82

Vol. 29 (3)
2012

epsilon

Revista de Educación Matemática

Editada por la S.A.E.M. "THALES"

ISSN: 1131-9321

La revista Epsilon está reseñada en:
IN-RECS, Dialnet, Latindex, RESH, DICE y Base de Datos del
Centro de Documentación Thales.

epsilon 82

Revista de Educación Matemática

Director
Alexander Maz (Universidad de Córdoba)

Comité Editor
Damián Aranda (IES Blas Infante, Córdoba)
Rafael Bracho (Universidad de Córdoba)
José Mª Chacón (IES Llanes, Sevilla)
Francisco España (IES Ángel de Saavedra, Córdoba)
José Galo (IES Alhakén II, Córdoba,)
Manuel Gómez (IES Blas Infante, Córdoba)
Inmaculada Serrano (Universidad de Córdoba)

Comité Científico
Evelio Bedoya,
Universidad del Valle, Colombia.
Matías Camacho,
Universidad de la Laguna, España.
José Carrillo,
Universidad de Huelva, España.
Mª Mar Moreno,
Universidad de Lleida, España.
José Ortiz,
Universidad de Carabobo, Venezuela.
Modesto Sierra,
Universidad de Salamanca, España.
Liliana Mabel Tauber,
Universidad Nacional del Litoral, Argentina.

Página de la revista: http://thales.cica.es/epsilon
Revista: epsilon@thales.cica.es

Sociedad Andaluza de Educación Matemática "Thales"

Edita
Sociedad Andaluza de
Educación Matemática "Thales"
Centro Documentación "Thales"
Universidad de Cádiz
C.A.S.E.M.
11510 PUERTO REAL (Cádiz)

Maquetación e impresión
Utrerana de Ediciones, s.l.
Cristóbal Colón, 12
41710 Utrera (Sevilla)

Depósito Legal
SE-421-1984

I.S.S.N.
1131-9321

Período
3er cuatrimestre 2012

Suscripción
ESPAÑA: 42,00 euros
PAÍSES DEL EURO: 63,00 euros
RESTO DE PAÍSES: 90 $ USA
(3 NÚMEROS AL AÑO)

S.A.E.M. THALES

Sixto Romero Sánchez
Presidente
Francisco España Pérez
Vicepresidente
Mª Belén Sepúlveda Lucena
Secretaría General
José María Vázquez de la Torre Prieto
Secretario de Administración y Tesorería

SEDE

Facultad de Matemáticas
Edif. de la E.S.I. Informática. Ala L2
Avda. Reina Mercedes, s/n.
Aptdo. 1160
41080 SEVILLA
Tlfno. 954 62 36 58 - Fax: 954 236 378
e-mail: **thales@cica.es**

SEDE ADMINISTRATIVA DE LA SOCIEDAD Y REVISTA

Centro de Documentación THALES
Facultad de Ciencias. Departamento de Matemáticas
Campus del Río San Pedro, s/n
Torre Central, 4ª Planta
11510 Puerto Real (Cádiz)
Tlf. y Fax: 956 012 833
e-mail: **thales.matematicas@uca.es**

ALMERÍA

Juan Guirado Granados
Delegado Provincial

CÁDIZ

Paloma Pascual Albarrán
Delegada Provincial

CÓRDOBA

Marina A. Toledano Hidalgo (provis.). *Delegado provincial*

GRANADA

María Peñas Troyano
Delegado Provincial

HUELVA

Mª Rocío Benítez Cambra (provis.). *Delegada provincial*

JAÉN

Mª Eugenia Ruiz Ruiz
Delegada provincial

MÁLAGA

Salvador Guerrero Hidalgo
Delegado provincial

SEVILLA

Ana Mª Martín Caraballo
Delegada Provincial

SUMARIO / CONTENTS

Carta del Presidente de la Sociedad Andaluza de Educación Matemática THALES

Recibo con agrado la invitación del director de la revista EPSILON para que me dirija a vosotros en calidad de presidente de la SAEM Thales.

Viene a mi memoria, en primer lugar, nuestro querido Gonzalo Sánchez Vázquez, primer Presidente, y guía de nuestra sociedad: ¡genio y figura! También quiero recordar y expresar mi agradecimiento a los Presidentes que me han antecedido en el cargo, después de Gonzalo, en las diferentes etapas: Antonio Pérez, Salvador Guerrero y Manuel Torralbo junto a sus "comisiones ejecutivas", Antonio Aranda, Concha García, Ladislao Navarro, Pedro J. Martínez, Carlos Suárez, Vicenta Serrano, Agustín Carrillo, Encarnación Amaro, Rafael Bracho,… y un largo etcétera de compañeras y compañeros que altruistamente han hecho grande a nuestra sociedad.

No menos importante ha sido la labor llevada a cabo por los directores del órgano vehículo de información, comunicación y participación de los socios y socias de la SAEM THALES y del profesorado de Matemáticas de nuestra comunidad autónoma pertenecientes a todos los niveles educativos con la participación de compañeros nacionales y extranjeros, en definitiva el órgano de difusión más importante de las actividades que se realizan, inicialmente denominada Revista Thales, y que tuvo su primer director en la persona del admirado y siempre recordado Manuel Iglesias. A partir del número 10 se llamó Epsilon, incorporándose a la dirección, respectivamente, Javier Pérez, Antonio Moreno y en la actualidad desde el número 75, recae la responsabilidad en Alexander Maz.

La Olimpiada Thales debe seguir siendo la actividad estrella de nuestra sociedad dónde el espacio creado para los alumnos de secundaria sea de regocijo y amor por las matemáticas. También el proyecto ESTALMAT, que como se afirma en su página web, no es un proyecto elitista pero sí nos permite a la SAEM Thales detectar y estimular el talento precoz en matemáticas en aquellos alumnos y alumnas que tienen capacidades para una de las más bellas disciplinas científicas.

El Congreso bianual CEAM tiene que seguir siendo el punto de encuentro del profesorado de los diferentes niveles de enseñanza de las Matemáticas en Andalucía donde el intercambio de experiencias en el aula y la investigación en el proceso Enseñanza/Aprendizaje de las Matemáticas nos permita seguir siendo una de las sociedades más activas de nuestro país.

Si la crisis económica actual que estalló en los EE.UU en el último trimestre de 2008, y ahora expandida por todo el mundo, hace que el crecimiento económico se haya detenido, las economías se retraigan y el comercio ha disminuya, generando la pérdida de empleos e ingresos, es precisamente en este momento procesal cuándo hay que hacer propuestas coherentes y resolutivas, entre otras:

a) Poner en valor la educación como una inversión a largo plazo, destacando los peligros que pueden surgir de los recortes sin sentido que se están produciendo.
b) Necesidad de una planificación estratégica, que tome en cuenta los riesgos y las oportunidades en los entornos inestables que nos ha tocado convivir, y que las instituciones públicas con las que colaboramos deben tener presente.
c) Colaboración incondicional.

Los acontecimientos desde el inicio de la crisis han cambiado la naturaleza de la sociedad en que vivimos, por ejemplo de las desigualdades sociales, por eso la SAEM Thales, en su conjunto, debe ser consciente que también la crisis nos ha llegado también nosotros. Por ello, el equipo que presido, sin entrar en derrotismos, propondrá algunas medidas restrictivas que, si procede, serán aprobadas por la Junta Directiva y su elevación ulterior a la Asamblea General de Socios. Está claro que una decisión de estas características no es deseable y no es fácil tomarla pero no podemos cerrar los ojos ante tan dramática realidad.

A pesar de todo, si es muy difícil el momento que está viviendo la humanidad en su conjunto, y en especial la educación en nuestro país, nos hemos lanzado un conjunto de profesores para dirigir, en una nueva etapa la Sociedad Andaluza de Educación Matemática THALES, creada en Sevilla, en mayo de 1981, como consecuencia de un movimiento de renovación en la enseñanza de las Matemáticas que venía siendo impulsado por el profesorado desde la década de los setenta.

No quiero caer en la tentación de pensar que no hay ser humano que pueda llegar a conocer y dirigir un *colectivo* con este pensamiento: "…. *nosotros lo hacemos bien debido a que he participado en su gestión y tenemos toda una vida con él*…". Este temor nace del orgullo natural que tenemos, todas o casi todas, las personas y la necesidad que existe en demostrar nuestras capacidades de forma continua. Cuando se tiene esta forma de pensar es común que una persona de estas características quiera contar con aquellas otras iguales a ellas para asegurarse, en la medida de lo posible, que harán las tareas y actividades como él hace. ¡Ni mucho menos es nuestro caso!

Por todo ello mi agradecimiento más sincero, en primer lugar, por la confianza dada por la asamblea del mes de julio de 2012, celebrada en Málaga en el seno del *XIV CEAM, Congreso de Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas*; y en especial quiero agradecer de todo corazón a Belén Sepúlveda, Francisco España y José María de la Torre su generosidad y su incondicionalidad en acompañarme en la tarea de comandar, y hacer más grande si cabe, esta nave construida por todos vosotros.

Esperamos no defraudaros, son dos años complicados pero saldremos adelante con la seguridad de aportar nuevas ideas.

Fdo. Sixto Romero Sánchez
Presidente SAEM Thales
sixto@uhu.es

Épsilon *- Revista de Educación Matemática* ***2012, Vol. 29(3), nº 82, 9-22, ISSN: 1131-9321***

Las derivadas: Análisis del libro de texto de la enseñanza secundaria en Portugal con sus primeras aplicaciones

Ana Paula Aires
Universidade de Trás-os-Montes e Alto Douro
aaires@utad.pt

Ana Elisa Esteves Santiago
Universidade Nova de Lisboa
elisa_santiago@hotmail.com

Resumen: *El trabajo aquí descrito consta de un estudio mas vasto en lo que se pretendió hacer un análisis de los problemas de optimización, en los libros históricos de Matemática, desde el siglo IV a.C., pasando después para el análisis de los programas oficiales de Matemática de la Enseñanza Secundaria con el objetivo de verificar cuales y de que forma abordaban el estudio de los problemas de optimización, terminando con el análisis de los problemas de optimización que constan en los libros de texto de cada plan de estudios (Santiago, 2008).*

Se presenta el análisis del programa y respectivo libro de texto que han marcado la introducción de los problemas de optimización en la enseñanza secundaria, en Portugal, mas específicamente el programa oficial de 1954 y el "Livro Único" que vigoraba en esa época. Para tal haremos un análisis de los problemas de optimización, basada en las cuatro fases de resolución de problemas propuestas por George Polya (2003).

Palabras Clave: *Planes de estudio Matemática, libros de texto, derivada, problemas de optimización.*

The derivatives: textbook analysis of secondary education in Portugal with its first applications

Abstract: *The work described here consists of a more extensive study on what was intended to analyze optimization problems, in the historical books of mathematics, from*

the fourth century B.C., then moving to the analysis of the official programs of Mathematics Secondary Education in order to verify which is addressed and that the study of optimization problems, ending with the analysis of optimization problems that appear in the textbooks of each curriculum (Santiago, 20089.
It provides an analysis of the program and textbook respective marked the introduction of optimization problems in secondary education in Portugal, more specifically the official program of 1954 and the "Livro Único" that vigoraba then. For this we will analyze optimization problems, based on the four phases of problem solving proposed by George Polya (2003).
Keywords: *Mathematics curricula, textbooks, derived, optimization problems.*

INTRODUCCIÓN

Una vez que esta investigación tiene un duplo carácter - histórico y didáctico – hemos buscado en las obras de Bisquera (1989), Ruiz-Berrio (1997) y Schubring (1987, 1989) la fundamentación para la metodología de investigación histórica a utilizar.

En este contexto han sido también importantes la obra de Astudillo (2002) que presenta una caracterización de las representaciones de los puntos críticos presentes en los libros de texto en España y en libros históricos y la obra de Sierra (2003) sobre la evolución de la enseñanza del Análisis Matemático y del Álgebra, en España.

De entre las obras que utilizamos para contextualizar la evolución de los sistemas educativos, con un cariz marcadamente histórico, destacamos la *História do Ensino em Portugal* de Rómulo de Carvalho (Carvalho, 1985) y la obra *O Sistema de Ensino em Portugal (Séculos XIX-XX*) de Maria Cândida Proença (Proença, 1998). Otra fuente, también importante ha sido la legislación y los planes de estudio publicados.

Para el análisis didáctico hemos tenido por base las cuatro fases de resolución de problemas propuestas por George Polya (2003).

INTRODUCCIÓN DEL CONCEPTO DE DERIVADA EN LOS PROGRAMAS OFICIALES PORTUGUESES

El concepto de derivada ha sido introducido por la primera vez en los planes de estudio de la enseñanza secundaria, designado por "ensino liceal", en el 1905 con el plan de estudios del ministro de la Instrucción, José Coelho (Decreto nº 3 do Diário de Governo nº 250, del 4 Noviembre del 1905).

Importa aquí decir que la estructura de la enseñanza secundaria, en esta época, en Portugal comprendía el curso general y el curso complementar que consagraba dos vías: letras y ciencias. El curso general constaba de dos ciclos, con la duración de cinco años (1º al 5º año), mientras el curso complementar, con un ciclo solo, tenía la duración de dos años (6º y 7º anos) (Figura 1).

El concepto de derivada está integrado en el programa relativo à la VII clase (o 7º año) del curso complementar de ciencias, en el capítulo destinado al Álgebra que contempla los siguientes contenidos (Ver imagen):

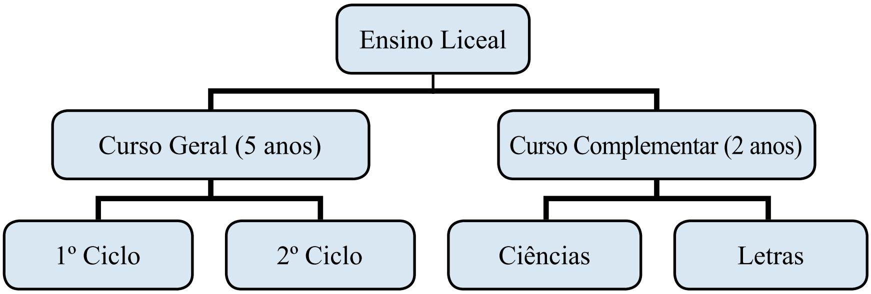
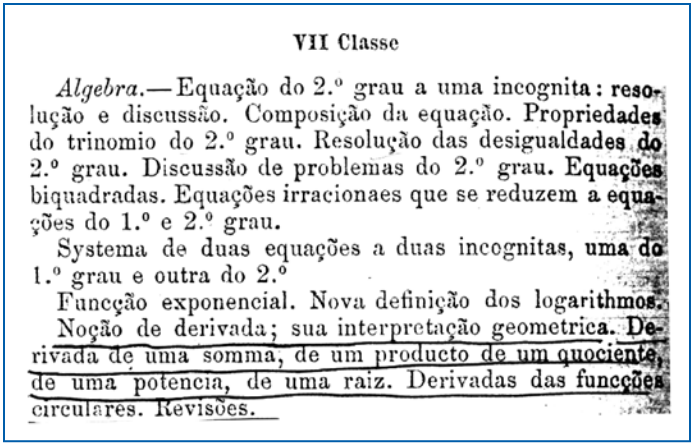


Fig. 1 Estructura de la enseñanza secundaria en Portugal en el 1905



VII Classe

Algebra.—Equação do 2.º grau a uma incognita: resolução e discussão. Composição da equação. Propriedades do trinomio do 2.º grau. Resolução das desigualdades do 2.º grau. Discussão de problemas do 2.º grau. Equações biquadradas. Equações irracionaes que se reduzem a equações do 1.º e 2.º grau.

Systema de duas equações a duas incognitas, uma do 1.º grau e outra do 2.º

Funcção exponencial. Nova definição dos logarithmos.

Noção de derivada; sua interpretação geometrica. Derivada de uma somma, de um producto de um quociente, de uma potencia, de uma raiz. Derivadas das funcções circulares. Revisões.

.

Con excepción del plan de estudios del 1936, del ministro de la Instrucción Pública Carneiro Pacheco, el estudio de las derivadas se ha mantenido siempre presente en los programas oficiales de la enseñanza secundaria hasta la actualidad. Pero, las aplicaciones de las derivadas solo empiezan a constar en los programas oficiales a partir del plan de estudios del 1954, siendo ministro de la Educación Pires de Lima (Aires, 2006).

EL PLAN DE ESTUDIOS DEL 1954

Abordemos ahora el plan de estudios del 1954, empezando por el análisis del programa oficial que ha sido publicado.

Los nuevos programas de las disciplinas de la Enseñanza Secundaria han sido aprobados el 7 de Septiembre del 1954 (Decreto nº 39807, do Diário de Governo nº 198 del 7 de Septiembre del 1954) y, en el programa de Matemática, el concepto de derivada aparece en el 6º año del Curso Complementar de Ciencias.

Presentamos de seguida la estructura de este:

6.º ano

Álgebra

Breves noções sobre as sucessivas generalizações do conceito de número; representação geométrica do sistema dos números reais. Números complexos de duas unidades; forma algébrica; igualdade, desigualdade e operações. Noção elementar de variável e de função; expressão analítica de uma função; classificação das funções; funções inversas; representação geométrica de algumas funções.

Infinitamente grandes; infinitésimos; infinitésimos simultâneos; teoremas relativos ao produto e à soma de infinitésimos. Limite de uma variável; limite de uma função; operações sobre limites.

Noção elementar de continuidade de uma função.

Derivada de uma função num ponto; função derivada. Derivadas das funções algébricas. Aplicação ao estudo da variação das funções nos casos mais simples.

Propriedades dos polinómios inteiros.

Adição algébrica, multiplicação e divisão de polinómios.

Divisão por $(x-a)$; polinómio identicamente nulo; polinómios idênticos; princípio das identidades; método dos coeficientes indeterminados; regra de Ruffini.

Fracções algébricas. Símbolos de impossibilidade; símbolos de indeterminação da forma

$$\frac{0}{0}, \ \frac{\infty}{\infty} \ \text{e} \ 0 \times \infty;$$

verdadeiro valor de uma expressão que se apresenta sob a forma indeterminada.

Verificamos que, después del estudio de la derivada, apenas surge la indicación del estudio de las aplicaciones de esta al estudio da la variación de funciones en los casos simples.

Una vez que vigoraba el régimen del libro único[1], al final del programa surge la información del nombre de los libros. Para el tema que estamos analizando se encuentra la siguiente referencia: *Compêndio de Álgebra, num volume.*

EL LIBRO ÚNICO

En el 1947 empieza a vigorar el régimen del libro único, habiendo sido aprobado para el 3º ciclo de la enseñanza secundaria el *Compêndio de Álgebra* de António Augusto

1. En el 1947, a través del Decreto-Lei nº 36508 del 17 de Septiembre se da la reposición del libro único, una medida que ha provocado alguna contestación, pero que permanecerá vigorando hasta 1974

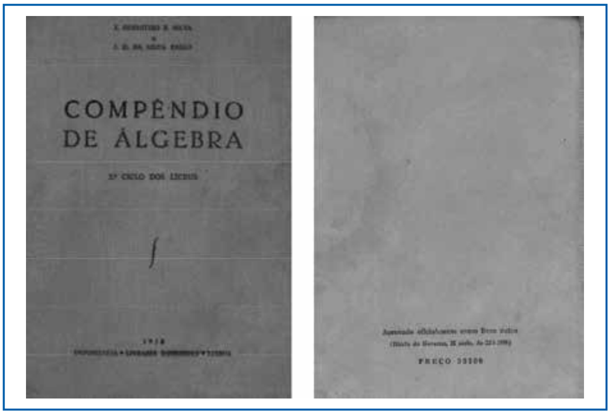
Lopes (D. G. nº 145, II Série, del 24 de Junio del 1950). Como la ley previa[2] este debería vigorar hasta el 1955 debiendo ser abierto concurso para presentación de libros de texto hasta el final del mes de Septiembre del año anterior al que se empezaría el nuevo período, lo que ha acontecido el 18 de Septiembre del 1954 (D.G. nº 221, III Série).

António Augusto Lopes, el autor del libro único de Álgebra para el 3º ciclo de la enseñanza secundaria, ha sometido de nuevo su libro de texto a este concurso donde también han concursado otros dos libros cuyos autores eran profesores bien conocidos y conceptuados en el espacio académico. El primer de autoría de António Nascimento Palma Fernandes y Francisco Maria Gonçalves – *Elementos de Álgebra para o 6º ano do ensino secundário* - y el segundo de António Augusto Ferreira de Macedo, António Nicodemos Sousa Pereira y Alfredo Tenório de Figueiredo - *Compêndio de Álgebra, 3º ciclo liceal. 1ª parte - 6ºano*.

El Profesor José Duarte da Silva Paulo ha sido nombrado como relator para emitir opinión sobre los libros candidatos a este concurso, que ha tenido como resultado la no aprobación del libro único de Álgebra para el 3º ciclo de la enseñanza secundaria.

Para resolver este problema, todavía en 1955, ha sido abierto un nuevo concurso para presentación de los libros destinados al 3º ciclo de la enseñanza secundaria, en particular para el *Compêndio de Álgebra* al cual se ha presentado mas un libro à la lista de los anteriores: el *Compêndio de Álgebra* de José Sebastião e Silva y José Duarte da Silva Paulo, este último autor era precisamente el relator del anterior concurso. Pero, ha sido necesario esperar tres años para que se publicase el resultado del referido concurso, habiendo sido aprobado el *Compêndio de Álgebra para o 3º ciclo* de José Sebastião e Silva y José Duarte da Silva Paulo (D.G. nº 18, II Série, del 22 de Enero del 1958).

De esta forma, en este periodo de tiempo, entre el 1950 y 1958, podemos encontrar cuatro compendios destinados al Álgebra para el 3º ciclo de la enseñanza secundaria, exactamente los cuatro libros de texto que habían sido candidatos al último concurso del 1955. Presentamos aquí la capa e contra capa del libro de texto aprobado.



Importa todavía referir que todos los ejemplares de este libro de texto estaban firmados y autenticados por el Ministerio da la Educación Nacional.

2. Articulo 391, nº 1 e nº 2 del decreto nº 36 508 (Estatuto do Ensino Liceal) do D. G. nº 216, I Serie, del 17 de Septiembre del 1947.

Este libro tuvo varias ediciones a lo largo de los años que han sufrido algunas alteraciones. De esta forma, iremos hacer el análisis de las cuatro ediciones que nos han parecido representativas de la época.

La obra, de José Sebastião e Silva y de J. D. Silva Paulo, intitulada *Compêndio de Álgebra, 6º e 7º Ano, 3º Ciclo - Ensino Liceal*, ha sido publicada el 1958 y el 1960 por la Librería Rodrigues (Aprobado como libro único por el D. G. nº 18, 2ª Serie del 22/01/1958). El 1963 ha sido publicada en Lisboa por la librería Bertrand (Irmãos), Lda, (Aprobado como libro único por el D. G. nº 100, 2ª Serie del 24/04/1963) y el 1968 ha sido publicada en Braga por la Librería Cruz (Aprobado como libro único por el D. G. nº 110, 2ª Serie del 08/05/1968).

Veamos ahora las características de esta obra.

La edición del *Compêndio de Álgebra* del 1958 estaba repartida en dos partes: una para el sexto año y otra para el séptimo. Los compendios editados después ya estaban separados para los dos años, uno para el sexto y otro para el séptimo.

