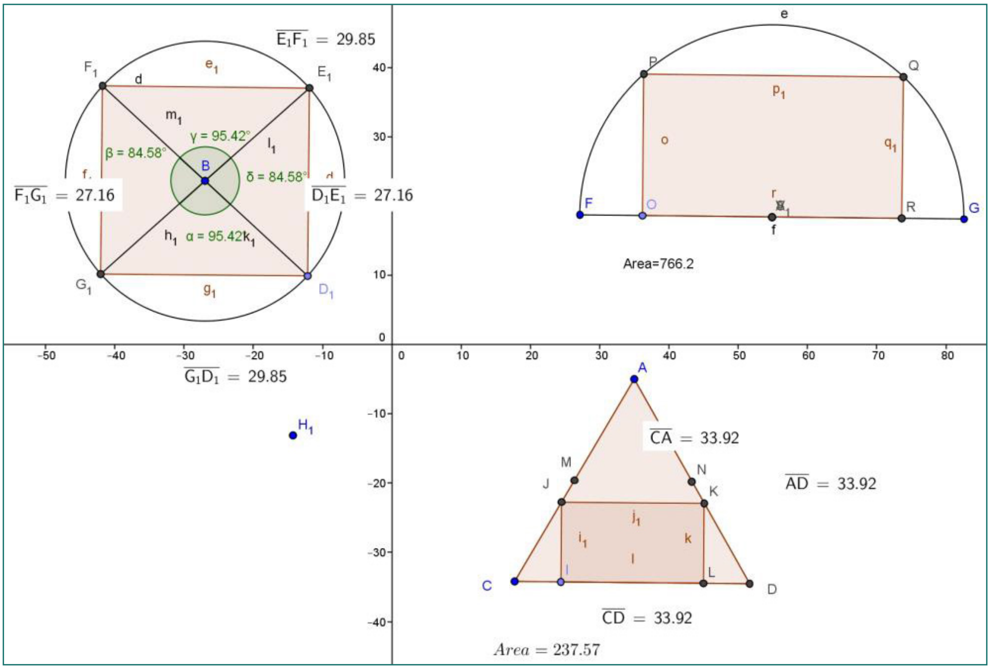
Figura 6. Configuración dinámica utilizada por E8 y E12.

Las formas de razonamiento que emergieron en este ambiente fueron más variadas, en relación con el ambiente de lápiz y papel. Las estrategias utilizadas por los estudiantes fueron uso de casos particulares (CP), realización de consideraciones geométricas basadas en la visualización (VG), visualización de medidas de atributos (M), visualización de medidas de atributos con una referencia (MR), la visualización de lugares geométricos y medidas (LGyM), así como el uso de analogías (A). Finalmente, las casillas sombreadas indican que el estudiante no intentó resolver el problema. En algunas aproximaciones la solución se basó en la visualización de un lugar geométrico que representa la relación entre dos variables en la configuración dinámica que capturara los elementos y relaciones expresados en el enunciado del problema (**LGyM**). En general esta aproximación se utilizó para abordar los problemas 2, 4 y 5 (Figura 6).

En la aproximación anterior, un aspecto relevante del proceso de razonamiento incluye el elegir la variable independiente. En el caso de la solución de E_8 y E_{12}, eligieron la distancia FH, QM y EP como variables independientes de los problemas 2, 4 y 5, respectivamente. El uso de GeoGebra permitió a los estudiantes llevar a cabo una combinación de aproximaciones visuales y empíricas, ya que mediante la identificación del "vértice" del lugar geométrico fue posible determinar cuándo se alcanza valor máximo, además de los valores que toman los atributos correspondientes, como se aprecia en la descripción del proceso de solución y la justificación de la solución al problema 2, proporcionada E_8 y E_{12}, quienes reconocieron que trabajar con GeoGebra apoya el proceso de resolver problemas, debido esencialmente a las facilidades de visualización de la herramienta.

> Primeramente se observa al construir el rectángulo inscrito en una circunferencia, moverlo en distintas maneras y después ir observando cómo cambia el área, ubicar más o menos el área máxima que se puede alcanzar, finalmente se asegura la respuesta cuando se observa la parábola (reporte de E_8 y E_{12}).

Otro tipo de razonamiento utilizado consistió en visualizar directamente la variación del área de las figuras, y una vez que mediante el arrastre se aproximó a la solución. Se procedió luego a buscar entre todas las medidas posibles en la configuración



cuáles tenían alguna característica en particular (la mitad, un tercio o un cuarto de alguna otra medida, ángulos de 45°, 60° o 90°), con la finalidad de establecer una relación entre las dos variables. Esta aproximación fue utilizada por los estudiantes E_4 y E_{17} y por E_7 y E_{13} (Figura 7), quienes en la descripción del proceso de solución del quinto problema mencionan que colocaron como referencia a los puntos medios de dos de los lados del rectángulo y observaron que cuando los vértices del rectángulo inscrito estaban por debajo o por encima de esos puntos de referencia el área del rectángulo decrecía. Para estos estudiantes, uno de los elementos que distingue el trabajo de un ambiente dinámico es la posibilidad de arrastrar los objetos y observar cómo varían los atributos de tales objetos.

> La diferencia de hacer estos ejercicios en lápiz y papel que hacerlos en la computadora de geogebra es que es más rápido y puedes comprobarlos ya que el rectángulo se puede mover por cualquier punto del círculo o del triángulo y hacerlos manualmente pues no (reporte de E_7 y E_{13}) (ver figura).

Los estudiantes reconocieron que una de las diferencias fundamentales al trabajar en un ambiente dinámico, en relación con el trabajo de lápiz y papel es que el uso del SDG les permite experimentar y considerar casos que no son enteros, además de que facilita la realización de operaciones aritméticas rutinarias con mayor precisión.

> La diferencia entre hacer este ejercicio en la computadora es que puedes ir moviendo los puntos y las distancias para experimentar y llegar a una conclusión en base a la práctica, ya que a lápiz es más difícil ir haciendo esto…Al realizar el problema a lápiz no se pueden tomar en

> cuenta muchos resultados que no son enteros, ya que son más difíciles de calcular debido a la inexactitud que puede llegar a tener el hecho de hacer las operaciones a mano (reporte de E_{19}).
>
> […] mediante Geogebra es más sencillo observar las figuras con detalle, además se puede trazar el lugar geométrico para así poder conocer de manera más acertada el área máxima y de esta manera realizar observaciones más profundas de cada problema, en cambio resolviendo los problemas a lápiz es más complicado imaginar la figura y por tanto las conjeturas requieren de mayor análisis (reporte de E_8 y E_{12}).

A pesar de contar con la herramienta, algunos estudiantes como E_8 y E_{12}, E_4 y E_{17} no pudieron elaborar una configuración dinámica que capturara las relaciones entre los datos de los problemas 1 y 3, así que recurrieron a considerar casos particulares con valores enteros, los cuales organizaron en una tabla, a partir de ahí seleccionaron como respuesta aquellos que arrojaban el valor mínimo del perímetro y el máximo del área respectivamente. En el caso de los estudiantes E_1 y E_5 únicamente resolvieron los problemas 1 y 3 usando esta misma estrategia.

Otra ruta de solución consistió en realizar consideraciones geométricas con base en la observación de relaciones al mover la configuración dinámica que elaboraron los estudiantes. Para abordar el segundo problema, E_4 y E_{17}, se dieron cuenta de que todos los rectángulos inscritos en una circunferencia, tenían la característica común de que sus diagonales pasaban por el centro de la circunferencia. Con base en esta observación, utilizaron la estrategia de considerar un problema más simple, maximizar el área de un triángulo rectángulo tal que la hipotenusa es un diámetro y el otro vértice es un punto de la circunferencia.

Los estudiantes justificaron que esto ocurre cuando el triángulo rectángulo es isósceles, por lo que el área máxima del rectángulo original se obtiene cuando el rectángulo inscrito es un cuadrado. Estos estudiantes utilizaron la analogía entre este problema y el 4 para proporcionar la solución de este último. En esta misma línea de ideas, para resolver el problema 1, E_{18} consideró que minimizar el perímetro requiere que los lados del rectángulo sean lo más pequeño posible y esto ocurre cuando ambos lados son iguales.

> Por el segundo problema sabemos que el área máxima de un rectángulo inscrito en una circunferencia es un cuadrado, ahora como tenemos una circunferencia el rectángulo de área máxima es la mitad, es decir su base es el doble de su altura, su base se encuentra sobre el diámetro de la semicircunferencia (reporte de los estudiantes E_4 y E_{17}).
>
> Para que el perímetro sea mínimo a y b tienen que ser lo más pequeño posible. Si disminuimos una medida la otra aumenta, por lo que lo mejor es que midan lo mismo. Así tenemos $a=b=\sqrt{12}$ (reporte de E_{18}).

En la Tabla 2 se muestra un resumen de las estrategias que orientaron el proceso de razonamiento de los estudiantes. Se puede observar que con el uso de un SGD, los estudiantes tuvieron mayores recursos para resolver los problemas, y utilizar una amplia diversidad de aproximaciones para obtener una solución.

Comentarios. El uso del software ofrece un dominio epistémico que favorece que los estudiantes extiendan sus formas de pensar acerca de los problemas, ya que les permite superar algunas ideas erróneas que aparecen al trabajar en un ambiente de lápiz y papel, por ejemplo, que los cuadrados no son rectángulos o que todos los rectángulos inscritos en una circunferencia tienen "las mismas medidas" (las mismas longitudes de lados, el mismo perímetro o la misma área).

Por otra parte, las capacidades dinámicas del software promueven que los estudiantes reflexionen en torno a la variación y el cambio de las medidas de los atributos de los integrantes de una familia de objetos geométricos. Por otra parte, el uso de la herramienta, particularmente los *affordances* que permiten la visualización de relaciones, la medición de atributos y el uso de lugares geométricos para visualizar la relación entre dos conjuntos de cantidades que varían de forma conjunto permitió ampliar la cantidad de problemas que los estudiantes pueden abordar y favoreció la diversificación de estrategias utilizadas.

Tabla 2. Estrategias utilizadas con el uso de un SGD.

	Problema 1	**Problema 2**	**Problema 3**	**Problema 4**	**Problema 5**
E_1 y E_5	CP		CP		
E_3 y E_{11}	M	M	M	M	M
E_4 y E_{17}	CP	VG	CP	A	MR
E_7 y E_{13}		M		M	MR
E_8 y E_{12}	CP	LGyM	CP	LGyM	LGyM
E_9 y E_{14}	LGyM				M
E_{10}		M		M	
E_{18}	VG	M	M	M	
E_{19}	M	M	M	M	

REFLEXIONES FINALES

Existe evidencia que el resolver problemas con un SGD propició cambios en las formas de razonamiento que desarrollan los estudiantes en relación con un ambiente de lápiz y papel, estos cambios radican esencialmente en que la tecnología digital ofrece mayores recursos a los estudiantes para abordar los problemas, ya que no es necesario el uso explícito de un modelo algebraico para aproximar la solución de un problema. Asimismo, como lo reconocieron los propios estudiantes, las facilidades para explorar y visualizar relaciones entre medidas de los atributos de objetos geométricos fue un elemento que apoyó que los estudiantes lograran abordar y resolver con éxito más problemas, que cuando resolvieron las tareas únicamente con lápiz y papel.

REFERENCIAS

Andreescu, T., Mushkarov, O. y Stoyanov, L. (2006). *Geometric problems on maxima and minima*. Boston: Birkhäuser.

Birnbaum, I. (1982). Maxima and minima without calculus. *Mathematics in School, 11*(3), 8-9.

Brijlall, D. y Ndlovu, Z. (2013). High school learners' mental construction during solving optimisation problems in Calculus: A South African case study. *South African Journal of Education, 33*(2), 1-18.

Camacho, M. y Santos, M. (2004). El estudio de fenómenos de variación haciendo uso de herramientas tecnológicas. *Revista UNO, 37*, 105-122.

Courant, R., y Robbins, H. (2006). ¿Qué son las matemáticas? Conceptos y métodos fundamentales. México: Fondo de Cultura Económica.

Cuoco, A., Goldenberg, A. P. y Mark, J. (1996). Habits of mind: An organizing principle for mathematics curricula. *Journal of Mathematical Behavior, 15*, 375-402.

D'Ambrosio, U. (2013). Phylosophy and background. En S. J. Hegedus y J. Roschelle (eds.), *The SimCalc vision and contributions: Democratizing access to important mathematics*, 1-3. Dordrecht: Springer.

Gibson, J. J. (1977). The theory of affordances. En R. Shaw y J. Bransford (eds.), *Perceiving, acting, and knowing: Toward an ecological psychology*, 67-82. Hillsdale, NJ: Erlbaum.

González-Astudillo, M. T. (2004). Los problemas de optimización en la enseñanza secundaria de España durante el siglo XX. *Atas XIII Encontro de Investigação em Educação Matemática*, 33-58. Beja, Portugal: Sociedade Portuguesa de Investição em Edução Matemática (SPIEM).

González-Astudillo, M. T., y Sierra-Vázquez, M. (2004). Metodología de análisis de libros de texto de matemáticas: los puntos críticos en la enseñanza secundaria en España durante el siglo XX. *Enseñanza de las Ciencias, 22*(3), 389-408.

Han, S. y Chang, K.-Y. (2007). Problem solving with a computer algebra system and the pedagogical usage of its obstacles. En J.-H. Woo, H.-C. Lew, K.-S. Park, & D.-Y. Seo (Eds.), *Proceedings of the 31st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education,* vol. 1, 249-256. Seoul, Korea: The Korea Society of Educational Studies in Mathematics.

Hegedus, S. J. y Moreno-Armella, L. (2009). Introduction: the transformative nature of "dynamic" educational technology. *ZDM Mathematics Education, 41*, 397-398.

Hiebert, J., Carpenter, T. P., Fennema, E., Fuson, K. C., Wearne, D., Murray, H., Olivier, A. y Human, P. (1997). *Making sense: teaching and learning mathematics with understanding*. Portsmouth, NH: Heinemann.

Kaput, J. J. y Roschelle, J. (2013). The mathematics of change and variation from a millennial perspective: New content, new context.En S. J. Hegedus y J. Roschelle (eds.), *The SimCalc vision and contributions: Democratizing access to important mathematics*, 13-26. Dordrecht: Springer.

Kosić-Jeremić, S. (2012). Teaching mathematics at faculties of engineering in Bosnia and Herzegovina viewed through teaching and solving extremal problems - A case study. *IMVI Open Mathematical Education Notes, 2*, 39-50.

Laborde, C. (2003). Technology used as a tool for mediating knowledge in the teaching of mathematics: The case of Cabri-Geometry. En W.-C. Yang, S.-C. Chu, T. de Alwis y

M.-G. Lee (eds.), *Proceedings of 8th Asian Technology Conference in Mathematics: Technology Connecting Mathematics*. Hsinchu, Taiwan: ATCM Inc.

Lagrange, J.-B. y Artigue, M. (2009). Students' activities about functions at upper secondary level: A grid for designing a digital environment and analyzing uses. En M. Tzekaki, M. Kaldrimidou y H. Sakonidis (eds.), *Proceedings of the 33rd Conference of the International Group for the Psychology of mathematics Education*. Thessaloniki, Greece: PME.

Leikin, R. (2010). Learning through teaching through the lens of multiple solution tasks. En R. Leikin y R. Zazkis (eds.), *Learning through teaching mathematics: Development of teachers' knowledge and expertise in practice*, 69-90. Dordrecht: Springer.

Leung, A. (2008). Dragging in a dynamic geometry environment through the lens of variation. *International Journal of Computers for Mathematics Learning, 13*, 135-157.

Leung, A., Bacaglini-Frank, A. & Mariotti, M. A. (2013). Discernment of invariants in dynamic geometry environments. *Educational Studies in Mathematics, 84*, 439-460.

Lithner, J. (2008). A research framework for creative and imitative reasoning. *Educational Studies in Mathematics, 67*(3), 255-276.

National Council of Teachers of Mathematics [NCTM] (2000). Principles and Standards for School Mathematics. Reston, VA: The Council.

Niven, I. (1981). *Maxima and minima without calculus*. Washington, DC: The Mathematical Association of America.

Olivero, F. (2006). Hidding and showing construction elements in a dynamic geometry software: A focusing process. En J. Novotná, H. Moraová, M. Krátká y N. Stehliková (eds.), *Proceedings of the 30th Conference of the International Group for the Psichology of mathematics Education*, vol. 4, 273-280. Prague, Czech Republic: Charles University.

Phillips, H. B. (1990). *Elementos de cálculo infinitesimal*. México: Instituto Politécnico Nacional.

Polya, G. (1945). *How to solve it*. Princeton, NJ: Princeton University Press.

Santaló, M. y Carbonell, V. (1982). *Cálculo diferencial e integral*. México: Joaquín Porrúa Editores.

Santos-Trigo, M. y Camacho-Machín, M. (2013). Framing the use of computational technology in problem solving approaches. *The Mathematics Enthusiasts, 10* (1 y 2), 279-302.

Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical Problem Solving*. Orlando, FL: Academic Press.

Stein, M. K. & Smith M. S. (1998). Mathematical tasks as a framework for reflection: From research to practice. *Mathematics Teaching in the Middle School, 3*, 268-275.

Stewart, J. (2008). *Cálculo de una variable: trascendentes tempranas*. México: Cengage Learning.

Tomás-Blanquer, F. R. (2002). Método de determinación de máximos y mínimos previo a la enseñanza del cálculo diferencial. *Suma, 40*, 87-90.

Wertsch, J. V. (1993). *Voices of the Mind: a sociocultural approach to mediated action*. Cambridge: Harvard University Press.

Épsilon - *Revista de Educación Matemática* *2015, Vol. 32(3), nº 91, 25-40*

Significado de decimal expresado por escolares mediante la elaboración de cuentos

Mario Megías Delgado, Juan Francisco Ruiz Hidalgo y
José Luis Lupiáñez Gómez
Universidad de Granada

Resumen: *A través de los cuentos elaborados por escolares de 5º de Primaria, se describe qué componentes del significado del concepto decimal expresan en sus narraciones. El análisis de estos cuentos tiene una doble finalidad: describir componentes matemáticas y componentes narrativas. Los resultados evidencian una interpretación del número decimal como un objeto estrictamente matemático, con grafía determinada, desvinculado de cualquier estructura numérica y sin uso en la vida cotidiana.*
Palabras clave: *Cuentos, matemáticas, decimales, competencia matemática comunicar*

Meaning of decimal expressed by students by means of elaboration of tales

Abstract: *By using tales, we describe the components of the meaning of decimal expressed by fifth graders. The analysis is twofold because it describes mathematics components as well as narrative components. Results show a decimal like a mathematical object with determinate symbolization, disassociated of any mathematical structure and with no use in daily life.*
Keywords: *Tales, maths, decimals, communicating*

1. INTRODUCCIÓN

En los marcos normativos de los últimos años predomina lo competencial sobre lo conceptual y procedimental. Concretamente, el desarrollo normativo actual destaca el papel del aprendizaje por competencias, adoptando la noción de competencia clave definida por la Unión Europea e identificando siete competencias clave (MEC, 2014):

- El aprendizaje por competencias favorece los propios procesos de aprendizaje y la motivación por aprender, debido a la fuerte interrelación entre sus componentes: el concepto se aprende de forma conjunta al procedimiento de aprender dicho concepto (MEC, 2014, p. 19350).

Entre las competencias clave se encuentran la competencia lingüística y la competencia matemática que, en ocasiones, son difíciles de considerar conjuntamente. Llach y Asina (2009) proponen posibles actividades para fomentar la relación entre ambas competencias. Entre otras acciones, para mejorar la competencia lingüística desde el área de matemáticas se pueden realizar "actividades que incorporen el lenguaje matemático y la adecuada precisión de su uso en la expresión habitual para mejorar las destrezas comunicativas" (Llach y Alsina, 2009, p. 79). Para mejorar la competencia matemática desde el área de Lengua y Literatura se pueden realizar:

- actividades relacionadas con la elaboración de discursos y/o textos lingüísticos y/o literarios. Por ejemplo, a partir de procedimientos retóricos como la selección (inventio), la jerarquización y ordenación (dispositio) de las ideas. (Llach y Alsina, 2009, p. 79)

Una de las acciones que los autores proponen es el uso de cuentos en clase de matemáticas. Esta opinión es compartida por otros autores que, dentro de la educación matemática, también manifiestan la utilidad del cuento como elemento para alcanzar conocimiento matemático (Marín, 1999, 2007; Marín, Lirio y Calvo, 2006; Noda y Plasencia, 2002; Blanco colaboradores, 2009, 2010).

