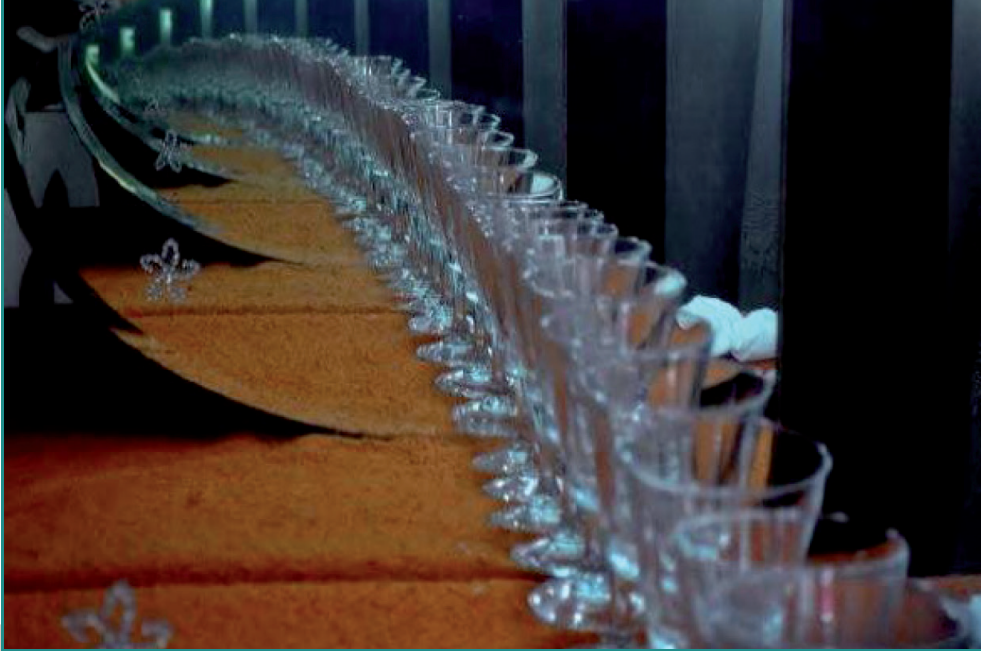


# 83

Vol. 30 (1)  
2013



*Vasos al infinito.* Autor: Antonia Huskinson. IES Mediterraneo (Garrucha)

# epsilon

Revista de Educación Matemática

Editada por la S.A.E.M. "THALES"

*La revista Epsilon está reseñada en:  
IN-RECS, Dialnet, Latindex, RESH, DICE y Base de Datos del  
Centro de Documentación Thales.*

# epsilon 82

Revista de Educación Matemática

## Director

Alexander Maz (Universidad de Córdoba)

## Comité Editor

Damián Aranda (IES Blas Infante, Córdoba)

Rafael Bracho (Universidad de Córdoba)

José M<sup>a</sup> Chacón (IES Llanes, Sevilla)

Francisco España (IES Ángel de Saavedra, Córdoba)

José Galo (IES Alhakén II, Córdoba,)

Manuel Gómez (IES Blas Infante, Córdoba)

Inmaculada Serrano (Universidad de Córdoba)

## Comité Científico

Evelio Bedoya,

*Universidad del Valle, Colombia.*

Matías Camacho,

*Universidad de la Laguna, España.*

José Carrillo,

*Universidad de Huelva, España.*

M<sup>a</sup> Mar Moreno,

*Universidad de Lleida, España.*

José Ortiz,

*Universidad de Carabobo, Venezuela.*

Modesto Sierra,

*Universidad de Salamanca, España.*

Liliana Mabel Tauber,

*Universidad Nacional del Litoral,  
Argentina.*

**Página de la revista:** <http://thales.cica.es/epsilon>

**Revista:** [epsilon@thales.cica.es](mailto:epsilon@thales.cica.es)

Sociedad Andaluza de Educación Matemática “Thales”

Edita

Sociedad Andaluza de

Educación Matemática “Thales”

Centro Documentación “Thales”

Universidad de Cádiz

C.A.S.E.M.

11510 PUERTO REAL (Cádiz)

Maquetación e impresión

Utrerana de Ediciones, s.l.

Cristóbal Colón, 12

41710 Utrera (Sevilla)

Depósito Legal

SE-421-1984

Período

1<sup>er</sup> cuatrimestre 2013

Suscripción

ESPAÑA: 42,00 euros

PAÍSES DEL EURO: 63,00 euros

RESTO DE PAÍSES: 90 \$ USA

(3 NÚMEROS AL AÑO)

## **S.A.E.M. THALES**

SIXTO ROMERO SÁNCHEZ

*Presidente*

FRANCISCO ESPAÑA PÉREZ

*Vicepresidente*

M<sup>a</sup> BELÉN SEPÚLVEDA LUCENA

*Secretaría General*

JOSÉ MARÍA VÁZQUEZ DE LA TORRE PRIETO

*Secretario de Administración y Tesorería*

## **SEDE**

FACULTAD DE MATEMÁTICAS

Edif. de la E.S.I. Informática. Ala L2

Avda. Reina Mercedes, s/n.

Aptdo. 1160

41080 SEVILLA

Tlfn. 954 62 36 58 - Fax: 954 236 378

e-mail: [thales@cica.es](mailto:thales@cica.es)

## **SEDE ADMINISTRATIVA DE LA SOCIEDAD Y REVISTA**

CENTRO DE DOCUMENTACIÓN THALES

Facultad de Ciencias. Departamento  
de Matemáticas

Campus del Río San Pedro, s/n

Torre Central, 4<sup>a</sup> Planta

11510 Puerto Real (Cádiz)

Tlf. y Fax: 956 012 833

e-mail: [thales.matematicas@uca.es](mailto:thales.matematicas@uca.es)

## **ALMERÍA**

JUAN GUIRADO GRANADOS

*Delegado Provincial*

## **CÁDIZ**

PALOMA PASCUAL ALBARRÁN

*Delegada Provincial*

## **CÓRDOBA**

MARINA A. TOLEDANO HIDALGO (pro-  
vis.). *Delegado provincial*

## **GRANADA**

MARÍA PEÑAS TROYANO

*Delegado Provincial*

## **HUELVA**

M<sup>a</sup> ROCÍO BENÍTEZ CAMBRA (provis.).

*Delegada provincial*

## **JAÉN**

M<sup>a</sup> EUGENIA RUIZ RUIZ

*Delegada provincial*

## **MÁLAGA**

SALVADOR GUERRERO HIDALGO

*Delegado provincial*

## **SEVILLA**

ANA M<sup>a</sup> MARTÍN CARABALLO

*Delegada Provincial*

7

## EDITORIAL

9

## INVESTIGACIÓN

9 **Validación de un cuestionario sobre actitudes hacia las matemáticas de estudiantes preuniversitarios**

Antonio Humberto Closas

Stella Nora Gatica y Juan Antonio Renaudo

25

**El uso de las historias de vida en la investigación sobre el profesorado: el caso de María Antonia Canals/ The use of life stories in research on teachers: the case of Maria Antonia Canals**

María Sotos Serrano

35

## EXPERIENCIAS

35

**El trabajo conjunto del profesor de física y el de matemáticas. Una aplicación al estudio del movimiento ondulatorio y del sonido**

Francisco Moreno Soto

49

**Sobre la génesis y evolución del Teorema de Rolle/ About the origin and evolution of the Rolle's Theorem**

Carlos Suso Fernández

María Victoria Velasco Collado

## IDEAS PARA EL AULA

### 67 **Thales dinámico en la espiral del currículo/ Thales dynamic in the spiral of the curriculum**

Silvia Bernardis - Susana Moriena

### 85 **La Discoteca de los Números/ The Numbers Nightclub**

M<sup>a</sup> Iranzu López de Dicastillo Garnica.

M<sup>a</sup> Inmaculada Palomo Sáenz,

Leonor López de Dicastillo Roldán

### 95 **Elaboración de material docente para iPad con iBooks Author/ Development teaching materials for iPad using iBook Author**

Fernando A. López-Hernández

Manuel Ruiz-Marín

## MISCELÁNEA

### 105 **«Comprar un caballo»: soluciones históricas a un tipo de problemas famosos/ «Buy a horse»: Historical solutions to sorts of problems famous**

Vicente Meavilla Seguí

Antonio M. Oller-Marcén

### 127 **¿Tenemos el mismo estilo de vida los jóvenes europeos?/ Do we have the same lifestyle young Europeans?**

Esther García-Ligero-Ramírez, Daniel Alcalá Cendrero, José M<sup>a</sup> Luque

Cobo, Rafael Muñoz Expósito, Cristian Nieto Pareja

Este año se cumplen 30 años de la revista Epsilon y coincidiendo con estas efemérides, la revista se adapta a los nuevos tiempos y pasa del formato impreso a un formato digital. No ha sido una decisión fácil. Desde que el actual comité editorial asumió la dirección de la revista ha estado haciendo consultas para tal fin. Tras muchas reuniones y valorando tanto los beneficios como los posibles aspectos negativos, la Junta directiva de la Sociedad Thales acordó llevar a cabo este cambio a partir del primer número del año 2013.

Con estos cambios también se producirán otros en el consejo editorial y consejo asesor de la revista, por lo que aprovecho para dar las gracias a todos los que han venido colaborando de manera desinteresada con la revista y que no continuarán. A todos ellos muchas gracias.

Se ha inaugurado una nueva sección de temas variados en la revista y que denominaremos “Miscelánea”. En ella tendrán cabida aquellos artículos que no encuadren en las tres secciones fijas de la revista, investigación, ideas para el aula y experiencias. Esta decisión se ha tomado en vista de que hay muchos artículos que se envían a Epsilon con temas de interés para nuestros lectores pero que al no corresponder a las secciones de la revista, lamentablemente hemos tenido que rechazar, no por falta de calidad o rigor, sino por falta de adecuación a la estructura de la revista. Esperamos que con esta nueva sección nuestros colaboradores sigan haciéndonos llegar sus manuscritos.

Durante el curso 2011-2012, el departamento de Estadística e Investigación Operativa de la Universidad de Granada organizó el I Certamen del Sur “Incubadora de Sondeos y Experimentos” que corresponde a la fase local (en Andalucía, Ceuta y Melilla) de los Concurso Tipo Incubadora de Sondeos y Experimentos cuya fase nacional organiza la Sociedad de Estadística e Investigación Operativa (SEIO). El objetivo fundamental de estas iniciativas es fomentar la enseñanza y el aprendizaje de la Estadística en los niveles no universitarios. La revista Epsilon publicará a lo largo de este año los trabajos ganadores en las tres categorías participantes y para ello iniciamos en este número con el ganador del Primer premio en la categoría 1º y 2º de ESO de la fase local.

*Alexander Maz Machado*  
*Director*



## Validación de un cuestionario sobre actitudes hacia las matemáticas de estudiantes preuniversitarios

**Antonio Humberto Closas**

*Universidad Nacional del Nordeste (Argentina)*

**Stella Nora Gatica y Juan Antonio Renaudo**

*Universidad Nacional de San Luis (Argentina)*

**Resumen:** *En este trabajo nos hemos fijado como objetivo principal llevar a cabo la validación empírica de un cuestionario sobre actitudes hacia las matemáticas. El estudio se realizó utilizando una muestra compuesta por 215 jóvenes, ingresantes en el año 2009 a distintas carreras que se imparten en la Universidad Nacional de San Luis, Argentina, con una media de 18.64 años ( $DE = 2.43$ ). Los resultados indican que el instrumento evaluado posee una aceptable fiabilidad y validez de constructo, así como predictiva respecto del rendimiento académico, por lo que puede considerarse una prueba apropiada para medir el concepto objeto de interés.*

**Palabras clave:** *actitud, matemáticas, evaluación, preuniversitarios, rendimiento.*

## Validation of a questionnaire on attitudes towards mathematics in pre-university students

**Abstract:** *We have set as a main aim for this work to carry out the empiric validation of a questionnaire about attitudes towards Mathematics. The research was done using a sample made up of 215 young people, entering different careers taught at the National San Luis University, Argentina in 2009, with an average age 18.64 years old ( $SD = 2.43$ ). The results show that the tested instrument is trustworthy and valid as a construct, as well as predictable of the academic performance; for this reason, it can be considered as an appropriate test to measure the concept object of interest.*

**Key words:** *Attitude, Mathematics, testing, entering university, academic performance.*

## INTRODUCCIÓN

En la enseñanza superior, la permanencia, la graduación con un rendimiento académico de calidad y la deserción, son temas de suma trascendencia y actualidad que generan profundas preocupaciones en las autoridades y en los diferentes sectores educativos de nuestro país. Sin embargo, a pesar que estas problemáticas de manera permanente son abordadas por quienes en mayor o menor medida participan en la educación formal, los niveles de abandono, especialmente en primer año de aquellas carreras en las cuales las matemáticas se caracterizan por desempeñar un papel relevante, siguen siendo elevados. Por inconvenientes de distinta índole y origen, los alumnos dejan sus estudios en esta etapa –lo que conlleva un costo social considerable–, siendo una de las causas más frecuente la imposibilidad de aprobar esta asignatura.

Existe en el imaginario colectivo de los alumnos que las asignaturas del área de matemáticas son las más difíciles de superar y, en consecuencia, son las que más influyen en las deserciones. Es un hecho constatado que los alumnos acceden a la Universidad con una preparación deficiente en general y particularmente en matemáticas, tanto que no les permite entender las enseñanzas que tienen lugar en este nivel superior y, en consecuencia, no pueden aprender. Ésta es una disciplina tal que los conocimientos que se adquieren tienen que fundamentarse en los anteriores; de manera que resulta prácticamente imposible comprender un concepto si el estudiante no conoce aquellos en los que éste se apoya.

La experiencia de algunos autores de este trabajo en el proceso de enseñanza de matemáticas en los cursos de nivelación para el ingreso universitario que se imparten en la Facultad de Ingeniería y Ciencias Económico Sociales (FICES), de la Universidad Nacional de San Luis (UNSL), les ha permitido observar que existe una importante distancia entre lo que opinan los teóricos de la educación y los docentes ocupados de ejercer la profesión en la instancia mencionada. Estas diferencias de opiniones se observan respecto de la importancia y utilidad que poseen las matemáticas, tanto desde el punto de vista de la formación general de la persona como de los conocimientos en sí mismos, y la actitud que los estudiantes tienen frente a esta asignatura, a priori poco favorable, que inferimos conlleva una valoración incorrecta de este tipo de conocimiento y de una ausencia total de conciencia respecto de su relevancia cognitiva y formadora.

## SIGNIFICADO Y CONCEPTO DE ACTITUD

Existen diferentes significados, conceptualizaciones y descripciones relacionadas con el constructo objeto de interés. En principio, en el diccionario de la Real Academia Española (2001) se mencionan tres definiciones del concepto *actitud* (del latín *actitūdo*), una de las cuales indica que es la disposición de ánimo manifestada de algún modo (e.g., actitud benévola, pacífica, amenazadora, de una persona, de un partido, de un gobierno).

A su vez, de acuerdo con el diccionario Akal de Psicología (Doron y Parot, 1998), la noción de actitud califica una disposición interna del individuo frente a un elemento

del mundo social (grupo social, problema de sociedad, etc.) que orienta la conducta que adopta en presencia, real o simbólica, de este elemento. La mayoría de los autores concibe una actitud como una estructura tridimensional integrada que tiene un carácter a la vez cognitivo (juicios, creencias y saberes), afectivo (sentimientos favorables o desfavorables), y conativo (tendencia de acción), siendo esta última componente la que predeciría mejor el comportamiento del individuo.

En líneas generales, las actitudes son aquellas manifestaciones que expresan algún grado de aprobación o desaprobación, gusto o disgusto, acercamiento o alejamiento. Las actitudes son por tanto predisposiciones para actuar que el individuo tiene hacia determinado tema, materia, suceso o idea llamado usualmente *objeto de actitud* (Berliner y Calfee, 1996; Zabalza, 1994).

Las actitudes son adquiridas (Zabalza, 1994); nadie nace con predisposición positiva o negativa hacia algo. La forma en que se logran las actitudes es variada, proviniendo de experiencias positivas o negativas con el objeto de la actitud (por ejemplo, un profesor que explicaba muy bien o muy mal) y/o modelos (que pueden provenir de compañeros de clase, docentes, padres de familia, materiales impresos o de otra clase de estereotipos que difunden los medios de comunicación). Así, las actitudes se vuelven inevitables, todos las tenemos hacia aquellos objetos o situaciones a las que hemos sido expuestos.

El objeto de actitud es definido como cualquier entidad abstracta o concreta hacia la cual se siente una predisposición favorable o desfavorable. Por ejemplo, un estudiante frente a las matemáticas (objeto de actitud) puede mostrar una actitud favorable cuando dice que le gustan las clases de esta materia, hace sus tareas antes de jugar, cree que las matemáticas son importantes o muestra interés por leer libros de esta asignatura. Desde la perspectiva de Alemany y Lara (2010), la actitud puede determinar los aprendizajes y, a su vez, estos aprendizajes pueden mediar para la estabilidad o no de esta actitud.

Diversas investigaciones se han ocupado de la problemática objeto de este trabajo. Así por ejemplo, Bazán y Sotero (1998) reportan los resultados de un estudio psicométrico realizado mediante un cuestionario de actitudes hacia las matemáticas, aplicado a ingresantes en la Universidad Nacional Agraria La Molina, Lima, Perú. En el trabajo desarrollado, los autores pudieron constatar que no existe distinción por sexo en la actitud hacia las matemáticas, sólo hallaron diferencias en la dimensión aplicabilidad por especialidad y en los constructos afectividad y habilidad por edad.

Mato (2006), en su tesis doctoral, elabora cuestionarios y analiza actitudes y ansiedad hacia las matemáticas de alumnos de escuelas secundarias y cómo el rendimiento escolar puede verse influenciado por éstas. En el trabajo mencionado realiza un estudio en función de las variables: colegio, curso, sexo, nivel de formación y profesiones de los padres y de las madres. Sugiere que los docentes deberían, también, tener en cuenta los aspectos afectivos y motivacionales tanto como los elementos cognitivos y procedimentales de la instrucción.

Este fenómeno también fue investigado por Valdez (2000), quien reporta que en la escuela media, inicialmente las actitudes hacia las matemáticas son positivas pero con el transcurso del tiempo, el escaso éxito en las actividades relacionadas van debilitando la vitalidad y el interés de los alumnos.

A su vez, en el trabajo de Henríquez, Quiroz y Reumay (1996), se abordan algunos de los agentes externos (dados por el medio o por el contexto), e internos (reflexión personal), que influyen en las actitudes del alumno al enfrentar el proceso de aprendizaje de las matemáticas. Sostienen que una dificultad importante en el estudio de esta asignatura, es la falta de motivación para hacerlo, lo que se debe fundamentalmente a las actitudes negativas con las que el estudiante afronta el tratamiento de las matemáticas.

En relación con la última apreciación, se encuentra la opinión de Fontana (1989), quien luego de hacer un estudio de las diferencias de conducta (componente activo de la actitud) y de sus problemas, señala que entre las causas que los originan, se encuentran: el aburrimiento, el propósito deliberado de querer perturbar la clase o de molestar al profesor, la aptitud, el autoconcepto y la ausencia de éxitos.

Conocer y estudiar las causas que originan deficiencias en el dominio de las competencias matemáticas es una labor estratégica para proponer acciones que permitan mejorar la enseñanza de esta materia en los distintos niveles educativos. En particular, resulta interesante el estudio de la actitud que asumen los estudiantes, pues representa un factor influyente en el proceso de construcción y adquisición de las capacidades básicas que contribuyen al desarrollo del pensamiento matemático (Castro, 2002).

## PROPÓSITO DEL ESTUDIO

Con el fin de contar con un instrumento de medición que nos permita conocer, con cierta precisión y rigurosidad –tanto conceptual como técnica–, cuál es la actitud hacia la disciplina bajo análisis de los sujetos de la muestra (ingresantes en la FICES de la UNSL), nos proponemos principalmente en este estudio efectuar en el contexto citado la validación empírica del cuestionario estructurado de respuesta cerrada denominado Escala de actitudes hacia la Matemática (EAHM), desarrollado por Bazán (1997).

Recoger, observar y analizar los datos que deriven de la aplicación del instrumento descrito en el ámbito antes referido, genera ciertamente la posibilidad de contar con una prueba validada empíricamente en el espacio académico de la muestra. Este hecho es, sin duda, relevante puesto que permitirá adoptar decisiones o brindar explicaciones eficientes y eficaces acerca del fenómeno objeto de interés. También dará lugar a la posibilidad de estudiar de manera más ajustada ciertas asociaciones con otras variables relacionadas con los resultados educativos.

## MÉTODOLÓGÍA

**Participantes:** debido a que nuestro interés radica en trabajar con una muestra en la cual su unidad se encuentre formada por la totalidad de los estudiantes que componen una entidad con definida personalidad como es el grupo-clase, hemos considerado adecuado –luego de estratificar la población en estudio (los estratos estuvieron representados por dos áreas: Ingeniería y Ciencias Económicas)– apelar al método de muestreo por

conglomerados. Por otra parte, en virtud de que nuestra propuesta reside en trabajar con un grupo particular de ingresantes, la selección de la muestra es de tipo no probabilístico de carácter intencional y accidental.

Área	Carrera	Alumnos	Edad
Ingeniería $n = 123$ $M = 18.50$ $DE = 2.33$	Ing. Industrial	$n = 44$ (12 m, 32 h)	$M = 19.05$ $DE = 3.31$
	Ing. Electromecánica	$n = 32$ (32 h)	$M = 18.13$ $DE = 1.41$
	Ing. Química	$n = 15$ (11 m, 4 h)	$M = 18.07$ $DE = 0.70$
	Ing. Agronómica	$n = 21$ (8 m, 13 h)	$M = 18.10$ $DE = 1.18$
	Ing. en Alimentos	$n = 11$ (8 m, 3 h)	$M = 18.82$ $DE = 2.68$
Cs. Económicas $n = 92$ $M = 18.83$ $DE = 2.54$	Contador Público	$n = 45$ (34 m, 11 h)	$M = 19.07$ $DE = 2.98$
	Lic. en Administración	$n = 47$ (30 m, 17 h)	$M = 18.59$ $DE = 2.05$
$n = 215$ (103 m, 112 h) $M = 18.64$ $DE = 2.43$			

Tabla 1. Detalles relativos a la muestra empleada en la investigación empírica

Finalmente, la muestra estuvo compuesta por un total de 215 sujetos (103 mujeres y 112 hombres) y fue seleccionada de una población de 295 alumnos ingresantes, en el año 2009, a la FICES de la UNSL, con una media de 18.64 años ( $DE = 2.43$ ). Algunas de las características de la muestra utilizada en esta investigación, se ilustran en la Tabla 1.

## Diseño

Esta investigación, de naturaleza *no experimental* básicamente, puede considerarse en una segunda etapa también *explicativa*. Si consideramos como criterio el tipo de información que se proporcionará y el modo de recogerla, el diseño es de estilo *descriptivo mediante encuesta*.

Por otra parte, en atención a la forma de administrar el instrumento de medición, en este estudio empleamos la *técnica del cuestionario*. A su vez, si tenemos en cuenta el marco donde se lleva a cabo, estaríamos hablando de una *investigación de campo*. Además, en razón de cómo se miden y analizan los datos, es una investigación de *línea cuantitativa*. Teniendo en cuenta la instancia de recolección de la información, este trabajo revela una estrategia de corte *transversal*.

En líneas generales, desde el ámbito de la confrontación teórica-empírica, podríamos señalar que la investigación responde a un proceso de carácter hipotético-deductivo, puesto que pretendemos comprobar si la conceptualización teórica de la cual partimos se ajusta a la realidad objeto de estudio, a través de la recolección de datos y su posterior análisis estadístico.

## Procedimiento

Una vez seleccionada la muestra, la recogida de datos se llevó a cabo, en cada uno de los grupos-clase, en una única instancia. En primer lugar se les informó a los alumnos participantes que la aplicación del instrumento en cuestión respondía a un trabajo de investigación cuyo objetivo es evaluar un cuestionario sobre sus actitudes hacia las matemáticas. También se les indicó sobre la importancia de responder sinceramente a los distintos temas planteados, que sus respuestas tendrían un carácter estrictamente confidencial y que la participación en el estudio era una decisión totalmente voluntaria.

El momento temporal de este proceso fue el mes de marzo de 2009, más precisamente el día de inicio de clases y posteriormente a la evaluación diagnóstica sobre conocimientos generales elaborada por propedéutica de la UNSL. La aplicación del cuestionario EAHM la efectuaron los propios profesores, con el margen de tiempo adecuado en virtud de las consultas formuladas en la prueba (en promedio 20 minutos).

## Instrumentos

El cuestionario que evaluamos en el contexto descripto está compuesto por 31 ítems agrupados en cuatro dimensiones: afectividad, aplicabilidad, habilidad y ansiedad (las tres primeras poseen 8 ítems cada una y la última contiene 7 ítems); su aplicación puede hacerse en forma individual o colectiva. Del total de ítems, 18 están formulados en sentido positivo (e.g., *las matemáticas son amenas y estimulantes para mí*) y 13 en sentido negativo (e.g., *las matemáticas usualmente me hacen sentir incómodo y nervioso*). Para la medición de las respuestas a los ítems se ha utilizado una escala de tipo Likert, en la que las opciones fueron valoradas de 1 (totalmente en desacuerdo) a 5 (totalmente de acuerdo) puntos. En la prueba original (Bazán, 1997), los indicadores de fiabilidad y de validez fueron correctos y se calcularon a partir de los datos empíricos recogidos en una muestra de 256 sujetos. Los detalles acerca del análisis de las características psicométricas del instrumento y la discusión sobre si existen diferencias en la actitud bajo estudio considerando la edad, sexo y especialidad de ingreso, se encuentran disponibles en Bazán y Sotero (1998).

Asimismo, con el fin de evaluar la validez predictiva –mediante regresión logística– del cuestionario EAHM respecto del rendimiento académico, hemos utilizado como variable respuesta las calificaciones alcanzadas por los alumnos encuestados en la evaluación diagnóstica del año 2009 de la asignatura de matemáticas –variable dependiente de tipo dicotómica (aprobado/reprobado)–, las cuales fueron obtenidas a partir de los documentos estándar que existen al respecto (actas académicas de examen). Se han seleccionado las calificaciones puesto que son el criterio social y legal del rendimiento en el ámbito de las instituciones educativas. Por otra parte, es el indicador más utilizado en las investigaciones sobre el tema a pesar de la dispersión o falta de consenso de los diferentes centros e incluso entre los profesores de un mismo centro.

## Técnica para el análisis de datos

Como podrá comprenderse, una vez que se dispuso del instrumento, el primer paso fue ponerlo a consideración de los profesores del área de matemáticas, a efectos de evaluar cualitativamente: a) la pertinencia del contenido de los ítems propuestos (*indicadores subjetivos de validez*) y b) el cuestionario en su conjunto (*indicadores de la validez factorial o estructural*). Las apreciaciones formuladas por un grupo de 10 docentes acerca del test objeto de evaluación tuvieron un porcentaje de coincidencia respecto del primer punto del 90% y de la clasificación de los ítems en las cuatro dimensiones de la EAHM del 85%. Sin duda, los análisis realizados en la línea de validez cualitativa (juicio de expertos y grado de acuerdo) fueron sumamente valiosos, a fin de minimizar los márgenes de error del instrumento de medición al momento de su utilización en nuestro espacio cultural. Sabido es que la validez de una prueba es un indicador del grado en que ésta es capaz de medir lo que realmente pretende medir, por lo que resulta relevante su evaluación tanto cualitativa como cuantitativa.

En segundo término, luego de construida la base de datos en formato electrónico a partir de la información obtenida por la aplicación del test, se llevaron a cabo diferentes análisis cuantitativos pertenecientes al dominio de la estadística descriptiva e inferencial y de la psicometría (algunos estadísticos centrales y de dispersión, correlación ítem-total, fiabilidad, análisis correlacionales, regresión logística y análisis factorial).

Los diversos cálculos realizados permitieron, por un lado, conocer el comportamiento de cada uno de los ítems que componen las categorías de la prueba y de cada una de sus dimensiones y, por otro, la fiabilidad y la validez de constructo del instrumento. En un momento intermedio –entre los análisis clásicos de correlación y factorial–, fue posible determinar la validez predictiva del cuestionario, así como la ecuación de regresión que mejor describía la asociación entre la variable criterio (rendimiento matemático) y las variables predictoras (dimensiones de la EAHM). En todos los casos, el procesamiento de los datos fue realizado con ayuda del programa informático SPSS 15.0.

## RESULTADOS

### Estudios iniciales de los ítems del cuestionario aplicado

En atención al propósito de esta investigación y a los análisis estadísticos que fueron anunciados en el apartado anterior, se presentan de forma sintética los resultados de aquellos indicadores que nos han parecido más convenientes calcular para caracterizar la muestra en los diferentes ítems<sup>1</sup> de la prueba aplicada.

---

1. Cabe indicar que las respuestas de aquellos ítems del cuestionario que tenían sentido negativo fueron revalorizados de 1 (totalmente de acuerdo) a 5 (totalmente en desacuerdo), al momento de realizar los análisis estadísticos. De esta manera, puntajes altos en las respuestas denotan mayor actitud positiva y puntajes bajos mayor actitud negativa hacia las matemáticas

En efecto, en la Tabla 2, puede apreciarse la *media*, la *desviación estándar*, la *correlación ítem-total* y el *coeficiente alfa de Cronbach*. Los dos primeros estadísticos son de mucha utilidad, puesto que cuando se analiza un conjunto de datos numéricos, el conocimiento de ambas medidas ayuda a comprender, entre otras cosas, la distribución de los datos de la muestra.

El tercero de los cuatro estadísticos mencionados (*correlación ítem-total*), recoge el grado de relación que cada uno de los ítems posee con el total de la dimensión a la que pertenece, lo que puede considerarse un indicador de su grado de discriminación. La fiabilidad es una de las características fundamentales de un test, una de las formas de evaluarla es a través del cuarto estadístico (*coeficiente alfa de Cronbach*) el cual indica la precisión o estabilidad de los resultados; señala la cuantía en que las medidas de la prueba están libres de errores casuales. Véase Tabla 2.

Llegados a este punto, creemos oportuno destacar algunos aspectos que surgen de la lectura de los valores que se encuentran en la tabla anterior, obtenidos a partir de los análisis efectuados sobre los datos muestrales.

En efecto, en primer término es importante mencionar que la *media*, la *desviación típica* y los coeficientes *alfa de Cronbach*, relativos a las distintas dimensiones de la EAHM, así como al total de la prueba, han resultado similares a los valores de estos estadísticos informados en el trabajo elaborado por Bazán y Sotero (1998); lo que era de esperar en atención a que no se realizaron modificaciones de ningún tipo en el texto de las preguntas ni en la estructura de la escala original.

En cuanto a las correlaciones entre cada uno de los ítems y la puntuación total de la dimensión a la que pertenecen, salvo algunas excepciones (nos referimos a los casos en los que el coeficiente  $r_{i,t}$  es inferior a .25), debemos señalar que en general son correctas. En promedio, las correlaciones más altas se observan en las subescalas denominadas en el instrumento Afectividad y Aplicabilidad, en menor medida se encuentran en la dimensión Habilidad, en tanto que los valores más bajos se hallan en la categoría Ansiedad.

Por otra parte, los resultados indican que el cuestionario utilizado puede considerarse un instrumento con una fiabilidad bastante aceptable puesto que los *coeficientes alfa* encontrados para el total de la prueba (.92), como para cada una de las dimensiones (véase Tabla 2), en todos los casos igualan o superan el criterio de .70 recomendado (Nunnaly y Bernstein, 1994).

Respecto de los indicadores *alpha de Cronbach cuando se excluye el ítem*, podemos señalar que la situación es semejante a la detallada para los coeficientes de *correlación ítem-total*, en cuanto a que se observan los valores más altos en las dimensiones Afectividad (oscilan entre .68 y .79) y Aplicabilidad (varían de .63 a .75), valores algo menores en la subescala Habilidad (se hallan entre .63 y .72), mientras que los más bajos se encuentran en la dimensión Ansiedad (van de .50 a .70). Cada uno de los coeficientes obtenidos en esta instancia descriptiva del análisis de fiabilidad pueden considerarse correctos (aún los logrados para el último constructo), en atención al escaso número de elementos o ítems (entre 7 y 8) que participan al momento de formalizar sus respectivos cálculos.

Dimensión	Ítem	<i>M</i>	<i>DE</i>	Correlación ítem-total	$\alpha$ de Cronbach sin el ítem
Afectividad (8 ítems) <i>M</i> = 28.68 <i>DE</i> = 5.32 $\alpha$ = .79	Ítem 1	3.30	0.91	.56	.71
	Ítem 5	3.86	1.22	.53	.71
	Ítem 9	2.58	1.23	.43	.73
	Ítem 13	3.39	1.37	.55	.70
	Ítem 17	3.11	1.42	.22	.79
	Ítem 21	3.71	1.37	.63	.68
	Ítem 25	4.35	1.11	.28	.77
	Ítem 29	4.38	1.08	.49	.72
Aplicabilidad (8 ítems) <i>M</i> = 32.56 <i>DE</i> = 4.81 $\alpha$ = .77	Ítem 2	4.46	0.73	.55	.67
	Ítem 6	4.04	1.06	.43	.69
	Ítem 10	4.22	0.95	.51	.67
	Ítem 14	3.59	1.52	.28	.74
	Ítem 18	4.30	1.09	.57	.65
	Ítem 22	4.10	1.25	.36	.71
	Ítem 26	4.42	0.99	.64	.63
	Ítem 30	3.42	1.39	.24	.75
Habilidad (8 ítems) <i>M</i> = 26.38 <i>DE</i> = 4.57 $\alpha$ = .76	Ítem 3	2.78	1.10	.54	.63
	Ítem 7	2.96	1.26	.45	.66
	Ítem 11	2.89	1.09	.32	.70
	Ítem 15	3.95	1.11	.38	.68
	Ítem 19	3.46	1.12	.54	.63
	Ítem 23	3.06	1.07	.47	.65
	Ítem 27	4.42	0.98	.32	.69
	Ítem 31	2.85	1.12	.22	.72
Ansiedad (7 ítems) <i>M</i> = 24.43 <i>DE</i> = 4.20 $\alpha$ = .70	Ítem 4	3.55	1.20	.54	.50
	Ítem 8	2.84	1.19	.26	.62
	Ítem 12	3.80	1.14	.46	.54
	Ítem 16	3.41	1.05	.37	.57
	Ítem 20	3.92	1.27	.39	.57
	Ítem 24	2.81	1.25	.13	.70
	Ítem 28	4.11	1.15	.44	.55
EAHM (31 ítems) <i>M</i> = 112.04 <i>DE</i> = 14.27 $\alpha$ = .92					

Tabla 2. Estadísticos descriptivos, de correlación y de fiabilidad de los ítems medidos en prueba

### Análisis correlacionales

En este apartado llevaremos a cabo análisis correlacionales (véase Tabla 3) entre las cuatro dimensiones que integran la prueba EAHM, así como entre éstas y la variable rendimiento académico. La primera razón por la que se realizan estos estudios radica en el hecho de que los coeficientes que se obtengan permitirán en principio, por un lado,

confirmar o no las relaciones que se presume existen entre los distintos constructos del cuestionario y, por otro, reconocer la presencia de asociaciones estadísticamente significativas entre éstos y los resultados académicos, con el fin de observar inicialmente la validez predictiva del cuestionario objeto de interés.

El segundo motivo de los análisis correlacionales reside en que está proyectado, luego de la siguiente etapa de este apartado, realizar un análisis factorial exploratorio con dichas categorías (a efectos de evaluar la validez de constructo de la prueba) y es siempre de utilidad examinar previamente las relaciones lineales que las mismas presentan (en principio, con el fin de seleccionar adecuadamente el procedimiento de rotación que se empleará al momento de solicitar la matriz de pesos factoriales).

De acuerdo con los resultados de la Tabla 3, puede afirmarse que la totalidad de las dimensiones que componen el cuestionario, como era de esperar, correlacionan de manera positiva y estadísticamente significativa (varían de .29 a .66,  $p < .01$ ). No obstante, de estos seis valores, cuatro de ellos resultaron inferiores a los respectivos coeficientes encontrados en el estudio de Bazán y Sotero (1998), mientras los dos restantes fueron superiores ( $r = .61$ , escalas Afectividad y Aplicabilidad;  $r = .54$ , escalas Aplicabilidad y Habilidad). Más allá del valor que poseen los índices hallados, lo relevante es que resultaron significativos; es decir, pudo ser contrastada –a partir de los datos de la muestra– la existencia de correlaciones lineales entre los distintos pares de subescalas que componen el cuestionario bajo estudio.

También el total de los coeficientes de correlación biserial puntual entre las categorías de la EAHM y el rendimiento matemático resultaron estadísticamente significativos, algunos de ellos al nivel .01, como es el caso de los correspondientes a las subescalas Afectividad ( $r_{bp} = .26$ ) y Aplicabilidad ( $r_{bp} = .24$ ), y otros al nivel .05, como sucede con los índices de las dimensiones Habilidad ( $r_{bp} = .20$ ) y Ansiedad ( $r_{bp} = .15$ ).

A decir verdad, estábamos esperanzados en que los coeficientes de correlación entre las distintas categorías de la prueba y los resultados educativos fuesen mejores, en atención a que estudios importantes –como los realizados en EEUU entre 1994 y 1996 por la *National Assessment of Education Progress* (NAEP)– daban cuenta de la existencia de una relación significativa y directa entre las actitudes de los alumnos y el rendimiento en matemáticas. Sin embargo, lo destacable de los indicadores obtenidos en esta parte del estudio es que la presunción que teníamos al respecto; esto es, la presencia de asociación entre ambos constructos, pudo ser empíricamente comprobada. Esta apreciación nos lleva a sostener que, en principio, las distintas categorías de la EAHM serían de utilidad para configurar un modelo que permita clasificar en el futuro los resultados académicos (véase tabla 3).

## Regresión logística

En vista de los resultados del análisis correlacional, hemos considerado adecuado emplear en la estimación del modelo de regresión logística el método “Introducir”, ingresando como variable criterio el Rendimiento matemático (de tipo dicotómica, 1 = aprobado y 0 = reprobado) y como variables explicativas o covariables las dimensiones Afectividad, Aplicabilidad, Habilidad y Ansiedad (por cierto, todas de tipo continuas).

	Afectividad	Aplicabilidad	Habilidad	Ansiedad	Rendimiento matemático
Afectividad	1	.61**	.66**	.49**	.26**
Aplicabilidad		1	.54**	.29**	.24**
Habilidad			1	.51**	.20*
Ansiedad				1	.15*
Rendimiento matemático					1

Tabla 3. Matriz de correlaciones

\* $p < .05$  \*\* $p < .01$

*Nota:* Para cuantificar el grado de relación lineal entre dos dimensiones de la EAHM (variables continuas) se utilizó el coeficiente de correlación de Pearson. En cambio, para evaluar la asociación entre cada una de las dimensiones de la EAHM y el rendimiento matemático (variable dicotómica) empleamos el coeficiente de correlación biserial puntual.

En virtud de las opciones elegidas y de los datos de la muestra, el *modelo logit* obtenido presenta la siguiente ecuación:

$$p(\text{Rend. matemático}) = \frac{1}{1 + e^{-(13.09 + 0.09 \text{ Afectiv} + 0.11 \text{ Aplicab} + 0.12 \text{ Habilidad} + 0.15 \text{ Ansied})}}$$

La tabla *Variables en la ecuación*, que proporciona el programa SPSS 15.0, muestra los valores estimados para los coeficientes del modelo:  $B_0 = -13.09$ ,  $B_1 = .09$ ,  $B_2 = .11$ ,  $B_3 = .12$  y  $B_4 = .15$ ; junto con sus respectivos  $p$ -valores asociados: .001, .01, .03, .03 y .04. Puede observarse que los  $p$ -valores asociados a los coeficientes  $B_1$ ,  $B_2$ ,  $B_3$  y  $B_4$  son inferiores a .05; por lo tanto, para un nivel de significación  $\alpha = .05$ , se rechaza la hipótesis de que dichos coeficientes son nulos y, en consecuencia, concluimos que las variables asociadas a los mismos (Afectividad, Aplicabilidad, Habilidad y Ansiedad, respectivamente) son relevantes a la hora de explicar el comportamiento de los resultados en matemáticas.