En la parte dedicada al sexto año encontramos un capítulo dedicado à la derivada, estructurado da siguiente forma:

Después de analizados los cuatro compendios de Álgebra, candidatos a libro único del 3º ciclo de la enseñanza secundaria, concluimos que nengún de los libros, más allá de este, presenta problemas de aplicación de las derivadas ahora designados de problemas de optimización, donde podemos concluir que es exactamente con este libro de texto que se asiste a la introducción de los problemas de optimización.

En este libro es clara la preocupación, por parte de los autores, en presentar una nota introductoria al concepto para una mejor comprensión del tema. Existe también el cuidado en introducir una nota histórica con el objetivo de permitir a los alumnos comprender cuales los matemáticos que han estudiado el tema así como las varias etapas por las que ha pasado el Cálculo Diferencial.

LOS PROBLEMAS DE OPTIMIZACIÓN PRESENTES EN EL LIBRO ÚNICO

Los problemas de optimización se encuentran en el cuarto punto del libro de texto, dedicado a las aplicaciones de las derivadas. En este libro, los autores empiezan por explicar el sentido de la variación de una función, a partir de la señal de la derivada, y después presentan la aplicación de los teoremas enunciados y por fin dos ejemplos de aplicaciones concretas. Encontramos dos problemas de optimización enunciados como

"Ejemplos de aplicación concreta del sentido de la variación de una función", seguidos de la respectiva resolución. Existen después, al final del capítulo, mas siete problemas de optimización, en la parte dedicada a los ejercicios de aplicación, las respectivas respuestas surgen en el final del enunciado de todos los ejercicios.

Identificamos tres problemas de Geometría Métrica, dos de Aritmética y cuatro de Medida en Contexto Real. Los problemas están numerados de 1 a 9, teniendo en cuenta el orden por la cual surgen en el libro de texto.

Presentamos ahora la lista de los problemas de optimización encontrados.

Problemas de Geometría Métrica

1. *De entre los triángulos rectángulos cuya hipotenusa mide 6 cm, determinar los que tengan área máxima* (Silva y Paulo, 1958, 1960, 1963, 1968, p.230).
3. *Exprimir el área, A, de un rectángulo, como función de uno de los lados, x, suponiendo que el perímetro es igual a 20. Desenar la gráfica de la función en el intervalo [0, 10]. Determinar, gráficamente y analíticamente, el valor de x que torna el área máxima* (Silva y Paulo, 1958, 1960, 1963, 1968, p.236).
6. *Un rectángulo está inscrito en un semicírculo de rayo fijo, r. Exprimir el área, A, del rectángulo, como función de la base, x. Determinar el valor de x para el cual el área es máxima* (Silva y Paulo, 1958, 1960, 1963, 1968, p.236).

Problemas de Aritmética

4. *La suma de dos números x y y, es una constante a. Cuando es máximo su producto (P = x.y)?* (Silva y Paulo, 1958, 1960, 1963, 1968, p.236).
5. *El producto de dos números positivos, x y y, es una constante k. Cuando es mínima su suma (S = x + y)?* (Silva y Paulo, 1958, 1960, 1963, 1968, p.236)

Problemas de Medida en Contexto Real

2. *Se pretende construir una caldera cilíndrica, cerrada, con un dado volumen V, de manera que su área total sea mínima. Determinar el rayo de la base, r, y la altura, h, de la caldera en tales condiciones* (Silva y Paulo, 1958, 1960, 1963, 1968, p.231).
7. *Una caja rectangular, sin tapa, de capacidad v, fija, tiene la base cuadrada. Exprimir el área total de la caja como función del lado, x, de la base. Determinar el valor de x para la cual el área es mínima* (Silva y Paulo, 1958, 1960, 1963, 1968, p.236).
8. *En una hoja rectangular de zinc, con dimensiones de 30 cm por 40 cm, se han cortado, en los cuatro cantos, cuatro cuadrados iguales, doblando-se en seguida la hoja de forma a obtener una caja abierta en la parte superior. Determinar el volumen de la caja como función del lado del cuadrado que se ha cortado en cada*

canto. Cual debe ser la medida del lado del cuadrado para que la caja tenga volumen máximo? (Silva y Paulo, 1963, 1968 p.253).

9. *Se pretende construir un gasómetro cilíndrico de volumen V. Determinar la relación que debe existir entre el rayo de la base y la altura para que el coste de la chapa metálica para la construcción de la superficie lateral y de la base sea mínimo. Suponga-se que se emplea chapa de la misma espesura y de la misma cualidad en toda a superficie* (Silva y Paulo, 1963, 1968, p.253).

Observemos ahora las características de los problemas. Para tal haremos un análisis de estos, basada en las cuatro fases del modelo de resolución de problemas propuesto por Polya. Según Polya para resolver un problema debemos seguir los pasos siguientes:

- **Paso 1:** *Comprensión del Problema:* Identificar la incógnita, los datos y la condicionante; Verificar si es posible satisfacer la condicionante, se esta es suficiente para determinar la incógnita; Trazar una figura.
- **Paso 2:** *Estabelecimiento de un plan:* Encontrar la conexión entre los datos y la incógnita y verificar si es necesario considerar problemas auxiliares.
- **Paso 3:** *Ejecución del plan:* Verificar cada paso, verificar si cada paso está correcto.
- **Paso 4:** *Verificacion/Reflexión:* Examinar la solución obtenida, verificar si ese resultado es posible.

Dice el autor que:

> Em primeiro lugar, temos de compreender o problema, temos de perceber claramente o que é necessário. Em segundo, temos de ver como os diversos elementos estão relacionados, como a incógnita se relaciona com os dados, para ter una ideia da resolução, para estabelecer um plano. Em terceiro lugar, executamos o nosso plano. Finalmente, em quarto lugar, olhamos para trás, fazemos una revisão da resolução completa examinando-a a e discutindo-a (Polya, 2003, p. 27).

De esta forma, en el análisis efectuado a cada uno de los problemas, tuvimos en cuenta los cuatro aspectos siguientes:

- Forma de Enunciado: Identificamos la forma en que el problema está enunciado
  - Proposición (PR): Problemas enunciados como una proposición
  - Ejemplo (EX): Problemas enunciados como ejemplos
  - Problema (PB): Problemas enunciados como problema
  - Aplicación (AP): Problemas enunciados como aplicación
  - Ejercicio (EXR): Problemas enunciados como ejercicio
- Tipo de problema: Identificamos el contexto en que este problema se encuadra
  - Geometría Plana (GP)
  - Geometría Espacial (GE)
  - Aritmética (AR)
  - Física (FI)
  - Astronomía (AS)
- Tipo de optimización: Identificamos lo que se pretende optimizar en el problema

  - Distancia (OD)
  - Área (OAR)
  - Volumen (OV)
  - Producto (OP)
  - Ángulo (OAN)
  - Razón (OR)
  - Tiempo (OT)
- Tipo de resolución: Identificamos cómo se resuelve el problema. Si se realiza una demostración, cuando problema se propone en forma de proposición, o se presenta la resolución en los casos restantes.
  - Demostración (DEM)
  - Resolución (RES)

Empecemos el análisis de las características de los problemas, repartidas por las cuatro fases del modelo de Polya.

Paso 1: Comprensión del problema:

Examinando las características que dicen respecto con la primera fase, verificamos que solo dos problemas presentan la respectiva resolución (1 y 2). Ningún de los enunciados se encuentra acompañado de gráficos, figuras o esquemas auxiliares, ni los problemas que presentan resolución.

Identificamos, esencialmente, problemas geométricos, tres problemas de geometría métrica (1, 3 y 6) y cuatro problemas de medida en contexto real (2, 7, 8 y 9). Los restantes tres problemas son problemas aritméticos.

Verifiquemos ahora que tipo de función se pretende optimizar. En los problemas geométricos, se pretende optimizar el área: En el problema 1 se optimiza el área de un triangulo rectángulo dada la medida de la hipotenusa, en el problema 3 se pretende optimizar el área de un rectángulo dada la medida del perímetro, en el problema 6 también se optimiza el área de un rectángulo, pero en este caso es un poco más complexo porque el rectángulo se encuentra inscrito en una circunferencia, de tal forma que será necesario determinar su longitud y su largura en función del rayo de la circunferencia; en el problema 6 se pretende determinar el área máxima de un sector circular, dado su perímetro. Los restantes problemas en que se pretende optimizar el área son de geometría espacial, siendo que en los problemas 2 y 9 se pretende optimizar el área de un cilindro dado su volumen y en el problema 7 se pretende optimizar el área de un paralelepípedo dado su volumen.

El problema 8 tiene como objetivo optimizar el volumen: se optimiza el volumen de una caja dadas las dimensiones da la hoja a utilizar para su construcción. Cuanto a los problemas aritméticos, verificamos que en el problema 4 se pretende optimizar el producto de dos números dada su suma y en el problema 5 se pretende optimizar la suma de dos números dado su producto.

Ningún problema tiene figuras o esquemas auxiliares. Cuanto a los datos fornecidos en el enunciado del problema, verificamos que la mayoría de los problemas presenta datos genéricos (2, 4, 5, 6, 7 y 9) y apenas tres problemas presentan datos numéricos (1,3 y 8).

También el enunciado es en la mayor parte de los problemas un enunciado simples, o sea, solo es colocada la cuestión de optimización y solo cuatro de los problemas encontrados presentan un enunciado que orienta/encamina en la resolución del problema (3, 6, 7 y 8).

Observamos que, en el problema 3, con base en esta forma de enunciar el problema, el alumno sabe que tendrá de empezar por determinar el área del rectángulo en función de uno de los lados y que después irá dibujar el gráfico de la función. Estas dos cuestiones son extremamente útiles una vez que, cuando se coloca la última parte de la cuestión, donde se pretende optimizar el área, el alumno ya tendrá casi todo el trabajo realizado.

Paso 2: Estabelecimiento de un plan

Pasando ahora a las características relativas a la segunda fase del modelo de Polya observamos que, en relación a la función auxiliar que permite relacionar las variables, esta en la mayor parte de los problemas, es una función que surge explícitamente, estando implícita solo en tres problemas (1, 6 y 8).

Comparando los problemas 3 y 8 verificamos que, en el problema 3, es fornecido el valor del perímetro y se pide para optimizar el área. Así, es sencillo para el alumno verificar que la función auxiliar será determinada a partir del valor del perímetro. En contrapartida, en el problema 8, para determinar el volumen, el alumno tendrá que determinar el longitud, la largura y la altura de la caja, una vez que solo es fornecida la medida de los lados de la hoja y el facto de ser retirados cuatro cuadrados de los cantos, el alumno tendrá de utilizar la noción de distancia para verificar que el longitud/largura de la caja será la diferencia entre el longitud/largura de la hoja y el longitud/largura de los dos cantos, y la altura de la caja será la medida del lado del cuadrado a retirar de los cantos.

Las nociones aplicadas en la resolución de los problemas son, para los problemas geométricos, la noción de distancia, el Teorema de Pitágoras y las fórmulas de cálculo del perímetro, del área y del volumen. La noción de distancia es utilizada en el problema 8, es fornecida la medida de los lados de una hoja rectangular y a partir de ahí tiene que se determinar la medida del longitud, de la largura y de la altura de la caja formada después de cortar cuatro cuadrados de los cantos con la misma medida. El Teorema de Pitágoras se aplica en la resolución de los problemas 1, 6 y 8: en el primer problema es dada la hipotenusa de un triangulo rectángulo y se pretende escribir la medida de uno de los catetos como función del otro cateto, en el segundo problema tiene de se determinar la base y la altura de un rectángulo inscrito en un semicírculo a partir del rayo y en el último se pretende determinar el rayo de la base y la altura de un cilindro inscrito en una esfera, dado el rayo de esta. En relación al problema en que se utiliza la fórmula de cálculo del perímetro (3), es dado el perímetro del rectángulo. Cuanto a los tres problemas en que se utiliza la fórmula de cálculo del volumen (2, 7 y 9), en el primer y en el último es dado el volumen de un cilindro para determinar la medida de la altura en función de la medida del rayo de la base, en el segundo es dado el volumen de una caja rectangular con la base cuadrada que tiene de ser utilizada para determinar la medida de la altura de la caja en función del lado de la base. Para los problemas aritméticos se utilizan las nociones de suma y de producto. En el problema 5 es dado el producto de dos números que será utilizado para determinar uno de los números como función del otro y en el problema 4 es dada la suma de dos números que será utilizada para determinar uno de los valores como función del otro.

Para delinear la estrategia de resolución de los problemas, verificamos que cinco problemas surgen por la primera vez en este período, dos ya habían surgido en obras históricas (3 y 4) y dos fueran retirados del enunciado de exámenes (1 y 2).

Paso 3: Ejecución del plan

Pasemos ahora a las características que se prenden con la tercera fase del modelo de Polya. Empezando por el tipo de funciones utilizadas para optimizar, hemos visto que solo surgen tres tipos de funciones. Na mayor parte de los problemas surge, para optimizar, una función polinomial, en tres problemas aparece una función racional (2, 7 y 9) y apenas en dos problemas una función irracional (1 y 6). En los problemas en que aparece una función racional, esta surge porque se ha utilizado la fórmula de cálculo del área o del volumen para determinar el valor de una variable como función da otra variable. Cuanto a los problemas en que se obtiene una función irracional, esta surge una vez que se ha aplicado el Teorema de Pitágoras para determinar el valor de una de las variables como función de la otra variable.

Cuanto al esquema utilizado para el cálculo de máximos y mínimos, en los problemas que presentan resolución, notamos que los autores empiezan por calcular la derivada de la función a optimizar, después calculan los ceros de la derivada y, al final, estudian la señal de la derivada, y concluyen de seguida si el punto es un máximo o un mínimo. Veamos la resolución del problema 2 presentada por los autores: (Ver Imagen)

Paso 4: Verificación/Reflexión

Para terminar, con relación a la fase de Verificación/Reflexión, observamos que el valor pedido es explícito en seis problemas (2, 3, 6, 7, 8 y 9), o sea, el autor indica claramente el valor que pretende. El valor pedido se encuentra implícito en los restantes tres problemas (1, 4 y 5), o sea, en estos el autor no indica explícitamente el valor que pretende.

En el problema 1 apenas se pide para determinar los triángulos que tengan área máxima, quedando implícito que lo que se pretende es la medida de los catetos, en cuanto que, en el problema 6 el autor pide explícitamente para se determinar el valor de x.

II. *Pretende-se construir uma caldeira cilíndrica, fechada, com um dado volume* V, *de modo que a sua área total seja mínima. Determinar o raio da base,* r, *e a altura,* h, *da caldeira em tais condições.*

A área e o volume da caldeira são, respectivamente:

$$S = 2\pi r^2 + 2\pi r \cdot h, \qquad V = \pi r^2 h.$$

Da segunda fórmula deduz-se $h = V/(\pi r^2)$, o que permite exprimir S como função *só* de r:

$$S = 2\pi r^2 + \frac{2V}{r}$$

A derivada de S em *relação a* r será pois

$$S'_r = 4\pi r - \frac{2V}{r^2} = \frac{4\pi r^3 - 2V}{r^2}$$

e o seu sinal é portanto o de $4\pi r^3 - 2V$. Como

$$4\pi r^3 - 2V = 4\pi\left(r^3 - \frac{V}{2\pi}\right),$$

será $S'_r > 0$, $S'_r < 0$ ou $S'_r = 0$, conforme for

$$r > \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}, \qquad r < \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}} \qquad \text{ou} \qquad r = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}};$$

logo a função S de r é decrescente à esquerda e crescente à direita do ponto $r = \sqrt[3]{V/(2\pi)}$, sendo portanto *mínima* neste ponto. E como então se tem

$$h = \frac{V}{\pi r^2} = \sqrt[3]{\frac{4V}{\pi}} = 2 \cdot \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}} = 2r,$$

conclui-se que *a área total da caldeira é mínima quando a altura é igual ao diâmetro da base.*

CONCLUSIÓN

Con este trabajo concluimos que los programas oficiales de Matemática para la enseñanza secundaria de 1954, (Decreto nº 39807, del Diário de Governo nº 198 del 7 de Septiembre del 1954) y el libro único - Compêndio *de Álgebra para o 3º ciclo do ensino liceal*, de Sebastião e Silva y Silva Paulo – aprobado como libro único (D.G. nº 18, II Serie, del 22 de Enero del 1958), constituyen un marco en el estudio da las aplicaciones de las derivadas, una vez que es con estos que se asiste a la introducción del estudio de los problemas de optimización en la enseñanza secundaria, en Portugal. En verdad, y tal como ya habíamos referido anteriormente, en los otros compendios de Álgebra para el 3º ciclo de la enseñanza secundaria publicados en la misma época, no trataban de las aplicaciones de las derivadas, concretamente a partir de los problemas de optimización.

Importa todavía decir que en el *Compendio de Álgebra para o 3º ciclo do ensino liceal*, de Sebastião e Silva y Silva Paulo los problemas de optimización son caracterizados por problemas en que no aparece cualquier esquema, figura o gráfico como auxiliar de la interpretación del problema o para ayudar en la resolución. No aparecen problemas de Geometría Analítica, de Física o Economía y también no surgen problemas en que se pide, a los alumnos, para elaborar un relatório. La resolución se hace de una manera bastante explícita, identificando los extremos con base en la señal de la derivada.

De esta forma, podemos afirmar que Sebastião e Silva y Silva Paulo han sido pioneros en el abordaje de los problemas de optimización en los libros de texto, destacado a un tema que merece una atención especial en los libros de texto de la Enseñanza Secundaria.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Aires, A. P. (2006) *O conceito de derivada no ensino secundário em Portugal ao longo do século XX: Una abordagem histórica através dos planos curriculares e manuais escolares.* Salamanca (Tese de doutoramento apresentada na Universidade de Salamanca).

Bisquera, R. (1989) *Métodos de investigación educativa*. Madrid: CEAC.

Carvalho, R. (2001) *História do ensino em Portugal*. Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian.

González Astudillo, M. T. (2002) *Sistemas Simbólicos de Representación en la Enseñanza del Análisis Matemático: Perspectiva Histórica.* Salamanca: Ediciones Universidad de Salamanca.

Polya, G. (2003) *Como resolver problemas*. Lisboa: Gradiva. [Traducción del libro How to solve it: A New Aspect of Mathematical Method. Princeton University Press. (1973)].

Proença, M. C. (1998) *O Sistema de ensino em Portugal (Séculos XIX-XX)*. Lisboa: Edições Colibri.

Ruiz-Berrio, J. (1997) El método histórico en la investigación histórico-educativa. Em N. De Gabriel e A. Viñao (eds.) *La investigación histórico-educativa.* Barcelona: Ronsel.

Santiago, A. (2008) *Evolução histórica dos problemas de optimização e o seu tratamento no Ensino Secundário português nos séculos XX e XXI.* Salamanca (Tese de doutoramento apresentada na Universidade de Salamanca).

Schubring, G. (1987). On the Methodology of Analysing Historical Textbooks: Lacroix as Textbook Autor. *For the learning of mathematics* 7(3), 41-51.

Schubring, G. (1989). *Categorías para la investigación en la historia social de la enseñanza de la matemática y algunos modelos característicos*. Traduzido por A. Orellana e L. Rico.

Sierra, M (Coord.) (2003). *Evolución de la enseñanza del Análisis Matemático y del Álgebra: de los libros de texto a las nuevas tecnologías*. Salamanca: Dpto. Didáctica da Matemática y CE (Memoria Inédita).

Silva, J. S. y Paulo, S. (1958). *Compêndio de Álgebra, 6º e 7º Ano, 3ºCiclo -Ensino Liceal*, Livraria Rodrigues.

Silva, J. S. y Paulo, S. (1960). *Compêndio de Álgebra, 6º e 7º Ano, 3ºCiclo - Ensino Liceal*, Livraria Rodrigues.

Silva, J. S. y Paulo, S. (1963). *Compêndio de Álgebra, 6º e 7º Ano, 3ºCiclo - Ensino Liceal*, Lisboa: Bertrand (Irmãos).

Silva, J. S. y Paulo, S. (1968). *Compêndio de Álgebra, 6º e 7º Ano, 3ºCiclo - Ensino Liceal*, Braga: Livraria Cruz.

Épsilon *- Revista de Educación Matemática* ***2012, Vol. 29(3), nº 82, 23-40, ISSN: 1131-9321***

Aparición espontánea de construcciones simétricas durante el juego libre en Educación Infantil

Carlos de Castro Hernández
Universidad Complutense de Madrid

Resumen: *Presentamos el resultado del análisis de la documentación recogida en varias experiencias de juego libre de construcción, desarrolladas en aulas de escuelas infantiles con niños de 2 a 6 años. En dichas experiencias, hemos observado ejemplos de construcciones simétricas que surgen espontáneamente durante el juego libre en todas las edades. Las simetrías se producen en construcciones individuales. Parecen evolucionar desde la simetría del grupo diedral D2 (2 a 5 años) a la simetría bilateral (5 a 6 años). Concluimos con la propuesta de inclusión de la simetría en el currículo español de Educación Infantil.*

Palabras clave: *Matemáticas, Geometría, Simetría, Educación Infantil, Juego de Construcción.*

Spontaneous emergence of symmetrical constructions during free block play in Early Childhood Education

Abstract: *We present the result of an analysis of documentation taken from experiences developed in nursery schools with children from 2 to 6 years. In these experiences, we have observed examples of symmetrical constructions that emerge spontaneously during free play at all ages. Symmetrical constructions appear in individual constructions. They seem to evolve from the symmetry of the dihedral group D_2 (2 to 5 years) to bilateral symmetry (5 to 6 years). We conclude with a proposal for the inclusion of symmetry in the Spanish curriculum of Early Childhood Education.*

Key *words: Mathematics, Geometry, Symmetry, Block Play, Early Childhood Education.*

INTRODUCCIÓN: LA SIMETRÍA EN LAS CONSTRUCCIONES INFANTILES

El concepto de *simetría* está presente en casi todas las disciplinas académicas. Una búsqueda de este término en la base de datos Dialnet (http://dialnet.unirioja.es/servlet/buscador), arroja como resultado que algún tipo de simetría se estudia en áreas tan diferentes como las de la física, psicología, paleontología, cosmología, empresariales, arquitectura, neurología, literatura, derecho constitucional… Podríamos decir que cada forma de mirar el mundo alberga en sí una concepción de la simetría, que va desde lo matemático y lo científico a lo metafórico: la simetría como equilibrio, como aspectos emparejados de la realidad, etc. La simetría sale continuamente al encuentro. Está en nuestro cuerpo, en nuestros movimientos, y en el entorno; la encontramos casi por todas partes. Weyl (1991), en un trabajo -considerado ya como un 'clásico' de la divulgación matemática- en el que explica el papel de la simetría en el arte y en la naturaleza, resalta que "La simetría […] es una idea por la que el hombre […] ha intentado comprender y crear orden, belleza y perfección" (p. 3).

Este trabajo pretende suscitar la reflexión sobre las simetrías de las construcciones infantiles de niños de 2 a 6 años. Mi objetivo es mostrar que el concepto de simetría resulta muy "accesible" para los niños pequeños, dado que las construcciones simétricas surgen espontáneamente, sin haber mediado enseñanza alguna sobre este concepto, ya en niñas y niños de dos años. Esto hace que parezca razonable su inclusión en el currículo matemático de la Educación Infantil, asunto sobre el que volveré en las reflexiones finales. Este trabajo tiene también la finalidad de elaborar alguna conjetura sobre el desarrollo de la intuición infantil acerca de la simetría, que puedan servir de guía para futuras investigaciones.

