

85

Vol. 30 (3)
2013



epsilon

Revista de Educación Matemática

Editada por la S.A.E.M. "THALES"

*La revista Epsilon está reseñada en:
IN-RECS, Dialnet, Latindex, RESH, DICE y Base de Datos del
Centro de Documentación Thales.*

epsilon 85

Revista de Educación Matemática

Director

Alexander Maz

Comité Editor

Rafael Bracho

Inmaculada Serrano

Francisco España

Damian Aranda

Manuel Gómez

José Galo

José M^a Chacón

Comité Científico

Evelio Bedoya,

Universidad del Valle, Colombia.

José Carrillo

Universidad de Huelva, España.

José Iván López Flores,

Universidad Autónoma de Zacatecas, México

José Ortiz,

Universidad de Carabobo, Venezuela.

Liliana Mabel Tauber,

Universidad Nacional del Litoral, Argentina.

M^a Mar Moreno,

Universidad de Lleida, España.

Matías Camacho,

Universidad de la Laguna, España.

Modesto Sierra,

Universidad de Salamanca, España.

Roberto Alfredo Vidal Cortés,

Universidad Alberto Hurtado, Chile.

Página de la revista: <http://thales.cica.es/epsilon>

Revista: epsilon@thales.cica.es

Sociedad Andaluza de Educación Matemática “Thales”

Edita

Sociedad Andaluza de
Educación Matemática “Thales”
Centro Documentación “Thales”

Universidad de Cádiz

C.A.S.E.M.

11510 PUERTO REAL (Cádiz)

Maquetación e impresión
Utrerana de Ediciones, s.l.
Cristóbal Colón, 12
41710 Utrera (Sevilla)

Depósito Legal
SE-421-1984

ISSN:
2340-714X

Período
3^{er} cuatrimestre 2013

Suscripción
ESPAÑA: 42,00 euros
PAÍSES DEL EURO: 63,00 euros
RESTO DE PAÍSES: 90 \$ USA
(3 NÚMEROS AL AÑO)

S.A.E.M. THALES

SIXTO ROMERO SÁNCHEZ

Presidente

FRANCISCO ESPAÑA PÉREZ

Vicepresidente

M^a BELÉN SEPÚLVEDA LUCENA

Secretaría General

JOSÉ MARÍA VÁZQUEZ DE LA TORRE PRIETO

Secretario de Administración y Tesorería

SEDE

FACULTAD DE MATEMÁTICAS

Edif. de la E.S.I. Informática. Ala L2

Avda. Reina Mercedes, s/n.

Aptdo. 1160

41080 SEVILLA

Tlfn. 954 62 36 58 - Fax: 954 236 378

e-mail: thales@cica.es

SEDE ADMINISTRATIVA DE LA SOCIEDAD Y REVISTA

CENTRO DE DOCUMENTACIÓN THALES

Facultad de Ciencias. Departamento
de Matemáticas

Campus del Río San Pedro, s/n

Torre Central, 4^a Planta

11510 Puerto Real (Cádiz)

Tlf. y Fax: 956 012 833

e-mail: thales.matematicas@uca.es

ALMERÍA

JUAN GUIRADO GRANADOS

Delegado Provincial

CÁDIZ

PALOMA PASCUAL ALBARRÁN

Delegada Provincial

CÓRDOBA

MARINA A. TOLEDANO HIDALGO (pro-
vis.). *Delegado provincial*

GRANADA

MARÍA PEÑAS TROYANO

Delegado Provincial

HUELVA

M^a ROCÍO BENÍTEZ CAMBRA (provis.).

Delegada provincial

JAÉN

M^a EUGENIA RUIZ RUIZ

Delegada provincial

MÁLAGA

SALVADOR GUERRERO HIDALGO

Delegado provincial

SEVILLA

ANA M^a MARTÍN CARABALLO

Delegada Provincial

7

EDITORIAL

9

INVESTIGACIÓN

9 **Utilización de la noción “ser múltiplo” por maestros de educación primaria en formación/ Meaning of relationships “be multiple” shown by a group of training primary teachers**

Ángel López, Encarnación Castro y María C. Cañadas¹

21 **Aspectos de la fracción en los modelos de enseñanza: El caso de un de libro de texto/ Fractions’ aspects on teaching models: the case of a mathematics textbook**

Rubí Real, Bernardo Gómez y Olimpia Figueras

37 **Una comparación entre las demostraciones de Pedro Nunes y Al-Khwārizmī de los algoritmos de las formas canónicas de la ecuación de segundo grado/ A comparison between Pedro Nunes’ and Al-khwārizmī’s demonstrations of the algorithms that solve the canonical forms of quadratic equations**

Francisco Infante y Luis Puig

55 **Quiénes son y qué citan los autores españoles de educación matemática en el *Social Science Citation Index*/ Who are the Spanish authors of mathematics education and what cited in the *Social Science Citation Index***

Noelia Jiménez-Fanjul, Alexander Maz-Machado y Rafael Bracho-López

69

EXPERIENCIAS

69 **Trenzados y mosaicos árabes con cuerdas/ Plaited and Arab Mosaics with strings**

David Crespo Casteleiro, José Luis Rodríguez Blancas y M^a Carmen Sánchez Melero

83

IDEAS

- 83 Matemáticas en el cine I: *Los crímenes de Oxford*/ Mathematics in cinema I: *The Oxford Murders***
Lucía Vázquez Rodríguez

95

MISCELÁNEA

- 95 Comienzo de la Revista Épsilon/ Beginning of the Journal Epsilon**
Luis Rico
- 101 EPSILON: Una Revista que asume retos/ Epsilon: A journal that takes challenges**
Antonio Moreno Verdejo
- 105 De José Mariano Vallejo a Pascal: recordando un antiguo criterio de divisibilidad/ Since José Mariano Vallejo to Pascal: remembering an old divisibility criterion**
Antonio M. Oller Marcén
Vicente Meavilla Seguí
- 117 Docencia de las matemáticas/ Teaching of mathematics**
Lucía Contreras Caballero
- 121 Agradecimientos**

Para una revista publicada fuera del circuito comercial no es fácil trascender en el tiempo, sin embargo, en el año 2014 se cumple el trigésimo aniversario de la revista *Épsilon* y en este periodo se han publicado 30 volúmenes y 85 números.

A largo del tiempo la revista ha sufrido cambios tanto en su gestión como en la estructura de contenidos y en la propia maquetación hasta llegar a su actual versión en formato online.

Al frente de la revista han estado cuatro directores coordinando los diferentes comités editoriales, así han desempeñado tal función: del número 0 al 18 Manuel Iglesias Cerezal, del 19 al 57 F. Javier Pérez Fernández, del 58 al 72 Antonio Javier Moreno Verdejo y del 73 en adelante Alexander Maz Machado.

La revista a podido completar esta trayectoria temporal gracias al esfuerzo e interés de muchas personas que han colaborado como autores, revisores, gestores y como no gracias a sus lectores en su mayoría socio de las Sociedad Andaluza de Educación Matemática THALES.

En este número Luis Rico nos contextualiza aspectos importantes asociados a la creación de la revista. Por su parte Antonio Moreno brinda su particular visión de *Épsilon* desde su experiencia como exdirector de la misma.

En la actualidad la revista es indexada en bases de datos de como MathEdu, Dialnet y Latindex. Durante el 2013 la edición ha pasado a ser digital y continua ofreciendo contenidos de interés para investigadores en educación matemática como para el profesorado. En los últimos dos años se ha incrementado el número de artículos de investigación pero manteniendo los artículos de aplicación inmediata en el aula en las secciones de ideas para el aula y experiencias. Recientemente hemos incorporado una sección miscelánea donde están teniendo cabida reflexiones, críticas y otros trabajos que por su característica no se adecuaban a las otras secciones.

La internacionalización de *Épsilon* se evidencia en la citas que recibe y en el aumento de autores internacionales que colaboran con la revista.

Esperamos que *Épsilon* prosiga con éxito y se mantenga tan actual como ahora durante muchos años y podamos seguir celebrando nuevos aniversarios.

Alexander Maz Machado
Director

Utilización de la noción “ser múltiplo” por maestros de educación primaria en formación

Ángel López^{1,2}

anlopez169@ugr.es

anlopez@uc.edu.ve

Encarnación Castro¹

encastro@ugr.es

María C. Cañadas¹

mconsu@ugr.es

Resumen: El presente trabajo forma parte de una investigación en desarrollo sobre divisibilidad como conocimiento matemático de maestros de educación primaria en formación. En este documento presentamos algunos resultados sobre una de las relaciones consideradas: “ser múltiplo”. Analizamos las producciones de 55 futuros maestros mediante una prueba escrita, con el fin de delimitar si identificamos diferentes formas de expresar tal relación. Los futuros maestros no utilizaron el término relación en sus respuestas sobre ser múltiplo. Mayoritariamente, se basaron en operaciones aritméticas, con predominio del producto.

Términos clave: Conocimiento matemático, divisibilidad, futuros maestros, múltiplo

Meaning of relationships “be multiple” shown by a group of training primary teachers

Abstract: This work is part of an on going study on divisibility and teaching of mathematical knowledge of training primary teachers. In this paper we present some results about one of the relationships considered “be multiple”. We analyze the production of the 55 prospective teachers in a written questionnaire to identify if they have different

1. Universidad de Granada.

2. Universidad de Carabobo.

ways of expressing this relationship. Prospective teachers do not use the term relationship in their answers on being multiple. Mostly, they based on arithmetic computations, with predominance of the product.

Keywords: Mathematical knowledge, divisibility, training primary teachers, multiple

INTRODUCCIÓN

Situaciones que involucran la estructura multiplicativa son frecuentes en la vida diaria, por lo que dicha estructura está presente en los currículos escolares de diferentes niveles educativos. Los maestros de educación primaria han de trabajar en sus aulas conceptos relacionados con la estructura multiplicativa, algunos de ellos corresponden a la divisibilidad. En estos conceptos se debe profundizar en el conocimiento de los números así como de sus relaciones (Castro y Molina 2011). La divisibilidad es una relación multiplicativa entre números, y como el producto y la división exacta, son operaciones inversas, la relación de divisibilidad responde también a una división exacta.

En las aulas de educación primaria, la divisibilidad se trabaja después de que los escolares conozcan la división, exacta y entera, sus términos, y el algoritmo de la división. Este conocimiento previo puede obstaculizar el aprendizaje de la divisibilidad como relación, perdurando solamente la idea de la división exacta. Por ejemplo, algunos estudiantes, para conocer si 7 es divisor de $3 \times 7 \times 2$, realizan los productos y dividen el resultado obtenido por 7, para dar la respuesta después de comprobar si la división es o no exacta. Así mismo, aparece esta actuación ante la simplificación de expresiones como $\frac{3 \times 5 \times 7^2}{7}$, para la que algunos estudiantes realizan inicialmente todos los productos indicados en el numerador y dividen posteriormente el número obtenido por 7.

Algunos errores están vinculados a las dificultades asociadas al vocabulario propio de la relación de divisibilidad. En dicho vocabulario se usan diferentes expresiones que, en algunos casos, son equivalentes; y, en otras, indican la relación opuesta, en virtud de que se tome el producto o la división como operación que sustenta la relación. Por ejemplo: *divisor de, factor de, divisible por, múltiplo de*. A su vez, la expresión *divisor* en la operación de dividir es el nombre de uno de los términos de tal operación y en la divisibilidad hace referencia a un número que divide a otro (es divisor de otro). Utilizar el primer significado, para divisor, durante tiempo impide la percepción del segundo significado. Los futuros maestros también incurrir en este tipo de errores.

Algunas dificultades con la divisibilidad están relacionadas con el teorema fundamental de la aritmética. Investigadores como Zazkis y Campbell (1996) constatan que muchos estudiantes para maestros de educación primaria están familiarizados con dicho teorema, pueden enunciar y explicar su significado, pero no lo aplican en diferentes situaciones de resolución de tareas o problemas.

Los conceptos relacionados con la divisibilidad caen dentro del campo de la matemática denominado Teoría Elemental de Números (Sinclair, Zazkis y Lidljedahl, 2003). Hay diversas recomendaciones sobre la necesidad de que los futuros maestros estudien esta teoría, bajo diferentes premisas. Por ejemplo el NCTM (1989) presupone que el

estudio de la teoría elemental de números por los maestros de educación primaria les proporciona comprensión conceptual profunda de las propiedades y las estructuras numéricas. Con posterioridad, destaca el papel importante de dicha teoría para realizar razonamientos numéricos y resolver problemas no rutinarios (NCTM, 2000). El informe de la Conferencia de Ciencias Matemáticas (Conference Board of the Mathematical Sciences, 2001) también incide en la misma recomendación sobre la formación de los maestros en teoría elemental de números, con el objetivo de que entiendan y sean capaces de trabajar en las aulas, con los escolares, ideas fundamentales de dicha teoría.

En investigaciones recientes se pueden observar distintos enfoques sobre teoría de números como: (a) la comprensión de conceptos particulares relacionados con la estructura y la teoría de números (Brown, Thomas y Tolia, 2002; Ginat, 2006; Lavy, 2006; Leinkin, 2006; Smith 2006), (b) el papel que estos conceptos podrían desempeñar en el desarrollo del razonamiento matemático (Campbell, 2006; Mason, 2006) y (c) la interrelación entre teoría y práctica (Kieran y Guzmán, 2006). Todos estos autores insisten en la necesidad de continuar realizando investigaciones en teoría de números. En este trabajo, nos centramos en indagar sobre la comprensión de la relación “ser múltiplo” que muestran un grupo de maestros de primaria en formación.

OBJETIVOS DE LA INVESTIGACIÓN

Tenemos planteados dos objetivos de investigación y, en este artículo, abordamos el primero de ellos parcialmente:

- 1) Determinar el conocimiento que muestra un grupo de futuros maestros de primaria sobre la relación de divisibilidad.
- 2) Estudiar la evolución de dicho conocimiento en el desarrollo de un periodo de enseñanza/aprendizaje de dicho grupo de futuros maestros.

MÉTODO

Para el logro del primer objetivo, elaboramos una prueba escrita con la que realizamos un pilotaje, con el fin de indagar en el conocimiento matemático de los conceptos básicos de la divisibilidad de los futuros maestros.

Tomamos, intencionalmente, un grupo de 55 maestros en formación de la Facultad de Ciencias de la Educación de la Universidad de Granada en el curso académico 2011-2012. Posteriormente, tenemos previsto diseñar un experimento de enseñanza para estudiar la evolución de ese conocimiento mostrado por los futuros maestros.

En este trabajo, nos centramos en los resultados obtenidos en el estudio piloto y, en particular, en los ítems de la prueba referidos a la relación “ser múltiplo”, que fueron:

- a) Indica si la expresión 24 es múltiplo de 6 es verdadera. Explica tu respuesta.
- b) Explica, con tus palabras, qué quiere decir que un número sea múltiplo de otro.
- c) Dado el número $3^3 \times 5^2 \times 7$, escribe tres números de los cuales sea múltiplo el número dado.

c. 24 es múltiplo de 6

~~Falso~~ Sí, porque cuando sumas 4 veces 6 te da 24.

Figura 2. Respuesta de Ramón

c. 24 es múltiplo de 6

Falso porque 24 no se puede multiplicar por ningún número y que te da como resultado 6. ~~De~~ 6 no puede

Figura 3. Respuesta de Javier

Mariela (Figura 4) justificó la afirmación utilizando la operación de división, haciendo explícito el valor del resto en la división, lo cual indica que hace referencia a la división exacta, y no menciona el cociente.

c. 24 es múltiplo de 6

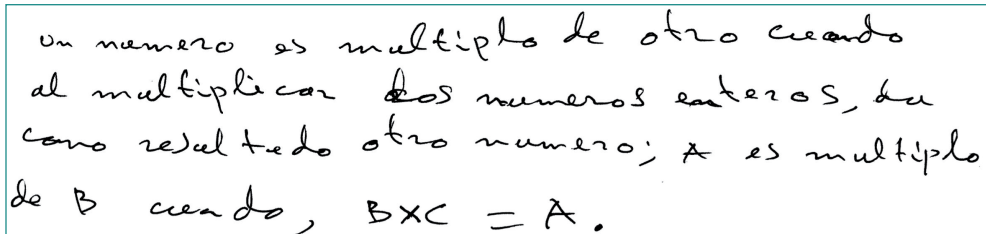
Verdadero, si dividimos 24 entre 6, el resto da 0.

Figura 4. Respuesta de Mariela

Ítem 2

Señalamos la marcada tendencia operacional mostrada por los estudiantes para maestros cuando describen “ser múltiplo”. La mayoría de los futuros maestros (43) lo describió como un proceso orientado por operaciones matemáticas. De los 55 a los que se les planteó esta tarea, 2 dieron una respuesta que consideramos una buena aproximación al concepto de múltiplo, según la teoría de números; 6 no respondieron a la tarea y 4 utilizaron otros procedimientos.

En la respuesta de José (Figura 5), consideramos que hizo una buena aproximación a la definición de múltiplo: cuando escribió con sus propias palabras lo que consideró que era que un número fuera múltiplo de otro, lo hizo tratando de no perder la generalización y manteniendo la estructura multiplicativa. A pesar de que hizo referencia al resultado de multiplicar dos números, cuando escribió simbólicamente la estructura multiplicativa dejó claro que A era múltiplo de B cuando ocurría que $B \times C = A$. Para que ocurriera $B \times C = A$, debía existir el número C tal que $A = B \times C$.



un numero es multiplo de otro cuando al multiplicar dos numeros enteros, da como resultado otro numero; A es multiplo de B cuando, $B \times C = A$.

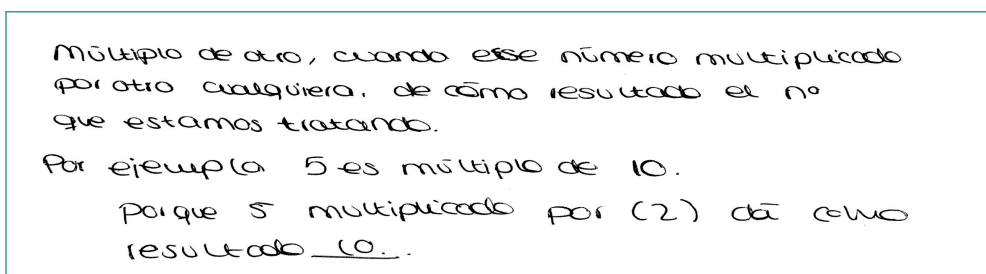
Figura 5. Respuesta de José

Observamos que 43 de 55 futuros maestros utilizaron explícitamente las operaciones matemáticas de adición, multiplicación y división para explicar “ser múltiplo”: 2 estudiantes utilizaron la adición, 38 la multiplicación y 3 la división.

La operación de multiplicar fue considerada por los futuros maestros de forma mayoritaria en este ítem, 38 de 55 la utilizaron. En el uso de esta operación se diferencian dos aspectos, determinados por el papel que juega cada número en la multiplicación (*factor - producto*).

Múltiplo como sinónimo de factor: en una expresión como $axc=b$, hay presentes tres elementos los cuales juegan sólo dos roles, el de factor y el de producto. En este sentido, 15 de los 55 estudiantes utilizaron el concepto de factor en la multiplicación para definir múltiplo, asignándole la categoría de sinónimo de múltiplo.

En el caso de la respuesta que dió Cristina (Figura 6) hizo referencia a la operación de multiplicación y, en el ejemplo, puso de manifiesto que se refiere al múltiplo como el número que ocupa el lugar de factor en una multiplicación. Adicionalmente, indicó que puede ser multiplicado por un número cualquiera.



Múltiplo de otro, cuando ese número multiplicado por otro cualquiera, da como resultado el nº que estamos tratando.
Por ejemplo 5 es múltiplo de 10.
porque 5 multiplicado por (2) da como resultado 10.

Figura 6. Respuesta de Cristina

Marta (Figura 7) utilizó en su explicación general una sutil condición: “cuando se puede hacer una multiplicación”. Esta condición parece encaminarse hacia el planteamiento de la teoría de números (si existe un número c tal que $axc=b$). No obstante, esta idea inicial no la aplicó al ejemplo donde se hace clara referencia al resultado que se obtiene y señala al factor 3 como el múltiplo de 15.

Un número es múltiplo de otro cuando se puede hacer una multiplicación con otro número y me da ese resultado. número como

Por ejemplo: 3 es múltiplo de 5 porque si lo multiplica por 5, ($3 \times 5 = 15$) me da 15 como resultado.

Figura 7. Respuesta de Marta

María (Figura 8) hizo referencia a la multiplicación de números naturales como un producto no cerrado y además estableció la supuesta conmutatividad de la relación ser múltiplo. Esta propiedad fue claramente identificada para los factores, y la referencia que hizo sobre la conmutatividad entre "los dos primeros números" estaba establecida sobre los factores que estaban presentes en la operación de multiplicación.

Significa que si un número natural lo multiplicas por otro natural el resultado es también un número entero por lo tanto ~~ambos números~~ los dos primeros números son múltiplos el uno del otro.

Figura 8. Respuesta de María

Múltiplo como sinónimo de producto: en la operación de la multiplicación al resultado se le suele llamar producto. En este caso, 23 de 55 futuros maestros definieron múltiplo como el resultado de la operación de multiplicación, estableciendo así que múltiplo es sinónimo de producto. En lo que sigue, mostramos 3 ejemplos donde se puede verificar esta situación.

Carlota (Figura 9) utilizó una referencia clara al resultado que se obtiene de la multiplicación y lo asoció a la palabra múltiplo. Además, estableció la diferencia entre los roles de los números en una multiplicación.

Quiere decir que el resultado obtenido es múltiplo que se ha obtenido ha sido a través de unos factores concretos y hemos llegado a ese resultado.

Figura 9. Respuesta de Carlota

En el caso de Raquel (Figura 10), asoció múltiplo con resultado de multiplicación (o producto) “se obtiene multiplicando”. Esta afirmación trató de hacerla en términos generales para cualquier número entero. Sin embargo, la referencia “se obtiene multiplicando” y “se obtiene otro” son claros indicios de la operación multiplicación y su asociación con sus elementos intervinientes: factores y producto.

En el caso de Rocío (Figura 11), la referencia es explícita a los resultados de la operación de multiplicación y mencionó como condición para que sea múltiplo el hecho que debe estar donde están todos los resultados de las multiplicaciones, es decir, la tabla de multiplicar.

Un número entero es múltiplo de otro cuando se obtiene multiplicando, o sea multiplicando algún número entero al segundo se obtiene otro

Figura 10. Respuesta de Raquel

Un número es múltiplo de otro si aparece en la tabla de multiplicar de dicho número.

Figura 11. Respuesta de Rocío

Ítem 3

Con respecto este ítem, 15 de los 55 futuros maestros no respondieron. La mayoría de los que respondieron (34), realizaron la tarea transformando el número dado (escrito como producto de factores primos) en un número escrito en su representación decimal. No aprovecharon la situación dada por la representación del número a través de teorema fundamental de la aritmética para decidir sobre la cuestión.

En la Figura 12 mostramos la respuesta de Carmen a esta cuestión. Ella hizo la transformación del número dado y escribió que la suma de sus dígitos es múltiplo de tres. Los dígitos son 4, 7, 2 y 5, que forman el número 4275, y que es el resultado de multiplicar los factores del número dado $3^3 \times 5^2 \times 7$.

• 5 y 10 porque su última cifra acaba en 5.
• 3 porque la suma de sus números da

Figura 12. Respuesta de Carmen

Igualmente, Jorge (Figura 13) determinó el resultado de y , a partir de ahí, construye múltiplos del número dado, a pesar que la pregunta no plantea que determinen los múltiplos del número, sino, que escriba tres números de los cuales el número dado es múltiplo.

$$\begin{array}{r} 4725 \\ \times 2 \\ \hline 9450 \\ \times 2 \\ \hline 18900 \end{array}$$
 4725 , 9450 , 18.900

Figura 13. Respuesta de Jorge

CONCLUSIONES

Comenzamos destacando algunos resultados. Ningún estudiante señaló explícitamente que ser múltiplo se refiera a una relación entre números, que exige una cierta condición. La mayor parte de los 55 maestros de primaria en formación que participaron en el estudio, asociaron "ser múltiplo" con una operación aritmética, mayoritaria la multiplicación. En la mayoría de los casos, lo asociaron con el resultado de la operación de multiplicación y , en otros casos, con el de factor como un elemento que interviene en la multiplicación. Este resultado coincide con el de Zazkis (2001). Esta situación se pone de manifiesto tanto para justificar que entre los números dados, uno es múltiplo del otro como cuando escribieron con sus propias palabras qué quiere decir que un número sea múltiplo de otro. Cuando realizaron la operación de los factores en que está descompuesto un número para comprobar (haciendo la división entre uno de los factores) si la división es o no exacta, lo consideraron desde la operación de dividir.

Entendemos que la transformación del número como producto de factores primos a la forma de escritura como expresión decimal que hacen los futuros maestros está basada en la necesidad que sienten de hacer alguna operación aritmética conocida. Esto les llevó a no considerar la representación del número como producto de factores primos, a pesar que esta representación favorecía la respuesta de manera más rápida. No identificaron la relación de "ser múltiplo" en estas expresiones.

En general, sus actuaciones y respuestas se enmarcan en una percepción operacional de la noción “ser múltiplo”. Dentro de esta percepción operacional, el significado que asignan estos futuros maestros a “ser múltiplo”, presenta tres acepciones, dos asociadas a la multiplicación y una a la división.

- Múltiplo como resultado de un producto.
- Múltiplo como factor de un producto.
- Múltiplo como dividendo de una división exacta.

AGRADECIMIENTOS

Esta investigación ha sido realizada en el seno del Grupo de Investigación FQM-193 del Plan Andaluz de Investigación, Desarrollo e Innovación de la Junta de Andalucía “Didáctica de la Matemática: Pensamiento Numérico” de la Universidad de Granada, y en el marco del proyecto de investigación EDU2009-11337 “Modelización y representaciones en educación matemática” del Plan Nacional de Investigación, Desarrollo e Innovación 2010-2012 del Ministerio de Ciencia e Innovación de España.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Brown, A., Thomas, K. y Tolia, G. (2002). Conceptions of divisibility: Success and understanding. En S. R. Campbell y R. Zazkis (eds.), *Learning and Teaching Number Theory: Research in Cognition and Instruction*, 41-82. Journal of Mathematical Behavior Monograph. Westport, CT: Ablex Publishing.
- Campbell, S. R. (2006). Understanding elementary number theory in relation to arithmetic and algebra. En R. Zazkis y S. R. Campbell (eds.), *Number Theory in Mathematics Education Perspectives and Prospects*, 19-40. New Jersey, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Castro, E. y Molina, M. (2011). Introducción a la divisibilidad. En I. Segovia y L. Rico (coords), *Matemáticas para maestros de educación primaria*, 123-146. Madrid: Pirámide.
- Conference Board of the Mathematical Sciences. (2001). *The mathematical education of teachers*. Providence, RI: American Mathematical Society.
- Ginat, D. (2006). Overlooking number patterns in algorithmic problem. En R. Zazkis y S. R. Campbell (eds.), *Number Theory in Mathematics Education Perspectives and Prospects*, 223-247. New Jersey, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Kieran, C. y Guzmán, J. (2006). The number-theoretic experience of 12 - to 15- year-olds in a calculator environment: the intertwining coemergence of technique and theory. En R. Zazkis y S. R. Campbell (eds.), *Number Theory in Mathematics Education Perspectives and Prospects*, 173-200. New Jersey, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Lavy, I. (2006). Learning number theory concepts via geometrical interactive computerized setting. En R. Zazkis y S. R. Campbell (eds.), *Number Theory in Mathematics Education Perspectives and Prospects*, 201-221. New Jersey, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

- Leinkin, R. (2006). Learning by teaching: the case of sieve of Eratosthenes and one elementary school teacher. En R. Zazkis y S. R. Campbell (eds.), *Number Theory in Mathematics Education Perspectives and Prospects*, 115-140. New Jersey, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Mason, J. (2006). What makes an example exemplary: pedagogical and didactical issues in appreciating multiplicative structures. En R. Zazkis y S. R. Campbell (eds.), *Number Theory in Mathematics Education Perspectives and Prospects*, 41-68. New Jersey, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- National Council of Teaching Mathematics (NCTM). (1989). *Curriculum and evaluation standards for school mathematics*. Reston, VA: Author.
- National Council of Teaching Mathematics (NCTM). (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: Author.
- Sinclair, N., Zazkis, R. y Liljedahl, P. (2003). Number worlds: Visual and experimental access to elementary number theory concepts. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 8(3), 235-263.
- Smith, J. C. (2006). Revisiting algebra in a number theoretical setting. En R. Zazkis y S. R. Campbell (eds.), *Number Theory in Mathematics Education Perspectives and Prospects*, 249-283. New Jersey, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Zazkis, R. (2001). Múltiplos, divisores y factores: explorando la red de conexiones de los estudiantes. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 4(1), 63-92.
- Zazkis, R. y Campbell, S. R. (1996). Prime decomposition: understanding uniqueness. *Journal of Mathematical Behavior*, 15, 207-218.

Aspectos de la fracción en los modelos de enseñanza: El caso de un libro de texto

Rubí Real

Bernardo Gómez

Olimpia Figueras

La caracterización de los modelos de enseñanza de las fracciones es el propósito principal de esta investigación. El estudio incluye el análisis de libros de texto y las sugerencias didácticas del currículo de secundaria. Este documento versa sobre los aspectos de la fracción en el modelo de enseñanza estructurado por medio de secuencias de actividades de un libro de primer curso. Los resultados más relevantes son: los autores favorecen el aspecto de fracturador; hay actividades en las que aparecen diferentes aspectos de la fracción tales como fracturador, relación razón y operador razón, además se observa una tendencia al uso de todos discretos.

Palabras clave: Modelos de enseñanza, fracciones, libros de texto, fracturador, relación razón, operador razón y todos discretos.

Fraction's aspects on teaching models: the case of a mathematics textbook

Characterizing teaching model of fractions is the main purpose of this research. The study included analysis of mathematical textbooks and the didactical suggestions of current curriculum for secondary. This paper describes the teaching model of fractions structured by activities sequences of a first grade textbook for secondary school. The most relevant results are: the authors favour the aspect of fracturer; there are activities in which different aspects of fraction such as fracturer, ratio relation and ratio operator appears, also a tendency to use discrete wholes is observed.

Key words: Teaching models, fractions, textbooks, fracturer, ratio relation, ratio operator and discrete wholes.

La comprensión de los números racionales es un desafío formidable para el aprendizaje, porque, como ha mostrado el análisis de las componentes del concepto llevado a cabo por diferentes investigadores desde la década de los sesentas, entre otros Rappaport (1962), Riess (1964), Novillis (1976), Kieren (1976, 1980 y 1988), Usiskin (1979) y Berh, Lesh, Post y Silver (1983), puede ser interpretado de hasta seis maneras distintas, conocidas como subconstructos en la terminología usual: relación parte-todo, decimal, razón, cociente, operador y medida de cantidades discretas o continuas.

