

84

Vol. 30 (2)
2013



epsilon

Revista de Educación Matemática

Editada por la S.A.E.M. "THALES"

*La revista Epsilon está reseñada en:
IN-RECS, Dialnet, Latindex, RESH, DICE y Base de Datos del
Centro de Documentación Thales.*

epsilon 84

Revista de Educación Matemática

Director

Alexander Maz

Comité Editor

Rafael Bracho
Inmaculada Serrano
Francisco España
Damian Aranda
Manuel Gómez
José Galo
José M^a Chacón

Comité Científico

Evelio Bedoya,
Universidad del Valle, Colombia.
José Carrillo
Universidad de Huelva, España.
José Iván López Flores,
Universidad Autónoma de Zacatecas, México
José Ortiz,
Universidad de Carabobo, Venezuela.
Liliana Mabel Tauber,
Universidad Nacional del Litoral, Argentina.
M^a Mar Moreno,
Universidad de Lleida, España.
Matías Camacho,
Universidad de la Laguna, España.
Modesto Sierra,
Universidad de Salamanca, España.
Roberto Alfredo Vidal Cortés,
Universidad Alberto Hurtado, Chile.

Página de la revista: <http://thales.cica.es/epsilon>
Revista: epsilon@thales.cica.es

Sociedad Andaluza de Educación Matemática "Thales"

Edita
Sociedad Andaluza de
Educación Matemática "Thales"
Centro Documentación "Thales"
Universidad de Cádiz
C.A.S.E.M.
11510 PUERTO REAL (Cádiz)

Maquetación e impresión
Utrerana de Ediciones, s.l.
Cristóbal Colón, 12
41710 Utrera (Sevilla)

Depósito Legal
SE-421-1984

ISSN:
2340-714X

Período
2^o cuatrimestre 2013

Suscripción
ESPAÑA: 42,00 euros
PAÍSES DEL EURO: 63,00 euros
RESTO DE PAÍSES: 90 \$ USA
(3 NÚMEROS AL AÑO)

S.A.E.M. THALES

SIXTO ROMERO SÁNCHEZ

Presidente

FRANCISCO ESPAÑA PÉREZ

Vicepresidente

M^a BELÉN SEPÚLVEDA LUCENA

Secretaría General

JOSÉ MARÍA VÁZQUEZ DE LA TORRE PRIETO

Secretario de Administración y Tesorería

SEDE

FACULTAD DE MATEMÁTICAS

Edif. de la E.S.I. Informática. Ala L2

Avda. Reina Mercedes, s/n.

Aptdo. 1160

41080 SEVILLA

Tlfno. 954 62 36 58 - Fax: 954 236 378

e-mail: thales@cica.es

SEDE ADMINISTRATIVA DE LA SOCIEDAD Y REVISTA

CENTRO DE DOCUMENTACIÓN THALES

Facultad de Ciencias. Departamento
de Matemáticas

Campus del Río San Pedro, s/n

Torre Central, 4^a Planta

11510 Puerto Real (Cádiz)

Tlf. y Fax: 956 012 833

e-mail: thales.matematicas@uca.es

ALMERÍA

JUAN GUIRADO GRANADOS

Delegado Provincial

CÁDIZ

PALOMA PASCUAL ALBARRÁN

Delegada Provincial

CÓRDOBA

MARINA A. TOLEDANO HIDALGO (pro-
vis.). *Delegado provincial*

GRANADA

MARÍA PEÑAS TROYANO

Delegado Provincial

HUELVA

M^a ROCÍO BENÍTEZ CAMBRA (provis.).

Delegada provincial

JAÉN

M^a EUGENIA RUIZ RUIZ

Delegada provincial

MÁLAGA

SALVADOR GUERRERO HIDALGO

Delegado provincial

SEVILLA

ANA M^a MARTÍN CARABALLO

Delegada Provincial

EDITORIAL

INVESTIGACIÓN

- 9 **Análisis interpretativo de resoluciones de futuros maestros a una tarea de pendiente/ Interpretative analysis of preservice teachers resolutions of pending task**
Javier Monje, Patricia Pérez-Tyteca y Bernardo Gómez
- 19 **Aspectos de la presentación del sistema de coordenadas cartesianas en la *Introductio in Analysin Infinitorum* de Euler y en libros de texto de Lacroix/ Facets of the presentation of the Cartesian coordinate system in Euler's *Introductio in Analysin Infinitorum* and Lacroix's textbooks**
Maite Navarro y Luis Puig
- 41 **Cómo recuerdan los estudiantes a sus profesores de matemáticas/ How the students remember their mathematics teachers**
Zakaryan, D., Contreras, L.C. y Carrillo, J.

EXPERIENCIAS

- 49 **Matemáticas recreativas/ Recreational mathematics**
Carmen Galán Mata, Alicia González Ortiz, Alejandra González Ortiz, María Expósito Martínez y Esther Madera Lastra

IDEAS

- 57 **Problemas de Fermi. Suposición, estimación y aproximación/ Fermi problems. Guess, estimation and approximation**
Juan Manuel García Navarro

MISCELÁNEA

- 69** **Demostraciones de la infinidad de los números primos/ Proofs of the infinity of prime numbers**
Enrique de Amo, Manuel Díaz Carrillo y Juan Fernández Sánchez
- 89** **Recreaciones matemáticas en la *Aritmética* (1512) de fray Juan de Ortega/ Recreations in mathematics “Arithmetic” (1512) by Fray Juan de Ortega**
Vicente Meavilla Seguí
- 101** **Análisis socio-histórico de Arjonilla (Jaén)/ Socio-historical analysis Arjonilla (Jaén)**
Roque Modrego Fernández y Noelia Rojas Sedeño
- 117** **Las XVI Jornadas para el Aprendizaje y la Enseñanza de las Matemáticas en Palma de Mallorca “¡JA EM arribar!”**
Marta López Cáceres, Elena Recio Rodríguez, Lucía Vázquez Rodríguez, Marta López C., Elena Recio R. y Lucía Vázquez R.

RESEÑAS

- 133** **Retos matemáticos para Primer Ciclo de Secundaria/ Juan Diego Sánchez**
Natividad Adamuz-Povedano
- 135** **Análisis Didáctico en Educación Matemática. Metodología de investigación, formación de profesores e innovación curricular/ Luis Rico, José Luis Lupiañez y Marta Molina (editores)**
Noelia Jiménez-Fanjul

En este número se presentan tres ejemplos de investigaciones en Educación Matemática las cuáles son un buen ejemplo de las diferentes temáticas, las metodologías y los objetos de investigación de este campo. En la primera, se presenta un análisis a la forma en que maestros en formación responden a una actividad de resolución de problemas. En la segunda investigación se estudian aspectos de la presentación del sistema de coordenadas cartesianas en la *Introductio in analysin infinitorum* de Euler y en otros manuales escritos por Lacroix. Cierra este apartado un trabajo de estudio de caso con alumnos de cuarto curso de Enseñanza Secundaria Obligatoria (ESO) en la que se indaga cómo recuerdan dichos alumnos a sus profesores de matemáticas.

En la sección de experiencias se una actividad realizada por un grupo de profesores que aprovecharon algunos aspectos lúdicos de las matemáticas para involucrar a sus estudiantes en actividades orientadas a conocer y estimular el conocimiento matemático. En el artículo de la sección de Ideas se nos sugiere trabajar en el aula los problemas de Fermi dado que en la vida cotidiana hay muchos problemas que pueden ser susceptibles de solucionarse de forma automática y se pueden abordar de esta manera.

Para la sección de miscelánea, se tiene un trabajo con buen contenido matemático relacionado con las demostraciones de la infinitud de los números primos. En otro artículo de corte histórico se analizan aspectos recreativos en la *Aritmética* de Juan de Ortega. Continuamos publicando trabajos ganadores del I Certamen del Sur “Incubadora de Sondeos y Experimentos” del año 2012 y finalmente un grupo de docentes nos hace una valiosa reseña de las pasadas JAEM celebradas en Palma de Mallorca.

Ya se ha publicado el Journal Citations Report JCR del año 2012 que en la categoría *Education & Educational Research*, con un total de 216 revistas, cuenta con ocho revistas españolas. En toda esta categoría solamente hay cuatro específicas de educación matemática, por lo que hay que destacar de forma negativa que se ha excluido a la revista brasileña BOLEMA que era la quinta.

Coincidiendo con el cierre de este número se han hecho públicos los resultados del examen de competencias básicas de la población adulta hecho por la OCDE en 23 países el cuál pone de manifiesto las deficiencias matemáticas de un amplio número de adultos en España. Como educadores estos resultados nos preocupan. Las páginas de Épsilon están abiertas a las reflexiones y debates que tales resultados en matemáticas generen en la comunidad tanto de profesores como de investigadores.

Alexander Maz Machado
Director

Análisis interpretativo de resoluciones de futuros maestros a una tarea de pendiente

Javier Monje

(Universidad de Alicante);

Patricia Pérez-Tyteca

(Universidad de Valencia);

Bernardo Gómez

(Universidad de Valencia)

Resumen: *De acuerdo con la línea de investigación que estamos desarrollando basada en la elaboración de protocolos mayéuticos que fomenten la metacognición en futuros maestros, hemos diseñado e implementado una nueva tarea matemática. Ésta hace referencia a uno de los ejes (relacionado con la noción de pendiente) fundamentales del esquema de Solomon (1987) que hemos tomado como referente teórico para caracterizar las tareas de razón y proporción, contenido objeto de nuestro estudio. Hemos administrado esta tarea a varios grupos de futuros maestros y en este escrito detallaremos los resultados obtenidos a partir de uno de ellos. Por medio de este análisis pretendemos por un lado valorar la idoneidad de la tarea para formar parte del protocolo mayéutico, y por otro caracterizar las resoluciones de los estudiante. Esta es una fase fundamental para poder llevar a cabo de manera efectiva dicho protocolo.*

Palabras clave: *Metacognición, mayéutica, pendiente, razón y proporción.*

Interpretative analysis of preservice teachers resolutions of pending task

Abstract: *According to our present research based on developing maieutics protocols that promote metacognition in pre-service teachers, we designed and implemented a new mathematical task. This refers to one Solomon (1982) schema axis (related to the notion of slope) which we have taken as a theoretical reference to characterize the ratio*

and proportion tasks, content object of our study. We administered this task to several groups of pre-service teachers and in this paper will detail the results obtained from analyze one of them. This analysis allows us to assess the suitability of the task to be part of the maieutic protocol, and to characterize the student's responses. This is a key stage in order to carry out effectively the protocol.

Key words: *Metacognition, maieutic, slope, ratio and proportion.*

INTRODUCCIÓN

De acuerdo con la idea de que el aprendizaje efectivo pasa por la reflexión sobre las ideas personales y el aprendizaje de los propios errores -como lo han evidenciado expertos en el tema de la metacognición (Lester, 1985; Schoenfeld, 1992) y también instancias de investigación y orientación curricular como el NCTM (2003)- estamos desarrollando una línea de investigación que se articula en torno al diseño, elaboración y puesta en marcha de una propuesta de enseñanza dirigida a profesores en formación. Esta propuesta estará formada por varias tareas en las que se trabajan contenidos de razón y proporción y está orientada por prácticas metacognitivas, tomando principios de la mayéutica socrática, método pedagógico concebido por Sócrates y expuesto en el Diálogo platónico de *Menón*, que consiste en “propiciar en el alumno un aprendizaje a partir del auto-reconocimiento de su ignorancia” (Rigo, 2011, p.523).

Hasta el momento tenemos diseñada, pilotada y analizada una tarea (que presentamos en anteriores reuniones del grupo de trabajo) y en este momento nos encontramos perfilando una nueva tarea que hemos administrado a un grupo de maestros en formación con el fin de analizar sus resoluciones.

Los resultados de este análisis se exponen en el presente escrito y con él pretendemos, además de valorar la idoneidad de la tarea para formar parte del protocolo de enseñanza, clasificar las respuestas de los estudiantes con el fin de determinar la existencia de diferentes perfiles de resolutores. Esta clasificación es fundamental, ya que para que el proceso mayéutico sea efectivo y tenga el impacto cognitivo y metacognitivo esperado, es necesario conocer de antemano los patrones de respuestas que presentan los estudiantes a tareas relacionadas con los contenidos matemáticos a enseñar, y haber tipificado sus dificultades sobresalientes.

LA TAREA

La tarea que se analiza en este escrito gira en torno a la noción de pendiente y pertenece al último de los cuatro grupos de tareas prototípicas de razón y proporción que Fernández y Gómez (2007) identifican en el esquema conceptual de Solomon (1987), el cual muestra la diversidad de relaciones y fenómenos que se organizan en torno a ese tema (figura 1).

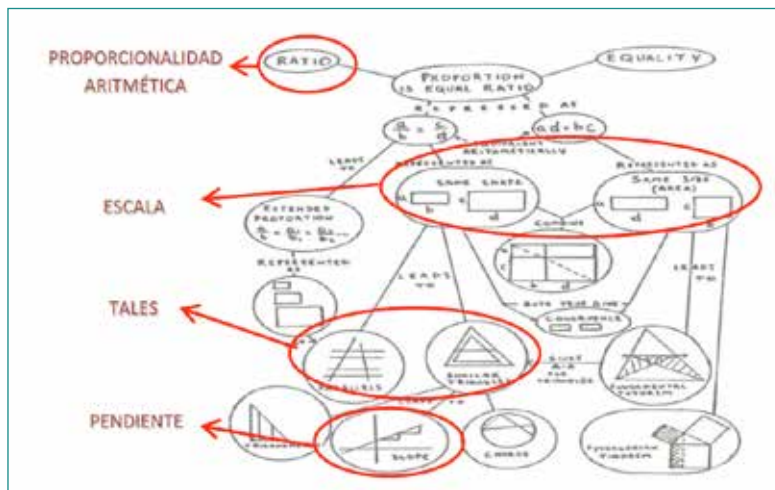


Figura 1. Tareas prototípicas del esquema de Solomon (1987)

Como una de las condiciones que debe cumplir una tarea para ser considerada mayéutica (es decir, apta para formar parte de un protocolo de enseñanza mayéutico) es que resulte en un primer momento cercana al resolutor y que este la considere asequible, hemos contextualizado el enunciado de la tarea para que éste se convierta en un supuesto real basado en una situación de compra, como puede observarse en la figura 2.

Tomás necesita comprar una escalera para subir al desván de su casa. Se acerca al Meroy Lerlyn y observa que hay dos modelos: una escalera recta y otra de caracol (que aparecen en la imagen de abajo). Como no se decide por uno de los dos modelos, le pregunta al dependiente qué escalera está menos empinada.

Imagina que tú eres el dependiente, ¿qué le aconsejarías a Tomás? Explica de forma razonada tu respuesta.

Figura 2. Tarea que hemos administrado

Además, las tareas mayéuticas deben ser ricas en conceptos matemáticos que los futuros maestros deben ser capaces de manejar. A este respecto, en la tarea que hemos diseñado entran en juego diversas nociones relacionadas con la razón y la proporción como pueden ser la de pendiente, ángulo de inclinación o tangente. Asimismo, esta tarea es susceptible de ser resuelta de diferentes modos, lo que constituye otro requisito deseable para las tareas mayéuticas.

Por último, por medio del análisis de las respuestas de los estudiantes comprobaremos si, además de las condiciones ya mencionadas, la tarea que hemos diseñado es rica en interpretaciones y significados, si genera un alto grado de confianza en los sujetos y si, a pesar de parecer asequible, provoca dificultades. Todas estas características forman parte de los requerimientos que exigimos a una tarea para considerarla idónea para el protocolo de enseñanza.

RECOGIDA Y ANÁLISIS DE DATOS

La tarea se administró a un grupo de 32 estudiantes de tercer curso del grado de Maestro de Educación Primaria de la Universidad de Valencia durante el transcurso habitual de una sesión de clase. La resolución fue individual, no tuvieron límite de tiempo y se les permitió utilizar el material que consideraran necesario.

Para interpretar las actuaciones de los estudiantes, e identificar las tendencias cognitivas que marcan los perfiles de los resolutores, adoptamos como herramienta analítica un esquema de interpretación de las producciones de los estudiantes basado en la búsqueda de rasgos comunes que permitan agrupar las respuestas en categorías.

Esta agrupación se realiza atendiendo a una serie de criterios que vienen determinados por las características que diferencian las actuaciones que consideramos esperadas de las que no lo son.

En el enunciado preguntamos cuál de las dos escaleras está menos empinada, término coloquial que se utiliza, según la Real Academia Española, para hacer referencia a la pendiente de un objeto. Así, para determinar qué resoluciones son las esperadas, debemos definir qué entendemos por pendiente y de qué modo esperamos que se utilice.

Siguiendo a Lobato y Thanheiser (2002), la pendiente de un objeto físico sirve para medir el ángulo de inclinación del mismo y es la tasa de cambio de la distancia vertical en relación con la distancia horizontal, lo que constituye una razón.

En el caso concreto de las escaleras presentadas en la tarea, no es apropiado trabajar con las dimensiones de la escalera completa (número de cuadrillos que tiene cada escalera de ancho y alto), ya que la escalera de caracol forma una espiral que habría de desplegarse para ser comparable a la escalera recta.

Por todo ello, las respuestas esperadas serán aquellas que centren su atención en un solo escalón de cada escalera y calculan o bien el ángulo de inclinación o bien la tasa de variación entre la huella y el peralte del mismo.

De acuerdo con esto, el criterio principal que hemos adoptado para iniciar la clasificación de repuestas es si existe o no percepción de razones, esto es, discriminamos las resoluciones basadas en el trabajo con razones de aquellas que se limitan a comparar magnitudes lineales.

Este criterio permite diferenciar a aquellos sujetos que han utilizado razones para comparar de aquellos que se centran exclusivamente en una de las dimensiones implicadas (la altura del escalón, por ejemplo) y comparan sin tener en cuenta la otra dimensión (el peralte). Esta dificultad ya fue observada por Filloy y Rojano (1999), que comprobó que en tareas de comparación de pendientes, el orden entre magnitudes lineales se transfiere al orden entre razones.

De este modo, obtenemos dos grandes grupos de respuestas. A éstos, se une el grupo de respuestas incompletas o no resueltas y otro grupo que recoge respuestas de corte cualitativo condicionadas por el contexto de la tarea.

Dentro del grupo de los que trabajan con razones, diferenciaremos aquellos que trabajan con las dimensiones totales de las escaleras (que no son comparables), de aquellos que se centran en un escalón (manejando magnitudes comparables), formando así nuevas agrupaciones de respuestas. La clasificación continúa atendiendo al tipo de procedimiento o cálculo realizado para dar solución a la tarea.

RESULTADOS

El diagrama final que organiza los perfiles de resolutores hallados, es el que se muestra en la figura 3.

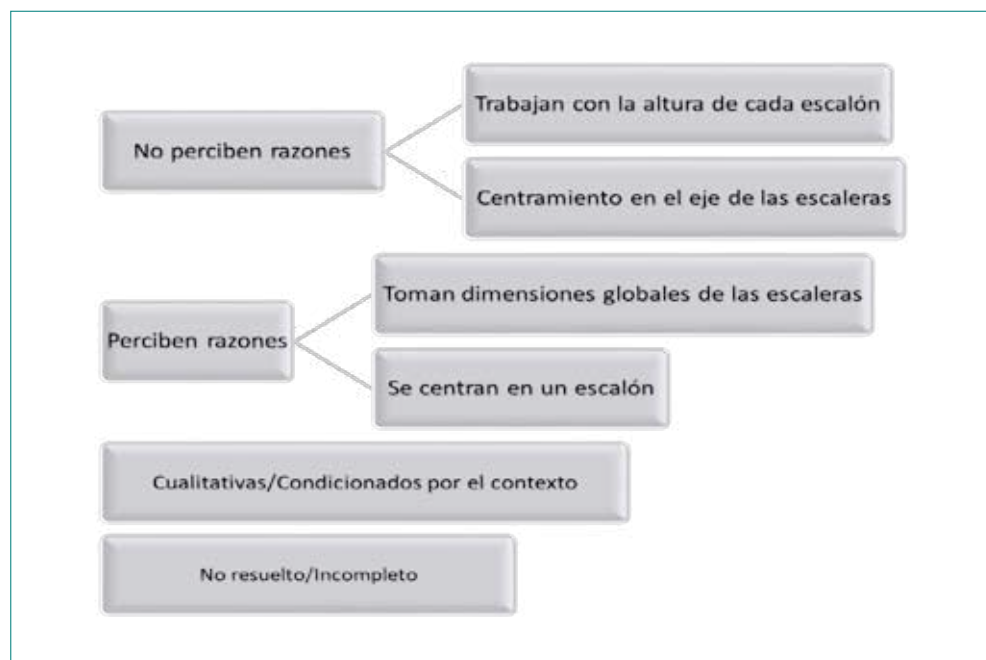


Figura 3. Diagrama de clasificación de respuestas

A continuación describimos y ejemplificamos cada una de las categorías.

C1: No perciben razones/Trabajan con la altura de cada escalón

En esta categoría se engloban aquellas resoluciones en las que la respuesta viene determinada por la comparación de magnitudes lineales. En concreto, los estudiantes se centran únicamente en la altura de cada escalón y resuelven que la escalera menos empinada es la de caracol por tener menor peralte.

Un ejemplo de este tipo de resolución puede observarse en la figura 4.

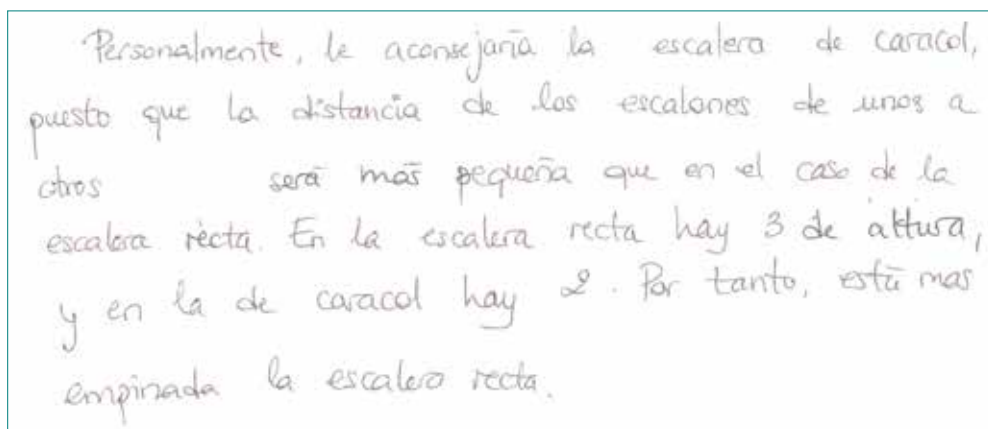


Figura 4. Ejemplo de la categoría C1

C2: No perciben razones/Centramiento en el eje de las escaleras

La segunda categoría hace referencia a aquellos alumnos que establecen un eje en cada escalera que va, en línea recta, desde donde comienza hasta donde acaba la misma. A continuación observan la inclinación de los ejes y comparan. De este modo, en el caso de la escalera de caracol el eje que determinan es prácticamente vertical y por este motivo estos estudiantes determinan que ésta es la escalera más empinada.

Un ejemplo de este tipo de respuesta es la que se presenta en la figura 5.

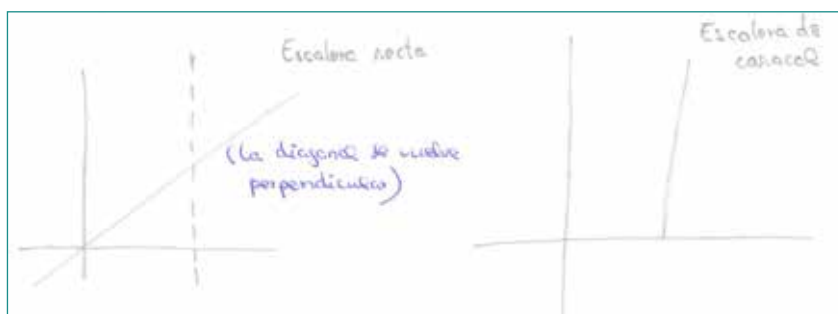


Figura 5. Ejemplo de la categoría C2

C3: Perciben razones/Toman dimensiones globales de las escaleras

En la categoría C3 hemos incluido aquellas resoluciones en las que sí existe una percepción de que hay razones implicadas en la tarea (y por tanto consciencia de que es necesario trabajar con dos dimensiones en cada escalera) pero se calculan de manera errónea al contar por medio de la cuadrícula el ancho y el alto de cada escalera o de una porción de las mismas y comparar la razón obtenida a partir de ello. Como ya hemos comentado, para poder hacer este tipo de comparaciones, sería necesario “desplegar” la escalera de caracol, ya que al ir curvándose ocupa menos espacio del real en la imagen.

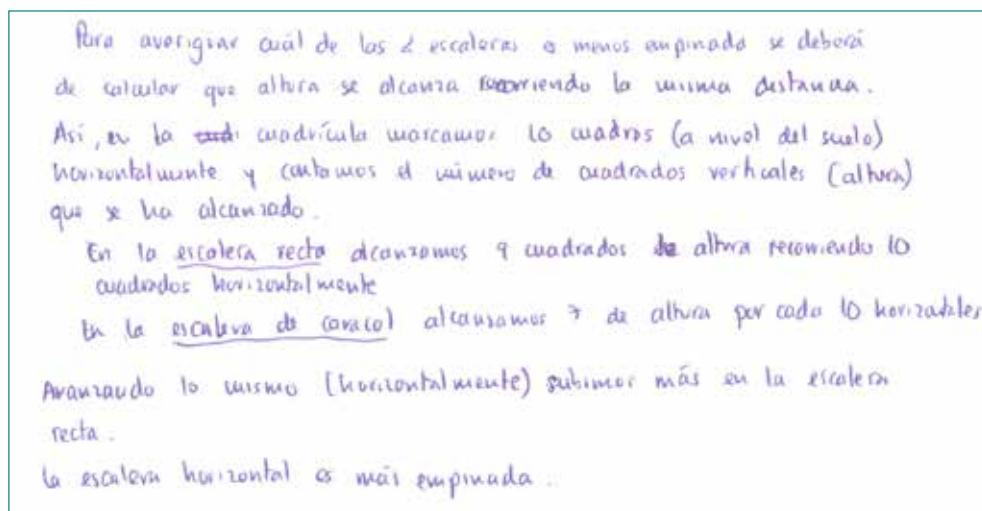


Figura 6. Ejemplo de la categoría C3. Toma porciones

Las figuras 6 y 7 muestran dos ejemplos de estos tipos de resoluciones.

En la primera de ellas, el estudiante realiza los cálculos a partir de una porción de cada escalera (cuenta cuadritos en las imágenes tomando un conjunto de varios escalones) y en la segunda se trabaja con las dimensiones completas de las mismas.

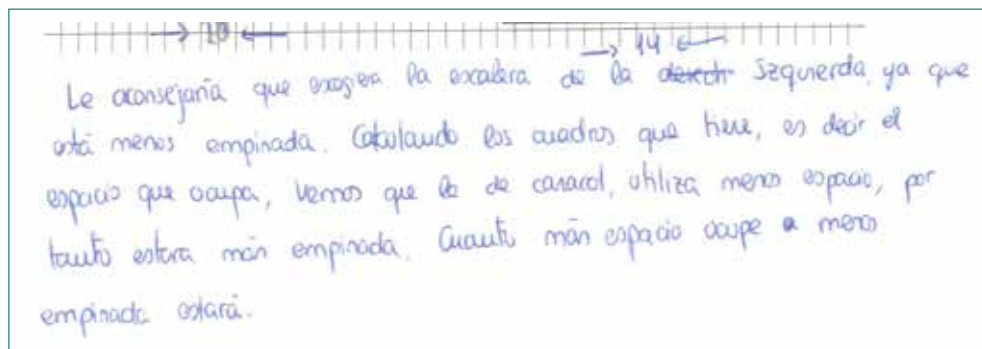


Figura 7. Ejemplo de la categoría C3. Dimensiones totales

C4: Perciben razones/Se centran en un escalón

En esta categoría se recogen las respuestas que anteriormente hemos denominado “esperadas”, esto es, que se resuelven de manera correcta. Cabe destacar que sólo 6 sujetos han ofrecido este tipo de respuesta. Estos sujetos perciben razones y para poder establecer comparaciones toman en cada una de las escaleras un escalón, calculan la huella y el peralte del mismo y establecen comparaciones.

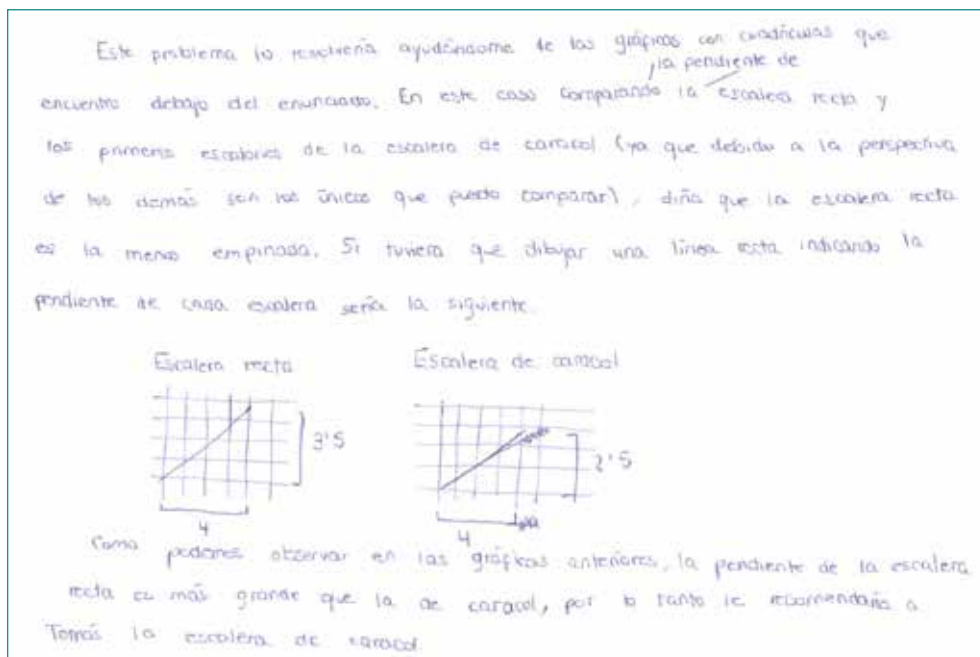


Figura 8. Ejemplo de la categoría C4. Comparación inmediata

En unos casos las comparaciones son inmediatas (como en el ejemplo mostrado en la figura 8) y en otros, se realizan después de un trabajo de construcción progresiva, en el que el sujeto va calculando pares equivalentes a partir de las razones iniciales (véase figura 9 a modo de ejemplo).

C5: Respuestas condicionadas por el contexto

En esta categoría clasifico aquellas respuestas que consideramos que están condicionadas por el contexto del enunciado de la tarea, ya que se centran en aspectos relacionados con la situación de compra concreta, como pueden ser las características del comprador o el espacio del que dispone en casa para instalar la escalera.

Un ejemplo de este tipo de respuestas es el que da una estudiante que afirma que *todo este razonamiento depende de la edad del cliente o para quién va a ser más útil*.

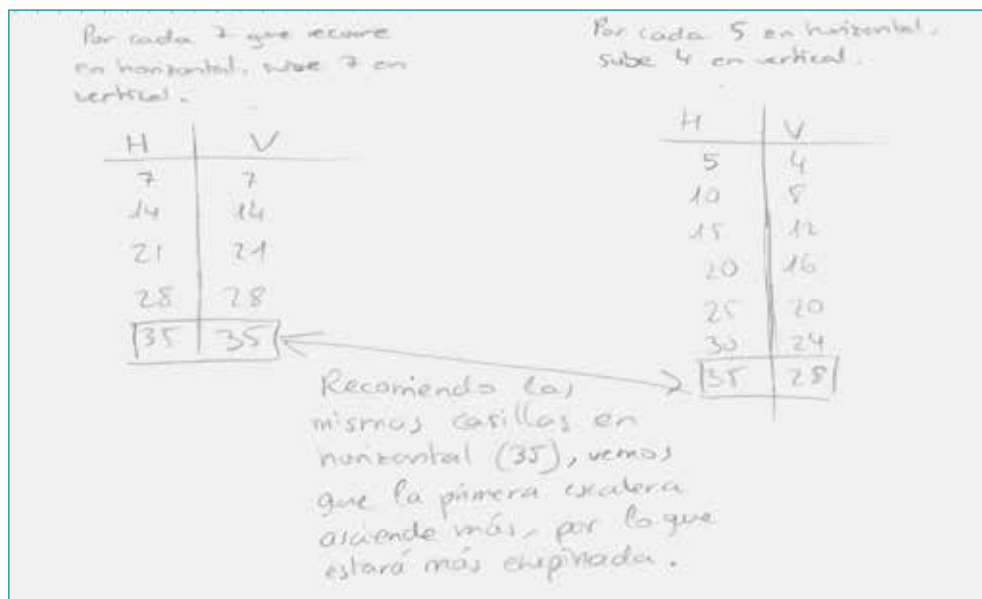


Figura 9. Ejemplo de la categoría C4. Construcción progresiva

CONCLUSIONES

Uno de los objetivos del análisis y clasificación de las respuestas era discernir si la tarea propuesta era o no idónea para formar parte del protocolo mayéutico. Los resultados indican que los estudiantes tienen dificultades para resolverla con éxito y prueba de ello es que sólo la octava parte de ellos lo han conseguido. Además, existen diferentes resoluciones y estrategias que han aflorado y otras que podrían hacerlo (como es el caso del cálculo del ángulo de inclinación).

Por este motivo, consideramos que la tarea sí es apta para formar parte del protocolo, aunque somos conscientes de que hay aspectos que se pueden mejorar.

De hecho, hemos decidido cambiar las dimensiones de los escalones para que la huella de los mismos no mida lo mismo. Creemos que esto puede enriquecer la fase de comparación.

Por otro lado, el análisis realizado nos ha permitido comprobar que el error de transmisión del orden entre magnitudes lineales al orden entre razones en tareas de comparación de pendiente detectado ya por Filloy y Rojano (1999) es persistente, y se mantiene en nuestros estudiantes. El hecho de que únicamente seis sujetos perciban que en la tarea hay razones implicadas nos indica que éste es un aspecto fundamental que hay que tomar como punto de partida en la reflexión metacognitiva que pretendemos fomentar mediante el protocolo mayéutico.

Como puede observarse, el trabajo con la nueva tarea que presentamos en este escrito está en una fase muy incipiente. El análisis interpretativo que hemos realizado ha constituido una primera aproximación y como consecuencia estamos obteniendo un esquema de clasificaciones que estamos convencidos de que se irá enriqueciendo y completando a medida que sigamos trabajando.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Fernández, A. y Gómez, B. (2007). Una organización de tareas de razón en semejanza para el diseño de un modelo de enseñanza. En M. Camacho; P. Bolea; P. Flores; B. Gómez; J. Murillo, M^a T. González (Eds.), *Investigación en Educación Matemática. Comunicaciones de los grupos de investigación. XI Simposio de la SEIEM*. Tenerife. pp. 173-180.
- Fillooy, E. y Rojano, T. (1999). Tendencias cognitivas y procesos de abstracción en el aprendizaje del álgebra y la geometría. En *Aspectos Teóricos del Álgebra Educativa*. Serie Investigación en Matemática Educativa, Grupo Editorial Iberoamérica, México. pp. 111-126.
- Lester, F. K. (1985). Methodological considerations in research on mathematical problem-solving instruction. En E. A. Silver (Ed.), *Teaching and learning mathematical problem solving: Multiple research perspectives* (pp. 41–69). Hillsdale, N.J.: Lawrence Erlbaum Associates.
- Lester, F. K., y Kroll, D. L. (1990). Teaching students to be reflective: A study of two grade seven classes. En G. Booker, P. Cobb, & T. N. Mendicuti (Eds.), *Proceedings fourteenth PME Conference for the Psychology of Mathematics Education, with the North American Chapter twelfth PME-NA Conference* (Vol. 1, pp. 151–158). México: International Group for the Psychology of Mathematics Education.
- Lobato, J., y Thanheiser, E. (2002). Developing understanding of ratio as measure as a foundation for slope. En B. Litwiller (Ed.), *Making sense of fractions, ratios, and proportions: 2002 Yearbook* (pp. 162-175). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- NCTM. (2003). *Principios y estándares para la educación matemática*. Granada: Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales.
- Rigo, M. (2011). La Mayéutica y su aplicación a un cuestionario dirigido a docentes. En M. Rodríguez, G. Fernández, L. Blanco, & M. Palarea (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XV* (pp. 523–532). Ciudad Real, España: SEIEM, Universidad de Castilla-La Mancha.
- Schoenfeld, A. H. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense-making in mathematics. En D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 334–370). New York: MacMillan.
- Solomon, A. (1987). Proportion: Interrelations and meaning in mathematics. *For the Learning of Mathematics*. 7(1), 14-22.

Aspectos de la presentación del sistema de coordenadas cartesianas en la *Introductio in Analysin Infinitorum* de Euler y en libros de texto de Lacroix¹

Maite Navarro y Luis Puig
Universitat de València Estudi General

Resumen: *Este artículo estudia la presentación del sistema de coordenadas cartesianas en la *Introductio in Analysin Infinitorum* de Euler y en los libros de texto de Lacroix *Traité du calcul différentiel et du calcul intégral* y *Traité Élémentaire de Trigonométrie Rectiligne et Sphérique, et d'Application de l'Algèbre a la Géométrie*, indagando qué componentes hicieron posible su sistematización, y teniendo presente las dificultades de los estudiantes en el uso de las coordenadas cartesianas.*

Términos Claves: *Euler, Lacroix, Coordenadas cartesianas, Representación gráfica de funciones, Trazado de curvas, Libros de texto*

Facets of the presentation of the Cartesian coordinate system in Euler's *Introductio in Analysin Infinitorum* and Lacroix's textbooks

Summary: *This paper studies the presentation of the Cartesian coordinate system in Euler's *Introductio in Analysin Infinitorum* and in Lacroix's *Traité du calcul différentiel et du calcul intégral* and *Traité Élémentaire de Trigonométrie Rectiligne et Sphérique, et d'Application de l'Algèbre a la Géométrie*, searching for what components made possible its systematization, and bearing in mind students' difficulties.*

Key Words: *Euler, Lacroix, Cartesian coordinates, Graphical representation of functions, Curves drawing, Textbooks*

1. Este trabajo es resultado de los proyectos de investigación financiados por el Ministerio de Ciencia e Innovación (EDU2009-10599) y el Ministerio de Economía y Competitividad (EDU2012-35638) de España.

