86

Vol. 31 (1)
2014

epsilon

Revista de Educación Matemática

Editada por la S.A.E.M. "THALES"

La revista Epsilon está reseñada en:
IN-RECS, Dialnet, Latindex, RESH, DICE y Base de Datos del Centro de Documentación Thales.

épsilon 86

Revista de Educación Matemática

Página de la revista: http://thales.cica.es/epsilon
Revista: epsilon@thales.cica.es

Sociedad Andaluza de Educación Matemática "Thales"

Edita
Sociedad Andaluza de
Educación Matemática "Thales"
Centro Documentación "Thales"
Universidad de Cádiz
C.A.S.E.M.
11510 PUERTO REAL (Cádiz)

Maquetación e impresión
Utrerana de Ediciones, s.l.
Cristóbal Colón, 12
41710 Utrera (Sevilla)

Depósito Legal
SE-421-1984

ISSN:
2340-714X

Período
1er cuatrimestre 2014

Suscripción
ESPAÑA: 42,00 euros
PAÍSES DEL EURO: 63,00 euros
RESTO DE PAÍSES: 90 $ USA
(3 NÚMEROS AL AÑO)

SUMARIO / CONTENTS

En este primer semestre del 2104, la comunidad de Educadores matemáticos ha recibido la triste noticia del fallecimiento de dos prestigiosos matemáticos y educadores: el pasado 11 de enero, a la edad de 97 años, falleció Zoltan Paul Dienes (1916-2014) y el 13 de abril, a los 99 años, Emma Castelnuovo (1913-2014). Ambos han ejercido una gran influencia en la mayoría de quienes nos dedicamos a la enseñanza de las matemáticas. En su momento, ambos lideraron importantes cambios en la Educación Matemática y, pese a estar jubilados, habían proseguido con su labor, la cual ha sido reconocida a nivel internacional en múltiples ocasiones. Ellos se han marchado pero su legado educativo perdurará por largo tiempo.

En estas épocas donde la actividad investigadora de los grupos de investigación y los profesores universitarios se evalúa en gran medida por número de artículos publicados e índices de impacto, se genera un afán por parte de ciertas revistas para entrar en determinadas bases de datos que les otorguen mayor prestigio. Esto hace que en algunas ocasiones se olvide cuál es el próposito de la revista. En otras ocasiones se recurre a "ingenierías editoriales" para permanecer en las bases de datos o aumentar su factor de impacto y esto tiene consecuencias. En nuestra área, en el año 2011, el *Journal for Research in Mathematics Education* fue retirado del Journal Citation Report (JCR) y en el 2012 sucedió lo mismo con BOLEMA. La primera reingresó en el 2012. Algunas revistas españolas han dejado de estar indexadas desde 2012 en el Social Science Citation Index: *Revista de Educación*, *Revista de Economia Mundial*, *Universia Business Review*, *ESE-Estudios Sobre Educacion*, *Dynamis Aibr-Revista de Antropologia Iberoamericana*, *Anuario de Estudios Medievales*, *Comunicacion y Sociedad*, *Estudios Sobre el Mensaje Periodístico.* Esto reducirá el número de revistas en español indexadas en *WoS* en las que se pueda publicar.

Alexander Maz
Director

Épsilon - *Revista de Educación Matemática* *2014, Vol. 31(1), nº 86, 9-20*

El uso de tablas de valores para la representación gráfica de funciones

Félix Martínez de la Rosa
Universidad de Cádiz
felix.martinez@uca.es
Juan José Martínez Delgado-Ureña
I.E.S. Fernando Aguilar Quignon
juanjose.martinez@uca.es

Resumen: *La utilización, por los estudiantes de primer curso de matemáticas en la Universidad, de tablas de valores para representar gráficas de funciones elementales, pone de manifiesto un esquema mental deficiente. En este artículo se investigan las causas que lo provocan. Se analizan los tratamientos que dan algunos libros de texto de la Educación Secundaria a esta cuestión, y se proponen actuaciones para erradicarlo.*
Palabras Clave: *enseñanza secundaria, gráficas, funciones, tabla de valores, libros de texto.*

The use of tables of values for graphical representation of functions

Abstract: *The use by first-year students of mathematics at the University of tables of values in the graphic representations of elementary functions, shows a poor mental scheme. In this paper we investigate the causes that provoke it. It analyzes the treatments that give some textbooks of secondary education to this question, and proposes actions to eradicate it.*
Keywords: *secondary education, graphics, functions, table of values, textbooks.*

INTRODUCCIÓN

Durante los últimos años, los firmantes de este artículo han impartido docencia en asignaturas de matemáticas de primer curso en diversas titulaciones de la Universidad de Cádiz. Un asunto que nos ha llamado la atención surge al pedir a los estudiantes que realicen el esbozo de la gráfica de una función elemental (polinómica, de proporcionalidad inversa o exponencial) para poder visualizar mejor algún ejercicio, pero sin recurrir a las derivadas ni al estudio general de la función. Esto revela dos hechos. El primero es que en la mayoría de los casos no intuyen el aspecto que debería tener el dibujo. El segundo es utilizar una tabla de valores para representar la función uniendo los puntos: lo que obtienen poco tiene que ver con la gráfica correcta y evidencia un claro error de concepto.

Las tablas de valores aparecen en todos los cursos de la ESO (también en bachillerato). Esto hace que los alumnos conciban un marco de trabajo ingenuo que los condiciona al realizar la representación gráfica de curvas elementales, y pone de manifiesto la existencia de una deficiencia en su estructura cognitiva.

Los libros de texto son una pieza importante del sistema educativo. Los alumnos los utilizan para estudiar en sus casas, y los profesores se basan en ellos para articular y preparar sus clases. Por eso nos parece básico el papel que juegan en relación con la deficiencia detectada, y hemos analizado el tratamiento que se da a esa cuestión en una selección de textos de algunas conocidas editoriales.

Finalmente, se dan propuestas para que los alumnos basen sus dibujos de las gráficas de funciones elementales en el conocimiento de sus formas y no en la unión de los puntos de una tabla.

MARCOS DE REFERENCIA

En el artículo (Tall y Vinner, 1981) acerca de las dificultades en el proceso de enseñanza y aprendizaje de límites y continuidad, los autores acuñaron el término *esquema conceptual* (concept image): son las estructuras cognitivas que una persona asocia a un concepto. Incluye todas las imágenes mentales que la persona ha interiorizado en sus años de aprendizaje acerca del mismo (representaciones gráficas, numéricas, simbólicas, etc.). A la hora de enfrentarse a un tema nuevo, un estudiante tiene en la mente sus esquemas conceptuales previos, los cuales pueden interferir en el nuevo aprendizaje cuando la información no puede ser simplemente añadida a la que ya poseen, porque ambas con incompatibles.

Puede ocurrir que el conflicto cognitivo se resuelva de forma positiva, dando lugar al *cambio conceptual* (Vosniadou, 1994), que constituye una reorganización de los conocimientos en la mente de los alumnos. Pero a veces este no se produce y aparecen los denominados *modelos sintéticos* (esquemas mentales deficientes que revelan que los nuevos conocimientos no han sido completamente asimilados) en el intento de los alumnos por adaptar la nueva información a la que ya tienen, aun cuando existan incoherencias obvias. Poner en evidencia las ideas previas de los alumnos, discutirlas y evaluarlas, crear conflicto conceptual con ellas y alentar y guiar la reestructuración conceptual, son las cuatro fases de una posible estrategia docente para el cambio conceptual (Nussbaum y Novick, 1992).

La investigación sobre ideas previas y cambio conceptual no es tan amplia en matemáticas como en otras ciencias, en las que resulta frecuente que los niños y adolescentes posean explicaciones *ingenuas* de algunos fenómenos naturales, que obstaculizan el aprendizaje de los conocimientos científicos. Quizás esto se deba a que en matemáticas el conocimiento ingenuo no es tan evidente como en otras áreas de la ciencia.

Investigaciones acerca de las dificultades del cambio conceptual al pasar del plano al espacio pueden verse en (Del Puerto y Seminara, 2010). La idea básica de la tangencia, que consiste en la visualización de una recta rozando a una circunferencia, puede dar lugar a modelos inadecuados, por ejemplo que una tangente a una curva no la puede atravesar (Martínez, 2012a). También en (Kajander y Lovric, 2009), se investigan los errores propiciados por los libros de texto acerca de la tangencia.

La utilización de tablas de valores para esbozar las gráficas de funciones elementales se empieza a explicar a los alumnos de trece años y se extiende a lo largo de toda la ESO. Esto puede hacer que esta práctica se instale en la mente de los alumnos y sea difícil erradicarla. En algunos estudios se investigan las capacidades de los alumnos de la especialidad de matemáticas, del Máster de profesorado de secundaria de la Universitat Pompeu Fabra y la Universitat Oberta de Catalunya (López y otros, 2013): la mayoría de ellos realizó la gráfica de una parábola a partir de tablas de valores y no sobre la base del conocimiento de las funciones polinómicas de segundo grado.

En este trabajo se analiza el uso (a veces abuso) de las tablas en algunos libros de texto, y su posible influencia en la aparición de esquemas inadecuados en los alumnos.

ANÁLISIS DE LIBROS DE TEXTO

Cuando requerimos de los alumnos el esbozo rápido de la representación de una función sencilla, sin recurrir a las derivadas, se evidencia que no saben el aspecto o la forma que tienen las gráficas porque su único recurso consiste en confeccionar una tabla de valores y unir los puntos obtenidos. Hemos querido investigar cómo llega a formarse en ellos este esquema mental.

En el Real Decreto 1631/2006, de 29 de diciembre, se establecen las enseñanzas mínimas correspondientes a la ESO (BOE 5 enero 2007). Las tablas de valores aparecen en los cuatro cursos, tanto en los contenidos como en los criterios de evaluación del bloque 5, funciones y gráficas, como puede verse en la siguiente tabla (ver página 12).

A partir de estos principios generales, cada Comunidad Autónoma desarrolla con detalle los objetivos, competencias básicas, contenidos y criterios de evaluación del currículo de la ESO. Por último las editoriales lanzan sus libros de texto, procurando mantenerse fiel al desarrollo del Real Decreto hecho por cada comunidad. Los autores de este artículo pertenecen a la Comunidad Autónoma Andaluza, y los libros que a continuación se analizan están adaptados a la normativa aprobada por la misma.

	Contenidos	**Evaluación**
1º	Organización de datos en tablas de valores.	Evaluar el uso de las tablas como instrumento para recoger información y transferirla a unos ejes coordenados.
2º	Representación gráfica de una situación que viene dada a partir de una tabla de valores, de un enunciado o de una expresión algebraica sencilla.	Evaluar la interpretación de relaciones funcionales sencillas dadas en forma de tabla, gráfica, a través de una expresión algebraica o mediante un enunciado.
3º	Utilización de modelos lineales para estudiar situaciones provenientes de diferentes ámbitos, mediante la confección de la tabla, la representación gráfica y la obtención de la expresión algebraica.	Evaluar la capacidad de analizar fenómenos mediante una función lineal, construir la tabla de valores, dibujar la gráfica utilizando las escalas adecuadas en los ejes y obtener la expresión algebraica de la relación.
4º	Interpretación de un fenómeno descrito mediante un enunciado, tabla, gráfica o expresión analítica.	A la vista del comportamiento de una gráfica o de los valores numéricos de una tabla, se evaluará la capacidad de extraer conclusiones sobre el fenómeno estudiado.

En primero de ESO los alumnos aprenden a ubicar puntos en el plano y a obtener figuras uniendo esos puntos con segmentos. Pero es en segundo de ESO donde se da el concepto de función y de ecuación de una función. Por ejemplo en (Santillana, 2º ESO, p. 267) se especifica que:

> La expresión algebraica de una función se escribe como $y=f(x)$ y se llama ecuación de la función. A partir de la ecuación obtenemos la tabla de valores. Para obtener el valor de y, damos valores a x y operamos. Representando estos puntos obtenemos la gráfica de la función.

Los alumnos van a tener que asimilar la relación entre variables, puntos y ecuación. Es la primera vez que van a obtener puntos a través de una ecuación, y por eso en todos los libros consultados se presta bastante atención, y de una forma muy parecida, a esta cuestión. En (Anaya, 2º ESO, p. 235) se expone el esquema 1:

ECUACIÓN ↓ TABLA DE VALORES ↓ REPRESENTACIÓN GRÁFICA	"Cuando existe una relación algebraica entre la x y la y de los puntos, a dicha ecuación se le llama *ecuación de la función.* Conociendo la ecuación de una función se puede obtener, a partir de ella, tantos puntos como se necesiten para representarla".

Esquema 1

El esquema 1 se sitúa en el primer momento en el que se dice a los alumnos cómo deben actuar para obtener una gráfica: calcular una tabla a partir de la ecuación y unir sus puntos. Por ser la primera vez, se debería ser más cuidadoso con una información que puede condicionar a los alumnos durante mucho tiempo. Como este esquema les resulta congruente con los ejercicios que han realizado en primero, esta manera de hacer va creando en ellos un esquema mental muy básico sobre las representaciones gráficas. Además, en innumerables ejercicios, tanto en segundo de ESO como en los cursos posteriores, este proceso se repite, por lo que el esquema se afianza, se interioriza y se convierte en un hábito difícil de cambiar.

Si analizamos el párrafo de la derecha del esquema 1, en seguida surgen tres cuestiones:

1) ¿Cuántos puntos se deben obtener?
2) ¿Qué valores debemos emplear?
3) ¿Cómo se unen los puntos?

No es lógico dar un algoritmo basándose en una premisa tan imprecisa y subjetiva como “tantos puntos como se necesiten”. Tampoco se especifica cómo se eligen los valores para la variable x: siempre acaban empleándose números enteros cercanos al origen. Tampoco se dice qué sucede entre los puntos, si hay que unirlos con segmentos o de otra manera, ni que una gráfica no comienza justo en el primer punto de la tabla ni acaba en el último.

Normalmente el esquema 1 se ilustra usando rectas, pero en algún libro se utiliza también alguna parábola como ejemplo. Esto es así en (Anaya, 2º ESO, p. 235) donde se representa la función cuya ecuación es $y = x^2 - 4x + 4$. Para ello se dan a x los valores 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6. Uniendo puntos se obtiene la figura 1.

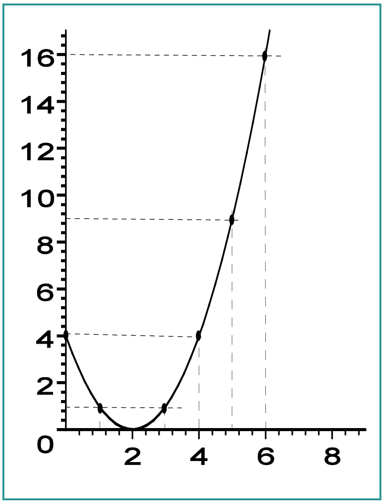


Figura 1

En ningún momento se indica cómo deben unirse los puntos, y de hecho los alumnos no ven extraño hacerlo mediante segmentos. Además, lo que ocurre a la izquierda del origen no parece importante: aparentemente la parábola comienza en el punto (0,4). Sirva este caso para poner de manifiesto las reservas expresadas acerca del esquema 1.

Finalmente, tras cursos y cursos de emplear el algoritmo anterior, en el final de la ESO se intenta un cambio de mentalidad, dando más importancia a la forma del dibujo que a las tablas, pero de una forma tímida y conservando algunos tics poco recomendables.

Rectas

En segundo y tercero de ESO se introducen las funciones lineales cuyas representaciones gráficas son rectas. En seguida se dan los conceptos de pendiente y de ordenada en el origen. Ambas son las características básicas de una recta y la determinan totalmente. Para representar una sólo se necesitan o bien esos datos, o bien dos puntos de la misma. Sin embargo, a pesar de haber dado esos conceptos, en los libros de segundo de ESO se siguen usando tablas con muchos valores para hacer esos dibujos. Sólo en algunos libros de tercero de ESO, se reconoce que no es necesario. Esto se hace tímidamente en (Anaya, 3º ESO, p. 151) donde se da una recta que pasa por el origen y se dice que sólo falta otro punto para representarla. También en (Santillana, 4º ESO, p. 178) se especifica que "para representar una recta sólo necesitamos dos puntos".

Parábolas

En tercero y cuarto de ESO se analizan con detalle las parábolas. Se introducen los puntos de corte con los ejes, vértice y simetría. Pero para hacer la gráfica todavía se recomienda (en algunos textos) realizar una tabla de valores y unir los puntos. Esto sucede en (Anaya, 4º ESO, p. 108) donde para representar $y = x^2 - 3x + 4$ se enumeran los siguientes pasos:

Paso 1: Obtención del vértice.
Paso 2: Obtención de puntos próximos al vértice. Realización de una tabla dando a x los valores -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5.
Paso 3: Puntos de corte con los ejes.
Paso 4: Representación.

Además del vértice y los puntos de corte, se requiere al estudiante que calcule nueve puntos en total y que los una para obtener la gráfica.

Uno de los inconvenientes de usar tablas es la de que el polinomio que define a una parábola tiene grado dos, y es fácil que aparezcan situaciones en la que los puntos que calculemos tengan ordenadas muy distantes entre sí, y sea complicado representarlos todos juntos. Por ejemplo, dos de los puntos de $f(x) = 10(x^2 - 1)$ son (0,-10) y (4,150).

Sus ordenadas se diferencian en 160 unidades, por lo que dibujar ambos y mantener igual la escala de los ejes es imposible. Hay que cambiar la escala y el dibujo se deforma. Aquí empieza a ponerse de manifiesto que saber de antemano la forma que tiene la gráfica simplificaría y mejoraría la realización de la misma.

A partir de tercero de ESO, los libros empiezan a decantarse por atender a la forma de la gráfica. Por ejemplo en (SM, colección Pitágoras, 3º ESO, p. 171) se especifica que:

> El estudio de una función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c,\ a \neq 0$ consiste en determinar sus elementos principales: sentido de las ramas, corte con los ejes, vértice y eje de parábola. Una vez conocidos estos es posible esbozar su gráfica de forma muy aproximada.

Es muy interesante el comentario que viene a continuación:

> Las parábolas no se suelen representar utilizando tablas de valores, aunque en ocasiones, tras hallar sus elementos, resulta útil complementar la información obtenida con una tabla que proporcione algunos puntos para ayudar a realizar la representación gráfica.

Se recomienda intuir el dibujo y posiblemente calcular las coordenadas de algún punto como complemento de los datos que da la propia ecuación. También en (Santillana, 4º ESO, p. 180) se especifica la forma que tienen las parábolas:

> Las funciones polinómicas de segundo grado son funciones de la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$
>
> Su gráfica es una curva con dos ramas, una creciente y otra decreciente, que se llama parábola. Si $a > 0$ las ramas de la parábola van hacia arriba y si $a < 0$ hacia abajo.

Incomprensiblemente, en la página siguiente de ese mismo libro (Santillana, 4º ESO, p. 181), se vuelven a emplear tablas de valores con numerosas entradas, para representar funciones que estarían perfectamente determinadas haciendo uso del esquema recomendado. Y es este volver atrás lo que va calando en los alumnos, que piensan que las tablas son siempre imprescindibles.

Funciones de proporcionalidad inversa y similares

En 4º ESO se introducen las funciones de proporcionalidad inversa. En (Anaya, 4º ESO, p. 110) o (Santillana, 4º ESO, p. 184) se motivan a través de casos reales y a continuación se emplean tablas de valores para la función $y = 1/x$, sacando conclusiones en cuanto a dominio, simetría, crecimiento o decrecimiento y asíntotas. A partir de esas deducciones se representan funciones similares, ya sin recurrir a las tablas.

Pero cuando todo está ya establecido reaparecen las tablas de valores. Por ejemplo en (Santillana, 4º ESO, p.185) para la gráfica de $y = -4/x$ cuyas características se han analizado con detalle, se calcula una tabla con ocho entradas (-8, -4, -1, -1/2, 1/2, 1, 4, 8) para x, y se especifica que representando esos puntos y uniéndolos se obtiene la gráfica. También en (Anaya, 4º ESO, p. 111) se da el siguiente cuadro acerca de la representación gráfica de $y = 6/(x-4)$:

La gráfica de esa función es como la de *6/x*, desplazada cuatro unidades a la derecha. Veamos que es así mediante una tabla de valores:

x	-2	0	1	2	3	…	5	6	7	8	10	…
$x-4$	-6	-4	-3	-2	-1	…	1	2	3	4	6	…
$y = 6/(x-4)$	-1	-1.5	-2	-3	-6	…	6	3	2	1.5	1	…

Podemos compararla con la gráfica de *6/x*. Son idénticas salvo en su ubicación.

Pero una tabla de valores no sirve para comprobar que dos gráficas son idénticas porque, por muy extensa que sea, sólo podrá tener un número finitos de puntos. Con la observación que se hace en el esquema anterior se está alimentando un error de concepto (hacer creer que una tabla sirve para identificar una gráfica), que sería fácil de eludir si nos limitáramos a decir que $y = 6/(x-4)$ es idéntica a $y = 6/x$ en su forma, pero en otro lugar del plano.

Los casos anteriores inculcan en los alumnos la idea errónea de que es mejor confiar en una tabla para realizar las gráficas, en lugar de hacer el esfuerzo de recordar las características que se deducen de la ecuación de la una función.

Funciones exponenciales

En cuarto de ESO se explican las funciones exponenciales. Por ejemplo en (Anaya 4º ESO. p. 113) se introducen con el siguiente enunciado:

Vamos a representar, dando valores a x, las funciones $y = 2^x$ e $y = (1/2)^x$

La obtención de algunos puntos, permite observar los comportamientos de estas funciones: se acercan infinitamente a un lado del eje x, y al otro lado los valores de y aumentan muy rápidamente. Pero esto es distinto a realizar la representación uniendo los puntos de una tabla. Hacerlo supone dar a x muchos valores y con guarismos muy altos, tanto positivos como negativos, para poder apreciar sus cualidades. Se obtienen así unas tablas enormes (ver (Santillana, 4º ESO, p. 198) o (Anaya 1º bach., p.258)) y con valores tan dispares que en la práctica resulta inviable representar los puntos de una manera exacta: inevitablemente, debemos cambiar la escala de los ejes. Entonces ya no tendríamos un dibujo real sino uno aproximado. Lo importante de estas curvas es conocer su forma. Una vez que se sabe, es innecesario recurrir a ninguna tabla para dibujarlas.

Funciones que describen fenómenos reales

En el caso de los fenómenos reales, si se estudia uno en el que las variables no guardan entre sí una relación funcional conocida, el empleo de una tabla de valores está justificado para obtener una aproximación de la gráfica a que da lugar el mismo, y observar sus particularidades.

A veces el análisis de los valores obtenidos puede llevar a deducir la fórmula que describe un fenómeno. Por ejemplo en (Santillana, 4º ESO, p. 184), tras definir las funciones de proporcionalidad inversa (y aclarar su expresión algebraica y que su gráfica es una hipérbola), se da un ejemplo que muestra los datos obtenidos en un laboratorio acerca de la presión y el volumen de un gas. Ya que el producto de ambas cantidades es constante, se puede deducir la fórmula de proporcionalidad inversa que rige el experimento. Es un ejemplo del uso correcto de una tabla de valores.

En (Anaya, 1º Bach, p. 246), se dan los datos de dos experimentos: uno relaciona profundidad y presión, y el otro la distancia que un recorre un coche hasta detenerse en función de la velocidad que lleva al frenar. En ambos casos los modelos funcionales que rigen esos experimentos no se deducen sino que se dan directamente (el primero es lineal y el segundo cuadrático). A partir de esos modelos realizar las gráficas de los experimentos (una recta y una parábola) no requiere ningún esfuerzo porque ya son de sobra conocidas por los alumnos. Sin embargo, en vez de emplear los conocimientos adquiridos en cursos anteriores para hacer la representación, esas gráficas se obtienen mediante la unión de los puntos de las tablas (diez en cada caso). Es precisamente este tipo de actuaciones las que provocan que los alumnos crean que la representación gráfica a través de una tabla es lo más aconsejable, fácil y fiable.

Si hay una situación especialmente apropiada para el manejo de tablas de valores, es el análisis de fenómenos reales. Pero si la fórmula que rige ese fenómeno se sabe, y su gráfica también, es inadecuado obtener la representación gráfica del mismo a través de una tabla.

PROPUESTAS DIDÁCTICAS: LA FORMA DE LAS GRÁFICAS

Como hemos visto en la sección anterior, las tablas de valores están presentes en las representaciones gráficas, a lo largo de toda la ESO (también en bachillerato). Esto hace que los estudiantes piensen que son imprescindibles para representar cualquier gráfica, creándose un esquema mental inadecuado: calcular una tabla a partir de la ecuación y unir los puntos. Es posible que esta práctica se viera reducida si a lo largo de la ESO, se incidiera de una manera más decidida en la *forma* de las representaciones gráficas de funciones elementales.

- Con respecto a las *rectas*, debería dejarse claro, desde el primer momento en que se habla de ellas, que sólo se necesitan dos puntos para representarla.
- En cuanto a las *parábolas*, la forma de sus gráficas es algo con lo que cualquier alumno está familiarizado, porque aparecen en muchos ámbito cotidianos (igual que la circunferencia). Otra cosa es su relación con los polinomios de grado dos. En un primer momento, emplear las tablas de valores para apreciar esa relación es necesario. Pero una vez aclarado este hecho, las gráficas deben basarse en el sentido de las ramas, corte con los ejes, vértice y eje de la parábola. En casos concretos se puede completar el estudio hallando las coordenadas de algún punto.
- A pesar de haber estado durante años trabajando con polinomios, dibujando rectas y parábolas, la primera vez que se mencionan explícitamente las *funciones polinómicas* es en 4º de ESO, y para las representaciones gráficas de las de grado mayor que dos, hay que esperar a primero de bachillerato, y a la introducción del concepto de derivada. Es claro que las tablas de valores no son útiles para estas gráficas: cuando el grado del polinomio aumenta, las ordenadas de los puntos también lo hacen, por lo que es muy difícil representarlos sin distorsionar el dibujo. Además cualquier elección de valores para x no vale: si nos limitamos a valores enteros cercanos al origen, posiblemente el dibujo no tenga nada que ver con la realidad.

Pero estas funciones pueden representarse anticipándose al concepto de derivada. Bastan dos pasos (ver también (Martínez, 2012b)):

Paso 1. La forma de los polinomios.

- Los de *grado impar* mayor que uno corresponden a curvas que recorren el plano, desde la parte superior derecha a la parte inferior izquierda si el *coeficiente del término de mayor grado* es positivo, y desde la desde la parte inferior derecha a la parte superior izquierda si es negativo.
- Los de *grado par* mayor que dos corresponden a curvas que recorren el plano, desde la parte superior derecha a la parte superior izquierda si el *coeficiente del término de mayor grado* es positivo, y desde la desde la parte inferior derecha a la parte inferior izquierda si es negativo.

Paso 2. Raíces del polinomio y su multiplicidad.

- Si una raíz tiene *multiplicidad par*, el polinomio no atraviesa el eje x en ese punto. Además el eje x es tangente al polinomio en ese punto.
- Si una raíz tiene *multiplicidad impar*, el polinomio atraviesa el eje x en ese punto. Además, si la multiplicidad es mayor que uno, el eje x es tangente al polinomio en ese punto.

El grado del polinomio, junto con el coeficiente del término de mayor grado, indica la forma básica de la curva. El cálculo de las raíces y su multiplicidad, indica la relación del eje x con la curva.

Aunque la recta tangente se da formalmente en las matemáticas de primero de bachillerato al explicar la derivada, los alumnos suelen tener su propia idea acerca de la tangencia porque es un término de uso común, que se emplea en todo tipo de ámbitos no matemáticos. Pero la idea que tienen sobre ella suele ser ingenua e incompleta. Así que relacionar la tangencia del eje x con la multiplicidad de las raíces (y dibujarlo a veces atravesando la curva pero siendo tangente) serviría para afianzar este concepto antes de la definición formal, y ayudaría a prevenir los esquemas mentales erróneos que surgen en relación con él.

- El análisis de datos obtenidos en un experimento es una forma habitual de introducir las *funciones de proporcionalidad inversa*. La representación de los puntos sugiere la forma de una hipérbola. Una vez analizadas las características de estas curvas, intuyendo y anticipando el concepto de asíntota, no tiene sentido volver sobre lo andado y utilizar de nuevo las tablas de valores para la gráfica. Hay que fijar la forma de estas funciones para que los alumnos la tengan presente en lo sucesivo.
- Analizar, en una *función exponencial* concreta, el comportamiento de los valores de y a medida que se le dan a x valores cada vez más alejados del origen, va configurando la forma de estas funciones. Y a partir de ahí debe quedar claro que es inadecuado dibujarlas a través de las tablas.

RESUMEN FINAL Y CONCLUSIONES

La utilización, por parte de nuestros alumnos universitarios, de tablas de valores para esbozar gráficas pone de manifiesto un modelo sintético que hemos intentado analizar y comprender.

Las tablas de valores están presentes en la normativa oficial del BOE, a lo largo de toda la ESO, y asimismo se recogen en los libros de texto analizados. Durante los cuatro años de la ESO, se requiere a los alumnos la realización de tablas para dibujar rectas, parábolas, funciones de proporcionalidad inversa y exponenciales. Como consecuencia del uso continuado, y de que unir los puntos de una tabla no requiere esfuerzo intelectual alguno, los alumnos interiorizan esa manera de actuar y aplican ese modelo en sus representaciones gráficas.

En cuanto a los libros de texto, aquí se han analizado algunos y se han detectado varios usos inadecuados de las tablas de valores. En un primer momento es útil representar puntos para empezar a descubrir la forma de las gráficas. Pero a partir de ahí, tras estudiar las características de las curvas cuyas formas se sugieren, las representaciones de funciones elementales no deben basarse en unir los puntos de las tablas. Sería bueno que los alumnos supieran reconocer con qué curva se asocia cada ecuación.

Visualizar la forma que tienen las gráficas de las funciones elementales no plantea dificultades, previene los malos hábitos y proporciona grandes dosis de motivación e intuición a los alumnos. Además, se les proporciona una base sólida en la que asentar, una vez dada la derivada, el estudio general de las funciones.

REFERENCIAS

Del Puerto, S. y Seminara, S. (2010). Las concepciones erróneas y el cambio conceptual en el aprendizaje de la geometría analítica. *Premisa,*12(44), 25-35.

Kajander, A. y Lovric, M. (2009). Mathematics textbooks and their potential role in supporting misconceptions. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 40(2),173-181

López, M., Miralles, J. y Viader, P. (2013). Tres años del Máster de formación del profesorado de secundaria de matemáticas. *Suma*, 72, 31-36.

Martínez, F. (2012a). Detección y corrección de errores de concepto. *Suma,* 69, 73-81.

Martínez, F. (2012b). Errores en el producto, evaluación y gráficas de polinomios. *Números,* 81, 25-32.

Nussbaum, J. y Novick, N. (1982). Alternative frameworks, conceptual conflict, and accommodation: Toward a principled teaching strategy. *Instructional Science*, 11(3), 183-200.

Tall, D. y Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics Education*, 12(7), 151-169.

Vosniadu, S. (1994). Capturing and modeling the process of conceptual change. *Learning and instruction,* 4, 45-69.

Libros de texto citados de la editorial Anaya

Colera, J. y Gaztelu, I. (2012). Matemáticas 2º Educación Secundaria Andalucía. Ed. Anaya.

Colera, J., Gaztelu, I. y Oliveira, M.J. (2010). Matemáticas 3º Educación Secundaria Andalucía. Ed. Anaya.

Colera, J., Gaztelu, I., Oliveira, M.J. y Martínez, M. (2008). Matemáticas 4º Educación Secundaria Andalucía, Opción B. Ed. Anaya.

Colera, J., Oliveira, M.J., García, R. y Santaella, E. (2008). Anaya Matemáticas I, 1º Bachillerato. Ed. Anaya.

Libros de texto citados de la editorial Santillana

Redal, E.J. y otros. (2012). Matemáticas 2º ESO*,* Proyecto la casa del saber., Edición Andalucía Ed. Grazalema Santillana.

Redal, E.J. y otros (2008). Matemáticas 4º ESO Opción B, Proyecto la casa del saber. Edición Andalucía Ed. Grazalema Santillana.

Libros de texto citados de la editorial S.M.

Vizmanos, J.R., Anzola, M., Bellón, M. y Hervás, J.C. (2010). Matemáticas 3º ESO, Colección Pitágoras. Ed. S.M.

Épsilon - *Revista de Educación Matemática* *2014, Vol. 31(1), nº 86, 21-36*

Errores de conceptos geométricos persistentes en alumnos de 1º de ESO:detección y metodología de corrección.

Ana Belén Cabello Pardos
Facultad de Educación. Universidad Complutense de Madrid

Ana B. Sánchez García
Facultad de Educación. Universidad de Salamanca

Ricardo López Fernández
Facultad de Educación. Universidad de Salamanca

Resumen: *En este trabajo se expone la existencia de errores geométricos persistentes en alumnos de 1º de ESO y se realiza una propuesta metodológica para su corrección. Para ello se han utilizado dos instrumentos metodológicos. El primero, es un cuestionario de detección del rendimiento en Geometría aplicado a una muestra de 137 alumnos, que permite conocer las imágenes conceptuales de los alumnos y sus errores. El segundo instrumento lo constituyen las unidades didácticas diseñadas según las fases de aprendizaje del modelo de Van Hiele partiendo del conocimiento de las imágenes conceptuales de los alumnos. Se llevó a cabo una experimentación con dos grupos obtenidos de la muestra anterior, uno experimental (N=21) y otro de contraste (N=18), que ha permitido contrastar la eficacia de la propuesta metodológica.*
Palabras clave: *errores geométricos persistentes, cuestionario, unidades didácticas, modelo de Van Hiele, Geometría.*

Persistent geometric errors in students of 7th grade: detection and correction methodology

Abstract: *In this paper we show the existence of persistent geometric errors in students of 7th grade and we make a methodological proposal in order to correct them. For this purpose, two methodological tools have been used. The first one, a questionnaire*

to detect the performance in Geometry applied to a sample of 137 students, identifies conceptual images of students and their errors. The second instrument is formed by the teaching units designed according to Van Hiele's model learning phases from the knowledge of the students' conceptual images. An experiment with two groups obtained from the previous sample was conducted, the experimental group (N = 21) and the contrast one (N = 18), which has allowed to test the effectiveness of the methodological proposal.
Keywords: *persistent geometric errors, questionnaire, teaching units, Van Hiele model, Geometry.*

INTRODUCCIÓN

El origen de esta investigación es la constatación de la deficiente comprensión en Geometría que tienen los alumnos de Secundaria, que se contextualizó en un Instituto de Enseñanza Secundaria, analizando los resultados de las pruebas externas de 2º de ESO de la Comunidad de Madrid.

La hipótesis de la investigación es que los alumnos tienen errores persistentes en el reconocimiento de los objetos geométricos y que su corrección depende de la metodología empleada en la enseñanza de la asignatura.

Para fundamentar teóricamente la investigación se estudiaron los modelos y las teorías sobre la comprensión en Geometría y la formación del concepto geométrico que se presentan en el Marco Teórico.

Se centró la atención en los dos protagonistas del proceso de aprendizaje: el alumno que aprende y el profesor que enseña. En cada uno de ellos se analizó su actuación. Se concluyó que en el alumno existen errores persistentes a pesar del estudio de la asignatura y que la corrección de dichos errores depende de manera significativa, de la metodología empleada por el profesor.

En el alumno se determinó el punto de partida cognitivo mediante un cuestionario de detección del rendimiento en Geometría diseñado para la investigación (Cabello, 2013). Dicho instrumento permitió conocer las imágenes conceptuales (correctas o erróneas) que tienen los alumnos al empezar el curso, y medir la formación del concepto geométrico analizando nuevamente dichas imágenes después del estudio de la asignatura.

En el profesor se analizó la metodología, mediante la implementación curricular del modelo de Van Hiele elaborada para la investigación (Cabello, 2013), es decir, utilizando unas unidades didácticas diseñadas según las fases de aprendizaje del modelo de Van Hiele a partir de la detección de los errores en las imágenes conceptuales realizada con el cuestionario.

MARCO TEÓRICO

En este apartado se exponen las teorías sobre la comprensión y la formación del concepto geométrico, que sustentan la metodología didáctica propuesta en esta investigación.

El modelo de Van Hiele

Como teoría principal se consideró el modelo de Van Hiele (1957, 1986), según el cual, el alumno recorre cinco niveles en su comprensión en Geometría y en cada nivel se establecen unas fases que guían su aprendizaje. Por tanto el modelo consta de dos aspectos, uno descriptivo, constituido por los niveles de comprensión y otro prescriptivo o metodológico, formado por las fases de aprendizaje. Este último aspecto es en el que se basa el profesor para el diseño de las unidades de enseñanza.