En relación con ese desafío, Lesh, Landau y Hamilton (1980) señalaron que el concepto de número racional es un conjunto de subconstructos y procesos integrados que están relacionados con un rango amplio de conceptos elementales, los cuales se presupone están integrados en una gran variedad de situaciones problema. Por su parte, Kieren (1980 y 1988), quién solo considera cuatro subconstructos: medida, cociente, operador y razón, argumenta que la relación parte-todo sirve como base para instaurar los diferentes subconstructos.

Respecto a la didáctica de las fracciones, Freudenthal (1983) sostiene que está caracterizada por tendencias unificadoras ya que se supone que los estudiantes pueden aprender con un sólo enfoque. Este autor señala que el centramiento en la relación parte-todo es limitado, no sólo fenomenológicamente sino también desde el punto de vista de las matemáticas, debido a que sólo produce fracciones propias.

Figueras (1988) afirma que las diferentes nociones de fracción están implícitas en los modelos de enseñanza y en las interrelaciones que se pueden establecer con referentes más concretos para los alumnos; en su investigación identificó cinco modelos de enseñanza, así como las dificultades que enfrentan los estudiantes al estudiar con esos diferentes modelos.

Tanto los resultados de las investigaciones referidas anteriormente, como otros factores, influyeron en las reformas educativas de los años 90's en España, Estados Unidos, Inglaterra y México. En esos cambios curriculares se incorporaron diferentes significados de la fracción, los cuales se reflejaron en las actividades que se proponen en los libros de texto.

Ahora bien, la manera en la que los autores de los libros de texto interpretaron los cambios curriculares de las reformas educativas para proponer actividades de fracciones ha sido diferente. Por ejemplo, mientras que en los libros de texto de Estados Unidos se pone más énfasis en las situaciones de la vida cotidiana y en la comprensión conceptual, en los de Singapur y Taiwán, se tiende a acentuar el dominio de los procedimientos de cálculo (Yang, Reys y Wu, 2010).

Pese a ese intento por facilitar el aprendizaje de las fracciones incorporando diferentes subconstructos, no se puede decir que hasta este momento se haya logrado diseñar una secuencia de enseñanza adecuada. A la vista de cómo se han incorporado esos significados en los libros de texto, no es claro en las actividades que se proponen cómo se establecen los vínculos entre las diferentes componentes del concepto de tal forma que le permitan al estudiante integrarlos para construir un mejor objeto mental de fracción.

Lo anterior pone de manifiesto la necesidad de continuar investigando y analizando la principal herramienta que usan los profesores para llevar a cabo su práctica docente: el libro de texto.

MARCO TEÓRICO

La investigación tema de este artículo está sustentada en dos referentes teóricos fundamentales: la fenomenología didáctica de Freudenthal (1983), y el modelo de enseñanza y los procesos de reconstrucción del todo identificados por Figueras (1988).

Fenomenología didáctica

El análisis fenomenológico consiste en describir tanto los fenómenos que se organizan a través de un concepto u objeto matemático, como las relaciones que se pueden establecer entre el concepto o estructura y los fenómenos (Fillooy, Rojano y Puig 2008, pág. 39).

En el caso particular que nos ocupa, Freudenthal (1983) describe la fenomenología didáctica a través de los fenómenos de las fracciones que se pueden considerar como contextos adecuados en las secuencias de enseñanza (Puig, 1997, pág. 64). Estos fenómenos están relacionados con la comparación o descripción de objetos, la división de sustancias medidas por magnitudes, la distribución de cantidades y el sistema decimal de medida.

Cuando las fracciones se usan en el lenguaje cotidiano, sirven para expresar el resultado de una comparación de cantidades o valores de magnitud, lo cual se asocia con la fracción como comparador, en un primer nivel de abstracción. Las fracciones también pueden describir: cantidades o valores de magnitud por medio de otros valores o cantidades, razones, procesos cíclicos o periódicos.

En un segundo nivel de abstracción de la fracción como comparador se incluyen los aspectos de operador fracturante, relación de fractura, relación razón, operador razón y transformador.

Si se comparan objetos que están juntos, uno dentro del otro, o se piensa que lo están, la fracción puede tener un aspecto de operador fracturante o de relación de fractura. El aspecto de la fracción como relación razón está presente al comparar dos objetos que están separados con respecto a un número o valor de magnitud. La fracción como operador razón actúa sobre una cantidad, número o valor de magnitud convirtiéndolo en otra cantidad o en otro número o valor. En su aspecto de transformador, la fracción actúa sobre las dimensiones de los objetos por deformación o por aplicación a una escala a/b .

Al dividir sustancias medidas por magnitudes, éstas se fracturan en partes iguales para relacionar una parte o algunas partes con el todo, de tal forma que la fracción representa una relación parte-todo y hace referencia a la fracción como fracturador.

En la distribución de pequeñas o grandes cantidades, las fracciones van a estar relacionadas con un proceso que puede asociarse a un modelo de conjunto finito y/o a un modelo de magnitud, de tal forma que las fracciones representan el resultado de ese proceso (en el sentido de Freudenthal, 1983, pág. 29).

Las fracciones asociadas a un sistema decimal de medida, la recta numérica o una unidad de medida pueden corresponder con las fracciones decimales.

Es preciso mencionar que a partir del espécimen de fenomenología didáctica de Freudenthal centrado la atención en procesos matemáticos, Real y Figueras (en proceso) estructuraron una red de constructos que se usa como herramienta para analizar los modelos de enseñanza que subyacen tanto en el curriculum, como en los libros de texto.

Modelo de enseñanza y reconstrucción del todo

Figueras (1988) caracterizó un modelo de enseñanza como un conjunto formado por cinco elementos: 1) los significados de un subconstructo, 2) su tratamiento didáctico, 3) el lenguaje que interviene en la secuencia de enseñanza, 4) las habilidades que se requieren para comprender el significado del constructo a partir del tratamiento didáctico, y 5) las relaciones entre todos estos elementos.

En relación con los procesos de reconstrucción del todo, éstos implican obtener el todo continuo o discreto a partir de la parte. De una fracción, explícita o implícita, en el enunciado de un problema o en la información gráfica que representa la relación entre la parte y el todo, se identifica una unidad fraccionaria la cual se puede iterar o calcular para reconstruir el todo.

PROPÓSITO Y MÉTODO

El propósito general de la investigación es caracterizar modelos de enseñanza de las fracciones. Para ello se decidió analizar los libros de texto y el currículo de la Escuela Secundaria Obligatoria (ESO) de España y responder las siguientes preguntas:

- ¿Cuáles son los aspectos de las fracciones que se utilizan en los modelos de enseñanza subyacentes en los libros de texto de la escuela secundaria?
- ¿Cuáles son las relaciones que se establecen entre los modelos de enseñanza de los textos y las sugerencias didácticas del currículo oficial?

Para llevar a cabo el análisis se determinaron cuatro variables por medio de las cuales se establece una nueva caracterización de modelo de enseñanza reinterpretando los elementos que Figueras (1988) identificó:

- 1) sentido de uso de las fracciones que aparece en las actividades y explicaciones del texto, y el proceso matemático en el cual está implicado ese sentido de uso,
- 2) la caracterización del todo, la parte y la relación parte-todo,
- 3) las actividades, las preguntas y su intencionalidad, y,
- 4) las maneras de resolver las actividades o de responder las preguntas de un usuario competente del libro de texto.

El significado de un subconstructo considerado en la caracterización de Figueras, no se utiliza explícitamente sino que se incluye en una variable más completa: el sentido de uso.

Por ejemplo, en la actividad “En un mosaico, una fuente ocupa las $\frac{2}{5}$ partes de las 80 baldosas. ¿Cuántas baldosas ocupa la fuente?”, el significado de la fracción es de “fracturador” o “relación parte-todo”, pero al resolver el problema el constructo es de operador, y por tanto su aspecto es el de operador razón. Aunque en este ejemplo están presentes dos diferentes aspectos de la fracción, el sentido de uso es el de operador razón ya que la fracción convierte una cantidad en otra.

En las actividades, las explicaciones del texto y el proceso matemático subyace el sentido de uso; éste se identifica a través de la información gráfica y las formas textuales que utilizan los autores del libro. Además, ese sentido de uso se relaciona con acciones que corresponden al proceso matemático en el cual está implícito.

Mediante el análisis de las formas textuales e información gráfica incluidas en una actividad también se caracterizan el todo, la parte y la relación parte-todo.

Las otras variables, segunda, tercera y cuarta se corresponden en cierto modo con los elementos segundo, tercero y cuarto: tratamiento didáctico, lenguaje y habilidades. Estas variables se refieren a las actividades, las preguntas y su intencionalidad; se analizan considerando el contexto y las formas textuales, de tal forma que se entresaca el aspecto de la fracción y el sentido de uso que los autores de los libros pretenden favorecer.

También se analizan las posibles maneras en las que un usuario competente resolvería las actividades o respondería las preguntas que éstas plantean, centrandó la atención en los sentidos de uso que están involucrados en los procesos matemáticos utilizados por el resolutor.

A continuación se describe con ejemplos la aplicación de la metodología al libro de texto de primero de secundaria de la serie publicada en 2007 por la editorial Marfil.

CARACTERIZACIÓN DEL MODELO DE ENSEÑANZA DEL LIBRO DE TEXTO

El estudio de las fracciones en el libro de texto antes citado se organiza a través de una secuencia de enseñanza dividida en dos secciones con diferentes actividades. La primera también incluye el estudio de números decimales y porcentajes. La segunda solamente se centra en las fracciones. En los siguientes apartados se incluye el análisis de algunas actividades de las secciones de ese texto.

Resultados del análisis de la primera sección

En el párrafo introductorio, ver Figura 1, al hablar de un tipo de número muy útil para indicar las partes de un todo, pareciera que los autores se refieren a las fracciones. Sin embargo, se incluyen los números decimales y los porcentajes.

DESDE AHORA... FRACCIONES, DECIMALES Y PORCENTAJES

Vas a trabajar un tipo de número muy útil para indicar **las partes de un todo**, y que con toda seguridad ya habrás usado en primaria. Estas actividades nos servirán para ir recordando esos números y para con posterioridad, en los siguientes apartados, estudiarlos de forma más separada y poder así aprender algunas propiedades y operaciones con cada uno de ellos.

Figura 1. Párrafo introductorio de la primera sección (Marfil, 2007, pág. 50).

La primera sección está formada por siete apartados (44-50); cuatro tratan sobre fracciones (44, 45, 46 y 50).

El apartado 44, Las figuras escondidas, tiene cuatro actividades: 44.1 ¿Qué fracción veo?, 44.2 ¿Cuántos cristales hay?, 44.3 El tren y 44.4 La chimenea.

En la actividad 44.1 (ver Figura 2), el todo y la parte están caracterizados por imágenes, el todo es una ventana dividida en 8 partes, cada parte contiene un cristal; sugiriendo la unidad fraccionaria $1/8$. Aunque se pueden identificar varias particiones del todo, $1/2$, $1/4$ y $1/8$, se centra la atención en la que tiene más elementos.



Figura 2. Caracterización gráfica de la parte y el todo continuo, discretizado de manera textual con referencia a la partición (Ibid).

Considerando la unidad fraccionaria más pequeña, la respuesta es $\frac{2}{8}$, pero tomando en cuenta la unidad fraccionaria formada por 2 cristales, es $\frac{1}{4}$. El todo es continuo, un rectángulo dividido en 8 partes iguales, pero también puede ser discreto, 8 cristales. Al requerir una fracción que describa la relación entre la parte y el todo se trata de la fracción como fracturador.

En la actividad 44.2 (ver Figura 3), el fragmento de texto "...puedes ver $\frac{1}{3}$ de la ventana" caracteriza la unidad fraccionaria: un cuadrado dividido en cuatro partes iguales.



Figura 3. Caracterización de la parte de forma gráfica y simbólica, búsqueda de un todo continuo discretizado a través de la partición (Ibid).

Para reconstruir el todo se puede iterar tres veces esa unidad fraccionaria y obtener un rectángulo dividido en 12 partes iguales. La fracción describe una relación entre la parte y el todo asociada a la fracción como fracturador. En este caso, la parte es de un todo continuo aunque también se puede asociar a una parte discreta.

En la actividad 44. 3 (ver Figura 4), se caracteriza la parte y la unidad fraccionaria a través de "...puedes ver sólo $\frac{1}{4}$ de este tren..." y de la imagen; cada unidad fraccionaria está compuesta por tres vagones. El fragmento textual "...el tren completo" caracteriza al todo discreto.

La fracción $\frac{1}{4}$ describe la relación entre la parte y el todo; se refiere a la fracción como fracturador. El todo se puede reconstruir iterando cuatro veces la parte visible del tren, 3 vagones, obteniéndose un tren de 12 vagones.

El fragmento "...las $\frac{4}{5}$ partes..." y la pregunta ¿Cuánto mide en total? caracterizan la parte y el todo continuo en la actividad 44.4 (ver Figura 5). La fracción $\frac{4}{5}$, representada por un segmento de recta al que se le asocia un valor de magnitud: 12 metros, describe una relación entre la parte y el todo.

Para determinar el valor de la unidad fraccionaria, el segmento de recta que representa $\frac{4}{5}$ partes de la altura puede partirse en cuatro partes iguales mediante la operación $12 \div 4 = 3$ y reconstruir el todo iterándola cinco veces, o bien calculando $3 \times 5 = 15$. El aspecto de la fracción es de fracturador.

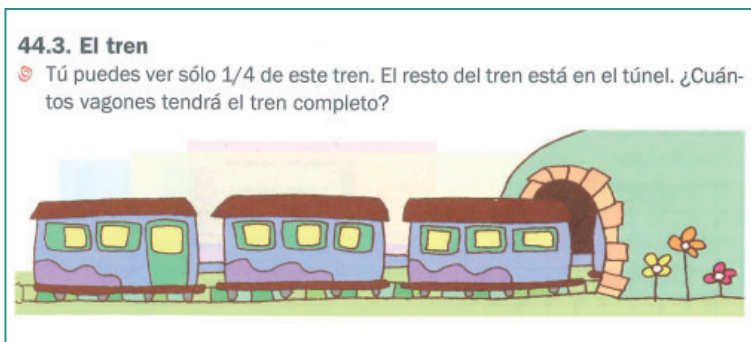


Figura 4. Caracterización de la parte de manera gráfica y simbólica, búsqueda de un todo discreto (Marfil, 2007, pág. 51).

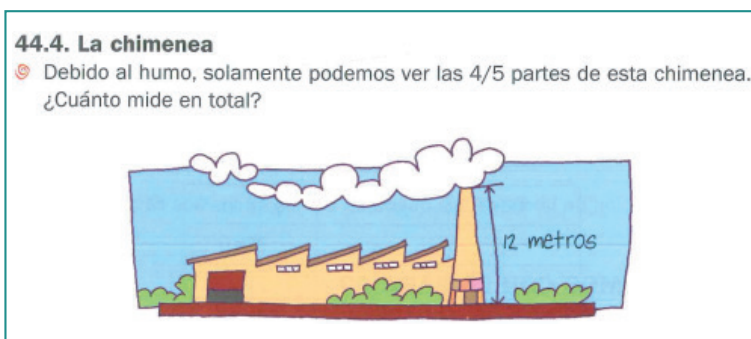


Figura 5. Caracterización de las partes de forma gráfica y simbólica, búsqueda de un todo continuo, discretizado a través de unidades de medida (Ibid).

El apartado 45 del libro de texto incluye cuatro actividades: 45.1 La valla, 45.2 Completa la valla, 45.3 El rombo y 44.4 La cuadrícula, de las cuales sólo se describe el análisis de las primeras dos.

“Esta valla mide 24 metros de largo” es la frase que en la actividad 45.1 caracteriza al todo continuo: la longitud de la valla expresada con un valor de magnitud. Como puede verse en la Figura 6, la valla está dividida en dos partes diferenciadas por el color y está formada por tablas horizontales y tablas verticales distribuidas de manera equitativa.

La caracterización de la parte está dada por la imagen y por las palabras “fracción” y “parte”. Pareciera que se sugiere contar para responder la primera pregunta, en vez de comparar la parte pintada y la no pintada. Con este proceso es claro que la primera es tres veces mayor que la segunda, evocando una partición del largo de la valla en cuatro partes iguales. Por ello, la fracción $\frac{3}{4}$ indicaría el valor de la longitud de la parte pintada y describiría la comparación de una parte con respecto a la otra, destacando a la fracción como comparador.

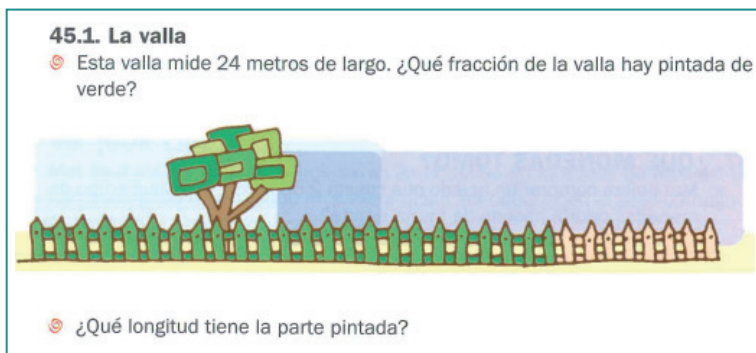


Figura 6. Todo continuo discretizado por unidades fraccionarias gráficas y a través de unidades de medida (Ibid).

Si la primera pregunta se responde a través del conteo el aspecto de la fracción es de fracturador, si se responde mediante la comparación entre el número de tablas pintadas y el número de tablas no pintadas, el aspecto de la fracción es de relación razón. Para responder la segunda pregunta el aspecto de la fracción $\frac{3}{4}$ es de operador razón ya que convierte el valor de magnitud 24 en 18 mediante la operación $\frac{3}{4} \times 24 = 18$.

En la actividad 45.2 (ver Figura 7), se caracteriza la parte y el todo continuo a través de los textos "...1/5 del total de la valla..." y "...la longitud total...".



Figura 7. Convivencia de dos particiones distintas: unidad fraccionaria simbólica, unidad de medida gráfica, búsqueda de un todo continuo discretizado (Ibid).

La fracción $\frac{1}{5}$ describe la relación entre la parte y el todo, asociada a la fracción como fracturador. Para reconstruir el todo se requiere considerar la unidad fraccionaria $\frac{1}{5}$ –10 metros– y calcular $5 \times 10 = 50$.

En la actividad del apartado 46 (ver Figura 8), se caracteriza el todo discreto y la parte mediante los textos "...baraja española de 40 cartas...", "...probabilidad..." y "... el porcentaje de veces que debería salir un as sería del 10%".

46. ¿JUGAMOS CON LA BARAJA?

En una baraja española de 40 cartas se saca una carta al azar.

- a) ¿Cuál es la probabilidad de que sea de oros?
- b) ¿Y de que sea de bastos?
- c) ¿Y de que sea un rey?
- d) ¿Y de que sea un número menor que 7?
- e) Mat afirma que al jugar 40 partidas, el porcentaje de veces que debería salir un as sería del 10%. ¿Estás de acuerdo?

Figura 8. Uso de la fracción como comparador en un contexto de probabilidad (Marfil, 2007, pág. 52).

El estudio de las fracciones en un contexto de probabilidad es lo que más llama la atención de esta actividad.

Considerando que la probabilidad teórica relaciona el número de casos favorables y el número de casos posibles, en las dos primeras preguntas se trata de relacionar el número de cartas de un palo y el número de cartas de toda la baraja, de tal modo que la fracción $10/40$ representa esa relación.

Para responder la tercera pregunta se puede relacionar el número de cartas que tienen rey y el número de cartas de la baraja o el número de reyes y el número de cartas por palo, estas relaciones se representan con las fracciones $4/40$ y $1/10$.

En la cuarta pregunta, también se trata de relacionar el número de cartas con un número menor que 7 y el número de cartas de toda la baraja o el número de cartas con un número menor que 7 y el número de cartas por palo, las fracciones $24/40$ y $6/10$ representan estas relaciones.

Aunque el aspecto de la fracción es de relación razón, también se puede considerar que es de fracturador ya que se hace referencia a un subconjunto de elementos con respecto al cardinal de ese conjunto.

El apartado 50 contiene seis actividades, sólo se hará referencia a dos: en una de ellas, la 50.2 se incluye en la Figura 9. Los textos: "... $3/5$ partes de la superficie..." y "...la superficie total del planeta es de 510 millones de kilómetros cuadrados" caracterizan la parte y el todo respectivamente.

Para obtener cuántos kilómetros cuadrados están cubiertos por agua, primero se debe considerar que la fracción $3/5$ es un fracturador que describe una relación entre la parte y el todo y ésta debe reinterpretarse como un operador razón que transforma un valor de magnitud en otro de la misma especie $3/5 \times 510 = 306$, lo cual se relaciona con la fracción como comparador. Para obtener cuántos kilómetros cuadrados son de tierra firme, se debe interpretar la fracción $2/5$ como fracturador y reinterpretarla como un operador razón obteniéndose $2/5 \times 510 = 204$.

50.2.

Aproximadamente las $\frac{3}{5}$ partes de la superficie terrestre está cubierta por agua. Sabemos que la superficie total del planeta es de 510 millones de kilómetros cuadrados. ¿Cuántos km^2 están cubiertos de agua y cuántos son tierra firme?

Figura 9. Caracterización verbal de un todo continuo discretizado a través de unidades de medida; partes complementarias (Marfil, 2007, pág. 55).

Resultados del análisis de la segunda sección

Como puede apreciarse en la Figura 10, en el párrafo introductorio de esta sección se pone énfasis en la fracción como una relación entre dos cantidades describiéndola como un fracturador. También se hace referencia a la fracción como una cantidad que se puede expresar de diferentes formas a través de fracciones equivalentes.



Figura 10. Párrafo introductorio de la segunda sección (Marfil, 2007, pág. 56).

Esta sección incluye siete apartados (51-57): ¿Quién llega antes?, Dados y fracciones, El paraíso del donut, La abeja en el panal, El lenguaje de las fracciones, Repartos y fracciones y ¿Practicamos un poco? De estos apartados se incluye el análisis de las actividades de cuatro de ellos.

Un juego que requiere comparar y ordenar fracciones se propone en la actividad 51, ver Figura 11. Varias pueden ser las rutas que conducen a la llegada, se comentarán tres. Una es fijarse en la menor distancia entre la salida y la llegada, es decir, la diagonal del rectángulo, el diseñador del juego optó por poner la solución justamente en esa dirección: $\frac{3}{8}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{7}{8}$, $\frac{8}{7}$ y $\frac{8}{3}$; esa situación trivializa la resolución debido a que basta verificar que efectivamente la fracción siguiente es mayor que la anterior.

Otros acercamientos a la resolución del juego son: 1) usar fracciones equivalentes, que conduce a la comparación de números enteros, y 2) determinar el complemento a 1 o 2 unidades de cada una de las fracciones, es decir, de $\frac{1}{2}$ a 1, $\frac{1}{2}$; de $\frac{3}{4}$ a 1, $\frac{1}{4}$; de $\frac{2}{3}$ a 1, $\frac{1}{3}$. Este último acercamiento se puede visualizar con segmentos de recta y en consecuencia se comparan valores de longitud. Obsérvese que en los tres casos el aspecto de la fracción que sobresale es el de comparador.

51. ¿QUIÉN LLEGA ANTES?
Número de jugadores: Dos.
Material: Este tablero.

	$\frac{7}{6}$	$\frac{11}{6}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{8}{3}$	Llegada
	$\frac{6}{5}$	$\frac{11}{12}$	$\frac{8}{9}$	$\frac{8}{7}$	$\frac{8}{9}$	
	$\frac{5}{6}$	$\frac{6}{7}$	$\frac{7}{8}$	$\frac{7}{3}$	$\frac{7}{8}$	
	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{6}{7}$	
Salida	$\frac{3}{8}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{5}{6}$	

Reglas del juego:

- Hay que llegar desde la salida hasta la llegada mediante un camino que una fracciones crecientes.
- No se pueden saltar celdas y te puedes mover desde una celda a otra en sentido horizontal, vertical o en diagonal.
- Gana el jugador o jugadora que haya necesitado ocupar menor número de celdas.

Figura 11. El todo se caracteriza de manera implícita como un segmento de recta (Ibid).

En el apartado 52 (ver Figura 12), se requiere formar 36 fracciones considerando los números que quedan hacia arriba al lanzar un par de dados. Posteriormente se deben identificar las fracciones mayores, menores o iguales que 1 y las fracciones reducibles e irreducibles.

52. DADOS Y FRACCIONES
 Lanzamos dos dados cúbicos de distinto color al aire, escribimos los números que aparecen y formamos con ellos una fracción.

- ¿Cuántas fracciones saldrán mayores que 1? ¿Y menores que 1? ¿E iguales a 1?
- Vamos a fijarnos en las fracciones menores que 1; éstas pueden ser reducibles o irreducibles. Mat apuesta por una fracción reducible y Tica por una irreducible. ¿Quién tiene mayor probabilidad de ganar?
- ¿Y si apuestan con las fracciones mayores que 1?

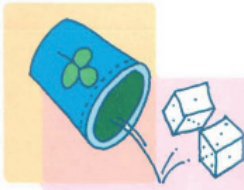


Figura 12. Caracterización a través del texto del todo y las partes (Ibid).

Debido a que las preguntas de los incisos b y c hacen referencia a la probabilidad de un suceso, el aspecto de la fracción es de relación razón.

En el apartado 54 (ver Figura 13), el todo continuo –un polígono– discretizado a través de la partición en 23 partes iguales está caracterizado por la imagen. La relación entre la parte y el todo se caracteriza a través de las expresiones “relación” y “probabilidad”.

Para responder la primera pregunta se debe comparar el número de hexágonos de color rojo con respecto al número de hexágonos de color blanco mediante una relación razón, lo cual se asocia a la fracción como comparador.

Al referirse a la probabilidad de que una abeja esté en la zona roja en la segunda pregunta, la fracción puede describir una relación entre la parte y el todo o una relación razón de tal forma que emerge la fracción como fracturador o comparador.

54. LA ABEJA EN EL PANAL

a) ¿Qué “relación” hay entre la parte roja y la parte blanca del panal?
b) Una abeja se encuentra en este panal.
¿Qué probabilidad hay de que esté en la zona roja?



Figura 13. Caracterización del todo y la parte a través del texto y la información gráfica (Marfil, 2007, pág. 57).

El apartado 55 contiene tres actividades: El lenguaje de las fracciones, 55.1 Deportes y 55.2 La excursión; se incluye el análisis de dos de ellas.

En la primera actividad el todo discreto y las partes están caracterizados mediante los textos: número de alumnos, la mitad, la cuarta parte, la sexta parte y hay dos mujeres, ver Figura 14.

55. EL LENGUAJE DE LAS FRACCIONES

Hay una leyenda que afirma que al preguntar a Pitágoras sobre el número de sus alumnos, respondió: “La mitad estudia Matemáticas, la cuarta parte la naturaleza, la sexta parte medita en silencio; además hay dos mujeres”

☺ Si te preguntamos por el número de sus alumnos, ¿Qué estrategia seguirías?

Es fácil que no hayas sabido resolver este problema, pero, ¿y con estos otros?

Figura 14. Caracterización textual del todo y las partes (Ibid).

Para determinar el número de alumnos se pueden sumar las fracciones $1/2+1/4+1/6=11/12$ e identificar que la parte que falta es la fracción unitaria $1/12$, la cual está formada por dos mujeres. Para reconstruir el todo se puede calcular $2 \times 12 = 24$. A diferencia de la actividad 44.3 El tren, la reconstrucción del todo no implica iterar la fracción unitaria.

Considerando que esta actividad implica la sumatoria de partes de un todo discreto y su reconstrucción, el aspecto de la fracción es de fracturador.

En la actividad 55.2 (ver Figura 15), el todo discreto se caracteriza con las expresiones "... los 200 alumnos" y la parte con "... los $3/8$ ".

55.2. La excursión

Se ha organizado una excursión. De los 200 alumnos y alumnas de 1º de ESO, sólo se han apuntado los $3/8$. ¿Cuántas personas piensan ir de excursión? ¿Cuántos se van a quedar? ¿Qué fracción del total suponen?

Figura 15. Caracterización textual y simbólica del todo y las partes (Ibid).

Para responder la primera pregunta se puede considerar que la fracción $3/8$ representa una relación parte-todo y que ésta se puede reinterpretar como un operador razón convirtiendo una cantidad en otra $3/8 \times 200 = 75$, de tal forma que subyacen los aspectos de la fracción como fracturador y operador razón. Para responder la segunda pregunta se puede calcular $200 - 75 = 125$. En el caso de la tercera pregunta se puede responder calculando $1 - 3/8 = 5/8$ o representando la relación entre el número de personas que se quedan y el número de personas en total a través de una fracción, lo cual en ambos casos se asocia con la fracción como fracturador.

En la actividad 55.3 (ver Figura 16), el todo continuo está caracterizado a través de las palabras "tarta" y "otra igual", las partes mediante las fracciones $3/5$ y $13/20$.

55.3. El goloso

Mat comió en el cumpleaños de Tica los $3/5$ de su tarta y Tica se comió en el de Mat los $13/20$ de otra igual. ¿Quién de los dos comió más?

Figura 16. Caracterización simbólica de las partes (Ibid).

Para comparar las fracciones y determinar cuál es la mayor, se puede convertir la fracción $3/5$ en una fracción equivalente. En esta actividad subyace la fracción como comparador.

CONCLUSIONES

En la primera sección 5 de 9 actividades incluyen “todos” discretos; en dos de éstas, mientras que la información de la imagen puede hacer referencia al todo continuo, las formas textuales y las preguntas centran la atención en el discreto. En la segunda sección 8 de 16 actividades incluyen todos discretos. Por lo tanto, se puede decir que se observa una tendencia al uso de todos discretos.

Con respecto a los aspectos de la fracción, se identificaron los de fracturador, relación razón y operador razón. En las actividades en las que se identificaron dos aspectos distintos, algunas incluyen la fracción como fracturador y como relación razón, y otras la fracción como fracturador y como operador razón.