INTRODUCCIÓN

Es un hecho harto conocido que los estudiantes tienen dificultades en la comprensión y el uso de la representación de funciones en el sistema de coordenadas cartesianas (SCC). Muchas veces provocadas por una lectura o localización incorrecta de las coordenadas cartesianas como se observa en la figura 1.

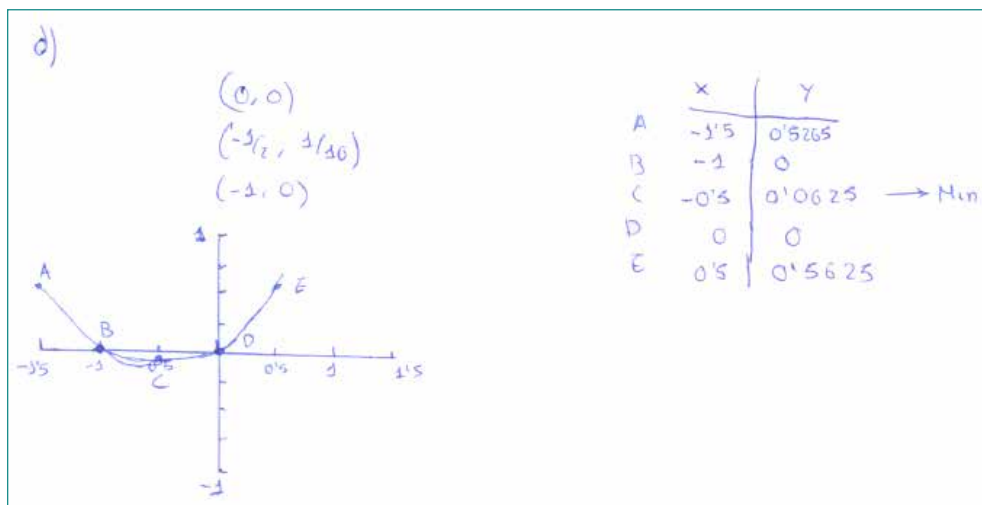


Figura 1. Errores en la localización de coordenadas cartesianas.

Esta problemática didáctica nos ha conducido a establecer “qué textos debíamos examinar en la historia y qué preguntas debíamos hacerles” (Puig, 2011, p. 29).

Hemos examinado los textos buscando lo que Puig (Puig, 2006, p. 113), llama “cogniciones petrificadas”. “Petrificadas” porque están ahí, en el texto que nos ha legado la historia, como en los monumentos de piedra de los que no cabe esperar que digan más que lo que ya está en ellos. “Cogniciones” porque lo que queremos leer en esos textos no es el despliegue de un saber, las matemáticas, sino el producto de las cogniciones (matemáticas) de quien se declara su autor”.

Los textos que hemos elegido examinar desde este punto de vista han sido el libro de Euler *Introductio in Analysis Infnitorum* (1748), y su traducción francesa de 1796-1797, y los libros de texto de Lacroix *Traité du calcul différentiel et du calcul intégral* (1797) y *Traité Élémentaire de Trigonométrie Rectiligne et Sphérique, et d'application de l'Algèbre a la Géométrie* (1797).

RAZONES PARA LA ELECCIÓN DE LOS TEXTOS

Las razones para elegir la *Introductio* de Euler y los libros de texto de Lacroix son, en primer lugar, que queríamos examinar textos del momento en que la forma actual de

representar las funciones en el SCC se estaba constituyendo, y del momento en que se estaba incorporando como materia de enseñanza en los libros de texto.

Además, la razón principal para elegir la *Introductio* de Euler es que es uno de los primeros libros que tratan las coordenadas cartesianas de forma sistemática.

Por su parte, los libros de texto de Lacroix han sido elegidos porque

- 1) elementarizan las matemáticas con el objetivo de enseñarlas (Schubring, 1987),
- 2) tratan las coordenadas cartesianas de forma progresiva y
- 3) tuvieron un gran impacto en la enseñanza de las matemáticas no sólo en Francia, sino también en España.

El *Traité Élémentaire de Trigonométrie Rectiligne et Sphérique, et d'application de l'Algèbre a la Géométrie* de Lacroix fue traducido al español como parte del *Curso completo elemental de matemáticas*, título con que se publicó la traducción española de los libros de texto de Lacroix. Esta traducción fue muy usada ya que el Real Decreto de 1824 del rey Fernando VII sobre el plan general de estudios del Reino, estableció en su artículo 42 que “en todas estas cátedras [refiriéndose a las cátedras de Matemáticas y Ciencias de las Universidades] durarán las lecciones hora y media por la mañana y una por la tarde; sirviendo de texto para las Matemáticas puras la obra de Mr. Lacroix, traducida por Rebollo”.

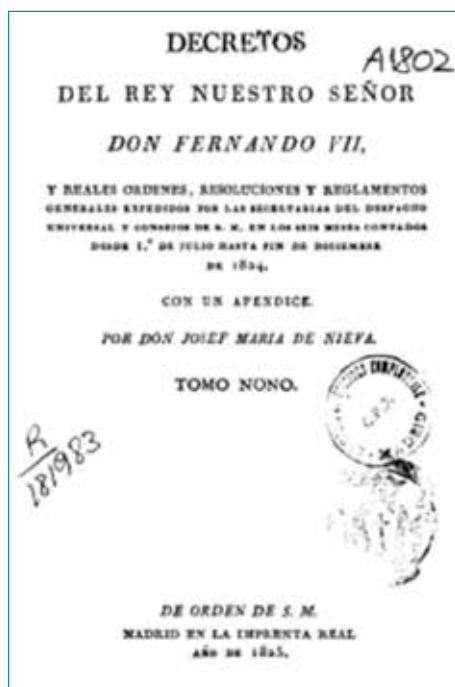


Figura 2. Decretos del rey nuestro señor don Fernando VII.

Hasta donde hemos podido averiguar, el *Tratado elemental de trigonometría rectilínea y esférica, y de la aplicación del álgebra a la geometría* se publicó en ocho ediciones, siendo la octava de 1846. Hemos usado la 6ª edición española de 1820 (Lacroix, 1820), y la 4ª edición del original francés (Lacroix, 1807). El *Traité du calcul différentiel et du calcul intégral* de Lacroix no se tradujo al español, que sepamos, de modo que hemos usado sólo la primera edición del original francés (Lacroix, 1797).

COMPONENTES DE LA CONSTITUCIÓN DEL SCC

Como resultado de nuestro estudio, hemos establecido que los componentes principales que hicieron posible la sistematización del sistema de coordenadas cartesianas, tal y como ésta se encuentra en los textos analizados, son los siguientes:

- 1) La dotación de significado a las cantidades negativas en álgebra y en geometría, y el establecimiento de un origen fijo de coordenadas.
- 2) La constitución del concepto de abscisa.
- 3) El paso de la noción de aplicada (un segmento levantado en el extremo de las abscisas) al concepto de ordenada (una distancia medida en el eje de ordenadas).
- 4) El paso de las coordenadas como segmentos a las coordenadas como distancias, y el consiguiente paso a las coordenadas como números.
- 5) El establecimiento de ejes de coordenadas absolutos, esto es, ejes no específicos de la curva.

LA DOTACIÓN DE SIGNIFICADO A LAS CANTIDADES NEGATIVAS EN ÁLGEBRA Y EN GEOMETRÍA, Y EL ESTABLECIMIENTO DE UN ORIGEN FIJO DE COORDENADAS

La dotación de significado a las cantidades negativas en la aritmética y en el álgebra es una cuestión bastante compleja y sobre la que hay mucho estudiado y escrito. En concreto, la dificultad en la expresión y simbolización de estas cantidades en el álgebra provoca ciertas ambigüedades en ambos autores.

En los libros analizados las letras representan cualquier tipo de número. Así pues, la letra simboliza cualquier número, ya sea un número (real) positivo o negativo. Sin embargo, en las formas canónicas de segundo grado, la letra representa una cantidad positiva que se puede añadir o sustraer.

$$axx \pm c = 0, \text{ ou } axx = \mp c$$

Figura 3. Ecuación de 2º grado pura (Euler, 1774, p. 519).

Por otra parte, cada vez que se quiere subrayar que la cantidad es negativa, la expresión lleva explícitamente antepuesto el signo $-$, es decir, la letra únicamente puede

representar un número positivo. Lacroix proporciona la siguiente ecuación de la recta cuando la incógnita es negativa.

$$\text{Lorsque } x \text{ sera négatif, on trouvera} \\ y = -ax + b$$

Figura 4. (Lacroix, 1807, p. 123)²

En el tomo II de la *Introductio* cada vez que se hace referencia a un valor negativo de la variable x hace uso de la expresión $-x$.

18. Secundum Figuram apparet, dum Abcissa negativa $-x$ contiñeatur intra limites AC & AE , Applicatam y fieri imaginariam, effeque $PP < Q$: ultra E vero finistrorlum progrediendo Applicatæ iterum fiunt reales, quod fieri nequit nisi

Figura 5. (Euler, 1748, t. II, p. 9)³

Las dificultades que ocasionan las cantidades negativas en el álgebra provocan a su vez dificultades en la expresión de las ecuaciones en la geometría y el análisis.

Así pues, la dotación de significado de lo negativo se convierte en una cuestión primordial en el proceso de sistematización de las coordenadas. Hubiera sido imposible dicha sistematización sin tener en cuenta tanto los valores positivos como los negativos, lo que apremiaba a la geometría a dotar de significado a las magnitudes asociadas a cantidades negativas. Para ello fue necesario considerar las magnitudes como segmentos orientados, lo que a su vez hizo imprescindible el establecimiento de un origen de coordenadas fijo.

Para representar cantidades en geometría, Euler utiliza magnitudes (en el sentido que tiene magnitud en los *Elementos* de Euclides). Para representar las magnitudes determinadas utiliza una recta ilimitada (RS) que contiene todos sus valores determinados y fija en ella un punto que será el origen (A), no de las cantidades, sino de las magnitudes determinadas. Así pues, cada magnitud determinada representa un valor determinado incluido en la cantidad variable.

2. “Cuando x sea negativa, se hallará $y = -ax + b$ ”. (Lacroix, 1820, p.141)

3. “Está claro, después de la inspección de la figura, que, mientras que la abscisa negativa $-x$ está contenida entre los límites AC y AE , la aplicada y es imaginaria [...]”. (Traducción nuestra)

1. **UNE** quantité variable étant une grandeur considérée en général, qui renferme toutes les valeurs déterminées; une droite indéfinie, telle que RS , sera très-propre à représenter, en géométrie, une quantité de cette nature. En effet, puisqu'on peut prendre sur une droite indéfinie, une partie quelconque, qui ait une valeur déterminée, cette ligne présente à l'esprit la même idée de grandeur, que la quantité variable. Il faut donc, avant tout, fixer sur une ligne indéfinie RS un point A , qui sera censé l'origine des grandeurs déterminées, qu'on en séparera; ainsi une portion déterminée AP représentera une valeur déterminée comprise dans la quantité variable.

Figura 6. Magnitud (Euler, 1796-97, t. II, p. 1)⁴.

Euler, representa las magnitudes como segmentos en una recta ilimitada, que orienta arbitrariamente respecto de un punto previamente fijado, el origen (A).

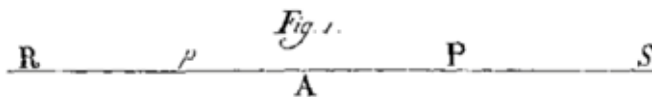


Figura 7. Representación de magnitudes orientadas (Euler, 1748, t. II, Table I).

Para que la correspondencia sea biunívoca es necesario considerar solamente los segmentos que tienen el origen como uno de sus extremos. Fija arbitrariamente a la derecha del origen los valores reales positivos de la variable x , a la izquierda los valores negativos y el valor cero en el origen. Establece el orden en la recta ilimitada: cuanto más se aleja el punto P hacia la derecha, más grande es el valor de x representado por AP ; cuanto más se aleja el punto p hacia la izquierda, más disminuye⁵ el valor de x representado por Ap . Una vez fijados, añade que es indiferente ubicar a la derecha o la izquierda

4. "1. Como una cantidad variable es una cantidad que se considera en general, que contiene todos los valores determinados, una línea recta indefinida, como RS , será muy apropiada para representar en geometría una cantidad de esta naturaleza. En efecto, ya que se puede tomar sobre una recta indefinida, una parte cualquiera, que tenga un valor determinado, esta línea presenta al espíritu la misma idea de magnitud, que la cantidad variable. Por tanto, en primer lugar es necesario fijar sobre una línea indefinida RS un punto A , que será considerado el origen de las magnitudes determinadas, que se separarán de ella, así una porción determinada AP representará un valor determinado comprendido en la cantidad variable." (Traducción nuestra)

5. En esta ocasión Euler utiliza la letra x para referirse a una cantidad numérico-algebraica negativa sin necesidad de anteponer el signo $-$, que además asocia geoméricamente a una magnitud considerada como un segmento orientado.

los valores positivos, puesto que los negativos se representarán en el lado opuesto, poniendo de relieve la arbitrariedad en la ubicación de las magnitudes que representan los valores positivos o negativos de las cantidades variables, y que lo realmente importante es que los valores negativos se deben representar en el lado opuesto al de los positivos⁶.

3. Or, comme la droite indéfinie RS s'étend à l'infini de part & d'autre du point A , on pourra aussi couper de part & d'autre toutes les valeurs de x . Mais, si nous prenons les valeurs positives de x , en allant sur la droite depuis le point A , les intervalles Ap situés sur la gauche représenteront les valeurs négatives de x . En effet, puisque plus le point P s'éloigne du point A vers la droite, plus est grande la valeur de x représentée par l'intervalle AP ; réciproquement, plus le point P s'éloigne vers la gauche, plus la valeur de x est diminuée; & si P tombe sur A , la valeur de x devient $= 0$. C'est pourquoi, si le point P est reculé davantage vers la gauche, les valeurs de x deviendront plus petites que zéro, c'est-à-dire, seront négatives, & les intervalles Ap pris sur la gauche depuis le point A , représenteront les valeurs négatives de x , si les intervalles AP , situés à la droite, sont censés représenter les valeurs positives. Au reste, il est indifférent de prendre du côté qu'on voudra les valeurs positives de x ; car le côté opposé renfermera toujours les valeurs négatives.

Figura 8. *Magnitudes orientadas* (Euler; 1796-1797, t.II, p. 2)⁷.

La arbitrariedad de la ubicación de las cantidades en geometría se pone de manifiesto en la representación que Lacroix hace de senos y cosenos. En el primer capítulo del *Traité Élémentaire de Trigonométrie*, Lacroix establece los signos de senos y cosenos en los diferentes cuadrantes, siendo ésta la primera vez en la que, por una parte, el lector del tratado se encuentra con este tema y, por otra, Lacroix justifica la ubicación en el plano de las magnitudes correspondientes a cantidades negativas. Dicha justificación es bastante peculiar pues se realiza tras la representación gráfica de los valores de senos y cosenos que ha deducido previamente gracias a la generalidad de las fórmulas:

6. De ahora en adelante nos referiremos a este aspecto como el convenio de oposición de los signos (COS).

7. "3. Ahora bien, como la recta indefinida RS se extiende hasta el infinito de una y otra parte del punto A , se podrá cortar también de una y otra parte todos los valores de x . Pero, si tomamos los valores positivos de x , siguiendo la recta desde el punto A , los intervalos Ap situados a la izquierda representarán los valores negativos de x . En efecto, puesto que cuanto más se aleja el punto P del punto A hacia la derecha, más grande es el valor de x representado por el intervalo AP ; recíprocamente, cuanto más se aleja el punto P hacia la izquierda, más disminuye el valor de x ; y, si P cae sobre A , el valor de x deviene $= 0$. Por ello, si el punto P está más apartado hacia la izquierda, los valores de x devienen más pequeños que cero, es decir, serán negativos, y los intervalos Ap tomados a la izquierda desde el punto A , representaran los valores negativos de x , si los intervalos AP , situados a la derecha se considera que representan los valores positivos. Por lo demás, es indiferente tomar del lado que se quiera los valores positivos, pues el lado opuesto contendrá siempre los valores negativos." (Traducción nuestra)

$$\left. \begin{aligned} \cos (a \pm b) &= \cos a \cos b \mp \sin a \sin b \\ \sin (a \pm b) &= \sin a \cos b \pm \sin b \cos a \end{aligned} \right\}$$

Figura 9. (Lacroix, 1807, p. 21)

que son aplicables a todas las magnitudes posibles de los arcos AM (figura 10).

En el artículo 23 hace un resumen de los resultados que ha obtenido respecto del valor absoluto y el signo de los senos y cosenos de un ángulo cualquiera según en qué cuadrante se encuentre. Dichos resultados se ilustran en la figura 10, en la que es necesario notar que los arcos se miden a partir del punto A y en el sentido horario, probablemente bajo la influencia de la astronomía.

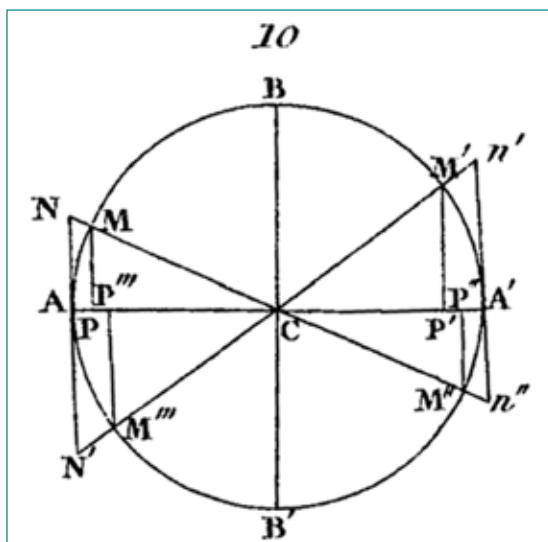


Figura 10. Representación de senos y cosenos (Lacroix, 1807, Pl. I).

Los senos cambian de signo cuando están situados por debajo del diámetro AA' y los cosenos cuando pasan de un lado al otro del punto C , o cuando caen a distintos lados del diámetro BB' perpendicular al primero.

Luego las magnitudes correspondientes a los valores negativos de los senos no se sitúan por debajo del diámetro AA' por convenio, sino que dichas magnitudes se interpretan como negativas porque el valor que se obtiene de la aplicación de las fórmulas para los senos de arcos entre π y 2π es negativo. Ocurre lo mismo con los valores negativos de los cosenos, su ubicación a la izquierda del punto C viene determinado por los arcos y , puesto que son negativos, las magnitudes que los representan se han de interpretar como negativas. De esta manera se pone de manifiesto que las magnitudes correspondientes a cantidades negativas quedan ubicadas de manera natural en el lado opuesto a las

magnitudes correspondientes a cantidades positivas. Conviene también indicar que los segmentos AA' y BB' de la figura 10 no representan ejes de coordenadas sino diámetros de la circunferencia. Hasta el capítulo 3, Lacroix no introducirá los ejes de coordenadas ni definirá abscisa y ordenada, pero esta figura, junto con otras, preparan al estudiante para comprender la sistematización de las coordenadas cartesianas en el plano. A pesar de que los signos en la trigonometría no coinciden con los signos de las coordenadas en la geometría analítica, hay un aspecto importante y que se mantendrá: las magnitudes correspondientes a cantidades negativas se representan en el lado opuesto a las que corresponden a cantidades positivas, siendo arbitrario, tal como ya expresó Euler, en qué lado se representen cada una de ellas.

Es decir, la oposición de los signos más y menos en aritmética y en álgebra se traduce en geometría en la inversión de la posición de las magnitudes respecto de un segmento o un punto.

En ambos casos, el origen se concibe como un punto arbitrario pero imprescindible en la dotación de significado de las cantidades negativas en geometría y por consiguiente en la construcción de las coordenadas por segmentos.

LA CONSTITUCIÓN DEL CONCEPTO DE ABCISA

A cada uno de los segmentos que Euler ha construido en el artículo 1 (figura 6) lo va a llamar abscisa. Es decir, define abscisa como un intervalo orientado de la recta, medido desde el origen, el cual representa un valor determinado de la cantidad variable. Definición de la que es necesario subrayar que la abscisa no es el punto en la recta, ni la longitud del intervalo sino que la abscisa es el intervalo, el segmento AP , que, como ya habíamos señalado anteriormente, tiene como uno de sus extremos el origen de abscisas.

2. Soit donc x une quantité variable, représentée par la droite indéfinie RS ; il est clair que toutes les valeurs déterminées de x , pourvu qu'elles soient réelles, peuvent être exprimées par des portions prises sur la ligne RS . Par exemple, si le point P tombe sur le point A , l'intervalle AP , devenant nul, représentera la valeur de $x = 0$; mais plus le point P s'éloignera du point A , plus la valeur déterminée de x représentée par l'intervalle AP deviendra grande.
On appelle ces intervalles AP , ABSCISSES.
Ainsi les abscisses représentent les valeurs déterminées de la variable x .

Figura 11. Definición de abscisa (Euler, 1796-97, t.II, pp. 1-2)⁸.

8. "2. Sea pues x una cantidad variable, representada por la recta indefinida RS , está claro que todos los valores determinados de x , siempre que sean reales, pueden ser expresados por porciones tomadas sobre la línea RS . Por ejemplo, si el punto P cae en el punto A , el intervalo AP , deviniendo nulo, representará el

EL PASO DE LA NOCIÓN DE APLICADA AL CONCEPTO DE ORDENADA

Euler sistematiza las coordenadas con el objeto de representar y estudiar las propiedades de las funciones. En su teoría de curvas el valor de la función es una cantidad variable ligada a la variable x , de manera que para cada valor determinado de x , la función y toma un valor determinado que se representa levantando una perpendicular desde el extremo de la abscisa AP , que representa el valor dado de x , cuya longitud es igual al valor correspondiente de y . Euler llama aplicadas⁹ a cada una de estas perpendiculares.

Et on a donné le nom d'APPLIQUÉES * aux perpendiculaires PM , menées des extrémités des abscisses à la courbe.

Figura 12. Definición de aplicada (Euler, 1797, t. II, p. 5)¹⁰.

Luego las aplicadas, al igual que las abscisas, son intervalos cuyas longitudes representan a los valores dados. Las abscisas necesitaban un eje y un origen para que su construcción fuera incuestionable, en cambio cada aplicada depende para su construcción de la construcción previa de la abscisa correspondiente. Esta dependencia provoca que cada aplicada se levante de manera independiente del resto de las aplicadas y hace innecesario para Euler la introducción de un nuevo eje. Así, cada aplicada que se quiere levantar necesita su propia perpendicular.

Ahora bien, dado que y puede tomar cualquier valor determinado, Euler tendrá que justificar dónde representar cada tipo de valor real, y de nuevo fija arbitrariamente los valores positivos por encima de la recta, los nulos sobre la recta y los negativos, por el COS, por debajo.

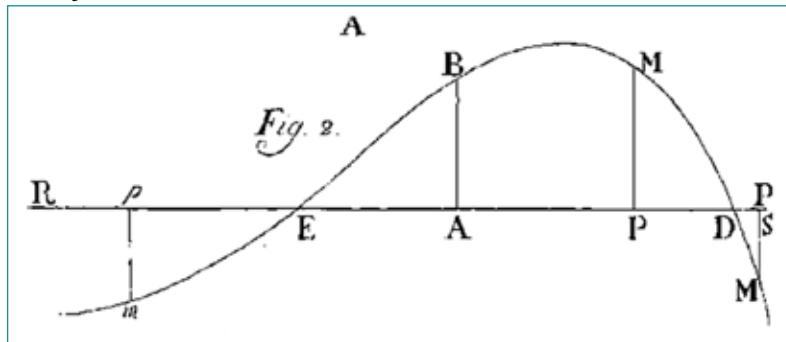


Figura 13. Abscisas y aplicadas (Euler, 1797, t. II, Table I).

valor de $x = 0$, pero cuanto más se aleje el punto P del punto A , más grande se hará el valor determinado de x representado por el intervalo AP .

Se llama a estos intervalos AP , **ABSCISAS**.

Así, las abscisas representan los valores determinados de la variable x .” (Traducción nuestra)

9. Aunque en la época se utiliza el término de ordenada, Euler utiliza el de aplicada.

10. “Y se ha dado el nombre de **APLICADAS** a las perpendiculares PM , tiradas de los extremos de las abscisas a la curva.” (Traducción nuestra)

En definitiva, en la *Introductio* las coordenadas no son un par de números sino magnitudes que se representan mediante segmentos dotados de sentido. Las abscisas medidas desde el origen en un único eje, el eje de abscisas. Las aplicadas levantadas desde los extremos de las abscisas.

Lacroix va a liberar las coordenadas geométricas de la *Introductio* de la rigidez que imponen los extremos de las magnitudes a abscisas y sobre todo a aplicadas, se desprenderá de los extremos y conservará de sus predecesoras únicamente la distancia o longitud de las magnitudes. Lacroix define simultánea y conjuntamente abscisa y ordenada como coordenadas determinadas por la dirección de unos ejes de coordenadas previamente fijados.

85. Cette manière de représenter le cours des lignes, c'est-à-dire les circonstances de leur forme et de leur situation, en les rapportant à une droite, par des perpendiculaires, mérite la plus grande attention; on voit qu'elle revient à déterminer la position d'un point quelconque, par le moyen de sa distance à deux droites AB et AC , perpendiculaires entre elles. Le point M , fig. 34, est en effet déterminé lorsqu'on a les distances AP et AQ , puisqu'il se trouve à l'intersection des lignes PM et QM , menées par les points P et Q , parallèlement aux droites AB et AC .

Les lignes AP et AQ , ou leurs égales, QM et PM , se nomment les *coordonnées*. On se sert ordinairement du mot *abscisse* pour désigner celle qu'on suppose connue, et l'on donne à l'autre le nom d'*ordonnée*. Ainsi, dans les exemples précédens, où j'ai toujours exprimé les lignes PM par les lignes AP , PM était l'ordonnée, et AP l'abscisse. Les lignes AB et AC , qui déterminent la direction des *coordonnées*, se nomment les *axes des coordonnées*.

Figura 14. Definición de abscisa y ordenada (Lacroix, 1807, p. 119)¹¹.

11. "Este modo de representar el curso de las líneas, esto es, las circunstancias de su forma y de su situación, refiriéndolas á una recta por perpendiculares, merece la mayor atención; se ve que él tiene por objeto determinar la posición de un punto cualquiera por medio de dos rectas AB y AC , perpendiculares entre sí. El punto M , fig. 34, está determinado cuando se tiene las distancias AP y AQ , puesto que se halla en la intersección de las líneas PM y QM , tiradas por los puntos P y Q paralelamente á las rectas AB y AC .

Las líneas AP y AQ , ó sus iguales PM y QM , se llaman *coordenadas*. Comunmente se emplea la palabra *abscisa* para designar la coordenada que se supone conocida, y á la otra se le da el nombre de *ordenada*. Así en los ejemplos anteriores, en que siempre hemos expresado las líneas PM por medio de las AP , las tales PM expresaban las ordenadas, y las AP las abscisas. Las líneas AB y AC , que determinan la dirección de las coordenadas, se llaman los ejes de las *coordenadas*." (Lacroix, 1820, pp. 136-137)

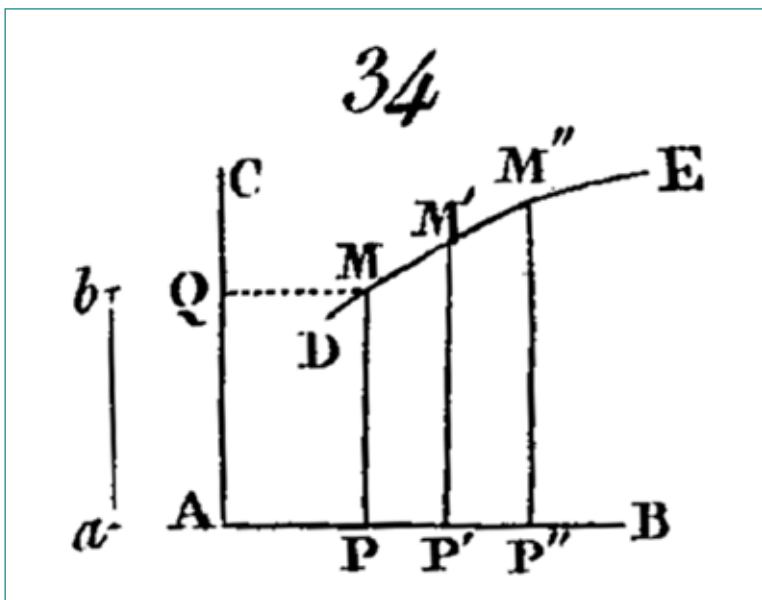


Figura 15. Abscisas y ordenadas (Lacroix, 1807, Pl. 2).

En esta definición se aprecia un cambio sustancial en el concepto de abscisa pues, deja de ser un intervalo, el segmento AP , y se convierte en la longitud o distancia de un segmento orientado. Pero el cambio más importante corresponde al concepto de ordenada y la construcción del eje de ordenadas. La ordenada (aplicada de Euler) ya no es la perpendicular, sino su longitud, que se puede expresar mediante el segmento PM o su igual AQ . O lo que es más importante su longitud, ab , llevada sobre la recta AC , que se convierte de esta manera en un auténtico eje de ordenadas.

EL PASO DE LAS COORDENADAS COMO SEGMENTOS A LAS COORDENADAS COMO DISTANCIAS, Y EL CONSIGUIENTE PASO A LAS COORDENADAS COMO NÚMEROS

El paso de la consideración de las coordenadas como magnitudes geométricas a su consideración como distancias será fundamental en el proceso de sistematización de las coordenadas cartesianas.

La sistematización se inicia en el momento que Euler asigna sentido a las magnitudes para dotar de significado en geometría a las cantidades negativas que surgen en álgebra cuando quiere asociar las funciones con el trazado de sus curvas correspondientes.

Pero el proceso de sistematización de las coordenadas no había hecho más que empezar y necesitará de muchas aportaciones para que poco a poco se transformen en las coordenadas cartesianas actuales, independientes del trazado de curvas y superficies.

Este proceso de independencia se aprecia claramente en el texto de Lacroix, las coordenadas se desprenden de los extremos y conservan, de sus predecesoras, únicamente la

distancia o longitud de las magnitudes. Con ello se consigue que las coordenadas pasen de ser intervalos a ser distancias.

En la *Introductio* las coordenadas, como ya hemos comentado antes, no son un par de números sino magnitudes que se representan mediante segmentos dotados de sentido: las abscisas, medidas desde el origen en un único eje, el de abscisas, y las aplicadas, generalmente ortogonales, tomadas desde los extremos de las abscisas. Además abscisas y aplicadas están ligadas entre sí por una curva o por su ecuación que se representan en un SCC que no se fija previamente sino que se elige según la naturaleza de la curva que se quiere representar. Y son los extremos de las aplicadas los puntos que trazan la curva de la función de la que se pretende estudiar sus propiedades. De todo ello podemos llegar a la conclusión de que la sistematización de coordenadas en Euler no tiene como objetivo determinar la posición de un punto aislado. Sin embargo, éste es el objetivo ansiado de Lacroix aunque no siempre le resultará fácil desprender el punto de las ataduras de la curva o su ecuación.

Euler define coordenadas tras la definición y construcción de abscisas y aplicadas, Lacroix, en cambio, comienza por el concepto de coordenadas para posteriormente diferenciar abscisa y ordenada. Define coordenadas de un punto (figura 15) a partir del modo en que se representan las curvas, es decir, utiliza un proceso aceptado en su época (coordenadas geométricas) para convertirlas en coordenadas numéricas: las distancias de los intervalos determinan el punto de la curva. En el momento en que el punto se desprende de la curva quedan establecidas las coordenadas numéricas cuya dirección está determinada por ejes de coordenadas fijados previamente.

EL ESTABLECIMIENTO DE EJES DE COORDENADAS ABSOLUTOS, ESTO ES, EJES NO ESPECÍFICOS DE LA CURVA

Pero lo que hemos expuesto en el apartado anterior no es suficiente, pues el valor absoluto de las magnitudes no permite establecer de forma biunívoca la localización del plano cartesiano en toda su extensión. La longitud de las coordenadas únicamente mide la distancia a la que el punto se sitúa respecto de los ejes de coordenadas, por lo que es necesario conocer también el signo de afección de las magnitudes que ha considerado anteriormente, para determinar el cuadrante concreto en el que situar cada punto. Por tanto, es necesario considerar los signos de las coordenadas para fijarlos en un cuadrante determinado, teniendo en cuenta abscisas y ordenadas de forma conjunta y el COS. Lacroix establece definitivamente de esta manera las coordenadas de puntos en el plano cartesiano. En la figura 16 observamos cómo la localización de puntos en el plano se hace de forma absoluta, los puntos adquieren identidad propia, ya no son puntos que pertenecen a una curva. Y teniendo en cuenta la tabla de signos que adjunta (figura 18) y el texto que acompaña a estas figuras, podemos afirmar que las coordenadas se han transformado de manera considerable.

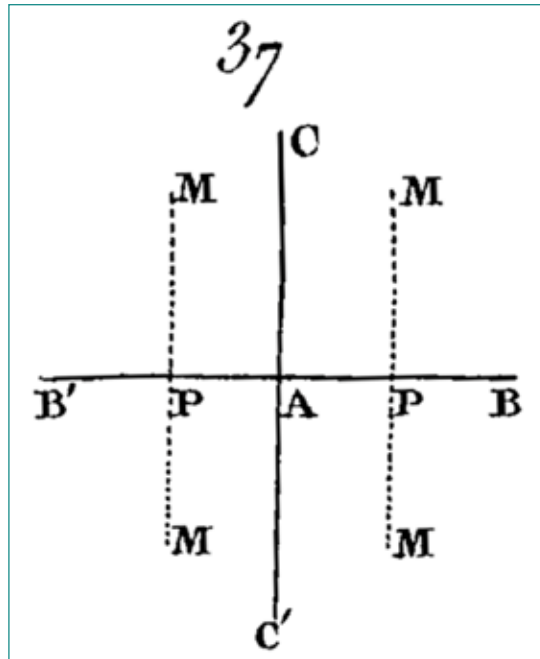


Figura 16. Coordenadas de un punto (Lacroix, 1807, Pl. 2).

En ne donnant que les valeurs absolues de l'abscisse AP et de l'ordonnée PM , le point M reste encore indéterminé à quelques égards ; car on ne connaît alors que les distances de ce point aux droites indéfinies BB' et CC' , fig. 37 ; et en conservant ces mêmes distances, il pourrait se trouver indifféremment dans l'un quelconque des quatre angles droits BAC , $B'AC$, $B'AC'$, BAC' ; mais les combinaisons des signes affectés aux coordonnées AP et PM , font connaître dans lequel de ces angles se trouve le point proposé. En effet, étant convenu de donner le signe $+$ aux parties de la ligne AB , en allant de A vers B , le signe $-$ sera celui qu'il faudra assigner aux parties de AB' , en allant de A vers B' . De même, si l'on a donné le signe $+$ aux parties de AC , en allant de A vers C , les parties de AC' , en allant de A vers C' , seront nécessairement affectées du signe $-$. Cela posé, on aura

Figura 17. Coordenadas numéricas (Lacroix, 1807, p. 120)¹².

12. Si solo se dan los valores absolutos de la abscisa AP y de la ordenada PM , queda aun indeterminado el punto M ; pues en tal caso no se conoce más que la distancia de este punto á las rectas indefinidas BB' y CC' , fig. 37; y conservando estas mismas distancias, el tal punto podrá hallarse indiferentemente en uno

pour le point M de l'angle	{	BAC, \dots	{	$+ AP$	ou	$+ x$
				$+ PM$		$+ y$
	{	$B'AC, \dots$	{	$- AP$		$- x$
				$+ PM$		$+ y$
	{	$B'AC', \dots$	{	$- AP$		$- x$
				$- PM$		$- y$
	{	BAC', \dots	{	$+ AP$		$+ x$
				$- PM$		$- y$

Figura 18. Signo de las coordenadas (Lacroix, 1807, p. 120).

Le choix des lignes AB et AC , perpendiculaires entre elles, n'est pas le seul qu'on puisse faire pour déterminer sur un plan la position d'un système quelconque de points; toute combinaison de lignes capable de fixer la position d'un point, ses distances à deux points donnés, par exemple, serait également propre à cet usage; mais dans le plus grand nombre de cas les *coordonnées perpendiculaires* sont celles dont l'emploi présente le plus de facilité, et on verra plus loin plusieurs exemples de la manière dont on passe de ces coordonnées à diverses manières d'assigner sur un plan la position des points.