La tabla mencionada, además de los coeficientes de regresión ( $B_0$ ,  $B_1$ ,  $B_2$ ,  $B_3$  y  $B_4$ ) y de sus  $p$ -valores, presenta entre otras informaciones los respectivos estadísticos de *Wald*: 10.55, 5.62, 4.60, 4.23 y 3.38. El hecho de que todas las variables tengan un coeficiente positivo y un estadístico de *Wald* mayor a uno, nos lleva a pensar que cualquier incremento en los niveles de las variables independientes tendrá un efecto significativo sobre la variable respuesta. Esto revela que aquellos estudiantes que tienen puntajes altos en las respuestas a los ítems de cada una de las dimensiones que participan en el modelo, poseen mayores probabilidades de tener un correcto rendimiento académico.

Si aplicamos el modelo usando los datos correspondientes a un estudiante de la muestra que tenga valores superiores a la media en cada una de las dimensiones que

conforman la EAHM (e.g., Afectividad = 32, Aplicabilidad = 36, Habilidad = 30 y Ansiedad = 28), obtendremos:

$$p(\text{Rend. matemático}) = \frac{1}{1 + e^{-(12.76 + 0.09 \times 32 + 0.11 \times 36 + 0.12 \times 30 + 0.15 \times 28)}} = \frac{1}{1 + e^{-1.88}} = 0.87$$

Puesto que, por una parte, la probabilidad obtenida desde luego varía entre 0 y 1 y, por otra, que el punto de corte se encuentra por defecto en SPSS establecido en .5, se concluye que al sujeto –cuyos datos hemos utilizado para llevar adelante los cálculos– el modelo lo clasificará como *aprobado*, lo cual es absolutamente razonable en virtud de las puntuaciones elegidas en las variables predictoras.

Como es fácil comprender, en esta clasificación el número de aciertos globales del modelo es uno de los indicadores más importante de la bondad de ajuste del mismo. En este sentido, cabe señalar que el modelo estimado resulta muy bueno para predecir las categorías de la variable dependiente, ya que si se aplicara la clasificación a las observaciones realizadas, se obtendría un porcentaje de éxitos del 81.3%, según fue posible comprobar.

Finalizamos este apartado indicando: a) los análisis descriptivos y correlacionales, llevados a cabo en los dos apartados precedentes, proporcionaron información coherente con el modelo logit obtenido; b) la aplicación de la regresión logística muestra que los estudiantes que denotan una actitud favorable hacia las matemáticas, tendrían mayores probabilidades de alcanzar los objetivos del curso; c) evidentemente, fue posible apreciar la validez predictiva respecto del rendimiento matemático de la escala bajo estudio.

## Análisis factorial

Si bien, en una aproximación teórica puede decirse que las variables medidas se encuentran agrupadas en determinados factores, emplearemos la técnica del análisis factorial a efectos de identificar empíricamente estas variables latentes; es decir, contrastar la validez de constructo o estructural del cuestionario EAHM.

Antes de realizar el análisis factorial exploratorio, hemos comprobado la adecuación de los datos para este tipo de estudio. Una síntesis de los resultados es la siguiente: a) determinante de la matriz de correlaciones prácticamente nulo; b) medida de adecuación de la muestra de Kaiser, Meyer y Olkin, índice  $KMO = .81$ , ubicado en un rango que se considera bueno de potencial explicativo de las variables (Kaiser, 1974); c) contraste de esfericidad de Bartlett con  $\chi^2(465) = 1878.95$ ,  $p = .00$ . En vista de los valores obtenidos, en principio, el análisis factorial es una opción pertinente que nos ayudará a identificar los factores subyacentes al grupo de los 31 ítems que se analizan.

Para determinar la solución factorial hemos empleado el criterio clásico; esto es, la extracción de tantos factores como haya en la solución inicial con autovalores superiores a la unidad, lo que se realizó por el método de componentes principales y rotación oblicua (método: normalización promax con Kaiser, parámetro:  $\lambda = 4$ , valor que por defecto

se encuentra en SPSS), por tratarse de dimensiones correlacionadas. Este procedimiento ha delimitado –en coincidencia con la estructura del cuestionario original– cuatro factores que explican un 58.83% de la varianza total, lo que puede interpretarse como un porcentaje aceptable, puesto que para investigaciones que se realizan en áreas de psicología social lo recomendable es que la varianza acumulada se encuentre, al menos, entre el 50% y 60% (Henson y Roberts, 2006).

Los factores identificados corresponden a las cuatro dimensiones señaladas a nivel conceptual, y según los resultados del análisis efectuado el factor que permite explicar la mayor cantidad del total de la varianza de la muestra es Afectividad (27.80%), en este sentido el segundo factor es Aplicabilidad (12.24%), el tercer factor es Habilidad (9.95%), mientras que en el último lugar se encuentra el factor Ansiedad (8.84%).

Evidentemente, en atención a lo que antecede, podemos señalar que el modelo factorial ha verificado un aspecto que es estratégico en toda acción de modelado estadístico: la “parsimonia”, explicación más simple entre varias posibles. En efecto, la estructura obtenida, por un lado, posee un reducido número de factores y, por otro, todos ellos son susceptibles de interpretación sustantiva.

En resumen, los distintos indicadores obtenidos a lo largo de esta investigación nos llevan a concluir que la escala bajo estudio es fiable y presenta tanto validez predictiva respecto del rendimiento matemático (modelo logit), como validez de constructo (modelo factorial).

En la Tabla 4 se recogen, para cada uno de los factores subyacentes, los valores propios, el porcentaje de varianza tanto explicada como acumulada, los ítems correspondientes, sus comunalidades y finalmente sus cargas factoriales.

Sólo nos resta comentar que los resultados de los distintos análisis estadísticos implementados en este apartado indican, por una parte, que el comportamiento de las dimensiones de la EAHM armoniza aceptablemente con el encontrado en el estudio realizado por Bazán y Sotero (1998) y, por otra, que se encuentran en consonancia de modo individualizado, no conjuntamente, con los aportados por otras investigaciones desarrolladas sobre el tema objeto de estudio (véase Tabla 4).

## DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

En el presente estudio nos habíamos propuesto principalmente concretar, en un dominio estadístico de tipo descriptivo, inferencial y psicométrico, la validación empírica del cuestionario EAHM, empleando una muestra conformada por estudiantes de nivel preuniversitario. Pues bien, en vista de los resultados obtenidos en el marco de esta investigación, podemos afirmar que el objetivo planteado ha sido logrado.

En efecto, a partir de los estudios iniciales (media, desviación típica, correlación ítem-total, fiabilidad) realizados sobre los ítems y las dimensiones del test utilizado, así como de los análisis implementados posteriormente (correlacionales, regresión logística, factorial), fue posible comprobar que la prueba aplicada constituye un instrumento fiable y válido para medir sentimientos, creencias y tendencias de los alumnos hacia las matemáticas o las clases de esta asignatura.

En relación con la fiabilidad de la escala, los resultados indican que puede considerarse un instrumento aceptable puesto que los coeficientes alfa de Cronbach de

Factor	Valor propio	Varianza explicada	Varianza acumulada	Ítem	Comunalidad	Saturación
Afectividad	3.46	27.80	27.80	Ítem 1	.51	.78
				Ítem 5	.49	.63
				Ítem 9	.43	.49
				Ítem 13	.63	.81
				Ítem 17	.60	.77
				Ítem 21	.57	.46
				Ítem 25	.60	.78
				Ítem 29	.67	.79
Aplicabilidad	1.52	12.24	40.04	Ítem 2	.61	.75
				Ítem 6	.68	.88
				Ítem 10	.59	.85
				Ítem 14	.61	.51
				Ítem 18	.46	.67
				Ítem 22	.64	.93
				Ítem 26	.57	.63
				Ítem 30	.59	.74
Habilidad	1.24	9.95	49.99	Ítem 3	.61	.67
				Ítem 7	.62	.76
				Ítem 11	.66	.80
				Ítem 15	.64	.55
				Ítem 19	.55	.60
				Ítem 23	.63	.54
				Ítem 27	.52	.42
				Ítem 31	.69	.85
Ansiedad	1.10	8.84	58.83	Ítem 4	.41	.47
				Ítem 8	.62	.48
				Ítem 12	.71	.87
				Ítem 16	.53	.31
				Ítem 20	.65	.85
				Ítem 24	.55	.31
				Ítem 28	.54	.70

Tabla 4. Resultados obtenidos en el análisis factorial por componentes principales y rotación oblicua

consistencia interna encontrados para el total de la prueba, como para cada una de sus dimensiones, en todos los casos igualan o superan el valor .70. A su vez, como complemento de la información dada, podemos decir que las correlaciones (corregidas) entre cada ítem y el factor correspondiente fueron siempre muy razonables, hallándose los valores más bajos en las dimensiones Ansiedad y Habilidad, mientras que los más altos se observan en las subescalas Afectividad y Aplicabilidad.

En razón de los resultados conseguidos en el estudio de validez predictiva, nuestra apreciación respecto de los niveles de discriminación, mediante los constructos de la escala, de los resultados educativos es lógicamente favorable; esto es, pensamos que la EAHM es una prueba que clasifica adecuadamente a los estudiantes con diferentes grados de logro

académico. Así por ejemplo, utilizando el modelo obtenido en el apartado de regresión logística, podemos inferir que los alumnos que poseen mayor actitud favorable hacia las matemáticas (puntajes altos en las dimensiones de la escala), tienen una probabilidad más elevada (superior al 50%) de aprobar esta materia. Por el contrario, aquellos estudiantes con mayor actitud negativa (puntajes bajos en las dimensiones del cuestionario), tendrían una menor probabilidad (inferior al 50%) de lograr un buen rendimiento académico en la asignatura.

Con respecto al análisis factorial realizado, podemos señalar que el mismo nos permitió contrastar que, efectivamente, la estructura resultante posee características similares a las que proporciona el modelo logit que se propone. Nos referimos concretamente a la ordenación fácilmente observable que presentan los porcentajes de varianza explicada por cada una de las dimensiones en el modelo factorial y los respectivos estadísticos de *Wald* en el modelo de regresión puesto que, mientras los primeros permiten distinguir el nivel relevancia de las dimensiones para explicar el total de la varianza acumulada, los segundos indican el grado de importancia de los coeficientes de regresión a fin de evaluar los resultados en matemáticas.

Aunque en su generalidad, los resultados muestran evidencia que el cuestionario bajo estudio presenta suficientes bondades para ser utilizado en la evaluación de las actitudes hacia las matemáticas, así como en la explicación del rendimiento académico en esta asignatura, creemos necesario considerar algunas limitaciones.

En primer lugar, los participantes de la presente investigación fueron alumnos de un centro académico específico, lo que no permite hacer inferencias sobre otros estudiantes preuniversitarios. A su vez, los sujetos no fueron seleccionados en forma aleatoria, por lo que en general no correspondería extender los resultados sobre otras poblaciones no representadas en la muestra. En segundo lugar, no se puso a prueba la EAHM en función de variables demográficas como la edad o el género de los participantes, por lo que sería interesante en próximos trabajos, analizar en el ámbito de aplicación del cuestionario cómo se manifiestan las actitudes hacia las matemáticas al considerar estos aspectos.

En definitiva, y a pesar de las limitaciones expuestas, por lo que los resultados logrados deberían aceptarse con cierta cautela, pensamos que el trabajo realizado debe ser reconocido como un paso adelante en el abordaje del complejo tema objeto de estudio y, consecuentemente, un aporte a la comunidad académica y científica, con posibles proyecciones en política y gestión educativa.

El trabajo llevado a efecto nos hizo ver con interés el desarrollo de futuras investigaciones en torno a los siguientes temas: a) análisis de validez externa y de criterio de la EAHM; b) estudios de diferencias cuantitativas con respecto a distintas variables, tales como el tipo de carrera que siguen los estudiantes o el grado de estudio alcanzado por los padres; c) replicación de la actual elaboración usando un diseño longitudinal, con evaluaciones periódicas durante los años de permanencia de los estudiantes en la universidad o en un intervalo de tiempo determinado. En este último caso, el tipo de diseño que se utiliza proporcionaría información sobre los posibles efectos o cambios que ocurren en las actitudes por causa de la edad y la adquisición de nuevas competencias, entre otros factores.

Como última reflexión se indica que el hecho de haber validado empíricamente la EAHM en un determinado contexto académico y socio-cultural, da origen a contar con un nuevo marco de referencia, lo cual permite ampliar la aplicación de la prueba objeto

de análisis; en esta oportunidad, utilizando una muestra conformada por estudiantes preuniversitarios con residencia en la zona centro-oeste de Argentina. La actitud hacia las matemáticas representa un concepto subyacente relativo a una asignatura cuyo proceso de enseñanza-aprendizaje constituye una de las principales preocupaciones de las políticas educativas en la mayoría de los países y regiones de nuestro planeta.

## REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Alemany, I. y Lara, A. I. (2010). Las actitudes hacia las matemáticas en el alumnado de ESO: un instrumento para su medición. *Publicaciones*, 40, 49-71.
- Bazán, J. (1997). Metodología estadística de construcción de pruebas. Una aplicación al estudio de actitudes hacia la matemática en la UALM. Tesis para optar al título de Ingeniero Estadístico, Universidad Nacional Agraria La Molina, Lima, Perú.
- Bazán, J. y Sotero, H. (1998). Una aplicación al estudio de actitudes hacia la matemática en la UNALM. *Anales Científicos UNALM*, 36, 60-72.
- Berliner, D. C. y Calfee, R. C. (Eds.). (1996). *Handbook of educational psychology*. New York: Simon y Shuster.
- Castro, M. (2002). Un curso de matemáticas para ciencias sociales. Bogotá, Colombia: “una empresa docente”. Obtenido el 16 de marzo de 2012 en <http://ued.uniandes.edu.co/ued/servidor/ued/libros/libroaportes/5matebasica.pdf>.
- Doron, R. y Parot, F. (1998). Diccionario Akal de Psicología. Madrid: Akal.
- Fontana D. (1989). *La disciplina en el aula: Gestión y control*. Madrid: Santillana.
- Henson, K. y Roberts, J. (2006). Use of Exploratory Factor Analysis in Published Research: Common Error and Some Comment on Improved Practice. *Educational and Psychological Measurement*, 66, 393-416.
- Kaiser, H. F. (1974). An index of factorial simplicity. *Psychometrika*, 39, 31-36.
- Henríquez, L., Quiroz, R. y Reumay, P. (1997). Acercándose a la Matemática. *Estudio pedagógico*, 23, 41-49.
- Mato, D. (2006): *Diseño y validación de dos cuestionarios para evaluar las actitudes y la ansiedad hacia las matemáticas en alumnos de educación secundaria obligatoria*. Tesis doctoral, Universidade Da Coruña, España.
- Nunnally, J. C. y Bernstein, I. H. (1994). *Psychometric theory* (3a. ed.). New York: McGraw-Hill.
- Real Academia Española (2001). *Diccionario de la lengua española* (22a. ed.). Madrid: Espasa-Calpe.
- Valdez, E. (2000). *Rendimiento y actitudes. La problemática de las matemáticas en la escuela secundaria*. México: Grupo Editorial Iberoamérica.
- Zabalza, M. (1994). *Evaluación de actitudes y valores. Evaluación del aprendizaje de los estudiantes*. Barcelona: Grao.

## El uso de las historias de vida en la investigación sobre el profesorado: el caso de María Antonia Canals

María Sotos Serrano  
Universidad de Castilla-La Mancha

**Resumen:** Esta comunicación forma parte de una investigación más amplia sobre María Antònia Canals, realizada desde la perspectiva biográfica mediante la elaboración de una historia de vida. Aquí se presenta el eje educación-matemáticas, uno de los que recorre toda su trayectoria personal, y en el que destacan cuatro momentos o etapas que han ido configurando la relación de María Antonia con las matemáticas y con la educación a lo largo de su vida.

**Palabras Claves:** María Antònia Canals, historia de vida, profesorado, formación de maestros. Educación matemática

## The use of life stories in research on teachers: the case of Maria Antonia Canals

**Abstract:** This paper is part of a wider investigation about Maria Antonia Canals, made from a biographical perspective by developing a life history. Here is the education-mathematics axis, which runs through his personal career and highlights four stages or steps that have been formed the relationship of Maria Antonia with mathematics and education throughout her life.

**Keywords:** Maria Antonia Canals, life history, teaching, teacher training, Mathematics education

### EL PANORAMA SOBRE LOS ESTUDIOS DEL PROFESORADO

Resulta lógico que en el ámbito de la investigación educativa la figura del profesorado ocupe un lugar central. Desde la década de los treinta del siglo XX, se han sucedido

numerosos trabajos de investigación empírica que han dado lugar a diversos modelos que intentan explicar el comportamiento de la actuación del profesorado en su trabajo en el aula.

Una revisión de los principales paradigmas contemporáneos de investigación didáctica hasta la década de los ochenta se encuentra en Pérez (1985). En líneas generales, se puede decir que se trata de un proceso que va, en primer lugar, de los modelos más simples a los más complejos (en términos del número de variables consideradas y de las relaciones entre ellas), y en segundo lugar desde las metodologías cuantitativas hacia las perspectivas etnográficas de carácter cualitativo.

Hasta la década de los ochenta, estas investigaciones mantienen, implícitamente, un modelo de enseñanza cuya finalidad es el máximo rendimiento del alumno, modelo que también se supone que comparten docentes e investigadores; a la vez que adolecen de un excesivo carácter estático de la investigación, por lo que no se puede analizar cómo la propia práctica docente modifica los esquemas mentales del profesorado (Contreras, 1985). Pero esa década puede entenderse como la ruptura con los modelos precedentes de investigación del profesorado y la consolidación de una nueva perspectiva científica. La obra de Elbaz (1983) intenta comprender la situación desde la perspectiva del profesorado, y analiza el conocimiento práctico a partir de un estudio de caso mediante entrevistas y observación de clase. En la misma línea se encuentran los trabajos de Clandinin (1986) y Connelly y Clandinin (1986).

Pero también en esa misma década se recomienda el uso de métodos biográficos en este campo (Goodson, 1981), ya que es necesario “recorrer su trayectoria (lo que incluye sus diferentes momentos de aprendizaje y experiencias profesionales) para comprender el «lugar» en el que se sitúa y su disposición para la innovación y el cambio” (Hernández, 2004, pp. 10-11). El libro de Goodson (2004) es el que mejor resume este nuevo panorama en los estudios sobre el profesorado desde la perspectiva biográfica<sup>1</sup>, que tiene, entre otras, la ventaja de permitir que “los docentes analicen y reflexionen sobre su vida y su labor profesional de tal modo que puedan dar respuestas más profundas y poderosas frente al mundo socialmente construido de la educación” (Goodson, 2004, p. 39).

## **PERSPECTIVA BIOGRÁFICA Y METODOLOGÍA**

La perspectiva biográfica se centra en las trayectorias personales, entendidas como sistemas complejos en donde se producen interrelaciones entre múltiples aspectos (personales y sociales), y en donde muy pocas veces la causalidad lineal sirve para explicar dichas trayectorias. El análisis de estas trayectorias permite “captar mediante qué mecanismos y qué procesos ciertos individuos han terminado encontrándose en una situación dada y cómo tratan de acomodarse a esa situación” (Bertaux, 2005, p. 19). La mirada retrospectiva de la perspectiva biográfica sirve para establecer conexiones entre

---

1. La obra original en inglés es de 1992, por lo que la traducción al castellano doce años después puede significar el retraso añadido del caso español. La tesis doctoral de R. Arnaus (1993) puede señalarse como el momento en que esta tradición metodológica entra en el ámbito académico de la pedagogía en la universidad española.

la cronología y los espacios sociales de las trayectorias personales (Valles, 1997). Ejemplo de ello a nivel español es el trabajo sobre Margarita Comas (Sierra y López, 2011).

Dentro de esta perspectiva, en esta investigación se realiza un estudio de caso único<sup>2</sup>, que se justifica porque:

[...] considera al caso estudiado como algo único, raro, excepcional. (...) La excepcionalidad del caso puede darla también el hecho de que el caso es algo único e irrepetible (...). Por último, el caso puede ser excepcional dado su impacto o relevancia en la sociedad en la que se ubica (Coller, 2000, pp. 35-37).

Algo de todo esto se encuentra en la persona de M. A. Canals.

Para esto se ha elaborado una historia de vida, recogiendo datos de diferentes fuentes:

- 10 entrevistas<sup>3</sup> grabadas a M. A. Canals, realizadas en los meses de diciembre de 2009 (en Girona), y febrero y septiembre de 2010 (en Albacete).
- 20 entrevistas grabadas a otros sujetos: antiguos alumnos de M. A. Canals, padres y madres de antiguos alumnos y compañeros/as de escuela, universidad y otros ámbitos profesionales.
- 7 documentos publicados sobre M. A. Canals.

Para el análisis de estos datos he seguido la idea de D. Bertaux de *hallar la estructura diacrónica de la historia reconstruida*. Los datos con los que se elabora una historia de vida no presentan un discurso perfectamente lineal de la trayectoria de los sujetos, por ello es necesario establecer esa estructura diacrónica. A partir de ahí, “el análisis de una entrevista biográfica tiene por objeto explicitar las informaciones y significados pertinentes que en ella se contienen” (Bertaux, 2005, p. 90), y para desarrollar un análisis comprensivo de este tipo de materiales se precisa de imaginación y rigor,

[...] tal es el binomio fecundo que da origen a un buen análisis comprensivo. Pero aquí la prioridad es de la imaginación, puesto que se trata de imaginar, es decir, crearse una representación (primero mental y después discursiva) de las relaciones y procesos que han dado origen a los fenómenos de los que hablan los testigos, casi siempre de forma alusiva (...). La reconstrucción de la estructura diacrónica no es sólo una operación técnica; esa reconstrucción prepara al analista para la búsqueda de vías de causalidad secuencial, de procesos en cadena (Bertaux, 2005: 91).

---

2. Creo que la *perspectiva biográfica*, es una delimitación que pertenece al terreno estrictamente metodológico, mientras que el *estudio de casos* pertenece ya al ámbito más tecnológico de la investigación. La perspectiva biográfica marca qué tipo de investigación se realiza (por qué se hace así), y el estudio de caso único establece cómo se hace.

3. Todas las entrevistas realizadas se adaptan a lo que se denomina entrevista abierta, en profundidad o entrevista semiestructurada (personalmente prefiero la primera denominación), sobre cuya mecánica puede consultarse un texto breve (Aguilar, 1999).

## MARIA ANTONIA CANALS Y LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS

La historia de vida de M. Antònia Canals permite comprender numerosos aspectos de su trayectoria personal. Aquí sólo trataré uno de ellos, importante sin duda, pero no más que muchos otros que desarrollaré con más amplitud en otro ámbito<sup>4</sup>. Me refiero a la enseñanza de las matemáticas.

En la enseñanza de las matemáticas confluyen dos ámbitos diferentes. La *enseñanza* y las *matemáticas*, y estos dos ámbitos forman uno de los ejes que atraviesan la trayectoria personal de M. Antònia. Actualmente, nadie duda de su relevancia en la enseñanza de las matemáticas, pero la relación de estos dos ámbitos a lo largo de su vida presenta algunos momentos en los que no han estado tan unidos, y con los que se puede comprender dicha evolución.

### Origen familiar

El contexto familiar de M. Antònia estaba vinculado directamente con la educación. Su madre era maestra, al igual que su abuela paterna y dos tías. Su abuelo materno fue profesor de instituto y su padre, ingeniero, también trabajó como maestro para costear su carrera universitaria (él fue el primer referente para M. Antònia de las matemáticas).

Mi padre era ingeniero. Le gustaban mucho las mates, según siempre me ha contado mi madre, pues él murió pronto, cuando yo tenía 8 años. Esta imagen de mi padre se fue creando y grabando en mí, en mi infancia, desde los 8 años en adelante, de manera fuerte; yo me parecía a él, y de hecho tenía ya facilidad, disposición natural y gusto para las mates. Y oía a mi alrededor, que los mayores lo comentaban, y en esto, y en otras cosas, decían “es la imagen de su padre...” Él fue mi ídolo a imitar<sup>5</sup>.

Pero esta vinculación familiar, además, se produce en un contexto social determinado. En 1930, año de nacimiento de M. Antònia, finaliza la dictadura de Primo de Rivera y las instituciones educativas catalanas vuelven a la normalidad. Es decir, a la situación en la que se encontraban en 1923. Sin entrar en detalle de todo el proceso histórico que comienza a finales del siglo XIX<sup>6</sup>, conviene destacar el papel que desempeñó la Mancomunitat de Catalunya, presidida por E. Prat de la Riba desde 1914, que creó, entre otras instituciones, tres escuelas municipales Montessori en Barcelona, una de ellas dirigida por Dolors Canals, tía de M. Antònia y en donde esta comenzó su escolarización hasta el inicio de la Guerra Civil.

---

4. Esta comunicación forma parte de un proyecto más amplio de tesis de doctorado, que realicé en la Universidad de Salamanca bajo la dirección de los profesores Modesto Sierra y M<sup>a</sup> Carmen López.

5. Este es el formato en el que aparecerán las citas literales de las entrevistas realizadas. Cuando no figure expresamente su autor/a, se trata de una cita de M. Antònia Canals.

6. El origen de este proceso podría situarse en el movimiento cultural catalán conocido como *Renaixença*, cuyo máximo esplendor se produce en la segunda mitad del siglo XIX, y entre cuyas características se encontraban la búsqueda de las raíces de la cultura catalana y la defensa de las libertades nacionales.

En aquellos años, en Cataluña se desarrollaban proyectos educativos que estaban en la vanguardia europea. Como ejemplos se pueden mencionar la estrecha relación de la pedagogía catalana con el *Instituto Rousseau de Ginebra*, o la creación, en 1914, de la *Escola de Bosc*, dirigida por A. Monroy y R. Sensat, cuyo principio fundamental era poner al alumno en el centro de todo el sistema educativo<sup>7</sup>.

En definitiva, en este primer momento de la trayectoria de M. Antònia existía una gran relación con la educación (tradicción familiar y vinculación con los movimientos de renovación pedagógica, especialmente con el sistema Montessori), pero también con las matemáticas, área en la que destacaba claramente y con la que mantenía una vinculación personal por la figura de su padre. De hecho, durante toda su trayectoria escolar las matemáticas eran la asignatura que más satisfacciones le producía y en la que destacaba claramente sobre el resto de compañeras. Finalizados los estudios de bachillerato, la voluntad de M. Antònia era la de estudiar la carrera de Ciencias Exactas, y para ello tuvo que convencer a su madre ya que, en principio, era reacia a esa idea.

## Universidad

Entre 1947 y 1953 cursa la carrera de Ciencias Exactas. Durante este período su interés fundamental, en el ámbito académico, son las matemáticas. También finaliza, en 1950, los estudios de Magisterio en la Escuela Normal de Tarragona, pero se trata de algo casual, que lo realiza porque no le supone excesiva dificultad y entra dentro de la tradición familiar.

Pero esta experiencia universitaria presenta dos caras muy diferentes. Por un lado están las matemáticas, que le siguen apasionando (especialmente la geometría), pero por otro está la propia dinámica de la enseñanza universitaria que, salvo contadas excepciones, entra en conflicto con los planteamientos pedagógicos que ella arrastra desde su origen familiar. No se trataba de que los profesores universitarios adoptasen tal o cual metodología, era algo que estaba más relacionado con las relaciones personales profesor-alumno, y que recuerda el principio fundamental de la *Escola del Bosc* señalado antes: se trataba de una enseñanza absolutamente despersonalizada, el alumno dejaba de ser sujeto para convertirse en objeto.

Ante esto, los principios morales de M. Antònia generan un cierto rechazo hacia la propia universidad, pese a tener claras oportunidades de proseguir su carrera profesional en ese ámbito académico.

Terminé muy decepcionada respecto a la universidad como institución y me prometí a mí misma nunca más poner los pies en ella (evidentemente, no lo he cumplido). Me propusieron ir a Frankfurt para hacer allí una tesis de Topología, y rehusé absolutamente la idea, sin ninguna duda (y entonces era una ocasión extraordinaria).

---

7. Sobre la renovación pedagógica en Catalunya puede consultarse la excelente obra de F. Aisa (2007).

Así, en lugar de proseguir la carrera académica universitaria, comienza a trabajar impartiendo clases de matemáticas en el *Liceo Francés* y en el *Instituto de bachillerato Joan Maragall*.

## Escuela

Su trabajo como profesora de matemáticas solo dura 3 años. Pese a su formación matemática universitaria, el entorno familiar relacionado con la renovación pedagógica en Catalunya le presenta, en 1956, la oportunidad de integrarse en una experiencia escolar promovida por M. Teresa Codina: la Escuela Talitha<sup>8</sup>.

Eso sí era interesante y no las clases que yo estaba dando (mucho mejor pagadas, pero bastante vacías, sólo con contenido matemático). Ella me proponía montar y dirigir el parvulario (que podía llegar a 5 clases). No en matemáticas sino “el parvulario”, global, formar los maestros (pues no los había formados para nuestro objetivo), etc... ¡Eso era una decisión muy fuerte!

Me fui con Teresa y otras mujeres entrañables (lo son hoy aun, las que quedan) entre ellas Marta Mata; empezamos, y trabajé en la escuela TALITHA durante 6 años. Allí aprendí todo lo que sé sobre la educación; aprendí que no se trata de enseñar sino de propiciar que alguien aprenda, descubra, progrese... Y esto es lo que siempre he creído y creo.

En muchos aspectos, la Escuela Talitha se desarrolla con una dinámica muy similar a la de las innovadoras escuelas catalanas anteriores al golpe de estado de F. Franco, al tiempo que sirve (junto a otras experiencias similares) para ir conformando un nuevo grupo de maestras y maestros catalanes que entran en contacto con algunos de los pedagogos catalanes de principios del siglo XX, que todavía vivían en Barcelona<sup>9</sup>.

El señor Galí decía, todo esto que decís, hace 30 años en Blanquerna ya lo hacíamos, pero no, no te preocupes, no te preocupes, siempre hay que descubrir el Mediterráneo (M. Teresa Codina).

La experiencia de Talitha va a resultar decisiva en la trayectoria personal de M. Antònia<sup>10</sup>. En muchos aspectos se puede considerar que le sirve para desarrollar personalmente lo que, de alguna manera, ya conocía por su origen familiar, pero al menos hay dos cuestiones nuevas que han guiado todo el desarrollo profesional posterior de M. Antònia: la innovación desde la reflexión sobre la práctica escolar y la formación de maestros mediante el trabajo en grupo. Más adelante volveré sobre este último punto.

---

8. El primer contacto entre M. Antònia y M. Teresa Codina se produce gracias a la tía Dolors Canals, antigua directora de una de las escuelas municipales Montessori de Barcelona fundadas en 1915.

9. Sin pretender ser exhaustiva, destacan las figuras de A. Galí y A. Martorell, y las escuelas *Virtèlia*, *Costa i Llobera*, *Talitha* y *Ton i Guida*.

10. Para profundizar en la experiencia educativa de la Escuela Talitha es imprescindible consultar la obra de M. Teresa Codina (2007).

En 1962 deja Talitha para crear una nueva escuela, Ton i Guida, en un barrio de Barcelona (Verdúm) habitado por clases populares y carente de toda clase de servicios públicos. Aquí va a poner en práctica todo lo que aprendió en Talitha, manteniendo como uno de los puntos básicos la formación de un equipo docente coherente con el proyecto, y con una dinámica de permanente análisis y reflexión sobre su propia práctica<sup>11</sup>. Sin profundizar en ello, rescato dos opiniones sobre esta escuela:

Como pez en el agua, ¿sabes lo que quiero decir?, sentirte bien, sentirte valorado, que te tenían en cuenta, que tus problemas les preocupaban ¿sabes lo que quiero decir? que eras alguien que se salía del montón, que es lo que ha de ser la educación para el maestro ¿no? El maestro sabe un poco tu vida, y se preocupa por ti y... fuera de lo que es la familia ¿no? la escuela es un espacio de libertad y responsabilidad al mismo tiempo ¿eh? porque tenías que hacer las cosas y hacerlas bien. (Antiguo alumno de Ton i Guida)

La escuela Ton i Guida no hubiera funcionado tan exitosamente sin la presencia de un equipo cohesionado y fuerte, con afinidad de ideales educativos y sociales, y con espíritu de sacrificio y generosidad, siempre con María Antonia por delante. (Antigua profesora de Ton i Guida)

La realidad de estos equipos docentes contrastaba con el panorama general respecto a la formación del profesorado en España, que arrastraba carencias en el ámbito pedagógico y que estaba, mayoritariamente, incapacitado para afrontar proyectos educativos de este tipo. De ahí que la formación docente fuera uno de los aspectos fundamentales para intentar que la renovación pedagógica catalana tuviera garantías para su desarrollo. Las personas que dirigían estas escuelas mantenían contactos periódicos para reflexionar sobre sus prácticas, y fueron el núcleo de la *Asociación de Maestros Rosa Sensat*, creada en 1965.

## Formación de maestras/os

La *Asociación Rosa Sensat* es la institución que pretende afrontar las dos necesidades básicas para poder desarrollar una escuela nueva catalana: el trabajo en equipo y la formación permanente de maestros. En la Asociación se reúnen los profesores de las escuelas con un mismo ideario en la línea de la pedagogía activa, para formar profesores, siguiendo la línea de los maestros que habían vivido esta pedagogía durante la II República, así nace *Rosa Sensat* y las escuelas de verano.

Hasta entonces, el trabajo en equipo que se desarrollaba en *Ton i Guida* tenía la particularidad de que dicho equipo había sido seleccionado por la propia M. Antònia, mientras que la apertura hacia otras escuelas y con otros profesionales podía incrementar la heterogeneidad de estos nuevos equipos de trabajo.

---

11. La historia de *Ton i Guida* está perfectamente documentada por R. Solà (2003).

Personalmente me costaba, porque yo soy un poco sui generis y conmigo no me gusta que se metan, pero tuve que aceptar que aprendíamos todos unos de otros, y fui empezando con esto. Y bueno, entonces en Rosa Sensat me lo acabe de creer del todo, lo comprobé totalmente, fue como una plenitud de este tomar conciencia de la importancia del grupo.

Además, la organización de la Asociación se realizó por áreas de conocimiento, y aquí es donde M. Antònia vuelve de lleno al campo de las matemáticas<sup>12</sup>.

El objetivo primero fue doble: coordinación entre algunas escuelas y formación de los maestros. Marta Mata fue el eje de ambos asuntos. En este contexto ella me dijo: “tú eres la responsable de todo lo que se haga de matemáticas en esta casa”. Yo me emocioné. Todavía me tenían por profesora de matemáticas, yo que había abandonado este campo... y mi responsabilidad renació.

Esto no implicó que abandonase su trabajo en *Ton i Guida*, ya que permaneció en la Escuela hasta 1979. Pero la Escuela estaba plenamente consolidada y M. Antònia comenzó a desarrollar una intensa labor en la formación de maestras/os, mediante escuelas de verano, charlas y cursos que, con el tiempo, fueron ampliándose a todo el territorio del Estado Español.

Dentro de esta dinámica, su vuelta a la universidad resultaba absolutamente pertinente. Así lo entendieron en la Universidad Autónoma de Barcelona, que encontró en la *Asociación Rosa Sensat* un grupo de profesionales con los que poder afrontar los estudios de formación del profesorado con ciertas garantías, y M. Antònia comenzó en 1975 su trabajo como profesora de Didáctica de las matemáticas<sup>13</sup>.

Me vino Pilar Benejam a buscar a Rosa Sensat, claro ya existía Rosa Sensat, Rosa Sensat influyó mucho en todas estas cosas, y me vino a buscar y dice es que queremos una persona licenciada en matemáticas pero al mismo tiempo especialista en infantil. ¿A quién iban a buscar? no había nadie más, efectivamente no había otra que yo, entonces claro, dije tengo que ir.

Para el trabajo en el campo de la didáctica de las matemáticas, M. Antònia reúne una serie de elementos que resulta muy difícil encontrar en otra persona. Su **formación matemática** es muy sólida, tanto que tras 28 años sin dedicarse a las matemáticas universitarias, no tuvo dificultades para superar, en 1981, las oposiciones nacionales para cubrir las plazas de Escuelas de Formación de Maestros. También cuenta con la experiencia de 25 años como **maestra de educación infantil y primaria**, experiencia caracterizada por el trabajo de reflexión e innovación en diferentes grupos de maestras/os; junto al

---

12. Ya durante los últimos años que trabajó en *Ton i Guida*, dado el crecimiento de la escuela y la especialización de los docentes de la última etapa de la educación primaria, impartía clases de matemáticas. Además, su conocimiento del método Montessori le garantizaba unas capacidades, en el ámbito de la enseñanza de las matemáticas en educación infantil, muy por encima de lo habitual. Pero la propia M. Antònia seguía considerándose, básicamente, una maestra de parvulario, hasta que en Rosa Sensat se dedica a la enseñanza de las matemáticas.

13. También trabajó en la Universitat de Vic y en la Universitat de Girona, en esta última continúa como profesora emérita.

conocimiento teórico y práctico de las corrientes de enseñanza de las matemáticas que se desarrollaron a principios del siglo XX (Montessori, Dienes, Piaget...)

Eso significa que tiene un bagaje matemático, una formación matemática que tiene instalada, y tiene mucho sentido común, ha estado en la escuela, le apasiona la educación y la formación y claro, hay poca gente que tenga tanta pasión por la educación y tanta pasión por las matemáticas y tanta personalidad para comunicarlas. (Profesor de universidad, antiguo compañero de M. Antònia)

En las matemáticas en educación infantil hay poca sensibilidad hacia la importancia del contenido y más la actividad por la actividad, el aspecto sensorial, el uso del material, pero la recensión de la idea matemática que hay detrás no se hace, entonces María Antonia eso lo hacía, porque lo tenía, le gustaban las matemáticas, y además le gustaba sobre todo la educación. Lo de la educación matemática eso puede ser un paradigma, empezó matemáticas pero se dedicó a la educación, entonces... por tradición. Ahora lo que se dice en términos de educación matemática, como didáctica era antes un paradigma, la práctica de la sensibilidad educativa y la sensibilidad matemática y no es hacer teorías sobre la didáctica de la matemática sino vivirla, sentirla y analizarla (Profesor de universidad, antiguo compañero de M. Antònia).

En un primer momento, en el origen familiar y social de M. Antònia coincidían el ámbito de la educación y el de las matemáticas; pero tras su breve formación matemática universitaria, su trayectoria derivó hacia la educación escolar. Pero ha sido precisamente esa experiencia escolar la que la lleva, finalmente al campo de la formación de maestras/os en educación matemática, cumpliendo así un proceso que, históricamente, abarca más de un siglo.

## CONCLUSIONES

Aunque no resulta una novedad, conviene insistir en la necesidad de utilizar la perspectiva biográfica para el estudio del profesorado (necesidad extrapolable a cualquier otro ámbito profesional). Sólo conociendo toda la trayectoria personal de un sujeto se está en disposición de comprender cómo se ha ido conformando y evolucionando dicha trayectoria. En el caso de María Antònia Canals, su trayectoria profesional está centrada en la educación y en las matemáticas.

Su origen familiar y su entorno social le sirvieron para sentar las bases de cómo ella entiende la educación en general y la educación matemática en particular. Cuando esas bases son lo suficientemente sólidas, las diferentes oportunidades que se presentan en su biografía no le hacen abandonarlas, sino que son esos principios (pedagógicos y también morales) los que le permiten orientarse entre ellas.

La innovación docente tiene que estar orientada desde la práctica escolar. Si lo que se pretende es traspasar los límites de la investigación, hacia el ámbito de la investigación, el desarrollo y la innovación, resulta fundamental la reflexión sobre las prácticas escolares, orientada siempre desde el interés del alumno como sujeto de su propia educación.

El desarrollo de cualquier proyecto educativo requiere de un equipo docente comprometido con el mismo, de ahí la importancia de la formación docente para cualquier sistema educativo. Sin equipos docentes no hay proyectos educativos, por lo que cualquier sistema educativo que no promueva, consolide y mantenga este tipo de equipos, está incapacitado para desarrollar proyectos educativos coherentes.

## REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Aisa, F. (2007). *Mestres, renovació i avantguarda pedagògica a Catalunya*. Barcelona: Edicions de 1984.
- Arnaus, R. (1993). *Vida profesional i acció pedagògica. A la recerca de la comprensió d'una mestra. Un estudi de cas*. Universitat de Barcelona (tesis doctoral).
- Bertaux, D. (2005). *Los relatos de vida. Perspectiva etnosociológica*. Barcelona, Bellaterra.
- Clandinin, D. J. (1986). *Classroom Practice. Teachers Images in Action*. London: The Falmer Press.
- Codina, M. T. (2007). *Educuar en temps difícils. Escola Talitha, 1956-1974*. Vic: Eumo Editorial.
- Coller, X. (2000). *Estudio de casos*. Madrid: Centro de Investigaciones Sociológicas.
- Connelly, F. M. y Clandinin, D. J. (1986). On Narrative Method, Personal Philosophy, and Narrative Unities in the Story of Teaching. *Journal of Research in Science Teaching*, 23 (4), 293-310.
- Contreras, J. (1985). ¿El pensamiento o el conocimiento del profesor? Una crítica a los postulados de las investigaciones sobre el pensamiento del profesor y sus implicaciones para la formación del profesorado. *Revista de Educación*, 277, 5-28.
- Elbaz, F. (1983). *Teacher Thinking. A Study of Practical Knowledge*. Londres: Croom Helm.
- Goodson, I. F. (ed.) (2004). *Historias de vida del profesorado*. Barcelona: Octaedro.
- Goodson, I. F. (1981). Life History and the Study of Schooling. *Interchange*, vol. 11 (4), 1980-1981.
- Hernández, F. (ed.) (2004). Las historias de vida como estrategia de visibilización y generación de saber pedagógico. En Goodson, I. F. (ed.) *Historias de vida del profesorado*, 9-26. Barcelona: Octaedro.
- Pérez, A. (1985). Paradigmas contemporáneos de investigación didáctica. En Gimeno, J. y Pérez, A. (eds.) *La enseñanza: su teoría y su práctica*, 95-138. Madrid: Akal.
- Sierra, M. y López, C. (2011). Margarita Comas (1892-1973) y su aportación a la educación matemática. *Epsilon. Revista de Educación Matemática*, 77, 23-38.
- Solà, R. (2003). *L'escola Ton i Guida: quan la pedagogia activa va anar al suburbi*. Barcelona: Edicions 62.
- Valles, M. S. (1997). *Técnicas cualitativas de investigación. Reflexión metodológica y práctica profesional*. Madrid: Síntesis.

## El trabajo conjunto del profesor de física y el de matemáticas. Una aplicación al estudio del movimiento ondulatorio y del sonido

**Francisco Moreno Soto**  
*I.E.S. "Zurbarán" (Badajoz)*

### INTRODUCCIÓN

Uno de los problemas que encontramos en la asignatura Matemáticas II de 2º de Bachillerato es que, en muchas ocasiones, la temporalización de la materia no satisface las necesidades de uso de herramientas matemáticas en otras disciplinas como la Física. En este nivel, tampoco podemos pasar por alto la dificultad que los alumnos encuentran con la asimilación de los conceptos matemáticos y su aplicación a otras áreas. Parece así evidente la necesidad de poner en marcha todos los recursos de los que disponemos, y en particular los relacionados con las TIC, para conseguir tanto una correcta asimilación del contenido matemático como su correcta extrapolación a otras materias, en aras a conseguir un proceso de enseñanza-aprendizaje de calidad.

Veamos con un ejemplo como podemos soslayar estos problemas. Para ello, exponemos a lo largo de este trabajo una unidad didáctica en la que con el uso de la **Pizarra Digital Interactiva**, el software libre **Graphmatica** y el programa **Ondas 2.1** trabajaremos el Análisis de funciones y aplicaremos lo aprendido en el estudio del movimiento ondulatorio y el sonido.

Con el objetivo de buscar soluciones tanto al problema de la temporalización, como al de la extrapolación de los conocimientos matemáticos desarrollaremos esta unidad de forma conjunta con los compañeros del Departamento de Física y Química. La unidad didáctica está organizada de modo que en cada sesión los alumnos trabajen la unidad durante dos horas seguidas: la hora de Matemáticas y la de Física, evitando así un retraso con respecto a la temporalización general del curso

## LA IMPORTANCIA DEL TRABAJO CONJUNTO

El peso de las evidencias y las conclusiones de múltiples estudios señalan con claridad y contundencia que el trabajo colaborativo entre profesores constituye uno de los más determinantes criterios de calidad. Estudios como los de Muñoz-Repiso y otros (1995), en el contexto español, refuerzan estas tesis. Son múltiples las evidencias e indicios que avalan la certeza de la afirmación anterior. Así, la idea y la necesidad del trabajo entre enseñantes que comparten la educación de un contingente de alumnos en el mismo establecimiento escolar, basado en la colaboración, se justifica por numerosos motivos. Algunos, aunque no siempre considerados en nuestras prácticas como enseñantes, conviene recordarlos aunque son bien evidentes y de sentido común:

- La acción sinérgica suele ser más efectiva y eficaz que la acción individual o que la simple adición de acciones individuales. Mediante la colaboración parece más factible mejorar las ayudas pedagógicas que proporcionamos a nuestros estudiantes, ofrecer una oferta educativa más completa.
- La colaboración mediante el trabajo en equipo permite analizar en común problemas que son comunes, con mayores y mejores criterios.

A estas razones habría que añadir una que parece fundamental: la colaboración mediante el trabajo en equipo es un objetivo en la educación escolar. Los currículos que se desarrollan en la totalidad de los países democráticos recogen con claridad el encargo que tienen los enseñantes de capacitar a sus alumnos para esas tareas. Como consecuencia, si los profesores no damos ejemplo de trabajo colaborativo mediante prácticas basadas en el trabajo en común, la coordinación y la ayuda mutua, difícilmente podremos ser creíbles y conseguir las capacidades que, en ese sentido, parece que deberíamos pretender en los alumnos.

Al referirnos a trabajo colaborativo, queremos designar la acción de obrar conjuntamente con otro u otros con el propósito compartido de alcanzar un mismo fin. La acción de colaborar puede desarrollarse entre diversos estamentos: profesorado, alumnado, padres y madres; entre servicios: inspección, servicios psicopedagógicos de apoyo a los centros...; entre centros educativos, etc. En este caso, la colaboración entre docentes, es un modo de trabajar de dos o más personas, compartiendo recursos, para alcanzar unos propósitos específicos durante un período de tiempo determinado, que tiene como características y requisitos principales los siguientes:

- i)** Es voluntario.
- ii)** Está establecido en términos de colegialidad, entre iguales; no existe predominio por parte de ninguno de los agentes; en igualdad de condiciones independientemente de rangos jerárquicos o situaciones administrativas.
- iii)** Se basa en la lealtad y en la confianza recíprocas.
- iv)** Implica, por tanto, un determinado planteamiento ideológico (ausencia de jerarquías, equidad, igualdad entre participantes, voluntad de transformación y mejora...) (*Hall y Wallace, 1993*).

- v) Supone, a diferencia de la simple cooperación, realizar en común, participativamente, el diseño de lo que se pretende alcanzar o desarrollar; acordar la metodología de trabajo y discutir y evaluar en común el proceso y los resultados.

Un equipo de trabajo consiste en un grupo de personas trabajando juntas las cuales comparten percepciones, tienen una propuesta en común, están de acuerdo con los procedimientos.

## **EL PROGRAMA GRAPHMÁTICA Y LA PIZARRA DIGITAL INTERACTIVA (PDI)**

### **Graphmática**

Es una aplicación informática de carácter matemático especialmente diseñada para graficar funciones. Algunas de las características que presenta son:

- Automáticamente determina el tipo de gráfico que colocamos basándose en las variables usadas
- Reconoce dominios de ecuaciones, si los incluimos.
- Ajusta la razón  $x/y$  cuando modificamos el rango de los ejes o cambia el tamaño de la ventana de gráficos para que se mantenga el aspecto apropiado del gráfico.
- Soporta inecuaciones cartesianas.
- El procesador de ecuaciones sigue las reglas matemáticas: multiplicación implícita, librería completa de funciones matemáticas, y no es necesario aislar variables antes de graficar.
- También es posible realizar cálculo numérico y simbólico: derivadas, integrales y puntos críticos de cualquier función cartesiana.

### ***La Pizarra Digital Interactiva***

Cada vez existe mayor número de recursos tecnológicos en las aulas y uno de los más utilizados es el videoprojector. Un paso más en esta tecnología son las **Pizarras Digitales (PD)** y las **Pizarras Digitales Interactivas (PDI)**, que aporta mayores ventajas.

La PD es sistema tecnológico, generalmente integrado por un ordenador y un videoprojector que permite proyectar en una superficie plana contenidos digitales en un formato idóneo para visualización en grupo.

La “Pizarra Interactiva”, también denominada “Pizarra Digital Interactiva”(PDi) consiste en un ordenador conectado a un videoprojector, que muestra la señal de dicho ordenador sobre una superficie lisa y rígida, sensible al tacto o no, desde la que se puede controlar el ordenador, hacer anotaciones manuscritas sobre cualquier imagen proyectada, así como guardarlas, imprimirlas, enviarlas por correo electrónico y exportarlas

a diversos formatos. La principal función de la pizarra es, pues, controlar el ordenador mediante esta superficie con un bolígrafo, el dedo -en algunos casos- u otro dispositivo como si de un ratón se tratara. Es lo que nos da interactividad con la imagen y lo que lo diferencia de una pizarra digital normal (ordenador + proyector).

### *Ventajas de su uso conjunto*

- Haciendo uso de Graphmatica junto con la Pizarra Digital Interactiva podemos exponer con claridad, rapidez y precisión gran parte del tema de funciones y gráficas que nos ocupa. - Es un elemento motivador para el aprendizaje de los alumnos, aumentando sus aportaciones en clase, la atención y retentiva de éstos gracias a su mayor participación.
- Aumenta la comprensión: permitiendo mostrar más ejemplos para comentar y además permite visualizar conceptos y procesos complejos, difíciles o imposibles de exponer en clase con la pizarra tradicional.
- Se pueden preparar clases mucho más atractivas y documentadas, permitiendo guardar los materiales que se van creando. Esto también es fuente de motivación para el docente, además de obtener mejores resultados de sus alumnos.
- Ayuda en Educación Especial, pudiendo compensar problemas de visión (en la PDI se puede trabajar con caracteres grandes), audición (la PDI potencia un aprendizaje visual), coordinación psicomotriz (en la PDI se puede interactuar sin ratón ni teclado)...

Vamos a aprovechar estas características para representar con el programa **Graphmatica** un sistema de ejes cartesianos y, con la PDI, interactuar directamente sobre la superficie de proyección. El objetivo es desarrollar el tema de funciones mediante el lenguaje de las gráficas con ayuda de los recursos TIC mencionados.

### **EL SOFTWARE ONDAS 2.1.**

Esta herramienta se dirige fundamentalmente al alumnado y a docentes del último curso de la Educación Secundaria, como un complemento de las clases y de las prácticas y experiencias respecto a la Física Ondulatoria, con la que se pretende, de forma cualitativa:

- Comprender los aspectos básicos de la interferencia mediante la superposición de pulsos.
- Analizar algunos de los parámetros que intervienen en el movimiento ondulatorio.
- Modelizar dos fenómenos típicamente ondulatorios: la interferencia y la difracción.
- Dar una visión única de la interferencia y la difracción, independientemente de la naturaleza del movimiento ondulatorio.

- Completar la información de la interferencia y difracción de las experiencias con la cubeta de ondas y el láser a través de gráficos de la perturbación total y del cuadrado de la amplitud.
- Comprender el concepto de Paquete de ondas y su importancia en la formulación de la mecánica cuántica.

Las modelizaciones que se proponen en los distintos módulos están limitadas al análisis del movimiento ondulatorio en una y dos dimensiones.

Desde un punto de vista físico, el objetivo del programa es facilitar la manipulación de los fenómenos ondulatorios mencionados, en ocasiones a expensas de la precisión, es decir, se trata de una herramienta didáctica y no de un simulador.

## **EL SISTEMA EDUCATIVO EXTREMEÑO**

“Tras quedarse fuera de todas las revoluciones, Extremadura no podía dejar pasar de largo también la tecnológica”. Esta premisa que fue la que motivó al Gobierno autonómico a implantar un plan de informatización de la enseñanza en 2002. La apuesta fue total: equipos informáticos, conexión a internet, formación al profesorado y, lo más destacado, el desarrollo -por primera vez en España- de un sistema operativo específico para la educación basado en software libre, el GNU LinEx, que después copiarían Andalucía, Valencia, Madrid o Castilla-La Mancha.

El sistema educativo extremeño cuenta con más de 70.000 ordenadores. El 99% usa exclusivamente programas de código abierto, totalmente gratuitos. Además, el desarrollo y el mantenimiento de LinEx es asumido directamente por la Administración para eliminar los límites económicos en el acceso a las tecnologías. De hecho, se asignó un funcionario técnico a cada centro para administrar la intranet

## **UN PASO POR DELANTE: LAS AULAS EXTREMEÑAS YA TIENEN PORTÁTILES**

El anuncio del Ministerio de Educación de dotar con portátiles a los alumnos de 5º de Primaria el curso 2009-2010 cayó “muy de sorpresa”. En Extremadura, ya disponemos de portátiles en todos los institutos

## **UNIDAD DIDÁCTICA**

Pasemos ahora a describir la unidad didáctica de la que estamos hablando

### **Caracterización de funciones.**

#### **Aplicación al estudio del movimiento ondulatorio y del sonido**

## IDENTIFICACIÓN / CONTEXTUALIZACIÓN

**Asignaturas:** Matemáticas II y Física

**Nivel educativo y curso:** 2º de Bachillerato.

**Temática concreta:** Análisis de funciones. Movimiento ondulatorio. Estudio del sonido.

### Objetivos:

- Comprender y aplicar los conceptos y procedimientos matemáticos propios del Análisis de funciones a otras ciencias.
- Emplear los recursos aportados por las tecnologías actuales (PDI, Graphmática) para obtener y procesar información, facilitar la comprensión de fenómenos dinámicos, ahorrar tiempo en los cálculos y servir como herramienta en la resolución de problemas.
- Reforzar el aprendizaje de conceptos y procedimientos propios del análisis de funciones, especialmente de las funciones sinusoidales.
- Reforzar el aprendizaje de conceptos y procedimientos propios de las ondas y el sonido.
- Manejar la experimentación y la modelización asistidas por ordenador de fenómenos físicos (sonido, ondas).
- Dinamizar el estudio de este tema complementando sus aspectos abstracto y formal con representaciones visuales y auditivas.

**Duración de la actividad:** 5 sesiones.

### Número de alumnos y características:

Grupo reducido de alumnos de 17 a 18 años, de un instituto de enseñanza secundaria. Todos disponen de ordenador en sus casas y tienen acceso a los programas que utilizaremos. También disponemos de un ordenador portátil por alumno en el laboratorio

### Pizarra digital utilizada:

Se utiliza la pizarra digital interactiva fija montada en el laboratorio de Física y un portátil con los programas y archivos de imágenes y sonidos previamente cargados. También es necesario acoplar un micrófono normal de PC, y como reproductor de sonido, el altavoz del portátil, o uno conectado a él, dado el reducido número de alumnos.

### Recursos:

- Libro de texto y cuaderno de apuntes y ejercicios, como en una clase habitual.
- Graphmática Es una aplicación informática de carácter matemático especialmente diseñada para graficar funciones
- Programa ONDAS 2.1. (<http://eureka.ya.com/explorar>). Se trata de un simulador sencillo que presenta modelizaciones de fenómenos ondulatorios producidos por ondas armónicas (propagación, interferencia, difracción, etc.).
- Programa *Creative Wave Studio* (CTWAVE 32: disponible en el *software* asociado a la tarjeta de sonido Sound Blaster).
- Algunos archivos de imágenes, texto o sonidos para utilizar en las sesiones relacionadas con el tema seleccionado.

## DESCRIPCIÓN DE LA ACTIVIDAD

### Breve descripción:

Comenzamos el curso por el bloque de Análisis para evitar el problema que señalamos en la introducción respecto a la temporalización de los contenidos de las materias Matemáticas y Física. Así durante una serie de sesiones, que abarca parte del primer trimestre, estudiamos los conceptos de límites, continuidad, derivadas, propiedades de las funciones derivables y aplicaciones de la derivada. Una vez trabajado el bloque de Análisis, procedemos a desarrollar las sesiones en las que aplicamos los conceptos estudiados anteriormente a la descripción del movimiento ondulatorio y del sonido.

El profesor de Matemáticas dedica dos de estas sesiones a que el alumno se familiarice con las características esenciales del programa Graphmática y a la aplicación de las mismas al estudio de funciones sinusoidales. Algunas de las características esenciales de este software han sido enumeradas anteriormente.

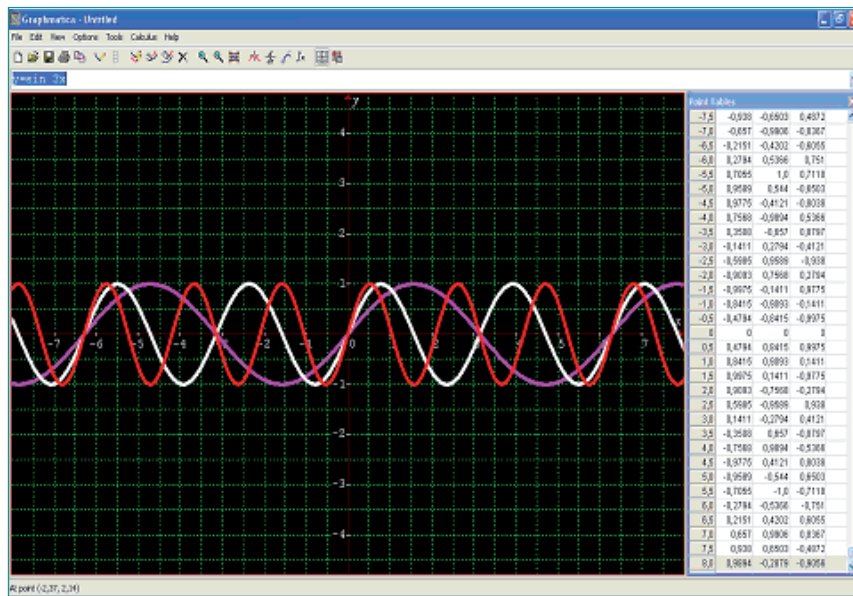


Figura 1

Posteriormente, dedicamos tres sesiones a la aplicación de lo estudiado en la clase de Matemáticas al estudio del movimiento ondulatorio y del sonido. Estas tres sesiones se desarrollan conjuntamente con el profesor de Física. Para ello, en una primera sesión se presenta ante los alumnos una serie de modelizaciones de fenómenos propios de las ondas armónicas que tienen que ver con su propagación e interferencia. Con ayuda del programa ONDAS, se muestran los gráficos elongación-posición de las ondas individuales, de su superposición y del cuadrado de la amplitud (intensidad), evolucionando con el

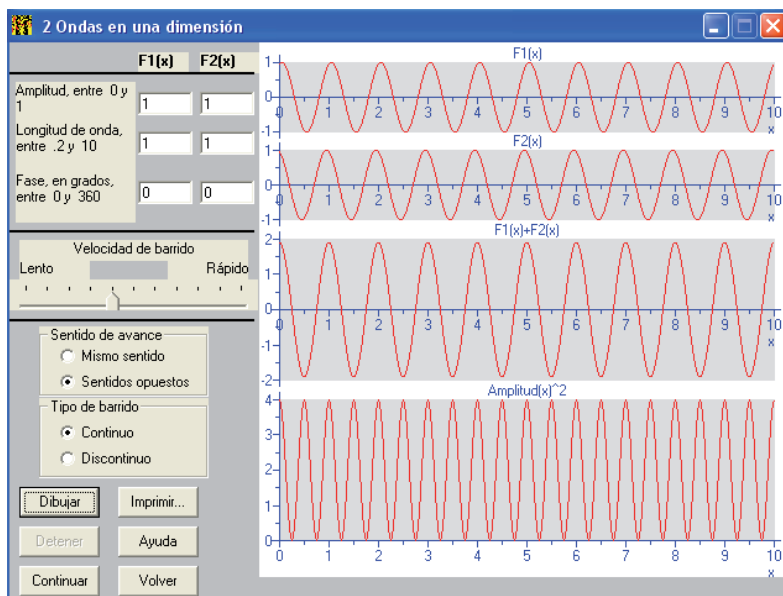


Figura 2.

tiempo. Durante la actividad, tanto el profesor de Física como el profesor de Matemáticas explican el significado de los gráficos y proponen a los alumnos preguntas y sugerencias para comprobarlas a continuación. Véase Figura 2.

Las sesiones segunda y tercera se desarrollan mientras se trata el tema del sonido. En las explicaciones preliminares se utiliza la pizarra digital para ilustrar las explicaciones de los profesores con algunos esquemas e imágenes fijas (curvas habituales en el tema, características principales de estas, percepción del sonido, fuentes de sonido, diagrama de audición, etc.) y posteriormente volvemos a recordar como podemos utilizar el programa Graphmática para construir esas curvas.

A continuación se utiliza el programa CTWAVE 32 para grabar sonidos directamente o procesar archivos de sonido previamente grabados y analizar los parámetros de su onda sonora, como la frecuencia, amplitud, o su composición armónica. Esto permite medir las características de los sonidos y relacionarlas con las propiedades percibidas por el oído

## Listado de actividades propuestas a los alumnos:

### 1. Representación de curvas

— El docente facilita un documento a cada alumno en el que haya ejercicios del tipo siguiente:

De acuerdo con el teorema de Fourier, “cualquier función periódica puede expresarse como suma de una serie de funciones seno y coseno” (en casos particulares, sólo

de senos o sólo de cosenos). La utilidad de este teorema estriba en que permite reducir el análisis del movimiento ondulatorio al de las ondas sinusoidales. Así, si tenemos un movimiento ondulatorio de ecuación  $y = f(x - v \cdot t)$ , es posible considerarlo formado por la superposición de los movimientos ondulatorios que corresponden a los términos de la serie trigonométrica en que podemos descomponer la función dada. Además, si no se conoce la ecuación del movimiento ondulatorio pero se dispone de una representación gráfica del mismo pueden determinarse sus componentes por medios mecánicos.

Como ejemplo de una serie de Fourier, la onda rectangular representada en la figura (a) puede obtenerse como suma de la serie:

$$y = A \cdot \text{sen } x + 1/3 A \cdot \text{sen } 3x + 1/5 A \cdot \text{sen } 5x + \dots$$

En la figura (b) se han representado los tres primeros términos de esta serie, y en la (c) su suma. Obsérvese que, con sólo sumar tres términos, la serie sinusoidal ya se aproxima a la forma de la onda dada.

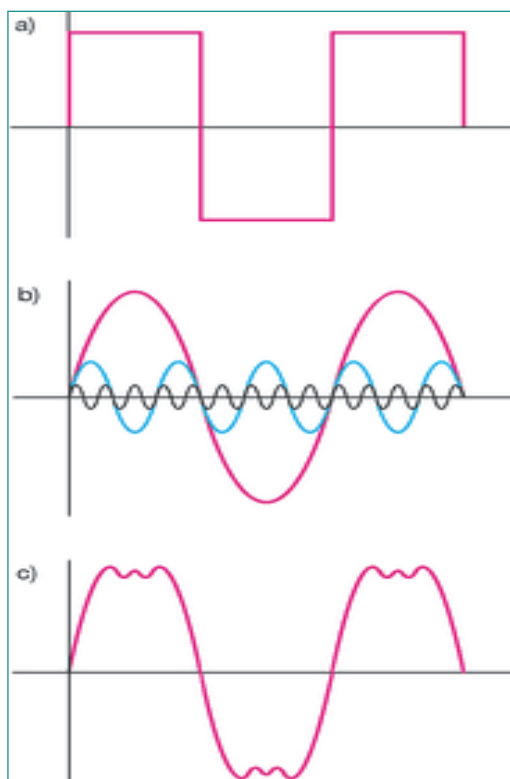


Figura 3.

Lleva a cabo este estudio con Graphmática

## *II. Modelización de fenómenos ondulatorios con el programa ONDAS:*

— Observación de pulsos y ondas armónicas en una o en dos dimensiones: se representan frente al espacio la evolución en el tiempo de ondas individuales, de su superposición, y del cuadrado de su amplitud (mapa de intensidad). Se analiza matemáticamente lo observado.

Se estudia el efecto producido al cambiar los parámetros de cada onda (longitud de onda, fase inicial, velocidad y amplitud).

— Proyección del vídeo AVI del mismo programa que muestra la interferencia de dos ondas circulares superficiales y su mapa de intensidades, que permite comprender la interferencia de las ondas en la superficie de un estanque.

## *III. Análisis de sonidos con el programa CTWAVE 32:*

— Medida experimental de la frecuencia, amplitud y periodo de un sonido cualquiera a partir del registro de su onda sonora. Relación con las representaciones gráficas previamente obtenidas

— Relacionar sonoridad, tono y timbre de un sonido con los parámetros de su onda: amplitud, frecuencia y complejidad armónica. Por ejemplo, comparando varias notas en varios instrumentos musicales.

### ***Papel de los alumnos:***

Los alumnos participan desde sus asientos proponiendo y llevando a la práctica cambios o modificaciones en las simulaciones, o discutiendo entre todos cuestiones que surjan durante la actividad ante lo visto en la pantalla. También participan más activamente, por turno, produciendo y grabando frente al ordenador los sonidos propuestos por el profesor o ellos mismos, para analizar a continuación, con la ayuda del profesor de Matemáticas, los gráficos obtenidos en la pantalla. El docente invitará a algunos alumnos o alumnas a proyectar sus resultados al grupo y, si se dispone de pizarras individuales (TabletPC), el alumnado puede resolver sus ejercicios al grupo desde cada mesa (En la enseñanza pública esto es, a día de hoy, una utopía).

### ***Papel del profesor:***

El profesor dirige la actividad demandando la participación y avivando el interés de los alumnos (cada uno en su área). Explica la estructura y manejo básicos del programa. Mientras explica los conceptos básicos, muestra la simulación de los mismos. Propone retos, formula preguntas y anima a los alumnos a que comprueben las respuestas en ese mismo instante, experimentando frente a su ordenador o frente a la pizarra digital (Esto último implica una cierta familiarización con el uso de este recurso). También emplaza a los alumnos a que sigan investigando más posibilidades en el ordenador de sus casas.

### ***Evaluación de la actividad:***

La evaluación se basa en una encuesta informal a los alumnos acerca de qué les ha aportado esta actividad, y en los resultados de la prueba escrita en la que se evalúan todos los contenidos del bloque de Análisis (Matemáticas) y del bloque de vibraciones y ondas (Física).

También evaluamos los resultados, teniendo en cuenta tanto la destreza en el manejo de los recursos como la correcta asimilación de la materia curricular. Por ello conviene que los resultados de los ejercicios que han resuelto los alumnos queden almacenados para que el docente los pueda revisar después o que cada alumno resuelva un ejercicio en la última sesión para poder comprobar la adquisición de conocimientos.

## CONCLUSIONES

Una experiencia docente como la que acabamos de exponer no estaría completa sino se exponen los resultados de la misma. Una de las maneras de cuantificar dichos resultados es la de observar las calificaciones obtenidas en las dos materias implicadas. Así, a continuación se expondrán los resultados obtenidos en las pruebas de evaluación correspondientes al bloque de Análisis en Matemáticas II y al estudio de las ondas en Física.

2008/2009		2010/2011		2011/2012	
Matemáticas II	Física	Matemáticas II	Física	Matemáticas II	Física
5	4,6	8	9,4	7	7,8
2	3,9	4	4,1	2	4,4
1	3,4	4	6,5	2	9
1	5,2	4	3,6	4	5,2
6	6,3	9	9,6	9	9,6
8	8,9	9	9,1	10	9,6
		3	2,2	7	8,3
				8	8,5
				6	7,3
<b>Nota Media</b>	<b>Nota Media</b>	<b>Nota Media</b>	<b>Nota Media</b>	<b>Nota Media</b>	<b>Nota Media</b>
3,8	5,4	5,9	6,4	6,1	7,7

Tabla 1. Comparativa de notas

Los primeros resultados, curso 2008/2009, reflejan las notas de ambas materias antes de llevar a cabo la experiencia descrita en este trabajo (Muestra control). Los siguientes, curso 2010/2011, se corresponden con los del primer año que se llevó a cabo la experiencia. Por último, los del curso 2011/2012 se refieren al último año en el que se ha llevado

a cabo esta experiencia y en el que ya se han corregido algunos de los fallos detectados en el curso anterior durante el desarrollo de la misma<sup>1</sup>.

Veamos que conclusiones obtenemos de los datos anteriores

1) Tanto en Matemáticas como en Física observamos una mejora de los resultados obtenidos. Si nos centramos en la evolución de las notas medias a lo largo de los cursos

Matemáticas:  $3.8 < 5.9 < 6.1$

Física:  $5.4 < 6.4 < 7.7$

vemos que:

- Claramente los resultados mejoran respecto al año control en el que aun no se había llevado a cabo la experiencia
- En el último curso, 2011/12, los resultados son mejores que en el 2010/11, primer año en el que se había llevado a cabo la experiencia
- Los resultados en Física son siempre mejores que en Matemáticas

2) Si observamos la nube de puntos construida con los datos obtenidos, esta refleja claramente una correlación lineal positiva entre los resultados en ambas materias.

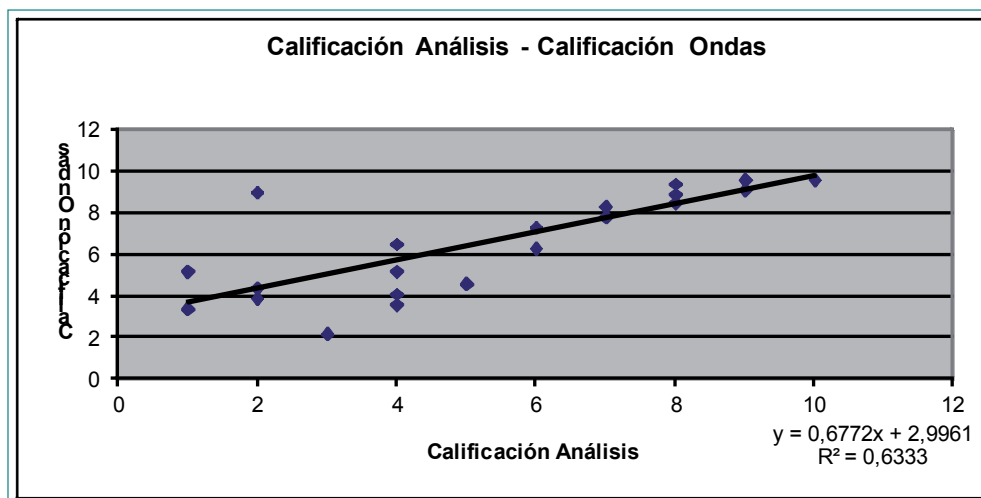


Figura 4.

Si llevamos a cabo un ajuste lineal obtenemos un coeficiente de determinación  $R^2 = 0,6333$ . En este tipo de ajuste este coeficiente coincide con el coeficiente de correlación lineal, por lo que tenemos  $r^2 = 0,6333$  o equivalentemente  $r = 0,796 \approx 0,8$ , lo que indica una correlación lineal positiva bastante fuerte

Por tanto, podemos concluir que la mejora en la asimilación de conocimientos en el bloque de Análisis en Matemáticas lleva asociada una mejora evidente en este campo de la Física dedicado a las ondas.

1. Los profesores encargados de desarrollar esta experiencia han sido los mismos durante los tres cursos

Esta conclusión conduce a pensar que el planteamiento de experiencias docentes como la expuesta en este trabajo pueden resultar de interés para el logro del objetivo planteado: “una mejora en la asimilación de los conceptos matemáticos y en su extrapolación a otras materias, mediante el trabajo conjunto e interdisciplinar y el uso de las TIC”

## Valoraciones

### *Ventajas que aporta el uso de la pizarra digital:*

Los alumnos se muestran mucho más motivados y participativos que en una clase habitual. También pueden mostrar interés por seguir investigando en el ordenador de sus casas aspectos relacionados con lo visto en la clase. Con esta unidad didáctica se persigue la integración, muy interesante desde el punto de vista didáctico, de la explicación del profesor, el trabajo conjunto de profesores de varias materias, la resolución de ejercicios, el trabajo de laboratorio y la discusión en grupo.

## REFLEXIÓN FINAL

Con esta experiencia se puede comprobar que la pizarra digital es una herramienta didáctica muy potente en la enseñanza de las ciencias experimentales. En especial, permite ayudar al alumno a asimilar fenómenos difíciles de comprender si se recurre sólo a palabras o al formalismo matemático, como puede ser el de las ondas.

## REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Calviño, F. (1998): *Mecánica Cuántica. Carácter ondulatorio de la materia*. Disponible en [http://sisps5.upc.es/Docencia/FisicaModerna/Ondas\\_de\\_Materia/](http://sisps5.upc.es/Docencia/FisicaModerna/Ondas_de_Materia/)
- Franco, A. (1999): *Física con ordenador (Movimiento ondulatorio)*. Disponible en <http://www.sc.ehu.es/sbweb/fisica/default.htm>
- Hall, V. y Wallace, M. (1993). Collaboration as a Subversive Activity: a professional response to externally imposed competition between schools? *School Organisation*, 13(2), 101-117.
- Ministerio de Educación. ITE. (2012) “*TIC en el Área de Matemáticas*”
- Marquès, P. (2006). *La pizarra digital en el aula de clase*. Barcelona. Grupo EDEBÉ
- Muñoz-Repiso, M. y otros (1995). *Calidad de la educación y eficacia de la escuela. Estudio sobre la gestión de los recursos educativos*. Madrid: CIDE. Ministerio de Educación y Ciencia.
- ONDAS 2.1. 2000-2002 © Pedro Rodríguez Lorca. La Coruña. España
- Tipler, P. (1989) *Física moderna*, Reverté, Barcelona.
- Villasuso, J. (1999) *Temas de Física con Java (Ondas)*. Disponible en [http://members.es.tripod.de/pefeco/ondas0\\_indice.htm](http://members.es.tripod.de/pefeco/ondas0_indice.htm)



## Sobre la génesis y evolución del Teorema de Rolle

**Carlos Suso Fernández**

*IES Andrés de Vandelvira, Baeza*

**María Victoria Velasco Collado**

*Universidad de Granada*

**Resumen:** *La Historia de las Matemáticas y el conocimiento de la génesis y evolución de los contenidos matemáticos desempeñan un papel fundamental en la formación de los Profesores de Matemáticas, como muchos autores vienen señalando desde hace ya más de un siglo. Sin embargo, este enfoque todavía no está plenamente asentado en nuestros estudios de grado y posgrado, aún siendo cada vez más demandado. En este trabajo presentamos una experiencia docente en relación con un Trabajo Fin de Máster realizado dentro del Programa de Máster Interuniversitario Matemáticas, que versa sobre la historia del Teorema de Rolle.*

*El Teorema de Rolle es un resultado fundamental de Análisis Matemático que nuestros alumnos de Bachillerato estudian. Sin embargo, suele desconocerse quién era Rolle y la historia del teorema que lleva su nombre. En este trabajo mostramos el perfil algebraista de Rolle y cómo expuso su Teorema en un contexto algebraico, totalmente alejado del Cálculo; e indagamos en el proceso mediante el cual el Teorema de Rolle muta del Álgebra al Análisis a lo largo de los siglos XVIII y XIX.*

**Palabras clave:** *Teorema de Rolle, Historia, Educación Matemática*

## About the origin and evolution of the Rolle's Theorem

**Abstract:** *The History of Mathematics and the knowledge of the genesis and evolution of the mathematical contents play a basic role in the training of teachers of mathematics, as many authors have pointed out since more than one century ago. However, this approach is not fully seated still in our postgraduate (and grade) programs, in spite of its*

*demand. In this work we show a teaching experience in relation to a Master Thesis work which was carried out within the Interuniversity Master's Programme "Mathematics", which deals with the history of Rolle's theorem.*

*The Rolle's Theorem is a fundamental result of Mathematical Analysis which is studied by our High School students. Nevertheless, it is not usually known who was Rolle and the history of the theorem that takes his name. In this work we show the algebraic profile of Rolle and how he exposed his Theorem in an algebraic context unrelated with Calculus; and we investigate in the process by means of which the Theorem mutates from the Algebra to the Analysis throughout the XVIIIth and XIXth century.*

**Keywords:** *Rolle's Theorem, History, Mathematics Education.*

## **MOTIVACIÓN DE LA EXPERIENCIA DOCENTE.**

Las normativas educativas actuales, así como los planes de calidad que las acompañan, ya contemplan de forma precisa las necesidades formativas específicas de nuestros profesores de Enseñanza Secundaria. Es por ello que la Ley Orgánica de Educación de 2006 articuló una formación de posgrado orientada a la especialización profesional, que es la que habilita para el ejercicio de las profesiones de Profesor de Enseñanza Secundaria Obligatoria y Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanzas de Idiomas (finalmente regulada con la Resolución de 17 de diciembre de 2007).

En cuanto a los profesores de Bachillerato en activo, la adquisición (y acreditación) de un nivel de formación más cualificado se reconoce por la Administración como mérito curricular (véase, por ejemplo, el apartado titulado Méritos Académicos, en el baremo del RD 850/1993 de 4 de junio a que se refiere la Ley Orgánica 1/1990, de 3 de octubre, de la Ordenación General del Sistema Educativo).

Sea como fuere, el hecho es que son muchos los profesores de Enseñanza Secundaria (con o sin empleo) que demandan actualmente una formación de posgrado, que en un momento dado (ya sea a corto o a medio plazo) los habilite para realizar una Tesis Doctoral. Al menos esa es nuestra impresión personal. Y además, parece que buena parte de los alumnos de posgrado con este perfil perciben como ajenos muchos de los temas de investigación que se trabajan habitualmente en las distintas líneas de investigación de los másteres universitarios (por considerarlos desvinculados de las materias y problemáticas que les competen como profesores de Enseñanza Secundaria). Dicho de otro modo: por lo general, estos alumnos de tercer ciclo no se sienten atraídos por adquirir las competencias necesarias para realizar una labor investigadora similar a la que realizan los profesores de universidad y los investigadores de los organismos públicos de investigación, en temas que nada tienen que ver con la Enseñanza Secundaria, y hacerlo además con el "hándicap" (o la desventaja) de tener que desarrollar dicha actividad vinculados a un puesto de trabajo que no está pensado para ello. De hecho, probablemente, no consideran factible ni rentable el esfuerzo de formación requerido para hacer de la investigación una doble actividad profesional que discurra en paralelo a la de profesor de Bachillerato (que es la remunerada para ellos). Podríamos decir que sólo excepcionalmente, o de manera coyuntural, estos alumnos se refugian en la Enseñanza Secundaria para, desde allí,

colaborar con la investigación que se hace en las universidades en determinados temas muy especializados, desligados de los que atañen la docencia preuniversitaria.

Por otra parte, como argumentábamos antes, los alumnos de posgrado que responden al perfil de Profesor de Secundaria tienen necesidades formativas propias, derivadas de la importancia y la complejidad de su labor profesional, así como de los estándares de calidad actuales requeridos desde el marco europeo de educación en el que estamos inmersos. Parecen por tanto demandar una formación específica que, fomentándola y llevándola a buen puerto, los capacite al máximo nivel en su propio desempeño docente como profesores de Enseñanza Secundaria. Se configura así la Educación Matemática en el foro interdisciplinar (o trasfronterizo) que ha de servir de punto de encuentro desde el cual impulsar y canalizar todas estas necesidades formativas. Y dentro de la Educación Matemática ha de concebirse, como no podría ser de otro modo, la Historia de la Matemática como una herramienta estructural y procedimental de primer nivel.

En relación con la problemática descrita se presenta a continuación una experiencia docente. Para ello haremos un resumen (evitando aquí los desarrollos matemáticos) del Trabajo Fin de Máster realizado por el primer autor de esta ponencia bajo la dirección de la segunda autora, dentro del Programa de Máster Interuniversitario “Matemáticas” (impartido por varias universidades andaluzas).