Basándonos en estas ideas, consideramos la elaboración de cuentos en clase de matemáticas el elemento básico de toma de información de nuestro trabajo. Valoramos su interdisciplinariedad y su utilidad para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Mediante estos cuentos elaborados por los escolares, pretendemos evaluar la comunicación del alumnado, considerando la comunicación en el sentido que proporciona el marco PISA, como la competencia que exige a los escolares capacidad para comprender e interpretar enunciados de otras personas en diversas situaciones así como de expresar ideas acerca de las matemáticas (OCDE, 2013).

Tras trabajar en la materia de Lengua y Literatura sobre el cuento y en Matemáticas sobre decimales, se solicitó a escolares de 5º de Primaria que escribiesen un cuento. Para analizar la capacidad de comunicación en las respuestas se preparó un instrumento de recogida de datos dividido en dos partes: una acerca del contenido no matemático y otra sobre el contenido matemático del cuento.

El objetivo que se perseguía era valorar la capacidad de comunicar acerca de los decimales. Para ello se indagó en la identificación de los significados que los escolares atribuyen al decimal mediante una la plantilla del contenido matemático está basada en la noción de significado de un concepto matemático escolar propuesta por Rico (2012).

Para sorpresa de los investigadores, el análisis de las respuestas pone de manifiesto que los escolares conocen la simbolización del decimal, pero no lo sitúan dentro de la estructura matemática de número racional ni le asignan ningún uso. Esto subraya un bajo nivel de competencia comunicativa del concepto matemático decimal.

2. MARCO TEÓRICO

Entre los trabajos previos que sirven de base para este artículo destacamos el Proyecto Kovalevskaya (Marín, Lirio y Calvo, 2006). Este proyecto persigue la utilización de recursos literarios en el aula de matemáticas permitiendo una enseñanza interdisciplinar y globalizada. Sus objetivos se resumen en analizar las repercusiones en el aprendizaje matemático del alumnado y proporcionar un cambio de actitud y motivación a través de la utilización de recursos literarios en el aula de matemáticas. Como conclusiones podemos destacar: La potenciación de la lectura y el aumento de la comprensión de los conceptos matemáticos contemplados en los textos a través de las preguntas matemáticas y la ampliación del horario de matemáticas en el horario debido su combinación con los planes lectores de los centros.

Otro trabajo que merece atención es el de Marín (1999), en el que propone el cuento como recurso didáctico y subraya las ventajas en la enseñanza de las matemáticas de Primaria. Entre estas ventajas están la motivación, la actitud positiva y el papel mediador que ejerce en la compresión de conceptos abstractos. Más adelante, Marín realiza una propuesta del aprendizaje de las matemáticas en primaria a partir de la lectura de cuentos (Marín, 2007).

Posteriormente, Noda y Plasencia (2002) presentan una experiencia con estudiantes de magisterio con los objetivos de motivar a los estudiantes y de establecer vínculos entre la Literatura y las matemáticas.

Más recientemente, Blanco y Blanco (2009) analizan si en matemáticas de Enseñanza Secundaria los cuentos motivan a los alumnos, les hacen reflexionar sobre su significado y les permiten profundizar en el estudio. Sus valoraciones finales confirman que el cuento es un recurso didáctico válido en la enseñanza de las matemáticas. Esta validez se complementa con las propuestas didácticas que aparecen en los trabajos que los autores realizaron junto con Ana Caballero (Blanco, Caballero y Blanco, 2010; Caballero, Blanco y Blanco, 2010).

COMPETENCIA COMUNICAR

Entendemos la competencia matemática comunicar como una de las siete componentes de la alfabetización (OCDE, 2013), mediante la cual el escolar mejora la expresión y comprensión de ideas introduciendo elementos matemáticos. Comunicarse en el aula, de manera verbal o escrita, entre estudiantes o entre ellos y el profesor, es el medio por el que se lleva a la práctica la actividad de enseñar. La comunicación se produce cuando el profesor explica algún concepto, cuando propone una tarea a sus escolares, cuando los estudiantes comentan algo sobre ese concepto o discuten entre sí acerca de esa tarea, o bien cuando éstos responden al profesor. Esta interacción entre profesor y alumnos está dominada por reglas, es un proceso que evoluciona y está en construcción a lo largo del tiempo, los significados de los conceptos matemáticos se van construyendo, cada entorno comunicativo tiene unas características propias (Green, 1983, citado por Rico y Lupiáñez, 2008).

Con respecto a lo que tiene que ver con los escolares, Rico y Lupiáñez (2008) manifiestan que la comunicación engloba:

- Que se expresen de manera oral o escrita acerca de las matemáticas
- Que comprendan e interpreten los enunciados orales o escritos de otras personas.

La relación entre los procesos matemáticos y las capacidades matemáticas fundamentales aparece en la siguiente tabla (OCDE, 2013, p.15):

	Formular situaciones matemáticamente	*Emplear* conceptos matemáticos, hechos, procedimientos y razonar	*Interpretar*, aplicar y evaluar resultados matemáticos
Comunicar	Leer, decodificar y dar sentido a afirmaciones, preguntas, tareas, objetos o imágenes para poder crear un modelo mental de la situación	Articular una solución, mostrar el trabajo que implica llegar a la solución y/o resumir y exponer resultados intermedios	Construir y comunicar explicaciones y argumentos en el contexto del problema

Esta forma de entender la comunicación está relacionada con el estándar comunicación propuesto por el National Council of Teacher of Mathematics (NCTM, 2000) entendido como destreza que deberían adquirir los estudiantes. La Comunicación se considera una parte esencial de las matemáticas y la educación matemática, la forma de compartir y aclarar ideas, ayudando a dar significado y permanencia a las ideas y a hacerlas públicas.

- Los alumnos que tienen oportunidades, incentivo y apoyo para hablar, escribir, leer y escuchar en las clases de matemáticas, se benefician doblemente: comunican para aprender matemáticas, y aprenden a comunicar matemáticamente. (NCTM, 2000, p. 60)

La descripción de la comunicación para el NCTM, se divide en cuatro capacidades a desarrollar en los estudiantes:

- Organizar y consolidar su pensamiento matemático a través de la comunicación.
- Comunicar su pensamiento matemático con coherencia y claridad a los compañeros, profesores y otras personas.
- Analizar y evaluar las estrategias y el pensamiento matemático de otros.
- Usar el lenguaje de las matemáticas con precisión para expresar ideas matemáticas.

Concretamente, sobre la escritura, el documento subraya que escribir en matemáticas puede también ayudar a los alumnos a consolidar lo que piensan, ya que requiere reflexionar sobre su trabajo y aclarar sus ideas sobre las nociones desarrolladas en la lección. Más tarde, pueden encontrarlo útil para releer el registro de sus propios pensamientos. (NCTM, 2000, p. 61).

Para detectar el nivel de adquisición de esta competencia, podemos recurrir a los informes PISA o a los estándares de evaluación del NCTM (1989). La evaluación de la habilidad de los estudiantes para comunicar debería dar evidencias de que ellos:

- Expresan ideas matemáticas hablando, escribiendo, demostrando y representándolas visualmente.

- Entienden, interpretan y evalúan ideas matemáticas que están dadas en forma escrita, oral o visual.
- Usan vocabulario, notación y estructuras matemáticas para representar ideas, describir relaciones y modelar situaciones.

Con respecto a PISA, se pueden utilizar las validaciones empíricas de 2003, que permitieron establecer unos descriptores de los niveles de consecución de las competencias. En el caso de la comunicación (Rico y Lupiáñez, 2008, p. 269):

	1	2	3	4	5	6
Comunicar		Describir resultados obtenidos	Realizar explicaciones sencillas		Comunicar conclusiones con precisión	

SIGNIFICADO DE UN CONCEPTO MATEMÁTICO ESCOLAR

Para interpretar las respuestas de los escolares se recurre a la noción de significado de un concepto matemático escolar. Basándonos en una noción de significado de un concepto desde una perspectiva semántica, lo entendemos compuesto por el *signo* con el que se expresa el concepto, su *referencia* y el *sentido* que se le atribuye cuando se usa. En matemática escolar, Rico (2012) identifica estas tres componentes con:

- Signo con sistemas de representación, o conjunto de símbolos y reglas con las que se representa el concepto.
- Referencia con estructura conceptual, la cual engloba las propiedades del concepto, los argumentos y proposiciones derivadas y los criterios de veracidad.
- Sentido con los elementos de uso relacionados con el concepto. La fenomenología, los contextos o modos de uso, las situaciones y los términos que dan sentido al concepto (Rico, Flores y Ruiz-Hidalgo, 2015).

3. METODOLOGÍA

Se trata de un estudio descriptivo y cualitativo en el que se realizan algunos recuentos con la finalidad de obtener mayor precisión en las descripciones. Los datos se recogen en un cuento, por lo que se trata del método de encuesta (Cohen y Manion, 2002). La observación de los cuentos se centra en la incidencia de los contenidos y las destrezas relacionas con los números decimales. Se trata de un estudio de naturaleza semántica que aborda el modo en que los estudiantes entienden, utilizan e interpretan determinadas nociones y conceptos. Para ello, se considera que las herramientas de estimulación semántica (*semantic elicitation*, también traducido por elicitación semántica) proporcionan fuertes evidencias sobre el entendimiento de la semántica de un concepto. Entre estas herramientas de estimulación están las entrevistas, las grabaciones o las narraciones (Klok, 2014), como es el caso que nos ocupa.

La metodología usada es el Análisis del Contenido entendido como "una técnica cuya finalidad es descubrir la estructura interna de la comunicación, estudiando para ello su contenido semántico" (Rico y Fernández-Cano, 2013, p. 9). Se analizaron las producciones de los escolares y se procedió a organizar la información recogida en fichas previamente diseñadas. Posteriormente se hizo un recuento de frecuencias con el que se elaboraron los datos cuantitativos. Con todo ello, se observó la incidencia de los contenidos y las destrezas relacionadas con los decimales.

3.1. Sujetos

Los sujetos objeto de estudio son 27 escolares de un grupo de 5º de Educación Primaria de un centro concertado de la zona centro de Granada durante el curso 2013/2014. Entre estos alumnos se encuentra un repetidor y no hay ningún alumno evaluado con necesidades educativas especiales. Estos alumnos han estudiado los conocimientos y destrezas relacionados con los decimales siguiendo la estructuración de las dos unidades didácticas propuestas por el libro de texto Matemáticas 5 de la editorial Guadiel (Poquet y López, 2009). El nivel socioeconómico de los escolares en medio-alto. La elección de este conjunto de estudio fue intencional, coincidiendo con la realización de unas prácticas educativas de uno de los investigadores.

3.2. Procedimiento

Se desarrollaron varias sesiones repartidas en dos temas sobre el tópico decimales utilizando como libro de texto Matemáticas 5 (Poquet y López, 2009). Se realizaron tareas y se evaluaron los dos temas. Concretamente, se desarrollaron y evaluaron los siguientes contenidos: Partes y lectura de un número decimal, representación en la recta numérica, ordenación de números decimales, suma, resta, operaciones combinadas con números decimales, el euro, multiplicación por un número natural, multiplicar por dos números decimales, aproximar un cociente a las décimas y a las centésimas, prueba de la división. Dividir un número decimal entre un número natural, dividir un número decimal entre 10, 100 y 1000.

Paralelamente, se explicaron a través de dos sesiones de la materia de Lengua y Literatura qué es un cuento, los distintos elementos: narradores, personajes y momentos de la acción.

Finalmente, se propuso la siguiente tarea a los escolares:

- Por grupos de dos personas, escribid un cuento en el que se utilicen los números decimales. Utilización obligatoria de las distintas operaciones pero siempre utilizando los números decimales. Los cuentos tienen que seguir los momentos de la acción de: planteamiento, nudo y desenlace. Deben aparecer personajes principales y secundarios que realicen distintos tipos de acciones en el cuento. Y finalmente el narrador debe ser de uno de los tres tipos explicados en la sesión de Lengua y Literatura: Omnisciente, testigo o autobiográfico.

El tiempo asignado para la tarea fueron dos semanas y los alumnos tuvieron total libertad en otros aspectos como: el tema, la presentación y la realización de dibujos o viñetas para ilustrar dicho cuento. La tarea no se consideró con carácter evaluativo del aprendizaje, sino únicamente con un fin investigador.

3.3. Instrumento de codificación de datos

La codificación de información se realizó y codificó mediante una ficha que recoge las principales variables que se quieren estudiar (ver anexo). Esta ficha está basada en los diversos significados esperados de los decimales y para su elaboración se realizó un Análisis de Contenido del concepto matemático escolar decimal. Este análisis se considera una "herramienta básica para establecer y estudiar la diversidad de significados de los contenidos de las Matemáticas escolares" (Rico, Marín, Lupiáñez y Gómez, 2008, p. 9). No es objeto de este trabajo describir el análisis de contenido realizado ni las fases del mismo, pero se hace necesario incluir un resumen del resultado obtenido para poder aclarar los epígrafes de la ficha de recogida de datos que hemos denominado de contenido matemático.

Esta ficha de recogida de información se divide en partes claramente diferenciadas. En un primer bloque aparecen las variables relacionadas con el contenido matemático, que están basadas en la noción de significado de un concepto matemático escolar (Rico, 2012) descrito en el marco teórico (estructura matemática, sistemas de representación y fenomenología).

En el primer apartado, relacionado con la representación del concepto, aparecen las casillas relacionadas con conocimientos de los números decimales y sus diversas representaciones. En estas casillas aparecen los hechos y términos relacionados con el decimal como parte entera, parte decimal, coma y sus representaciones verbal, gráfica (en la recta numérica), y sus diferentes notaciones como número racional. En el segundo apartado aparecen las casillas relacionadas con la estructura matemática. Las estructuras aditiva y multiplicativa, donde se destacan las concepciones de las diferentes operaciones aritméticas y las categorías semánticas de los problemas de una etapa (Centeno, 1997). En el tercer apartado aparecen los procedimientos y estrategias que deberían ser utilizados con números decimales aunque no se excluye que sean utilizados con números naturales: ordenación, comparación, estimación y aproximación. Finalmente en el último bloque están los elementos relacionados con la fenomenología: los modelos o usos de los decimales (sistema métrico decimal y sistema monetario) y los contextos en los que se enmarcan los relatos (personal, laboral, social, científico) y que se describen en el marco del proyecto PISA (OCDE, 2013).

CONTENIDO NO MATEMÁTICO

Para el bloque de contenido no matemático en la ficha consideramos los apartados de: tipo de cuento, personajes, el tema elegido, el tipo de narrador y si se cumplen los momentos de la narración. Este segundo bloque contiene partes comunes con la ficha de análisis de cuentos presentada por Blanco y Blanco (2009).

Realizamos una selección de los distintos tipos de cuentos que inicialmente creíamos que nos íbamos a encontrar y que se basa en las temáticas tratadas habitualmente en textos infantiles: ciencia-ficción, fantasía, tradicional o costumbrista, autobiográfico y otros. Esta clasificación es personal e informativa debido a que en esta investigación no existe interés en realizar un análisis exhaustivo de la tipología de los cuentos presentados sino que se ha buscado clasificar de manera muy general los relatos.

Según la tipología que establece Garrido (1993), cuando se habla de narrador nos estamos refiriendo al modo de presentar el universo narrativo. Según la cantidad de información que posee y el punto de vista que utiliza para contarla se clasificar en:

- Relato no focalizado (omnisciente): En estas narraciones el narrador posee todo el saber, disfruta del dominio absoluto del tiempo.
- Relato focalizado externamente (testigo): El narrador tiene restricciones con respecto al saber y solo puede informar de lo que captan sus sentidos. Suele ser llamando el narrador objetivo ya que usualmente es invisible y presenta los hechos con la objetividad y la frialdad de un registro mecánico.
- Relato focalizado internamente (autobiográfico): el punto de observación es el interior del personaje para percibir la historia a través de sus ojos.

Por personaje se entiende al actor provisto de una serie de rasgos que lo individualizan. Estos rasgos son los que justifican su comportamiento y las relaciones que posee con el resto de personajes. Los roles funcionales que cumplen los personajes y que se pueden clasificar en estos dos grupos:

1) El protagonista, personaje en torno al cual gira la acción.
2) El antagonista, personaje enfrentado al anterior.
3) Los personajes secundarios, aparecen y desaparecen dentro la trama del cuento y realizan diversas acciones a lo largo de sus apariciones.

De acuerdo con la clasificación establecida por Cerrillo y García (1995) el cuento se estructura en secuencias distinguiéndose: Situación inicial (introducción), pruebas o ayudas (nudo) y el desenlace.

- En la introducción, se presenta el escenario, los personajes y la historia. La introducción sirve para inducir al lector hacia el conflicto.
- El conflicto comienza cuando aparece un elemento que rompe el equilibrio presentado en la introducción. Esta ruptura genera consecuencias y estas son las que van generando la trama del cuento.
- El desenlace se conoce como el punto donde se rompe esta tensión y se reordenan todos los elementos hacia la normalidad inicial.

4. RESULTADOS

Los resultados de los trece cuentos recogidos se organizan en dos bloques, según las variables del estudio aplicadas se refieran a contenidos no matemáticos o a contenidos matemáticos.

4.1. Contenido no matemático

En cuanto al tipo de tipo de cuento escrito se destacan los cuentos de fantasía ya que el 46,2% (6 de 13) de los cuentos han seguido esta línea, los de ciencia-ficción suponen el 23,1% (3 de 13) y los autobiográficos cuentan con el 7,7% (1 de 13) de los cuentos escritos. Los cuentos de tipo costumbrista no han sido utilizados por parte de este alumnado. Se ha dejado un apartado en el que se encuadraban los cuentos que no se podían clasificar dentro de los otros tipos. De este tipo hay un 23,1% (6 de 13) de los cuentos escritos y que siguen otras líneas como deportes sin ser autobiográficos y pequeños relatos basados en diálogos.

Como norma general en todos los relatos escritos aparecen una media de 7 personajes por cuento, mostrando un abanico que va desde los que solo tienen 4 personajes hasta los que tienen 11. En todos se ha ajustado la función que van a realizar esos personajes y se pueden distinguir entre personajes principales y personajes secundarios. Los personajes principales cuentan con una media de 3 personajes por cada relato mientras que los secundarios cuentan con una media de 4.

En cuanto al narrador se ha propuesto desde el primer momento entre tres tipos de narradores, que era obligatorio elegir: Omnisciente, autobiográfico y testigo. De los tres el que ha destacado ha sido el omnisciente ya que aparece en el 76, 9% (10 de 13) de los relatos, el narrador autobiográfico ha tenido una incidencia del 23,1% (3 de 13) de los relatos mientras que el narrador testigo no se ha utilizado como narrador en ninguno de los relatos presentados. Resulta curioso el hecho de que el narrador testigo no haya sido utilizado como narrador, ya que suele encontrarse así en la mayoría de las situaciones en la vida diaria. Sin embargo, los alumnos se han decantado por el narrador omnisciente, que permite la justificación de las actuaciones de los personajes en tiempo real.

En cuanto a los momentos de la narración se destaca que casi todos los cuentos siguen la estructura explicada en la preparación de la muestra de: introducción, nudo y desenlace. La parte introductoria ha sido desarrollada en el 100% (13 de 13) de los cuentos mientras que el nudo y el desenlace han sido utilizados en el 92,3% de los relatos. Significa que de los 13 cuentos presentados solo uno no sigue este esquema, además como norma general bastantes cuentos desarrollan de forma muy breve el desenlace limitándose a acabar la historia con estas palabras "y fueron felices". En la tabla 1 se resumen estos resultado.

4.2. Contenido Matemático

En el 92,3% (12 de 13) de los cuentos presentados se diferencian y colocan correctamente los elementos de los que consta el número decimal: parte entera, coma y parte decimal.