Los niveles de comprensión

En este epígrafe se presentan, de manera resumida, los niveles de comprensión, remitiendo al lector a profundizar en la bibliografía (Gutiérrez y Jaime, 1998; Gutiérrez, Jaime, y Fortuny, 1991; Jaime, 1993; Jaime y Gutiérrez, 1990, 1994).

NIVELES	OBJETOS QUE SE ESTUDIAN
Básico, de reconocimiento o visualización	Elementos básicos del estudio
Análisis	Propiedades que analizan los elementos básicos
Deducción informal, orden o clasificación	Enunciados que relacionan las propiedades
Deducción	Ordenaciones parciales o sucesiones de los enunciados
Rigor	Propiedades que analizan las ordenaciones parciales

Tabla 1. Niveles del modelo de Van Hiele, basada en Jaime y Gutiérrez (1990).

Los estudios realizados señalan que los alumnos en la Educación Secundaria Obligatoria alcanzan, como mucho, los tres primeros niveles (Corberán y otros, 1994; Jaime y Gutiérrez, 1995). También hay que tener en cuenta que un alumno puede estar en un nivel para unos contenidos y en un nivel distinto para otros.

Las fases de aprendizaje

En los niveles de comprensión, el protagonista es el alumno, pues es el sujeto de la adquisición de dichos niveles. En cambio, en las fases de aprendizaje, el protagonismo lo adquiere el profesor, que diseña el camino para que el alumno progrese en la comprensión de la Geometría.

A continuación se presenta un esquema con el contenido de cada una de las fases de aprendizaje.

FASES	CONTENIDO
Indagación	Los alumnos toman contacto con el tema que se va a tratar y el profesor identifica los conocimientos iniciales de los alumnos.
Orientación dirigida	El profesor guía a sus alumnos a través de actividades sencillas de modo que los conceptos y estructuras que tienen que alcanzar aparezcan progresivamente y los alumnos descubran y aprendan las relaciones y componentes de la red de cocimientos que tienen que formar.
Explicitación[1]	Los alumnos deben intentar verbalizar y justificar los resultados que han obtenido, dialogando entre ellos y con el profesor, para que lleguen a ser conscientes de las características y relaciones descubiertas y afiancen el lenguaje técnico que corresponde al tema objeto de estudio.
Orientación libre	Los alumnos utilizan los conocimientos adquiridos para resolver actividades y problemas diferentes de los anteriores y, probablemente, más complejos.
Integración	Los alumnos establecen una visión global de todo lo aprendido. No se presentan actividades nuevas sino una organización de lo ya adquirido. Las actividades que se proponen son resúmenes o recopilaciones de la información que ayuden a los alumnos a lograr esta integración.

Tabla 2. Fases de aprendizaje, basada en Van Hiele (1986) y Jaime (1993).

1. La tercera fase puede no ser temporal sino establecerse como una actitud permanente de razonamiento, diálogo y discusión en las actividades que lo permitan de las otras fases de aprendizaje.

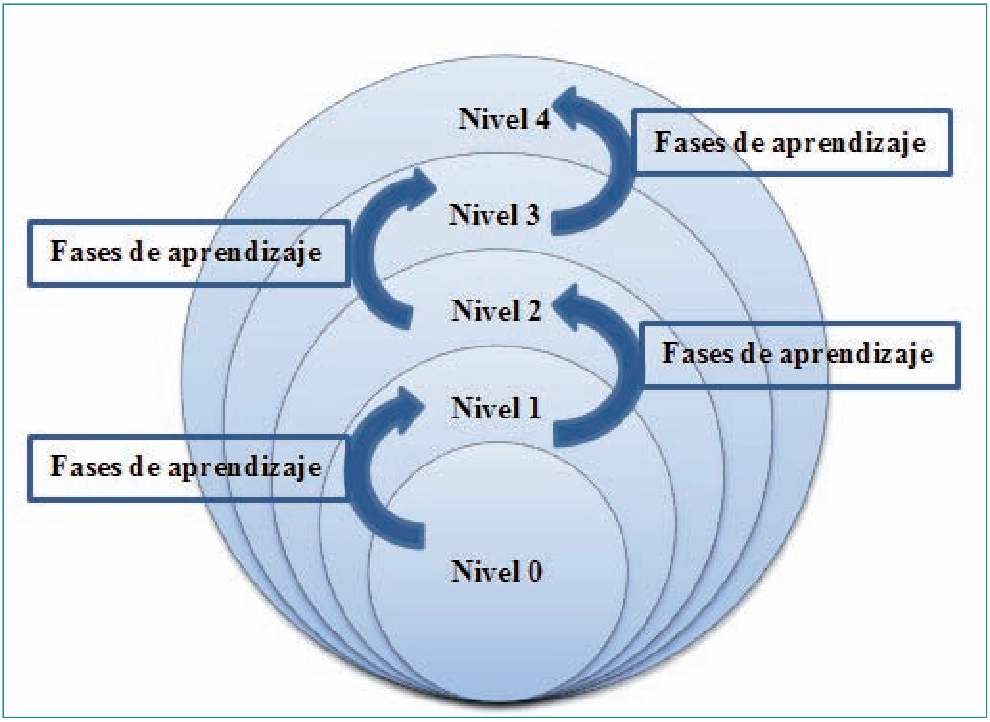


Ilustración 1. Aspecto descriptivo y prescriptivo del modelo de Van Hiele, tomado de Cabello (2013).

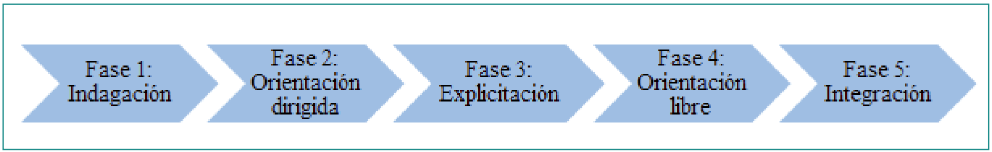


Ilustración 2. Fases de aprendizaje del modelo de Van Hiele, tomado de Cabello (2013).

El modelo cognitivo "imagen del concepto-definición del concepto"

Este modelo (Hershkowitz, 1987, 1989, 1990; Vinner, 1975, 1983; Vinner y Hershkowitz, 1980, 1983) analiza los procesos cognitivos de la mente del alumno cuando aprende un concepto geométrico nuevo.

Denominan "dibujo mental del concepto" al conjunto de todos los dibujos que el alumno ha asociado con el concepto. La imagen del concepto es el dibujo mental junto con las propiedades que el alumno asigna al concepto. La definición del concepto es una definición verbal que posibilita su expresión con precisión.

Estos autores exponen una realidad con la que se han encontrado en sus investigaciones cuasi-experimentales en el aula. Al preguntar a los alumnos sobre algunos conceptos geométricos simples, a menudo se descubre que tienen imágenes erróneas de dichos conceptos. Estas imágenes pueden ser el resultado de un conjunto específico de ejemplos que se ha dado a los alumnos. Probablemente hay una suposición implícita de que los alumnos deben utilizar las definiciones cuando se les pide una tarea cognitiva y, por tanto, no es necesario dar muchos ejemplos diferentes; pero esta suposición no se sustenta pues el alumno suele trabajar con la imagen olvidando la definición.

En conclusión, dar una definición y algunos ejemplos no es suficiente para formar la imagen correcta del concepto y en algunas ocasiones lo anterior conduce a la generación del error por mecanismos de aprendizaje basados en la transferencia analógica (Sánchez, 2013).

Afirman que conocer las imágenes conceptuales de los alumnos tiene gran importancia porque sugiere mejoras para la enseñanza y evita la formación de imágenes erróneas. Si la enseñanza se realiza fundamentalmente con prototipos y no se consideran distractores de orientación y contraejemplos, es más difícil la correcta formación del concepto geométrico.

La teoría de los conceptos figurales de Fischbein

Un planteamiento similar al anterior lo constituye la teoría de los conceptos figurales de Fischbein (1993), que denomina a las figuras geométricas "conceptos figurales" porque poseen características conceptuales y figurales simultáneamente.

En el proceso de razonamiento, las imágenes y los conceptos interactúan constantemente pudiendo producirse situaciones conflictivas. Un aspecto importante de la docencia consiste en enseñar a resolver dichos conflictos (López y Sánchez, 2007; Sánchez y López, 2011; Sánchez, 2012).

El modelo cognitivo de Duval

Un complemento de las teorías anteriormente descritas, lo constituye el modelo de Duval (Duval, 1995, 1998; Jones, 1998; Torregosa y Quesada, 2007), que estudia la Geometría desde un punto de vista cognitivo.

Propone que el razonamiento geométrico involucra tres tipos de procesos cognitivos (visualización, construcción y razonamiento), que se pueden realizar de forma separada si bien *"están estrechamente conectados y su sinergia es necesaria para la competencia en Geometría"* (Duval, 1998, pág.38).

En cuanto a la visualización, se plantea la pregunta metodológica de si es suficiente observar una imagen para ver lo que representa. Como respuesta, analiza cuatro tipos de aprehensiones cognitivas que se realizan de una figura (perceptiva, secuencial, discursiva y operativa).

METODOLOGÍA

La metodología utilizada en esta investigación refleja la concepción que se tiene de la práctica docente. El quehacer del profesor de Matemáticas es un compromiso con la mejora de la educación matemática realizado en el aula. Esto supone en primer lugar, reflexionar, después, investigar y analizar, y finalmente, proponer y actuar de manera permanente, estando estas actividades fuertemente interrelacionadas.

La hipótesis de la investigación es que los alumnos que inician la Educación Secundaria Obligatoria, tienen errores en sus imágenes conceptuales relativas a conceptos geométricos básicos y que, algunos de dichos errores, persisten a pesar del estudio de la asignatura. También se conjetura que su corrección depende, de manera significativa, de la metodología empleada por el profesor.

Objetivos

Para corroborar dichas hipótesis, se plantearon dos objetivos específicos.

El primer objetivo es detectar dichos errores, mediante el conocimiento de las imágenes conceptuales de los alumnos.

El segundo objetivo consiste en proponer una metodología eficaz para su corrección, basada en las fases de aprendizaje del modelo de Van Hiele, que integra las otras teorías sobre la formación del concepto geométrico expuestas en el epígrafe anterior.

Instrumentos metodológicos

El instrumento metodológico diseñado para lograr el primer objetivo es un cuestionario formado por 15 tareas articuladas en 48 ítems y dos preguntas de respuesta abierta, diseñado para ser administrado en una sesión de clase (menos de cincuenta minutos) que se encuentra disponible para su aplicación (Cabello, 2013; Cabello, Sánchez, y López, 2013).

A continuación se muestran las tareas propuestas en dicho cuestionario.

	CONTENIDO	ÍTEMS
1	Reconocimiento de la posición relativa de dos rectas en el plano	1a, 1b, 1c, 1d, ítem de respuesta abierta
2	Reconocimiento de los tipos de ángulos	2a, 2b, 2c, 2d
3	Reconocimiento de la posición relativa de dos ángulos	3a, 3b, 3c
4	Determinación de los ángulos de un triángulo (semejanza y suma de ángulos)	4a, 4b, 4c, ítem de respuesta abierta
5	Clasificación de los triángulos según los lados	5a, 5b, 5c
6	Clasificación de los triángulos según los ángulos	6a, 6b, 6c, 6d
7	Identificación de la mediatriz de un segmento	7
8	Identificación de la bisectriz de un ángulo	8
9	Identificación de polígonos irregulares y cuadriláteros no paralelogramos	9a, 9b, 9c, 9d
10	Identificación de paralelogramos y sus áreas	10a1, 10b1, 10c1, 10a2, 10b2, 10c2
11	Identificación de los elementos de un polígono regular	11a, 11b, 11c, 11d
12	Identificación de los elementos de la circunferencia	12a, 12b, 12c, 12d
13	Reconocimiento de figuras circulares	13a, 13b, 13c, 13d
14	Cálculo del área de un triángulo conociendo la base y la altura	14
15	Identificación de ternas pitagóricas	15

Tabla 3. Contenido del cuestionario de medición del rendimiento en Geometría.

Para conseguir el segundo objetivo, se diseñaron unas unidades didácticas siguiendo las directrices de las fases de aprendizaje del modelo de Van Hiele, partiendo del conocimiento que proporcionó el pre-test sobre las imágenes conceptuales y sus errores, y utilizando un software de Geometría dinámica como herramienta de construcción para ayudar a la visualización, siguiendo la recomendación de Duval.

En concreto, en primer lugar se identificaron los errores correspondientes a cada una de las unidades didácticas del currículum, después se determinó la metodología específica de corrección de cada error y, finalmente, se diseñó el contenido de las fases de aprendizaje. A continuación se muestra un fragmento de la tabla utilizada. Para más detalle, se remite al lector a consultar la bibliografía (Cabello, 2013).

	ERRORES DETECTADOS	METODOLOGÍA DE CORRECCIÓN
Unidad 1	No identifican los objetos afectados por distractores de orientación.	Se dibujan los objetos con una orientación distinta a la habitual y se pide mover y manipular los objetos en la ventana de trabajo de Cabri.
	No verbalizan cuando se les pide justificar sus respuestas.	Se pide a los alumnos justificar sus respuestas.
	No reconocen rectas secantes, perpendiculares y perpendiculares giradas.	Se dibuja una recta en posición no habitual y se enseña a los alumnos a dibujar con Cabri, rectas paralelas, secantes y perpendiculares. Además se pide que en las rectas perpendiculares midan el ángulo para que comprueben que "aunque estén giradas, el ángulo mide 90º".

Tabla 4. Extracto de la tabla de errores detectados y metodología de corrección, para el diseño de unidades didácticas.

La característica compartida por dichos instrumentos metodológicos es su aplicabilidad en el aula, lo cual permite que sean integrados en la dinámica de impartición del contenido curricular.

Diseño metodológico

En primer lugar procede decir que la muestra utilizada, como suele ser frecuente en estudios de Pedagogía y Psicología, fue incidental pues es la que se tuvo a disposición de la investigación en el momento en que se desarrolló (Pereda, 1987).

Se utilizó una muestra de 137 alumnos de 1º de ESO de dos Institutos de la Comunidad de Madrid, de la cual se seleccionaron dos grupos específicos.

Se aplicó el cuestionario (N=137) antes y después de estudiar Geometría.

Se calculó el porcentaje de aciertos de cada ítem. Se consideró que había error conceptual en la muestra de la investigación si el ítem era considerado como muy difícil, difícil o de dificultad media, según la interpretación de Yela (1987), es decir si menos del 54% de la muestra responde correctamente.

Denominación	ACIERTOS (%)
Muy difícil	Entre 5 y 24
Difícil	Entre 25 y 44
Dificultad media	Entre 45 y 54
Fácil	Entre 55 y 74
Muy fácil	Entre 75 y 95

Tabla 5. Interpretación de la dificultad de los ítems, basada en Yela (1987).

Se aplicaron las unidades didácticas diseñadas, como se ha dicho, según las fases de aprendizaje del modelo de Van Hiele, teniendo en cuenta los errores detectados en el pre-test y utilizando un software geométrico como ayuda para su corrección.

La investigación tuvo un diseño metodológico cuasi-experimental con pre-test y post-test. Como los grupos estaban constituidos, se eligieron dos de ellos (pertenecientes a la muestra anterior), en los que impartía clase la misma profesora y se comprobó que eran semejantes, es decir, sin diferencias significativas en el pre-test. El grupo de contraste (N=18) siguió una metodología tradicional (utilizando el lápiz y el papel, siguiendo las explicaciones del libro, los ejercicios propuestos y las actividades de ampliación) y el experimental (N=21) utilizó las unidades didácticas diseñadas para la investigación.

Concluida la experiencia, ambos grupos respondieron al cuestionario. Se calculó para cada alumno el valor del aprendizaje obteniendo diferencias significativas favorables al grupo experimental.

RESULTADOS

Una vez concluida la experiencia, se cuantificó el porcentaje de aciertos tanto en el pre-test como en el post-test para medir la evolución del error.

Ítem	Aciertos en el pre-test (%)	Si < 54%→ error	Aciertos en el post-test (%)	Si < 54%→ error

Tabla 6. Análisis del error en el pre-test y en el post-test.

Con este criterio se catalogaron los ítems en tres grupos:

- Conocimientos en el pre-test que se mantienen en el post-test.
- Errores en el pre-test que se corrigen en el post-test.
- Errores en el pre-test que persisten en el post-test.

Existen errores geométricos persistentes

Esto ha permitido identificar que hay 14 errores persistentes en la muestra de la investigación (N=137), que corresponden a ocho de las tareas propuestas en el cuestionario y se presentan a continuación.

1) Reconocimiento de rectas perpendiculares giradas (1c).
2) Determinación de un ángulo de un triángulo conociendo los otros dos (4c).
3) Identificación de un pentágono irregular, trapecios y trapezoide (9a, 9b, 9c, 9d).
4) Identificación del área del romboide (10c2).
5) Identificación de la apotema y el radio de un polígono regular (11a, 11c).
6) Identificación de la cuerda de la circunferencia (12c).

7) Reconocimiento del sector, segmento y trapecio circular (13b, 13c, 13e).
8) Identificación de las ternas pitagóricas (15).

Las fases de aprendizaje determinan una metodología eficaz

Para cada alumno se calculó una puntuación de cambio llamada "aprendizaje" (nota del post-test – nota del pre-test) y se halló la media en cada uno de los grupos. La media del aprendizaje para el grupo de contraste fue 1,4006 y para el grupo experimental 2,4702. La prueba t de Student para muestras independientes, reflejó diferencias significativas en el aprendizaje favorables al grupo experimental (0,006<0,01).

	grupo	N	Media	Desviación típica	Error típico de la media
aprendizaje	De contraste	18	1,4006	1,33661	0,31504
	Experimental	21	2,4702	0,94622	020648

Tabla 7. Estadísticos de grupo para contrastar el aprendizaje según el grupo de pertenencia, tomado de Cabello (2013).

		Prueba de Levene para la igualdad de varianzas		Prueba T para la igualdad de medias						
		F	Sig.	t	gl	Sig. (bilateral)	Diferencia de medias	Error típ. de la diferencia	99% Intervalo de confianza para la diferencia	
		Inferior	Superior	Inferior	Superior	Inferior	Superior	Inferior	Superior	Inferior
aprendizaje	Se han asumido varianzas iguales	0,317	0,577	-2,915	37	0,006	-1,06959	0,36691	-2,06590	-,07328
	No se han asumido varianzas iguales			-2,840	30,032	0,008	-1,06959	0,37668	-2,10538	-,03380

Tabla 8. Prueba t de Student para muestras independientes, para determinar la eficacia de la metodología experimental, tomada de Cabello (2013).

Además, se calculó el tamaño del efecto con la fórmula de Cohen (1988), para cuantificar, de manera más interpretable, la diferencia en el aprendizaje entre los dos grupos, obteniendo el valor d=0,9357>0,80, lo que significa que la diferencia es grande (Morales, 2012).

De todos modos, como era deseable constatar la eficacia de esta metodología de una manera más didáctica, se analizaron los errores persistentes en dichos grupos.

En el grupo experimental, de los 14 errores solo persisten 5 de los cuales 3 están casi corregidos, y solo 2 quedan pendientes de corregir.

En el grupo de contraste, que solo tenía 12 errores de los 14 mencionados, persisten 8, 3 están casi corregidos mientras que 5 están todavía pendientes de corregir.

Es decir, el experimental corrige 9 errores de los llamados "persistentes" mientras que el de contraste solo 4.

Los errores que mantiene el grupo experimental son:

1) Identificación del trapecio rectángulo girado (9c).
2) Identificación de las ternas pitagóricas (15).

Los errores que mantiene el grupo de contraste son:

1) Determinación de un ángulo de un triángulo conociendo los otros dos (4c).
2) Identificación del trapecio rectángulo girado (9c).
3) Identificación del radio de un polígono regular (11c).
4) Reconocimiento del segmento circular (13c).
5) Identificación de las ternas pitagóricas (15).

En la siguiente tabla se muestra en detalle dicho estudio.

ERRORES		Error en el grupo experimental				Error en el grupo de contraste			
		% aciertos pre-test		% aciertos post-test		% aciertos pre-test		% aciertos post-test	
E 1	1c	47,6	E	71,4		66,7		55,6	
E 2	4c	14,3	E	52,4	E	27,8	E	27,8	E
E 3	9a	9,5	E	66,7		16,7	E	66,7	
	9b	33,3	E	71,4		50,0	E	55,6	
	9c	23,8	E	42,9	E	11,1	E	38,9	E
	9d	33,3	E	52,4	E	38,9	E	55,6	
E 4	10c2	14,3	E	66,7		27,8	E	50,0	E
E 5	11a	0,0	E	61,9		0,0	E	61,1	
	11c	4,8	E	52,4	E	38,9	E	38,9	E
E 6	12c	52,4	E	81,0		22,2	E	50,0	E
E 7	13b	47,6	E	57,1		66,7		61,1	
	13c	42,9	E	66,7		38,9	E	44,4	E
	13e	42,9	E	81,0		33,3	E	50,0	E
E 8	15	4,8	E	38,1	E	0,0	E	33,3	E

Tabla 9. Estudio de los errores persistentes, en el grupo experimental y en el de contraste.

ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS

Estos errores no eran los esperados a priori, lo cual revela la importancia de tener datos reales de la situación inicial de los alumnos para realizar una enseñanza eficaz.

La relevancia de la detección de los errores persistentes está en que permite determinar la eficacia de la metodología de enseñanza y también en que indica los errores con los que los alumnos comienzan 2º de ESO.

Error 1

Un error persistente a pesar del estudio de la Geometría es no reconocer las rectas perpendiculares giradas.

Se ha constatado que es necesario diseñar una estrategia para conseguir la visualización de las rectas perpendiculares giradas que, en concreto, ha sido la construcción de rectas perpendiculares a otras en posición no habitual y la comprobación de que “aunque estén giradas, los ángulos miden 90º”.

Error 2

Otro error persistente es no saber determinar el valor de un ángulo de un triángulo cuando se conocen los otros dos. Se ha visto que hace falta realizar un planteamiento para que los alumnos adquieran este concepto.

Error 3 (comprende 4 errores)

Tampoco identifican el pentágono irregular, los trapecios y trapezoide, porque en la enseñanza, no se ha trabajado suficientemente con polígonos irregulares y cóncavos.

Para subsanar este error, convendría, en primer lugar, trabajar más con polígonos irregulares y cóncavos y además, incidir en la distinción entre pentágonos irregulares y trapezoides.

En segundo lugar, analizando de manera conjunta las respuestas a los ítems relativos a los trapecios y trapezoides se observa que los alumnos no los distinguen y tienden, o bien a denominarlos de manera genérica como cuadriláteros o a confundirlos entre sí. Esto sería admisible en Primaria pero no en 1º de ESO, por lo que hay que incidir en la enseñanza en aprender a nombrar cada figura.

Error 4

Desconocen también el área del romboide y aplican el área del triángulo. Para corregirlo se deben realizar más ejercicios en los que se deje claro que en el área del romboide “no hay que dividir entre 2” y practicar en la obtención del área del romboide a partir del rectángulo formado.

Error 5 (contiene dos errores)

Confunden la apotema de un polígono regular con el radio. Para corregir este error sería necesario realizar más ejercicios de identificación y construcción de los elementos de las distintas figuras geométricas.

Desconocen el radio o lo denominan diagonal. Como en el caso del a apotema, para corregir este error sería preciso realizar más ejercicios de identificación y construcción de los elementos de las distintas figuras geométricas y, en concreto, diferenciarlo de la diagonal.

Error 6

No identifican la cuerda en una circunferencia o la confunden con el arco. Este error podría corregirse realizando más práctica de diferenciación de la cuerda y el arco, además de los ejercicios de identificación de los elementos de la circunferencia y demás figuras geométricas.

Error 7 (incluye tres errores)

De las figuras circulares solo reconocen el círculo y la corona circular, es decir, lo mismo que en Primaria. Siguen sin reconocer el sector circular, el trapecio circular y el segmento circular, confundiendo dichos elementos entre sí, porque se ha trabajado poco con estos tres objetos.

Error 8

La tarea de identificación de ternas pitagóricas supone un grado de comprensión en Geometría que realmente la mayoría de los alumnos no tienen por lo que es necesario idear una estrategia que guíe al alumno en su comprensión.

CONCLUSIONES

Se puede concluir que la propuesta didáctica basada en las fases de aprendizaje del modelo de Van Hiele, partiendo del conocimiento de las imágenes conceptuales de los alumnos y utilizando un software geométrico para la corrección de errores ha demostrado ser eficaz pues cumple la dimensión más profunda de la docencia, que no solo es enseñar sino corregir.

Valorando la propia experiencia, se considera muy recomendable para los profesores el diseño de unidades didácticas basadas en el modelo de Van Hiele.

Los resultados obtenidos en esta investigación son generalizables pues constituyen una propuesta metodológica basada en la detección de imágenes conceptuales y errores y en la implementación curricular del modelo de Van Hiele a partir de dichos datos.

REFERENCIAS

Cabello, A. B. (2013). *La modelización de Van Hiele en el aprendizaje constructivo de la Geometría en Primero de la Educación Secundaria Obligatoria a partir de Cabri.* Tesis Doctoral. Universidad de Salamanca.

Cabello, A. B., Sánchez, A., y López, R. (2013). Signigicatividad de la implementación curricular del modelo de Van Hiele. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa, y N. Ciment, *Investigación en Educación Matemática XVII* (págs. 193-207). Bilbao: SEIEM.

Cohen, J. (1988). *Statistical Power Analysis for the Behavioral Sciences.* New York: Accademic Press.

Corberán, R., Gutiérrez, A., Huerta, M., Jaime, A., Margarit, J., Peñas, A., y Ruiz, E. (1994). *Diseño y evaluación de una propuesta curricular de aprendizaje de la Geometría en Enseñanza Secundaria basada en el Modelo de Razonamiento de van Hiele.* Madrid: M.E.C.

Duval, R. (1995). Geometrical Pictures: kinds of representation and specific processings. En R. Sutherland, y J. Mason, *Exploiting Mental Imagery with Computers in Mathematics Education* (págs. 142-157). Berlin: Springer.

Duval, R. (1998). Geometry from a Cognitive Point of View. En C. Mammana, y V. Villani, *Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st Century: an ICMI study* (págs. 37-51). Dordrecht: Kluwer.

Fischbein, E. (1993). La teoría de los conceptos figurales. *Educational Studies in Mathematics, 24 (2)*, 139-162.

Gutiérrez, A., y Jaime, A. (1998). On the assessment of the Van Hiele levels of reasoning. *Focus on Learning Problems in Mathematics 20 (2 y 3)*, 27-46.

Gutiérrez, A., Jaime, A., y Fortuny, J. M. (1991). An allternative paradigm to evaluate the acquisition of the Van Hiele levels. *Journall for Research in Mathematics Education 22 (3)*, 237-251.

Hershkowitz, R. (1987). The acquisition of concepts and misconceptions in basic Geometry or when “a little learning is a dangerous thing”. *Prodeedings of the Second International Seminar on Misconceptions and Educational Strategies in Science and Mathematics III* (págs. 238-251). Ithaca, New York: Cornell University.

Hershkowitz, R. (1989). Visualization in Geometry-Two sides of the coin. *Focus on Learning Problems in Mathematics (Volume 11. Number 1)*, 61-76.

Hershkowitz, R. (1990). Psychological aspects on learning Geometry. En P. Nesher, y J. Kilpatrik, *Mathematics and cognition* (págs. 70-95). Cambridge: Cambridge UP.

Jaime, A. (1993). *Aportaciones a la interpretación y aplicación del modelo de van Hiele: la enseñanza de las isometrías del plano. La evaluación del nivel de razonamiento.* Valencia: Universidad de Valencia.

Jaime, A., y Gutiérrez, A. (1990). Una propuesta de fundamentación para la enseñanza de la Geometría: El modelo de van Hiele. En S. Llinares, y M. Sánchez, *Teoría y práctica en educación matemática* (págs. 295-384). Sevilla: Alfar.

Jaime, A., y Gutiérrez, A. (1994). A model of test design to assess the Van Hiele levels. *Proceedings ot the 18th PME Conference 3*, 41-48.

Jaime, A., y Gutiérrez, A. (1995). Guidelines for Teaching Plane Isometries in Secondary School. *The Mathematics Teacher, 88 (7)*, 591-597.

Jones, K. (1998). Theoretical Frameworks for the Learning of Geometrical Reasoning. *Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics 18 (1 y 2)*, 29-34.

López, R., y Sánchez, A.(2007). Componentes cognitivos generadores de errores algorítmicos: caso particular de la substracción. *Revista de Educación, 344,* 377-402.

Morales, P. (2012). *El tamaño del efecto (effect size): análisis complementarios al contraste de medias*. Obtenido de http://www.upcomillas.es/personal/peter/investigacion/Tama%F1oDelEfecto.pdf

Pereda, S. (1987). *Psicología Experimental. I Metodología.* Madrid: Pirámide.

Sánchez, A. (2012). The Interaction between Intuitive, Interpretations, Linguistic Knowledge andAlgorithmic Components in Children´s (Aged 7-9) Subtraction Errors. *British Journal of Educational Research*, *2(1)*, 20-41.

Sánchez, A. (2013). Algorithmic Errors. Cognitive Processes and Educational Actions. *Teoría de la Educaci*ón. Revista Interuniversitaria, 25(1),215-235.

Sánchez, A., y López, R. (2011). La transferencia de aprendizaje algorítmico y el origen de los errores en la sustracción. *Revista de Educación, 354*, 429-445.

Torregosa, G., y Quesada, H. (2007). Coordinación de procesos cognitivos en Geometría. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 10 (2)*, 275-300.

Van Hiele, P. M. (1957). *El problema de la comprensión en conexión con la comprensión de los escolares en el aprendizaje de la Geometría.* Utrecht: Universidad Real de Utrecht.

Van Hiele, P. M. (1986). *Structure and insight. A theory of Mathematics Education.* New York: Academic Press.

Vinner, S. (1975). The Naive Platonic Approach as a Teaching Strategy in Arithmetics. *Educational Studies in Mathematics, 6*, 339-350.

Vinner, S. (1983). Concept definition, concept image and the notion of function. *International Journal of Mathematical Education in Science an d Technology Vol 14*, 293-305.

Vinner, S., y Hershkowitz, R. (1980). Concept images and common cognitive paths in the development of some simple geometrical concepts. En R. Karplus, *Proceedings og the 4th PME International Conference* (págs. 177-184).

Vinner, S., y Hershkowitz, R. (1983). On concept formation in Geometry. *Zentralblatt für Didaktik in Geometry, Vol. 83, nº 1*, 20-25.

Yela, M. (1987). *Introducción a la teoría de los tests.* Madrid: Facultad de Psicología. Universidad Complutense.

Épsilon - Revista de Educación Matemática *2014, Vol. 31(1), nº 86, 37-49*

La importancia del libro de texto para fundamentar las bases del conocimiento matemático ¿cómo afecta a los alumnos que acceden a la universidad?

M. Manuela Segovia González
Universidad Pablo de Olavide (Sevilla)

Ana M. Martín Caraballo
Universidad Pablo de Olavide (Sevilla)[1]

Concepción Paralera Morales
Universidad Pablo de Olavide (Sevilla)

RESUMEN: *En este trabajo se presentan los resultados obtenidos al realizar una prueba inicial a alumnos de nuevo ingreso en la universidad Pablo de Olavide en los diferentes estudios de la Facultad de Ciencias Empresariales. Se comprueba en base a dichos resultados, que los alumnos presentan grandes deficiencias de conocimientos en lo relativo al lenguaje formal y al conocimiento de diferentes símbolos matemáticos, con pocas diferencias entre los distintos tipos de bachilleratos cursados por ellos.*
Palabras claves: *Lenguaje matemático, educación superior, pruebas estadísticas.*

The importance of textbook basis for the foundations of mathematical knowledge how does a student who access to university?

Abstract: *In this paper we show the results that we have obtained after doing an initial test to the undergraduates that are beginning their studies at the Pablo de Olavide*

1. Corresponding autor: ammarcar@upo.es

University in the different degrees of the Business Faculty. The results show that the students have many technical faults o defects related to formal language and math symbols knowledge.
Keywords: *Mathematic language, higher education, statistics tests.*

INTRODUCCIÓN

Desde el curso 2003/2004 la Universidad Pablo de Olavide (UPO) ha estado inmersa en el proceso de implantación del Sistema Europeo de Transferencia de Créditos (ECTS). Así, durante los cursos académicos 2003/2004, 2004/2005 y 2005/2006 participó en las convocatorias autonómicas de la Junta de Andalucía para la elaboración de guías docentes de titulaciones andaluzas conforme al sistema ECTS, a través de las distintas titulaciones ofertadas por esta universidad.

Después de la elaboración de las guías comunes y como continuación del proceso de adaptación al sistema ECTS, varias titulaciones de la Universidad Pablo de Olavide participaron en posteriores convocatorias autonómicas, de incentivos a la implantación de experiencias piloto de aplicación del sistema ECTS.

Actualmente el sistema ECTS se ha implantado ya en los últimos cursos de las licenciaturas. Este sistema ha supuesto un cambio radical en la enseñanza universitaria. Se pasa de computar únicamente las horas que el alumno dedica a asistir a las clases presenciales de cada asignatura a contabilizar además las horas de trabajo que el alumno dedica al estudio a lo largo del curso. La implicación del estudiante en el proceso de enseñanza-aprendizaje se hace absolutamente necesaria, y para conseguirla es fundamental la utilización de metodologías más activas en las que el alumno sea el protagonista del proceso de enseñanza-aprendizaje, y que el profesor se convierta en creador y dinamizador de entornos de aprendizaje que estimulen a los alumnos. Asimismo el sistema de evaluación debe ser acorde a estas nuevas metodologías.

El desarrollo de estas experiencias piloto ha llevado a la Universidad a poder adaptarse desde el curso 2009/2010 a los nuevos títulos de grado dentro del Espacio Europeo de Educación Superior. Por ello, desde entonces se habla y evalúa en competencias. Los resultados de este proceso en las asignaturas de matemáticas impartidas por los autores de este trabajo (traducidos en porcentajes de alumnos aprobados sobre matriculados) han sido muy buenos aunque no siempre el camino ha sido fácil ya que el profesorado ha tenido que formarse los nuevos conceptos y métodos de la Educación Superior en el Marco Europeo. Para ello, la universidad a través de la Unidad de Formación oferta al profesorado, desde hace varios años, distintos cursos para el aprovechamiento y mejora de las capacidades del personal facilitando con estos cursos el soporte imprescindible para el diseño e implantación de estrategias que aprovechen los recursos y capacidades distintivas de la institución y la hagan despuntar en un entorno marcado por el constante cambio tecnológico y la integración en el Espacio Europeo de Educación Superior.

El objetivo de este proceso de formación e innovación para desarrollar un nuevo modelo docente integrado en el Marco Europeo ha sido siempre que profesores y estudiantes constituyan un equipo con el fin de llegar a una buena transmisión de conocimientos, adquisición de competencias y el éxito de la formación. En ciertas asignaturas del ámbito tecnológico como son las matemáticas, que es la asignatura que nos ocupa en este trabajo, el objetivo está siendo muy difícil de alcanzar (cuando no imposible) dada la escasa formación con la que los alumnos llegan a la universidad.

En este trabajo se presentan y analizan los resultados obtenidos al realizar una prueba inicial a alumnos de nuevo ingreso en la universidad de los estudios de Administración y Dirección de Empresas. Como se verá en el apartado cuatro los alumnos presentan grandes deficiencias de conocimientos en lo relativo al lenguaje formal y al conocimiento de diferentes símbolos matemáticos.

Actualmente se están cambiando o ya se han cambiado todos los estudios universitarios con el paso de las licenciaturas y diplomaturas a estudios de grados, y además, simultáneamente se han o están cambiando los currículos del Bachillerato. En un momento ideal para que tales cambios se hagan, de alguna manera, enlazados y no totalmente desconectados los dos mundos, por una parte el de la Enseñanza Secundaria y del Bachillerato y por otra parte el Universitario. Sin embargo, la realidad es que por un lado, los cambios que se han hecho en Bachillerato no han tenido en cuenta cuáles serán los futuros programas de las asignaturas que esos alumnos cursarán en la Universidad y por otro, los cambios que se están haciendo en los planes de estudios de la Universidad se realizan desde la perspectiva de lo que el mercado laboral va a exigirles a los futuros graduados y no desde la perspectiva de los conocimientos que tienen los alumnos cuando llegan a la Universidad.

SITUACIÓN Y PROBLEMÁTICA DE LOS ALUMNOS

El paso de los estudios de secundaria y bachillerato a los universitarios implica muchos cambios a los que el alumno se debe enfrentar y para los que debe adquirir nuevas estrategias de aprendizaje. Podríamos decir que uno de los cambios más importantes en los que se ven inmersos los alumnos se refiere a la forma de organizar su proceso de estudio, el alumno se convierte en el responsable de ese proceso de formación y debe trabajar de forma autónoma.