## INTRODUCCIÓN AL ESTUDIO REALIZADO

Uno de los principales resultados del Análisis Matemático es el Teorema de Rolle. Dicho teorema, en su versión moderna, afirma lo siguiente:

*Sea una función real de variable real  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , continua en  $[a, b]$  y derivable en  $]a, b[$ . Si  $f(a) = f(b)$ , entonces existe un valor  $c \in ]a, b[$  tal que  $f'(c) = 0$ .*

Como es bien conocido, el Teorema de Rolle, el Teorema del valor medio de Lagrange y el Teorema del valor medio generalizado de Cauchy son resultados equivalentes (a partir de cada uno de ellos se deducen los dos restantes), y como corolario de ellos se obtienen todos los resultados fundamentales del Cálculo Diferencial (como son el desarrollo en serie de Taylor, la regla de l'Hôpital para el cálculo de límites indeterminados, así como los teoremas clásicos para el cálculo de máximos y de mínimos que permiten el estudio y la representación de funciones).

En los textos actuales, por lo general, para demostrar el Teorema de Rolle se usan los teoremas de Bolzano-Weierstrass (sobre la condición necesaria de extremo relativo, obtenida a partir del teorema de los ceros de Bolzano) y de Weierstrass (sobre funciones continuas definidas en un intervalo cerrado y acotado). Por tanto, la secuencia lógica de los teoremas anteriores es la siguiente:

B-W (1817) - Weierstrass (1850) - Rolle (1691) - Lagrange (1801) - Cauchy (1823).

Claramente se aprecia en la sucesión de estos resultados una llamativa anomalía temporal: el teorema de Rolle es más de cien años anterior al resto de los teoremas mencionados.

Esto se debe a que originalmente Rolle expuso su resultado en un contexto totalmente alejado del Cálculo. Rolle era un algebrista sin apego alguno al Cálculo Infinitesimal, que había publicado su teorema (el Teorema de Rolle) en un tratado de Álgebra, formando parte del llamado Método de las Cascadas que él había ideado para resolver las ecuaciones polinómicas. Por tanto, dicho resultado nació en un contexto meramente algebraico y fue demostrado con técnicas algebraicas.

Durante el siglo XVIII y primera mitad del XIX el Teorema de Rolle se mantuvo como un resultado para la resolución de ecuaciones que no llegó a alcanzar mucha relevancia. A partir de la segunda mitad del siglo XIX dicho teorema se transforma en un resultado fundamental de Análisis (paradójicamente habiendo sido Rolle un detractor destacado de esta disciplina). En las secciones posteriores se detalla el proceso mediante el cual el Teorema de Rolle muta del Álgebra al Análisis.

## LA FIGURA DE MICHEL ROLLE

Como indica Fontanelle (1729), Michel Rolle nació el 21 de Abril de 1652 en Amber, una pequeña ciudad de la región francesa de Auvernia, en el seno de una familia de clase media. A los 23 años viajó a París con la intención de dar clases particulares. Debido a sus habilidades matemáticas y a su gusto por esta materia, pronto se empezó a interesar por los trabajos de Diofanto y de Bachet de Meziriac y Jacques Ozanam (matemáticos contemporáneos afincados en París). Este último fue un apasionado de las matemáticas recreativas que con frecuencia divulgaba acertijos y curiosidades matemáticas muy populares en Francia. En 1682 Rolle consiguió publicar en el *Journal des Sçavans* la solución de un problema propuesto por Ozanam: “Encontrar cuatro números tales que la diferencia entre cada dos de ellos es tanto la suma de los tres primeros como un cuadrado perfecto”.

La solución de Rolle fue calificada de “elegante”, y le reportó cierta fama entre el círculo de matemáticos de la época. En particular, llamó la atención de Jean-Baptiste Colbert, Ministro de Finanzas de entonces, que le otorgó una beca (que le permitió continuar con sus trabajos matemáticos) como premio a la publicación mencionada. En 1685 Rolle fue elegido miembro de la Academia de las Ciencias de París como “alumno de astronomía”, responsable de preparar experimentos. Sobre esa fecha el Marqués de Louvois (que era entonces el Ministro de la Guerra de Louis XIV) lo contrató como profesor tutor para su cuarto hijo. A este último Rolle le dedica su *Traité d'Algebre* de 1690, su obra más famosa, y su posterior *Démonstration d'une méthode pour résoudre les égalitez de tous les degrez* de 1691.

En 1699 la Academia de las Ciencias le concedió la “Pensión de Geometría”, cargo de cierta relevancia. Ese mismo año Rolle publicó su *Methodes pour résoudre les questions indéterminées de l'algebre*.

A principios del siglo XVIII, Michel Rolle se vio envuelto en una disputa desencadenada en la Academia de las Ciencias, sobre la validez de los métodos del Cálculo

Infinitesimal de Newton y Leibniz, justo cuando l'Hôpital publicó en 1696 su obra *Analyse des infiniment petits*. En relación con esta polémica, por un lado estaban los seguidores del nuevo Cálculo, y por otro los críticos con él. Rolle se posicionó de manera activa en esta última facción, denostando al Cálculo Infinitesimal por su falta de rigor y su propensión al error. Posteriormente Rolle también criticó abiertamente la *Geometría* de Descartes.

La críticas de Rolle al Cálculo Infinitesimal, no exentas de algunas equivocaciones e imprecisiones, sirvieron para poner de manifiesto la falta de rigor del Cálculo por aquel entonces lo que, en cierto modo, impulsó la investigación sobre los retos planteados por una disciplina emergente que todavía no se había acabado de entender (a falta de una noción rigurosa de límite). Jean Itard, en el *Dictionary of Scientific Biography*, finaliza la biografía de Rolle afirmando que “Rolle era un hábil algebrista que rompió con las técnicas cartesianas; y cuya oposición a los métodos infinitesimales, a la postre, fue beneficiosa”.

En 1708 Rolle sufrió un ataque de apoplejía del que logró recuperarse. Murió el 8 de Noviembre de 1719, a la edad de 68 años tras un segundo ataque que ya no resistió.

## ORIGEN DEL TEOREMA DE ROLLE

Michel Rolle aportó un método algebraico para localizar las raíces de una ecuación polinómica de cualquier grado con una sola incógnita. El método aparece publicado en su *Traité d'Algebre* de 1690, con el nombre de “Método de las Cascadas”.

Bajo una perspectiva analítica, el Método de las Cascadas de Rolle consiste en derivar sucesivamente la ecuación polinómica original hasta llegar a una ecuación de primer grado, que fácilmente se puede resolver. Una vez resuelta esta ecuación de primer grado, su solución se usa para acotar (o delimitar) las soluciones de la ecuación derivada anterior, que es una ecuación de segundo grado. A su vez, estas soluciones sirven para acotar las de la derivada anterior; y así sucesivamente hasta llegar a la ecuación original, cuyas raíces quedan acotadas por las de su derivada. A las derivadas sucesivas de la ecuación original Rolle las llamó “cascadas”.

Por tanto, en terminología actual, el Método de las Cascadas de Rolle se sustenta en el siguiente resultado ubicado en el contexto de las funciones polinómicas:

**Corolario (Rolle):** Sea  $f(x)$  una función polinómica. Entre dos raíces reales sucesivas de  $f'(x) = 0$  no puede haber más de una raíz real de  $f(x) = 0$ .

Por supuesto que Rolle no considera en ningún momento la derivada de una función. Lo que realmente hace es lo que se expone, de forma muy resumida, a continuación:

En primer lugar, como explica en el Capítulo V del libro segundo de *Traité d'Algebre*, Rolle somete la ecuación a un proceso de “preparación” por el cual, manipulando algebraicamente el polinomio original obtiene, en cuatro etapas, otro polinomio con coeficiente líder igual a uno, y cuyas raíces reales son todas positivas, y se relacionan con las del polinomio de partida mediante un conveniente cambio de variable (para detalles y justificación del proceso véase Rolle (1690), así como el Trabajo Fin de Máster antes

aludido). De este modo, en el Método de las Cascadas se parte de una ecuación polinómica ya preparada (por lo que sus raíces son todas positivas):

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{n-1}x^{n-1} + x^n = 0,$$

Entonces se multiplica cada término de la ecuación por los correspondientes términos de la progresión aritmética  $0, 1, 2, 3, \dots, n$ , con lo que se obtiene

$$0a_0 + 1a_1x + 2a_2x^2 + \dots + (n-1)a_{n-1}x^{n-1} + nx^n = 0.$$

Rolle señala que el método es válido para cualquier progresión aritmética que se utilice. Como indica Barrow-Green (2009, p.741), Johann Hudde había empleado ya esta técnica de multiplicar cada término del polinomio por los correspondientes términos de una progresión aritmética, si bien Rolle no hace ninguna referencia a Hudde.

A continuación, se divide por la incógnita  $x$ , obteniéndose la cascada:

$$a_1 + 2a_2x \dots + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + nx^{n-1} = 0$$

Reiterando el proceso se van obteniendo las sucesivas cascadas, hasta llegar a la primera cascada de la forma  $ax + b = 0$ , que se resuelve sin dificultad (llamemos  $x_0$  a su solución).

Ahora Rolle considera la cascada siguiente (que es un polinomio de grado dos) y obtiene su *gran hipótesis* (esto es, una cota superior de sus raíces que determina mediante el valor  $h = (\frac{u}{c} + 1)$  donde  $u$  es el valor absoluto del mayor coeficiente negativo de la ecuación y  $c$  es el coeficiente líder), su *pequeña hipótesis* (que es una cota inferior de sus raíces; que por tratarse de polinomios con raíces positivas la toma igual a cero), y sus *hipótesis medias* (que son las raíces de la cascada anterior, en este caso,  $x_0$ ).

En consecuencia, la cascada que nos ocupa tendrá una raíz en el intervalo  $[x_0, h]$  y otra en el intervalo  $[0, x_0]$ . Mediante el método de la bisección, Rolle procura obtener buenas aproximaciones de estos valores (y si es posible, el valor exacto), que de nuevo serán las *hipótesis medias* de la cascada siguiente.

Así, las raíces de la cascada siguiente deben de estar contenidas en los intervalos determinados por su *gran hipótesis*, las *hipótesis medias* recién obtenidas y cero (la *pequeña hipótesis*). De nuevo aplicará el método de la bisección para aproximarlas. De este modo se llegará finalmente a estimar las raíces del polinomio de partida.

Rolle llama *raíces efectivas* a las raíces reales y distintas de una ecuación polinómica; y a las raíces que no son *efectivas* las llama *raíces desfallecientes*. A las raíces reales y múltiples (contadas a partir de su segunda aparición) Rolle las llama *raíces desfallecientes de la primera especie*, y a las raíces complejas las llama *raíces desfallecientes de la segunda especie*. Además, Rolle es capaz de determinar (apoyándose en regla de los signos de Descartes) de qué tipo son las raíces de la ecuación original a partir de la sucesión de signos que resulta de evaluar las hipótesis en las distintas cascadas. Finalmente incorpora estas casuísticas al Método de las Cascadas e indica cómo proceder.

Rolle no aportó ninguna prueba de su método en su *Traité d'Algebre* de 1690, por lo que fue objeto de críticas, y se vio obligado a publicar en 1691 el tratado *Demonstration d'une methode pour resoudre les egalitez de tous les degrez*, donde se incluye la demostración del Método de las Cascadas.

Lo que prueba Rolle en esta última monografía es el siguiente resultado (que es una versión polinómica del actual Teorema de Rolle), del cual se deduce fácilmente el Corolario anterior.

**Teorema (Rolle):** *Entre dos raíces consecutivas de una ecuación polinómica hay al menos una raíz de su cascada (derivada).*

Para demostrar este teorema, Rolle vuelve a suponer primeramente que las raíces de la ecuación son reales y simples y estructura su prueba (el Método de las Cascadas) en 15 artículos y 22 corolarios de corte meramente algebraico. Posteriormente, en dicho texto de 1691, Rolle también demuestra su teorema para ecuaciones con cualquier tipo de raíces. Dichos resultados resultan bastante tediosos de exponer (véase Cajori (1911) o el Trabajo Fin de Máster que aquí se resume), y lo son más aún si se tiene presente que, en términos analíticos (esto es involucrando a la derivada), la demostración del teorema anterior es casi inmediata. De hecho como indica Luis Español (2011, p.175), si suponemos que el polinomio dado es

$$f(z) = (z - a)(z - b)(z - c) \dots (z - m)$$

y consideramos las raíces ordenadas:  $a < b < c < \dots < m$ ; entonces tomando por ejemplo las raíces  $a$  y  $b$  se tiene que

$$f'(a) = (a - b)(a - c) \dots (a - m)$$

$$f'(b) = (b - a)(b - c) \dots (b - m).$$

Claramente,  $f'(a)$  y  $f'(b)$  tienen signos distintos, pues sus factores tienen todos el mismo signo excepto  $(a - b)$  y  $(b - a)$ ; con lo que  $f'(z)$  se anulará en un valor intermedio entre  $a$  y  $b$  por razones de continuidad.

## EVOLUCIÓN DEL TEOREMA DE ROLLE

El resultado que Rolle incluyó en su Método de las Cascadas fue aceptado y difundido en los tratados de Álgebra y de resolución de ecuaciones que se fueron publicando a lo largo del siglo XVIII y primera mitad del XIX. No obstante, siempre aparecía dentro de su contexto original, esto es, como un teorema de Álgebra y no como un resultado de Cálculo.

Por otra parte, el Método de las Cascadas, y en consecuencia el resultado original de Rolle en su marco algebraico de partida, aún siendo útil, nunca gozó de una especial relevancia en el ámbito de la localización de las raíces de una ecuación polinómica: el método de Newton-Raphson para aproximar raíces de una ecuación polinómica (publicado por Newton en 1736 y por Raphson en 1690); y el resultado que Sturm demostró en 1829 para aproximar raíces de ecuaciones siempre fueron más populares.

Según Cajori (1911) el resultado de Rolle aparece por primera vez en el *Analyse démontrée, ou la méthode de résoudre les problèmes des mathématiques* de **Charles-René Reyneau**, en 1708. Reyneau (1708, p. 290) afirma:

... Luego, las raíces de una ecuación [...] son límites de la nueva ecuación que se obtiene de la multiplicación de cada término de la original por el número que es exponente de la incógnita de ese término, y de su último término por cero.

**COROLARIO VII. QUE ES FUNDAMENTAL.**

... las raíces de esta última ecuación son los límites de las raíces de la ecuación propuesta...

**Colin MacLaurin** (1729, p. 88) demostró el siguiente resultado en un artículo publicado en la revista *Philosophical Transaction* en 1729:

**TEOREMA III.** En general, las raíces de la ecuación

$$x^n - Ax^{n-1} + Bx^{n-2} - Cx^{n-3} + \dots + c = 0$$

son límites de las raíces de la ecuación

$$nx^{n-1} - (n-1)Ax^{n-2} + (n-2)Bx^{n-3} + \dots = 0$$

[...] y recíprocamente, las raíces de esta nueva ecuación serán límites de las raíces de la ecuación propuesta

$$x^n - Ax^{n-1} + Bx^{n-2} - Cx^{n-3} + \dots + c = 0$$

La primera vez que aparece el resultado de Rolle en un tratado de Cálculo es en 1755, de la mano de **Euler**, tal y como indican Barrow-Green (2009, p. 748) y Suárez Alemán (2011, p. 46). Euler, en su *Institutiones calculi differentialis* (1755, p. 660) publica una versión del Teorema de Rolle dentro del contexto de resolución de ecuaciones, pero por primera vez dicho resultado aparece expresado en el lenguaje del Cálculo:

... Se deduce que si la ecuación  $z = 0$  tiene dos raíces reales, entonces la ecuación  $\frac{dz}{dx} = 0$  tiene necesariamente una raíz real. Igualmente, si la ecuación  $z = 0$  tiene tres raíces reales, entonces la ecuación  $\frac{dz}{dx} = 0$  sin duda tiene dos raíces reales. Y, en general, si la ecuación  $z = 0$  tiene  $m$  raíces reales, la ecuación  $\frac{dz}{dx} = 0$  necesariamente tiene por lo menos  $m - 1$  raíces.

**Lagrange** también ofrece su versión del resultado de Rolle en su *Traité de la résolution des équations numériques de tous les degrés* de 1798. En la Nota VIII sobre los límites de las raíces de ecuaciones, Lagrange (1798, p. 159) argumenta como sigue:

*Primeramente es evidente que la ecuación  $Fx = 0$  de grado  $m$ , tendrá  $m$  raíces reales, y que la ecuación derivada  $F'x = 0$  de grado  $m-1$  tendrá también necesariamente  $m-1$  raíces reales, puesto que, entre dos raíces reales consecutivas de la ecuación  $Fx = 0$ , cae siempre una raíz real de la ecuación  $F'x = 0$ ...*

Según Cajori (1911), **Wilhelm Drobisch** fue el primero en llamar al resultado de Rolle *Teorema de Rolle*. Drobisch, en su tratado *Grundzüge der Lehre von den höheren numerischen Gleichungen* de 1834 establece tanto el Teorema de Rolle (esto es, el resultado que Rolle proporcionó en su *Démonstration* de 1691) como el Corolario de Rolle (el resultado del *Traité d'Algèbre* de 1690). En el índice de contenidos, Drobisch (1834) escribe: “Los teoremas de Rolle sobre las acotaciones de las raíces reales de la ecuación derivada por las raíces reales de la original y viceversa.” (p. xxvi). Y en la página 177 del libro de Drobisch se establece lo siguiente:

*Se puede extender esta conclusión para cada ecuación derivada posterior, y por lo tanto establecer la proposición general: dos raíces reales de cada ecuación derivada encierran una raíz real de la ecuación siguiente derivada, y por lo tanto se puede utilizar para los mismos límites.*

A partir de esta fecha, encontramos frecuentemente el Teorema de Rolle atribuido a Rolle:

Por ejemplo, en 1840, **François Moigno**, un profesor de matemáticas del College Saint Geneviève de París, escribe un artículo titulado *Note sur la détermination du nombre des racines réelles ou imaginaires d'une équation numérique comprises entre les limites données. Théorèmes de Rolle, de Budan ou de Fourier, de Descartes, de Sturm et de Cauchy*. En dicho artículo, en la página 86, se dice:

12. Teorema (teorema de Rolle). *El número de raíces reales de la ecuación  $F(x) = 0$  comprendidas entre dos límites dados  $x_0, X$  no puede nunca sobrepasar en una unidad el número de raíces reales de la ecuación derivada  $F'(x) = 0$  comprendidas entre los mismos límites.*

En 1844, **Orly Terquem** en su artículo *Théorèmes de Descartes, de Rolle, de Budan et Fourier, de Mm. Sturm et Cauchy deduits d'un seul principe* llega a la misma conclusión que Moigno:

#### *Théorème de Rolle.*

**12. Théorème 2. Le nombre de racines réelles de l'équation  $F(x) = 0$ , comprises entre les limites  $a$  et  $b$ , ne peut jamais surpasser de plus d'une unité le nombre de racines réelles de l'équation dérivée  $F'(x) = 0$ , comprises entre les mêmes limites.**

Otros ejemplos de tratados de Álgebra publicados en la primera mitad del siglo XIX en donde aparece el resultado de Rolle son los siguientes:

- *A treatise on the nature and properties of algebraic equations* (1835), de **R. Stevenson**, en la página 55:

**32. The real roots of the equation  $f'(x) = 0$  lie between those of  $f(x) = 0$ ; so that an odd number of the roots of  $f'(x) = 0$  will be found between every two of the roots of  $f(x) = 0$ , when the real roots of both equations are written in one series in the order of magnitude.**

- *Traité élémentaire d'Algèbre*, (1836), de **Mayer y Choquet**, en la página 550:

**Ainsi, entre deux racines réelles inégales d'une équation  $f(x) = 0$ , il se trouve au moins une racine réelle de l'équation  $f'(x) = 0$ .**

**Ce théorème, qui a été découvert par ROLLE, sert de base à une méthode connue sous le nom de *Méthode des cascades*, que ce géomètre a proposée pour la résolution des équations.**

- *A treatise on the theory of algebraical equations* (1839), de **R. Murphy**, en la página 28:

**From this proposition we see that between two roots of the primitive equation  $\phi(x) = 0$ , an odd number of roots of the derived equation must exist.**

- *Traité d'Algèbre* (1846), de **M.E. Gentil**, en la página 112:

#### COROLLAIRE.

**Théorème de Rolle.**

**Si on range les racines d'une équation  $f'(x) = 0$  par ordre de grandeur, il y aura toujours un nombre impair de racines de l'équation  $f(x) = 0$  comprises entre deux racines consécutives de l'équation.**

En estos resultados, aunque se usa una notación cada vez más general, las funciones que se tienen en mente son polinómicas (son tratados de Álgebra).

Es en la segunda mitad del siglo XIX cuando se produce la mutación del Teorema de Rolle del Álgebra al Análisis. Hasta entonces el Teorema de Rolle había sido un

resultado útil en teoría de ecuaciones, pero a partir de la segunda mitad del siglo XIX se transforma en un teorema fundamental en Análisis.

Aunque hoy en día el Teorema de Rolle y el Teorema del valor medio de Lagrange aparezcan directamente relacionados en todos los libros de Análisis, lo cierto es que originariamente ambos teoremas existieron separadamente. Lagrange dio su Teorema como una consecuencia del Teorema de Taylor, en su tratado *Théorie des fonctions analytiques* (1797, p. 49), y lo llamó “teorema nuevo y notable por su sencillez y su generalidad”. Posteriormente el Teorema del valor medio de Lagrange aparece en un artículo de Ampère (1806, pp. 148-181) y asimismo queda recogido por Cauchy en su *Cours d'analyse* (1821, pp. 259-261), pero en ninguno de estos tratados figura el Teorema de Rolle.

Según indica Cajori (1911, p. 310) el primer autor que presenta juntos el Teorema de Rolle y el Teorema del valor medio de Lagrange fue el matemático francés **Pierre-Osian Bonnet**. Esta asociación de Bonnet de los dos teoremas fue recogida por **Joseph-Alfred Serret** en su tratado de Análisis *Cours de calcul différentiel et intégral* de 1868. Serret enuncia el Teorema del valor medio de Lagrange como sigue (Serret, 1868, p. 17):

TEOREMA I.- Sea  $f(x) = 0$  una función de  $x$  que permanece continua para los valores de  $x$  comprendidos entre límites dados, y que, para esos valores, tiene una derivada  $f'(x) = 0$  determinada. Si  $x_0$  y  $X$  designan dos valores de  $x$  comprendidos entre esos mismos límites, tendremos

$$\frac{f(X) - f(x_0)}{X - x_0} = f'(x_1)$$

siendo  $x_1$  un valor comprendido entre  $x_0$  y  $X$ .

Serret, para demostrar el Teorema del valor medio de Lagrange, define una función auxiliar  $\Phi(x)$  que es continua en un intervalo  $[x_0, X]$ , derivable en  $]x_0, X[$  y tal que  $\Phi(x_0) = 0$  y  $\Phi(X) = 0$ , para probar la existencia de un valor  $x_1$  comprendido entre  $x_0$  y  $X$  tal que  $\Phi'(x_1) = 0$ . Esto es sin duda el Teorema de Rolle en un contexto totalmente alejado del Álgebra.

Posteriormente **Charles Hermite**, en su obra *Cours d'analyse* de 1873, utiliza el Teorema de Rolle en el marco de la teoría de series de Taylor, atribuyendo a Rolle de forma clara el teorema:

*Cuando una función continua se anula para dos valores  $x_0$  y  $X$ , la derivada, si es ella misma también continua, se anula para un valor comprendido entre  $x_0$  y  $X$ .*

*Es esta última proposición, esto es el teorema de Rolle, junto con las reglas de cálculo establecidas tan fácilmente en Álgebra para la formación de las derivadas de sumas, de productos y de potencias de funciones, lo que nos bastará para establecer la serie de Taylor (Hermite, 1873, p. 48).*

Obsérvese que Hermite incluye la innecesaria condición de que la derivada tenga que ser continua.

A partir de esta fecha ya es habitual encontrar el Teorema de Rolle en los tratados de Análisis, junto con el Teorema del valor medio de Lagrange y el Teorema de Taylor. Así por ejemplo lo encontramos en los siguientes textos:

- Paul Mansion (1876), *Leçons d'analyse infinitésimale*, p. 18:

**7. THÉORÈME DE ROLLE.** *Si une fonction  $y = Fx$  est continue, ainsi que sa dérivée  $F'x$ , depuis  $x = x_0$ , jusqu'à  $x = X$ , et si elle s'annule pour  $x = x_0$ ,  $x = X$ , sa dérivée s'annule pour une valeur intermédiaire.*

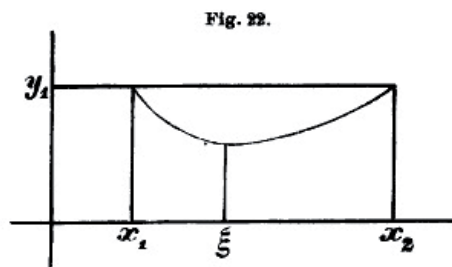
- Ulisse Dini (1878), *Fondamenti per la teorica delle funzioni di variabili reali*, pp. 76-77, donde se observa que ya se excluye la condición de continuidad de la derivada:

8.° Dalla osservazione 6.ª poi, come anche dai ragionamenti del §. 71, si deduce in particolare che: *Se nell'intervallo  $(\alpha, \beta)$  la funzione  $f(x)$  è sempre finita e continua e, eccettuati tutto al più gli estremi dell'intervallo, in tutti gli altri punti ammette una derivata che è finita e determinata o che essendo infinita è determinata di segno, e se inoltre nei punti estremi  $a$  e  $b$  la funzione stessa  $f(x)$  prende uno stesso valore, esisterà sempre nell'interno dell'intervallo  $(a, b)$  almeno un punto determinato  $x'$  nel quale si avrà:  $f'(x')=0$ .*

- Alex Harnack (1881), *Die Elemente der differential - und integralrechnung*, pp. 64-66. Harnack enuncia el Teorema del valor intermedio y lo demuestra exactamente igual que Serret en su *Cours de calcul différentiel et intégral*, aunque esta vez sí, citando al Teorema de Rolle por su nombre:

**\* Der Beweis des Satzes, der auch das Theorem von Rolle (1652—1719) genannt wird, ist nach Serret: Cours de calcul différentiel et intégral. T. I. éd. II., pag. 17 ff. gegeben.**

- Moritz Pasch (1882), *Einleitung in die differential - und integral -rechnung*, pp. 82-83. Aquí se incluye una interpretación geométrica:



- Giuseppe Peano (1884), *Calcolo differenziale e principii di calcolo integrale*. En la página 42 se lee:

**44. — TEOREMA (di Rolle).** — *Se  $f(x)$  è funzione di  $x$  data in un intervallo  $(a, b)$ , avente derivata  $f'(x)$  per tutti i valori di  $x$  in questo intervallo, e se  $f(a) = 0$  ed  $f(b) = 0$ , esisterà un valore  $x_1$ , compreso fra  $a$  e  $b$  e diverso dagli estremi, per cui la derivata è nulla.*

- Jules Tannery (1886), *Introduction à la théorie des fonctions d'une variable*. En la página 231 dice lo siguiente:

**135.** Soit  $f(x)$  une fonction qui admet une dérivée  $f'(x)$  pour toutes les valeurs de  $x$  appartenant à l'intervalle  $(a, b)$ ; si l'on a

$$f(a) = 0, \quad f(b) = 0,$$

il existe une valeur  $\xi$  de  $x$  appartenant à l'intervalle  $(a, b)$ , différente de  $a$  et de  $b$ , pour laquelle on a

$$f'(\xi) = 0.$$

A principios del siglo XX surgieron ciertas dudas sobre si el Teorema de Rolle era realmente atribuible a Rolle, tal y como señala Barrow-Green (2009, p. 751). Esto quizás se debiese a que el *Démonstration* de 1691 se había perdido, y solamente se conocía el *Traité d'Algebre* de 1690, en donde, como hemos visto, solo aparece (sin demostración) el Corolario de Rolle.

Se argumentaba que el Teorema de Rolle podría no ser atribuible a Rolle teniendo en cuenta la época en la que éste vivió. Pero también parecía razonable que Rolle hubiera proporcionado su teorema en el contexto de los polinomios, con una demostración adecuada a su momento. Gustaf H. Eneström, director de la revista *Bibliothema Mathematica*, en un artículo de 1906 publicado en esta revista, advirtió la existencia de una obra

de Rolle, citada por algunos matemáticos, llamada *Demonstration d'une methode pour resoudre les egalitez de tous les degrez*, y pronosticó que allí debería encontrarse el resultado de Rolle. La conjetura de Eneström fue resuelta por Florian Cajori en su artículo de 1911, y el asunto sobre la autoría del Teorema de Rolle fue clarificado definitivamente.

Para concluir con el recorrido histórico del Teorema de Rolle, exponemos algunos indicios de cómo se introduce el Teorema de Rolle en España. Para ello hemos seleccionado dos textos, uno de Ignacio Salinas y Angulo, de 1888, y otro de Julio Rey Pastor, de 1952. En el primero de ellos el Teorema de Rolle se presenta en su contexto algebraico mientras que el tratado de Rey Pastor, ya más moderno, se centra en la versión analítica:

- En el Tratado de Álgebra de **Ignacio Salinas y Angulo** (1888, pp. 322-323) encontramos:

**333. Teorema de Rolle (\*\*).** Como la regla de Descartes sólo determina generalmente un límite superior del número de raíces reales, es preciso dar á conocer nuevas proposiciones que permitan fijar dicho número.

Con tal objeto demostraremos el siguiente principio.

**ТЕОРЕМА.** *Dos raíces reales y consecutivas, a y b, de una ecuación, comprenden una ó un número impar de raíces reales de la ecuación derivada.*

- En el Análisis Matemático, vol. 1, p. 553, de **J. Rey Pastor, P. Pi Calleja, y C. A. Trejo** podemos leer:

Esto es lo que expresa el teorema de **ROLLE** (generalización para funciones racionales enteras del teorema visto en § 35-2):

*Entre cada dos raíces consecutivas de la ecuación de coeficientes reales  $f(x) = 0$  hay un número impar de ceros de su derivada  $f'(x)$ , contando cada uno de ellos tantas veces como indique su orden de multiplicidad.*

**COROLARIO:** *Entre dos raíces consecutivas de la derivada  $f'(x)$  hay a lo sumo una sola raíz de la función (cuya existencia se decide por el teorema de **BOLZANO**, § 26-2).*

En la segunda mitad del siglo XX es un hecho constatable que el Teorema de Rolle se consagra ya como un teorema crucial del Análisis Matemático que aparece sistemáticamente en los textos, en la forma habitual que hoy día conocen nuestros alumnos de Bachillerato.

## CONCLUSIONES

El estudio de las Matemáticas desempeña un papel fundamental en la Educación Secundaria, no solo como herramienta básica para el desarrollo de los contenidos científicos y tecnológicos, sino también por su papel preponderante en el desarrollo de las competencias intelectuales del individuo. Por ello, es esencial transmitir a nuestros alumnos la idea de que las Matemáticas no son algo fijo y definitivo; sino que constituyen una ciencia dinámica y viva que hay que ubicar en un marco temporal. De esta manera se favorecerá que los alumnos desarrollen actitudes que les permitan entender las Matemáticas como parte esencial de la evolución cultural y científica de nuestra sociedad. A la larga, esto les resultará mucho más formativo que la mera adquisición de un listado de contenidos de los que muchas veces no comprenden muy bien ni cómo han surgido, ni para qué sirven, ni qué importancia histórica han tenido.

Conocer la Historia de las Matemáticas resulta fundamental para alcanzar tales objetivos. Es por ello que una formación en Historia de la Matemática debe formar parte indispensable del bagaje de conocimientos del Profesor de Matemáticas. De hecho, en la Orden del 5 de Agosto de 2008 por la que se desarrolla el currículo correspondiente al Bachillerato en Andalucía (BOJA 26-8-2008) queda reflejado expresamente que “hay que aprender de y con la Historia de las Matemáticas” y que “los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas deben basarse en la génesis y evolución de los propios conceptos y técnicas matemáticas”

Como hemos mostrado, el resultado que Rolle aportó en su *Demonstration d'une methode pour resoudre les egalitez de tous les degrez* de 1691 se encuentra en un contexto puramente algebraico, totalmente alejado del Cálculo Infinitesimal. Durante mucho tiempo el Teorema se concibió como un resultado algebraico para la resolución de ecuaciones polinómicas. La transición de dicho Teorema del Álgebra al Análisis comenzó en 1755 con Euler, y se prolongó durante más de cien años hasta que Ossian-Bonnet y Serret en 1868, y Hermite en 1873, lo transformaron definitivamente en un resultado del Análisis Matemático. Paralelamente a la transición del Teorema del Álgebra al Análisis, el teorema de Rolle fue creciendo en importancia: pasó de ser un resultado útil en el campo de la resolución de ecuaciones, a convertirse en un resultado fundamental del Cálculo Infinitesimal.

Sin embargo es fácil encontrar afirmaciones sobre el Teorema de Rolle alejadas de la realidad. Véase, por ejemplo, la entrada sobre el Teorema de Rolle que aparece a día de hoy en la Wikipedia: ([http://en.wikipedia.org/wiki/Rolle's\\_theorem](http://en.wikipedia.org/wiki/Rolle's_theorem)).

### History

[edit]

The first known formal proof was offered by Michel Rolle in 1691, which used the methods of differential calculus. The name "Rolle's theorem" was first used by Moritz Wilhelm Drobisch of Germany in 1834 and by Giusto Bellavitis of Italy in 1846.<sup>[1]</sup>

Sirva esta anécdota como botón de muestra de lo que aquí hemos argumentado: adquirir una formación mínima sobre la historia, la génesis y la evolución de las ideas inherentes a los conceptos y los resultados que los docentes de Matemáticas enseñamos habitualmente en nuestras aulas, es un requisito primordial para mejorar nuestra cultura

matemática y con ello los estándares de calidad de nuestro desempeño docente. En consecuencia, avanzar en este sentido es fundamental a la hora de fortalecer el perfil profesional del Profesor de Matemáticas.

## REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Ampère, A. (1806). Recherches sur quelques points de la théorie des fonctions dérivées qui conduisent à une nouvelle démonstration de la série de Taylor, et à l'expression finie des termes qu'on néglige lorsqu'on arrête cette série à un terme quelconque. *Journal de l'école polytechnique*. Treizième cahier, tome VI, 148-181.
- Barrow-Green, J. (2009). From cascades to calculus: Rolle's theorem. *The Oxford Handbook of the History of Mathematics*. Oxford University Press, Oxford, 737-754.
- Besenyei, Á. (2012). A brief history of the mean value theorem. *Talk presented at the conference History of Mathematics and Teaching of Mathematics*. Sárospatak, Hungary, May 24, 2012.
- Cajori, F. (1911). On Michel Rolle's book "Méthode pour résoudre les égalitez" and the history of "Rolle's Theorem". *Bibliotheca mathematica*, 11, 300-313.
- Cauchy, A. L. (1821/1994) *Cours d'analyse de l'École Royale Polytechnique*. Paris 1821. Selección, traducción directa del francés con notas de Carlos Álvarez Jiménez. Introducción de Jean Dhombres. Colección Mathema de los Servicios Editoriales de la Facultad de Ciencias de la UNAM. Universidad de México.
- Dini, U. (1878). *Fondamenti per la teorica delle funzioni di variabili reali*. Pisa.
- Español, L. (2011). Comentarios históricos sobre el teorema de Rolle con referencias a la matemática española hacia 1911. *La Gaceta de la RSME*. 14 (1), 167-178.
- Euler, L. (1755). *Institutiones calculi differentialis*. St. Petersburg.
- Drobisch, M. W. (1834). *Grundzüge der Lehre von den höheren numerischen Gleichungen*. Leipzig.
- Fontenelle, B. (1729). Eloge de Monsieur Rolle. *Oeuvres diverses. Tome troisieme*. La Haye, 300-305.
- Gentil, M.E. (1846). *Traité d'Algèbre*. Paris.
- Harnack, A. (1881). *Die Elemente der differential - und integralrechnung*. Leipzig.
- Hermite, C. (1873). *Cours d'Analyse de l'École Polytechnique*. Paris.
- Itard, J. (1970-1990). Biography in *Dictionary of Scientific Biography*, New York.
- Marquis de l'Hôpital, G. F. (1796). *Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des lignes courbes*. Paris.
- Lagrange, J. L. (1797). *Théorie des fonctions analytiques contenant les principes du calcul différentiel*. Paris.
- Lagrange, J. L. (1798). *Traité de la résolution des équations numériques de tous les degrés*. Paris.
- Mansion, P. (1876). *Leçons d'analyse infinitésimale*. Gand.
- Mayer y Choquet (1836). *Traité élémentaire d'Algèbre*. Paris.
- McLaurin, C. (1729). A second letter ... concerning the roots of equations. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, 36, 59-96.

- Moigno, F. (1840). Note sur la détermination du nombre des racines réelles ou imaginaires d'une équation numérique comprises entre les limites données. Théorèmes de Rolle, de Budan ou de Fourier, de Descartes, de Sturm et de Cauchy. *Journal de mathématiques pures et appliquées*. 1<sup>er</sup> série, tome 5, 75-94.
- Montucla, J. É. (1799.1802). *Histoire des mathématiques*. 4 vols, Paris.
- Murphy, R. (1839). *A treatise on the theory of algebraical equations*. London.
- Pasch, M. (1882). *Einleitung in die differential - und integral -rechnung*. Leipzig.
- Peano, G. (1884). *Calcolo differenziale e principii di calcolo integrale* Roma, Torino, Firenze.
- Rey Pastor, J., Pi, P. y Trejo, C. A. (1952). *Análisis matemático*. Vol.1. Buenos Aires: Editorial Kapelusz.
- Reyneau, C. R. (1708). *Analyse démontrée ou la methode de résoudre les problèmes des mathématiques*. Paris.
- Rolle, M. (1682). Problème résolu par le Sieur Rolle. *Journal des Sçavans*. 31 Agosto, 284-286.
- Rolle, M. (1690). *Traité d'algebre ou principes généraux pour résoudre les questions de mathématique*. Paris.
- Rolle, M. (1691). *Demonstration d'une methode pour résoudre les egalitez de tous les degrez; suivie de deux autres methodes, dont la premiere donne les moyens de résoudre ces mêmes égalitez par la Geometrie, et la seconde, pour résoudre plusieurs questions de Diophante qui n'ont pas encore esté résolues*. Paris.
- Salinas, I. y Benítez, M. (1888). Álgebra. Segunda Parte elegida de texto por real orden de 21 de octubre de 1886 en el concurso celebrado el 3 de octubre de 1885 por la Dirección general de Instrucción Militar. Tercera Edición. Madrid.
- Serret, J. A. (1868). *Cours de calcul différentiel et intégral*. Paris.
- Shain, J. (1937). The method of Cascades *The American Mathematical Monthly*, 44(1), 24-29.
- Suso, C. (2012). *Origen y Evolución del Teorema de Rolle*. Trabajo de fin de máster. Universidad de Granada.
- Stevenson, R. (1835). *A treatise on the nature and properties of algebraic equations*. Cambridge.
- Suárez, C. O. (2011). Orígenes y evolución del Teorema de Rolle. *Epsilon. Revista de Educación Matemática*, 77, 39-50.
- Tannery, J. (1886). *Introduction à la théorie des fonctions d'une variable*. Paris.
- Terquem, O. (1884). Théorèmes de Descartes, de Rolle, de Budan et Fourier, de Mm. Sturm et Cauchy deduits d'un seul principe. *Nouvelles Annales de Mathématiques*. 1<sup>er</sup> série, tome 3, pp. 188-194, 209-213, 555-565, 577-580.