En cuanto a la representación del número decimal el 92,3% (12 de 13) de los cuentos utiliza una representación simbólica y decimal. Sólo aparece la representación de números decimales como fracción en un cuento por lo que la incidencia total de este tipo de representación es de solo el 7,7%. Sin embargo también ha tenido presencia la representación de tipo verbal ya que cuenta con un 38,5% (5 de 13) de aparición en los relatos presentados. Los otros tipos de representaciones que se habían previsto que tuvieran presencia no han sido utilizados por los autores de los cuentos, estos tipo de representaciones son las de tipo porcentual y las representaciones gráficas.

Tabla 1. Resumen de resultados del contenido no matemático

Tipo de cuento				
Ciencia-Ficción	Fantasía	Costumbrista	Autobiográfico	Otros
23,1%	46,2%	0%	7,7%	23,1%
	Personajes (número medio)			
	Total	Principales	Secundarios	
	7	3	4	
	Narrador			
	Omnisciente	Autobiográfico	Testigo	
	76,9%	23,1%	0%	
	Momentos			
	Introducción	Nudo	Desenlace	
	100%	92,3%	92,3%	

Tabla 2. Frecuencia de aparición de representaciones, notaciones y términos

		Número de casos
Notación	Decimal	12
	Porcentual	0
	Fraccionaria	1
Representación	Simbólica	12
	Verbal	5
	Gráfica (recta numérica)	0
	Otras	0
Hechos y términos	Parte entera	12
	Coma decimal	12
	Parte decimal	12

Con respecto a elementos fenomenológicos, el uso que se hace del decimal no es el esperado: no aparece ni en Sistema Métrico Decimal ni en Sistema monetario. El uso que predomina es el uso del número como etiqueta. Los usos propuestos tras el análisis de contenido previo a la recogida de datos, tampoco han sido utilizados en la mayoría de los cuentos, de esta forma el uso de los números decimales en el sistema métrico decimal no ha sido utilizado y uso de la moneda para los números decimales solo ha sido utilizado en el 7,7% (1 de 13) de los cuentos escritos. Resaltaremos que, como norma general, los escritores han utilizado en sus cuentos los números decimales como nombres y como forma de identificar a los distintos personajes.

Tabla 3. Frecuencias de elementos relacionados con la fenomenología

		Número de casos
Usos	Sistema Métrico Decimal	12
	Sistema Monetario	0
Contextos	Personal	12
	Laboral	5
	Social	0
	Científico	0

Tampoco aparece ninguno de los procedimientos o destrezas que son propios del trabajo con números decimales: ordenación, comparación, la estimación y la aproximación con sus dos vertientes, redondeo y truncamiento.

Las cuatro operaciones aritméticas (adición, sustracción, multiplicación y división) son nombradas y mencionadas en bastantes cuentos pero no se utilizan, en general, para operar. Considerando la estructura aditiva, sólo en un caso se utiliza la suma como operación con concepción unitaria. Un 7,7% utiliza la suma como concepción binaria y también un 7,7% utiliza la resta como concepción binaria. En el caso de suma como concepción binaria debemos destacar que es presentada en un problema de una sola etapa del tipo y en el resto de cuentos no se presentan problemas de tipo aditivo. Destacando que de 13 cuentos solo dos han presentado problemas de estructura aditiva, uno ya se ha mencionado antes y el otro es a través de la suma como concepción binaria en un problema de varias etapas totalmente descontextualizado.

Los contextos dentro de los que se encuadran los pocos problemas que aparecen en los cuentos se clasifican de la siguiente manera en los apartados establecidos: Contexto personal 7,7 % (1 de 13), contexto laboral 7,7 % (1 de 13), contexto social 7,7 % (1 de 13) y contexto científico 0%. De este análisis podemos recoger que solo han sido presentados en los trece cuentos tres problemas con contexto, el resto de los pocos problemas que se presentan están totalmente descontextualizados.

Tabla 4. Frecuencias de elementos de la estructura aditiva

		Suma	Resta
Concepciones	Unitaria	1	0
	Binaria	1	1
Problemas de una etapa	Cambio	1	0
	Combinación	0	0
	Comparación	0	0
Problemas de varias etapas		1	

Si continuamos con la estructura multiplicativa solo es utilizada la multiplicación como una suma repetida en dos cuentos, es decir un 15,4% (2 de 13) del total. En un cuento es presentada como un problema de una sola etapa del tipo de proporcionalidad y en el otro como un problema de varias etapas mezclado con adición y sustracción. También es utilizada la división como cociente en un solo relato a través de un problema del tipo de proporcionalidad. Los problemas vuelven a estar descontextualizados, lo que significa que consisten solo en resolver la operación que se menciona. Quedan desiertas otra vez las previsiones hechas tras el análisis de contenido de que podrían ser utilizadas la multiplicación como combinación, los problemas de una etapa de comparación y también los de producto de medidas.

Tabla 6. Frecuencias de problemas de la estructura multiplicativa

	Multiplicación		División	
Concepciones	Unitaria	1	Reparto	0
	Binaria	1	Cociente	1

Tabla 5. Frecuencias de concepciones de la multiplicación y la división

		Multiplicación	**División**
	Proporcionalidad	1	1
Problemas de una etapa	Comparación	0	0
	Producto medidas	0	0
Problemas de varias etapas		1	

5. CONCLUSIONES

Los estudiantes que han formado parte de este estudio no suelen relacionar los contenidos matemáticos, con situaciones reales o cercanas al alumno. En el caso de los decimales, su uso se limita a aspectos meramente técnicos. Tampoco ponen de manifiesto el dominio de los contenidos tratados en el aula y por tanto no se puede detectar si los alumnos han asimilado esos conceptos y destrezas.

Para poder poner en marcha este recurso de manera satisfactoria se necesita un trabajo previo en el aula, donde los alumnos lean cuantos matemáticos y los trabajen. También es necesario el continuo entrenamiento en la redacción de pequeñas historias o relatos tanto en el aula como fuera de ella. Estos aspectos no se han podido llevar a cabo debido a que este trabajo de investigación comenzó en febrero en un aula de 5º de Primaria con la explicación del tema de números decimales y la programación ya estaba impuesta por el equipo docente del mismo centro.

Tras analizar los datos obtenidos en los análisis de cada cuento se puede afirmar que la los sujetos solo han utilizado los números decimales en estos pequeños relatos para etiquetar a los distintos personajes que aparecían en los mismos. Este hecho muestra que para este alumnado los números decimales en sí, carecen de valor ya que en muy pocos cuentos los números decimales han tenido un valor numérico. Este aspecto preocupa ya que el alumnado no le asocie un valor a cada número implica que no saben cómo utilizar esa cantidad en la vida real. La utilización de las operaciones aritméticas se puso como requisito que debía aparecer en los cuentos, sin embargo también han sido utilizadas como etiquetas en casos como los del siguiente tipo: pueblo "suma", ciudad "multiplicación" o aldea "división". De esta manera no se puede valorar como utilizan los alumnos los distintos tipos de operaciones aritméticas.

Lo que sí se observa es la correcta utilización por parte del alumnado de un vocabulario específico del tema por lo que nos puede llegar a hacer pensar que durante el desarrollo de las sesiones de números decimales los alumnos han realizado más bien un aprendizaje del tipo memorístico. El hecho de en algunos cuentos hayan aparecido operaciones totalmente descontextualizadas parece el reflejo de las consecuencias que tiene el que los problemas que se plantean en el aula no presenten contenidos ni retos cercanos o útiles al alumnado.

En cuanto a los usos y a los contextos en los que aparecen los números decimales se valora que en esta muestra no se haya relacionado el uso de los números decimales con su día a día. Queda reflejado ya que en muy pocos relatos se ha utilizado el número decimal como moneda o método para describir distancias por lo que la desconexión entre el número decimal y su valor como número presentado anteriormente es total por parte de este grupo de alumnos.

Como elementos positivos se ha trabajado de manera simultánea las competencias matemática y lingüística trabajando en coordinación con los departamentos de Matemáticas y Lengua Castellana y Literatura. Sorprende el hecho de que estos alumnos se desmarquen de la estructura que ha tenido siempre el cuento, dejando a un lado la creación de un cuento costumbrista. En este aspecto se puede recalcar que este hecho puede ser debido a la variedad de cuentos que estos alumnos leen debido al plan lector presente en su centro educativo.

Se pueden valorar estos datos y conclusiones obtenidas de manera positiva ya que se ha puesto de manifiesto que para que el cuento sea válido como recurso para la enseñanza de los números decimales se necesitan otros trabajos previos e indicaciones además de los presentados en este trabajo por lo que no se debe de descartar tan ligeramente el cuento como recurso para la enseñanza de números decimales. Otros trabajos como es el caso del proyecto Kovalevskaya (Martín, Lirio y Calvo, 2006) muestran y defienden que este recurso es válido para la enseñanza de otros contenidos matemáticos siempre que se utilicen trabajos previos de preparación como los mencionados anteriormente.

Siguiendo los estándares de evaluación del NCTM (1989), consideramos que es la tercera componente de la competencia comunicación la que ha de considerarse "Usan vocabulario, notación y estructuras matemáticas para representar ideas, describir relaciones y modelar situaciones". En general, los escolares sólo usan el decimal como etiqueta. Sin embargo, el uso que hacen de la notación, términos, representaciones y convenios del decimal es correcta.

Los escolares no expresan ideas matemáticas escribiendo ni representándolas visualmente. La consideración del decimal con estructura matemática (aditiva o multiplicativa) no se realiza. Tampoco se introducen situaciones en las que haya que el uso del decimal haya sido necesario para darles sentido o solución. Por ello, consideramos que la competencia comunicar, referida a decimales, tiene un nivel de consecución bajo y que sería necesario trabajar en ella, pues se considera necesaria.

REFERENCIAS

Adam, J. M. (1992) Les textes: types et prototypes. Récit, description, argumentation, explication et dialogue. París: Armand Colin.

Blanco, B. y Blanco, L.J. (2009). Cuentos de matemáticas como recurso en la enseñanza secundaria obligatoria. *Innovación educativa*, 19, 193-206.

Blanco, B.; Caballero, A. y Blanco, L.J. (2010). Matemática y lenguaje a partir de la lectura de cuentos. *Aula de innovación educativa*, 189, 85-96.

Caballero, A.; Blanco, B. y Blanco, L.J. (2010). Matemáticas a través de los cuentos. *Aula de innovación educativa*, 188, 79-95.

Centeno, J. (1997). Números decimales. ¿Por qué? ¿Para qué? Madrid: Síntesis.

Cerrillo, P. y García, J. (1993). Literatura infantil y de tradición popular. Cuenca, Ediciones de la Universidad de Castilla-La Mancha.

Cohen, L. y Manion, L. (2002). Métodos de investigación educativa. Madrid: Editorial La Muralla.

Garrido, A. (1993). El texto narrativo. Madrid: Síntesis.

Green, J.L. (1983). Research on teaching as a linguistic process: a state of the art. *Review of research education*, 10, 151-252.

Klok, J. V. (2014). On the use of questionnaires in semantic fieldwork: A case study in modality. En A. Belkadi, K. Chatsiou and K. Rowan (Eds.) *Proceedings of the Conference on Language Documentation and Linguistic Theory 4*. London: SOAS.

Marín, M. (1999). El valor del cuento en la construcción de conceptos matemáticos. *Números*, 39, 27-38.

Marín, M.; Lirio, J.; Calvo, M. J. (2006). Proyecto Kovalevskaya. Investigación matemático-literaria en el aula de Primaria (vol. 6). Madrid, Ministerio de Educación y Ciencia, Centro de Investigación y Documentación Educativa.

Marín, M. (2007). Contar las matemáticas para enseñar mejor. *Matematicalia: revista digital de divulgación matemática de la Real Sociedad Matemática Española*, Vol. 3, Nº. 4-5.

MEC (2014). Real Decreto 126/2014, de 28 de febrero, por el que se establece el currículo básico de la Educación Primaria. *BOE, 52*, pp. 19349-19420.

NCTM (1989). Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics. Reston, Virginia, The National Council of Teachers of Mathematics.

NCTM (2000). Principles and Standards for School Mathematics. Reston, Virginia, The National Council of teachers of Mathematics.

Noda, M.A. y Plasencia, I.C. (2002). La matemática de los cuentos. *SUMA*, 41, 93-101.

OCDE (2005). La definición y selección de competencias clave. Resumen ejecutivo. Recuperado el 7 de octubre de 2014 de: http://www.deseco.admin.ch/ bfs/deseco/en/index/03/02.parsys.78532.downloadList.94248.DownloadFile.tmp/ 2005.dscexecutivesummary.sp.pdf.

OCDE (2013). Draft PISA Framework. Descargado el 20 de octubre de 2014 de http://www.oecd.org/pisa/pisaproducts/Draft%20PISA%202015%20Mathematics%20Framework%20.pdf

Poquet, M. y López, P. (2009). Matemáticas 5. Sevilla, Edebé.

Rico, L., Flores, P. y Ruiz-Hidalgo, J.F. (2015). Enseñanza de las matemáticas con sentido. *UNO. Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 70, 48-54.

Rico, L. y Lupiáñez, J.L. (2008). Competencias matemáticas desde una perspectiva curricular. Madrid, Alianza Editorial.

Rico, L.; Marín, A.; Lupiáñez, J.L. y Gómez, P. (2008). Planificación de las matemáticas escolares en secundaria. El caso de los Números Naturales. *SUMA*, 58, 7-23.

Rico, L. (2012). Aproximación a la investigación en Didáctica de la Matemática. *AIEM. Avances de investigación en educación matemática*, 1, 39-63.

Rico, L. y Fernández-Cano, A. (2013). Análisis Didáctico y Metodología de Investigación. En L. Rico, J.L. Lupiáñez y M. Molina, *Análisis Didáctico en Educación Matemática*. Granada: Comares.

Unión Europea (2006). Recomendación 2006/962/CE del Parlamento Europeo y del Consejo de la Unión Europea sobre las competencias clave para el aprendizaje permanente. Bruselas: Comisión de Comunidades Europeas.

ANEXO

Modelos

Usos		Contexto	
Moneda	SMD	Personal	
		Laboral	
		Social	
		Científico	

Contenido no Matemático

Tipo de cuento

Ciencia-Ficción	Fantasía	Costumbrista	Autobiográfico	Otros

Personajes

Nº de Personajes	Personajes	
	Principales	Secundarios

Observaciones	

Tema

Narrador

Omnisciente	Autobiográfico	Testigo

Momentos

Introducción	Nudo	Desenlace

Observaciones	

Épsilon - *Revista de Educación Matemática* *2015, Vol. 32(3), nº 91, 41-60*

Los algoritmos al alcance de la mano. Una aproximación metodológica manipulativa

José García Cantos y María Sotos Serrano
Universidad de Castilla-La Mancha

Resumen: *Presentamos una experiencia educativa sobre el uso de recursos lúdico-manipulativos para la enseñanza de los algoritmos. Se desarrolló con niñas/os de 7 y 8 años, de 2º de Educación Primaria, comparando el aula donde se intervino con otra similar que siguió su programación habitual. Para el análisis se ha optado por una perspectiva cualitativa, mediante observación participativa y entrevistas abiertas a docentes y al alumnado, analizando las opiniones y los comportamientos, así como la comprensión matemática del alumnado.*
Descriptores: *Matemáticas, Educación Primaria, Algoritmos, Recursos lúdico-manipulativos, Matemagia, Cuentos.*

Algorithms at arm's length. A methodological approach toward handling

Abstract: *We present an educative experience about the use of manipulative resources to teach the mathematical algorithms. This experience was carried out with children from 7 to 8 years old, of 2nd of Primary Education, comparing the classroom where we worked with another similar which followed its Didactic Plan. To the analysis we chose a qualitative methodology, focused on a participative observation and opened-interviews to teachers and students, and we analyse the opinions, behaviours and the mathematical learning.*
Key *Words: Mathematics, Primary Education, Algorithms, Manipulative Resources, Mathmagic, Tales.*

INTRODUCCIÓN

El objetivo de la experiencia que a continuación se detalla, que se realizó en un Colegio Público de Albacete, era comparar la metodología tradicional para la didáctica de los algoritmos verticales de suma, resta, multiplicación y división; basado fundamentalmente en el seguimiento del libro de texto y donde el objetivo es que los alumnos dominen unas destrezas de cálculo antes de aplicarlas a problemas prácticos (Carpenter y Moser, 1979), con otra más manipulativa que busca desarrollar en los alumnos un aprendizaje significativo. Desde esta perspectiva más tradicional, la escuela ha puesto mayor énfasis en que los alumnos adquieran soltura en la realización de operaciones escritas, independientemente de si comprenden o no los fundamentos de estas técnicas, llevando a confundir los conceptos de suma, resta, multiplicación y división con la aplicación directa del algoritmo, ya que "para enseñar la división se enseña un método, no una idea" (Plunkett, 1979, p. 3).

Del mismo modo, si analizamos y comparamos los algoritmos escritos con las estrategias usadas por los niños en cálculo mental, podemos observar que éstas son muy distintas. Esto enfatiza que este proceder es extraño para los niños y, por tanto, el aprendizaje del cálculo implica únicamente la aplicación de una serie de reglas que serán interiorizadas por los alumnos en el futuro (Lowry, 1965).

Los efectos de esta metodología, aparte de promover la pasividad cognitiva en los alumnos, no tienen en cuenta los contenidos que los alumnos deben tener antes de iniciarse en el cálculo ya que "no pocas veces, los algoritmos clásicos le son presentados al niño en un estadio de su desarrollo en el que todavía no posee una adecuada comprensión de los conceptos subyacentes; como por ejemplo la noción de valor relativo" (Williams, 1963, p. 272)

Frente a este enfoque metodológico, en este artículo se propone una metodología más abierta y flexible, que parta de los intereses y características de los alumnos de Primaria, que aún no han alcanzado el estadio de las operaciones formales de Piaget y, por tanto, aún no tienen la capacidad de abstracción suficiente para adquirir los contenidos matemáticos de forma abstracta. Por esta razón, "las matemáticas no deben enseñarse ya de una manera expositiva, estática, transmitida por el profesor a un conjunto de alumnos pasivos. Es preciso que estos participen, observen, exploren, hagan conjeturas y se enfrenten con problemas que les interesan" (Chamoso, J.M y Durán, J, 2006, p. 56).

Esta experiencia parte de las ventajas didácticas que ofrecen:

1) Los materiales manipulativos, como las regletas de María Antonia Canals, que favorecen el desarrollo de las habilidades propias de la competencia matemática como son la observación de relaciones numéricas lógicas, la expresión verbal de las acciones realizadas (Canals, 2011).
2) Los recursos lúdicos, como la matemagia, que potencia la motivación del alumno (Koirala y Goodwin, 2000), al tiempo que favorece el razonamiento inductivo deductivo, ya que el niño, a partir de sus vivencias de los resultados obtenidos en los juegos, podrá preguntarse el porqué de algunos resultados y así formular conjeturas más generales.
3) Los cuentos, cuya narración es una actividad que siempre capta la atención de los niños, ya que "la enseñanza de las matemáticas la realizaremos a partir de un elemento

usual en el entorno lúdico del niño, que disfrutará aprendiendo matemáticas" (Sotos y Aguilar, 2005, p.1), al tiempo que "el alumno puede cambiar esa actitud generalizada de rechazo ante las matemáticas, al no presentársele como un compendio de conceptos abstractos e incomprensibles para él" (Sotos y Aguilar, 2005, p. 1).

ANTES DE LA EXPERIENCIA

Antes de la experiencia, se realizaron entrevistas abiertas a los docentes y a los alumnos, con la intención de valorar la percepción que tenían hacia el área de matemáticas. En el caso de los docentes, las preguntas realizadas se pueden agrupar en las siguientes:

- ¿Se pueden "tocar" o "vivenciar" las matemáticas?
- ¿Comprenden mejor los alumnos los contenidos matemáticos manipulando materiales didácticos?
- ¿Qué piensan los docentes de esta metodología?