En relación al modelo de enseñanza tanto la caracterización del todo, la parte y la relación parte-todo, como las preguntas se pueden asociar a diferentes aspectos de la fracción. Las preguntas de las actividades en las que están presentes dos aspectos de la fracción pueden favorecer uno de ellos. Las maneras de resolver las actividades o de responder las preguntas pueden implicar la interpretación de diferentes aspectos de la fracción señalados en el párrafo anterior.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Berh, M., Lesh R., Post, T. y Silver, E. (1983). Rational Number Concepts. En R. Lesh y M. Landau (Eds.), *Acquisition of Mathematics Concepts and Processes*, (pp. 91-125). New York: Academic Press.
- Botella, L. M., Millán, L. M., Pérez, P. y Cantó, J. (2007). *Matemáticas. 1er. Curso de Educación Secundaria Obligatoria* (pp. 50-61). Valencia: Marfil.
- Figueras, O. (1988). *Dificultades de Aprendizaje en dos Modelos de Enseñanza de los Racionales*. Tesis de Doctorado. DME - Cinvestav, México.
- Filloy, E., Rojano, T. y Puig, L. (2008). *Educational Algebra. A Theoretical and Empirical Approach*. New York: Springer.
- Freudenthal, H. (1983). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*. Dordrecht: Reidel.
- Kieren, T. (1976). On the mathematical, cognitive and instructional foundations of rational numbers. En R. Lesh (Ed.), *Number and Measurement* (pp. 101-144). Columbus, OH: ERIC/SMEAC.
- Kieren, T. (1980). The rational number construct - Its elements and mechanisms. En T. Kieren (Ed.), *Recent Research on Number Learning* (pp. 125-150). Columbus, OH: ERIC/SMEAC.
- Kieren, T. (1988). Personal knowledge of rational numbers - Its intuitive and formal development. En J. Hiebert y M. Behr (Eds.), *Numbers Concepts and Operations in the Middle Grades* (pp. 162-181). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Lesh, R., Landau, M. y Hamilton, E. (1980). Rational Number Ideas and the Role of Representational Systems. En R. Karplus (Ed.), *Proceedings of the 4th Conference of the International Group of the Psychology of Mathematics Education* (pp. 50-59). Berkeley, CA: Lawrence Hall of Science.

- Novillis, C. (1976). An analysis of the fraction concept into a hierarchy of selected subconcepts and the testing of the hierarchical dependencies. *Journal for Research in Mathematics Education*, 7, 131-144.
- Puig, L. (1997). Análisis fenomenológico. En L. Rico (Ed.), *La Educación Matemática en la Enseñanza Secundaria* (pp. 61-94). Barcelona: ICE/Horsori.
- Rappaport, D. (1962). The meanings of fractions. *School Science and Mathematics*, 62, 241-244.
- Riess, A. (1964). A new approach to the teaching of fractions in the intermediate grades. *School Science and Mathematics*, 54, 111-119.
- Usiskin, Z. (1979). The future of fractions. *Arithmetic Teacher*, 26, 18-20.
- Yang, D., Reys, R. y Wu, L. (2010). Comparing the Development of Fractions in the Fifth- and Sixth- Graders' Textbooks of Singapore, Taiwan, and the USA. *School Science and Mathematics*, 110 (3), 118-127.

Una comparación entre las demostraciones de Pedro Nunes y al-Khwārizmī de los algoritmos de las formas canónicas de la ecuación de segundo grado

Francisco Infante

Universidad de Valencia, España

Universidad Santo Tomás, Bogotá, Colombia

Luis Puig

Universidad de Valencia, España

Resumen: *En este trabajo sobre la historia de las formas de demostración en álgebra mostramos y explicamos algunas demostraciones de los algoritmos de solución de las formas canónicas de las ecuaciones de segundo grado, basadas en procedimientos de cortar y pegar, que provienen de la tradición del álgebra babilónica, realizadas por al-Khwārizmī en su Kitāb al-jabr w'al-muqābala, y que son las primeras de las que se tiene constancia en la historia del álgebra, comparándolas con las de Pedro Nunes, en su Libro de algebra en arithmetica y geometria que es el primer libro de álgebra escrito en español en el que hay demostraciones.*

Términos clave: *Demostración en álgebra, historia del álgebra, al-Khwārizmī, Pedro Nunes.*

A comparison between Pedro Nunes' and al-Khwārizmī's demonstrations of the algorithms that solve the canonical forms of quadratic equations

Abstract: *In this paper on the history of the ways of demonstration in algebra, we show and explain some demonstrations of the algorithms that solve the canonical forms of quadratic equations carried out by al-Khwārizmī in his Kitāb al-jabr w'al-muqābala.*

These demonstrations are the first ones extant in the history of algebra, and are based on cut and paste procedures, which come from the tradition of Babylonian algebra. We also compare them with Pedro Nunes' demonstrations in his Libro de algebra en arithmetica y geometria, which is the first book on algebra written in Spanish in which these algorithms are demonstrated.

Key words: *demonstration in algebra, history of algebra, al-Khwārizmī, Pedro Nunes.*

INTRODUCCIÓN

Este trabajo se enmarca dentro de un estudio sobre la historia de las formas de demostración en álgebra¹. Desde el comienzo del álgebra árabe medieval ya se hace un esfuerzo explícito por dar una justificación para las soluciones de las formas canónicas, más allá de sólo mostrar el algoritmo de solución. En este sentido la manera en que al-Khwārizmī justifica esos algoritmos en su *Kitāb al-jabr w'al-muqābala* abre el camino a todo un proceso que continuarán otras figuras de la ciencia árabe y que luego tendrá su repercusión en el álgebra de la Europa Medieval, y en particular en Pedro Nunes.

En el libro de álgebra de al-Khwārizmī, lo que hoy llamaríamos ecuación canónica de segundo grado, $y = ax^2 + bx + c$, aparece desglosada en seis formas, tres simples y tres compuestas. Para cada una de las compuestas, al-Khwārizmī presenta un algoritmo de solución y una demostración del algoritmo (o, en un caso, dos demostraciones), basada en procedimientos de cortar y pegar que provienen de la tradición del álgebra babilónica.

Siglos después, Pedro Nunes en su *Libro de algebra en arithmetica y geometria* también presenta una serie de formas canónicas, sus algoritmos y demostraciones.

El presente trabajo pretende mostrar y comparar las demostraciones que realizó al-Khwārizmī, que son las primeras de las que se tiene constancia en la historia del álgebra, con las de Pedro Nunes, que es el primer libro de álgebra escrito en español en el que hay demostraciones.

El artículo está organizado en cuatro secciones: la primera es una breve introducción; en la segunda, se puntualizan algunos aspectos sobre las formas canónicas de las ecuaciones de segundo grado y sus algoritmos a la luz de la obra de al-Khwārizmī; en la tercera, se contextualizan las demostraciones de ambos autores; finalmente, en la cuarta, se estudian en detalle cuatro ejemplos de las pruebas elaboradas. Para ello hemos elegido una sola forma canónica, la primera forma compuesta, que tomamos como ejemplo paradigmático, de la que presentamos tres pruebas de Pedro Nunes y una de al-Khwārizmī (de las dos que presenta, excepcionalmente, en este caso).

Las fuentes que hemos utilizado para examinar las demostraciones son las que indicamos a continuación.

En el caso de al-Khwārizmī, hemos consultado la edición clásica de Rosen (1831), hecha a partir del único manuscrito conocido en su época (Oxford Bodleyan Library, Hunt. 212, fol. 1v-54r, 1342), con traducción al inglés; la reciente edición de Rashed

1. Uno de los productos de ese estudio es el Trabajo de Fin de Máster *Un estudio de las demostraciones de los algoritmos de solución de las formas canónicas de las ecuaciones de segundo grado en al-Khwārizmī, Abū Kāmil, Marc Aurel, Juan Pérez de Moya y Pedro Nunes*, defendido por uno de nosotros en la Universitat de València en 2010 (Infante, 2010).

(2007), hecha a partir de varios manuscritos, con traducción al francés, y la edición de Hughes (1986) de la traducción latina medieval de Gerardo de Cremona. Hemos tenido en cuenta la lección de Høystrup (1998), según la cual la traducción latina de Cremona es mejor testimonio del texto de al-Khwārizmī que el manuscrito árabe conservado en la Bodleyan. Rashed también le da ese valor a la traducción de Cremona en su reciente edición que utiliza más manuscritos. También hemos consultado la edición árabe de Masharrafa y Ahmad (1939), hecha a partir del manuscrito de Oxford y las ediciones de la traducción latina medieval de Robert de Chester (Karpinski, 1915; Hughes, 1989).

La versión castellana la hemos compuesto a partir de la traducción latina de Cremona y la versión francesa de Rashed, contrastándolas con el texto árabe. Hemos usado “tesoro” como traducción de *māl*, término que Rosen traduce por “square”, Rashed por “*carré*” (en cursiva) y Cremona por “census”, siguiendo también en esto la opinión de Høystrup.

En el caso de Pedro Nunes, hemos utilizado el texto original, del que hay dos ediciones que sólo se diferencian en la portada y el pie de imprenta (Nuñez, 1567a, 1567b). También hemos consultado la edición de la Academia de Ciencias de Lisboa de las Obras Completas de Pedro Nunes, en la que el texto aparece en el volumen VI (Nunes, 1946).

Para estudiar esas demostraciones, seguiremos el tipo de análisis usado en Puig (1998, 2011c) en Infante y Puig (2009) y en Infante (2010). En concreto, examinaremos en detalle la construcción de la figuras que sustentan las demostraciones y el papel que desempeñan en éstas, comparándolas con lo que en esos textos se llaman procedimientos de cortar y pegar, siguiendo la interpretación de Høystrup (1994, 1996, 2002a) del álgebra babilónica. En Puig (2011a) se compara explícitamente los procedimientos de cortar y pegar babilónicos con la construcción de las figuras en las demostraciones de al-Khwārizmī, extremo que no podemos tratar aquí.

LAS FORMAS CANÓNICAS

Al-Khwārizmī comienza su libro exponiendo cuáles son las especies de números (*tesoros*, *raíces* y simples números) que se usan en los cálculos, dice que, en los cálculos necesarios para resolver los problemas, “unas [especies de números] pueden ser iguales a otras”, y establece todas las posibilidades, tres simples y tres compuestas, que son las siguientes (escribimos la forma canónica en una traducción conforme del árabe, que conserva la terminología de al-Khwārizmī, y una equivalencia en el lenguaje del álgebra actual):

- 1) Tesoro igual a raíces $x^2 = bx$.
- 2) Tesoro igual a números $x^2 = c$.
- 3) Raíces iguales a números $bx = c$.
- 4) Tesoro y raíces igual a números $x^2 + bx = c$.
- 5) Tesoro y números igual a raíces $x^2 + c = bx$
- 6) Raíces y números igual a tesoro $bx + c = x^2$.

Para lo que hemos llamado especies de números, Pedro Nunes (siguiendo a Luca Pacioli, según Cajori, 1993), usa el término de *dignidades*, y los nombres de las dignidades que se corresponden con *tesoro*, *raíz* y simple número son *censo*, *cosa* y número. Las formas canónicas Pedro Nunes las llama *conjugaciones de la igualdad*, y mantienen la misma estructura y número que las de al-Khwārizmī, es decir, seis conjugaciones organizadas en dos grupos: tres simples, de dos dignidades y tres conjugaciones compuestas por tres dignidades. El orden en que se enuncian es diferente: Pedro Nunes parece haberlas organizado por grado de dificultad, cambiando el orden de las dos últimas conjugaciones compuestas. Sin embargo, es relevante el parecido en la estructura de cada conjugación.

EL ALGORITMO DE SOLUCIÓN DE LA ECUACIÓN CANÓNICA

Para cada una de las seis formas canónicas, al-Khwārizmī propone un algoritmo de solución. Analicemos el de la cuarta forma canónica, “tesoro y raíces igual a números” ($x^2 + bx = 0$), usando el mismo esquema con que en Puig (1998, 2011a) se analiza la quinta forma canónica.

Veremos el algoritmo propuesto y, en paralelo, la simbolización en términos modernos. Al-Khwārizmī utiliza ejemplos genéricos para explicar sus algoritmos y sobre ellos estructura su demostración. En este caso, el ejemplo es el que figura en el recuadro de la página 41.

En la obra de Nunes se pueden encontrar tres grupos principales de algoritmos, el primero son los que él llama *Reglas “antiguas”* –muy semejantes a las de al-Khwārizmī– aunque en términos generales. Hacia el final de la obra se presentan los que Nunes llama *Nuestras Reglas*, que son un nuevo grupo de algoritmos para las conjugaciones compuestas, y, a continuación de éstas, muestra otro nuevo grupo de reglas, enfocadas en la generalización de los algoritmos de solución de las conjugaciones. En este trabajo nos referiremos a los dos primeros grupos.

SOBRE LAS DEMOSTRACIONES

Abdeljaouad (2002) señala que “Lo que distingue a al-Khwārizmī de sus predecesores [...] es su deseo de justificar los algoritmos de resolución de las ecuaciones cuadráticas [...] Esta parte del tratado de al-Khwārizmī no sirve de nada al calculador, pero permite al autor mostrar que su trabajo es científico, en el sentido de que sus objetos matemáticos han sido definidos y las propiedades que se derivan de aquéllos han sido demostradas”.

De manera semejante Pedro Nunes, ha sido muy cuidadoso de estructurar matemáticamente su trabajo, justificando y demostrando todas las “*Reglas de q[ue] vso*”, como él mismo lo menciona (Nunes, 1567a).

Pero volvamos a al-Khwārizmī para examinar qué tipo de pruebas son las que desarrolla. Lo primero que podemos observar es que éstas emplean figuras y construcciones geométricas, pero que no son demostraciones que sigan el esquema de las presentadas en los *Elementos*, con el recurso a definiciones y proposiciones ya demostradas.

Los tesoros más las raíces iguales a un número es por ejemplo cuando dices: un tesoro y diez raíces son iguales a treinta y nueve dirhams, cuyo significado es: de qué tesoro al que se le añaden diez de sus raíces el total es treinta y nueve.	$x^2 + 10x = 39$	$x^2 + bx = c$
Procedimiento: divide en dos las raíces, lo que en este problema resulta cinco.	$\frac{10}{2} = 5$	$\frac{b}{2}$
Multiplicalo por sí mismo, y resulta veinticinco.	$(5)^2 = 25$	$\left(\frac{b}{2}\right)^2$
A lo que le añades treinta y nueve, y será sesenta y cuatro.	$25 + 39 = 64$	$\left(\frac{b}{2}\right)^2 + c$
Cuya raíz extraes, que es ocho;	$\sqrt{64} = 8$	$\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + c}$
de la que subtraes la mitad de las raíces, que es cinco. Queda tres,	$8 - 5 = 3$	$\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + c} - \frac{b}{2}$
que es la raíz del tesoro, y el tesoro es nueve.		
(Rashed, 2007, pp. 100-101; Hughes, 1986, p. 234)		

En las pruebas de al-Khwārizmī hay figuras geométricas, como también las hay en el texto euclideo, pero la demostración es un discurso que describe operaciones de cortar y pegar las figuras y de relacionar partes de ellas, y que no busca el fundamento en definiciones, postulados y proposiciones ya demostradas, sino en lo que se atestigua por la vista, sin poner en duda en ningún momento lo que se ve.

En Puig (2009b, 2011b, 2011c) se propone una clasificación preliminar de las demostraciones en textos algebraicos pre-simbólicos en tres grandes tipos, denominados “demostraciones ingenuas”, “demostraciones geométricas” y “demostraciones algebraicas”. Se llama “ingenua” a una demostración cuya argumentación se apoya en una figura geométrica que está acompañada de letras, y en un discurso que se refiere a lo que se ve en la figura, y a acciones sobre ella, y en el que la garantía de la verdad de lo que se dice es lo que se ve en la figura. “Geométrica” se reserva para las demostraciones que siguen el modelo euclideo, en las que sigue habiendo figuras geométricas, pero en las que la garantía de la verdad ya no reside en lo que se ve en la figura, sino en el conjunto de la arquitectura del texto euclideo: definiciones, postulados y proposiciones ya demostradas. Finalmente, se llaman “algebraicas” las demostraciones en las que las figuras geométricas han desaparecido, y el discurso demostrativo se apoya en las operaciones que se realizan con las expresiones algebraicas.

Siguiendo esta caracterización, diremos que las demostraciones de al-Khwārizmī son “ingenuas”, y que, en algunos momentos hay un embrión de demostración “algebraica” (este extremo no lo mostramos en este artículo, pero sí en Puig, 2011b), pero no hay demostraciones “geométricas”². Veremos también cómo las pruebas realizadas por Pedro Nunes son “geométricas”, y en algunos casos “algebraicas”.

LAS DEMOSTRACIONES DE LA CUARTA FORMA CANÓNICA

Al-Khwārizmī propone para esta forma canónica dos pruebas diferentes, lo que ya es una singularidad. De la primera de ellas, Høyrup (1996) ha logrado rastrear sus orígenes en Babilonia, y es una prueba que utiliza una figura diferente de la que veremos aquí, que en su construcción no sigue estrictamente el algoritmo, que presenta una explicación más detallada y que emplea una identidad algebraica en su argumento.

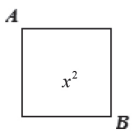
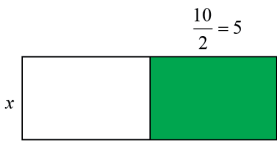
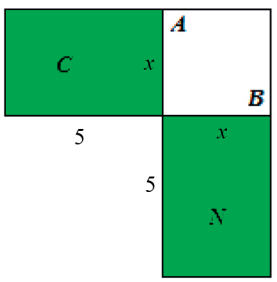
Hemos escogido para este trabajo la segunda prueba de al-Khwārizmī, porque en ella se sigue fielmente el algoritmo de solución en la construcción de la figura. Además esta demostración presenta un cercano parecido con las que luego desarrollará Pedro Nunes. Esta prueba utiliza lo que Høyrup (1994) considera que era un procedimiento ya conocido por los babilonios, con el nombre del “Método Akadio”.

Para analizarla, seguiremos el texto, realizando la comparación con el algoritmo en notación moderna y como ejemplo genérico, y, en paralelo, describiremos la construcción de la figura. Es importante anotar cómo los dos autores sólo presentan para cada demostración una figura ubicada al final de la demostración.³

2. El hecho de que las demostraciones de al-Khwārizmī no siguen el patrón euclídeo, y por tanto no son “geométricas” en el sentido que estamos dándole a ese calificativo, ya está presente en el mismo siglo IX. El ejemplo más claro de ello es el opúsculo que escribe Thābit ibn Qurra (836-901), con el expresivo título de *La rectificación de los problemas del álgebra mediante demostraciones geométricas* (Luckey, 1941). Thābit ibn Qurra llama “geométricas” a las demostraciones que nosotros estamos llamando “geométricas”, por lo que no hay en ellas procedimientos de cortar y pegar a la manera akadia, y sí hay referencia explícita al entramado demostrativo de los *Elementos* de Euclides. En Puig (2011c) se compara una demostración “ingenua” de al-Khwārizmī con una demostración “geométrica” de Thābit ibn Qurra.

3. En las ediciones del texto de al-Khwārizmī revisadas sólo aparece una figura, al final de cada una de las pruebas. La única excepción que conocemos es la edición de Karpinski (1915) de la traducción latina medieval de Robert de Chester, en la que en particular para esta prueba del cuarto caso se muestran dos figuras como del Manuscrito de Dresden, pero todo apunta a que sea de la mano de algún comentarista.

DEMOSTRACIÓN DEL ALGORITMO PARA TESORO Y RAÍCES IGUAL A NÚMEROS (VERSIÓN 2) DE AL-KHWĀRIZMĪ

<i>al-Khwārizmī</i>	Algoritmo Ej. Genérico	Algoritmo Not. Moderna	Representación Geométrica
<p>En cuanto a la causa es la que sigue [...] (Rashed, 2007, pp. 108-109; Hughes, 1986, p. 236) Hay otra figura que conduce a lo mismo: que es la superficie <i>AB</i>, que es el tesoro. Queremos añadirle diez de sus raíces.</p>	$x^2 + 10x = 39$	$x^2 + bx = c$	
<p>Dividimos entonces diez en dos mitades y resulta cinco. Y hacemos de ella dos superficies</p>	$\frac{10}{2} = 5$	$\frac{b}{2}$	
<p>en las dos partes de <i>AB</i>, que son las superficies <i>C</i> y <i>N</i>, cuya longitud es igual a los lados de la superficie <i>AB</i>, y cuya anchura es cinco, que es la mitad de diez. Nos queda por tanto sobre la superficie <i>AB</i> un cuadrado que es de cinco por cinco, que es la mitad de diez raíces que habíamos añadido en las partes de la primera superficie. Sabemos que la primera superficie es el tesoro y que las dos superficies que están sobre sus dos partes son diez de sus raíces, y que todo es treinta y nueve,</p>	$(5)^2 = 25$	$\left(\frac{b}{2}\right)^2$	

<i>al-Khwārizmī</i>	Algoritmo Ej. Genérico	Algoritmo Not. Moderna	Representación Geométrica
<p>y que falta para completar la figura más grande el cuadrado de cinco por cinco. Éste es veinticinco, que añadimos a treinta y nueve para completar la superficie más grande, que es la superficie <i>DE</i>. Se obtiene de todo esto sesenta y cuatro. Tomamos su raíz, que es un lado de la superficie más grande, que es ocho. Si le quitamos lo mismo que le habíamos añadido, que es cinco, queda tres, que es el lado de la superficie <i>AB</i>, que es el tesoro, y por tanto es su raíz, y el tesoro es nueve. [Y ésta es la figura]</p> <p>(Rashed, 2007, pp. 110-113; Hughes, 1986, p. 238)</p>	$25 + 39 = 64$	$\left(\frac{b}{2}\right)^2 + c$	<p>Figura 1</p>
$\sqrt{64} = 8$	$\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + c}$		
$8 - 5 = 3$	$\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + c} - \frac{b}{2}$		

DEMOSTRACIONES DE PEDRO NUNES

Las pruebas de las conjugaciones de Nunes se pueden organizar en varios grupos. En el primero las demostraciones tienen un referente geométrico, y se apoyan en proposiciones del segundo libro de los *Elementos* de Euclides. Estas pruebas presentan rasgos comunes con las de al-Khwārizmī. Un segundo grupo está formado por las pruebas que se basan en la proposición I.47 de los *Elementos* (teorema de Pitágoras) sobre la que se estructura el esquema demostrativo de la prueba. Un tercer grupo está formado por las pruebas de las “Reglas Nuevas”, los algoritmos nuevos propuestos por Nunes. Este grupo es relevante, porque estas pruebas no tienen un referente geométrico, son “algebraicas”. Finalmente, en un último grupo se demuestran estas mismas “Reglas Nuevas” nuevamente con el apoyo del libro segundo de los *Elementos*.

En este trabajo sólo profundizaremos en los primeros tres grupos citados, comenzando por las pruebas de referente geométrico. Así a continuación se presentan las pruebas de Pedro Nunes correspondientes a la misma cuarta forma canónica de al-Khwārizmī.

DEMOSTRACIÓN DEL ALGORITMO ANTIGUO DE LA PRIMERA CONJUGACIÓN COMPUESTA (VERSIÓN 1) PEDRO NUNES

Pedro Nunes	Notac. Moderna	Representación Geométrica
<p>La mitad del numero de cosas se represente por la línea a. b. La qual lleuaremos a delante estendiendola hasta el punto c. y sea b. c. vn lado del censo ignoto, el qual censo juntamente con las cosas q nos fueron propuestas en numero noto aun q el valor de cada vna sea ignoto, se ygualan con el numero que por si pulsamos noto por tercera cantidad de la conjugacion primera, y queremos por estas cosas concedidas conocer quanto sea el valor dela cosa, q es la raiz del quadrado fundado sobre la línea b. c. Haremos por</p> <p>tanto sobre toda la linea a. c. el quadrado a. c. d. e. y sobre la linea b. c. el quadrado b. c. g. f. q es el censo propuesto. y entenderemos las dos</p>	<p>CONS. GEOMETRICA Se construye el segmento AC con</p> $AB = \frac{b}{2}$ $BC = x$ $x^2 + bx = c$ <p>Si sabemos que b y c son constantes conocidas</p> <p>Se realizan las construcciones de los cuadrados ACDE y BCGF = x²</p>	
<p>líneas b. f. f. g. hasta los puntos y. h. en los lados e. d. a. e. y la figura e. y. f. h. resultara quadrada, y los dos rectangulos a. b. f. h. y f. g. d. y. seran yguales, por la ygualdad de las líneas opo sitas equidistantes, y de los dos lados del quadrado b. c. f. g.</p> <p>Es por que a. b. es la mitad del numero delas cosas que fueron propuestas, y la línea b. f. es lado del censo ignoto, sera por esta causa el rectangulo a. b. f. h. la mitad del valor delas dichas cosas conforme a la doctrina del capitulo passado, y otro tanto valdra el rectangulo f. g. d. y. y los dos rectangulos juntos seran el entero valor delas cosas.</p>	<p>Se extienden los dos segmentos BF y FG hasta los puntos Y y H en los lados ED y AE</p> <p>EYFH cuadrado, ABFH = FG DY</p> $AB = \frac{b}{2}$ $BF = x$ $ABFH = \frac{bx}{2}$ $FGDY = \frac{bx}{2}$ $ABFH + FG DY = bx$	<p style="text-align: center;">$ABFH = FG DY$ $ABFH + FG DY = bx$</p>
<p>Es por q las [cosas] fas con el censo todo juntamente fue propuesto yguual a vn cierto numero o cantidad nota, seran por esta causa los dos rectangulos con el censo o quadrado b. c. g. f. en vna Sūma conocidos.</p> <p>A esta Sūma añadiremos el quadrado e. y. f. h. el qual es noto, por que tiene por lado la línea f. h. q por ser yguual a la línea a. b. es conocida, y resultara el quadrado vniuersal</p>	<p>Por la premisa de la demostración</p> $x^2 + bx = c$ $ABFH + FG DY + BCGF = c$ $\left. \begin{array}{l} ABFH + \\ FG DY + \\ BCGF + \\ EYFH \end{array} \right\} = ACDE$	

La estructura de esta prueba posee tres partes y una introducción. En la primera, se construye la figura justificando cada paso con propiedades geométricas, y, una vez que se tiene esta figura con las características adecuadas, comienza la segunda parte en la que se hace una traducción del algoritmo de solución de la conjugación a cada una de los elementos correspondientes de la figura; la tercera y última parte es un comentario en el que se cuenta cómo Euclides utilizó esta misma demostración y figura para probar una determinada proposición, en este caso la II.4, y se explica cómo esta proposición está íntimamente relacionada con la prueba en cuestión.

De esta manera Nunes organiza toda su prueba, sin nombrar a Euclides, pero teniéndolo en mente, pues, después de que parece que ha terminado la prueba con todo el rigor necesario, incluye la proposición de los Elementos que encaja perfectamente en el razonamiento, como volviendo a demostrarlo, pero esta vez con el respaldo de Euclides.

La división en estas tres fases, construcción geométrica, traducción del algoritmo y fase euclídea, es uno de los dos modelos, que con frecuencia va a utilizar Pedro Nunes como estructura de sus demostraciones.

La idea básica de la prueba es la misma: la relación entre el cuadrado mayor con los dos cuadrados pequeños y los dos rectángulos congruentes contenidos todos ellos en el mayor. Pero en la demostración de Nunes se pueden contar las tres fases anotadas. Es diferente el formato de al-Khwārizmī, en el que las propiedades geométricas están inmersas en la misma discusión sobre el algoritmo y en la construcción de la prueba.

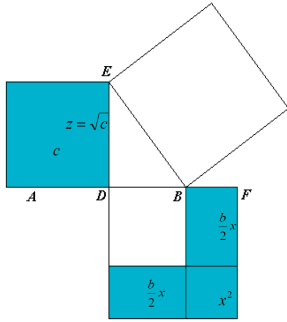
Por otro lado, la función que desempeña la figura es diferente en las dos demostraciones aunque en ambas se busque el respaldo de la geometría para darle validez al argumento de la prueba. En la de al-Khwārizmī la figura es fundamental en tanto que sobre ella se realizan transformaciones y se visualizan relaciones, y es sobre ella que se entiende la demostración a partir de lo que se ve. Sin embargo, en la de Pedro Nunes, aunque la figura también cumple un papel ilustrativo del razonamiento y marca claramente las relaciones entre sus partes, estas relaciones ya no son por la figura en sí, sino por las propiedades generales allí representadas, que ya han sido justificadas y son necesarias para poder desarrollar la demostración. Ahora bien, sí que es importante la figura en la de Pedro Nunes en cuanto al detalle con que se ha construido para que sea una réplica de la presentada por Euclides, de manera que sea evidente la inclusión en el razonamiento de la proposición adecuada de los Elementos —en este caso la II. 4—, con lo cual el criterio de validez de la prueba ha tomado otro nivel.

Veamos en el apartado siguiente la prueba de esta misma conjugación, pero ahora con el uso de la proposición I.47 (teorema de Pitágoras).

DEMOSTRACIÓN DEL ALGORITMO ANTIGUO DE LA PRIMERA CONJUGACIÓN COMPUESTA (VERSIÓN 3) PEDRO NUNES

<i>Pedro Nunes</i>	Notac. Moderna	Representación Geométrica
<p>Sea la línea a. b. el numero delas cosas,y el numero que pufimos ser yqual alas cosas con el censo tenga por lado quadrado [raíz cuadrada] la linea⁵ z</p> <p>y partiremos la línea a. b. por la mitad enel punto d. y desse mismo punto falga la línea d. e. que haga angulos rectos con la línea a. b. y haremos d. e. yqual ala línea z</p> <p>y del punto e. para b. lleuaremos línea recta e. b. y quedara por este modo constituido el triangulo rectangulo e. d. b. Estenderemos pues la línea d. b. quanto cumpliere, y della cortaremos d. f. yqual ala línea e. b. y dezimos. Que la línea b. f. es lado de vn censo, que juntamente con las cosas cuyo numero es a. b. se yquala con el numero propuesto, que tiene por lado cuadrado [raíz cuadrada] la línea z y la demonstracion sera esta</p>	<p>Sean: $AB=b$ $z=\sqrt{c}$</p> <p>Se construye $ED \perp AB$ en el punto D, con $DB = \frac{b}{2}$ $DE=z=\sqrt{c}$</p> <p>Triángulo EDB es rectángulo $DF=EB$ $BF=x$</p> <p>Sea la premisa a demostrar: $x^2 + bx = c$ y la demostración será esta:</p>	
<p>El quadrado de b. e. es yqual al quadrado de e. d. y al quadrado de d. b. ambos juntos, por la proposició .47. del primero lib. de Euclides. Y porq̄ b. e. y d. f. son yguales, tanto valdra luego el folo quadrado de d. f. quanto los dichos dos quadrados de b. d. y d. e.</p>	<p>$BE^2=DE^2+DB^2$ por la proposición I.47 de los <i>Elementos</i>, y como: $BE=DF$ $DF^2=DE^2+DB^2$</p>	
<p>Y por que esse mismo quadrado de d. f. vale tanto como los dos quadrados de b. d. y de b. f. con el duplo del rectangulo cõprehẽso por d. b. y b. f. por la .4. propo proposicio[n] del segu[n]do lib. [Euclides II.4]</p>	<p>Y como también: $DF^2=DB^2+ 2DB \times BF +BF^2$ por la proposición II.4 de los <i>Elementos</i></p>	

5. Se ha cambiado la notación original de Pedro Nunes, para la línea c por z, en favor de la claridad.

Pedro Nunes	Notac. Moderna	Representación Geométrica
<p>facaremos por tanto deffas dos sūmas q̄ por cōmun fentencia fon yguales, el cōmun quadrado, q̄ es dela línea b.d. y q̄dara el quadrado dela línea d. e. ygual a la sūma de quadrado de b. f. con el duplo del rectangulo comprehenfo por d.b. y b.f.</p> <p>Y porque d.b. es la mitad del numero delas cosas, pornemos b.f. lado del cenfo, y fera por tanto el rectangulo comprehenfo por d. b. y b.f. la mitad del valor delas cosas, y el duplo deste rectangulo fera el entero valor dellas, y el cenfo con las cosas ferā yguales al quadrado dela línea d. e. q̄ pufimos ygual a la línea z cuyo quadrado pufimos que fueffe el número, q̄ en principio auemos puesto fer ygual a las cosas juntamente con el cenfo, y esto es lo que queriamos demostrar.</p> <p>(Nuñez, 1567a, f. 14r.)</p>	$\begin{cases} DF^2 = DE^2 + DB^2 \\ DF^2 = DB^2 + 2DB \times BF + BF^2 \end{cases}$ $DE^2 = 2DB \times BF + BF^2$ <p>Y como:</p> $DB = \frac{b}{2}$ $BF = x$ $DB \times BF = \frac{bx}{2}$ $DE = z = \sqrt{c}$ <p>Entonces:</p> $2DB \times BF = bx$ $DE^2 = c$ <p>Luego:</p> $DE^2 = 2DB \times BF + BF^2$ $c = bx + x^2$ <p>y esto es lo que queriamos demostrar.</p>	 <p>Figura 3</p>

Aparte de incluir la proposición I.47 de los *Elementos*, que permite establecer nuevas relaciones entre los términos de la expresión y que obliga al necesario cambio en su representación gráfica, además, esta prueba presenta ciertas variantes interesantes.