Carlos Suso Fernández  
IES Andrés de Vandelvira  
C/ Garnica, 1  
23440 - Baeza (Jaén)  
(Spain)  
Email: carlossuso@yahoo.es

María Victoria Velasco Collado  
Dpto. de Análisis Matemático  
Facultad de Ciencias  
Universidad de Granada  
18071- Granada (Spain)  
Email: vvelasco@ugr.es



## Thales dinámico en la espiral del currículo

**Silvia Bernardis - Susana Moriena**

*silvia.bernardis@gmail.com - smoriena@yahoo.com.ar*

*Facultad de Humanidades y Ciencias - Universidad Nacional del Litoral  
Prov. Santa Fe. Argentina*

**Resumen:** *Uno de los teoremas más importantes de la Geometría Sintética es el Teorema de Thales. Consideramos que tiene más dificultades de aprendizaje de las que podemos sospechar. El objetivo de esta publicación es presentar una propuesta que permita superarlas.*

*Presentamos, por un lado, el Teorema de Thales en su aspecto proyección, brindando una idea de movimiento respaldada en las características de la proyección paralela.*

*Por otro, trabajamos dicho teorema en su aspecto homotecia, aprovechando la otra dinámica que utiliza las características de la homotecia.*

*Debido a que el Teorema se aborda en la escuela, como una configuración estática que oculta estas dos dinámicas, consideramos que trabajando estas dos experiencias con el mismo problema; lograremos que se entremezclen para una mejor comprensión.*

**Palabras claves:** *Teorema de Thales, Geometría, Didáctica de las matemáticas*

## Thales dynamic in the spiral of the curriculum

**Abstract:** *One of the most important theorems of the synthetic geometry is the theorem of Thales. We believe that it has more learning difficulties than we suspect. The aim of this publication is to present a proposal allowing overcoming them.*

*Present, on the one hand, the theorem of Thales in its projection aspect, providing an idea of movement endorsed in the characteristics of parallel projection.*

*On the other hand, we work the theorem in his homothetic appearance, taking advantage of the other dynamics that uses the characteristics of the homothetic.*

*Because the theorem is discussed in school as a static configuration that hides these two dynamics, we consider these two experiences working with the same problem; we will make intermingle for a better understanding.*

**Keywords:** *Thales Theorem, Geometry, Mathematics education.*

## INTRODUCCIÓN

La cuestión de la proporcionalidad era de gran importancia para los griegos principalmente en la arquitectura y agrimensura, por eso se conjetura que la primera sistematización de la geometría pudo haber sido entorno a la proporcionalidad de segmentos determinados por un haz de rectas paralelas y dos transversales. Esta cuestión fue reconocida durante muchos siglos como teorema de “segmentos proporcionales”. A fines del siglo XIX, en Francia, lo denominaron Teorema de Thales, denominación que continúa en nuestros días (Boyer, 1986)

El Teorema de Thales es el corazón de la relación entre lo geométrico y lo numérico, ya sea a través de la medición o con el método de coordenadas y la geometría analítica.

Con el objetivo de analizar las dificultades de los estudiantes en el aprendizaje del teorema, implementamos una encuesta con 20 alumnos de 1er año del Profesorado de Matemática de la Facultad de Humanidades y Ciencias de la UNL. La encuesta aplicada incluía las siguientes cuestiones:

- 1) ¿Has estudiado el Teorema de Thales en la escuela secundaria? ¿En qué año?
- 2) Con tus palabras, escribe lo que recuerdes del Teorema. (Enunciado, representación gráfica, expresión simbólica, explicación en palabras)

Las respuestas que obtuvimos a la primera pregunta son contundentes y se describen en la siguiente tabla:

Categorías	Nunca lo estudió	No lo recuerda	Enuncia-representa y simboliza
Porcentajes	50%	25%	25%

En base a estos resultados, observamos que la mayoría de estos alumnos no conoce o no recuerda el Teorema de Thales.

En un taller realizado recabamos opiniones de docentes, quienes expresaron que las dificultades más frecuentes de los estudiantes en la utilización del teorema son las siguientes:

- Confusión en el concepto de puntos correspondientes.
- Confusión en la interpretación correcta de las proporciones.

Además, analizamos el abordaje del teorema de Thales y sus aplicaciones en distintos libros de texto, correspondientes a 2do. y 3er. año de la escuela secundaria (10 en total) y observamos que presentan el teorema:

- Reduciéndolo a una figura prototípica.
- La demostración está ausente, se limitan a una ejemplificación.
- Reducen su uso, al cálculo de una incógnita en la proporción.

## MARCO TEÓRICO

En la elaboración de las situaciones presentadas tuvimos en cuenta aquellas que permitan a los estudiantes modelar eficazmente problemas reales por medio de dibujos dinámicos que podrán explorar con el objeto de: descubrir, formular conjeturas y validar las mismas.

Es importante crear en nuestros alumnos la necesidad de explicar la verdad comprobada en todos los casos con el software, es decir la demostración como una explicación a través de las propiedades conocidas (De Villiers, 1996). Mediante la exploración experimental es posible despejar las dudas en torno a la verdad del enunciado, sin embargo será necesario explicar por qué se está cumpliendo.

Tradicionalmente, el enfoque crítico de la geometría era tratar de crear dudas en la mente de los estudiantes acerca de la validez de sus observaciones empíricas, esas estrategias de tratar de generar dudas para crear la necesidad de una demostración simplemente no funcionan cuando las conjeturas geométricas se investigan a fondo a través de su variación continua con un software de geometría dinámica (De Villiers, 1996; p. 2).

Es necesario acostumbrar a nuestros alumnos a justificar sus afirmaciones, argumentar lo que aseguran es verdadero en base a resultados y propiedades que ya conocen. Esta tarea no es sencilla. Como afirma Dreyfus (2000; p. 130), “no deberíamos esperar que nuestros estudiantes sean capaces de captar demostraciones sofisticadas y de alto nivel, sin haber estado expuestos durante muchos años al espíritu de la justificación y a la naturaleza del pensamiento matemático”.

El desafío es diseñar actividades para lograr que los alumnos valoren la necesidad de justificar sus construcciones y conjeturas.

## PROPUESTA

En esta publicación presentamos un nuevo enfoque basándonos en la propuesta de Duperret (1996), adaptada a nuestra escuela secundaria, en el cual sugerimos enseñar el Teorema de Thales en dos etapas:

- *Primera etapa:* en 2º año (14 años) el Teorema de Thales en su aspecto proyección, brindando una idea de movimiento respaldada en las características de la proyección paralela.
- *Segunda etapa:* retomar el tema en 3er año (15 años) desde su aspecto homotecia, aprovechando la otra dinámica que utiliza las características de la homotecia.

Para esta propuesta suponemos que los temas: proyección paralela, homotecia semejanza han sido estudiados previamente en los cursos respectivos.

La idea de retomar el teorema desde otra mirada para su mejor comprensión está fundamentada en la idea de Bruner (1984), quien presenta el currículo en espiral, mediante

el cual los planes de estudio se presentan de manera recurrente, trabajando siempre los mismos conceptos pero a diferente nivel de profundización.

Mientras se asciende a los niveles superiores, los núcleos básicos de la materia aumentan progresivamente la cantidad informativa, variando también el tipo de procedimiento, según el nivel de desarrollo de los alumnos. Pasando así de lo manipulativo a lo intuitivo, y desde lo intuitivo a lo simbólico (Hernández, 1991).

### Primera Etapa: *Aspecto Proyección del Teorema de Thales*

La enseñanza del teorema en 2º *año* de la escuela secundaria: el teorema de Thales reducido a dos lados del triángulo.

En esta primera etapa, presentamos una actividad, basada en la resolución de un problema, para lograr que los estudiantes:

- Conozcan el Teorema de Thales en su aspecto proyección, reconociendo los puntos correspondientes en la proyección paralela.
- Exploren y conjeturen utilizando el software Geogebra.
- Demuestren el Teorema de Thales a partir de las áreas.
- Utilicen el Teorema para justificar sus conjeturas en la resolución de problemas.

El aspecto proyección del Teorema de Thales destaca la proyección paralela de cada punto de la recta  $AC$  sobre la  $AC'$ , según la dirección de la recta  $BB'$ .

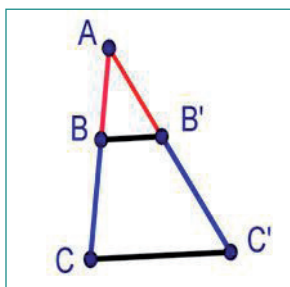


Figura 1

### *Ejemplo de Secuencia para la Primera etapa*

Dado el siguiente problema:

#### *La lámpara de Marta*

Marta quiere comprar los vidrios para arreglar la lámpara de su estudio. Le sacó una foto, hizo un dibujo para anotar las medidas de los vidrios pero no pudo tomarlas todas. Decidió mostrar su dibujo al señor de la vidriería para pedirle que fuera él a terminar de

medir los vidrios. Cuando el señor vio el dibujo, observó que los segmentos  $BB'$ ,  $CC'$ ,  $DD'$  eran paralelos y le dijo a Marta que con las medidas anotadas se podían conocer las faltantes. El dibujo de Marta es el siguiente:

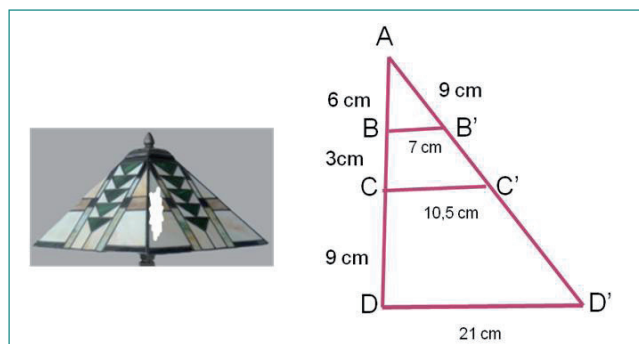


Figura 2

¿Estás de acuerdo que con las medidas anotadas se pueden obtener las que faltan?  
¿Por qué?

*Actividad 1: Explorar con la ayuda del software*

**Enunciado:** Realiza la construcción del dibujo de Marta con el software.

Utilizando un software de geometría dinámica (en este caso utilizamos Geogebra), los estudiantes visualizarán la situación que plantea el problema, como en la Figura 3.

Observación: Debido a que el software integra la geometría con el álgebra, en estas figuras ya se ha fijado una unidad de medida que permite obtener la longitud de los segmentos determinados.

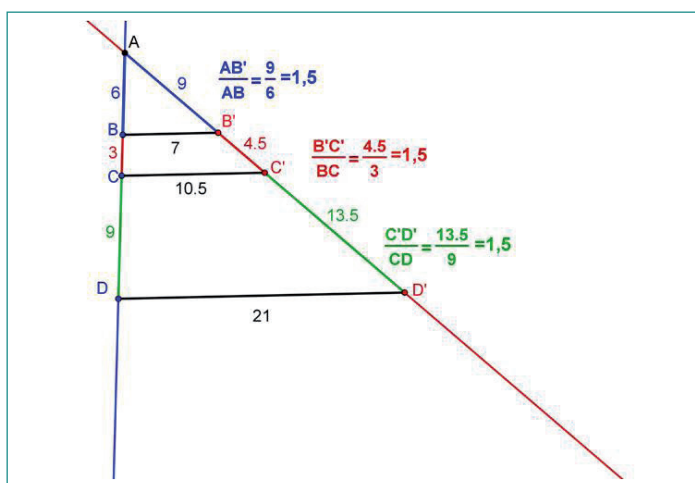


Figura 3

Hallarán todas las medidas que faltan, realizando la construcción con Geogebra:

$$\begin{aligned} |B'C'| &= 4,5 \\ |C'D'| &= 13,5 \end{aligned}$$

### Actividad 2: Validación de la conjetura

**Enunciado 1:** Si bien hemos encontrado los valores que necesitábamos con el software, ¿Cómo podríamos obtenerlos analíticamente? ¿Cómo se obtienen los puntos  $C'$  y  $D'$ ?

Los estudiantes concluirán que los puntos  $C'$  y  $D'$  se obtienen como imagen en la recta  $AD'$  de la proyección paralela de los puntos  $C$  y  $D$  de la recta  $AD$ .

Sugerimos aquí recordar la definición de: Proyección paralela a  $l$  sobre  $a'$

Dadas dos rectas  $l$  y  $a'$  en el plano, no paralelas, se llama proyección paralela a  $l$  sobre  $a'$  a la aplicación que a cada punto  $P$  de la recta  $a$  le hace corresponder el punto  $P'$  de intersección de la recta  $a'$  con la recta paralela a  $l$  que pasa  $P$  (ver Figura 4).

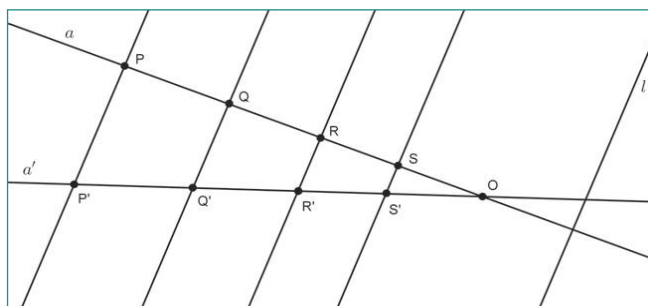


Figura 4

**Enunciado 2:** ¿Existe alguna relación entre las longitudes de los segmentos conocidos para hallar los demás? Enunciar dicha relación.

**Enunciado del Teorema de Tales en su aspecto proyección:**

Dado el triángulo  $ACC'$  siendo  $B$  un punto en el lado  $AC$  y  $B'$  un punto en el lado  $AC'$ . Si  $BB'$  es paralelo a  $CC'$  entonces:<sup>1</sup>

$$k_p = \frac{|AB'|}{|AB|} = \frac{|B'C'|}{|BC|} = \frac{|AC'|}{|AC|}, \text{ donde } k_p \text{ es la razón de proyección.}$$

1.  $|AB|$  es la longitud del segmento  $AB$ , notación tomada de Tirao (1979).

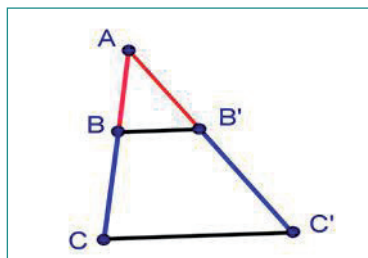


Figura 5

*Enunciado 3: ¿Esta relación es siempre verdadera? ¿Por qué?*

Con el objetivo de iniciar a los estudiantes en las demostraciones geométricas y poniendo en juego una de las reglas de debate matemático imprescindible como es la idea de que los ejemplos no alcanzan para asegurar que una propiedad es verdadera, que se necesita para ello una demostración, es que sugerimos plantear a los estudiantes dichas preguntas.

Debido a que la demostración a partir de las áreas, que fue utilizada por Euclides es muy sencilla, la elegimos para esta etapa.

Dado el triángulo ACC' sea B un punto en el lado AC y B' un punto en el lado AC'. Suponemos que BB' es paralelo a CC', entonces:

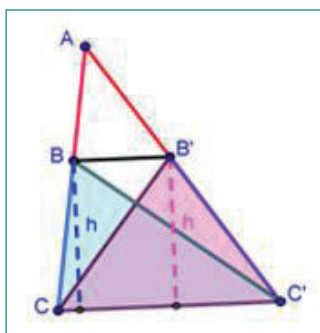


Figura 6

Los triángulos BCC' y CB'C' tienen igual área. (Figura 6), pues comparten un lado y tienen la misma altura

$$\text{Área (BCC')} = \text{Área (CB'C')}$$

Por lo tanto:

$$\text{Área (ABC')} = \text{Área (ACB')}$$

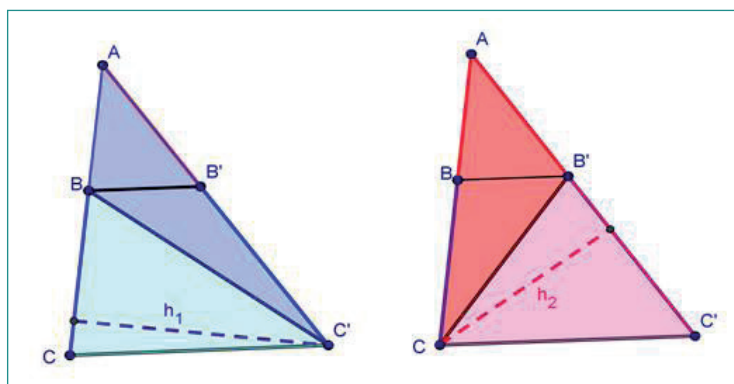


Figura 7

$$\text{Área}(ABC') = \text{Área}(ACB'), \text{ es decir: } \frac{|AB| \cdot h_1}{2} = \frac{|AB'| \cdot h_2}{2}$$

$$\text{Área}(BCC') = \text{Área}(CB'C'), \text{ es decir: } \frac{|BC| \cdot h_1}{2} = \frac{|B'C'| \cdot h_2}{2}$$

$$\text{Dividiendo a ambos miembros se tiene: } \frac{|AB|}{|BC|} = \frac{|AB'|}{|B'C'|}$$

$$\text{O bien: } \frac{|AB'|}{|AB|} = \frac{|B'C'|}{|BC|}$$

$$\text{Análogamente podemos probar que: } \frac{|AC'|}{|AC|} = \frac{|B'C'|}{|BC|}$$

Luego hemos demostrado el teorema de Thales en su aspecto Proyección.

### Actividad 3: Resolución del Problema

**Enunciado:** Calcular los valores obtenidos con el software, utilizando el teorema de Thales.

Para calcular  $|B'C'|$ , conociendo  $|AB|$ ,  $|AB'|$  y  $|BC|$  podemos utilizar la relación

$$k_p = \frac{|AB'|}{|AB|} = \frac{|B'C'|}{|BC|}; \frac{9}{6} = \frac{|B'C'|}{3}; |B'C'| = \frac{9}{2} = 4,5$$

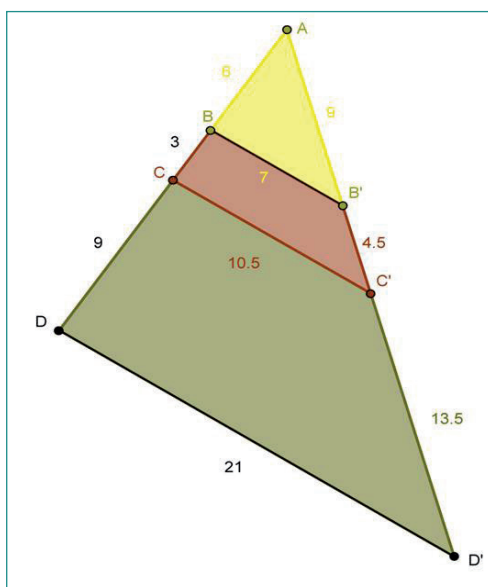


Figura 8

Para calcular  $|C'D'|$ , conociendo  $|AB|$ ,  $|A'B'|$  y  $|CD|$  podemos utilizar la relación:

$$k_p = \frac{|A'B'|}{|AB|} = \frac{|C'D'|}{|CD|}; \quad \frac{9}{6} = \frac{|C'D'|}{9}; \quad |C'D'| = \frac{27}{2} = 13,5$$

Utilizando el Teorema de Thales es posible hallar todas las medidas que faltan, para dar respuesta al problema.

*Respuesta: El Señor de la vidriería tenía razón...*

### Segunda Etapa: Aspecto Homotecia del Teorema de Thales

La enseñanza del teorema en 3er. año de la escuela secundaria: sugerimos desarrollar homotecia y luego el Teorema de Thales.

En esta segunda etapa, nos proponemos que los estudiantes:

- Reconozcan el Teorema de Thales en su aspecto homotecia, reconociendo los puntos correspondientes en la misma. Presentación de la razón del tercer lado.
- Exploren y conjeturen utilizando el software Geogebra.
- Demuestren la proporción con el tercer lado.
- Utilicen el Teorema para justificar sus conjeturas en la resolución de problemas.

Este aspecto destaca el paso del triángulo ABC al triángulo A'B'C'. Utilizando homotecia.

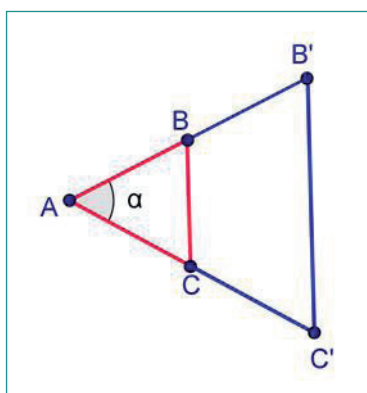


Figura 9

### *Ejemplo de Secuencia para la Segunda etapa*

#### *Incendio en el hospital*

A un incendio producido en un hospital acude la unidad de bomberos con una escalera de 8 m de longitud que consta de 20 peldaños distribuidos uniformemente. Al apoyar la escalera sobre la fachada del edificio se observa que el primer peldaño se encuentra a 30 cm del suelo.



Figura 10

Debido a que las llamas ascienden rápidamente hacia arriba, es necesario averiguar si es posible con dicha escalera evacuar el 3er. piso del hospital. Cada planta tiene 2,5 m de altura. ¿Podrán ser rescatados? Justifica tu respuesta.



Luego los puntos B' y C' se obtienen por la homotecia H(A; 20).  
Sugerimos aquí recordar la definición de homotecia y sus propiedades:

### Definición de Homotecia

Sea O un punto del plano y k un número real distinto de cero. Una *homotecia de centro O y razón k* es la transformación geométrica del plano en sí mismo, que hace corresponder a un punto A distinto de O otro A', alineado con A y O, tal que:  $|OA'| = k \cdot |OA|$  y deja invariante el punto O.

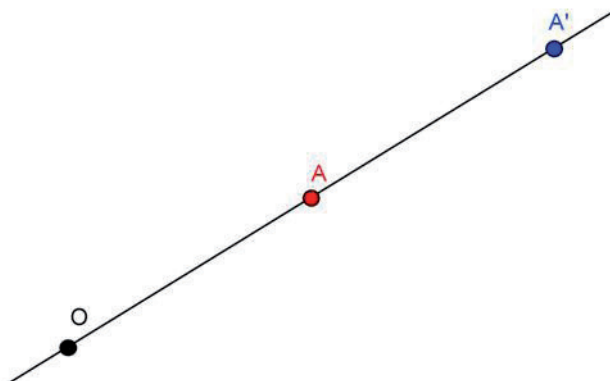


Figura 12

*Enunciado 2:* ¿Existe alguna relación entre las longitudes de los segmentos conocidos para hallar los demás? Enunciar dicha relación.

### Enunciado del Teorema de Thales en su aspecto homotecia:

Dado el triángulo AC'B' siendo B un punto en el lado AB' y C un punto en el lado AC'. Si BC es paralelo a B'C' entonces:

$$k_h = \frac{|AB'|}{|AB|} = \frac{|B'C'|}{|BC|} = \frac{|AC'|}{|AC|}, k_h \text{ es la razón de homotecia}$$

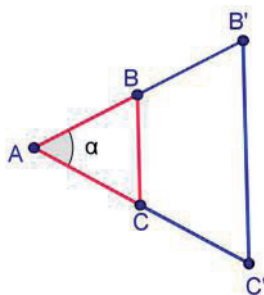


Figura 13

Enunciado 3: ¿Esta relación es siempre verdadera? ¿Por qué?

La igualdad  $\frac{|AB'|}{|AB|} = \frac{|AC'|}{|AC|}$  es la que hemos probado en la 1ra etapa.

Probaremos la igualdad:  $\frac{|AB'|}{|AB|} = \frac{|B'C'|}{|BC|}$ .

Para ello trazamos un segmento paralelo al segmento  $CC'$  por  $B$ . Ese segmento cortará en el punto  $D$  al segmento  $B'C'$ . Queda determinado el paralelogramo  $BCC'D$ , las medidas de los segmentos  $BC$  y  $DC'$  son iguales (Figura 14).

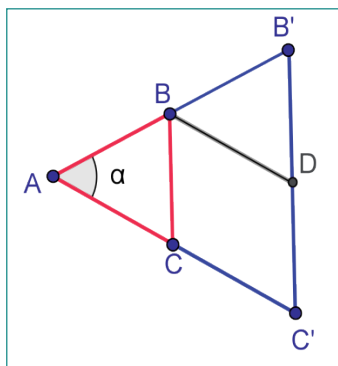


Figura 14

Los triángulos  $ADC'$  y  $ABC'$  tienen igual área (Figura 15), pues comparten un lado y tienen la misma altura.

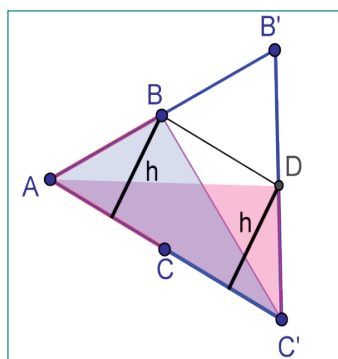


Figura 15

Por lo tanto:  
 $\text{Área}(\text{ADC}') = \text{Área}(\text{ABC}')$   
 $\text{Área}(\text{AB}'\text{D}) = \text{Área}(\text{BB}'\text{C}')$

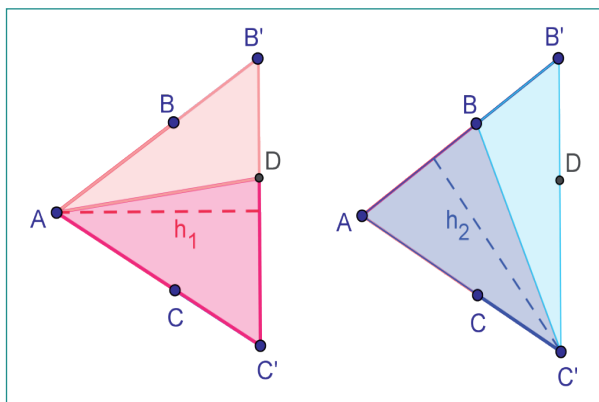


Figura 16

$$\text{Área}(\text{ADC}') = \text{Área}(\text{ABC}'), \text{ es decir: } \frac{|DC'| \cdot h_1}{2} = \frac{|AB| \cdot h_2}{2}$$

$$\text{Área}(\text{AB}'\text{D}) = \text{Área}(\text{BB}'\text{C}'), \text{ es decir: } \frac{|B'D| \cdot h_1}{2} = \frac{|BB'| \cdot h_2}{2}$$

$$\text{Dividiendo a ambos miembros se tiene: } \frac{|DC'|}{|B'D|} = \frac{|AB|}{|BB'|}$$

Como ya mencionamos:  $|DC'| = |BC|$ . Pero  $|B'D| = |B'C'| - |DC'| = |B'C'| - |BC|$  y  $|BB'| = |AB'| - |AB|$ , así de la proporción anterior obtenemos:

$$\frac{|BC|}{|B'C'| - |BC|} = \frac{|AB|}{|AB'| - |AB|}$$

$$\text{O bien: } \frac{|B'C'| - |BC|}{|BC|} = \frac{|AB'| - |AB|}{|AB|}$$

$$\text{Es decir: } \frac{|AB'|}{|AB|} - 1 = \frac{|B'C'|}{|BC|} - 1$$

$$\text{Luego, se obtiene la proporción buscada: } \frac{|AB'|}{|AB|} = \frac{|B'C'|}{|BC|}$$

Probamos de esta manera que los triángulos ABC y AB'C' tienen sus lados proporcionales:

$$\frac{|AB'|}{|AB|} = \frac{|B'C'|}{|BC|} = \frac{|AC'|}{|AC|}$$

Finalmente, observemos que en los triángulos ABC y AB'C' la razón entre los lados homólogos es  $k_h$ , además se verifica la alineación y se preserva el orden. Concluimos que el homotético del triángulo ABC es el triángulo AB'C' por una homotecia de centro A y razón  $k_h$ , con  $k_h > 0$ .

En el caso en que  $k_h < 0$  podemos utilizar que toda homotecia de razón negativa puede obtenerse como la composición de una simetría de centro en A con la homotecia correspondiente positiva.

Por lo tanto podemos concluir que en los triángulos homotéticos ABC y AB'C' se verifica el Teorema de Tales.

### Actividad 3: Resolución del Problema

**Enunciado:** Calcular analíticamente los valores obtenidos con el software, utilizando el teorema de Tales.

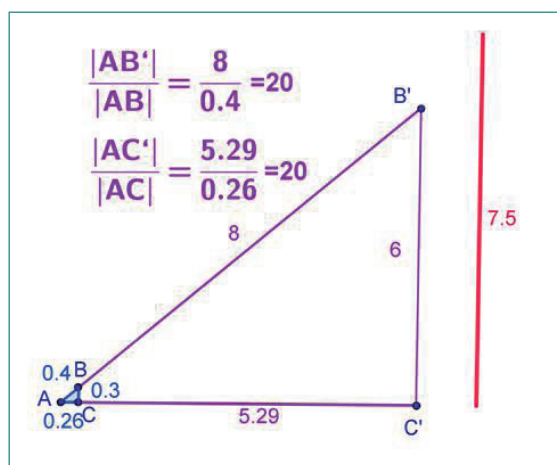


Figura 17

Para calcular  $|B'C'|$ , conociendo  $|AB|$ ,  $|AB'|$  y  $|BC|$  podemos utilizar la relación:

$$k_h = \frac{|AB'|}{|AB|} = \frac{|B'C'|}{|BC|}; \frac{8}{0.4} = \frac{|B'C'|}{0.3}; |B'C'| = \frac{24}{4} = 6$$

El hospital tiene 3 plantas de 2,5 m de altura, el 3er piso estará a 7,5 m de altura. La escalera alcanzará una altura de 6 m.

**Respuesta:** No es posible salvar a los enfermos del 3er. piso...

Finalmente recomendamos realizar actividades de integración para que los estudiantes pongan en juego los dos aspectos del Teorema.

Además creemos importante aclarar que si bien estas actividades refieren al enunciado directo del teorema es igualmente interesante plantear actividades donde se involucre el enunciado recíproco del mismo.

*Dado el triángulo  $AC'B'$  siendo  $B$  un punto en el lado  $AB'$  y  $C$  un punto en el lado  $AC'$  Si  $ABC$  y  $AB'C'$  tienen sus lados homólogos proporcionales entonces los lados  $BC$  y  $B'C'$  son paralelos.*

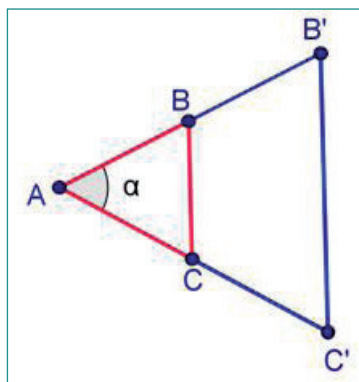


Figura 18

## REFLEXIONES FINALES

Comenzar en una primera etapa con la configuración triangular permite dar vida a Thales a partir de una figura simple, luego variar esta figura para construir otras más complejas. En las actividades propuestas se destaca la importancia del uso del software tanto en la exploración y formulación de la conjetura, como en la validación de la misma.

El trabajo con ambos aspectos del teorema contribuyen a una mejor comprensión de los conceptos de “puntos correspondientes” y de “segmentos homólogos” del mismo, otorgándole un sentido de acuerdo al movimiento. Creemos que ambas dinámicas de Thales deben formar parte de la enseñanza y que hay que hacer y construir en el tiempo estos dos enfoques, sugerimos esta secuencia que permite matemáticamente validar las diferentes etapas. Consideramos necesario confrontar las dos lógicas dinámicas de Thales y pensar en una geometría “en movimiento” que despierte interés en los estudiantes.

En esta propuesta se potencia una característica de la actividad matemática, como es el uso de herramientas conocidas para justificar otras y al mismo tiempo brindar experiencias que permitan tener disponible esta nueva herramienta, el Teorema de Thales, para justificar otras situaciones similares.

## REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Boyer, C. (1986). *Historia de las Matemáticas*. Madrid: Alianza Universidad.
- Bruner, J. (1984). *El Desarrollo de los procesos de representación, en: Acción, Pensamiento y Lenguaje*. Madrid: Alianza ED.
- De Villers, M. (1996). *Algunos desarrollos en enseñanza de la geometría* The Future of Secondary School Geometry, la lettre de la preuve, Nov.-Dic., 1999.
- Dreyfus, T. (2000). La demostración como contenido del currículum. En M. Colén, Y. Fraile, y C. Vidal(Eds): *Matemática y educación. Retos y cambios desde una perspectiva internacional*. Barcelona: Graó
- Duperret, J.C. (1996). Por un Tales Dinámico. En E. Barbin y R. Douady (Cord) *La enseñanza de las matemáticas: Relación entre Saberes, Programas y Prácticas*. Pub del IREM. France: Topiques editions.
- Hernandez, P. (1991). *Psicología de la Educación*. Corrientes actuales y teorías aplicadas. México: Trillas.
- Tirao J. (1979). *El plano*. Buenos Aires: Editorial Docencia.



## La Discoteca de los Números

**M<sup>a</sup> Iranzu López de Dicastillo Garnica,  
M<sup>a</sup> Inmaculada Palomo Sáenz,  
Leonor López de Dicastillo Roldán**

**Resumen:** *El trabajo que presentamos en este artículo es un método didáctico para la construcción del número y de las operaciones básicas en Educación Especial, Infantil y Primer Ciclo de Primaria. Tiene como objetivo principal que cada alumno construya por sí mismo la serie numérica de forma activa, natural y progresiva, siguiendo su propio ritmo de aprendizaje, y que sea capaz de operar con ella y aplicarla en sus situaciones cotidianas.*

*Entre las características que lo diferencian de otros métodos de aprendizaje destacamos el respeto y atención a las diferencias individuales, por haber nacido dentro de ellas, y la disposición en la que pone a los alumnos para que éstos puedan inventar, dar soluciones, prever resultados, hacer cálculos mentales, estimar, intuir lo que va a pasar y plantear soluciones.*

**Descriptor:** *Sentido numérico, introducción numérica, recursos didácticos, matemáticas, Educación infantil, educación primaria,*

## The Numbers Nightclub

**Abstract:** *The work presented in this paper is a teaching method for the construction of number and basic operations in Special Education, Child Elementary and junior high. Its main objective is that each student builds the series itself actively numerical, natural and progressive, at their own pace of learning, and is able to operate with it and apply it in their everyday situations.*

*Among the characteristics that differentiate it from other learning methods emphasize the respect and attention to individual differences, by being born into them, and the provision that puts students so that they can invent, provide solutions, provide results, do mental calculations, estimate, guess what will happen and propose solutions.*

**Keywords:** *Number Sense, numeric input, teaching resources, math, early childhood education, primary education.*

## INTRODUCCIÓN

Trabajar con alumnos con necesidades educativas especiales hace que en muchas ocasiones te veas obligado a adaptar los métodos y materiales del mercado, y a inventar mil y una formas de facilitar a estos alumnos la adquisición de gran parte de los conceptos curriculares. Por poner un ejemplo, pocos métodos tienen en cuenta la edad cronológica de estos alumnos. Es verdad que su inteligencia puede ser la de un niño de Infantil, pero sus experiencias vitales, su entorno, su cuerpo, su aspecto físico, tienen diez, quince o veinte años. ¿Cómo vamos a motivarles entonces contando patitos o celebrando su cumpleaños en un parque infantil?

En la literatura existen muchos ejemplos de ideas y propuestas didácticas para la enseñanza de las matemáticas en infantil y primaria (Fernández y Gash, 2008; Maz-Machado y Jiménez-Fanjul, 2012), pero son escasas aquellas específicas para niños con necesidades educativas especiales. Para tratar de dar respuesta a estas inquietudes nació hace ya diez años La Discoteca de los Números, en una clase de educación especial, con ocho alumnos discapacitados. Al principio sólo fue un calendario pensado para que los alumnos pudieran aproximarse a la idea del tiempo y de la sucesión de los días, dado que estos conceptos son muy difíciles para ellos por el nivel de abstracción que requieren. Pero poco a poco fueron capaces, no sólo de entender esa idea de tiempo, sino de generar los números diferenciando entre unidades (niños en la cafetería) y decenas (corros de niños bailando) y de realizar operaciones básicas con ellos.

El método consiste en una discoteca en la que los niños pueden ir a bailar siguiendo unas normas establecidas, y lo sorprendente de él es que recoge todos los aspectos básicos en los que se asienta el pensamiento lógico, no descuida ningún detalle, razona y justifica cada paso, cada norma, de modo que nada sucede arbitrariamente, pero a su vez todo fluye de forma espontánea y natural hasta llegar a la construcción de la serie numérica sin haberla siquiera mencionado antes.

Así, mientras los alumnos juegan, los descubrimos utilizando técnicas matemáticas como el conteo y la correspondencia uno a uno, y entrenándose en aspectos como la conservación de la cantidad continua, la abstracción reflexionada, el orden estable de la serie numérica y la inclusión de los números, entre otros.



Figura 1. Día 15 de abril. Un corro bailando y cinco niños en la cafetería

## DESARROLLO DE LAS SESIONES DE TRABAJO

La discoteca está colocada en un lugar del aula visible y accesible para todos los alumnos, de forma que cada día un alumno sea el encargado de trabajar con ella.

### Sesión de Presentación

El primer día se presenta la discoteca a los alumnos para ir hablando de las diferentes partes de que consta.

A la derecha está la TAQUILLA y diez fichas con las caras de los niños que están esperando para entrar. Recabamos la atención en el PORTERO. Él es el encargado de abrir o cerrar la discoteca con sus respectivas llaves (+) y (-), y es también quién nos dirá cuántos niños pueden entrar o salir a la vez, indicándolo con un cartel colocado a su lado.

Una vez dentro de la discoteca vemos la CAFETERÍA, con diez taburetes colocados en círculo donde los niños que vayan entrando deberán permanecer hasta que se complete el corro, y un gran cuadro negro donde colocaremos el número (de color negro) de niños que hay sentados en los taburetes.

Finalmente, a la izquierda está la pista de baile. En ella aparece un escenario con instrumentos, preparado para que aparezcan los músicos (la plataforma del escenario gira para que aparezcan o desaparezcan los músicos), y tres corros de diez círculos cada uno, donde se van a colocar los niños que entren de la cafetería cuando se haya completado su círculo. Vemos también que hay un cuadro rojo donde colocaremos el número (de color rojo) de corros que hay en la discoteca.

### Primera Sesión

Para poder empezar a jugar se colocan en la taquilla los números ordenados del 1 al 10 y las fichas con los diez niños que esperan para entrar. Como vamos a empezar utilizando la discoteca como un calendario, cada día entrará un niño por lo que en el cartel del portero pondrá el número 1. Se abre la taquilla, se coloca la llave del portero que indica que la discoteca está abierta (+) y se coloca en el tejado un letrero con el nombre del mes en el que estamos.

El primer niño recoge su entrada, saluda al portero, entra en la cafetería y se sienta siempre empezando por el asiento de arriba (iremos colocando a los niños en sentido de las agujas del reloj). En el cuadrado negro de la cafetería se pone la tarjeta con el número 1, también de color negro, que simboliza los niños que hay en la cafetería y el día del mes.

### Sesiones de la Segunda a la Novena

Cada día, entre el segundo y el noveno del mes, vamos a realizar la misma rutina que el día anterior, introduciendo actuaciones para reforzar la idea de orden, de secuencia,

de correspondencia uno a uno y de inclusión. Los alumnos empiezan a fijarse en el número de taburetes que quedan vacíos, que son los días que faltan para que todo el corro se vaya a bailar.

El noveno día crece la expectación: sólo queda un sitio libre y están impacientes por ver qué ocurrirá al día siguiente.

### Sesión Décima

Una vez realizada la misma rutina que en días anteriores, entra el décimo niño y observamos que el corro se ha llenado. Hoy pueden pasar a la discoteca para bailar. Cuando esto ocurre todos juntos cantamos “A bailar, a bailar”.

Los diez niños se colocan en uno de los corros de la discoteca y aparecen los músicos. Se coloca la tarjeta del número uno de color rojo en el cartel de la discoteca porque hay un corro bailando. La cafetería ha quedado vacía, por lo que ha de colocarse la tarjeta con el 0 de color negro. Hemos formado el número 10. Cantamos la canción “El baile de las decenas”. También la taquilla está vacía, por lo que colocamos otros diez niños en la fila, esperando para seguir entrando.



Figura 2.

## Sesiones Posteriores

En las sesiones de la undécima hasta el día en que termina el mes, procedemos de la siguiente manera:

- Se colocan niños en la cafetería hasta completar un nuevo corro a la vez que se van cambiando las tarjetas con los números de color negro, construyendo de esta manera los números del 11 al 19.
- Cuando se completa otro corro se pasa a la discoteca y se cambian las dos tarjetas, tanto la roja como la negra. Es el número veinte.
- Se procede de igual manera hasta completar un tercer corro, el número 30.
- Cuando termina el mes se vacía la discoteca y se vuelve a empezar desde el número 1.



Figura 3.

## ALGO MÁS QUE UN CALENDARIO

Cuando los alumnos manejan con soltura el calendario se plantean que pasaría si después del 31 entraran más niños en la discoteca y se formaran más corros. La respuesta a esta inquietud dio como resultado la incorporación de siete corros más para trabajar con ellos las cantidades de 0 a 100 y las operaciones básicas. A partir de este momento la discoteca de los números se puede utilizar tanto como calendario como

un método didáctico para trabajar con ellos otros conceptos aritméticos que señalamos más abajo.