Revisando antecedentes sobre el tema, hay que señalar que el hecho de que los niños, en edades propias de la Educación Infantil, realizan espontáneamente construcciones simétricas era ya conocido por Froebel [1782-1852], inventor del kindergarten o jardín de infancia. Froebel puede considerarse como un precursor de una idea que hoy se considera fundamental en Educación Infantil: Partiendo de la observación de la actividad espontánea infantil, podemos elaborar propuestas basadas en los intereses de las niñas y niños. Después, podemos profundizar con los niños en la investigación sobre cuestiones que concitan su interés, y tienen a su vez un interés curricular. Froebel, que había seguido estudios de cristalografía (Cuellar, 2004), donde la simetría juega un papel fundamental, y que había percibido el interés infantil por la misma, inventa un tipo de actividad para realizar con sus dones (materiales didácticos diseñados por él) y le pone un nombre bastante poético: las "formas de la belleza". Este tipo de actividad se hacía cada vez con un único don (en la Figura 1, izquierda, aparecen mezclados el tercer y el cuarto don en una recreación actual de este tipo de actividad) sobre una mesa de madera con la superficie cuadriculada, para que sirviera de sistema de referencia para la colocación de las piezas de construcción. En la Figura 1, la cuadrícula marcada en la mesa se sustituye por una cartulina cuadriculada y se ven dos construcciones simétricas. En las formas de la belleza, según las proponía Froebel, no se colocaban unas piezas sobre otras (como en la Figura 1, centro), sino que todas las piezas estaban situadas directamente sobre la mesa, formando un diseño "plano" (sin superposición de piezas). Las simetrías que hacían los niños en las *formas de la belleza* con los dones, solían ser simetrías rotacionales de orden

4 (de 90º). Por ejemplo, en la Figura 1, en el centro, vemos una construcción sin simetría bilateral, invariante por rotaciones de 90º.

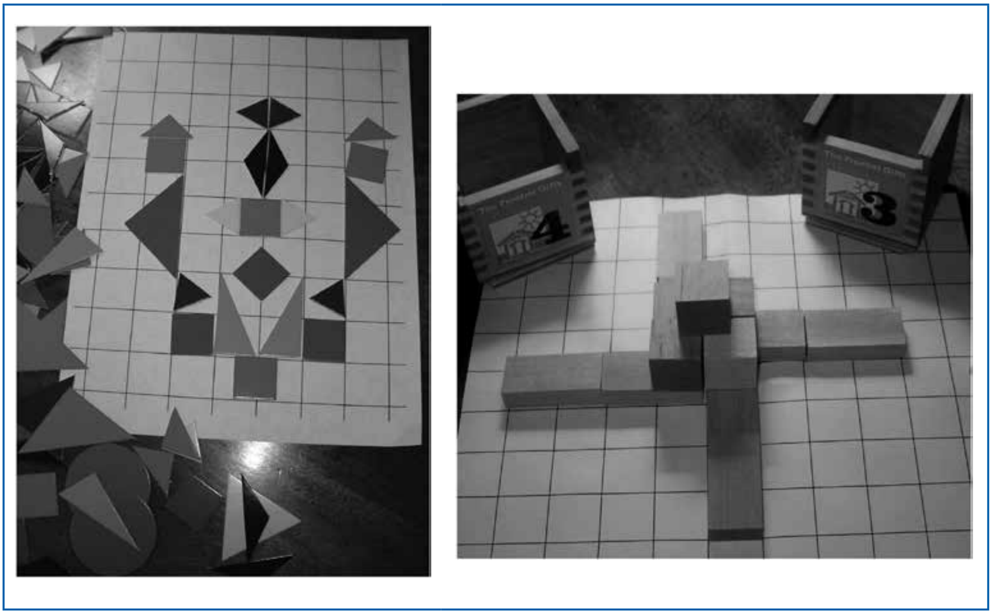


Figura 1. Formas de la belleza con el tercer y cuarto dones y con el séptimo don de Froebel (Ashton, 2010)

Para ilustrar mejor el tipo de actividad que se llevaba a cabo con los dones de Froebel, muestro el quinto don de Froebel en la Figura 2. Está formado por 27 cubos. Tres de los cubos están divididos en dos prismas triangulares cada uno y otros tres están divididos en cuatro prismas triangulares cada uno. En total son 21 cubos, 6 prismas triangulares (mitades de cubo) y 12 prismas triangulares (cuartos de cubo). En la Figura 2 (izquierda), observamos los tres tipos de piezas fuera de la caja. El juego con este material no era libre. Era un juego individual y no estaba permitida la destrucción de las construcciones. El material se desmoldaba como un flan y se iban formando

Figura 2. Quinto don de Froebel

unas construcciones a partir de otras, cambiando la posición de algunas piezas. Al final del trabajo, se debía volver al cubo inicial, para volver a guardarlo en su caja. Evidentemente, este tipo de propuesta ha cambiado mucho. Ahora se suelen proponer situaciones más abiertas de juego libre, trabajo en grupo que potencie el desarrollo social y se permite la destrucción de las construcciones (aunque sólo de las propias), aspecto que suele ser explícitamente advertido a los niños al establecer con ellos las normas del juego.

Dentro de la Educación Matemática, el aprendizaje de la simetría es un tema bastante estudiado, aunque no tanto en la Educación Infantil, ni en el contexto del juego de construcción. Guillén (2010) hace una revisión de trabajos y líneas de investigación sobre el uso de sólidos para el aprendizaje de la geometría y como ámbito de investigación. Dentro de este trabajo, dedica un apartado a la exploración con caleidoscopios, relacionando los espejos que los forman con los planos de simetría de los poliedros (1991, pp. 193-208). A pesar del interés y originalidad de esta propuesta, no es fácilmente aplicable a la Educación Infantil. Sin embargo, sí puede proporcionar ideas interesantes, como la elaboración de un caleidoscopio en Educación Infantil y la experimentación con él. En las escuelas infantiles de Reggio Emilia, es famoso el caleidoscopio "gigante", con forma de prisma triangular, apoyado en el suelo en una de sus caras laterales, y abierto por sus dos bases triangulares, dentro del cual se meten los niños para experimentar con su propio movimiento observando las reflexiones.

Finalizo este apartado explicando brevemente el tipo de simetría que suele observarse en las construcciones infantiles. Voy a referirme a los planos de simetría de las construcciones infantiles, dándoles el nombre de los planos anatómicos. Así, el *plano sagital* divide el cuerpo humano en partes izquierda y derecha; el *plano frontal*, lo divide en partes anterior y posterior; y el *plano horizontal* lo divide en la parte superior y la inferior. En este contexto, hay *simetría bilateral* cuando la figura tiene el plano sagital como único plano de simetría. Esta simetría es la propia de la figura humana, con la parte izquierda del cuerpo (externa y aproximadamente) simétrica con respecto a la parte derecha. El plano de simetría sagital puede aparecer combinado con el plano frontal. En este caso, la parte anterior de la construcción será simétrica de la parte posterior. Habrá además un eje de rotación vertical (corte de los planos de simetría sagital y frontal), con rotaciones de 180º que dejan la construcción invariante. La simetría es la típica de una pirámide recta de base rectangular (*grupo diedral* D_2). Una tercera situación que se puede dar es que el eje de rotación sea de 90º, en cuyo caso hay dos planos de simetría más. La simetría sería la propia de una pirámide cuadrangular recta (*grupo diedral* D_4). Para más detalles sobre estos tipos de simetría, puede consultarse el trabajo de Coxeter (1988).

LAS EXPERIENCIAS DE JUEGO DE CONSTRUCCIÓN

En estas experiencias han participado tres grupos de alumnos de Educación Infantil: un grupo de 3-4 años del CEIP Virgen de Peña Sacra, de Manzanares el Real; otro grupo de 5-6 años, del Colegio Las Naciones de Madrid; y otro grupo de 2-3 años (primer ciclo de Educación Infantil) de la Escuela Infantil El Limonero, de Parla. Los grupos de 2-3 años y de 5-6 años han participado durante un curso escolar, y el grupo de

3-4 años, ha participado durante dos cursos: 2009-2010 y 2010-2011. Por tanto, durante el último curso, las niñas y niños de este grupo tenían la edad de 4-5 años. Así, los participantes cubren todas las edades desde los 2 a los 6 años y en cada edad se ha podido observar la evolución en las construcciones durante un periodo de tiempo superior a la mitad de un curso. Pueden consultarse detalles sobre las matemáticas del juego de construcción con pequeños de 2-3 años en De Castro (2011) y en la Educación Infantil en De Castro, López y Escorial (2011).

El material de construcción

El material utilizado aparece en la Figura 3. Está inspirado en los bloques unidad (*unit blocks*) de Caroline Pratt [1867-1954], descritos en Wellhousen y Kieff (2001, p. 39) o en Hirsch (1996, p. 149), basados a su vez en los dones de Froebel (del tercer al sexto don, ver el quinto don en la Figura 2). El material está diseñado para favorecer la actividad matemática. En especial, es un material idóneo para los procesos de composición y descomposición, fundamentales en el aprendizaje de la geometría. Por ejemplo, la pieza llamada "unidad" (un prisma rectangular de 4 × 8 × 16 cm) puede componerse con dos medias unidades, con dos pilares largos, con cuatro pilares cortos, con ocho cubos de cuatro centímetros de arista, etc. Durante el trabajo de construcción, los niños establecen continuamente, y de forma espontánea, equivalencias entre distintas combinaciones de piezas, para resolver diversos problemas que les surgen durante la actividad de construcción.

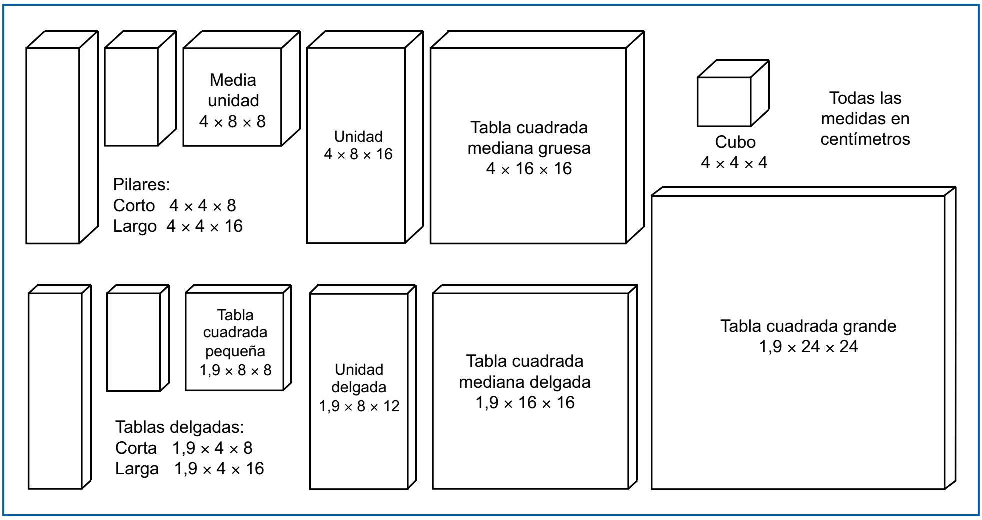


Figura 3. El material de construcción

Por otra parte, el material se ha diseñado buscando la estabilidad de sus piezas. En una experiencia anterior (Escorial y De Castro, 2011), utilizamos pilares con una sección cuadrada de 3 cm de lado y una longitud máxima de 24 cm. Ante la falta de estabilidad proporcionada por dicho material, cambiamos la sección de los pilares para que fuera un cuadrado de 4 cm de lado y decidimos reducir la longitud máxima del pilar a 16 cm. También hemos tenido en cuenta que el material sea de fácil reproducción, para favorecer que su uso pueda extenderse con facilidad.

Descripción de las sesiones de trabajo

Las sesiones dedicadas a la construcción han sido semanales en algunos grupos (2-3 y 5-6 años) y quincenales en otros (3-4 y 4-5 años). La duración de las sesiones ha sido aproximadamente de una hora. En la mayoría de los grupos se han llevado a cabo en el aula, separando una parte del mobiliario para tener espacio suficiente. En otros casos, se ha salido a los pasillos o se han aprovechado otras zonas comunes del centro. El trabajo puede considerarse de juego libre. Sólo se han elaborado, de acuerdo con los pequeños, unas normas básicas para el juego, como la de no destruir las construcciones ajenas, y se han dado instrucciones muy abiertas para guardar el material. Los niños podían en todo momento decidir si construían solos o dentro de un pequeño grupo.

LAS PRODUCCIONES DE LOS NIÑOS

Este apartado lo he dividido por edades. Esta organización permite observar la evolución que se va produciendo en las construcciones simétricas desde los 2 hasta los 6 años. En cada edad, he seleccionado las imágenes que considero más representativas de las construcciones simétricas. Al hilo de las figuras, comentaré aspectos que me parecen relevantes, como la posible intencionalidad de la simetría, o la influencia en la construcción de las capacidades motrices de los pequeños.

El grupo de 2-3 años

Las primeras construcciones que realizan los niños son los apilamientos horizontales (Figura 4) y verticales (Figura 5). Dentro de los apilamientos horizontales, hay un tipo descrito por Vereecken (1961) que se extiende hacia los dos extremos, y que es resultado de la acción simétrica de ir añadiendo dos figuras iguales, una con cada mano, a ambos extremos del apilamiento. Curiosamente, la acción simétrica conduce a una construcción simétrica. Este hecho ha sido descrito con detalle por Forman (1982). En este caso, la simetría final de la construcción parece accidental. Este es un tema sobre el que volveré más adelante.

En la Figura 6 observamos varias de las relaciones que se establecen entre la simetría y la motricidad. Por un lado, volvemos a ver que el niño al construir va tomando dos piezas iguales y colocándolas a ambos lados de la construcción. De nuevo, una acción simétrica, con piezas iguales, que se "repite" a la inversa en la acción simétrica de retirar con sumo cuidado las manos, para que no se caiga la construcción. Este es el instante captado en la Figura 6. El desarrollo se produce a la vez en ámbitos diversos, como el cognitivo,

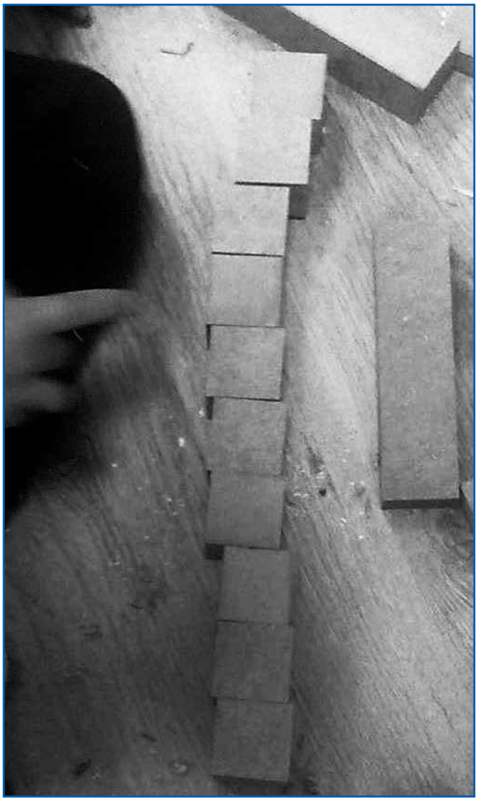


Figura 4. Los apilamientos lineales resultado de acciones simétricas

Figura 5. Simetría en la figura consecuencia de acciones simétricas

el motor, el afectivo, el social. En la figura observamos que la colocación no es todo lo simétrica que debería ser, debido al grado de desarrollo motor que alcanzan los pequeños a esta edad. Observamos en estos casos ejemplos de una simetría aproximada que, poco a poco, se va refinando.

La simetría tiene un modo muy diferente de experimentarse, de descubrirse, o de construirse, dependiendo de la situación en la que estén inmersos los niños. Dar palmas es un movimiento prácticamente simétrico; mirándonos en un espejo, también experimentamos la simetría; al construir, tenemos otra experiencia diferente de la simetría, que tiene sus propias leyes. En la Figura 7, observamos cómo se hace una construcción simétrica. Hay dos formas de elegir y colocar las piezas: Podemos elegir una pieza simétrica y colocarla de modo que el plano de simetría de la figura coincida con el plano de simetría de la construcción global. Esto se pone de manifiesto, en la Figura 7, en las dos piezas de abajo, colocadas de forma que, más o menos, coincidan sus mitades (o sus planos de simetría) que, a su vez, coinciden (o definen) el plano de simetría de la construcción. Hay otra forma de colocar piezas respetando la simetría: colocar dos piezas, una a cada lado del plano de simetría, y a la misma distancia del mismo. Esto se ve, en la Figura 7, en los dos cubos situados en la parte superior de la construcción.

Figura 6. Simetría, equilibrio y motricidad

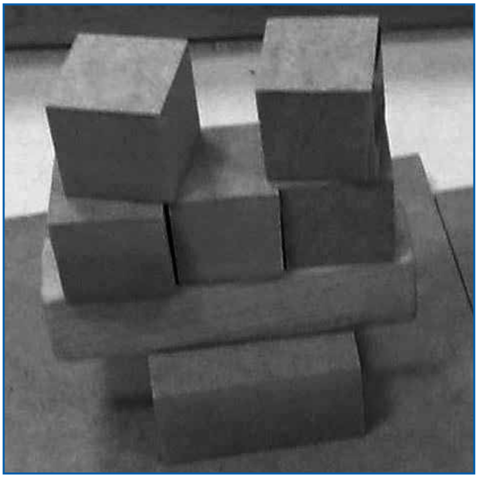


Figura 7. Simetría bilateral con 2-3 años

La Figura 8 nos ayuda a plantearnos el problema de la intencionalidad de las construcciones simétricas. Hay construcciones que son evidentemente simétricas, como resultado accidental de que todas las piezas del material son simétricas. Por ejemplo, si un niño de un año coloca un cubo sobre otro, la construcción formada por los dos cubos tiene 5 planos de simetría y 5 ejes de rotación. Sin embargo, el niño está simplemente apilando un cubo encima de otro. Este es el tipo de construcción más elemental evolutivamente, y juzgamos la simetría como accidental. Entonces, ¿cuándo podemos estar seguros de que la intención de un niño es hacer una construcción simétrica? Con la experiencia acumulada en trabajos de construcción, y con las indicaciones que nos dan las revisiones de la literatura, hemos llegado a adoptar dos criterios para juzgar la intencionalidad de la simetría: 1) Cuando vemos que en una construcción hay simetría bilateral o rectangular, observamos si hay piezas colocadas de las dos formas indicadas antes (piezas simétricas en el plano de simetría y piezas emparejadas a ambos lados del plano), y cuántas piezas hay colocadas así. Si las piezas colocadas así (respetando la simetría) son muchas, consideramos que hay demasiados indicios para que la simetría sea accidental. Por ejemplo, en la Figura 9, hay demasiados elementos respetando la simetría, como para considerarla accidental (realmente, todas las piezas respetan la simetría). 2) Cuando la construcción es muy sencilla, de las primeras que aparecen evolutivamente, como apilamientos, puentes, cerramientos en torno a una pieza simétrica, pisos (con cuatro pilares y una tabla) y, especialmente, si la construcción no tiene una

Figura 8. La intención de hacer construcciones simétricas

Figura 9. Un incontestable ejercicio de simetría

simetría bilateral o rectangular, que son las típicas hacia las que tienden las construcciones infantiles (como en el caso de un piso, que tiene simetría cuadrada), consideramos la simetría accidental. Este es el caso de la Figura 8, un apilamiento con simetría cuadrada. Con todo, hay casos límite donde es difícil establecer si hay intencionalidad o no de formar una construcción simétrica. Por ejemplo, en la Figura 5. A pesar de esto, este trabajo está pensado como un teorema de existencia. Basta con que exista un ejemplo claro de construcción intencionalmente simétrica, como el de la Figura 9, para decir que este fenómeno se produce a la edad del niño que ha realizado dicha construcción.

El grupo de 3-4 años

Cuando los niños de 3-4 años no han realizado juego de construcción de forma sistematizada durante el primer ciclo de Educación Infantil (0 a 3 años), sus construcciones son parecidas al principio a las que hacen los niños de 2-3 años. La evolución es algo más rápida, pero también comienzan con los típicos apilamientos horizontales lineales (como el de la Figura 4) que son resultado de movimientos simétricos. Así, en la Figura 10 observamos esta simetría en las acciones. El niño toma dos tablas cuadradas iguales, una con cada mano, y las pone juntas. A continuación, repite el esquema de añadir piezas iguales con ambas manos formando un apilamiento formado por cuatro tablas cuadradas (Figura 10). Vemos que la construcción es el resultado de la repetición de una acción simétrica.

Figura 10. Acción simétrica

Figura 11. Simetría y equilibrio

En la Figura 11 encontramos la relación que suelen establecer los niños bastante pronto entre simetría y estabilidad. El niño quiere construir una torre alta, parece que poniendo a prueba alguna conjetura sobre la estabilidad. Normalmente, los niños suelen aprender que las construcciones altas, para ser estables, deben ser más anchas por abajo y más estrechas por arriba. ¿Existe algún antídoto para la falta de estabilidad en caso contrario? Parece que sí: que la construcción sea simétrica. Por otra parte, es muy interesante observar que la simetría es aproximada. En la Figura 11 y en su continuación, en la Figura 12, vemos que al poner un pilar 'tumbado', encima de otro pilar más corto, para que la construcción sea simétrica, debe sobresalir la misma longitud del pilar superior por un lado que por el otro. Esto es así sólo de forma aproximada. ¿A qué se debe? Para Vereecken (1961), la respuesta está en que, pese a que para los niños el punto medio de una barra, igual que los extremos, es el más importante perceptivamente, los niños no dominan bien todavía las relaciones métricas (esto está en la línea de lo que apuntaba Piaget) y por tanto, al poner una pieza en la mitad de la otra, esto se hace de forma aproximada. También, vemos en la Figura 12 el típico gesto (también descrito por Vereecken, 1961) de separar las manos de forma simétrica, muy cuidadosamente, para evitar que la torre se caiga.

En la Figura 13 observamos el detalle de cómo un niño coloca una pieza sobre el plano de simetría de una construcción, sujetando los extremos de la pieza con ambas manos, en un gesto aproximadamente simétrico. Los niños elaboran las construcciones simétricas enfrente de sí, de modo que coinciden, en ciertos momentos de la construcción, aproximadamente, el plano de simetría del constructor y de la construcción (ver Figuras 16 y 17).

Figura 14. Rompiendo simetrías, para crear otro tipo de simetría

Figura 12. Ajustes en la colocación y psicomotricidad

Figura 13. Forma simétrica de tomar las piezas

En la Figura 14, un niño ha colocado un triángulo (un prisma triangular, equivalente a media tabla cuadrada) sobre un piso (cuatro pilares y una tabla). El piso tiene simetría cuadrada, pero al añadir la pieza superior, algunas simetrías se 'rompen' y pasa a tener simetría rectangular. Un compañero ha copiado la adición de este elemento en una construcción similar detrás de esta (Figura 14). En general, observamos una tendencia en la simetría hacia la bilateralidad.