El rigor es el rasgo fundamental aquí, ya que es por esta razón por la que se ha estructurado la prueba. Pedro Nunes considera las demostraciones “antiguas” faltas de rigor – ya que presuponen la existencia de la solución de la ecuación– y decide presentar este grupo de pruebas, en donde el presupuesto de la igualdad de la conjugación se demuestre. En otras palabras, Pedro Nunes busca probar que la ecuación es posible, que siempre tendrá respuesta.

En sus palabras “[...] en la demonstracion de la primera [conjugación] *presuponemos*, que vn censo con las cosas en qualquier numero que ellas sean, puede[n] ser yguales aqualquier numero, [...] [y] *este presupuesto no es cierto. Por lo qual sera necesario demostrarlo. [...]*”⁶ (Nuñez, 1567a, f. 14r.).

Por esto Nunes comienza su prueba con dos segmentos –los dos datos de la ecuación b y c o, más exactamente, b y $\sqrt{c} - y$, a partir de ellos, con el uso de la proposición I.47 y de la II.4 y el andamiaje construido, consigue establecer la conjugación que quiere demostrar, con lo cual ha logrado su principal objetivo: mostrar que la conjugación siempre tiene solución.

La estructura de esta prueba no es lineal, pues simultáneamente está llevando adelante dos razonamientos: por una parte, las relaciones pitagóricas entre los segmentos y sus áreas, y, por otra parte, la estructura para el uso de II.4. En la medida en que se ha construido desde los primeros pasos el cuadrado del lado DF y sus polígonos relacionados, se percibe la estructura de la prueba y el uso de II.4. El punto culminante es el uso

6. La cursiva es nuestra.

de la identidad que permite interrelacionar estos dos argumentos en uno solo: “[...] sacaremos por tanto destas dos sumas q[ue] por comun sentencia son yguales, el comun quadrado, q[ue] es dela linea BD y q[ue] dara el quadrado dela linea DE ygal a la summa del quadrado BF con el duplo del rectangulo co[m]prehenso [comprendido] por BD y BF [...]”⁷. Y a partir de este momento se retoma la demostración puntual de la conjugación utilizando la proposición II.4, pero se ha ganado todo el razonamiento preliminar.

Finalmente, revisemos las pruebas que realiza Nunes para sus nuevos algoritmos, pero sin utilizar el referente geométrico, tal vez la más clara evolución en la obra del proceso de prueba hacia nuestra idea moderna de demostración matemática.

DEMOSTRACIÓN DEL ALGORITMO NUEVO PARA LA PRIMERA CONJUGACIÓN COMPUESTA PEDRO NUNES

<i>Pedro Nunes</i>	Comentario	Algoritmo Nuevo (AN)	Algoritmo Antiguo (AA)
E STas nuestras Reglas tienen su fundamento en las antiguas, que en su lugar auemos demostrado.	La prueba busca establecer la equivalencia entre los dos algoritmos	$x^2 + bx = c$ b	$x^2 + bx = c$ $\frac{b}{2}$
Porque multiplicamos todo el numero de las cosas en si, y el numero por 4, y por la Regla antigua, multiplicauamos en si la mitad del numero de las cosas, y el numero no se multiplicaua. Y quedara por tanto proporcion quadrupla entre el quadrado del numero de las cosas, y el quadrado dela mitad, como tambien el numero crecio en quadruplo. Y la razón de esto es, que el duplo y el subduplo multiplicados en si, hazen quadruplo y subquadruplo, [proporción en cuartas partes]	En el Algoritmo Nuevo (AN) se eleva al cuadrado el término de las cosas $[b^2]$ y el número $[c]$, el término indep.] se multiplica para ser $4c$. En el Algoritmo Antiguo (AA) se eleva al cuadrado la mitad del número de las cosas $\left[\left(\frac{b}{2}\right)^2\right]$ y el número $[c]$ no se multiplica. Los dos términos del AN quedan en proporción cuádrupla (son cuatro veces) con respecto a los términos del AA.	b^2 $4c$	$\left(\frac{b}{2}\right)^2$ c

7. Veamos esta parte del razonamiento en notación moderna

Sean $z = \sqrt{c} = ED, AB = b, DB = \frac{b}{2}, BF = x$

$$BE^2 = ED^2 + DB^2$$

Si $BE = DF$

$$\left\{ \begin{array}{l} DF^2 = ED^2 + DB^2 \\ DF^2 = DB^2 + 2DB \times BF + BF^2 \end{array} \right.$$

$$ED^2 = 2DB \times BF + BF^2$$

$$c = bx + x^2$$

<i>Pedro Nunes</i>	Comentario	Algoritmo Nuevo (AN)	Algoritmo Antiguo (AA)
<p>y los quadruplos en vna sūma tambiē quedan en la mīma proporciō quadrupla con los subquadruplos pueitos en vna sūma. Y esto se demuestra por el quinto libro de Euclides: porque si de vn antecedente para su conseqente ay la proporciō q̄ tiene otro antecedente con su conseqente, tal proporciō aura de los antecedentes juntos a los conseqentes juntos, qual ay de vno de los antecedentes a su cōseqente, y esto sirve para la primera Regla.[...]</p> <p>y desta manera lo que por vna vía refulta, ora sea fumando, como en la primera sera quadrupla a lo que refulta por la otra vía,</p>	<p>Las sumas de los términos que son consecuentes en una proporción cuádrupla, también quedan en proporción cuádrupla con respecto a la suma de sus antecedentes.</p> <p>Esto se demuestra por la proposición V.12 de los <i>Elementos</i>.⁸</p> <p>De esta forma la expresión del AN será cuádrupla (cuatro veces) la del AA.</p>	$b^2 + 4c$	$\left(\frac{b}{2}\right)^2 + c$
	<p>Luego la raíz de esta expresión en el AN es el doble de la expresión en el AA.</p> <p>Así el valor de la cosa [x] será el mismo por ambos procedimientos.</p>	$\sqrt{b^2 + 4c}$ $2x = \sqrt{b^2 + 4c} - b$ $x = \frac{1}{2}[\sqrt{b^2 + 4c} - b]$	$\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + c}$ $x = \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + c} - \frac{b}{2}$ $x = \frac{1}{2}[\sqrt{b^2 + 4c} - b]$

El esquema de esta demostración consiste en lograr la equivalencia que establece Pedro Nunes entre el algoritmo “antiguo” ya demostrado y el algoritmo nuevo que hay que demostrar. Esa equivalencia la consigue apoyándose en la *Teoría de las proporciones*.

Esta prueba marca una profunda diferencia dentro de las presentadas por Nunes, en la medida en que cambia radicalmente el contexto de justificación. Aunque sigue inmerso dentro del marco de los *Elementos* y por ende mantiene parte de las características que ha empleado en otras pruebas, como el rigor, o la justificación de cada paso en términos de reglas o proposiciones ya demostradas, sin embargo, se desprende del referente geométrico, las justificaciones vienen ahora de la *Teoría de las proporciones*, del Libro V de los *Elementos*.

Este cambio en el marco de justificación también implica cambios en el lenguaje empleado y la forma de justificación, lo que implica separarse del referente concreto, de la figura, para pensar en nuevas reglas y propiedades, más abstractas. Pero más allá de ello, este cambio implica el que se utilicen identidades algebraicas como justificaciones, y por ende transformaciones algebraicas, no exactamente iguales a las actuales, pero

8. Euclides V.12: "Si un número cualquiera de magnitudes fueren proporcionales, como sea una de las antecedentes a una de las consecuentes, así serán todas las antecedentes a las consecuentes" (Puertas, 1991, v.2, p. 37).

identidades sobre variables, en términos de proporciones, y en proposiciones del Libro V de Euclides.

A manera de conclusión

Hemos visto cómo las ecuaciones canónicas en al-Khwārizmī y Pedro Nunes están estrechamente relacionadas, manteniendo la misma estructura y cantidad, a pesar de las diferencias plasmadas en el lenguaje y la generalidad.

En los autores estudiados se notan cambios en los tipos de demostración, desde unas primeras demostraciones realizadas con la ayuda de figuras en que la justificación de los argumentos y transformaciones se da por procesos de “cortar y pegar”, y donde la veracidad está dada en términos de aquello que se ve. Para pasar luego a un estado de pruebas en que también con la ayuda de figuras se estructuran argumentos pero donde la veracidad está expresada en términos de las propiedades de las figuras y sus particulares características, incluyendo ahora como herramienta de demostración todo el saber geométrico y en particular las proposiciones de los *Elementos* de Euclides. Para pasar finalmente a demostraciones en donde la referencia a la figura ya no es necesaria, pero más que eso, es que toda la función justificadora de la Geometría se ha remplazado por otras herramientas, las del álgebra, en particular las de la Teoría de las proporciones, plasmada en los *Elementos* de Euclides.

También hay diferencias en los dos autores estudiados en cuanto a la función de la figura en la prueba. Ya hemos dicho que en al-Khwārizmī la figura es fundamental ya que sobre ella se visualizan relaciones y se realizan transformaciones, y la garantía de la verdad de la demostración está en lo que se ve; mientras que en Pedro Nunes lo que se busca en la figura son las propiedades generales que ya han sido demostradas en los *Elementos* de Euclides, y la garantía de verdad es la arquitectura euclídea, por lo que la importancia del examen de la figura en detalle reside en que sea una réplica de la presentada por Euclides, de manera que sea evidente la inclusión en el razonamiento de la proposición adecuada de los *Elementos*.

Finalmente otro aspecto que vale la pena destacar es el cambio en el rigor, desde argumentos justificados por la figura, y las características que “se ven” en ella en al-Khwārizmī, se va cambiando en Pedro Nunes hacia pruebas justificadas por propiedades geométricas y proposiciones de los *Elementos*, hasta proponer una prueba en que más que justificar el algoritmo, lo que se busca demostrar es la seguridad de su existencia en todos los casos. Aspecto éste que lleva el rigor matemático a una nueva cota.

REFERENCIAS

- Abdeljaouad, M. (2002). La demostración en el álgebra de los árabes. *La lettre de la Preuve. International Newsletter on the Teaching and Learning of Mathematical Proof* [en línea], Hiver 2002. Recuperado el 2 de julio de 2012 de <http://www-didactique.imag.fr/preuve/Newsletter/02Hiver/02hiverThemeES.html>
- Cajori, F. (1993). *A History of Mathematical Notations*. New York: Dover.

- Høyrup, J. (1994). The Antecedents of Algebra. *Filosofi og videnskabsteori på Roskilde Universitetcenter. 3. Række: Preprint og Reprints*, 1994 nr. 1.
- Høyrup, J. (1996). The Four Sides And The Area. Oblique Light on the Prehistory of Algebra. In R. Calinger (Ed.), *Vita mathematica. Historical Research and Integration with Teaching*, 45-65. Washington, DC: Mathematical Association of America.
- Høyrup, J. (1998). “Oxford” and “Cremona”: on the relation between two versions of al-Khwarizmi’s algebra. In Association Algérienne d’Histoire des Mathématiques. *Actes du 3me Colloque Maghrébin sur l’Histoire des Mathématiques Arabes*, vol. 2. 159–178. Tipaza (Alger, Algérie), 1-3 Décembre 1990.
- Høyrup, J. (2002a). *Lengths, Widths, Surfaces. A Portrait of Old Babylonian Algebra and Its Kin*. New York: Springer.
- Hughes, B. (1986). Gerard of Cremona’s Translation of al-Khwārizmī’s al-jabr: A Critical Edition. *Mediaeval Studies* 48, 211-263.
- Hughes, B. (1989). *Robert of Chester’s Translation of al-Khwārizmī’s al-jabr: A New Critical Edition*, Boethius, Band XIV. Stuttgart: Franz Steiner Verlag.
- Karpinski, L. (1915). *Robert of Chester’s Latin Translation of The Algebra of Al-Khowarizmi*. New York: The MacMillan Company, University of Michigan Studies.
- Infante, J. F. (2010). *Un estudio de las demostraciones de los algoritmos de solución de las formas canónicas de las ecuaciones de segundo grado en al-Khwārizmī, Abū Kāmil, Marc Aurel, Juan Pérez de Moya y Pedro Nunes*. Trabajo Fin de Máster del Máster de Investigación en Didácticas Específicas. Universitat de València.
- Infante, J. F., Puig, L. (2009). Demostraciones de los algoritmos de las ecuaciones de segundo grado en el *Kitāb Al-Jabr W’al-Muqābala* de Al-Khwārizmī. En M. J. González; M. T. González; J. Murillo (Eds.): *Investigación en Educación Matemática. Comunicaciones de los grupos de investigación. XIII Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática SEIEM*. Santander.
- Luckey, P. (1941). Tābit b. Qurra über den geometrischen Richtigkeitsnachweis der Auflösung der quadratischen Gleichungen, *Sächsischen Akademie der Wissenschaften zu Leipzig. Mathematisch-physische Klasse. Berichte* 93, 93-114.
- Masharrafa, A. M. y Ahmad, M. M. (Eds.) (1939). *Al-Khwārizmī, Muhammad ibn Mūsa. Kitāb al-mukhtasar fī hisāb al-jabr wa’l-muqābala*. Cairo: al-Qahirah. Reprinted 1968.
- Nunes P. (1946). *Obras Vol. VI. Libro de Algebra en arithmetica y geometria*. Lisboa: Imprensa Nacional de Lisboa, Academia das Ciências de Lisboa.
- Nuñez P. (1567a). *Libro de Algebra en arithmetica y geometria*. Compuesto por el Doctor Pedro Nuñez, Cosmógrafo Mayor del Rey de Portugal, y Cathedratico Iubilado en la Cathedra de Mathematicas en la Vniversidad de Coymbra. Anvers: En la casa de los herederos d’Arnoldo Birckman a la Gallina gorda.
- Nuñez P. (1567b). *Libro de Algebra en arithmetica y geometria*. Compuesto por el Doctor Pedro Nuñez, Cosmógrafo Mayor del Rey de Portugal, y Cathedratico Iubilado en la Cathedra de Mathematicas en la Vniversidad de Coymbra. Anvers: En la casa de la biuda y herederos de Iuan Stelsio.
- Puertas, M. (Ed.) (1991). *Elementos de Euclides*, v. 1, 2 Madrid: Gredos.
- Puig, L. (1998). Componentes de una historia del álgebra. El texto de al-Khwārizmī restaurado. En F. Hitt (Ed.) *Investigaciones en Matemática Educativa II* (pp. 109-131). México, DF: Grupo Editorial Iberoamérica.

- Puig, L. (2009b). Naïve, geometric and algebraic proof in ancient and modern times. Talk to the meeting Semiotic Approaches to Mathematics, the History of Mathematics, and Mathematics Education (SemMHistEd) – 3rd Meeting. Aristotle University of Thessaloniki, July 16-17, 2009.
- Puig, L. (2011a). Researching the History of Algebraic Ideas from an Educational Point of View. In. V. Katz & C. Tzanakis (Eds.) *Recent Developments on Introducing a Historical Dimension in Mathematics Education* (pp. 29-42). Washington, DC: The Mathematical Association of America.
- Puig, L. (2011b). Historias de al-Khwārizmī (6ª entrega). El cálculo con la cosa. *Suma*, 67, pp. 101-110.
- Puig, L. (2011c). Historias de al-Khwārizmī (7ª entrega). Figuras y demostraciones. *Suma*, 68, pp. 93-102.
- Rashed, R. (Ed.) (2007). *Al-Khwārizmī. Le commencement de l'algèbre*. Paris: Librairie Scientifique et Technique Albert Blanchard.
- Rosen, F. (1831). *The algebra of Mohammed Ben Musa*. London: Oriental Translation Fund.

Quiénes son y qué citan los autores españoles de educación matemática en el *Social Science Citation Index*

Noelia Jiménez-Fanjul
Alexander Maz-Machado
Rafael Bracho-López
Universidad de Córdoba

Resumen: *Este estudio analiza las referencias citadas en los artículos publicados por autores españoles de Educación Matemática en revistas indexadas en el Social Science Citation Index. El propósito del estudio es conocer cuáles son los autores y los documentos más citados y por tanto identificar a los autores más influyentes en el área en España. Se utilizaron técnicas bibliométricas ampliamente conocidas y utilizadas a nivel nacional e internacional. Se halló que el autor más citado es español y una alta citación de artículos y autores relacionados con la resolución de problemas, la psicología del aprendizaje y las aplicaciones de teorías de la educación matemática.*

Palabras Clave: *Educación matemática, investigación, España, análisis de referencias.*

Who are the Spanish authors of mathematics education and what cited in the *Social Science Citation Index*

Abstract: *This study analyzes the references cited in articles published by Spanish authors of Mathematical Education in indexed journals in the Social Science Citation Index. The purpose of the study is to know what the most cited authors and papers are and therefore identify the most influential authors in the field in Spain. Widely known and used at national and international level bibliometric techniques were used. It was found that the most cited author is Spanish and high citation of articles and*

authors related to problem solving, learning psychology theories and applications of mathematics education.

Keywords: *Mathematics education, research, Spain, analysis of references*

EDUCACIÓN MATEMÁTICA Y PRODUCCIÓN INVESTIGADORA

La investigación científica que se realiza en todas las ramas del conocimiento se sustenta en las bases que otros investigadores han puesto previamente, de tal forma que brindan soporte, apoyo u orientan sobre qué y cómo investigar. Es decir, que la base de la investigación en cualquier disciplina o profesión depende en gran medida de la revisión, del escrutinio atento y regular de las publicaciones que se originan de la actividad científica (Frias y Romero, 1998).

Para conocer el estado de desarrollo de las disciplinas, como la educación matemática (EMA), es necesario conocer ¿qué se investiga?, ¿quienes lo hacen y dónde?. De igual forma resulta importante saber si los autores utilizan sus investigaciones previas en sus trabajos, o ¿qué tipo de documentos utilizan en sus investigaciones?, ¿cuáles son los documentos o las investigaciones que ejercen influencia?, ¿quiénes son los autores de referencia en la investigación sobre Educación matemática en España? Estas son algunas de las cuestiones que revelan el estado del arte y el dinamismo o estancamiento de un campo científico.

En otros campos de la ciencia este tipo de estudios son algo normal, porque ofrecen una visión de las tendencias y patrones metodológicos y conceptuales por los que se están desarrollando los avances científicos. Para esto se recurre al análisis de citación de los documentos científicos (Herther, 2008; Moed, 2005; Leydesforff, 2003; Behrens. y Luksch, 2011).

A nivel internacional son escasos los estudios que utilizan técnicas bibliométricas para la EMA. El primer trabajo conocido es el realizado por Fiorentini (1993) que analizó las tesis de maestría y doctorado en Brasil. Posteriormente Donoghue (1999) clasifica la investigación en EMA de acuerdo a las técnicas utilizadas para su realización. Más recientemente Erdogan y Yucedag (2011) estudian las tesis doctorales de EMA en Turquía según los tópicos abordados.

En España se han realizado estudios previos para determinar el marco bajo el cual se encuadra la EMA a nivel local. Para ello se han analizado los simposios SEIEM tratando de determinar los métodos de investigación utilizados (Godino, Carrillo, Castro, Lacasta, Muñoz-Catalán y Wilhelmi, 2012; Maz-Machado, Bracho-López, Torralbo-Rodríguez, Gutiérrez-Arenas y Hidalgo-Ariza, 2011), las redes de colegios invisibles en las tesis doctorales (Maz-Machado, Bracho-López, Torralbo-Rodríguez, Gutiérrez-Arenas, Jiménez-Fanjul y Adamuz-Povedano, 2012), los aspectos relacionados con la citación de la EMA en las tesis doctorales (Fernández-Cano, Torralbo, Rico, Gutiérrez y Maz, 2003) o en los artículos de revistas nacionales (Bracho-López, Maz-Machado, Gutiérrez-Arenas, Torralbo-Rodríguez, Jiménez-Fanjul, y Adamuz-Povedano, 2012) o en una sola de carácter internacional (Maz, Torralbo, Vallejo, Fernández-Cano y Rico, 2009).

Llinares (2008) así como Maz y Torralbo (2007), realizaron unas primeras aproximaciones a los artículos EMA por autores españoles en revistas indexadas en bases de datos

internacionales (SSCI y ERIH) hallando una muy baja producción. Estos dos estudios utilizaron metodologías diferentes y por tanto difieren en sus resultados. Linares partió de un listado de revistas específicas y buscó los autores españoles allí firmantes, esta opción permitía que trabajos de EMA publicados en otras revistas quedaran fuera del estudio. Por su parte Maz y Torralbo, partieron del listado de todo el profesorado adscrito al área de conocimiento de didáctica de la matemática de las universidades españolas y luego buscaron a cada uno de los autores en SSCI. Esto hizo que aparecieran artículos de estos profesores pero en los que las temáticas eran de diferentes a la EMA (matemáticas, álgebra etc.).

La principal limitación o error de estos dos trabajos seminales sobre la producción científica de EMA por autores españoles, es que se asumieron que la investigación relacionada con la EMA sólo la realizan investigadores del área o que se publica solo en revistas de EMA o de educación, dejando por fuera investigadores de otras áreas y revistas de otras disciplinas donde también se puede investigar sobre temas relacionados con la educación matemática como por ejemplo la psicología.

Como ha transcurrido un lustro desde estos estudios y debido a la incorporación de más revistas de educación iberoamericanas en el SSCI parece conveniente hacer un estudio sobre la EMA realizada en España e indexada en esta base de datos a través de los artículos científicos. Por ello, para este estudio se plantean los siguientes objetivos relacionados con los autores españoles de educación matemática que publican artículos en revistas indexadas en el SSCI.

- a) Identificar los patrones de citación.
- b) Identificar los artículos y libros más citados en España.
- c) Conocer cuáles son los autores y las revistas que se citan.

Con estos objetivos se pretende conocer cuáles son las influencias recibidas por los autores españoles y que se manifiestan en la citación que plasman en sus artículos.

METODOLOGÍA

Las técnicas bibliométricas son herramientas idóneas para este tipo de estudios porque desde hace mucho tiempo se han desarrollado técnicas específicas para el estudio de las citaciones, cocitaciones y referencias a nivel internacional (Leydesdorff, y Vaughan, 2006) como lo revelan los trabajos sobre diversas ciencias y disciplinas (Hooten, 1991; Moed y Garfield. 2004; Sudhier, 2007). En educación ya se utilizan para investigar cuales son los patrones de citación en artículos y tesis doctorales (Arenceibia y De-Moya, 2008; Maz-Machado, Torralbo-Rodríguez, Gutiérrez-Arenas y Morales, 2012).

Como punto de partida del estudio se buscaron en SSCI todos los artículos entre los años 1980 a 2012 en los que aparecieran por lo menos dos de los descriptores que permiten caracterizar a aquellos de EMA y que han propuesto Adamuz-Povedano, Jiménez-Fanjul y Maz-Machado (2013), unos referidos al aspecto matemático y otros al ámbito educativo.

Mathemat* OR Algebra OR Arithmetic OR Geometry OR Topology
AND
Curricul* OR Instruc* OR History OR Educ* OR Learn* OR Teach* OR Assessment
OR Didactic* OR School* OR student* OR Goal* OR Knowledge* OR classroom* OR
Achievement OR Competen* OR Problem solving OR Skill* OR PISA OR TIMSS OR
Dyscalculia

Figura 1. Descriptores que caracterizan un artículo de EMA

Se siguieron procesos similares a los realizados por estos autores en el mencionado estudio. Se descartaron las revisiones, cartas, editoriales etc., es decir solamente se considero lo que internacionalmente se conoce como documentos citables (Moed, 2005). Luego se seleccionaron aquellos en los que uno de los autores fuera español o que tenga vinculación con instituciones españolas. Una vez identificados los artículos (234) se leyeron todos los abstracts para verificar que correspondían a EMA, esto permitió eliminar artículos que correspondían a evaluación de la ciencia y que incorporaban algunos de los descriptores utilizados para finalmente obtener 170, que será la muestra analizada. De todas formas no existe una absoluta garantía de que se recuperen todos los artículos de autores españoles porque algunas investigaciones han detectado errores en los registros de los nombres (Ruiz-Pérez, Delgado y Jiménez-Contreras, 2006).

La información obtenida fue descargada en una base datos relacional *ad hoc*, y se copiaron todas las referencias bibliográficas presentes en cada artículo. Esta información está dada por la secuencia: Apellido de primer autor, inicial del nombre, año, revista, volumen, número de la primera página y DOI si lo tiene, como por ejemplo: CARPENTER TP, 1981, J RES MATH EDUC, V12, P27, DOI 10.2307/748656, si es un articulo. Si la referencia corresponde a un libro la secuencia cambia como en la siguiente: SCHOENFELD AH, 1985, MATH PROBLEM SOLVING. Es decir si es libro se indica el titulo abreviado sin número de volumen o página y si es articulo se indica el titulo de la revista con volumen y/o pagina. Debe aclararse que en WoS solamente se indica el primer autor, por lo que si un artículo tiene varios autores, los otros no contarán para la frecuencia de citación o auto citación para este estudio.

Se utilizaron procesos informáticos para aislar cada referencia bibliográfica y posteriormente se recurrió al SPSS V.18 para obtener las frecuencias. Fue necesario realizar procesos de normalización de firmas de autores para evitar fraccionamiento en la asignación de citación, debido a que muchos autores no tienen el hábito de mantener una sola firma académica y en ocasiones ponen uno o los dos apellidos o si tiene nombres compuestos a veces ponen uno u otro o ambos.

Hubo dificultades en la estandarización de algunos nombres de autores, además de los nombres similares o casos extremos como ocurre con Enrique Castro Martínez y Encarnación Castro Martínez, porque las iniciales de ambos son Castro, E. y por lo tanto a partir solo de los datos registrados en las referencias no es posible en muchas ocasiones asignar las citaciones a uno u otro.

Si bien no se consideraron las autocitas para los resultados de citación, esto sólo fue posible para aquellas referencias donde el autocitante es el primer firmante, porque en

WoS solo se indica al primer autor. Por lo tanto, si un autor es coautor de un artículo donde el firma en segundo o tercer lugar y cita dicho artículo, esta cita será válida para el conteo y asignación de frecuencias. Esto es palpable en las citas hechas a documentos escritos por autores que conforman un mismo grupo de investigación o son colaboradores frecuentes.

La dificultad por la sola mención del primer autor en las referencias de WoS también es problemática porque en los artículos que se derivan de las tesis doctorales es el doctorando quien aparece como primer firmante y el director de mayor prestigio suele firmar de último, lo mismo que en trabajos derivados de proyectos. Esto hace que cuando se cita dicho trabajo la cita solo se asigne al doctorando y no se comparta con quien le dirigió.

Estos dos últimos aspectos se han hecho visibles a lo largo del estudio, pero en este trabajo decidimos no profundizar en su análisis, pero si consideramos abordarlo para un futuro estudio.

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

Se obtuvieron 170 artículos de EMA en los que uno de los autores es español o vinculado a instituciones españolas (Tabla 1). El autor más prolífico es Salvador Llinares, siendo además el único gran productor en términos de Lotka con el 7,05 % del total de los artículos publicados.

Autor	Nº artículos
Llinares, S	12
Godino, JD	9
Font, V	8
Orrantía, J	7
Vicente, S	7
Batanero, C	6
Chamoso, JM	6
Planas, N	6
Fernández, C	5
García, M	5
Wilhelmi, MR	5

Tabla 1. Autores españoles con mayor número de artículos publicados ($n \geq 5$)

Los 170 artículos generaron 6736 referencias bibliográficas, de las que el 54,71% corresponden a artículos publicados en revistas y el 39,76% a libros o capítulos de libros (Tabla 2). Las citas a tesis doctorales y actas de congreso son mínimas.

Tipo de referencia	Nº	%
Revistas	3488	54,71
Libros	2535	39,76
Actas	225	3,53
Tesis	128	2,01
Total de referencias	6736	100

Tabla 2. Tipos de referencias citadas por autores españoles de EMA en SSCI.

En total se citan 1216 revistas diferentes y de diversos ámbitos científicos. La tabla 3 presenta las revistas más citadas. Se observa que los primeros lugares lo componen revistas específicas de EMA, de psicología y generalistas de educación. Las dos más citadas son propias del área y ampliamente reconocidas a nivel internacional: *Educational Studies in Mathematics* y el *Journal for Research in Mathematics Education*. Así mismo, debe destacarse la buena citación de tres revistas españolas: *Enseñanza de las Ciencias*, *PSICOTHEMA*, e *Infancia y Aprendizaje*, si bien no son específicas de EMA. Las citas a estas primeras revistas representan solamente el 12,2 % del total de las citas.

Revista	Nº de citas
<i>Educational Studies in Mathematics</i>	108
<i>Journal for Research in Mathematics Education</i>	97
<i>Journal of Educational Psychology</i>	76
<i>Teaching and Teacher Education</i>	57
<i>Cognition and Instruction</i>	43
<i>Learning and Instruction</i>	38
<i>Psychological Review</i>	38
<i>The Journal of Mathematical Behavior</i>	37
<i>For the Learning of Mathematics</i>	37
<i>Journal of Learning Disabilities</i>	35
<i>Enseñanza de las Ciencias</i>	34
<i>Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa RELIME</i>	34
<i>PSICOTHEMA</i>	33
<i>Recherches en Didactique des Mathématiques</i>	30
<i>British Journal of Educational Psychology</i>	29
<i>Infancia y Aprendizaje</i>	25
<i>Fuzzy Sets and Systems</i>	23
<i>Psychological Bulletin</i>	23
<i>Higher Education</i>	22

Tabla 3. Revistas más citadas en EMA por autores españoles en SSCI

Si centramos la atención en las revistas específicas de EMA, en la tabla 4 se presentan las más citadas. Entre estas se hallan dos revistas mexicanas: *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa Relime* y *Educación Matemática*, pero ninguna española, para hallar la primera debemos ir hasta el lugar 17 para encontrar la revista UNO con seis citas. Esta revista aparece citada en WoS como REV DIDACTICA MATEMA.