En este trabajo nos centraremos en las dificultades específicas del estudio de las matemáticas. En el caso de secundaria y bachillerato el profesor controla de manera exhaustiva el proceso de aprendizaje del alumno indicándoles en cada momento los pasos a seguir. Sin embargo en la universidad, aunque en un principio el profesor guía al alumno en su proceso de aprendizaje es ahora el alumno el que tiene que aprender a desarrollar una serie de competencias por sí mismo y pasa a ser el principal protagonista, sino el único, protagonista del proceso de enseñanza-aprendizaje.

Por un lado tendrá que adquirir las competencias propias de la titulación que se desarrollan en la asignatura, por otro aquellas competencias del módulo que se desarrollan en la asignatura y finalmente las particulares de la asignatura, entre esas competencias, nos gustaría destacar las competencias digitales. Tales competencias incluyen utilizar las tecnologías de la información y la comunicación extrayendo su máximo rendimiento a partir de la comprensión de la naturaleza y modo de operar de los sistemas tecnológicos, y del efecto que esos cambios tienen en el mundo personal y sociolaboral. Asimismo supone manejar estrategias para identificar y resolver los problemas habituales de software y hardware que vayan surgiendo. Igualmente permite aprovechar la información que proporcionan y analizarla de forma crítica mediante el trabajo personal autónomo y el trabajo colaborativo (Tenorio, Paralera y Martín, 2011). El tratamiento de la información y la competencia digital implican ser una persona autónoma, eficaz, responsable, crítica y reflexiva al seleccionar, tratar y utilizar la información y sus fuentes, así como las distintas herramientas tecnológicas; también implican tener una actitud critica y reflexiva en la valoración de la información disponible, contrastándola cuando es necesario, y por supuesto, respetar las normas de conducta acordadas socialmente para regular el uso de la información y sus fuentes en los distintos soportes.

Centrándonos en nuestra asignatura, a los alumnos cuando llegan a la universidad se les da una "responsabilidad matemática" mucho mayor, deben realizar actividades que no estaban acostumbrado a hacer; decidir cómo organizar su estudio, trabajar diariamente, aprender a trabajar solo y también en equipo con personas desconocidas (en principio) para él, saber buscar material, bibliografía y aprovechar los recursos que le ofrece la universidad y por supuesto, los que le ofrece la red (Internet). En cuanto a la organización de las matemáticas que ha de estudiar, por ejemplo, se producen cambios como: dificultades con la notación (interpretación del lenguaje matemático), necesidad de interpretación de resultados una vez aplicadas las técnicas de solución de problemas, posibilidad de aplicar distintas técnicas a los mismos problemas, planteamientos de problemas abiertos que necesitan solución, etc.

La problemática anterior la centraremos en los estudios de la Facultad de Ciencias Empresariales. Esto no es fácil ya que a nuestras aulas acceden alumnos que provienen en su mayoría de distintas modalidades de bachillerato, difiriendo los programas de las asignaturas de matemáticas en cada uno de ellos. Por ello, los alumnos que acceden a primer curso de carrera llegan con una formación matemática muy distinta dependiendo de la modalidad de bachillerato que hayan cursado.

Además, debido al desconocimiento del lenguaje matemático los alumnos se encuentran con una dificultad añadida para asimilar los contenidos (Pimm, 1990 y Ortega y Ortega, 2001). Las destrezas adquiridas por ellos con respecto al manejo del lenguaje matemático están a muy bajo nivel lo que acentúa aún más la dificultad de asimilar nuevos contenidos, unido al bajo interés del alumnado por aprender y superar esta disciplina. En general, los resultados que los alumnos obtienen reflejan que les resulta difícil superar esta asignatura. Esto puede ser debido a varias razones que exponemos a continuación.

Por un lado, los conocimientos previos que se supone que ha de tener el alumnado o que se necesitan para cursar matemáticas de primer curso de universidad en estas titulaciones, no se corresponden prácticamente con la realidad. Es decir, los alumnos se encuentran ante una situación en la que no cuentan con las herramientas y conceptos básicos que se supone que deben tener asimilados, cuando inician una asignatura de estas características. Además, recordemos que en los nuevos bachilleratos han aumentado considerablemente los temas dedicados a Probabilidad y Estadística, sobre todo en el de Ciencias Sociales, lo que inevitablemente redunda en un debilitamiento de otros temas clásicos como Cálculo Diferencial e Integral y que son parte de las asignaturas que cursarán en primero de su titulación. En temas tan concretos y fundamentales como estos, es donde se notará una mayor diferencia de formación en los alumnos que acceden a nuestros estudios universitarios, según procedan del Bachillerato Científico-Tecnológico o del de Ciencias Sociales. En Jiménez y Areizaga (2001) se hacen distintas consideraciones sobre las diferencias en ambos bachilleratos tanto en el campo del Álgebra Lineal como en el Cálculo Diferencial e Integral.

Por otro lado, desde hace unos años en los niveles educativos anteriores a la universidad se ha abandonado en los libros de texto el uso de un lenguaje formal, es decir, del lenguaje matemático (con el fin de hacer más amenos y atrayentes los libros de textos) lo que hace que alumnos que llegan a la universidad no dominen, ni siquiera de una forma muy básica, el lenguaje matemático ni el razonamiento lógico. Cuando hablamos de lenguaje matemático nos estamos refiriendo a dos cuestiones distintas pero interrelacionadas, por una parte, nos referimos a la simbología utilizada en matemáticas, y por otra nos referimos a la estructura y presentación de los contenidos matemáticos. Ésta se realiza mediante enunciados como Definición, Teorema, Proposición, Lema, Corolario, Demostración, etc., de manera que cada uno de ellos predice su contenido. Así, todo enunciado o afirmación en matemáticas debe ser presentado dentro de uno de estos epígrafes, ayudando así a una clara organización y estructura de los contenidos de la materia; esto no ocurre en el lenguaje normal, ya que su uso no exige ser tan estructurado (Martín, Paralera, Romero, y Segovia, 2007). Al tener alumnos con una gran diversidad en cuanto a los conocimientos que poseen de la materia, un primer paso para mejorar nuestro proceso de enseñanza-aprendizaje fue identificar los distintos problemas que surgirían a la hora de afrontar la asignatura.

DIFERENCIAS QUE PRESENTAN LOS ALUMNOS

En vista de la situación que hemos planteado anteriormente, nos propusimos averiguar con qué base y formalismo matemático accedían los alumnos a los primeros cursos de las titulaciones en nuestra universidad, en las que se imparten asignaturas de matemáticas. Para ello, preparamos unas cuestiones que recopilamos en una prueba que realizaron los alumnos de nuevo ingreso en los primeros días de clase (Martín ; Melgar; Paralera, Romero, y Tenorio, 2005). Esta prueba se realizó en distintos grupos de la Licenciatura en Administración y Dirección de Empresas (ADE) y de la Diplomatura en Ciencias Empresariales. En ella recogíamos al comienzo, información sobre el acceso del alumno a la universidad, lo que nos permitirá más adelante poder interpretar los resultados en función de ello.

Prueba inicial realizada a los alumnos

El contenido de la prueba se puede dividir en dos bloques bien diferenciados, que nos permitirán hacernos una idea sobre las nociones de los alumnos sobre el lenguaje matemático, y conocimientos básicos.

En el primer bloque se pretende determinar si los alumnos reconocen o están familiarizados con el lenguaje matemático. Se realizan para ello cuatro cuestiones:

- Interpretación de doce símbolos matemáticos.
- Relacionar los conceptos de definición, teorema, demostración, ejemplo, contraejemplo, axioma e hipótesis, con su descripción más adecuada.
- Escribir con lenguaje formal alguna definición matemática.
- Escribir en lenguaje matemático alguna expresión con lenguaje normal. Ver figura 1.

En el segundo bloque se realizan cinco cuestiones sencillas sobre cálculo algebraico, representación de funciones, cálculo diferencial e integral. En concreto, se pide:

- Resolución de sistemas de ecuaciones lineales.
- Representaciones de funciones lineales y cuadráticas.
- Simplificación de expresiones con radicales sencillos.
- Cálculo de derivadas de primer orden de polinomios.
- Cálculo de primitivas de funciones polinómicas. Ver figura 2.

Una vez recopilada toda la información, describiremos mediante los resultados las dificultades que presentan los alumnos en distintos aspectos de la asignatura debido tanto a la falta de base matemática como a las carencias en el lenguaje matemático con la que acceden los alumnos a la universidad. Con respecto a la falta de base matemática podríamos decir, que es falta de conceptos que no han sido explicados con anterioridad, otros que sí se han explicado pero que nunca se han asimilado, de memorización de ciertas fórmulas, teoremas o procedimientos matemáticos, de agilidad de cálculo mental y de manejo de expresiones matemáticas o de hábitos a enfrentarse a ciertas dificultades en la resolución de problemas.

ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS

Una vez realizada la prueba de conocimientos se gestionó la información que se obtuvo de ella. Con el programa SPSS se llevó a cabo una exhaustiva depuración de los datos y se realizó el estudio estadístico pertinente. Con todo esto lo que pretendemos es acercarnos a las necesidades de los alumnos y ver cuales son las principales dificultades a las que se enfrentan. En concreto, este estudio se realiza para la asignatura de matemáticas de primer curso de la Facultad de Ciencias Empresariales. El análisis se llevará a cabo desde dos perspectivas diferentes, lenguaje y cálculo matemático.

La prueba de conocimiento la realizaron 207 alumnos todos ellos cursaban las matemáticas del primer curso de la Facultad de Ciencias Empresariales. La procedencia de dichos alumnos es diversa. Algunos de ellos han accedido a la Universidad por medio de los ciclos formativos y muchos otros por medio del bachillerato, ya sea el bachillerato tecnológico, el de la salud o el de las ciencias sociales.

PRUEBA DE NIVEL DE MATEMEMÁTICAS **2008/2009**

TITULACIÓN: ....ACCESO UNIVERSIDAD:.............................

1. Indique significado de los siguientes símbolos matemáticos si los conoce.

$\in$	$\exists$	$\forall$
$\Leftrightarrow$	$\subseteq$	$\not\subset$
$\neq$	€	%
$<$	Π	Σ

2. Relacione los siguientes conceptos con la descripción más adecuada.

Definición	*Enunciado de una verdad que se puede demostrar.*
Teorema	*Suposición de algo posible o imposible para sacar de ello una consecuencia.*
Demostración	*Enunciado que expone con claridad las características de una cosa.*
Ejemplo	*Principio fundamental e indemostrable sobre el que se construye una teoría.*
Contraejemplo	*Vale para comprobar o ilustrar un enunciado.*
Axioma	*Vale para demostrar que un enunciado propuesto no es cierto*
Hipótesis	*Prueba de algo partiendo de verdades universales y evidentes*

3. Traduzca la siguiente expresión matemática, si no la conoce puede indicar únicamente el significado de los símbolos utilizados.

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta(\varepsilon) > 0 \,/\, |x - x_0| < \delta \rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

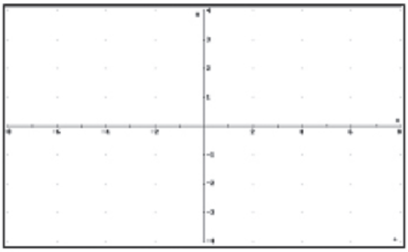
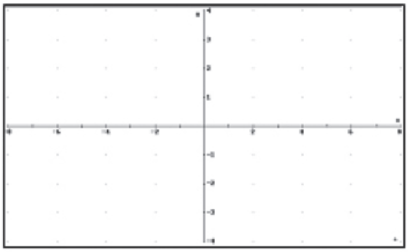
4. Traduzca del lenguaje normal al lenguaje matemático.

Dado un número real existe su mitad.

Figura 1. Cuestiones del bloque sobre lenguaje matemático

5. Factorice el siguiente polinomio:
$x^4 + x^3 - 7x^2 - x - 6 =$

6. Represente gráficamente $y = x^2 - 2x - 3$ **Represente gráficamente** $y = 3x - 3$

7. Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones $\begin{cases} 3x + 2y = 5 \\ -x + 2y = 1 \end{cases}$

8. Simplifique: $2\sqrt{16} + 12\sqrt{2} - 4\sqrt{18} - 8 =$

9. Calcule la primera derivada de $f(x) = x^4 + 3e^2$.

Figura 2. Cuestiones del bloque sobre Cálculo Algebráico, Diferencial e Integral

En primer lugar realizamos un estudio de forma global sin segmentar la muestra según la procedencia de los alumnos. De esta forma, la nota media de ellos en lenguaje matemático es 1,08 con una desviación típica de 0,46, en el cálculo matemático es de 1,48 con una desviación de 1,19. Ambas variables toman valores que van de 0 a 5, por tanto, podemos observar que en general el nivel del alumnado en estos conceptos es muy bajo. Lo mismo observamos si tenemos en cuenta la nota global, calculada como la suma de las calificaciones obtenidas en el lenguaje y el cálculo matemático. Para esta variable, la media obtenida es 2,56 con una desviación típica de 1,38. Los valores mínimos y máximos encontrados son 0,33 y 8,38, respectivamente.

En segundo lugar, nos vamos a centrar en los alumnos según el tipo de estudio que ha cursado para acceder a la Universidad. Queremos estudiar de forma empírica si existen diferencias en los conocimientos matemáticos de los alumnos según la procedencia de ellos. Para ello, en el Gráfico 1 mostramos a los alumnos encuestados según el los estudios cursados. Podemos observar que la mayoría de los estudiantes proceden del bachillerato de las ciencias sociales, seguido del tecnológico, los ciclos y por último el bachillerato de ciencias de la salud.

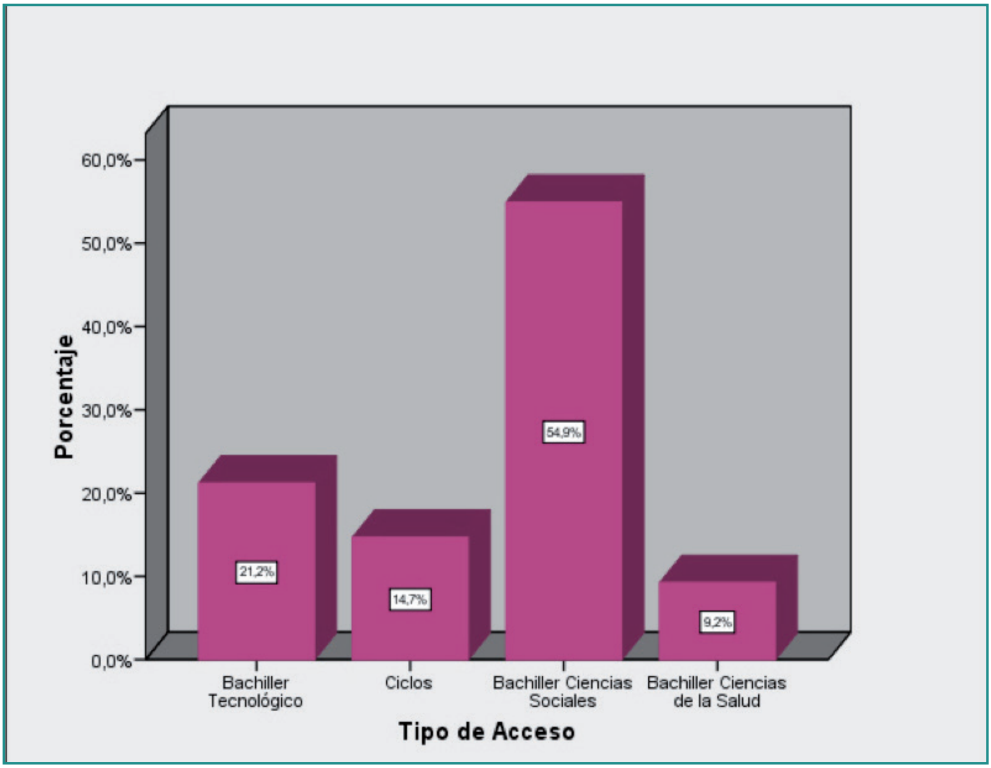


Gráfico 1. Porcentajes de alumnos encuestados según su procedencia.

A continuación, en la Tabla 1 se muestra una descriptiva de la variable Nota global de la prueba distinguiendo por el tipo de acceso.

Tipo de Acceso	Nota global (0-10) Media ± Desviación Típica (Rango)
Bachillerato tecnológico	2,91 ± 1,73 (0,39-8,38)
Bachillerato Ciencias de la Salud	2,75 ± 1,55 (0,62-5,46)
Bachillerato Ciencias Sociales	2,65 ± 1,18 (0,48-5,30)
Ciclos	1,67 ± 1,07 (0,33-4,05)

Tabla 1.Descriptiva de la nota global de la prueba.

En la Tabla 2 hacemos lo mismo, pero para las variables: Lenguaje y Cálculo. Observando ambas tablas podemos ver que las notas más altas las obtenemos para el bachillerato tecnológico, seguido del de ciencias de la salud, ciencias sociales, y por último, los ciclos.

Tipo de Acceso	Lenguaje (0-5)	Cálculo (0-5)
	Media ± Desviación Típica (Rango)	Media ± Desviación Típica (Rango)
Bachillerato Tecnológico	1,24±0,64 (0,39-3,38)	1,67 ± 1,28 (0-5)
Bachillerato Ciencias de la Salud	1,16 ± 0,70 (0,62-3,46)	1,59 ± 1,18 (0-3)
Bachillerato Ciencias Sociales	1,08 ± 0,31 (0,42-2,38)	1,56 ± 1,13 (0-4)
Ciclos	0,86 ± 0,37 (0-1,71)	0,81 ± 1,04 (0-3)

Tabla 2. Descriptiva de las variables lenguaje y cálculo según procedencia.

Una vez que hemos realizado un estudio descriptivo de las variables según el tipo de acceso nos disponemos a realizar un estudio inferencial. De esta manera podremos asegurarnos de si existen diferencias estadísticamente significativas o no. Para poder realizar estas comparaciones se llevó a cabo la prueba no paramétrica de Kruskal-Wallis, ya que la correspondiente prueba paramétrica, el test ANOVA, no fue posible realizarla debido a que no se daban las hipótesis que requiere dicho prueba. Para corroborar si se daban o no las hipótesis de aplicación se llevó a cabo el test de Shapiro-Wilk, para comprobar la normalidad, y el test de Levene, para comprobar la homocedasticidad. En el caso de existir diferencias significativas en el test de Kruskal-Wallis se realizó el test de Dunn para ver entre qué bachilleratos existían realmente. Todo lo hicimos al 95% de confianza.

Las variables estudiadas fueron las notas en el lenguaje matemático, en el cálculo y de forma global. En la Tabla 3 presentamos de forma resumida los resultados obtenidos de los diversos test que hicimos.

Variables	Tipo de Acceso	Shapiro-Wilk	Levene	Kruskal-Wallis	Diferencias (p-valor)
Lenguaje matemático	**Bachillerato Tecnológico**	0,001**	0,002**	0,011**	$\mu_{ciclos} < \mu_{Tecnológico}$ (0,004**) $\mu_{ciclos} < \mu_{Ciencias\ Sociales}$ (0,003**)
	Bachillerato CC Salud	0,001**			
	Bachillerato CC Sociales	0,03*			
	Ciclos	0,968			
Cálculo	**Bachillerato Tecnológico**	0,001**	0,723	0,012*	$\mu_{ciclos} < \mu_{Tecnológico}$ (0,004**) $\mu_{ciclos} < \mu_{Ciencias\ Sociales}$ (0,002**) $\mu_{ciclos} < \mu_{Ciencias\ de\ la\ Salud}$ (0,029**)
	Bachillerato CC Salud	0,014*			
	Bachillerato CC Sociales	0,0005**			
	Ciclos	0,0005**			
Nota global	**Bachillerato Tecnológico**	0,001**	0,142	0,002**	$\mu_{ciclos} < \mu_{Tecnológico}$ (0,001**) $\mu_{ciclos} < \mu_{Ciencias\ Sociales}$ (0,001**) $\mu_{ciclos} < \mu_{Ciencias\ de\ la\ Salud}$ (0,021*)
	Bachillerato CC Salud	0,371			
	Bachillerato CC Sociales	0,027*			
	Ciclos	0,017*			

* Diferencias significativas al 95% de confianza

** Diferencias significativas al 99% de confianza

Tabla 3. Comparación de las notas según el tipo de acceso.

En cuanto a la variable nota en el lenguaje, podemos observar que existen diferencias significativas (p-valor es 0,011). Las diferencias las encontramos entre los alumnos procedentes de los ciclos y los procedentes del bachillerato tecnológico y de ciencias sociales (p-valor 0,004, p-valor 0,003, respectivamente), siendo las notas más bajas en los ciclos.

En cuanto a la variable nota en el cálculo matemático, existen diferencias significativas (p-valor es igual a 0,012). Las diferencias se encuentran entre los ciclos y los alumnos del bachillerato tecnológico, el de ciencias sociales y el de la salud (p-valor 0,004, p-valor 0,002, p-valor 0,029, respectivamente).

Podemos observar que los alumnos que tienen más deficiencias en los conocimientos matemáticos son los que proceden de los ciclos y los que mejor los que proceden del bachillerato tecnológico.

Si consideramos la nota global, encontramos diferencias significativas entre todas las formas de accesos (Kruskal-Wallis, p-valor 0,002). Haciendo el test de Dunn observamos que existen diferencias significativas entre los ciclos y los distintos bachilleratos (tecnológico, p-valor 0,001; ciencias sociales, p-valor 0,001; ciencias de la salud, p-valor 0,021).

CONCLUSIONES

Como hemos reflejado anteriormente, los alumnos acceden a los primeros cursos de la Universidad con graves deficiencias, y en concreto en nuestra asignatura además con serias dificultades en el conocimiento del lenguaje matemático.

Pensamos que las posibles acciones que se deberían llevar a cabo para subsanar dichas dificultades son las siguientes:

- El aprendizaje del lenguaje matemático debería comenzar en la Educación Secundaria Obligatoria y de esta forma cuando el alumno llegue al Bachillerato, el uso de tal lenguaje tendría que ser habitual en sus clases. Como consecuencia de este pronto aprendizaje el alumno descubrirá las ventajas de utilizar un lenguaje preciso y claro.
- En el primer curso de la universidad los conocimientos del lenguaje matemático deberían ampliarse. Por ello, el estudio del lenguaje matemático se ha incluido en un curso virtual denominado “Fundamentos Básicos de Matemáticas”, que se imparte en nuestra universidad desde el curso 2006-2007, donde los contenidos que se desarrollan y trabajan no son más que un exhaustivo recordatorio de aquellos conocimientos ya estudiados y que son necesarios para superar el paso del bachillerato a la universidad.
- Consideramos útil la existencia de manuales de la asignatura que sirvan de puente entre los textos que se emplean en bachillerato y los utilizados en la universidad. En estos manuales se debería intentar combinar algunas notaciones intuitivas con aquellas más rigurosas y formales.

Por difícil que resulte, debemos hacer entender a nuestros alumnos que la única forma correcta de comunicación en Matemáticas es el lenguaje matemático. Utilizarlo es necesario para “saber lo que se dice” y “decir lo que se sabe”. Los alumnos deben “aprender matemáticas”, es decir, deben desarrollar ciertas habilidades que le permitan organizar y plantear estrategias para resolver problemas y manejar los contenidos de distintas formas. Es decir, deberían poder resolver problemas, generalizar y modelizar diferentes situaciones, hacer estimaciones y previsiones, etc.

Por otra parte, nosotros deberíamos procurar que los alumnos utilicen los conocimientos adquiridos para que a partir de ciertas situaciones puedan comparar los resultas y la forma de resolverlas para evolucionar hacia los procedimientos propios de las matemáticas. Además se debería intentar que los alumnos encuentren significado y aplicación a los conocimientos matemáticos adquiridos.

Por último planteamos algunas preguntas: ¿cómo se podría homogeneizar los conocimientos de los alumnos que proceden de diferentes bachilleratos y ciclos?, ¿es necesario introducir cursos cero de matemáticas en las universidades para que los alumnos lleguen al nivel requerido?

REFERENCIAS

Jiménez, M., Areizaga, A. (2001). Reflexiones acerca de los obstáculos que aparecen, en la enseñanza de las matemáticas, al pasar del Bachillerato a la Universidad. *Rect@, Actas_9*, Vol 1.

Martín, A.M., Melgar, M.C., Paralera, C.;,Romero, E. y Tenorio, A.F. (2005). Un estudio sobre conocimientos matemáticos básicos en alumnos de nuevo ingreso en la universidad. *Actas II Encuentro del Profesorado de la Provincia de Sevilla.*

Martín, A.M., Paralera, C., Romero, E., Segovia, M.M. (2007). Dificultades del alumnado en la lectura y comprensión del lenguaje matemático. *Actas III Encuentro del Profesorado de la Provincia de Sevilla.*

Martín, A.M., Segovia, M.M. (2010). Implantación de nuevas tecnologías y técnicas de evaluación en la facultad de empresa. *Revista de Formación e Innovación Educativa Universitaria (REFIEDU),* 3(2), 25-32.

Ortega, J.F.; Ortega, J.A. (2001). Matemáticas: ¿Un problema de lenguaje? *Actas del IX Jornadas de ASEPUMA.*

Pimm, D. (1990). El lenguaje matemático en el aula, *M.E.C.-Morata*, Madrid.

Tenorio A. F., Paralera, C., Martín, A. M. (2010). Evaluación mediante competencias digitales: una experiencia con Mathematica. *Epsilon,* 75, 123-136

XV CONGRESO DE ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS

El sentido de las matemáticas: matemáticas con sentido

CEAM JAÉN 2014

XV CEAM
Baeza (Jaén),
3 al 5 de julio de 2014

Organiza: SOCIEDAD ANDALUZA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA THALES

SOCIEDAD ANDALUZA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA "THALES"

Épsilon - *Revista de Educación Matemática* *2014, Vol. 31(1), nº 86, 51-60*

Diseño, aplicación y evaluación de una propuesta didáctica basada en la contextualización de los contenidos matemáticos en la ESO

Álvar Montero-Cuesta
Natalia González-Fernández

Resumen: *La actitud del alumnado hacia las matemáticas empeora progresivamente a medida que el salto entre la realidad cotidiana y la realidad escolar del mismo se acentúa. Con el fin de acercar la materia al estudiante surge nuestra experiencia, en la que diseñamos y aplicamos una actividad didáctica innovadora basada en la contextualización de los contenidos matemáticos, y evaluamos el impacto de la misma. Para ello, hemos planteado una situación de asunción de roles por parte de los estudiantes en la que las matemáticas se convierten en la herramienta fundamental para alcanzar sus objetivos.*
Palabras clave: *Matemáticas, ESO, propuesta didáctica.*

Design, implementation and evaluation of an educational proposal based on the contextualization of the mathematical content in ESO

Abstract: *The attitude of students towards mathematics becomes progressively worse as the gap between everyday reality and the academic reality is accentuated. In order to close the subject to the student arises out our experience, in which we design and apply an innovative teaching activity based on the contextualization of mathematical content, and evaluate the impact of it. For this, we propose a role-taking situation by the students in which mathematics becomes the main tool to achieve their goal.*
Keywords: *Mathematics, ESO, didactic proposition.*

INTRODUCCIÓN

La asignatura de Matemáticas tradicionalmente ha sido una materia poco popular entre el alumnado de Secundaria. Sin embargo, el rechazo hacia dicha materia se ha incrementado en los últimos años, tal y como destaca Martínez Rueda (2009, p. 1) al señalar que el número de estudiantes que eligen matemáticas como primera opción en selectividad se ha reducido en un 60%; hecho que choca frontalmente con la creciente demanda científico-tecnológica de la sociedad del siglo XXI.

La profunda reflexión sobre la situación descrita nos lleva a plantear dos cuestiones inevitables: ¿por qué aumenta el rechazo por las matemáticas? y ¿quiénes somos los responsables de dicho rechazo?

Resulta evidente que los estudiantes tienen una actitud negativa hacia las matemáticas porque la perciben como un conocimiento abstracto, complejo y aislado, que carece de aplicabilidad real. Creemos que las principales causas de esta visión degradada son tanto la descontextualización de los contenidos y las actividades, como la excesiva repetitividad y monotonía de estas últimas, tal y como defiende Rodríguez (2010, p. 115). Por lo tanto, desde nuestro punto de vista, el docente tiene una especial responsabilidad en esta situación de devaluación de la materia matemática.

Una contextualización adecuada de los contenidos trabajados en el aula, acercando o vinculando dichos contenidos a la realidad ayuda a eliminar el rechazo hacia las matemáticas, tal como afirma Ruiz Socarras (2008, p. 4). En primer término, Silva (2009, p. 12) destaca que la enseñanza contextualizada supone un aspecto motivador, despertando el interés del alumno por el contenido de estudio. Otras líneas investigadoras, Trejo y Camarena (2011, p. 10) añaden que la contextualización como vehículo interdisciplinar resulta indispensable para que se produzca una construcción del conocimiento de forma duradera y significativa, interconectando y relacionando los conocimientos matemáticos con otras ciencias y ámbitos del saber.

Por último, cabe destacar la inequívoca relación existente entre la contextualización de los contenidos matemáticos y el currículum y los objetivos que en él se pretenden. En este sentido, De Lange (1996, citado por Ramos y Font, 2006, p. 3) defiende que la contextualización de los contenidos matemáticos no solo facilita el aprendizaje y la comprensión de la materia, sino que permite ver a los estudiantes la utilidad de las matemáticas para resolver situaciones de la vida cotidiana favoreciendo su desarrollo individual y social.

Otro de los aspectos previamente señalados como agudizante de la actitud negativa hacia las matemáticas por parte del alumnado es la excesiva repetitividad de las actividades que se desarrollan en el aula. En este aspecto, las herramientas informáticas permiten flexibilizar y reducir la monotonía de las actividades didácticas, otorgando al alumno un papel activo dentro de la dinámica del aula y dentro de su propio aprendizaje. Así, Marquès (2003) destaca la potencialidad de las nuevas tecnologías como medio reductor de tareas meramente procedimentales y mecánicas, permitiendo al estudiante aplicar más eficientemente sus esfuerzos en actividades que impliquen una reflexión analítica, creativa y crítica, más acorde con las exigencias sociales y profesionales actuales, como la toma de decisiones o el análisis crítico.

Además, la inclusión de las nuevas tecnologías en la dinámica del aula, tal y como afirman Sigalés, Mominó y Meneses (2009), supone en sí mismo un elemento motivador del aprendizaje dada la positiva percepción que de las mismas tienen los estudiantes, convirtiéndose en un vínculo indispensable entre las matemáticas y la realidad del alumnado actual.

A partir de este planteamiento, hemos llevado a cabo una experiencia educativa fundamentada en las siguientes hipótesis:

- La contextualización de los contenidos matemáticos mejora la actitud de los estudiantes hacia las matemáticas.
- La reducción de la rutina y la monotonía de las actividades de enseñanza-aprendizaje mediante la integración de las herramientas informáticas en el aula, mejora la actitud de los estudiantes hacia las matemáticas.

De la reflexión sobre lo hasta aquí expuesto, junto a nuestra inquietud profesional ante la responsabilidad de educar a los jóvenes del mañana nos han conducido a indagar sobre la forma de mostrar unas matemáticas atractivas y dinámicas, que promuevan la reflexión sobre la vida real y se centren en el planteamiento del problema cotidiano en clave matemática.

MATERIALES Y MÉTODOS

El presente trabajo describe y expone los resultados de la experiencia que hemos llevado a cabo en un IES de Cantabria con alumnos de 1º de ESO en un intento de aunar en una propuesta educativa los axiomas previamente defendidos, es decir, la contextualización de los contenidos matemáticos y la integración de las herramientas informáticas en el aula como antídoto contra el rechazo a las Matemáticas.

El estudio de la situación planteada se ha realizado mediante la experimentación educativa, en la que se ha aplicado una propuesta didáctica innovadora con el objeto de influir en unas variables independientes concretas y observar cuál es su efecto sobre la variable dependiente, tal y como señala Bisquerra (2004, p. 117).

Así, se ha diseñado la propuesta didáctica dirigida a potenciar los aspectos que influyen de una manera determinante en el interés de los estudiantes por las matemáticas. En la elaboración se ha contado con la colaboración directa de las profesoras Dña. Asunción Lázaro y Dña. Aury Encinas del Departamento de Matemáticas del IES Fuente Fresnedo de Laredo (Cantabria).

La obtención y el análisis de los resultados se han llevado a cabo bajo un enfoque cuantitativo, aplicando un cuestionario para la recogida de información y su posterior tratamiento estadístico. La muestra de estudio han sido 36 estudiantes pertenecientes a dos grupos de 1º de ESO.

Elaboración del instrumento de recogida de información

El cuestionario ha sido diseñado para aplicarse en distintos momentos temporales: previa aplicación de la propuesta didáctica y posteriormente a la misma, por tanto se utiliza un diseño evolutivo trasversal. Este protocolo de aplicación se estableció con el fin de poder constatar el cambio producido en la actitud hacia las matemáticas de los estudiantes implicados en el estudio. Para el proceso de construcción del cuestionario se decidió seguir una adaptación de la secuencia de Alemany y Lara (2010, p. 56). Una vez obtenido el "cuestionario-borrador", este se validó mediante la técnica Delphi por un grupo de expertos de la Universidad de Cantabria.

Para el estudio de la actitud hacia las matemáticas se tuvo en cuenta su carácter multidimensional, tal y como apuntan Alemany y Lara (2010, p. 57), resultando así tres dimensiones o niveles: el afectivo, el cognitivo y el comportamental:

- Nivel afectivo: se analizan reacciones emocionales hacia el aprendizaje de las matemáticas.
- Nivel cognitivo: se determina el valor que los estudiantes atribuyen al aprendizaje de las matemáticas.
- Nivel comportamental: se indagan comportamientos de los estudiantes ante las matemáticas, valorando variables como el nivel de ansiedad o la frustración.

Posteriormente, se realizó un proceso de selección de las variables objeto de estudio, seleccionando las siguientes:

Dimensiones	Variables Independientes	Variable Dependiente
Afectiva	Agrado/desagrado por las matemáticas	Actitud hacia las matemáticas
Cognitiva	Nivel de confianza ante actividades matemáticas	
	Visión de utilidad de las matemáticas	
	Percepción del aprendizaje de la materia	
Comportamental	Frustración/bloqueo/abandono ante actividades matemáticas	

Tabla 1. Variables de estudio. Fuente: Autoría propia

Elaboración de la propuesta didáctica

Esta propuesta didáctica se define en un modelo de enseñanza activa y colaborativa, donde el estudiante interacciona con los contenidos y los individuos, adquiriendo un papel activo; y el docente asume un rol de proveedor, guía y mediador. Este planteamiento responde a la concepción constructiva del aprendizaje, tal y como indican autores como Marqués (2003).

El proceso de elaboración constó fundamentalmente de dos fases: una detallada fase de planificación de la actividad, en la que se han definido los objetivos, contenidos y procedimientos, tanto del docente como de los estudiantes y, una fase de diseño de materiales.

Concretamente el material diseñado y elaborado en la propuesta es el siguiente:

1) Tarjeta grupal en la que se presenta la actividad (siete diferentes).
2) Guía y plantilla para la encuesta.
3) Guía para la representación gráfica en Excel.
4) Ejemplo de artículo publicado.

En cuanto a la contextualización de la actividad, se planteó la asunción de roles por parte de los estudiantes, convirtiéndolos en un grupo de periodistas que se encuentran ante una noticia sin confirmar, especificada en cada Tarjeta Grupal. Se plantearon diferentes temáticas a elegir por el alumnado con un componente motivador común, implicar a los profesores del centro como objetos de estudio. Como todo buen reportero, previa a la publicación, precisa realizar una investigación para comprobar la veracidad de la información. Por ello, a cada grupo de estudiantes se le plantea realizar una recogida de información a través de encuestas diseñadas por ellos mismos, y posteriormente un estudio estadístico de los datos recogidos, a partir del cual extraer las conclusiones necesarias para la elaboración de un artículo periodístico.

Figura 2. Tarjetas grupales

Integrar las herramientas informáticas en el aula supuso otro factor determinante en el diseño de la actividad. ¿Cómo se ha llevado a cabo? Centrándonos en la utilidad de la herramienta Excel para agilizar procesos matemáticos repetitivos, monótonos y mecánicos. En concreto se pretende que los estudiantes representen gráficamente la información obtenida previamente en las encuestas. Permitiendo centrar sus esfuerzos en comprender cómo hay que organizar la información para su representación y decidir qué tipo de gráfico es más adecuado para cada tipo de dato.

En resumen, se ha pretendido dar un sentido realista, cercano y útil al aprendizaje de las matemáticas planteando temáticas cercanas y atractivas para los estudiantes, trabajándolas y presentándolas mediante herramientas informáticas para facilitar su análisis y presentación.

ANÁLISIS Y RESULTADOS

Con los resultados obtenidos en los cuestionarios se ha llevado a cabo un análisis descriptivo de frecuencias. Cada uno de los ítems del cuestionario se ha valorado a través de una escala Likert comprendida entre 1 (Totalmente en desacuerdo) y 5 (Totalmente de acuerdo).