Figura 19. Coordenadas perpendiculares (Lacroix, 1807, pp.120-121)¹³.

cualquiera de los cuatro ángulos rectos $BAC, B'AC, B'AC', BAC'$; pero las combinaciones de signos afectados a las coordenadas AP y PM hacen conocer en cual de estos ángulos se halla el punto propuesto. En efecto, habiendo convenido en dar el signo $+$ a las partes de la línea AB , yendo desde A hacia B , el signo $-$ será el que es necesario asignar a las partes de AB' que están desde A hacia B' . Del mismo modo si se ha dado el signo $+$ a las partes de AC , que están desde A hacia C , deberemos afectar del signo $-$ a las otras que se hallan desde A hacia C' . En virtud de lo dicho se tendrá (Lacroix, 1820, pp. 137-138)

13. "La elección de las líneas AB y AC , perpendiculares entre sí, no es la única que puede hacerse para determinar sobre un plano la posición de un sistema de puntos: toda combinación de líneas capaz de fijar la posición de un punto, como, por ejemplo, la distancia de él a dos puntos dados, sería propia para este uso; pero comunmente las *coordenadas perpendiculares* son las que en su empleo presentan mas facilidad: en lo sucesivo se verán muchos ejemplos del modo con que se pasa de estas coordenadas a otros diversos modos de asignar sobre un plano la posición de un sistema de puntos." (Lacroix, 1820, pp. 137-138)

En definitiva, las coordenadas en el *Traité Élémentaire de Trigonométrie* determinan la posición de un punto a partir de dos ejes, que fijan la dirección de las coordenadas, y un origen que divide el plano en cuatro ángulos en los que se establece por el COS dónde se representa un punto cualquiera según los signos de la abscisa y ordenada conjuntamente. Las coordenadas de Lacroix son un par de valores que se representan en el plano mediante distancias (longitud de una magnitud) siguiendo la dirección de unos ejes absolutos y contadas desde el origen según el convenio de oposición de los signos.

TRAZADO DE CURVAS

La sistematización de las coordenadas tanto en Euler como en Lacroix responde a una necesidad instrumental. Para los dos autores, las coordenadas son el instrumento que permite realizar dos procesos recíprocos: el trazado para cada función-ecuación de una línea recta o curva que exprese su naturaleza, y la obtención, a partir de las relaciones geométricas que se establecen en la curva entre las abscisas y las aplicadas-ordenadas, de la ecuación que asocia la curva con la función, siempre que esto sea posible.

Tanto Euler como Lacroix utilizan las coordenadas en el modo que cada uno de ellos las ha formalizado. En ambos casos el sistema de coordenadas que se considera es en principio el más genérico posible, es decir, el sistema de coordenadas no tiene por qué ser ortogonal, ni necesariamente la abscisa representa a la cantidad conocida, la variable x ; ni es imprescindible representar las abscisas sobre una misma línea recta (Lacroix explícitamente considera coordenadas desde un punto, aunque él no utiliza este tipo de coordenadas lo que nos induce a pensar que sea una manera de reconocer el tipo de coordenadas que utilizaron sus predecesores e incluso sus contemporáneos) y las aplicadas-ordenadas paralelas entre ellas. Aunque en ambos casos, en aras de la comodidad y de la simplicidad, el trazado de curvas se realizará, salvo que se indique lo contrario, a partir de un sistema de coordenadas perpendiculares, en el que las abscisas se tomarán sobre una misma recta, el eje de abscisas, y representarán el valor de la variable x .

Así, en la *Introductio* de Euler, a partir de la función y , de su expresión analítica o de una ecuación entre x e y , se determinan los valores correspondientes de y al variar x . Los valores de x se representan mediante un segmento, la abscisa; y, los de y mediante otro segmento, la aplicada, levantado perpendicularmente al eje por el extremo de la abscisa. (Ver figura 13)

Podríamos decir que lo que hace Euler es construir una tabla ilimitada de valores, valores que no son pares ordenados de números sino magnitudes que se representan, en un sistema de coordenadas perpendiculares en el que utiliza un único eje, mediante segmentos (la abscisa y la aplicada) dotados de sentido, siendo los extremos de las aplicadas los que trazan la curva de la función. Pero es necesario advertir que la curva no se describe por un punto que se mueve, ni es un conjunto de puntos.

Por otra parte, en el *Traité du Calcul* de Lacroix, a partir de una ecuación entre x e y , los valores de x se representan mediante segmentos sobre el eje de abscisas cuya longitud es el valor de x ; y los valores de y , mediante segmentos según la dirección, fijada a priori, de la recta AC y de longitud el valor de y correspondiente.

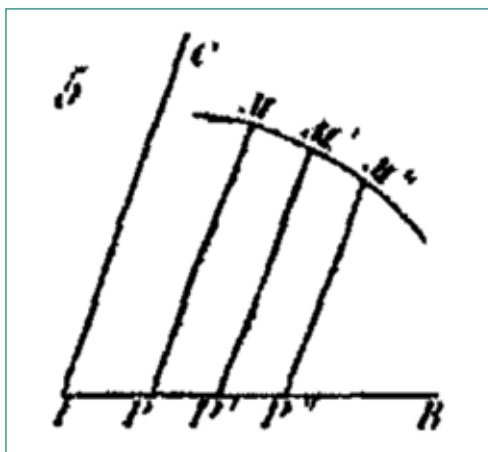


Figura 20. Coordenadas oblicuas (Lacroix, 1797, Pl. I).

195. On sait que toute équation renfermant deux indéterminées x et y , peut se construire en prenant sur une ligne AB , fig. 5, à partir d'un point donné A , des portions AP, AP', AP'' etc. pour représenter les valeurs de l'une quelconque des indéterminées, celles de x par exemple, et en menant par les points P, P', P'' etc. des droites égales aux valeurs correspondantes de y , et parallèles à une même droite AC , donnée de position, à l'égard de AB ; la ligne $MM'M''$ qui passe par tous les points ainsi trouvés, est le lieu de l'équation proposée.

Comment les diverses circonstances du cours d'une ligne sont exprimées par son équation.
FIG. 5.

Figura 21. Lugar geométrico de una ecuación (Lacroix, 1797, p. 327)¹⁴.

Luego, en el *Traité du Calcul*, Lacroix sigue utilizando las magnitudes para trazar la línea como lugar geométrico correspondiente a una ecuación (ver figura 20). Las longitudes AP (las abscisas) representan los valores de x ; las magnitudes PM , cuya longitud (la ordenada) representa los valores de y , levantadas paralelamente al eje AC desde el punto P . De momento, como en la *Introductio*, son los extremos de los segmentos PM los puntos que dan lugar al trazado de la curva. La curva no se describe como un punto que se mueve, pero aunquede la ecuación solamente se puedan obtener puntos aislados,

14. Se sabe que toda ecuación que contiene dos indeterminadas x y y , puede construirse tomando sobre una línea AB , fig. 5, a partir de un punto dado A , porciones las AP, AP', AP'' , etc. para representar los valores de una cualquiera de las indeterminadas, los de x por ejemplo, y tirando por los puntos P, P', P'' , etc. rectas iguales a los valores correspondientes de y , y paralelos a una misma recta AC , dada en posición, con respecto a AB ; la línea $MM'M''$ que pasa por todos los puntos así hallados, es el lugar de la ecuación propuesta. (Traducción nuestra)

siempre se podrán determinar puntos tan inmediatos como se quiera ya que la variable x puede tomar cualquier valor y por tanto la diferencia entre dos valores de x podrá ser tan pequeña como se desee (así lo expresa en Lacroix, 1807, p. 119)).

Pero en el *Traité du Calcul* Lacroix da un paso más y elabora una tabla de valores para construir la curva por puntos, con el propósito de conocerla mejor. Puntos cuyos valores se calculan en la ecuación correspondiente y se representan en el plano, en un sistema de coordenadas perpendiculares con dos ejes, mediante la longitud de segmentos, y teniendo en cuenta el sentido de los mismos, según representen valores positivos o negativos. Es decir, representando los puntos tal como hemos analizado que estableció en el *Traité Élémentaire de Trigonométrie*, obra que recordamos que se publicó en el mismo año que el *Traité du Calcul*, pero teniendo en cuenta que esta última llevaba muchos años preparándola y que es su gran obra.

Teniendo en cuenta que el concepto de función en la época de Lacroix no es el concepto actual, veamos cómo representa la curva de ecuación

$$\text{Soit l'équation } y^4 - 96 a^2 y^2 + 100 a^2 x^2 - x^4 = 0$$

Figura 22. (Lacroix, 1797, p. 334)

en el caso $a = 1$.

Despejando y en la ecuación $y^4 - 96y^2 + 100x^2 - x^4 = 0$ se obtiene las cuatro expresiones siguientes:

$$\begin{aligned} y &= \sqrt{48a^2 + \sqrt{x^4 - 100a^2x^2 + 2304a^4}} \dots (1), \\ y &= \sqrt{48a^2 - \sqrt{x^4 - 100a^2x^2 + 2304a^4}} \dots (2), \\ y &= -\sqrt{48a^2 + \sqrt{x^4 - 100a^2x^2 + 2304a^4}} \dots (3); \\ y &= -\sqrt{48a^2 - \sqrt{x^4 - 100a^2x^2 + 2304a^4}} \dots (4). \end{aligned}$$

Figura 23. Ramas de la ecuación (Lacroix, 1797, p. 335).

Expresiones que darán lugar a cuatro ramas semejantes dos a dos, (1) y (3); y, (2) y (4). Por ello será suficiente considerar las ecuaciones (1) y (2) para elaborar la tabla de valores que harán conocer mejor la figura de la curva (figura 16), puesto que los valores de las ecuaciones (3) y (4) se obtienen por el COS.

Lacroix elabora la tabla dando sucesivamente a x los valores 1, 2, 3, 4, etc., y calculando los valores de y por aproximación, y la presenta de la siguiente manera:

Lorsque $x =$													
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	etc.
l'équation (1) donne $y =$													
9,798	9,744	9,582	9,302	8,887	8,289	6,928	imagin.	6,928	8,698	9,798	10,845	11,872	etc.
et l'équation (2) donne $y =$													
0	1,021	2,045	3,076	4,125	5,224	6,928	imagin.	6,928	4,510	0	imagin.	imagin.	etc.

Figura 24. Tabla de valores (Lacroix, 1797, p. 337).

Con estos valores representa la función como aparece en la figura 25. Si la dibujamos a partir de la expresión analítica con GeoGebra, la curva que obtenemos (figura 26) es ligeramente distinta a la que aparece en el texto de Lacroix.

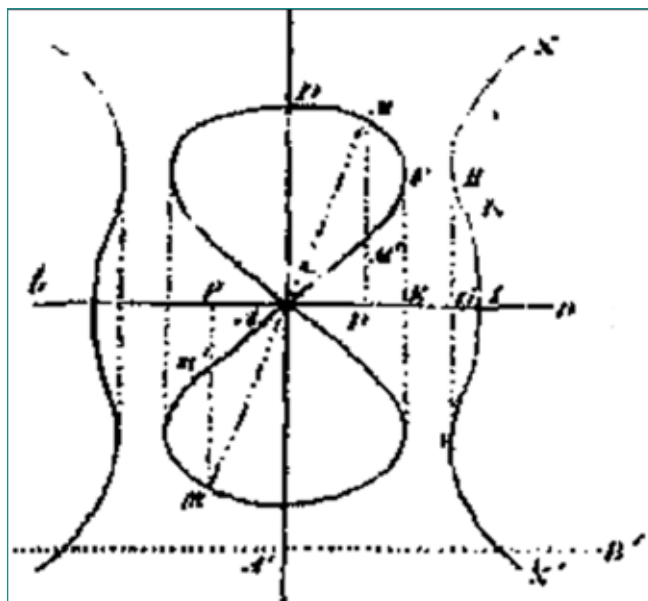


Figura 25. Figura original (Lacroix, 1797, Pl. I).

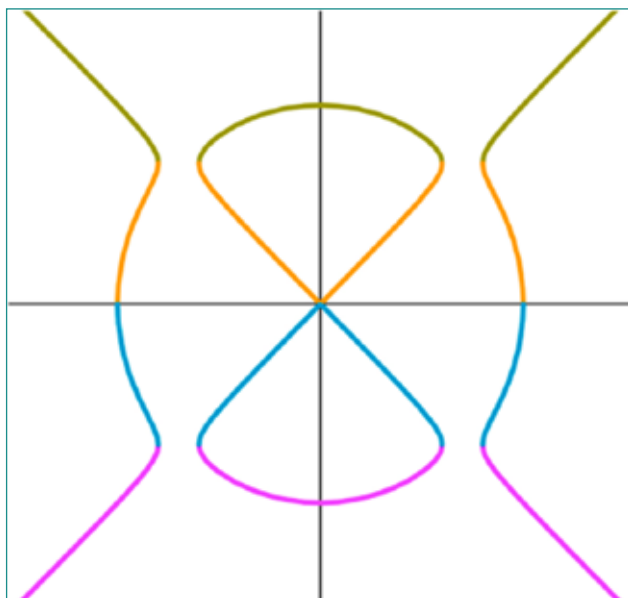


Figura 26. Figura hecha con GeoGebra.

CONCLUSIONES

Uno de los instrumentos básicos en el estudio de las funciones tanto en la *Introductio* como en el *Traité du Calcul* estriba en el trazado de la curva mediante coordenadas cartesianas.

En la *Introductio* de Euler, a partir de la función se determinan sus “infinitos valores”, las aplicadas, que se representan elevando un segmento perpendicular al eje de abscisas. Estos valores no son pares de números sino magnitudes que se representan mediante segmentos, la abscisa y la aplicada, y son los extremos de las aplicadas los que trazan la curva de la función. Esto es, la curva no se describe por un punto que se mueve, ni es un conjunto de puntos.

Por otro lado, en el *Traité du calcul* de Lacroix, a partir de la función se determina una tabla de valores tal como la entendemos actualmente, salvo por el hecho de que la función puede tomar más de un valor. Valores que se representan conjuntamente en el plano cartesiano teniendo en cuenta la longitud y el signo de las coordenadas, a partir de los que se dibuja la curva.

Una de las mayores aportaciones de estos autores respecto a la representación gráfica de funciones o lugares geométricos en el plano estriba en el reconocimiento y justificación del uso de las cantidades negativas en la representación gráfica de funciones, dado que se reconoce que la forma gráfica de la función depende en gran medida del uso de

las cantidades negativas, es más, no se puede obtener la forma completa de una curva si no se utilizan las cantidades negativas.

La otra gran aportación surge de la evolución de las coordenadas geométricas, que Euler recoge en la *Introductio*, a las coordenadas numéricas gracias al establecimiento de unos ejes de coordenadas absolutos en el *Traité Élémentaire de Trigonométrie*, que permiten la localización de puntos en el plano cartesiano mediante un par de coordenadas que se consideran de forma conjunta pero independientes, a las que solamente les faltará tomar la expresión actual como un par ordenado.

Por ello, dos de los componentes de mayor importancia que hemos visto en el uso y sistematización de las coordenadas en los textos estudiados son precisamente la dotación de significado de las cantidades negativas en la geometría y el paso de las magnitudes coordenadas (ligadas a cada curva o a su ecuación) a las coordenadas como un par de números (no sometidos a curva alguna o ecuación), que se representan en el plano como longitudes orientadas según el COS. Es esto lo que permitió, a nuestro entender, el establecimiento definitivo de unos ejes de coordenadas absolutos.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Euler, L. (1748). *Introductio in analysin infinitorum* (2 vols.). Lausanne: Marcum-Michael Bousquets & Socios.
- Euler, L. (1774). *Éléments d'algebre. De l'analyse déterminée*. Lyon: Chez Jean Marie Bruyset, Père & Fils.
- Euler, L. (1796-1797) *Introduction à l'analyse infinitésimale* (2 vols.) (Traducción francesa de J. B. Labey). Paris: Chez Barrois.
- Lacroix, S. F. (1797). *Traité du calcul différentiel et du calcul intégral*. Tome premier. Première édition. Paris: Duprat.
- Lacroix, S. F. (1807). *Traité élémentaire de trigonométrie rectiligne et sphérique, et d'application de l'algebre à la géométrie*. Quatrième édition. Paris: Courcier.
- Lacroix, S. F. (1820). *Tratado elemental de trigonometría rectilínea y esférica, y de la aplicación del álgebra a la geometría*. (Trad. Catedráticos de Matemáticas de los Caballeros Pages de S. M.) Sexta edición. Madrid: En la Imprenta Real.
- Puig, L. (2006). Vallejo perplejo. En A. Maz, M. Torralbo, y L. Rico (Eds.) *José Mariano Vallejo, el matemático ilustrado. Una mirada desde la educación matemática*, 113-138. Córdoba: Servicio de Publicaciones de la Universidad de Córdoba.
- Puig, L. (2011). Researching the History of Algebraic Ideas from an Educational Point of View. In V. Katz & C. Tzanakis (Eds.) *Recent Developments on Introducing a Historical Dimension in Mathematics Education*, 29-42. Washington, DC: The Mathematical Association of America.
- Schubring, G. (1987). On the Methodology of Analysing Historical Textbooks: Lacroix as Textbook Author, *For the Learning of Mathematics*, 7, 41-51.

Cómo recuerdan los estudiantes a sus profesores de matemáticas

Zakaryan, D., Contreras, L.C. y Carrillo, J.
Universidad de Huelva

Resumen: *Este artículo presenta los resultados de un estudio realizado con estudiantes del último curso de Educación Secundaria Obligatoria en un IES de Huelva. A través del análisis cualitativo de la información, obtenida mediante diferentes instrumentos de recogida de datos (grupo de discusión, historias de vida, cuestionarios), hemos tratado de comprender y describir cómo los estudiantes recuerdan a sus profesores de matemáticas que han tenido durante sus estudios en la ESO.*

Palabras clave: *Profesores de matemáticas, recuerdos de los estudiantes, estudio de caso.*

How the students remember their mathematics teachers

Abstract: *This paper presents the results of a study of students in their final year of a secondary school in Huelva. Through qualitative analysis of information obtained from different data collection tools (discussion group, life histories, questionnaires), we sought to understand and describe how students remember their mathematics teachers who have had while studying in the secondary school.*

Keywords: *Mathematics teachers, student's memories, case study.*

INTRODUCCIÓN

Cuando nos planteamos la pregunta que da título a este trabajo, seguramente nos viene a la mente nuestra experiencia como alumnos, cómo nosotros recordamos a nuestros profesores de matemáticas. Recordamos a algunos con admiración y gratitud: de ellos aprendimos, sembraron algún granito en nuestras mentes y corazones, modificaron nuestras concepciones, nos enseñaron con su ejemplo, nos inspiraron, nos ayudaron a

crear, hasta cambiaron el rumbo de nuestra vida... A otros, apenas les recordamos o quizás recordamos como no-modelos para evitar repetir sus prácticas.

Desde hace siglos, al profesor se le otorga un papel muy importante, por no decir crucial, en la educación de los niños. Es al mismo tiempo trasmisor de conocimientos, de valores, de motivación, de expectativa. Por esa misma razón se le exige al profesor unas cualidades personales y profesionales muy elevadas. Por otra parte, los profesores tenemos el privilegio de aprender mientras enseñamos y, además, tenemos esa ilusión (y la oportunidad) de poder contribuir en la formación de los niños. Sin embargo, como todo tiene su doble cara, esa contribución no siempre resulta oportuna¹.

Este papel tan complejo del profesor se hace todavía más peculiar cuando se trata de ser profesor de una materia tan particular como la Matemática. Los profesores de matemáticas, como la misma Matemática, rara vez dejan indiferentes a los estudiantes, más bien suelen provocar emociones fuertes como atracción, odio o frustración.

La importancia del papel del profesor de matemáticas se debe a varios factores, entre ellos, es considerada respecto a cómo aprenden los estudiantes las matemáticas, qué visión tienen de ellas y sus disposiciones y motivaciones hacia las matemáticas (Goos, 2006; Ponce, Martínez, y Zuriaga, 2008). Haladyna, Shaughnessy y Shaughnessy (1983) han documentado que la actitud general de los estudiantes hacia las matemáticas está relacionada con la calidad de la enseñanza y el clima socio-psicológico de la clase, factores que en gran medida garantiza el profesor. Por otra parte, en el ámbito de las concepciones que transmitimos a los estudiantes, encontramos estudios (p.ej. Vila, 1995) sobre la influencia de las concepciones del profesor en las concepciones y actitudes de sus estudiantes acerca de la Matemática y su enseñanza y aprendizaje. Asimismo, Frade y Machado (2008) proporcionan pruebas de que los valores de los profesores de matemáticas tienen fuerte impacto en las creencias de los estudiantes sobre la Matemática, sus sentimientos y actitudes.

En este estudio, sin entrar en el campo de actitudes, tratamos de comprender cómo recuerdan los estudiantes a sus profesores de matemáticas, cuáles son los matices emocionales de sus recuerdos y qué papel les otorgan a los profesores en cuanto a la relación de éstos con sus aprendizajes de matemáticas, disposiciones y motivación hacia la materia.

Desde el punto de vista de la psicología cognitiva, los recuerdos se refieren al pasado del sujeto y están asociados con la sensación del yo, es decir, se recuerda la experiencia del suceso y no necesariamente el suceso mismo (Tulving, 1999). Se destaca que el componente emocional ejerce un efecto fortalecedor sobre los recuerdos y que los recuerdos autobiográficos no son nunca completamente exactos sino compatibles con las creencias y el modelo de mundo del sujeto que recuerda. No obstante, las inexactitudes de los recuerdos autobiográficos, por lo general, son triviales y no vulneran el significado del episodio recordado (Ruíz-Vagas, 2004).

Así, los resultados de algunos estudios (p.ej. Grootenboer, 2001; Goos, 2006) constatan que los estudiantes suelen describir a sus profesores con muchos detalles característicos evidenciando en ellos aspectos emocionales de sus recuerdos.

1. Por ejemplo, Bishop (2002) sugiere que los valores del profesor influyen fuertemente en la práctica que lleva e impacta emocional y afectivamente en la cognición de los estudiantes., o según Gómez (2002): “*el pensamiento del profesor y las actitudes que lo manifiestan, son factores básicos que facilitan o bloquean el aprendizaje global de los alumnos*” (p.220).

METODOLOGÍA

En esta investigación, a través de un *estudio de caso* (Stake, 2007) con estudiantes de 4º ESO, hemos intentado comprender e interpretar las experiencias y los recuerdos de éstos acerca de sus profesores de matemáticas de Secundaria.

En el estudio participaron 15 estudiantes de 4º ESO (Opción B en Matemáticas), entre ellos 8 chicas y 7 chicos. La mayoría de estos estudiantes son procedentes de familias de nivel sociocultural medio-bajo, sus padres han terminado estudios correspondientes a la Educación Primaria, algunos han seguido hasta Secundaria o Bachillerato o han recibido cursos de Formación Profesional. El rendimiento académico (promedio del aula) de estos estudiantes durante los tres primeros años de Secundaria se aproxima a la puntuación de Notable, decreciendo en el cuarto año hasta la de Suficiente. Dos estudiantes han repetido curso en el segundo ciclo de Secundaria.

Con el fin de aproximarnos a la realidad objeto del estudio, hemos optado por técnicas de recogida de información como grupo de discusión (GD), historias personales (HP) y cuestionarios (C); las dos primeras técnicas nos permiten acercarnos a los estudiantes y conocer cómo ven la realidad en un modo más personal, y la última, tener una visión más amplia del objeto de estudio.

En el caso del grupo de discusión se trata de una técnica cualitativa que recurre a la entrevista a todo un grupo de personas para recopilar la información relevante sobre el problema de investigación. Una de las características principales de esta técnica consiste en que el discurso se produce a través de discursos individuales que chocan y se escuchan, y a su vez, son usados por los mismos participantes en forma cruzada, contrastada y enfrentada (Krueger, 1988), y tiene la ventaja sobre la entrevista individual de minimizar el aspecto intimidador, ya que las personas que comparten un problema estarán más dispuestas a hablar con otras del mismo problema (Lederman, 1990, citado en Barrantes y Blanco, 2004).

El objetivo del grupo de discusión, en nuestro caso, ha sido provocar en los participantes recuerdos sobre las experiencias relacionadas con sus profesores de matemáticas. Con este fin se ha planificado el contenido del discurso con un guión de preguntas abiertas a tratar. Así, hemos pedido a los estudiantes que describan a sus profesores como personas y profesionales, que recuerden cómo han influido en sus motivaciones hacia las Matemáticas, cómo les enseñaban o cómo ellos aprendían matemáticas, que compartan sus impresiones más vivas de las clases y de los profesores de matemáticas, entre otros temas.

Según recomienda Bisquerra (2004), el mejor tamaño del grupo es de 5 a 10 personas. De este modo se permite a cada participante compartir su punto de vista sobre la cuestión y a la vez se garantiza la diversidad de opiniones. En nuestra investigación, el grupo de discusión ha consistido de los 6 estudiantes, que mostraron interés en formarlo. Grabamos la discusión, de una hora de duración, en soporte audio. La realizamos en un aula de uno de los edificios del centro que se situaba aparte del edificio principal, hecho que aportó tranquilidad y confidencialidad a la discusión.

Para completar y a la vez contrastar la información obtenida del grupo de discusión pedimos la redacción de *historias sobre sus experiencias matemáticas personales* (Goos, 2006) con los profesores de matemáticas que han tenido durante sus estudios

en Secundaria, a otros tres estudiantes, dispuestos a hacerlo. En sus historias, principalmente, compartieron recuerdos sobre los temas tratados en el grupo de discusión.

De este modo, todos los estudiantes han cumplimentado cuestionarios contestando preguntas acerca de su motivación hacia matemáticas, algunas creencias y actitudes relacionadas con su aprendizaje², seis de ellos han participado en el grupo de discusión y otros tres han escrito sus historias.

Tras la transcripción de todos los datos recopilados, tratamos las unidades de información (respuestas de los estudiantes) desde el enfoque de *análisis de contenido* (Bardin, 1996).

ANÁLISIS Y DISCUSIÓN

A partir del análisis de la información, podemos documentar los siguientes resultados. Entre los cuatro profesores de la ESO, los estudiantes unánimemente indicaron a una profesora (P2)³ que tuvieron en el 2ºESO, a quien recordaban con mucho cariño y afecto, como a la única que hizo que les gustara la Matemática: “*En el 2ºESO tuvimos P2, creo que ha sido la mejor matemática de mi vida, esta mujer hizo que me gustara la Matemática. Y me gustaba, y por dejarme ella, ya me ha cortado. Era muy amena, hacía que participara, te veía dentro de la clase*” [GD]. Como se puede entender de las palabras de este estudiante, ha tenido fuerte apego a la persona de la profesora P2, por tanto con su retiro ha perdido el interés por la asignatura.

Cabe destacar al profesor P2 como el más original en el sentido de que tanto su personalidad como su enseñanza se distinguían de las de los demás profesores y fueron estampadas en la memoria de los estudiantes: “*Hacía las clases diferentes, no solo cuaderno, copiar...*” [GD].

En sus comentarios los estudiantes caracterizan a P2 como “*amena, hace participar, implica, motiva*”, pero también “*exigente*”, que al principio podía parecer una cualidad negativa para los estudiantes: “*Exigente sin resultar dura, buena en su materia e insistente*” [HP]. En sus comentarios echaban en falta que se les exigiera, quizás, porque la mayoría de los estudiantes estudian o hacen tareas para satisfacer al profesor o también la exigencia puede significar para el estudiante que al profesor le importa que aprenda, que cree en él y cuando no hay ni esa motivación extrínseca, pareciera que pierde sentido lo que hacen.

Al profesor P1 los estudiantes casi no le nombraban, solo en algunas expresiones generales, más bien positivamente, “*amistosa, cercana y amable*”. Sin embargo, algunos estudiantes recordaban a P3 con emociones negativas, describiéndolo como “*irrespetuoso y pasota*” o “*formal*” y viendo a éste como la causa de su disgusto hacia las Matemáticas: “*En 3º ESO sentía frustración y las [Matemáticas] odiaba porque la relación profesor-alumno no era buena*” [HP].

2. P.ej. ¿Qué sientes cuando haces tareas matemáticas? (opciones)

Tu visión sobre las Matemáticas (opciones)

Cuando obtienes buenas/malas calificaciones en matemáticas, crees que se debe a (opciones)

Cómo aprendías/aprendes matemáticas (opciones)

3. Pi, el segundo índice indica al profesor del grado correspondiente (1-4 de ESO)

Al profesor de su aula, P4, le describían como “*paciente y profesional*” y “*serio aunque no resultaba mal profesor*”.

Como se puede apreciar, en las descripciones y sensaciones acerca de otros tres profesores de matemáticas, los estudiantes recuerdan a P1 y P4 con cierto respeto, conscientes de que en el caso de P4 ya venían frustrados y desmotivados, sin adscribirle sus disgustos. En cambio, respecto a P3 en sus comentarios suenan matices emocionales más fuertes, se le atribuyen el “*bajón*”, “*frustración*” y “*odio*”.

Asimismo, según el análisis de los cuestionarios, las experiencias de estos estudiantes, relacionadas con las matemáticas no entusiasman mucho: una mayoría de ellos trabaja sin ilusión en sus clases de matemáticas y no disfruta trabajando con ellas; no obstante, entienden y valoran la utilidad e importancia de las matemáticas para su futuro profesional. La mayoría de los estudiantes se tensa mucho haciendo tareas de matemáticas y la mitad se siente impotente cuando resuelve problemas matemáticos. Los estudiantes no participan en las clases porque no se sienten seguros en matemáticas, aunque intentan aclarar sus dudas. El factor promotor de sus estudios no es la competencia entre los compañeros, sino el interés por la asignatura que, en el caso de las matemáticas, no se presenta: “*Las Matemáticas es la asignatura que menos me atrae, y que menos deseo de investigación y admiración despierta en mí. Pero sí es cierto que algunos maestros han conseguido que no se convierta en un pesar ni sintiese frustración ni miedo. En cambio, otros hicieron de ella un motivo para mi pasividad y solamente estudiaba para aprobar*” [HP].

COMENTARIOS FINALES

El mensaje que nos dirigen los estudiantes a través de sus recuerdos, en algunos casos, es bastante explícito, en otros se lee entre líneas, y nos muestra que el papel del profesor de matemáticas en el aula es determinante y puede modificar sus motivaciones hacia la asignatura dependiendo de la práctica de la enseñanza que ejerza. En la misma línea con Ponce et al (2008), consideramos que las componentes cognitivas y emocionales pueden explicar muchas situaciones de fracaso en matemáticas. Aunque es difícil para los investigadores especificar exactamente cómo los diferentes tipos de enseñanza y cualidades docentes afectan el rendimiento de los estudiantes, ya que esto requeriría desenredar las complicadas relaciones que existen entre las características de los profesores, las prácticas de enseñanza y aprendizaje de los estudiantes, sin embargo la evidencia de un gran número de estudios muestra que el aprendizaje de las matemáticas y la disposiciones hacia las matemáticas de los estudiantes son resultado de influencia - para bien o para mal - de la enseñanza que ellos experimentan en la escuela (Goos, 2006).

Así, por ejemplo, en un estudio, realizado con los estudiantes mencionados en este documento, acerca de las relaciones entre las oportunidades de aprendizaje que han ofrecido sus profesores de matemáticas y sus competencias matemáticas (véase Zakaryan, 2011), hemos documentado como una de las razones “auxiliares” del bajo rendimiento de los estudiantes, la falta de la motivación intrínseca y extrínseca que crearon un ambiente bastante complicado para la formación de una actitud positiva de los estudiantes

hacia las Matemáticas, que a su vez ha inducido inseguridad, desconfianza en sí mismo y desinterés por la asignatura.

Los profesores, por tanto, hemos de transmitir tanto herramientas cognitivas como emocionales empleando estas últimas para facilitar la adquisición del conocimiento matemático. Esto requiere más investigaciones acerca del uso y el impacto de dichas herramientas. Y si, según Adams (1951, p.300): “*un profesor trabaja para la eternidad: nadie puede predecir dónde acabará su influencia*”, al menos hemos de tratar de comprender dónde ésta empieza.

REFERENCIAS

- Adams, H. (1951). *La educación de Henry Adams*. México: las Ediciones Botas.
- Bardín, L. (1996). *El análisis de contenido*. Madrid: Akal Ediciones.
- Barrantes, M y Blanco, L. (2004). Recuerdos, expectativas y concepciones de los estudiantes para maestro sobre la geometría escolar. *Enseñanza de las ciencias*, 22 (2), 241-250.
- Bishop, A. (2002). Mathematical Acculturation, cultural conflicts, and transition. En G. Abreu, A. Bishop.y N. Presmeg (Eds.) *Transitions between Contexts of Mathematical Practices*, 193-212. Dordrecht, Holland: Kluwer A. Publishers.
- Bisquerra, R. (2004). *Metodología de la investigación educativa*. Madrid: La Muralla.
- Frade, C. y Machado, M. (2008). Culture and affect: Influences of the teachers' values on the students' affect. En O. Figueras, J.L. Cortina, S. Alatorre, T. Rojano y A. Sepúlveda (Eds.) *Proceedings of the Joint Meeting of PME 32 and PME-NA XXX*. Vol 3. 3-33. México: International Group for the Psychology of Mathematics Education Psychology of Mathematics Education.
- Gómez, I. (2002). Afecto y aprendizaje matemático: causas y consecuencias de la interacción emocional. En J. Carrillo (Ed.) *Reflexiones sobre el pasado, presente y futuro de las Matemáticas*. 197-227. Huelva: Universidad de Huelva.
- Goos, M. (2006). Why teachers matter. *Australian Mathematics Teacher*, 62 (4), p. 8-13.
- Grootenboer, P. (2001). How students remember their mathematics teachers. *The Australian Mathematics Teacher*, 57(4), 14-16.
- Haladyna, T., Shaughnessy, J. y Shaughnessy, J. (1983). A causal analysis of attitude toward mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, 14, 19-29.
- Krueger, R.A. (1988). *Focus groups. A practical guide for applied research*. Newbury Park, CA: Sage Publications.
- Ponce, S., Martínez, G. y Zuriaga, F. (2008). Creencias y estereotipos: la dimensión afectiva y su influencia en matemática. Recuperado el 23 de septiembre de 2010, de <http://www.caedi.org.ar/pcdi/PaginaTrabajosPorTitulo/7-564.PDF>
- Ruiz Vargas, J.M. (2004). La memoria autobiográfica y el problema de la fiabilidad de los recuerdos. Claves de la memoria autobiográfica. *Revista de Literatura: Quimera*, 240, 27-30.
- Stake, R. E. (2007). *Investigación con estudio de casos*. Madrid: Morata.
- Tulving, E. (1999). On the uniqueness of episodic memory. En L.G. Nilsson.y H.J. Markowitsch (Eds.) *Cognitive Neuroscience of Memory*, 11-42. Germany: Hogrefe & Huber Publishers.

- Vila, A. (1995). ¿Problemas de Matemáticas? ¿Para qué? Una contribución al estudio de las creencias de los profesores/as y alumnos/as. *Actas VII JAEM*, 32-37. Madrid: Sociedad madrileña de Profesores de Matemáticas “Emma Castelnuovo”.
- Zakaryan, D. (2011). *Oportunidades de aprendizaje y competencias matemáticas de estudiantes de 15 años. Un estudio de casos*. Tesis Doctoral publicada en <http://hdl.handle.net/10272/6035>, Huelva: Universidad de Huelva.

Matemáticas recreativas

Carmen Galán Mata
I.E.S. Averroes (Córdoba)

Alicia González Ortiz
I.E.S. Dolmen de Soto (Trigueros, Huelva)

Alejandra González Ortiz
I.E.S. Tartessos (Camas, Sevilla)

María Expósito Martínez
I.E.S. Averroes (Córdoba)

Esther Madera Lastra
I.E.S. Averroes (Córdoba)

Resumen: *En este artículo queremos dar a conocer el trabajo que llevamos varios años desarrollando en nuestro centro para dar a conocer y estimular el conocimiento matemático entre nuestro alumnado. De esta idea surgió "El tablón de las Mates", un tablón donde, de forma quincenal, exponemos varios problemas de ingenio, matemáticos o matemáticas famosos que hay que descubrir, curiosidades, concursos, etc.*

Descriptores: *Matemáticas Recreativas; Experiencias didácticas; Enseñanza Secundaria Obligatoria ESO.*

Recreational mathematics

Abstract: *In this article we want to present the work that took several years developed in our center to raise awareness and stimulate mathematical knowledge among our students. This idea came "The board of Mates", a notice board where fortnightly, expose several problems wit, famous mathematicians or mathematics to be discovered, trivia, contests, etc.*

Keywords: *Recreational Mathematics, Teaching experiences; Secondary Education ESO.*

INTRODUCCIÓN

La historia de nuestra labor surge de la inquietud de un grupo de profesores y profesoras de matemáticas por mejorar la actitud de su alumnado ante esta materia, a veces una de las más temida. Al principio, los medios con los que contábamos eran escasos, pero las ganas, el esfuerzo y el empeño muchos. Poco a poco nos dimos cuenta de que nuestra ilusión se transformó en ideas, y posteriormente esas ideas impregnaron a todo el centro educativo, consiguiendo la implicación del alumnado, compañeros y compañeras y hasta padres y madres de alumnos. Nuestro trabajo se ha visto culminado este curso académico con la concesión del proyecto de innovación para la elaboración de materiales que lleva el mismo nombre que nuestro artículo.

EL TABLÓN DE LAS MATES.

Se trata de un tablón de anuncios del centro donde hemos dispuesto semanalmente una serie de secciones:

“El problema de la semana”: cada quincena se propone un problema de ingenio o de matemáticas que los alumnos y alumnas del centro deben resolver de forma voluntaria. Para la resolución de los mismos hay que aplicar la lógica, procedimientos matemáticos sencillos y otros más complicados que a menudo se habían explicado en clase con anterioridad. Una vez resuelto el problema el alumnado debía explicar en un folio el procedimiento seguido y entregarlo a los profesores o profesoras que formábamos parte del proyecto. Las soluciones se depositaban en una urna habilitada a tal efecto y se corregían semanalmente, exponiendo una clasificación para motivar a nuestros alumnos y alumnas. El problema bien resuelto y correctamente explicado tenía una puntuación de 10 puntos, y los fallos en cualquier paso se penalizaban en función del error cometido.