Revista	Nº
<i>Educational Studies in Mathematics</i>	108
<i>Journal for Research in Mathematics Education</i>	97
<i>Journal of Mathematical Behavior</i>	37
<i>For the Learning of Mathematics</i>	37
<i>Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa Relime</i>	34
<i>Recherches en Didactique des Mathématiques</i>	30
<i>Educación Matemática</i>	17
<i>Journal Math Teacher Education</i>	14
<i>Mathematical Thinking and Learning</i>	10
<i>Mathematics Education Research Journal</i>	9
<i>Mathematics Teacher</i>	9

Tabla 4. Revistas de EMA más citadas por autores españoles en SSCI (n ≥ 9)

A continuación se muestran cuáles son los diez artículos más citados por los autores españoles en EMA (Tabla 5), encabezando el listado el publicado por Kintsch en 1988. Entre estos hay una prevalencia de los aspectos cognitivos y la resolución de problemas. Es destacable que entre estos diez hay dos tanto de Walter Kintsch, profesor Emérito de Psicología y Neurociencia de la Universidad de Colorado, como de Juan Díaz Godino catedrático de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Córdoba. (Véase Tabla 5).

La tabla 6 presenta los cinco libros más citados y allí también la lista la encabeza Kintsch. Entre los más citados se encuentra un capítulo de Salvador Llinares en el *Handbook* del año 2006. Es significativo que el libro de Cohen ocupe el segundo lugar por ser un referente metodológico sobre el uso de la estadística en las ciencias del comportamiento. (Véase Tabla 6).

En total se citan 3819 autores diferentes, incluyendo autores institucionales como el NCTM. En la tabla 7 se presentan los autores más citados (n ≥ 11). El autor más citado es Juan D. Godino del Departamento de Didáctica de la Matemáticas de la Universidad de Granada, por delante de autores clásicos en EMA como Carpenter o en Educación como lo es Piaget. Entre los más citados hallamos una institución la OECD y así como un autor latinoamericano, Ernesto Sánchez. (Véase Tabla 7).

	Artículo	Nº de citas
1	Kintsch, W. (1988). The role of knowledge in discourse comprehension: A construction-integration model. <i>PSYCHOL REV</i> , V95, P.163	8
2	Riley, M.S. y Greeno, J. G. (1988). Developmental Analysis of Understanding Language About Quantities and of Solving Problems. <i>Cognition Instruct</i> , V5, P49.	8
3	Godino, J.D., Contreras, A. y Font, V. (2006). Análisis de procesos de instrucción basado en el enfoque ontológico- semiótico de la cognición matemática. <i>Recherches en Didactique des Mathématiques</i> , V26, P39	7
4	Hegarty, M., Mayer, R. E. y Monk, C. A. (1995). Comprehension of Arithmetic Word Problems. A Comparison of Successful and Unsuccessful Problem Solvers. <i>J Educ Psychol</i> , V87, P18.	7
5	Kintsch, W. y Greeno, J. G. (1985). Understanding and solving word arithmetic problems. <i>Psychological Review</i> , 92(1), 109-129	7
6	Yackel, E. y Cobb, P. (1996). Sociomathematical norms, argumentation, and autonomy in mathematics. <i>Journal for Research in Mathematics Education</i> , 27(4), 458-477.	7
7	Briars, D. J. y Larkin, J. H. (1984). An Integrated Model of Skill in Solving Elementary Word Problems. <i>Cognition Instruct</i> , V1, 245-29	6
8	Godino, J. D. y Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos Matemáticos. <i>Recherches en Didactique des Mathématiques</i> , V14, P325	6
9	Reusser, K. (1988). Problem solving beyond the logic of things: Contextual effects on understanding and solving word problems. <i>Instructional Science</i> , 17(4), 309-338.	6
10	Siegel, L.S. y Ryan, E.B. (1989). The development of working memory in normally achieving and subtypes of learning disabled children. <i>Child Development</i> , 60, 973-980.	6

Tabla 5. Artículos más citados por los autores españoles de EMA (n ≥ 6)

	Libro	Nº de citas
1	Kintsch, W. (1998). <i>Comprehension: A paradigm for cognition</i> . New York: Cambridge University Press	7
2	Cohen, J. (1988). <i>Statistical power analysis for the behavioral sciences</i> (2ª ed.). Hillsdale, NJ: Erlbaum	6
3	Lave, J., y Wenger, E. (1991). <i>Situated Learning: Legitimate Peripheral Participation</i> : Cambridge University Press.	6
4	Llinares, S. y Krainer, K. (2006). Mathematics (student) teachers and teacher educators as learners. In: Gutierrez, A. y Boero, P. (Eds.). <i>Handbook of research on the Psychology of Mathematics Education: Past, Present and Future</i> (p. 429- 459). Netherlands: Sense Publishers.	5
5	Riley N.S., Greeno, J. y Heller J.I. (1983). Development of children's problem solving ability in arithmetic. In: Ginsburg HP, (Ed). <i>The development of mathematical thinking</i> (pp.153-96). New York: Academic Press	5

Tabla 6. Libros más citados por los autores españoles de EMA (n ≥ 5)

Autor citado	Total sin autocitas
Godino JD	41
Carpenter TP	38
Piaget J	29
Kintsch W	27
Geary Dc	26
Verschaffel L	21
Schoenfeld AH	21
De Corte E	20
Fuson KC	18
Duval R	15
Fischbein E	15
OECD	14
Cobb P	14
Riley MS	13
Siegel LS	13
Sanchez E	12
Damore B	11
Dubinsky E	11
Greer B	11
Mayer RE	11

Tablas 7. Autores más citados

Un aspecto de interés es conocer cuáles son los autores españoles que investigan y publican en EMA que sus colegas citan, por ello en la tabla 6 se presentan aquellos citados cinco o más veces. Es significativo que el más citado, Godino, cuadruplica las citas del segundo, Vicente Bermejo quien estuvo vinculado al Departamento de Psicología evolutiva y de la Educación de la Universidad Complutense de Madrid y el tercero Salvador Llinares de la Universidad de Alicante. De manera general los autores españoles son poco citados. (Véase Tabla 8).

Total	Sin autocitas
Godino JD.	41
Bermejo V.	10
Llinares S.	10
Camacho M.	9
Civil M.	9
Coll C.	8
Puig L.	8
Font V.	7
Chamoso JM.	7
Gómez-Chacón I.	6
Aguilar M.	6
Planas N.	5
Jiménez JE.	5
Batanero C.	5
Castro E.	5
Contreras A.	5
Ibañes M.	5
Rico L.	5

Tabla 8. Autores Españoles más citados

CONCLUSIONES

Lo primero que se evidencia es el incremento de la producción de artículos EMA por autores españoles. Si comparamos la producción hallada en *SSCI*, 170 artículos, con la obtenida en los estudios de Llinares (2008) y el de Maz y Torralbo (2007) que fue de 5 y 44 respectivamente, se deduce o que aumento exponencialmente la producción o que los métodos utilizados entonces no eran muy precisos como ya se ha indicado.

Si se asume que las tesis doctorales son investigaciones de calidad que dan origen a publicaciones científicas, se esperaría que por lo menos en los últimos años de cada tesis se publicara al menos un artículo en alguna revista indexada en *SSCI*. Pero si se comparan los resultados de productividad de artículos (Tabla 1) con los de la productividad en la dirección de tesis doctorales (Maz-Machado, Bracho-López, Torralbo-Rodríguez *et al*, 2012) se observa que no hay ninguna correspondencia. Creemos que a futuro esto no será así porque muchas universidades empiezan a exigir indicios de calidad para la lectura de tesis doctorales y estos pasan por publicar en las revistas de prestigio de las indexadas en el *SSCI*.

Entre los autores más productivos surgen autores que no figuraban antes en otros estudios de productividad local (Maz, Torralbo, Vallejo *et al*, 2009; Bracho-López, Maz-Machado, Torralbo-Rodríguez *et al*, 2012).

El auge que tuvo hasta hace pocos años la resolución de problemas queda visible en las huellas de citación tanto de los artículos como a ciertos autores. Así mismo la componente psicológica del aprendizaje ocupa una gran parte de la base documental que citan los autores españoles de EMA.

El que la OECD sea no solo el primer autores institucional si no que globalmente también figure entre los más citados, es un reflejo del impacto de los informes PISA en la comunidad investigadora en España.

Se verifica que las revistas *Educational Studies in Mathematics* y *Journal for Research in Mathematics Education* son las principales fuentes de información de carácter internacional para los autores españoles en EMA.

Es importante señalar que el autor más citado sea un autor español, esto indica que el área se retroalimenta de sus resultados locales.

Como ya se ha indicado parece que la producción va en aumento, sin embargo, estos resultados de productividad deben tomarse con cautela porque también pueden ser causados por el ingreso a *SSCI* de un mayor número de revistas de Educación de lengua española.

A futuro deberían compararse estos resultados con los que se puedan obtener del mismo estudio pero con otras bases de datos de reconocido prestigio internacional como son SCOPUS o EduMath, que además tienen una mayor cobertura de revistas específicas de educación matemática.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Adamuz-Povedano, N., Jiménez-Fanjul, N. y Maz-Machado, A. (2013). Búsqueda de descriptores que caractericen una disciplina emergente en WoS y SCOPUS: el caso de la Educación Matemática. *Biblios. Revista electrónica de bibliotecología, archivología y museología*, 50, 1-14. Accesible en <http://biblios.pitt.edu/ojs/index.php/biblios/article/view/80/150>.
- Arencibia, R. y De-Moya, F. (2008). *Visibilidad internacional de la Educación Superior cubana en el período 2004-06: Análisis relacional de indicadores de producción, impacto y colaboración científica en revistas de corriente principal*. La Habana: Editorial Universitaria.
- Behrens, H. y Luksch, P. (2011). Mathematics 1868–2008: a bibliometric analysis. *Scientometrics*, 86(1), 179-194.
- Bracho-López, R., Maz-Machado, A., Gutiérrez-Arenas, M. P., Torralbo-Rodríguez, M., Jiménez-Fanjul, N. y Adamuz-Povedano, N. (2012). La investigación en Educación Matemática a través de las publicaciones científicas españolas. *Revista Española de Documentación Científica*, 35(2), 262,280.
- Donoghue, E. F. (1999). The Task-Technique Matrix: An Alternative System for Classifying Research in Mathematics Education. *School Science and Mathematics*, 99(1), 42-46.

- Erdogan, A., y Yucedag, T. (2011). Investigation of theses in mathematics education according to research topics studied between 2000 and 2009 in Turkey. *Procedia-Social and Behavioral Sciences*, 15(0), 2738-2741.
- Fernández-Cano, A., Torralbo, M., Rico, L., Gutiérrez M^a. P. y Maz, A. (2003). Análisis cuantitativo de las tesis doctorales españolas en Educación Matemática (1976-1998). *Revista Española de Documentación Científica*, 26 (2), 162-176.
- Fiorentini, D. (1993). Memoria e análise da pesquisa acadêmica em educação matemática no Brasil: O banco de teses do CEMPEM/FE-UNICAMP. *Revista Zetetiké*, 1(1), 55-76.
- Frías, J., y Romero, P. (1998). ¿Quiénes son y que citan los investigadores que publican en las revistas españolas de biblioteconomía y documentación? *Anales de Documentación*, 1. DOI:10.6018/3101.
- Godino, J. D., Carrillo, J., Castro, W., Lacasta, E., Muñoz-Catalán, M. C. y Wilhelmi, M. R. (2012). Métodos de investigación en las ponencias y comunicaciones presentadas en los simposios de la SEIEM. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, 2, 29-52.
- Herther, N. K. (2008). Research evaluation and citation analysis: key issues and implications. *The Electronic Library*, 27(3), 361-375.
- Hooten, P. A. (1991). Frequency and functional use of cited documents in information science. *Journal of the American Society for Information Science*, 42, 397-404.
- Leydesdorff, L. (2003). Can networks of journal-journal citations be used as indicators of change in the social Sciences? *Journal of Documentation*, 59(1), 84-104.
- Leydesdorff, L. y Vaughan, L. (2006). Co-occurrence matrices and their applications in Information science: extending ACA to the web environment. *Journal of the American Society for Information Science and Technology*, 57(12), 1616-1628.
- Llinares, S. (2008). Agendas de investigación en Educación Matemática en España. Una aproximación desde ISI-Web of Knowledge y ERIH. En: R. Luengo; B. Gómez, M. Camacho y L. Blanco (editores), *Actas del XII Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (pp. 25-54). Badajoz: SEIEM.
- Maz, A. y Torralbo, M. (2007). Producción ISI del profesorado universitario español del área de Didáctica de la Matemática. En M. Camacho; P. Bolea; P. Flores; B. Gómez; J. Murillo; M^a T. González (eds) *Investigación en Educación Matemática. Comunicaciones de los grupos de investigación. XI Simposio de la SEIEM* (pp. 181-188). Tenerife: SEIEM.
- Maz-Machado, A., Bracho-López, R., Torralbo-Rodríguez, M., Gutiérrez-Arenas, M. P. y Hidalgo-Ariza, M. D. (2011). La investigación en Educación Matemática en España: los simposios de la SEIEM. *PNA*, 5(4), 163-184.
- Maz-Machado, A., Bracho-López, R., Torralbo-Gutiérrez, M., Gutiérrez-Arenas, M. P., Jiménez-Fanjul, N. y Adamuz-Povedano, N. (2012). Redes académicas generadas por las tesis doctorales en Educación Matemática en España. *Revista de Investigación Educativa RIE*, 30 (2), 271-286.
- Maz, A., Torralbo, M., Vallejo, M., Fernández-Cano, A. y Rico, L. (2009). La Educación Matemática en la revista Enseñanza de las Ciencias: 1983-2006. *Enseñanza de las Ciencias* 27(2), 185-194.
- Maz-Machado, A., Torralbo-Rodríguez, M., Gutiérrez-Arenas, M. P. y Morales, F. (2012). Citation patterns in Educational Science theses at the University of Córdoba. *Library Philosophy and Practice* (e-journal). Paper 853. <http://digitalcommons.unl.edu/libphilprac/853>
- Moed, H. F. (2005). *Citation analysis in research evaluation*. Dordrech: Springer.

- Moed, H. F. y Garfield, E. (2004). In basic science the percentage of 'authoritative' references decreases as bibliographies become shorter. *Scientometrics*, 60, 295-303.
- Ruiz-Pérez, R., Delgado, E. y Jiménez-Contreras, E. (2006). Criterios del Institute for Scientific Information para la selección de revistas científicas. Su aplicación a las revistas españolas:: metodología e indicadores. *International Journal of Clinical and Health Psychology*, 6, 401-424.
- Sudhier, K. C. (2007). Authorship patterns in physics literature: an informetric study on citations in doctoral theses of the Indian Institute of Science. *Annals of Library and Information Studies*, 54, 90-94.

Trenzados y mosaicos árabes con cuerdas

David Crespo Casteleiro

Centro Educativo Agave, Huércal de Almería

José Luis Rodríguez Blancas

Universidad de Almería

M^a Carmen Sánchez Melero

Centro Educativo Agave, Huércal de Almería

Resumen: *En este artículo presentamos una experiencia de aula, llevada a cabo con alumnos de 3º de ESO, en la que hemos trabajado las simetrías y los movimientos en el plano a través del Arte Nazarí de la Alhambra de Granada. El estudio de las propiedades geométricas subyacentes en este tipo de decoraciones ha sido abordado mediante la confección de mosaicos con hilos de colores.*

Palabras clave: *Matemáticas, Geometría, Simetría, Lacerías, Alhambra.*

Plaited and Arab Mosaics with strings

Abstract: *In this article we present a classroom experience, carried out with students of 3rd ESO, in which we have worked symmetries and movements in the plane through Nazari Art of Granada's Alhambra. The study of the geometric properties underlying this type of decoration has been addressed by making mosaics with colored threads.*

Key words: *Mathematics, Geometry, Symmetry, Ornaments, Alhambra.*

INTRODUCCIÓN

La Ley de Educación de Andalucía CEJA (2007), puntualiza en el artículo 38 las competencias básicas entre las que se encuentra la cultural y artística, *que supone apreciar, comprender y valorar críticamente diferentes manifestaciones culturales y artísticas,*

utilizarlas como fuente de disfrute y enriquecimiento personal y considerarlas como parte del patrimonio cultural de los pueblos. Asimismo en el artículo 40, relativo a la Cultura andaluza establece que el currículo deberá contemplar la presencia de contenidos y de actividades relacionadas con el medio natural, la historia, la cultura y otros hechos diferenciadores de Andalucía, como el flamenco, para que sean conocidos, valorados y respetados como patrimonio propio y en el marco de la cultura española y universal.

Por su parte, la Orden de 10 de agosto de 2007, por la que se desarrolla el currículo correspondiente a la ESO en Andalucía establece como contenidos relevantes en la asignatura de Matemáticas las formas, figuras y sus propiedades. En particular aporta que: *la presencia de mosaicos y frisos en distintos monumentos permitirá descubrir e investigar la geometría de las transformaciones para explorar las características de las reflexiones, giros y traslaciones, y para determinar relaciones entre la composición de transformaciones.*

Situada la necesidad jurídica del proyecto, nos centramos ahora en su origen. El segundo autor que firma este artículo, realizó una reproducción usando cuerdas de colores de una lacería nazarí situada en la sala Mexuar de la Alhambra de Granada (que en los próximos meses se podrá adquirir en un kit para poder reproducirla). El artículo sobre la misma, fue primer premio de Carnaval de Matemáticas en octubre de 2012 Autor (2012). Ese mismo mes, se celebró la II Jornada del profesorado de Matemáticas de la provincia de XXXX y establecimos un compromiso para trabajar de manera colaborativa y una puesta en práctica en el aula, en el Centro Educativo XXXX, ya que en el tercer curso, se ha establecido este año académico un Taller de Matemáticas, que cuenta con una hora lectiva semanal. Esta unión propició la presentación de un proyecto elegido para ser expuesto en la XI Feria de la Ciencia, en Sevilla, titulado *Trenzados y mosaicos árabes con cuerdas*.

Dicho proyecto ha participado también en la final del concurso internacional (países de habla hispana o portuguesa) *Ciencia en Acción, en la modalidad de laboratorio de Matemáticas*, celebrado en Bilbao, entre los días 4 y 6 de octubre de 2013.

Este artículo desgrana la experiencia de aula que vamos a relatar.

OBJETIVOS

Los objetivos pedagógicos que queríamos conseguir eran:

- a) Conocer cómo se trenzan este tipo de mosaicos árabes, llamados *lacerías*, y que aparecen habitualmente en alicatados, en paredes de yeso o techos de madera, tanto en el Alcázar de Sevilla como en la Alhambra de Granada.
- b) Descubrir con su construcción el tipo de simetría que tienen y situarlos dentro del grupo cristalográfico.
- c) Estudiar el motivo mínimo presente en las lacerías y su reflexión usando cajas de espejos.
- d) Aprender el concepto de friso y los siete grupos que se generan por los distintos movimientos.

EL PROYECTO

Nos planteamos cómo poder abordar los contenidos de Matemáticas sobre movimientos en el plano, y decidimos realizar tres actividades:

A. Trabajo con espejos

Nos propusimos el estudio de una lacería, a través del motivo mínimo que la genera y los movimientos que hay que aplicarle para obtener el mosaico completo. Para ello escogimos una situada en la Alhambra del tipo $p4m$ según la clasificación de los grupos cristalográficos planos como puede verse en Rodríguez, M. (2010), cuya tesela fundamental es un triángulo rectángulo isósceles. Tras dibujarla, colorearla y plastificarla, trabajamos el concepto de escala realizando otras al 50% y al 25%, poniendo así de manifiesto que la razón de las áreas es la razón de semejanza al cuadrado, esto es: que para las del 50% nos hacían falta cuatro teselas y para las del 25% eran 16, formadas en dos grupos uno con la misma tesela y otro con la que se produce por simetría axial mediante un eje que pasa por un cateto.

Establecimos también el empleo de otros materiales en la construcción de la tesela, como es la goma eva, reproduciendo en distintos colores los polígonos que aparecen en la lacería.

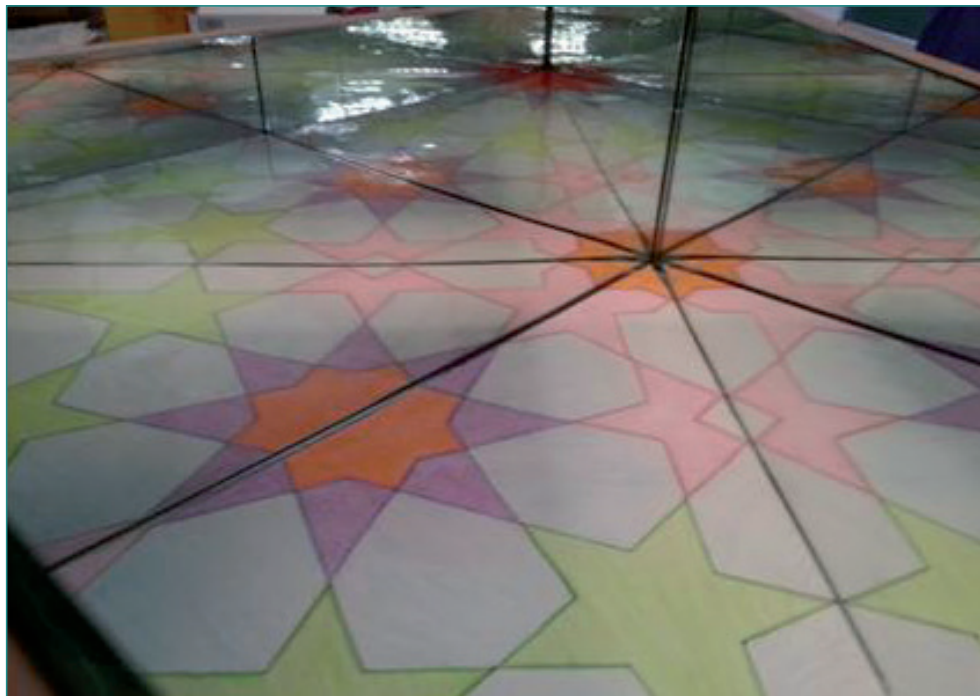


Ilustración 1: Tesela fundamental en la caja de espejos sobre cartulina

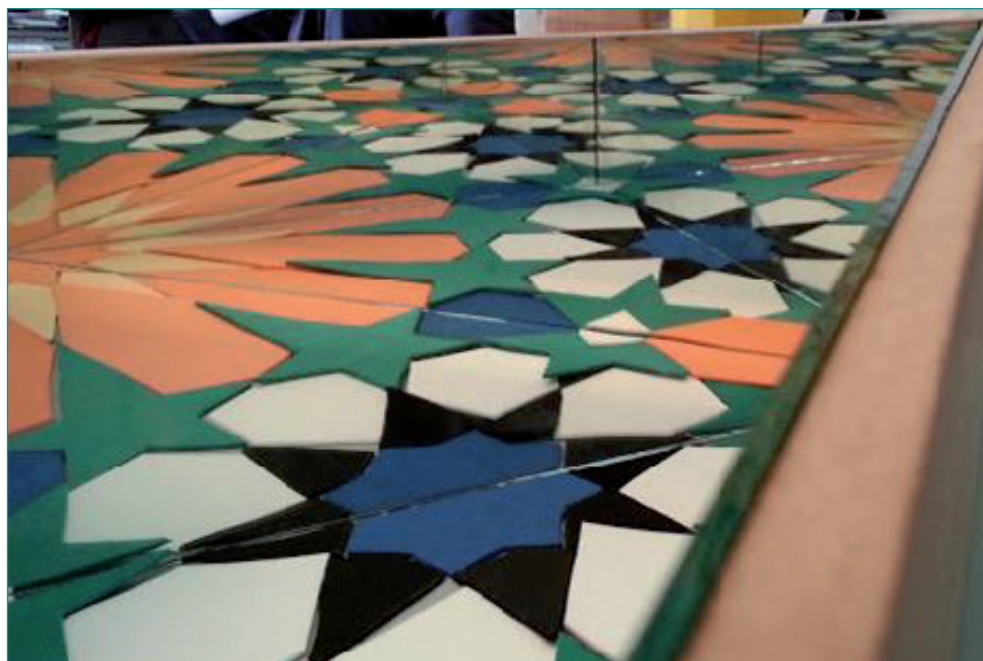


Ilustración 2: Tesela fundamental en la caja de espejos construida a partir de piezas de goma eva.



Ilustración 3: Teselas al 50% en la caja de espejos.

B. Construcciones con hilos

Una vez barajados distintos modelos y superficies a recubrir Islamic (2012), nos decantamos por la lacería reproducida en la caja de espejos que está presente en la Sala Mexuar de la Alhambra. Su construcción con hilos suponía el trabajo previo de pintar la tabla sobre la que se iba a colocar y clavar las púas que nos sirven para que los hilos cambien su dirección. Para ello, se facilitó a los alumnos una plantilla así como una copia de la imagen para facilitar el trenzado. Agrupados los alumnos en grupos de dos y encontrándose la clase desdoblada en la asignatura de Tecnología, se dio a elegir entre la reproducción de la lacería o la de las celosías del Palacio de Comares (que se encuentran actualmente en el Museo de la Alhambra). En todas las actividades, había que reconocer con anterioridad los movimientos que las dejan invariantes y que facilitan el trabajo del trenzado.

El estudio de las simetrías que se encierran en estas manifestaciones artísticas, permitió introducir el concepto de divisibilidad para determinar el número de colores necesarios para formar las estrellas y polígonos y que dejen invariante la figura mediante giros y reflexiones.

En el proceso constructivo, hay que tener en cuenta que si un hilo pasa por arriba de otro, cuando se interseque con el siguiente, ha de pasar por debajo de éste. En la construcción de los mosaicos de las celosías, la imaginación de los alumnos permitió incorporar mejoras al planteamiento inicial, como por ejemplo hacer una trenza con el hilo que se iba a utilizar, o poner las púas dobles para dar grosor a la trama y que se pareciese más al modelo que tratábamos de reproducir.



Ilustración 4: Alumnos trabajando en la colocación de las púas.

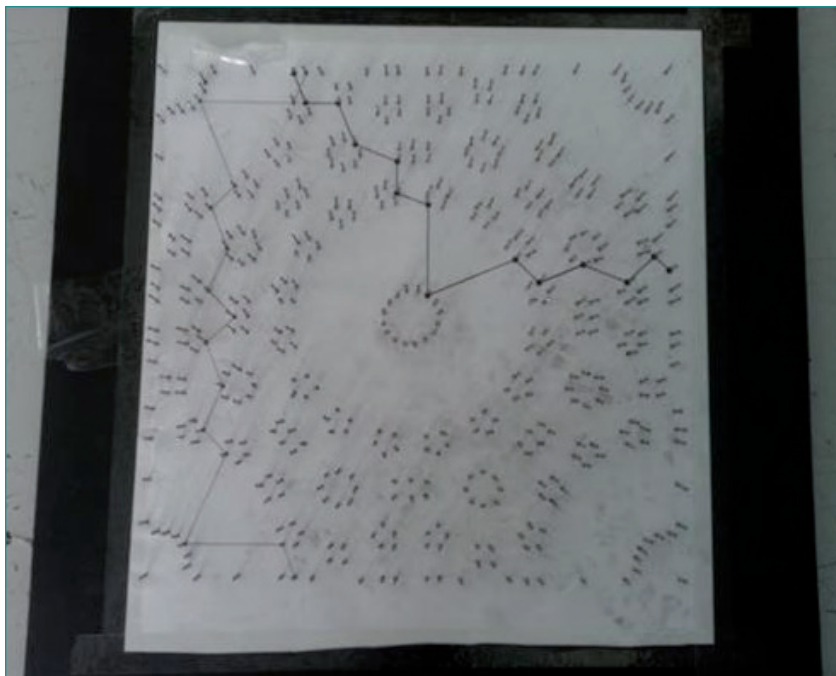


Ilustración 5: El mosaico con todas las púas clavadas.

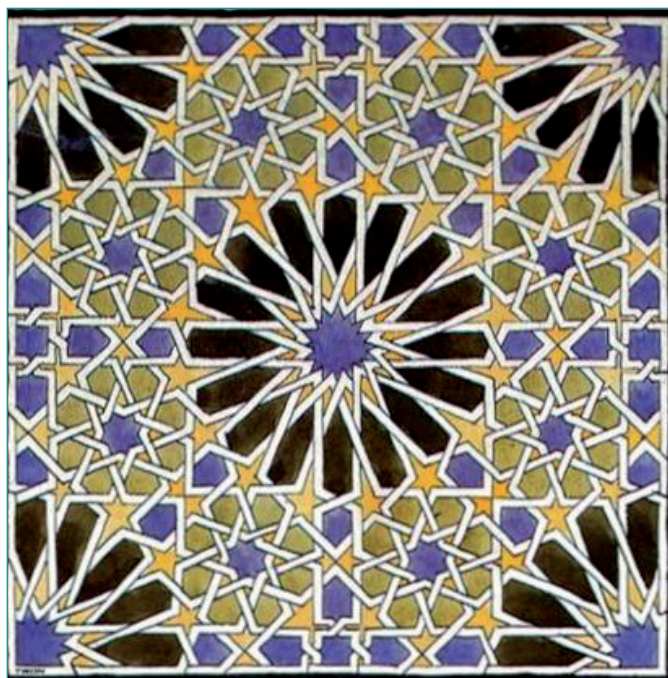


Ilustración 6: Dibujo de M.C. Escher, 1922. Fuente: [Parque (2013)].



Ilustración 7: Celosías del Palacio de Comares (Sala de las Camas). Fuente: Alhambra (2012).