A partir de este análisis cuantitativo se obtuvo una puntuación de cada variable independiente en dos momentos temporales diferentes, antes de aplicar la propuesta didáctica y, después de realizar la misma. Así, se pretende reflejar la influencia de la actividad didáctica sobre las variables de estudio.

Los resultados obtenidos de cada variable independiente de estudio reflejan una variación positiva significativa de la actitud de los estudiantes implicados en la actividad hacia las matemáticas, tras la aplicación de la propuesta didáctica, tal y como se refleja en la siguiente tabla:

Puntuación de las variables independientes de estudio		
Variables	**Previa a la aplicación de la propuesta didáctica**	**Posterior a la aplicación de la propuesta didáctica**
Agrado/desagrado por las matemáticas	2,6	4,1
Nivel de confianza ante actividades matemáticas	2,6	3,9
Visión de utilidad de las matemáticas	3,7	3,7
Percepción del aprendizaje de la materia	2,5	4,2
Frustración/bloqueo/abandono ante actividades matemáticas	4,5	2,7

Tabla 2. Variación de la puntuación de las variables independientes de estudio. Fuente: autoría propia.

Finalmente, se ha llevado a cabo la determinación del valor de la variable dependiente de estudio, “Actitud hacia las matemáticas”, tanto antes de la aplicación de la propuesta didáctica, como después. Su valor se ha obtenido a partir de los valores de las cinco variables independientes, considerando que cada variable contribuye de forma proporcional, es decir, el peso de cada una es una quinta parte.

Los resultados muestran una evolución positiva de la actitud hacia las matemáticas, pasando de un valor inicial inferior a la media, a una puntuación por encima de la misma, tal y como se observa en la siguiente figura:

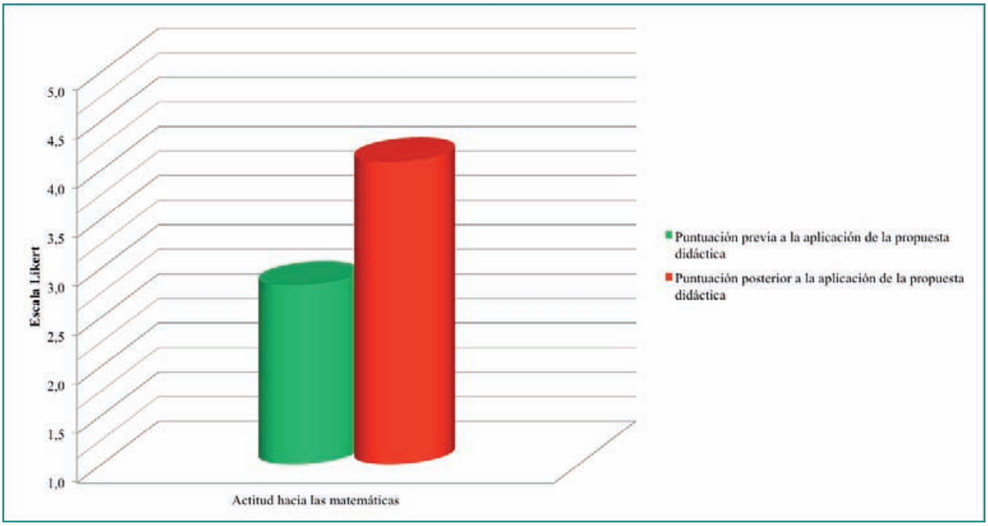


Figura 2. Variación de la puntuación de la variable dependiente. Fuente: autoría propia.

CONCLUSIONES

En un primer análisis de los resultados, se puede confirmar que antes de realizar la actividad didáctica, la actitud de los estudiantes hacia las matemáticas no era positiva, tal y como se había planteado al comienzo de la investigación.

De los resultados obtenidos conjuntamente con la teoría consultada, deducimos que los motivos causantes de la actitud negativa hacia las matemáticas son principalmente tres:

- La inseguridad que sienten los estudiantes ante las matemáticas influye de manera significativa sobre la actitud hacia la materia. La elevada carga abstracta de los contenidos matemáticos y el tratamiento descontextualizado de los mismos, se perfilan como los principales causantes de la falta de confianza, tal y como afirma Rodríguez (2010: 115).

- El salto tecnológico entre la realidad cotidiana del alumnado y la realidad escolar es otro factor agudizante de la actitud negativa hacia las matemáticas. Tal y como señalan Sigalés, Mominó y Meneses (2009), las nuevas tecnologías son una herramienta que muestran unas matemáticas más atractivas y cercanas al estudiante.
- La excesiva monotonía y repetitividad de las actividades que se realizan en el aula influyen negativamente en la actitud hacia las matemáticas. El papel pasivo del alumnado en su propio aprendizaje, centrando sus esfuerzos principalmente en labores mecánicas, impide que realice tareas supongan un estímulo más creativo, crítico y analítico, tal y como afirma Marquès (2003).

En referencia a la primera hipótesis que hemos planteado, podemos confirmar que, efectivamente, la contextualización de los contenidos matemáticos mejora la actitud de los estudiantes hacia las matemáticas. Los resultados han sido notables. Las variables agrado por las matemáticas, la percepción del aprendizaje de la materia y la confianza de los estudiantes han experimentado mejoras significativas de su valoración por parte del alumnado. En consecuencia, la actitud de los estudiantes hacia las matemáticas ha experimentado una mejora significativa.

En lo que a la segunda de nuestras hipótesis respecta, estamos en disposición de confirmar que la reducción de la rutina y la monotonía de las actividades de enseñanza-aprendizaje mediante la integración de herramientas informáticas en el aula, mejora la actitud de los estudiantes hacia las matemáticas. Los recursos informáticos tienen un evidente efecto motivador sobre el alumnado, causado tanto por la reducción del salto entre su realidad diaria y su realidad escolar, como por la reducción de la monotonía y la liberación de tareas de carácter mecánico y repetitivo.

Los positivos resultados obtenidos en la experiencia, señalan el camino de futuras investigaciones con el objetivo de afianzar las conclusiones obtenidas. Así, la extensión del diseño de actividades, basadas en las mismas premisas, a la totalidad del curso académico y a todos o varios niveles de la Secundaria Obligatoria y el Bachillerato, permitirían obtener conclusiones definitivas.

En base a los resultados obtenidos y a la experiencia que hemos vivido en el proceso, nos gustaría defender con total convicción la contextualización de los contenidos matemáticos y la integración de las herramientas informáticas en el proceso de enseñanza-aprendizaje, como los factores indispensables para la reducción del rechazo a las matemáticas. En consecuencia, creemos que en la docencia de las matemáticas ya no podemos considerar estos dos factores como una opción, sino como una obligación, en la búsqueda de una mejora de la educación matemática.

REFERENCIAS

Marquès, P. (2003). *La enseñanza. Buenas prácticas. La motivación.* Universidad Autónoma de Barcelona, España. Recuperado el 20 de febrero de 2012, de: http://peremarques.pangea.org/actodid.htm

Marquès, P. (2003). *La metodología MIE-CAIT.* Universidad Autónoma de Barcelona, España. Recuperado el 20 de febrero de 2012, de: http://peremarques.net/miecait.htm

Martínez Rueda, A. J. (2009). El miedo a las matemáticas. Innovación y Experiencias Educativas, 24(43), 1-3.

Rodríguez, M. E. (2010). El papel de la escuela y el docente en el contexto de los cambios devenidos de la praxis del binomio matemática-cotidianidad. *Unión Revista Iberoamericana de Educación Matemática,* 21, 113-125.

Ruiz Socarras, J. M. (2008). Problemas actuales de la enseñanza aprendizaje de la matemática. *Revista Iberoamericana de Educación, 47*(3), 4.

Sigalés, C., Mominó, J. M. y Meneses, J. (2009). TIC e innovación en la educación escolar española. Estado y perspectivas. *Revista TELOS*, 78.

Silva C. M. (2009). *Matemática, contextualización de sus contenidos.* Tesina. Instituto Superior Fundación Suzuki, Buenos Aires.

Trejo, E. y Camarena, P. (2011). Vinculación: matemáticas, ciencias y aprendizaje. En: *Comunicaciones de la Conferencia Interamericana de Educación Matemática*, (Recife 26–30 de junio de 2011), v. XIII.

ANEXO

Cuestionario

1 → Totalmente en desacuerdo
2 → En desacuerdo
3 → Ni de acuerdo ni en desacuerdo
4 → De acuerdo
5 → Totalmente de acuerdo

Tacha con una cruz o un círculo la respuesta que se ajuste mejor a tu opinión. Ejemplo:

Me gusta jugar a la videoconsola	1	2	3	4	5

1	Me gustan las matemáticas	1	2	3	4	5
2	Matemáticas es una asignatura fácil para mí	1	2	3	4	5
3	Las matemáticas son útiles para la vida diaria	1	2	3	4	5
4	Me gusta trabajar en grupo	1	2	3	4	5
5	Las matemáticas solo sirven en el instituto	1	2	3	4	5
6	Me resulta fácil entender las matemáticas	1	2	3	4	5
7	Las matemáticas me serán útiles en mi trabajo	1	2	3	4	5
8	Me distraigo a menudo en clase de matemáticas	1	2	3	4	5
9	Cuando utilizo el ordenador la clase se hace más corta	1	2	3	4	5
10	En clase de matemáticas solemos trabajar en grupo	1	2	3	4	5
11	Me aburre hacer ejercicios de matemáticas	1	2	3	4	5

Épsilon - *Revista de Educación Matemática* **2014, Vol. 31(1), nº 86, 61-75**

Matemáticos y científicos andaluces

José Manuel Jiménez Cobano

Raquel Sara Jiménez Gutiérrez

Resumen: *Todo el mundo conoce a ilustres personajes de la cultura, las letras, la música, las artes o la política de Andalucía, pero ¿y algún científico andaluz?, y aún más, y ¿algún matemático andaluz?*
La respuesta es negativa en ambos casos, y no es porque no los haya, sino porque hemos no los hemos considerado los suficientemente importantes. Valga este modesto texto como un homenaje a tantos matemáticos y científicos andaluces anónimos que tienen tanta valía como los famosos escritores, poetas o compositores de nuestra tierra.
Palabras Clave: *Matemáticos andaluces, Científicos andaluces, historia de las matemáticas, Andalucía*

Mathematicians and scientists andalusians

Abstract: *Everyone knows the famous figures of culture, literature, music, the arts or politics in Andalusia, but what some scientist Andalusian? And even more, and do some math Andalusian?*
The answer is negative in both cases, and it is not because they do not exist, but because we have not considered important enough. This modest text as a tribute to many anonymous mathematicians and scientists Andalusians that have such value as the famous writers, poets and composers of our land.
Keywords: *Mathematicians Andalusian, Andalusian scientists, history of mathematics, Andalusia*

1. INTRODUCCIÓN

Recientemente en nuestro centro se ha llevado a cabo la celebración del día de Andalucía, y desde la dirección del centro se nos insto a que cada departamento y cada área de conocimiento creasen una serie de actividades relacionadas con nuestra Comunidad Autónoma para la celebración.

En estas estábamos cuando se nos ocurrió el porqué no realizábamos una exposición de matemáticos y científicos andaluces conocidos, y que lo trabajásemos con los estudiantes. Precisamente eso lo que hemos hecho, y dado que nuestra especialidad es la de matemáticas, es en este campo donde hemos hecho más hincapié.

1.1. Justificación curricular

Dentro de la normativa vigente en cuestión educativa en la comunidad autónoma andaluza, y más concretamente en el Decreto 231/2007 en su artículo 4 donde establece los Objetivos que la Educación Secundaría Obligatoria contribuirá a desarrollar en el alumnado, detalla en su apartado *f* lo siguiente:

Conocer y respetar la realidad cultural de Andalucía, partiendo del conocimiento y de la comprensión de Andalucía como comunidad de encuentro de culturas (Junta de Andalucía, 2007).

Por tanto, dada la petición realizada desde el departamento de actividades extraescolares y la dirección del centro, y teniendo presente este apartado de la legislación, nos comenzamos a elaborar el plan de trabajo.

2. TRABAJO PREVIO DEL PROFESOR

Dado que los estudiantes con los se iba a desarrollar la actividad pertenecían al primer ciclo de la educación secundaria, y que en muchos casos, no tienen aún desarrollado un pensamiento crítico en cuanto a la información a buscar y dentro de la información buscada y encontrada, saber cuál es la información realmente relevante y cual no, nuestro trabajo previo se antojaba importante y laborioso.

Este trabajo consistió en la búsqueda de matemáticos y científicos andaluces de todas las disciplinas, para lo cual, utilizamos todos los recursos a nuestra disposición. Desde el tan útil buscador de internet, o libros de historia de las matemáticas e incluso consultamos con otros compañeros de otras disciplinas como Historia o Ciencias Naturales, e incluso compañeros de otros centros en los que hubiésemos estado en cursos anteriores.

Una vez que teníamos una lista considerable, nos dividimos la lista entre los compañeros del departamento, a razón de unos 20 o 30 nombres de todas las épocas por grupo, que nosotros mismos comprobamos y verificamos.

De esta forma, cuando pasamos la lista a los estudiantes, ya teníamos la certeza de que se trataba efectivamente de un científico o un matemático andaluz, y del que merecía la pena hablar.

3. TRABAJO EN EL AULA

Una vez que los profesores habíamos seleccionado a los científicos andaluces que a nuestro parecer destacaban, comenzamos a trabajar con los estudiantes. El trabajo de estos consistía básicamente en la búsqueda de las biografías, la selección de la información y dar la forma adecuada a la presentación final.

La metodología de trabajo que seguimos fue la siguiente: en cada curso, se establecieron distintos grupos de trabajo de cuatro o cinco alumnos heterogéneos, y en esos grupos también se repartieron el trabajo, de forma que algunos se encargaban de recabar y seleccionar la información, y otros, estaban creando los murales y redactando las biografías.

A cada grupo se le asigno una serie de nombres de los cuales ellos eran los encargados de buscar, seleccionar y presentar la información, siempre de manera guiada por los profesores.

Para ello, dado que se trataba del primer ciclo de secundaría, hacíamos uso de los ultraportatiles entregados a los alumnos por la administración, y de la conexión a Internet.

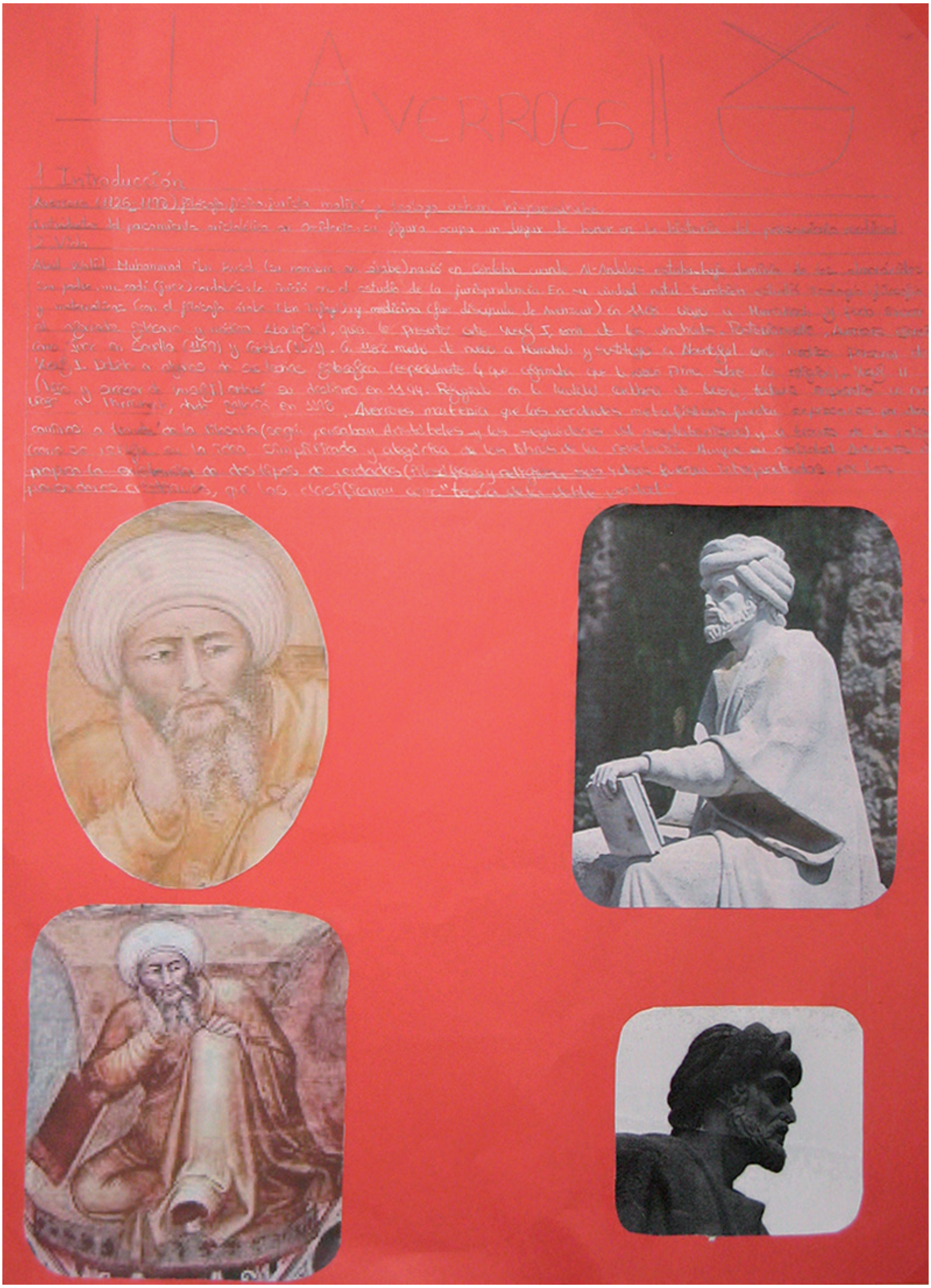
El trabajo lo desarrollamos durante una de las horas de libre asignación del horario, que teníamos dedicada a un taller de problemas de matemáticas, y durante dos o tres semanas, hicimos un paréntesis en la resolución de problemas para centrarnos en la historia de la ciencia en Andalucía. Además, los alumnos, al disponer de sus ordenadores en sus casas, podían avanzar en el trabajo sin necesidad de estar en el aula.

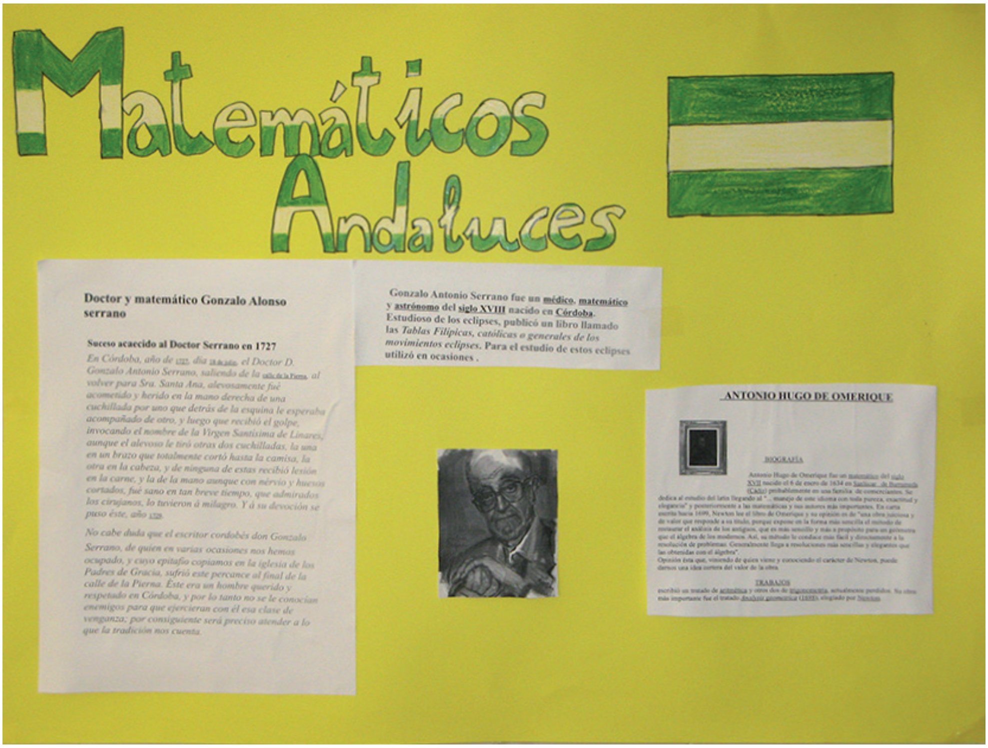
Una vez que tenían seleccionada la información que estimaban interesante de cada uno de los científicos, procedieron de dos formas diferentes, en lo cual, nosotros no quisimos forzar, para que de esa forma ellos sintiesen que el trabajo era más personal. Unos grupos decidieron escribir a mano la información en las cartulinas que posteriormente servirían de mural, mientras que otros optaron por imprimir la información en folios y pegar estos en las cartulinas, como se ve en fotos que tenemos en la sección de la exposición.

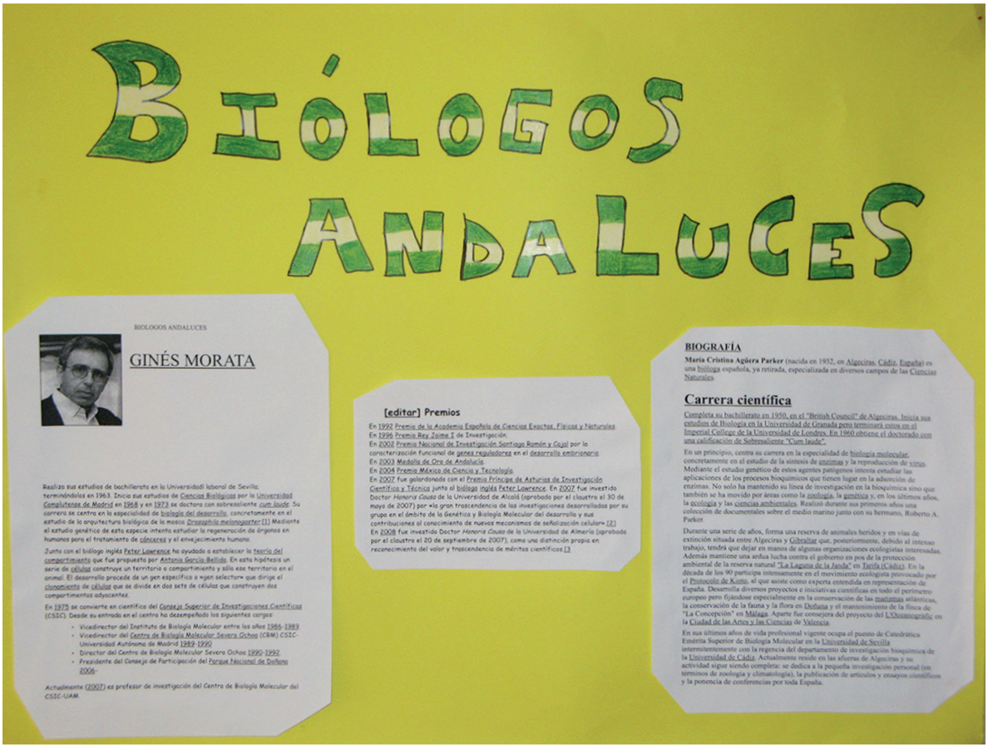
Una vez que los estudiantes hubieron terminado los murales, estos fueron expuestos en los pasillos de nuestro centro, como podremos ver en las imágenes que incluimos a continuación.

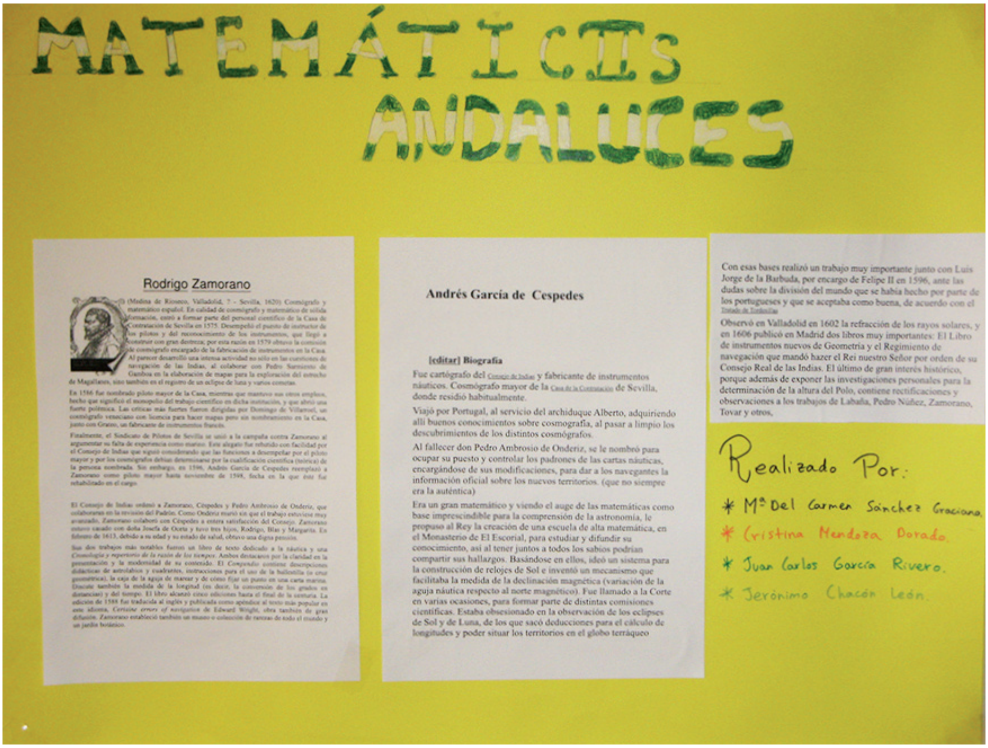
3.1. Exposición

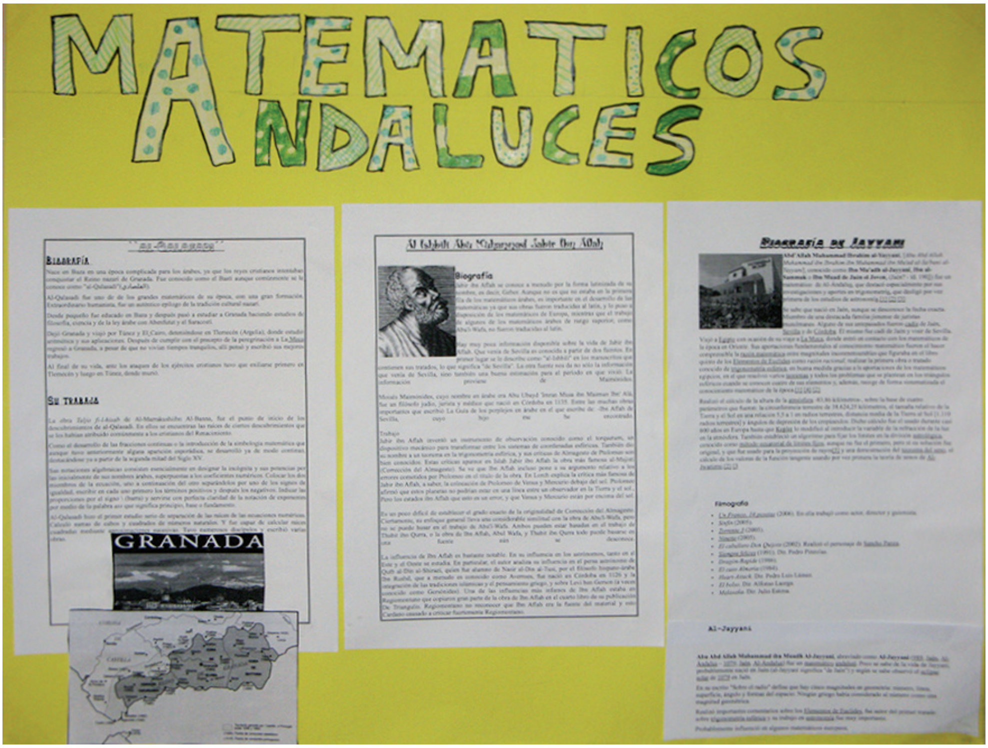
Como puede observarse, se encuentran en uno de los principales pasillos del centro, con lo que todos los alumnos y alumnas, así como el profesorado y el personal auxiliar pudieron contemplarlos y recrearse en ellos.

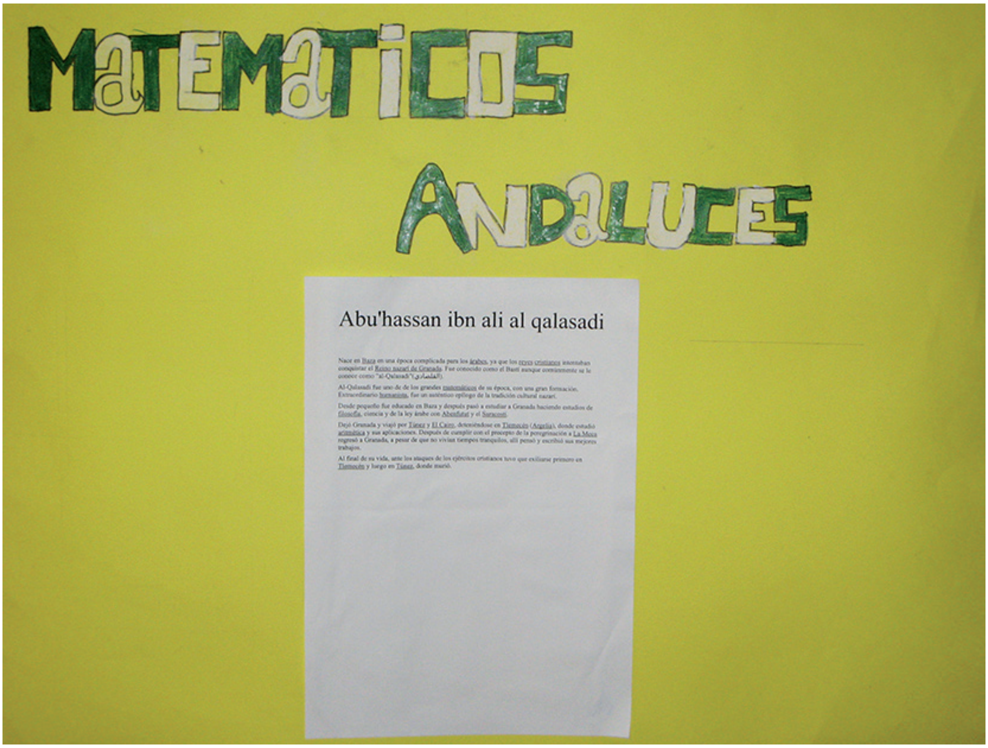


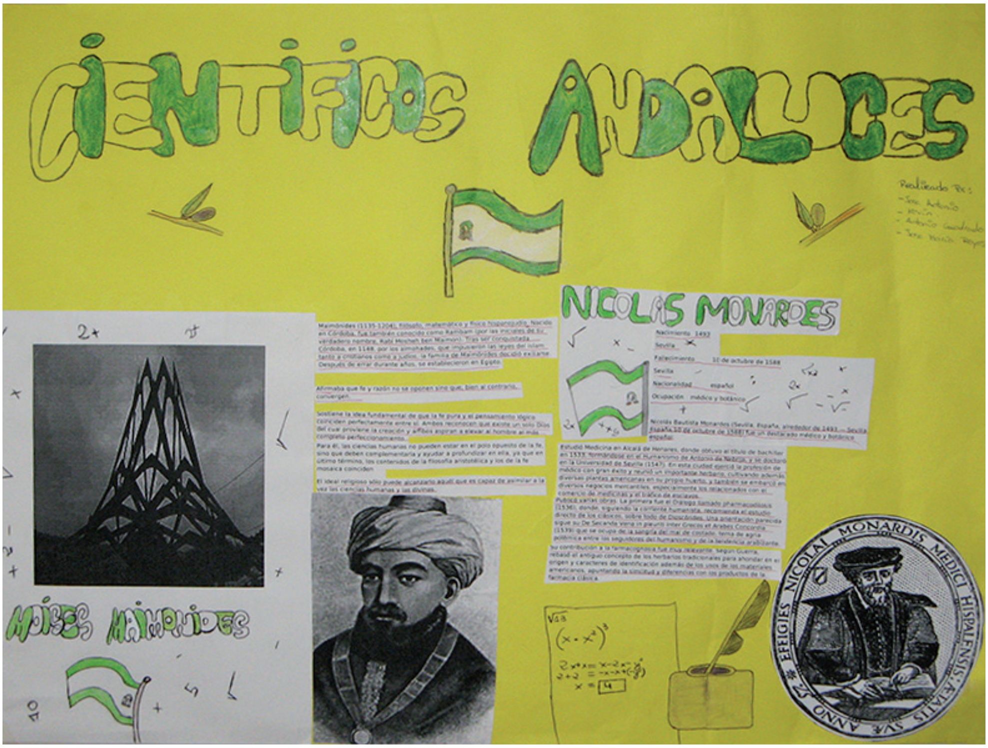

Matemáticos
Andaluces
Doctor y matemático Gonzalo Alonso serrano
Suceso acaecido al Doctor Serrano en 1727
En Córdoba, año de 1727, día 18 de julio, el Doctor D. Gonzalo Antonio Serrano, saliendo de la calle de la Pierna, al volver para Sra. Santa Ana, alevosamente fué acometido y herido en la mano derecha de una cuchillada por uno que detrás de la esquina le esperaba acompañado de otro, y luego que recibió el golpe, invocando el nombre de la Virgen Santísima de Linares, aunque el alevoso le tiró otras dos cuchilladas, la una en un brazo que totalmente cortó hasta la camisa, la otra en la cabeza, y de ninguna de estas recibió lesión en la carne, y la de la mano aunque con nérvio y huesos cortados, fué sano en tan breve tiempo, que admirados los cirujanos, lo tuvieron á milagro. Y á su devoción se puso éste, año 1729.
No cabe duda que el escritor cordobés don Gonzalo Serrano, de quien en varias ocasiones nos hemos ocupado, y cuyo epitafio copiamos en la iglesia de los Padres de Gracia, sufrió este percance al final de la calle de la Pierna. Éste era un hombre querido y respetado en Córdoba, y por lo tanto no se le conocían enemigos para que ejercieran con él esa clase de venganza; por consiguiente será preciso atender a lo que la tradición nos cuenta.
Gonzalo Antonio Serrano fue un médico, matemático y astrónomo del siglo XVIII nacido en Córdoba. Estudioso de los eclipses, publicó un libro llamado las Tablas Filípicas, católicas o generales de los movimientos eclipses. Para el estudio de estos eclipses utilizó en ocasiones .
ANTONIO HUGO DE OMERIQUE
BIOGRAFÍA
TRABAJOS

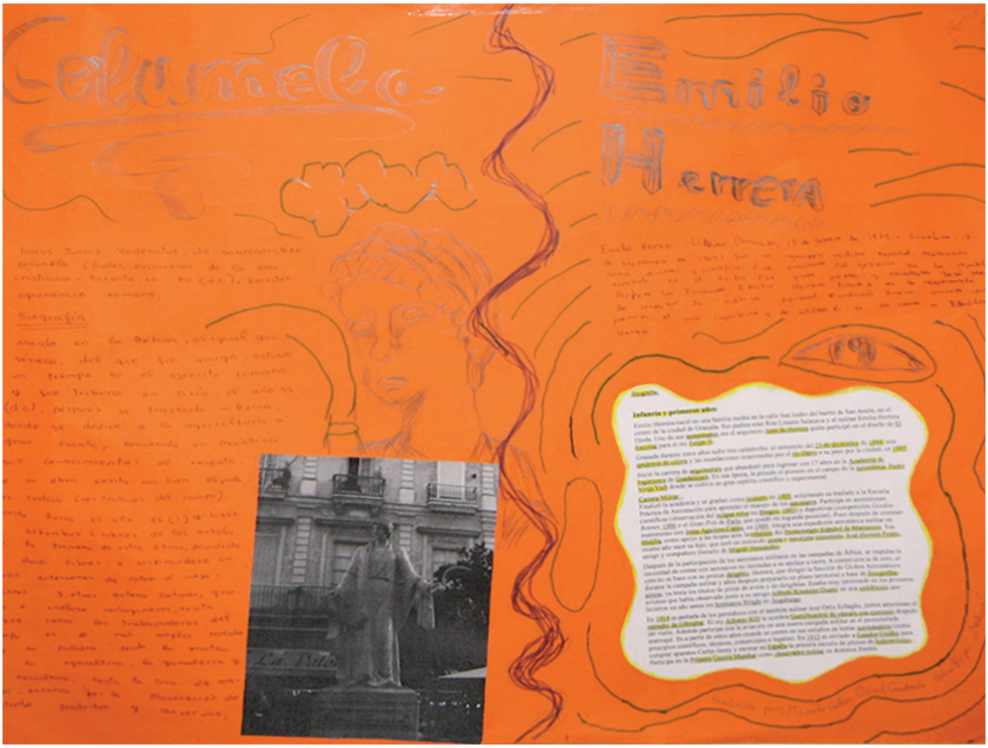

BIÓLOGOS
ANDALUCES
BIOLOGOS ANDALUCES
GINÉS MORATA
[editar] Premios
En 1992 Premio de la Academia Española de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales.
En 1996 Premio Rey Jaime I de Investigación.
En 2002 Premio Nacional de Investigación Santiago Ramón y Cajal por la caracterización funcional de genes reguladores en el desarrollo embrionario.
En 2003 Medalla de Oro de Andalucía.
En 2004 Premio México de Ciencia y Tecnología.
En 2007 fue galardonado con el Premio Príncipe de Asturias de Investigación Científica y Técnica junto al biólogo inglés Peter Lawrence. En 2007 fue investido Doctor Honoris Causa de la Universidad de Alcalá (aprobado por el claustro el 30 de mayo de 2007) por «la gran trascendencia de las investigaciones desarrolladas por su grupo en el ámbito de la Genética y Biología Molecular del desarrollo y sus contribuciones al conocimiento de nuevos mecanismos de señalización celular» [2]
En 2008 fue investido Doctor Honoris Causa de la Universidad de Almería (aprobado por el claustro el 20 de septiembre de 2007), como una distinción propia en reconocimiento del valor y trascendencia de méritos científicos [3
BIOGRAFÍA
Carrera científica