“El personaje misterioso”: Semanalmente se pone una pista para que el alumnado descubra al matemático o matemática famoso que se esconde detrás. Los puntos se asignaban del siguiente modo: si se acierta con una sola pista, el alumno recibe 10 puntos, si es con dos, 9 puntos y así sucesivamente hasta un total de seis pistas. Cuando concluyan se expone la clasificación del alumnado y una biografía en forma de *Collage* del matemático en cuestión. Con esta actividad conseguimos cubrir una parcela a veces olvidada de nuestra materia: la historia de las matemáticas, que, muchas veces por falta de tiempo no vemos en el aula. Llama la atención la motivación incluso de compañeros y compañeras de otras áreas para descubrir la identidad del matemático o matemática famoso/a.

- “Sudokus”: Se exponía uno semanalmente con las mismas reglas que el problema de la semana. La dificultad de los mismos fue variando de fácil a medio, y, por último de alto nivel de dificultad. De hecho, uno de los últimos fue el que estuvo en la fase final del campeonato de España, y tuvimos varias alumnas capaces de resolverlo.
- “Aplicaciones de las matemáticas a la vida real” Elaboradas por un miembro del proyecto y expuestas de forma diversa, de tal forma que llamen la atención de nuestro alumnado.

- “Sopa de letras” y “Crucigramas”. Se trata de sopas de letras o crucigramas donde se da la definición de un concepto matemático que han de buscar y descubrir. Este concurso ha tenido muy buena acogida entre el alumnado, que pregunta asiduamente por los conceptos allí recogidos y se interesa por cosas que antes le eran indiferentes.

CONCURSO DE LOGOS MATEMÁTICOS

Propusimos este concurso con la idea de tener un logo que nos represente creado por nuestros propios alumnos y alumnas. El logo ganador aparecerá en póster que llevamos allí donde desarrollamos nuestro Taller de Matemáticas, que explicaremos posteriormente, y en camisetas que hacemos con el fin de recaudar fondos para la asistir como divulgadores y divulgadoras científicos a la Feria de las Ciencias de Sevilla. Al igual que en el concurso de Tarjetas Navideñas Matemáticas, el primer año la participación fue escasa, aunque muy original, y en años posteriores la participación nos ha desbordado con diseños muy trabajados.



Imagen 1: Logo ganador curso 2011/2012

CONCURSO DE CARTAS DE AMOR MATEMÁTICAS

Con el lema “Díselo con Matemáticas” organizamos este concurso haciéndolo coincidir con San Valentín. Se trataba de agudizar el ingenio de nuestro alumnado haciéndoles

escribir cartas de amor donde apareciesen las Matemáticas. Instauramos dos categorías, una para la ESO y otra para Bachillerato, ya que los recursos que puede utilizar un alumno o alumna de Bachillerato son más ricos y variados que un alumno o alumna de ESO. Este curso fue el primero en que hemos llevado a cabo este concurso, y hemos considerado que la participación ha sido más que suficiente, con cartas muy ingeniosas y variadas

EJEMPLO- CARTA GANADORA E.S.O. CURSO 2011/2012

El uno me da un guiño
El dos me da su cariño
El tres me da su corazón
El cinco me da alegría
El seis me da su simpatía
El siete me da su color
El ocho me da comprensión
El nueve me da sus besos
Y si sumamos todos los versos
Obtendremos el AMOR

EL CUENTOMÁTICO

Partiendo de una serie de pautas nuestro alumnado debe elaborar un cuento donde aparezcan conceptos matemáticos. Les damos absoluta libertad para los personajes protagonistas, pero les marcamos qué operaciones matemáticas queremos que aparezcan en el desarrollo, y, a veces, incluso qué números; también les indicamos que deben escoger un país donde tenga lugar el cuento, obligándoles así a buscar información de dicho país (la moneda, las costumbres, etc.) para que la redacción sea coherente. Trabajamos así de forma interdisciplinar con el departamento de geografía e historia, donde pueden dedicar una sesión a la búsqueda de información. Los cuentos elaborados por el alumnado son muy heterogéneos, pero en general los resultados han sido satisfactorios. Tenemos aquellos alumnos que no han cumplido las premisas (no respetan las operaciones matemáticas pero introducen otras, no escogen un país existente, pero se inventan otro con sus normas y su sociedad, etc.), otros que las cumplen pero con un texto muy forzado, y cuentos que nos sorprendieron por su originalidad, redacción y contenido matemático.

5. TALLER DE MATEMÁTICAS

El alumnado que voluntariamente participaba asiduamente en nuestros concursos fue seleccionado para formar un grupo de “alumnado ayudante” de matemáticas, con los objetivos siguientes:

- Elaborar material de “juegos de ingenio matemáticos” con fichas que expliquen la historia del juego y la cultura que lo desarrolló, estudiando y elaborando

estrategias ganadoras aplicando la lógica y el pensamiento matemático. El tablero de algunos juegos se elaboró interdisciplinariamente con el Departamento de Educación Plástica y Visual a través de su taller de cerámica. Otros tableros se hicieron interdisciplinariamente con el Departamento de Tecnología, algunos en madera y otros en cartón. Otros tableros fueron diseñados por el profesorado en diferentes materiales y por último, aunque no por ello menos importante, otros tableros los diseñaron y elaboraron los propios alumnos y alumnas. Entre los juegos de ingenio que desarrollamos cabe destacar:

- Taller del número áureo: Fichas donde se explica qué es, cómo se obtiene y dónde aparece el número áureo, junto con un programa informático diseñado por el profesorado del proyecto donde se introducen las medidas del rostro de una persona y da una nota media (siendo el 10 el rostro perfecto que guarda todas sus proporciones áureas y 0 un rostro completamente asimétrico no proporcionado) y personajes famosos (del mundo de la canción, el cine, el deporte, etc.) con una nota similar a la obtenida.



IMAGEN 2: PROGRAMA NÚMERO ÁUREO

- Juegos numéricos: Juegos donde se pone de manifiesto las propiedades y curiosidades de los números, permitiéndonos conocerlos mejor.



Imagen 3: Juegos de tablero taller cerámica

- Tangram normal y tangram rectangular: Es uno de esos puzzles capaces de cautivar y motivar a nuestros alumnos y alumnas a descubrir relaciones geométricas. Además, es un rompecabezas de origen chino con una leyenda que data de, aproximadamente, el año 1776
- Puzzles de Escher: Elaborados por el alumnado en las clases de Tecnología y en las de Educación Plástica y visual, contemplan diferentes formas de teselar el plano con figuras de lo más diversas.



IMAGEN 4: PUZZLES DE ESCHER

- Explicar y jugar con sus compañeros y compañeras en la celebración del Día de Andalucía en el centro. El Taller de Matemáticas Recreativas, que competía con Talleres como el de karaoke o una gymkana coeducativa, fue uno de los más visitados por el alumnado y uno de los que más éxito tuvo.
- Explicar y jugar con alumnado de toda Andalucía en la Feria de la Ciencia de Sevilla, donde hemos participado los cuatro últimos cursos en calidad de divulgadores y divulgadoras científicos.

BLOG DE MATEMÁTICAS

Tras un tiempo con el Tablón de las Mates y los diferentes concursos dimos el salto del tablón material al virtual, creando un blog con los mismos apartados que nuestro ya mencionado tablón. Poco a poco fuimos añadiendo apartados, actividades y ejercicios para nuestro alumnado, convocatorias de concursos y entregas de premios, fotografías de nuestro concurso, enlaces interesantes, libro de firmas, etc. hasta convertirse en una herramienta imprescindible en el desarrollo de nuestra labor

REFERENCIAS

- <http://matesrecreativasaverroes.blogspot.com.es/>
- <http://www.dptomatesiesmiravent.blogspot.com.es/>
- <http://www.divulgamat.net/>
- <http://fermat.usach.cl/histmat/html/ia.html>
- <http://www.galeon.com/tallerdematematicas/problemas.htm>

Problemas de Fermi. Suposición, estimación y aproximación¹

Juan Manuel García Navarro
IES Los Alcores

Resumen: Desde la enseñanza de las matemáticas se ha potenciado una visión de la misma como ciencia de la precisión en la que se obtienen respuestas concretas a preguntas concretas, sobre todo en sus niveles más básicos. Sin embargo, esta disciplina también se ha ocupado desde siempre de problemas relacionados con la aproximación y la estimación.

Mediante la suposición y la estimación es posible aproximar de modo razonable algunos problemas de cálculo conocidos como problemas de Fermi, llamados así, sobre todo en el mundo anglosajón, en honor al físico Enrico Fermi.

Palabras clave: Problemas de Fermi, resolución de problemas, aproximación, estimación, suposición.

Fermi problems. Guess, estimation and approximation

Abstrac: From the teaching of the mathematics, a vision of itself has been promoted as a science of precision that obtains specific answers to specific questions, especially in the most basic levels. However, this discipline is also characterized by dealt with problems related to the approximation and estimation

Through the guess and estimation is possible to approximate some calculations problems known as Fermi problems, named in honour of the physicist Enrico Fermi.

Keywords: Fermi questions, problem solving, approximation, estimation, guess.

1. En castellano no hay un término específico para este tipo de problemas. En el mundo anglosajón, el modo de razonar para resolver este tipo de problemas se llama “guesstimation”, término utilizado por primera vez por los estadísticos de los Estados Unidos en los años 30 del siglo XX. Proviene de la contracción de “guess” -suponer, suposición- y “estimation” -estimación-.

INTRODUCCIÓN

¿Cuántos afinadores de pianos hay en Chicago? ¿Cuánta comida y bebida debo comprar para mi fiesta de cumpleaños? ¿Cuántos taxis hay en mi ciudad? ¿Cuántos españoles se están hurgando la nariz en este preciso momento?

Aunque las matemáticas se han ocupado desde siempre de problemas relacionados con la aproximación y la estimación, desde la enseñanza de esta materia se ha potenciado una visión de la misma como ciencia de la precisión en la que se obtienen respuestas concretas a preguntas concretas, sobre todo en sus niveles más básicos. Sin embargo, esta disciplina también se caracteriza por procesos más alejados de ese determinismo como la exploración, interpolación, estimación, predicción, deducción...

Las causas por las que necesitamos aproximar o estimar una cantidad pueden ser muy variadas. Si estamos midiendo una cantidad, por ejemplo, los instrumentos utilizados tienen una precisión limitada, con lo que nunca obtendremos el valor “exacto”. Otras veces es necesario aproximar debido a la naturaleza intrínseca de los datos manejados, como en el caso de necesitar cifras decimales de números irracionales. En otras ocasiones, la necesidad de tomar una decisión en poco tiempo nos puede obligar a ello o bien simplemente no se necesitan resultados exactos. Precisamente, la estimación es utilizada en los contextos más variados de la vida cotidiana debido a que raramente se necesita exactitud: “llegaré sobre las seis de la tarde”, “me gasté unos 600 € durante mis vacaciones”, “asistieron unos 2000 espectadores”, etc.

Mediante la suposición y la estimación es posible aproximar de modo razonable algunos problemas de cálculo cuya solución exacta es imposible obtener, debido a la imposibilidad de obtener todos los datos necesarios a partir del enunciado, o bien no compensa obtenerla por los recursos que tendríamos que invertir para ello y nos basta con una aproximación.

Este tipo de problemas de cálculo aproximado se conocen, sobre todo en el mundo anglosajón, como problemas de Fermi. Se llaman así en honor al físico Enrico Fermi, famoso, entre otras muchas cosas, por hacer muy buenos cálculos con datos muy escasos. Una de sus características principales es el contraste de la familiaridad y simplicidad de la pregunta con la aparente imposibilidad de obtener su respuesta: *¿Cuántos afinadores de piano hay en Chicago?* Nuestra primera impresión es que no tenemos datos suficientes. Sin embargo, los problemas de Fermi muestran cómo podemos hacer uso de unos conocimientos y procedimientos nada extraordinarios para obtener respuestas aproximadas a este tipo de preguntas. Además, este tipo de cálculos puede realizarse utilizando unas cuantas operaciones elementales, por lo que también suelen llamarse en el mundo anglosajón *cálculos del dorso del sobre*² (*back-of-the-envelope calculations*) por el espacio que se supone necesario para obtener la “solución”.

2. Pienso que un término más adecuado en castellano sería el de *cálculos de servilleta*, también referido a la pequeña superficie de las servilletas de papel habituales en cafeterías, bares, etc. y que son tan socorridas a la hora de hacer alguna anotación.

BREVE BIOGRAFÍA DE FERMI

Enrico Fermi es considerado uno de los grandes físicos del s. XX. Nadie fue tan versátil como él, dotado de un talento genial tanto para la física teórica como para la experimental. Es conocido, principalmente, por haber llevado a cabo la primera reacción nuclear controlada.

Fermi nació en Roma el 29 de septiembre de 1901, hijo de Alberto, empleado en la compañía estatal de trenes, y de Ida, maestra. Su educación superior tuvo lugar en Pisa, donde obtuvo título de Doctor en Física en 1922 con un trabajo experimental sobre los rayos X. Durante el curso académico 1923-1924 enseñó matemáticas en la universidad de Roma y el siguiente lo pasó en Florencia. Al año siguiente volvió a Roma donde ocupó la cátedra de Física teórica en la universidad, puesto que conservó hasta 1938. Ese año obtuvo el premio Nobel por sus trabajos sobre las reacciones nucleares provocadas por los neutrones lentos³. A finales de ese año, aprovechó su viaje a Estocolmo con toda su familia para emigrar a los Estados Unidos a causa del recrudecimiento de las leyes antisemitas en la Italia fascista (su esposa, Laura, era judía).

En enero de 1939, al poco tiempo de su llegada a Estado Unidos, donde pronto ocupó una cátedra de Física en la universidad de Columbia en Nueva York, tuvo noticias del descubrimiento de la fisión. Rápidamente se dio cuenta de las posibilidades de lograr una reacción en cadena y sus consecuencias, por lo que se puso inmediatamente a trabajar experimentalmente en ello. Sus trabajos subsiguientes fueron clasificados por el gobierno como secretos, creándose así la primera fase del *Proyecto Manhattan* con el fin de crear una bomba atómica. Así, Fermi siguió con su trabajo en Nueva York al tiempo que mantenía una actividad secreta en Chicago. De abril de 1942 a septiembre de 1944 fue la figura clave del “Laboratorio Metalúrgico”, el equipo secreto del campus de la universidad de Chicago cuyo objetivo era desarrollar una pila nuclear –reactor, en la terminología actual- y, en último término, la bomba nuclear. La creación de la primera pila nuclear culminó el 2 de diciembre de 1942. En 1944, él y su esposa adquirieron la nacionalidad estadounidense y en septiembre de ese año se trasladó a Los Álamos, en el estado de Nuevo México, donde sería una figura clave en el *Proyecto Manhattan* bajo la dirección de Robert Oppenheimer. El proyecto culminó con la explosión, el 16 de julio de 1945, de la primera bomba atómica de la historia. Como anécdota que ilustra sus extraordinarias facultades de estimaciones de cálculo, Fermi asistió a la detonación en el desierto de Alamogordo, en nuevo México, la conocida como prueba *Trinity*. En el momento de la explosión, dispersó unos trocitos de papel antes y durante el paso de la onda expansiva. Observando la distancia recorrida por los trocitos estimó la potencia de la bomba en unas 10.000 toneladas de TNT, cifra muy parecida a la que obtuvieron semanas de cálculos después con los datos proporcionados por los sensores diseminados por la zona (Allison, Segré y Anderson, 1955).

3. La genialidad de Fermi consistió en frenar las partículas con las que bombardeaba los núcleos de los elementos para transmutarlos. Mientras que todos sus colegas competían por acelerar dichas partículas a fin de dotarlas de mayor energía, Fermi descubrió que frenándolas mediante choques con moléculas de agua que rodeaba la fuente emisora obtenían la suficiente energía para interactuar con los núcleos de los elementos, contrariamente a lo que ocurre en el mundo macroscópico y, por lo tanto, a la intuición.

Una vez terminada la guerra, Fermi aceptó un puesto en la universidad de Chicago, actividad que no abandonaría hasta su muerte, acaecida el 29 de noviembre de 1954. Retomó sus clases y sus investigaciones académicas, lo que fue, seguramente, su mayor contribución a la Física en el periodo de postguerra: cuatro de sus alumnos de doctorado llegaron a recibir el Nobel. Le gustaba estimular la inteligencia y el espíritu crítico de sus alumnos con problemas poco habituales en una clase de Física, como preguntándoles cuántos afinadores de pianos creían que había en Chicago. Como solía decir, no se trataba de enseñar qué pensaba Galileo, si no de discutir cómo pensaba.

QUÉ SON LOS PROBLEMAS DE FERMI

Los problemas de Fermi son problemas de cálculo en los que se espera que demos como respuesta una solución aproximada pero razonable, dado que los datos de partida son limitados o no están definidos explícitamente e impiden dar una solución exacta.

Analicemos un ejemplo para ver algunas características más: “¿cuántos latidos da el corazón de un hombre a lo largo de su vida?”

- Este problema no se refiere a un hombre en concreto, lo cual imposibilita dar una respuesta exacta. Casi siempre empezaremos a resolver un problema de Fermi diciendo: “supongamos que...”.
- La resolución del problema pone más énfasis en el desarrollo del razonamiento que en la respuesta en sí.
- Un problema de Fermi nos invita a hacernos más preguntas para resolverlo ya que requiere una serie de conocimientos no mencionados en el enunciado. Siguiendo con nuestro ejemplo, el razonamiento nos lleva a preguntarnos: ¿cuál es la vida media de un hombre? ¿cuál es la media de sus pulsaciones?, etc.
- Los problemas de Fermi, a pesar de las limitaciones en los datos o la dificultad de análisis, se refieren a cuestiones objetivas que pueden abarcar cualquier campo o disciplina. En ocasiones son asombrosamente familiares.
- Si dispusiésemos de todos los datos necesarios llegaríamos a una solución determinada de manera muy sencilla; por lo tanto, la dificultad está en la naturaleza de esos datos, no en el cálculo en sí.
- Cuando existen resultados con los que comparar⁴ se considera que la respuesta es muy buena si se acierta en el orden de magnitud de la solución.
- A primera vista, los problemas de Fermi son similares a otros problemas y acertijos populares. No debemos confundirlos con los problemas llamados de “pensamiento lateral”, del tipo: “Un hombre empuja su coche a un hotel y pierde toda su fortuna. ¿Qué le ha ocurrido?” No son problemas de cálculo, pero comparan con los problemas de Fermi el hecho de que no disponemos de datos suficientes en su enunciado para dar una respuesta exacta. Son problemas en los que, más que el razonamiento, se prima la originalidad para interpretar la situación descrita

4. En concursos escolares de ciencias, por ejemplo, se suele establecer un dato, calculado previamente por los organizadores de la prueba, considerado como la “solución” para puntuar las respuestas de los distintos participantes en función de su proximidad a ella.

y dar una respuesta que se corresponda con el escenario representado en él (en el ejemplo anterior se puede pensar en un conductor con su vehículo averiado que lo empuja hasta un hotel al que entra para pedir ayuda, pero hay un casino y decide esperar la grúa jugando, etc., o bien argumentar que se trata de una persona que juega al Monopoly, respuesta más original y divertida que también se ajusta perfectamente al enunciado).

CÓMO RESOLVER LOS PROBLEMAS DE FERMI

No hay un procedimiento bien definido para la resolución de este tipo de problemas. Debemos recordar que si conociésemos todos los datos necesarios su resolución sería muy fácil mediante operaciones elementales de aritmética, por lo que la clave estará en aproximar los datos con los que haremos los cálculos. De todas formas, sí podemos dar unas sugerencias generales:

- Lo primero sería descomponer el problema principal en otros secundarios más fáciles de abordar. Si queremos estimar, por ejemplo, el número de hojas de un árbol, podemos hacerlo multiplicando el número de ramas por el número de hojas en cada rama. Nos resultará algo más cómodo pensar primero en un árbol desnudo de hojas para estimar sus ramas y luego en una rama individual para hacer lo mismo con sus hojas.
- Nuestra experiencia nos permite aproximar muchos datos sin ningún tipo de técnica especial. Por ejemplo, sabemos que la vida media de una persona está sobre los 75-80 años, que pueden haber tres o cuatro personas en un metro cuadrado de suelo, que dormimos unas ocho horas diarias, etc.
- Si la cantidad a estimar se escapa de nuestra experiencia, podemos proceder dando un límite superior y otro inferior que nos parezcan razonables y hallar su media geométrica⁵.
- Simplificar los números redondeándolos ya que no tiene sentido buscar una solución exacta.
- Aunque podemos enfrentarnos a un problema de Fermi sin nada más que lápiz y papel, también cabe la posibilidad de conseguir datos concretos por nosotros mismos o buscarlos⁶ en enciclopedias, la web, etc.

5. ¿Por qué la media geométrica? Hemos visto que el objetivo principal es acercarnos al orden de magnitud de la respuesta. Éste aparece reflejado en el exponente cuando se expresa en notación científica. Así, si tenemos dos números con dos órdenes distintos, la media aritmética de sus órdenes corresponde aproximadamente al orden de la media geométrica de los dos números (si la suma de los órdenes es par, es exactamente así; si es impar, es un poco más complicado, redondeando la media aritmética unas veces al entero superior y otras al inferior).

6. Aunque muchos datos de los que aparezcan en los problemas pueden ser consultados con relativa facilidad, el espíritu en este texto es resolverlos partiendo sin ningún dato a priori, únicamente con nuestra experiencia personal y lo que puede considerarse como una asunción razonable. De todas formas, muchos de esos datos que se pueden consultar en cualquier enciclopedia o a través de la red, como la masa de la Tierra o la producción mundial de acero, no dejan de ser otros problemas de Fermi resueltos por “expertos”, es decir, personas con la suficiente experiencia en el campo correspondiente como para que sus estimaciones sean consideradas como oficiales.

Veamos ahora la resolución de algunos ejemplos concretos. Comencemos por el problema del apartado anterior:

¿Cuántos latidos da el corazón de un hombre a lo largo de su vida?

Supongamos que una persona vive, de media, 75 años. El ritmo cardíaco de una persona depende de varios factores como la condición física de esa persona, de su actividad diaria, etc., y además, para un mismo sujeto, varía a lo largo del día. Usaremos la estrategia de decidir un límite inferior y uno superior y luego hacer la media geométrica. En nuestro caso, podríamos poner 60 como límite inferior y 100 como superior (60 puede ser un pulso en reposo y 100 con una cierta excitación). Así la media geométrica sería de 77,45. Redondeando, tomaremos 75 pulsaciones por minuto. El resto de datos sí son exactos: segundos, minutos, horas y días en un año. Así, nos queda que los latidos en 75 años serían:

$75 \text{ latidos/min} \times 60 \text{ min/hora} \times 24 \text{ horas/día} \times 365 \text{ días/año} \times 75 \text{ años} = 2,95 \cdot 10^9$ latidos.

Observemos que, si en lugar de tomar 75 años de vida, hubiésemos realizado los cálculos con 80 años, el resultado sería de $3,15 \cdot 10^9$ latidos, una cifra que tiene el mismo orden que la anterior. Algo similar ocurriría si tomásemos 60 ó 70 pulsaciones, etc. Lo importante en este problema es saber de qué depende la solución. En este caso, de la duración de la vida de la persona y de su media de latidos por minuto.

Veamos ahora el problema considerado canónico:

¿Cuántos afinadores de piano hay en Chicago?

Este problema puede resultarnos algo más complicado en principio debido a que los datos involucrados están más alejados de nuestra experiencia (al menos de la mía). Aunque puede haber distintas maneras de abordarlo, la solución aquí propuesta se basa en considerar que los afinadores trabajan a tiempo completo, lo que su número vendrá dado como el cociente entre las afinaciones necesarias para todos los pianos de Chicago en un periodo de tiempo, un año por ejemplo, y las afinaciones que puede realizar un afinador en ese periodo.

Concretamos: Debemos empezar a estimar la población de una ciudad grande como Chicago. Digo que es grande ya que me resulta conocida, al menos de oídas. Tomaremos cuatro millones de habitantes (puede que sean tres o cinco millones, pero recordemos que lo que nos interesa es el orden del número). A continuación, pensemos en cuántos hogares formarán esos habitantes. Desde los hogares unipersonales hasta las familias muy numerosas hay un gran trecho. Lo habitual sería una pareja de padres y uno o dos hijos, y a veces algún abuelo. Veo razonable tomar cuatro personas por hogar, lo que daría $4 \cdot 10^6$ habitantes entre 4 personas por hogar igual a 10^6 hogares. De éstos, ¿cuántos poseen pianos? Al contrario que los habitantes de una gran ciudad, mi experiencia con los números de pianos por hogar es prácticamente nula, por lo que procederé poniendo un límite superior e inferior y redondeando su media geométrica. Pienso que puede estar

entre 1 de cada 100 y 1 de cada 10, por lo que tomaremos 1 de cada 30, lo que da un total de 10^6 hogares por 1 piano en cada 30 hogares hacen unos 33000 pianos.

Veamos cuántos afinadores se necesitan para esos pianos. Empezaremos suponiendo que cada piano necesita ser afinado una vez al año (seguro que hay algunos, como en escuelas, conservatorios y orquestas que lo hagan con más frecuencia, al igual que habrá otros que lo harán cada muchos años) y que un afinador tarda dos horas en afinarlo más una en trasladarse de un piano a otro, unas tres horas por piano. Si trabaja 8 horas al día, 5 días a la semana durante 48 semanas al año, resulta que un afinador puede hacerlo un total de 8 horas por 5 días por 48 semanas entre 3 horas por afinación igual a 640 veces al año. Si suponemos que hay pleno empleo de afinadores, esto nos da 33000 afinaciones necesarias entre 640 afinaciones por afinador hacen unos 50 afinadores. De nuevo, la respuesta seguramente no sea exacta, pero sabemos de qué depende la solución.

PARA QUÉ SIRVEN LOS PROBLEMAS DE FERMI

Aunque puedan parecer que no son más que un pasatiempo, en realidad estamos realizando constantemente aproximaciones y estimaciones ya que en pocas ocasiones a lo largo del día necesitamos mucha precisión en los números que manejamos y en los cálculos que hacemos con ellos: el tiempo que tardaremos en hacer nuestro trayecto en coche, coger dinero para la compra semanal en el supermercado, el presupuesto de esa semana de vacaciones en el extranjero, etc. Gracias a nuestra experiencia, en algunos casos hacemos estos cálculos de manera automática (como la compra semanal) y en otros necesitarán una mayor reflexión (como el presupuesto para unas vacaciones).

Tanto a nivel doméstico como en situaciones de mayor envergadura, los problemas de Fermi son usados como una primera aproximación para ver la viabilidad de un proyecto de una forma más rápida y económica antes de acometer una serie de comprobaciones posteriores de mayor coste. Si el gobierno planea crear, por ejemplo, un escudo de defensa antimisiles y estima que el porcentaje de intercepción de misiles enemigos estará en torno al 90 %, puede decidirse a construir prototipos y hacer pruebas con misiles reales para seguir comprobando su eficacia; pero si se estima que el acierto estaría en torno a un 10 %, podría desechar el proyecto desde un principio. En nuestro problema de los pianos, si tenemos la intención de poner un negocio en Chicago relacionado con los afinadores de piano, por ejemplo, sabríamos que se trata de decenas de profesionales, quizás algunos cientos pero muy difícil que sean miles. Una vez conocidos los parámetros de los que depende la solución, podemos optar por obtener una respuesta más afinada (valga la redundancia) a costa de invertir en más recursos: consultando el censo de la ciudad en sitios oficiales, encargando un estudio de los hogares con pianos a una empresa de estadística, preguntando a afinadores profesionales por los tiempos de trabajo etc.

Los problemas de Fermi se utilizan también como pruebas dentro del proceso llevado a cabo en la selección de trabajadores de ciertas empresas muy de moda en el mundo de la tecnología. Gigantes de la web como Google, Amazon o BestBuy son muy populares en la red también por las preguntas que pueden hacer en alguna de las numerosas fases

en sus procesos de selección de personal⁷ (Poundstone, 2007; 2012). Sin ser de las más determinantes (alguien quedaría fuera del proceso antes por no saber un segundo idioma, por ejemplo), son, sin embargo, las más populares, ya que sabemos cuándo estamos preparados para una entrevista en un idioma no nativo pero nunca estaremos seguros de poder responder *cuánto mide una fila formada por todos los cabellos de una persona*.

Por último, en el mundo anglosajón, en especial en los EEUU, es muy habitual que los problemas de Fermi formen parte de concursos académicos de ciencias. En este contexto sí importa la solución además del razonamiento, ya que hay que decir cuál es la más correcta entre varias posibles respuestas. Como hemos comentado antes, en tales casos se ha calculado previamente una solución, por parte de los expertos que organizan la prueba, que se considera la “correcta” y la puntuación será mayor cuanto más próxima esté de ella la respuesta que proporcionemos.

POR QUÉ FUNCIONAN LOS PROBLEMAS DE FERMI

A pesar de todas las limitaciones que nos encontramos a la hora de resolver un problema de Fermi, resulta sorprendente que las respuestas son muy razonables, es decir, que los problemas de Fermi funcionan. ¿Cómo es posible que en un proceso en el que hay que ir estimando en varios pasos, cometiendo errores en definitiva, al final obtenemos un resultado razonable? ¿Acaso la solución final no contiene la acumulación de todos los errores producidos por las estimaciones que hacemos en cada paso? Al contrario de lo que pudiésemos pensar en un principio, los errores tienden a cancelarse entre sí. La idea es que unas veces nos equivocamos de más y otras de menos, y además con la misma probabilidad. En el ejemplo de los pianos, si en lugar de cuatro millones de habitantes tomamos tres, luego podríamos tomar cinco personas por hogar y un piano por cada 50 hogares, con lo que el resultado final sería unos 20 afinadores, que sigue estando dentro del orden de la solución anterior. En un paso nos equivocaríamos en un orden o dos por encima del valor correcto y en el siguiente quizás en dos o tres por debajo, con lo que se van anulando poco a poco. Es poco probable que todos los errores que cometamos caigan en la subestimación o que todos caigan en la sobreestimación. Las leyes de la probabilidad nos dicen que los errores tenderán a compensarse y los resultados convergerán al valor correcto.

A MODO DE CONCLUSIÓN: RAZONES PARA SU ENSEÑANZA.

Aplicamos continuamente procesos de estimación y aproximación en nuestra vida cotidiana para resolver situaciones en las que no necesitamos demasiada exactitud. En la mayoría de esas ocasiones lo hacemos de manera inconsciente debido a que son situaciones a las que estamos habituados. Sin embargo, podemos tratar como problemas de Fermi esas otras cuestiones que no solventamos de manera automática. Aplicar estas

7. Los dos libros de Poundstone (2007) y (2012) que figuran en la bibliografía son recopilaciones de este tipo de preguntas y consejos para superarlas, en las que aparecen mezclados sin distinción problema de Fermi con otros de pensamiento lateral.

técnicas en nuestro quehacer diario nos hará mejorar nuestro pensamiento crítico y sentido común:

En última instancia, el valor de hacer frente a los problemas de la ciencia, o de la vida cotidiana del modo en el que lo hizo Fermi se encuentra en la recompensa de hacer descubrimientos de manera autónoma e independiente. No importa si el descubrimiento es tan importante como el rendimiento de una bomba nuclear o tan trivial como estimar el número de afinadores de pianos de una ciudad del Medio Oeste. Buscar la respuesta en un libro o dejar que otro la obtenga por ti, realmente le empobrece a uno; priva a la persona del placer y el orgullo que acompañan a la creatividad y le aparta de una experiencia que refuerza la confianza en sí mismo. La autoconfianza es, a su vez, el requisito esencial para resolver los problemas de Fermi. Así, enfocar los dilemas personales como problemas de Fermi puede llegar a ser, mediante una especie de reacción en cadena, un hábito que enriquece la vida⁸ (Von Baeyer, 1988).

Por último, aunque pueden plantearse como una práctica personal diaria, los problemas de Fermi son idóneos para la resolución de problemas en el ámbito académico. Los problemas de Fermi nos pueden servir para mostrar a los alumnos la conexión entre las matemáticas y el mundo real, a veces de manera asombrosa según qué enunciados. A través de ellos, los estudiantes tienen la oportunidad de descubrir múltiples caminos para resolver un problema, a la vez que desarrollan habilidades de estimación, sentido crítico y aprenden a moverse con mayor destreza a través de la escala de magnitudes que pueden ir desde un presupuesto gubernamental de billones de euros a describir propiedades de átomos y moléculas. Además, la memorización de los hechos se vuelve menos importante ya que se prima el desarrollo de las herramientas para resolver tales cuestiones. Resultan muy fáciles de plantear o buscar a través de Internet y pueden adaptarse a cualquier nivel educativo sin más que establecer unos enunciados acordes al nivel deseado. ¿Qué más se puede pedir?

UNA PROPUESTA DIDÁCTICA

La resolución de problemas de Fermi requiere pocos conocimientos matemáticos previos y con ellos se evalúa más la capacidad de pensar que unos conocimientos específicos de matemáticas. Sin embargo, tenemos que decidir unos conocimientos mínimos de los cuales partir, y éstos nos darán la pista sobre los núcleos temáticos en los cuales sería conveniente la introducción de este tipo de tareas. Éstos son, principalmente, los bloques de Números, Unidades y Geometría. En un bloque de Números podemos abarcar desde las operaciones aritméticas básicas y con grandes números, en un nivel más elemental, hasta la notación científica y los conceptos de aproximación y error, en otro más superior. En Geometría, estos problemas pueden empezar a usarse en cuanto el alumno sepa

8. Traducido de: Von Baeyer, H. C. (1988).

calcular áreas y volúmenes de figuras elementales. Por último, en ambas unidades puede ser necesario el manejo de las unidades de medida de longitud, superficie y volumen.

Para la introducción concreta de este tipo de tareas en el aula se pueden estructurar en varias fases, según vayamos aumentando el nivel de abstracción y generalidad en las preguntas. En una primera toma de contacto, se pedirá al alumno que estime diversas unidades de longitud, área y volumen:

- ¿Puedes abarcar con tus brazos una longitud de un metro? ¿Cuánto es, aproximadamente? ¿Y un hectómetro? ¿Y un centímetro?
- ¿Puedes dibujar en la pizarra una superficie de un m^2 (km^2 , cm^2 , etc.)? ¿Cómo sería, aproximadamente?
- ¿Cabría en el aula un volumen de m^3 (litro, km^3 , cm^3 , etc.)? ¿Cómo sería, aproximadamente?

En una segunda etapa se pueden plantear problemas de cálculo que el alumno tiene ante sí, usando elementos del aula, por ejemplo, que no requieren ningún tipo especial de conocimiento:

- ¿Cuántas baldosas hay en este suelo?
- Si quisiéramos cubrir la superficie de la mesa con lápices, ¿cuántos necesitaríamos para taparla por completo?
- ¿Cuántos ladrillos necesitaríamos para construir esa pared?
- ¿Cuántos brics de zumo necesitaríamos para llenar toda el aula?

Por último, podemos pasar a extrapolar esos cálculos a problemas que no están a su alcance de forma directa, empezando por los más concretos hasta llegar a problemas con una solución más abierta:

- ¿Cuántos segundos de vida llevarás a medianoche de hoy?
- ¿Cuántos litros de agua beberás a lo largo de tu vida?
- ¿Cuántos pelos tiene una persona en la cabeza?
- Si pusiésemos esos pelos uno detrás de otro, ¿qué longitud alcanzaría?
- ¿Cuál es el volumen de CO_2 exhalado por toda la población mundial al cabo de un día?

No queremos dejar pasar la oportunidad de recordar que los problemas de Fermi pueden estar referidos a cualquier disciplina y que su dificultad estará determinada por los conocimientos previos necesarios para resolverlos:

- (Química) ¿Cuál será el número de átomos que tiene un cuerpo humano?
- (Física) ¿La energía de cuántos yogures necesitamos para subir al Everest?

Por último, otra forma de introducir los problemas de Fermi en el ámbito escolar sería organizar un concurso individual o por equipos, bien como una prueba específica durante un evento concreto, como puede ser algún día especial dedicado a las ciencias o a las matemáticas, o bien organizado durante un periodo más largo de tiempo, por ejemplo

publicado como una sección de la revista del centro o a lo largo del curso escolar con preguntas de periodicidad semanal, mensual, ..., cuyo ganador sería el que más puntuación acumule a lo largo del proceso. Como caso concreto, veamos la prueba sobre resolución de problemas de Fermi que se realiza en la *Science Olympiad*⁹, en los EE.UU. En dicha prueba sólo se responde con el orden de magnitud de la solución, es decir, si en un problema se obtiene como resultado 3×10^7 , la respuesta sería 7. Si la mantisa es mayor o igual que 5 se le suma 1 al orden. Así, si se obtiene $5,03 \times 10^3$, la respuesta sería 4. De esta forma, se otorgan 5 puntos si la respuesta es igual a la solución propuesta (es decir, si se acierta el orden), 3 puntos si se queda a un orden por encima o por debajo de la solución, 1 punto si se queda a dos órdenes y 0 puntos en otro caso. La puntuación total será la suma de todas las puntuaciones obtenidas en las diversas preguntas de las que consta la prueba. Como ya señalamos, en este contexto sí es necesario tener una solución previa con la que comparar las soluciones de los participantes. Pueden encontrarse fácilmente numerosos ejemplos, pero podemos empezar por los que encontramos resueltos paso a paso en el libro de Weinstein (2008) que figura en la bibliografía y otros, con la solución únicamente, en la web www.fermiquestions.com.