Tras hablar con los docentes, pudimos obtener las siguientes conclusiones:

a) Los docentes no disponen de tiempo suficiente fuera del aula para preparar materiales. Por otro lado, los maestros consideran que el uso de materiales en el aula conlleva "pérdida de tiempo", aspecto que imposibilita la terminación del temario.

b) La gestión del aula se complica al dar a los niños el material para manipularlo, ya que suelen hablar más y prestan menos atención.

c) Los docentes usan en exceso el libro de texto ya que, de esta forma, les es más fácil realizar su labor diaria. Del mismo modo, los maestros expresan que los padres "se ponen nerviosos" si sus hijos no llevan a casa diariamente hechos los ejercicios del libro y de la libreta; porque los padres dan más importancia a las actividades escritas por encima de las manipulativas.

d) La excesiva coordinación entre docentes de un mismo curso puede, en ocasiones, ser un inconveniente ya que, el docente pierde su idiosincrasia para adaptarse a los procesos de enseñanza del otro maestro con el fin de evitar comparaciones entre los padres.

e) Los maestros del centro consideran que los niños de primaria son mayores para usar materiales manipulativos, pues piensan que en el fondo son solo juegos.

Estas reflexiones nos llevan a compartir la idea de Mª Antonia Canals que pone de manifiesto que el uso de los materiales se va dejando de lado de una forma inconsciente para dejar paso a la "costumbre" ampliamente generalizada del libro de texto (Canals, 2009).

Por su parte, antes de la experiencia, los alumnos tenían una visión negativa del área de matemáticas. Algunos de los comentarios de los alumnos eran:

- Las matemáticas son aburridas.
- Las matemáticas son difíciles de entender.
- ¿Para qué me sirven las matemáticas?

Estos comentarios de los alumnos muestran la desconexión existente entre las matemáticas que se enseñan en la escuela y la realidad del niño, lo que imposibilita el desarrollo de la competencia matemática al no estar contextualizada.

DURANTE LA EXPERIENCIA

Metodología

La metodología seguida tenía por objeto comparar los dos modelos pedagógicos planteados: el tradicional y el constructivista. Para ello, propusimos en un aula una metodología basada en la incorporación de materiales didácticos, con la finalidad de que el alumnado tomase contacto con los contenidos de una manera intuitiva y lúdica, al tiempo que utilizamos otra aula como grupo de control, en la que se siguió una metodología basada en la lección magistral y el libro de texto. Esta experiencia se desarrolló durante el período de prácticas docentes del alumnado del Grado de Maestro de Educación Primaria, de la Facultad de Educación de Albacete.

Para la recogida de datos se llevaron a cabo entrevistas y observación directa y participativa en las dos aulas, de acuerdo con unos ítems previamente seleccionados. Con estos ítems se analiza el efecto del uso de materiales didácticos en matemáticas desde tres ámbitos: las/os docentes (a través de entrevistas abiertas realizadas antes, durante y después del proceso), el alumnado (donde valoramos su nivel de implicación en el aula y el ambiente cooperativo) y el rendimiento (que fue valorado mediante los exámenes y la observación directa del alumnado).

Objetivos de la Propuesta Metodológica

Partimos de la base de que los materiales manipulativos y los recursos lúdicos son instrumentos útiles para la enseñanza de las matemáticas.

La práctica educativa que se presenta es una experiencia puntual que puede servir para analizar las posibilidades que determinados recursos tienen en la enseñanza de los algoritmos.

Los objetivos de esta propuesta metodológica son:

1) Comprobar si el uso de recursos y materiales mejora la comprensión de las operaciones matemáticas en los alumnos de primaria.
2) Comprobar si el uso de materiales didácticos modifica la percepción de los alumnos hacia las matemáticas en caso de que ésta fuera negativa.
3) Desarrollar la lógica, la participación y el pensamiento inductivo-deductivo en los alumnos de Primaria.
4) Crear hábitos de investigación en los niños a partir de la manipulación de materiales.

PLANTEAMIENTO METODOLÓGICO DE ACTIVIDADES CON MATERIAL MANIPULATIVO

Regletas de M. Antònia Canals

En este apartado plantearemos, de una forma práctica, una secuencia didáctica basada en el uso de las regletas. Para ello, describiremos actividades que se podrán relacionar con las siguientes dos fases: la construcción del concepto de número y la construcción de las operaciones.

ACTIVIDAD 1: ACTIVIDADES DE DESCOMPOSICIÓN NUMÉRICA

La descomposición numérica es un aspecto clave que debe llevarse a cabo antes de iniciar al alumno en el sistema decimal. Con ejercicios de descomposición numérica como el que a continuación presentamos, trabajamos al mismo tiempo varias destrezas matemáticas (descomposición numérica, propiedad conmutativa, comparación…). Por ejemplo, comenzamos la actividad dándole al niño una regleta, en nuestro caso la regleta del 5 (color verde). A continuación, le haremos al niño la siguiente pregunta: ¿Cuántas regletas blancas crees que valen lo mismo que la verde?

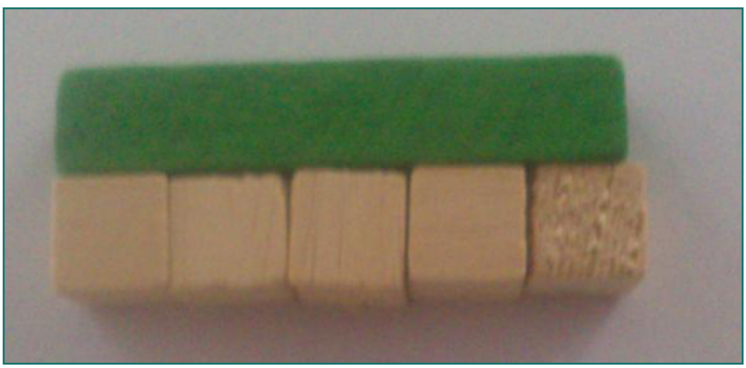


Imagen 1. Descomposición numérica en unidades

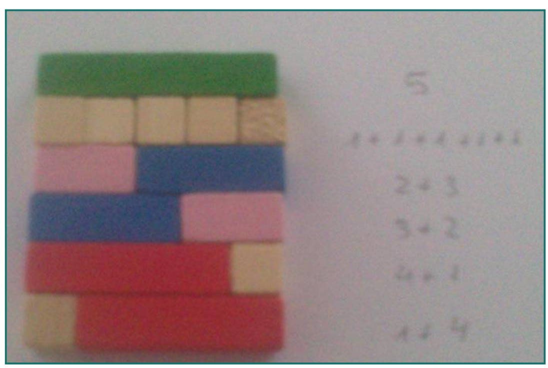


Imagen 2. Descomposición numérica completa.

Una vez hecho lo anterior se podría preguntar: ¿Una regleta verde es igual a cinco blancas? Al final, podríamos terminar preguntando: ¿Cómo podríamos construir con otras regletas una verde?

ACTIVIDAD 2: LAS REGLETAS Y LA BASE DE NUMERACIÓN DECIMAL

El dominio del sistema de numeración en base 10 es una herramienta fundamental que los niños tienen que entender y manejar con soltura. De esta forma, los alumnos podrán utilizar un lenguaje matemático que todos conocemos y que será la base de la lectura y escritura de números, operaciones escritas…

El concepto del sistema de numeración en base 10 debe introducirse con materiales basados en unidades sueltas, que reunidas de diez en diez, forman las decenas; que más adelante se reunirán para formar la centena (Canals, 2011).

Cuando los alumnos han observado que el sistema de numeración en base 10 consiste en ir agrupando unidades, decenas, centenas…de diez en diez, podremos pasar a simbolizar la decena con una regleta marrón. En este momento, los niños ya sabrán descomponer las regletas dadas como suma de otras regletas, estableciendo así las equivalencias entre unidades, decenas y centenas. Posteriormente, los niños observarán que 10 regletas marrones unidas forman un cuadrado, la centena; y 10 centenas reunidas, formarían un cubo, el millar.

El objetivo fundamental de trabajar este concepto es que los niños entiendan este principio fundamental: "Las cantidades, o sea los números, sólo cambian si les añadimos o les quitamos alguna cantidad. Sus unidades podemos agruparlas de diferentes maneras sin que por ello se modifique el valor de la cantidad total" (Canals, 2011). Para conseguir esto, debemos plantear actividades que fomenten la habilidad de representar una cantidad cambiando unas regletas por otras. A continuación, se propone la siguiente actividad (Canals, 2011):

DIFERENTES MANERAS DE AGRUPAR LAS UNIDADES DE UN NÚMERO

Rellena la parte central con material o con un dibujo y escribe en la última columna. Hay que contar con atención y hacer los cambios que convenga, sin modificar el valor de las cantidades.

Cantidad	Con las regletas que se indica y las unidades sueltas	Escrita en base diez
Treinta y cuatro	Con regletas del 5	
Cuarenta y cinco	Con regletas del 8	
Diecisiete	Con regletas del 3	
Veintiocho	Con regletas del 7	

ACTIVIDAD 3: INICIACIÓN A LA SUMA

La manipulación de las regletas favorece la adquisición del concepto de suma de dos números como reunión de cantidades. Para realizar una suma con regletas, basta con ponerlas una a continuación de otra. De esta forma, los alumnos comprenderán que el resultado de la suma es la reunión de varias longitudes en una sola. A su vez, este último aspecto, nos lleva a afirmar que las regletas no solo desarrollan una noción cuantitativa de la suma sino también una geométrica: la suma de dos segmentos de una misma línea es un segmento que se expresa con longitud.

Por otra parte, las regletas de Mª Antonia Canals nos dan la posibilidad de trabajar el cálculo mediante los bloques multibase. A continuación se presenta un ejemplo de cómo podría trabajarse este concepto con las regletas y con los bloques multibase:

Pedimos a los niños que cojan las regletas del 4, 5 y 7. A continuación, después de haberlas puesto una a continuación de otra, les diremos que busquen un par de regletas cuya suma tenga la misma longitud (Caso 1).

Conviene destacar que en la introducción del concepto suma debemos utilizar un lenguaje accesible al niño, dejando incluso que ellos mismos representen, a su manera, y de forma gráfica lo que están haciendo. Por esta razón, como se observa en la imagen, en el planteamiento de la actividad no se recurre a ninguna formulación matemática.

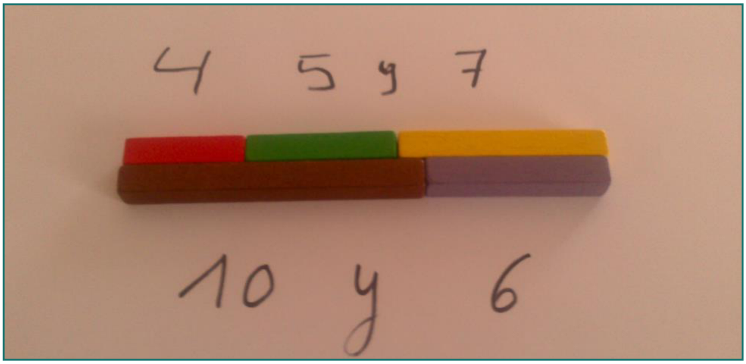


Imagen 3. Iniciación a la suma.

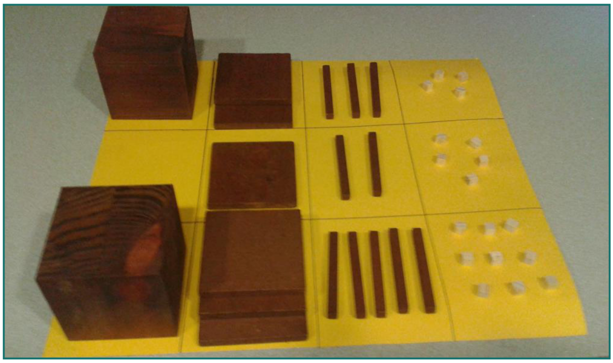


Imagen 4. Suma con las regletas de M. A. Canals.

Para operaciones más complicadas y, como paso previo a la iniciación del algoritmo de la suma, podemos también usar las regletas de Mª Antonia Canals del modo que se muestra en la imagen de abajo (Caso 2):

ACTIVIDAD 4: INICIACIÓN A LA RESTA

Al igual que ocurre en el caso de la suma, en la resta, el uso de regletas nos permite trabajar este concepto desde una perspectiva cuantitativa y geométrica. En este caso, para restar dos números bastará con poner las regletas una al lado de la otra y buscar lo que le falta a la más pequeña para llegar a la mayor. Esta forma de trabajar la resta es interesante por varios motivos: en primer lugar, el hecho de tratar la resta como una operación complementaria de la suma, hace que el alumno vaya comprendiendo las relaciones entre operaciones. Por otro lado, debemos tener en cuenta que, cuando restamos mentalmente, no seguimos los pasos del algoritmo de papel sino que, buscamos un número que sumado al menor, nos dé el mayor. A continuación se presentan algunos ejemplos de actividades (Caso 1)

Del mismo modo, al igual que en el planteamiento didáctico de la suma, en la resta, también podemos utilizar los bloques multibase como forma de introducir el algoritmo de la resta sin y con llevadas (Caso 2). A continuación mostramos ambas posibilidades:

Comenzamos la actividad pidiendo al niño que compare la regleta del 7 (amarilla) y la del 5 (verde). Los niños automáticamente dirán que las regletas no son iguales ya que su longitud no es la misma (Caso 1) (ver imagen 5).

Llegado a este punto y, como los niños ya saben sumar, pediremos que busquen una regleta que, sumada a la verde, tenga la misma longitud que la amarilla. Los niños, después de probar, comprobarán que la suma de la regleta verde y la rosa tiene la misma longitud que la amarilla.

A continuación, presentamos el segundo caso, donde trabajaremos la resta usando las regletas como bloques multibase (ver imágenes 6, 7, 8, 9 y 10):

En este caso, partimos de la operación 233-129. Como a tres unidades no le podemos restar nueve, transformamos una decena en diez unidades. Al realizar esta transformación si podemos realizar la operación 13 unidades menos 9 unidades, que da 4 unidades. Tras operar con las unidades, pasamos a las decenas. Dos decenas menos dos decenas, son 0 decenas. Finalmente, restamos las centenas. Dos centenas menos una centena nos da una centena. El resultado final es 104.

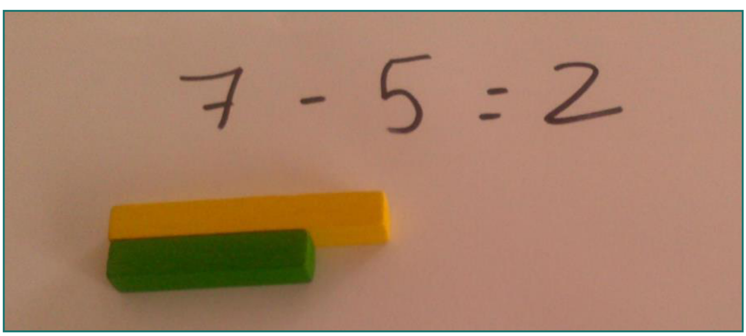


Imagen 5. Iniciación a la resta

Imagen 6. La resta con bloques multibase 1.

Imagen 7. La resta con bloques multibase 2.

Imagen 8. La resta con bloques multibase 3.

Imagen 9. La resta con bloques multibase 4

Imagen 10. La resta con bloques multibase 5

ACTIVIDAD 5: PROPIEDADES DE LAS OPERACIONES

Como hemos podido observar, el uso de las regletas nos permite trabajar conceptos matemáticos más avanzados sin necesidad de recurrir a la abstracción. Para trabajar las propiedades conmutativa y asociativa, podemos partir de la realización de sumas y restas combinadas (Canals, 2011). De esta forma, los niños podrán observar que el resultado final no varía mientras se conserven los signos que el número lleva delante y, además, también observará que el resultado total no varía agrupando los diversos números de distintas maneras. Antes de pasar a detallar la actividad, hay que destacar que la formulación de cada propiedad por su nombre es algo innecesario en los primeros niveles de Primaria. Con estas actividades, procuramos que el niño vaya adquiriendo y comprendiendo distintas estrategias que pueda usar en su cálculo mental.

DESCUBRIMIENTO DE LAS PRIMERAS PROPIEDADES

1 El ordren de las operaciones

- Hacemos una suma y una resta, una a continuación de la otra:

5 + 4 - 3

- Primero las haremos con regletas, en dos partes, en el orden en que están escritas:

5 + 4 = 9   9 - 3 = 6

- Después las haremos, también con regletas, cambiando el orden:

Haz: 5 - 3 = ...
Ahora, al número que te salga súmale 4 y escríbelo:

Responde :
Al cambiar el orden de las operaciones, ¿ha cambiado el resultado?

Haz otras pruebas y explica si crees que esto pasa siempre o no.

2 Agrupando los números de diferentes maneras

- En estas sumas y restas podríamos reunir algunos números antes de empezar:

Ejemplo: 4 - 2 + 16 - 6 + 8 - 5

Primero los agruparemos así:
(4 - 2) + (16 - 6) + (8 - 5); (así el segundo paréntesis nos resulta más fácil)

- Hazlo con regletas.
- Escribe el resultado parcial, y después el resumen de cada operación y el resultado final:

.... + ... + ... = ...

- Ahora piensa otra manera de agrupar los números y haz las operaciones.
- Explica el motivo por el cual has decidido agruparlos de esta manera.
- ¿Crees que agrupando los números de cualquier manera obtenemos siempre el mismo resultado?
- ¿Hay que respetar alguna condición? Si crees que sí, explica cuál.

Imagen 11. Descubrimiento de las primeras propiedades (Canals, 2011, p. 81).

ACTIVIDAD 6: INICIACIÓN A LA MULTIPLICACIÓN

A la hora de introducir el concepto de multiplicación en la escuela debemos tener especial cuidado, ya que el niño puede llegar a la conclusión, a veces errónea, de que multiplicar significa hacer un número más grande, tantas veces. Es interesante resaltar la diferencia conceptual que existe entre suma y multiplicación para comprender cómo construirlo con regletas. En el caso de la suma, se relacionan dos o más números que representan objetos de la misma naturaleza. Por esta razón, la construcción de la suma con regletas es lineal. En cambio, la estructura multiplicativa, relaciona un número o cantidad con las veces que éste se repite. Por ello, la construcción de la multiplicación a partir de regletas será una figura en dos dimensiones, un rectángulo, en el que la longitud de cada lado representa cada uno de los factores.

En este momento, también debemos destacar que, la estructura de una multiplicación en la que intervienen tres factores, será un prisma rectangular en el que las medidas de las tres aristas coinciden con el valor de los tres factores que intervienen en la operación. A continuación se plantean ejemplos de actividades de multiplicación:

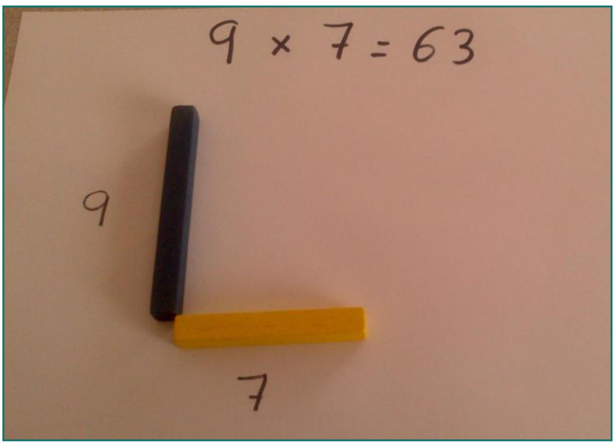


Imagen 12. Iniciación a la multiplicación 1.

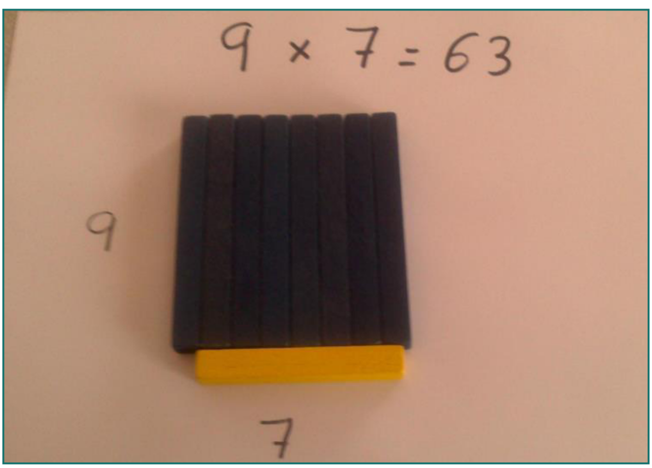


Imagen 13. Iniciación a la multiplicación 2.

La actividad comienza pidiendo al niño que calcule cuánto es nueve veces siete. Para ello, en primer lugar, el niño formará un "marco" con las regletas del nueve y del siete (imagen 1). Posteriormente, se forma un rectángulo con regletas del mismo color, en este caso, con regletas del nueve (imagen 2). Al final, retiramos el "marco" y queda un rectángulo de lados nueve y siete (imagen 3).