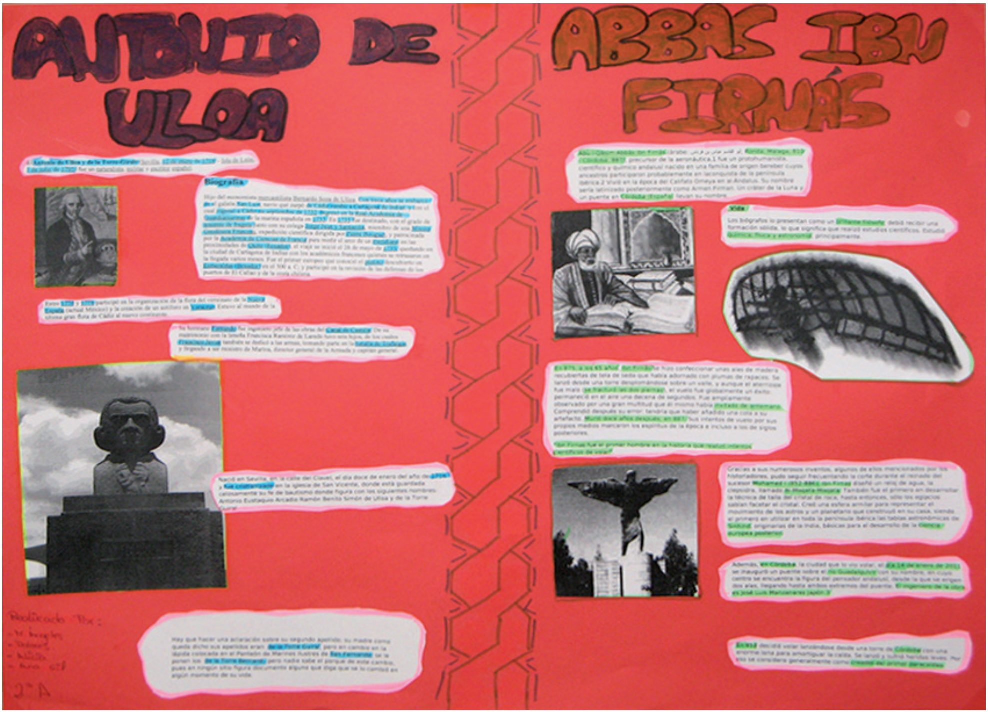

MATEMÁTICOS
ANDALUCES
Rodrigo Zamorano
Andrés García de Cespedes
[editar] Biografía
Realizado Por:
* Mª Del Carmen Sánchez Graciano
* Cristina Mendoza Dorado
* Juan Carlos García Rivero
* Jerónimo Chacón León

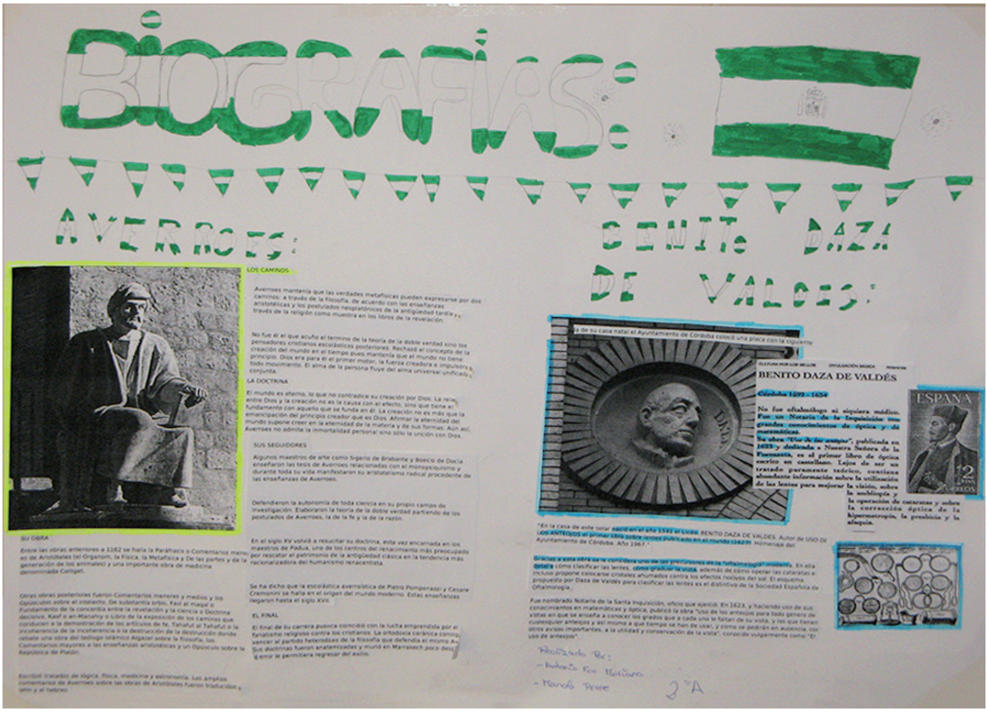

MATEMATICOS
ANDALUCES
Biografía
Su trabajo
GRANADA
Biografía
Biografía de Jayyani
Filmografía
Al-Jayyani

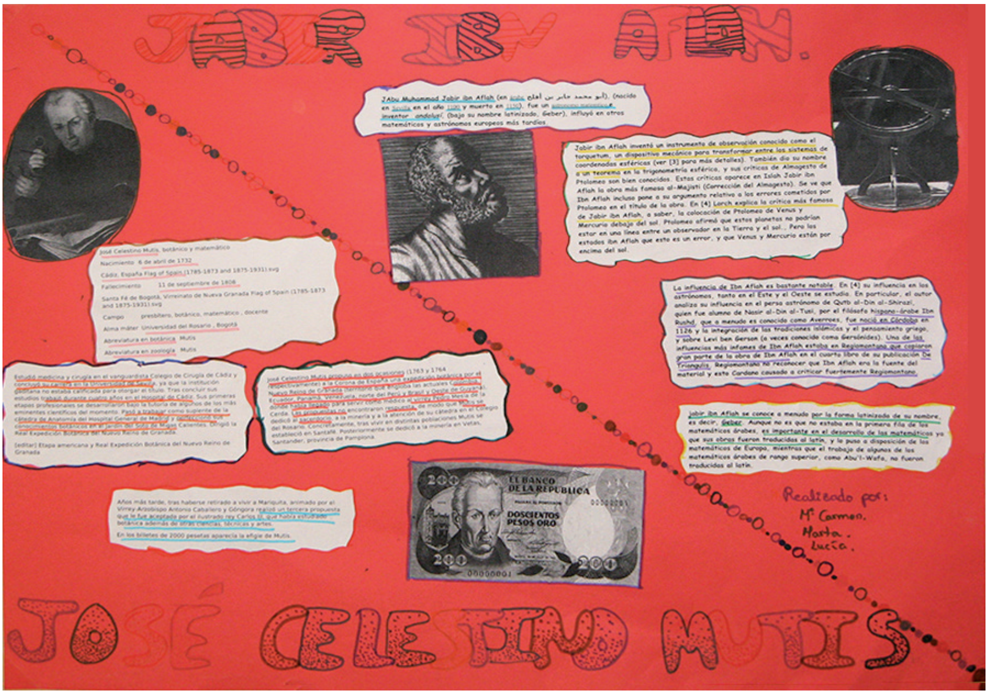

MATEMATICOS
ANDALUCES
Abu'hassan ibn ali al qalasadi

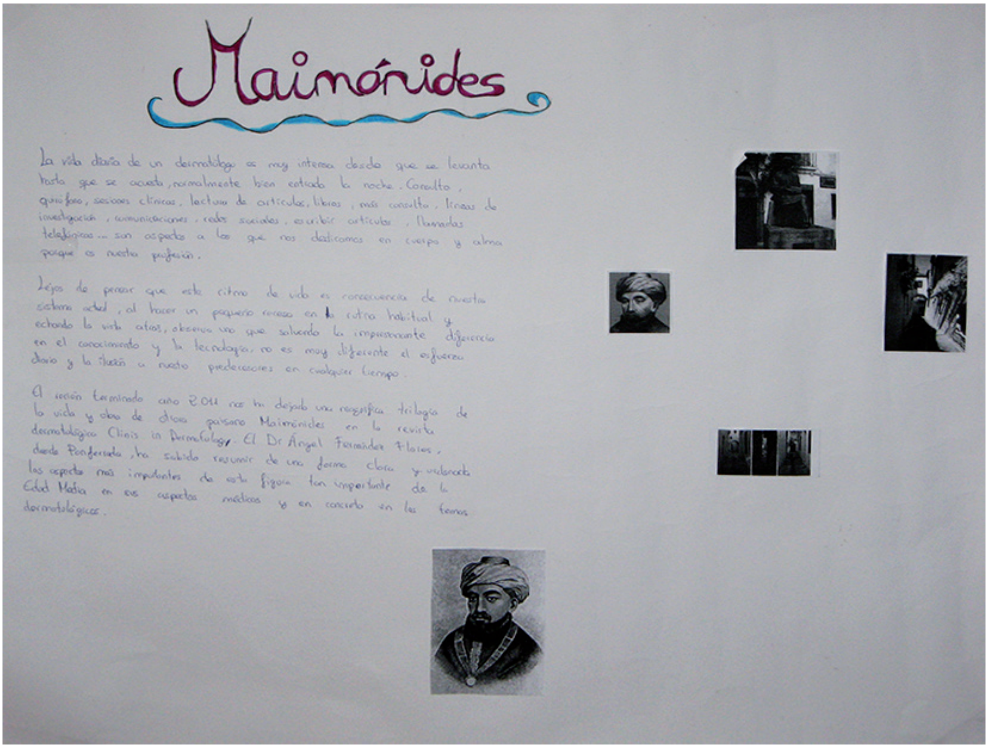

CIENTIFICOS ANDALUCES
NICOLAS MONARDES
MOISES MAIMONIDES
EFFIGIES NICOLAI MONARDIS MEDICI HISPALENSIS AETATIS SVAE ANNO

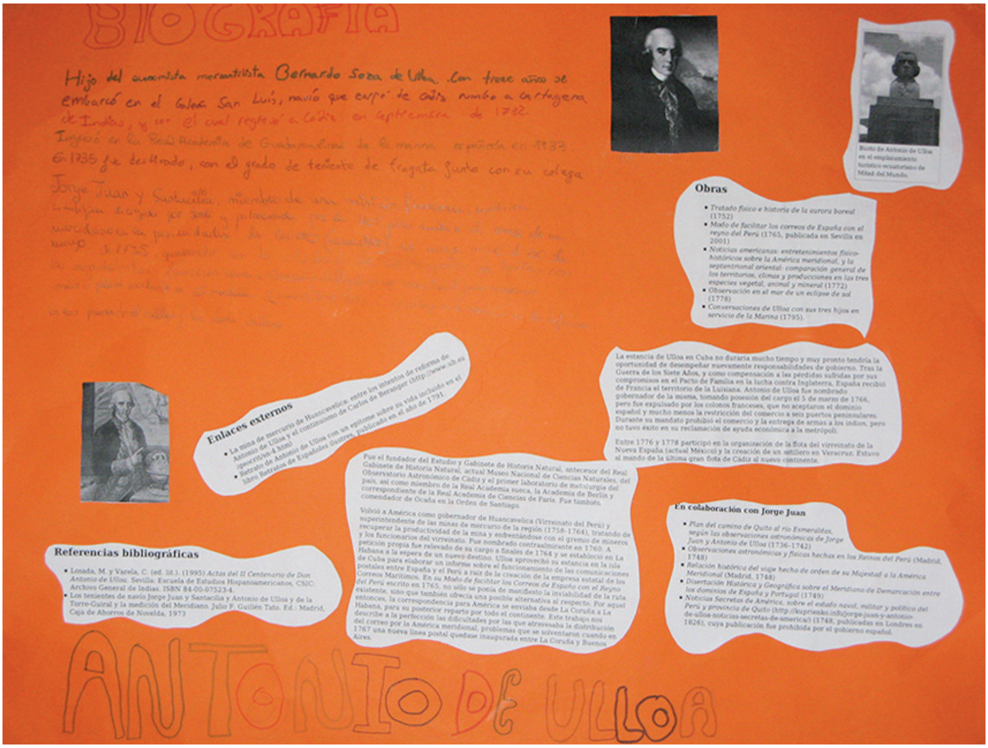

Columela
Emilio Herrera

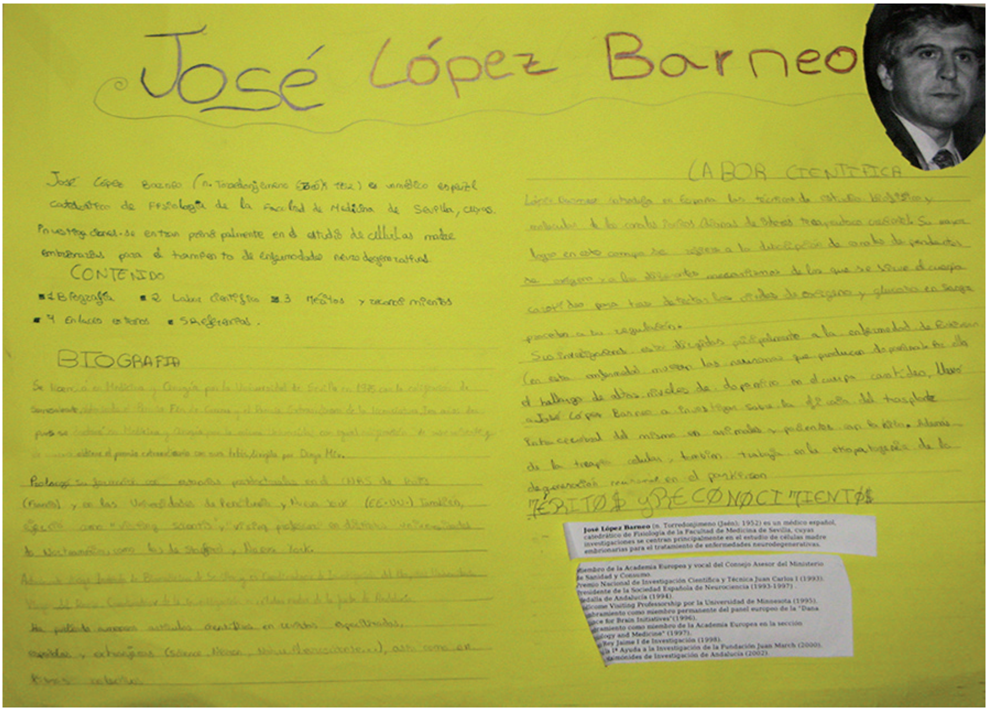

Antonio de Ulloa
Abbas Ibn Firnás

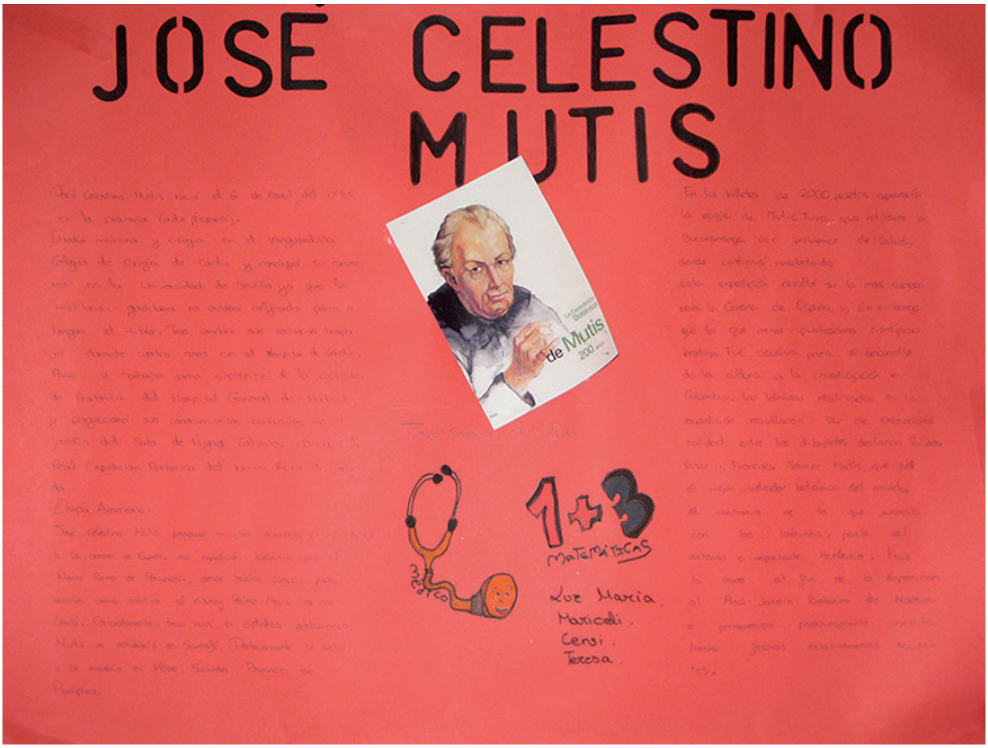

BIOGRAFÍAS:
AVERROES:
BENITO DAZA DE VALDÉS:
BENITO DAZA DE VALDÉS
ESPAÑA

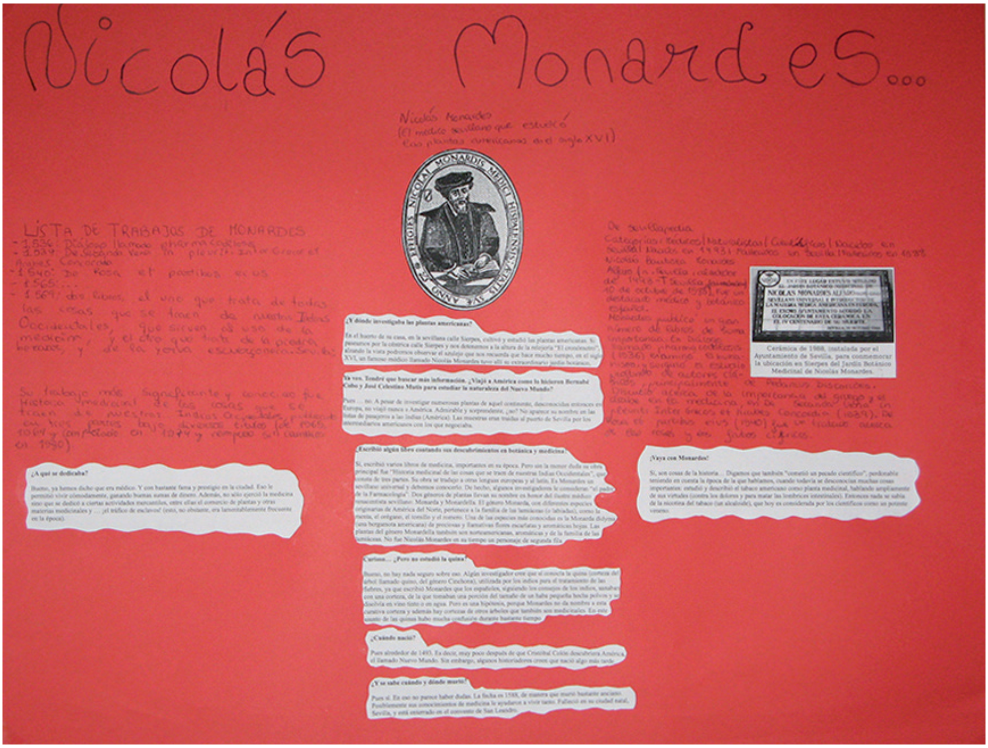

JABIR IBN AFLAH.
JOSÉ CELESTINO MUTIS
Realizado por:
Mª Carmen,
Marta,
Lucía.

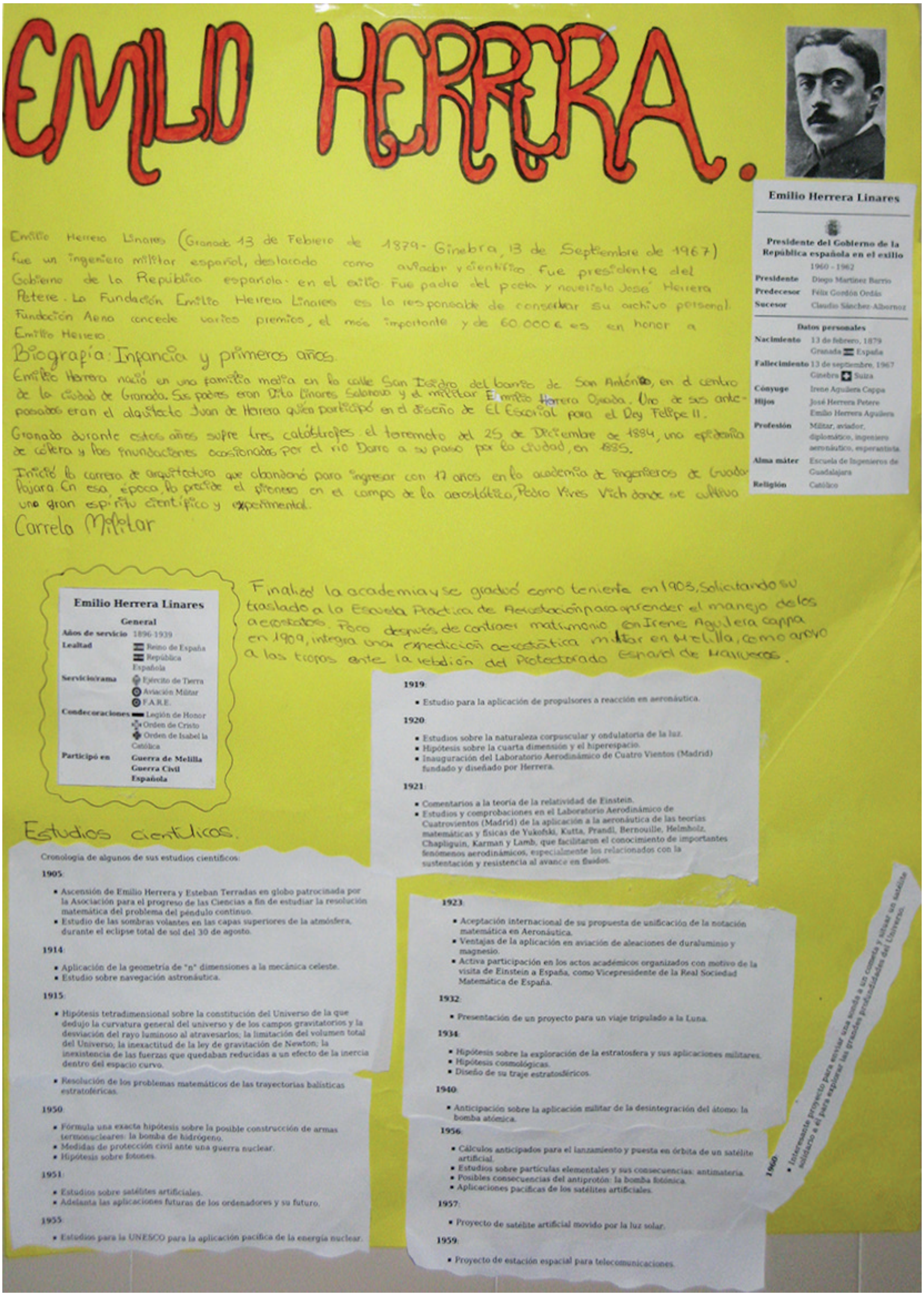

Maimónides


BIOGRAFIA
Obras
Enlaces externos
Referencias bibliográficas
En colaboración con Jorge Juan
ANTONIO DE ULLOA


José López Barneo
CONTENIDOS
BIOGRAFIA
LABOR CIENTIFICA
José López Barneo (n. Torredonjimeno (Jaén), 1952) es un médico español, catedrático de Fisiología de la Facultad de Medicina de Sevilla, cuyas investigaciones se centran principalmente en el estudio de células madre embrionarias para el tratamiento de enfermedades neurodegenerativas.


JOSÉ CELESTINO MUTIS
de Mutis
200
1+3
MATEMÁTICAS


Nicolás Monardes...


EMILIO HERRERA.
Emilio Herrera Linares
Presidente del Gobierno de la República española en el exilio
1960 - 1962
Presidente Diego Martínez Barrio
Predecesor Félix Gordón Ordás
Sucesor Claudio Sánchez-Albornoz
Datos personales
Nacimiento 13 de febrero, 1879 Granada España
Fallecimiento 13 de septiembre, 1967 Ginebra Suiza
Cónyuge Irene Aguilera Cappa
Hijos José Herrera Petere Emilio Herrera Aguilera
Profesión Militar, aviador, diplomático, ingeniero aeronáutico, esperantista
Alma máter Escuela de Ingenieros de Guadalajara
Religión Católico
Emilio Herrera Linares (Granada 13 de Febrero de 1879 - Ginebra, 13 de Septiembre de 1967) fue un ingeniero militar español, destacado como aviador y científico. Fue presidente del Gobierno de la República española en el exilio. Fue padre del poeta y novelista José Herrera Petere. La Fundación Emilio Herrera Linares es la responsable de conservar su archivo personal. Fundación Aena concede varios premios, el más importante y de 60.000 € es en honor a Emilio Herrera.
Biografía: Infancia y primeros años
Emilio Herrera nació en una familia media en la calle San Isidro del barrio de San Antón, en el centro de la ciudad de Granada. Sus padres eran Dña Linares Solorzano y el militar Emilio Herrera Ojeda. Uno de sus antepasados eran el arquitecto Juan de Herrera quién participó en el diseño de El Escorial para el Rey Felipe II.
Granada durante estos años sufre tres catástrofes: el terremoto del 25 de Diciembre de 1884, una epidemia de cólera y las inundaciones ocasionadas por el río Darro a su paso por la ciudad, en 1885.
Inició la carrera de arquitectura que abandonó para ingresar con 17 años en la academia de Ingenieros de Guadalajara. En esa época, la practicó el pionero en el campo de la aerostática, Pedro Vives Vich donde se cultivo uno gran espíritu científico y experimental.
Carrera Militar
Finalizó la academia y se graduó como teniente en 1903, solicitando su traslado a la Escuela Práctica de Aerostación para aprender el manejo de los aerostatos. Poco después de contraer matrimonio con Irene Aguilera Cappa en 1909, integra una expedición aerostática [illegible] militar en Melilla, como apoyo a las tropas ante la rebelión del Protectorado Español de Marruecos.
Emilio Herrera Linares
General
Años de servicio 1896-1939
Lealtad Reino de España República Española
Servicio/rama Ejército de Tierra Aviación Militar F.A.R.E.
Condecoraciones Legión de Honor Orden de Cristo Orden de Isabel la Católica
Participó en Guerra de Melilla Guerra Civil Española
Estudios científicos.
Cronología de algunos de sus estudios científicos:
1905:
• Ascensión de Emilio Herrera y Esteban Terradas en globo patrocinada por la Asociación para el progreso de las Ciencias a fin de estudiar la resolución matemática del problema del péndulo continuo.
• Estudio de las sombras volantes en las capas superiores de la atmósfera, durante el eclipse total de sol del 30 de agosto.
1914:
• Aplicación de la geometría de "n" dimensiones a la mecánica celeste.
• Estudio sobre navegación astronáutica.
1915:
• Hipótesis tetradimensional sobre la constitución del Universo de la que dedujo la curvatura general del universo y de los campos gravitatorios y la desviación del rayo luminoso al atravesarlos; la limitación del volumen total del Universo; la inexactitud de la ley de gravitación de Newton; la inexistencia de las fuerzas que quedaban reducidas a un efecto de la inercia dentro del espacio curvo.
• Resolución de los problemas matemáticos de las trayectorias balísticas estratoféricas.
1950:
• Fórmula una exacta hipótesis sobre la posible construcción de armas termonucleares: la bomba de hidrógeno.
• Medidas de protección civil ante una guerra nuclear.
• Hipótesis sobre fotones.
1951:
• Estudios sobre satélites artificiales.
• Adelanta las aplicaciones futuras de los ordenadores y su futuro.
1955:
• Estudios para la UNESCO para la aplicación pacífica de la energía nuclear.
1919:
• Estudio para la aplicación de propulsores a reacción en aeronáutica.
1920:
• Estudios sobre la naturaleza corpuscular y ondulatoria de la luz.
• Hipótesis sobre la cuarta dimensión y el hiperespacio.
• Inauguración del Laboratorio Aerodinámico de Cuatro Vientos (Madrid) fundado y diseñado por Herrera.
1921:
• Comentarios a la teoría de la relatividad de Einstein.
• Estudios y comprobaciones en el Laboratorio Aerodinámico de Cuatrovientos (Madrid) de la aplicación a la aeronáutica de las teorías matemáticas y físicas de Yukofski, Kutta, Prandl, Bernouille, Helmbolz, Chapliguin, Karman y Lamb, que facilitaron el conocimiento de importantes fenómenos aerodinámicos, especialmente los relacionados con la sustentación y resistencia al avance en fluidos.
1923:
• Aceptación internacional de su propuesta de unificación de la notación matemática en Aeronáutica.
• Ventajas de la aplicación en aviación de aleaciones de duraluminio y magnesio.
• Activa participación en los actos académicos organizados con motivo de la visita de Einstein a España, como Vicepresidente de la Real Sociedad Matemática de España.
1932:
• Presentación de un proyecto para un viaje tripulado a la Luna.
1934:
• Hipótesis sobre la exploración de la estratosfera y sus aplicaciones militares.
• Hipótesis cosmológicas.
• Diseño de su traje estratosféricos.
1940:
• Anticipación sobre la aplicación militar de la desintegración del átomo: la bomba atómica.
1956:
• Cálculos anticipados para el lanzamiento y puesta en órbita de un satélite artificial.
• Estudios sobre partículas elementales y sus consecuencias: antimateria.
• Posibles consecuencias del antiprotón: la bomba fotónica.
• Aplicaciones pacíficas de los satélites artificiales.
1957:
• Proyecto de satélite artificial movido por la luz solar.
1959:
• Proyecto de estación espacial para telecomunicaciones.
1960:
• Interesante proyecto para enviar una sonda a un cometa y situar un satélite solidario a él para explorar las grandes profundidades del Universo.

4. LISTADO DE MATEMÁTICOS Y CIENTÍFICOS.

Como complemento al trabajo realizado con nuestros alumnos, vamos a dar la lista completa de los matemáticos y científicos andaluces que encontramos y de los que pudimos dar al menos una breve reseña de que hicieron y en qué época vivieron, siendo consientes de que en la actualidad hay grandes matemáticos en nuestras universidades e institutos, pero que aún les queda mucho por hacer, y no queremos dejar sus logros a medias.

Matemáticos	Científicos
Abu'hassan ibn ali al qalasadi	Ginés Morata
Al Ishbili Abu Muhammad Jabir Ibn Aflah	María Cristina Agüera Parker
Antonio Hugo de Omerique	Emilio Herrera Linares
Averroes	Columela (Lucius Junius Moderatus)
Al Qalasadi	Abbás Ibn Firnás
García Céspedes.	
Jayyani (Abd'Allah Muhammad Ibrahim al-Yayyani)	

CONCLUSIONES

Este tipo de actividades permiten que los alumnos conozcan a los personajes históricos que a través de las matemáticas y la actividad cientifica permiteron el desarrollo del país. Por otra parte se acerca el mundo de la ciencia a las nuevas genereaciones y elos responden implicandose con gusto en la actividad.

REFERENCIAS

Junta de Andalucía (2007). *Decreto 231/2007, de 31 de Julio, por el que se establecen las enseñanzas correspondientes a la Educación Secundaria Obligatoria en Andalucía.*

Épsilon - *Revista de Educación Matemática* *2014, Vol. 31(1), nº 86, 77-91*

Una aplicación didáctica del método de Fourier-Motzkin a los problemas de programación matemática

Gabriel Ruiz-Garzón
Departamento de Estadística e I.O.
Universidad de Cádiz

Resumen: *En 1826, Fourier propuso un método de eliminación de variables para resolver un sistema lineal de desigualdades. Este método es similar al método de eliminación de Gauss para un sistema de ecuaciones y puede ser usado para resolver problemas de programación matemática. También se propone utilizar, en nuestras clases, el teorema de la Alternativa, para relacionar sistemas de ecuaciones e inecuaciones.*
Palabras clave: *Problema de programación matemática, método de eliminación de Fourier-Motzkin, teoremas de la Alternativa, sistemas de desigualdades*

Fourier-Motzkin elimination method: A didactic application to mathematical programming problems

Abstract: *In 1826, Fourier treated a method of elimination of variables to solve linear inequalities system. This method is similar to Gauss elimination method to equations system and can be used to solve mathematical programming problems. Also, in our classes, we propose to use theorems of the Alternative to relate equations and inequalities system.*
Keywords: *Mathematical programming problem, Fourier-Motzkin elimination, Theorems of the Alternative, systems of inequalities*

ANTECEDENTES

Antes de exponer cómo aplicar el método de Fourier-Motzkin, en nuestras clases, comenzaremos con unas pequeñas pinceladas biográficas de los personajes protagonistas: Jean Baptiste Joseph Fourier y Theodore S**.** Motzkin.

Fourier nace en Auxerre en 1768 y muere en París en 1830. Proveniente de una familia humilde, de padre sastre, se quedaría huérfano a la edad de 10 años. Cuentan que Fourier con 14 años entendía perfectamente libros avanzados de álgebra y geometría, siendo autor, a la edad de 18 años, de una memoria sobre la localización de las raíces de ecuaciones algebraicas.

En aquella época, la condición social de Fourier sólo le dejaba dos opciones para conseguir un ascenso social, bien mediante el ingreso en la milicia o en el clero. Pero no lograría entrar en la Academia Militar de Artillería, y eso a pesar de contar con el apoyo de Legendre, debido no ser miembro de la nobleza. Ante este rechazo opta por ingresar como novicio en la Abadía de Saint-Benoîts sur Loire. En 1789 decide, dar un giro a su vida, no toma los hábitos y se marcha a un París inmerso en la Revolución Francesa. Tras tomar parte activa en el proceso revolucionario ingresa en prisión, para posteriormente ser excarcelado tras la ejecución de Robespierre.

En 1978 formó parte de la expedición francesa que ocupó Egipto. Durante el Imperio, Napoleón le nombraría comandante en jefe de la Armada de Oriente y secretario perpetuo del Instituto del Cairo, donde se ocupó de aspectos científicos e históricos. En los tres años que duró la ocupación francesa de Egipto se midió la altura de las pirámides o se descubriría la *"piedra de Rosetta"*. Napoleón le premió con el título de barón, aunque en la última etapa de su vida tuvieron desavenencias. También participó en la confección de los 4 primeros volúmenes de *Recherches statistiques sur la Ville de París*, donde propondrá la presentación de los datos a través de tablas, análogas a las que ya resumían las estadísticas judiciales en las *Comptes géneraux de la justice criminalle en France.*

Fig. 1. J.B.J. Fourier

En 1794 estudiaría en la École Normale de París, teniendo como profesor a Lagrange quién diría de Fourier que: *"Era el primero entre los hombres europeos de la ciencia"*. Fue también profesor de la École Polytechnique bajo la dirección de Carnot y Monge.