Un aspecto que no hemos resaltado aún es que la construcción simétrica suele ser el resultado de un trabajo individual. Esto lo hemos observado en prácticamente todas las construcciones simétricas que hemos recopilado en el trabajo de documentación. A veces, un grupo de 3, 4 o 5 niños y niñas se juntan para construir y elaboran una gran construcción en la que se suman muchos elementos constructivos diferentes. En la

Figura 15. Simetría dentro del grupo

Figura 16. Simetría y equivalencia

Figura 17. Simetría y equilibrio

Figura 15 vemos una pequeña torre simétrica, que es el resultado de la aportación individual de un niño a una gran construcción realizada por 4 pequeños. Igualmente, en la Figura 21, el mirador simétrico es una aportación individual a la construcción conjunta del Palacio Real.

El grupo de 4-5 años

En las Figuras 16 a 18 se ve perfectamente la simetría bilateral de la fachada principal y la simetría delante- detrás, que se da en todas estas construcciones. Vemos de nuevo la relación entre simetría y equilibrio, especialmente en la Figura 17, y también el detalle de cómo la niña de la Figura 18 coloca la pieza superior de modo que su plano de simetría de la cara triangular coincida con el plano de simetría global de la construcción. Un detalle que hemos visto en la Figura 14 y en la 18 es que los triángulos resultan difíciles de combinar en la elaboración de construcciones y suelen emplearse, sobre todo, como remate decorativo.

En la Figura 19 tenemos una torre con dos planos de simetría perpendiculares y un eje de rotación de 180º. Su simetría es rectangular. Esta imagen se ha seleccionado porque, a pesar de tener la simetría que se indica, dicha simetría no parece intencional. La torre está construida muy claramente repitiendo un patrón formado por dos piezas (las dos de abajo), de modo que la de arriba va superpuesta a la anterior y rotada 90º. De hecho, si consideráramos la torre como un friso, tendría una simetría de traslación. ¿Por qué se considera la simetría de esta figura como no intencionada? Porque sabemos, por


Figura 18. La simetría como algo 'privado'


Figura 19. Dos planos de simetría

revisiones de teoría sobre el juego de construcción en la Educación Infantil (Gura, 1992; Johnson, 1996; Kersh, Casey y Young, 2008; y Vereecken, 1961) y por varios años de experiencia observando estas construcciones, que los niños a estas edades tienden a realizar patrones (repitiendo estructuras sencillas) y a elaborar construcciones simétricas (con simetría bilateral o de tipo D_2). En esta situación, pensamos que el niño que ha realizado la torre estaba fundamentalmente centrado en repetir el patrón, y que la simetría que tiene la torre, vista globalmente, es un resultado accidental producido por la repetición de un patrón. Lo mismo diríamos si vemos una torre formada por varios pisos construidos por cuatro pilares y una tabla cuadrada (como en la Figura 14, pero sin el triángulo superior). El hecho de que dicha torre tuviese la simetría cuadrada es para nosotros algo accidental, que tiene su origen en la repetición de una estructura sencilla. Esta cuestión de la intencionalidad en la simetría es fundamental, y es preciso desarrollar criterios claros para diferenciar la simetría intencional de la que no lo es. Una línea de trabajo prometedora consiste en identificar, como tendencias muy claras en la construcción infantil, la repetición y la simetría (con tendencia a la bilateral, no a la simetría rotacional).

El grupo de 5-6 años

En el último curso de Educación Infantil es donde hemos encontrado los ejemplos más claros de simetría bilateral en los que, además, se rompe la simetría delante-detrás (Figuras 22 y 23). En la Figura 20 vemos una composición con puentes con la

Figura 20. Un templo romano

Figura 21. El mirador del Palacio Real

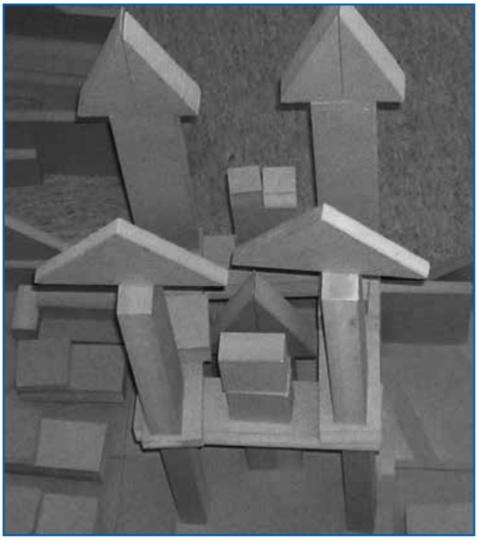


Figura 22. La torre del Palacio Real

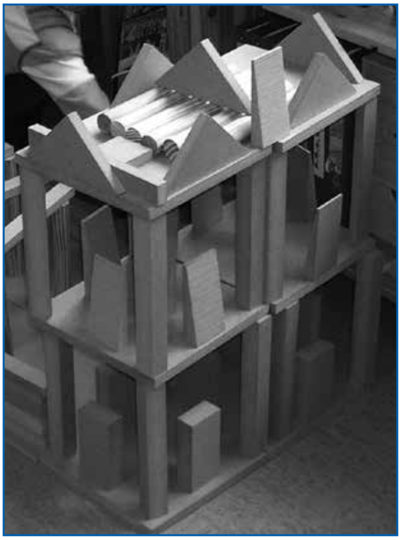


Figura 23. Simetría bilateral

simetría rectangular. Hay en la figura dos planos de simetría perpendiculares que se cortan en un eje de rotación de 180º. Es el patio central de un 'templo romano' al que, poco a poco, se irán incorporando elementos alrededor que ya no respetarán la simetría del elemento central. En la Figura 21, vemos de nuevo que la simetría suele asociarse desde muy temprano al equilibrio. Todo el 'mirador' del Palacio Real (las dos piezas superiores forman un asiento al que se añadirá un respaldo) está sustentado en dos pilares, unidos por un pilar horizontal, sobre el que descansan, en sus puntos medios, otros tres pilares atravesados. En las Figuras 22 y 23 hay elementos que rompen la simetría delante-detrás. En el caso de la torre del Palacio Real, son los pilares y los triángulos elegidos como remate en la parte superior los que diferencian claramente la parte trasera de la delantera. En la Figura 23, son los 'quitamiedos' del piso superior los que rompen

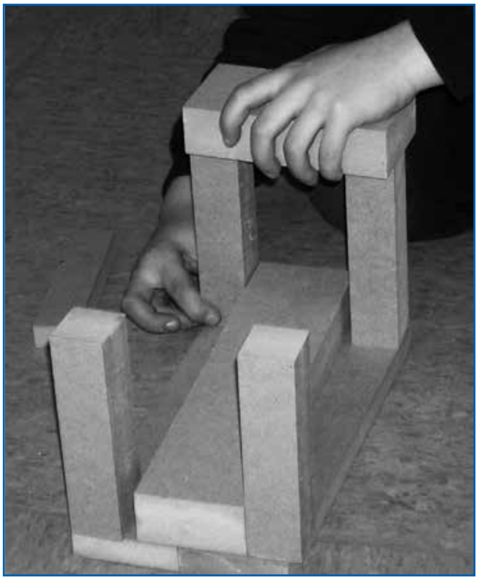


Figura 24. Proceso de elaboración

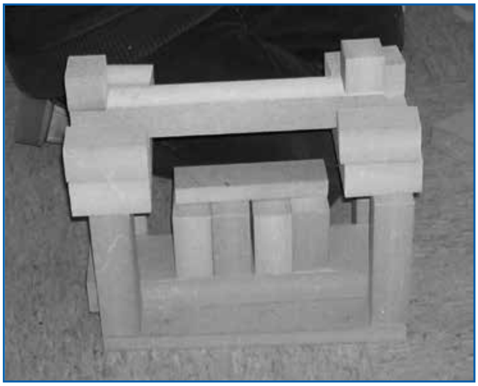


Figura 25. Simetría del grupo D2

Figura 26. Simetría bilateral al final

la simetría, distinguiendo la parte delantera de la trasera.

En las Figuras 24 a 26 puede seguirse el proceso de elaboración de una construcción simétrica. El paso de la Figura 25 a 26 es fundamental, y sólo lo hemos visto en el grupo de 5-6 años. En las Figuras 24 y 25, todavía son iguales las partes de delante y detrás de las construcciones. Vista de frente, la fachada principal de la construcción tiene simetría bilateral, pero la fachada principal es simétrica con respecto a la fachada trasera. Sin embargo, en la Figura 26, las fachadas delantera y trasera son claramente diferentes. Se han incorporado varias piezas que rompen claramente con esta simetría delante-detrás del plano frontal. La simetría que tiene la Figura 26 ya es la propia de la figura humana. Este cambio marca el final de la evolución de las construcciones simétricas a estas edades.

REFLEXIONES FINALES

Concluyo este trabajo con una pequeña reflexión sobre la posible (y deseable) inclusión de la simetría en el currículo de Educación Infantil, un comentario para las maestras y maestros de esta etapa, y con unas sugerencias de cara a futuros estudios. Para empezar, el concepto de simetría no aparece en el currículo español de Educación Infantil (MEC, 2008). Dentro de la parte dedicada a las matemáticas (área de conocimiento del entorno, bloque 1 del "medio físico"), se plantean como objetivos la "Identificación de formas planas y tridimensionales en elementos del entorno. Exploración de algunos cuerpos geométricos elementales. Nociones topológicas básicas (abierto, cerrado, dentro, fuera […]" (p. 1025). No aparece por ningún lado la noción de simetría, cuando hemos visto en este trabajo que dicha noción aparece claramente, aunque de forma intuitiva y no formal, desde los 2-3 años, todavía en primer ciclo de Educación Infantil. ¿Se debe esto a que el concepto de simetría es métrico y no topológico y sólo se proponen aquí contenidos de este tipo? Quizá este sea otro planteamiento del currículo geométrico de la Educación Infantil que haya que revisar en el futuro.

A diferencia del planteamiento español, en documentos curriculares que son referencia obligada en otros países, la simetría sí aparece explícitamente. Por ejemplo, en los estándares del NCTM (2003) se indica que, en último curso de Educación Infantil y en primer ciclo de Educación Primaria, los programas de enseñanza deben capacitar a los niños para: "Aplicar transformaciones y usar la simetría para analizar situaciones matemáticas" (p. 100). Más recientemente, en los *Curriculum Focal Points* (Fuson, Clements, y Beckmann, 2010), se indica, para niñas y niños de 5 y 6 años, que "con la orientación del maestro, los niños descubren la simetría no sólo en figuras, como los rectángulos, sino también en su entorno. Así comienzan a diseñar y a extender la simetría en sus construcciones con bloques" (p. 61). También en Holanda, en la influyente publicación del Instituto Freudenthal (van der Heuvel-Panhuizen y Buys, 2005), se recomienda, para los dos últimos cursos de Educación Infantil, el juego de construcción con bloques de madera. Así mismo, se dedica un apartado completo a explicar cómo realizar con alumnos de infantil actividades con espejos, que implican el estudio de la reflexión y la simetría (pp. 199-209). No obstante, reconozco la injusticia de comparar el currículo español (por su obligada brevedad), con extensos documentos de desarrollo curricular de otros países.

Espero que este trabajo proporcione ideas útiles para la práctica de las maestras y maestros de Educación Infantil. A veces, en la práctica diaria, la actividad de juego libre infantil no resulta fácil de interpretar y, por tanto, de enriquecer. Para un maestro de esta etapa, debe ser fundamental conocer los intereses que suelen manifestar muchos niños de estas edades. Así, podrá basar su intervención, y en general la enseñanza de las matemáticas, en el interés de los pequeños, respetando su desarrollo físico, afectivo, social e intelectual. Además, es importante que estas intervenciones faciliten el paso desde las actividades de juego libre, hacia situaciones de investigación más centradas en conceptos matemáticos como la simetría, como recomiendan Chalufour y Worth (2004).

Por otra parte, quiero enfatizar antes de concluir que, como indica el título, la aparición de la simetría en las construcciones es espontánea. Nadie ha hablado a los pequeños de simetría, ni se ha tratado el tema en clase. No se ha nombrado nunca, por parte de los niños, ni de los maestros, durante el trabajo de construcción. Aunque las construcciones muestran que la simetría es claramente intencional, el concepto de simetría aparece sólo de forma implícita y no sobrepasa el ámbito de lo intuitivo e informal. En mi opinión, esto se debe a que la simetría no se considera objeto de enseñanza en esta etapa.

Otro aspecto reseñable es que, hasta ahora, hemos observado siempre que las construcciones simétricas son siempre resultado de un trabajo individual, ya se desarrolle éste en solitario o dentro de una construcción grupal (como en la Figura 15). Una posible explicación parcial de estas observaciones es que no poner nombre a este tipo de construcciones, indicando a los pequeños que han hecho una construcción *simétrica*, puede dificultar que la elaboración de una construcción simétrica se convierta en un objetivo compartido.

Para terminar, se puede observar en las figuras que la simetría que aparece fundamentalmente (desde los dos a los cinco años) es la simetría del grupo diédrico D_2, con dos planos de simetría y un eje de rotación de 180º, y que esta simetría parece ir evolucionando (y que los niños van rompiendo la simetría del plano frontal, incorporando bloques a su construcción) hasta convertirse en simetría *bilateral* cuando llegan al final de la Educación Infantil (5-6 años). De nuevo, se trata de una nueva hipótesis no contrastada, sobre la evolución de las construcciones simétricas en la Educación Infantil, sobre la cual también será importante seguir trabajando. Además, la tendencia a estos dos tipos de simetría podría estar relacionada con el desarrollo del esquema corporal que se está produciendo en los pequeños. Este es otro aspecto que pienso que merece ser estudiado en el futuro.

AGRADECIMIENTOS

Quiero mostrar mi agradecimiento a Beatriz Escorial González y a Desiré López Barrero, del CEIP Virgen de Peña Sacra, de Manzanares el Real (Madrid), que han elaborado la documentación de las experiencias descritas en este artículo en 3-6 años. También a Oscar Quiles Maroto, que ha colaborado en el trabajo con los niños y niñas de 2-3 años de la Escuela el Limonero, de Parla.

REFERENCIAS

Ashton, B. A. (2010). Integrating elements of Frank Lloyd Wright's architectural and decorative designs in a liberal arts mathematics class. *Journal of Mathematics and the Arts, 4*(3), 143–161.

Disponible en: http://www.tandfonline.com/doi/pdf/10.1080/17513472.2010.492029

Chalufour, I., y Worth, K. (2004). *Building structures with young children*. St. Paul, MN: Redleaf Press.

Coxeter, H. (1988). *Fundamentos de geometría*. México: Limusa.

Cuéllar, H. (2004). *Froebel: La educación del hombre*. México & Sevilla: Trillas & Eduforma.

De Castro, C. (2011). Buscando el origen de la actividad matemática: Estudio exploratorio sobre el juego de construcción Infantil. *EA, Escuela Abierta, 14*, 47-65. Disponible en: http://www.ceuandalucia.com/escuelaabierta/pdf/articulos_ea14pdf/ea14_decastro.pdf

De Castro, C., López, D., y Escorial, B. (2011). Posibilidades del juego de construcción para el aprendizaje de las Matemáticas en la Educación Infantil. *Pulso: Revista de Educación, 34*, 103-124. Disponible en: http://revistapulso.cardenalcisneros.es/documentos/articulos/137.pdf

Escorial, B., y De Castro, C. (2011). La gran torre: Matemáticas en la Educación Infantil a través de un proyecto de construcción. Números. Revista de Didáctica de las Matemáticas, 78, 135-156. Disponible en:
http://www.sinewton.org/numeros/numeros/78/Experaula_01.pdf

Forman, G. E. (1982). A search for the origins of equivalence concepts through a microanalysis of block play. In G. E. Forman (Ed.), *Action and thought: From sensorimotor schemes to symbolic thought* (97–134). New York: Academic Press.

Fuson, K. C., Clements, D. H., Beckmann, S. (Eds.) (2010). *Focus in Kindergarten: Teaching with Curriculum Focal Points*. Reston, VA & Washington, DC: NCTM & Naeyc.

Guillén, G. (1991). *Poliedros*. Madrid: Síntesis.

Guillén, G. (2010). ¿Por qué usar los sólidos como contexto en la enseñanza/aprendizaje de la geometría? ¿Y en la investigación? En M.M. Moreno, A. Estrada, J. Carrillo, & T.A. Sierra (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIV* (pp. 21-68). Lleida: SEIEM. Disponible en: http://funes.uniandes.edu.co/1681/1/330_2010Porque_SEIEM13.pdf

Gura, P. (Ed.) (1992). *Exploring learning: Young children and blockplay*. London: Paul Chapman Publishing.

Hirsch (Ed.) (1996). *The block book* (3rd ed.). Washington, DC: NAEYC.

Johnson, H. (1996). The art of block building. In E. S. Hirsch (Ed.), *The block book* (3rd ed.) (pp. 9–25). Washington, DC: NAEYC.

Kersh, J., Casey, B. M., & Young, J. M. (2008). Research on spatial skills and block building in girls and boys. In B. Spodek y O. N. Saracho (Eds.), *Contemporary perspectives on mathematics in Early Childhood Education* (pp. 233-251). Charlotte, NC: Information Age Publishing.

Ministerio de Educación y Ciencia (2008). ORDEN ECI/3960/2007, de 19 de diciembre, por la que se establece el currículo y se regula la ordenación de la educación infantil. *BOE, 5, sábado 5 enero 2008*, 1016-1036. Disponible en:
http://www.boe.es/boe/dias/2008/01/05/pdfs/A01016-01036.pdf

NCTM (2003). *Principios y estándares para la Educación Matemática*. Sevilla: Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales.

Vereecken, P. (1961). *Spatial development: Constructive praxia from birth to the age of seven*. Groningen: Wolters.

Wellhousen, K., y Kieff, J. (2001). *A constructivist approach to blockplay in early childhood*. Albany, NY: Delmar.

Weyl, H. (1991). *Simetría*. Madrid: McGraw-Hill.

Épsilon - *Revista de Educación Matemática* *2012, Vol. 29(3), nº 82, 41-56, ISSN: 1131-9321*

La geometría del ángulo desde otro ángulo: Una aproximación metodológica alternativa

Patricia Perry, Carmen Samper, Óscar Molina, Leonor Camargo y Armando Echeverry

Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá, Colombia

Resumen. *En este artículo reportamos un experimento de enseñanza realizado en un curso de geometría plana de un programa de formación inicial de profesores de matemáticas. Se describe la aproximación metodológica propuesta y su implementación para el tema de ángulos. Como resultados del experimento de enseñanza se tiene un conjunto de cinco problemas que propician la generación de un sistema axiomático local y evidencia empírica de que es posible desarrollar en el nivel universitario un curso bajo una aproximación alternativa a la usual presentación axiomática deductiva.*
Palabras clave: *axiomatización, aproximación metodológica alternativa, problemas, actividad demostrativa, aprender como participación*

The angle's geometry from another angle: an alternative methodological approximation

Abstract. *In this paper, we report a teaching experiment in a plane geometry course of a mathematics teacher pre-service program. We describe the methodological approach used and its implementation to develop the topic of angles. The results of the teaching experiment are a set of five problems that favor the generation of an axiomatic system for the theory related to angles and empirical evidence that it is possible to develop, at the university level, a course from an alternative methodological approach than the usual axiomatic deductive presentation.*
Key words: *axiomatization, alternative methodological approach, problems, proving, learning as participation.*

INTRODUCCIÓN

En la literatura de Educación Matemática, sobre asuntos de la reforma curricular y de la formación de profesores, se menciona que la manera habitual de exponer el contenido matemático en los cursos de nivel universitario es la *presentación axiomática deductiva* (e.g., de Villiers, 1986; Hanna, 1990; Alsina, 2001; Mason, 2001; Herbst, 2002). Esta aproximación metodológica se usa para exponer ante los estudiantes temas que no les son familiares. El profesor, siguiendo un libro de texto, presenta los axiomas y definiciones relativos al tema, y procede a enunciar y demostrar otros enunciados que harán parte del sistema axiomático; al estudiante se le deja la demostración de enunciados que no harán parte de éste. Bajo esta aproximación metodológica no hay una etapa de familiarización con los objetos matemáticos relativos al tema que se estudia, previa a la aparición de los enunciados del sistema axiomático. El contenido matemático se presenta al estudiante como prefabricado y acabado, sin dejar espacio para la creación, descubrimiento, conjeturación.

Esta aproximación ha sido criticada por algunos matemáticos y educadores matemáticos. Entre las críticas que al respecto recoge de Villiers (1986) están las siguientes: presenta una idea irreal de lo que es la matemática; propicia una visión distorsionada de lo que es crear matemáticas; no ilustra la naturaleza arbitraria de un sistema axiomático; no motiva el estudio de los temas con preguntas de naturaleza teórica o práctica; niega a los estudiantes la oportunidad de participar en la construcción de un sistema axiomático; disminuye la posibilidad de que los axiomas, definiciones y teoremas sean significativos para los alumnos; promueve el aprendizaje por memorización sin buscar comprensión; y se pierden oportunidades para que los estudiantes realicen acciones necesarias para crear matemáticas como conjeturar, generalizar, abstraer.

En este artículo promovemos la tesis de que es posible adoptar, en el nivel universitario, específicamente en un programa de formación de profesores de matemáticas, una aproximación metodológica diferente a la presentación axiomática deductiva. La evidencia empírica proviene de un experimento de enseñanza realizado en un curso de geometría plana que se desarrolla en la Universidad Pedagógica Nacional (Bogotá, Colombia), cuya meta es aprender a demostrar mediante la participación en la construcción de un sistema axiomático para el contenido geométrico que se estudia. Después de describir la aproximación que proponemos, presentamos aspectos de la implementación de ésta para el caso de la geometría del ángulo.

MARCO DE REFERENCIA

Entendemos por *construir un sistema axiomático* (axiomatizar) relativo a un tema determinar un conjunto lógicamente estructurado de enunciados que son afirmaciones sobre los objetos involucrados en el tema. El término "enunciado" en relación con un sistema axiomático[1] hace referencia a una sentencia que se formula usando los términos universales y los términos no definidos del sistema (Wilder, 1968). Los enunciados que

1. Wilder (1968) amplía el significado de sistema axiomático al incluir en el conjunto formado por los términos no definidos y los axiomas, los teoremas deducidos de éstos. Ampliamos esto al incluir definiciones.

integran un sistema axiomático se diferencian claramente por su estatus teórico (Duval, 2007); los *axiomas* son afirmaciones básicas acerca del tema, supuestas como verdaderas sin que ello signifique que tienen carácter universal; las *definiciones* caracterizan objetos involucrados en el tema y relaciones entre ellos; los *teoremas* son afirmaciones deducidas de las definiciones, axiomas y otros teoremas del sistema.

La determinación de axiomas y definiciones y la obtención de teoremas son actividades que juegan un papel fundamental en el desarrollo de las matemáticas. De Villiers (1986) distingue dos tipos de axiomatización: la constructiva y la descriptiva. En la *constructiva* se modifica un conjunto dado de axiomas —por exclusión, inclusión o reemplazo— para obtener uno nuevo a partir del cual se obtienen nuevos teoremas deductivamente; las geometrías no euclidianas son producto de una axiomatización constructiva realizada al cambiar el quinto postulado de la geometría de Euclides. En la *descriptiva*, se tiene un conjunto de enunciados que no han sido relacionados lógicamente o lo han sido sólo parcialmente; la construcción del sistema axiomático comienza identificando relaciones lógicas entre los enunciados, luego se seleccionan aquellos que se convertirán en los axiomas, y finalmente, con la demostración, se disponen los demás enunciados según dependencias lógicas ya establecidas. La selección de axiomas no es única; por tanto, es posible obtener diferentes organizaciones deductivas. La geometría de Euclides se puede ver como una axiomatización descriptiva de la geometría que se conocía en esa época.