Para manejar la discoteca en cualquiera de sus dos formas, acordamos con los alumnos utilizar los siguientes símbolos:

- Un vaso con una pajita, que representa la cafetería (las unidades).
- Un corro de diez pequeños círculos rojos, que representa la discoteca (las decenas).
- Un autobús, que partirá hacia el concierto sólo cuando se haya llenado con 10 corros de niños (las centenas).
- Además, dibujaremos la cara del portero junto a la llave correspondiente para indicar que sumamos o restamos.



Figura 4.

### **Generación de las Cantidades del 0 al 100**

- Construcción del número como adición de uno más.
- Construcción de las decenas como grupos de 10 niños.
- Interiorización de la posición de las cifras y su valor.

## Composición y Descomposición de los números

En el transcurso del juego los alumnos comprueban cómo se va formando el número 10 como resultado de sus sumas (1+9, 2+8, 3+7, etc.). Para favorecer su comprensión hemos elaborado un juego de cartas de parejas en las que ellos tienen que unir las cantidades que juntas suman 10.

## Mayor y Menor

Sólo con mirar el número de niños en la cafetería y el número de corros en la discoteca los alumnos van descubriendo intuitivamente qué cantidades son mayores o menores.

## La Suma

- Actividad 1. Encaminada a que los alumnos entiendan el significado del primer sumando. Le llamamos “En la cafetería hay...”
- Actividad 2. Para trabajar el significado del segundo sumando. Le llamamos “El portero dice que entren...”
- Actividad 3. La suma. “En la cafetería hay... y el portero dice que entren...” Presentamos a los alumnos la suma con los símbolos acordados (vaso, corros, portero).
- Actividad 4. Suma de dos sumandos, uno de ellos con dos cifras.



Figura 5.

## La Resta

- Actividad 1. Vaciando la discoteca.  
Dedicamos unas sesiones a vaciar la discoteca sacando poco a poco a los niños que hay dentro, empezando por los que están en la cafetería y después descomponiendo los corros de la discoteca. Los alumnos van realizando las restas de forma manipulativa y se van familiarizando con el signo -.
- Actividad 2. “En la cafetería hay... y el portero dice que salgan”.  
Se plantean diferentes situaciones que los alumnos deben resolver deshaciendo los corros de la discoteca (resta con llevadas).

A partir de aquí, los alumnos estarán preparados para sumar y restar cualquier cantidad, de una forma natural y sencilla.

## MATERIALES ADICIONALES

Para trabajar todos estos conceptos se han elaborado una serie de materiales adicionales que los alumnos pueden manipular y que facilitan la representación de las diferentes situaciones de aprendizaje que se les proponen: (Véase Figura 6).

- Discotecas individuales con sus correspondientes accesorios, adaptadas a las necesidades de cada alumno.
- Láminas en las que se muestra la formación de los números del 0 al 9.
- Cartas de complementarios.
- Tarjetas “Que entren” y tarjetas “Que salgan”
- Cuadernillos de sumas y restas con la simbología acordada.

## CONCLUSIONES

Han sido muchas las experiencias, reflexiones, anotaciones y evaluaciones recogidas en estos años de trabajo con “La discoteca de los números” en educación especial, pero sin duda las más valiosas las han aportado los propios alumnos. Han sido ellos con su motivación, su implicación y con todo lo que se han cuestionado, los que han hecho crecer y desarrollar este método. Lo que en un principio sólo fue una estrategia didáctica para facilitar el aprendizaje de algunas de sus rutinas diarias se ha ido transformando gracias a las aportaciones de estos alumnos en lo que hoy presentamos como un nuevo recurso didáctico matemático para el aula tanto de educación especial como de infantil y primeros cursos de primaria.

Un recurso didáctico que no está terminado, sino que sigue siendo flexible y abierto a otros posibles usos y aplicaciones que, estamos seguras, nuestros alumnos nos seguirán inspirando.

Algunas de las características más seductoras de este método se han ido descubriendo cada día en el aula y, en nuestra opinión, lo diferencian de otros métodos:



Figura 6.

- Es un método **globalizado y contextualizado**, en el que se ponen en juego aprendizajes lingüísticos, plásticos, sociales y matemáticos.
- Es **motivador y significativo**, pues parte de sus propios intereses y gustos, así como de un entorno familiar, conocido y apropiado a su realidad (bailes, música, fiestas).
- Por haber nacido dentro de la diversidad educativa, **atiende y respeta como ningún otro las diferencias individuales**.
- Promueve el **interés, la atención y la sorpresa**, pues cada día la situación de aprendizaje es diferente.
- Es un método **atemporal**. No importa la edad de inicio, cuanto antes se empiece a jugar antes se consiguen los objetivos. Todos los niños pueden jugar aunque tengan diferentes edades, diferentes niveles académicos o diferentes ritmos madurativos.
- Va de los **aprendizajes más concretos a la abstracción** del concepto matemático. (Podría decirse que transforma las abstracciones en elementos tangibles y visibles, de forma que los alumnos las podrían dibujar).
- Pone a los alumnos en disposición de **inventar, dar soluciones, prever resultados, calcular, intuir lo que va a pasar, plantear interrogantes y anticiparse a los hechos**. Es decir, enseña a los niños a pensar.
- Llega a la **generalización** a partir de experiencias concretas.
- Potencia al máximo la **inteligencia práctica**, la que nos permite resolver los problemas de la vida diaria, la que guía nuestro razonamiento y nuestras acciones hacia el éxito.

Con respecto a los resultados, y por poner un ejemplo, uno de los logros que más nos llama la atención es la naturalidad y facilidad con la que los alumnos realizan las sumas y restas con “llevadas”, aquellas que tanto temíamos los estudiantes de hace unas décadas. Nuestros alumnos hacen y deshacen corros para solucionar el problema que se les ha planteado y al final son capaces de representar el resultado en un papel entendiendo lo que están haciendo.

Estos buenos resultados nos han llevado a pensar que este método podría funcionar también con alumnos sin discapacidad que se inician en el aprendizaje de los números y de las operaciones básicas. Y es precisamente en este nuevo aspecto en lo que estamos ocupadas actualmente. Queremos comprobar cómo los alumnos del segundo ciclo de Educación Infantil (de 3 a 6 años) acogen “La discoteca” y aprenden con ella a manejar los números y sus relaciones. Las primeras anotaciones y observaciones van por buen camino.

## REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Fernández, M. C. y Gash, M. M. (2008). Descubre las matemáticas jugando: construimos el pensamiento. *Epsilon. Revista de Educación Matemática*, 69, 105-112.
- Maz-Machado, A. y Jiménez-Fanjul, N. (2012). Ajedrez para trabajar patrones en matemáticas en educación primaria. *Epsilon. Revista de educación matemática*, 85, 105-112.

## Elaboración de material docente para iPad con iBooks Author

**Fernando A. López-Hernández**

*Departamento de Métodos Cuantitativos e Informáticos  
Universidad Politécnica de Cartagena*

**Manuel Ruiz-Marín**

*Departamento de Métodos Cuantitativos  
Universidad de Murcia*

**Resumen:** *Las Tecnologías de la Información y las Comunicaciones cada vez están más presentes en la Educación. Los ordenadores supusieron un cambio en la enseñanza y ahora las tabletas están abordando una segunda revolución. Su simplicidad de uso, versatilidad, manejabilidad y movilidad las hacen ideales como herramientas de aprendizaje. El m-learning está irrumpiendo en las aulas como un nuevo concepto de enseñanza. En este artículo se muestra la aplicación iBooks Author para elaborar materiales docentes junto con la experiencia realizada en la enseñanza de la Estadística Empresarial.*

**Palabras clave:** *recursos didácticos, m-learning, matemáticas*

## Development teaching materials for iPad using iBook Author

**Summary:** *Information and Communication Technologies are increasingly present in Education. Computers led to a teaching revolution and, nowadays, tablets are meaning a second revolution. Their simplicity, versatility, manageability and portability make of tablets an ideal tool for teaching and learning. A new concept in Education has been introduced to the classroom: the m-learning. This paper shows the application iBooks Author to elaborate teaching materials together with the experience in teaching Business Statistics.*

**Key words:** *Teaching materials, m-learning, mathematics*

## EL IPAD EN EL AULA

Nadie duda que la llegada de las Tecnologías de la Información y Comunicación (TICs) han supuesto un cambio en la enseñanza. Las TICs han sido incorporadas al proceso educativo desde hace unos años y están creciendo a un ritmo vertiginoso en paralelo con su difusión en la sociedad. Son innumerables las ventajas que tiene el uso de tecnologías en el ámbito educativo: refuerza la colaboración en los alumnos, les ayuda a centrarse en los aprendizajes, mejoran la motivación, incrementa el interés de los alumnos, favorece el espíritu de búsqueda, la creatividad, la resolución de problemas, etc. En este sentido, es amplia la literatura que explora la utilidad de las TICs en todos los niveles educativos: Educación Infantil (Favre, 2012), en Educación Primaria (Lucas, 2004), en Secundaria (Pantoja y Huertas, 2010; Ballesteros, Cabero, Llorene y Morales, 2010), en la Enseñanza Universitaria (Ribes, Bonet, Guimerà, Fernández-Quijada y Martínez-García, 2009) o para el caso de la Estadística (Coll y Blasco, 2009; Temprado, Molina y Sanmartín, 2012).

La aparición en el mercado de tabletas y teléfonos móviles inteligentes y su rápida adopción por la población, está generando una segunda revolución en la metodología docente. Tal está siendo su crecimiento que se ha acuñado un nuevo término *aprendizaje electrónico móvil*, en inglés *m-learning*, para recoger todas las metodologías de enseñanza y aprendizaje que utilizan pequeños y manejables dispositivos móviles para acercar los conocimientos a los alumnos.

Como muestra del fuerte crecimiento de estos dispositivos móviles en la enseñanza destacamos el caso de Corea (Young Suhk, 2010, en SCOPEO, 2011), donde el gobierno ha invertido 2000 millones de dólares para ofrecer tabletas gratuitas a sus estudiantes, declarando el fin del libro de texto en las aulas para el año 2014 en primaria, y en 2015 en secundaria, en favor de las tabletas, con contenidos educativos que se ubican en sistemas de almacenamiento similares a la nube de datos proporcionados por el propio gobierno.

El iPad no es un ordenador ni un móvil. Es un tipo de dispositivo nuevo, que propone una forma de interactuar con los contenidos de un modo diferente. Tal y como señala Gámez y Marín (2010) *“la mayoría de los recursos que se ponen a disposición de los alumnos son de tipo pasivo, no aportando ningún tipo de valor añadido respecto al uso tradicional de apuntes elaborados por el profesor y puestos a disposición de los alumnos en las copisterías. Un correcto diseño de los materiales y recursos marca la diferencia entre un uso pasivo por parte del alumno o un uso activo, con interactividad, que presente un mayor atractivo durante el estudio y potencie el aprendizaje”*. En línea con esta idea este artículo pretende mostrar una nueva forma de elaborar materiales docentes.

La edición de materiales docentes para este tipo de plataformas se vislumbra como una opción de futuro. Recientemente está disponible una herramienta extremadamente potente, flexible y gratuita para la elaboración de materiales docentes multimedia: *iBooks Author* (Apple 2012).

El objetivo de este artículo es doble. Por un lado mostraremos las principales características de este nuevo software de edición, con especial hincapié en aquellas opciones que son específicas para el diseño de materiales docentes. En segundo lugar mostraremos la experiencia piloto que se está realizando en la Facultad de Ciencias de la Empresa de la Universidad Politécnica de Cartagena para elaborar estos manuales en las asignaturas

de Estadística Empresarial I y II en el grado de Administración y Dirección de Empresas. Esta experiencia, en la que los alumnos han tomado parte de una manera activa, es un claro ejemplo de cómo el uso de las TICs en el aula pueden mejorar la calidad docente en asignaturas de matemáticas. Con facilidad esta experiencia puede trasladarse a cualquier ámbito y nivel educativo.

## IBOOK AUTHOR COMO EDITOR DE MATERIALES DOCENTES

La edición de un libro en formato iBook2 es extremadamente simple mediante el software de edición *iBooks Author*. Este apartado está dedicado a presentar las principales características de este software, destacando aquellas opciones que consideramos más útiles para la elaboración de materiales docentes.

La experiencia en el uso de este software para la edición de los materiales de Estadística Empresarial I y II se inició al comienzo del curso, reclutando alumnos familiarizados con el entorno Mac. No es difícil encontrar alumnos que manejen este sistema operativo y en general tienen altos niveles de conocimiento informático que facilita el aprendizaje y manejo del software. A estos alumnos se les suministraron los apuntes de la asignatura en formato Word, incluyendo un buen número de preguntas de autoevaluación tipo test, junto con presentaciones tipo ppt utilizadas en clase para presentar los contenidos de las asignaturas.

Los alumnos se familiarizaron rápidamente con este software ya que presenta una interfaz de usuario potente pero simple a la vez, que se asemeja al paquete *iWork* o al más conocido Word de Office, permitiendo arrastrar y soltar elementos, editar, importar o convertir archivos externos como, por ejemplo, documentos de Microsoft Word.

Los libros elaborados mediante esta aplicación pueden exportarse en tres formatos: *iBooks*, pdf y texto. Al guardarse los archivos, utilizan la extensión .iba, que permite llevar el proyecto de libro a otro Mac que utilice *iBooks Author*. Esto permitió el rápido intercambio de los proyectos entre los alumnos y el profesor.

La Figura 1 muestra las cuatro zonas de trabajo en las que se divide el programa correspondiente a la edición del tema *Distribuciones Continuas* de la asignatura de Estadística Empresarial II que servirá de ejemplo para ilustrar esta experiencia. En la barra superior se muestran los elementos que se pueden agregar al libro. En la posición izquierda superior las partes en las que se divide el libro y en la izquierda inferior las páginas del libro. Finalmente la zona de trabajo domina la pantalla.

Para facilitar la elaboración del primer libro multimedia, *iBooks Author* incluye por defecto varias plantillas básicas que permiten iniciar el trabajo de elaboración del material docente de forma rápida y pueden ser un excelente punto de partida para cualquier proyecto. También algunas universidades y centros de enseñanza cuentan con un formato específico para editar sus manuales docentes manteniendo su imagen corporativa. Véase Figura 1.

La introducción de textos en el editor *iBooks Author* es simple y permite incorporar texto directamente al libro multimedia de distintas formas. La forma más básica es escribir directamente en los cuadros preestablecidos en la plantilla, pero también

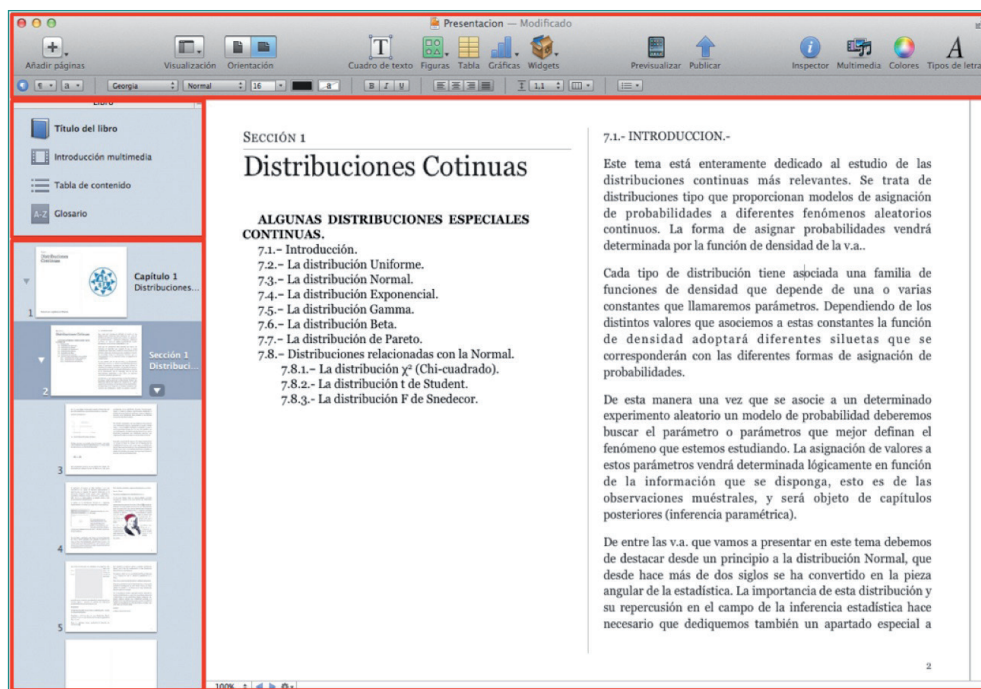


Figura 1.

es posible utilizar la función copiar y pegar de otra fuente (por ejemplo de un fichero Word o texto plano). En el caso de nuestra experiencia, esta operación facilitó la labor de trasladar los materiales de los que disponíamos de la asignatura, dándole un nuevo formato a los viejos apuntes. Fueron los alumnos los encargados de incorporar los apuntes al formato *iBook*, haciéndoles así participar activamente en el desarrollo de la asignatura. Finalmente, también es posible *arrastrar* un fichero Word dentro del cuadro de texto para que los contenidos de archivo se inserten automáticamente en el proyecto del *iBook*. El texto puede formatearse de forma similar a cualquier procesador. Las fórmulas matemáticas no son un problema y pueden insertarse y editarse de forma habitual con *Mathtype* de forma similar a como se trabaja con la suite de oficina Word de Office.

Pero la principal característica de estos nuevos materiales es la capacidad para incorporar objetos multimedia. Estos objetos reciben el nombre específico de *Widgets* y pueden ser incorporados al libro utilizando una opción específica del menú con este nombre. La siguiente tabla recoge con detalle los elementos que se pueden incorporar. Véase tabla 1.

En primer lugar es posible incluir en nuestros manuales, objetos multimedia clásicos: imágenes, videos y archivos de audio. Este tipo de objetos se incorporan de forma simple y basta con arrastrar el fichero correspondiente sobre el texto y soltar. Tamaño y posición pueden ser modificados sin dificultad y de forma automática el texto se adapta a estos objetos envolviéndolos.

Esta opción fue muy útil para la elaboración del tema de *Distribuciones Continuas* ya que permitió incorporar los gráficos correspondientes a distintas funciones puntuales de probabilidad y funciones de distribución de los modelos de probabilidad más habituales.

<b>Galería Multimedia Clásica</b>	
Imágenes	Soporta los formatos mas habituales: jpg, gif, ...
Video	Soporta formatos: mov, mp4, avi, mpg, ...
Audio	Soporta formatos: acc, mp3, aiff, wav,....
Gráficos	Genera gráficos de barras, sectores, nube de puntos,...
<b>Widgets</b>	
Repaso	Formulario de preguntas tipo test con diferentes estilos (textos e imágenes).
Galería	Una secuencia de imágenes por las que podemos desplazarlos, cada una con su propio pie de foto.
Presentaciones	Incorporar las presentaciones Power Point utilizadas habitualmente en clase al libro interactivo.
Imagen Interactiva	Permite ofrecer información sobre determinadas partes de un gráfico o imagen haciendo zoom y desplazándose hasta las etiquetas que introducamos desplegándolas con una descripción.
Objetos 3D	En el formato COLLADA, el mismo utilizado por Google para poblar de objetos <i>Google Earth</i> con la ayuda de los usuarios de <i>Google Sketchup</i> usado habitualmente en diseño e ingeniería.
Mapas, Videos YouTube, etc	En el portal <a href="http://www.classwidgets.com/">http://www.classwidgets.com/</a> hay disponibles nuevos <i>Widgets</i> que pueden añadirse a los materiales docentes.
html	Permite insertar archivos con extensión .wdgt creados con Dashcode, la herramienta de desarrollo de <i>Widgets</i> de Apple.

Tabla 1: Elementos multimedia que pueden incorporarse al iBook2

Una de las características más interesantes que ofrece *iBooks Author* para este tipo de objetos es la posibilidad de hacer que una imagen o video llene toda la pantalla del iPad, de manera que cualquier ilustración o video que se incorpore al proyecto del *iBook*, por pequeña que sea, una vez que el libro esté editado, en el iPad puede apreciarse tan grande como permita el tamaño de la pantalla. La imagen aparecerá en toda la pantalla simplemente haciendo doble clip sobre ella y volverá a su tamaño normal cuando se *pellizque* la imagen con dos dedos. La opción Formato Imagen Alfa Instantáneo permite además seleccionar un color o gama de colores de la imagen para hacerlos desaparecer de tal forma que la imagen quede perfectamente incrustada en el texto. En la figura 2 puede apreciarse como se incrusta una imagen de Gauss cuando se introduce en el texto la distribución Normal.

Igualmente es posible incorporar archivos de video (mp4, avi,...), bastará con arrastrar y soltar el archivo sobre el texto. En nuestro ejemplo esta opción se utilizó para incorporar videos con problemas resueltos por disponibles en YouTube (del profesor Juan Medina de la UPCT) sobre cálculo de probabilidades asociado a la distribución Normal. La Imagen 2 muestra la forma en la que aparece incrustado el video en el libro. Basta tocar sobre el video para que se despliegue en pantalla completa e inicie la reproducción del video.

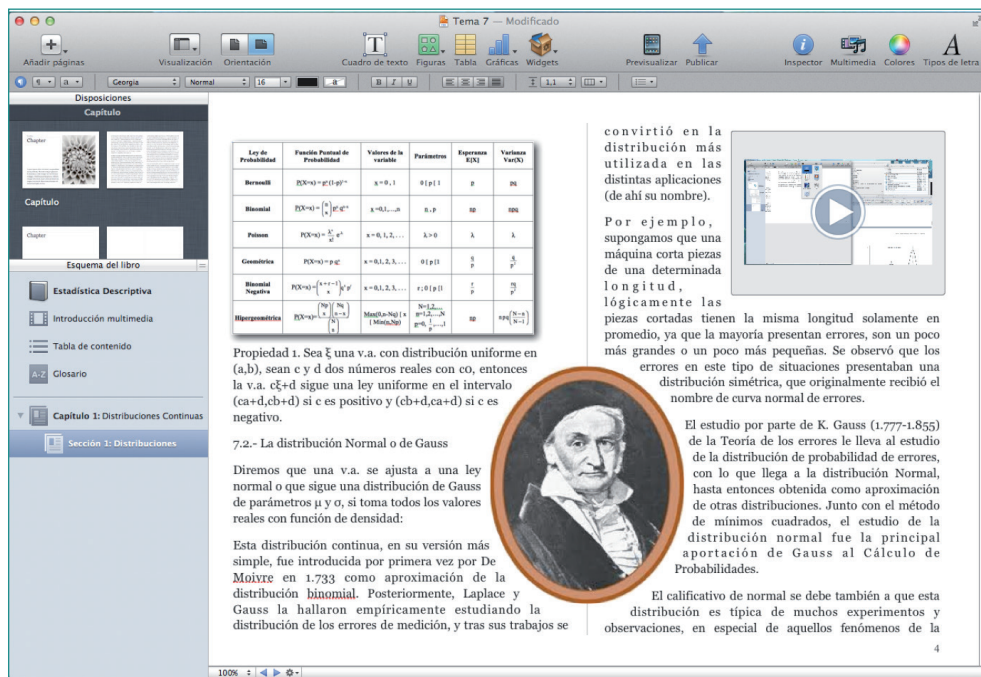


Figura 2.

Las presentaciones utilizadas en el aula para mostrar los contenidos de la asignatura y que habitualmente se elaboran con Power Point, pueden también ser incorporadas utilizando la opción *Widget*. El tratamiento es similar al de un video o una imagen, pudiendo colocarse la presentación incrustada en el texto con el tamaño deseado. Bastará un doble toque para ver la presentación en pantalla completa y con el habitual gesto de arrastrar el dedo por la pantalla podremos pasar las transparencias.

Una de las opciones más interesantes que ofrece *iBooks Author* para la elaboración de materiales docentes es la posibilidad de incorporar baterías de preguntas tipo test al libro. Estas series de preguntas, al igual que el resto de objetos, pueden incorporarse en cualquier parte del texto. Así, cuando el alumno lea el manual puede evaluar sus conocimientos seleccionando la respuesta que considere correcta. El procedimiento es muy simple: el alumno seleccionará la respuesta tocando en la opción elegida y podrá comprobar si su elección es la correcta en cada pregunta y seleccionar otra alternativa en el

caso de equivocarse. Alternativamente, el alumno puede contestar todas las preguntas y obtener el número de aciertos al final de la serie para conocer su nivel de comprensión de los textos.

Pero *iBooks Author* no sólo dispone de la posibilidad de elaborar las clásicas preguntas tipo test con varias alternativas, sino que permite utilizar varias formas de realizar la pregunta utilizando imágenes. Dos simples ejemplos utilizados en la asignatura de Estadística Empresarial II para mostrar el concepto de varianza asociado a una distribución normal pueden ilustrar estas alternativas. (i) Es posible introducir en la pregunta tipo test varias imágenes. El alumno debe tocar sobre la imagen correcta (Figura 3). (ii) También es posible incluir una imagen para que el alumno toque exactamente en la parte de la imagen señalada con un círculo que crea que sea la respuesta correcta (Figura 4). En la parte inferior del cuadro donde se presenta la pregunta dispone de la opción “Comprobar respuesta” para conocer si ha acertado la respuesta.

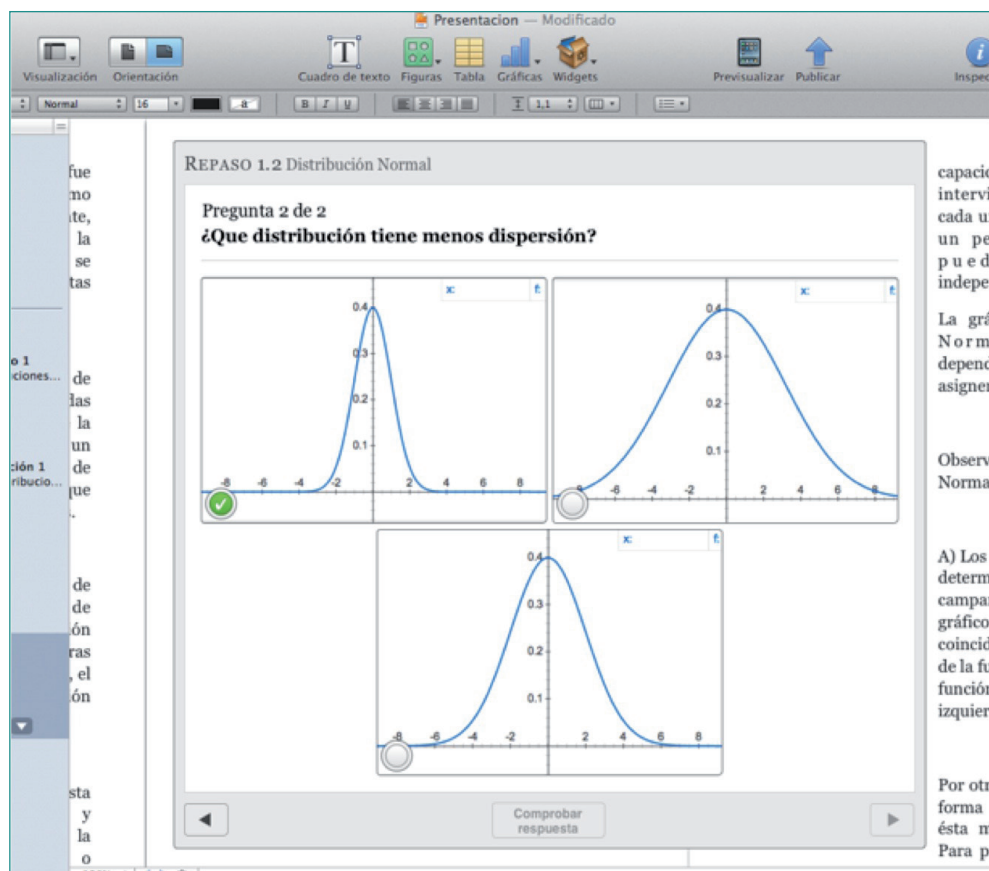


Figura 3.

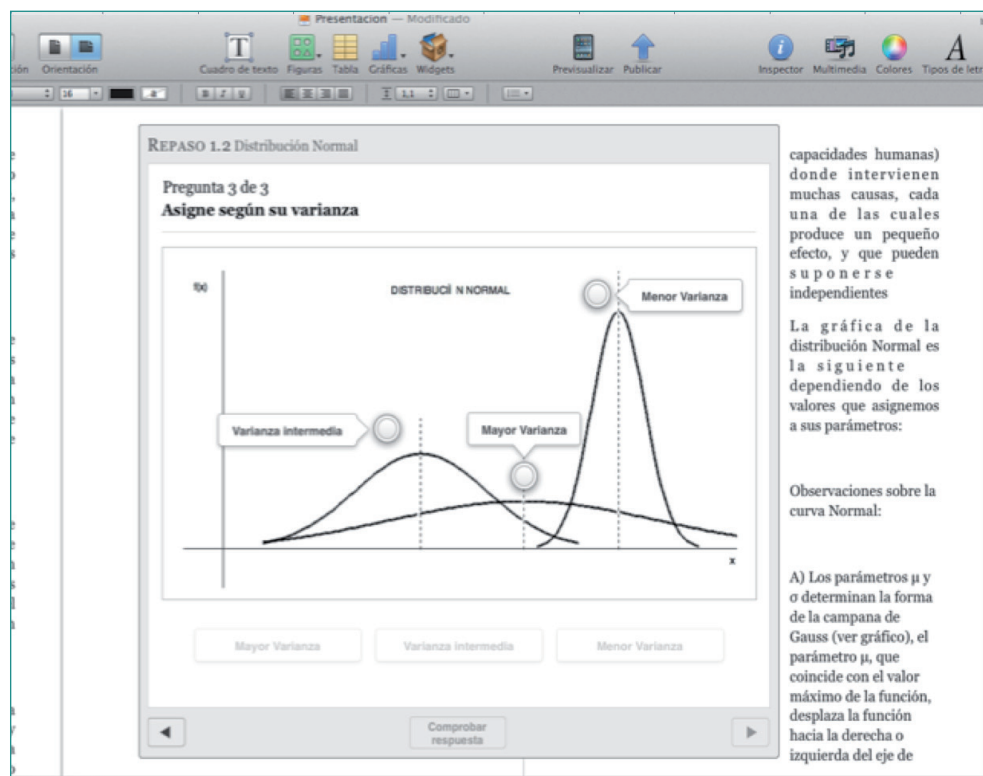


Figura 4.

Antes de cerrar el libro para su edición o durante la elaboración del manual, *iBooks Author* permite seleccionar la opción de orientación vertical. Esta opción nos mostrará la forma en que se visualizará el libro cuando el iPad adopte esta posición y permitirá adaptar todos los contenidos incrustados a este formato vertical.

El último paso es la pre-visualización del aspecto que tendrá el libro en un iPad. Para eso el usuario sólo necesita conectar el iPad a través de un cable USB al Mac y hacer seleccionar la opción "previsualizar" en la barra de herramientas. El libro aparecerá en la librería de iBooks como un volumen utilizable con el nombre "Prueba."

Finalmente es posible elaborar un glosario de términos de cada libro e incluso conectarlos con información en la red tipo Wikipedia que de forma tan habitual utilizan los alumnos como complemento formativo. Los alumnos también pueden subrayar el libro y escribir notas que permanecerán para segundas lecturas del manual.

## CONCLUSIONES

El libro, que siempre se ha considerado como una herramienta indispensable en cualquier proceso de formación, se encuentra en pleno proceso de transformación hacia un

nuevo modelo acorde con la era tecnológica en que vivimos. Desde hace unos años asistimos a la incorporación de las TICs en los procesos de enseñanza-aprendizaje: ordenadores en las aulas, pizarras digitales, páginas webs, etc, pero es justamente en el libro dónde seguimos sin tener un rumbo claro. Las tabletas están abriendo una nueva vía para introducir el libro digital, por tanto, adaptar nuestros materiales docentes a este nuevo formato es una oportunidad para incorporar una nueva herramienta al proceso de enseñanza-aprendizaje.

Son varias las ventajas que ofrece este nuevo formato en el que los profesores pueden presentar materiales docentes. En primer lugar ventajas derivadas del tipo de hardware (iPad), (i) la portabilidad. Es un elemento ligero que el alumno puede transportar desde su casa y utilizar en clase o bien los centros pueden disponer de aulas móviles que no impliquen desplazar la clase a un aula de informática. (ii) la autonomía. Una batería con gran duración evita tener que conectarlos con frecuencia. (iii) la simplicidad de uso. No es necesario tener conocimientos previos. (iv) la interactividad con su pantalla táctil que permite introducir una nueva forma de aprender conceptos *tocando*.

En segundo lugar, ventajas respecto al software de edición necesario para elaborar materiales docentes. La herramienta *iBooks Author*, es un software simple de utilizar y dota al docente de una herramienta con potencia para la edición de materiales docentes. Es fácil incorporar en el texto una gran variedad de materiales multimedia: imágenes interactivas, videos, presentaciones power point, preguntas tipo test, etc. Además, debido a su sencillez y manejo intuitivo, permite al alumno involucrarse en la creación de materiales docentes, haciéndole participar de manera activa en la asignatura y despertando su interés por la misma.

Son también diversos los inconvenientes que plantea el uso de estos materiales. En primer lugar para elaborar estos materiales docentes es imprescindible utilizar un Mac y no es posible hacerlo con el clásico PC. Además, el formato de *iBooks Author* no es estrictamente compatible con ePUB 3, por lo que los libros creados no funcionarán en otros lectores aunque es probable que en poco tiempo se permita la compatibilidad. Por último el precio es también un inconveniente, ya que los productos comercializados por Apple tienen un precio elevado, significativamente superior al de sus competidores.

La experiencia realizada en las asignaturas de Estadística Empresarial en el Grado de Administración y Dirección de Empresa dentro del proyecto de innovación docente que estamos desarrollando en la Facultad de CC de la Empresa han mostrado resultados prometedores con una excelente acogida de los alumnos y un alto nivel de participación. Nuestro siguiente objetivo es evaluar el beneficio derivado del uso de esta herramienta frente a las opciones clásicas para cuantificar la mejora del proceso de enseñanza- aprendizaje.

## AGRADECIMIENTOS

Los autores desean agradecer a la Facultad de CC de la Empresa de la Universidad Politécnica de Cartagena la financiación recibida para la realización de este proyecto de innovación educativa (Ref: AIN-2013/04). También desean dar las gracias a los evaluadores anónimos cuyos comentarios han mejorado sustancialmente este artículo.

## REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Apple (2012) iBooks Author. Create and publish amazing Multi-Touch books for iPad. Accesible en <http://www.apple.com/ibooks-author/>
- Ballesteros, C., Cabero, C., Llorens, MC. y Morales, JA. (2010). Usos del e-learning en las universidades andaluzas: estado de la situación y análisis de buenas prácticas. *Pixel-Bit. Revista de Medios y Educación*, 37,7-18.
- Coll, V. y Blasco, OM. (2009). Aprendizaje de la estadística económico-empresarial y uso de las TICs. *EDUTECE-E, Revista Electrónica de Tecnología Educativa*. 28
- Correa, JM. y Pons, JP. (2009). Nuevas tecnologías e innovación educativa *Revista de psicodidáctica*, 14(1),133-145.
- Favre, V. (2011). L'iPad en petite section Gadget ou aide aux apprentissages? *Animation et éducation*, 222, 34-36.
- Gómez, A. y Marín, LM. (2010). Distribuciones estadísticas: un ejemplo de uso de GeoGebra en enseñanza universitaria. *Epsilon. Revista de Educación Matemática*, 74, 33-42.
- Lucas, M. (2004). Elaboración de material didáctico con TIC para abordar la competencia matemática y la resolución de problemas aritméticos en Educación Primaria. *Consejería de Educación de la Junta de Castilla y León*.
- Pantoja, A. y Huertas, A. (2010). Integración de las TIC en la asignatura de tecnología de educación secundaria. *Pixel-Bit. Revista de Medios y Educación*, 37, 225 -237
- Plaza, B. y Pérez, M. (2012). Las tabletas en la educación: ¿implica un cambio en la metodología la introducción de un nuevo dispositivo? En *Revista Didáctica, Innovación y Multimedia*, 22, Recuperado el 26 de julio de 2012 en <http://dim.pangea.org/revistaDIM22/revista22beatrizplaza.htm>
- Ribes, X., Bonet, M., Guimerà I Orts, JA. Fernández-Quijada y D. Martínez-García, L. (2009). Multimedia e Interactividad en el material docente de soporte y su aplicación a los estudios de comunicación. EDUTECE. *Revista Electrónica de Tecnología Educativa*.
- SCOPEO (2011). M-learning en España, Portugal y América Latina, Noviembre de 2011. Monográfico SCOPEO, nº 3. Recuperado el 26 de julio de 2012, de <http://scopeo.usal.es/investigacion/monograficos/scopeom003>
- Temprado, J., Molina, J. G. y Sanmartín, J. (2012). Una selección de recursos de Internet para la enseñanza de la estadística "Estadisticadospuncero". *Epsilon. Revista de Educación Matemática*, 82, 89-96.

## «Comprar un caballo»: soluciones históricas a un tipo de problemas famosos

Vicente Meavilla Seguí

(meavilla@unizar.es)

Departamento de Matemáticas, Universidad de Zaragoza

Antonio M. Oller-Marcén

(oller@unizar.es)

Centro Universitario de la Defensa, Academia General Militar

**Resumen:** La resolución de problemas es una tarea a la que se han dedicado los matemáticos aficionados y profesionales a lo largo de los siglos. Algunos problemas se han mantenido durante mucho tiempo, ocupando secciones fijas en los manuales consagrados a la enseñanza de las Matemáticas. Por otro lado, las estrategias utilizadas para resolverlos han ido cambiando con el paso de los años. En este artículo presentamos un tipo de problemas clásicos («problemas de comprar un caballo») y el tratamiento que hicieron de él algunos matemáticos de primera fila y otros menos conocidos por el público no iniciado.

**Palabras clave:** Resolución de problemas, problemas de comprar un caballo, historia de las Matemáticas, historia de la Educación Matemática.

## «Buy a horse»: Historical solutions to sorts of problems famous

**Abstract:** Problem solving is one of the main tasks carried out both by amateur and professional mathematicians over the centuries. In some cases, particular problems have maintained for a long time, with fixed sections in textbooks being devoted to them. On the other hand, the solving strategies have changed over the years. In this paper we present one of such types of classical problems («problems about buying a horse») and the treatment given to these problems by some top mathematicians and also by others that may not be so known by the uninitiated.

**Keywords:** *Problem solving, problems about buying a horse, history of mathematics, mathematics education history*

## INTRODUCCIÓN

El *espacio básico de un problema* (es decir: el conjunto de todas las formas de resolverlo y de todos los pasos posibles dentro de cada una de ellas) constituye una de las herramientas fundamentales a la hora de enseñar o aprender Matemáticas en un contexto de resolución de problemas.

Resulta obvio que para desarrollar una enseñanza de este tipo, el profesor debe disponer de buenas colecciones de problemas y de un amplio catálogo de estrategias que permitan resolverlos. Es aquí donde la historia de las Matemáticas puede prestar una ayuda inestimable dado que en los textos de carácter matemático que se han escrito a lo largo de los tiempos se encuentran, por un lado, estupendas antologías de problemas y, por otro, repertorios de procedimientos de resolución cuyo interés didáctico es notable.

Parece, pues, que una revisión histórica de los manuales de contenido matemático facilitaría la elaboración de una selección de problemas y de estrategias de resolución que, puestas a disposición de profesores y alumnos, podría ayudar a estos cuando se enfrentasen a determinados problemas matemáticos.

Con la inclusión de *problemas históricos* y de *estrategias históricas de resolución*, tanto los profesores como los alumnos implicados en el proceso de enseñanza-aprendizaje pueden disfrutar de las siguientes ventajas:

Tener a su disposición a un buen número de tutores (autores, matemáticos) de otras épocas (*los tutores históricos*) que pueden ayudarles en las situaciones problemáticas a las que se enfrenten.

Disponer de colecciones de problemas que han perdurado a lo largo de los tiempos.

Conocer antiguos procedimientos de resolución que pueden ampliar el espacio básico de un problema.

Comparar los procedimientos de resolución actuales con los antiguos y valorar las herramientas matemáticas de las que disponen en la actualidad.