El mayor reconocimiento llegaría en 1817 al ser primeramente elegido miembro de la Academia de Ciencia y con posterioridad, en 1822, secretario perpetuo de la misma, lo que le permitió publicar su gran obra *Théorie Analytique de la Chaleur* (Teoría analítica del Calor), donde desarrollará el método sobre series trigonométricas que hoy llamamos Análisis de Fourier. Dicha obra había sido previamente presentada, en 1812, a un premio del Instituto Nacional bajo el epígrafe *"Et ignem regunt numeri"* (El fuego también está regido por los números), con la que lograría el primer premio en un jurado donde estaban presentes matemáticos de la talla de Lagrange, Laplace, Legendre, Malus, Haüy. ¡Ahí, es nada!

Fourier continuó con los estudios de su maestro Lagrange sobre lo que hoy llamaríamos optimización matemática. En 1788, Lagrange publicó en su *Mecánique Analytique,* un método para calcular el extremo de una función sujeta a restricciones en igualdad. Lo describe como una herramienta para encontrar un estado de equilibrio estable de un sistema mecánico. En Física, al igual que en otras ciencias, como en Economía, interesan los puntos donde se alcanza un equilibrio, ya sea entre oferta y demanda o entre sistemas de fuerzas, o masas, etc. Con notación actual podríamos expresar la citada condición de la siguiente manera:

Teorema. *Si ϑ(x) denota la función potencial y sea el problema de programación matemática*

$$\begin{aligned} &Min\ \vartheta(x) \\ &s.a\ g_i(x) = 0,\ i=1, \cdots, m \end{aligned}$$

la condición necesaria del lagrangiano $L(x,\lambda) = \vartheta(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(x)$ *para alcanzar el equilibrio del sistema establece que en el punto mínimo x, es donde el gradiente de ϑ(x) puede ser expresado como una combinación lineal de los gradientes de $g_i(x)$.*

$$\nabla \vartheta(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \nabla g_i(x) = 0$$

Los factores λ_i que forman la combinación lineal de estos gradientes son llamados los multiplicadores de Lagrange.

Al calcular el lagrangiano estamos complicando la función objetivo, pero se observa fácilmente que los óptimos del lagrangiano coinciden con los óptimos de la función a optimizar. Resulta paradójico que siendo los matemáticos tan amigos de simplificaciones, el cálculo del lagrangiano sea una de las pocas veces que en Matemáticas complicar una situación, ayuda a resolverla.

Con la *Mecánique Analytique,* Lagrange convierte a esta parte de la Física en una rama del Análisis Matemático. En el prólogo escribe:

> *Que nadie busque figuras en esta obra. Los métodos que se expondrán no requieren ni construcciones mecánicas ni geométricas, sólo operaciones algebraicas, tratadas en un curso regular (Lagrange, 1853).*

Resuelto por Lagrange el problema de optimizar una función con restricciones en igualdad, llegará Fourier para estudiar el problema de optimización *con restricciones en desigualdad*

$$\begin{array}{l} Min\ \vartheta(x) \\ s.a\ g_i(x) \geq 0, \quad i = 1, \cdots, m \end{array}$$

Fourier fue el primero en formalizar un problema, como un problema de programación matemática lineal y formular el principio de desigualdad para el equilibrio mecánico de la siguiente manera:

> *La suma de los momentos de las fuerzas aplicadas es positiva para todos sus desplazamientos, pero es imposible desplazar un cuerpo sólido que está en equilibrio de tal manera que el momento total de las fuerzas aplicadas sea negativo (Fourier, 1798).*

Si denotamos las fuerzas que actúan en un sistema mecánico como $P,Q,R,\ldots$ su momento total está definido como la suma de los productos escalares

$$P\delta p + Q\delta q + R\delta r + \ldots$$

donde δp, δq *y* δr, ... son las variaciones de los desplazamientos.

Si el potencial ϑ existe, entonces

$$P = -\frac{\partial \vartheta}{\partial p}, \quad Q = -\frac{\partial \vartheta}{\partial q}, \quad R = -\frac{\partial \vartheta}{\partial r}, \ldots$$

Y el momento total de las fuerzas del sistema queda como

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial p}\delta p + \frac{\partial \vartheta}{\partial q}\delta q + \frac{\partial \vartheta}{\partial r}\delta r + \ldots \geq 0$$

O sea,

Teorema. *Si un sistema mecánico está en equilibrio estable entonces el potencial tiene un mínimo local y se observa, que el total diferencial es no negativo en el punto mínimo de la función.*

Matemáticamente podemos decir que la condición necesaria para que se dé tal equilibrio, establecida por Fourier y comparable a la estudiada por Lagrange, es que el gradiente de la función objetivo pueda ser expresado como una combinación lineal no negativa de los gradientes de las restricciones.

El otro protagonista de este artículo es el matemático alemán Theodore S**.** Motzkin (1908-1970). Educado en el seno de una familia judía, publica su tesis doctoral sobre programación matemática en 1934. En 1935 enseña en la Universidad Hebrea de Jerusalén, donde trasladó numerosa terminología matemática al hebreo. Durante la Segunda Guerra Mundial trabaja como criptógrafo para el gobierno británico. En 1948, tras la Segunda Guerra Mundial, emigra a los Estados Unidos, llegando a dar clases en Harvard y Boston. En 1950 ingresa como profesor en la Universidad de California-Los Ángeles, donde investiga sobre diversos temas, como teoría de grafos, geometría algebraica, análisis numérico, etc.

Fig. 2. Theodore S. Motzkin

PROPUESTA DIDÁCTICA

Existen básicamente dos métodos didácticos que solemos utilizar para enseñar, tanto a alumnos de Bachillerato como de grado, la resolución de problemas lineales de programación matemática (ver Hillier y Lieberman, 1991, Rufián-Lizana et al., 2011, Ruiz-Garzón, 2013).

El primero es el método gráfico. A grandes rasgos, el método parte de representar las regiones del plano que cumplen cada una de las restricciones. La intersección de esas regiones nos daría la región factible y ver después el punto o puntos extremos de la región factible donde la función objetivo alcanza el óptimo, tras desplazarnos dentro de la región factible, mediante rectas paralelas a la función objetivo o bien evaluando cada vértice de la región factible en la función objetivo.

El segundo pasa por la resolución mediante el Algoritmo del Simplex. El algoritmo parte de una solución básica factible y busca un número finito de otras soluciones básicas factibles, hasta encontrar una que satisface las condiciones de optimalidad. El alumno es capaz de ir construyendo tablas en las que, mediante cambios de base adecuados, se va pasando de un punto extremo a otro punto extremo contiguo del polígono, que conforma la región factible, consiguiendo en cada tabla una mejora del valor de la función objetivo, hasta que no sea posible mejorar más, en cuyo caso, ese extremo será la solución del problema. Hasta aquí la forma tradicional.

La propuesta que aquí se hace, pasa por la utilización de un método consistente en la eliminación de variables de un sistema de desigualdades lineales, análogamente a como se hace con un sistema de ecuaciones (Lauritzen, 2013). El método de eliminación de Gauss para ecuaciones fue publicado en 1810, para resolver el sistema de ecuaciones normales que se obtenían al aplicar el método de mínimos cuadrados, al calcular la órbita del asteroide Pallas.

Así, cuando un alumno decide resolver el siguiente sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas:

$$x + y + z = 3 \; [1]$$
$$x + y - z = 1 \; [2]$$
$$2x + y - z = 2 \; [3]$$

Elige una incógnita a eliminar, pongamos la z, y realiza una serie de operaciones al objeto de conseguir que un sistema de tres ecuaciones y tres incógnitas pase a otro de dos ecuaciones y dos incógnitas. En nuestro caso, si cogemos las ecuaciones [1] y [2] y las sumamos, y hacemos lo mismo con la [1] y [3], obtenemos el sistema:

$$2x + 2y = 4$$
$$3x + 2y = 5$$

Podemos volver a escoger otra variable a eliminar de ambas ecuaciones, pongamos la y. Tras restar las dos anteriores ecuaciones nos da la solución $x=y=z=1$.

Fourier propone el siguiente método, en un artículo sobre desigualdades, titulado *Solution d'une question particulière du calcul des inégalités* (Fourier, 1826). Más tarde, este método propuesto por Fourier sería redescubierto (Motzkin, 1936), de ahí el nombre de teorema de Fourier-Motzkin. En el artículo, Fourier resuelve el siguiente problema sobre la intersección de seis líneas, en un polígono convexo irregular y que geométricamente adopta la siguiente forma:

$$x < y(1+k), \quad y < x(1+k)$$
$$y < z(1+k), \quad z < y(1+k)$$
$$z < x(1+k), \quad x < z(1+k)$$
$$x + y + z = 1$$

donde k es una constante positiva.

Una desigualdad $a=b$ puede ser vista como dos desigualdades $a \leq b$ y $a \geq b$. El algoritmo de Fourier consiste en resolver sistemas de desigualdades lineales, igual que se hace para el caso de un sistema de ecuaciones lineales.

El objetivo es encontrar otro sistema de desigualdades lineales, con menos variables que el original, y que ambos sistemas compartan soluciones.

Si conseguimos eliminar todas las variables del sistema de desigualdades y quedarnos con un sistema de desigualdades de constantes, en el que podemos decidir si son verdad o mentira, entonces, si ese último sistema de desigualdades tiene solución, el original también la tendrá y viceversa.

Teorema "sándwich" de Fourier-Motzkin:

Sea $\alpha_1, \ldots, \alpha_r, \beta_1, \ldots, \beta_s \in R$. Entonces max $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_r\} \leq \min\{\beta_1, \ldots, \beta_s\}$ si y sólo si $\alpha_i \leq \beta_j$ para todo i, j con $1 \leq i \leq r$ y $1 \leq j \leq s$.

Veamos su aplicación con un ejemplo.

Ejemplo 1: Imaginemos que quiero

$$\begin{aligned} &\text{Max } z = x_1 + x_2 \\ &\text{s.a.} \\ &\quad 2x_1 + x_2 \leq 4 \\ &\quad x_1 + 3x_2 \leq 15 \\ &\quad -x_1 \leq 0 \\ &\quad -x_2 \leq 0 \end{aligned}$$

Primeramente lo que se hace es introducir la función objetivo en el sistema de desigualdades que definen la región factible

$$\begin{aligned} z &= x_1 + x_2 \\ 2x_1 + x_2 &\leq 4 \\ x_1 + 3x_2 &\leq 15 \\ -x_1 &\leq 0 \\ -x_2 &\leq 0 \end{aligned}$$

Decido eliminar la variable x_1 sustituyendo $x_1 = z - x_2$ en las desigualdades restantes

$$
\begin{aligned}
2(z-x_2)+x_2 &\leq 4 \\
z-x_2+3x_2 &\leq 15 \\
-(z-x_2) &\leq 0 \\
-x_2 &\leq 0
\end{aligned}
$$

Así pasamos de tener 3 variables a tener sólo 2. Ahora reescribimos el sistema para prepararnos para eliminar x_2, dividiendo las desigualdades en 3 grupos (I_+), (I_-) y (I_0), dependiendo de si el coeficiente de x_2 es positivo, negativo o cero, respectivamente.

(I_+) $2x_2 + z \leq 15$, $x_2 - z \leq 0$, (I_-) $-x_2 + 2z \leq 4$, $-x_2 \leq 0$ (I_0) No tengo

Con lo que el sistema quedaría como:

$$
\begin{aligned}
x_2 &\leq \frac{15-z}{2} \\
x_2 &\leq z \\
-4+2z &\leq x_2 \\
0 &\leq x_2
\end{aligned}
$$

Luego tenemos que el sistema anterior tiene solución en z y x_2, si la expresión siguiente la tiene en z,

$$
\max\{-4+2z,0\} \leq x_2 \leq \min\left\{\frac{15-z}{2}, z\right\}
$$

Aplicamos el teorema “sándwich” de Fourier-Motzkin. Vemos que efectivamente el valor de la variable x_2 queda atrapado entre los dos “trozos de pan”, es decir, entre el máximo y el mínimo de dos expresiones. El sistema inicial es equivalente a

$$
\begin{aligned}
-4+2z &\leq \frac{15-z}{2} \\
-4+2z &\leq z \\
0 &\leq \frac{15-z}{2} \\
0 &\leq z
\end{aligned}
$$

Tenemos ya desigualdades con una sola incógnita z, cuya solución es $0 \leq z \leq 4$. El valor máximo de z es 4 que insertado en la siguiente expresión

$$\max\{-4+2z,0\} \le x_2 \le \min\left\{\frac{15-z}{2}, z\right\}$$

nos da un valor de $x_2 = 4$ y por tanto $x_1 = z - x_2 = 0$. La solución del problema es el punto $(x_1, x_2) = (0,4)$ y el valor del óptimo es $z=4$, como podemos comprobar gráficamente a mano o utilizando algún software en la figura 3 (Bejarano, 2009).

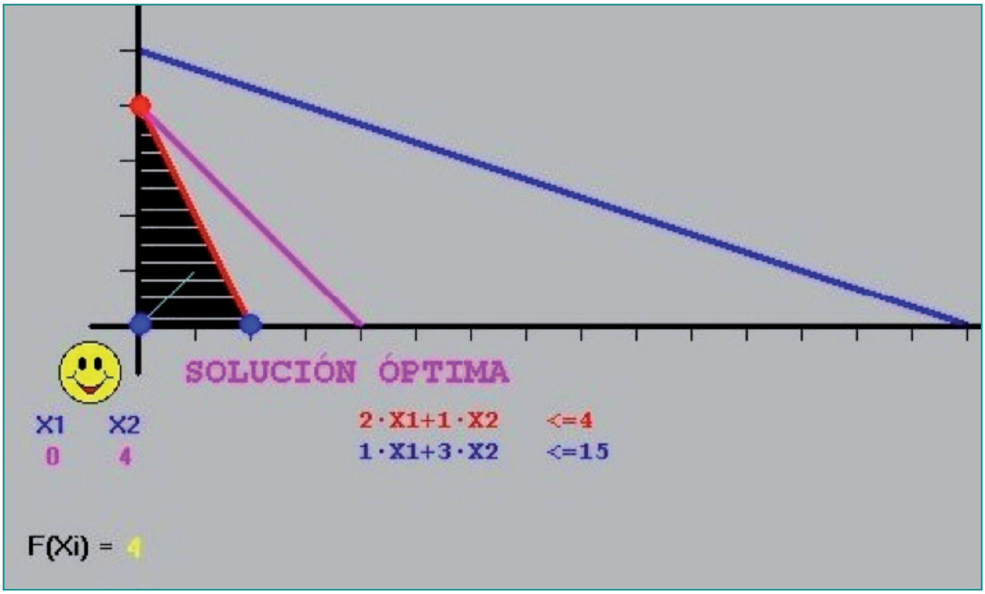


Fig. 3. Resolución gráfica del ejemplo 1

Ejemplo 2: *En una fábrica se construyen sillas grandes y pequeñas. Las sillas grandes necesitan 4 metros cuadrados de madera y las pequeñas 3. El fabricante necesita construir al menos 3 sillas grandes y al menos el doble de pequeñas que de grandes. Se dispone de 60 metros cuadrados de madera y los beneficios son de 1 unidad monetaria por silla pequeña y grande. ¿Cuántas sillas de cada tipo se deben fabricar para obtener el beneficio máximo?*

Es decir, lo que se quiere es:

$$\begin{aligned}
&\text{Max } z = x_1 + x_2 \\
&\text{s.a.} \\
&\quad -x_1 \le -3 \\
&\quad 2x_1 - x_2 \le 0 \\
&\quad 4x_1 + 3x_2 \le 60
\end{aligned}$$

Primero introduciremos la función objetivo en el sistema de desigualdades, que definen la región factible:

$$z = x_1 + x_2$$
$$-x_1 \leq -3$$
$$2x_1 - x_2 \leq 0$$
$$4x_1 + 3x_2 \leq 60$$

Decido eliminar la variable x_1 sustituyendo $x_1 = z - x_2$ en las desigualdades restantes

$$-(z - x_2) \leq -3$$
$$2(z - x_2) - x_2 \leq 0$$
$$4(z - x_2) + 3x_2 \leq 60$$

Reescribimos el sistema para prepararnos para eliminar x_2

$$x_2 \leq -3 + z$$
$$\frac{2z}{3} \leq x_2$$
$$-60 + 4z \leq x_2$$

Luego tenemos que

$$\max\left\{\frac{2z}{3}, -60 + 4z\right\} \leq x_2 \leq \min\{-3 + z\}$$

Aplicando el teorema de Fourier-Motzkin tenemos que

$$\frac{2z}{3} \leq -3 + z \Rightarrow 9 \leq z$$
$$-60 + 4z \leq -3 + z \Rightarrow z \leq 19$$

Obtenemos ya desigualdades con una sola incógnita cuya solución es $9 \leq z \leq 19$.
El valor máximo de z es 19 que insertado en la siguiente impresión

$$\max\left\{\frac{2z}{3}, -60 + 4z\right\} \leq x_2 \leq \min\{-3 + z\}$$

nos da un valor de $x_2 = 16$ y por tanto $x_1 = z - x_2 = 19 - 16 = 3$. Gráficamente lo podemos comprobar con la figura 4.

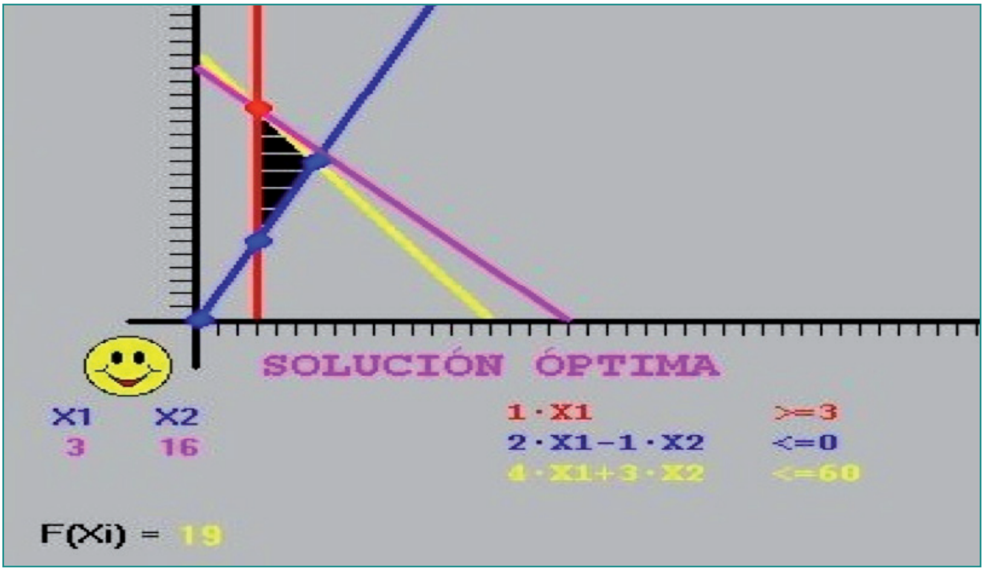


Fig. 4. Resolución gráfica del ejemplo 2

Hasta aquí hemos visto el teorema de Fourier-Motzkin para resolver problemas de programación lineal y su aplicación en nuestras clases, un método innovador y menos monótono que el usado en los libros de texto, además que puede hacer que el alumno razone.

Veamos ahora otro detalle no menos trascendente, relacionado con Motzkin y la resolución de problemas de programación matemática.

Se trata de la importancia de las soluciones no negativas de un conjunto de desigualdades y ecuaciones. Esta relevancia no fue tan evidente hasta que en 1947, George B. Dantzig (1914-2005) diera el Algoritmo del Simplex para resolver el problema de programación lineal. La aplicación del citado algoritmo a la Economía, les valió a Kantorovich y a Koopmans, quienes habían trabajado con Dantzig, el premio Nobel de Economía. Una de las hipótesis del método del Simplex es suponer que todas las variables son negativas, partiendo del origen de coordenadas como primera solución factible, de ahí que en los ejemplos anteriores observemos que la región factible se encuentra en el primer cuadrante. Los llamados teoremas de la Alternativa juegan un decisivo papel a la hora de obtener dichas soluciones no negativas y condiciones necesarias de optimalidad (Mangasarian, 1969).

Estos teoremas de la Alternativa envuelven dos sistemas de ecuaciones lineales, que podemos denotar por (I) y (II). Un típico Teorema de la Alternativa asegura que o el sistema (I) tiene solución o es el sistema (II) el que tiene solución, pero nunca ambos a la vez.

En 1898 el matemático húngaro Gyula Farkas (1847-1930) también demostró dicha condición necesaria de Lagrange. El 17 de Diciembre de 1894 lee ante la Academia húngara su escrito titulado *Sobre las aplicaciones del principio mecánico de Fourier.*

También demostró el siguiente Teorema de la Alternativa:

Teorema de la Alternativa (Farkas). *Para cada matriz dada A, y b un vector ó*

(I) $bx>0$, $Ax \leq 0$ *tiene una solución x*

ó,

(II) $A^t y=b$, $y \geq 0$ *tiene una solución y*

pero nunca ambos.

El Teorema de Farkas se utiliza para proteger celdas con valores confidenciales en tablas estadísticas, es decir, decidir qué ocultar, pero minimizando la pérdida de información que se produce.

Otra aplicación nace en el campo del transporte, cuando se necesita diseñar la ruta de un vehículo con capacidad limitada, para que recoja y entregue pedidos de un producto a través de unos clientes. El objetivo es minimizar los costes de la ruta, mientras se mantienen los límites de carga del vehículo y las demandas de los clientes.

En 1936, Theodore S. Motzkin demuestra su Teorema de la Alternativa que es más general que el de Farkas.

Teorema de la Alternativa (Motzkin). *Para cada matriz dada A, C y D, siendo A no vacía o*

(I) $Ax>0$, $Dx=0$ *tiene una solución x*

ó

(II) $A^t y_1 + C^t y_3 + D^t y_4 = 0$, $y_1 \geq 0$, $y_3 \geq 0$ *tiene una solución y,*

pero nunca ambos.

Este teorema también puede ser utilizado para probar el teorema de dualidad del problema de programación matemática lineal. Pero veamos seguidamente, mediante un ejemplo, la utilidad de los Teoremas de la Alternativa.

Ejemplo 3: Sea

$$x_1 + x_2 \leq 4$$
$$-x_1 + x_2 \leq -5$$
$$-x_1 \leq 0$$
$$-x_2 \leq 0$$

Decido eliminar la variable x_1, dividiendo las desigualdades en 3 grupos (I_+), (I_-) y (I_0), dependiendo de si el coeficiente de x_1 es positivo, negativo o cero, respectivamente.

$$(I_+)\ x_1 + x_2 \leq 4\,,\ (I_-)\ -x_1 + x_2 \leq -5\,,\ -x_1 \leq 0\,,\ (I_0)\ \ -x_2 \leq 0$$

Reescribo el sistema de la siguiente manera:

$$x_1 \leq 4 - x_2$$
$$5 + x_2 \leq x_1$$
$$0 \leq x_1$$
$$0 \leq x_2$$

Aplicamos el teorema Fourier-Motzkin, y el sistema inicial en x_1 y x_2 es equivalente al siguiente en x_2,

$$\max\{5+x_2,0\} \leq x_1 \leq \min\{4-x_2\}$$
$$0 \leq x_2$$

Utilizamos el teorema de Fourier-Motzkin para eliminar x_1, lo que nos lleva a que

$$5+x_2 \leq 4-x_2 \Rightarrow x_2 \leq \frac{-1}{2}$$
$$0 \leq 4-x_2 \Rightarrow x_2 \leq 4$$
$$0 \leq x_2$$

Resultando una incompatibilidad.

Si utilizamos en nuestro ejemplo el siguiente teorema de la Alternativa:

Teorema de la Alternativa: *Para cada matriz dada A, C y D cada vector b*
(I) $Ax \leq b$ *tiene una solución x,*
ó
(II) $y^t A = O^t$, $y^t b<0$, $y \geq O$ *tiene una solución y*
pero nunca ambos.

Tenemos en nuestro caso, como el sistema (I)

$$Ax = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

no tiene solución y por tanto tenemos que, por ejemplo, $y = (1 \quad 1 \quad 0 \quad 2)$ es solución del sistema (II).

Ya que

$$(1 \quad 1 \quad 0 \quad 2) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = (0 \quad 0)$$

$$(1 \quad 1 \quad 0 \quad 2) \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = -1 < 0$$

$$(1 \quad 1 \quad 0 \quad 2) \geq (0 \quad 0 \quad 0 \quad 0).$$

Luego, vemos como, a través de los teoremas de la Alternativa, podemos relacionar soluciones de sistemas de ecuaciones e inecuaciones. En las Matemáticas no existen compartimentos estancos donde el alumno deposite las soluciones y métodos para resolver ecuaciones por un lado y otros diferentes donde aloje las soluciones y métodos de resolución de inecuaciones. Todo está más relacionado. Dicha sensación se verá corroborada por los alumnos, que en su progreso matemático y en sus estudios de grado, tengan la necesidad de resolver problemas de programación matemática no lineales con restricciones en desigualdad. Dicha resolución conlleva la utilización de las condiciones de Karush-Kuhn-Tucker (con condiciones denominadas de gradiente y de ortogonalidad, en igualdad, y de factibilidad y no negatividad, en desigualdad), ver en este sentido los ejemplos presentados en (Rufián-Lizana, Ruiz-Garzón y Osuna-Gómez, 2011).

Por otro lado, así como las propiedades de diferenciabilidad de las funciones son usadas para linearizar un problema de programación matemática no lineal, los teoremas de la Alternativa son usados para obtener condiciones necesarias de optimalidad, como las de Karush-Kuhn-Tucker, lo podemos apreciar en (Mangasarian, 1969).

CONCLUSIONES

En este artículo hemos visto una nueva forma didáctica de acercarnos a la resolución de problemas lineales de programación matemática, diferente de la forma clásica, a través del método de eliminación de Fourier-Motzkin, consistente en la eliminación de variables de un sistema de desigualdades lineales, análogamente a como se hace con un sistema de ecuaciones. Igualmente podemos relacionar la resolución de sistemas de inecuaciones con sistemas de ecuaciones a través de los teoremas de la Alternativa. La obra de Fourier y Mozkin nos ha permitido hacer un repaso por muchos de los hitos de la historia de la Optimización Matemática.

REFERENCIAS

Bejarano, J. (2009). *Programación lineal bajo Windows*, Sevilla: Software realizado bajo la supervisión del Departamento de Estadística e I.O. de la Universidad de Sevilla.

Fourier, J. (1798). Mémoire sur la statique, contenat la démonstration du príncipe de vitesses virtuaelles, et de la théorie des momens. En Darboux, G. (Ed.): *Oeuvres*, Vol. 2, 475-521. París: Gauthier-Villars.

Fourier, J. (1826). *Solution d'une question particulière du calcul des inégalités.* Nouveau Bulletin des Sciences par la Societé philomatique de Paris, 317-319.

Hillier, F. S. y Lieberman, G. F. (1991). *Introducción a la Investigación de Operaciones*. Londres: McGraw-Hill.

Lagrange, J.L. (1853). *Mécanique Analytique*, París: Editorial Mallet-Bachelier,

Lauritzen, N. (2013). *Undergraduate convexity*. Singapore: World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd.

Mangasarian, O. (1969). *Linear and Nonlinear Programming*. New York: McGraw-Hill.

Motzkin, T. S. (1936). *Beitrage zur Theorie der Linearm Ungleichungen, Dissertatio*, Jerusalem: University of Basel.

Rufián-Lizana, A., Ruiz-Garzón, G. y Osuna-Gómez, R. (2011). *Métodos de Optimización Matemática (Manual para la resolución de problemas de optimización aplicados a la toma de decisiones empresariales).* Sevilla: Editorial Alvalena.

Ruiz-Garzón, G. (2013). *Métodos cuantitativos para la toma de decisiones empresariales. Ejercicios.* Cádiz. Servicio de Publicaciones de la Universidad de Cádiz.

Épsilon - *Revista de Educación Matemática* *2014, Vol. 31(1), nº 86, 93-107*

LAS MATEMÁTICAS "NO EUROPEAS": Historia de las Matemáticas en la E.S.O.

José Manuel Pamos Vargas
Alexander Maz-Machado
Universidad de Córdoba

Resumen: *Se presenta una propuesta de trabajo para dar a conocer las matemáticas no europeas a los alumnos de la Enseñanza Secundaria Obligatoria (ESO).*
Palabras Clave: *Historia de las matemáticas, Matemáticas no europeas, estrategias didácticas.*

MATHEMATICS "NO EUROPEAN" History of Mathematics in E.S.O.

Abstract: *A work proposal is presented to publicize non-European mathematics to students in Compulsory Secondary Education (ESO).*
Keywords: *History of mathematics, non-European mathematics, teaching strategies.*

INTRODUCCIÓN

A nivel de la gente común y corriente, vivimos en una sociedad que, en general, no mira más allá de su entorno, de sus fronteras. Además, oímos un día y otro hablar en televisión y prensa digital sobre Europa, la necesidad de "unidad". También, la incorporación de una moneda común que hizo tener al conjunto de países de la Unión Europea aún más dependientes unos de otros, programas europeos de intercambio, la *Eurocopa*…, etc. Cuántas cosas existen entorno a Europa que hacen que exista ese pensamiento de que no hay nada más allá del continente europeo. Lo mismo ocurre con las Matemáticas. Consultando diferentes libros sobre historia de las matemáticas hallamos que la inmensa mayoría olvida una época, que veremos a continuación, muy importante para el desarrollo matemático posterior en Europa, tal como señala Arrieta (1998, p. 72):

> Los textos de historia de las matemáticas se han escrito con un marcado sesgo eurocéntrico, ignorando, devaluando y distorsionando la actividad matemática realizada al margen del continente europeo. Parece que únicamente los habitantes del mismo han sido capaces de aportar algo a la "reina de las ciencias".

En consecuencia, tenemos libros de texto de matemáticas, usados en las aulas, y muchísimo material en Internet que sólo hacen referencia a matemáticos europeos: Fibonacci, Fermat, Descartes, Euler, Fourier…; lo que no nos explican es que quizás estos matemáticos no habrían obtenido sus resultados sin la base de muchos otros "no europeos", o no habrían sido conocidos en el mundo entero sin las traducciones y adaptaciones de estos. Por nombrar algunos: Al-Jwarizmi, Brahmagupta, Jiu Zhang, etc.

Es importante conocer que la mayor parte de los textos de historia de las matemáticas que se han escrito llevan la marca de ese eurocentrismo; sostienen que las matemáticas nacieron en Grecia, influenciada notablemente por las tradiciones matemáticas de Egipto y Mesopotamia a las que tampoco se les da la importancia que debiera (Véase la figura 1), languideciendo durante mil años en la «Edad Oscura», y volviendo de nuevo con el pensamiento griego en la Italia del Renacimiento, sin tener en cuenta que, en realidad, hubo mucha "actividad matemática" en esa época fuera de Europa.

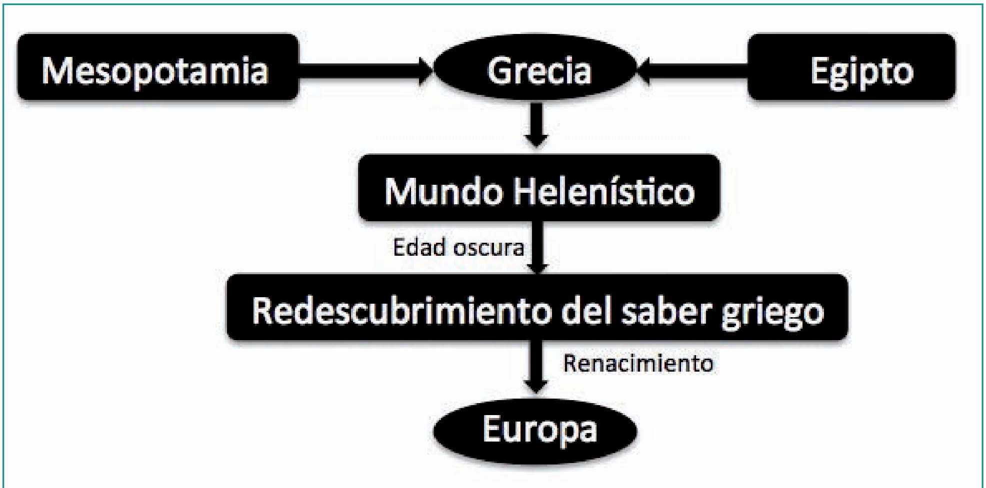


Figura 1. Adaptación de la trayectoria eurocéntrica "clásica" y modificada.
Fuente: Arrieta (1998)

Dentro de las excepciones a esta tendencia, encontramos que Gheverghese (1991) construye en su libro *La cresta del pavo real*, una trayectoria alternativa para la Edad Oscura y explica que para crear dicha alternativa hay que reconocer que diferentes culturas en diferentes períodos de la historia han contribuido a las reservas del conocimiento matemático del mundo. La figura 2 presenta dicha trayectoria del desarrollo matemático, pero se limita al período entre los siglos V y VI de nuestra era (La edad oscura). La idea de dicha imagen es destacar la variedad en las actividades e intercambios matemáticos entre diversas áreas culturales que siguieron activas mientras Europa permanecía en un profundo sueño. Adjuntamos la figura por el curioso hecho de que aparezca la ciudad de Córdoba junto con lejanos lugares como: China, India, Bagdad…

En esa figura 2 de la que venimos hablando, se muestra el papel de los árabes. El conocimiento científico que tuvo su origen en la India, China y el mundo helenístico fue buscado por los estudiosos árabes y luego traducido, refinado, sintetizado y aumentado en diferentes centros del saber, comenzando por Jund-i-Shapur en Persia en el siglo VI de nuestra era y trasladándose a continuación a Bagdad, El Cairo y, finalmente, a Toledo y Córdoba desde donde esos conocimientos se extendieron por toda Europa.

Para concluir esta breve introducción, nos centraremos en plantear actividades sobre las matemáticas árabes que se trataron en la «Edad Oscura», aunque expongamos alguna propuesta didáctica o ideas sobre las matemáticas mayas, egipcias, babilónicas, chinas, e indias que podrían llevarse a cabo también en las aulas de la ESO.

Por lo tanto, nuestra propuesta de actividad se llevará a cabo con dos propósitos:

1) Despertar la curiosidad de los estudiantes por la historia de las matemáticas, repasando, a través de diferentes actividades, matemáticas y matemáticos poco valorados.
2) Incorporar a la enseñanza una visión histórica favorecedora de una verdadera educación intercultural, no sesgada, por prejuicios colonizadores y racistas.

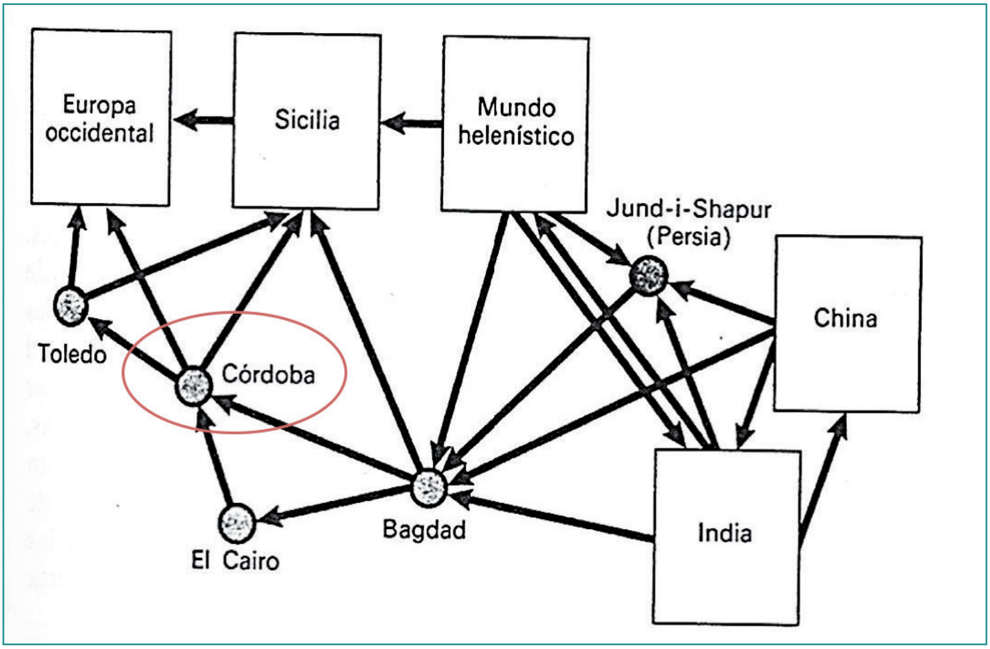


Figura 2 – Una trayectoria alternativa para la «Edad Oscura»
Fuente: Gheverghese, 1991, p. 35.

CONTEXTO

Proponemos que el contexto en el que se trabaje sea una clase de 2º de E.S.O. El centro debe poseer ordenadores y el aula disponer de una pizarra digital y de un muro de publicaciones, todo ello es necesario para llevar a cabo esta actividad.