Dado el papel fundamental de axiomatizar en el desarrollo de las matemáticas, ya sea para crear nuevo conocimiento o revisar y reorganizar el conocimiento existente, suponemos que en la formación inicial de los profesores de matemáticas deben existir oportunidades que lleven a comprender qué es axiomatizar, cómo se axiomatiza, qué propósitos tiene la axiomatización, cuál es el papel de un sistema axiomático, etc. No necesariamente por considerar que el ejercicio de su profesión —profesor de secundaria— exija hacer matemáticas en calidad de matemáticos profesionales, sino por considerar que la enseñanza de las matemáticas en cualquier nivel requiere tener conocimiento de contenidos matemáticos, y una visión de la naturaleza de las matemáticas y de las prácticas específicas a través de las cuales se hace matemáticas. Suponemos que el desarrollo gradual de tal visión y comprensión desde el inicio de sus estudios profesionales les ayudará en el aprendizaje mismo del contenido matemático.

Con este supuesto y aceptando que la presentación axiomática deductiva no es la aproximación óptima para estudiantes que están comenzando su formación matemática, el *quid* del asunto es encontrar una aproximación metodológica que satisfaga lo mejor posible los requerimientos para los que se pretende usar.

Una aproximación alternativa a la axiomática deductiva, *participación en axiomatización descriptiva*, nos la da Freudenthal (1973, citado en de Villiers, 1986). Con referencia a las matemáticas de la escuela secundaria, el matemático y educador destaca la pertinencia de participar en la práctica de axiomatizar; propone que los estudiantes participen en procesos de axiomatización descriptiva del conocimiento matemático que ya conocen; sugiere que ésta ocurra sólo después de haber introducido y desarrollado el contenido correspondiente. En esta aproximación se distinguen dos fases: una informal en la que se obtienen de manera intuitiva resultados que se verifican; otra que consiste en la organización deductiva de los resultados familiares que fueron aceptados en la primera fase. Freudenthal sugiere axiomatizar primero a nivel local y luego a nivel global. Hull (1973, citado en de Villiers, 1986) también aboga por la axiomatización descriptiva en la enseñanza; precisa que en un comienzo tal aproximación debe dar lugar a la exploración, experimentación, intuición e inferencia informal; afirma que se debe realizar a través de problemas y situaciones particulares que despierten curiosidad. La siguiente etapa consiste en lograr una articulación lógica entre las conjeturas establecidas y, si **fuera necesario**, demostrarlas, haciéndolo gradualmente más riguroso. La organización global crecerá cuando se relacionen unas organizaciones locales con otras, aparecerán definiciones más precisas y conjuntos de axiomas bien delimitados.

Una aproximación metodológica intermedia entre la presentación axiomática deductiva y la participación en axiomatización descriptiva es la *aproximación reconstructiva* propuesta por Human (1978, citado en de Villiers, 1986). En ella, antes de la presentación axiomática deductiva del contenido por parte del profesor, los estudiantes deben familiarizarse con los enunciados recorriendo, al menos parcialmente, el desarrollo histórico del contenido, o un camino mediante el cual el contenido matemático se hubiese descubierto o inventado. Esta aproximación enfatiza el significado del contenido y permite a los estudiantes participar en la construcción y el desarrollo del contenido; sin embargo, esto no implica el aprendizaje por descubrimiento pues podría ser el profesor quien hiciera una explicación reconstructiva.

En las aproximaciones descritas encontramos elementos valiosos para configurar una propuesta alternativa a la presentación axiomática deductiva del contenido matemático, pero hay otros que no se ajustan bien al contexto educativo en el que se ubica nuestra preocupación investigativa. Así que delineamos y ponemos a prueba una aproximación metodológica a la medida de nuestras necesidades. A continuación, describimos nuestra aproximación y presentamos algunos aspectos de su implementación en la enseñanza de un tema específico.

EXPERIMENTO DE ENSEÑANZA

Descripción general de nuestra aproximación metodológica

Desde el momento en que se inicia el desarrollo del contenido se involucra a los estudiantes en la resolución de problemas[2] de índole geométrica, medio para lograr que ellos descubran, conjeturen y produzcan inicialmente justificaciones informales. En este punto hay consonancia con la primera fase de la propuesta de Freudenthal (1973, citado en de Villiers, 1986) y la de Hull (1973, citado en de Villiers, 1986). Así, los estudiantes obtienen familiaridad[3] con los objetos geométricos involucrados en los enunciados que harán parte del sistema axiomático que se construya. Los estudiantes trabajan en grupos pequeños, apoyados en el uso de la geometría dinámica. Vista esta actividad de

2. Por *problema* entendemos una tarea para la cual los estudiantes no tienen un patrón de solución. Por lo regular, incluye la solicitud de una conjetura y su justificación.

3. Los estudiantes tienen la familiaridad básica requerida para abordar el problema; sin embargo, la mayoría de enunciados que llegan a ser parte del sistema axiomático que se construye en el curso son desconocidos para ellos o la rigurosidad con la que se enuncian los constituye en enunciados nuevos para ellos.

resolución de problemas a la luz de la aproximación reconstructiva propuesta por Human (1978, citado en de Villiers, 1986), aunque no se recorre el desarrollo histórico de los temas que se tratan en el curso, los estudiantes siguen caminos que permiten construir el contenido matemático; viven un proceso de construcción de conocimiento en el cual se descubren hechos geométricos y descubren elementos teóricos que garantizan la posibilidad de validarlos.

Después de resolver el problema, los estudiantes presentan sus diversas producciones ante la comunidad de la clase con el fin de revisarlas y concretarlas en enunciados que se convierten en su material de trabajo para formar el sistema axiomático. En *conversación instruccional*[4] del profesor con uno o varios estudiantes, a partir de las producciones presentadas, se pueden llevar a cabo acciones como responder preguntas que ayudan a comprender los objetos geométricos involucrados, aceptar o rechazar las conjeturas formuladas, presentar contraejemplos, comparar enunciados de conjeturas para determinar si se refieren o no al mismo hecho geométrico, establecer la definición de un término que servirá de núcleo para el sistema axiomático local, etc. Los estudiantes juegan un papel activo e importante en el análisis pero el papel del profesor como conductor del intercambio es fundamental. Por ejemplo, el profesor decide el orden en que se presentan las conjeturas para su revisión; esta decisión obedece razones didácticas que buscan resaltar las diferencias entre las conjeturas y aprovechar su revisión para cubrir una amplia gama de consideraciones.

Teniendo ya elementos se comienza la construcción del sistema axiomático local a través de acciones como identificar qué elementos teóricos (definiciones, postulados y teoremas) que deberían hacer parte del sistema para que el enunciado tenga sentido en éste y poder construir la demostración; si hubiera varios enunciados para demostrar, decidir en qué secuencia se intentará hacer sus demostraciones y producirlas. La construcción del sistema axiomático está fundamentada en dos prácticas matemáticas: demostrar y definir, las cuales tienen lugar a través de conversación instruccional y de *conversación matemática*[5] en la que el profesor es un miembro más de la comunidad y por ello, su papel es diferente al que tiene en la conversación instruccional; la responsabilidad de culminar exitosamente la tarea recae sobre la comunidad.

En cuanto a la actividad misma de organizar los enunciados que harán parte del sistema, entrevemos una diferencia entre nuestra aproximación y las de Freudenthal (1973, citado en de Villiers, 1986) y Hull (1973, citado en de Villiers, 1986). En nuestro caso, la organización se realiza en el acto mismo de demostrar un enunciado mientras que la participación descrita en la axiomatización descriptiva parece ser un ejercicio previo a una posible demostración, en el que se establecen relaciones lógicas entre los enunciados en cuestión.

4. Entendemos esta expresión como discursos de la clase, entre profesor y estudiantes, que permiten la construcción conjunta de significado (Tharp y Gallimore,1988, citados en Forman, 1996). Los miembros más experimentados de una cultura, instruyen a los menos experimentados, a través del diálogo.

5 Por conversación matemática entendemos un diálogo, sobre algún tema matemático, en el que los estudiantes comunican sus ideas, hacen comentarios ya sea dirigiéndose al profesor o entre ellos.

Escenario del experimento de enseñanza

El experimento de enseñanza, cuyo objeto de investigación fue la implementación de nuestra aproximación metodológica, se realizó en el primer semestre de 2007. Su escenario fue un curso de geometría plana de un programa de formación inicial de profesores de matemáticas. En el curso se inscribieron veintiún estudiantes con edades entre dieciocho y veintiún años. La profesora del curso, uno de los coautores de este artículo, ha tenido a su cargo el curso durante varios semestres.

Los temas incluidos oficialmente en el programa del curso son: relaciones entre puntos, rectas, planos, ángulos, propiedades de triángulos y de cuadriláteros, y relaciones de congruencia. Por la aproximación metodológica no se alcanzan a cubrir los temas de circunferencia y de semejanza de triángulos, ya que, como lo menciona de Villiers (1986), el tiempo didáctico transcurre más lentamente que si se les presentara a los estudiantes el sistema axiomático ya hecho y ellos sólo tuvieran que realizar algunas demostraciones. El experimento de enseñanza se enfocó en el tema de ángulos.

Los estudiantes no siguen libro alguno, pero el sistema axiomático global que se construye durante el curso sigue de cerca el propuesto en el libro *Geometría Moderna* de E. Moise y F. Downs (1986), es decir, las tareas que se asignan a los estudiantes están diseñadas teniendo en cuenta ese sistema y la profesora gestiona el contenido procurando una organización acorde con dicho sistema.

Para ayudar a entender la viabilidad de nuestra aproximación cabe resaltar el papel importante de las normas que rigen la participación de los estudiantes en la actividad matemática desarrollada (*escuchar a los compañeros*, *respetar el uso de la palabra*, *toda contribución es importante, la participación es esencial para generar ideas útiles aunque sean erróneas)* y la validación del conocimiento matemático que circula en la clase (*dar el porqué de toda afirmación que se haga, usar en las demostraciones sólo aquellas afirmaciones que se han validado dentro del sistema).* En un contexto de tal naturaleza, el profesor y los estudiantes contribuyen a la constitución interactiva de situaciones que invitan a demostrar y se enfrentan a ellas como eventos de carácter social e individual (Goos, 2004; Graven, 2004; Martin y McCrone, 2005; Mariotti, 2000).

Algunos resultados de la implementación de nuestra aproximación metodológica en la axiomatización del ángulo

Una característica de nuestra aproximación es el planteamiento de problemas geométricos que permitan a los estudiantes producir enunciados que son insumo para la construcción de sistemas axiomáticos locales. Presentamos los enunciados de cinco problemas que se plantean de manera gradual a los estudiantes, para construir con ellos un sistema axiomático para el tema ángulos. Tal sistema se configura articulando cuatro sistemas axiomáticos locales, cada uno de los cuales tiene un *núcleo* que corresponde a un objeto o relación geométrica, a partir del cual se organizan los enunciados que intervienen.

Para cada problema precisamos: la intención que nos movió a plantearlo, previsiones con respecto al contenido geométrico que saldría a relucir, detalles relativos a la implementación de la aproximación respecto a la gestión de dicho contenido, y mostramos en un esquema el sistema axiomático local construido por la comunidad de la clase, cuyos elementos surgieron previamente o en el momento, para dar solución al problema.

En los esquemas, mediante flechas que vinculan parejas de elementos teóricos indicamos que para definir, postular o demostrar un elemento (origen de la flecha) se requiere el segundo (al cual apunta la flecha). Se señalan con una sombra las cajas correspondientes a los elementos que hacían ya parte del sistema; los otros elementos surgieron como necesidades teóricas durante la actividad. Así por ejemplo, resolver el Problema 1 puso en juego ocho elementos teóricos de los cuales previamente se tenían sólo tres (el Postulado correspondencia puntos- número, la definición de interestancia y el Primer teorema de interestancia[6]); por tanto, fue necesario introducir los restantes (Esquema 1).

Problema 1: Dados $\angle ABC$ y $\angle ACB$. Describa: $\angle ABC \cap \angle ACB$.

Con este problema se pretende motivar una conversación instruccional sobre qué es un ángulo, que debe concluir con el establecimiento e inclusión al sistema de la definición de ángulo. Este problema pone en juego la noción que los estudiantes tienen de ángulo, la que no necesariamente coincide con la que adoptamos en el curso, dada por Hilbert en 1899: *la unión de dos rayos que tienen el mismo origen y están contenidos en rectas diferentes*. En sus soluciones algunos estudiantes usan una noción de ángulo relacionada con la definición dada por Arnauld, alrededor del año 1667: *parte de un plano comprendida entre dos semirrectas que tienen origen común* o con la de Euclides (siglo IV a.C.): *la inclinación mutua de dos líneas que se encuentran una a otra en un plano y no están en línea recta*. Las diversas respuestas de los estudiantes hacen explícitas las definiciones usuales en el ámbito escolar, y ponen de manifiesto cuán disímiles son los objetos a los que hacen referencia: inclinación refiere a una relación, parte de un plano refiere a una región, y unión de dos rayos refiere a una figura geométrica. Para promover la conversación sobre ángulo preferimos un problema que ponga en juego la noción en vez de pedir directamente una definición pues sería posible que un estudiante recitara de memoria un enunciado correcto sin la suficiente comprensión, o no contara con el respectivo vocabulario para comunicar su idea aunque tuviera una comprensión adecuada.

En el experimento que aquí reportamos surgieron efectivamente diversas definiciones.
Un ángulo es la región delimitada por dos rayos. (Orlando)
Es la abertura que se da entre dos rayos que comparten su punto inicial. (Gonzalo)
Son dos rayos que comparten un punto en común y la región entre ellos. (Leopoldo)
Dados $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AD}$ cuyo punto de origen es A el ángulo está constituido por los dos rayos. (Efraín)

Una vez acordada la definición de ángulo se comenzó un proceso de ir hacia atrás, para revisar significados y precisar definiciones y propiedades de los objetos geométricos sobre los que se basa, directa o indirectamente, la definición adoptada. Así, puesto que la definición de ángulo involucra rayos, se requirió definir rayo; a su vez, para definir

6. La lista de postulados, definiciones y teoremas que se mencionan se encuentra en el Apéndice.

rayo se necesitó definir segmento y para definir segmento, definir la relación de interestancia entre puntos. En la conversación instruccional sobre el problema se plantearon preguntas cuya intención era hacer aflorar las imágenes conceptuales y de cuestionarlas o reforzarlas, y, desde la teoría, hacerlas válidas. Algunas preguntas fueron: *¿qué quiere decir que un punto esté entre otros dos puntos?*, *¿tiene un segmento más de dos puntos?*, *¿un rayo es diferente a un segmento?* A partir de la conversación se introdujeron el Segundo y Tercer teoremas de interestancia que se pueden demostrar con el Primer teorema de interestancia y el Postulado correspondencia puntos-números.

Ángulo es el *núcleo del sistema axiomático local* conformado por cuatro definiciones, tres teoremas de interestancia y el Postulado correspondencia puntos-número (Esquema 1). Cabe anotar una aclaración relativa al Esquema 1: el vínculo entre la Definición de rayo y el Tercer teorema de interestancia al igual que el vínculo entre la Definición de segmento y el Segundo teorema de interestancia, indicados por una flecha más gruesa y punteada, pretenden expresar un requerimiento de tipo didáctico que busca la correspondencia entre las definiciones formuladas y las imágenes conceptuales de los respectivos objetos geométricos.

ESQUEMA 1: ELEMENTOS DEL SISTEMA AXIOMÁTICO GENERADO AL ABORDAR EL PROBLEMA 1

Problema 2: Dado un ángulo *A* en Cabri[7] construya un ángulo congruente al dado, usando herramientas validadas a partir de la teoría. ¿Qué le permite garantizar que son congruentes?

Hacemos dos aclaraciones con respecto al uso de la geometría dinámica. Por una parte, la norma de usar herramientas validadas a partir de la teoría —norma que debe regular las producciones de los estudiantes para todos los problemas que se asignan en el curso— tiene que ver con la naturaleza axiomática-deductiva del sistema teórico que se está construyendo. Con tal regla se pretende favorecer una de las características de nuestra aproximación metodológica: ir introduciendo nuevas definiciones y teoremas como respuesta a las necesidades teóricas que surgen. Atendiendo a esta norma, las únicas herramientas que se pueden usar de manera lícita en la solución del problema son: punto, segmento, recta, rayo y medida de ángulos. Por otra parte, el uso de la geometría dinámica para resolver diferentes tipos de problemas suele jugar papeles diferentes. Reconocemos que para el caso de los Problemas 2 y 3, la geometría dinámica no tiene un papel imprescindible; bien podrían lograrse desde el punto de vista didáctico resultados similares si se trabajara en un contexto de papel y lápiz. Aun así, exigimos el uso de la geometría dinámica porque es una oportunidad para contribuir al desarrollo de la habilidad para usar de manera eficiente el programa, condición sin la cual el potencial del uso de la geometría dinámica para solucionar otro tipo de problemas tendría restricciones. El *uso eficiente* del programa de geometría dinámica incluye saber manejar el programa, conocer las distintas herramientas y funciones que ofrece, saber cuándo hacer una construcción

7. En nuestro curso de geometría privilegiamos el uso de Cabri instalado en calculadoras graficadoras pues no sólo favorece la generación de ideas, sino que permiten su socialización y discusión a partir de la proyección en la pared de las imágenes de las producciones individuales.

blanda o una robusta (Healy, 2000) y aprender a interpretar los resultados que se obtienen dinámicamente para reportarlos como un resultado de la geometría euclidiana estática.

Con el Problema 2 se introducen nuevos postulados, definiciones y teoremas que se conectan con uno o más elementos del sistema axiomático cuyo núcleo es el objeto ángulo. Es probable que los estudiantes propongan construir un ángulo congruente al dado, mencionen ángulos opuestos por el vértice, o construyan ángulos rectos adyacentes.

Efectivamente, en nuestro experimento de enseñanza, algunos estudiantes propusieron medir el ángulo *A* y construir un ángulo con la misma medida. Esta sugerencia llevó a Germán a preguntar cómo iban a definir congruencia y qué significaba la medida de un ángulo. La profesora, en el siguiente diálogo, estableció entonces la asociación entre congruencia e igualdad de medidas tal como se había hecho con la congruencia de segmentos.

- **Germán:** Profe, es que lo primero que tenemos que pensar es que… se me viene a mí a la cabeza… es que no hemos definido un criterio de congruencia. […] Tampoco hemos creado un sistema para… para… determinar la medida de un ángulo.
- **Profesora:** Entonces, ¿qué es eso de la medida del ángulo? Entra entonces la necesidad de poder comunicarnos… porque… ¿qué quiere decir congruente? Para segmentos, decíamos que [son aquellos que] tienen la misma medida. Entonces para ángulos sospechamos que es algo parecido. Dos ángulos son congruentes si tienen la misma medida. […] Entonces vamos a introducir el Postulado medida de ángulos, que dice: a cada ángulo le corresponde un número entre cero y ciento ochenta.

Se introdujeron al sistema axiomático el Postulado medida de ángulos para sustentar la medida de ángulos y el Postulado construcción de ángulos para sustentar la construcción del ángulo congruente. Como Cabri no tiene herramienta específica para construir ángulos con una medida dada, se usó la herramienta 'Rotación' para cumplir esa función, es decir, se usó en calidad de transportador, aprovechando que el postulado ofrece el sustento teórico para ello.

Orlando sugirió un par de ángulos opuestos por el vértice y Luz propuso la construcción de ángulos alternos internos generados por dos rectas paralelas cortadas por una transversal. Sólo la primera propuesta era aceptable, pues la otra requiere introducir el paralelismo cuestión que no se quería hacer en ese momento. La primera propuesta fue suficientemente rica para extender el sistema pues nos permitió abordar el significado de cuatro objetos geométricos: ángulos congruentes, rayos opuestos, ángulos que forman par lineal, y ángulos suplementarios. El núcleo del sistema axiomático local en este caso es el objeto **ángulos congruentes**. Presentamos los elementos del sistema axiomático generado al abordar el Problema 2 (Esquema 2).

ESQUEMA 2: Elementos del sistema axiomático generado al abordar el Problema 2

Problema 3: Construya dos ángulos adyacentes congruentes.

Con este problema se motiva la introducción de otras cuatro definiciones al sistema axiomático local en construcción: ángulos adyacentes, ángulo recto, rectas perpendiculares y bisectriz de ángulo, así como el Postulado adición de ángulos y algunos teoremas relacionados con ángulos rectos, rectas perpendiculares y bisectriz de un ángulo.

La necesidad de precisar la definición de ángulos adyacentes surgió tan pronto los estudiantes se involucraron en la interpretación del enunciado del problema. En el experimento hubo dos propuestas de solución. La primera fue construir un ángulo, llamémoslo *A*, y luego construir otro ángulo, de igual medida al ángulo *A*, con un lado común, usando la herramienta Rotación; como se puede evidenciar en el siguiente diálogo, un lado del ángulo *A* resultaba ser la bisectriz del ángulo conformado por los lados no comunes de los dos ángulos.

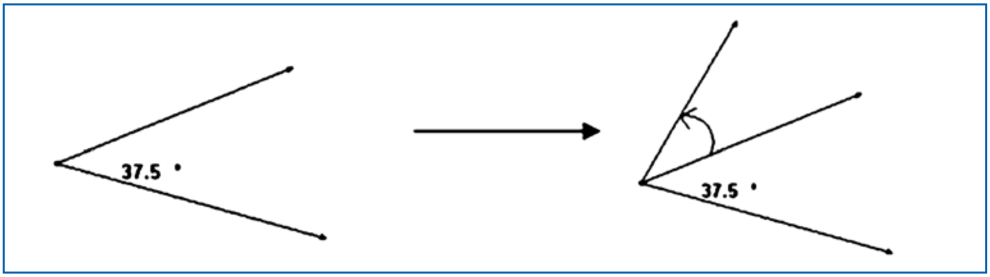


Figura 1

- **Darío:** Lo primero que teníamos que hacer era crear un ángulo, ¿sí? Entonces lo creamos y le calculamos la medida. … Luego… donde estaba la semirrecta creamos otra semirrecta; entonces después lo que hicimos fue girar la semirrecta con esta medida.

La segunda consistió en construir un ángulo y su bisectriz utilizando las herramientas `Medida de ángulo' y 'Calculadora', como se expone en el siguiente diálogo. Esta construcción permitió introducir el Postulado de la adición de medidas de ángulos y a definir bisectriz.

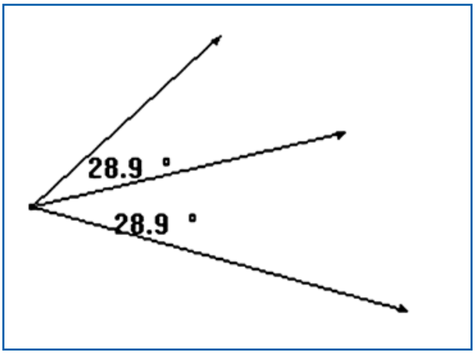


Figura 2

- **Iván:** Tomamos un ángulo y sabemos que tiene una medida, entonces la dividimos
- **Profesora:** Y encontrar la mitad de su medida, y Rotar […] ¿Y qué sucede? Se supone que tendría dos ángulos. ¿Cómo mostrar que realmente este ángulo [que se forma] tiene la medida correspondiente a la mitad… a la medida del ángulo que giramos? […] ¿Y qué voy a usar ahí? El Postulado medida de ángulos. Éste lo usé para tomar la medida. Después usé el postulado construcción de ángulos. Pero, ¿cómo podría mostrar que éste si mide la mitad? Postulado de la adición de medidas. […].Pero este rayo es especial, realmente es uno muy especial. Y ya algunos lo mencionaron: bisectriz de ángulo.