### «PROBLEMAS DE COMPRAR UN CABALLO»

Cuatro compran una cosa. El primero dice a los otros tres que le den  $\frac{1}{2}$ , el segundo pide a los otros tres  $\frac{1}{3}$ , el tercero  $\frac{1}{4}$ , el cuarto pide  $\frac{1}{5}$  a todos. ¿Cuánto tiene cada uno y cuánto vale la cosa?

En el problema anterior, extraído de un impreso español escrito por Gaspar de Texeda en 1546, cuatro socios quieren comprar una cosa pero ninguno tiene bastante dinero para comprarla. Por esto, cada uno toma una fracción de la suma del capital de los otros y así puede comprarla.

Cuestiones similares a la anterior se introdujeron en la Europa medieval de la mano de Leonardo de Pisa «Fibonacci» (*Liber Abaci*, 1202, capítulos 12 y 13). En ellas la cosa que querían comprar los hombres era un caballo (*de hominibus equum emare volentibus*); por este motivo, estos asuntos se conocen como «problemas de comprar un caballo».

## PRIMEROS ANTECEDENTES: ALGUNOS PROBLEMAS CHINOS Y DOS EJEMPLOS DE DIOFANTO

Como sucede con la práctica totalidad de los problemas que aparecen en textos aritméticos del Renacimiento, podemos rastrear el origen del problema anterior hasta bastantes siglos atrás.

En nuestro caso, los ejemplos más antiguos encontrados corresponden a textos chinos y a la aritmética de Diofanto. En ellos no se hace referencia a la compra de caballos; sin embargo, un análisis detenido de los mismos hace evidentes las similitudes. En concreto el contexto general es el de varias personas que poseen una cierta cantidad de dinero de forma que si cada uno toma una fracción del dinero de uno o varios de sus compañeros, todos tienen la misma cantidad.

### PROBLEMAS CHINOS

En el capítulo 8 del *Chiu-Chang Suan-Shu* (Arte de calcular en nueve capítulos), obra anónima escrita en la época Han (periodo comprendido entre el 206 a. C. y el 221 d. C.), encontramos el problema siguiente:

Hay dos personas A y B. Cada una tiene una cantidad desconocida de monedas. La persona A, tomando la mitad de las monedas de B, tiene 50 monedas. La persona B, tomando las dos terceras partes de las monedas de A, también tiene 50 monedas. Dime: ¿cuántas monedas tiene cada una?

Respuesta: A tiene  $37\frac{1}{2}$  monedas. B tiene 25 monedas.

Método: Resuelve mediante el método de la matriz; suma y resta (Kangshen et al., 1999, p. 411).

El problema se resuelve utilizando un procedimiento análogo al «método de Gauss» para resolver sistemas de ecuaciones lineales.

$$\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 1 \\ 1 & \frac{1}{2} \\ 50 & 50 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \\ 150 & 100 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 1 \\ 50 & 100 \end{pmatrix} \Rightarrow B = 25 \Rightarrow A = 37\frac{1}{2}$$

En el *Sunzi suanjing* (Cap. 3, problema 28), texto chino del siglo IV, aparece un problema casi idéntico que también se resuelve por el método de Gauss

A y B tienen una cantidad desconocida de monedas. La persona A, tomando la mitad de las monedas de B, tiene 48 monedas. La persona B, tomando las dos terceras partes de las monedas de A, también tiene 48 monedas. Dime: ¿cuántas monedas tienen A y B, respectivamente?

Respuesta: A tiene 36 monedas y B tiene 24 (Kangshen et al., 1999, p. 411).

Por otro lado, el *Zhang Qiujian suanjing* (Cap. 3, problema 4), manual del siglo V, contiene el siguiente problema resuelto por el método de Gauss (Kangshen et al., 1999, p. 411):

Hay tres personas A, B y C, cada una con un número desconocido de monedas. A dice: si tomo  $\frac{2}{3}$  de las monedas de B y  $\frac{1}{3}$  de las monedas de C, entonces tendré 100 monedas. B dice: si tomo  $\frac{2}{3}$  de las monedas de A y  $\frac{1}{2}$  de las monedas de C, entonces tendré 100 monedas. C dice: si tomo  $\frac{2}{3}$  de las monedas de A y  $\frac{2}{3}$  de las monedas de C, entonces tendré 100 monedas. Dime: ¿cuántas monedas tienen A, B y C?

Respuesta: A tiene 60 monedas, B tiene 45 y C tiene 30.

## EJEMPLOS DE DIOFANTO

La primera noticia, que sepamos, relativa a los «problemas de comprar un caballo» en la antigua Grecia, se encuentra en el Libro I (problemas 24 y 25) de la *Aritmética* de Diofanto de Alejandría<sup>1</sup> (Heath, 1910). Diofanto, fiel a la concepción puramente abstracta de la matemática griega, prescinde de todo contexto a la hora de presentar los enunciados. Así, frente a los ejemplos chinos anteriores, en los que se habla de personas que tienen dinero y que lo toman prestando de sus compañeros, en este caso el autor se referirá simplemente a números.

El problema 24 del texto de Diofanto dice lo siguiente:

Encontrar tres números tales que, si cada uno recibe una fracción dada de la suma de los otros dos, todos los resultados son iguales.

Para «resolver» este problema indeterminado, Diofanto admite que el primer número recibe la tercera parte de la suma de los dos restantes, el segundo recibe la cuarta parte de la suma de los otros dos y el tercero la quinta parte de la suma de los dos restantes. Por otro lado asume que el primer número es  $x$  [= *aritm*]. Por último, como la suma del segundo y tercero debe dividirse por tres, toma esta suma igual a 3. Con esto, se tiene que:

$$\begin{aligned} \text{Suma de los tres números} &= x + 3 \\ \text{Primero} + \frac{1}{3} (\text{segundo} + \text{tercero}) &= x + 1 \end{aligned}$$

1. ca. 200 – ca. 284.

Por tanto:  $\text{Segundo} + \frac{1}{4}(\text{primero} + \text{tercero}) = x + 1 \Rightarrow$   
 $\Rightarrow 4 \cdot \text{segundo} + \text{primero} + \text{tercero} = 4x + 4 \Rightarrow$   
 $\Rightarrow 3 \cdot \text{segundo} + \text{primero} + \text{segundo} + \text{tercero} = 4x + 4 \Rightarrow$   
 $\Rightarrow 3 \cdot \text{segundo} + x + 3 = 4x + 4 \Rightarrow 3 \cdot \text{segundo} = 3x + 1 \Rightarrow$   
 $\Rightarrow \text{Segundo} = x + \frac{1}{3}$

Además:  $\text{Tercero} + \frac{1}{5}(\text{primero} + \text{segundo}) = x + 1 \Rightarrow$   
 $\Rightarrow 5 \cdot \text{tercero} + \text{primero} + \text{segundo} = 5x + 5 \Rightarrow$   
 $\Rightarrow 4 \cdot \text{tercero} + \text{primero} + \text{segundo} + \text{tercero} = 5x + 5 \Rightarrow$   
 $\Rightarrow 4 \cdot \text{tercero} + x + 3 = 5x + 5 \Rightarrow 4 \cdot \text{tercero} = 4x + 2 \Rightarrow$   
 $\Rightarrow \text{Tercero} = x + \frac{1}{2}$

En consecuencia:

$$x + \left(x + \frac{1}{3}\right) + \left(x + \frac{1}{2}\right) = x + 3 \Rightarrow x = \frac{13}{12} \Rightarrow \begin{cases} \text{Segundo} = \frac{17}{12} \\ \text{Tercero} = \frac{19}{12} \end{cases}$$

De donde, eliminando los denominadores, se obtiene la siguiente solución entera del problema propuesto:

$$\text{Primer número} = 13, \text{Segundo número} = 17, \text{Tercer número} = 19$$

Por su parte, el problema número 25 dice lo siguiente:

Encontrar cuatro números tales que, si cada uno recibe una fracción dada de la suma de los otros tres, los cuatro resultados son iguales<sup>2</sup>.

Como en el caso anterior, para «resolver» este problema indeterminado, Diofanto admite que el primer número recibe la tercera parte de la suma de los tres restantes, el segundo recibe la cuarta parte de la suma de los otros tres, el tercero la quinta parte de la suma de los tres restantes y el cuarto recibe la sexta parte de la suma de los otros tres. Por otro lado asume que el primer número es  $x$  [= *aritmo*]. Por último, como la suma del segundo, tercero y cuarto debe dividirse por tres, toma esta suma igual a 3. A partir de estas restricciones, procediendo de forma similar a la del problema 24, se obtiene la siguiente solución entera:

2. Atendiendo a la época en que pudo publicarse el *Chiu-Chang Suan-Shu*, al periodo en que se escribió la *Aritmética* de Diofanto, y a la similitud entre el problema 10 del *Chiu-Chang Suan-Shu*, y los problemas 24 y 25 de la *Aritmética*, parece natural sospechar que hubo, o pudo haber, alguna transmisión de ideas entre dos culturas tan distintas y distantes como la china y la griega.

Primer número = 47, Segundo número = 77  
Tercer número = 92, Cuarto número = 101

Los procedimientos diofánticos para obtener una solución de los problemas 24 y 25 se pueden generalizar sin más que tomar  $y + z = 3\alpha$  e  $y + z + t = 3\beta$  (siendo  $y$  el segundo número,  $z$  el tercero y  $t$  el cuarto) respectivamente. Con esto, siguiendo el discurso de Diofanto, las infinitas soluciones de los problemas 24 y 25 vienen dadas por:

$$x = \frac{13\alpha}{12}, y = \frac{17\alpha}{12}, z = \frac{19\alpha}{12}$$
$$x = \frac{47\beta}{90}, y = \frac{77\beta}{90}, z = \frac{92\beta}{90}, t = \frac{101\beta}{90}$$

## CABALLOS ÁRABES EN EL ÁLGEBRA DE AL-KARAGI

La *Aritmética* de Diofanto fue traducida del griego al árabe por Qusta ibn Luqa al-Balabakki (820 – 912). De este modo se puso a disposición de los estudiosos árabes uno de los libros de álgebra más influyentes de la historia de las Matemáticas.

Entre los matemáticos en cuya obra se aprecia la influencia de Diofanto se encuentra Abu Bakr Muhammad ibn al-Hasan al-Karagi (953 – ca. 1029).

En su tratado de álgebra *Kitab al-Fajri*, encontramos un problema<sup>3</sup> (Woepcke, 1853) que coincide con un caso particular del problema 24 de Diofanto. Nos serviremos del simbolismo moderno para describir el proceso seguido por el matemático árabe.

$$\begin{cases} x + \frac{y+z}{3} = 20 \Rightarrow y+z = 60 - 3x & [1] \\ y + \frac{z+x}{4} = 20 \Rightarrow 4y+z = 80 - x & [2] \\ z + \frac{x+y}{5} = 20 \Rightarrow 5z+y = 100 - x & [3] \end{cases}$$
$$[2] - [1] \Rightarrow 3y = 20 + 2x \Rightarrow y = \frac{20}{3} + \frac{2}{3}x$$

Sustituyendo esta expresión de  $y$  en [1], resulta:

$$\frac{20}{3} + \frac{2}{3}x + z = 60 - 3x \Rightarrow z = 60 - 3x - \frac{20}{3} - \frac{2}{3}x \Rightarrow z = \frac{160}{3} - \frac{11}{3}x$$
$$[3] - [1] \Rightarrow 4z = 40 + 2x \Rightarrow 10 + \frac{x}{2} = z = \frac{160}{3} - \frac{11}{3}x \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{x}{2} + \frac{11x}{3} = \frac{160}{3} - 10 \Rightarrow x = \frac{52}{5}$$

3. En la edición de Woepcke, dicho problema carece de enunciado verbal.

A partir de estos resultados, se obtiene que:

$$y = \frac{68}{5}, \quad z = \frac{76}{5}$$

El autor añade:

Si los segundos miembros de las ecuaciones propuestas son desconocidos<sup>4</sup>, se les puede asignar un valor arbitrario y se procede como antes; también se les puede dar un valor desconocido y poner  $x + z = 4$  para que se pueda tomar la cuarta parte de esta suma, o igual a otro número cualquiera.

Si se toma  $x + z = 4$ , se tiene que:

$$z + \frac{x + y}{5} = y + 1 \Rightarrow 4y + 5 = x + 5z$$

Como  $x + z = 4$ , resulta:

$$4y + 1 + x + z = x + 5z \Rightarrow 4y + 1 = 4z \Rightarrow z = y + \frac{1}{4} \quad [4]$$

Entonces:  $x = 4 - z = 4 - \left(y + \frac{1}{4}\right) = \frac{15}{4} - y \quad [5]$

Además:  $x + \frac{y+z}{3} = y + 1$

Por tanto, sustituyendo las expresiones [4] y [5] en la igualdad anterior, se obtiene que:

$$y = \frac{17}{8} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{13}{8} \\ z = \frac{19}{8} \end{cases}$$

Por último, el autor añade que  $x = 13, y = 17, z = 19$  también es solución de las ecuaciones propuestas.

## MÁS CABALLOS EN EL LIBER ABACI DE LEONARDO DE PISA

En el *Liber Abaci*, Fibonacci dedica la quinta parte del capítulo 12 a estudiar problemas sobre “la compra de caballos entre socios de acuerdo a una proporción dada” (Sigler, 2002, p. 337). El tratamiento que Leonardo da a este tipo de problemas es exhaustivo.

4. En este caso, el problema que resulta es indeterminado y su traducción al simbolismo algebraico viene dada por el sistema de dos ecuaciones lineales con tres incógnitas siguiente:

$$x + \frac{y+z}{3} = y + \frac{z+x}{4} = z + \frac{x+y}{5}$$

Aparecen un total de 33 problemas (en tres de ellos no aparecen caballos, sino vasijas, silos o un barco, pero la esencia es la misma) y 30 de ellos se resuelven con todo detalle (en los otros 3 tan solo se indica la solución).

Esencialmente encontramos 11 tipos de problemas diferentes, que se detallan a continuación. En todos ellos se pide siempre calcular el dinero de cada hombre así como el precio del caballo (o los caballos, cuando hay más de uno).

**Tipo 1:**  $n$  hombres compran 1 caballo. Cada uno de los hombres toma prestada una fracción dada del dinero del siguiente cíclicamente (el último lo coge del primero), de tal modo que todos pueden comprar el caballo.

Este problema aparece para  $n = 2, 3, 4, y 5$ . Este tipo de problema siempre tiene infinitas soluciones (aunque Fibonacci no lo indica explícitamente) salvo que se fije el precio del caballo, en cuyo caso la solución es única (Leonardo lo hace en un caso para  $n = 2$ ).

**Tipo 2:**  $n$  hombres compran  $n$  caballos. Cada uno de los hombres toma prestada una fracción dada del dinero del siguiente cíclicamente, de tal modo que así el  $k$ -ésimo hombre puede comprar el  $k$ -ésimo caballo. Se conoce la diferencia de precios (creciente) entre cada caballo y el siguiente.

Este problema aparece para  $n = 2, 3, 4 y 5$ . Este tipo de problema tiene infinitas soluciones, cosa que Fibonacci indica en el transcurso de la resolución del primer ejemplo para  $n = 2$ .

**Tipo 3:**  $n$  hombres compran 1 caballo. Cada uno de ellos toma una fracción dada del dinero que tienen entre los dos siguientes cíclicamente, de tal modo que todos pueden comprar el caballo.

Este problema aparece sólo para  $n = 4$ .

**Tipo 4:**  $n$  hombres compran 1 caballo. Cada pareja (consecutiva) de hombres toma una fracción dada del dinero del siguiente cíclicamente, de tal modo que cada una de esas parejas puede comprar el caballo.

Este problema aparece para  $n = 3 y 4$ .

**Tipo 5:**  $n$  hombres compran 1 caballo. Cada tres hombres (consecutivos) toman una fracción dada del dinero del siguiente cíclicamente, de tal modo que cada uno de esos tríos puede comprar el caballo.

Este problema sólo aparece para  $n = 5$ .

**Tipo 6:**  $n$  hombres compran 1 caballo. Cada uno de ellos toma una fracción dada del dinero que tienen todos los demás juntos, de tal modo que todos pueden comprar el caballo.

Este problema aparece para  $n = 3, 4 y 5$ .

**Tipo 7:**  $n$  hombres compran 1 caballo. Cada pareja (consecutiva) de hombres toma una fracción dada del dinero que tienen todos los demás juntos, de tal modo que cada una de esas parejas puede comprar el caballo.

Este problema aparece para  $n = 4 y 5$ . Este tipo de problemas no tiene por qué tener solución. De hecho el caso  $n = 4$  carece de ella, como demuestra el propio Fibonacci.

**Tipo 8:**  $n$  hombres compran 1 caballo. Cada tres hombres (consecutivos) toman una fracción del dinero que tienen todos los demás juntos, de tal modo que cada uno de esos tríos puede comprar el caballo.

Este problema aparece para  $n = 7$ , con la indicación de que sí tiene solución.

**Tipo 9:**  $n$  hombres compran  $n$  caballos. Cada uno de ellos toma una fracción del dinero de todos los demás, de tal modo que así el  $k$ -ésimo hombre puede comprar el  $k$ -ésimo caballo. Se conoce la diferencia (creciente) de precios entre cada caballo y el siguiente.

Este problema aparece para  $n = 2, 3$  y  $4$ .

**Tipo 10:**  $n$  hombres compran 1 caballo. Cada uno de ellos toma una fracción (distinta) del dinero de cada uno de los otros, de tal modo que todos pueden comprar el caballo.

Este problema aparece para  $n = 3$  y  $4$ .

**Tipo 11:**  $n$  hombres compran 1 caballo. Cada pareja (consecutiva) de hombres toma una fracción dada del dinero que tienen los dos siguientes juntos, cíclicamente, de tal modo que cada una de esas parejas puede comprar el caballo.

Este problema aparece únicamente para  $n = 5$ .

Frente a esta amplia variedad de problemas, los métodos de resolución utilizados por Fibonacci son escasos. El autor resuelve estos problemas esencialmente de dos formas diferentes. En el capítulo 12 utiliza el llamado «método de la proporción» mientras que en el capítulo 13 recurre al método de dos falsas posiciones.

### El método de la proporción

Este método consiste, esencialmente, en ir manipulando los datos del problema para obtener que una fracción del dinero de cada persona es igual a una fracción del dinero de la siguiente. Una vez hecho esto se busca cada pareja de cantidades con cuidado para que los valores obtenidos en cada caso sean consistentes.

Veamos un ejemplo:

Hay tres hombres. El primero toma del segundo  $1/3$  de sus besantes. El segundo toma del tercero  $1/4$  y el tercero toma del primero  $1/5$ . Se afirma que cada uno de ellos puede así comprar el caballo.

Vamos a presentar de forma abreviada (pues Fibonacci es bastante prolijo y algo repetitivo en sus explicaciones) cómo se resuelve este problema por el citado método. Se comienza observando lo siguiente:

$$\text{primero} + \frac{1}{3} \text{segundo} = \text{segundo} + \frac{1}{4} \text{tercero} \Rightarrow \text{primero} = \frac{2}{3} \text{segundo} + \frac{1}{4} \text{tercero} [1]$$

$$\text{segundo} + \frac{1}{4} \text{tercero} = \text{tercero} + \frac{1}{5} \text{primero} \Rightarrow \text{segundo} = \frac{3}{4} \text{tercero} + \frac{1}{5} \text{primero} [2]$$

$$\text{tercero} + \frac{1}{5} \text{primero} = \text{primero} + \frac{1}{3} \text{segundo} \Rightarrow \text{tercero} = \frac{4}{5} \text{primero} + \frac{1}{3} \text{segundo} [3]$$

$$\text{De [3] resulta que: } \frac{1}{4} \text{tercero} = \frac{1}{5} \text{primero} + \frac{1}{12} \text{segundo.}$$

Y si esto se sustituye es [1] tenemos:

$$\text{primero} = \frac{2}{3} \text{segundo} + \frac{1}{5} \text{primero} + \frac{1}{12} \text{segundo} \Rightarrow \frac{4}{5} \text{primero} = \frac{3}{4} \text{segundo}$$

Así que hay que encontrar dos números de forma que  $\frac{4}{5}$  del primero sean  $\frac{3}{4}$  del segundo. Fibonacci encuentra 15 para el primero y 16 para el segundo.

Razonando como antes, pero sustituyendo [2] en [1] se tiene que:

$$\frac{13}{15} \text{primero} = \frac{3}{4} \text{tercero}$$

Por lo que ahora el autor busca dos números tales que  $\frac{13}{15}$  del primero sean  $\frac{3}{4}$  del tercero. En este caso encuentra 45 para el primero y 52 para el tercero.

Para terminar, se deben «ajustar» estas soluciones. En el paso anterior se encontraron 15 y 16 como soluciones particulares, pero habrían servido cualesquiera múltiplos de dichos valores. Como ahora se ha obtenido 45 para el primer hombre, está claro que se debe multiplicar por 3 la solución anterior y se obtiene la solución:

Primero: 45 besantes, Segundo: 48 besantes, Tercero: 52 besantes.

Una vez conocido el dinero que tiene cada hombre es trivial obtener el precio del caballo, que en este caso resulta ser de 61 besantes.

El ejemplo presentado es un problema de tipo 1, con 3 hombres; es decir, uno de los casos más sencillos. Sin embargo, si se observa el método detenidamente, no resulta difícil entender cómo puede utilizarse en el resto de casos.

## Una solución general para los problemas de tipo 1

Pese a que el método que hemos descrito en el apartado anterior resulta sumamente útil a la hora de resolver los problemas planteados, Fibonacci presenta un método «iterativo» general para dar la solución a problemas del tipo 1 antes descritos.

Consideremos el siguiente enunciado general:

Supongamos que  $n$  hombres desean comprar un caballo de tal forma que el primer hombre toma prestado  $\frac{a_1}{b_1}$  del dinero del segundo, el segundo toma prestado  $\frac{a_2}{b_2}$  del dinero del tercero y así sucesivamente hasta que el  $n$ -ésimo hombre toma prestado  $\frac{a_n}{b_n}$  del dinero del primero y haciendo esto, todos ellos tienen la cantidad necesaria para comprar el caballo.

Para resolver este problema Fibonacci da el siguiente método: Para cada  $k \in \{1, \dots, n\}$  se definen los siguientes números:

$$\begin{aligned}x_k^{(1)} &= (b_k - a_k)b_{k+1} + a_k a_{k+1}, \\x_k^{(r)} &= x_k^{(r-1)}b_{k+r} + (-1)^{r+1} a_k a_{k+1} \dots a_{k+r}, \text{ si } 2 \leq r \leq n-2, \\x_k^{(n-1)} &= x_k^{(n-2)}b_{k+n-1}.\end{aligned}$$

Donde hay que considerar que los subíndices se toman módulo  $n$ ; es decir,  $a_{n+3}$  es  $a_3$ , etc... Obsérvese que se van construyendo paso a paso iterativamente.

Entonces Fibonacci afirma que la cantidad de dinero que posee el hombre  $k$ -ésimo es exactamente  $x_k^{(n-1)}$ . Además, el valor del caballo resulta ser:

$$C = b_1 b_2 \dots b_k + (-1)^{n+1} a_1 a_2 \dots a_k.$$

Evidentemente esta es sólo una de las infinitas soluciones que, en general, poseen este tipo de problemas, pero es totalmente correcta. La demostración rigurosa de este hecho la dejamos en manos del lector, su relativa complejidad le hará apreciar aún más su valor.

## Una solución general para los problemas de tipo 6

El anterior no es el único método general dado por Fibonacci para resolver uno de los tipos de problemas considerados. Los problemas de tipo 6 también son merecedores de un procedimiento específico. Veámoslo.

Sea el siguiente enunciado general:

Supongamos que  $n$  hombres desean comprar un caballo de tal forma que el primer hombre toma prestado  $\frac{a_1}{b_1}$  del dinero de los demás, el segundo toma prestado  $\frac{a_2}{b_2}$  del dinero de los demás y así sucesivamente hasta que el  $n$ -ésimo hombre toma prestado  $\frac{a_n}{b_n}$  del dinero del resto, de modo que, haciendo esto, todos ellos tienen la cantidad necesaria para comprar el caballo.

En este contexto, Fibonacci efectúa los siguientes cálculos:

$$\begin{aligned}D &= \text{m. c. m.}(b_1 - a_1, \dots, b_n - a_n), \\S &= \sum_{i=1}^n \frac{D b_i}{b_i - a_i}.\end{aligned}$$

Una vez hecho esto, el autor afirma:

- $S$  es la suma del dinero de todos los hombres implicados.
- El precio del caballo es  $C = S - (n-1)D$ .

- El dinero del  $k$ -ésimo hombre es  $x_k = C - \frac{(n-1)Da_k}{b_k - a_k}$ .

Nuevamente dejaremos en manos del lector la ardua tarea de demostrar la corrección de estas fórmulas.

## El método de dos falsas posiciones

La mayor parte de los problemas de compra de caballos, en concreto 28 del total de 33, se presentan en el capítulo 12 y son resueltos según alguno de los tres métodos anteriores. Sin embargo, en el capítulo 13, que Fibonacci dedica al método de falsa posición (que él llama *elchataym*<sup>5</sup>) se revisan problemas que ya han sido resueltos en capítulos anteriores por otro tipo de métodos puesto que, como dice el propio Leonardo en el título del capítulo “con este método casi todos los problemas matemáticos son resueltos”.

En el capítulo se presenta y se utiliza tanto la regla de una falsa posición como la de dos falsas posiciones. Los problemas de comprar caballos, por su forma, se circunscriben a este segundo tipo. En Meavilla (2005) puede leerse una amplia discusión sobre el uso del método de dos falsas posiciones para resolver problemas similares al que nos ocupa, por lo que no nos detendremos en describir este método de resolución.

## LOS «PROBLEMAS DE COMPRAR UN CABALLO» EN LA OBRA DE FR. JUAN DE ORTEGA

Fray Juan de Ortega, palentino de origen y dominico adscrito a la provincia de Aragón, enseñó Aritmética y Geometría en España e Italia durante muchos años privada y públicamente (Rey Pastor, 1926), publicó en 1512 uno de los libros de aritmética más notables del Siglo de Oro español. Nos referimos a la *Conpusicion de la arte de la arismetica y juntamente de geometria*<sup>6</sup>, que alcanzó diversas ediciones en 1515, 1552, 1534, 1537, 1542, 1552, 1563 y 1612.

En la sección consagrada a la falsa posición, Ortega presenta ocho problemas del tipo «comprar un caballo».

Los tres primeros son del tipo 6 ( $n = 3, 4, y 5$ , respectivamente), el cuarto también es del tipo 6 ( $n = 3$ ) con el precio del caballo [= pieza de seda] conocido, el quinto es del tipo 1 ( $n = 2$ ), el sexto es del tipo 1 ( $n = 2$ ) con el precio del caballo [= paño] conocido, el séptimo es del tipo 1 ( $n = 3$ ), y el octavo es del tipo 1 ( $n = 3$ ) con el precio del caballo [= casas] conocido.

A modo de ejemplo, vamos a considerar la resolución de los problemas primero y cuarto.

En cuanto al problema 1, podemos leer (fols. 171r – 171v):

5. El nombre árabe original es *hisab al-Khataayn*.

6. Este es el título que aparece en la edición de 1512. En otras ediciones el título es *Tractado subtilissimo d[e] arismetica y geometria* con el que se conoce la aritmética de Ortega.

Tres mercaderes quieren comprar una pieza de brocado cada uno por sí. Porque a ninguno de ellos le basta su caudal, dice el uno a los dos que le den la mitad de los dineros que ellos tienen y con lo que él tiene comprará la pieza de brocado. El segundo dice a los otros dos que le den la tercera parte de los ducados que tienen y con los que él tiene también la comprará. El tercero dice que le den los otros dos la cuarta parte de lo que tienen y con los dineros que él tiene también comprará la pieza. Demando: ¿cuántos ducados tenía cada uno y cuánto valía la pieza?

Respuesta.

Harás así. Porque el uno demanda la mitad, y el otro el tercio, y el otro el cuarto, busca un número donde quepan todos estos tres números  $\frac{1}{2}$   $\frac{1}{3}$   $\frac{1}{4}$  y hallarás que el menor número donde todos pueden caber es 12. Pues nota que porque el primero demanda la mitad, tú doblarás los 12, y serán 24. Asimismo, porque el segundo demanda el tercio, tú añadirás a los mismos 12 su mitad, que son 6, y montarán 18. Asimismo, por el que demanda el cuarto, tú tomarás el tercio de 12, que son 4, y lo añadirás a los mismos 12, y serán 16. Después, suma todos estos tres números, como son 24, 18 y 16, y montarán 58, los cuales parte por uno menos que son los hombres, como por 2, y vendrá a la partición 29. De los 29 quita el número donde cupieron los tres números, que son los 12, y quedarán 17, y tantos ducados dirás que valía la pieza. Para saber cuántos ducados tenía el primero, quita los 24 de los 29 y quedarán 5, y tantos ducados dirás que tenía. Asimismo, quita los 18 de los 29 y quedarán 11, y tantos ducados tenía el segundo. Asimismo, quita los 16 de los 29 y quedarán 13 ducados, y tantos ducados tenía el tercero [...].

Desconocemos cómo obtuvo Ortega la regla de resolución; sin embargo, sospechamos que se ajusta al modelo siguiente, que presentamos haciendo uso de simbolismo moderno.

Sean  $x, y, z$  los ducados del primer, segundo y tercer mercader, respectivamente. Sea  $P$  el precio, en ducados, de la pieza de brocado. Entonces, la traducción simbólica del enunciado es:

$$[*] \begin{cases} x + \frac{1}{2}(y + z) = P \\ y + \frac{1}{3}(x + z) = P \\ z + \frac{1}{4}(x + y) = P \end{cases}$$

Así pues:

$$\begin{cases} x + y + z = P + \frac{1}{2}(y + z) \\ x + y + z = P + \frac{2}{3}(x + z) \Rightarrow P + \frac{1}{2}(y + z) = P + \frac{2}{3}(x + z) = P + \frac{3}{4}(x + y) \Rightarrow \\ x + y + z = P + \frac{3}{4}(x + y) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}(y + z) = \frac{2}{3}(x + z) = \frac{3}{4}(x + y) = \lambda$$

Dando valores a  $\lambda$  se obtienen las infinitas soluciones del sistema de ecuaciones [\*]. Para el valor concreto de  $\lambda = 12$  se tiene:

$$\frac{1}{2}(y+z) + \frac{1}{2}(y+z) = 12 + 12 = 24 = y+z$$

$$\frac{2}{3}(x+z) + \frac{1}{3}(x+z) = \frac{2}{3}(x+z) + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}(x+z) = 12 + 6 = 18 = x+z$$

$$\frac{3}{4}(x+y) + \frac{1}{4}(x+y) = \frac{3}{4}(x+y) + \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4}(x+y) = 12 + 4 = 16 = x+y$$

Es decir:

$$\begin{cases} y+z=24 \\ x+z=18 \\ x+y=16 \end{cases} \Rightarrow 2(x+y+z) = 58 \Rightarrow x+y+z = 29$$

Y, por tanto:

$$P = x+y+z - \frac{1}{2}(y+z) = 29 - 12 = 17 \text{ ducados}$$

$$x = x+y+z - (y+z) = 29 - 24 = 5 \text{ ducados}$$

$$y = x+y+z - (x+z) = 29 - 18 = 11 \text{ ducados}$$

$$z = x+y+z - (x+y) = 29 - 16 = 13 \text{ ducados}$$

El problema 4 del mismo texto posee el siguiente enunciado [fols. 173r – 173v]:

Tres mercaderes quieren comprar una pieza de seda y, porque ninguno de ellos por sí la puede comprar, dice el primero a los dos que le den la tercera parte de lo que tienen y que con los ducados que él tiene comprará la pieza. Nota que la pieza valía 100 ducados. El segundo dice a los otros dos que le den la cuarta parte de lo que tienen y que con lo que él tiene tendrá también 100 ducados para comprar la pieza. El tercero dice a los otros dos que le den la quinta parte de lo que tienen y que también comprará la pieza con lo que tiene. Demando: ¿cuántos ducados tenía cada uno?

La resolución de Ortega, en versión original, es algo prolija y repetitiva. Por ello, presentamos una versión moderna que se ajusta al discurso del fraile palentino. Sean  $x, y, z$  los ducados del primer, segundo y tercer mercader, respectivamente. Entonces:

$$\begin{cases} x + \frac{1}{3}(y+z) = 100 \\ y + \frac{1}{4}(x+z) = 100 \\ z + \frac{1}{5}(x+y) = 100 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y+z = 100 + \frac{2}{3}(y+z) \\ x+y+z = 100 + \frac{3}{4}(x+z) \\ x+y+z = 100 + \frac{4}{5}(x+y) \end{cases}$$

Supongamos que para tres valores específicos de las incógnitas (1ª suposición) se tiene que:

$$\frac{2}{3}(y_1 + z_1) = \frac{3}{4}(x_1 + z_1) = \frac{4}{5}(x_1 + y_1) = 60 = \text{m. c. m. } (3,4,5)$$

A partir de aquí (véase la resolución del problema 1), se tiene que:

$$\begin{cases} y_1 + z_1 = 90 \\ x_1 + z_1 = 80 \\ x_1 + y_1 = 75 \end{cases} \Rightarrow 2(x_1 + y_1 + z_1) = 245 \Rightarrow x_1 + y_1 + z_1 = 122\frac{1}{2}$$

Por tanto:  $P_1 = x_1 + y_1 + z_1 - 60 = 62\frac{1}{2} \neq 100$

$$x_1 = x_1 + y_1 + z_1 - (y_1 + z_1) = 122\frac{1}{2} - 90 = 32\frac{1}{2}$$

$$y_1 = x_1 + y_1 + z_1 - (x_1 + z_1) = 122\frac{1}{2} - 80 = 42\frac{1}{2}$$

$$z_1 = x_1 + y_1 + z_1 - (x_1 + y_1) = 122\frac{1}{2} - 75 = 47\frac{1}{2}$$

Habiendo llegado a este punto, Ortega calcula la solución del problema haciendo uso de la regla de tres.

- Si  $62\frac{1}{2}$  me dan  $32\frac{1}{2}$ , entonces 100 me darán 52 ducados [= x].
- Si  $62\frac{1}{2}$  me dan  $42\frac{1}{2}$ , entonces 100 me darán 68 ducados [= y].
- Si  $62\frac{1}{2}$  me dan  $47\frac{1}{2}$ , entonces 100 me darán 76 ducados [= z].

Vamos a tratar de presentar una justificación del procedimiento anterior. En el sistema indeterminado

$$[**] \begin{cases} x + \frac{1}{3}(y + z) = P \\ y + \frac{1}{4}(x + z) = P \\ z + \frac{1}{5}(x + y) = P \end{cases}$$

se tiene que:

$$\begin{cases} x + y + z = P + \frac{2}{3}(y + z) \\ x + y + z = P + \frac{3}{4}(x + z) \\ x + y + z = P + \frac{4}{5}(x + y) \end{cases}$$

Resulta obvio que cualesquiera  $x, y, z$  que verifiquen las relaciones:

$$\frac{2}{3}(y+z) = \frac{3}{4}(x+z) = \frac{4}{5}(x+y) = \lambda,$$

satisfacen el sistema [\*\*]. Por otro lado, también resulta claro que, para cada elección de  $\lambda$ , se obtiene una solución de [\*\*].

Sea  $\lambda = a \in \mathbb{R}$ , entonces:

$$\begin{cases} y_1 + z_1 = \frac{3}{2}a \\ x_1 + z_1 = \frac{4}{3}a \\ x_1 + y_1 = \frac{5}{4}a \end{cases} \Rightarrow 2(x_1 + y_1 + z_1) = \frac{49}{12}a \Rightarrow x_1 + y_1 + z_1 = \frac{49}{24}a$$

$$\text{De donde: } P_1 = x_1 + y_1 + z_1 - \frac{2}{3}(y_1 + z_1) = \frac{49}{24}a - a = \frac{25}{24}a$$

$$x_1 = \frac{13}{24}a, \quad y_1 = \frac{17}{24}a, \quad z_1 = \frac{19}{24}a$$

Sea  $\lambda = m \cdot a \in \mathbb{R}$ , entonces (razonando como antes) resulta que:

$$P_2 = \frac{25}{24} \cdot ma = m \cdot P_1$$

$$x_2 = \frac{13}{24} \cdot ma = m \cdot x_1, \quad y_2 = \frac{17}{24} \cdot ma = m \cdot y_1, \quad z_2 = \frac{19}{24} \cdot ma = m \cdot z_1$$

En resumen:

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{x_2}{x_1} = \frac{y_2}{y_1} = \frac{z_2}{z_1}$$

para cualesquiera cuaternas  $(P_2, x_2, y_2, z_2)$  y  $(P_1, x_1, y_1, z_1)$  obtenidas para dos valores arbitrarios de  $\lambda$ . Así las cosas, si  $P = 100$  se obtiene para un valor de  $\lambda$  para el cual los «valores» de las incógnitas son  $x, y, z$ , y para  $\lambda = 60$  se tiene que

$$P_1 = 62\frac{1}{2}, \quad x_1 = 32\frac{1}{2}, \quad y_1 = 42\frac{1}{2}, \quad z_1 = 47\frac{1}{2}$$

$$\text{Entonces: } \frac{62\frac{1}{2}}{100} = \frac{32\frac{1}{2}}{x} = \frac{42\frac{1}{2}}{y} = \frac{47\frac{1}{2}}{z}$$

A partir de aquí se obtienen los valores de Ortega y se valida su procedimiento.

## UN EJEMPLO DEL MAESTRO LEONHARD EULER

En los *Elementos de Álgebra* (Capítulo cuarto. Primera parte, cuarta sección) de Leonhard Euler (1707–1783) encontramos el problema siguiente, en el que el gran matemático suizo pone de manifiesto su buen hacer como docente.

Tres hermanos compraron una viña por cien luisas. El menor dice que él la podría haber comprado si el segundo le hubiese dado la mitad de su dinero. El segundo dice que si el mayor le hubiese dado la tercera parte de su dinero, entonces él habría comprado la viña. Finalmente, el mayor sólo hubiese necesitado la cuarta parte del dinero del menor para poder pagar la viña. ¿Cuánto dinero tenía cada uno?

La solución dada por Euler es como sigue: Supongamos que el primero tenía  $x$  luisas; el segundo,  $y$ ; el tercero,  $z$ . Entonces, tendremos las tres ecuaciones siguientes:

$$\text{I.) } x + \frac{1}{2}y = 100, \quad \text{II.) } y + \frac{1}{3}z = 100, \quad \text{III.) } z + \frac{1}{4}x = 100$$

Dos de ellas solamente dan el valor de  $x$ ; a saber:

$$\text{I.) } x = 100 - \frac{1}{2}y, \quad \text{III.) } x = 400 - 4z$$

$$\text{Por tanto: } 100 - \frac{1}{2}y = 400 - 4z, \quad \text{o bien, } 4z - \frac{1}{2}y = 300.$$

Esta ecuación debe combinarse con la segunda para determinar los valores de  $y$ ,  $z$ . La segunda ecuación es

$$y + \frac{1}{3}z = 100, \quad \text{o bien } y = 100 - \frac{1}{3}z.$$

La ecuación que habíamos encontrado en último lugar era  $4z - \frac{1}{2}y = 300$ , o bien  $y = 8z - 600$ .

$$\text{Por consiguiente, } 100 - \frac{1}{3}z = 8z - 600.$$

De donde,

$$8\frac{1}{3}z = 700, \quad \text{ó } \frac{25}{3}z = 700.$$

Luego,  $z = 84$ . Entonces,  $y = 100 - 28 = 72$ , y  $x = 64$ .

*Respuesta.* El menor tenía 64 luses; el mediano, 72; el mayor, 84.

Como en este ejemplo cada ecuación sólo tiene dos incógnitas, se puede llegar a la misma solución de una forma más cómoda. Veámoslo.

La primera ecuación se convierte en  $y = 200 - 2x$ . De este modo  $y$  está determinada por  $x$ . Si se sustituye este valor en la segunda ecuación, se tiene:

$$200 - 2x + \frac{1}{3}z = 100$$

De donde:  $\frac{1}{3}z = 2x - 100$  y  $z = 6x - 300$ . De este modo,  $z$  también está determinada por  $x$  y si se sustituye su valor en la tercera ecuación, resulta:  $6x - 300 + \frac{1}{4}x = 100$ ,

ecuación que sólo contiene  $x$ , y que se reduce a  $25x - 1600 = 0$ . De donde,  $x = 64$ . Por consiguiente,  $y = 200 - 128 = 72$  y  $z = 384 - 300 = 84$ .