EXPLICACIÓN GLOBAL DE LA ACTIVIDAD

La idea de esta actividad es que a partir de un mapamundi en blanco el alumnado vaya "rellenando" dicho mapa con la idea o ideas principales que se traten en su momento. Por ejemplo, al ver el sistema numérico maya, los estudiantes señalaran en el mapa la zona donde se desarrolló, y además podrán crear murales para adjuntarlos al mapamundi y así ir completándolo (Figura 3).

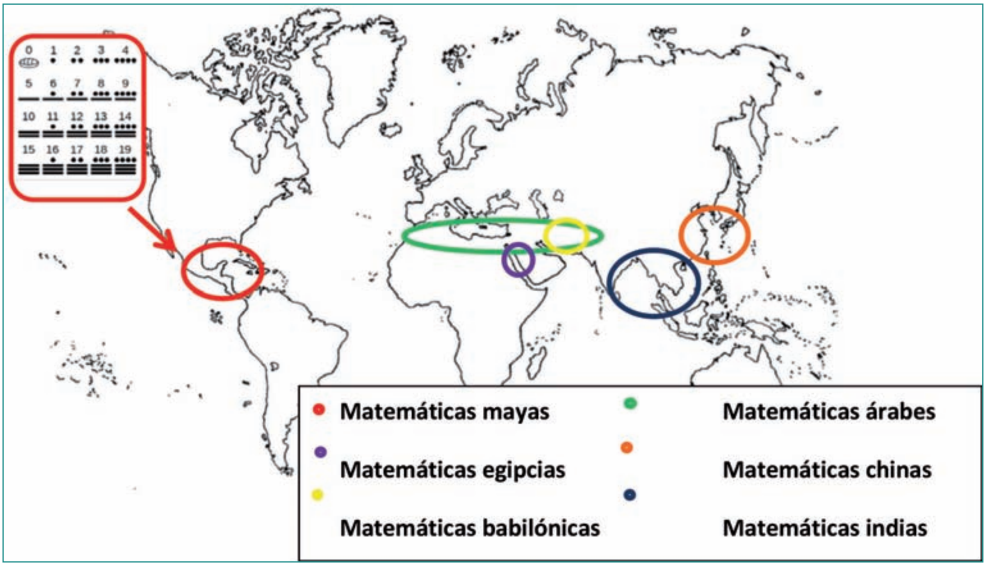


Figura 3. Culturas cuyas matemáticas que se tratarán en la clase.

En la primera sesión de clase, además de contarles el contenido que se desarrollará a lo largo del curso académico, los sistemas de evaluación, normas, etc., se les planteará el inicio de esta actividad. El profesor hará, con ayuda de un PowerPoint y/o videos, una síntesis de la introducción anterior. Seguidamente, se les dará a los alumnos y alumnas un guion orientativo (Figura 4), señalando los días o lecciones en los cuales se volverá a tratar esta actividad. Dicho guion podrá estar presente en el muro de publicaciones del aula, permitiendo así que los estudiantes tengan una visión global del trabajo, así como de las conexiones entre las distintas matemáticas. El mapamundi en blanco podría aportarlo el profesor, preferiblemente en un formato de papel alto (A2 o A1), para tener espacio para colocar otros murales.

SEPTIEMBRE Día 20: Tema 1: Los números naturales (Números mayas)	**OCTUBRE**	**NOVIEMBRE**
DICIEMBRE Día 1: Tema 7: Ecuaciones (y matemáticas chinas)	**ENERO**	**FEBRERO** Día 10: Tema 10: Álgebra (Matemáticas árabes)
MARZO Día 9: Figuras planas (Matemáticas babilónica)	**ABRIL** Día 7: Los cuerpos geométricos (Veremos la geometría en Egipto)	**MAYO**

Figura 4. Guion de trabajo (orientativo).

LA NUMERACIÓN MAYA

Puesto que se trata sólo de una propuesta, no se detalla una programación al completo, sólo se darán unas orientaciones para que sirva al docente como guía.

De las matemáticas de los mayas se puede destacar para el aula, fundamentalmente, sus números y sus calendarios. No obstante, es importante hacer una introducción histórica sobre esta cultura, por breve que sea. Es de obligación transmitirles que, desgraciadamente, esta gran civilización ha dejado muy pocas pruebas, en parte, por la destrucción de los españoles con su conquista.

Las primeras unidades didácticas en las clases de matemáticas, en general, suelen ser los números. Para explicar a nuestros estudiantes el funcionamiento de nuestro sistema de numeración decimal o por qué sumamos de una determinada manera, nos encontramos con que todo ese proceso lo tienen automatizado. Es aquí, por ejemplo, donde podría incluirse los números mayas. Explicarles que los mayas utilizaban un sistema vigesimal y cómo eran capaces de formar cualquier número a partir de un punto, una raya y un símbolo parecido a una concha de caracol (Ver figura 5). También están los calendarios mayas, en los cuales los alumnos pueden ver la relación con la numeración. Además podrían ellos fabricar sus propios calendarios para el curso. Se puede hacer uso de los siguientes materiales:

- YouTube – Los mayas y su numeración vigesimal (https://www.youtube.com/watch?v=blR93A9RRvU): Explica muy bien el sistema numérico maya, así como la diferencia entre el sistema vigesimal maya y el decimal actual. Además, expone de forma muy visual el funcionamiento del calendario maya (min 12:00), mediante una especie de sistema de ruedas dentadas.
- Sunya – El fin del mundo (http://sunya00.blogspot.com.es/2012/12/el-fin-del-mundo.html).

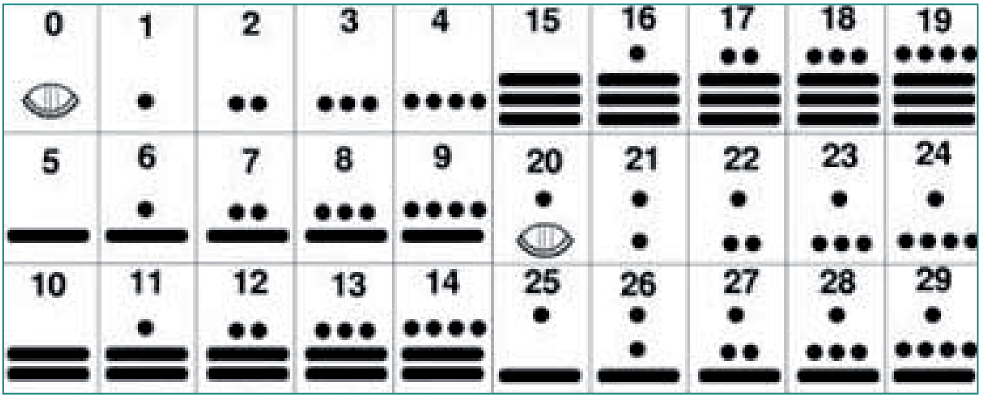


Figura 5. Numeración maya.

EGIPTO Y SU GEOMETRÍA

Al igual que antes, se darán algunas orientaciones, muy breves, de cómo se podría trabajar Egipto dentro de un aula de E.S.O. Egipto es una de las civilizaciones antiguas más misteriosas e increíbles que existen. Podría ligarse sus matemáticas con una unidad didáctica que trate sobre los números o las fracciones. No obstante, Egipto está lleno de construcciones de todo tipo (templos, pirámides, obeliscos…) con formas geométricas características; sus mediciones también fueron muy importantes. Por eso es interesante usarlo como actividad.

La pirámide de Keops da mucho juego, por la gran cantidad de matemática que hay en ella. La cultura egipcia y sus matemáticas están presentes en una infinidad de recursos en Internet que pueden usarse para su estudio. Por ejemplo: Calculo de áreas, volúmenes, alturas, perímetros, distancias, etc.

Materiales:

- YouTube – Misterios de la Gran Pirámide de Keops (https://www.youtube.com/watch?v=pg_qqBe9BxU)
- La matemática en el antiguo Egipto – García Benedito, A. (http://www.jimena.com/egipto/apartados/mates.htm#geometria)

MATEMÁTICAS BABILÓNICAS

El conocimiento actual de las matemáticas babilónicas procede de las excavaciones arqueológicas que se realizaron a mediados del siglo XIX. Se recogieron, en los distintos emplazamientos arqueológicos de Mesopotamia, casi medio millón de tablillas de arcilla, véase la figura 6, de las cuales más de 300 son de ámbito matemático. Es por eso que existen abundantes fuentes de información, al contrario que en Egipto que usaron el papiro que se destruyó más fácilmente.

Puesto que sus cálculos se realizaban en un sistema sexagesimal, podría usarse en el aula, al igual que con los mayas, su sistema numérico y ver cómo funcionaban sus multiplicaciones y divisiones a través de la tablilla Plimpton 322 (ver figura 6a), que lleva ese nombre porque pertenece al catálogo 322 de la colección Plimpton de la Universidad de Columbia. O hacer uso de la Tablilla YBC 7289 (ver figura 6b), que pertenece a la Universidad de Yale, previo a una explicación del teorema de Pitágoras, por ejemplo, o cuando surja el término $\sqrt{2}$. Es interesante explicarles que unos mil años antes de Pitágoras, los babilonios conocían y utilizaban el resultado que hoy lleva su nombre, o que para la raíz cuadrada de 2, la manera en que lo calcularon se asemeja al procedimiento iterativo que usan los ordenadores en la actualidad.

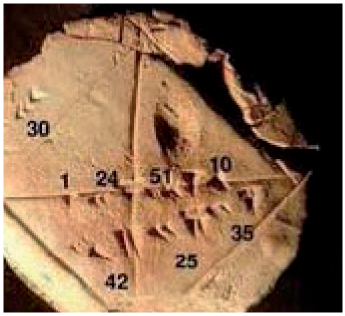


Figura 6. a) Tablilla Plimpton 322. b) Tablilla YBC 7289.

CHINA

Existe una gran cantidad de matemática que se desarrolló en China y que se puede usar como complemento a alguna unidad didáctica de cualquier nivel de E.S.O. Su sistema numérico sentó las bases del sistema que tenemos actualmente. Se usaban unas pequeñas varillas de bambú que se disponían siguiendo unas reglas para formar los números y poder hacer las operaciones elementales. Una actividad posible es que ellos mismos practiquen dichas operaciones con ayuda de unos palillos de dientes.

Por otro lado, los chinos han tenido siempre, y siguen teniéndolo, un interés por la numerología y el misticismo de los números. Cuenta la leyenda que el emperador Yu adquirió dos diagramas, el primero (*Hoh tu*) de un caballo-dragón que surgió de las aguas del Río Amarillo, y el segundo (*Lo shu*) copiado a partir del dibujo de la concha de una tortuga sagrada encontrada en un afluente del Río Amarillo. La figura 7 muestra estos diagramas.

El *Hoh tu* está dispuesto de tal manera que, tanto las secuencias de números impares como la de los pares suman 20. El *Lo shu* es un cuadrado mágico en el que los números de todas las diagonales, filas y columnas, suman 15. Esto dio lugar a lo que conocemos hoy como *Sudoku.*

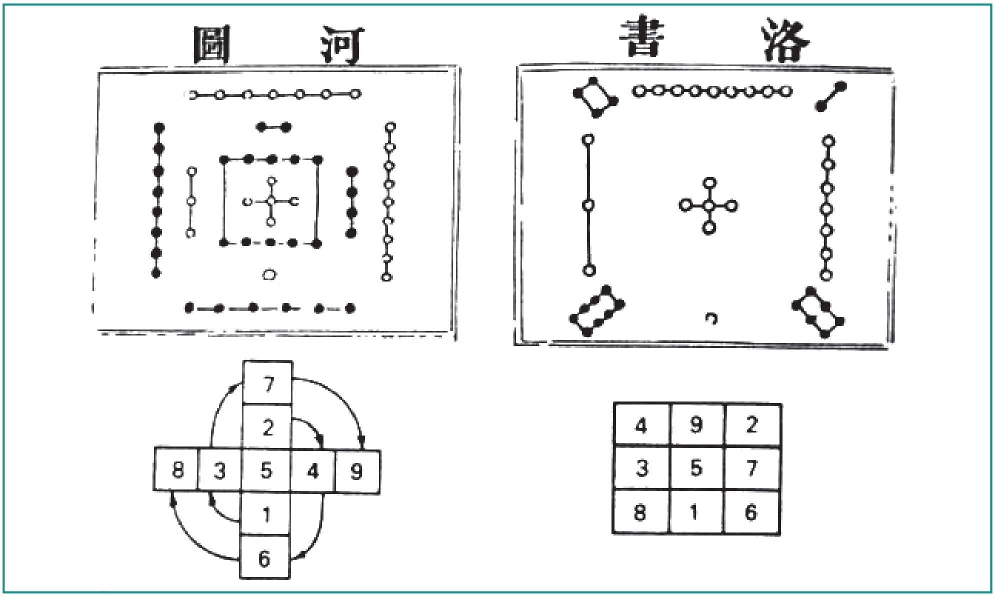


Figura 7– a) Ho tu. b) Lo shu (Needham, 1959, p. 57)

El alumnado podrá construir sus propios cuadrados mágicos o interactuar con recursos a través de Internet. Existen instrucciones para la construcción del cuadrado mágico que se pueden encontrar, entre otros, en:

- Gheverghese (1991).
- Platea.pntic.mec.es/jescuder - Cuadrados mágicos (http://platea.pntic.mec.es/jescuder/c_magico.htm).
- Recursostic.educacion.es/descartes – Cuadrados mágicos 4x4 (http://recursostic.educacion.es/descartes/web/materiales_didacticos/CuadMag/Cuadrados_magicos_4x4.htm).

Ecuaciones y fracciones son temas que se desarrollaron en la cultura china y que también podríamos mostrarles a los estudiantes.

INDIA

Uno de los regalos matemáticos de la India estuvo centrado en el mundo de los números. Esos números comenzaron a utilizarlos en el siglo V d.C., y han ido mejorándolos y perfeccionándolos a lo largo del tiempo, creando los antepasados de los nueve numerales que se utilizan hoy en todo el mundo (Figura 8). Es por esto la importancia de explicar eso a los alumnos y alumnas, ya sea al comienzo del tema de los números naturales, o como curiosidad histórica.

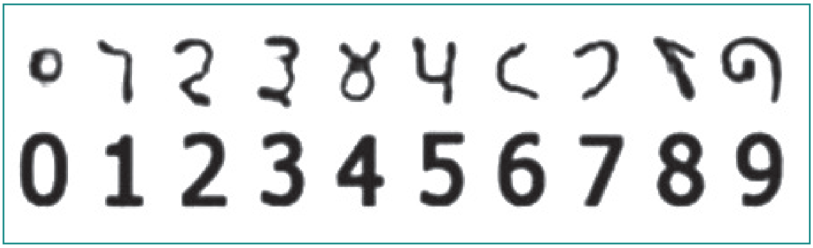


Figura 8. Numeración hindú (siglo V. d.C.) y actual.

Por ser uno de los matemáticos hindúes más grandes, Brahmagupta debe ser nombrado al menos cuando hablemos de la cultura india y sus matemáticas. Demostró algunas propiedades esenciales del 0 que se enseñan hoy en día en las escuelas de todo el mundo, así como la formalización de los números negativos (que los denominaron deudas), permitiendo todo ello la comprensión de que las ecuaciones de segundo grado tenían dos soluciones.

Brahmagupta merece ser conocido por los estudiantes. De esta manera, una actividad podría ser, haciendo uso de los ordenadores que posee el instituto, realizar una búsqueda biográfica, en trabajo cooperativo, su resumen y posterior puesta en el mapamundi. También cuáles son esas propiedades importantes del cero y cómo funcionan (mediante alguna actividad interactiva que haya preparado el profesorado), etc.

MATEMÁTICAS ÁRABES

Nos gustaría recordar que, desde un primer momento, nuestra idea era centrarnos en las matemáticas árabes por varios motivos. El primero, la importancia que tuvo, ya que permitió que occidente volviera a tener ese conocimiento matemático que abandonó siglos atrás. El segundo, su cercanía a nuestra ciudad, Córdoba, como capital política, cultural e intelectual del imperio musulmán, y del mundo, durante varios siglos. Los estudiantes siempre están más receptivos cuando les afecta de alguna manera, y es interesante aprovechar eso. Y tercera, y última, por la belleza y perfección de sus matemáticas en la arquitectura islámica. Todos esos motivos son grandes oportunidades para trasladarlo al aula.

Dicho de otro modo, además del uso de los números, que prácticamente les hace fundadores de la aritmética, hicieron del álgebra una ciencia exacta, sentaron las bases de la geometría analítica y dieron un cuerpo de ciencia a la trigonometría plana y esférica. Organizaron el saber, aclarando y simplificando los conocimientos; pero además, supieron extraer de las matemáticas, anteriormente casi exclusivamente una ciencia especulativa, sus usos prácticos.

Matemáticos árabes en el aula de E.S.O

Cuando hablamos de matemáticos en esta época, tenemos que tener en cuenta una "confusión" entre las diversas ramas del saber. Los científicos del mundo islámico se distinguieron por el interés que tenían por todos los dominios y disciplinas científicas. Los matemáticos, por ejemplo, se ocupaban a menudo de la medicina y sus ideas y teorías se encuentran en el origen de numerosos trabajos sobre óptica o música y, desde luego, de la astronomía, ciencia que se confunde en gran medida con las matemáticas en el mundo árabe. Los matemáticos del mundo islámico eran muy a menudo astrónomos.

Mientras estábamos escribiendo este apartado, nos disponíamos a escribir toda una biografía de los matemáticos más relevantes, pero nos hemos percatado de que no es la intención principal, sino que queremos centrarnos en cómo poder explicar esto en una clase de 2º de ESO y qué se tiene que explicar. Adjuntamos, por tanto, una serie de direcciones web, o incluso algunos libros de la bibliografía, que tienen esa información:

- Mohammed Ibn Musa Al-Khwarizmi (780 – 850).
  (http://mimosa.pntic.mec.es/jgomez53/matema/conocer/alkhwarizmi.htm)
- Abbás Ibn Firnás (810 – 887)
- Maslama al-Mayriti (~950 – 1007)
- Azarquiel (1029 – 1087)
  (http://www.diariocordoba.com/noticias/cultura/libro-repasa-infancia-cordoba-azarquiel_33597.html)

Es fundamental que los alumnos sepan que los estudios y obras de Al-Khwarizmi permitirían el desarrollo posterior de la ciencia en Europa (Infante y Puig, 2013)

En su aritmética se describe y adapta el sistema numérico hindú, llegando a los números que tenemos actualmente. Su tratado de *álgebra* con título "Kitab al-jabr wa'l-muqabala" da origen a la palabra álgebra. Es por esto que muchos autores lo llamen *El Padre del Álgebra.* En su tratado sobre *astronomía*, denominado Sinshind zij, incluye estudios de calendarios, posiciones reales del sol, la luna y los planetas, astronomía esférica, tablas astrológicas. Además, Al-Khwarizmi posee una manera sistemática de realizar los cálculos; esto hace que el concepto de algoritmo se asocie a su nombre, aunque él no haya sido el inventor del primer algoritmo.

Las matemáticas árabes en el aula de E.S.O

A continuación exponemos una mínima parte de las actividades que podrían hacerse.

Resolución de ecuaciones de segundo grado

Al-Khwarizmi, en su tratado de álgebra, nos explica la forma de resolver una ecuación de segundo grado sin conocer la fórmula que utilizamos hoy en día, ya que por aquel entonces, la forma de mirar las matemáticas era diferente. Hay que mostrar las matemáticas tal y como fueron, tal y como deberían de ser (aunque no se haga). La resolución de la ecuación de segundo grado, por ejemplo, durante todos los años académicos, se caracteriza por ser resuelta mediante una fórmula que te dan de repente, sin más historia. Las matemáticas no surgen así; vienen por el interés de resolver casos prácticos como el que vemos a continuación:

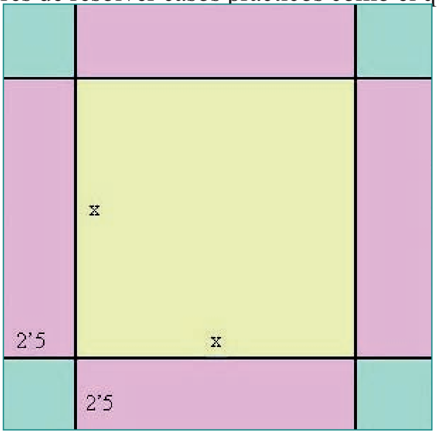


Figura 9. Cuadrado para el cálculo de la ecuación de 2º grado.

El problema de encontrar el lado del cuadrado amarillo de la figura 9 equivale a resolver la ecuación $x^2 + 10x = 39$.

El primer término de la ecuación es x^2; es decir, el área del cuadrado amarillo. La suma de los cuatro rectángulos de color rosa es $4 \cdot 2{,}5 \cdot x$, o bien, $10x$, que es el segundo término de la ecuación. El área de los cuadrados verdes es: $4 \cdot (2{,}5 \cdot 2{,}5) = 25$.

De esta manera, el área del cuadrado completo es $(x + 5)^2$. Este debe ser igual que la suma de las nueve partes que lo forman; es decir:

$$(x + 5)^2 = x^2 + 10\,x + 25 = 39 + 25 = 64$$

Extrayendo la raíz cuadrada en ambos miembros, tenemos que:

$$\sqrt{(x+5)^2} = \sqrt{64}$$
$$x + 5 = 8$$
$$\boldsymbol{x = 3}$$

Si esta actividad la realizamos con cartulinas, los alumnos verían más claro qué es lo que se quiere obtener realmente y qué se hace para ello. Existen variantes del ejercicio anterior, como por ejemplo la figura 10 para calcular la ecuación: $x^2 + 6x = 7$.

$$(x+3)^2 = x^2 + 6x + 9 = 7 + 9 = 16$$
$$\sqrt{(x+3)^2} = \sqrt{16}$$
$$x + 3 = 4$$
$$\boldsymbol{x = 1}$$

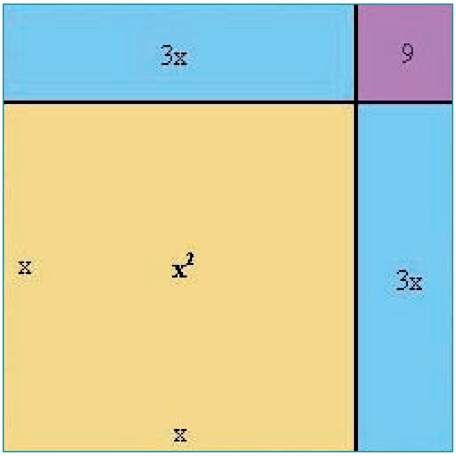


Figura 10. Cuadrado para el cálculo de la ecuación de 2º grado.

Matemáticas en la Mezquita de Córdoba

La arquitectura islámica es, además de bella, perfecta matemáticamente. Realizar una excursión a la Mezquita, y alrededores, para conocer su historia y a su vez tomar medidas y fotografías de la Mezquita, sin lugar a dudas, una de las mejores oportunidades para que los alumnos sean competentes y autónomos.

Con la ayuda de algún guion previo que prepare el profesorado, los alumnos podrán ir tomando nota, en el propio guion de trabajo, de los aspectos más importantes que pueden ser estudiados en el aula más tarde. Por ejemplo, como sigue:

Visita a la Mezquita de Córdoba ~ Guion de trabajo

1. Toma fotos de los arcos que encuentres durante la visita.
2. Mide la distancia entre una columna y otra.
   _________________metros
3. Infórmate de la altura que tienen los arcos y de su radio
   _________________metros de alto
   Radio _________
4. Toma varias fotos de los distintos azulejos que encuentres en la Mezquita.
5. Toma una foto del alminar de la Mezquita.
6. […]

Por ejemplo, con ese guion, y una vez de vuelta al aula, los alumnos/as podrán investigar qué tipo de arco, de todos los posibles, es el que posee la Mezquita. Existe en Internet una web, creada por J.M. Arranz, R. Losada, J.A. Mora y M. Sada para alumnos de E.S.O, en la que se disponen los distintos arcos posibles con geometría dinámica hecha con GeoGebra, en la dirección: http://jmora7.com/Arcos/index.htm. O incluso, con ayuda del profesor o profesora, adjuntar sus fotos a los recursos de GeoGebra, como se muestra en la figura 11.

Por otro lado, la arquitectura islámica se caracteriza principalmente por sus formas geométricas perfectas y sus simetrías. Eso mismo también ocurre con numerosos azulejos. Los alumnos y alumnas, que tomaron fotos de algunos azulejos, podrían hacer un estudio de las posibles simetrías, de los giros o traslaciones que podrían ocurrir en el mismo, etc. El grupo de profesores que nombramos con anterioridad, crearon una web donde es posible ver, mediante una herramienta informática llamada GeoGebra, el comportamiento de ciertos mosaicos y celosías. La dirección es la siguiente: http://jmora7.com/Mosaicos/index11.htm

En otro apartado de la misma web, relatan cómo fue su experiencia, en una aula de 2º de la E.S.O, con la construcción de mosaicos, adjuntando fotografías de las actividades que los estudiantes realizaron. Una actividad bastante interesante:

http://jmora7.com/Onda/OndaGG/index1.htm

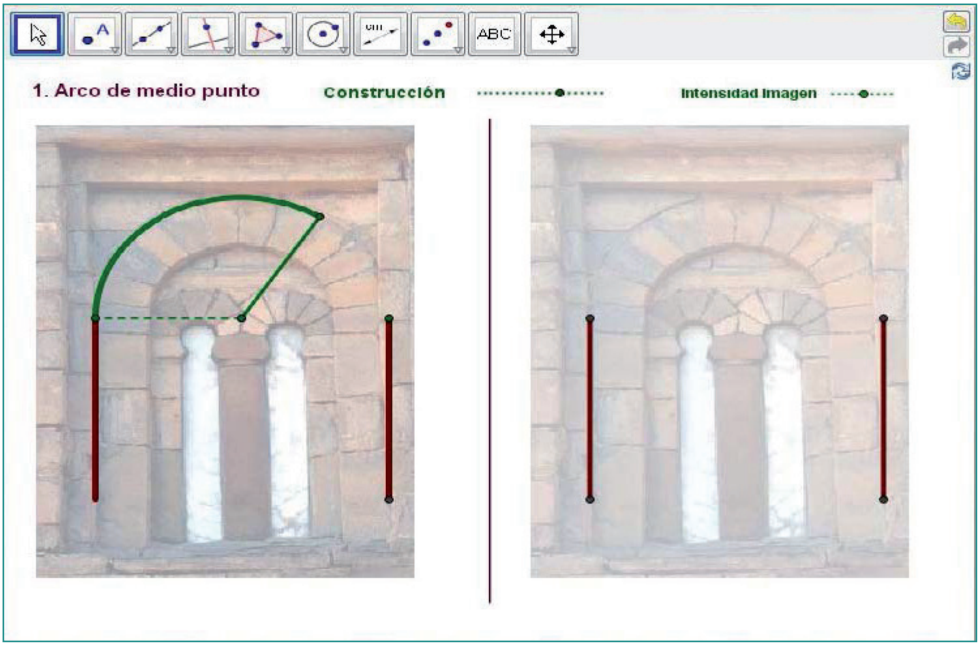


Figura 11. Estudio de los tipos de arcos con GeoGebra.

Otros recursos sobre geometría islámica, en la Alhambra de Granada:

Video - Crónicas, Alhambra el manuscrito descifrado –

http://www.rtve.es/alacarta/videos/cronicas/cronicas-alhambra-manuscrito-descifrado/1669272/

Se trata de un video que relata la historia de la Alhambra, su arquitectura, sus matemáticas incluso. A pesar de ser un video muy completo y que recomendamos ver a todos, vamos a centrarnos en el aspecto matemático que podemos aprovechar para alguna actividad del aula, parecida a la anterior con los mosaicos. O incluso, si se realiza una excursión a la Alhambra de Granada, ver eso mismo que dice el video allí y plantear actividades parecidas a las que hemos hecho anteriormente en la Mezquita de Córdoba.

REFLEXIÓN FINAL

Queda, de esta manera, expuesta de una forma muy general qué y cómo se puede explicar una pequeña parte de la historia de las matemáticas en un aula de la E.S.O; queremos decir con esto que, la planificación tiene que ser algo más elaborado que todo esto. Aquí sólo se han dado recomendaciones e ideas.

Para algunos es casi increíble que todas estas culturas antiguas hicieran estos descubrimientos siglos antes que los matemáticos europeos. Y dice mucho acerca de la actitud occidental hacia las culturas no occidentales el hecho de que casi siempre consideremos sus descubrimientos como nuestros.

Lo que está claro es que a occidente le ha costado valorar en su justo término los grandes descubrimientos realizados por matemáticos no occidentales. A medida que los contactos de occidente con oriente aumentaban durante los siglos XVIII y XIX, asistimos al desprecio por las culturas que se estaban colonizando. Se dio por hecho que los nativos no podían ofrecer a occidente nada que tuviera valor intelectual; como hemos visto, eso no ha sido así.

Se espera que al realizar estas actividades los alumnos tengan una visión diferente de dónde y cómo se han desarrollado las matemáticas, de tal forma que empiecen a adquirir una cultura matemática básica no tradicional.

REFERENCIAS

Arrieta, J. J. (1998): *Matemáticas no eurocéntricas para una educación_intercultural*, *SUMA,* 28, 71-80.

Blog I.E.S Laguna de Tollón (2011): *La matemática en Mesopotamia: Las operaciones fundamentales*, Articulo.

Collete, J. P. (1985): *Historia de las matemáticas I*. Madrid: Siglo XXI.

Educarex – Rincón didáctico 'Matemáticas': *Historia de las matemáticas: La sabiduría de oriente,* Video.

Fernández, E.M. (2010). *Babilonia y las Matemáticas en el aula*. Revista digital de Ciencias. Consultado el 10/02/2014 en http://www.ciencias.ies-bezmiliana.org/revista/images/stories/babiloniamatematicasaula.pdf

Gheverghese J, G. (1991): *La cresta del pavo real*, Madrid, Pirámide.

Infante, F. y Puig, L. (2013). Una comparación entre las demostraciones de Pedro Nunes y Al-khwārizmī de los algoritmos de las formas canónicas de la ecuación de segundo grado. *Epsilon,* 85, 37-54.

Martínez-Tébar, J. (2013): *Las matemáticas de al-Ándalus para una clase de ESO*, Presentación.

Maza, C. (2000): *Las matemáticas de la antigüedad y su contexto histórico.* Sevilla: Secretariado de Publicaciones.

Épsilon - Revista de Educación Matemática *2014, Vol. 31(1), nº 86, 109-111*

Conversaciones durante la comida, o lo que la escuela puede despertar

Lucía Flores
Pablo Flores

Resumen: *A partir de una conversación entre una adolescente y sus padres, durante la comida, se dio un intercambio de ideas matemáticas.*
Palabras Clave: *Matemática informal, conversaciones matemáticas.*

Conversations during the meal, or what the school can awaken

Abstract: *From a conversation about between a girl and her parents during meal resulted in an exchange of mathematical ideas.*
Keywords: *Informal Mathematics, math conversations.*

Lucía es una chica de 14 años, está en 3º de ESO. A través de las conversaciones en las comidas caseras, con su madre (MA), y su padre (Pa), se reflejan algunas de sus aficiones.

− Lucía: ¡Que rollo ese de la métrica! Después de contar las sílabas, dicen que no, que tiene menos, ya que hay que eliminar las sinalefas, considerar las diéresis, ….

− MA: ¡Bien bonita que es!

− Lu: Sí, ¿verdad? Como tiene que ser endecasílabo, si tiene 13 sílabas te inventas algo para ajustarlo. ¡Vaya cara!

− MA: Pero tiene su sentido. Lo importante es el ritmo del verso…

− Lu: ¡Que no! Si tiene 13, tiene 13.

− MA: Pero…

– Lu: Lo que estamos viendo en Matemáticas sí que es divertido, el cuadrado de la suma y todo eso

– MA: ¿Y eso es divertido?

– Pa: Bueno, me recuerda el chiste del que describía el amoníaco diciendo que olía bien, y cuando le llevaron el frasco para que lo comprobara, dijo "pues a mi me gusta…".

Etc., etc., etc.

Al cabo del tiempo, un jueves coincidimos en casa Lu y Pa, comiendo los dos solos. Justo ese día han tratado algo en clase de matemáticas que le inquieta. Este acontecimiento me ha parecido tan interesante que me ha hecho redactar el dialogo de la manera más fiel posible.

Uno de los jueves de octubre del 2013. Lucía se sienta a comer y suelta, con cierto enfado:

– Lu: ¿No me digas que "dosconnueveperiódico" es igual a 3?

– Pa: Je, je, je, ¿En qué se diferencian?

– Lu: Uno es 2,9999 y el otro 3

– Pa: ¿Cuál es mayor y cuánto?

– Lu: Yo que sé.. ¿son iguales?

– Pa: Estáis dando la relación entre fracciones y decimales ¿Cómo lo has obtenido?

– Lu: Si hacíamos n= 2,9999., con lo que 10n=29,9999..; por tanto 9n=27 y n es 3

– Pa: ¿Entonces?

– Lu: ¡No puede ser!

– Pa: Te suena a un endecasílabo..

– Lu: Si, a un endecasílabo alejandrino. ¡¡Que no!!

– Me cuenta que ha sido un tema de clase, que le ha dicho a la profesora que eso no era posible, que lo ha desconcertado y que la profesora le ha dicho que me lo pregunte.

– Pa: ¿Cuántos compañeros están tan afectados como tú por que 2,9999.. sea 3?

– Lu: Alguno más, a los otros no les ha importado. Entonces ¿2,8888.. es 2.9?

– Pa: Réstalos.

– Lu: Sale 0,11… No es lo mismo.

– Pa: Es que hay infinitas cifras periódicas, y el infinito es así de complicado.

– Lu: Si, eso de que haya la misma cantidad de números naturales que de números pares .. O que al dividir el área del círculo entre el cuadrado del radio salga un número con infinitas cifras .

– Pa: Y muchas paradojas más, como el hotel infinito

Etc., etc., etc.

Por la tarde de ese jueves tuvo que ir a música, donde comparte con otros compañeros del mismo curso, pero también de bachillerato. Por la noche seguía con el tema. Lo había hablado con sus amigos, sólo uno o dos de ellos se habían sentido tan conmovidos como ella por este hecho. Otros no sólo no se habían sorprendido, sino que apoyaban la "falta de seriedad de las matemáticas", en que habían visto una demostración, empleando fórmulas, de que uno es igual a dos. Lucía les pidió la demostración, diciéndoles, "pero eso no es verdad, 1 no es igual a 2. Una cosa no es igual a dos cosas. Tráeme esta demostración".

El domingo siguiente volvió a la carga. Al llegar de la calle comenta:

Lucía: Hoy he encontrado una cosa chulísima. 1/3 es 33,3333.. %. Luego 3/3 es 99,99..% y es el 100 %. Ya me "ralla menos". Estoy más convencida de que "dos con nueve periódico" es 3.

A partir de ahí ya tenemos un tema del que hablar, el infinito (y más allá). Veré qué partido le puedo sacar. A los pocos días coincidimos con la profesora de matemáticas de Lucía. Le agradecí haber sacado el tema, y, sobre todo, haber despertado esta curiosidad en ella. Quedé en escribir este dialogo y enviárselo. Con este envío a Épsilon quiero hacerlo extensivo a otros padres y profesores de matemáticas. Ojalá tengan la oportunidad de tener una conversación tan interesante como esta, en cualquier tema intelectual.

Épsilon - Revista de Educación Matemática 2014, Vol. 31(1), nº 86, 113-128

El álgebra elemental en las Escuelas Normales Superiores a finales del siglo XIX

Vicente Meavilla Seguí
meavilla@unizar.es
Departamento de Matemáticas, Universidad de Zaragoza
Antonio M. Oller-Marcén
oller@unizar.es
Centro Universitario de la Defensa, Academia General Militar

Resumen: *Los contenidos de álgebra elemental estuvieron presentes en los programas de enseñanza de las Escuelas Normales Superiores y en los programas para las oposiciones a las Escuelas del Grado Superior durante la segunda mitad del siglo XIX. En este artículo analizaremos un manual consagrado a la enseñanza del álgebra elemental, el Tratado de Álgebra elemental para las Escuelas Normales (1898), escrito por Enrique Molina Borrego. Este análisis nos servirá para tratar de conocer el nivel de los conocimientos algebraicos exigidos a los maestros de primera enseñanza superior en dicha época.*
Palabras clave: *Álgebra elemental, Formación del profesorado, Escuelas Normales Superiores, Siglo XIX, Enrique Molina Borrego.*

The elementary algebra in Higher Normal Schools in the late nineteenth century

Abstract: *Elementary algebraic contents were present in the syllabus of the Escuelas Normales Superiores and of the civil service examinations to become an elementary or middle school teacher during the second half of the XIX century. In this paper we analyze a textbook devoted to the teaching of elementary Algebra, the Tratado de Álgebra elemental para las Escuelas Normales (1898), written by Enrique Molina Borrego. This analysis will be useful in order to known the level of the algebraic knowledge of teachers by that time.*
Keywords: *Elementary algebra, Teacher training, Escuelas Normales Superiores, XIX Century, Enrique Molina Borrego.*

1. INTRODUCCIÓN

Actualmente el currículo de Educación Primaria en España se organiza en torno a cuatro bloques dedicados respectivamente a la Aritmética, a la medida de magnitudes, a la Geometría y al tratamiento del azar. En correspondencia con estos bloques de contenidos, los planes de estudio de los Grados de Maestro de Educación Primaria[1] no dedican tiempo a la formación algebraica de los futuros maestros. Lo mismo sucede en el caso de la Educación Infantil.