REFERENCIAS

- Allison, S. K., Segré, E., Anderson, H. L. (1955). Enrico Fermi, 1901 – 1954. *Physics today*. 8 (1), 9.
- Cajaraville, J.A. (2007). Estimación y aproximación. En Domínguez Castiñeiras, J.M. (ed.) *Actividades para la Enseñanza en el Aula de Ciencias. Fundamentos y Planificación*. Santa Fe (Argentina). Ediciones Universidad Nacional del Litoral. 35-77.
- Fermi, L. (1954). *Átomos en mi familia. Mi vida con Enrico Fermi*. Alcoy: Marfil.
- Poundstone, W. (2012). *Are You smart enough to work at Google?* Reino Unido: Oneworld.
- Poundstone, W. (2007). *How would you move Mount Fuji?* Reino Unido: Time Warner Book Group.
- Von Baeyer, H. C. (1988) . How Fermi would have fixed it. *The Sciences*. 28 (5), 2-4.
- Weinstein, L., Adam, J. A. (2008). *Guesstimation. Solving the world's problem on the back of a cocktail napkin*. Princeton: Princeton University Press.

9. La *Science Olympiad* es una competición por equipos que se desarrolla a través de 23 pruebas de diversas disciplinas científicas en la que toman parte más de 6400 equipos de todos los EE.UU. Una de esas pruebas es la resolución de problemas de Fermi, correspondiente a alumnos de *High School* (15 a 19 años). Más información en www.soinc.org.

Demostraciones de la infinitud de los números primos

Enrique de Amo

Departamento de Matemáticas. Universidad de Almería

Manuel Díaz Carrillo

Departamento de Análisis Matemático. Universidad de Granada

Juan Fernández Sánchez

I.E.S. "Valle del Almanzora" (Cantoria), Almería

Resumen: Es bien conocido, gracias a Euclides, desde hace ya más de veintitrés siglos, el hecho de que existen infinitos números primos, y a pesar de esto, sigue vigente el interés por conocer diferentes demostraciones de este resultado. El objetivo de este trabajo es presentar demostraciones conocidas sobre dos resultados principales acerca de los números primos (el de su infinitud y el de la divergencia de la serie de los recíprocos). Además, aportamos otras demostraciones nuevas, de modo que sirva tanto al edificio teórico de las matemáticas como a su didáctica, facilitando nuevos accesos a sus demostraciones, por otras vías.

Palabras clave: número primo, serie divergente, serie armónica

Proofs of the infinity of prime numbers

Summary: It is thanks to Euclid, that the existence of infinity prime numbers has been a well known fact for 23 centuries and never the less, there is still great interest in finding new evidence of this outcome. The aim of this paper is to present already known proofs of the main results concerning prime numbers (their infinity and the divergence of the reciprocal number series). Furthermore, we contribute new evidence that will support both the theoretical construction and the didactics of mathematics, providing new access to its evidence through other paths.

Keywords: prime number, divergent series, harmonic series

INTRODUCCIÓN

Los números primos son, sin duda alguna, uno de los objetos de estudio que mayor fecundidad ha podido aportar al quehacer matemático a lo largo de toda su historia. Hoy en día se mantiene como un campo de plena vigencia por sus aplicaciones en ámbitos como son la criptografía o la teoría de códigos.

El objetivo de este trabajo es presentar demostraciones conocidas sobre dos resultados principales acerca de los números primos (el de su infinitud y el de la divergencia de la serie de los recíprocos). Además, en algunos casos, aportamos otras demostraciones nuevas, de modo que sirva tanto al edificio teórico de las matemáticas como a su didáctica, facilitando nuevos accesos a sus demostraciones, por otras vías. Es bien conocido, gracias a Euclides, desde hace ya más de veintitrés siglos, el hecho de que *existen infinitos números primos*, y a pesar de esto, sigue vigente el interés por conocer diferentes demostraciones de este resultado, ya que aportan un doble enriquecimiento: el científico y el educativo.

Desde una perspectiva científica, conocer y analizar nuevas demostraciones de un teorema facilita una mejor comprensión del resultado y permite estudiarlo desde distintos puntos de vista, analizando el papel y las características de las herramientas matemáticas que se han utilizado para tal fin.

El segundo de los motivos que hace que tenga gran interés el estudio de nuevas demostraciones de un resultado conocido es su potencial educativo y la posibilidad de utilizar estas herramientas en el aula. Dependiendo del nivel educativo y de los fines que se persigan en cada momento, si disponemos de diferentes demostraciones de un resultado, podemos presentarlas para su estudio y análisis o bien para mostrar la utilidad de los nuevos conocimientos que el alumnado va adquiriendo a la hora de abordar problemas estudiados anteriormente. También pueden ser utilizadas como un recurso al plantear al estudiante un problema conocido pidiéndole que ahora lo estudie desde perspectivas diferentes a las que ha tenido anteriormente, relacionando y conectando conceptos que pertenecen a ramas del conocimiento matemático aparentemente distantes o que han tenido un origen muy diferente.

En la primera sección hacemos una recopilación de diversas demostraciones de dicho resultado, aunque aquí no están recogidas todas las que hemos encontrado en la literatura. Por ejemplo, en los libros de Pollack y Ribenboim se encuentran dos de ellas, que no reproducimos porque las herramientas que utilizan hacen recomendable no añadirlas en el perfil de este trabajo. El lector interesado siempre puede consultar dichas referencias. También, hay varias demostraciones que, con el añadido “siguiendo a”, no aparecen de forma explícita, pero se obtienen fácilmente siguiendo esas ideas.

Así mismo, debemos señalar que al final de esta primera sección aportamos tres demostraciones que, hasta donde nosotros conocemos, no han sido publicadas y presentan algunos aspectos novedosos, aunque los lectores familiarizados con la Teoría de Números encontrarán que, en todas ellas, hay ideas que aparecen en la literatura relativa a este campo.

Somos conscientes de que sería necesario demostrar algunas de las afirmaciones que se harán en algún momento, como pueden ser las relativas a ciertas convergencias, al

teorema de factorización única o la misma irracionalidad de π^2 , entre otras. No se reproducen aquí esas demostraciones para no alargar el trabajo en exceso, de modo que evitemos lo que podría llevar a desviar la atención de la idea central que se persigue. No obstante, en la literatura sobre el tema se encuentran demostradas habitualmente esas afirmaciones que aquí no lo están.

Euler, en 1737, en un artículo que inició un nuevo camino en la Teoría de Números, demostró que *la serie de los inversos de los números primos es divergente*. Desde entonces hasta la actualidad han aparecido diferentes demostraciones de este teorema. En la segunda sección recogemos todas las demostraciones que hemos encontrado de dicho resultado; y, en particular, aportamos dos nuevas.

EL NÚMERO DE PRIMOS ES INFINITO

Notación y convenio. Supondremos, para las demostraciones que siguen en esta sección, que sólo existe un número finito r de números primos. A estos números los notaremos en orden creciente por p_1, p_2, \dots, p_r . La letra p será reservada, habitualmente para primos, y si no se explicita el subíndice, designará a uno cualquiera de ellos. A veces, se utilizará p , sin lugar a confusión, como índice para sumatorias y productos.

Los siguientes convenios también los tendremos en cuenta en todo lo que sigue: C siempre designará a una constante. En ocasiones, aparecerá con subíndices o primas. Con la notación ya indicada arriba, $N := p_r!$ y $R := p_1, p_2, \dots, p_r$. Con $[x]$ notamos, como se acostumbra, al mayor de los enteros menor o igual que x . Aquí (m, n) es el máximo común divisor de m y n .

Demostración 1ª [Euclides, 300 A.C., aprox.]

Consideremos el valor $n = R + 1$. (En algunos textos podemos encontrar que el razonamiento se hace para $n = N + 1$.) Al dividir n entre cualquiera de los primos p_i resultará un resto igual a 1. Por tanto, n no es divisible por ningún primo. Como esto es absurdo, hemos de concluir que el número de primos ha de ser infinito.

Observemos que el número $m!+1$ no ha de ser necesariamente primo. El número primo más grande conocido de este tipo (cuando se escribe esta nota) es el $26951!+1$.

Si se representa por $m\#$ al producto de todos los primos menores o iguales a m



Euclides.

el número $m\# + 1$ puede ser un no primo. El mayor de los conocidos de este tipo es $392113\#+1$.

Demostración 2ª [Goldbach, 1730]

Sea $n_1 = 3$ y definamos por recurrencia,

$$n_j = 2 + \prod_{1 \leq i < j} n_i,$$

para $j > 1$. Entonces, tenemos que:

- 1) Todo n_i es impar.
 - 2) Cuando $j > i$, entonces $n_j \equiv 2 \pmod{n_i}$.
 - 3) $(n_i, n_j) = 1$ para $i \neq j$.
- En consecuencia, el número de primos es infinito.

Demostración 3ª [Euler, publicada póstumamente]

La función de Euler φ asigna a cada número entero $n > 1$ el número de primos relativos con él que son menores que n . Es conocida la fórmula

$$\varphi(n) = \prod_{p|n} (p - 1).$$

Aplicando esta expresión a R tenemos que

$$\varphi(R) = \prod_{i=1}^r (p_i - 1).$$

Como este producto es mayor que 1, concluimos que hay un número primo distinto de los p_i . Por tanto, en cualquier conjunto finito de primos nunca están todos.

Demostración 4ª [Euler, 1737]

La realizamos con la ayuda de la función ζ de Riemann, definida para los números complejos con parte real mayor que 1 mediante la fórmula



Euler.

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s},$$

Por otra parte, se tiene

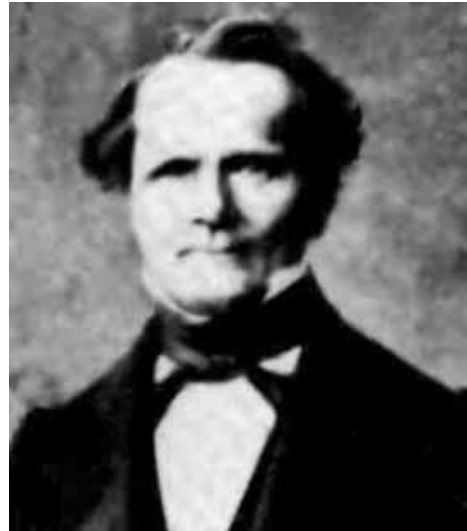
$$\zeta(s) = \prod_p (1 - 1/p^s)^{-1}.$$

Si el número de primos fuese finito, entonces la función de la izquierda sería analítica en el semiplano de los complejos con parte real positiva. Por tanto, existiría $\lim_{s \rightarrow 1^+} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ lo cual es absurdo, pues es bien conocido que la serie armónica diverge. Consecuentemente, el número de primos no puede ser finito.

Demostración 5ª [Kummer, 1878]

Consideremos los valores N y $N - 1$. Llamemos p_i a alguno de los primos que ha de dividir a $N - 1$. Puesto que p_i también divide a N , esto implica que p_i debe dividir a su diferencia: $N - (N - 1) = 1$. Esta conclusión es absurda, de donde se sigue que el número de primos ha de ser infinito.

Los mayores primos conocidos restando 1 son $103040! - 1$ y $843301\# - 1$.



Kummer.

Demostración 6ª [Perrot, 1881]

Bajo las hipótesis de esta sección, hay 2^r números libres de cuadrados. Y dado un valor n tenemos las desigualdades:

$$n \leq 2^r + \sum_{i=1}^r \frac{n}{p_i^2} < 2^r + n \sum_{i=2}^{\infty} \frac{1}{i^2} = 2^r + Cn$$

con $C < 1$. Pero, esto es absurdo para un valor suficientemente grande de n . Esta contradicción nos permite afirmar que el número de primos es infinito.

Demostración 7ª [Stieltjes, 1890]

Para una descomposición $R = bd$, cualquier p_i divide uno de los valores b o d . Pero no puede dividir ambos a la vez, por lo que p_i no divide a su suma; es decir, $b + d$ no es divisible por ningún primo. Esta última afirmación es absurda, y concluimos que existen infinitos números primos.



Stieltjes.

Demostración 8ª [Thue, 1897]

Sea m un entero positivo cualquiera. Siempre es posible descomponerlo en producto de potencias de primos en la forma $m = 2^{e_1} \dots p_r^{e_r}$ donde cada e_i depende de m . Si hacemos $e_i = 0, \dots, n$, para $i = 1, \dots, r$, obtenemos $(n + 1)^r$ posibilidades de expresarlo. Todos los valores menores o iguales a 2^n tienen, en su descomposición factorial, a lo sumo factores primos contando multiplicidades. Por tanto, $2^n < (n + 1)^r$. Tomemos $n = 2k^2$ con k verificando la condición $1 + 2k^2 < 2^{2k}$, de donde $(1 + 2k^2)^k < (2^{2k})^k$. Si ahora unimos las dos desigualdades anteriores:

$$(1 + 2k^2)^k < 2^{2k^2} < (1 + 2k^2)^r.$$

Pero esto significa que $r > k$ para cualquier valor de k , lo que es absurdo. Por tanto, deducimos que el número de primos ha de ser infinito.

Demostración 9ª [Auric, 1915]

Siguiendo con la notación utilizada, hagamos $n = 2^t \dots p_r^t$. Si consideramos $v = p_r^t$ para los valores $n \leq v$ se verifica la desigualdad $e_i \leq t \log_2 p_r$. En consecuencia, la cantidad de estos números n es menor o igual que $(t \log_2 p_r + 1)^r$. Se tiene, por tanto, que

$$p_r^t = v \leq (t \log_2 p_r + 1)^r$$

Pero esto no puede ser cierto cuando t toma un valor suficientemente grande: contradicción; y en consecuencia, se sigue la infinitud del conjunto de los números primos.

Demostración 10ª [Braun, 1897; Metrod, 1917]

Sea $Q_i = R/p_i$. Por tanto, p_i no divide a Q_i pero sí a los demás Q_j . Por esta razón, no divide a la suma de todos ellos. En consecuencia, $Q_1 + Q_2 + \dots + Q_r$ no es divisible por ningún primo, lo cual es imposible. Volvemos a tener una contradicción que garantiza que el número de primos es infinito.

Demostración 11ª [Pólya]

Consideremos el número de Fermat $F_n = 2^{2^n} + 1$. Estos números son primos entre sí. En efecto, puesto que $F_m - 2 = F_0 F_1 \cdots F_{m-1}$ si F_m y F_n no fuesen primos entre sí, habría un primo p , que dividiría a ambos. Si $n < m$ entonces p divide a $F_m - 2 = F_0 F_1 \cdots F_{m-1}$ y a F_m por lo que también dividirá su diferencia, que es 2. Por tanto, tenemos que $p = 2$. Pero F_m es impar y 2 no lo puede dividir, por lo que estos números son primos dos a dos; es decir, los divisores primos de cada uno de ellos no dividen a ninguno de los demás. En consecuencia, el número de primos es infinito. El lector habrá observado que esta demostración es la misma que la segunda. Su presencia aquí se debe a que la forma de presentarla es diferente y su autor la desconocía.



Polya.

Demostración 12ª [Siguiendo a Erdős, 1938]

El número de números libres de cuadrados es 2^r . Por otra parte, el número de cuadrados menores que n es menor o igual que \sqrt{n} . Puesto que un número menor que n se puede expresar como el producto de un cuadrado inferior a n y un número libre de cuadrados, tenemos que $n \leq 2^r \sqrt{n}$. Esto no puede ocurrir para un valor de n suficientemente grande. Esta contradicción nos conduce a que no puede haber un número finito de primos.



Erdős.

Demostración 13ª [Fürstenberg, 1955]

Vamos a dotar al conjunto \mathbb{Z} de una topología. Para ello, definamos $A_{m,n}$ como la progresión aritmética $m + n\mathbb{Z}$ con $n \neq 0$. Tomemos como base de abiertos al conjunto de progresiones $A_{m,n}$. Evidentemente, $A_{m,n}$ es un abierto. También es un conjunto cerrado, al ser el complementario del abierto resultante de la unión de los $A_{d,n}$ con $d \neq m$. Ahora, bajo la

hipótesis de ser el número de primos finito, el conjunto $\bigcup_{i=1}^r A_{0,p_i}$ será un cerrado, y su

complementario será abierto. Pero esto no es posible, ya que se trata del conjunto $\{1, -1\}$. Esta contradicción nos permite deducir que el número de primos es infinito.

Demostración 14ª [Harris, 1956]

Elijamos dos valores tales que $(b_0, b_2) = 1$ y definamos la fracción continua $b_0 + \frac{1}{b_1 + \frac{1}{b_2 + \dots + \frac{1}{b_k}}}$ donde $b_k = A_0 A_1 \dots A_{k-3}$. Como las convergentes de una fracción continua vienen dadas por la relación $A_0 = 1, A_1 = b_0, A_n = b_n A_{n-1} + A_{n-2}$ tenemos que $A_k = A_0 A_1 \dots A_{k-3} A_{k-1} + A_{k-2}$. Demostraremos que los primeros valores de A_n son coprimos. Es cierto para $n = 2$; lo suponemos cierto para $k - 1$: será $(A_k, A_i) = 1$, ya que A_i sólo divide a uno de los dos sumandos. Es decir, los divisores primos de cada uno de ellos no dividen a ninguno de los demás, por lo que el número de primos ha de ser infinito.

Se ha reproducido la demostración utilizando fracción continua como hace el autor, pero no se usa ninguna propiedad especial de esta expresión de los números reales. Por tanto, puede también hacerse la demostración utilizando la definición de b_k y A_k sin que aparezcan fracciones continuas.

Demostración 15ª [Wunderlich, 1965]

Esta demostración se basa en el uso de los números de Fibonacci. Como es bien conocido, se trata de la sucesión definida de forma recurrente por

$$F_0 = F_1 = 1 \text{ y } F_n = F_{n-1} + F_{n-2};$$

(no confundir éstos con los números de Fermat de la demostración 11ª) y la propiedad utilizada es

$$F_{(m,n)} = (F_m, F_n).$$

Si existiese un número finito de números primos, entonces los números F_{p_1}, \dots, F_{p_r} habrían de ser primos dos a dos y, por tanto, primos. Pero, si tenemos en cuenta que $F_{19} = 4181 = 113 \times 37$ obtenemos una contradicción que nos lleva a afirmar que el número de primos no es finito.

De modo similar, se puede obtener la demostración de la infinitud de números primos utilizando otras sucesiones. A continuación, se proponen estas cuatro:

Propuesta 1. Utilizar la sucesión de números de Mersenne, esto es, los números de la forma $2^n - 1$.

Propuesta 2. La sucesión definida recurrentemente por: $a_1 = 1, a_2 = 2$ y

$$\begin{cases} a_{2n} = a_2 a_4 \dots a_{2n-2} + a_1 a_3 \dots a_{2n-1} \\ a_{2n-1} = a_2 a_4 \dots a_{2n-1} + a_1 a_3 \dots a_{2n} \end{cases}$$

Propuesta 3. Una sucesión satisfaciendo: $a_1 > d \geq 1$, $a_n - d = a_{n-1}(a_{n-1} - d)$ y $(a_1, d) = 1$.

Propuesta 4. La sucesión definida por: a_1 un número impar y $a_n = a_{n-1}^2 - 2$.

Demostración 16^a [Dressler, 1975] (Esencialmente, igual a la de Perrot)

Supongamos, como siempre, que sea r el cardinal finito de números primos. En consecuencia, el número total de números libres de cuadrados ha de ser 2^r . Para un valor n , el número de términos menores o iguales que él y divisibles por p_i^2 es menor o igual que n/p_i^2 . Por tanto, $2^r \geq n \left(1 - \sum_{i=1}^r \frac{1}{p_i^2}\right) = Cn$, con C positivo. Al ser r constante, la desigualdad $2^r > Cn$ sólo es posible para un número finito de valores de n . Hemos llegado a un absurdo consecuencia de suponer finito el número de primos.

Demostración 17^a [Siguiendo a Nair, 1982]

Sea

$$\begin{aligned}
 I_n &= \int_0^1 x^n (1-x)^n dx = \int_0^1 \sum_{r=0}^n (-1)^r \binom{n}{r} x^{n+r} dx \\
 &= \sum_{r=0}^n (-1)^r \binom{n}{r} \frac{1}{n+r+1}.
 \end{aligned}$$

Multiplicamos I_n por d_{2n+1} donde d_m es el mínimo común múltiplo de los m primeros números.

Como $x(1-x) \leq 1/4$ e $I_n > 0$ tenemos que $1 \leq (1/4)^n d_{2n+1}$, de donde

$$4^n \leq d_{2n+1} \leq \prod_{i=1}^r p_i^{\log(2n+1)/\log p_i} \leq \prod_{i=1}^r p_i^{\log(2n+1)} = C^{\log(2n+1)}$$

Pero, esta expresión sólo es cierta para un número finito de valores de n . Por tanto, obtenemos una contradicción al suponer que el número de primos sea finito.

Demostración 18^a [Hacks]

Puesto que tenemos la igualdad $\prod_p (1 - 1/p^2)^{-1} = \pi^2/6$, si el número de primos es finito, el producto inicial es racional. Sin embargo, es conocido que π^2 es irracional, por lo que deducimos que el número de primos ha de ser infinito.

Demostración 19ª [Pollack]

Haciendo uso de la célebre evaluación de Euler de las series $\zeta(k) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k}$ con k un entero positivo, podemos escribir la igualdad: $\frac{\zeta(2)^2}{\zeta(4)} = 5/2$. Por otra parte, utilizando la igualdad producto para ζ , escribimos $\frac{\zeta(2)^2}{\zeta(4)} = \prod_p \frac{p^2+1}{p^2-1}$

Suponiendo que el número de primos sea finito, tendremos que $\frac{5}{2} = \frac{5}{3} \frac{10}{8} \frac{26}{24} \dots = \frac{M}{S}$. Puesto que 3 divide a S , debe hacerlo también con M , por lo que 3 divide a algún $p_i^2 + 1$ o, equivalentemente, $p_i^2 \equiv 2 \pmod{3}$. Pero esto último no es posible ya que $0^2 \equiv 0 \pmod{3}$; $1^2 \equiv 1 \pmod{3}$; $2^2 \equiv 1 \pmod{3}$. Esta contradicción nos muestra que el cardinal del conjunto de los números primos es infinito.

Demostración 20ª (Imitación)

A partir de la doble expresión:

$$\prod_p \frac{\zeta(8)}{\zeta(4)\zeta(2)^2} = 8/35, \quad \prod_p \frac{\zeta(8)}{\zeta(4)\zeta(2)^2} = \prod_p \frac{(p^2-1)^2}{p^4+1},$$

si el número de primos fuese finito, el último producto sería igual a un racional, digamos M/S (con M y S no necesariamente primos entre sí). De ahí, deducimos que $35S = 8M$, por lo que 5 divide a algún $p^4 + 1$ o equivalentemente a $p^4 \equiv 4$. Pero esto, por el teorema pequeño de Fermat, no es posible. (También se puede comprobar directamente.) De este modo, volvemos a obtener una contradicción.

Damos a continuación tres demostraciones nuevas de la infinidad del número de primos.

Demostración 21ª

Combinando las fórmulas de Stirling, $n! \simeq e^{n \ln n - n + \frac{1}{2} \ln(2\pi n)}$ y de Legendre,

$n! = \prod_p p^{\lfloor \frac{n}{p} \rfloor + \lfloor \frac{n}{p^2} \rfloor + \lfloor \frac{n}{p^3} \rfloor + \dots}$ tenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} n^n e^{-n} < n! &= \prod_p p^{\lfloor \frac{n}{p} \rfloor + \lfloor \frac{n}{p^2} \rfloor + \lfloor \frac{n}{p^3} \rfloor + \dots} \leq \prod_p p^{\frac{n}{p} + \frac{n}{p^2} + \frac{n}{p^3} + \dots} \\ &= \left(\prod_p p^{\frac{1}{p} + \frac{1}{p^2} + \frac{1}{p^3} + \dots} \right)^n \leq C^n. \end{aligned}$$

La desigualdad $n^n e^{-n} < C^n$ es equivalente a $\frac{n}{C} < e$. Esto último sólo es posible para un número finito de valores de n . Por ello, concluimos que el número de primos es infinito.

Demostración 22^a

Utilizando la fórmula de Legendre, tenemos:

$$\begin{aligned} \binom{2n}{n} &= \frac{(2n)!}{n!n!} = \frac{\prod_p p^{\lfloor \frac{2n}{p} \rfloor + \lfloor \frac{2n}{p^2} \rfloor + \lfloor \frac{2n}{p^3} \rfloor + \dots}}{\prod_p p^{2\lfloor \frac{n}{p} \rfloor + 2\lfloor \frac{n}{p^2} \rfloor + 2\lfloor \frac{n}{p^3} \rfloor + \dots}} \\ &= \prod_p p^{\lfloor \frac{2n}{p} \rfloor - 2\lfloor \frac{n}{p} \rfloor + \lfloor \frac{2n}{p^2} \rfloor - 2\lfloor \frac{n}{p^2} \rfloor + \lfloor \frac{2n}{p^3} \rfloor - 2\lfloor \frac{n}{p^3} \rfloor + \dots} \\ &\leq \prod_p p^{\log_p(2n)} \leq \prod_p 2n = 2^r n^r \end{aligned}$$

Si aplicamos la fórmula de Stirling al primer término, tenemos que para valores grandes de n , $2^n = O(n^r)$. Pero esto último sólo es posible para un número finito de valores de n . Concluimos entonces que el cardinal del conjunto de los números primos es infinito.

Demostración 23^a

Consideraremos el conjunto de los naturales n tales que $1 \leq n \leq R$. En él asignamos la probabilidad uniforme: todo elemento tiene la misma probabilidad $1/R$. Tomamos el suceso P_i que consta de los múltiplos de p_i , y su probabilidad es $1/p_i$. Puesto que P_i y P_j son independientes entre sí cuando $i \neq j$, la probabilidad de no ser divisible por ningún primo es $\prod_p (1 - 1/p) = 1/R$ (el único valor que no es divisible por un primo es 1).

Repetiendo esta idea en el conjunto $1 \leq n \leq R^2$, tenemos la identidad $\prod_p (1 - 1/p) = 1/R^2$. Por tanto, $1/R = 1/R^2$. Pero esto es falso, salvo que sea $R = 1$. Como esto último no puede ocurrir, deducimos que existen infinitos números primos.

LA SUMA DE LA SERIE DE LOS INVERSOS DE LOS PRIMOS NO EXISTE

Antes de comenzar con las demostraciones que presentamos, es necesario recordar que si los términos a_n son todos del mismo signo, la convergencia a un número no nulo de un producto infinito de la forma $\prod_n (1 + a_n)$ es equivalente a la convergencia de la serie $\sum_n a_n$. En particular, son equivalentes la convergencia de $\prod_p (1 + \frac{1}{p})$ y la de $\sum_p \frac{1}{p}$. Como es

usual, por $\pi(k)$ notaremos al cardinal del conjunto de los números primos menores o iguales que k .

Demostración 1ª [Euler, 1737]

Partiendo de la desigualdad $\prod_{p \leq x} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{-1} > \sum_{n \leq x} \frac{1}{n} > \ln x$ se sigue la relación

$$-\sum_{p \leq x} \ln\left(1 - \frac{1}{p}\right) > \ln \ln x,$$

donde el término de la derecha diverge cuando $x \rightarrow \infty$. Como, además, se tiene $0 < \ln(1 - 1/p) + 1/p < \frac{c}{p}$ tenemos la divergencia de la serie de los inversos de los primos.

Imitación. La convergencia de $2 \sum_p \frac{1}{p}$ es equivalente a la de $\prod_p \left(1 + \frac{2}{p}\right)$.

Podemos escribir las siguientes desigualdades:

$$\begin{aligned} \prod_{p \leq p_n} \left(1 + \frac{2}{p}\right) &> \prod_{p \leq p_n} \left(1 + \frac{1}{p} + \frac{1}{p(p-1)}\right) \\ &= \prod_{p \leq p_n} \left(1 + \frac{1}{p} + \frac{1}{p^2} + \dots\right) > 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{p_n}. \end{aligned}$$

Pero, el último término es, aproximadamente, $1/p_n$. Por tanto, la serie inversa de los primos no converge.

Demostración 2ª [Tras los pasos de Tchebyshev, 1851]

Esta es una demostración que aparece en muchos textos y está basada en una de las desigualdades de Tchebyshev: $\pi(k) > C_1 k / \ln k$.

Haciendo $k = p_n$, se deduce

$$\frac{p_n}{\ln p_n} < C_2 n \Rightarrow p_n \leq C_2 n \ln p_n \quad (a)$$

Si tenemos en cuenta que $\ln x < \sqrt{x}$ obtenemos $\ln p_n < C_3 \ln n$. Sustituyendo en la desigualdad (a), tenemos $p_n < C_4 n \ln n$. Ahora, puesto que $\sum \frac{1}{n \ln n}$ diverge, también lo hace $\sum \frac{1}{p_n}$.

Demostración 3ª [Erdős, 1938]

Si la serie $\sum_p \frac{1}{p}$ converge, podemos encontrar un número b , verificando $\sum_{p \geq b} \frac{1}{p} < 1/2$.

Para la demostración, introducimos los siguientes conjuntos:

$$M_x = \{n \leq x : \text{todos sus divisores primos son menores que } b\}$$

y

$$N_x = \{n \leq x : \text{admite un divisor primo mayor que } b\}.$$

Entre sus cardinales se da la siguiente relación $Card(N_x) = x - Card(M_x)$. Por otra parte, la cantidad de números menores o iguales que x divisibles por p es $\lfloor x/p \rfloor$. Puesto que $Card(N_x) \leq \sum_{p \geq b} \lfloor \frac{x}{p} \rfloor \leq \sum_{p \geq b} \frac{x}{p} \leq x/2$ deducimos que $x - Card(M_x) \leq x/2$; y, por tanto, $x/2 \leq Card(M_x)$.

Si $n \in M_x$, entonces $n = k^2m$, con m libre de cuadrados y perteneciente a M_x . Puesto que $k \leq \sqrt{n} \leq \sqrt{x}$ y la cantidad de números libres de cuadrados de M_x es menor o igual que 2^b se sigue que $Card(M_x) \leq 2^b \sqrt{x}$ y, por tanto, $x/2 \leq 2^b \sqrt{x}$.

Esto último es falso para valores suficientemente grandes de x . Por tanto, $\sum_p \frac{1}{p}$ no converge.

Demostración 4ª [Bellman, 1943]

Si la suma de la serie fuese finita $\sum_p \frac{1}{p} < \infty$ existiría un valor b verificando $\sum_{p \geq b} \frac{1}{p} < \alpha < 1$; por esto, deducimos que $\left(\sum_{p \geq b} \frac{1}{p}\right)^2 < \alpha^2$. En general, tenemos que $\left(\sum_{p \geq b} \frac{1}{p}\right)^n < \alpha^n$. De esas aco-
taciones se sigue esta otra:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{p \geq b} \frac{1}{p}\right)^n < \sum_{n=1}^{\infty} \alpha^n.$$

Ahora bien, la última serie es una progresión geométrica convergente. Consecuente-
mente, también habrá de ser finita la expresión

$$\left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{p \geq b} \frac{1}{p}\right)^n\right) \frac{1}{(1 - \frac{1}{2}) \cdots (1 - \frac{1}{s})},$$

donde el producto es sobre los primos y s es el mayor primo menor que b .

Sin embargo, este producto es, nuevamente, la serie $\sum_{n \in \mathbb{Z}^+} \frac{1}{n}$, que, como bien sabemos, diverge. Concluimos, por tanto, que la suposición inicial de convergencia no puede ser cierta.

Demostración 5ª [Dux, 1956]

Volvamos a suponer que $\sum_{p>b} \frac{1}{p} < \frac{1}{2}$ y definamos los conjuntos:

$$\begin{aligned} M &= \{n : \text{todos sus divisores primos son menores que } b\} \\ S &= \{n : \text{todos sus divisores primos son mayores que } b\} \\ Q &= \{n : \text{admite divisores primos mayores y menores que } b\} \end{aligned}$$

Tenemos dos series cuyas sumas son finitas:

$$\sum_{n \in M} \frac{1}{n} = \prod_{p \leq b} \frac{1}{(1 - \frac{1}{p})}$$

y

$$\sum_{m \in S} \frac{1}{m} \leq \sum_{p>b} \frac{1}{p} + \left(\sum_{p>b} \frac{1}{p} \right)^2 + \dots < 1.$$

Como consecuencia de que estas dos series sean convergentes, también lo habrá de ser:

$$\sum_{n \in Q} \frac{1}{n} = \sum_{n \in M} \frac{1}{n} \sum_{m \in S} \frac{1}{m}.$$

Finalmente, al ser las tres series anteriores convergentes, deducimos que lo es la serie armónica

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}^+} \frac{1}{n} = 1 + \sum_{n \in Q} \frac{1}{n} + \sum_{n \in M} \frac{1}{n} + \sum_{n \in S} \frac{1}{n},$$

pero esto nos lleva a una contradicción; y, por tanto, debemos concluir que la serie de los inversos de los primos es divergente.

Demostración 6ª [Moser, 1958]

Usando la notación $R(x) = \sum_{p \leq x} \frac{1}{p}$ la demostración se basa en el siguiente resultado: Si existe $\sum_p \frac{1}{p}$, entonces $\lim_{x \rightarrow \infty} \pi(x)/x = 0$.

Podemos hacer estos cálculos:

$$\pi(x) = 1(R(1) - R(2)) + 2(R(2) - R(3)) + \dots + x(R(x) - R(x-1)),$$

de donde

$$\pi(x)/x = R(x) - ((R(0) + R(1) + \dots + R(x-1))/x);$$

y, por la sumabilidad de Césaro, los dos términos de la derecha tienen el mismo límite.

Si la serie $\sum \frac{1}{p}$ fuera convergente, tendrían que existir un n de modo que $\sum_{p>n} \frac{1}{p} < 1/2$ y un m tal que $\pi(n!m)/m < 1/2$. Con ellos, definamos $T_i = in! - 1$, para cada $i = 1, \dots, m$. Los factores primos de T_i son mayores que n . Si p es un primo común a T_i y T_j entonces p divide $j - i$; y, por tanto, p habrá de dividir, como máximo, a $m/p + 1$ de los T_i . Pero, como cada T_i tiene, al menos, un primo entre n y $n!m$, deducimos la desigualdad $\sum_{n!m > p > n} \left(\frac{m}{p} + 1\right) \geq m$, que, a su vez, implica $\sum_{p>n} \frac{1}{p} + \frac{\pi(n!m)}{m} \geq 1$. Ahora bien, esta última expresión es contradictoria con las dos primeras desigualdades.

Demostración 7ª [Clarkson, 1966]

Si la serie $\sum \frac{1}{p}$ es convergente, al igual que antes, tomemos b verificando $\sum_{p>b} \frac{1}{p} < 1/2$ y definamos $Q = \prod_{p \leq b} p$. En estas condiciones podemos afirmar que los factores de $1 + iQ$ son todos mayores que b y, por tanto,

$$\sum_{i=1}^r \frac{1}{1+iQ} < \sum_{p>b} \frac{1}{p} + \left(\sum_{p>b} \frac{1}{p}\right)^2 + \left(\sum_{p>b} \frac{1}{p}\right)^3 + \dots < \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j} = 1.$$

Pero esto no es posible, pues en ese caso $\sum_{i \geq 1} \frac{1}{1+iQ}$ sería una serie convergente, y en consecuencia, se tendría la convergencia de la serie armónica. Concluimos así que la serie $\sum \frac{1}{p}$ es divergente.

Demostración 8ª [Vanden Eynden, 1980]

Consideremos, nuevamente, el conjunto

$$M = \{n : \text{todos sus divisores primos son menores que } b\} \cup \{1\}.$$

Utilizando la igualdad

$$\prod_{p \leq b} \left(1 + \frac{1}{p}\right) \sum_{n \in M} \frac{1}{n^2} = \sum_{n \in M} \frac{1}{n},$$

si hacemos tender b a infinito y suponemos que el producto infinito es convergente, tenemos la identidad

$$\prod_p \left(1 + \frac{1}{p}\right) \sum_{n \in \mathbb{Z}^+} \frac{1}{n^2} = \sum_{n \in \mathbb{Z}^+} \frac{1}{n}$$

Pero, ahora, la suposición de la convergencia de la serie $\sum_p \frac{1}{p}$ implicaría la de la serie armónica. Este absurdo nos lleva a afirmar que la serie de los inversos de los primos es divergente.

Las dos demostraciones siguientes son nuevas.

Demostración 9^a

Está basada en dos fórmulas para el factorial de un número. Se trata de las conocidas fórmulas de Stirling y de Legendre.

Con la ayuda de ellas podemos establecer que, para $n \geq 2$ existe $C_1 > 0$ verificando que

$$e^{C_1 n \ln n} \leq e^{n \ln n - n} \leq n! = \prod_p p^{\lfloor \frac{n}{p} \rfloor + \lfloor \frac{n}{p^2} \rfloor + \lfloor \frac{n}{p^3} \rfloor + \dots}$$

Utilizando lo anterior y sumando una serie geométrica tenemos

$$\begin{aligned} C_1 n \ln n &\leq \sum_{p \leq n} n \ln p \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{p^2} + \frac{1}{p^3} + \dots \right) \\ &\leq \sum_{p \leq n} n \frac{\ln p}{p} + n \sum_{p \leq n} \ln p \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{p^n} \\ &= \sum_{p \leq n} n \frac{\ln p}{p} + n \sum_{p \leq n} \frac{1/p^2}{1 - 1/p} \ln p \\ &= \sum_{p \leq n} n \frac{\ln p}{p} + n \sum_{p \leq n} \frac{1}{p(p-1)} \ln p. \end{aligned}$$

Puesto que $\sum_{d=2}^{\infty} \frac{1}{d(d-1)} \ln d$ es convergente, la última suma está acotada por C_2 . Esto nos conduce a la desigualdad

$$C_1 n \ln n \leq \sum_{p \leq n} n \frac{\ln p}{p} + C_2 n,$$

que la podemos reescribir así: $C_1 \ln n \leq \sum_{p \leq n} \frac{\ln p}{p} + C_2$.