Imaginemos ahora, que pedimos a los niños que hagan una multiplicación en la que intervengan tres factores, 4 x 6 x 3. En este caso, representaremos con regletas una figura con volumen, un prisma, cuyas aristas sean los factores (imagen 4).

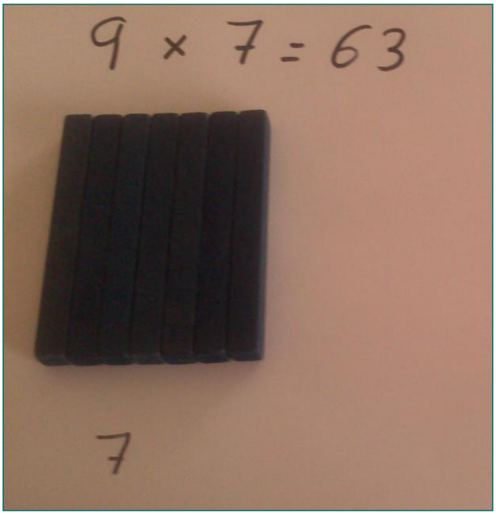


Imagen 14. Iniciación a la multiplicación 3

Imagen 15. Multiplicación de 3 factores.

LA RUEDA DE LA MULTIPLICACIÓN

A la hora de trabajar la multiplicación con los alumnos y, más concretamente las tablas de multiplicar, es interesante utilizar como recurso metodológico "La Rueda de la Multiplicación" de la Pedagogía Waldorf. Entendiendo que cada tabla de multiplicar, define un conjunto numérico, este recurso metodológico nos permitirá trabajar las propiedades de cada tabla de multiplicar, comprendiendo su naturaleza (ver imagen 16).

Al relacionar las figuras entre sí podemos descubrir que números diferentes forman estrellas o polígonos iguales. Sin embargo, existe una diferencia al trazarlos, ya que las primeras cuatro se dibujan de derecha a izquierda y en las cuatro últimas, el trazado es de izquierda a derecha. (Reinhardt, 2007).

Además, existe una correspondencia de relaciones entre las figuras y el número base de la serie numérica. Así, en la serie:

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Muestra al cinco en el lugar central, dividiendo a la serie en dos sectores que poseen la misma cantidad de elementos: cuatro elementos. A partir del cinco, cuyo trazado es lineal, es decir, no forma ni estrella ni polígono, y hacia ambos lados, los números forman estrellas y polígonos de igual visualización. Se forma un eje de simetría donde podemos ver figuras de igual diseño pero movimiento contrario (Reinhardt, 2007).

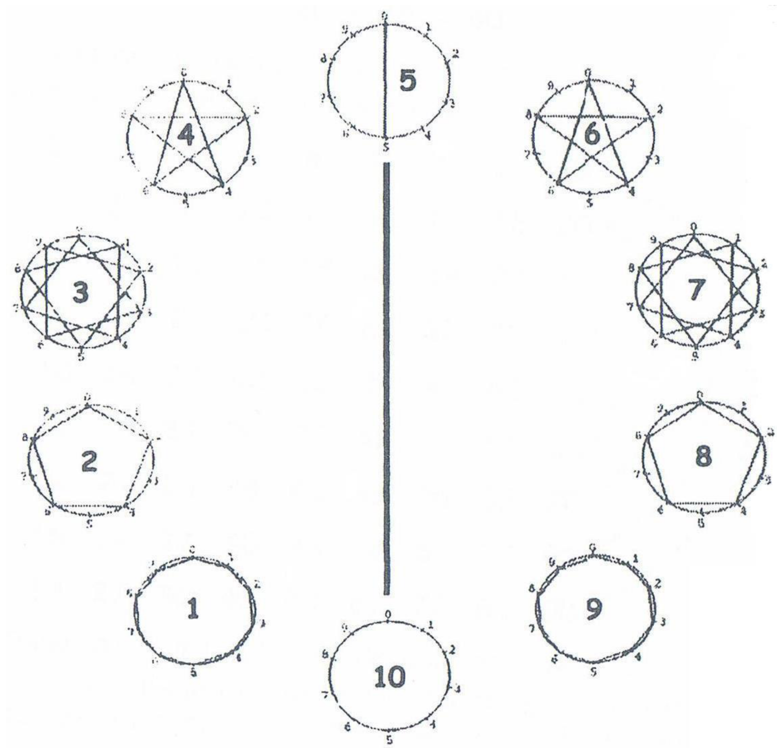


Imagen 16. Las ruedas de la multiplicación

MATEMAGIA Y CUENTOS COMO ELEMENTOS LÚDICOS

El planteamiento pedagógico que se ha ido realizando anteriormente con regletas se puede completar con otros recursos lúdicos como la Matemagia y los Cuentos. Ambos recursos buscan "suavizar" la abstracción matemática; el primero, la Matemagia, nos permite analizar de forma práctica las propiedades numéricas y geométricas (Blasco, 2007). Por su parte, la didáctica de las matemáticas a través de cuentos facilita la adquisición de los contenidos al presentarlos de una forma mucho más lúdica, cambiando así la percepción que el alumno tiene hacia el área de matemáticas. A continuación proponemos una serie de actividades con Matemagia y cuentos a modo de ejemplo.

ACTIVIDADES CON MATEMAGIA

1) Escribe un número de tres cifras que no sea capicúa.

2) Ahora escribe el número de arriba cambiando sus cifras (la cifra de las unidades pasará a las centenas y la de las centenas pasará a las unidades)

3) Resta los dos números anteriores. No olvides restar el número mayor al menor. Si obtienes un número menor que 100, como por ejemplo el 97, escribe 097.

4) Escribe el número anterior con las cifras invertidas.

5) Suma los números obtenidos en el paso 3 y 4.

6) Escribe el número que has obtenido__________

¿Adivinaré la suma de las cifras del resultado?

1) Escribe un número de tres cifras que no sea capicúa.

2) Escribe el mismo número invirtiendo sus cifras (Las unidades pasarán a las centenas y las centenas a las unidades).

3) Resta los dos números anteriores. No olvides restar el mayor al menor.

4) Suma las cifras del resultado que has obtenido. El número es el _______________

UN CUADRADO MÁGICO

Realiza los movimientos que se describen en el cuadro de abajo. Cada movimiento se hará en horizontal o vertical. Posiciónate sobre una casilla y comienza el juego.

1) Muévete tantas veces como indica el valor de la casilla donde te encuentras.
2) Tacha el 1 y muévete 3 veces. (Por el 1 ya no puedes pasar).
3) Tacha el 2 y el 4 y muévete cinco veces.
4) Tacha el 7 y el 9. Muévete 7 veces y retira el 8.
5) Muévete tantas veces como letras tenga tu nombre.
6) Mueve tantas veces como indica el valor de la casilla donde te encuentras.
7) Retira el 3 y el 5. Mira el sobre y verás que la predicción es correcta.

1	2	3
4	5	6
7	8	9

CUENTO DEL GATO CON BOTAS Y LA RESTA CON LLEVADA

Érase una vez un molinero que dejó, como única herencia a sus tres hijos, su molino, su burro y su gato. El reparto fue bien simple. El mayor recibió el molino, el segundo se quedó con el burro y, Tadeo, el menor, le tocó sólo el gato. Este se lamentaba de su pobre herencia y decía:

− Mis hermanos podrán ganarse la vida trabajando juntos; pero yo, después de comerme a mi gato me moriré de hambre.

El gato, que escuchaba estas palabras, pero se hacía el distraído, le dijo en tono serio y pausado:

− No debes preocuparte, Tadeo. Soy un gato aficionado a las matemáticas. Confía en mí y verás como tu herencia no es tan pobre como piensas,

En principio, Tadeo no se hacía grandes ilusiones, pero tras ver que su gato era muy hábil en el cálculo, confió en que pudiera sacarle de la miseria.

Pasados unos días, llegó a oídos del gato que en la corte del rey, los matemáticos estaban muy tristes porque no sabían cómo resolver la resta 256 - 37. El rey había prometido que aquel que explicara cómo hacer la resta, se casaría con su hija, la princesa más hermosa de todo el reino. Ni corto ni perezoso, el gato subió corriendo al trastero y cogió de la estantería unos bloques multibase que echó inmediatamente a su saco y marchó corriendo al castillo.

Cuando llegó, se colocó al final de una gran cola que daba la vuelta al castillo. Todos los sabios del reino estaban allí, reunidos, esperando ansiosos su turno. En la puerta del castillo se encontraba el Jefe de la Guardia Real quien controlaba el orden de la cola. El gato se dio cuenta que, cada poco tiempo, los sabios que entraban, salían muy tristes del castillo. Unos salían llorando, otros; salían murmurando que esa resta era imposible de resolver. Así, transcurrieron las horas hasta que llegó el turno del gato. Era ya de noche cuando el Jefe de la Guardia le dio permiso para entrar.

– Diríjase a los aposentos de su majestad– le dijo en tono cortante. El gato entró corriendo al castillo. Atravesó un pasillo muy largo y giró a la izquierda. Allí, se encontraban los aposentos de su majestad. El gato llamó a la puerta. Al instante, una voz apenada le dio permiso para entrar.

El gato entró en una estancia cuadrada. Allí, alrededor de una gran mesa cubierta de pergaminos, estaban el rey y el matemático más famoso de la corte, Fermat.

– ¿A qué ha venido usted, si puede saberse? –preguntó el rey al gato.

– Majestad, vengo de parte de mi amo, el Marqués de Caravás –que era el nombre que se había inventado para su amo–, quién ha descubierto cómo resolver la operación que les trae de cabeza.

El rey miró incrédulo al gato y le dijo: –Este enigma no tiene solución. Fermat, mi matemático más prestigioso, ha llegado a la conclusión de que es imposible realizarla. En la resta 256-37, no podemos quitar a 6 unidades 7. Eso es imposible.

El gato que había escuchado muy atento, sacó de su bolsa los bloques multibase que llevaba. –Fíjense bien –les dijo–. Este cuadrado grande que ven representa una centena; esta barrita formada por diez unidades es una decena y, estos cubos, son las unidades. Ahora, vamos a formar con los bloques el minuendo, el 256.

Fermat formó el minuendo cogiendo dos centenas, cinco decenas y seis unidades.

– Muy bien. –Dijo el gato–. Ahora, debajo de este número, vamos a formar con los bloques el sustraendo, el 37. No olviden poner las unidades debajo de las unidades y las decenas debajo de las decenas. Esto es muy importante –dijo el gato muy serio.

Fermat, formó el sustraendo. Para ello, cogió 3 decenas y 7 unidades que colocó correctamente, tal y como el gato había indicado.

– Como ustedes han dicho, a 6 unidades no le puedo quitar 7. Entonces, en este caso, el seis de las unidades pide al cinco de las decenas que le preste diez unidades. Ahora, tenemos 16 unidades y, si le quitamos 7, nos quedan 9 unidades –el gato siguió explicando–. En la columna de las decenas del minuendo, ya no tenemos 5 decenas sino cuatro, porque el cinco ha prestado una decena a las unidades. Y, ahora, si a cuatro decenas le quito tres, nos queda una decena. La columna de las centenas es la más fácil, si a dos no le quito nada, me queda 2. Luego el resultado es 219.

El rey y Fermat se miraron sorprendidos. ¡El amo del gato había resuelto el misterio!

– Fantástico gato. –dijo el rey–. Dale las gracias a tu amo, el Marqués de Caravás, y dile que venga a palacio a pedir la mano de mi hija, la princesa.

El gato le dio al rey las gracias y se marchó.

Cuando el gato llegó a casa de su amo, se lo contó todo. El Marqués sorprendido por la audacia de su gato le dio las gracias. A la mañana siguiente ambos fueron al palacio del rey. El Marqués pidió la mano a la princesa. Ella aceptó. Se casaron, fueron felices y comieron perdices.

DESPUÉS DE LA EXPERIENCIA

Hemos podido comprobar que en el aula de 2º B los alumnos intervenían más y aportaban estrategias más complejas en la resolución de problemas, lo que implica una mejora en la comprensión y expresión de los contenidos matemáticos. Una clara muestra de ello fueron los comentarios realizados por los niños: "¡Que bien me lo he pasado hoy en clase de matemáticas!" o, "¡Profe, ¿Puedo coger las regletas? Es que así, sí lo entiendo!". Del mismo modo, los alumnos preferían quedarse en clase de matemáticas que a ir al aula de ordenadores, donde estaban aprendiendo a trabajar con Word.

Desde el punto de vista de los resultados académicos podemos observar cierta mejoría, tal y como se observa en la tabla 1.

Tabla 1. Calificación obtenida por los 2 grupos

CALIFICACIÓN	2º A		2º B	
	1ª Ev.	2ª Ev.	1ª Ev.	2ª Ev.
INSUFICIENTE	19.7%	21.73%	9.09%	9.09%
SUFICIENTE	18.45%	17.39%	7.54%	4.54%
BIEN	32.26%	30.43%	34.27%	27.27%
NOTABLE	18.95%	17.39%	27.29%	27.27%
SOBRESALIENTE	10.64%	13.04%	21.81%	31.81%

REFLEXIONES FINALES

Hay evidencias de que el uso de materiales mejora la comprensión de los conceptos matemáticos en el niño. Esta cuestión, que ha sido analizada de forma cuantitativa y cualitativa, responde a una cuestión de lógica: Según Piaget, el niño alcanza el estadio de la abstracción a los 12-14 años. Por esta razón, presentar conceptos abstractos a niños que no tienen esa capacidad es algo contraproducente para el niño y para las matemáticas.

Del mismo modo, el uso de materiales y recursos lúdico-manipulativos modifica la percepción que los alumnos tienen hacia el área de matemáticas ya que el alumnado, al verse como agente activo en la construcción de su propio aprendizaje, está mucho más motivado y su predisposición hacia el área de matemáticas mejora.

Por otra parte, el hecho de manejar conceptos matemáticos "abstractos", a partir de la manipulación, permite a los alumnos, mediante la investigación, dar respuestas razonadas y comprobar las relaciones lógico-numéricas. De esta forma, estamos fomentando el pensamiento inductivo-deductivo de los alumnos; el primero, al comprobar si ciertos resultados o propiedades concretos, observados en la manipulación de las regletas y en los juegos matemágicos, siguen una Ley o propiedad determinada y, el segundo mejora al plantear cuestiones que los alumnos deben resolver con el uso de materiales. En el planteamiento de estas cuestiones, seguiremos los pasos del método científico, planteando hipótesis cuya validez se contrastará posteriormente.

El desarrollo de un proceso de investigación es un aspecto fundamental que no debe quedar relegado a un segundo plano ya que, debemos crear en los alumnos hábitos de investigación con el fin de favorecer el desarrollo de la competencia "aprender a aprender". En el área de matemáticas, este hecho sólo será posible si adaptamos metodológicamente los contenidos a nuestros alumnos.

REFERENCIAS

Blasco, F. (2007). Matemagia, Madrid: Ediciones Temas de Hoy.

Canals, M. A. (2009). Primeros números y operaciones, Barcelona: Rosa Sensat.

Canals, M. A. (2011). Las Regletas, Barcelona: Rosa Sensat.

Carpenter, T. P, y Moser, J. M (1979). The development of Addition and Subtraction Concepts in young children. En Tall, D. (ed) Proceeding of the Third International Conference for the Psychology of Mathematics Education. Warwick University: Coventry.

Chamoso, J. M y Durán, J. (2006). Enfoques actuales en didáctica de las matemáticas. Madrid: Ministerio de Educación y Ciencia.

Koirala, H., Goodwin, P. (2000). Teaching Algebra in the Middle Grades Using Mathmagic. Mathematics Teaching in the Middle School, 5, 562-566.

Lowry, W. C. (1965). Structure and the algorithms of arithmetic. Arithmetic Teacher, 12, 146-150.

Plunkett, S. (1979). Descomposition and All That Rot. Mathematics in School, 8(3), 2-5.

Reinhardt, A. E. (2007). Des-cifrar. La matemática en la escuela. Tomo I. Villa Adelina: Antroposófica.

Sotos, M., Aguilar, J. M. (2005). Cuentos y matemáticas. El debate entre el modelo Inspector Gadget y el modelo McGiver. Recuperado el 1 de julio de 2015, de https://goo.gl/yXjzXz.

Épsilon - *Revista de Educación Matemática* 2015, Vol. 32(3), nº 91, 61-68

La funcion de distribución como un juego

África Ruiz-Gándara
Universidad de Córdoba

Resumen: *Dada la dificultad con la que nos encontramos a la hora de estudiar los conceptos estadísticos más básicos y la importancia que la estadística va adquiriendo a lo largo del tiempo, es útil y necesario desarrollar mecanismos educativos que faciliten su comprensión y motiven el interés al alumno. En este trabajo se desarrolla un método divertido, real y útil para entender, construir y estudiar la función de distribución de una variable aleatoria.*
Palabras claves: *Educación estadística, Ideas de aula, Función de distribución*

The distribution function as a game

Abstract: *Given the difficulty that we found when study the most basic statistical concepts and the importance of statistics is acquired over time, it is useful and necessary to develop educational mechanisms that help understanding and encourage the student's interest. In this paper develops a fun, real and useful method to understand, build and study the distribution function of a random variable.*
Keywords: *Education statistics, Ideas classroom, distribution function*

INTRODUCCIÓN

La enseñanza de la estadística ha cobrado una gran importancia. Ello ha impulsado la investigación y el desarrollo curricular en este campo específico. Ejemplos de proyectos curriculares de este tipo son, los del Schools Council Project on Statistical Education en el Reino Unido (1957-1981) y el Quantitative Literacy Project (1985-98) y Data Driven Mathematics (1996-2000) en Estados Unidos. Los materiales didácticos, el software educativo, investigaciones, revistas, reuniones y congresos sobre la enseñanza de la estadística han crecido espectacularmente en los últimos años.

Las razones para el interés hacia la enseñanza de la estadística han sido desarrolladas por diversos autores, Holmes (1980) señala que la estadística es una parte de la educación general deseable para los futuros ciudadanos adultos, es útil para la vida laboral, ayuda al desarrollo personal y facilita la comprensión de los restantes temas del Curriculum. Por otro lado, Fischbein (1975) apoya la necesidad de mostrar al alumno una imagen más equilibrada de la realidad, en la que hay una fuerte presencia de fenómenos aleatorios.

Así mismo, Begg (1997) señala que la estadística es un buen vehículo para alcanzar las capacidades de comunicación, tratamiento de la información, resolución de problemas, uso de ordenadores, trabajo cooperativo y en grupo, a las que se da gran importancia en los nuevos currículos.

Además, la probabilidad y la estadística pueden ser aplicadas a la realidad tan directamente como la aritmética elemental puesto que no requieren técnicas matemáticas complicadas. Por sus muchas aplicaciones, proporcionan una buena oportunidad para mostrar a los estudiantes las aplicaciones de la matemática para resolver problemas reales, siempre que su enseñanza se lleve a cabo mediante una metodología heurística y activa, enfatizando la experimentación y la resolución de problemas.

Como afirma Batanero (2001) la naturaleza interdisciplinar de la estadística hace que los conceptos estadísticos aparezcan en otras materias, como ciencias sociales, biología, geografía, etc., haciendo necesario que los alumnos adquieran un buen conocimiento de ellos para poder interpretarlos correctamente.

En la enseñanza, la simulación cobra un papel importante, ya que ayuda al alumno a conocer las diferencias entre la probabilidad experimental y la teórica, y ayuda a través de un sencillo experimento a asimilar conceptos teóricos estadísticos claves que a menudo al alumno le cuesta entender y manejar (Cobo y Batanero, 2000) como pueden ser, función de probabilidad, probabilidad (Gómez-Torres, Batanero y Contreras, 2014),, función de distribución, o variable aleatoria que Heitele (1975) propuso como una idea fundamental dentro de la enseñanza escolar. Esta simulación ayuda a su vez, a que el alumno conozca la parte aplicada a la vida real de la estadística. A continuación se expone una actividad-simulación para ayudar a la asimilación de los conceptos citados.