Se podría seguir el mismo procedimiento cuando el número de ecuaciones sea mayor. Supongamos, por ejemplo, que tenemos:

$$\text{I.) } u + \frac{x}{a} = n, \text{ II.) } x + \frac{y}{b} = n, \text{ III.) } y + \frac{z}{c} = n, \text{ IV.) } z + \frac{u}{d} = n$$

Quitando los denominadores, las ecuaciones anteriores se convierten en:

$$\text{I.) } au + x = an, \text{ II.) } bx + y = bn, \text{ III.) } cy + z = cn, \text{ IV.) } dz + u = dn$$

La primera ecuación se convierte de forma inmediata en:  $x = an - au$  y, sustituyendo este valor en la segunda, tenemos:

$$abn - abu + y = bn \text{ ó } y = bn - abn + abu$$

Sustituyendo este valor de  $y$  en la tercera ecuación resulta que:

$$bcn - abcn + abcu + z = cn \text{ ó } z = cn - bcn + abcu$$

Sustituyendo este valor de  $z$  en la cuarta ecuación obtenemos:

$$cdn - bcdn + abcdn - abcd u + u = dn \text{ ó } dn - cdn + bcdn - abcdn = -abcd u + u \text{ ó } (abcd - 1)u = abcdn - bcdn + cdn - dn$$

De donde resulta:

$$u = \frac{abcdn - bcdn + cdn - dn}{abcd - 1} = n \cdot \frac{(abcd - bcd + cd - d)}{abcd - 1}$$

Por consiguiente se tiene que:

$$x = \frac{abcdn - acdn + adn - an}{abcd - 1} = n \cdot \frac{abcd - acd + ad - a}{abcd - 1}$$

$$y = \frac{abcdn - abdn + abn - bn}{abcd - 1} = n \cdot \frac{abcd - abd + ab - b}{abcd - 1}$$

$$z = \frac{abcdn - abcn + bcn - cn}{abcd - 1} = n \cdot \frac{abcd - abc + bc - c}{abcd - 1}$$

$$u = \frac{abcdn - bcdn + cdn - dn}{abcd - 1} = n \cdot \frac{abcd - bcd + cd - d}{abcd - 1}$$

## EPÍLOGO DIDÁCTICO

La transición entre la aritmética y el álgebra supone un punto de inflexión en la formación matemática de los alumnos y, consecuentemente, es un proceso problemático desde un punto de vista didáctico.

Actualmente se acostumbra a introducir el simbolismo algebraico en un momento relativamente temprano de la formación del alumno (1º de E.S.O., 12 años). Esta prematura introducción del lenguaje algebraico presenta varios inconvenientes, por ejemplo:

- Se produce en un momento en que el alumno no ha tenido tiempo de afianzar e interiorizar en profundidad sus conocimientos sobre los significados de las operaciones aritméticas (en especial entre números racionales) y de las operaciones con cantidades de magnitud.
- Se introduce el uso del simbolismo algebraico de un modo descontextualizado y alejado de su utilidad práctica a la hora de resolver problemas.

En este sentido los «problemas de compra de caballos» pueden resultar de especial interés didáctico por cuanto se hallan, desde el punto de vista de su resolución, en un punto intermedio entre la aritmética y el álgebra. El interés de trabajar con este tipo de problemas se sustenta, al menos, en que:

- Pueden resolverse atendiendo únicamente a significados y técnicas propias de los números racionales positivos, conocidas por los alumnos. Para resolver estos problemas «aritméticamente» es necesario (basta observar el método que presenta Fibonacci) un manejo profundo de los números racionales por lo que su resolución puede servir de colofón a la formación aritmética de los alumnos.
- El uso del lenguaje simbólico está sugerido de forma muy clara por el método aritmético anterior. Cuando se habla de «el primero», «el tercero», etc. es fácil justificar, en base a su utilidad, la idea de utilizar letras para representar esas cantidades o para evitar «trabalenguas».

- La resolución algebraica completa es compleja. Esto, que podría parecer un inconveniente, no lo es tanto por cuanto aleja de los alumnos la impresión (falsa, por lo demás) de que el álgebra es siempre el mejor modo de resolver un problema.
- La existencia de métodos esencialmente diferentes para resolver el problema muestra a los alumnos el hecho de que, casi en ningún caso, hay una única forma de trabajar en matemáticas.

El interés didáctico de estos problemas, que acabamos de mostrar, justifica también plenamente el interés de trabajarlos a un nivel superior, con profesorado de secundaria en formación. En este caso, una serie de actividades a llevar a cabo con este tipo de estudiantes podría ser la siguiente:

- a) Proponer uno de los problemas estudiados que aparecen en el *Liber Abaci* y solicitar a los estudiantes que lo resuelvan sin recurrir al álgebra.
- b) Presentar la resolución de Fibonacci por la regla de la proporción. Discutir dicho método y compararlo con el que hayan podido utilizar ellos.
- c) Pedirles que resuelvan ahora el problema recurriendo al álgebra.
- d) Presentar uno de los procedimientos algebraicos utilizados por Euler, por ejemplo. Discutir dicho método y compararlo con el que hayan usado ellos.
- e) Presentar la primera estrategia de resolución de Juan de Ortega (sección 6) y pedirles que traten de justificar por qué funciona y/o que lo traduzcan al lenguaje algebraico.
- f) Comparar posibles ventajas e inconvenientes de ambos enfoques (aritmético y algebraico). ¿Para qué alumnos puede ser mejor uno que otro?

Como actividades adicionales que pueden llevarse a cabo, a modo de ejemplo, se nos ocurren:

- Investigar sobre las reglas de falsa posición. Historia, utilidad, justificación.
- Demostrar, rigurosamente, los métodos generales presentados en las secciones 5.2 y 5.3.

## REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Euler, L. (1795). *Éléments d'algèbre*. Lion: Bruyset.
- Heath, T. (1910). *Diophantus of Alexandria. A study in the history of greek algebra*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Kangshen, S., Crossley, J. N. y Lun, A.W. (Eds) (1999). *The nine chapters on the mathematical art*. Oxford: Oxford University Press.
- Matzloff, J. C. (1988). *Histoire des mathématiques chinoises*. Paris: Masson.
- Meavilla, V. (2005). La historia de las matemáticas y la resolución no algebraica de problemas: una propuesta didáctica. En *La Historia de la Ciencia como recurso de aula y de Investigación Didáctica*. Teruel.

- Meavilla, V. (2007). *Aprendiendo de los grandes maestros. Selección de problemas lineales y cuadráticos rescatados de los Elementos de Álgebra de Leonhard Euler (1707–1783)*. Badajoz: Federación Española de Sociedades de profesores de Matemáticas.
- Ortega, J. de (1512). *Conpusicion de la arte de la arismetica y juntamente de geometria: fecha por...* León: en casa de Maistro Nicolau de Benedictis: por Joannes Trinxer librero de Barcelona.
- Rey Pastor, J. (1926). *Los matemáticos españoles del siglo XVI. Biblioteca Scientia, 2*.
- Sánchez, J. A. (1947). *La aritmética en Grecia*. Madrid: Consejo Superior de Investigaciones Científicas.
- Sigler, L.E. (2002). *Fibonacci's Liber Abaci. A translation into Modern English of Leonardo Pisano's Book of Calculation*. New York: Springer-Verlag.
- Texeda, G. de (1546). *Suma de Arithmetica practica y de todas mercaderias con la horden de contadores*. Valladolid: Francisco Fernandez de Cordoua.
- Van der Waerden, B. L. (1985). *A history of Algebra. From al-Khwarizmi to Emmy Noether*. Berlín: Springer-Verlag.
- Vera, F. (1970). *Científicos griegos* (dos volúmenes). Madrid: Aguilar.
- Woepcke, F. (1853). *Extrait du Fakhrî, traité d'Algèbre par Abou Bekr Mohammed ben Al-haçan Alkarkhî (manuscript 952, supplément arabe de la bibliothèque Impériale)*. Paris: Imprimerie Impériale.
- Youschkevitch, A. P. (1976). *Les mathématiques arabes (VIII<sup>e</sup> – XV<sup>e</sup> siècles)*. Paris: VRIN.



Primer premio en la categoría 1º y 2º de ESO de la fase local en el I Certamen del Sur “Incubadora de Sondeos y Experimentos” organizado por la Sociedad de Estadística e Investigación Operativa (SEIO)

## ¿Tenemos el mismo estilo de vida los jóvenes europeos?

**Esther García-Ligero-Ramírez, Daniel Alcalá Cendrero, José M<sup>a</sup> Luque Cobo, Rafael Muñoz Expósito, Cristian Nieto Pareja**

*IES Álvarez Cubero, Priego de Córdoba*

**Resumen:** *El siguiente trabajo lo realizaron un grupo de alumnos de 2º ESO, como una de las actividades que se llevaron a cabo dentro del Proyecto Comenius, “Let’s play economics!”. Con este trabajo pretendían comprobar que los jóvenes europeos no son tan diferentes en sus aficiones, gustos, valores... Para ello diseñaron y realizaron una encuesta entre los jóvenes de los cinco países participantes en dicho proyecto.*

**Palabras claves:** *estilo de vida, jóvenes europeos, Comenius, Educación estadística.*

## Do we have the same lifestyle young Europeans?

**Summary:** *The following work was carried out by a group of students in 2º ESO, as one of the activities carried out within the Comenius project, “Let’s play economics”. This work sought to ensure that young Europeans are not that different in their hobbies, preferences, values ... They designed and conducted a survey of young people in the five countries participating in the project.*

**Keywords:** *Lifestyle, young Europeans, Comenius, Education statistics.*

## INTRODUCCIÓN

Partiendo de un proyecto Comenius que tenía concedido nuestro Centro, nos pareció interesante aprovechar la oportunidad que se nos brindaba y comparar nuestros hábitos de vida cotidiana y nuestras aficiones con la de los alumnos de otros países: Mönchengladbach (Alemania), Zawiercie (Polonia), Huittinen (Finlandia), Estocolmo (Suecia) y, claro está, España.

Mediante una encuesta y su posterior estudio estadístico, pretendíamos confirmar o desmentir una serie de tópicos que tenemos asumidos acerca de los ciudadanos de otros países. Por ejemplo: los españoles somos los que se acuestan más tarde, Suecia es el país más caro y donde menos alcohol se consume, los finlandeses son muy deportistas por estar rodeados de tanta naturaleza, los españoles gastamos más dinero porque somos los que más salimos de paseo.

También nos planteamos comprobar si existen grandes diferencias entre los alumnos europeos o, por el contrario, somos más parecidos de lo que realmente creemos en nuestro “estilo de vida”.

Por todo ello ideamos este trabajo que pasamos a detallar a continuación.

## OBJETIVOS

- Observar las diferencias o similitudes entre los cinco países participantes.
- Extraer conclusiones y romper con los tópicos.
- Reflexionar sobre nuestros hábitos y costumbres.
- Encontrar las causas de las diferencias entre los distintos países.
- Sentirnos un poco más europeos.
- Aprender a relacionar la Estadística con la vida cotidiana.
- Fomentar el uso de las nuevas tecnologías a la hora de realizar trabajos de clase y del inglés para comunicarnos.

## ACTIVIDADES REALIZADAS

### Diseño de encuesta

No queríamos que el cuestionario fuese muy extenso, pero pretendíamos recopilar suficiente información sobre los hábitos y aficiones de los jóvenes europeos, con el fin de poder comparar diferentes aspectos.

Realizamos una “lluvia de ideas” y, a partir de ella, seleccionamos y redactamos diez preguntas, cada una de ellas con varias respuestas, aunque sólo se podía seleccionar una.

La encuesta se pasó a 100 alumnos de cada uno de los países participantes, con edades comprendidas entre 14 y 16 años. No hicimos distinción entre chicos y chicas.

## ENCUESTA

1. ¿Cuánto dinero gastas a la semana?  
a) 5€ b) 10€ c) 20€  
d) 30€ e) 40€ f) más
2. ¿De dónde obtienes el dinero para tus gastos?  
a) Trabajando  
b) De tus padres  
c) De tus “amigos”  
d) No tengo dinero
3. ¿En qué gastas tú dinero?  
a) En ropa  
b) En chucherías  
c) En entretenimientos  
d) En drogas/ alcohol  
e) En equipamiento deportivo  
f) En otras cosas
4. ¿Qué te gusta hacer en tu tiempo libre?  
a) Jugar con la consola  
b) Salir con los amigos  
c) Tumbarte en la cama  
d) Hacer deporte  
e) Estudiar  
f) Otra cosa
5. ¿Con qué frecuencia practicas deporte?  
a) Nunca  
b) En el instituto  
c) 1-3 veces a la semana  
d) Todos los días
6. ¿Con qué frecuencia usas el ordenador?  
a) Todos los días  
b) Dos veces en semana  
c) Una vez a la semana o menos  
d) Nunca
7. ¿Cuánto alcohol consumes al mes?  
a) Un par de raciones  
b) 6 raciones  
c) 12 raciones  
d) 24 raciones  
e) más
8. ¿A qué hora te vas normalmente a la cama?  
a) 21:00-22:00  
b) 22:00-23:00  
c) 23:00-24:00  
d) Más tarde
9. ¿Cómo vas al instituto?  
a) En autobús  
b) En Bici  
c) Andando  
d) En coche  
e) En moto  
f) En tren
10. ¿Qué es lo más importante para ti en la vida?  
a) Mi familia  
b) Mis amigos  
c) La educación  
d) La salud  
e) El dinero  
f) Tus hobbies

## RECOPIACIÓN DE LOS DATOS EN TABLAS

Una vez pasadas las encuestas por todos los países, recopilamos los datos en una tabla de Excel para posteriormente poder realizar los gráficos.

	España						Alemania						Polonia						Finlandia						Suecia					
	A	B	C	D	E	F	A	B	C	D	E	F	A	B	C	D	E	F	A	B	C	D	E	F	A	B	C	D	E	F
Gasto semanal	22	40	22	8	5	3	3	17	42	23	5	10	29	42	14	15	0	0	16	39	19	19	5	2	1	5	20	25	24	25
De dónde obtienes dinero	11	86	2	1	0	0	26	66	7	1	0	0	42	37	21	0	0	0	42	52	2	4	0	0	36	60	2	2	0	0
En qué te lo gastas	52	1	21	8	10	8	42	5	19	7	8	19	92	0	0	0	8	0	36	14	14	8	3	25	36	5	27	10	3	19
Qué haces tiempo libre	13	58	1	23	0	5	15	35	13	20	5	12	22	63	0	15	0	0	44	12	5	25	7	7	66	8	9	8	1	8
Deportes	5	39	37	19	0	0	7	40	36	17	0	0	0	50	29	21	0	0	6	22	53	19	0	0	19	18	54	9	0	0
Uso del ordenador	65	25	4	6	0	0	49	22	24	5	0	0	72	20	8	0	0	0	82	18	0	0	0	0	92	6	0	2	0	0
Alcohol	20	5	23	12	40	0	15	13	13	3	56	0	24	13	33	22	8	0	26	15	15	6	38	0	0	50	23	27	0	0
Ir a la cama	2	23	60	15	0	0	19	33	33	15	0	0	0	64	29	7	0	0	3	57	32	8	0	0	4	20	47	29	0	0
Ir al cole	59	2	23	11	4	1	39	6	31	15	3	6	72	14	14	0	0	0	39	30	6	16	9	0	42	1	13	4	1	39
Importante en tu vida	62	14	7	10	0	7	30	23	9	16	12	10	85	8	0	0	7	0	36	37	6	12	3	6	49	22	5	4	13	7

Tabla1. Datos de la encuesta

## GRÁFICO Y COMENTARIOS

Decidimos realizar para cada pregunta:

- Un diagrama de barras conjunto con el fin de tener todos los resultados en un solo gráfico y poderlos comparar.

De esta forma obtendríamos una idea visual y global de la distribución de los resultados obtenidos, que nos permitiría estudiarlos y compararlos mejor.

Nos interesaba, además, dar una medida objetiva que describiera de forma concisa el comportamiento y las características generales de los datos. Elegimos la Moda, que, por ser una medida de centralización nos daría una idea de los valores más representativos para todo el conjunto de datos. Por otra parte, al ser la mayoría de los caracteres objeto de estudio cualitativo, la única medida que podíamos calcular era la Moda.

A continuación pasamos a exponer los gráficos de cada una de las preguntas y las conclusiones que hemos obtenido a partir de ellos. Véase figura 1.

En España, Polonia y Finlandia la moda es 10€; es decir, aproximadamente un 40% del alumnado, de cada cada países gasta 10€ semanales. En Alemania la moda es 20€ y en Suecia la distribución es bimodal, siendo las modas 30€ y más de 40€. Quitando a Suecia, observamos que el gasto semanal es similar entre los alumnos del resto de los países. Podemos explicar esta diferencia por varios motivos: Estocolmo es la ciudad más grande de todas las implicadas en el trabajo y, Suecia un país caro; por otra parte hemos pasado algunos días de intercambio en Estocolmo, y el instituto al que asisten nuestros compañeros suecos no tiene comedor y por ello todos los días comen en un restaurante que cuesta unos 7€. Si nuestros compañeros han considerado esto, es lógico que a la semana tengan un gasto superior a 40€.

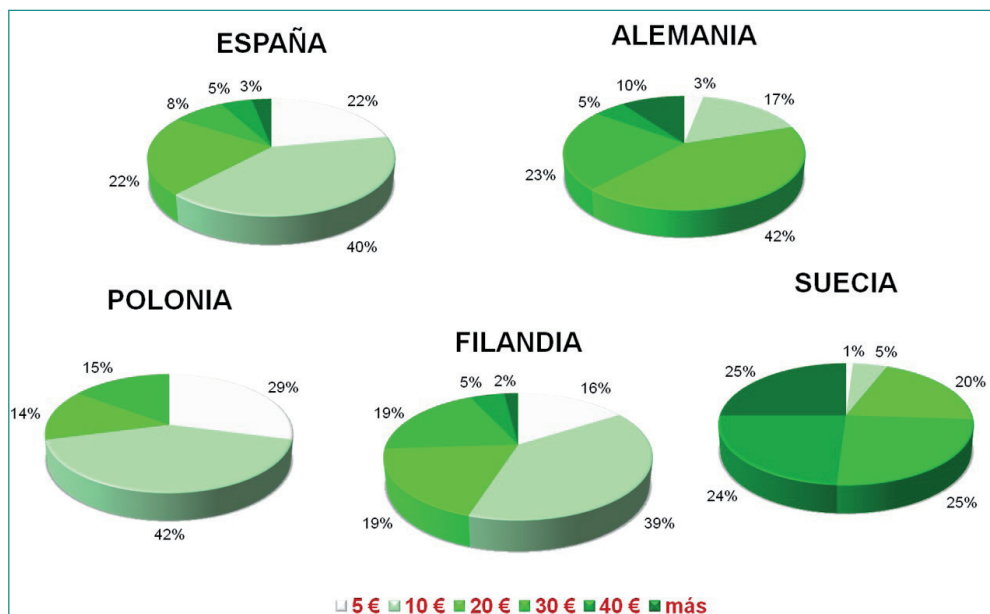


Figura 1. ¿Cuánto dinero gastas a la semana?

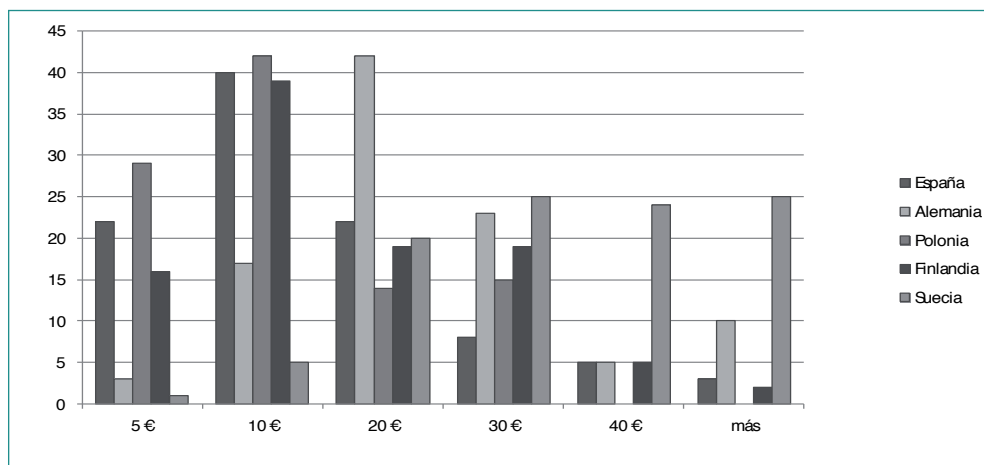


Figura 2. Comparación global de cuánto gastas a la semana.

En el gráfico conjunto observamos que las mayores frecuencias se concentran en casi todos los países entre 10 y 20 euros. ¿Cómo consigues el dinero que gastas?

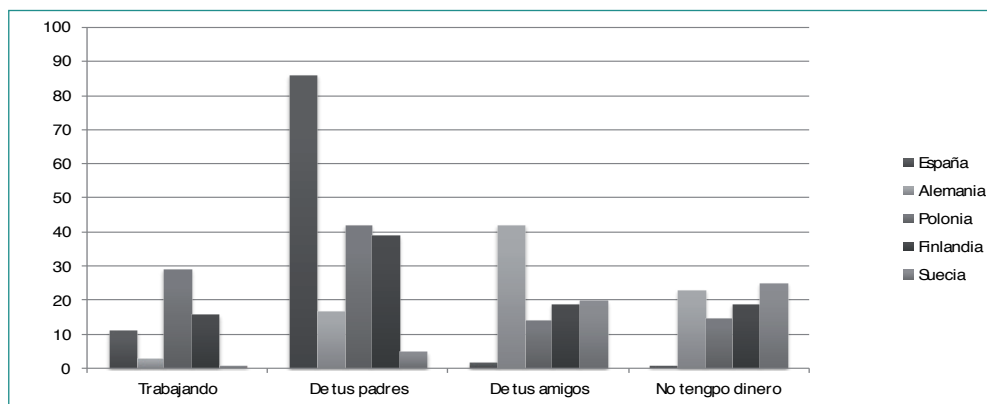


Figura 3 ¿Cómo consigues el dinero que gastas?

Excepto en Polonia, que la moda es el trabajo, en el resto de los países la moda es “Los padres”, es decir, que la mayoría de los alumnos obtienen el dinero que gastan de sus padres.

En todos los países se consigue el dinero principalmente de “Los padres” o “Trabajando”. Hay que destacar que España es el país donde los jóvenes trabajan menos para obtener dinero.

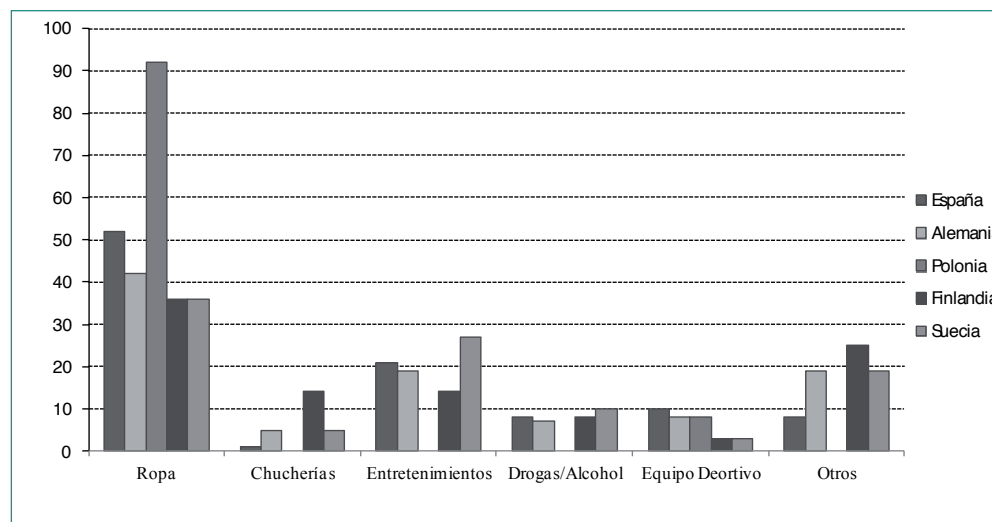


Figura 4. ¿En qué gastas tu dinero?

La moda en todos los países es “La Ropa”. La ropa es lo que más nos gusta y en lo que invertimos nuestro dinero. Se aprecia que después de “La Ropa”, es en “Entretenimientos” y “Otros” en lo que gastamos el dinero.

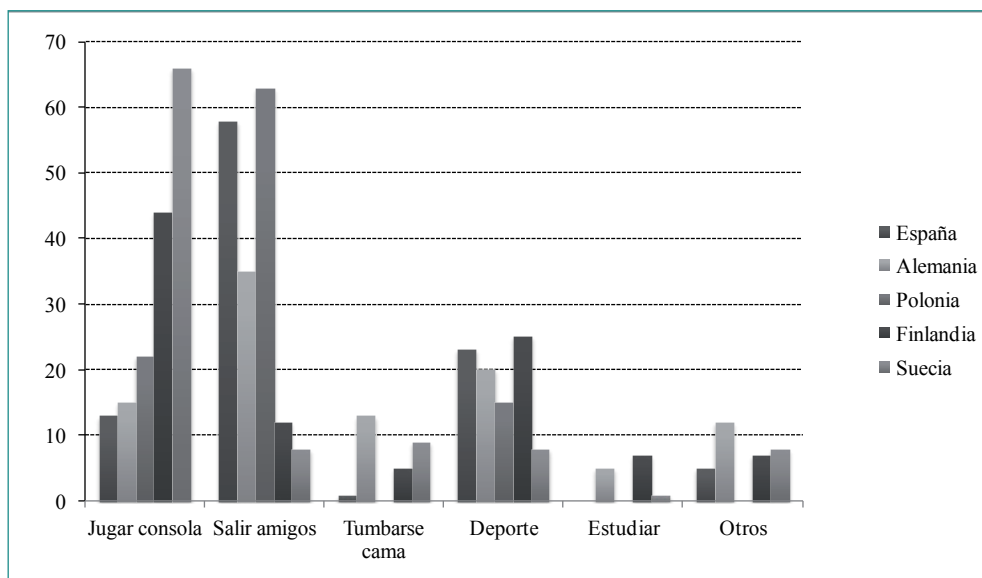


Figura 5. ¿Qué haces en tu tiempo libre?

Se ve que tiene que hacer mucho frío en Finlandia, ya que la moda en este país es “Jugar con la consola”, mientras que en el resto de los países es “Salir con los amigos”. Los principales entretenimientos de los alumnos en todos los países son “Salir con los amigos” y “Jugar a la consola”. Otra cosa en la que nos diferenciamos poco.

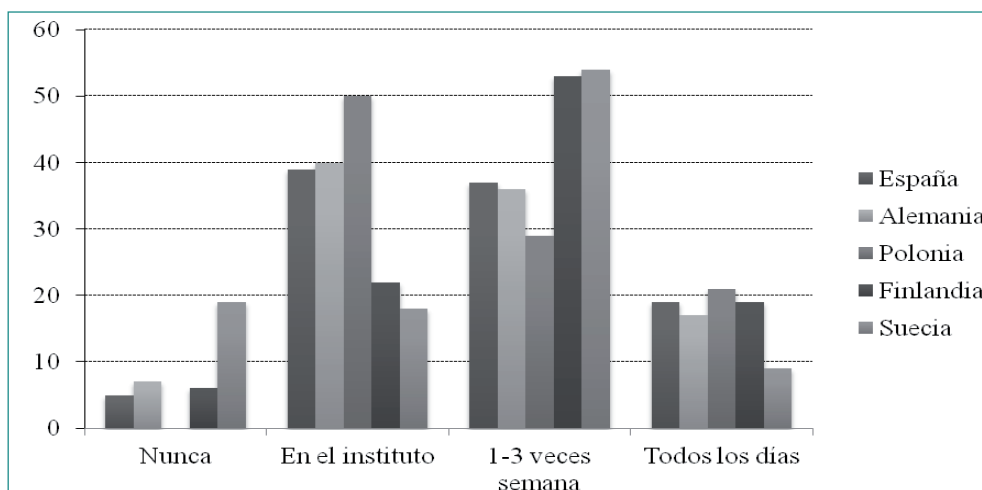


Figura 6. ¿Con qué frecuencia practicas deporte?

La moda en los países nórdicos es de “1 a 3 Veces a la Semana”, mientras que en el resto el deporte se practica principalmente en el cole. No somos muy deportistas, sino, más bien, sedentarios. lo más usual en todos los sitios es practicar el deporte en el instituto o de “1 a 3 Veces por Semana”.

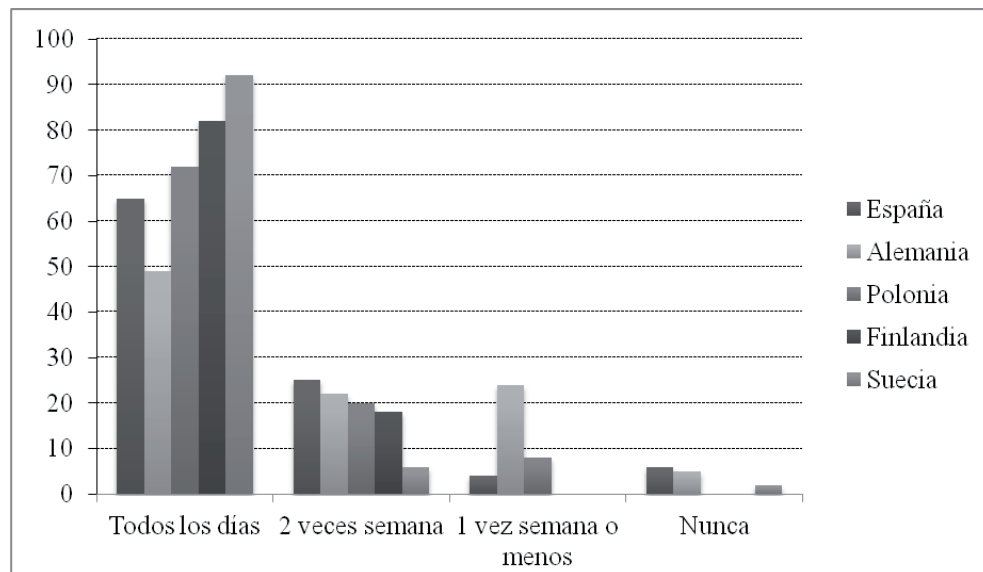


Figura 7. ¿Con qué frecuencia usas el ordenador?

El uso del ordenador está muy extendido entre todos los jóvenes de todos los países. La moda es usarlo “Todos los Días”. Es raro encontrar a una persona que no lo use. Haciendo una pequeña comparación con la pregunta anterior y esta, es lógico que si los alumnos usan el ordenador “Todos los Días”, la vida es más sedentaria y se practica menos deporte. Véase figura 8.

El consumo de alcohol es excesivo en todos los países ya que la moda es de 24 raciones en España, Alemania y Finlandia; 12 raciones en Polonia y 6 en Suecia. Aunque en todos los países hay leyes que prohíben consumir alcohol a los jóvenes y en general son muy restrictivas, como hemos podido comprobar “in situ”, al final todos los alumnos consumen alcohol. Véase figura 9.

En Alemania, Polonia y Finlandia la moda es acostarse a las “22:00-23:00”. En España y Suecia la moda es “23:00-24:00”. No sólo en España nos acostamos tarde. La hora de irse a la cama es entre las 22:00 y las 24:00. Véase figura 10.

El medio más utilizado por los alumnos es el autobús; es la moda en todos los países. Llama la atención en el gráfico el uso del tren como medio de transporte por los alumnos suecos. Esto se debe al hecho de que es una gran ciudad y viven en la periferia por lo que necesitan el tren para ir al colegio. Debemos destacar también el uso de la bici en Finlandia. Véase figura 11.

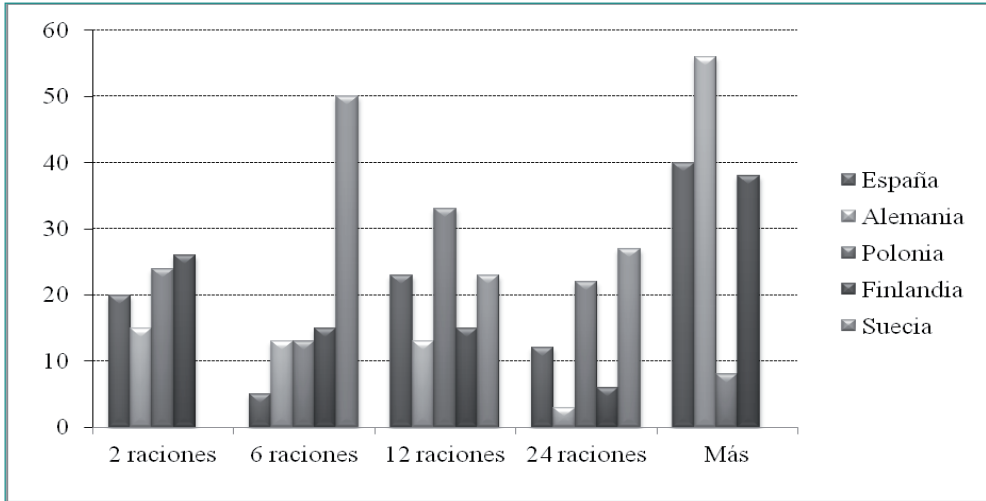


Figura 8. ¿Cuánto alcohol consumes al mes?

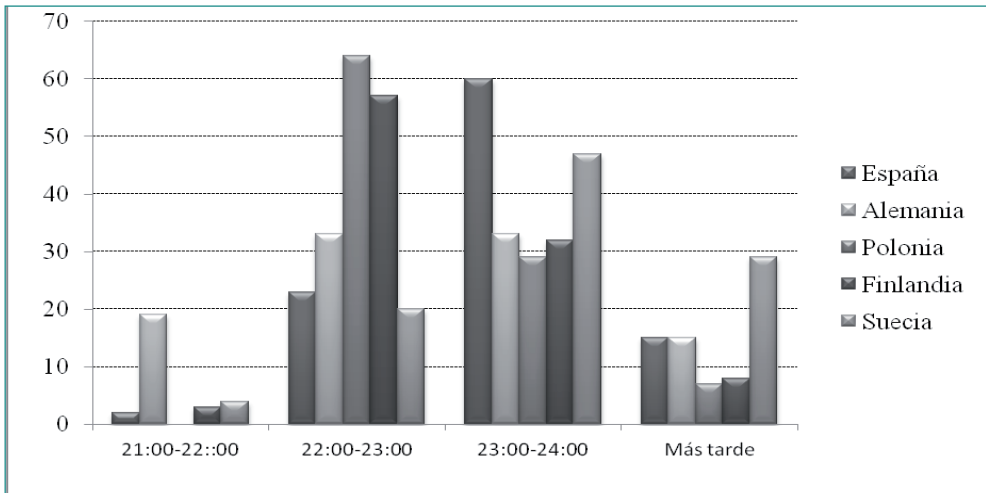


Figura 9. ¿A qué hora te vas a la cama?

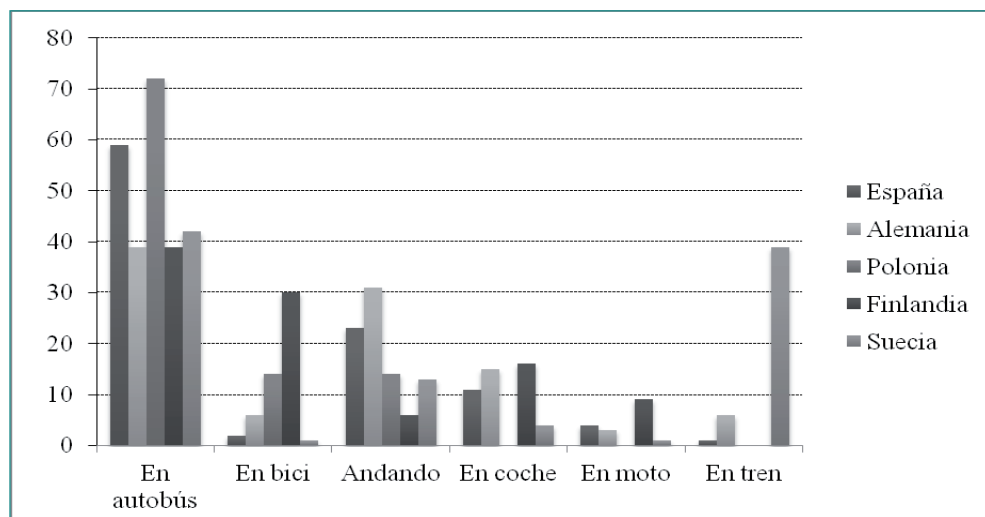


Figura 10. ¿Cómo vas al instituto?

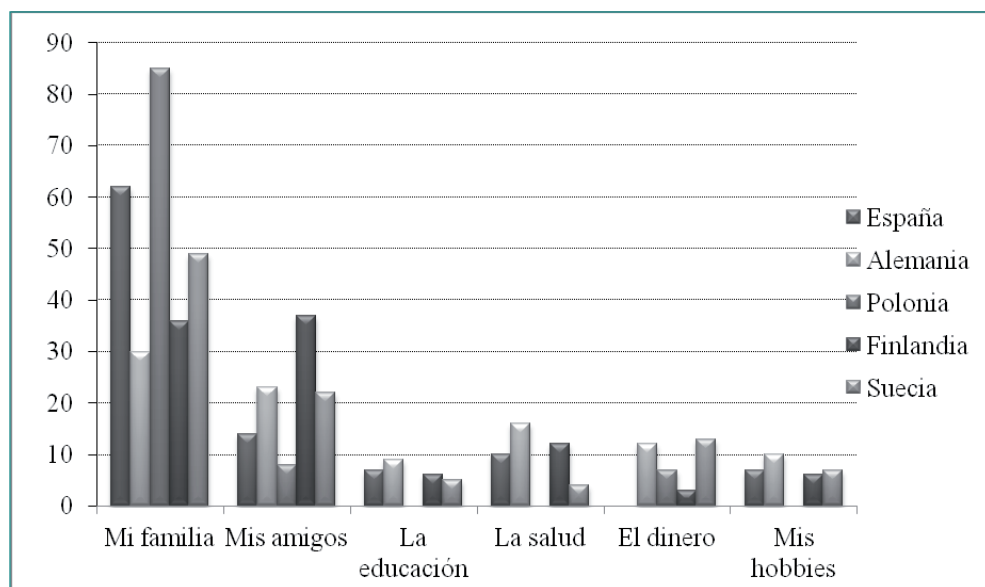


Figura 11. ¿Qué es lo más importante en la vida?

Para casi todos lo más importante en la vida es la “Familia”. En Finlandia consideran que son los “Amigos”, pero por poco. Lo más importante en la vida es la “Familia” y la “Amistad”.

## CONCLUSIONES

A la vista de los resultados, los alumnos de estos cinco países europeos no somos muy diferentes.

Los que vivimos en las ciudades más pequeñas nos gastamos un dinero similar y no muy excesivo, a la semana. Este dinero lo conseguimos en su mayoría de los padres, aunque algunos trabajan para obtenerlo y, lo empleamos básicamente en comprar ropa. Nos encanta salir con los amigos, pero también jugar con la consola y disfrutar del ordenador todos los días. Por todo ello somos un poco sedentarios y no practicamos suficiente deporte. Bebemos más alcohol del que deberíamos tomar, aunque esté prohibido comprarlo, pero luego no trasnochamos mucho y nos vamos a la cama antes de las doce. Sentimos que lo más importante en nuestra vida es nuestra familia y la amistad, lo que demuestra que tenemos grandes valores y que nuestra generación no es tan mala como se piensa.

Una extensión de este trabajo podría ser diferenciar entre chicos y chicas y observar si en este caso los resultados son más dispares. También se podría ampliar el cuestionario e introducir otro tipo de preguntas para profundizar más en las inquietudes de la juventud europea.

## AGRADECIMIENTOS

Por último, agradecer la colaboración desinteresada de nuestros compañeros de Mönchengladbach, Zawiercie, Huittinen, Estocolmo y nuestro Centro.

## REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Colera, J. y Gaztelu, L. (2007). Matemáticas 2 ESO. Anaya, Andalucía.