Supongamos que $\sum_p \frac{1}{p}$ sea convergente. Entonces existirá un k tal que $\sum_{p \geq k} \frac{1}{p} < C_1/4$. Por tanto, ha de valer la relación:

$$\sum_{p \leq k} \frac{\ln p}{p} + \sum_{k < p \leq n} \frac{\ln p}{p} \leq C_3 + C_1 \frac{\ln n}{4}.$$

Ahora bien, dado que a partir de cierto valor de n se tiene que $C_2 + C_3 \leq C_1 \frac{\ln n}{4}$, se sigue que

$$C_1 \ln n \leq C_1 \frac{\ln n}{2} \Leftrightarrow C_1 \leq \frac{C_1}{2};$$

desigualdad evidentemente absurda que nos lleva a concluir que la serie $\sum_p \frac{1}{p}$ no es convergente.

Demostración 10ª

Suponiendo que exista $\sum_p \frac{1}{p} = k$, escribiremos

$$k_r = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{p_{r-1}} + \frac{1}{p_r} < k.$$

Vamos a estudiar e^{k_r} . Gracias al desarrollo en serie de la función exponencial, tenemos que

$$e^k > e^{k_r} = 1 + k_r + \frac{k_r^2}{2!} + \frac{k_r^3}{3!} + \dots > \sum_{n < p_r}^* \frac{1}{n},$$

donde * indica que la suma está tomada en los números enteros positivos libres de cuadrados (esto es, que todos los números primos en su factorización tienen exponente uno). Haciendo tender r hacia infinito obtenemos que la suma de los inversos de los enteros positivos libres de cuadrados $\sum_n^* \frac{1}{n}$ es convergente.

Pero es conocido que esa serie es divergente: de no ser así, puesto que la suma de los inversos de los cuadrados es finita, existiría el producto

$$\sum_n^* \frac{1}{n} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2},$$

lo que es equivalente a afirmar que la serie armónica converge. Por tanto, $\sum_p \frac{1}{p}$ ha de ser divergente.

Una bonita demostración, aunque errónea

La probabilidad de que un número no sea divisible por ningún primo es cero; pero también es $\prod_p \left(1 - \frac{1}{p}\right)$ por lo que $\prod_p \left(1 - \frac{1}{p}\right) = 0$ y, equivalentemente, $\sum \frac{1}{p}$ diverge.

Es conocido que no es posible definir una probabilidad P en \mathbb{Z}^+ verificando que $P(n\mathbb{Z}^+) = 1/n$. Utilizando una variación de esta idea, sí que es posible dar una demostración correcta de la divergencia de la serie.

Demostración 11ª [Pinasco]

Dado un subconjunto A de \mathbb{Z}^+ definimos $A(n) := \sum_{\substack{1 \leq a \leq n \\ a \in A}} 1$. Si existe $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{A(n)}{n}$, a este número lo llamaremos densidad de A .

Es sencillo comprobar que existe la densidad del conjunto de los números que no son múltiplos de los primeros primos y esta densidad es, exactamente, $\prod_{n=1}^k \left(1 - \frac{1}{p_n}\right)$. Suponiendo que existiese $\sum \frac{1}{p}$ tendríamos que esa densidad estaría acotada por $\sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{1}{p_n}$.

Con la suposición de la convergencia de $\sum \frac{1}{p}$ tendremos que:

- a) $\prod_{n=1}^k \left(1 - \frac{1}{p_n}\right) > \prod_p \left(1 - \frac{1}{p}\right) > \varepsilon > 0$, y
- b) es posible tomar k verificando que $\sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{1}{p_n} < \varepsilon$.

Pero estas conclusiones nos conducen a que

$$\varepsilon < \prod_{n=1}^k \left(1 - \frac{1}{p_n}\right) < \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{1}{p_n} < \varepsilon,$$

lo que, evidentemente, es absurdo y nos da, nuevamente, la divergencia de la serie $\sum \frac{1}{p}$ de los recíprocos de los primos.

AGRADECIMIENTOS

Este trabajo está financiado por el Ministerio de Ciencia e Innovación (España) bajo el Proyecto de Investigación número MTM2011-22394

REFERENCIAS

- Aldaz, J.M. y Bravo, A. (2003). *Euclid's argument on the infinitude of primes*. *Amer. Math. Monthly*, 110(2), 141-142.
- Abel, U. y Siebert, H. (1993). *Sequences with large numbers of prime values*. *Amer. Math. Monthly*, 100(2), 167-169.
- Bellman, R. (1943) *A note on the divergence of a series*. *Amer. Math. Monthly*, 50, 318-319.

- Bateman, P.T. y Horn, R.A. (1962). *A heuristic asymptotic formula concerning the distribution of prime numbers*. *Math. Comp.* 16, 363-367.
- Chapman, R. (2003). *Evaluating $\zeta(2)$* . Recuperado de la dirección <http://www.maths.ex.ac.uk/rjc/rjc.html>
- Chebyshev, P.L. (1851) *Sur la fonction qui détermine la totalité des nombres premiers inférieurs a une limite donnée. Mémoires présentés a l'Académie Impériale des Sciences de St. Petersbourg par divers Savants* 6, 141-157.
- Chebyshev, P.L. (1852) *Mémoire sur les nombres premiers*. *Journal de Mathématique pures et appliqués*, 17, 366-390.
- Clarkson, J.A. (1966). *On the series of prime reciprocals*. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 17, 541.
- Dressler, R.E. (1975). *A lower bound for $\pi(n)$* . *Amer. Math. Monthly*, 82, 151-152.
- Dux, E. (1956). *Ein kurzer Beweis der Divergenz der unendlichen Reihe $\sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{p_r}$* . *Elem. Math.*, 11, 50-51.
- Euler, L. (1737). *Variae observationes circa series infinites*. *Comm. Acad. Petropolitanae*, 9, 160-188.
- Erdős, P. (1938). *Über die Reihe $\sum \frac{1}{p}$* , *Mathematica Zutphen B*, 7, 1-2.
- Furstenberg, H. (1955). *On the infinitude of primes*. *Amer. Math. Monthly*, 62, 353.
- Golomb, S.W. (1959). *A connected topology for the integers*. *Amer. Math. Monthly*, 66, 663-665.
- Harris, V.C. (1956). *Another proof of the infinitude of primes*. *Amer. Math. Monthly*, 63, 711.
- Hemminger, R. (1966). *More on the infinite primes theorem*. *Amer. Math. Monthly*, 73, 1001-1002
- Hirschhorn, M.D. (2002). *There are infinitely many prime numbers*, *Austral. Math. Soc. Gaz.*, 29(2), 103.
- Mohanty, S.P. (1978). *The number of primes is infinite*. *Fibonacci Quart.*, 16(4), 381-384.
- Mohanty, S.P. (1979). *The number of primes is infinite*. *Bull. Math. Assoc. India*, 11(1-2), 62-68.
- Moser, L. (1958). *On the series $\sum \frac{1}{p}$* . *Amer. Math. Monthly*, 65, 104-105.
- Nair, M. (1982). *On Chebyshev-type inequalities for primes*. *Amer. Math. Monthly*, 89(2), 126-129.
- Pollack, P. (2004). *Not Always Buried Deep. Selections from Analytic and Combinatorial Number Theory 2003*. Recuperado de la dirección <http://www.princeton.edu/~ppollack/notes/notes.pdf>
- Ribenboim, P. (1996). *The new book of prime number records*. New York: Springer-Verlag.
- Rubinstein, M. (1993). *A formula and a proof of the infinitude of the primes*. *Amer. Math. Monthly*, 100, 388-392.
- Sierpiński, W. (1964). *Les binômes $x^2 + n$ et les nombres premiers*. *Bull. Soc. Roy. Sci. Liège* 33, 259-260.
- Vanden Eynden, Ch. (1980). *Proofs that $\sum 1/p$ diverges*. *Amer. Math. Monthly*, 87(5), 394-397.
- Wunderlich, M. (1965). *Another proof of the infinite primes theorem*. *Amer. Math. Monthly*, 72, 305.

Recreaciones matemáticas en la *Aritmética* (1512) de fray Juan de Ortega¹

Vicente Meavilla Seguí

*Departamento de Matemáticas.
Universidad de Zaragoza.*

Resumen: *La matemática recreativa configura una sección de las matemáticas cuyo interés didáctico es notable, dado que: (a) contribuye a la motivación del alumnado y (b) muestra el lado «amable» de dicha disciplina.*

*El primer manual de matemática recreativa, *Propositiones ad acuendos juvenes*, se escribió en latín y se dedicó a la formación de los jóvenes. Su autor, Alcuino de York (735 – 804), incluyó en él cincuenta y tres divertimentos, algunos de los cuales se convirtieron en clásicos (el lobo, la cabra y la col, el problema de los maridos celosos, etc.). Desde entonces, los buenos textos dedicados a la enseñanza de las matemáticas han prestado atención a los aspectos recreativos. En este trabajo presentamos los tópicos de carácter recreativo contenidos en una aritmética española del XVI, compuesta por Juan de Ortega.*

Palabras clave: *Juan de Ortega, Matemática recreativa, aritméticas españolas del siglo XVI, historia de las Matemáticas, historia de la Educación Matemática.*

Recreations in mathematics “Arithmetic” (1512) by Fray Juan de Ortega

1. Este artículo forma parte de un trabajo de investigación más amplio (*Matemática recreativa del siglo XVI en la Biblioteca de la Universidad de Salamanca*) en el que se estudian los contenidos recreativos de las aritméticas de Juan de Ortega (1512), Juan Andrés (1515), Gaspar de Texeda (1546), Juan de Iciar (1549), Juan Díez Freyle (1556), Juan Pérez de Moya (1562) y Miguel Gerónimo de Santa Cruz (1594).

A su vez, la antedicha investigación se integra en el proyecto «La difusión del conocimiento matemático en el nacimiento de la imprenta: descripción y análisis comparado de aritméticas del siglo XVI escritas en castellano» dirigido por el Dr. Modesto Sierra (Universidad de Salamanca). En dicho proyecto se pretende: (i) estudiar el contenido de las aritméticas españolas renacentistas desde el punto de vista matemático y de diseminación del saber matemático, (ii) identificar las fuentes u obras que les han influido y su proyección en aritméticas posteriores, y (iii) llevar a cabo un estudio comparado de las mismas.

Abstract: *The recreational mathematics set a section of mathematics teaching whose interest is remarkable, given that (a) contributes to student motivation and (b) shows the side 'kind' of that discipline.*

The first recreational mathematics manual, Propositiones ad acuendos juvenes, was written in Latin and was devoted to the training of young people. Its author, Alcuin of York (735-804), included in his fifty-three diversions, some of which became classics (the wolf, goat and cabbage, the jealous husbands problem, etc..). Since then, the good texts on mathematics education have paid attention to the recreational aspects.

We present the topics in the entertainment content on sixteenth Spanish arithmetic, composed by Juan de Ortega.

Keywords: *Juan de Ortega, recreational mathematics, arithmetic sixteenth century Spanish, Mathematics, Mathematics Education History.*

DATOS BIOGRÁFICOS

De fray Juan de Ortega se sabe que fue miembro «de la orden de Santo Domingo: de los predicadores», como puede leerse en la portada de su *Conpusicion de la arte dela arismetica y juntamente de geometria* (1512).

Julio Rey Pastor (1926), refiriéndose al dominico, dice:

«Pocos datos seguros hemos logrado reunir sobre la personalidad de Fr. Juan de Ortega. Palentino de origen y dominico adscrito a la provincia de Aragón, enseñó Aritmética y Geometría en España e Italia durante muchos años, privada y públicamente.»

MATEMÁTICA RECREATIVA EN LA ARITMÉTICA DE FRAY JUAN DE ORTEGA

Véase figura 1.

La *Aritmética* de Ortega contiene los siguientes divertimentos matemáticos.

1) La cuenta del ajedrez

« (...) quiero poner aquí un ejemplo el cual será para declarar cómo se han de contar brevemente las 64 casas del ajedrez, poniendo en la casa primera una, y en la segunda 2, y en la tercera 4, y en la cuarta 8, y en la quinta 16, y así doblando todas las sumas hasta las 64 casas. Esta suma bien breve se puede hacer por la progresión dupla que detrás esta figurada, mas porque veas la diferencia, la quiero poner en esta otra manera. Ya sabes que en la quinta suma, como se viene doblando, hace 16. Pues multiplica 16 veces 16, y montarán 256, los cuales hallarás que, viniéndose doblando, vienen los dichos 216 a las 9 casas. Pues torna a multiplicar 256 veces 256, y montarán 65536, los cuales hallarás que vienen en las 17 casas. Torna otra vez a multiplicar 65536 veces 65536, y montarán 4294967296.

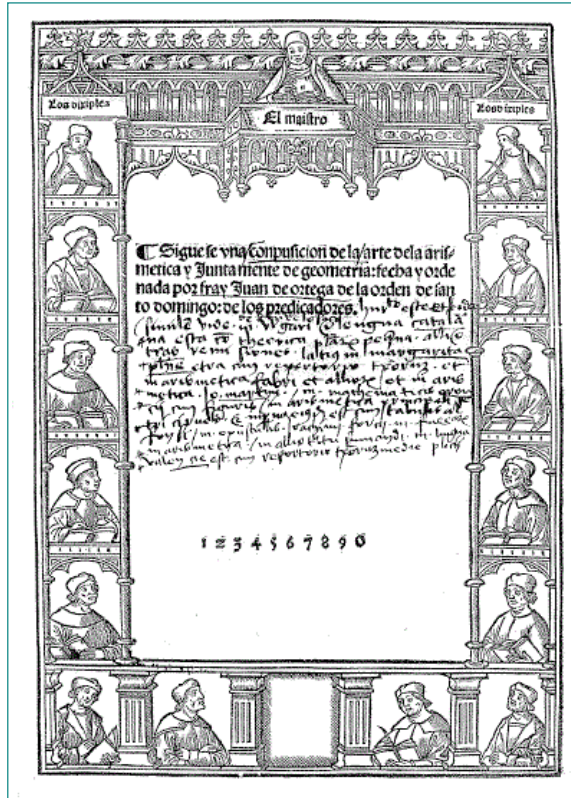


Fig. 1. Compusicion de la arte de la arismetica y juntamente de geometria (1512)

Y tanto hallarás que vienen a las 33 casas. Pues torna a multiplicar 4294967296 con 4294967296, y hallarás que vienen 18446744073709551616, los cuales hallarás que montan en las 65 casas. Pues por quanto no quieres saber más de 64 casas quita la primera de la postrera y quedarán 18446744073709551616, y tanto monta en las sesenta y cuatro casas. Ahora, para saber cuánto monta en todas las 64 casas, dobla la postrera suma, que son las figuras de las 64 casas, y montarán 36893488147419103230, de los cuales quita la primera suma, que es uno, y quedará lo de abajo figurado.»

El cuento de la tabla del Nieldrez.
C 3 6 8 9 3 4 8 8 1 4 7 4 1 9 1 0 3 2 2 9

[fols. 26v – 27r]

COMENTARIO

Para resolver el problema de la «cuenta del ajedrez», el dominico de origen palentino hace uso de la fórmula que permite calcular la suma S_n de los n primeros términos de una progresión geométrica cuya razón es r , cuyo primer término es a_1 y cuyo término enésimo es a_n

$$S_n = \frac{a_n \cdot r - a_1}{r - 1}$$

En el problema que nos ocupa, $n = 64$, $r = 2$, $a_1 = 1 = 2^0$ y $a_n = a_{64} = 2^{63}$

Para la determinación de a_{64} Ortega procede como sigue:

$16 = 2^4$ ocupa el quinto escaque.

$2^4 \times 2^4 = 2^8 = 16 \times 16 = 256$ ocupa la novena casilla.

$2^8 \times 2^8 = 2^{16} = 256 \times 256 = 65536$ ocupa el decimoséptimo escaque.

$2^{16} \times 2^{16} = 2^{32} = 65536 \times 65536 = 4294967296$ ocupa la casilla 33^{a} .

$2^{32} \times 2^{32} = 2^{64} = 18446744073709551616$ ocupa el 65^{o} escaque.

En consecuencia:

La casilla 64^{a} estará ocupada por el número $2^{63} = 9223372036854775808$.

En otras palabras: $a_{64} = 9223372036854775808$.

Por tanto:

$$S_{64} = \frac{(9223372036854775808 \times 2) - 1}{2 - 1} = 18446744073709551615$$

Comparando estos resultados con los obtenidos por Ortega, nos damos cuenta de los errores cometidos por el dominico a lo largo del proceso de resolución.

2) El problema del huerto y los porteros

Con este nombre designamos una nutrida familia de problemas en los que, conociendo el número de objetos (naranjas, rosas, etc.) que le quedan a un individuo después de haber entregado parte de ellos a otras personas, se debe calcular el número de objetos que tenía antes de efectuar dichas entregas².

PROBLEMA 1

Un mozo entra en un jardín por tres naranjas, en el cual jardín hay cuatro porteros. Y dice al primero que le deje entrar a coger naranjas y que le dará la mitad de las que traiga y media más, sin partir. En manera que a cada uno de los cuatro porteros dijo que daría

2. Un problema de este tipo ya se encuentra en el Liber Abaci (Capítulo 12, 7ª parte) de Leonardo de Pisa (1170 – 1250).

la mitad y media más, sin partir. Ellos le dejaron entrar y él tomó las naranjas que había menester y dio a cada uno lo que le prometió. Y en fin del postrer portero no le quedó sino las tres naranjas que había menester. Demando que cuántas naranjas cogió y cuántas naranjas dio a cada uno de los cuatro porteros.

Respuesta.

Lo harás así. Porque a él le quedaron 3 pondrás solamente medio sobre las 3 y serán $3\frac{1}{2}$, después dóblalos y serán 7, y así dirás que tenía 7 manzanas o naranjas cuando llegó al postrer portero. Pues añade medio a los 7 y serán $7\frac{1}{2}$, dóblalos y serán 15, y así dirás que tenía 15 naranjas cuando llegó al tercer portero. Asimismo, junta medio a estos 15 y serán 15 y medio, dóblalos y serán 31, y tantas naranjas tenía cuando llegó al segundo portero. Pues torna a juntar a estos 31 medio y serán 31 y medio, dóblalos y serán 63, y así dirás que tenía 63 naranjas cuando vino al primer portero, y tantas había cogido. Si quieres ver si es verdad, da al primero la mitad de 63 y media más, que son 32, y quedarán 31. Después, da al segundo la mitad de 31 y más medio, que son 16, quedarán 15. Asimismo, da al tercero la mitad de 15 y más medio, que son 8, y quedarán 7. Después, da al cuarto la mitad de 7 y medio más, que son 4, y le quedaron las 3 naranjas que demandó [fol. 170r].

COMENTARIO

Para resolver el problema, Ortega empieza por el final (el hombre ya ha salido del huerto) y aplica reiteradamente el siguiente argumento (véase la tabla adjunta): si después de cruzar una puerta el hombre tiene n naranjas, entonces antes cruzarla tenía $2(n + \frac{1}{2})$.

Número de naranjas antes de cruzar la puerta	Número de naranjas que entrega al portero	Número de naranjas después de cruzar la puerta
x	$\frac{x}{2} + \frac{1}{2}$	$x - \left(\frac{x}{2} + \frac{1}{2}\right) = \frac{x}{2} - \frac{1}{2} = n \Rightarrow$ $\frac{x}{2} = n + \frac{1}{2} \Rightarrow x = 2\left(n + \frac{1}{2}\right)$

PROBLEMA 2

Un hombre fue a una huerta a coger rosas, en el cual había 4 porteros. El cual hombre prometió al primer portero que si le dejaba entrar que le daría la mitad de las rosas que trajese y media más, sin partir. El primero le dejó entrar y fue al segundo portero y le dijo que le dejase entrar y que le daría los dos tercios de las rosas que trajese y dos tercios más, sin partir. El segundo fue su voluntad de dejarle entrar. Fue al tercero y le prometió que si le dejase entrar que le daría los tres cuartos de las rosas que sacase y tres cuartos de rosa más, sin partir. Le dejó entrar y fue al cuarto portero y le prometió si le dejase entrar que le daría los cuatro quintos de las rosas que sacase y cuatro quintos de rosa más, sin partir. También fue contento y entró, y sacó tantas rosas que dio a cada uno lo que prometió y, en fin, a él le quedó una rosa. Demando que cuántas rosas sacó y cuántas dio a cada uno de los cuatro porteros.

Respuesta.

Lo harás así. Porque a él no le quedó sino una rosa, junta $\frac{1}{2}$ al uno, por la mitad que prometió al primero, y serán uno y medio, dóblalos y serán 3, a los cuales 3 junta los dos tercios que prometió al segundo y serán reducidos 11 tercios. Después, estos 11 redúcelos con los tres cuartos que prometió al tercero y serán 47. Después, estos 47 redúcelos con los 4 quintos que prometió al cuarto y serán 239, y tantas rosas dirás que tomó de la huerta para cumplir con todos cuatro y para que le quedase a él sólo una rosa (...) [fols. 170r – 170v].

COMENTARIO

Para resolver el problema, Ortega empieza por el final (el hombre ya ha salido del huerto) y aplica reiteradamente el siguiente argumento (véase la tabla adjunta): si después de cruzar una puerta (en la que entrega al portero $\frac{a}{b}$ de lo que tiene, más $\frac{a}{b}$ de una rosa) el hombre tiene n naranjas, entonces antes cruzarla tenía $\frac{nb+a}{b-a}$ rosas.

Número de naranjas antes de cruzar la puerta	Número de naranjas que entrega al portero	Número de naranjas después de cruzar la puerta
x	$\frac{ax}{b} + \frac{a}{b}$	$x - \left(\frac{ax}{b} + \frac{a}{b}\right) =$ $= \frac{(b-a)x - a}{b} = n \Rightarrow$ $\Rightarrow x = \frac{nb+a}{b-a}$

3) Ventas y precios extravagantes

En esta sección incluimos un tipo de problemas en los que varios fruteros obtienen la misma cantidad de dinero al vender, al mismo precio, distinto número de frutos (naranjas, manzanas, etc.).

En la *Conpusicion de la arte dela arismetica y juntamente de geometria* hemos localizado los dos siguientes:

PROBLEMA 1

Un mercader dio a tres hijos que tenía 90 naranjas para que las fuesen a vender. En que dio al mayor 50, y al mediano 30, y al menor 10, y mandó que las vendiese las suyas el mayor primero, y que después los otros dos vendiesen al mismo respeto, y que trajesen tantos dineros el uno como el otro. Demando que a cómo vendieron las naranjas cada uno y que cuántos dineros trajeron todos pues que había de traer tanto el uno como el otro.

Respuesta.

Has de saber que el mayor daba siete naranjas al dinero en que dio 49 naranjas por 7 dineros, y la una que le sobraba la dio por tres dineros, en manera que de las 50

naranjas hizo 10 dineros. El mediano hermano vendió al mismo respeto que dio 28 naranjas por 4 dineros y las 2 que le restaban las vendió a tres dineros, que eran 6 dineros, y 4 de las 28 son 10, y así tenía tantos dineros como el mayor. El hermano menor las 10 naranjas que tenía las vendió al mismo respeto, que dio 7 naranjas por un dinero y las tres que le quedaban las vendió a tres dineros, que fueron por 9 dineros, pues junta el uno de las 7 con los 9 de las tres y serán 10. Y así dirás que cada uno llevó 10 dineros al padre [fol. 170v].

COMENTARIO

Este problema oriental que también aparece en los textos renacentistas y posteriores se resuelve anunciando la venta del modo siguiente (Rodríguez Vidal y Rodríguez Rigual, 1986):

Se venden sacos de siete naranjas a un dinero el saco. Las naranjas sueltas se venden a tres dineros la unidad.

Con estos precios, los tres hermanos ganaron diez dineros cada uno.

Notemos que los números 10, 30 y 50 que representan las naranjas de cada uno de los tres hermanos están en progresión aritmética de diferencia 20.

En el caso general dichos números son:

$$a, a + 20, a + 40$$

Sea c el cociente obtenido al dividir a por 7.

Sea r el resto de dicha división ($2 < r < 7$).

Es decir:

$$a = 7c + r$$

Entonces:

$$a + 20 = 7c + r + 20 = 7c + r + 21 - 1 = 7(c + 3) + r - 1$$

$$a + 40 = 7c + r + 40 = 7c + r + 42 - 2 = 7(c + 6) + r - 2$$

En esta situación, sea x el precio de un saco de 7 naranjas e y el precio de una naranja suelta.

Con esto, la recaudación del hermano que tiene a naranjas es:

$$cx + ry$$

La recaudación del hermano que tiene $a + 20$ naranjas es:

$$(c + 3)x + (r - 1)y$$

La recaudación del hermano que tiene $a + 40$ naranjas es:

$$(c + 6)x + (r - 2)y$$

En consecuencia, para que las tres recaudaciones sean iguales a R se debe verificar que:

$$\begin{cases} cx + ry = R \\ (c + 3)x + (r - 1)y = R \\ (c + 6)x + (r - 2)y = R \end{cases}$$

Resolviendo este sistema de ecuaciones lineales por el método de Gauss, se tiene que:

$$\begin{pmatrix} c & r & 1 \\ c + 3 & r - 1 & 1 \\ c + 6 & r - 2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} c & r & 1 \\ 3 & -1 & 0 \\ 6 & -2 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} c & r & 1 \\ 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} cx + ry = R \\ 3x - y = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

Si $x = 1$, $y = 3$, $c = 1$, $r = 3$, $a = 10$, $a + 20 = 30$, $a + 40 = 50$ el problema general se convierte en el propuesto por Ortega.

PROBLEMA 2

Un mercader dio a tres criados que tenía 74 manzanas para que las fuesen a vender. En que dio al mayor 36, y al mediano 22, y al menor 16. Y mandó a los dos menores que cómo vendiese el mayor así vendiesen ellos y que trajesen tantos dineros cada uno de ellos como él. Ellos lo hicieron así que vendieron como él vendía y trajeron tantos dineros como él. Demando que a cómo vendió cada uno y que cuántos dineros llevó cada uno.

Respuesta.

Harás así. Que dirás que el mayor vendió 30 manzanas por 5 dineros, dando 6 al dinero. Y de las 6 que quedaban dio 2 por un dinero, y 4 manzanas por 4 dineros. En que hizo de todas 36 manzanas 10 dineros.

El mediano vendió al mismo respecto que dio 12 manzanas por 2 dineros, y de las 10 que le quedaban vendió 4 por 2 dineros, dando 2 al dinero, y vendió 6 por 6 dineros. Y así hizo 10 dineros de las 22 manzanas.

El menor vendió al mismo respecto que dio 6 manzanas por un dinero, y dio 2 manzanas por un dinero, y 8 manzanas por 8 dineros. Y así hizo 10 dineros como cada uno de los otros. En manera que cada uno de ellos llevó 10 dineros [fols. 170v – 171r].

COMENTARIO

El problema propuesto por Ortega se resuelve anunciando la venta con el siguiente cartel.

Se venden sacos de seis manzanas a un dinero el saco, sacos de dos manzanas a un dinero el saco. Las naranjas sueltas se venden a un dinero la unidad.

Vendiendo a estos precios, cada uno de los tres hermanos obtuvo diez dineros.

¿Es esta la única ganancia que puede obtener cada hermano?

Resulta claro que no.

En efecto.

Si designamos por x los dineros que cuesta cada saco de seis manzanas, por y los dineros a que se vende cada saco de dos manzanas, y por z los dineros a que se vende cada manzana suelta, resulta que:

$$\begin{cases} 5x + y + 4z = G \\ 2x + 2y + 6z = G \\ x + y + 8z = G \end{cases}$$

donde G representa la ganancia de cada hermano.

Aplicando el método de Gauss al sistema anterior, éste se convierte en el sistema indeterminado:

$$\begin{cases} x + y + 8z = G \\ y + 9z = G \\ 10z = G \end{cases} \Rightarrow z = \frac{G}{10}$$

Dando a G valores naturales que sean múltiplos de 10 se obtienen infinitas soluciones naturales del sistema original.

Para $G = 10$ se obtiene la solución de Ortega.

4) El problema de los huevos rotos

En la categoría de problemas recreativos clásicos se encuentran aquellos en los que se debe calcular un número del que se conocen los restos de sus divisiones por 2, 3, 4, 5, 6, etc.

Dado que muchos de estos problemas tienen un enunciado en el que interviene algún personaje transportando huevos, que finalmente se rompen, los hemos etiquetado con el nombre de «problemas de los huevos rotos».

PROBLEMA 1

Un labrador llevaba huevos en una cesta para venderlos y pasó un escudero y los quebró todos. El labrador le dijo que se los pagase. El escudero dijo que le placía y, por tanto, que le dijese que cuántos huevos llevaba. El labrador le respondió que si los huevos que él le había quebrado los contaran de dos en dos sobrara uno, y si los contaran de tres en tres sobrara uno, y si los contaran de 4 en cuatro sobrara uno, y si los contaran de 5 en cinco sobrara uno, y si los contaran de 6 en seis sobrara uno, y si los contaran de 7 en siete venían cabales. Demando que cuántos huevos traía el labrador.

Respuesta.

Lo harás así. Busca un número donde quepan $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{6}$ y hallarás que el tal número será 60, a los cuales junta uno y serán 61, los cuales mira si partidos por 7 vienen iguales, y hallarás que no. Pues, por tanto, junta los 60 a los 61 y serán 121. Pues

mira también si se puede partir por 7 y que vengan iguales, y hallarás que no. Pues, por tanto, torna a juntar los 60 a los 121 y serán 181, los cuales mira si se pueden partir por 7 y que vengan iguales, y hallarás que no. Pues, por tanto, torna a juntar los 60 a los 181 y serán 241, los cuales mira si se pueden partir por 7, y hallarás que no. Pues torna a juntar con los 241 los 60 y serán 301, los cuales mira si se pueden partir por 7, y hallarás que sí. Y por tanto dirás que el escudero le había quebrantado 301 huevos. Si quieres ver si es verdad cuenta de 2 en dos y sobraré uno, y de tres en tres y sobraré uno, y de cuatro en 4 sobraré uno, de 5 en cinco sobraré uno, y de seis en 6 sobra uno, y de siete en 7 vienen iguales [fol. 177r].

COMENTARIO

La resolución de Ortega se ajusta al siguiente plan.

$$\text{m. c. m. } (2, 3, 4, 5, 6) = 60$$

En consecuencia:

$$61 = 60 + 1 = 2 \cdot p_1 + 1 = 3 \cdot p_2 + 1 = 4 \cdot p_3 + 1 = 5 \cdot p_4 + 1 = 6 \cdot p_5 + 1$$

Es decir: al dividir 61 por 2, 3, 4, 5 y 6 se obtiene resto 1

Además, todos los números de la serie siguiente satisfacen la misma condición.

$$61, 121 (= 61 + 1 \cdot 60), 181 (= 61 + 2 \cdot 60), \\ 241 (= 61 + 3 \cdot 60), 301 (= 61 + 4 \cdot 60), \dots$$

En esta serie, el primer múltiplo de 7 es 301 .

Por tanto: 301 es el menor entero positivo que satisface las condiciones del problema.

En general, las soluciones del problema se pueden obtener del modo siguiente:

$$\text{m.c.m. } (2,3,4,5,6) = 60$$

Entonces, el número total de huevos debe ser de la forma $60x + 1$, y por ser múltiplo de 7 se deberá cumplir que:

$$60x + 1 = 7y \text{ (ecuación diofántica lineal con dos incógnitas)}$$

Por tanto:

$$y = \frac{60x + 1}{7} = 8x + \frac{4x + 1}{7}$$

$$\text{Si } \frac{4x + 1}{7} = t, \text{ entonces } x = \frac{7t - 1}{4} = t + \frac{3t - 1}{4}$$

$$\text{Si } \frac{3t - 1}{4} = u, \text{ entonces } t = \frac{4u + 1}{3} = u + \frac{u + 1}{3}$$

$$\text{Si } \frac{u + 1}{3} = v, \text{ entonces } u = 3v - 1$$

Deshaciendo los cambios de variable resulta:

$$y = 60v - 17$$

En consecuencia:

$$N = \text{número de huevos} = 7y = 420v - 119$$

$$\text{Si } v = 1 \Rightarrow N = 301$$

$$\text{Si } v = 2 \Rightarrow N = 721$$

.....

PROBLEMA 2

Es una mujer que acontece el mismo caso que un hombre le quebranta los huevos y ella dice que se los pague y el dice que cuántos huevos traía. Ella responde que contándolos de dos en 2 sobraba uno, y contándolos de tres en 3 sobraban 2, y contándolos de 4 en cuatro sobran 3, y contándolos de 5 en cinco sobran 4, y contándolos de 6 en 6 sobraban 5, y de siete en 7 no sobraba nada. Demando que cuántos huevos llevaba.

Respuesta.

Lo harás así. Busca un número donde quepan todos los sobredichos números como son $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}$, y hallarás que el tal número será 60, los cuales 60 quita un punto y quedarán 59. Después, junta estos 59 a los 60 y montarán 119, y tantos huevos le había quebrado. Porque de dos en 2 sobran uno, y de tres en 3 sobran 2, y de cuatro en 4 sobran 3, y de cinco en 5 sobran 4, y de seis en 6 sobran 5, y de siete en 7 vienen iguales.

[fol. 177r]

COMENTARIO

La regla propuesta se puede explicar en los siguientes términos:

El número de huevos [= x], además de ser múltiplo de 7, debe satisfacer las condiciones siguientes:

$$x = 2p + 1 = 3q + 2 = 4r + 3 = 5s + 4 = 6t + 5 \quad [*]$$

El menor número natural que satisface dichas condiciones es 59.

Dado que m. c. m. (2, 3, 4, 5, 6) = 60, los números

$$59, 119 (= 59 + 60), 179 (= 59 + 2 \cdot 60), 239 (= 59 + 3 \cdot 60), \dots$$

también satisfacen las condiciones [*].

Dado que $119 = 7 \cdot 17$, resulta que 119 es solución del problema.

REFLEXIÓN FINAL

Al principio de este trabajo, hemos advertido que su contenido forma parte de una investigación más amplia y ambiciosa en la que, entre otros objetivos, se persigue estudiar el contenido de las aritméticas españolas renacentistas.

Esta revisión y análisis de las fuentes permitirá emitir un juicio sobre la valía de las obras de nuestros matemáticos. En esto coincidimos con José M^a Lorente Pérez (1921), que en su tesis doctoral, dirigida por Rey Pastor, puntualizaba:

(...) mucho estimula mi propósito el saber la falta grande que hay en nuestra Patria de esta clase de investigaciones en las que se averigüe, acudiendo directamente a las fuentes, lo bueno, mediano o erróneo que en la matemática pura hayan hecho los españoles.

Agradecimientos: Esta investigación ha sido subvencionada dentro del proyecto EDU2011-27168 del Plan Nacional de I + D + i (2008-2011) del Ministerio de Ciencia e Innovación de España.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Lorente, J. M. (1921). *Biografía y análisis de las obras de Matemática pura de Pedro Sánchez Ciruelo*. Madrid: Publicaciones de la Junta para ampliación de estudios e Investigaciones científicas.
- Meavilla, V. (2008). *Aspectos históricos de las matemáticas elementales* (2^a edición). Zaragoza: Prensas Universitarias de Zaragoza.
- Meavilla, V. (2011). *El lobo, la cabra y la col*. Córdoba: Editorial Almuzara, S. L.
- ORTEGA, J. de (1512). *Conpusicion de la arte de la arismetica y juntamente de geometria: fecha por...* León: en casa de Maistro Nicolau de Benedictis: por Joannes Trinxer librero de Barcelona.
- Rey Pastor, J. (1926). *Los matemáticos españoles del siglo XVI*. Biblioteca Scientia.
- Rodríguez, R. y Rodríguez, M. C. (1986). *Cuentos y cuentas de los matemáticos*. Barcelona: Editorial Reverté, S. A.
- Sigler, L.E. (2002). *Fibonacci's Liber Abaci. A translation into Modern English of Leonardo Pisano's Book of Calculation*. New York: Springer-Verlag.

Análisis socio-histórico de Arjonilla (Jaén)¹

Roque Modrego Fernández
Noelia Rojas Sedeño²
IES Juan del Villar (Arjonilla, Jaén)

Resumen: *El siguiente estudio estadístico se basa en el análisis de la población arjonillera sobre sus aspectos históricos, demográficos, climáticos y económicos.*

Este trabajo ha servido para conocer la valoración general que hacen mis vecinos de Arjonilla en temas actuales y de épocas pasadas. Por otra parte, he conocido un poco más de historia de este municipio y su influencia en la población, además de datos históricos de épocas pasadas como son los diferentes exilios de la guerra civil.

Palabras Clave: *Evolución histórica Arjonilla, movimientos naturales y migratorios, estructura de población, Análisis climático.*

Socio-historical analysis Arjonilla (Jaén)

Abstract: *The following study is based on statistical analysis of population arjonillera on their historical, demographic, and economic climate.*

This work has served to meet the general assessment made by my Arjonilla neighbors in current and past issues. On the other hand, I have known a little more history of this village and its influence on the population, also some historical date from past centuries, like the different Civil War exiles.

Keywords: *Arjonilla historical evolution, natural and migratory movements, population structure, climate analysis.*

1. Proyecto ganador del primer premio en la categoría 3º y 4º de ESO en el I Certamen del Sur “Incubadora de Sondeos y Experimentos” 2012.

2. Ofició como tutora del proyecto.

INTRODUCCIÓN

Este trabajo se ha basado principalmente en el análisis de la localidad jiennense de Arjonilla en sus aspectos históricos, climáticos, económicos y demográficos. Se consultaron algunos manuales de estadística para su análisis (por ejemplo Moore, 2005). El trabajo se agrupó en varias partes:

- 1) Evolución demográfica de Arjonilla (1553-2011)
- 2) Movimientos naturales y migratorios (2000-2011)
- 3) Estructura de población
- 4) Análisis climático

MÉTODO

Para llevar a cabo el estudio se ha recabado información de 4 fuentes distintas:

- 1) Investigación en el Archivo Histórico Municipal de Arjonilla
- 2) Página Web: www.ine.es (Instituto Nacional de Estadística)
- 3) Encuesta realizada a los vecinos de Arjonilla. Dicha encuesta constaba de 9 preguntas y algunas de ellas sólo podía respondermelas un sector de la población. Por ello el tamaño muestral varía según la pregunta. En unos casos es 66 y en otros, 27. Para seleccionar a los individuos de mi muestra, he realizado un muestreo aleatorio simple sobre la población de Arjonilla.
- 4) Recogida de datos climáticos mediante un pluviómetro y termómetro.