Sin embargo, durante la última parte del siglo XIX la situación era diferente. Ya desde 1847, año en que se dio a las Escuelas Normales la consideración de Escuelas profesionales (Melcón, 1992, p. 108), encontramos referencia al Álgebra en sus planes de estudios.

En este trabajo pretendemos analizar la formación algebraica de los maestros de primera enseñanza superior durante esa época. Para ello, puesto que "*los libros de texto determinan la enseñanza en la práctica más que los decretos de los diferentes gobiernos*" (Schubring, 1987), nos centraremos en analizar en detalle un manual que consideramos paradigmático dada la formación y los puestos académicos ocupados por su autor: El *Tratado de Álgebra elemental para las Escuelas Normales* de Enrique Molina Borrego.

Fruto de dicho análisis, realizado siguiendo ideas de Picado, Rico y Gómez (2013), seremos capaces de determinar los conocimientos algebraicos que se esperaban de los maestros en esa época.

2. EL ÁLGEBRA ELEMENTAL EN LOS PROGRAMAS DE ENSEÑANZA Y LAS OPOSICIONES DE LA SEGUNDA MITAD DEL SIGLO XIX.

Comenzaremos el trabajo con la revisión de algunos textos legales de la época, que también muestra la evolución en el tratamiento de dicha materia dentro de los planes de estudios:

- En el Real Decreto de 30 de marzo de 1849 se incluye unas "Nociones de Álgebra" entre las materias que se han de dar durante los tres años que duren los estudios. Más en concreto, tanto la Circular del 4 de octubre de 1849, como la del 18 de septiembre de 1850 determinan que dicha materia debe impartirse en el segundo curso.
- En la Real Orden del 24 de septiembre de 1853 estas "Nociones de álgebra" se trasladan al tercer curso del plan de estudios.
- La Ley de Instrucción Pública de 9 de septiembre de 1857 (Ley Moyano) distinguía entre los títulos de Maestro de primera enseñanza elemental y superior (consistiendo el segundo en una ampliación del primero). El Álgebra se reservaba para los Maestros de enseñanza superior. De hecho, el Real Decreto de 20 de septiembre de 1858 establecía entre las asignaturas que debían superarse para optar al título de Maestro de primera enseñanza superior una titulada "Complemento de Aritmética y nociones de Álgebra".

1. Los autores han consultado los planes de estudios de las universidades de Zaragoza, Valladolid, Granada y Autónoma de Barcelona. Dado el actual proceso de convergencia europea no cabe esperar diferencias en el resto de universidades españolas.

En correspondencia con su presencia en los planes de estudios, el Álgebra también hacía aparición en los programas para las oposiciones a las Escuelas del Grado Superior. Así, en la Real Orden de 12 de noviembre de 1894, que establecía dichos programas, se proponían los diecinueve temas siguientes:

- 62. ¿Cuál es el objeto del Álgebra y en qué se diferencia de la Aritmética? Signos del lenguaje algebraico: su utilidad. Expresión algebraica monomio y polinomio. Ejemplos.
- 63. Coeficiente y exponente. Qué son términos semejantes y cómo se simplifican. Fórmula algebraica. Valor numérico de una expresión literal. Ejemplos.
- 64. En qué consisten las operaciones algebraicas. Cómo se suman las cantidades literales. Cómo se hace la sustracción algebraica. Ejemplos.
- 65. Origen de las cantidades negativas. Modo de interpretar semejantes expresiones. Convertir la adición en sustracción y viceversa. Ejemplos.
- 66. Objeto de la multiplicación algebraica. Regla para el signo del producto. Cómo se multiplican dos potencias de una misma cantidad. Multiplicar un monomio por otro. Ejemplos.
- 67. Cómo se multiplica un polinomio por un monomio. Separar el factor que sea común a varios términos de un polinomio. Cómo se multiplica un polinomio por otro.
- 68. Cuál es el cuadrado de un binomio. Ídem del cubo. Cuál es el producto de la suma de dos números por su diferencia. Ejemplos.
- 69. Cuál es el objeto de la división algebraica. Regla para el signo del cociente. Cómo se dividen dos potencias de una misma cantidad. Dividir un monomio por otro. Ejemplos.
- 70. Cómo se divide un polinomio por un monomio. Ordenar los términos de un polinomio. Dividir un polinomio por otro. Correspondencia entre la división algebraica y la aritmética. Ejemplos.
- 71. Qué se entiende por fracción literal. El valor de una fracción literal no altera si se multiplican o dividen sus dos términos por una misma cantidad literal. Demostración y ejemplos.
- 72. Simplificación de una fracción literal. Cómo se convierten varias fracciones literales a un denominador común. Sumar cantidades fraccionarias.
- 73. Sustracción de cantidades literales fraccionarias. Casos que pueden ocurrir y modo de resolverlos.
- 74. Multiplicación de cantidades literales fraccionarias. Casos que pueden ocurrir y manera de resolverlos.
- 75. División de cantidades literales fraccionarias. Casos que pueden ocurrir y modo de resolverlos.
- 76. Qué se entiende por ecuación. Ecuaciones de primer grado. Trasposición de términos en una ecuación. Cómo se quitan los denominadores. Ejemplos.
- 77. Cómo se resuelve una ecuación de primer grado con una incógnita. Un sistema de ecuaciones con igual número de incógnitas. Métodos de eliminación. Ejemplos.

- 78. Cómo se forma el cuadrado de un monomio. Ídem de un binomio. Extraer la raíz cuadrada de un monomio. La raíz cuadrada de un producto es igual al producto de las raíces cuadradas de sus factores. Ejemplos.
- 79. Progresión. Progresión aritmética y geométrica. Término general de una progresión aritmética. Suma de los términos de una progresión aritmética. Ejemplos.
- 80. Progresión. Progresión geométrica. Término general de una progresión geométrica. Suma de los términos de una progresión geométrica. Ejemplos.

3. EL TRATADO DE ÁLGEBRA ELEMENTAL PARA LAS ESCUELAS NORMALES

El *Tratado de Álgebra elemental para las Escuelas Normales* (Molina, 1898a) fue escrito por Enrique Molina Borrego. De este autor sólo sabemos que fue profesor y secretario de la Escuela Normal Superior de maestros de Córdoba y catedrático de la asignatura de Álgebra en ese centro de enseñanza, tal como se detalla en la portada de su obra. Además de su «Tratado de Álgebra», Molina también escribió un *Tratado de Aritmética para las Escuelas Normales* (Molina, 1898b).

Dada la formación académica del autor y su título de catedrático de Álgebra, estimamos que el antedicho manual puede ser una herramienta válida para establecer el nivel de conocimientos de carácter algebraico exigido a los maestros de primera enseñanza superior.

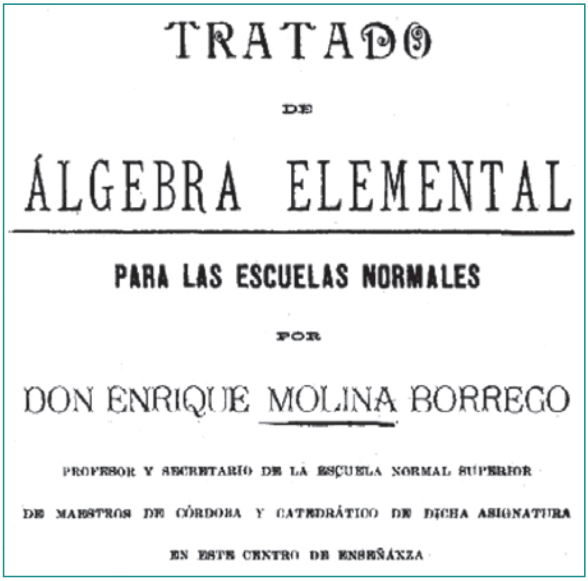

TRATADO
DE
ÁLGEBRA ELEMENTAL
PARA LAS ESCUELAS NORMALES
POR
DON ENRIQUE MOLINA BORREGO
PROFESOR Y SECRETARIO DE LA ESCUELA NORMAL SUPERIOR
DE MAESTROS DE CÓRDOBA Y CATEDRÁTICO DE DICHA ASIGNATURA
EN ESTE CENTRO DE ENSEÑANZA

Figura 1. Detalle de la portada del Tratado de Álgebra elemental para las Escuelas Normales (1898)

3.1. La estructura del libro

El *Tratado de Álgebra elemental para las Escuelas Normales* ocupa ciento cinco páginas, no contiene prólogo y sus contenidos se organizan según las treinta y cinco secciones siguientes, tal como se detalla en el índice de la obra:

- 1. Nociones preliminares.
- 2. Adición de las cantidades algebraicas
- 3. Sustracción de las cantidades algebraicas
- 4. Multiplicación de las cantidades algebraicas.
- 5. Consecuencias de la multiplicación de polinomios.
- 6. División de las cantidades algebraicas.
- 7. Consecuencias de la división de polinomios.
- 8. De las fracciones algebraicas.
- 9. Cálculo de las cantidades con exponente negativo.
- 10. Interpretación de las expresiones a/0 y 0/0.
- 11. Ecuaciones de primer grado.
- 12. Resolución de las ecuaciones de primer grado con una incógnita.
- 13. Discusión de los valores de la incógnita en una ecuación de primer grado.
- 14. Problemas de primer grado con una incógnita
- 14. Eliminación de incógnitas.
- 16. Resolución de un número cualquiera de ecuaciones de primer grado con igual número de incógnitas.
- 17. Discusión de los valores de las incógnitas de un sistema de dos ecuaciones de primer grado.
- 18. Problemas de primer grado con dos o más incógnitas.
- 19. Resolución de un cierto número de ecuaciones de primer grado con mayor número de incógnitas.
- 20. Resolución de varias ecuaciones de primer grado con menor número de incógnitas.
- 21. Potencias de los monomios.
- 22. Raíces de los monomios.
- 23. Coordinaciones.
- 24. Permutaciones.
- 24. Combinaciones.
- 26. Binomio de Newton.
- 27. Potencias de los polinomios.
- 28. Raíz cuadrada de los polinomios.
- 29. Raíz cúbica de los polinomios.
- 30. Cálculo de los radicales algebraicos.
- 31. Cálculo de las cantidades que tienen exponentes fraccionarios.
- 32. Cálculo de las expresiones imaginarias de segundo grado.
- 33. Ecuaciones de segundo grado.
- 34. Discusión de la ecuación general de segundo grado con una incógnita.
- 35. Problemas de segundo grado con una incógnita.

3.2. El contenido del manual

Picado, Rico y Gómez (2013) consideran que los contenidos de un libro de texto se pueden caracterizar desde tres categorías: generalidades, contenido matemático y didáctica.

Estos autores establecen diversas unidades de análisis para cada una de las antedichas categorías. Así, los aspectos históricos, los conocimientos previos, etc., sirven como unidades de análisis para la categoría «generalidades»; los conceptos, procedimientos, representaciones y contextos pueden organizar la categoría «contenido matemático»; por último, la categoría «didáctica» se puede analizar desde los objetivos, tareas, materiales, etc.

En lo que sigue utilizaremos una adaptación de las técnicas anteriores para la caracterización de los contenidos del «Tratado de Álgebra elemental».

3.2.1. El contenido matemático

Para analizar el contenido matemático de la obra objeto de estudio nos centraremos en los aspectos siguientes: Notaciones, conceptos, procedimientos, resultados y representaciones.

Notaciones

Un aspecto muy a tener en cuenta en las Matemáticas en general y en el Álgebra en particular es el uso de distintas notaciones y convenciones por parte del autor. Vamos a señalar las principales peculiaridades de este texto.

- A la hora de construir expresiones algebraicas, el autor utiliza las primeras letras minúsculas del alfabeto para representar los datos o coeficientes y las últimas para designar las incógnitas. Esta práctica es la más habitual aún hoy en día. Por otro lado, los signos para las operaciones o la igualdad que se utilizan son los mismos que los de la Aritmética salvo los dos símbolos de ambigüedad: y .
- En lo que concierne a los paréntesis, Molina Borrego también utiliza barras verticales[2], especialmente en aquellos casos en que se deben agrupar términos semejantes (véase la figura siguiente).

$$(x+a)(x+b)(x+c)(x+d)=x^4 \begin{array}{r|} +a \\ +b \\ +c \\ +d \end{array} x^3 \begin{array}{r|} +ab \\ +ac \\ +ad \\ +bc \\ +bd \\ +cd \end{array} x^2 \begin{array}{r|} +abc \\ +abd \\ +acd \\ +bcd \end{array} x + abcd$$

Figura 2. Desarrollo del producto de cuatro binomios (p.67)

2. Un simbolismo similar ya fue utilizado por René Descartes en su Geometría (1637).

- En la sección 32 (*Cálculo de las expresiones imaginarias de segundo grado*) no se utiliza un símbolo específico para la unidad imaginaria[3].

$$(a+b\sqrt{-1})+(c+d\sqrt{-1})=(a+c)+(b+d)\sqrt{-1}$$

Figura 3. Adición de números complejos (p. 90)

- En el estudio de las combinaciones y permutaciones ordinarias no se utilizan los *números combinatorios*[4] o *coeficientes binomiales* ni el símbolo *factorial*[5].

Conceptos

A lo largo del manual, cuando se introducen conceptos, se utiliza un lenguaje verbal claro y ajustado al público al que va dirigido: los futuros maestros de primera enseñanza superior. En general, las definiciones se acompañan de ejemplos aclaratorios.

Para corroborar esta afirmación, sirvan los ejemplos siguientes:

- "Se llama expresión algebraica al conjunto de letras, o números y letras ligadas por los signos de las operaciones ordinarias, como por ejemplo, $a^2 b$ es una expresión algebraica, y la cantidad $2ab^2 + 12a^2b - ab^3$, es otra expresión algebraica" (p. 6).
- "Multiplicar una cantidad algebraica por otra es hallar una tercera cantidad que sea respecto de una de ellas en valor y signo lo que la otra es de la unidad positiva. La primera se llama multiplicando, la segunda multiplicador y la tercera producto" (p. 11).
- "A la reunión de dos cantidades unidas por el signo igual se da el nombre de igualdad. La cantidad colocada a la izquierda del signo recibe el nombre de primer miembro, y la que está a la derecha segundo miembro. Se llama identidad a la reunión de dos cantidades iguales unidas por el signo igual, y que sólo se diferencian en la forma, como $6 \times 2 \times 3 = 4 \times 9$. Se da el nombre de ecuación a la igualdad que contiene una o varias incógnitas, como $24x + \frac{x}{6} - 2 = 36$" (p. 29).

- "Se llaman combinaciones o productos diferentes a todos los diferentes grupos que se pueden formar con un número determinado de objetos tomándolos 2 a 2, 3 a 3, 4 a 4. . . n a n, de modo tal que un mismo objeto sólo entre una vez en cada grupo y que dos cualesquiera de ellos difieran, a lo menos, en uno de los objetos de que están formados" (p. 63).

3. El símbolo *i* para la unidad imaginaria fue introducido por Leonhard Euler en su *De formulis differentialibus angularibus maxime irrationalibus, quas tamen per logarithmos et arcus circulares integrare licet* (1794).

4. El símbolo $\binom{m}{n}$ para el número de combinaciones ordinarias de *m* elementos tomados de *n* en *n* fue introducido en 1827 por Andreas von Ettingshausen (Meavilla, 2012).

5. El símbolo '!' para representar el factorial fue introducido por Christian Kramp en 1808 (Meavilla, 2012).

- "Llamamos módulo de una expresión imaginaria de la forma $a + b\sqrt{-1}$, a la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de las cantidades reales a y b; por tanto el módulo de la expresión anterior será $\sqrt{a^2 + b^2}$" (p. 91).

Procedimientos

Dado el carácter eminentemente práctico de la obra, los contenidos algebraicos procedimentales son más numerosos que los conceptuales. Los procedimientos que se describen y ejemplifican a lo largo del texto se refieren principalmente a: operaciones con expresiones algebraicas, potencias de exponente entero y fraccionario, resolución y discusión de ecuaciones y sistemas de ecuaciones, operaciones con radicales y operaciones con números complejos.

Las demostraciones que acompañan a algunos de ellos tienen el rigor que puede exigirse en un texto dedicado a la formación de maestros y dota al «Tratado de Álgebra» de un nivel superior al de algunos textos contemporáneos en los que las pruebas se sustituyen por comprobaciones.

A modo de ejemplo, presentamos la demostración del contenido procedimental concerniente a la resolución de una ecuación de segundo grado incompleta (pp. 93 – 94).

Sea ahora la ecuación incompleta

$$ax^2 - bx = 0.$$

Dividiendo ambos miembros por a, tendremos

$$x^2 \frac{b}{a} x = 0$$

y separando el factor común x, resulta

$$x\left(x - \frac{b}{a}\right) = 0.$$

Para que este producto sea 0 es necesario que por lo menos sea 0 uno de los factores; luego $x = 0$ es una solución.

Si convenimos que el otro factor $x - \frac{b}{a}$ sea igual á 0, tendremos la ecuación

$$x - \frac{b}{a} = 0$$

Pasando el término conocido al segundo miembro, resulta que

$$x = \frac{b}{a}$$

De lo demostrado anteriormente, resulta que *la incógnita de una ecuación de segundo grado de la forma $ax^2 - bx = 0$, tiene dos valores: uno de ellos es 0 y el otro es igual al coeficiente del segundo término con signo contrario partido por el coeficiente del primer término.*

Figura 4. Procedimiento para la resolución de una ecuación de 2º grado incompleta

Resultados

Además de presentar conceptos y de describir procedimientos, la mayor parte del texto se dedica a la presentación de propiedades y de diversos resultados (ya sean proposiciones, teoremas o corolarios).

113. *El valor de un radical no varía multiplicando su índice por cualquier número entero positivo, si además la cantidad subradical se eleva á una potencia de igual grado que el que expresa referido número entero.*

En efecto, elevando ambos miembros de la identidad

$$\left(\sqrt[m]{a}\right)^m = a$$

á la potencia n, tendremos

$$\left(\sqrt[m]{a}\right)^{mn} = a^n$$

Pero esta igualdad quiere decir que

$$\sqrt[m]{a}$$

es la raiz del grado mn de a^n, y por lo tanto

$$\sqrt[mn]{a^n} = \sqrt[m]{a}$$

La igualdad anterior nos demuestra el principio enunciado, y también que una cantidad radical no se altera dividiendo el índice y exponente de la cantidad subradical por un factor que les sea común.

Figura 5. Propiedad de los radicales

En la Figura 5 se presenta uno de los múltiples ejemplos que pueden encontrarse a lo largo del texto. Se observa que el autor no se conforma con enunciar el resultado, sino que presenta una demostración detallada del mismo en la que se presta mucha atención a la hora de explicar y justificar cada uno de los pasos del razonamiento.

Además del mencionado rigor en la presentación y deducción de los resultados, el autor presenta en ocasiones apuntes de carácter histórico que contribuyen a ampliar la formación del lector. Por ejemplo, en la página 66, al inicio de la sección dedicada a la fórmula del Binomio de Newton, leemos la siguiente información de carácter histórico:

> "*Newton halló la fórmula general para elevar directamente un binomio a una potencia cualquiera sin pasar por las potencias inferiores, y de dicha fórmula se deduce fácilmente el medio de formar la potencia de cualquier grado de un polinomio dado. La demostración de la fórmula de Newton se funda en la teoría de las combinaciones.*"

Representaciones

Por representación (López Esteban, 2011) entendemos cualquier modo de hacer presente un concepto o procedimiento mediante distintos tipos de símbolos, gráficos o signos. Existe una gran diversidad de modos de representar conceptos y procedimientos matemáticos: mediante signos o símbolos especiales, mediante esquemas, gráficos o figuras, principalmente.

En el texto objeto de estudio los sistemas de representación más utilizados son el verbal y el que hace uso del simbolismo algebraico (ver Figura 6).

$$\sqrt[n]{abc}=\sqrt[n]{a}\,\sqrt[n]{b}\,\sqrt[n]{c}$$

Figura 6. Representación simbólica del radical de un producto (p. 59)

Además de estos sistemas de representación hemos localizado otros tipos de representaciones utilizadas de manera esporádica. En concreto:

- Representación simbólico-esquemática:
  Un ejemplo de este tipo de representación se observa, por ejemplo, en el tema dedicado al producto de polinomios (Figura 7); donde se esquematiza un proceso en varios pasos.

$$\begin{array}{rl}
\textbf{Multiplicando.} & 4a^4-5a^3b+7a^2b^2 \\
\textbf{Multiplicador.} & 2a^3-6a^2b+4ab^2 \\
\hline
\textbf{Productos parciales.} & \left\{\begin{array}{l} 8a^7-10a^6b+14a^5b^2 \\ \qquad -24a^6b+30a^5b^2-42a^4b^3 \\ \qquad\qquad +16a^5b^2-20a^4b^3+28a^3b^4 \end{array}\right. \\
\hline
\textbf{Producto total.} & 8a^7-34a^6b+60a^5b^2-62a^4b^3+28a^3b^4
\end{array}$$

Figura 7. Representación simbólico-esquemática del productode polinomios (p. 14)

- Representación gráfica:
  Este sistema de representación es utilizado especialmente en los problemas de móviles. Por ejemplo, en la página 34 encontramos el siguiente problema, que ya había sido utilizado por otros autores contemporáneos (Moya, 1885; Salinas y Benítez, 1892):

  "Dos móviles A' y B' parten en un mismo instante de los puntos A y B, que distan entre sí d kilómetros, y recorren en una misma dirección [y sentido] la recta indefinida MN; el primero con una velocidad v kilómetros por hora y el otro de v'. ¿A qué distancia del punto B se encontrarán, suponiendo que caminan con movimiento uniforme?"

En la Figura 8 se observa el sistema de representación utilizado por el autor para codificar la información anterior.

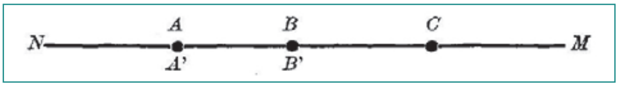


Figura 8. Representación gráfica asociada a un problema de móviles (p. 34)

- Representación matricial o tabular:
  Esta forma de organizar la información resulta especialmente útil cuando debe enumerarse una serie de cálculos que siguen una pauta común (Figura 9) o bien cuando se desean estudiar de forma conjunta los diversos casos posibles en una situación concreta (Figura 10).

Formemos las coordinaciones binarias posibles con las letras *a, b, c, d.*

Para ello, á la derecha de cada letra, se irán colocando sucesivamente una á una todas las demás letras.

La letra *a* nos dará las siguientes coordinaciones				*ab, ac, ad.*
La letra *b*	»	»	»	*ba, bc, bd.*
La letra *c*	»	»	»	*ca, cb, cd.*
La letra *d*	»	»	»	*da, db, dc.*

Figura 9. Representación matricial de las variaciones ordinarias de cuatro elementos tomados de dos en dos (p. 61)

Ecuaciones.	Raices.	
1.ª $ax^2+bx+c=0.$	$x=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$;	$x=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$
2.ª $ax^2-bx+c=0.$	$x=\frac{b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$;	$x=\frac{b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$
3.ª $ax^2+bx-c=0.$	$x=\frac{-b+\sqrt{b^2+4ac}}{2a}$;	$x=\frac{-b-\sqrt{b^2+4ac}}{2a}$
4.ª $ax^2-bx-c=0.$	$x=\frac{b+\sqrt{b^2+4ac}}{2a}$;	$x=\frac{b-\sqrt{b^2+4ac}}{2a}$

Figura 10. Cuadro resumen de las soluciones de los cuatro tipos de ecuaciones de segundo grado completas (p. 98)

3.2.2. Algunas consideraciones didácticas y metodológicas

El objetivo del autor del *Tratado de Álgebra elemental para las Escuelas Normales* es ofrecer a los alumnos de dichas instituciones educativas un libro de texto en el que se transmitan los conceptos y procedimientos básicos del Álgebra elemental. Para ello, Molina Borrego utiliza un lenguaje verbal claro, y no carente de rigor, que se ajusta al nivel matemático del público al que se dirige el manual.

Los contenidos teóricos y los procedimientos generales que salpican el tratado se complementan con ejemplos concretos que facilitan su comprensión. Además, las proposiciones y teoremas van acompañados de demostraciones que tienen el rigor que puede exigirse a un texto dedicado a la formación de futuros maestros. La presencia de demostraciones dota al «Tratado de Álgebra» de un nivel matemático superior al de otros manuales contemporáneos en los que las pruebas se sustituyen por comprobaciones.

En cuanto a las representaciones gráficas, es notoria la ausencia de aquellas relacionadas con las «expresiones notables» y la resolución diagramática de la ecuación de segundo grado con una incógnita propuesta por al-Khwarizmi (Rosen, 1891). Este tipo de representaciones ya gozaron de cierta popularidad en los manuales medievales y renacentistas (Meavilla y Oller, 2013). La exclusión de este tipo de representaciones disminuye las oportunidades de aprendizaje de aquellos alumnos cuya orientación cognitiva es eminentemente visual en el sentido de Krutetskii (1976).

En general, los programas de enseñanza han prestado poca atención a los aspectos visuales de las Matemáticas (excepción hecha, claro está, de los conocimientos de tipo geométrico) y se han centrado casi exclusivamente en su componente analítica. Este enfoque adolece de las siguientes deficiencias (Meavilla, 1998):

1) No cubre las necesidades de los alumnos visuales o armónico-pictóricos.
2) Propicia el abandono de estudiantes que podrían acceder a las Matemáticas a través de su componente visual.
3) Oculta los aspectos visuales que ayudan a conseguir la comprensión de conceptos y procedimientos.
4) Ignora las representaciones visuales como herramientas potentes para la resolución de problemas no necesariamente geométricos.
5) No contempla las demostraciones visuales como demostraciones matemáticamente legítimas.

El tratamiento teórico-práctico de las ecuaciones y sistemas de ecuaciones es adecuado. Sin embargo, no se estudian las ecuaciones con radicales ni las ecuaciones reducibles a cuadráticas, tópicos que podrían tener cabida en un tratado de Álgebra elemental.

Molina Borrego propone el siguiente método (aplicable a problemas con una sola incógnita y generalizable a cuestiones que involucren más) para "poner en ecuación" un problema de enunciado verbal (p. 35):

> "La resolución de los problemas de Álgebra se verifica generalmente por medio de ecuaciones, y como ya nos es conocido el procedimiento que hemos de seguir para hallar en ellas el valor de la incógnita, daremos a conocer el método para ponerlas en ecuación, ya que no podemos dar una

regla general fija, por la variación constante que hay en las relaciones que existen entre los datos y las incógnitas. En primer término debe estudiarse con gran detenimiento el enunciado del problema, y una vez comprendido representar la incógnita por una de las últimas letras del alfabeto, sometiendo a esta a todas las operaciones que habrían de verificarse con el número que se busca.”

Este método se aplica a la resolución de treinta problemas: diez de primer grado con una incógnita, diez de primer grado con dos o más incógnitas, y diez de segundo grado con una incógnita. En ninguno de ellos se comprueba la solución o soluciones obtenidas. Esta omisión, que elimina la cuarta etapa del modelo teórico de Polya (1989) para la resolución de problemas, no es recomendable en la formación del profesorado de Matemáticas en general y de la de los maestros en particular.

2.º *Determinar la longitud de la base de un triángulo sabiendo que el área del mismo es 320 metros cuadrados y que la altura tiene 24 metros menos que la base.*

En Geometría se demuestra que el área de un triángulo es igual á la mitad del producto de su base por su altura, esto es $Area = \frac{Base \times Altura}{2}$.

Llamando x á la base del triángulo, la altura estará representada por $x-24$, y tendremos

$$\frac{x(x-24)}{2}=320.$$

Quitando denominadores y paréntesis, resulta

$$x^2-24x=640.$$

Pasando todo al primer miembro, será

$$x^2-24x-640=0.$$

Y por último

$$x=12\pm\sqrt{144+640}=12\pm28$$

Separando las dos raices, queda

$$x=12+28=40; \quad x=-16$$

Luego la base tiene 40 metros.

Figura 11. Resolución de un problema de segundo grado con una incógnita (p. 101)

Pese a esta relativamente amplia colección de problemas resueltos, no se proponen actividades para que el alumno las trabaje y evalúe su aprendizaje.

4. IMPLICACIONES PARA LA FORMACIÓN ALGEBRAICA DE LOS MAESTROS SUPERIORES EN EL SIGLO XIX

El análisis detallado que hemos efectuado del texto de Molina Borrego, que consideramos significativo a la hora de aproximarnos al conocimiento algebraico, nos permite tener una idea relativamente clara de la formación algebraica de los maestros superiores de la época.

En la figura 12 se organizan (utilizando terminología actual) los contenidos, tanto conceptuales como procedimentales, del *Tratado de Álgebra elemental para las Escuelas Normales*. En dicho tratado no aparece indicación explícita alguna relativa a la Didáctica del Álgebra, debido seguramente a que en el programa para las oposiciones a las escuelas del grado superior (R. O. de 12 de Noviembre de 1894) no se exigían conocimientos relativos a la enseñanza del Álgebra.

Además, recordando que el lenguaje verbal utilizado en el «Tratado de Álgebra» se ajusta al público al que va dirigido y que las demostraciones que acompañan a algunas proposiciones y teoremas tienen el rigor que puede exigirse en un texto dedicado a la formación de maestros, podemos concluir que, a nuestro entender, el *Tratado de Álgebra elemental para las Escuelas Normales* persigue los objetivos siguientes:

- Ofrecer a los futuros enseñantes los contenidos conceptuales y procedimentales básicos del Álgebra elemental (similares a los que actualmente se ofrecen a los estudiantes de Enseñanza Secundaria Obligatoria).
- Valorar la utilidad del simbolismo algebraico en la transmisión de información.
- Contribuir a que el futuro maestro aprecie y valore el rigor matemático que está presente en algunas demostraciones sencillas concernientes a contenidos básicos de carácter algebraico.
- Valorar la importancia de las ecuaciones y de los sistemas de ecuaciones en la resolución de problemas matemáticos elementales.

Los objetivos anteriores permiten enumerar los que consideramos que eran los conocimientos algebraicos exigidos a los maestros de primera enseñanza superior en la parte final del siglo XIX:

- Conocer los contenidos conceptuales y procedimentales básicos del Álgebra elemental
- Utilizar el simbolismo algebraico para la transmisión de información.
- Conocer demostraciones sencillas relativas a contenidos básicos de carácter algebraico.
- Resolver algebraicamente problemas matemáticos sencillos.

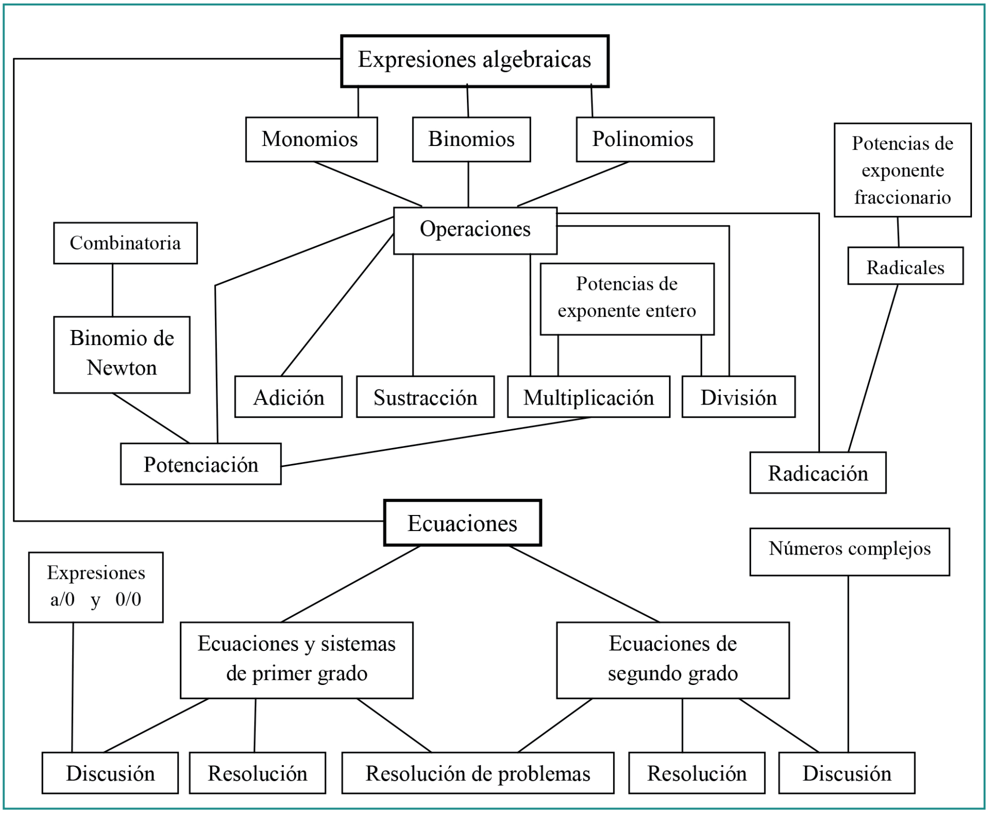


Figura 12. Contenidos del «Tratado de Álgebra elemental»

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Ferrer y Rivero, P. (1891). *Tratado de la legislación de primera enseñanza vigente en España* (sexta edición). Madrid: Librería de la viuda de Hernando y Compañia.

Krutetskii, V. A. (1976). *The psychology of mathematical abilities in schoolchildren.* Chicago: The University Chicago Press.

López, M. C. (2011). *La formación inicial de Maestros en Aritmética y Álgebra a través de los libros de texto*. Tesis doctoral. Facultad de Educación (Dpto. de Teoría e Historia de la Educación). Universidad de Salamanca.

Meavilla, V. (1998). *Algunas contribuciones al estudio de la influencia de las interacciones verbales sobre el proceso de enseñanza-aprendizaje del álgebra elemental.* Tesis doctoral. Dpto. de Didáctica de la Matemática y de las Ciencias Experimentales. Universidad Autónoma de Barcelona.

Meavilla, V. (2012). *Esto no estaba en mi libro de Matemáticas.* Córdoba: Editorial Almuzara.

Meavilla, V. y Oller, A. (2013). Ejemplos de visualización y uso de materiales manipulativos en textos matemáticos antiguos. *NÚMEROS. Revista de Didáctica de las Matemáticas,* 82, 89–100.

Molina Borrego, E. (1898a). *Tratado de Álgebra elemental para las Escuelas Normales*. Córdoba: Imprenta y Librería del Diario de Córdoba.

Molina Borrego, E. (1898b). *Tratado de Aritmética para las Escuelas Normales*. Córdoba: Tipografía «La Región Andaluza»

Melcón, J. (1992). *La formación del profesorado en España (1837-1914)*. Madrid: Ministerio de Educación y Ciencia.

Moya, A. (1885). *Elementos de Matemáticas*. Madrid: Agustín Jubera.

Picado, M., Rico, L. y Gómez, B. (2013). El Sistema Métrico Decimal en un libro de texto de matemáticas para la instrucción primaria en las Islas Canarias en el siglo XIX. *NÚMEROS. Revista de Didáctica de las Matemáticas,* 82, 37-53.

Polya, G. (1989). *Cómo plantear y resolver problemas* (decimoquinta reimpresión). México: Editorial Trillas.

Rosen, F. (1831). *The Algebra of Mohammed ben Musa.* London: The Oriental Translation Fund.

Salinas y Angulo, I. y Benítez y Parodi, M. (1892). *Álgebra*. Toledo: Imprenta, Librería y Encuadernación de Menor Hermanos.

Schubring, G. (1987). On the methodology of analysing historical textbooks: Lacroix as textbook author. *For the Learning of Mathematics*, 7(3), 41-51.

NORMATIVA LEGAL

Real decreto de 30 de Marzo de 1849. Colección legislativa de Instrucción primaria. Madrid: Imprenta Nacional (1856), pp. 88 – 92.

Circular de 4 de Octubre de 1849. Colección legislativa de Instrucción primaria. Madrid: Imprenta Nacional (1856), pp. 244 – 251.

Circular de 18 de septiembre de 1850. Colección legislativa de Instrucción primaria. Madrid: Imprenta Nacional (1856), pp. 308 – 316.

Real orden de 24 de Septiembre de 1853. Colección legislativa de Instrucción primaria. Madrid: Imprenta Nacional (1856), pp. 350 – 353.

Real orden de 12 de Noviembre de 1894. Boletín Oficial de la Provincia de Madrid, nº 301, lunes 17 de Diciembre de 1894.