LA ACTIVIDAD

Se les propone a los alumnos realizar un experimento, a través del cual van a ir estudiando conceptos elementales de la estadística que resultan de difícil comprensión para ellos de manera teórica. El experimento puede ser cualquiera que trate de un fenómeno aleatorio, en nuestro caso vamos a realizar el lanzamiento de tres monedas y a estudiar los resultados. Cada alumnos tomará tres monedas las lanzará y observará el resultado obtenido. Una vez los alumnos realicen este experimento podrán comprobar que a cada uno de ellos les ha salido un resultado diferente siendo todos los resultados lógicos, se les definirá que esto es lo que ocurre con una variable aleatoria, de esta forma entenderán el sentido y significado de algo tan importante en estadística como es el concepto de Variable Aleatoria. A continuación tenemos que definir esa variable aleatoria y determinar su comportamiento (función de probabilidad y función de distribución).

Para ello, le diremos al alumno que le demos un nombre a este experimento, ese nombre será X. Definimos, por tanto, la variable aleatoria X = “número de caras en el lanzamiento de tres monedas". Esto ayudará al alumno a familiarizarse con la notación científica, con la que debemos trabajar en todo momento.

Una vez tengamos determinada la variable aleatoria tenemos de definir sus posibles resultados, los propios alumnos irán analizando que resultados son

Posibles resultados (espacio muestral) Ω = {(ccc), (ccx), (cxc), (xcc), (cxx), (xcx), (xxc), (xxx)}

En este punto, tenemos que recordar que nuestra variable aleatoria era el número de caras obtenido en el lanzamiento, por lo tanto, tendremos que contar en esos posibles resultados cuantas caras hay en cada caso.

(ccc)®3 caras, (ccx)®2 caras, (cxc)®2 caras, (xcc)®2 caras, (cxx)®1 cara, (xcx)®1 cara, (xxc)®1 cara, (xxx)®0 caras

Por tanto, la variable X que hemos definido tomará los valores; 0,1,2,3 .

Para definir la función de probabilidad de la variable tenemos que calcular la probabilidad de que la variable tome los distintos valores.

- P[X=0], esto sería obtener el resultado (xxx), y la probabilidad es de 1/8, esta probabilidad les saldrá de manera innata lo que aprovechamos para definir la probabilidad como casos favorables (posibles resultados que contengan 0 caras) entre casos posibles (todos los resultados estudiados en el espacio muestral definido).
- P[X=1], esto sería obtener (cxx), (xcx), (xxc) y la probabilidad de 3/8
- P[X=2], esto sería obtener (ccx), (xcc), (cxc) y la probabilidad de 3/8
- P[X=3], esto sería obtener el resultado (ccc), y la probabilidad es de 1/8

De esta manera, queda definida la función de probabilidad

Tabla 1. Función de Probabilidad

X	**0**	**1**	**2**	**3**
P[X=x]	0.125	0.375	0.375	0.125

Una vez tenemos la variable definida, hemos de construir la función de distribución, que a pesar, de no ser más que la acumulada de la anterior, su construcción para el alumno presenta muchas dificultades, es aquí donde tenemos que desarrollar un método fácil, divertido y ameno.

Para ello, vamos a proponer al alumno que representemos la variable aleatoria definida como el número de caras, en nuestro caso, pero que sería extensible a cualquier tipo de variable que tengamos, como un coche (sería válido cualquier otra cosa que se nos ocurra), este coche lo vamos a llamar X. Imaginamos que el coche debe recorrer una carretera cualquiera, esa carretera debe tener tantas estaciones de peaje como valores distintos pueda tomar nuestra variable, en nuestro caso serán 4 puntos de peaje, cada uno de estos peajes tomará el valor que tomaría la variable aleatoria, es decir, peaje 0, peaje 1, peaje 2 y peaje 3. En cada uno de estos peajes tendremos que pagar el valor de la probabilidad calculada en cada caso, es decir, en el peaje 0 pagaremos 0.125 unidades monetarias, en el peaje 1 pagaremos 0.375 um, en el peaje 2 pagaremos 0.375 um y por último, en el peaje 3 pagaremos 0.125 um. Tenemos que dejar muy claro que para recorrer la carretera que trazamos tan sólo disponemos de 1 unidad monetaria, por lo que el precio final invertido en los peajes al final de la carretera no podrá superar esa cantidad.

El juego consiste en describir en cada momento donde está el coche y que gasto llevamos.

En un primer momento la situación sería la que se describe en la siguiente figura

Figura 1.

En este punto nos preguntamos ¿cuánto hemos gastado? ¿Y donde estamos? La respuesta sería que hemos gastado 0 euros (rojo) y no hemos llegado al peaje 0 (azul), esto lo expresamos matemáticamente: 0 si x<0 (Con el signo menor "<" indicamos que no hemos llegado al peaje 0)

Empezamos a recorrer el camino, y analizamos cada uno de los puntos de la carretera, en cada ocasión las preguntas a realizar son las mismas, ¿Cuánto hemos gastamos? ¿Dónde estamos?

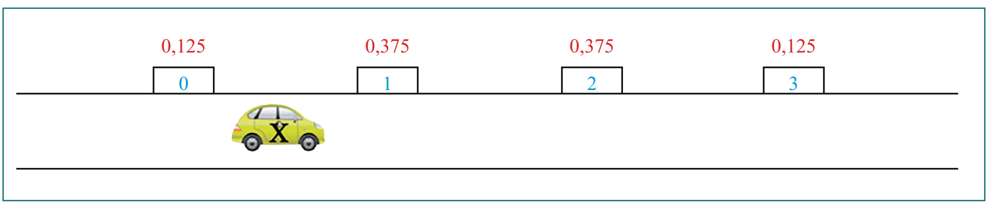


Figura 2.

En la situación que se muestra en la figura2, hemos gastado 0.125€ y estamos entre el peaje 0 y el peaje 1 (por el peaje 0 ya hemos pasado, esto lo indicaremos añadiendo un igual al signo de menor "≤"), expresado de forma matemática sería: 0.125 si $0 \leq x < 1$

En la figura 3. Volvemos a formular las mismas preguntas y en esta ocasión contestaremos, hemos gastado 0.125 en el peaje 0 y 0.375 en el peaje 1, por tanto, llevamos gastado 0.5, y nos encontramos entre el peaje 1 (por el que ya hemos pasado) y el peaje 2. Se expresará como: 0.5 si $1 \leq x < 2$

En esta ocasión (Figura 4.), llevamos gastado 0.125 del peaje 0, 0.375 del peaje 1 y 0.375 del peaje 2, que hacen un total de 0.875 gastado, y nos encontramos entre el peaje 2 (ya pasado) y el peaje 3. De manera que lo expresamos como: 0.875 si $2 \leq x< 3$

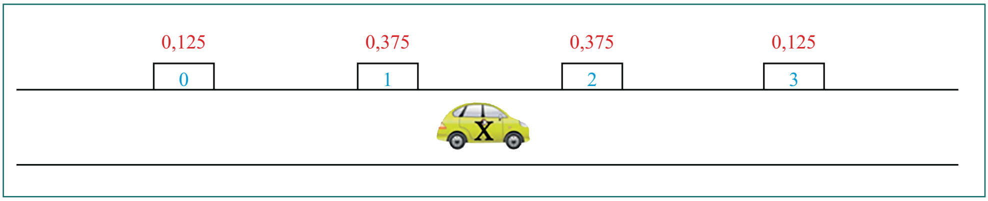


Figura 3.

Figura 4.

Figura 5.

Por último, diremos que hemos gastado 0.125 del peaje 0, 0.375 del peaje 1, 0.375 del peaje 2 y 0.125 del peaje 3, esto debe ascender a un euro, ya que dijimos que el gasto no supondría más de esa cantidad, (esto nos servirá de comprobación a que las probabilidades han sido bien calculadas). Y estamos pasado el peaje 3, de manera que la última expresión será: 1 si $x \geq 3$

Una vez realizado el trayecto, para darle "forma" lo que tenemos es que expresar todas las "situaciones" en una única, de la siguiente manera:

$$F(X)=\begin{cases} 0 & si \quad x<0 \\ 0.125 & si \quad 0 \leq x < 1 \\ 0.5 & si \quad 1 \leq x < 2 \\ 0.875 & si \quad 2 \leq x < 3 \\ 1 & si \quad x \geq 3 \end{cases}$$

Esta función que hemos construido con el juego del coche representa a la variable aleatoria inicial que habíamos definido, X= "número de caras en el lanzamiento de tres monedas".

Su interpretación no es otra que la función acumulada de la función de probabilidad que se definió en la tabla1. Por ejemplo: 0 si $x < 0$ significa que tenemos una probabilidad 0, es decir, que es imposible que al lanzar tres monedas obtengamos un número de caras inferior a 0. La expresión 0.5 si $1 \leq x < 2$ significa que la probabilidad de obtener cero o una cara al lanzar tres monedas es de 0.5. En el caso de la última expresión 1 si $x \geq 3$ nos indica que al lanzar tres monedas tenemos una probabilidad de 1 de obtener 3 o menos caras, es decir, que al lanzar tres monedas seguro obtenemos un número de caras de 3 o menos.

En este trabajo hemos utilizado el ejemplo de un coche que recorre una carretera, pero serían válidos cualquier otro ejemplo que utilicemos, tantos como nuestra imaginación sea capaz de definir, podría ser el montaje de un árbol de navidad (el árbol es X) y las bolas a colgar en él los valores de la variable aleatoria que estemos estudiando y el precio de cada bola la probabilidad asociada, de manera que tenemos 1 u.m. para decorar nuestro árbol, otro podría ser la elaboración de un ramo de flores, de la misma manera tenemos tantas flores como valores de la variable aleatoria y el precio de las mismas el valor de la probabilidad asociada. En el ejemplo expuesto se ha utilizado una variable aleatoria discreta, pero sería posible también elaborar una actividad similar en el caso de una variable continua.

REFLEXIONES FINALES

Al utilizar un método atractivo para el alumno a través del cual trabajar conceptos estadísticos como el ejemplo presentado, se provoca una motivación en el mismo y despierta su interés por la asignatura. Esto es muy importante, dado que la estadística está presente en casi todas las materias y carreras universitarias, y es necesario que el alumno adquiera los conceptos básicos que le ayudaran a comprender el resto. Sin embargo, a menudo nos encontramos con un alumno cerrado a su comprensión y estudio dado el rechazo que muchos traen hacia la asignatura.

Desde el aula, y desarrollando actividades fáciles, amenas, divertidas y cotidianas, podemos romper esa barrera que existe por parte del alumno y fomentar así la empatía que se puede llegar a conseguir a través de actividades similares. Es posible que tras la actividad al alumno le cueste formalizar el concepto, dada la dificultad del lenguaje matemático, sin embargo, es perfectamente capaz de desarrollarlo y explicarlo, entiendo con ello su utilidad y aplicación. Esto nos lleva a fomentar el interés en la materia; en el momento que un alumno entiende los conceptos y los relaciona con su vida cotidiana, despierte sus ganas de aprender más.

REFERENCIAS

Batanero, C. (2001). *Didáctica de la estadística*. Granada: Grupo de Investigación en Educación Estadística (disponible en http://www.ugr.es/local/batanero).

Begg, A. (1997). *Some emerging influences underpining assessment in statistics*. En I. Gal. y J. Garfield (Eds.), The assessment challenge in statistics education. Amsterdam: IOS Press. Cobo.

Cobo, B. y Batanero, C. (2000). *La mediana en la educación secundaria obligatoria: ¿un concepto sencillo*. Uno. Revista de Didáctica de las Matemáticas. Barcelona. Editorial Graó, 23, 85-96.

Fischbein (1975). *The intuitive sources of probabilistic thinking in children*. Dordrecht: Reidel.

Gómez-Torres, E., Batanero, C. y Contreras, J. M. (2014). Procedimientos probabilísticos en libros de texto de matemáticas para educación primaria en España. *Epsilon, Revista de Educación matemática, 31*(2), 85-42.

Heitele, D. (1975). *An epistemological view of fundamental stochastic ideas.* Educational Studies in Mathematics, Vol. 6, No.2 (Jul. 1975), pp. 187-205. Publisher by: Springer. (disponible en http://www.jstor.org/stable/3481874).

Holmes, P. (1980). *Teaching Statistics* 11 -16. Sloug: Foulsham Educational.

Uso de la calculadora para el descubrimiento de reglas para el cálculo mental en el caso de división con decimales

David Gutiérrez-Rubio
Universidad de Córdoba

Resumen: *Se presenta una serie de actividades para el aula de último ciclo de primaria utilizando como recurso una calculadora, no necesariamente científica, que servirá para que el alumnado descubra patrones en la expresión decimal de un número al ser dividido por una cifra que le permitirán realizar cálculos mentales.*
Palabras clave: *calculadora, cálculo mental, división decimal*

Using the calculator to the discovery rules for mental calculation in the case of division with decimals

Abstract: *We describe a series of activities for the classroom using a hand-held calculator, not necessarily a scientific one, in order to discover patterns in the decimal expansion of a decimal division by a single digit number. These patterns will help the student to develop tools for mental calculus.*
Keywords: *calculator, mental calculation, decimal division*

INTRODUCCIÓN

Las calculadoras han sido desde hace varios años una herramienta común para el alumnado. El debate entre si la calculadora es o no apropiada para la clase de matemáticas ha existido desde entonces, especialmente para educación primaria o secundaria. Multitud de estudios se han realizado al respecto, del que cabe destacar un meta-análisis realizado por (Hembree & Dessart, 1986) de 79 estudios previos concluyendo que en general, se constataba una mejora del alumnado a la hora de resolver problemas.

Más recientemente, estudios como el de (Close, Oldham, Shiel, Dooley, & O'Leary, 2012) han observado que el uso de la calculadora puede mejorar no solo la capacidad de resolución de problemas sino la actitud del alumnado hacia las matemáticas.

El National Council of Teachers of Mathematics si bien establece que "La tecnología no deberá ser usada como reemplazo de la comprensión e intuición básicas" (NCTM, 2000, pág. 25), esta sí debe ser utilizada como apoyo para el desarrollo de las habilidades matemáticas, cuando el objetivo buscado no sea el cálculo en sí.

Por otra parte, en el Real Decreto de Educación Primaria se establece que "Para lograr una verdadera alfabetización numérica no basta con dominar los algoritmos de cálculo escrito, es necesario actuar con seguridad ante los números y las cantidades, utilizarlos siempre que sea necesario e identificar las relaciones básicas que se dan entre ellos." (MEC, 2014, p. 19386).

Confrey y Maloney (2007) establecen 4 formas de uso de la tecnología para enseñar la matemática: 1) Enseñar conceptos y habilidades sin recursos tecnológicos y usarlos posteriormente como recursos para la mejora de las capacidades, 2) Usar la tecnología para ayudar en la búsqueda de patrones y como apoyo a conceptos matemáticos, 3) Usar la tecnología como un entorno mejorado para mostrar los conceptos matemáticos, y 4) Centrarse en el modelado y resolución de problemas, considerando la tecnología como una herramienta para su solución.

Las actividades que aquí planteamos usan mayoritariamente el segundo enfoque, es decir, a través de las calculadoras vamos a proponer ejercicios de búsqueda de patrones numéricos en las divisiones decimales por un número de una cifra.

Dichas actividades están pensadas para ser impartidas en los últimos ciclos de Primaria, cuando el alumnado ya es familiar con los desarrollos decimales de un número.

CONSIDERACIONES PARA LAS ACTIVIDADES

Para las actividades se asume que el alumnado está familiarizado con la división euclídea y que es capaz de realizarla mentalmente sin esfuerzo, al menos para dividendos pertenecientes a la tabla de multiplicar. Por ejemplo, el alumnado debe ser capaz de deducir mentalmente que 38 entre 9 es 4 con resto 2, porque sabe que 36=4x9.

Haremos énfasis, dado que las actividades se centrarán en la parte decimal de los resultados, en que el alumnado sepa que la última cifra decimal de la calculadora usualmente está redondeada, por lo que no sabremos si esa cifra es exacta o no. Por tanto, para las actividades que haremos, no nos fijaremos nunca en la última cifra decimal. Cualquier calculadora es suficiente para las actividades aquí planteadas, si bien es recomendable que la pantalla tenga al menos capacidad para 9 cifras.

ACTIVIDADES

Actividad 1: Dividir por 2

Esta actividad es muy sencilla y funciona como elemento introductorio para las siguientes actividades. Dado que el alumno debe de saber dividir por 2 sin problema, apenas hará falta el uso de la calculadora. Empezaremos preguntando un par de divisiones con diferente casuística y que el alumno verbalice las propiedades, a fin de prepararle para las siguientes actividades más complejas. Cabe recalcar que todas las divisiones se entenderán divisiones decimales, salvo que se diga lo contrario.

- Ejemplo:
  - ¿Cuánto es 1:2? 0,5 ¿Y 2:2? 1 ¿Y 24:2? 12 ¿Y 25:2? 11,5
- Preguntas para la clase:
  - ¿Por qué la tercera división no tiene cifras decimales?
  - ¿Por qué la cuarta sí?
  - ¿Hay algún número que al dividirlo por 2 no sea entero ni su parte decimal sea 0,5?

Llegados a la conclusión de que no hay números así, diremos que al dividir por 2 nos encontramos sólo con 2 casos posibles: Que sea entero (parte decimal 0) o que su parte decimal sea 0,5.

Así pues, podemos establecer una sencilla regla para la parte decimal de un número al ser dividido por 2: Si el número es par, la parte decima es 0, si el número es impar, la parte decimal es 0,5.

Hecho esto, estamos en situación de ver cómo podemos obtener reglas para la división con decimales por los otros números de una cifra.

Actividad 2: División por 3

Como la división por 3 no es tan trivial como la anterior, decimos, empezaremos por casos sencillos. Usando la calculadora, escribir el resultado de las siguientes operaciones:

1:3=0,3333333…	2:3=0,6666666…	3:3=1	4:3=1,33333…
5:3=1,6666	6:6=2	7:6=2,33333…	

Recordamos que las últimas cifras decimales “no son de fiar” porque no sabemos si la calculadora ha redondeado para arriba o para abajo, por lo que las descartamos.

Realizaremos preguntas para que los alumnos descubran la relación entre los diferentes cocientes.

- ¿Qué relación hay entre los decimales del primer y segundo cociente?

Respondida la pregunta anterior ¿Entonces 3:3 no debería ser 0,999999…?

Dicho esto, les pedimos que realicen de cabeza la siguiente división con resto, y justo debajo la misma con calculadora:

14:3=4 resto 2
14:3=4,6666666…

- Preguntas:

– ¿Qué tienen en común ambas divisiones? ¿El resto y la parte decimal están relacionadas? Si no tuviéramos calculadora, ¿podríamos haber hecho la segunda división igualmente de cabeza?

Mediante algunos ejercicios más conseguimos que el alumnado entienda la relación entre el resto de la división entera y la parte decimal de la división con decimales.

– ¿Cuántos posibles restos puedo tener al dividir por 3? ¿Cuántos posibles casos tengo entonces para los decimales al dividir por 3?

Llegados a este punto introducimos el concepto de "tabla de los decimales de 3", que consiste en las expresiones decimales de 1/3 y 2/3 respectivamente (la de 3/3 la obviamos porque no tiene decimales).

Así, si conocemos la tabla de los decimales de 3 podemos dividir mentalmente cualquier número entre 3, realizando primero la división con resto y luego pasándola a decimal. Verbalizaremos el procedimiento para asegurarnos de que todos lo han entendido.

Actividad 3: División por 4

Antes de construir la tabla de los decimales podemos preguntar cuántos elementos tendrá de antemano, basándose en los casos anteriores. La tabla que han de realizar los alumnos con la calculadora es:

1:4=0,25	2:4=0,5	3:4=0,75

En este punto observamos que la tabla siempre tiene una estructura similar, en la que el primer número decimal (0,25) se va multiplicando repetidamente (0,5, 0,75).

- Preguntas:

– ¿Por qué 2:4=0,5, esos decimales no habían salido ya en la división por 2?

Se realizarán algunos ejercicios para dividir, tales como 27:4, 15:4, 41:4, etc. El alumnado podrá comprobar los resultados sobre la marcha con la calculadora.

Actividad 4: División por 5

Tabla:

1:5=0,2	2:5=0,4	3:5=0,6	4:5=0,8

En este punto la tabla de decimales ya tiene 4 elementos y su memorización ya no es tan inmediata. Por otra parte al tener más elementos es más fácil observar patrones dentro de la tabla.