Con base en las construcciones anteriores, la profesora sugirió arrastrar los lados libres de los ángulos para identificar propiedades especiales. Daniel mencionó que en cierto momento hay rayos opuestos y Efraín dijo que en ese caso la medida de los ángulos es de noventa. Esta exploración permitió precisar las definiciones de ángulo recto y de rectas perpendiculares. Aquí el núcleo del sistema local generado es el objeto **ángulos adyacentes congruentes (**Esquema 3).

ESQUEMA 3: Elementos del sistema axiomático generado al abordar el Problema 3

Problema 4: Sean $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ rayos opuestos y $\overrightarrow{AD}$ otro rayo. ¿Es posible determinar un punto E, en el mismo semiplano en el cual está D, para que el $\angle BAD$ sea complementario con el $\angle CAE$?

Este problema presenta una oportunidad para revisar el significado y establecer las definiciones de los objetos geométricos involucrados en la situación tales como rayo, rayos opuestos, semiplano, ángulos complementarios, ángulos agudo y obtuso. Su solución juega un papel importante en la ampliación del sistema axiomático. Sin embargo, la intención que tenemos al proponer el problema va más allá de lo mencionado: queremos propiciar que los estudiantes se involucren en una actividad demostrativa que vaya desde la exploración de la situación problema, pase por la formulación de una conjetura y concluya con la demostración del hecho geométrico que subyace en la situación problema. La respuesta al problema exige un análisis detallado pues el estudiante debe darse cuenta de que cualquier punto de la semirrecta AE construida es un punto solución. La geometría dinámica juega un papel protagónico (Perry, Samper, Camargo, Echeverry y Molina, 2007), pues permite a los estudiantes identificar el lugar geométrico que es solución al problema. Si el problema anterior no hubiera suscitado la necesidad de establecer la existencia de rectas perpendiculares, la solución al Problema 4 hace surgir una discusión al respecto ya que al arrastrar un punto E libre, descubren que se debe construir un rayo perpendicular al $\overrightarrow{AD}$ en el punto A para obtener el ángulo pedido (Figura 3).

Al investigar la situación, algunos estudiantes descubrieron la restricción que tiene el punto D para que exista el complemento del $\angle BAD$ éste debe ser agudo, término que se define al igual que el de ángulo obtuso. Usando las herramientas 'Medida de ángulo', 'Calculadora', y el arrastre para obtener una construcción blanda que satisficiera la condición exigida, los estudiantes visualizaron en la figura uno de los puntos E que buscaban. Aquí el núcleo del sistema axiomático local es el objeto **ángulos complementarios** (Esquema 4).

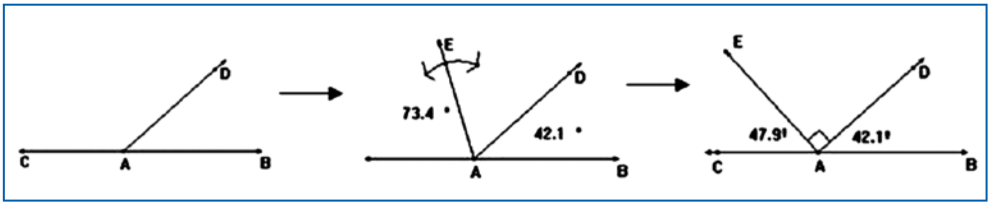


Figura 3

ESQUEMA 4: Elementos del sistema axiomático generado al abordar el Problema 4

Problema 5: Sean $\overrightarrow{BA}$ y $\overrightarrow{BE}$ rayos opuestos y $\overrightarrow{BK}$ otro rayo. Sean $\overrightarrow{BG}$ y $\overrightarrow{BD}$ las bisectrices del $\angle ABK$ y $\angle KBE$, respectivamente. ¿Cuál debe ser la posición del $\overrightarrow{BK}$ para que la medida del $\angle GBD$ sea máxima? Justifique su respuesta.

Este problema motiva al uso de todo el potencial dinámico que ofrece un programa de geometría dinámica e induce a la actividad demostrativa en toda su dimensión. Usualmente los estudiantes piensan que el $\overrightarrow{BK}$ debe ser perpendicular a los rayos *BA* y *BE*. El problema induce a la exploración; el arrastre permite estudiar la variación. Los estudiantes mueven el $\overrightarrow{BK}$ buscando la posición en la que la medida del ángulo sea máxima; suelen estudiar casos extremos de la posición del $\overrightarrow{BK}$, formando un $\angle BAK$ muy agudo o muy obtuso, o haciendo que éste sea recto (Figura 4). La visualización matemática de la figura permite percibir la propiedad invariante bajo el arrastre: el $\angle GBD$ es recto en cualquier posición del $\overrightarrow{BK}$. Los estudiantes deben formular una conjetura, desprovista de toda alusión a la variación, lo que exige captar la esencia del hecho geométrico: el ángulo formado por las bisectrices de ángulos que son par lineal es recto. El resultado obtenido, sorprendente para la mayoría de los estudiantes, los motiva a buscar una justificación. La exploración los llevan a identificar dos pares de ángulos congruentes cuya suma de sus medidas es 180 grados, encontrando la vía para hacer la demostración con los elementos teóricos disponibles en el sistema axiomático.

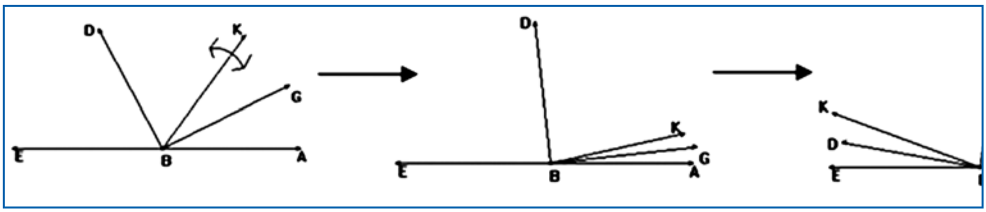


Figura 4

Con este problema, se cierra el proceso de construcción del sistema axiomático relacionado con la geometría de ángulos, logrando así una organización deductiva para los conceptos, postulados y teoremas correspondientes. Faltaría por establecer otro teorema asociado a rectas perpendiculares: la existencia de una recta perpendicular a otra desde un punto externo a ella. No se incluye en esta propuesta porque el problema que hemos diseñado para introducir este hecho requiere el uso de otro objeto geométrico: el triángulo. Ello da lugar a otra propuesta didáctica con otros núcleos para el sistema axiomático.

REFLEXIONES FINALES

En este artículo hemos descrito de manera general una aproximación metodológica alternativa a la presentación axiomática deductiva que suele usarse en cursos de matemáticas del nivel universitario y que probablemente para muchos profesores es la única manera posible de hacer un curso "serio" de matemáticas. La razón que justifica nuestro interés por hacer innovación metodológica tiene que ver con la convicción de que aprender matemáticas —y particularmente aprender a demostrar en geometría— se logra mediante la participación en prácticas matemáticas, y hay indicios de tal aprendizaje cuando el estudiante puede participar de manera más *genuina* (i.e., con una motivación interna, conscientes de su papel en la consecución de la empresa que se propone el curso), *autónoma* (i.e., con razones propias para fundamentar lo que se dice y lo que se hace, independiente de los otros como autoridad), y *relevante* (i.e., con aportes que vienen al caso y que son valiosos aun si son incorrectos). (Perry, Samper, Camargo, Echeverry y Molina, 2007)

Esa convicción se refleja en las características de la aproximación propuesta. Así, a los estudiantes se les debe involucrar en la resolución de problemas cuya solución les exija participar en verdaderas prácticas matemáticas y haga posible la generación del contenido geométrico que de otra manera tendría que ser presentado por el profesor o por el autor del libro de texto. Por tanto, contar con problemas que permitan lo mencionado es fundamental. Hemos ilustrado la aproximación que proponemos en lo concerniente al tipo de problemas que pueden servir para generar el contenido que se quiere tratar. Mostramos cómo un conjunto de cinco problemas favoreció la generación de un sistema axiomático local para el tema de ángulos, conformado por diecisiete definiciones, cuatro postulados y nueve teoremas. Esto, creemos, apoya la tesis de que es posible adoptar una aproximación metodológica distinta a la tradicional para desarrollar un curso de geometría en el nivel universitario.

Otra característica de la aproximación que proponemos es el tipo de interacción que se lleva a cabo en el aula entre profesor y estudiantes y entre los estudiantes mismos. Aunque en el artículo no dedicamos tiempo a ilustrar este asunto, creemos que sí se entrevé el papel especial que cumple el profesor. El profesor definitivamente no es el encargado de exponer a los estudiantes la teoría que ellos no conocen; en realidad nadie está encargado de ello pues no se requiere. El uso de la geometría dinámica como recurso de mediación instrumental, los problemas propuestos a los estudiantes, las reglas claras para validar las conjeturas que van obteniendo, y el uso del sistema axiomático como fuente para las justificaciones son cuatro pilares que de alguna manera suplen el papel del profesor como proveedor de conocimiento. En cambio, se requiere un gran esfuerzo del profesor por escuchar a sus estudiantes, confiar en que sus ideas son provechosas, atender sus inquietudes, extractar de sus propuestas aquellos elementos útiles para la producción de enunciados y ajustar la organización del sistema axiomático a los resultados obtenidos.

Después del experimento de enseñanza reportado en este artículo, la misma aproximación para el desarrollo del mismo tema ha sido implementada por tres de los coautores de este texto quienes han tenido a su cargo otros grupos de estudiantes. Ha habido algunas diferencias en las producciones de los estudiantes, que han generado cambios menores en la organización deductiva resultante del trabajo con cada problema, pero los cinco problemas diseñados permiten hacer un tratamiento de la teoría de los ángulos completo. Es posible que en ocasiones haya que sacrificar rigor y formalismo en aras de una construcción colectiva, pero ello vale la pena si logramos una participación genuina de los estudiantes en la construcción de conocimiento. La siguiente cita de Freudenthal (1973, citado en de Villiers, 1986) expresa lo que nos impulsa a realizar el esfuerzo antes descrito:

No sólo se hará una mejor enseñanza de las matemáticas sino también y, quizá principalmente, se enseñarán mejores matemáticas.

REFERENCIAS

Alsina, C. (2001). Why the professor must be a stimulating teacher?: Towards a new paradigm of teaching mathematics at university level. En D. Holton (Ed.), *The teaching and learning of mathematics at university level: An ICMI Study* (pp. 3-12). The Netherlands: Kluwer Academia Publishers.

de Villiers, M. (1986). *The role of axiomatisation in mathematics and mathematics teaching*. Stellenbosch: RUMEUS, University of Stellenbosch. Consulta hecha en diciembre de 2008 en: mzone.mweb.co.za/residents/profmd/proof.pdf

Duval, R. (2007). Cognitive functioning and the understanding of mathematical processes of proof. En P. Boero (Ed.), *Theorems in schools: From history, epistemology and cognition to classroom practice* (pp. 137-161). The Netherlands: Sense Publishers.

Goos, M. (2004). Learning mathematics in a classroom community of inquiry. *Journal for Research in Mathematics Education, 35*, 4, 258-291.

Graven, M. (2004). Investigating mathematics teacher learning within an in-service community of practice: The centrality of confidence. *Educational Studies in Mathematics, 57*(2), 177-211.

Hanna, G. (1990). Some pedagogical aspects of proof. *Interchange, 21*(1), 6-13.

Healy, L. (2000). Identifying and explaining geometrical relationship: Interactions with robust and soft Cabri constructions. En T. Nakahara y M. Koyama (Eds.), *Proceedings of the 24th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 1, pp. 103-117). Hiroshima, Giapponi.

Herbst, P. (2002). Engaging students in proving: a double bind on the teacher. *Journal for Research in Mathematics Education*, *33*(3), 176 - 203.

Mariotti, M.A. (2000). Introduction to proof: the mediation of a dynamic software environment. *Educational Studies in Mathematics, 44*, 25-53.

Martin, T., McCrone, S., Bower, M. y Dindyal, J. (2005). The interplay of teacher and student actions in the teaching and learning of geometric proof. *Educational Studies in Mathematics, 60*(1), 95-124.
Mason, J. (2001). Mathematical teaching practices at tertiary level: Working Group report. En D. Holton (Ed.), *The teaching and learning of mathematics at university level: An ICMI Study* (pp. 71-86). The Netherlands: Kluwer Academia Publishers.
Moise, E. y Downs, F. (1986). *Geometría Moderna*. Wilmington, DE: Addinson-Wesley Iberoamericana.
Perry, P., Samper, C., Camargo, L., Echeverry, A. y Molina, Ó. (2007). Innovación en la enseñanza de la demostración en un curso de geometría para formación inicial de profesores. En *XVII Simposio Iberoamericano de Enseñanza Matemática "Innovando la Enseñanza de las Matemáticas*. México.
Wilder, R. (1968). El método axiomático. En J. Newman (Ed.), *Sigma. El mundo de las matemáticas* (vol. 5, pp. 35-56). Barcelona: Ediciones Grijalbo, S.A. (décima edición).

APÉNDICE

Elementos teóricos del sistema axiomático local construido a través de la propuesta reportada.

Postulados	
Correspondencia puntos- número	Existe una correspondencia entre los puntos de una recta y los números reales tal que: i) a cada punto le corresponde exactamente un número real; ii) a cada número real le corresponde exactamente un punto.
Medida de ángulos	A cada $\angle BAC$ le corresponde un número real entre 0 y 180, llamado su medida.
Construcción de ángulos	Sea $\overrightarrow{AB}$ un rayo de la arista de un semiplano H en un plano β. Para cada número r entre 0 y 180, hay exactamente un $\overrightarrow{AP}$ con P en H, tal que $m\angle PAB = r$.
Par lineal	Si dos ángulos forman par lineal entonces son suplementarios.
Adición de medida de ángulos	Si D está en el interior del ángulo $\angle BAC$ entonces $m\angle BAC = m\angle BAD + m\angle DAC$.
Definiciones	
Interestancia	*B está entre A* y *C* si *A, B* y *C* son puntos colineales distintos y $AB + BC = AC$. Notación: $A - B - C$.
Segmento	Dados dos puntos A y B, el *segmento AB* ($\overline{AB}$) es $\{A, B\} \cup \{X \mid A - X - B\}$.
Rayo	Dados dos puntos A y B, el *rayo AB* ($\overrightarrow{AB}$) es $\overline{AB} \cup \{X \mid A - B - X\}$.
Ángulo	*Ángulo* es la unión de dos rayos que tienen el mismo origen y que no están en la misma recta.

Ángulos congruentes	Dos ángulos son *congruentes* si tienen igual medida.
Rayos opuestos	El *rayo opuesto* a $\overrightarrow{AB}$ es un $\overrightarrow{AC}$ tal que A está entre B y C.
Ángulos opuestos por el vértice	Dos ángulos son *opuestos por el vértice* si sus lados determinan dos pares de rayos opuestos.
Par lineal	Si $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AD}$ son rayos opuestos y $C \notin \overleftrightarrow{AB}$ entonces $\angle BAC$ y $\angle CAD$ forman un *par lineal*.
Ángulos suplementarios	Dos ángulos son *suplementarios* si la suma de las medidas de es 180.
Ángulos adyacentes	Dos ángulos son *adyacentes* si son coplanares, comparten el vértice, tienen un lado común y no tienen puntos interiores en común.
Bisectriz de un ángulo	Si D está en el interior del $\angle BAC$, y $\angle BAD \cong \angle DAC$, entonces AD es la *bisectriz* del $\angle BAC$.
Angulo recto	Un *ángulo recto* si su medida es 90.
Rectas perpendiculares	Dos rectas son *perpendiculares* si determinan un ángulo recto.
Ángulos agudo y obtuso	Un ángulo es *agudo* u *obtuso* si su medida es menor o mayor de 90, respectivamente.
Ángulos complementarios	Si la suma de las medidas de dos ángulos es 90, se llaman *complementarios*.
Teoremas	
Primer teorema de interestancia	Sean A, B y C tres puntos de una recta, con coordenadas x, y y z, respectivamente. Si $x < y < z$ entonces $A - B - C$.
Segundo teorema de interestancia	Dados dos puntos, existe un punto entre ellos.
Tercer teorema de interestancia	Dados dos puntos A y B, existe un punto C tal que $A - B - C$.
Ángulos opuestos por el vértice	Ángulos opuestos por el vértice son congruentes.
Ángulos suplementarios	Suplementos de ángulos congruentes, son congruentes
Existencia de la bisectriz	Todo ángulo tiene exactamente una bisectriz.
Primer teorema de ángulos rectos	Los ángulos rectos son congruentes.
Segundo teorema de ángulos rectos	Un ángulo es recto si existe otro ángulo tal que son par lineal y congruentes.
Tercer teorema de ángulos rectos	Si dos rectas determinan un ángulo recto, entonces determinan cuatro ángulos rectos.
Existencia de perpendicular por punto en recta	Por un punto de una recta contenida en un plano, existe una sola recta, en dicho plano, perpendicular a la recta dada.

La secuenciación didáctica por tareas: una experiencia ligada a la resolución de problemas matemáticos

Ester Lorenzo Guijarro
eslogui@hotmail.com
Directora CEIP Caballeros de Santiago

Antonia Ramírez García
ed1ragaa@uco.es
Universidad de Córdoba

RESUMEN: *El objetivo de este trabajo es mostrar la secuencia didáctica implementada con alumnos y alumnas de cuarto de educación primaria a partir de una metodología basada en grupos de nivel curricular en el área de matemáticas. De forma concreta la secuencia didáctica se centra en la resolución de cinco problemas matemáticos siguiendo el método de Polya. En el desarrollo de estas páginas se describen las actuaciones llevadas a cabo con los grupos experimental y control que participaron en una investigación cuasiexperimental en cinco centros de la provincia de Córdoba*[1]*. Asimismo, se ofrecen una serie de conclusiones en torno al horario escolar, el diseño de la secuencia didáctica y la visión del alumnado sobre el método de Polya.*

Palabras clave: *competencia matemática, secuencia didáctica, agrupamientos flexibles, resolución de problemas.*

Sequencing by teaching tasks: an experience tied to mathematical problem solving

ABSTRACT: *The aim of this paper is to show the teaching sequence developed with students of fourth graders from a methodology based on curricular groups in the area of*

1. CEIP Gran Capitán (Montilla, Córdoba), CEIP López Diéguez (Córdoba), CEIP San José de Calasanz (Peñarroya-Pueblonuevo, Córdoba), CEIP Séneca (Villalón, Córdoba) y CEIP Virgen de la Salud (Castro del Río, Córdoba).

mathematics. Here in particular the teaching sequence focuses on the resolution of five math problems following Polya's method. In the development of these pages describe the actions carried out experimental and control groups who participated in a quasi-experimental research in five schools in the province of Cordoba. It also provides some conclusions about the school, the design of the teaching sequence and the vision of students on the Polya's method.
Key Words: *Mathematical competence, teaching sequence, flexible groupings, troubleshooting.*

1. INTRODUCCIÓN

El presente trabajo se enmarca en el proyecto de investigación de tipo cuasiexperimental *PIV-003/08 "Desarrollo de la competencia matemática a través de una metodología basada en grupos de nivel*", cuyo objetivo es desarrollar la competencia matemática del alumnado de cuarto de Educación Primaria mediante el empleo de una metodología basada en la distribución del alumnado en grupos de nivel en el área de matemáticas y en el diseño y desarrollo de tareas en las tres unidades didácticas implementadas. En este artículo presentamos la secuencia didáctica seguida en cada uno de los grupos de nivel, así como pertenecientes al grupo experimental y control, a partir de una de las unidades didácticas desarrolladas, denominada *Resolución de Problemas Matemáticos*.

2. ¿POR QUÉ LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS? JUSTIFICACIÓN DE LA ELECCIÓN DE LA UNIDAD DIDÁCTICA

La elección de esta unidad didáctica radica en la relevancia que ha adquirido la resolución de problemas matemáticos para las administraciones educativas. Los resultados de los informes de evaluación (PISA, 2003; MEC, 2007) han vuelto a poner de manifiesto la importancia de que el alumnado de la enseñanza obligatoria sepa resolver problemas matemáticos contextualizados. Los alumnos los abordan con procedimientos mecánicos y memorísticos, tienen escasos recursos para representar y analizar los problemas, no buscan distintas estrategias o métodos para su resolución ni hacen uso de las distintas indicaciones que se le sugieren para ello (Córcoles y Valls, 2006; Harskamp y Suhre, 2007 y Santos, 2008).

Asimismo, el Real Decreto 1513/2006, de 7 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas de la Educación Primaria, contempla en el currículo del área de Matemáticas la resolución de problemas como eje vertebrador que recorre transversalmente los diferentes bloques de contenidos propuestos para el alumnado. Por su parte, en la Comunidad Autónoma de Andalucía la Orden de 10 de agosto de 2007 establece que:

> *la resolución de problemas debe entenderse como la esencia fundamental del pensamiento y el saber matemático, y, en este sentido, ha de impregnar e inspirar todos los conocimientos que se vayan construyendo en esta etapa educativa, considerándose como eje vertebrador de todo el aprendizaje matemático y*

> *orientándose hacia la reflexión, el análisis, la concienciación y la actitud crítica ante la realidad que nos rodea .*

Siguiendo esta línea, García Madruga (2002: 27) afirma que en el ámbito de la resolución de problemas se hace patente, por su complejidad, las características y limitaciones cognitivas de la especie humana, así “a lo largo de la historia, las mujeres y los hombres han tenido que encontrar soluciones a diferentes problemas que se les han planteado, mostrando en su resolución, una notable capacidad e inventiva”. Nuestro sistema cognitivo se adapta a este tipo de tareas de tal modo que resolvemos problemas de múltiples tipologías en nuestro trabajo, pero también en nuestro tiempo de ocio a través de juegos.

El objetivo último de la resolución de problemas matemáticos debe ser la de mejorar la confianza del alumno en su propio pensamiento, potenciar las habilidades y capacidades para aprender, comprender y aplicar las matemáticas, favorecer la consecución de un grado elevado de autonomía intelectual que le permita continuar su proceso de formación y contribuir al desarrollo de las competencias básicas y matemáticas específicas.

Tanto el Real Decreto 1513/2006 de 7 de diciembre como la Orden de 10 de agosto de 2007 de la Junta de Andalucía, indican que la resolución de problemas debe contribuir al desarrollo de la *competencia matemática*, es decir, a comprender y dominar las estrategias y técnicas heurísticas (comprender el enunciado, organizar la información, trazar un plan, ejecutar el plan, comprobar, interpretar y analizar la solución obtenida, etc.); pensar y razonar (identificar elementos, relacionar datos, inventar problemas); modelizar (traducir a términos matemáticos, interpretar los resultados); representar datos; argumentar (justificar la solución y su coherencia con la situación; comunicar utilizando términos matemáticos).