EVOLUCIÓN DEMOGRÁFICA DE ARJONILLA

En este apartado se expone la evolución demográfica de Arjonilla desde el año 1553 (año de su nombramiento como villa) hasta el pasado 2011.

Esta tabla comienza en el año 1553, año en que Arjonilla se independiza de Arjona a manos del rey Carlos V. Después va transcurriendo de veinticinco en veinticinco años, hasta llegar a la guerra civil española (1936-1939). A partir de aquí los datos aparecen de década en década, hasta llegar al año 2000, donde ya aparecen de año en año hasta el 2011. Véanse figuras 1 y 2.

Analizando los datos obtenidos se puede decir que:

- Desde el año 1553 hasta el año 1650 aproximadamente, la población del municipio de Arjonilla aumenta a causa de inmigraciones de pueblos cercanos, puesto que este municipio ya es titulado villa.
- Pasado el año 1650 hasta finales del s.XVIII, la población desciende por causas naturales (muertes por epidemias, empobrecimiento, falta de natalidad,...) y por causas migratorias (la población emigra en busca de villas con mejores recursos para vivir).

xi	ni	xi	ni	xi	ni
1553	2760	1850	3040	2000	3917
1575	2810	1875	3125	2001	3951
1600	2840	1900	3800	2002	3957
1625	2970	1925	4155	2003	3971
1650	3150	1936	4350	2004	3935
1675	3080	1939	4210	2005	3926
1700	3035	1945	5000	2006	3908
1725	2990	1950	5550	2007	3908
1750	2780	1960	5900	2008	3876
1775	2500	1970	4030	2009	3851
1800	2725	1980	3900	2010	3840
1825	2980	1997	4000	2011	3851

Figura 1.

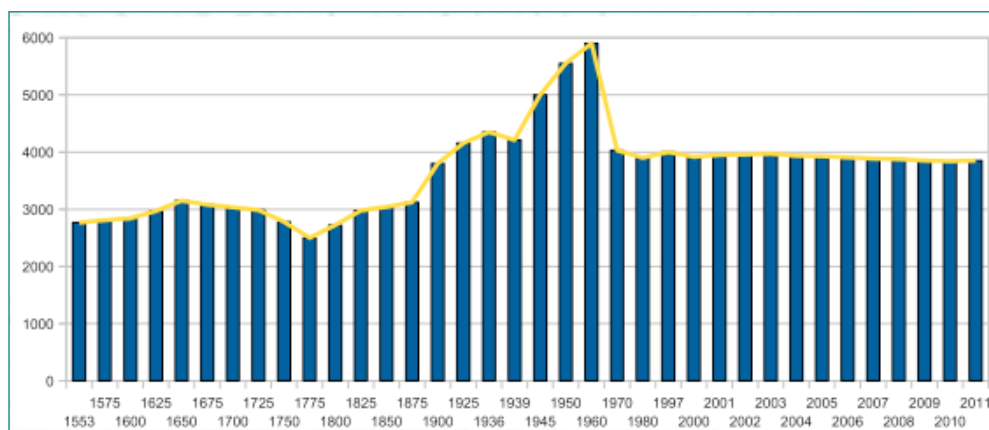


Figura 2.

- A partir del s.XVIII se produce un aumento considerable la población provocada por la conocida explosión demográfica.
- Entre los años de la guerra civil, desciende la población en unos 100 habitantes, aproximadamente, por causas naturales (muchas muertes y poca natalidad).
- A partir de la década de los 60, la población desciende notablemente por la mecanización del campo y la emigración de centenas de familias a las ciudades en busca de trabajo.
- Desde que comenzó el siglo XXI hasta hoy, la población ha ido disminuyendo considerablemente debido a la incorporación de la mujer al trabajo, crisis económica, nuevas mentalidades,...)

ESTUDIO DE LA VALORACIÓN QUE HACEN LOS ARJONILLEROS SOBRE DIFERENTES ACONTECIMIENTOS DEL SIGLO XX

En este apartado se quería profundizar más en las valoraciones que hacen los vecinos de Arjonilla sobre los diferentes acontecimientos ocurridos durante el siglo XX. Para ello se ha realizado una encuesta a la población de Arjonilla, seleccionando una muestra de 66 personas, salvo en dos preguntas donde la población ha sido de 27. Nos hemos visto obligados a reducir el tamaño muestral porque esas preguntas solo la podían contestar un sector de la población (personas aproximadamente mayores de 79 años).

Analicemos los resultados obtenidos en cada una de las preguntas realizadas en la encuesta.

a) ¿Qué edad tenía usted cuando empezó la guerra civil?

- Características de la pregunta:

- Población: Vecinos/as de Arjonilla que han vivido la guerra civil

- Tamaño de la muestra: De entre todos los vecinos de Arjonilla que han vivido la guerra civil, he seleccionado una muestra de 27 personas, mediante muestreo aleatorio simple.

- Variable: Edad

- Tipo de variable: Cuantitativa discreta.

x_i	n_i	N_i	f_i	F_i	p_i	P_i
0	2	2	0,07	0,07	7,00%	7,00%
1	1	3	0,04	0,11	4,00%	11,00%
2	4	7	0,15	0,26	15,00%	26,00%
3	2	9	0,07	0,33	7,00%	33,00%
4	1	10	0,04	0,37	4,00%	37,00%
5	4	14	0,15	0,52	15,00%	52,00%
6	6	20	0,22	0,74	22,00%	74,00%
7	1	21	0,04	0,78	4,00%	78,00%
8	1	22	0,04	0,82	4,00%	82,00%
9	2	24	0,07	0,89	7,00%	89,00%
10	3	27	0,11	1	11,00%	100,00%
	n : 27		1		100,00%	

Figura 3. Tabla de frecuencias

x_i	n_i	N_i	$x_i \cdot n_i$	$ x_i - \bar{x} $	$ x_i - \bar{x} \cdot n_i$	$x_i^2 \cdot n_i$
0	2	2	0	5,1	10,2	0
1	1	3	1	4,1	4,1	1
2	4	7	8	3,1	12,4	16
3	2	9	6	2,1	4,2	18
4	1	10	4	1,1	1,1	16
5	4	14	20	0,1	0,4	100
6	6	20	36	0,9	5,3	216
7	1	21	7	1,9	1,9	49
8	1	22	8	2,9	2,9	64
9	2	24	18	3,9	7,8	162
10	3	27	30	4,9	14,7	300
	n : 27		138		65,1	942

Figura 4a. Parámetros estadísticos (Parámetros).

Medidas de centralización:	Medidas de dispersión:
<ul style="list-style-type: none"> • Moda: 6 • Media: 5,1 • Mediana: 5 	<ul style="list-style-type: none"> • Rango: 10 • Desviación media: 2,4 • Varianza: $34,5 - 26,01 = 8,49$ • Desviación típica: 2,9 • Coeficiente de variación: 0,570
Medidas de localización:	
<ul style="list-style-type: none"> • Cuartiles: $Q1 = 2, Q2 = 5, Q3 = 7$ • Rango intercuartílico: $Q3 - Q1 = 5$ 	

Figura 4b. Parámetros estadísticos (Medidas).

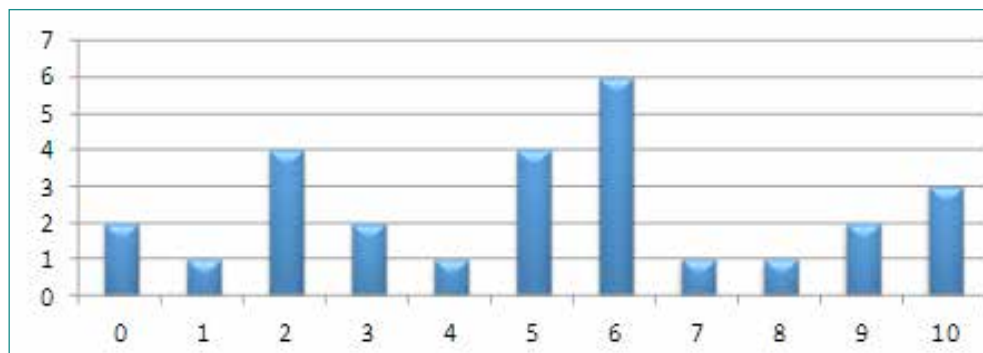


Figura 5. Representación gráfica

La moda se encuentra en el valor 6, lo que significa que el 22% de la población entrevistada tenía 6 años cuando comenzó la guerra civil. Sin embargo, la edad media es 5 años, que coincide con la mediana. El rango de la variable es 10 y los datos se encuentran más o menos dispersos, con una desviación típica de 2,91. Hay que señalar que no he encontrado ninguna persona que tuviese más de 10 años cuando empezó la contienda civil.

Puesto que Q3 es 7, podemos afirmar que el 75% de las personas encuestadas tenían 7 o menos años. Y el 50% de los datos centrales se encuentran entre los 2 y los 7 años, obteniéndose un rango intercuartílico de 5.

b) ¿Dónde exilió durante la contienda civil?

- Población: Vecinos/as de Arjonilla que exiliaron durante la guerra civil
- Tamaño de la muestra: De entre todos los vecinos de Arjonilla que han vivido la guerra civil, he seleccionado una muestra de 27 personas, mediante muestreo aleatorio simple.
- Variable: Lugar de exilio
- Tipo de variable: Cualitativa

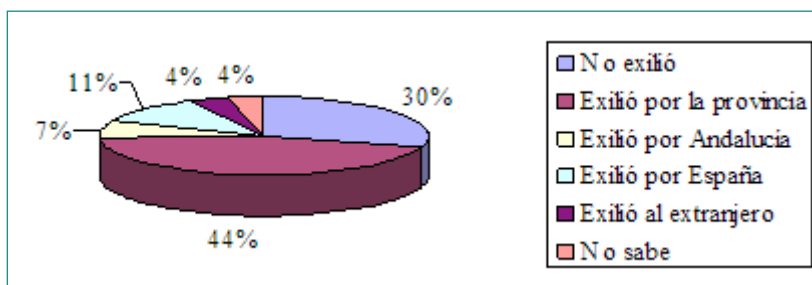


Figura 6.

- El 44% de las personas encuestadas, exilió por diferentes municipios de la provincia, mientras que sólo el 26% de ellos se vio obligado a exiliar fuera de la frontera de la provincia. v- Solamente un 4% de los encuestados no sabe si exilió.
 - En la gráfica se puede observar que la mayoría de los encuestados (un 74%), o bien exiliaron cerca del municipio de Arjonilla o no exiliaron.
- c) Valora de 0 al 10 la dictadura de Francisco Franco en todos sus aspectos (política, sociedad, economía,...) sabiendo que una menor puntuación supone que usted piensa que ha sido perjudicial**
- Variable: Valoración personal sobre la época franquista
 - Tipo de variable: Cuantitativa discreta

x_i	n_i	N_i	$x_i \cdot n_i$	$ x_i - \bar{x} $	$ x_i - \bar{x} \cdot n_i$	$x_i^2 \cdot n_i$
0	27	27	0	1,7	45,9	0
1	15	42	15	0,7	10,5	15
2	8	50	16	0,3	2,6	32
3	6	56	18	1,3	7,9	54
4	0	56	0	2,3	0	0
5	3	59	15	3,3	10	75
6	3	62	18	4,3	13	108
7	3	65	21	5,3	16	147
8	1	66	8	6,3	6,3	64
9	0	66	0	7,3	0	0
10	0	66	0	8,3	0	0
	n: 66		111		112,1	495

Medidas de centralización:

- Moda: 0
- Media: 1,68
- Mediana: 1

Medidas de dispersión:

- Rango: 10
- Desviación media: 1,69
- Varianza: $7,12 - 4,04 = 3,08$
- Desviación típica: 2,16
- Coeficiente de variación: 0,87

Medidas de localización:

- Cuartiles: $Q1 = 0, Q2 = 1, Q3 = 1$
- Rango intercuartílico: $Q1 - Q3 = 1$

Figura 7.

- La moda nos indica que un notable porcentaje de la población (41%) en su valoración personal sobre la Dictadura, le otorga una puntuación de 0. Dado que sólo el 15 % de los encuestados da una puntuación superior a 3, podemos afirmar que esa época fue perjudicial. - Por otra parte, mientras que la moda se obtiene en el 0, la valoración media obtenida ronda los 1,68.
- d) Valora del 0 al 10 la democracia española que vivimos hoy en día en todos sus aspectos (política, sociedad, economía,...), sabiendo que una menor valoración supone que usted piensa que ha sido perjudicial.
 - Variable: Valoración personal sobre la democracia en la que vivimos
 - Tipo de variable: Cuantitativa discreta

x_i	n_i	N_i	$x_i \cdot n_i$	$ x_i - \bar{x} $	$ x_i - \bar{x} \cdot n_i$	$x_i^2 \cdot n_i$
0	0	0	0	7,7	0	0
1	0	0	0	6,7	0	0
2	0	0	0	5,7	0	0
3	1	1	3	4,7	4,7	9
4	3	4	12	3,7	11,1	48
5	0	0	0	2,7	0	0
6	11	15	66	1,7	18,7	396
7	16	31	112	0,7	11,2	784
8	8	39	64	0,3	2,3	512
9	18	57	162	1,3	23,2	1458
10	9	66	90	2,3	20,6	900
	n: 66		509		91,9	4107

Medidas de centralización:

- Moda: 9
- Media: 7,7
- Mediana: 8

Medidas de localización:

- Cuartiles: Q1 = 7, Q2 = 8, Q3 = 9
- Rango intercuartílico: Q1 – Q3 = 2

Medidas de dispersión:

- Rango: 10
- Desviación media: 1,39
- Varianza: $62,22 - 59,29 = 2,93$
- Desviación típica: 1,71
- Coeficiente de variación: 0,22

Figura 8.

- La moda nos indica que un notable porcentaje de la población (27%) en su valoración personal sobre la democracia, le otorga una puntuación de 9. Dado que sólo el 6 % de los encuestados da una puntuación inferior a 5, podemos afirmar que esta época que vivimos es buena para la sociedad.
 - Por otra parte, mientras que la moda se obtiene en el 9, la valoración media obtenida ronda los 7,7. Cabe destacar un porcentaje de un 6% en las valoraciones de 3 y 4, debido posiblemente a la crisis económica.
- e) ¿Cree usted que la crisis económica actual afecta al crecimiento natural de la población?
- Población: Vecinos/as de Arjonilla
 - Muestra: He realizado un muestreo aleatorio simple para seleccionar una muestra de tamaño 66.
 - Variable: Opinión sobre el efecto de la crisis a la población
 - Tipo de variable: Cualitativa

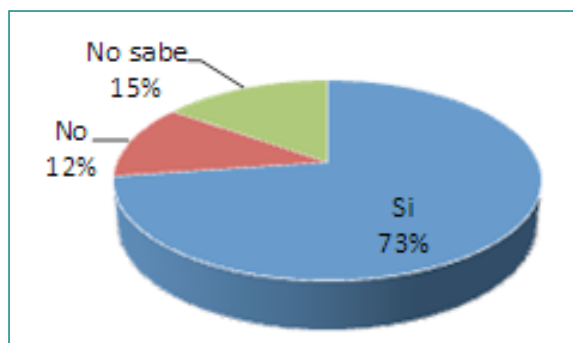


Figura 9.

- El 73% de las personas entrevistadas opina que la crisis afecta al crecimiento natural de la población, mientras que el 8% cree que no y el 10% restante no lo sabe.

Movimientos naturales

En este apartado se ha analizado los movimientos naturales, es decir, los nacimientos y las defunciones ocurridas desde el año 2000 hasta el pasado 2011. En el archivo histórico municipal se recogieron los siguientes datos:

Año	Nacimientos	Defunciones	Tasa natalidad	Tasa Mortalidad
2000	39	32	1,00%	0,81%
2001	35	27	0,89%	0,68%
2002	41	28	1,40%	0,70%
2003	36	31	0,91%	0,78%
2004	39	27	1,00%	0,68%
2005	32	29	0,80%	0,73%
2006	35	31	0,89%	0,79%
2007	29	33	0,74%	0,84%
2008	27	34	0,69%	0,87%
2009	29	24	0,75%	0,62%
2010	26	35	0,67%	0,91%
2011	28	30	0,70%	0,78%

Figura 10

Además, se calculó el crecimiento natural de la población durante todos estos años. Este cálculo se hace restando a los nacimientos las defunciones y así obteniendo un crecimiento natural negativo o positivo dependiendo de los datos.

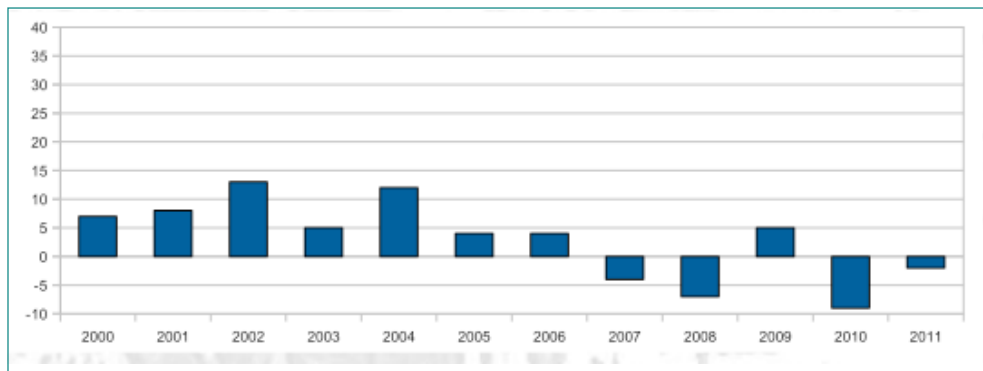


Figura 11.

- El año en el que se produce un mayor crecimiento natural es el 2002 con una subida de 13 habitantes; mientras que el menor crecimiento natural se obtuvo en el 2010, con una pérdida de 9 habitantes.
 - Se puede apreciar en la gráfica que, desde que llegó la crisis económica a España, el crecimiento natural ha descendido a causa de falta de natalidad y no por una gran mortalidad.
- a) ¿Cree usted que las personas podrán tener una esperanza de vida muy superior a los 100 años en las siguientes décadas?
- Variable: Opinión sobre la futura esperanza de vida
 - Tipo de variable: Cualitativa

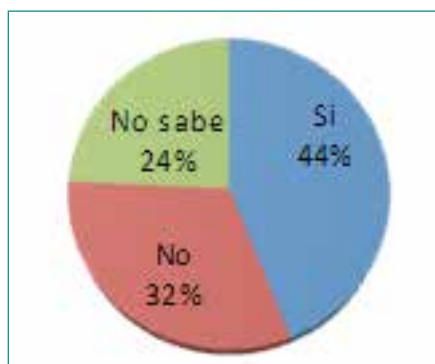


Figura 12

- El 44% de las personas entrevistadas opinan que se podrá llegar a una esperanza de vida de más de cien años en las próximas décadas. Sin embargo, el 32% dice que NO y el 24% restante, NO LO SABE.
- Estos datos están muy equilibrados, lo que quiere decir que en las respuestas no hay un porcentaje que sobresalga sobre el resto.

b) ¿Cuántos hijos/as tiene usted?

- Variable: N° de hijos
- Tipo de variable: Cuantitativa discreta

x_i	n_i	N_i	$x_i \cdot n_i$	$ x_i - \bar{x} $	$ x_i - \bar{x} \cdot n_i$	$x_i^2 \cdot n_i$
0	3	3	0	3	9	0
1	5	8	5	2	10	5
2	15	23	30	1	15	60
3	22	45	66	0	0	198
4	11	56	44	1	11	176
5	7	63	35	2	14	175
6	3	66	18	3	9	108
	n: 66		198		68	722

Medidas de centralización: **Medidas de dispersión:**

- Moda: 3
- Media: 3
- Mediana: 3
- Rango: 6
- Desviación media: 1,03
- Varianza: $10,9 - 9 = 1,9$
- Desviación típica: 1,37
- Coeficiente de variación: 0,46

Medidas de localización:

- Cuartiles: $Q_1 = 2, Q_2 = 3, Q_3 = 4$
- Rango intercuartilico: $Q_1 - Q_3 = 3$

Figura 13.

- La moda nos indica que un notable porcentaje de la población (33%) tiene tres hijos. Sólo el 35,5 % de los encuestados tiene dos hijos o menos y el 32,5 % tiene cuatro o más hijos. Cabe destacar que la moda se obtiene en el 3 y coincide con el número medio de hijos. También hay que señalar que el porcentaje de tener 0 hijos coincide con el de tener 6 hijos (4,5%).
- Como podemos observar, la distribución es muy simétrica en torno a la media y moda, dejando por debajo de dicho valor el 23% de los datos y por encima el 22%.

c) ¿Está usted de acuerdo con la ley del aborto?

- Variable: Opinión sobre la ley del aborto
- Tipo de variable: Cualitativa

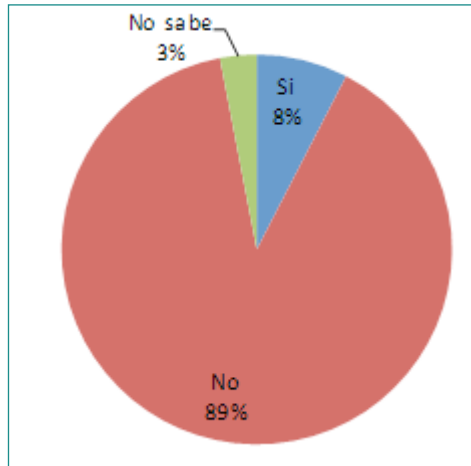


Figura 14.

La 89% de las personas entrevistadas NO están de acuerdo con la ley del aborto; sin embargo, el 8% opina que SI y el 3% restante dice que NO LO SABE.

Movimientos migratorios

En el siguiente apartado he estudiado los movimientos migratorios (inmigraciones y emigraciones) ocurridos en Arjonilla desde el 2000 hasta el 2011. ¿Cree usted que alguna vez emigrará?

- Variable: Opinión sobre la posible emigración
- Tipo de variable: Cualitativa

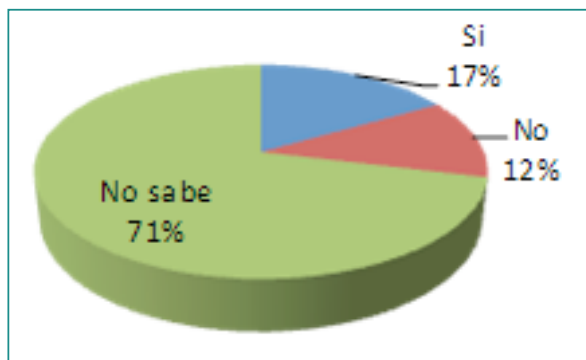


Figura 15

La moda nos indica que el 71% de la población no sabe si alguna vez emigrará, el 12% cree que sí y el 17% restante dice que no lo sabe.

Estructura de la población

El siguiente apartado pretende estudiar la situación laboral, nivel de estudios y edad de los vecinos/as de Arjonilla.

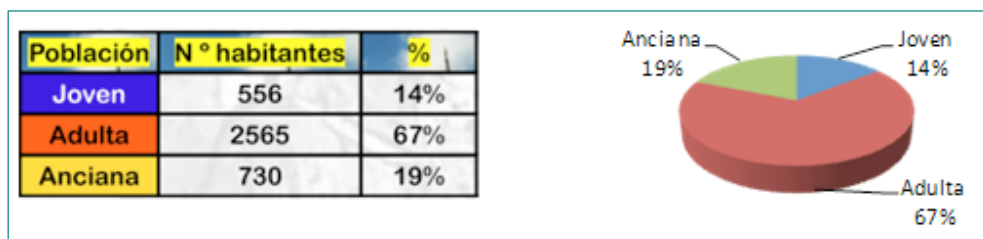


Figura 16. Edad

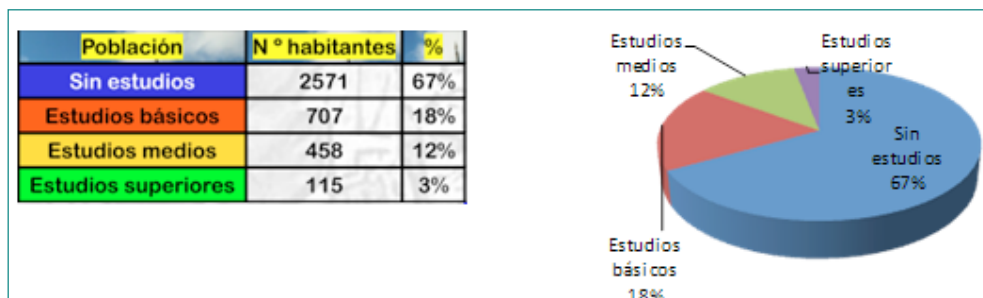


Figura 17. Nivel de estudios

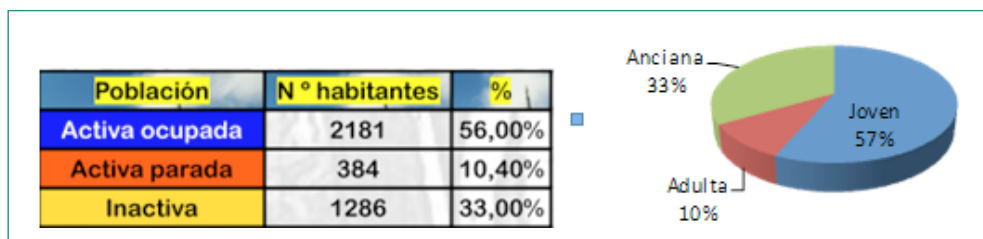


Figura 18. Situación laboral

Cuando se habla de población activa parada nos referimos a aquella población que tiene edad de trabajar mientras que la inactiva es aquella que no tiene edad de trabajar (jubilados y personas menores de 16 años).

- El 67 % de la población arjonillera es adulta con edades comprendidas entre 16 y 64 años. Sorprende ver que el 67 % de la población arjonillera no tiene los estudios básicos.
- A medida que aumenta el nivel de los estudios, disminuye el porcentaje de personas que los ha realizado en Arjonilla. Esto se puede deber a la falta de un centro educativo de Bachillerato, ciclos formativos y universidad.
- Me sorprende mucho obtener estos datos porque hay un pequeño porcentaje de población activa parada (10,40%). Creo que estos resultados son debidos a que la mayoría de la población arjonillera trabaja en el sector primario.

Desarrollo económico

En este apartado voy a hablar sobre el desarrollo económico en la localidad y las personas que trabajan en cada sector económico. Para ello pasaré a analizar los resultados obtenidos de mi encuesta

a) ¿En qué trabaja?

- Variable: Sector en el que trabajan los vecinos de Arjonilla
- Tipo de variable: Cualitativa

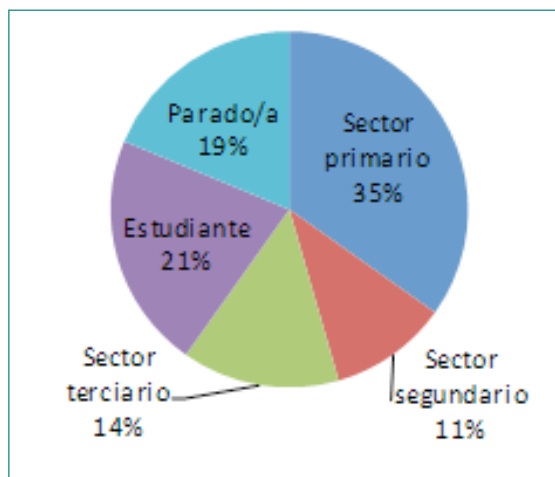


Figura 19.

- El 35% de la población entrevistada trabaja en el sector primario, le siguen los estudiantes con un porcentaje de un 21% y los parados con un 19%
- Entre el sector secundario y el terciario hay una pequeña diferencia de un 3%

Aspectos territoriales. El clima

En este apartado hablaremos sobre las temperaturas y pluviosidad ocurridas en Arjonilla desde el día 7 al 21 de marzo de 2012. Para ello hemos recogido los siguientes datos y los he representado mediante un climograma.

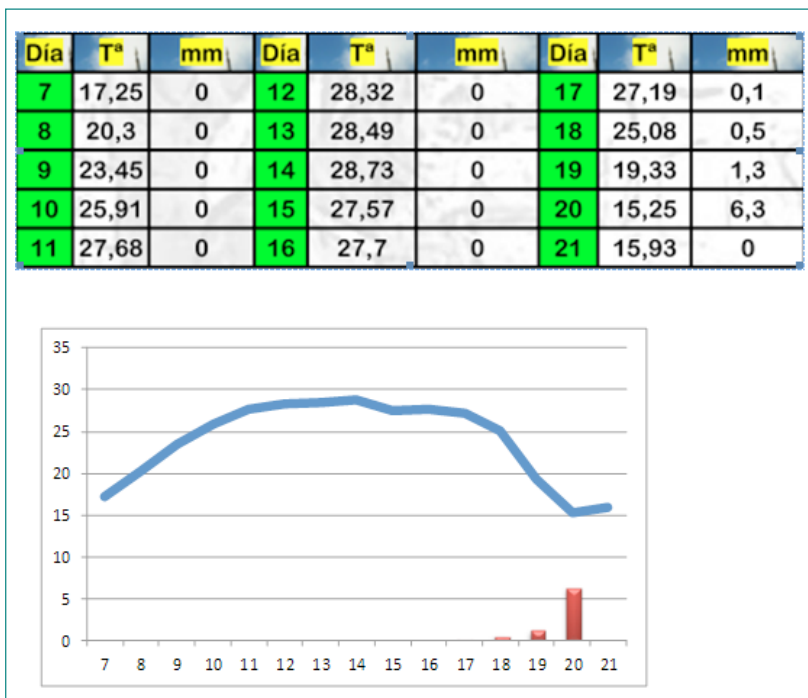


Figura 20.

En el gráfico podemos observar las temperaturas obtenidas en estos días (representadas mediante el polígono de frecuencias en rojo) y la pluviosidad (representadas en el diagrama de barras)

- En vista de los resultados, podemos decir que durante este periodo de tiempo cuando la temperatura desciende, la pluviosidad aumenta.

CONCLUSIONES

Este estudio no sólo me ha servido para participar en el I Certamen de Sur ``Incubadora de Sondeos y Experimentos``, sino que también me ha permitido conocer un poco más lo que piensan los vecinos de mi localidad sobre su historia.

Además hemos podido conocer la valoración general que hacen mis vecinos de Arjonilla en temas actuales y de épocas pasadas. Por otra parte, he conocido un poco de historia de este municipio y su influencia en la población. Por último y no menos importante, el desvelo de datos históricos y ricos en historia de épocas pasadas, como son los diferentes exilios de la guerra civil.

- Respecto a la evolución de la población, podemos concluir que la población de Arjonilla en los últimos 500 años ha variado entre los 2500 habitantes que había en el año 1775 y los 5900 habitantes que había en 1960.
- Al realizar el estudio de las vivencias de los arjonilleros durante la contienda civil, he descubierto que tenían una edad media de 5,1 años y un 44% se vio obligada a exiliar dentro de la provincia.
- En cuanto a la dictadura de Franco, el 41% de la población la valora como una época perjudicial. No pasa lo mismo con la democracia, en la que un 27% considera que es una época buena para la sociedad.
- Respecto a los movimientos naturales (natalidad y mortalidad), podemos concluir que la población arjonillera ha tenido un crecimiento natural negativo desde que llegó la crisis a España. Por otra parte la media de hijos por entrevistado es de unos tres hijos.
- Respecto a los movimientos migratorios (emigraciones e inmigraciones), el 71% de la población arjonillera no sabe si emigrará alguna vez fuera de la localidad de Arjonilla. Esta duda de la población sobre su ``posible emigración`` es causada por la situación social y económica de la crisis.
- En la población arjonillera, nos encontramos multitud de personas (sobre todo adultas y ancianas) sin estudios (67%), causadas generalmente por la falta de acceso a la educación en épocas anteriores. A medida que va subiendo el grado de nivel de estudios, el porcentaje de personas es menor.
- Hay un pequeño porcentaje de población activa parada (10,40%). Creo que estos datos son debidos a que el 35% de la población arjonillera trabaja en el sector primario, le siguen los estudiantes con un porcentaje de un 21% y los parados con un 19%.
- Con los datos obtenidos mediante el termómetro y el pluviómetro, he anotado las temperaturas y precipitaciones de los días 7 al 21 de marzo y podemos concluir que cuando la temperatura desciende, la pluviosidad aumenta y en el caso contrario, cuando la temperatura aumenta, la pluviosidad desciende.

REFERENCIAS

I.N.E. (2012). <http://www.ine.es/>

Moore, E. S. (2005). *Estadística aplicada básica*. Barcelona: Antoni Bosch editor.

Las XVI Jornadas para el Aprendizaje y la Enseñanza de las Matemáticas en Palma de Mallorca “¡JA EM arribar!”

Marta López Cáceres
(Universidad de Córdoba)

Elena Recio Rodríguez
(Universidad de Cádiz)

Lucía Vázquez Rodríguez
(Universidad de Cádiz)

Durante los días 2, 3, 4 y 5 de julio de 2013 se ha celebrado en Palma de Mallorca las XVI JAEM, en Sa Riera, IES Ramón Lull, La Misericordia y el Teatro Principal, con la asistencia de 550 participantes.

Estas jornadas bienales tienen dos importantes tareas: por un lado, que sus asistentes puedan conocer las novedades y tendencias que aparecen en el campo de la Educación Matemática, y estar al día de todas ellas; por otro lado, servir de presentación de los trabajos que sus participantes realizan durante esos dos años en sus labores docentes.

Las XVI Jornadas han llevado por título “**Matemáticas y creatividad: un mundo en construcción**”, abordadas en siete grandes núcleos temáticos:



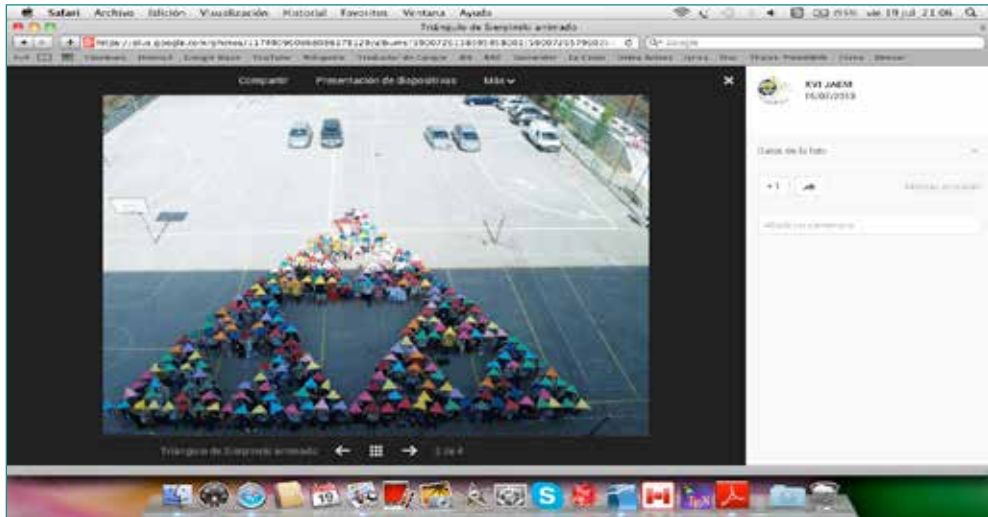
- 1) **Infantil y Primaria: ahí empieza todo.** En la actualidad sabemos que el proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas a edades tempranas tiene una gran importancia para que el alumno sea capaz de construir su aprendizaje. Este

proceso debe realizarse en continuo contacto con la realidad que les envuelve, es decir, tiene que partir de situaciones relacionadas con sus intereses, debe incluir la manipulación de objetos matemáticos y debe otorgar un papel activo a los alumnos en situaciones que permitan el afloramiento de la creatividad. Todo ello favorece el aprendizaje significativo de las matemáticas.

- 2) **Didáctica y formación del profesorado.** En los últimos años ha habido cambios sustanciales en la formación inicial del profesorado. La adaptación al marco de Bolonia ha supuesto, en general, un cambio positivo en los planes de estudio, tanto a nivel de magisterio, como a nivel de grado en la rama de especialización didáctica o en el máster de formación del profesorado. La formación continua es la otra gran clave de bóveda en nuestro quehacer profesional, donde las perspectivas actuales no son nada halagüeñas.
- 3) **Modelización y formación.** El conocimiento de la realidad pasa indefectiblemente por la construcción de modelos. Esta representación implica necesariamente los procesos lógico-matemáticos de abstracción, formalización y demostración, en los que aparecen procesos como definir, analizar, categorizar, conjeturar, razonar, generalizar o sintetizar.
- 4) **Resolución de problemas.** El planteamiento y la resolución de problemas es uno de los componentes esenciales de la actividad matemática y de su aprendizaje. Es importante que estén presentes de forma continuada a lo largo de todo el periodo formativo del estudiante y no constituir una pieza aislada de los diferentes currículos.
- 5) **Materiales y recursos en el aula de matemáticas.** Decía Maria Montessori que el niño tiene la inteligencia en las manos. El desarrollo tecnológico pone a nuestra disposición múltiples y variadas herramientas y recursos que se añaden a la gran cantidad de materiales de calidad que a lo largo de la historia han sido utilizados para facilitar el aprendizaje de las matemáticas.
- 6) **Conexiones y contextos.** Para que un aprendizaje sea significativo debe conectar con aquello que ya se sabe. Esto es, hacer conexiones con los conocimientos adquiridos anteriormente ya sea en el ámbito de las matemáticas o en otros campos. En este sentido, los contextos son el marco indispensable para que estas conexiones sean aplicables a la vida cotidiana, es decir, adquirieran un carácter competencial.
- 7) **Comunicación y divulgación.** El proceso de enseñanza-aprendizaje es un proceso de comunicación. Como dice Paul Watzlaswick, toda comunicación tiene un nivel de contenido y un nivel de relación que no podemos obviar ya que condiciona el primero. Véase imagen Triángulo de Sierpinski.