- Preguntas:
– ¿Qué relación hay entre el dividendo y la parte decimal del cociente?

De nuevo se realizarán ejercicios para que el alumnado divida mentalmente con decimales, como por ejemplo 33:5, 26:5, 49:5, etc.

Actividad 5: División por 6

Tabla de decimales:

1:6=0,1666666…
2:6=0,3333333…
3:6=0,5
4:6=0,6666666…
5:6=0,8333333…

Podemos realizar las siguientes preguntas a fin de que el alumnado detecte patrones en la tabla:

– ¿Por qué 3:6 no tiene infinitos decimales? ¿Por qué en 2:6 y 4:6 salen números que ya hemos visto antes?

Actividad 6: División por 7

Esta actividad puede ser la más rica y a la vez más gratificante para el alumnado, primero porque el patrón que se esconde en la tabla de decimales es más elaborado, segundo porque los resultados al dividir mentalmente con esta técnica pueden ser bastante espectaculares. Pedimos al alumnado que con la calculadora escriba la tabla de decimales del 7.

1:7=0,14285714...
2:7=0,28571428…
3:7=0,42857142…
4:7=0,57142857…
5:7=0,71428571…
6:7=0,85714285…

De nuevo hay que hacer énfasis en el que el alumnado no copie el último decimal al estar éste redondeado.

El patrón que subyace en esta tabla es muy diferente al resto, y no deja de ser curioso. La serie de 6 números “142857” se repite constantemente en todos ellos, de forma periódica. La única diferencia entre los diferentes desarrollos decimales es el primer decimal con el que empieza a "recitarse" la serie. Por ejemplo en 6:7 el primer decimal es 8, por lo que la serie decimal empezaría "857 142857 142857…"

Debemos dejar al alumnado que descubra este patrón, dejándole que examine los números. Una ayuda puede ser pedirles que lean en voz alta las cifras decimales para que aprecien las repeticiones que hay en las series. También puede ser de ayuda escribir en la pizarra varias cifras decimales más de las que admite la calculadora, para que se vea claramente la repetición.

Una vez que el alumnado es consciente de que las partes decimales constan de la misma serie "mágica" de números 1, 4, 2, 8, 5, 7 repetidos indefinidamente, y de que la única diferencia es cuál es la primera cifra decimal, les pedimos al alumnado que inspeccione la primera cifra decimal de cada elemento de la tabla y que busquen alguna relación. Por experiencias previas hechas en clase, podemos decir que lo más normal es que primero se den cuenta de que la primera cifra va aumentando, para posteriormente darse cuenta de que es la serie "mágica" 1, 4, 2, 8, 5, 7 ordenada de menor a mayor: 1, 2, 4, 5, 7, 8.

De esta forma, concluimos, para poder dividir por 7 con decimales solo necesitamos memorizar estos números 1, 4, 2, 8, 5, 7 y proceder de la siguiente manera:

Ejemplo: Queremos calcular mentalmente 46:7. Se que el múltiplo de 7 que más se acerca por debajo es 6x7=42, por lo que 46:7=6 con resto 4. En este punto ya conozco la parte entera, vamos a por la parte decimal, que la obtendré calculando 4:7.

A priori no conozco de memoria el desarrollo de 4:7, pero se que debe empezar por la cuarta cifra de menor a mayor de la serie "mágica" 1, 4, 2, 8, 5, 7. La cuarta cifra de menor a mayor es 5. Así la parte decimal de 4:7 consistirá en recitar la serie "mágica" comenzando desde el 5 y repitiendo indefinidamente:

$$\boxed{4:7=0{,}57142857\ldots}$$

Por lo que el resultado final será 46:7=6,5714825714….

Recitando una y otra vez la serie "mágica" rápidamente sobrepasamos la capacidad de la calculadora. Es fácil ver que, para alguien que no esté familiarizado con este procedimiento, el resultado puede ser bastante espectacular.

Se pueden practicar divisiones mentales sin más ayuda que la serie "mágica" 1, 4, 2, 8, 5, 7 escrita en la pizarra. Después de unas cuantas divisiones el alumnado será capaz de hacerlo sin ningún tipo de ayuda.

Actividad 7: División por 8

De nuevo pedimos al alumnado que realice la tabla de los decimales, obteniendo 7 elementos:

1:8=0,125
2:8=0,25
3:8=0,375
4:8=0,5
5:8=0,625
6:8=0,75
7:8=0,875

Para esta tabla podemos hacer las siguientes preguntas:

– ¿Qué pasa con los números de 2:8, 4:8 y 6:8, los has visto antes?

Si se cuánto vale 1:8 y 4:8, ¿puedo obtener fácilmente 5:8?

Actividad 8: División por 9

Esta actividad puede resultar sorprendente a los alumnos que a priori pueden encontrarse con alguna tabla compleja, pues es la más extensa de todas, sin embargo, esa percepción rápidamente desaparece cuando escriben los primeros elementos de la "tabla de decimales":

1:9=0,11111111…
2:9=0,222222222…
3:9=0,33333333…
4:9=0,444444444…
5:9=0,555555555…
6:9=0,666666666…
7:9=0,7777777777…
8:9=0,8888888888…

- Preguntas:

– ¿Qué relación hay entre el dividendo y la expansión decimal?

Siguiendo con la lógica de la tabla ¿qué decimales corresponderían a 9:9? ¿A qué equivale eso?

Una vez familiarizados con la tabla, de nuevo se practicarán divisiones mentales de un número por 9.

Actividad 9: Preguntas finales

Al terminar con todos los posibles casos de división por una cifra, podemos realizar las siguientes preguntas desde una visión global de las actividades:

− ¿Has notado que a veces salen infinitas cifras decimales y a veces no? ¿Qué divisores generan siempre una cantidad finita de cifras decimales? La respuesta será 2, 4, 5 y 8.

− ¿Qué tienen de especial esos números que no tienen los demás? La respuesta es: todos se descomponen en productos de 2 o 5, que son los divisores de 10.

− De los divisores que generan siempre una cantidad finita, ¿cuáles generan como mucho un único decimal? ¿Cuáles generan como mucho dos? ¿Cuáles tres?

− La respuesta es: Para 1 decimal, 2. Para 2 decimales, 4=2x2. Para 3 decimales, 8=2x2x2

De aquí podemos hacer la siguiente pregunta: ¿Cuántas cifras decimales nos saldrán como mucho al dividir un número entre 32? Comprobar con la calculadora.

CONCLUSIONES

Con dichas actividades se pretende:

- Fomentar la percepción de patrones numéricos en el desarrollo decimal de una división por una cifra.
- Aplicar dichos patrones a una aplicación práctica, que es la construcción de reglas para el cálculo mental.
- Utilizar la calculadora como herramienta para investigar, no como un elemento que nos da la solución.
- Fomentar la verbalización de propiedades, mediante la participación en clase.

REFERENCIAS

Close, S., Oldham, E., Shiel, G., Dooley, T., & O'Leary, M. (2012). Effects of Calculators on Mathematics Achievement and Attitudes of Ninth-Grade Students. *The Journal of Educational Research*, *105*(6), 377–390.

Confrey, J., & Maloney, A. (2007). A Theory of Mathematical Modelling in Technological Settings. In W. Blum, P. L. Galbraith, H.-W. Henn, & M. Niss (Eds.), *Modelling and Applications in Mathematics Education*, 57–68. Springer US.

Hembree, R., & Dessart, D. J. (1986). Effects of Hand-Held Calculators in Precollege Mathematics Education: A Meta-Analysis. *Journal for Research in Mathematics Education*, *17*(2), 83–99.

MEC (2007). Real Decreto 126/2014, de 28 de febrero, por el que se establece el currículo básico de la Educación Primaria.

NCTM. (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. National Council of Teachers of Mathematics.

Épsilon - *Revista de Educación Matemática* *2015, Vol. 32(3), nº 91, 77-86*

Tecnología móvil y enseñanza de las matemáticas: una experiencia de aplicación de App Inventor

Fernando Almaraz Menéndez
Departamento de Departamento de Economía e Historia Económica
Universidad de Salamanca
Alexander Maz Machado
Departamento de Matemáticas
Universidad de Córdoba
Carmen López Esteban
Departamento Didáctica de Matemática y de las CC.EE.
Universidad de Salamanca

Resumen: *Este artículo describe una experiencia de innovación docente centrada en la aplicación de la tecnología App Inventor a la creación de aplicaciones didácticas para el aprendizaje móvil. Alumnos del Máster de Educación Secundaria, desarrollaron unidades didácticas de matemáticas para segundo curso de E.S.O. que incluían aplicaciones móviles desarrolladas con App Inventor. Las unidades didácticas se aplicaron en las aulas de enseñanza secundaria durante el periodo de Practicum del Máster. Se describe el ciclo completo de innovación desde el acceso a la tecnología en el Medialab de la Universidad de Salamanca hasta su implementación real en las aulas de secundaria.*
Palabras Clave: *App Inventor, m-learning, Innovación docente basada en tecnologías, Didáctica de las Matemáticas, Medialab USAL.*

Mobile technology and teaching mathematics: an experience of application of App Inventor

Abstract: *This article describes an experience of technology-based teaching innovation focused on the application of the App Inventor technology to create educational applications for mobile learning. Students of the MSc in Mathematics Education with Qualified Teacher Status (QTS) developed math lesson plans for the second year of secondary*

education that included mobile applications developed with App Inventor. The lesson plans were implemented in secondary school classrooms during the practicum of the Master. The full innovation cycle is described, from access to technology in the Medialab of the University of Salamanca to its actual implementation in high school classrooms.
Keywords: *App Inventor, m-learning, Technology-based Innovation, Technology-enhanced Learning, Mathematics Education, Medialab USAL.*

INTRODUCCIÓN

Lo que algunos llaman la *Revolución Digital* está impulsada por varias tendencias tecnológicas que están afectando sectores enteros de la economía como la prensa, las editoriales, la publicidad, la telefonía o la industria musical que ven cómo el mundo a su alrededor cambia muy deprisa por el impulso de la digitalización y han tenido que reinventarse. Algo parecido le está ocurriendo también a la enseñanza.

La más evidente de esas tendencias tecnológicas es el imparable desarrollo de Internet. No por cotidiano menos espectacular, el crecimiento de la Red no deja de aumentar. En agosto de 2015 el número de usuarios de Internet en todo el mundo se acercaba rápidamente a los 3.200 millones de personas (InternetLiveStats, 2015). Diez años atrás, en 2005, el número de personas conectadas era de 1.024 millones (Statista, 2015). Una de las características de la conexión a Internet, que tiende a ser universal, es que el acceso a la red se está convirtiendo en mayoritariamente móvil. Ya hay más dispositivos móviles conectados a Internet que personas en el mundo (Cisco, 2015). El acceso móvil no se circunscribe a la consulta de los mensajes de correo electrónico. Se dedica un mayor porcentaje de tiempo a acceder a todos los tipos de contenidos (mensajes, fotos, redes sociales,…) desde dispositivos móviles que desde ordenadores de sobremesa. En algunas zonas del mundo, como en África, la conexión móvil es la principal forma de acceso a la Red.

Los dispositivos móviles forman parte de nuestra vida cotidiana. Recientemente, además de los *smartphones* y las *tablets* estamos asistiendo a la llegada de los llamados dispositivos *wearables* o ponibles. Un *wearable* es un dispositivo conectado, es decir, capaz de proporcionar datos o recibir instrucciones, que se lleva en la ropa o en el cuerpo a modo de accesorio. Puede estar destinado a monitorizar nuestras constantes vitales, a mantenernos permanentemente ubicados mediante geolocalización o a proporcionarnos información añadida y capacidades aumentadas como las *Google Glass*. Ya sea en forma de gafas, relojes, pulseras, cintas deportivas o ropa inteligente, Cisco (2015) estima que en 2019 habrá 578 millones de dispositivos *wearables* en todo el mundo, que estarán conectados a Internet, bien directamente o bien indirectamente a través de un *smartphone*. Es fácil imaginar escenarios en los que un dispositivo wearable del estilo de las *Google Glass* puede ser usado en enseñanza con distintos objetivos: orientación a los estudiantes, aportación de materiales suplementarios, grabación de clases o prácticas de laboratorio, simuladores digitales, etc. Conocemos un ejemplo cercano de una experiencia real de aplicación de las *Google Glass* a la formación de pilotos de aviación civil (Adventia - USAL TV, 2014).

La digitalización ha traído consigo otro fenómeno destacable: el cambio que se ha producido en los estudiantes. Los alumnos de hoy son un grupo generacional muy influido por el proceso de digitalización de la sociedad. Forman parte de los denominados *millennials* (Howe y Strauss, 2003). Crecieron con Internet y se relacionan de forma natural con todo tipo de dispositivos móviles (*smartphones*, *tablets* y ordenadores portátiles), dispositivos que esperan poder usar, de forma natural, también en sus clases. Hacen un uso intensivo de la tecnología y piensan que la educación en tecnología es importante para su futuro profesional (Telefónica Global Millennial Survey, 2014). Son los *screenagers* (Vernocchi, Murdoch y Carlier, 2015), que demandan más tecnología, mejor, más fácil, más rápida y más segura. Son los candidatos perfectos para empezar a usar dispositivos *wearables* en la medida que bajen a precios asequibles a su bolsillo.

Parece un poco inútil oponerse tozudamente a la tendencia hacia la digitalización y en particular al uso de los dispositivos móviles y pensamos que es más recomendable empezar a integrar componentes del denominado Mobile Learning (*m-learning*) a la actividad docente cotidiana. Como señala Camacho (2011), el término *m-learning* ha evolucionado a lo largo de los años, partiendo de una visión centrada en la tecnología a otra percepción mucho más educativa. Así, Quinn (2000) describe *mobile-learning* “un tipo de *e-learning* a través de dispositivos móviles”. Sin embargo, O’Malley et al. (2005) y otros autores como Keegan (2002) describen *mobile-learning* como “aquel aprendizaje que tiene lugar cuando el estudiante no se encuentra en un lugar determinado o fijo” o bien como “el aprendizaje que tiene lugar cuando el estudiante se beneficia de las oportunidades de aprendizaje ofrecidas por las tecnologías móviles”. MoLeNET (2009) describe *mobile-learning* como “la explotación de tecnologías ubicuas de mano, juntamente con redes para facilitar, apoyar, mejorar y ampliar el alcance de la enseñanza y el aprendizaje”.

La tecnología móvil crece a pasos agigantados, pero es muy difícil encontrar a día de hoy centros donde el móvil forme parte de la enseñanza. Podemos intuir, como señalan el informe de la UNESCO (2012) y el Informe Horizon 2012, que el futuro de la educación pasa de alguna manera por este nuevo paradigma educativo de *m-learning*. Quizás uno de los motivos por los que la tecnología móvil apenas está instaurada en las aulas es por la falta de materiales didácticos que permitan su uso. App Inventor es una tecnología desarrollada originalmente por Google y actualmente gestionada por el MIT que permite crear *apps* para móvil sin necesidad de disponer de conocimientos avanzados de programación.

Este artículo describe un caso de la innovación tecnológica a la docencia, mediante la aplicación de la tecnología App Inventor para la creación de aplicaciones didácticas para el aprendizaje móvil en la enseñanza de las Matemáticas. Se describe el ciclo completo de innovación, desde el acceso a la tecnología en el Medialab de la USAL hasta la incorporación efectiva de la tecnología móvil al sistema educativo.

APP INVENTOR

App Inventor fue lanzada por Google en el año 2010. El 31 de diciembre de 2011 Google dejó de desarrollar App Inventor, y ésta pasó a manos del MIT (Massachusetts Institute of Technology), que es el encargado de su desarrollo.

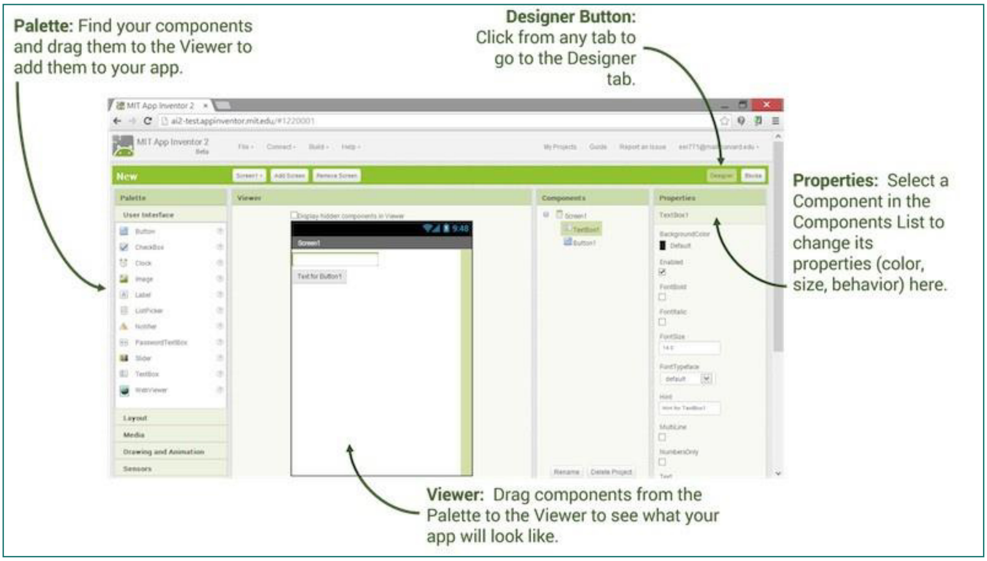


Figura 1: Diseñador de App Inventor (Fuente: appinventor.mit.edu).

App Inventor permite crear aplicaciones para Android a través de un navegador web. De una manera muy rápida y sencilla, cualquier usuario de Android puede construir sus propias aplicaciones para móvil. En particular, puede ser usada para crear aplicaciones didácticas para Android. Utiliza un editor *Drag and Drop* (arrastrar y soltar) para la generación de interfaces gráficas y un sistema de bloques para gestionar el comportamiento de la aplicación. Los proyectos generados a través de esta herramienta se almacenan automáticamente en los servidores de App Inventor, permitiendo llevar en todo momento un seguimiento y control del trabajo. La página web de la aplicación es http://www.appinventor.mit.edu/

El entorno web de App Inventor tiene tres partes fundamentales:

- diseñador
- editor de bloques
- emulador

El diseñador es el lugar donde se seleccionan las componentes para la aplicación. Las componentes son los elementos básicos que se utilizan para hacer las aplicaciones en el teléfono Android. Hay componentes de diferentes tipos, algunas de ellas son: *Label* (muestra un texto en la pantalla), *Button* (muestra un botón en la pantalla que al ser pulsado iniciará una acción), *Canvas* (lienzo de dibujo que almacena imágenes fijas o animaciones), *Accelerometer Sensor* (sensor de movimiento), etc.

El editor de bloques es el lugar donde se crea la lógica del programa. Aquí programamos el comportamiento de nuestra aplicación, le diremos a las componentes lo que deben hacer y cuándo hacerlo. El editor de bloques se ejecuta en una ventana independiente del diseñador de componentes y está implementado como una aplicación de *Java Web Start* que se ejecuta en nuestro ordenador.