Pero la resolución de problemas también ha de favorecer la movilización de otras competencias presentes en el currículum de la etapa de educación primaria, entre ellas la *competencia social y ciudadana* y de *interacción con el medio* físico, natural y social, de tal forma que el alumnado sea capaz de introducir y aplicar los contenidos matemáticos de forma contextualizada a problemas comunes y cotidianos y a problemas reales relacionados con otras áreas [tanto estructurados cerrados (solución única) como abiertos poco o nada estructurados (tal y como se presentan en la realidad)] a través de actividades interdisciplinares y globalizadas; el fomento de la educación en valores y favorecer la consecución de un buen nivel de *autonomía e iniciativa personal* (toma de decisiones, diseño y desarrollo de un plan de actuación, entre otros), así como el desarrollo de habilidades y capacidades para *aprender a aprender* (confianza en el propio pensamiento, trabajo en grupo, actitud crítica, curiosidad, perseverancia, flexibilidad de pensamiento, discriminación y organización de la información, entre otras); la competencia en *comunicación lingüística* a través de la expresión oral y escrita, lectura comprensiva, formulación de preguntas, interpretación y análisis de la información y los resultados, organización en esquemas y resúmenes y la comunicación eficaz de los procesos y resultados obtenidos; así como la *competencia digital* mediante uso de herramientas auxiliares (ordenador, calculadoras, etc.).

3. LA BASE DE LA METODOLOGÍA EMPLEADA: LOS GRUPOS DE NIVEL

Para el desarrollo de la unidad didáctica tuvimos como referencia la agrupación flexible por niveles. Según Díaz Alcaraz (2002) esta forma de distribución consiste en situar a cada alumno y alumna en el grupo que le corresponde estar por sus conocimientos en Matemáticas, aunque este grupo no tiene por qué ser el mismo para otras áreas. En cada grupo de alumnos se establecen tres niveles -mínimo, medio y superior-, el grupo de investigación decidió denominarlos básico, medio y avanzado. En esta metodología de trabajo en el aula, los alumnos y alumnas pueden cambiar de nivel, si su avance lo posibilita, y eso era nuestro objetivo, que todos los alumnos y alumnas consiguieran superar su nivel de partida, bien ingresando en el siguiente nivel, bien incrementando sus niveles iniciales cuando no fuera posible dicha transición. El cambio siempre era posible puesto que la unidad didáctica era idéntica para todo el grupo, la diferencia radicaba en la amplitud y profundidad del contenido, así como los apoyos recibidos en el proceso.

El agrupamiento homogéneo o por capacidad fue, según apunta Harap (Passow, 1970: 182), en el año 1936 "el método más usual en las escuelas americanas para adaptar los aprendizajes a las diferencias individuales". En Europa, países como Suecia, Alemania e Inglaterra entre 1920-1995 llevaron a sus centros educativos experiencias en esta estrategia didáctico-organizativa buscando la mejora del rendimiento escolar [Golbert, Passow y Justman (1966), Slavin (1988), Dawson (1987), Gamoran (1986), Lee y Lucking (1990)].

Por su parte, Oliver (2008) recoge el interés que ha tenido y mantiene en nuestro país, valorando su capacidad didáctica, por un lado, y su potencial como estrategia destinada a atender a la diversidad, por otro [De la Orden (1975), Rué (1991), Borrell (1984), Santos Guerra (1993), Albericio (1994) y Oliver (1993, 1995 y 2003)].

La preocupación por atender a la diversidad del alumnado, al tiempo que por incrementar el rendimiento académico del mismo, ha propiciado la consideración en la normativa estatal y autonómica actual la posibilidad de generar agrupamientos flexibles, definidos como

> *una modalidad de trabajo que consiste en reorganizar la estructura de grupos/clase durante determinados períodos de tiempo de la jornada escolar, relacionando contenidos, modalidad de instrucción y características de los alumnos. Esta fórmula organiza a los alumnos en nuevas estructuras grupales en función de su nivel académico y en determinadas áreas del currículo, especialmente las áreas instrumentales* (Rué, 1991: 5).

Todas las concepciones dadas al respecto [Borrell (1984), Gómez Dacal (1992), García Suárez (1991) y Santos Guerra (1993)] coinciden en la flexibilidad, así como en el progreso del alumnado, la promoción en el aprendizaje y la adaptación a las diferencias individuales.

4. LA UNIDAD DIDÁCTICA

Esta unidad didáctica comienza con el establecimiento de una serie de objetivos que debía alcanzar el alumnado al que va dirigida la misma; en este sentido, podemos destacar los objetivos de etapa y área, que constituyen las metas últimas a las que aspiramos, y los objetivos didácticos que de ellos se derivan y que contextualizan las finalidades que se pretenden conseguir con un grupo de alumnos y alumnas determinado. Esta secuenciación aparece recogida en la figura 1.

Objetivos de etapa	Objetivos de área	Objetivos didácticos
• Desarrollar la confianza en sí mismo, el sentido crítico, la iniciativa personal, el espíritu emprendedor y la capacidad para aprender, planificar, evaluar riesgos, tomar decisiones y asumir responsabilidades.	• Reconocer situaciones de su medio habitual para cuya comprensión o tratamiento se requieran operaciones elementales de cálculo, formularlas mediante formas sencillas de expresión matemática o resolverlas utilizando los algoritmos correspondientes, valorar el sentido de los resultados y explicar oralmente y por escrito los procesos seguidos. • Apreciar el papel de las matemáticas en la vida cotidiana, disfrutar con su uso y reconocer el valor de actitudes como la exploración de distintas alternativas, la conveniencia de la precisión o la perseverancia en la búsqueda de soluciones. • Elaborar y utilizar instrumentos y estrategias personales de cálculo mental y medida, así como procedimientos de orientación espacial, en contextos de resolución de problemas, decidiendo, en cada caso, las ventajas de su uso y valorando la coherencia de los resultados.	• Conocer la secuencia establecida por Polya para la resolución de problemas matemáticos. • Identificar situaciones problemáticas cotidianas relacionadas con la medida del tiempo, la edad, el calendario, el proceso de compra-venta y la temperatura. • Seleccionar la información necesaria de una tabla para resolver un problema matemático. • Resolver problemas relacionados con la vida cotidiana siguiendo la secuencia establecida por Polya.

Figura 1. Secuenciación de objetivos. Fuente: Orden de 10 de agosto de 2007. Elaboración propia.

A lo largo de esta unidad didáctica el alumnado se va a acercar a una serie de contenidos. Por ello se han tomado como referencia los bloques de contenido expresados en el Real Decreto 1513/06, de 7 de diciembre, y los núcleos temáticos recogidos en la Orden de 10 de agosto de 2007. Los diferentes contenidos que se han considerado para desarrollar esta unidad didáctica han quedado recogidos en sus tres ámbitos o vertientes –conocimientos, destrezas y actitudes-. Esta categorización refuerza el proceso de enseñanza y aprendizaje basado en la globalización de los contenidos y la respuesta al desarrollo de la competencia matemática. Los contenidos seleccionados han sido los que se expresan en la figura 2.

CONOCIMIENTOS	DESTREZAS	ACTITUDES
• La medida del tiempo: horas y minutos. • La edad. • El calendario. • El proceso de compra-venta. • El euro y los céntimos. • La medición de las temperaturas.	• Identificación de los datos necesarios en una tabla de información para resolver problemas de la vida cotidiana. • Reconocimiento de las fases de la resolución de un problema matemático de acuerdo con la secuencia establecida por Polya. • Mecanización de los algoritmos básicos de la suma, resta, multiplicación y división. • Resolución de problemas relacionados con la vida cotidiana siguiendo los pasos establecidos por Polya.	• Interés por resolver problemas de la vida cotidiana. • Perseverancia en la búsqueda de soluciones posibles. • Gusto por el trabajo bien hecho.

Figura 2. Secuenciación de contenidos. Fuente: Real Decreto 1513/06, de 7 de diciembre y Orden de 10 de agosto de 2007. Elaboración propia.

La secuencia didáctica seguida para su desarrollo partía de la definición de Zabala y Arnau (2008) quienes la entendían como la manera de encadenar y articular las diferentes actividades a lo largo de una unidad didáctica. Asimismo, el eje vertebrador de cada secuencia didáctica lo constituye la tarea; pues el desarrollo, la movilización, de una competencia básica sólo es posible a través de una correcta definición de las tareas que el docente proponga a su grupo de alumnos y alumnas. La secuencia didáctica propuesta sigue cinco fases que marca cada tarea (figura 3), al mismo tiempo que tiene presente el trabajo con los distintos grupos de nivel establecidos.

Las secuencias didácticas desarrolladas en esta experiencia quedan perfectamente delimitadas en la unidad didáctica, atendiendo a dos criterios básicos. En primer lugar, la secuenciación temporal de la propia unidad en diferentes sesiones

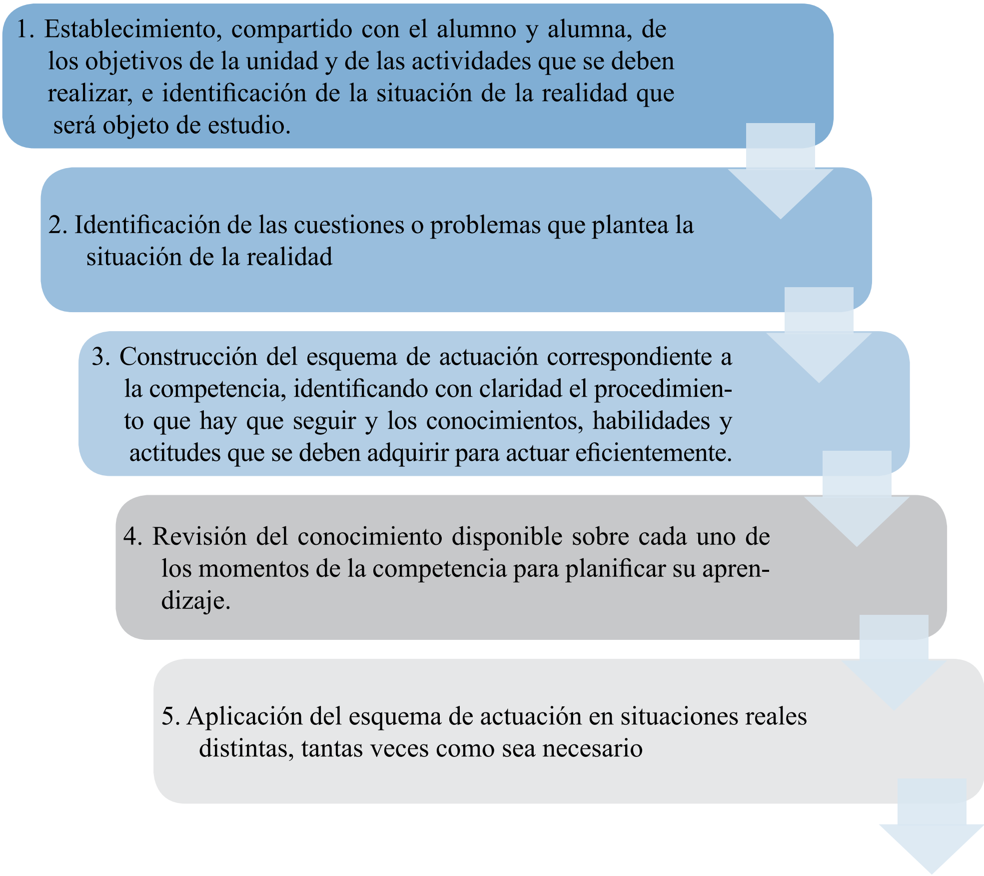


Figura 3. Fases de una tarea. Fuente: Zabala y Arnau, 2008. Elaboración propia.

de trabajo; en segundo lugar, la secuenciación de las actuaciones que ha de llevar a cabo el docente y el alumnado en cada una de estas sesiones. Esta Unidad Didáctica consta de diez sesiones estructuradas en actuaciones mediante las que se abordan cinco problemas matemáticos vinculados a la medida del tiempo y el calendario, la edad, los procesos de compra-venta y la climatología. Antes de presentar los problemas matemáticos y el proceso didáctico seguido para su resolución, teniendo presente entre el grupo experimental y el grupo de control, conviene señalar que el núcleo central de actuación de la resolución de problemas matemáticos pretende ser un primer paso para que el alumnado pueda enfrentarse con éxito a cualquier situación problemática. Para Polya (1992) resolver un problema es encontrar un camino allí donde no se conocía previamente camino alguno, encontrar la forma de salir de una dificultad, de sortear un obstáculo, conseguir el fin deseado, que no se consigue de forma inmediata, utilizando los medios adecuados. Esta definición se ve reflejada en el método elegido para la resolución de problemas matemáticos: el Método Polya (ver figura 4).

PASO 1: COMPRENDER EL PROBLEMA

¿Cuál es la pregunta?, ¿cuáles son sus datos?, ¿cuáles son las condiciones?, ¿es posible satisfacer las condiciones?, ¿son suficientes las condiciones para determinar lo desconocido?, ¿hay redundancias?, ¿hay contradicciones?, ¿sabes a qué quieres llegar?, ¿hay suficiente información?, ¿hay información extraña?, ¿este problema es similar a otro ya resuelto?. Al mismo tiempo se recomienda hacer las anotaciones pertinentes, separar las partes que puedan tener las condiciones o los datos, en definitiva, todo aquello que contribuya a la aclaración del problema.

PASO 2: CREAR UN PLAN

¿Lo he visto antes? o ¿he visto el mismo problema bajo una forma diferente?, ¿conozco un problema relacionado?, ¿conozco un teorema o una regla que podría ser útil? Observar la pregunta, la incógnita, ¿puedo pensar en un problema que me sea familiar y que tenga la misma pregunta o la misma incógnita? Si he encontrado un problema similar que haya resuelto antes, ¿puedo usarlo ahora?, ¿puedo usar los resultados?, ¿puedo usar el procedimiento?, ¿debo introducir algún elemento auxiliar para usar lo que ya conozco? ¿Puedo enunciar el problema de otro modo? ¿Puedo imaginarme un problema parecido más accesible, más fácil?, ¿uno más general?, ¿uno más específico?, ¿uno parecido?, ¿puedo resolver una parte del problema? ¿Puedo usar algunas de estas estrategias?: ensayo-error, buscar un patrón, hacer una lista, trabajar hacia atrás, usar un modelo, etc.

PASO 3: EJECUTAR EL PLAN

Se lleva a cabo la ejecución del plan ideado para resolver el problema, qué operaciones se han de hacer, cuál de ellas se realiza en primer lugar, por qué, para qué; asimismo, al desarrollar el plan hay que verificar cada uno de los pasos.
¿Puedo estar seguro que cada uno está correcto?, ¿puedo demostrar (o argumentar) que está correcto?

PASO 4:EXAMINAR LA SOLUCIÓN

Es conveniente realizar una revisión del proceso seguido, para analizar si es o no correcto el modo como se ha llevado a cabo la resolución. Por tanto, podemos cuestionarnos: ¿Puedo comprobar la respuesta?, ¿y los argumentos? ¿Puedo obtener el resultado por un camino diferente? ¿Puedo usar el resultado o el procedimiento para resolver otro problema?

Figura 4. Desarrollo de los cuatro pasos del Método Polya. Fuente: Elaboración propia.

Los problemas matemáticos diseñados fueron los que a continuación se expresan.

PROBLEMA 1: ¡NOS VAMOS DE VIAJE!¡ EN TREN!

En el colegio durante el segundo trimestre del curso vamos a visitar El Museo del Prado en Madrid, para ello hemos decidido ir en tren. Nuestra maestra nos ha dicho que consultemos en Internet los horarios de trenes y podamos elegir el más adecuado. Hemos quedado el sábado en la puerta del colegio a las 8:00 de la mañana para coger el autocar que nos llevará hasta la estación de trenes. El autocar tarda 30 minutos en llegar a la estación de Córdoba. Allí cogeremos un tren que nos llevará a Madrid, pero no podemos llegar allí más tarde de las 11:00 de la mañana. Cuando lleguemos a la estación Madrid-Puerta de Atocha tomaremos un Metro que nos llevará hasta el Museo de El Prado. Para llegar hasta la parada de metro tendremos que andar durante 10 minutos. El Metro tarda 42 minutos en recorrer la distancia entre la estación Madrid-Puerta de Atocha y la parada del Museo. Una vez allí tendremos que andar durante 12 minutos hasta llegar al Museo de El Prado. La entrada al Museo la tenemos a las 12:30. El Museo cierra a las 20:00 horas.

A continuación responde a las siguientes preguntas:

1) ¿Qué tren tendremos que coger en Córdoba?

2) ¿A qué hora llegaremos al Museo de El Prado?

3) ¿Cuánto tiempo tendremos que esperar para entrar en el Museo de El Prado?

Para poder resolverlo apóyate en este horario:

renfe

Nº Tren	Recorrido Tipo Tren	Salida	Llegada	Periodo de Circulación (1)	PRECIO INTERNET	
02261	AVE	06:58	08:50	LMXJV del 24-02-2009 al 05-04-2009	Turista Preferente	57.30 86.10
02061	AVE	07:29	09:15	LMXJV del 24-02-2009 al 05-04-2009	Turista Preferente Club	63.80 95.70 114.80
02263	AVE	07:39	09:32	LMXJV del 07-01-2009 al 05-04-2009	Turista Preferente	57.30 86.10
02271	AVE	08:03	09:55	DIARIO del 24-02-2009 al 05-04-2009	Turista Preferente	63.80 95.70
02083	AVE	08:56	10:40	LMXJV del 02-01-2009 al 05-04-2009	Turista Preferente Club	63.80 95.70 114.80
02281	AVE	08:59	10:45	LMXJVS del 24-02-2009 al 05-04-2009	Turista Preferente	63.80 95.70
02091	AVE	09:29	11:15	DIARIO del 24-02-2009 al 05-04-2009	Turista Preferente Club	63.80 95.70 114.80
02093	AVE	09:59	11:50	DIARIO del 14-12-2008 al 05-04-2009	Turista Preferente Club	63.80 95.70 114.80
09365	ALTARIA	10:02	12:10	LMXJVS del 01-03-2009 al 06-04-2009	Turista TuristaNiño Preferente PreferenteNiño	50.00 30.00 77.50 46.50

Problema 2: ¿Cuántos años...?

Hola, me llamo Marina y nací en el año 2000. Necesito averiguar las edades de mi madre y mi abuelo pero, como otras veces, parece ser que no están dispuestos a decírmelas directamente. ¡Siempre dice que soy yo quien tiene que averiguarlo todo!, ellos me dan pistas y yo pues...

A ver mi abuelo dice que es sesenta y cinco años mayor que yo. Mi madre dice que es treinta y tres años más joven que mi abuelo. Con todo esto quiero saber cuántos años tienen mi madre y mi abuelo y en qué año nacieron.

1) ¿Qué es lo que quiere averiguar Marina?
2) ¿En qué año nació Marina?
3) ¿Cuántos años tiene Marina?
4) ¿Qué edad tiene el abuelo de Marina?
5) ¿Qué edad tiene la madre de Marina?

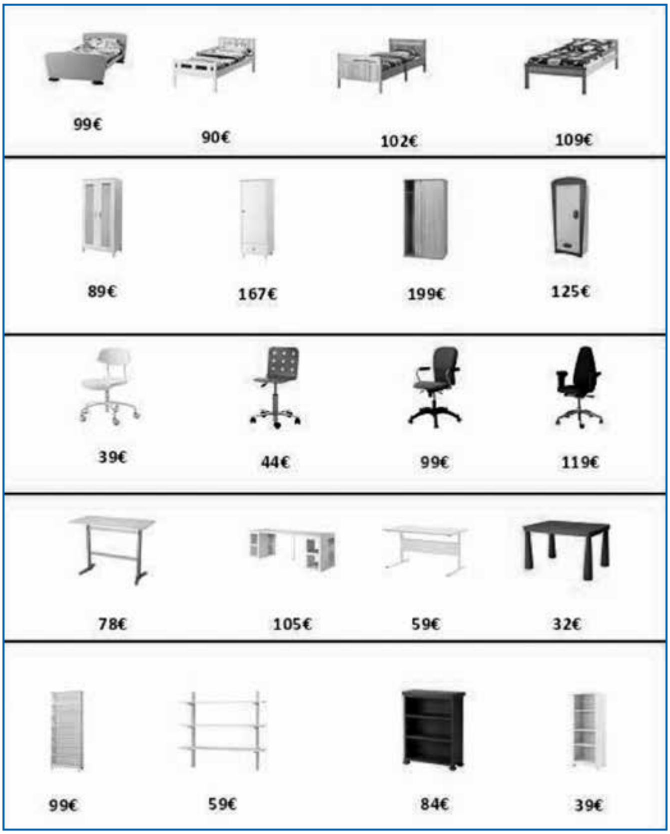
Problema 3: Los muebles de mi dormitorio

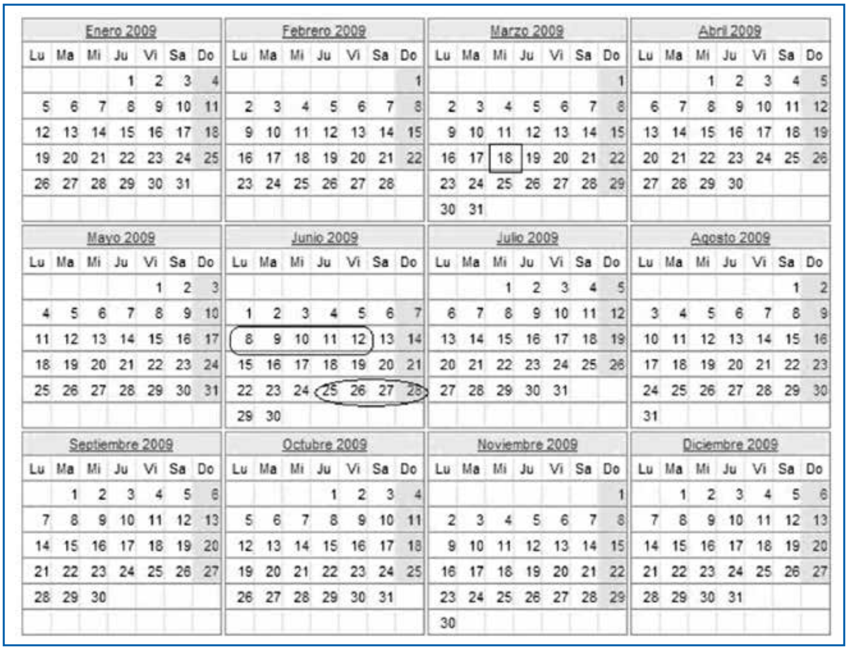
Me estoy haciendo mayor y mis padres quieren cambiar los muebles de mi habitación. Como yo tengo mis preferencias me permiten tener opinión sobre lo que van a comprar. Un buen día mi madre me dice que han pensado comprarlos en IKEA. ¡¡¡Uauhhh! Me pareció una idea estupenda porque es mi estilo. Así que me dieron el catálogo y unas instrucciones sobre el precio al que debía ajustarme. Y me puse manos a la obra. ¡¡Cómo voy a disfrutar!! Fíjate bien en el catálogo y haz la combinación que más te guste (ver figura página siguiente).

1. ¿Cuánto costará el dormitorio completo que has elegido?
2. Tus padres tienen un presupuesto de 450€. ¿Podrán comprarte el dormitorio que has elegido? Si no es así, deberás de modificar la combinación, ajustarla con el presupuesto y calcular nuevamente el precio final.
3. El pago del dormitorio se fraccionará en seis meses. ¿Cuánto pagarán cada mes?