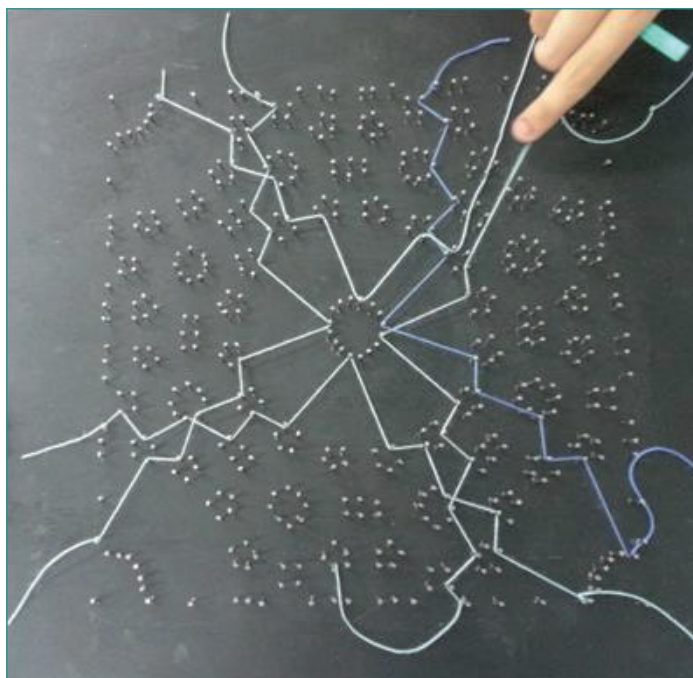


Ilustración 8: Colocación de los primeros hilos.

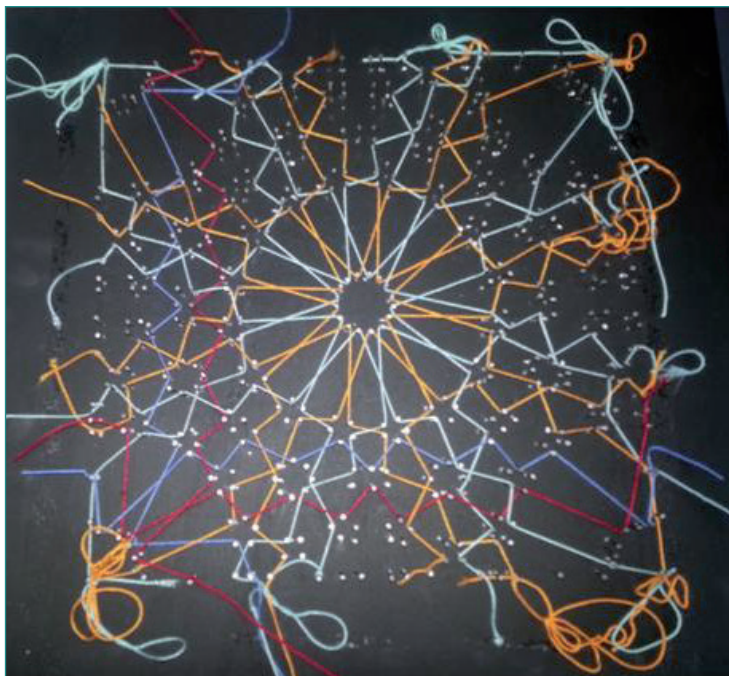


Ilustración 9: Construida la estrella central de 16 puntas.

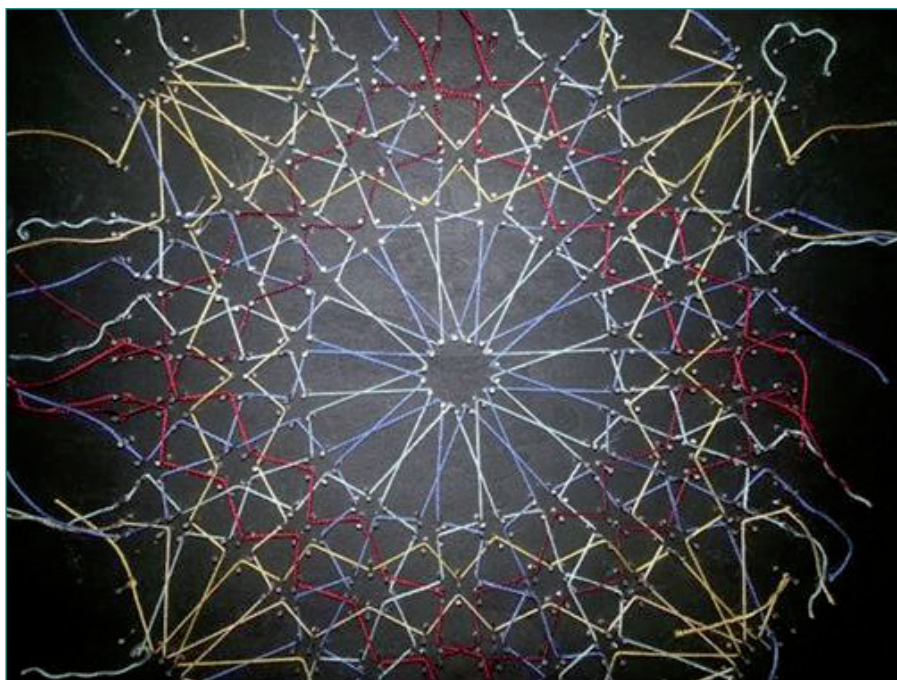


Ilustración 10: Uno de los mosaicos terminados.

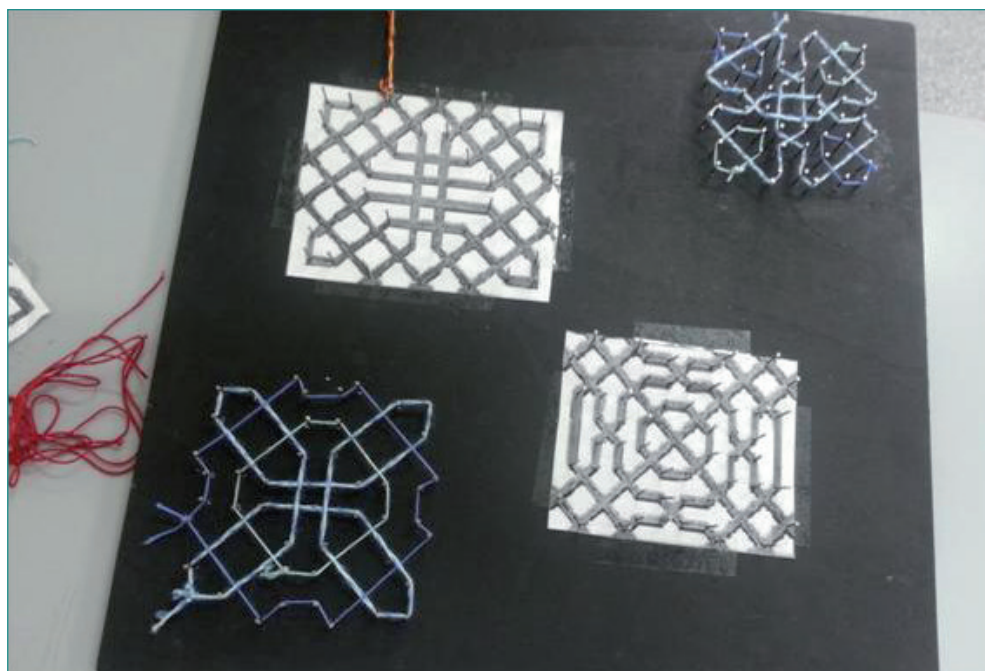


Ilustración 11: Proceso de trenzado de las celosías.



Ilustración 12: Lacerías expuestas en la XI Feria de la Ciencia de Sevilla, en mayo de 2013.

C. Grupos de frisos

Los siete grupos de frisos, pueden ser representados usando la silueta de los pies como motivo mínimo y mediante saltos producir los movimientos necesarios, es decir, traslación, reflexión vertical y horizontal, así como el giro de 180°. Para ello imprimimos

y recortamos 14 siluetas del pie derecho y otras tantas del izquierdo. Al igual que las telas fundamentales que usamos en las cajas de espejos, procedimos a forrar nuestros pies, pues así aumentamos su tiempo de vida útil. Posteriormente y usando cinta transparente de embalar, los fijamos al suelo. Es recomendable dejar un hueco suficiente entre uno de los frisos y el siguiente, para poder reproducir en este espacio los movimientos oportunos.



Ilustración 13: Los siete grupos de frisos saltando

MATERIALES NECESARIOS

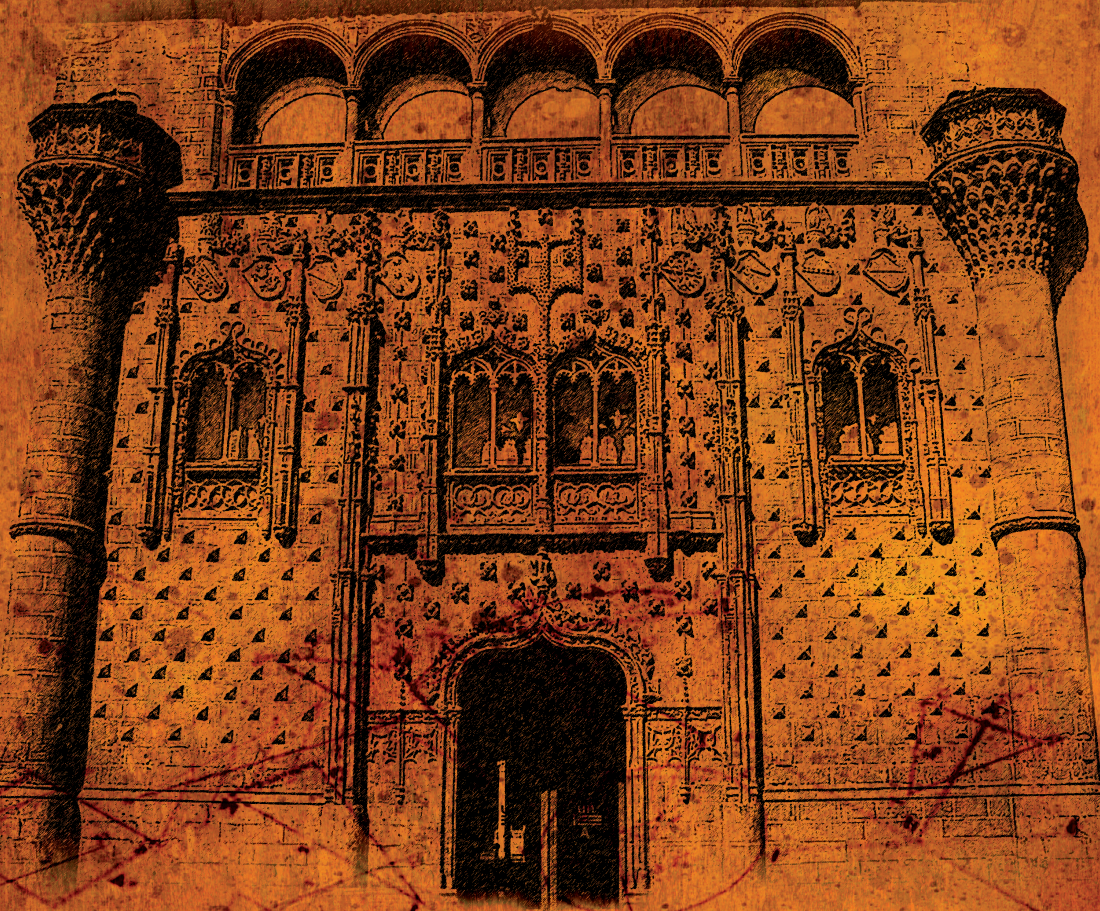
- a)** Para el trabajo con espejos
 - Una caja de espejos con forma de escuadra.
 - Cartulina blanca.
 - Lápiz, goma y regla.
 - Un compás (para trasladar las puntas de las estrellas del modelo a la cartulina).
 - Ceras y lápices de colores.
 - Forro adhesivo transparente.
 - Tijeras.
- b)** Para las lacerías (En la web de la Alhambra <http://www.alhambratienda.es> se podrá adquirir un kit con los materiales básicos e instrucciones detalladas para su realización).
 - Tabla de madera contrachapada de 40x40 cm y 1 cm de grosor.
 - Pintura, disolvente, rodillos de espuma y brochas.

- Púas de 2cm de longitud.
 - Imagen de la lacería.
 - Plantilla con la situación de las púas.
 - Cinta adhesiva común.
 - Lana de calidad de colores diferentes.
 - Pinzas.
 - Tijeras.
- c) Para los frisos
- Cartulinas tamaño A4 del color deseado.
 - Forro adhesivo transparente.
 - Tijeras.
 - Cinta adhesiva de embalar.

REFERENCIAS

- Alhambra (2012) *Pieza del mes*, Recuperado el 10 de diciembre de 2012, de <http://www.alhambra-patronato.es>
- CEJA (2007) *Ley de Educación de Andalucía*, Recuperado el 7 de junio de 2013, de <http://www.juntadeandalucia.es/educacion>
- Parque (2013) M.C. Escher Universos infinitos, Escher II: Escher y la Alhambra, Recuperado el 4 de marzo de 2013, de <http://www.eschergranada.com/es/exposicion/ejes-tematicos#escherii>
- Rodríguez, M. (2010) *Trabajo fin de carrera, Generación de teselaciones periódicas: grupos cristalográficos*. Universidad Politécnica de Madrid
- Rodríguez-Blancas, J. L. (2012) *Fantasías de colores con M.C. Escher en la Alhambra*, Recuperado el 1 de diciembre de 2012, de <http://topologia.wordpress.com>.
- Islamic (2012) *Islamic Star Patterns*, Recuperado el 5 de diciembre de 2012, de <http://www.cgl.uwaterloo.ca/~csk/projects/starpatterns/>

XV CONGRESO DE ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS



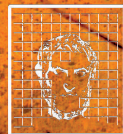
**El sentido de las matemáticas:
matemáticas con sentido**

CEAM JAÉN
2014

XV CEAM
Baeza (Jaén),

3 al 5 de julio de 2014

Organiza: SOCIEDAD ANDALUZA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA THALES



SOCIEDAD ANDALUZA DE
EDUCACIÓN MATEMÁTICA
"THALES"

XV CONGRESO SOBRE ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS (XV CEAM)

El sentido de las matemáticas. Matemáticas con sentido

<https://thales.cica.es/xvceam>

Del 3 al 5 de julio de 2014 vamos a celebrar en Baeza (Jaén) el **XV Congreso de Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas** cuyo lema en esta edición será: “**El sentido de las matemáticas: matemáticas con sentido**”.

El congreso se realizará en la Universidad Internacional de Andalucía, en la sede Antonio Machado de Baeza.

Esperamos contar con tu presencia para compartir experiencias que nos ayudarán a mejorar en nuestra profesión.

En esta web publicaremos toda la información de este XV CEAM así como las distintas modalidades de inscripción para participar y presentar trabajos.

¡¡Os esperamos en Baeza!!

Bloques temáticos

El congreso se estructurará en los siguientes bloques temáticos::

- **B1.** Aprendizaje matemático con sentido.
- **B2.** El sentido de la interdisciplinariedad.
- **B3.** Experimentar y sentir las matemáticas.
- **B4.** Materiales y recursos para dar otro sentido a las matemáticas.

Normas de participación

Para el XV CEAM se podrán presentar cuatro tipos de trabajos:

- **Comunicaciones:** son intervenciones breves en las que se podrá exponer y compartir a otros participantes puntos de vista sobre educación matemática, experiencias de aula, etc.
- **Talleres:** son cursos prácticos con una duración de dos horas cuyo principal objetivo es la manipulación de materiales, software, la exposición de actividades concretas, etc.
- **Pósters:** suponen una forma visual de transmitir resumidamente alguna experiencia de aula o planteamiento didáctico de algún aspecto de las matemáticas.
- **Zoco Matemático:** pretende ser una oferta que se hace a todos aquellos asistentes que deseen disponer de un espacio físico y horario en el que puedan presentar materiales didácticos, recursos, etc.

Más información en la web del CEAM <http://thales.cica.es/xvceam>

Inscripción

Las cuotas de inscripción son:

	CUOTA REDUCIDA Hasta el 15/5/2014	Después del 15/5/2014
Socios (de THALES o de la FESPM)	80 €	120 €
No socios	140 €	180 €
Estudiantes desempleados	40 €	40 €

Contacto

Puedes contactar con la organización del XV CEAM a través de

- El email xvceamthales@gmail.com
- o la dirección postal : Sociedad Andaluza de Educación Matemática THALES. C/ Hermanos Carvajal, nº 5 - 2º D. 23740 Andújar

Matemáticas en el cine I: *Los crímenes de Oxford*

Lucía Vázquez Rodríguez
Universidad de Cádiz

Resumen: *Los momentos de ocio de nuestros jóvenes están ocupados por los amigos, la música, el ordenador, el deporte, las videoconsolas,... y en gran medida por el cine y la TV. Por ello, este trabajo pretende fomentar el gusto por las Matemáticas a través del cine, promover actividades para llevar al aula, provocar el gusto por la búsqueda de Matemáticas en el desarrollo de una película, popularizar y divulgar las Matemáticas, así como servir de referencia al resto de profesorado para el diseño de actividades que busquen el desarrollo de una amplia gama de competencias curriculares en el alumnado participante en la experiencia.*

Palabras claves: *cine, película, GeoGebra, ESO.*

Mathematics in cinema I: *The Oxford Murders*

Abstract: *Leisure time of young people are occupied by friends, music, computer, sports, video games,... and largely by films and TV. Therefore, the objectives of this work are to promote mathematics through films, to create activities to develop in the classroom, to make students like searching for mathematics while they are watching a film, to popularize and publish mathematics and to be useful as a reference to the other teachers in order to design activities that develop many curricular competencies in students that are participating in this experience.*

Key words: *cinema, film, GeoGebra, Secondary Education.*

INTRODUCCIÓN

Este trabajo pretende fomentar el gusto por las Matemáticas a través de la película propuesta *Los crímenes de Oxford*, promover actividades para llevar al aula, popularizar y divulgar las Matemáticas, así como servir de referencia al resto de profesorado.

Comenzaremos con la introducción de la ficha técnica y artística de la película, y un resumen para situar a los alumnos en el contexto donde se desarrollan los hechos. También comentaremos una breve filmografía del director, guionistas y premios recibidos.

A continuación explicaremos la temporalización de las distintas sesiones que utilizaremos para llevar a cabo la actividad propuesta. Primero se proponen una serie de cuestiones para ir pensando y responder en la última sesión, y una vez vista la película se plantean actividades agrupadas en cuatro partes:

- Primera Parte: Reflexiones sobre aspectos o frases citadas en la película.
- Segunda Parte: Pi, la razón áurea y la sucesión de Fibonacci.
- Tercera Parte: Círculo, pez, triángulo, tetraktys, ...
- Cuarta Parte: Ternas pitagóricas.

FICHA TÉCNICA Y ARTÍSTICA

Director: Alex de la Iglesia.

Año: 2008

Duración: 110 minutos

Género: Criminal, Suspense, Romance

Reparto:

- **Elijah Wood (Martin)**
- **John Hurt (Arthur Seldom)**
- **Leonor Waitling (Lorna)**
- **Julie Cox (Beth)**
- Dominique Pinon (Podorov)
- Dominique Pinon (Frank)
- Jim Carter (Inspector Petersen)
- Anna Massey (Mrs. Eagleton)
- Alex Cox (Kalman)
- Tom Frederic (Ludwig Wittgenstein)
- Roque Baños (Director)
- Alan David (Mr. Higgins)
- Tim Wallers (Abogado Defensor)
- Ian East (Howard Green)
- Charlotte Asprey (Mujer de Howard Green)

Productora: Eurimages, Tornasol Films, Telecinco Cinema, La Fabrique de Films.

Guión: Álex de la Iglesia, Jorge Guerricaechevarría.

Web: www.loscrimenesdeoxford.com

Música: Roque Baños

Fotografía: Kiko de la Rica

Efectos especiales: Anthony Parker, Bernard Newton, Joe White, Jon Moore, Neal Champion, Nick P. Phillips, Peter Hawkins, Scott Peters

Efectos visuales: Aníbal del Busto, Carlos Trijueque, Daniel Trujillo, Félix Bergés, Guillermo Orbe, Inma Nadela, Rafa Solorzano, Ramón Ramos, Thorsten Rienth

Fecha de estreno en España: 18 de enero de 2008.

Presupuesto: 8 000 000 € producción, 997 000 € marketing.

Recaudación: 8 206 091,51 € en España, 2 750 123 dólares en Francia.

SINOPSIS

Martin (**Elijah Wood**) es un estudiante estadounidense que llega a Oxford para que el prestigioso Arthur Seldom (**John Hurt**) dirija su tesis. Lo que no imagina es que cuando su casera (Anna Massey) aparezca asesinada, alumno y profesor se verán envueltos en la resolución de un crimen donde su asesino les está dejando pistas constantemente.

La muerte de la anciana no es sino el primero de una serie de asesinatos con inquietantes puntos en común. Son crímenes casi imperceptibles, que podrían incluso pasar por muertes naturales si no fuera porque cada uno de ellos viene acompañado de un mensaje: una imagen, un signo diferente en cada ocasión que, muerte a muerte, va dando forma a una serie cuya lógica deberán descifrar los protagonistas. Recorrer ese camino supondrá poner a prueba no solo las convicciones matemáticas sino la propia forma de entender el mundo del profesor y del alumno ¿Podemos conocer la realidad? ¿Es posible alcanzar la verdad?

BREVE FILMOGRAFÍA DEL DIRECTOR



Alejandro de la Iglesia Mendoza nació en Bilbao, Vizcaya, Euskadi el 4 de diciembre de 1965, conocido como Álex de la Iglesia, es un director, productor y guionista de cine español, antiguamente historietista.

Licenciado en Filosofía por la Universidad de Deusto, empezó a dibujar historietas en los fanzines No, el fanzine maldito y Metacrílate, y en revistas como Trokola, Burdinjaun, La Fía del Ocio o La Comictiva.

Su primer y único corto como coguionista y director, *Mirindas asesinas* (1991), acaparó premios en numerosos festivales, y sirvió para que Pedro Almodóvar, a través de su productora El Deseo, se animase a apadrinar su primer largometraje, *Acción Mutante* (1993).

Su segunda película *El Día de la Bestia* (1995), consiguió seis Premios Goya (entre ellos el de Mejor Dirección), y fue galardonada en los festivales de Gérardmer y Bruselas, además de recibir el aplauso unánime de la crítica y público en los Festivales de Venecia, Toronto y Sitges, convirtiéndose además en uno de los mayores éxitos de taquilla de la temporada.

Perdita Durango (1997) supuso su tercer largometraje y el segundo producido por Andrés Vicente Gómez después del éxito abrumador de *El Día de la Bestia*.

Muertos de Risa (1999) y la acaparadora de Goyas *La Comunidad* (2000) supusieron un punto de inflexión en su meteórica carrera. De ahí pasó a convertirse además en su propio productor en *800 balas* (2002), a través de Pánico Films. Abordó un marmitako-western inaudito rodado en Almería y protagonizado por un Sancho Gracia icónico.

Crimen perfecto (2004) es su vuelta al humor negro, que para muchos críticos contiene la esencia del mejor Alex de la Iglesia, a estas alturas de su película un cineasta respetado y admirado en todo el mundo, con los fans más devotos del universo cinematográfico.

Los crímenes de Oxford (2007), protagonizada por Elijah Wood y John Hurt está basada en la novela argentina *Crímenes imperceptibles*. En XXIII edición de los premios Goya fue candidato a mejor película, mejor director y mejor guión adaptado.

Balada triste de trompeta (2010) fue galardonada con dos premios en la 67ª Mostra de Venecia, al mejor guión y el León de plata a la dirección. Además, fue nominada a quince premios Goya en 2011. De todos ellos recibió galardones al mejor maquillaje y a los mejores efectos especiales.

En 2012 estrenó *La chispa de la vida* protagonizada por Salma Hayeky, José Mota y rodada en Cartagena. En otoño de 2012 ha iniciado el rodaje de la comedia “Las brujas de Zugarramurdi”, con un extenso reparto que incluye a Carmen Maura, Macarena Gómez, Hugo Silva, Mario Casas...



GUIONISTAS

Álex de la Iglesia

Jorge Guerricaechevarría es uno de los guionistas más prolíficos e importantes del cine español. Ha sido guionista y coguionista de muchas de las películas de Álex de la Iglesia y Daniel Monzón. También ha escrito para Pedro Almodóvar en [Carne trémula](#).

Ha ganado un Premio Goya por el guion de [Celda 211](#), basado en la novela del mismo nombre de Francisco Pérez Gandul. También ha sido finalista en los Goya por los guiones de [El día de la bestia](#) y [La comunidad](#), en la categoría de guión original, y ha recibido una nominación al mejor guión adaptado por [Los crímenes de Oxford](#). En 2008, Zinema-
stea premió su carrera como guionista.

PREMIOS

La siguiente tabla recoge la XXIII edición de los premios Goya, de los cuales destacar entre las nominaciones, premio a mejor música original, mejor montaje y mejor dirección de producción:

Categoría	Persona	Resultado
Mejor película		Candidata
Mejor director	Álex de la Iglesia	Candidato
Mejor guión adaptado	Jorge Guerricaechevarría Álex de la Iglesia	Candidatos
Mejor música original	Roque Baños	Ganador
Mejor montaje	Alejandro Lázaro	Ganador
Mejor dirección de producción	Rosa Romero	Ganadora

NIVEL CURRICULAR

El nivel educativo recomendado para el visionado y la realización de las actividades propuestas es 1º o 2º Bachillerato. No obstante, cada profesor/a adecuará el nivel de dificultad de las actividades de ampliación a los niveles curriculares.

OBJETIVOS DIDÁCTICOS GENERALES

- Fortalecer sus capacidades afectivas en todos los ámbitos de la personalidad y en sus relaciones con los demás, así como rechazar la violencia, los prejuicios de cualquier tipo, los comportamientos sexistas y resolver pacíficamente los conflictos.

- Desarrollar destrezas básicas en la utilización de las fuentes de información para, con sentido crítico, adquirir nuevos conocimientos. Adquirir una **preparación básica en el campo de las tecnologías, especialmente las de la información y la comunicación**.
- Concebir el conocimiento científico como un saber integrado que se estructura en distintas disciplinas, así como conocer y aplicar los métodos para identificar los problemas en los diversos campos del conocimiento y de la experiencia.

OBJETIVOS DIDÁCTICOS CONCRETOS

Además de los objetivos didácticos ya propuestos en el apartado anterior, propongo los siguientes:

- **Desarrollar la capacidad del pensamiento lógico matemático.**
- Acrecentar la capacidad de observación.
- Mejorar en los estudiantes su capacidad de análisis deductivo y habilidades para formular y resolver problemas de la vida diaria.
- Resolver problemas de matemática recreativa, utilizando el razonamiento basado en la lógica.
- Descubrir procedimientos y estrategias utilizadas en la resolución de problemas matemáticos, a partir de este tipo de actividades.
- Utilizar herramientas TIC para tareas de investigación bibliográfica.
- Aumentar la habilidad del pensamiento lógico reflexivo en los escolares, para la resolución de problemas de la vida diaria en las matemáticas.

Este tipo de actividades de resolución de pequeños problemas de ampliación y situaciones tienen una gran importancia didáctica en los procesos de formación matemática y podríamos decir que con esta película y todas las actividades derivadas de la misma, se pretende dar al alumnado una visión diferente de las Matemáticas, haciéndolas misteriosas, divertidas y atrayentes.

TEMPORALIZACIÓN

- Son necesarios al menos 6 periodos lectivos.
- Se propone utilizar también sesiones de tutoría. No se puede predecir el número exacto pues esta actividad irá en función del grado de implicación y del nivel de conocimientos previos del alumnado.
- Utilizaremos, además, una clase para la introducción al tema y a la película, con el comienzo de la proyección y el resto para la visión pautada.
- También es recomendable para la asignatura optativa de oferta obligada de 2º de Bachillerato: Proyecto de Investigación Integrado.
- La actividad también es muy adecuada para la celebración de Jornadas Culturales, Congresos, Cursos de Extensión Universitaria, Cursos de Verano o similares.

PUNTOS DE INTERÉS ANTES DEL VISIONADO DE LA PELÍCULA

Algunas cuestiones para plantear al alumnado, no todas tienen que ser contestadas, antes de ver la película son las siguientes:

- 1) ¿Conocéis a los directores y guionistas de *Los crímenes de Oxford*? ¿Y a los actores principales?
- 2) ¿Os parece que la película está relacionada con el mundo de las Ciencias o más bien con el de las Letras?
- 3) ¿Cómo creéis que están relacionadas las Matemáticas y los crímenes?
- 4) ¿Qué son realmente las Matemáticas?
- 5) ¿Qué son las series numéricas? ¿Existen series numéricas en la naturaleza? Citar varios ejemplos.
- 6) ¿Qué son las ternas pitagóricas? ¿Existe relación con algún resultado ya estudiado?

SUGERENCIAS DIDÁCTICAS Y ACTIVIDADES DE APOYO

A continuación enumeramos una colección de actividades para plantear en clase al alumnado tras ver la película, y ayudar a adquirir las diferentes competencias básicas en el área de Matemáticas.

Primera Parte: Comenzamos con algunas reflexiones sobre aspectos o frases citadas en la película

1. El *Tractatus Logico - Philosophicus* de Ludwig Wittgenstein, magna obra para la fundamentación de la verdad lógico matemática, es la cita de arranque en la conferencia de Seldom en que apoya su tesis. ¿Podemos conocer la verdad?

2. “No existen ninguna verdad fuera del mundo de las matemáticas”

2.1. ¿Estás de acuerdo con la afirmación?

2.2. En caso negativo, citar ejemplos.

“De lo que no se puede hablar mejor es callar”

3.1. ¿Estás de acuerdo con la afirmación?

3.2. En caso afirmativo, cita un caso real donde lo hayas aplicado.

Axiomas indeterminados.

4.1. ¿Qué son? Ejemplo citado en la película.

4.2. Se supone que la publicación en prensa de la pauta del asesino le llevará a modificarla, ¿crees que el hecho de la observación influye en el comportamiento del objeto observado?

5. Buscar información sobre la máquina enigma.

5.1. El problema del descifrado de la clave cambiante de la máquina *Enigma*, utilizada por los nazis en sus transmisiones durante la II Guerra Mundial, fue resuelto por un equipo de matemáticos encabezado por Alan Turing. La anciana Mrs. Eagleton lo recuerda en primera persona. Según ella, ¿dónde se encuentra la máquina enigma original?

5.2. ¿Conocéis otra película sobre o donde aparezca la máquina enigma?

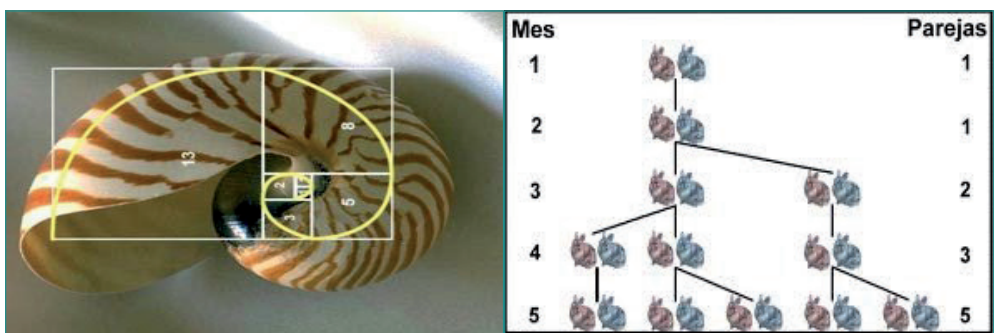
6. Teorema de Gödel: “Cualquier enunciado puede ser válido”. ¿Estás de acuerdo?