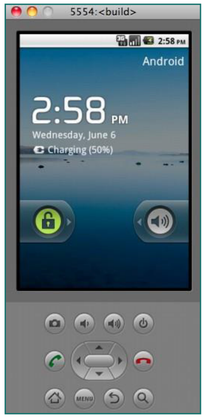


Figura 2: Editor de Bloques de App Inventor (Fuente: appinventor.mit.edu)

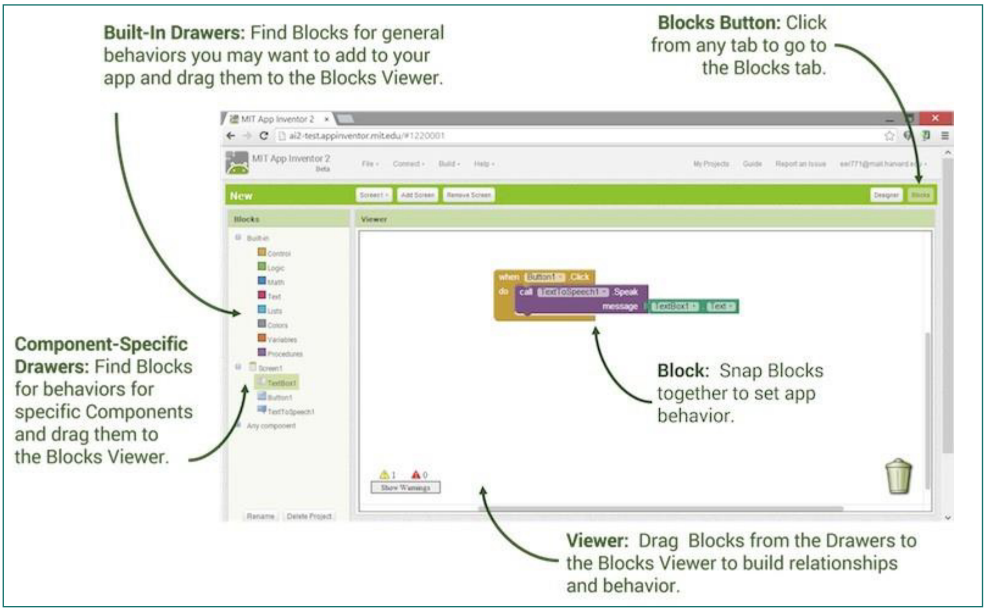


Figura3: Emulador de App Inventor (Fuente: appinventor.mit.edu)

Por último App Inventor dispone de un emulador, un software que imita el funcionamiento de un dispositivo móvil Android real. Nos permite probar la aplicación que estamos desarrollando si no se dispone de un dispositivo Android.

EL PROCESO DE INNOVACIÓN DOCENTE

El acceso a esta tecnología se realizó gracias a la colaboración con el Medialab de la Universidad de Salamanca. El Medialab de la Universidad de Salamanca está concebido como un espacio de aprendizaje interdisciplinar y colaborativo. Un punto de encuentro de Arte, Tecnología, Ciencia y Sociedad. Una de sus líneas de trabajo es la experimentación con tecnologías emergentes y sus posibles aplicaciones artísticas, sociales y educativas. Se trata, por tanto de un espacio estable de la universidad dedicado a la exploración de innovación tecnológica con una metodología diseñada en cuatro fases: acceso, exploración y transferencia y aplicación (Almaraz et al., 2015).

Estas primeras fases de acceso y exploración de la tecnología se desarrollaron en este espacio emergente, Medialab USAL. Una vez identificada y descargada la tecnología se paso a la segunda fase de exploración. Típicamente esta fase se realiza mediante la realización de talleres exploratorios no estructurados en los que se implican especialistas del Medialab y personas interesadas de cualquier disciplina. Un taller fue dedicado a cómo crear aplicaciones para móviles con sistema Android con App Inventor.

La aplicación no requiere de conocimientos de programación avanzados. Como hemos descrito en el apartado anterior, en lugar de escribir en código, el diseño se hace visualmente con bloques que van determinando el comportamiento de la aplicación. Se exploraron las múltiples posibilidades de App Inventor para la creación de *apps* de todo tipo (educativas, lúdicas, divulgativas, etc.) y se encontraron claras oportunidades de transferencia a la innovación docente. La forma de transferencia de la tecnología que se eligió fue la colaboración con los profesores y estudiantes del Máster en Profesor de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanzas de Idiomas para que algunos de ellos incluyeran App Inventor como parte sustancial de su Trabajo de Fin de Máster (TFM). Se organizó un curso de introducción impartido en el Medialab y, como resultado, tres estudiantes tutorizados por una profesora de Didáctica de la Matemática dedicaron su TFM a diseñar unidades didácticas para estudiantes de secundaria que incluyeron el uso de aplicaciones móviles creadas con App Inventor.

La idea principal es crear una serie de aplicaciones para Android, destinada a estudiantes de enseñanza secundaria, y usar en el aula una metodología de enseñanza y aprendizaje de *m-learning*, valiéndose del uso de teléfonos móviles. Los estudiantes del máster crearon varias unidades didácticas para las que crearon diferentes aplicaciones de App Inventor que implementaban actividades tipo test y de respuestas directas con el objetivo de visualizar los conceptos.

El trabajo realizado proporcionó a los estudiantes del Máster un conocimiento y dominio completos de la tecnología. Fueron capaces de alcanzar el estadio de invención, de creación y de producción de materiales específicos, propios, nuevos y adaptados a la realidad de cada centro (Roig, 2010). Se pretendía que a través de sus TFM presentaran innovaciones educativas en los centros de secundaria en los que desarrollan sus periodos de Practicum. La mejora educativa no proviene de la simple presencia de tecnologías novedosas en los centros de enseñanza, sino que es necesario acompañarla con el cambio metodológico adecuado (Camacho, 2011). De esta forma, siguiendo la guía para tutorizar el aprendizaje *m-learning* de O'Malley, C., et al. (2005), se diseñaron las sesiones formativas del Practicum con el objetivo de fomentar el aprendizaje activo y participativo, las exposiciones individuales y la aplicación de recursos TIC. Los estudiantes en Practicas proporcionarían a los alumnos de secundaria la aplicación móvil para que pudieran trabajar y reforzar los contenidos fuera del aula. La introducción de esta metodología *m-learning* permitiría que los alumnos pudieran utilizar estos recursos en cualquier momento y lugar.

LA EXPERIENCIA EN EL AULA

De las tres propuestas diseñadas, una de ellas se pudo desarrollar en un entorno educativo favorable, en la que los alumnos conocieron la aplicación móvil y durante las sesiones en las que se llevó a cabo este proyecto, los alumnos trabajaron en grupos de dos personas en el aula de clase. Posteriormente, para poder evaluar los posibles cambios de actitud e interés hacia la materia producidos por esta innovación, se les propuso a los estudiantes un cuestionario, diseñado a partir del que se utiliza en García (2011). El cuestionario contiene un test de escala de tipo Lickert y tres preguntas abiertas sobre aspectos positivos y negativos y cuestiones a mejorar que puedan plantearse. El cuestionario fue anónimo para que los estudiantes sean capaces de ser críticos y de analizar su propio aprendizaje fuera del contexto habitual. El cuestionario lo realizaron 17 alumnos, y se les dieron las pautas de que no se le asignará ninguna calificación.

Los resultados del cuestionario muestran que el grupo de estudiantes en el que un 64% de ellos se sienten atraídos por esta asignatura y tan solo el 41% asegura que ha habido un cambio notable en su actitud hacia las matemáticas. Una mayoría, un 60%, se siente entre muy seguro y bastante seguro con la tecnología, ya que los alumnos controlan las nuevas tecnologías y no les suele suponer un esfuerzo extra.

De las respuestas abiertas, como aspectos positivos muchas de ellas resaltan que las clases en las que han usado el móvil han sido entretenidas, amenas, interesantes, divertidas, diferentes, innovadoras y modernas. También les ha gustado aprender de una forma diferente y algunos aseguran que les ha facilitado la comprensión de las matemáticas y que ha fomentado el trabajo en grupo dentro del aula. Les ha llamado la atención que sea una forma rápida de trabajar y hacer ejercicios y la posibilidad de repasar lo aprendido en cualquier momento y lugar.

Como aspectos a mejorar en estas sesiones han expresado que les hubiera gustado trabajar las sesiones durante más tiempo, ya que a veces no han tenido tiempo suficiente para acabar todos los ejercicios propuestos.

Los resultados del cuestionario deben considerarse sólo como indicativos del resultado de la experiencia y no pueden tomarse como afirmaciones empíricamente demostradas dado el reducido tamaño de la muestra. Serán necesarios estudios posteriores para poder fundamentar conclusiones más definitivas.

CONCLUSIONES

La tecnología App Inventor se ha revelado como una herramienta accesible y potente para familiarizarse con la creación de aplicaciones para móviles. Su potencial para la creación de aplicaciones de contenido didáctico es destacable.

La experiencia ha resultado altamente positiva para los estudiantes del Máster de Secundaria implicados y los resultados obtenidos en el aula reflejan que los alumnos de secundaria han aprendido y están satisfechos con las sesiones realizadas. Se han sentido a gusto al trabajar conjuntamente con sus compañeros y les gustaría repetir la experiencia en más ocasiones. El aprendizaje de los alumnos ha mejorado así como la actitud de gran parte de la clase.

En este proyecto algunas de las fortalezas que hemos percibido son una mayor capacidad para captar el interés del alumno durante las sesiones, la mejora de la visualización de los conceptos matemáticos y una mayor facilidad y rapidez para realizar cálculos. La mayoría han usado la tecnología móvil sin dificultades.

Igualmente también podemos encontrar algunas desventajas. A pesar de que al alumno le gusten este tipo de actividades diferentes a las habituales, tienen un factor de dispersión de la atención de los contenidos. Además, el uso de esta tecnología móvil en el aula ocasiona un gran esfuerzo por parte del profesor.

En general, hacemos una valoración muy positiva de la experiencia como un paso más en la dirección de normalizar el uso de las tecnologías móviles como parte de los procesos de enseñanza-aprendizaje.

REFERENCIAS

Adventia -USAL (Productora). (3 de julio de 2014). *Primer vuelo con las google glass* [Archivo de vídeo]. Recuperado de http://tv.usal.es/videos/1469/primer-vuelo-con-las-google-glass

Almaraz Menéndez, F., López Esteban, C. & Maz Machado, A. (2015). From the Medialab to the classroom: the process of technology-based innovation in education illustrated with an App Inventor project. En *EDULEARN15 Proceedings* (pp. 6893-6897). Barcelona: International Academy of Technology, Education and Development (IATED).

Camacho, M. (2011). Aproximación conceptual al m-learning: retos pedagógicos y perspectivas de futuro. En Camacho, M. y Lara, T. (Coord.), *M-Learning en España, Portugal y América Latina. Monográfico SCOPEO, 3*, 39-44. : Salamanca: Servicios de publicaciones de la Universidad de Salamanca.

CISCO (2013). *Informe Cisco Visual Networking Index: Global Mobile Data Traffic Forecast Update, 2013-2018*. Recuperado a partir de http://www.cisco.com/c/en/us/solutions/collateral/service-provider/visual-networking-index-vni/white_paper_c11-520862.pdf

García, M. del M.(2011). *Evolución de actitudes y competencias matemáticas en estudiantes de secundaria al introducir Geogebra en el aula*. (Tesis Doctoral).Universidad de Almería, Departamento de Didáctica de la Matemática y de las Ciencias Experimentales, Facultad de Ciencias de la Educación, España. Recuperado de http://funes.uniandes.edu.co/1768/

Howe, N., & Strauss, W. (2003). *Millennials Go to College: Strategies for a New Generation on Campus*. Washington, DC: American Association of Collegiate Registrars and Admissions Officers.

InternetLiveStats. (s. f.). Number of Internet Users (2015) - Internet Live Stats. Recuperado a partir de http://www.internetlivestats.com/internet-users/

Johnson, L., Adams Becker, S., & Cummings, M. (2012). *NMC Horizon Report: 2012 K-12 Edition*. Austin, Texas: The New Media Consortium. Recuperado a partir de http://recursostic.educacion.es/blogs/europa/media/blogs/europa/informes/Informe_Horizon_INTEF_Primaria_y_Secundaria_junio_2012.pdf

Keegan, D. (2002). *The future of learning: From e-Learning to m-Learning*. Ericsson Competence Solutions: Dun Laoghaire, Ireland. Recuperado a partir de http://learning.ericsson.net/mlearning2/project_one/book.html

MoLeNET (2009). *The Impact of mobile learning.* Recuperado a partir de https://crm.lsnlearning.org.uk/user/order.aspx?code=090068

O'Malley, C., Vavoula, G., Glew, J. P., Taylor, J., & Sharples, M. (2005). *Guidelines for Learning/Teaching/Tutoring in a Mobile Environment.* Recuperado a partir de http://www.mobilearn.org/download/results/public_deliverables/MOBIlearn_D4.1_Final.pdf

Quinn, C. (2000). *mLearning: Mobile, Wireless, In-Your-Pocket Learning*. Recuperado a partir de http://www.linezine.com/2.1/features/cqmmwiyp.htm

Roig Vila, R. (2010). Innovación educativa e integración de las TIC. En Roig Vila, R. & Fioruci, M. (Eds.) *Claves para la investigación en innovación y calidad educativas. La integración de las Tecnologías de la Información y la Comunicación y la Interculturalidad en las aulas. Strumenti di ricerca per l'innovazione e la qualità in ambito educativo. Le Tecnologie dell'Informazione e della Comunicazione e l'Interculturalità nella scuola* (pp. 329–340). Marfil – TRE Universita degli studi: Alcoy - Roma

Statista. (s. f.). Internet users number 2005-2015 | Statistic. Recuperado a partir de http://www.statista.com/statistics/273018/number-of-internet-users-worldwide/

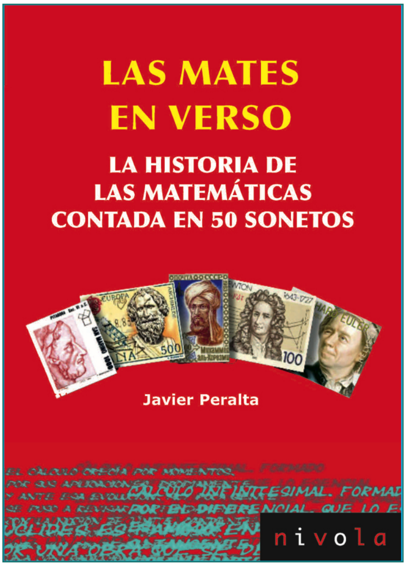
Telefónica S.A. (2014). *Resultados de la encuesta a la generación global del milenio de Telefónica. Los jóvenes de hoy en día son los líderes del mañana*. Recuperado partir de http://survey.telefonica.com/es/

UNESCO (2012). *Aprendizaje móvil para docentes: Temas Globales*. Recuperado a partir de http://www.unesco.org/new/fileadmin/MULTIMEDIA/HQ/ED/ICT/pdf/AM_TG_ Docentes.pdf

Vernocchi, M, Murdoch, R. y Carlier B. (2015) *Everyone's a Screenager. Now what?* Recuperado a partir de https://www.accenture.com/t20150709T093445__w__/us-en/_acnmedia/Accenture/Conversion-Assets/LandingPage/Documents/3/Accenture-3-LT-5-Screenagers-Trends.pdf

Épsilon - *Revista de Educación Matemática* 2015, Vol. 32(3), nº 91, 87-88

Las mates en verso. La historia de las matemáticas contada en 50 sonetos



Javier Peralta
Editorial: NIVOLA
2015 (primera edición)
ISBN: 978-84-15913-13-9
191 páginas

Las mates en verso es sin lugar a dudas un libro único, pues aunque han sido muchos los autores que han contado la historia de esta ciencia, son muy pocos los doctores en Matemáticas que se aventurarían en la empresa llevada a cabo por Javier Peralta: resumir la historia de las matemáticas a través de composiciones poéticas compuestas por 14 versos endecasílabos, organizados en cuatro estrofas: dos cuartetos y dos tercetos; es decir, en sonetos, combinándolos además con aclaradoras ilustraciones.

Peralta realiza un recorrido por la historia de las matemáticas desde la prehistoria hasta la actualidad, deteniéndose en nociones y teoremas claves para el desarrollo de esta ciencia, pero sin dejar a un lado a todos aquellos matemáticos (desde Thales o Pitágoras hasta Riemann o Hilbert pasando por otros muchos como Tartaglia o Euler) sin cuyos aportes habría sido imposible dicho desarrollo.

Sin embargo, Peralta no se detiene en realizar una obra poética sobre la historia de las matemáticas, sino que va un paso más allá aportando a la obra un carácter didáctico que sin duda permitirá a profesores y alumnos adquirir una novedosa perspectiva sobre esta historia, acercándose a ella a través de la poesía y las imágenes.

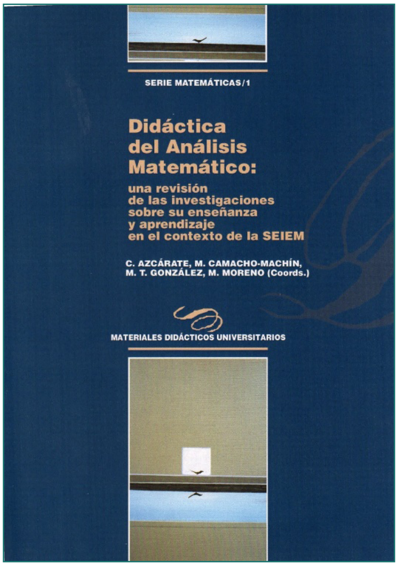
Por ejemplo esta combinación de historia, matemáticas y poesía, se encuentra en su soneto sobre los conocidos teoremas de Thales y Pitagoras, en concreto sobre este último dice:

> Pitágoras probó, con mis respetos,
> que todos los triángulos concretos,
> rectángulos, son tan originales
> que con la hipotenusa al cuadrado
> y suma de cuadrados de catetos,
> siempre obtienes el mismo resultado (p.119).

Peralta logra en su libro expresar de un modo original y diferente contenidos tan sobradamente conocidos como este. En definitiva, aporta una nueva forma de conocer la historia de las matemáticas apta para aquellos amantes de algo que puede sonar tan lejano a esta ciencia como la poesía.

María José Madrid
Universidad de Córdoba

Didáctica del Análisis Matemático: una revisión de las investigaciones sobre su enseñanza y aprendizaje en el contexto de la SEIEM



Carmen Azcárate
Matías Camacho-Machín
María Teresa González
Mar Moreno
(Coordinadores)
Editorial: Servicio de publicaciones Universidad de La Laguna
2015
ISBN: 978-84-15939-38-2
248 páginas

El grupo de Investigación de Didáctica del Análisis Matemático (GIDAM) es uno de los ocho grupos de investigación nacidos de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM) cuyo objetivo consiste en difundir y dar a conocer los resultados obtenidos en las diferentes investigaciones y así, favorecer la comunicación entre todos los miembros del grupo. Fruto de este trabajo, nos presentan el libro *Didáctica del Análisis Matemático: una revisión de las investigaciones sobre su enseñanza y aprendizaje en el contexto de la SEIEM,* el cual posee un doble objetivo: dar a conocer los avances alcanzados tanto en el ámbito nacional como en el internacional y crear un texto que describa la situación actual de sus investigaciones y sirva a investigadores en formación como manual de referencia.

La obra incluye una síntesis de las investigaciones más relevantes de los últimos quince años sobre Didáctica del Análisis Matemático que forman parte de los proyectos y trabajos realizados por el grupo, lo que ha supuesto un importante esfuerzo para los autores quienes además de realizar una síntesis de los contenidos, han sabido enmarcar el estado de la cuestión nacional e internacionalmente. Éstos pertenecen, en su gran mayoría a Universidades Españolas como la Universidad de Alicante, la Universidad de Salamanca, la Universidad de Sevilla, etc. Todos ellos tienen una amplia experiencia y reconocido prestigio en el ámbito de la investigación en Educación Matemática.

La obra se encuentra estructurada en cuatro bloques, el primero de ellos está dedicado a los marcos teóricos de las investigaciones, es decir, en él se describen las líneas de investigación que se han desarrollado desde la década de los noventa hasta la actualidad. Esto incluye las nuevas teorías APOE y EOS de Acción Proceso Objeto Esquema y Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemática. Asimismo, se aborda la investigación histórica como fuente de conocimiento para el profesor. La segunda parte de la obra nos muestra los antecedentes y el estado de la cuestión de las investigaciones que centran su atención en los conceptos matemáticos tanto a nivel de secundaria como en la enseñanza universitaria. Durante la tercera parte, se pone de manifiesto la influencia de las herramientas tecnológicas sobre la enseñanza y aprendizaje de los conceptos del análisis matemático. El bloque IV centra su foco de interés en el profesor. En éste se revisa el estado de las investigaciones basadas en las concepciones y creencias de los profesores, se analiza la práctica del profesor como línea de investigación en Educación Matemática y se plantea cómo éstas pueden ayudar al profesor a mejorar el aprendizaje de sus estudiantes sobre nociones de análisis matemático.

Para el investigador novel constituye una obra útil puesto que plasma la situación actual de las investigaciones en Didáctica del Análisis Matemático. Asimismo, abre nuevos interrogantes y cuestiones abiertas y sin resolver al investigador experimentado.

Carmen León-Mantero
Universidad de Córdoba