Las XVI Jornadas se han estructurado mediante conferencias plenarias, ponencias, comunicaciones, talleres, presentaciones, exposiciones, zocos, clips de aula y stands comerciales.

Las CONFERENCIAS PLENARIAS trataron de temas variados, sus grabaciones están disponibles en <http://xvi.jaem.es/programa/plenaries.html?lang=ca>, y fueron impartidas por:

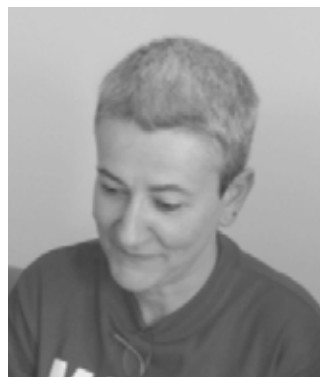


Triángulo de Sierpinski

Cristóbal Vila Laguarda, diseñador, ilustrador y animador 3D, fue el encargado de impartir la conferencia inaugural sobre **“Matemáticas y Animación 3D: un proceso creativo”**. Durante su charla vimos el proceso creativo y constructivo de varias de sus animaciones 3D, donde las Matemáticas, y muy especialmente la Geometría, están detrás. Como ocurre en “Snakes”, basada en uno de los más famosos grabados de Escher, “Isfahan”, inspirada en la arquitectura Persa y repleta de ornamentaciones de carácter geométrico, “Nature by Numbers”, donde se ponen en relación varios elementos de la naturaleza con sus referentes matemáticos, e “Inspirations”, donde hacemos un recorrido imaginario por el estudio de trabajo de Escher, lleno de referencias matemáticas y artísticas.



Marta Macho Stadler, doctora en Matemáticas por la Universidad Claude Bernard Lyon I (Francia), impartió la segunda conferencia plenaria sobre **“La Matemática, el arte y sus paradojas”**. El diccionario de la RAE define de este modo el término paradoja: idea extraña u opuesta a la común opinión y al sentir de las personas. Aserción inverosímil o absurda, que se presenta con apariencias de verdadera. Lo ‘opuesto a la común opinión’ es precisamente lo que ha permitido –y favorece– el avance en cualquier disciplina. En 1913, B. Russell y A.N. Whitehead finalizaron la publicación de sus *Principia Mathematica*, conjunto de tres libros que intentaba –entre otros– esquivar las ‘inconsistencias’ de las teorías matemáticas y lógicas vigentes. Cien años más tarde, las paradojas siguen siendo un motor en ciencia y en arte.



Carmen Aymerich Padilla, maestra de Infantil y Primaria, y **Manuel Barrios Lucena**, director y realizador en la Televisión de Cataluña, dieron la tercera conferencia sobre **“Contar se conjuga como amar, pero admite imperativo: cuéntame un cuento, o dos, o tres”**. La creciente preocupación por la enseñanza de las matemáticas, parece poner de manifiesto la necesidad de revisar aquellos modelos donde dicha materia queda reducida a un mero conocimiento instrumental, y el sujeto sometido a los formulismos de un lenguaje excesivamente especializado. Se deja de lado así, aquella dimensión más amplia que nos permite entender a las matemáticas como un lenguaje y un medio a partir del cual comprender y, sobre todo, relacionarnos con nuestro entorno. Vincular cuentos y matemáticas supone un intento de retomar, más allá de lo instrumental, y a través del lenguaje y del mito, ese flujo perdido entre lo real y lo fantástico, sin más límite que nuestra imaginación. *Una mà de contes*



de matemàtiques es un proyecto realizado en colaboración entre el departamento de programas infantiles y juveniles de Televisió de Catalunya y el CESIREcreamat del Departament d'Educació de la Generalitat de Catalunya en el año 2009 y cuya experiencia, después de cuatro años de aplicación, se muestra aquí como posible modelo pedagógico y de colaboración en favor de unos medios de comunicación y una enseñanza pública de calidad.

Francesc Rosselló Llompart, doctor en Matemáticas, y **Ana Patricia Trapero Llobera**, doctora en Filología Hispánica, fueron los encargados de la conferencia de clausura sobre **“Lo tuyo es puro teatro”**. Una clase es una actuación, ¿por qué no hacerla oficial? Nuestros estudiantes tienen una gran capacidad para el teatro aunque sólo la usen para intentar colarnos las más variadas excusas. ¿Por qué no usarla en la formación de sus compañeros? Hace unos meses, la aún Vicerrectora de Proyección Universitaria de la UIB, y directora de teatro, PT encargó a FR una serie de obras de microteatro sobre matemáticas que se pudieran representar en las aulas de secundaria en el marco del programa “La UIB contigo”. FR le dijo: “vale, pero tú también colaboras”. Y aquí están. En esta charla se presentaron, y representaron, algunos de los primeros productos de ese proyecto, que están a libre disposición de todos los enseñantes para que los usen y adapten a su gusto.



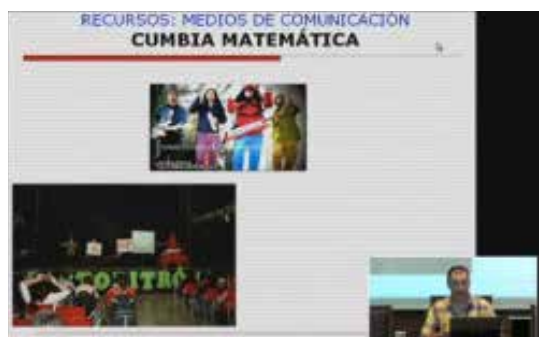
Las 8 PONENCIAS, de una hora de duración cada una, cuyas grabaciones están disponibles en <http://xvi.jaem.es/programa/ponencies.html?lang=ca>, fueron las siguientes:

- **“El aula de matemáticas: material y virtual”**, impartida por David Barba Uriach (Universidad Autónoma de Barcelona) y Cecilia Calvo Pesce (Escola Sadako, Barcelona). Creen firmemente que los materiales manipulativos juegan un papel básico en la actividad cotidiana en el aula de matemáticas de Primaria y Secundaria Obligatoria. Sin desestimar el aporte de las nuevas tecnologías al aprendizaje

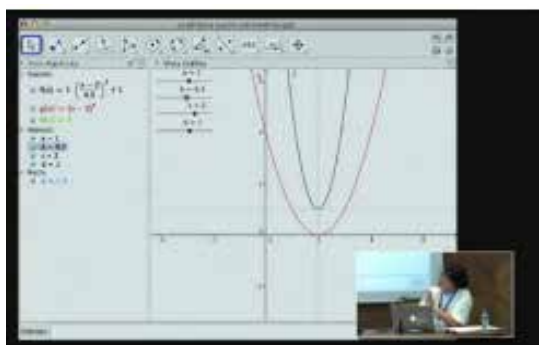
de las Matemáticas, al contrario, defienden el trabajo integrado de ambos recursos, que no compiten en el momento de repartir tiempo de clase sino que se complementan y potencian mutuamente. En la charla utilizaron el análisis de diversos ejemplos para hablar sobre esa relación.



- **“Compartiendo la pasión por las Mates”**, a cargo de Joaquín Comas Roqueta (SEMRM, Murcia). La ponencia intentó relacionar dos importantes tareas de gran relevancia en la docencia como son la comunicación y la divulgación en otra que puede complementarlas e incluso englobarlas, la acción de COMPARTIR. El hecho de compartir nuestras vivencias matemáticas pueden ayudarnos a dinamizar las clases y a que nuestros alumnos estén más motivados y compartan sus experiencias matemáticas con otras personas. Se presentaron una variedad de herramientas, vehículos de difusión, recursos y actividades que pueden facilitar el que nuestros alumnos hablen y disfruten con las Matemáticas.



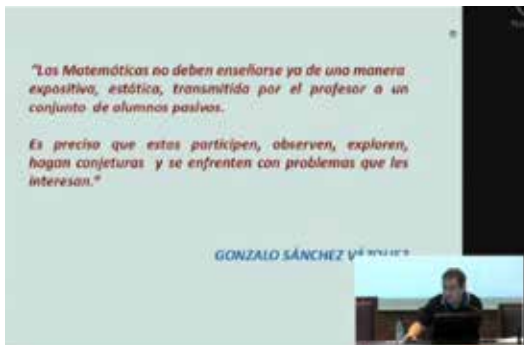
- **“Modelización con datos reales”**, de Luis Puig Espinosa (Departamento de Didáctica de las Matemáticas, Universidad de Valencia). La enseñanza de las matemáticas a través de la resolución de problemas con datos reales tiene una tradición ya de años en trabajos desarrollados tanto en España (desde el primer Grupo Cero) como en otros países. Desde este punto de vista, las situaciones de modelización son un lugar para el aprendizaje de conceptos y de procesos matemáticos. Se presentó aquí un modelo de enseñanza en el que se estudian el proceso de modelización, los conceptos de familia de funciones y forma canónica de una familia de funciones y el



significado de los parámetros de las formas canónicas con respecto a la función y al fenómeno que se modeliza.

- **“La formación del profesor de matemáticas”**,

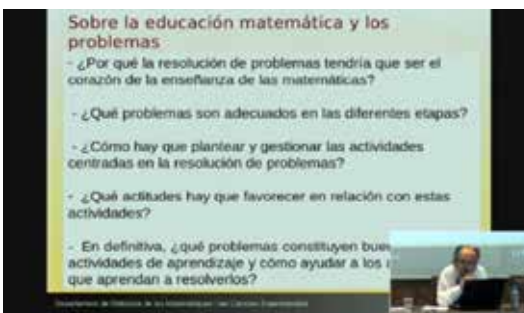
por Bernardino del Campo López (IES Julio Rey Pastor, Albacete). La LOE establece la formación permanente del profesorado. Cada comunidad autónoma ha desarrollado su propio modelo formativo determinado por sus objetivos y líneas prioritarias de formación. ¿Es adecuada la formación inicial que reciben



los que van a ser profesores de Matemáticas? El reciente Máster de Formación del Profesorado se está desarrollando con distintos grados de satisfacción. La situación económica actual y las TIC están modificando el modelo de formación tradicional. La formación debe proporcionar al profesor la actualización necesaria para hacer frente a las nuevas necesidades y demandas ya que desarrolla su trabajo en un contexto muy complejo y de cambios constantes. ¿Cómo es el actual modelo formativo en Castilla La Mancha?

- **“¿Quién tiene problemas? Un camino para aprender matemáticas”**,

a cargo de Jordi Deulofeu Piquet (Departamento de Didáctica de las Matemáticas y de las Ciencias, Universidad Autónoma de Barcelona). La resolución de problemas es una de las dimensiones de la competencia matemática y al mismo tiempo constituye un



camino para aprender matemáticas en todos los niveles. Después de una introducción sobre el papel de la resolución de problemas en la enseñanza, se analizaron las producciones de alumnos de 6º de primaria, así como las explicaciones sobre el proceso de resolución de un problema con altas exigencias competenciales. Así mismo, se consideró el contexto de juego para mostrar como los alumnos de secundaria son capaces de aplicar las heurísticas trabajadas en otros problemas de naturaleza matemática. Finalmente, se hicieron aportaciones al papel de la resolución de problemas en la formación de profesores de matemáticas.

- **“Los números preferidos del artista (números en el arte moderno)”**, impartida por Raúl Ibáñez Torres (Departamento de Matemáticas, Universidad del País

Vasco). ¿Es posible encontrar a los números que utilizamos en nuestra vida cotidiana representados en las obras de arte? A través de un paseo por el arte del siglo XX, que nos llevó del futurismo al arte conceptual, pasando por movimientos artísticos como el dadaísmo, el surrealismo, la abstracción geométrica o el arte pop, observamos como los



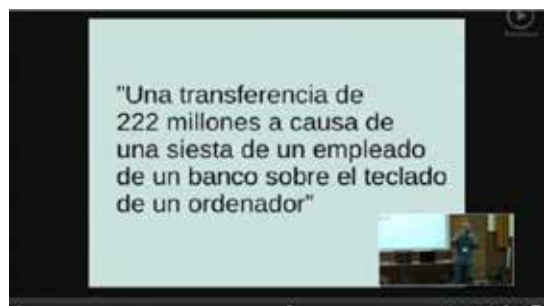
artistas han representado los números en sus pinturas y esculturas, pero no de una forma casual o marginal, sino como una parte importante de la obra, siendo incluso el motivo principal de la misma. En este paseo nos acompañaron artistas como Umberto Boccini, George Grosz, Hannah Höch, Charles Demuth, Paul Klee, Joan Miró, Jackson Pollock, Antoni Tàpies, Robert Indiana o Jasper Johns, entre otros.

- **“Creciendo con las matemáticas”**, de María Luisa Novo Martín (Facultad de Educación y Trabajo Social, Universidad de Valladolid). ¿Por qué las matemáticas ayudan a crecer, a desarrollar el razonamiento, consolidar la autonomía, promover la creatividad y entender el mundo? Creemos que se debe a su fuerza y vitalidad. A



pesar de su abstracción, sus conceptos y resultados surgen de experiencias concretas del mundo real y de la vida cotidiana. Los niños “crecen” jugando con conocimientos matemáticos sin darse cuenta, es con su aplicación en contextos significativos como van avanzando. Una de las finalidades de la Educación Matemática en la escuela es que las matemáticas formen parte de la vida de los niños y las niñas y las utilicen de forma comprensiva y eficaz en diferentes contextos.

- **“¿Y si Pitágoras hubiese sido periodista?”**, por Pere Estelrich Massutí (Colegio Sant Gaietà, Diario de Mallorca, Islas Baleares). La pregunta inicial fue ¿por qué las matemáticas se utilizan tan mal en los medios de comunicación? La lectura diaria de periódicos,



así como la visión de las noticias en televisión o la escucha de los informativos y magazines radiofónicos demuestra el poco conocimiento de conceptos nada elitistas, más bien básicos de los redactores. Se confunden unidades de medida, se incluyen gráficos estadísticos sin especificar la escala, se escriben cantidades astronómicas sin sentido... Errores como los que se cometen en la utilización de números sin que pase nada, sin que se pida rectificación serían penalizados si se cometieran en las secciones de deportes o política.

Las 96 COMUNICACIONES presentadas, de media hora cada una, dan idea de la amplitud de trabajos, conocimientos y necesidades en este campo de la educación matemática. Indicamos entre paréntesis el núcleo temático al que pertenecen, resaltamos (sin “despreciar” al resto) aquellas a las que tuvimos el placer de poder asistir, fueron:

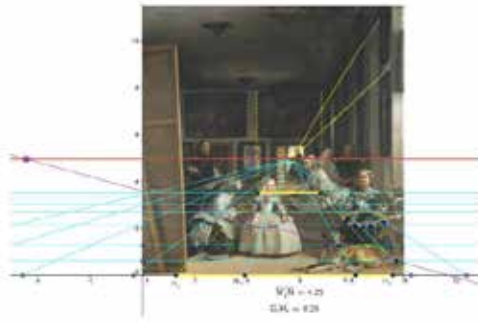
- **“El calendario lunisolar y la utilización del ciclo sexagesimal: matemáticas del calendario chino” (V, VII)**, por Carles Puig Pla (Universidad Politécnica de Cataluña). En ella se presentaron algunas ideas básicas sobre el concepto de calendario lunisolar y, en particular sobre el calendario chino y la fecha del Año Nuevo Chino. Los conceptos astronómicos y las matemáticas implicadas en el calendario chino pueden ser una fuente útil para la enseñanza y el aprendizaje en el aula de matemáticas, por ejemplo para trabajar el sistema de numeración en base 60.



- **“Profe, ¿esto para qué sirve? Dos proyectos para responder a esta pregunta: vídeoMAT y Matemàtiques en acció” (V, VII)**, a cargo de Anton Aubanell y Sergi del Moral (CESIRE-CREAMAT). Se mostró el esfuerzo del profesorado para incorporar a sus clases aplicaciones de la matemática a situaciones reales concretas. Por ejemplo, desde el CREAMAT, se han impulsado los proyectos vídeoMAT y “Matemàtiques en acció”, donde se utilizan pequeños vídeos para mostrar algunas aplicaciones de las matemáticas. Destacar, entre otras cosas, las frases ¡Y a veces la matemática está tan en los cimientos del saber que no se ve!, ¡La invisible relevancia de las matemáticas!.



- **“Reconstrucción del espacio de las Meninas” (VI)**, por Jesús Hernando Pérez (IES Los Castillos, Alarcón, Madrid). Decía Capi Corrales en Zaragoza durante unas jornadas divulgativas denominadas Matemática Vital que “con la pintura es más fácil hacer entender las matemáticas” y aludía después precisamente a las



Meninas como contexto para su aprendizaje. Por medio de la perspectiva cónica y usando como DGS GeoGebra se presentó, en la línea de intervención didáctica ya iniciada en las JAEM de Gijón (2011) una nueva aproximación a la reconstrucción y dimensionado del espacio euclídeo donde tiene lugar la escena percibiendo, en el camino, muchas matemáticas.

- **“... y también guías turísticos” (VI)**, por Ángel Requena Fraile (Jubilado). En esta ponencia se mostró otro papel nada despreciable para el profesor de matemáticas, como es el de guía turístico. Entre los múltiples ejemplos expuestos sobre las matemáticas presentes en los sepulcros e iglesias, destacar la tumba de Ramón Llull, en la iglesia de St Francesc en Palma de Mallorca, que tiene la particularidad de que tiene imágenes que representan el trivium y el cuadrivium clásico. Algo que se ponía en las tumbas para indicar que la persona allí enterrada era sabio. Así pudimos encontrar imágenes representando a la música, la geometría, la astronomía o la aritmética, como la que adjuntamos en la imagen.



- **“Juegos y pasatiempos en clase de matemáticas” (V)**, de Ana García Azcárate (Grupo Azarquiel. Jubilada). Se presentaron una recopilación de juegos y pasatiempos que se han ido utilizando en nuestras clases y que están disponibles para su descarga en Internet, como son juegos de tablero, dominós, tarjetas de bingo, barajas de cartas



matemáticas, pasatiempos de todo tipo que conforman un conjunto de materiales listo para llevar a las aulas. Abajo los dos libros publicados por Ana sobre pasatiempos y juegos en clase de matemáticas.

Los 28 TALLERES de índole diversa, con una duración de una hora y cuarto, destacamos aquellos a los que asistimos:

- **“Técnicas de teselado: papiroflexia en tela” (V)**, a cargo de Francisco Fernández Arévalo y Gregorio Morales (CEIP Reina Sofía, Petrer, Alicante). Se presentó una novedosa técnica de crear teselados en tela que por su sencillez puede emplearse en cursos de Primaria pero que presenta retos para su inclusión en Secundaria.



- **“A vueltas con la divisibilidad. Números y engranajes” (V, VII)**, por Josep Rey Nadal y Manuel Udina Abelló (Asociación MMACA, Museo Matemáticas Cataluña). Se presentó un material físico (de madera) consistente en ruedas dentadas que pueden alinearse en un eje o hacer girar alrededor de coronas circulares (interior o exteriormente), y el correspondiente material en forma de applets GeoGebra para complementar el estudio. Se plantearon problemas a partir de las longitudes (número de dientes) de las distintas piezas y se obtuvo una cierta modelización de conceptos como m.c.d. y m.c.m. También se consideró el estudio de algunas cicloides.



- **“Funcionamiento y actualidad de la Regla de Cálculo” (V)**, de Ángel Requena Fraile (jubilado). La calculadora digital científica desplazó en los años setenta a la Regla de Cálculo, el instrumento que había sido el auxiliar indispensable, e incluso símbolo, de científicos e ingenieros. Tras cuarenta años de abandono, los últimos profesores que la usaron se están jubilando, pero la vieja regla todavía puede ser útil en la escuela. El taller nos permitió aprender a usar la Regla con un ejemplar real de diez pulgadas, ¡lástima que no nos lo pudimos quedar! Fue una gozada poder tocar una



auténtica regla, para iniciarse (en nuestro caso) o recordar su uso, y descubrir sus múltiples posibilidades didácticas.

- **“Juegos de cordel” (I, V)**, por Enric Brasó i Campderrós (IES Arnau Cadell, Sant Cugat del Vallès, Barcelona). En este taller se enseñaron y practicaron algunos de los juegos de cordel poco divulgados, consistentes en realizar figuras con un trozo de cordel atado por los extremos. Investigamos exhaustivamente cómo enlazan todas las figuras de nuestro conocido juego de cordel.



- **“Matemáticas con papel. Dodecaedro, pentágono y caja pengagonal” (V)**, por Covadonga Blanco García, Teresa Otero Suárez y Alicia Pedreira Mengotti (EUAT, Universidad de A Coruña). En este taller trabajamos con papel utilizando las técnicas de la papiroflexia para proporcionar herramientas que sean



de interés en el aula de matemáticas. Construimos, al menos lo intentamos, el dodecaedro regular aplicando papiroflexia modular, el pentágono regular en cinco colores y la caja pentagonal con una variación del módulo pentagonal.

- **“Taller de poliedros con bastoncillos e hilo de pescar” (V)**, por Esperanza Teixidor Cadenas (Atlantic schools Guaydil). Construimos poliedros con forma sencilla con bastoncillos e hilo de pescar, que además son fáciles de rotar y ver el cuerpo de revolución generado. También abordamos las aplicaciones didácticas de estas construcciones, por ejemplo el cubo que puede convertirse manipulándolo en



siete polígonos (hexágono, trapecio, rombo, cuadrado, triángulo, rectángulo y romboide) y tres cuerpos (cubo, tetraedro y pirámide cuadrangular).

- **“La otra cara de la Cinta de Möbius” (V)**, por Antonio Fernández Aliseda Redondo,

Juan Antonio Hans Martín, Antonio Ledesma López y José Muñoz Santonja (IES Macarena, Sevilla). Se presentaron algunos de los aspectos menos conocidos de la banda,

viendo que ocurría cuando se tiene dos bandas pegadas perpendicularmente o cuando se corta una cinta de Moebius a la vez por su mitad y por su tercera parte. También trabajamos con cinta de Moebius en los que imprime un cómic y que, al pegar la cinta, se convierte en una historia cíclica sin fin, o el poco conocido poliedro de Moebius que ya habían trabajado en el Open Matemático y en la Feria de la Ciencia de Sevilla.



- **“¡Vaya lío, profe! Trabajando con las Tensegridades en clase” (V)**, por Pedro Alcobas Cegarra, Joaquín Comas Roqueta, Alicia Martínez Henarejos, Noelia Navas Martos y M^a Isabel Salas Vizcaíno

(IES Sierra Minera, La Unión, Murcia; IES Thiar, Pilar de la Horadada, Alicante). En este taller trabajamos distintas construcciones geométricas. Comenzamos con tensegridades, estructuras de reciente descubrimiento formadas por barras que están flotando en el aire, tan sólo sujetas mediante cables o gomas a otras barras. También construimos distintos poliedros, trabajamos con el Teorema de Euler y realizamos diversas figuras geométricas combinando el uso de diversos materiales cotidianos como palillos, pajitas, bastoncillos,... y el programa informático Poly Pro.



- **“Taller de visualización 2D – 3D” (V)**, por David Barba Uriach, Cecilia Calvo Pesce, Ana Cerezo, Miquel Ferrer y Laura Morera

(Universidad Autónoma de Barcelona). El taller comenzó con una breve presentación del TRIDIO®, un material de referencia para



trabajar representaciones convencionales de objetos del espacio en el plano. Luego dedicamos una parte importante a la manipulación guiada de diferentes versiones de este material. Finalmente, se pusieron en común las reflexiones sobre la importancia de este tipo de actividades en el contexto del currículum escolar.

- **“Tema 13. Estadística y probabilidad” (V)**, por Guillem Bonet, Raül Fernández Hernández, Inma Font, Núria Fortuny, Anna Manrique Ortega, Silvia Margelí Voelp, Cati Mora, Victòria Oliu, Mirreia Pacreu, Sandra Soliguer, Quim Tarradas, Berta Vila y Aina Villarroya (Institutos de Secundaria de Girona).

Se presentaron actividades dirigidas a alumnos de ESO y de los últimos cursos de primaria para proponer en clase de forma puntual o formar parte de una secuencia más elaborada. En cualquier caso, actividades ricas, competenciales que plantean retos e inician la discusión.



Las 7 PRESENTACIONES fueron:

- **“Actividades matemáticas ricas: motivación y competencia”**, Vicens-Vives, a cargo de Javier Fraile.
- **“Presentación del libro homenaje a Eliseo Borrás”**, Servicio de Publicaciones FESPM, por Ricardo Luengo, Rafael Pérez y Xaro Nomdedeu.
- **“Novedades en el trabajo de las mates para Moodle”**, WIRIS, por Carles Aguiló.
- **“Ponencia y mesa redonda sobre: Evaluación del modelo educativo: desarrollo y aplicación de pruebas de evaluación para el caso de la competencia matemática (PIS y TIMSS)”**, INEE, por Ismael Sanz Labrador (Director Instituto Nacional de Evaluación Educativa, MECD), Francisco Javier García Crespo (Jefe de Área Gestión de Datos y Asuntos Generales Instituto Nacional de Evaluación Educativa, MECD), y Luis San Sanmiguel Modera (Instituto Nacional de Evaluación Educativa, MECD).
- **“Jugar con probabilidades”**, Ludocatessen, por Javier Zaforteza.
- **“Novedades CASIO. La nueva Classpad”**, por Tim Bebensee, Educational Project Manager, Casio Europe; José María Chacón, Maurici Contreras, José Manuel Fernández y Agustín Carrillo de Albornoz.
- **“La Organización de Estados Iberoamericanos para la Educación, la Ciencia y la Cultura (OEI). Líneas de actuación”**, OEI, a cargo de Juan Carlos Toscano y Agustín Carrillo de Albornoz.

Las 6 EXPOSICIONES sirvieron de contrapunto y descanso a las actividades más habituales y nos mostraron una manera muy dinámica de interactuar con todo un centro o con toda una ciudad en la presentación de contenidos matemáticos. Fueron las siguientes:

- **“13 plantes, 13 llibres, 13 sistemes numèrics...”**, SBM-XEIX (Sociedad Balear de Matemáticas).
- **“MMACA”** (Museo de Matemáticas de Cataluña).
- **“Las exposiciones-taller del IES Santayí (2006-2009)”**, SBM-XEIX, por María del Mar Rigo Rigo.
- **“Cuadrando ideas”**, SBM-XEIX.
- **“Concurso fotográfico”**, JAEM.
- **“Un passeig per l’infinit”**, SEMCV Al Khwarizmi (Sociedad de Educación Matemática de la Comunidad Valenciana).

En los 6 ZOCOS hubo presentación y realización de distintas construcciones para el desarrollo de la actividad matemática en el aula, fueron los siguientes:

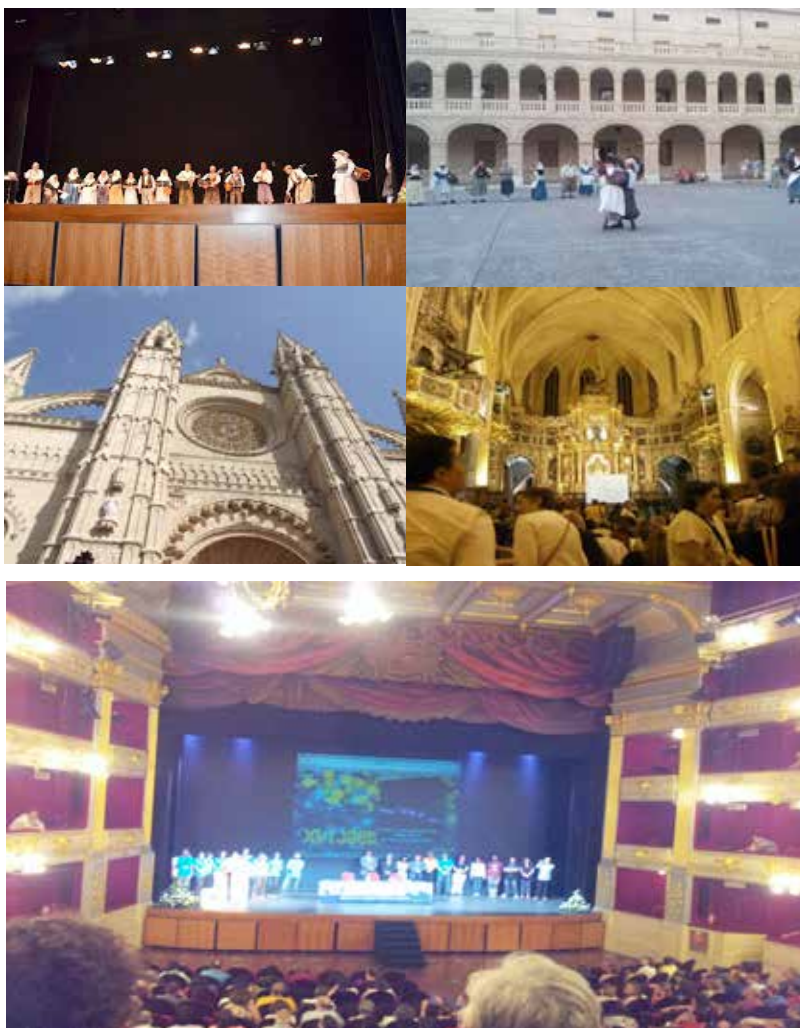
- **“Fotografía matemática: Con pico y alas” (VI)**, por José María Sorando Muzás (IES Elaios, Zaragoza).
- **“Teselados en tela y papel” (V)**, de Francisco Fernández Arévalo y Gregorio Morales (CEIP Reina Sofía, Petrer, Alicante).
- **“Mundos calidoscòpicos” (VI)**, por Glòria Rigau, Laura García, Sílvia Margelí, Sandra Soliguer, Nùria Fortuny y Aina Villarroya (IES Ramon Coll y Rodés, Lloret de Mar, Girona).
- **“Polifiltros 3D” (V)**, de José Luis Rodríguez Blancas (Universidad de Almería).
- **“¿Cuál es en realidad nuestra representación del mundo?” (VII)**, de Daniel Ramos, Enric Brasó y Manuel Udina (Ins. Arnau Cadell, Sant Cugat del Vallès, UAB).
- **“Tema 13. Estadística y probabilidad” (V)**, por Guillem Bonet, Raül Fernández Herández, Imma Font, Nùria Fortuny, Anna Manrique Ortega, Sílvia Margelí Voelp, Cati Mora, Victòria Oliu, Mireia Pacreu, Sandra Soliguer, Quim Tarradas, Berta Vila y Aina Villarroya (Institutos de Secundaria de Girona).

Los 5 CLIPS DE AULA fueron:

- **“FACTORITRON, campeonato de habilidad matemática” (V)**, a cargo de Pedro Alcobas Cegarra, Joaquín Comas Roqueta, Alicia Martínez Henarejos, Noelia Navas Martos y M^a Isabel Salas Vizcaíno.
- **“IX Semana matemática COMEMATES” (VII)**, por Pedro Alcobas Cegarra, Joaquín Comas Roqueta, Alicia Martínez Henarejos, Noelia Navas Martos y M^a Isabel Salas Vizcaíno.
- **“Las tarjetas que regalan matemáticas” (V)**, de Eva M^a Perdiguero Garzo.
- **“Números perfectos y números amigos” (V)**, por Eva M^a Perdiguero Garzo.
- **“La maldición de los pares” (V)**, de Eva M^a Perdiguero Garzo.

También hubo diversos STANDS, puestos comerciales donde encontramos materiales diácticos, juegos, libros y materiales tecnológicos propuestos por diferentes empresas del sector, con la posibilidad de adquirir los artículos que nos interesaran. Además, algunas de estas empresas realizaron presentaciones de su material.

Finalmente, en el apretado programa durante estos escasos días no se olvidaron los aspectos lúdicos. Nos obsequiaron con la actuación de la **Escola de Ball de Bot de Bunyola y Xeremiers** en el acto de inauguración, la excursión por el casco antiguo de la ciudad de Palma y la visita a **La Seu** (como se conoce popularmente a la Catedral de Mallorca), y para acabar con un buen sabor de boca en la iglesia de St Francesc, pudimos disfrutar de un **recital de órgano a cargo del organista Arnau Reynés Florit**.



Nuestras felicitaciones y agradecimientos, por la excelente organización de las XVI JAEM y hacernos disfrutar de una Mallorca acogedora y atractiva, en primer lugar al comité local organizador, y en segundo lugar, y no menos importante, al comité científico.

Retos matemáticos para Primer Ciclo de Secundaria

Juan Diego Sánchez
Editorial CCS, Madrid
2013. Primera edición
ISBN: 978-84-9023-059-6
144 páginas

No cabe duda de que las matemáticas generan mucha animadversión en las aulas, no es una materia que se acoja con agrado, en general. Uno de los motivos por los que puede ocurrir esto es porque en la mayoría de las ocasiones dejamos a un lado que las Matemáticas son un juego, intelectual, pero al fin y al cabo un juego que permite entrenar la mente, y como dice el autor de *Retos Matemáticos para Primer Ciclo de Secundaria*, Juan Diego Sánchez, las matemáticas nos pueden proporcionar horas y horas de diversión.

Una forma de destacar esa parte lúdica de las matemáticas y cambiar ese “yo no sé hacer esto” por “voy a intentarlo” es utilizando retos matemáticos como los que nos presenta el autor en este libro. Muchos de ellos son propios de los conceptos recogidos en el currículo de matemáticas para este ciclo y otros les van a permitir aprender mucho más, mejorar su competencia matemática descubriendo cosas nuevas sobre esta ciencia.

Es un libro indicado tanto para usarlo en el aula, para aprovechar esos ratitos sueltos en clase o para usarlo en un momento de esos que te das cuenta de que la clase se aburre, como para usarlo fuera del aula porque no necesita una guía concreta del docente. Se



puede escoger el reto que quieras y si no consigues resolverlo, después de haberlo intentando, siempre puedes echar mano de las soluciones.

Juan Diego Sánchez Torres (Jerez de la Frontera, 1972), Licenciado en Ciencias Matemáticas por la Universidad de Sevilla, es profesor de instituto. Entre sus publicaciones cabe destacar: *Ajedrez para el aula*, *Juegos de tablero. Para el aula y otros lugares*, *Problemas históricos de las Matemáticas* o *RECREAMÁTICAS. Recreaciones matemáticas para jóvenes y adultos*.

Natividad Adamuz-Povedano

Análisis Didáctico en Educación Matemática. Metodología de investigación, formación de profesores e innovación curricular

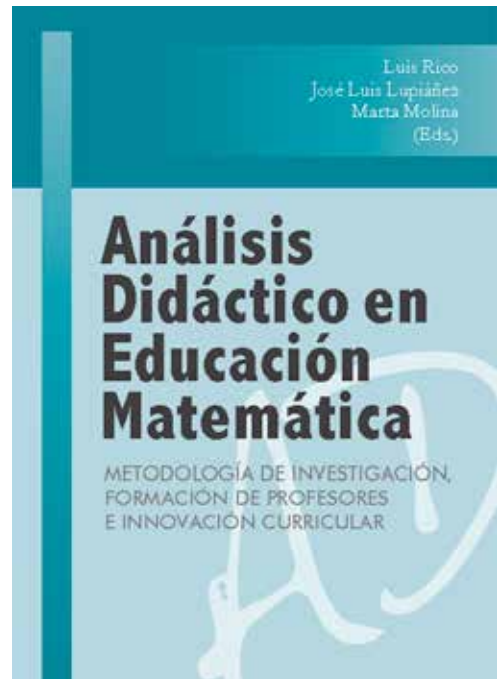
**Luis Rico
José Luis Lupiañez
Marta Molina
(editores)**

2013. Primera edición
Editorial Comares, Granada
ISBN: 978-84-9045-082-6
470 páginas

El análisis didáctico es una técnica metodológica utilizada en la investigación educativa en distintas áreas de conocimiento y cada vez es más utilizada en la investigación sobre Educación Matemática. Sin embargo, su forma de aplicación en la Educación Matemática hace que tenga unas características particulares inherentes a la naturaleza del conocimiento analizado, esto es, las matemáticas en el contexto curricular.

Este libro es fruto de la colaboración de un grupo de investigadores de esta disciplina que bajo la coordinación de los editores brindan una sólida fundamentación sobre los aspectos teóricos, además de diversos ejemplos de su uso en variados contextos de investigación.

La obra está estructurada en cuatro grandes apartados, en el primero se



presentan y explican los fundamentos teóricos del análisis didáctico como método de investigación, en el segundo se presentan investigaciones sobre la formación del profesorado donde se aplica este método. La tercera parte se dedica a ejemplificar el análisis didáctico en investigaciones de innovación curricular. Finalmente, en la cuarta parte se presenta su uso tanto como herramienta metodológica para el análisis de textos históricos en Educación Matemática como para revisar los antecedentes en una investigación.

A través de todo el libro se puede evidenciar la riqueza y el potencial del análisis de contenido para la investigación, puesto que se hacen tangibles las conexiones entre los fundamentos teóricos que lo sustentan y las investigaciones realizadas.

Es una obra útil para el investigador novel, puesto que le brinda las bases necesarias para comprenderlo como para iniciarse en este método de investigación y presenta ejemplos claros de su aplicación en la investigación. Así mismo, al investigador experimentado le ofrece nuevas ideas de investigación dadas las diferentes funciones y usos que se plantean.

Noelia Jiménez-Fanjul