Discusión en clase.

Segunda Parte: Pi, la razón áurea y la sucesión de Fibonacci

Martin piensa que hay un orden que preside la naturaleza. Llega a decir “Creo en el número pi” y hace referencias a la razón áurea y la sucesión de Fibonacci. Seldom, más potente en su argumentación, le replica: “¿Hay armonía y belleza en el crecimiento desordenado de un cáncer? Esas ideas son sólo miedo. Es triste, pero es lo que hay”.

1. Expresar vuestra opinión sobre la postura de Martin y la de Seldom en esta escena.
2. ¿Conocéis la sucesión de Fibonacci? Escribir los 10 primeros términos.



3. Presencia de la razón áurea en la naturaleza, en el arte y en la arquitectura. Buscar dos ejemplos (imágenes) en cada caso. Consultar la siguiente página web: <http://aureo.webgarden.es/menu/naturaleza> sobre el número áureo, la divina proporción y sus características.

Tercera Parte: Círculo, pez, triángulo, tetraktys, ...



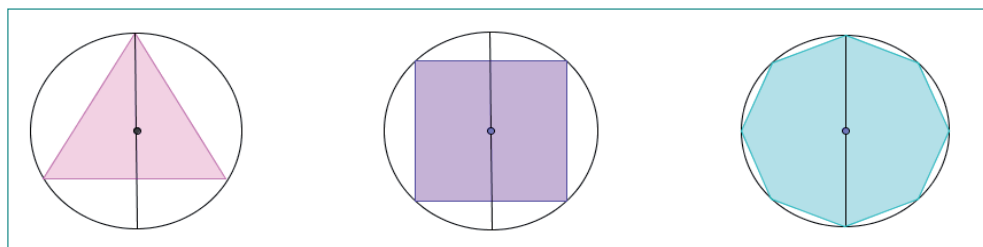
Esta misteriosa sucesión aparece sucesivamente tras los crímenes ocurridos en la película. Vamos a estudiarla con un enfoque matemático:

1. Tomemos el primero de los términos: **el círculo**.

1.1. ¿Cuál es el significado del círculo según Martin? Propón otro significado matemático para el círculo.

1.2. GeoGebra: ¿Sabes obtener la longitud de una circunferencia dada a partir de polígonos regulares inscritos en ella, cada vez con mayor número de lados?

1.2.1. Suponiendo que el diámetro de la circunferencia es 1, ¿cuál es el perímetro de un triángulo, inscrito en ella?, ¿y el de un cuadrado?, ¿y el de un octógono?



1.2.2. Deduce cuál sería el perímetro de un polígono regular de n lados, inscrito en ella.

1.2.3. Cuando n sea muy grande, ¿hacia qué valor se va acercando el perímetro?

1.3. GeoGebra: ¿Qué ocurre con polígonos circunscritos? Deduce cuál es el perímetro de los polígonos circunscritos a la circunferencia, conociendo su diámetro.

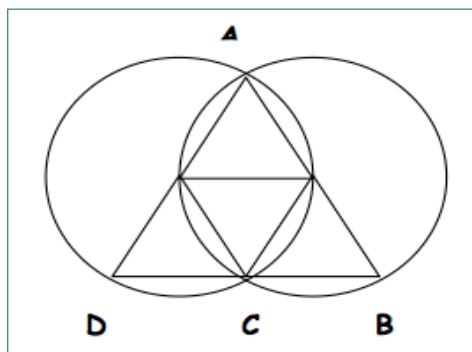
2. Nos fijamos en el segundo término de la sucesión: **el pez o vesica piscis**.

2.1. GeoGebra: ¿Sabrías construir el pez a partir de dos círculos? Se puede construir como la parte común a dos círculos del mismo radio, de forma que la circunferencia de cada uno pasa por el centro del otro.

2.2. Suponiendo que los radios de los círculos valen 1, demuestra que los triángulos de la figura son todos equiláteros.

2.3. Calcula la distancia AC y el área del triángulo ABD .

2.4. ¿Cuál es el área de la vesica piscis?



3. El tercer término de la sucesión es el **triángulo equilátero**.

3.1. Esta figura geométrica es muy familiar, y de ellas conocemos muchas cosas. ¿Cuáles son las propiedades de un triángulo equilátero?

3.2. GeoGebra: Calcula el área de un triángulo equilátero conociendo la longitud del lado, 4 cm. ¿Y si el lado mide 5 cm? ¿Y si es 10 cm?

3.3. ¿Existe alguna relación entre el lado de un triángulo equilátero y su altura?

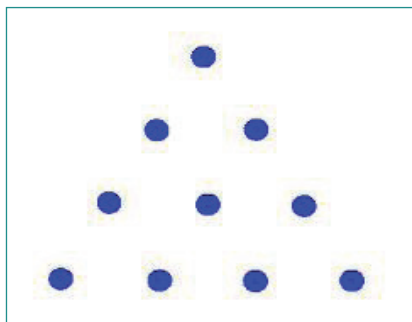
3.4. Si el triángulo equilátero está inscrito en una circunferencia, ¿cuál es la relación entre el lado del triángulo y el radio de la circunferencia? Propón un ejemplo para ilustrar tu solución.

3.5. Calcula la longitud del lado de un triángulo equilátero conociendo el valor de su área, 36 cm^2 .

3.6. ¿Puede haber un triángulo equilátero en el que su lado y su área sean números enteros? Demuéstralo.

4. Llegamos al cuarto término: **la tetraktys**.

4.1. ¿Qué es la tetraktys? *La suma de los cuatro primeros números naturales: $1 + 2 + 3 + 4 = 10$.*



4.2. Wikipedia: ¿Qué son los números triangulares? También puede considerarse como el cuarto número triangular, pues éstos forman la sucesión 1, 3, 6, 10,....

4.2.1. ¿Cuál sería el quinto número triangular?

4.2.2. Busca la expresión general de los números triangulares. ¿Por qué se llaman así?

4.3. Wikipedia: ¿Qué son los números cuadrados perfectos? Dime un ejemplo.

4.3.1. Se tiene que $1+3 = 4$, ¿4 es un cuadrado perfecto?, $3+6 = 9$, ¿9 es un cuadrado perfecto? ¿Esto ocurre con los dos siguientes números triangulares consecutivos?

4.3.2. Demuestra que un número cuadrado perfecto se puede descomponer como suma de dos números triangulares consecutivos.

Cuarta Parte: Ternas pitagóricas

1) Wikipedia: ¿Qué son las ternas pitagóricas? *Son números enteros positivos x , y , z , que cumplen la igualdad $x^2 + y^2 = z^2$.*

2) Encuentra varias ternas pitagóricas.

- 3) Si a , b y c son una terna pitagórica, ¿ $n \cdot a$, $n \cdot b$, $n \cdot c$, siendo n un número entero positivo, también lo son? Demuéstralo.
- 4) Comprobar que las ternas de números de la forma $2n + 1$, $2n^2 + 2n$, $2n^2 + 2n + 1$, siendo n un número entero positivo, forman una terna pitagórica para cualquier valor de n .
- 5) Hacer lo mismo con la terna $a^2 - b^2$, $2ab$, $a^2 + b^2$, siendo a y b enteros positivos, con a mayor que b .
- 6) Fermat demostró que el área de un triángulo pitagórico (es decir, cuyos lados forman una terna pitagórica) no puede ser un número cuadrado perfecto. Lo consiguió utilizando un método de demostración del que él fue su creador y que se denomina del descenso infinito. ¿En qué consiste este método? ¿Cómo se aplica en este caso?

Finalmente, tras la discusión grupal sobre las primeras cuestiones propuestas antes de ver la película, pediremos que cada alumno/a haga un comentario personal de esta película: lo que le ha gustado, lo que no, si le ha aportado algo, ... ¿la recomendarías?

Comienzo de la Revista Épsilon

Luis Rico

Universidad de Granada

Resumen: *En marzo 2014 se cumple el trigésimo aniversario de la publicación del primer número de la Revista Épsilon. Rememorar este hecho y evocar brevemente algunas circunstancias relevantes que lo acompañaron, es el encargo recibido de la actual dirección de la Revista, para su conmemoración. A ese propósito responden estas notas.*

Palabras Clave: Revista Epsilon, Educación matemática.

Beginning of the Journal Epsilon

Abstract: *In March 2014, the thirtieth anniversary of the publication of the first issue of the Journal Epsilon holds. Remembering this fact and briefly recall some relevant circumstances that accompanied it, is the task received from the current leadership of the journal for its commemoration. These notes are directed to this purpose.*

Keywords: *Journal Epsilon, Mathematics education*

CONTEXTO DE CAMBIO E INNOVACIÓN EDUCATIVA EN LA DÉCADA DE LOS 80

La innovación educativa de España en los 80 y las decisiones e iniciativas escolares que se adoptaron en ese tiempo hay que entenderlas en un contexto de cambio curricular y de renovación administrativa, derivados de la reforma educativa planteada por el gobierno socialista, ganador de las elecciones generales en 1982. En julio de 1983 el Ministerio de Educación y Ciencia publica el documento programático *Hacia la Reforma*, revisado en septiembre de 1985. Este documento presentaba los principios y las propuestas de cambio del flamante Ministerio, liderado por el Ministro Maravall, para el conjunto del sistema educativo español. La nueva administración propone los primeros

proyectos de reforma como hipótesis de trabajo, elaboradas por grupos de estudio, que deben ser experimentadas antes de difundirse a todo el sistema educativo. Los cambios no se conciben como prescriptivos y organizados desde arriba (Rico y Sierra, 1994).

La reforma comienza con la elaboración o, al menos, aceptación de unas hipótesis previas por parte del Ministerio de Educación, seguida de una fase de pre-experimentación de un año, que se continúa con la experimentación propiamente tal durante cinco años; finalmente, después de una evaluación de las experiencias, la difusión de los resultados y su generalización al sistema. Paralelamente, se inicia un proceso de reformas en los servicios del sistema educativo que llevan a la creación de Centros de Apoyo, Centros de Profesores, así como a la iniciación de programas específicos, como el Atenea, para la introducción de las Nuevas Tecnologías en el sistema educativo.

Las innovaciones educativas en curso pusieron de manifiesto deficiencias en el equipamiento e infraestructura de los Centros, falta de recursos y escasez de personal especializado en el propio sistema educativo. Estas carencias llevaron a plantear la necesidad de equipos multiprofesionales de apoyo a los proyectos en curso e hicieron igualmente evidente la necesidad de formación y actualización del profesorado. Equipos Psicopedagógicos y Servicios de Orientación Escolar y Vocacional surgen como respuesta a las anteriores demandas.

Los Centros de Profesores (CEP) se crean y regulan, mediante el Real Decreto 2112/84 de 14 de noviembre (MEC, 1984b), y surgen con la finalidad de vincular la formación permanente y la actualización del profesorado a cada entorno concreto y a las necesidades específicas de los centros. Los Centros de Profesores proponen seguir el modelo británico, país con gran tradición de educación descentralizada, con participación activa y protagonizada por los mismos profesores.

En su preámbulo, el mencionado Real Decreto, establece:

“La preocupación por la mejor asignación de los recursos disponibles y la convicción de que el trabajo en equipo constituye el principal activo en la propia renovación pedagógica de los docentes, imponen la necesidad de arbitrar nuevas fórmulas para el perfeccionamiento del profesorado; fórmulas que sean coherentes con una concepción del Profesor como profesional dotado de un alto grado de autonomía que adecua la enseñanza a las condiciones del medio y no se limita a la mera ejecución de los programas.” (MEC, 1984b).

Los Centros de Profesores son espacios institucionales de encuentro, donde profesionales de distintos centros y niveles pueden compartir sus preocupaciones, intercambiar experiencias y documentos, diseñar propuestas conjuntas de innovación. En los Centros de Profesores se fomenta y se percibe la urgencia del trabajo coordinado y la relevancia de los grupos de trabajo y de las sociedades disciplinares.

En el momento de su creación se rechaza implícitamente el modelo de cursillos, vinculado en ese momento a los Institutos de Ciencias de la Educación, y se apuesta por un desarrollo de la autonomía del profesor basado en la valoración crítica de la práctica educativa sobre un modelo de investigación-acción.

LEY DE REFORMA UNIVERSITARIA Y ÁREAS DE CONOCIMIENTO

La reforma del Sistema Universitario español también se inicia en estos años, con la promulgación de la Ley de Reforma Universitaria (MEC, 1983). La Autonomía

Universitaria y la Estructura Departamental son dos piezas claves de la nueva organización de las universidades. En este contexto, como parte del desarrollo normativo, surgen las áreas de conocimiento cuyo catálogo y funciones se regulan y establecen.

Por Áreas de Conocimiento se entienden “aquellos campos del saber caracterizados por la homogeneidad de su objeto de conocimiento, con una común tradición histórica y la existencia de comunidades investigadoras nacionales o internacionales” (MEC, 1984a, Art 2º.2.).

El Catálogo de Áreas de conocimiento universitarias se aprueba en 1984. Entre las nuevas disciplinas universitarias que se integran como áreas de conocimiento se encuentra la Didáctica de la Matemática (MEC, 1984a, Anexo), lo cual tendrá considerable impacto en la valoración de las matemáticas escolares por el sistema educativo español, en el desarrollo del conocimiento profesional del profesor de matemáticas como conocimiento disciplinar específico, y en la propia constitución de la Didáctica de la Matemática como disciplina.

RESPONSABILIDAD DEL PROFESORADO ANTE LOS CAMBIOS

Cambios en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Los cambios normativos, organizativos y curriculares mencionados, producidos en España en la década de los 70 y comienzos de los 80 responden a distintos requerimiento políticos, sociales, demográficos, económicos y académicos pero, todos ellos, con implicaciones en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.

Como respuesta a estas demandas y necesidades, a comienzos de la década de los 80, se produce en España el despegue del movimiento asociativo de los profesores de matemáticas, debido a la necesidad de abordar los problemas de la educación matemática, incluida la investigación educativa, desde un marco amplio y mejor que el de los grupos de renovación. Así, se producen durante estos años la constitución de Sociedades de profesores de Matemáticas. En 1978 se funda la Sociedad Canaria Isaac Newton, en 1980 la Sociedad Andaluza de Profesores de Matemáticas Thales y en 1983 la Sociedad Aragonesa Pedro Ciruelo. Estas nuevas sociedades, sin precedentes en nuestra tradición, se sustentan en la innovación y el intercambio de experiencias educativas, en los nuevos centros y organismos que la administración educativa proporciona a los profesores en ejercicio y en las nuevas exigencias de rigor académico planteadas a las disciplinas educativas desde la universidad.

El movimiento asociativo coordina y organiza una comunidad emergente de educadores matemáticos, cuya actividad aún no ha concluido de crecer y desarrollarse (Rico y Sierra, 1991). Desde sus comienzos, el movimiento asociativo pone manifiesto una conciencia firme del papel destacado de las matemáticas en el sistema educativo, por sus funciones sociales y formativas. Este movimiento muestra la responsabilidad cívica y la autonomía profesional de los docentes de matemáticas de todos los niveles, que participan y promueven la reforma del sistema educativo, toman iniciativas sobre su propia formación y promoción profesional, y descubre el sentido de pertenencia a una comunidad, con intereses intelectuales y profesionales propios.

El movimiento asociativo de los profesores de matemáticas emprende durante estos años iniciales una gran expansión y se compromete activamente con la reforma, bien en su promoción, o bien en su crítica. Relacionados con los proyectos de reforma en marcha se producen documentos relativos al currículo de matemáticas para la enseñanza secundaria; también se realizan algunos encuentros importantes que mantienen vivo el debate y aportan nuevas ideas a los profesores de matemáticas españoles. En 1987 las Sociedades constituyen la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas que, en el momento actual, abarca profesores de matemáticas de todos los niveles y se extiende a todas las Comunidades Autónomas.

EL COMIENZO DE LA REVISTA *ÉPSILON*

En este marco de cambios y de reformas, que afectan a la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas escolares en todos los niveles del sistema educativo, desde preescolar hasta la universidad, el 4 de febrero de 1984, 132 profesores andaluces de matemáticas en ejercicio, de todos los niveles educativos, toman la decisión de constituir la Asociación de Profesores de Matemáticas de Andalucía (APMA). Entre sus fines principales está la publicación de la *Revista Épsilon*.



Portada del N° 1 de la *Revista Épsilon* (1984)

El Editorial del primer número hace una declaración programática sobre la nueva revista. En primer lugar, se presentan los promotores de la publicación y se argumenta la conveniencia del título: “Es éste un nombre [Épsilon] (cuyo) carácter es bien conocido por todos *tan pequeño como se quiera* y a la vez importantísimo, por estar presente en los conceptos fundamentales de la Matemática y trazar fronteras, sujetas a variación, que aglutinan alrededor de un objetivo infinidad de elementos, dejando muy pocos fuera. Así quiere ser Épsilon, un objetivo que reúna a todos los admiradores de la matemática y que, por esta vez, no deje a nadie fuera.

En segundo lugar, el editor argumenta que la publicación es un objetivo de la Asociación de Profesores de Matemáticas de Andalucía. La publicación se propone “superar la desconexión existente entre niveles educativos, el desconocimiento de experiencias que hacen otros compañeros, la ignorancia de muchos acerca de caminos a seguir para obtener ayudas que permitan avanzar en nuestros proyectos educativos, la imposibilidad de asistir a todos los cursos o seminarios que se organizan (...) queremos que estas páginas sirvan como ayuda en el trabajo y como medio de expresión de la Asociación” (Pérez, 1984).

La Revista inicia su andadura en los locales de la Sección de Matemáticas de la Facultad de Ciencias de la Universidad de Granada, y se propone publicar 3 números anuales. Las seis secciones que estructuran la revista se mantienen durante su primer periodo de edición entre 1984 y 1987: Artículos, Práctica, Informática, Experiencias Educativas en Matemáticas, Educación y Cultura, y Reseñas de Libros y Revistas. Las secciones muestran el cumplimiento del programa de trabajo asumido por los editores de *Épsilon*. Se publican 100 trabajos en los 9 números de este primer periodo, que concluyen con un monográfico dedicado a estudiar la presencia de las matemáticas en la Alhambra.

1984 es un año en que confluyen una serie de factores, y se concretan distintas propuestas educativas que están en marcha. La creación de los Centros de Profesores en este año expresa la decisión de la administración educativa de proporcionar al profesorado en ejercicio soporte administrativo, infraestructuras y apoyos para la innovación y la reforma educativa. 1984 es el año en que la organización del sistema universitario establece y desarrolla las áreas de conocimiento –entre ellas la Didáctica de la Matemática– como parte central de su arquitectura, del nuevo marco académico y administrativo de la universidad española.

EPÍLOGO

En marzo de 1988 se publica el número 10 de la *Revista Épsilon*, dando por concluida la primera etapa e inaugurando una segunda etapa de la Revista. Esta segunda etapa tiene su origen en la unificación de la Asociación de Profesores de Matemáticas de Andalucía (APMA) y la Sociedad de Profesores de Matemáticas Thales, en la nueva Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales (SAEM- THALES).

En la presentación del nuevo periodo, el Presidente de la sociedad, Gonzalo Sánchez Vázquez, destaca de este hecho:

“En este año tiene lugar la unificación del movimiento de profesores de la Comunidad Autónoma de Andalucía. Al mismo tiempo está a punto de consolidarse una Federación

de Sociedades de todo el País que coordine las actividades nacionales e internacionales en torno a la Educación Matemática.

Estos hechos importantes son el producto final de un proceso de convergencia de acciones dispersas nacidas espontáneamente en el territorio español como consecuencia de las preocupaciones, trabajos y reuniones de miles de profesores de matemáticas.

La nueva situación debiera reflejarse en las publicaciones periódicas y así parece lógica consecuencia la existencia de una sola revista regional en la que se fusionen las dos existentes actualmente y la creación de una revista nacional, con el apoyo de la Sociadaes que trabajen en el ámbito del Estado Español.

Este número que presentamos es el primero de la segunda época de las Revistas *ÉPSILON* y *THALES* que se publicaban hasta ahora por las dos Sociedades de Andalucía (APMA y SPMA). Se ha considerado que la mayor antigüedad de *ÉPSILON* debía prevalecer en cuanto al título de la nueva Revista, como órgano de la única Sociedad Andaluza de Educación Matemática “*THALES*”. Con ello mantenemos en la misma portada los nombres que han simbolizado la actividad anterior de los dos colectivos andaluces.” (Sánchez Vázquez, G. *Épsilon*, nº 10, p. 7.)

A partir de aquí da comienzo una nueva etapa, la de los años 90 y posteriores, cuya historia está por escribir.

Centros de profesores, departamentos universitarios y áreas de conocimiento, sociedades de educadores y de profesores de matemáticas, son tres instrumentos cuya presencia y desarrollo coinciden en el tiempo a mediados de la década de los 80. Son tres instituciones diferentes y complementarias, sin cuya coordinación no es posible entender el inicio de la publicación y edición de la *Revista Épsilon*. Los profesores andaluces de matemáticas que, en su momento tomaron la decisión de su puesta en marcha, respondieron libre y generosamente a los retos educativos del momento y, para ello, se dotaron de medios con los cuales llevar a término su tarea.

REFERENCIAS:

- MEC (1983). Ley Orgánica 11/1983, de 25 de agosto, de Reforma Universitaria
- MEC (1984a) Real Decreto 1888/1984, de 26 de septiembre, por el que se regulan los concursos para la provisión de plazas de los cuerpos docentes universitarios.
- MEC (1984b). Real Decreto 2112/84 de 14 de noviembre por el que se regula la creación y funcionamiento de los Centros de Profesores.
- Pérez, R. (1984). Editorial. *Épsilon*, nº 1, pp. 3-4
- Rico, L. y Sierra, M. (1991) La comunidad de educadores matemáticos. En A. Gutiérrez (Ed.) Área de conocimiento Didáctica de la Matemática. Madrid: Síntesis, pp. 11-58.
- Rico, L. y Sierra, M. (1994). La década de los 80 y comienzos de los 90. En: Kilpatrick, J, Rico, L. y Sierra, M. (Eds.): *Educación matemática e investigación*, pp. 167-192. Madrid: Síntesis.
- Sánchez Vázquez, G. (1988). *Épsilon*, nº 10, p. 7.

EPSILON: Una Revista que asume retos

Antonio Moreno Verdejo

Director de EPSILON durante el período 2004-2011

Resumen: *Con motivo de celebrarse 30 años de la revista épsilon, se presenta una visión de la revista por quién fue uno de sus directores.*

Palabras clave: *Revista épsilon, política editorial*

Epsilon: A journal that takes challenges

Abstract: *On the occasion of 30 years of the journal epsilon, a vision of the magazine who was one of its directors is presented.*

Keywords: *Journal Epsilon, Editorial Policy*

Cuando recibí una llamada solicitándome el encargo de dirigir la revista EPSILON sentí una cierta incomodidad. La revista hasta ese momento había sido bien dirigida y asumir su gestión era un importante riesgo. Por otro lado, se trata de uno de los encargos más ilusionantes que se pueden afrontar como profesor de matemáticas.

Durante su dirección hubo muchos momentos extraordinarios y algunos también desalentadores pero afortunadamente el tiempo sólo deja en el recuerdo los primeros, dejando pervivir una energía propia de las actividades que se llevan a cabo con idealismo y que se realizan acompañadas de un magnífico equipo.

El equipo editorial fue la base de este período y el culpable de todo lo bueno que se hiciera durante el mismo. Me referiré a ellos a lo largo del texto porque no puedo concebir esta etapa de dirección sin él.

La primera decisión del equipo editorial fue plantearnos qué podíamos aportar como impronta personal. El análisis del contexto en el que nos encontrábamos inmersos nos dio las claves para trabajar.

EL CONTEXTO EDUCATIVO DE ESTE PERÍODO

El contexto de la educación matemática en el que se desarrolló nuestra gestión en Epsilon estuvo marcado por cambios que la sociedad asimiló con virulencia.

Por un lado, la nueva Ley Orgánica de Educación (LOE). La introducción de esta Ley suponía, entre otros muchos, cambios en los descriptores que muestran el aprendizaje de las matemáticas (aparecen las competencias matemáticas en el currículo), la forma de alcanzar dicho aprendizaje (uso de los conocimientos en contextos) y los fundamentos del aprendizaje matemático (se pasa de un modelo constructivista a un modelo funcional) (Véase Rico, Díez, Castro, y Lupiáñez, 2011).

La interpretación de los resultados de las evaluaciones PISA no mostraba la mejor cara de la educación matemática. El 4/12/2007 el diario El País recogía una noticia de la agencia EFE cuyo titular no dejaba lugar a dudas: “Mates: necesita mejorar”, en relación a los resultados de la evaluación PISA 2006.

Los resultados del aprendizaje de las matemáticas se convirtieron en una competición internacional en la que los docentes, el sistema educativo o ambos se jugaban el prestigio permanentemente. Una noticia de agencia publicada por El País titulaba así: “China toma la delantera en la Olimpiada de Matemáticas” y subtitulaba, no sin retranca: “Los seis participantes chinos aseguran haber resuelto todas las pruebas, “que no eran difíciles” -Dos de los seis españoles no consiguen acabar el último de los tres ejercicios-”.

Otro cambio que se gestó en este período fue el de la formación inicial del profesorado. El CAP dejó paso a un Máster profesional para la labor docente. Esta transformación se produce gracias al mejor conocimiento de las competencias profesionales del profesor de matemáticas, pero los medios de comunicación se enzarzaban en discusiones al margen de los resultados de la investigación en Educación Matemática. Así mientras Pardo (2008), afirmaba que con la implantación del Máster “se condena a los profesores y alumnos de secundaria a la indigencia intelectual”, R. Porlán replicaba diciendo que esta campaña de desprestigio al futuro Máster era consecuencia del “desprecio hacia las ciencias de la educación”, “implican una concepción “precientífica” -dominada por las apariencias de “sentido común”- en relación a los procesos de enseñanza y aprendizaje y a los cambios sociales de nuestro tiempo” y “dejan ver las resistencias a la innovación propias de una ideología conservadora y obsoleta”.

LOS TEMAS TRATADOS

En este contexto, el equipo editorial afrontó el reto de proporcionar al profesorado tanto un espacio de debate como herramientas para afrontar los nuevos cambios. Para ello se estructuró la revista en las secciones siguientes:

Artículos. Pedro Nieto, Consuelo Cañadas y Francisco Ruíz llevaron esta sección que componía el núcleo fundamental de la revista. Estaba abierta a cinco modalidades de trabajos:

- Investigaciones en educación matemática con sustento teórico que posibilitaran un avance en la comprensión del fenómeno de estudio

- Ensayos: reflexiones acerca del fenómeno educativo que contribuyesen a la reformulación o conceptualización de un problema, tema o metodología, que se ubicaran en el debate del momento sobre el tema y manejasen una bibliografía pertinente y actualizada.
- Informes de experiencias cuya finalidad era la transformación o innovación educativa (experiencias docentes).
- Estudios de tipo evaluativo o diagnóstico que mostrasen una aproximación teórico-metodológica innovadora o que valorasen resultados de diferentes estudios.
- Estados de conocimiento sobre un tema.

Debate. Manuel Alcalá y Ana Rodríguez guiaron esta sección propiciando el debate e intercambio de ideas entre los autores, de una parte, y la comunidad de profesores y lectores, de otra. Los resultados del informe PISA, el uso de las calculadoras gráficas en el aula y en la prueba de Selectividad, el proceso de evaluación de diagnóstico en Andalucía, la utilidad de las matemáticas, el aprendizaje y enseñanza de la geometría, el Practicum del Máster del Profesorado de Secundaria de Matemáticas, educación matemática y solidaridad, fueron temas que se enfocaron desde perspectivas diversas con la intención de generar un espacio de reflexión.

Sección de problemas comentados, coordinada por Pepe Muñoz y que contó con la colaboración del Grupo Alquerque. En este apartado se planteaban problemas para su resolución y se analizaban sus soluciones con base en la idea de que la resolución de problemas es la piedra angular del aprendizaje y la dificultad de su introducción en clase. Se facilitaron problemas de ingenio, juegos de estrategia y pasatiempos de los medios de comunicación para cuya resolución se utilizaban las mismas técnicas que en la de problemas.

Sección TIC. La acertada coordinación de Agustín Carrillo de Albornoz recogía información sobre distintos recursos que el profesorado podía incorporar a su aula, mostraba actividades prácticas sobre su uso intentando favorecer con ello el cambio metodológico que supone la introducción de las TIC en la enseñanza de las matemáticas.

Sección “+ que una asignatura”. Esta sección pretendió hacer un análisis de las posibilidades didácticas de distintos materiales y juegos, de manera que el profesor fuese consciente del beneficio de su incorporación a su tarea habitual. La coordinación de Rafael Ramírez permitió resaltar importantes aspectos matemáticos con la introducción de novedosos juegos y retos en cuya solución participaron los lectores.

Sección “Reflejos matemáticos”. Con ella, Pablo Flores consiguió descubrirnos situaciones en las que se necesitaba cierta sensibilidad para captar las matemáticas que aparecen en situaciones poco habituales. Recogió reflejos matemáticos inesperados, poco habituales, en los que la mayoría de las personas no ven matemáticas o las ven de manera superficial.

Sección “El saber sí ocupa lugar”. Belén Cobo se ocupó de incluir informaciones publicadas tanto en papel como en otros soportes. Permitiendo que el profesorado pudiera disponer de reseñas de trabajos o bibliografía comentada que podían ser de interés sobre un tema relacionado con las matemáticas y su enseñanza y que pudieran servir al profesorado para enriquecer su trabajo.

LA PÁGINA WEB Y EL DISEÑO

Con el objetivo de subrayar la nueva etapa de Epsilon, su aspecto exterior se modificó en cuanto a tamaño, número de páginas, encuadernación, portada y aspecto general, insertando una fotografía en portada procedente en muchas ocasiones de concursos de fotografía matemática de las Delegaciones Provinciales de Thales. Se incorporó un personaje, *Epsiloncito*, diseñado por Marta Flores con el propósito de incluir una nueva comunicación con el lector. Un contacto previo al acercamiento al texto.

Uno de los retos más complejos asumidos por el equipo fue poner en marcha una página web que recogiera los resúmenes de los diferentes números a modo de escaparate y también abriese otra puerta más al lector para que se colara en la Revista y su comunicación con el equipo editorial. La labor hubiera sido imposible sin María Peñas.

Allí, el profesorado podía participar en los debates, aportar puntos de vista de las distintas secciones y colaborar en la resolución de los retos que se le proponían desde Epsilon.

LA PERVIVENCIA DE LOS RETOS A LOS QUE SE ENFRENTABA EPSILON

Esta estructura pensada para dar respuesta a las necesidades del profesorado era curiosamente muy similar a la que tenían los números de EPSILON cuando inició su andadura en el año 1983 dirigida por Rafael Pérez Gómez. En aquellos inicios la Revista se organizaba en torno a Artículos, Práctica, Informática, Experiencias educativas, Educación y cultura y Reseñas de libros y revistas.

Podría decirse que los retos a los que se enfrentaba la Revista entonces, entendidos como dar soporte, ayuda y conocimiento al docente y su práctica en el aula, no variaron sustancialmente en esos veinte años. Se modificaron los canales de acceso al profesorado con la existencia de una página web y de correo electrónico pero el profesorado tenía las mismas necesidades que se convertían en el reto de EPSILON: acercar los resultados de la investigación al profesorado de matemáticas de todos los niveles educativos, mostrar experiencias de buenas prácticas docentes y mostrar las posibilidades didácticas de materiales y recursos para permitirle la innovación en el aula.

Nuestro período pasó, pero el contexto en el que desarrollamos nuestra labor perdura. Se le pide al docente que interiorice metodologías propias del aprendizaje funcional, que elabore materiales que permitan el desarrollo de la competencia matemática, la introducción de la tecnología en el aula, la innovación, conocer los resultados de investigación... Para responder a esos retos, EPSILON continúa acompañando al profesorado de matemáticas de todos los niveles educativos treinta años después.

REFERENCIAS

- Pardo, J. L. (2008). La descomposición de la Universidad, *El País* 10/11/08.
- Porlan, R. (2009). El no a Bolonia, la formación del profesorado de Secundaria y el fracaso escolar, *El País* 15/06/2009
- Rico, L., Díez, A., Castro, E. y Lupiáñez, J.L. (2011). Currículo de matemáticas para la educación obligatoria en España durante el período 1945-2010. *Educatio Siglo XXI*, 29(2), 139-172.

De José Mariano Vallejo a Pascal: recordando un antiguo criterio de divisibilidad

Antonio M. Oller Marcén

(oller@unizar.es)

Centro Universitario de la Defensa, Academia General Militar

Vicente Meavilla Seguí

(meavilla@unizar.es)

Departamento de Matemáticas, Universidad de Zaragoza

Resumen: Los criterios de divisibilidad configuran un tópico matemático que ha interesado a los matemáticos desde la antigüedad. En este artículo presentamos un interesante y poco conocido resultado sobre divisibilidad estudiado por Blaise Pascal en su *De numeris multiplicibus* (1655). También veremos cómo el matemático granadino José Mariano Vallejo recogió este resultado en el *Tratado elemental de Matemáticas* (1812) para justificar los criterios de divisibilidad clásicos más sencillos. Terminaremos presentando el resultado de Pascal en su forma más general, utilizando lenguaje moderno.

Palabras clave: Criterios de divisibilidad, Blaise Pascal, José Mariano Vallejo, Historia de las Matemáticas, siglo XVII, siglo XIX.

Since José Mariano Vallejo to Pascal: remembering an old divisibility criterion

Abstract: The study of divisibility criteria is a mathematical topic with has interested mathematicians since long time ago. In this paper we present an interesting but Little-known result about divisibility studied by Blaise Pascal on his *De numeris multiplicibus* (1655). We will also see how the mathematician from Granada José Mariano Vallejo gathered this result on his *Tratado elemental de Matemáticas* (1812) in order to justify the more simple classical divisibility criteria. We will finish by presenting Pascal's result in its more general form using modern language.

Keywords: *Divisibility criteria, Blaise Pascal, José Mariano Vallejo, History of Mathematics, XVII century, XIX century.*

1. INTRODUCCIÓN. UN CURIOSO CRITERIO DE DIVISIBILIDAD

El estudio de criterios de divisibilidad ha atraído la atención de los matemáticos desde antiguo (Dickson, 1919). En la enseñanza actual los conceptos de múltiplo y divisor se introducen en el tercer ciclo de la Educación Primaria (10-12 años), mientras que los criterios de divisibilidad más elementales se presentan en el segundo curso de la Educación Secundaria Obligatoria (13-14 años).

Para comenzar vamos a presentar e ilustrar mediante un ejemplo un criterio de divisibilidad por 7 válido para números de 6 cifras.

Supongamos que tenemos un determinado número de 6 cifras escrito en el sistema decimal (que es al que todos estamos acostumbrados). Así pues, nuestro número será de la forma:

$$N = a_6 a_5 \dots a_1,$$

donde a_1 es la cifra de las unidades, a_2 la de las decenas, y así sucesivamente.

En esta situación se tiene que el número N es múltiplo de 7 si y sólo si el número $a_1 + 3a_2 + 2a_3 + 6a_4 + 4a_5 + 5a_6$ es múltiplo de 7.

Por ejemplo, si consideramos $N = 676368$, resulta que:

$$8 + (3 \times 6) + (2 \times 3) + (6 \times 6) + (4 \times 7) + (5 \times 6) = 8 + 18 + 6 + 36 + 28 + 30 = 126.$$

Por lo tanto, como $126 = 7 \times 18$, el número original es múltiplo de 7. De hecho, se comprueba dividiendo que $676368 = 7 \times 96624$.

Este criterio de divisibilidad por 7 para números de 6 cifras es un caso particular de una situación mucho más general y bastante poco conocida.

En este pequeño trabajo vamos a presentar dicho resultado general, cuyo origen se remonta, al menos, hasta el siglo XVII en la obra de Blaise Pascal y que puede encontrarse en la obra del matemático granadino del siglo XIX José Mariano Vallejo.

2. EL MÉTODO DE PASCAL

Blaise Pascal nació el 19 de junio de 1623 en Clermont - Ferrand y murió el 19 de agosto de 1662 en París.

Su padre, el matemático Etienne Pascal, se hizo cargo de su educación, y decidió que Blaise no iniciara los estudios de matemáticas hasta haber cumplido los quince años. Así, los textos consagrados a esta disciplina fueron puestos fuera del alcance del joven Pascal. Sin embargo, la prohibición paterna despertó su curiosidad por la geometría y a los doce años de edad ya había descubierto que la suma de los ángulos interiores de un triángulo es igual a dos rectos. Ante tal descubrimiento, Etienne cambió de parecer y regaló a su hijo un ejemplar de los *Elementos* de Euclides.

A los catorce años, Blaise acompañaba a su progenitor a las reuniones del padre Mersenne en las que participaban científicos de la talla de Roberval y Desargues, a los dieciséis publicó su *Essay pour les coniques*, y a los dieciocho diseñó y construyó una máquina calculadora.



Figura 1. Blaise Pascal

Pascal tuvo, sin duda, una de las mentes más privilegiadas de la historia, pero se interesó más por la teología que por las matemáticas, disciplina a la que se dedicó de forma intermitente. A pesar de ello, sus contribuciones al estudio de las cónicas, al “triángulo aritmético” (que también se conoce como “triángulo de Pascal”), y al cálculo de probabilidades le convierten, en palabras del historiador Carl B. Boyer (1986), en el mayor “podría haber sido” de la historia de las matemáticas¹.

En uno de esos intermitentes momentos en los que se decidió a hacer Matemáticas, allá por el año 1655, Pascal publicó el artículo *De numeris multiplicibus ex sola characterum numericorum additione agnoscendis*. En él, presenta un método general y algorítmico para determinar cuándo un número es divisible por otro. En las líneas siguientes vamos a describirlo (Meavilla, 2010).

El método de Pascal se apoya en la construcción de dos sucesiones numéricas una de las cuales se escribe sobre la otra:

1. Aunque a juzgar por su frase “vale más saber alguna cosa de todo, que todo de una sola cosa” no creemos que esta apreciación supusiera un problema para Pascal.

- 1) La primera sucesión (la superior) es la de los números naturales, escritos de derecha a izquierda.
- 2) La segunda sucesión (la inferior) se construye atendiendo a las indicaciones siguientes:
 - i. Se escribe un uno debajo del 1 de la sucesión superior.
 - ii. Del producto $10 \cdot 1 [= 10]$ se resta A tantas veces como sea posible. Lo que sobra, llamémosle B, se escribe debajo del 2 de la primera sucesión.
 - iii. Del producto $10 \cdot B$ se resta A tantas veces como sea posible. Lo que sobra, llamémosle C, se escribe debajo del 3 de la sucesión superior.
 - iv. Del producto $10 \cdot C$ se resta A tantas veces como sea posible. Lo que sobra, llamémosle D, se escribe debajo del 4 de la primera sucesión.
 - v. Etc.

Procediendo indefinidamente de este modo se llega al siguiente par de sucesiones:

.....9	8	7	6	5	4	3	2	1	[S ₁]
.....I	H	G	F	E	D	C	B	1	[S ₂]

A partir de aquí, Pascal propone: *Si un número es tal que el producto de la cifra de sus unidades por 1, más el producto de la cifra de sus decenas por B, más el producto de la cifra de sus centenas por C, más el producto de la cifra de sus millares por D, etc., es múltiplo de A, entonces el número también es múltiplo de A.*

En las figuras siguientes se presentan las demostraciones dadas por Pascal para los casos de dos y tres cifras, respectivamente. (Véanse figuras 2 y 3).

3. EL MÉTODO DE PASCAL “RESCATADO” POR JOSÉ MARIANO VALLEJO

José Mariano Vallejo nació en el pueblo de Albuñuelas, muy cerca de Granada, el 30 de mayo de 1779. Para obtener información sobre su vida podemos recurrir, por ejemplo, a Juan Bautista Peyronnet, quien nos ofrece los siguientes datos biográficos (*Seminario pintoresco español*. Núm. 52, 28 de diciembre de 1856, pp. 409-410):

“Desde su niñez dio pruebas nada equívocas del gran talento que más tarde, y con el estudio de la filosofía llegó a su completo desarrollo, siendo el discípulo más aventajado de la Universidad de Granada. Los progresos que hizo al aprender las matemáticas, llamaron la atención de los profesores de la Universidad, que le aconsejaron pasase a Madrid para perfeccionarse en este ramo tan importante del saber humano; lo que Vallejo ejecutó presentándose a la Real Academia de San Fernando para que lo admitiese en clase de alumno de las clases de matemáticas. Desde aquel momento empezó sus estudios bajo la dirección del eminente y respetable profesor D. Antonio Varas y Portilla a quien Vallejo respetó siempre como padre. No fueron estériles las lecciones de tan digno profesor; pues muy luego se vieron los adelantos del discípulo con las adiciones que escribió (y publicó la Academia) a la Geometría de D. Benito Bails. Terminados sus estudios, obtuvo la cátedra de matemáticas del Real Seminario de nobles de Madrid, en una lucida oposición en que reveló sus dotes como profesor y como hombre de ciencia. Desempeñó este cargo hasta que con motivo de las

Verùm ex constructione, est. 10 — B multiplex A.
 Quare ducendo 10 — B in N est. 10 N — B in N multiplex A.
 Si ergo contingit et esse M + B in N multiplicem A.
 Ergo ambo ultimi multiplices juncti 10 N + M erunt mult. A.
 Id est N in columnâ denarii et M in columnâ
 unitatis, seu numerus NM est multiplex A.
 Q. E. D.

Figura 2. Demostración para números de dos cifras.

At ex constructione est. 10 — B, multiplex A.
 Quare multiplicando 10 — B per 10. 100 — 10 B, mult. A.
 Et ducendo ipsos in V. 100 V — 10 B in V, mult. A.
 Sed est etiam ex constructione. 10 B — C, mult. A.
 Quare ducendo in V. 10 B in V — C in V, mult. A.
 Sed ex ostensis. 100 V — 10 B in V, mult. A.
 Ergo juncti duo ultimi. 100 V — C in V, mult. A.
 Jam verò ostendemus ut in secundo casu. 10 N — B in N, mult. A.
 Ergo juncti duo ultimi, 100 V + 10 N — C in V — B in N, mult. A.
 Ergo si contingat hos numeros. C in V + B in N + M, esse mult. A.
 Ambo ultimi juncti, nempe. 100 V + 10 N + M, est mult. A.
 Seu V, in columnâ centenarii, N denarii et
 M unitatis, hoc est numerus VNM, est multi-
 plex A. Q. E. D.

Figura 3. Demostración para números de tres cifras.

ocurrencias del año 1808 se trastornó completamente la marcha de todos los asuntos (...). Terminada la guerra, y restablecido el Gobierno legítimo en Madrid, se dedicó a continuar la publicación de su tratado de matemáticas, y en 1818 al estudio de conducir aguas a Madrid, en vista de la escasez que ya entonces se notaba; presentando en 1819 al Rey D. Fernando VII una memoria sobre tan importante asunto, y otra al Excmo. Ayuntamiento. Estos trabajos fueron bien acogidos por el Monarca y por la Corporación Municipal; y a no ser por las ocurrencias del año 1820, se hubiera llevado a cabo tal proyecto que posteriormente se intentó realizar, pero cuyas circunstancias especiales retardaron la ejecución (...). A la vez que desempeñaba multitud de comisiones del Gobierno y su destino de oficial del ministerio de la Gobernación, escribía obras importantes que han contribuido de una manera muy eficaz a la ilustración del país, siendo muy notable la Memoria sobre la curvatura de las líneas, que se recibió con mucho aplauso en la Academia de París. Retirado en Francia desde el año 23 al 29, se dedicó a viajar por Francia, Bélgica, Holanda e Inglaterra, estudiando y adquiriendo datos para la obra que sobre el movimiento y aplicaciones de las aguas publicó en tres volúmenes en el año 1833, obra que contiene todos los conocimientos adquiridos y desenvueltos hasta aquella época. Vallejo pertenecía al partido liberal progresista, en cuyas filas ha permanecido constantemente hasta su muerte; y, por lo mismo, no figuró hasta el año de 1834 en que volvió a desempeñar el cargo de Director de Instrucción pública. Con este motivo redobló su celo; y con la constancia que le era tan característica, se dedicó a escribir varias obras de instrucción primaria (de cuyo desarrollo y engrandecimiento era el más entusiasta

partidario) estableciendo aparatos sencillos para facilitar la escritura y el estudio de la Aritmética. Vallejo ha sido presidente de la sección de ciencias físicas y matemáticas de la Academia de ciencias, y Vice-Director de la Sociedad Económica de Madrid. Cooperó para el establecimiento del Ateneo en 1820, y para su restablecimiento en 1835; y presidió sus secciones de ciencias físicas y matemáticas (...). El 4 de marzo de 1846, murió tan insigne varón, llorado por sus amigos, y dejando un vacío difícil de llenar (...).”



Figura 4. José Mariano Vallejo

Vallejo escribió diversos textos dedicados a la enseñanza de las matemáticas del más alto nivel. Uno de ellos es su *Tratado elemental de matemáticas*², en el que se aborda desde la Aritmética elemental hasta la Mecánica, pasando por el Cálculo Diferencial o la Trigonometría esférica.

En el Tomo primero de la Primera parte de este *Tratado elemental de matemáticas* se trabaja la Aritmética básica. En la página 73 de este tomo se presentan los criterios de divisibilidad básicos más sencillos: los correspondientes a la divisibilidad por 2, por 3, por 5 y por 11. (Véase figura 5).

Tras presentarlos, Vallejo se lamenta del tratamiento que suele recibir el tema de los criterios de divisibilidad y se propone presentar el material con total rigor:

“Todas estas reglas las dan generalmente los autores sin demostración ninguna, y sólo se contentan con verificarlas; algunos más delicados se paran a demostrar algunas de ellas, atendiendo en cada caso a observaciones particulares; pero nosotros vamos a resolver esta

2. El título completo de la obra es *Tratado elemental de Matemáticas* escrito de orden de S. M. para uso de los caballeros seminaristas del Seminario de Nobles de Madrid y demás casas de educación del Reino (1812).

cuestión en general, cosa que no tenemos noticia se halle en ningún libro elemental, por medio del siguiente:

PROBLEMA. Dado un número cualquiera, conocer si es divisible por otro número cualquiera, por otros medios diferentes de los que suministra la división.”

El autor plantea el problema de la construcción de criterios de divisibilidad en toda su generalidad. A continuación, pasa a describir el siguiente procedimiento que permite caracterizar la relación de divisibilidad entre dos números. Una lectura detenida muestra claramente que se trata del método de Pascal:

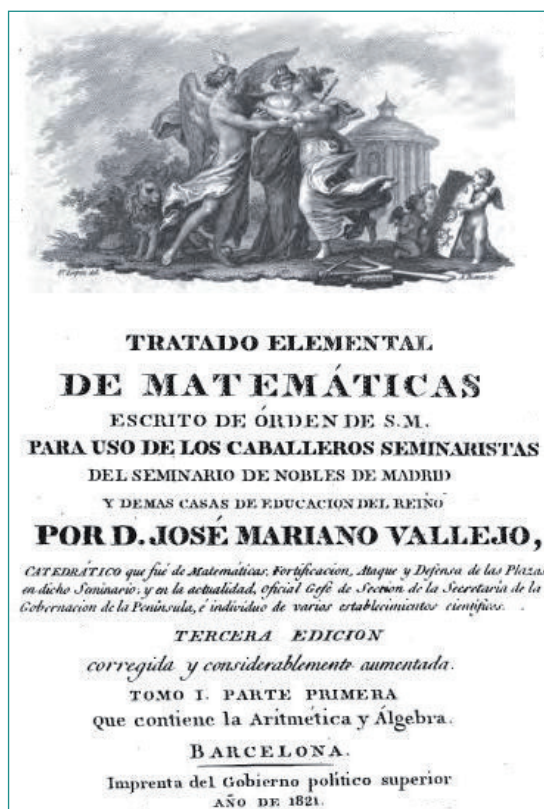


Figura 5. Portada de la tercera edición del *Tratado elemental de Matemáticas* (1821)

“Res. Fórmese ante todas cosas un conjunto de números con el orden siguiente: póngase en un lugar separado 1; a su izquierda el residuo que quede de restar el número que ha de servir de divisor, todas las veces que se pueda de 10; a la izquierda de este residuo, póngase el que quede de restar el divisor propuesto, todas las veces que se pueda, de diez veces la resta anterior, a la izquierda de este el que quede de restar el mismo divisor todas las veces que se pueda de diez veces el residuo anterior; y continúese de este modo hasta encontrar tantos

residuos de estos, como guarismos tiene el que ha de servir de dividendo, o hasta que los residuos sean cero; después multiplíquese el último guarismo del que ha de servir de dividendo por 1, que es el primero de este conjunto de números; el segundo del dividendo por el segundo de estos números, el tercero por el tercero, etc. hasta que cada guarismo del dividendo se haya multiplicado por el correspondiente en este conjunto; sùmense todos estos productos, y si la suma es divisible por el divisor dado lo será también el dividendo propuesto.”

El propio Vallejo señala la autoría del resultado en la página 76, indicando lacónicamente “que es de Pascal”. Sin embargo, no da indicación alguna respecto a la obra en la que hubiera podido aprender dicho resultado.

Tras la descripción del criterio, Vallejo lo aplica a modo de ejemplo a los números 6232 y 19. Posteriormente detalla las demostraciones de los casos en los que el dividendo tiene una, dos y tres cifras. En esos casos, la demostración dada por Vallejo consiste en el desarrollo detallado de las que hemos mostrado en las Figuras 2 y 3. Para el caso general el autor se limita a señalar que “*lo mismo demostraríamos cuando tuviese más guarismos*”.

Una vez establecida la validez general del método de Pascal, el autor se dedica a mostrar cómo pueden deducirse de él los criterios clásicos de divisibilidad por 2, 3, 5, 6, 9, 11 y 13. Para ello, Vallejo calcula las sucesiones de restos por los que hay que multiplicar cada una de las sucesivas cifras del dividendo. En concreto obtiene:

Divisor	Sucesión de restos (de izquierda a derecha)
2	1, 0, 0, 0, 0,...
3	1, 1, 1, 1, 1,...
5	1, 0, 0, 0, 0,...
6	1, 4, 4, 4, 4,...
9	1, 1, 1, 1, 1,...
11	1, 10, 11, 10, 11,...
13	1, 10, 9, 12, 3, 4, 1, 10,...

Es evidente que recordando el modo en que se construye la sucesión de restos correspondiente a un divisor, podemos “fabricar” a nuestro antojo los criterios de divisibilidad por un número cualquiera.

Por ejemplo, si deseamos construir un criterio de divisibilidad por 7, basta con calcular la sucesión de restos correspondiente (recordar la introducción):

$$r_n: 1, 3, 2, 6, 4, 5, 1, 3, 2, \dots (n \geq 0).$$

Así, dado un número N expresado en base 10:

$$N = \sum_{i=0}^k c_i 10^i,$$

se tiene que 7 es divisor de N si y sólo si 7 es divisor de $N' = \sum c_i r_i$.

Además, el método de Pascal posee la evidente ventaja de ser recursivo, en el sentido de que puede aplicarse nuevamente al número N' obtenido para estudiar su divisibilidad y, en cada paso en que se aplique el método, el número cuya divisibilidad debe estudiarse es cada vez más pequeño.

4. EL ENUNCIADO GENERAL Y SU EXTENSIÓN A CUALQUIER BASE

En esta sección vamos a presentar el método de Pascal para determinar si un número es divisible por otro con un lenguaje más moderno. Gracias a ello podremos dar una demostración general muy condensada, así como extenderlo al caso en que utilicemos bases de numeración cualesquiera y no necesariamente la base decimal.

Supongamos que tenemos un entero N , expresado en un sistema de numeración en base b cualquiera:

$$N = \sum_{i=0}^k c_i b^i.$$

Dado un entero m cualquiera, construimos recursivamente una sucesión $\{r_n^{(m)}\}_{n \geq 0}$ del siguiente modo:

$$r_0^{(m)} = 1, \\ r_n^{(m)} \equiv b r_{n-1}^{(m)} \pmod{m}, \text{ con } 0 \leq r_n^{(m)} \leq m - 1, \text{ para todo } n \geq 1.$$

En estas condiciones, el resultado de Pascal afirma que m divide a N si y sólo si m divide a:

$$N' = \sum_{i=0}^k c_i r_i^{(m)}.$$

La demostración de este resultado es bastante sencilla. Por construcción, tenemos que $r_n^{(m)} = B_n m + b r_{n-1}^{(m)}$ para algún entero B_n . En consecuencia, razonando recursivamente, se tiene que, para todo $n \geq 0$:

$$r_n^{(m)} = A_n m + b^n.$$

Así pues, tenemos que:

$$N' = \sum_{i=0}^k c_i r_i^{(m)} = \sum_{i=0}^k (c_i A_i m + c_i b^i) = A m + N,$$

de donde el resultado de Pascal se sigue directamente.

Como ejemplo de este resultado más general tenemos el siguiente criterio de divisibilidad por 3 para números escritos en base 2, cuya justificación y comprobación dejamos como ejercicio al lector: *Un número N escrito en base 2 es múltiplo de 3 si y sólo si la suma de las cifras de posición impar (unidades, centenas, etc, ...) más el doble de la suma de las cifras de posición par (decenas, millares, etc, ...) es múltiplo de 3.*

5. ALGUNAS REFLEXIONES HISTÓRICO-DIDÁCTICAS

Si revisamos libros de texto de Enseñanza Secundaria Obligatoria actuales en los que se presentan algunos criterios de divisibilidad elementales (por ejemplo el criterio de divisibilidad por 2, por 3, por 5, etc.) observaremos que presentan defectos similares a los apuntados por Vallejo ya en 1812: los resultados se presentan no ya sin demostración, sino sin justificación alguna más allá de la presentación de algunos ejemplos concretos.

Evidentemente la demostración que hemos presentado en la sección anterior va, tanto por el lenguaje como por su complejidad, más allá de lo que puede tratarse en un aula de Secundaria.

Sin embargo, pensamos que a ese nivel sí que hay espacio (debe haberlo) para que los alumnos traten de descubrir (aunque sea por ensayo y error) algunos criterios de divisibilidad sencillos. Igualmente creemos que el método de Pascal puede introducirse, dado su carácter algorítmico, sin muchos problemas e incluso puede justificarse (siguiendo la demostración original de Pascal) en los casos de dos o tres cifras. Una vez hecho esto, los alumnos pueden construir las sucesiones de restos correspondientes y “fabricar” así distintos criterios de divisibilidad.

El carácter elemental que se otorga desde la enseñanza a la Aritmética del número natural (desaparece del currículo ya a partir del tercer curso de la Enseñanza Secundaria Obligatoria) hace que este tipo de resultados elementales abordables desde un punto de vista superior queden en el olvido.

Con este trabajo, además de “rescatar” del olvido este resultado de Pascal, hemos pretendido poner de manifiesto el modo en que el estudio de textos antiguos de Matemáticas puede aportar ideas interesantes que presentar en el aula.

En este sentido, pensamos que el uso de fuentes históricas y textos antiguos es de especial interés con maestros y profesores en formación. El trabajo a realizar se desarrollaría según las siguientes fases:

- 1) Búsqueda, lectura y estudio de los textos.
- 2) Análisis del contenido de dichos textos, poniéndolo en relación con el currículo actual de matemáticas.
- 3) Profundización, desde un punto de vista matemático, en el contenido estudiado.
- 4) Diseño de actividades para el aula a partir del trabajo anterior.

En las secciones anteriores hemos desarrollado los tres primeros puntos anteriores (el segundo sólo superficialmente). Dejamos al lector interesado el desarrollo más detenido del segundo punto, así como el trabajo sobre el cuarto.

REFERENCIAS

- Boyer, C. (1986). *Historia de la matemática*. Madrid: Alianza Editorial.
- Dickson, L. E. (1919). *History of Theory of Numbers* (Volume I. Divisibility and primality). Washington: Carnegie Institution.
- Meavilla-Seguí, V. (2010). *La sinfonía de Pitágoras: El fascinante mundo de la Aritmética*. Córdoba: Almuzara.
- Pascal, B. (1819). *Oeuvres de Blaise Pascal* (Tome cinquième). Paris: Chez Lefèvre, Libraire.
- Peyronnet, J. B. (1856). *Seminario pintoresco español*. Núm. 52, 28 de diciembre de 1856.
- Vallejo, J. M. (1812). *Tratado elemental de Matemáticas* escrito de orden de S. M. para uso de los caballeros seminaristas del Seminario de Nobles de Madrid y demás casas de educación del Reino (Tomo primero. Parte primera). Mallorca: Imprenta de Melchor Guasp.

Docencia de las matemáticas

Lucía Contreras Caballero

Profesora Jubilada de la Universidad Autónoma de Madrid

Resumen: *El pensamiento matemático y la docencia en Matemáticas se retroalimentan mutuamente y tienen aplicaciones prácticas.*

Palabras clave: *Matemáticas, docencia, pensamiento.*

Las matemáticas están constituidas por conocimientos que se adquieren pensando. Por ello necesitan una capacidad de pensamiento en el alumno que va a adquirir dichos conocimientos. Esta capacidad también se desarrolla al estudiar matemáticas. Por ello, capacidad de pensamiento y conocimientos matemáticos son dos polos que se retroalimentan mutuamente.

No siempre los alumnos que nos encontramos tienen bien formada la capacidad de pensamiento, que tiene distintos aspectos:

- 1) Capacidad lógica.
- 2) Intuición
- 3) Capacidad de generalización.
- 4) Capacidad de aplicación.

Por ello es necesario que el profesor, al mismo tiempo que va enunciando los conocimientos matemáticos vaya formando la capacidad de pensamiento de los alumnos con comentarios y preguntas.

Aunque el objetivo directo de un curso de matemáticas son los conocimientos enunciados como lemas, proposiciones y teoremas, objetivo indirecto es el desarrollo del pensamiento que ayuda a

- 1) Comprender lo que nos rodea.
- 2) Realizar instrucciones sabiendo para qué son.
- 3) Aumentar los conocimientos descubriendo relaciones al plantearse
- 4) nuevas preguntas.
- 5) Decidir más libremente.
- 6) Innovar.

Las clases se pueden dividir en teóricas y prácticas, aunque a veces conviene dar clases teórico-prácticas con aplicaciones concretas de los teoremas.

En cuanto a las explicaciones teóricas, conviene hacer:

- 1) Motivación conceptual o histórica de los conceptos (si es posible
- 2) ambas, mejor).
- 3) Enumeración de aplicaciones.
- 4) Definiciones.
- 5) Ejemplos que faciliten la comprensión de las definiciones.
- 6) Demostraciones rigurosas de los lemas proposiciones y teoremas.

En cuanto a las clases prácticas conviene:

- 1) Proponer problemas relacionados con la teoría explicada, enumerados en orden de dificultad progresiva.
- 2) Hacer que los alumnos entiendan bien los enunciados leyéndolos en voz alta.
- 3) Pedir ideas que sean útiles en la resolución de problemas.
- 4) Redactar con precisión las soluciones de los problemas para que al ser copiados puedan ser entendidos por el alumno en casa.
- 5) A veces hay varias ideas que dan distintos métodos para resolver un problema. Entonces conviene comprobar que los distintos métodos dan el mismo resultado.
- 6) Siempre que sea posible se relacionarán entre sí distintos ejercicios.

Para que al mismo tiempo que los alumnos vayan adquiriendo conocimientos matemáticos, vayan desarrollando su capacidad de pensamiento, conviene hacer al hilo de la clase comentarios y preguntas que

- 1) Les hagan tomar conciencia de lo que saben.
- 2) Les hagan tomar conciencia de lo que no conocen
- 3) Les fomenten el interés por aumentar sus conocimientos estudiando, y el deseo de trabajar en los problemas prácticos.

A lo largo del curso se debe haber mejorado:

- 1) La capacidad de comprensión de los problemas.
- 2) El vocabulario y el lenguaje matemáticos.
- 3) La sintaxis de las expresiones.

Al final de curso, se debe haber desarrollado:

- 1) La curiosidad en general.
- 2) La satisfacción por los conocimientos nuevos adquiridos así como por sus aplicaciones
- 3) El afán de comprobación.
- 4) Afán de generalización.

- 5) Toma de conciencia de ciertas limitaciones de los conocimientos adquiridos, cuando no se generalizan completamente.

Estas indicaciones son válidas para todos los niveles de docencia matemática, aunque su realización debe ser de acuerdo con el entorno y con el nivel de cada grupo de alumnos.

Agradecimientos

En este último número del año 2013 de Epsilon, Revista de Educación Matemática, agradecemos la colaboración de aquellos colegas que aportaron su conocimiento y tiempo en la revisión y arbitraje de los manuscritos propuestos a la revista. Mediante sus comentarios y sugerencias ayudan a obtener y mantener una calidad de los artículos publicados durante los años 2012 y 2013.

Agustín Carrillo
Alexander Maz
Bernardo Gómez
Damian Aranda
Francisco España
Francisco Juan Y Ribaya
Inmaculada Serrano
Isidoro Segovia
Jesús Salinas
José Galo
José Luis Lupiañez
José M^a Pavia
José Ortiz
Juan Jesús Ortiz
Liliana Mabel Tauber
M^a Jesús Salinas
Manuel Gómez
Marta Cecilia Salazar
Maryorie Benavides
Mercedes Palarea
Miguel Picado
Miguel Villaraga
Noelia Noemí Jiménez
Rafael Bracho
Rafael Rubio
Roberto Vidal