Problema 4: Días de feria

Estamos a 18 de marzo de 2009 y los de mi pandilla y yo hemos pensado ir todos juntos a la feria del pueblo de mis abuelos que se celebra desde el 25 al 28 de junio. Pero antes tenemos los exámenes del cole que empiezan el 8 de junio. ¿Cuántos días faltan para que empiece la feria? ¿Cuántos días de clase hay desde el día 9 de abril hasta que empiecen los exámenes? Recuerda que la semana santa este año es desde el 6 al 10 de abril. ¿Cuántas semanas faltan para que empiecen los exámenes? (Ver figura página siguiente).





Enero 2009

Lu	Ma	Mi	Ju	Vi	Sa	Do
			1	2	3	4
5	6	7	8	9	10	11
12	13	14	15	16	17	18
19	20	21	22	23	24	25
26	27	28	29	30	31	

Febrero 2009

Lu	Ma	Mi	Ju	Vi	Sa	Do
						1
2	3	4	5	6	7	8
9	10	11	12	13	14	15
16	17	18	19	20	21	22
23	24	25	26	27	28	

Marzo 2009

Lu	Ma	Mi	Ju	Vi	Sa	Do
						1
2	3	4	5	6	7	8
9	10	11	12	13	14	15
16	17	18	19	20	21	22
23	24	25	26	27	28	29
30	31					

Abril 2009

Lu	Ma	Mi	Ju	Vi	Sa	Do
		1	2	3	4	5
6	7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26
27	28	29	30			

Mayo 2009

Lu	Ma	Mi	Ju	Vi	Sa	Do
				1	2	3
4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17
18	19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30	31

Junio 2009

Lu	Ma	Mi	Ju	Vi	Sa	Do
1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13	14
15	16	17	18	19	20	21
22	23	24	25	26	27	28
29	30					

Julio 2009

Lu	Ma	Mi	Ju	Vi	Sa	Do
		1	2	3	4	5
6	7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26
27	28	29	30	31		

Agosto 2009

Lu	Ma	Mi	Ju	Vi	Sa	Do
					1	2
3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	15	16
17	18	19	20	21	22	23
24	25	26	27	28	29	30
31						

Septiembre 2009

Lu	Ma	Mi	Ju	Vi	Sa	Do
	1	2	3	4	5	6
7	8	9	10	11	12	13
14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27
28	29	30				

Octubre 2009

Lu	Ma	Mi	Ju	Vi	Sa	Do
			1	2	3	4
5	6	7	8	9	10	11
12	13	14	15	16	17	18
19	20	21	22	23	24	25
26	27	28	29	30	31	

Noviembre 2009

Lu	Ma	Mi	Ju	Vi	Sa	Do
						1
2	3	4	5	6	7	8
9	10	11	12	13	14	15
16	17	18	19	20	21	22
23	24	25	26	27	28	29
30						

Diciembre 2009

Lu	Ma	Mi	Ju	Vi	Sa	Do
	1	2	3	4	5	6
7	8	9	10	11	12	13
14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27
28	29	30	31			

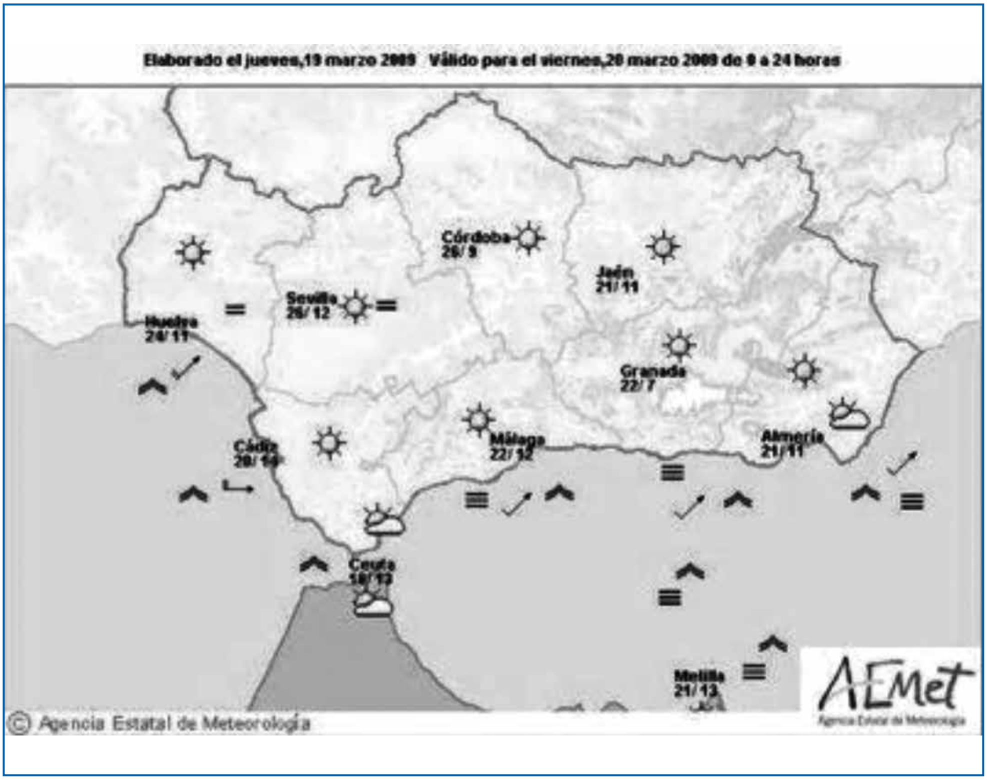
Problema 5: El mapa del tiempo

Antes de las vacaciones de Semana Santa, un grupo de alumnos y profesores de un colegio de Andalucía han decidido realizar una excursión al campo durante el fin de semana.

Tú misión consiste en averiguar en cuál de las provincias se encuentra dicho colegio, siguiendo las siguientes pistas:

1) El nombre de la ciudad contiene una sola “a”.
2) La temperatura máxima en dicha ciudad no sobrepasa los 30ºC.
3) La temperatura mínima no bajará de 5ºC.
4) La diferencia entre sus temperaturas máximas y mínimas es un número entre el 11 y el 20.
5) No tiene playa.
6) De las opciones resultantes, es aquella cuya suma de temperaturas máximas y mínimas es menor.

A continuación te mostramos el mapa de temperaturas máximas y mínimas de cada provincia que el Instituto Nacional de Meteorología predice para el fin de semana.



La secuencia establecida para el desarrollo de la Unidad Didáctica es la que se ofrece a continuación:

SESIÓN 1

Primera Actuación

Grupo experimental y control

- Se presenta el power point ¿Quién es Polya?, en el que aparece recogido una pequeña biografía de Polya y las fases de su propuesta de resolución de problemas (gran grupo, pero por separado el grupo experimental y el grupo control).

Segunda Actuación

Grupo experimental

- Se explican los objetivos que se pretenden alcanzar con la aplicación de la Unidad Didáctica, así como los contenidos que se van a trabajar y los recursos necesarios, todo ello aparece recogido en el cuaderno de trabajo del alumno (gran grupo).

SESION 2

Primera Actuación

Grupo experimental

- Se procede a recordar los cuatro pasos de Polya en la resolución de problemas (gran grupo).
- Hay que centrarse en el primer paso "Comprender el problema", para ello se lee el enunciado del problema 1 "¡Nos vamos de viaje!...¡En tren!" y se realizan preguntas del tipo: ¿Qué me dice el enunciado?, ¿qué tengo que hacer?, ¿lo entiendo? (gran grupo).
- Se vuelve a leer el enunciado del problema de forma colectiva para extraer las ideas fundamentales, posteriormente se pide a los alumnos y alumnas que lo hagan de forma individual y sigan la secuencia que aparece recogida en su cuaderno de trabajo. Cada secuencia es distinta en función del nivel curricular en el que se encuentre cada alumno o alumna. El nivel básico presenta más apoyos escritos y gráficos, estos se van reduciendo conforme se asciende de nivel. El objetivo final de este paso es la extracción de los datos necesarios del problema.
- Los alumnos y alumnas tanto de nivel medio como avanzado que terminen rápidamente de extraer los datos del problema podrán tutorizar a sus compañeros y compañeras de niveles inferiores, siempre y cuando respeten la secuencia que estos han de seguir, de esta forma se reforzará de forma simultánea la secuencia de trabajo en todos los niveles.

Grupo control

- Las actuaciones son las mismas, excepto que el cuaderno del alumno no presenta los apoyos necesarios en los distintos niveles curriculares.

Segunda Actuación

- La función que hay que ejercer tanto con los alumnos y alumnas del grupo experimental como del grupo control durante esta primera fase de la resolución del problema se centra en hacerles reflexionar sobre la información que ofrece el problema matemático mediante el uso de preguntas y analogías.

Tercera Actuación

- Corrección de lo realizado tanto por parte del grupo experimental como del grupo control (gran grupo).

SESION 3

Primera Actuación

Grupo experimental

- Se procede a recordar los cuatro pasos de Polya en la resolución de problemas (gran grupo).
- Hay que centrarse en el segundo paso “Concebir un plan”, para ello se tienen en cuenta los datos extraídos del enunciado del problema 1 “¡Nos vamos de viaje!...¡En tren!” y se realizan preguntas del tipo: ¿Qué voy a hacer y cómo? (gran grupo).
- De forma individual cada alumno o alumna deberá seguir la secuencia que aparece recogida en su cuaderno de trabajo. Cada secuencia es distinta en función del nivel curricular en el que se encuentre cada alumno o alumna. El nivel básico presenta más apoyos escritos y gráficos, estos se van reduciendo conforme se asciende de nivel. El objetivo final de este paso es la representación gráfica del problema, bien de motu propio, bien a través de la secuencia dirigida como forma de hacer tangible el problema y la posible solución, así como la explicación por escrito del plan que se va a seguir.
- Los alumnos y alumnas tanto de nivel medio como avanzado que terminen rápidamente de establecer su plan de resolución del problema podrán tutorizar a sus compañeros y compañeras de niveles inferiores, siempre y cuando respeten la secuencia que estos han de seguir, de esta forma se reforzará de forma simultánea la secuencia de trabajo en todos los niveles.

Grupo control

- Las actuaciones son las mismas, excepto que el cuaderno del alumno no presenta los apoyos necesarios en los distintos niveles curriculares.

Segunda Actuación

- La función ejercida tanto con los alumnos y alumnas del grupo experimental como del grupo control durante esta segunda fase de la resolución del problema se centrará en hacerles reflexionar sobre las posibilidades de planificación que vayan presentando mediante el uso de preguntas y analogías.

Tercera Actuación

- Corrección de lo realizado tanto por parte del grupo experimental como del grupo control (gran grupo).

SESION 4

Primera Actuación

Grupo experimental y control

- Se procede a recordar los cuatro pasos de Polya en la resolución de problemas (gran grupo).
- Hay que centrarse en el tercer paso "Ejecutar el plan", para ello nos basamos en el plan establecido para la resolución del problema 1 "¡Nos vamos de viaje!...¡En tren!" y se recuerda la necesidad de operar con tranquilidad y de forma segura (gran grupo).
- De forma individual cada alumno o alumna deberá ejecutar las operaciones establecidas en su plan de resolución. En esta ocasión no se pueden establecer niveles porque todos los alumnos y alumnas han de realizar los mismos algoritmos de forma correcta.
- Los alumnos y alumnas tanto de nivel medio como avanzado que terminen rápidamente de establecer la ejecución de las operaciones del problema podrán tutorizar a sus compañeros y compañeras de niveles inferiores.

Segunda Actuación

- La función realizada tanto con los alumnos y alumnas del grupo experimental como del grupo control durante esta tercera fase de la resolución del problema se centrará en hacerles reflexionar sobre los posibles errores cometidos en la ejecución de las operaciones.

Tercera Actuación

- Corrección de lo realizado tanto por parte del grupo experimental como del grupo control (gran grupo).

SESIÓN 5

Primera Actuación

Grupo experimental

- Se procede a recordar los cuatro pasos de Polya en la resolución de problemas (gran grupo).
- Hay que centrarse en el cuarto paso "Examinar la solución", para ello nos basamos en todo el proceso seguido: los datos extraídos del enunciado, el plan de resolución y las operaciones realizadas del problema 1 "¡Nos vamos de viaje!...¡En tren!" y se realizan preguntas del tipo: ¿crees que el resultado puede ser correcto ¿por qué? (gran grupo).
- De forma individual cada alumno o alumna deberá seguir la secuencia que aparece recogida en su cuaderno de trabajo. Cada secuencia es distinta en función del nivel curricular en el que se encuentre cada alumno o alumna. El nivel básico presenta más apoyos escritos y gráficos, estos se van reduciendo conforme se asciende de nivel. El objetivo final de este paso es la revisión del problema de forma guiada a través de una serie de preguntas y la posibilidad de explicar otra alternativa de resolución para aquellos alumnos y alumnas que así la consideren.
- Los alumnos y alumnas tanto de nivel medio como avanzado que terminen rápidamente de establecer su revisión del problema podrán tutorizar a sus compañeros y compañeras de niveles inferiores, siempre y cuando respeten la secuencia que estos han de seguir, de esta forma se reforzará de forma simultánea la secuencia de trabajo en todos los niveles.

Grupo control

- Las actuaciones son las mismas, excepto que el cuaderno del alumno no presenta los apoyos necesarios en los distintos niveles curriculares.

Segunda Actuación

- Nuestra función tanto con los alumnos y alumnas del grupo experimental como del grupo control durante esta cuarta fase de la resolución del problema se centrará en hacerles reflexionar sobre las posibilidades de error en cualquier fase de la resolución del problema mediante el uso de preguntas y analogías.

Tercera Actuación

- Tanto para el grupo experimental como el grupo control se presenta el problema número 2 "¿Cuántos años...? y se recuerdan los cuatro pasos de Polya (gran grupo).
- Se pide al alumnado que ponga en marcha el primer paso de Polya.

Cuarta Actuación

- Corrección de lo realizado tanto por parte del grupo experimental como del grupo control (gran grupo).

SESION 6

Primera Actuación

- Tanto para el grupo experimental como el grupo control se recuerdan las fases de Polya (gran grupo).
- Se pide al alumnado que ponga en marcha el segundo, tercer y cuarto paso de Polya en el problema número 2 "¿Cuántos años...?.
- Este problema recogido en el cuaderno de trabajo del alumnado del grupo experimental también se encuentra nivelado por lo que cada alumno o alumna deberá seguir su secuencia. Los cuadernos del grupo control no aparecen nivelados.

Segunda Actuación

- La función que hay que desarrollar tanto con los alumnos y alumnas del grupo experimental como del grupo control durante estas fases de la resolución del problema se centrará en hacerles reflexionar sobre todo el proceso de la resolución del problema mediante el uso de preguntas y analogías.

Tercera Actuación

- Corrección de lo realizado tanto por parte del grupo experimental como del grupo control (gran grupo).

SESIÓN 7

Primera Actuación

- Tanto para el grupo experimental como el grupo control se recuerdan las fases de Polya (gran grupo).
- Se pide al alumnado que resuelva el problema número 3 "Los muebles de mi dormitorio" siguiendo los pasos establecidos por Polya.
- Este problema recogido en el cuaderno de trabajo del alumnado también se encuentra nivelado por lo que cada alumno o alumna deberá seguir su secuencia. Los cuadernos del grupo control no aparecen nivelados.

Segunda Actuación

- La función que hay que ejercer tanto con los alumnos y alumnas del grupo experimental como del grupo control durante estas fases de la resolución del problema se centrará en hacerles reflexionar sobre todo el proceso de la resolución del problema mediante el uso de preguntas y analogías.

Tercera Actuación

- Corrección de lo realizado tanto por parte del grupo experimental como del grupo control (gran grupo).

SESIÓN 8

Primera Actuación

- Tanto para el grupo experimental como el grupo control se recuerdan las fases de Polya (gran grupo).
- Se pide al alumnado que resuelva el problema número 4 "Días de feria" siguiendo los pasos establecidos por Polya.
- Este problema recogido en el cuaderno de trabajo del alumnado también se encuentra nivelado por lo que cada alumno o alumna deberá seguir su secuencia. Los cuadernos del grupo control no aparecen nivelados.

Segunda Actuación

- La función desarrollada tanto con los alumnos y alumnas del grupo experimental como del grupo control durante estas fases de la resolución del problema se centrará en hacerles reflexionar sobre todo el proceso de la resolución del problema mediante el uso de preguntas y analogías.

Tercera Actuación

- Corrección de lo realizado tanto por parte del grupo experimental como del grupo control (gran grupo).

SESIÓN 9

PRIMERA ACTUACIÓN

- Tanto para el grupo experimental como el grupo control se recuerdan las fases de Polya (gran grupo).

- Se pide al alumnado que resuelva el problema número 5 "El mapa del tiempo" siguiendo los pasos establecidos por Polya.
- Este problema recogido en el cuaderno de trabajo del alumnado también se encuentra nivelado por lo que cada alumno o alumna deberá seguir su secuencia. Los cuadernos del grupo control no aparecen nivelados.

Segunda Actuación

- La función ejercida tanto con los alumnos y alumnas del grupo experimental como del grupo control durante estas fases de la resolución del problema se centrará en hacerles reflexionar sobre todo el proceso de la resolución del problema mediante el uso de preguntas y analogías.

Tercera Actuación

- Corrección de lo realizado tanto por parte del grupo experimental como del grupo control (gran grupo).

SESION 10. PRUEBA DE EVALUACIÓN

- - La prueba de evaluación es la misma para el grupo experimental y control, no se encuentra nivelada y consta de cinco problemas similares a los trabajados en clase.

REFLEXIONES FINALES

La experiencia llevada a cabo en torno a una metodología basada en agrupamientos flexibles ha sido muy satisfactoria en los cinco centros en los que se ha llevado a cabo la investigación; si bien es cierto que las dificultades también han aparecido, ya que los desdobles realizados para trabajar con un grupo experimental y control conllevaba un cambio en el horario de alumnado y profesorado durante dos semanas, lo que suponía romper la dinámica habitual del centro.

En cuanto al diseño e implementación de la secuencia didáctica presentada cabría señalar que su minuciosa planificación, junto con la elaboración de los cuadernos de trabajo del alumnado de ambos grupos –experimental y control- ha guiado en todo momento al profesorado que la puesto en marcha en el aula, con independencia de que éste formase parte del equipo de investigación o no.

Respecto al método de Polya empleado en la resolución de problemas ha sido valorado de forma muy positiva por el alumnado; no obstante, en las primeras sesiones manifestaban su "desesperación" por no empezar "hacer las cuentas ya". El alumnado busca responder rápidamente al problema, sin pararse a pensar en el mismo, su objetivo es operar en el menor tiempo posible. Al finalizar toda la investigación, ya puntualizaban que aunque el proceso era lento, ahora entendían mejor los problemas, efectivamente los resultados se dejaron sentir en los exámenes propuestos por sus tutores y tutoras.

Finalmente, también cabría mencionar que la contextualización de los problemas y su planteamiento como una tarea que ha de realizar el alumnado ha posibilitado desarrollar diferentes competencias entre el alumnado, sobre todo, la competencia matemática.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Albericio, J. (1994). *Los agrupamientos flexibles y la escuela para el progreso continuo.* Barcelona: PPU.

Borrell, N. (1984). Agrupamiento flexible de alumnos de e.g.b. *Educar*, 6, 145-158.

Córcoles, A.C. y Valls, J. (2006). Debates virtuales y concepciones de estudiantes para maestro sobre resolución de problemas. *ZETETIKÉ*, 14 (25), 7-28.

Dawson, M. M. (1987). Beyond ability grouping: A review of the effectiveness of ability grouping and its alternatives. *School Psychology Review*, 16, 348-369.

De la Orden, A. (1975). *El agrupamiento de los alumnos. Estudio crítico.* Madrid: ICE-CSIC.

Díaz Alcaraz, F. (2002). *Didáctica y currículo: un enfoque constructivista.* Cuenca: Ediciones de la Universidad de Castilla La Mancha.

Gamoran, A. (1986). Instructional and Institutional Effect of Ability Grouping. *Socology of Education, 59,* 185-198.

García Madruga, J.A. (2002). Resolución de problemas. En P. Abrantes et al. *La resolución de problemas en matemáticas.* Barcelona: Graó.

García Suárez, J. (1991). Los agrupamientos flexible, una necesidad. *Apuntes de educación. Dirección y administración,* 41, 9-12.

Golbert, T.M., Passow, H. y Justman, J. (1966). *The effects of ability grouping.* New York: Teachers College, Columbia University.

Gómez Dacal, G. (1992). *Centros educativos eficientes.* Barcelona: PPU.

Harskamp, E. y Suhre, C. (2007). Schoenfeld's problem solving theory in a student controlled learning environment. *Computers & Education*, 49, 822–839.

Lee, M. y Lucking, R. (1990). Ability grouping: realities and alternatives. Chilhood education. *Journal of the association for childhood education international.* South Carolina: Columbia College.

MEC (2007). Panorama de la Educación. Indicadores de la OCDE 2007. Informe Español. Disponible en http://www.educacion.gob.es/multimedia/00004656.pdf [Consultado 18 de febrero de 2009].

Oliver, C. (1993). El agrupamiento flexible. *Cuadernos de Pedagogía*, 212, 19-21.

Oliver, C. (1995). Agrupar a los alumnos: ¿ilusión o realidad? *Aula de innovación educativa*, 35, 53-59.

Oliver, C. (2003). *Estrategias didácticas y organizativas ante la diversidad.* Barcelona: Octaedro.

Oliver, C. (2008). Estrategias para la diversidad: agrupamientos flexibles de alumnos. En S. De la Torre (dir.). *Estrategias didácticas en el aula. Buscando la calidad y la innovación.* Madrid: UNED.

Orden de 10 de agosto de 2007 por la que se desarrolla el currículo de educación primaria en Andalucía (Boletín Oficial de la Junta de Andalucía número 171, de 20 de agosto de 2007).

Passow, H. (1970). El laberinto de la investigación sobre el agrupamiento por capacidad. En Yates, A. *Agrupamiento en educación.* Buenos Aires: Paidós.

PISA (2003). *Informe PISA 2003. Aprender para el mundo de mañana. Programa para la Evaluación Internacional de Alumnos*. Disponible en http://www.oecd.org/dataoecd/59/1/39732493.pdf [Consultado el 12 de enero de 2005].

Polya, G. (1992). *Cómo plantear y resolver problemas*. México: Trillas.

Real Decreto 1513/06, de 7 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas de educación primaria (Boletín Oficial del Estado número 293, de 8 de diciembre de 2006).

Rué, J. (1991). *Diversitat i agrupament d'alumnes.* Barcelona: Institut de Ciènces de l'Educació, Universitat Autònoma de Barcelona.

Santos, M. (2008). La Resolución de Problemas Matemáticos: Avances y Perspectivas en la construcción de una agenda de investigación y práctica. En *Actas del XII Simposio de la SEIEM*. Badajoz. SEIEM, 157-187.

Santos Guerra, M.A. (ed.) (1993). *Agrupaciones flexibles de alumnos. Un claustro investiga.* Sevilla: Diada.

Slavin, R.E. (ed.) (1988). *School and classroom organization.* Hillsdale, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates Publishers.

Zabala, A. y Arnau, L. (2008). *11 ideas clave. Cómo aprender y enseñar competencias.* Barcelona: Graó.

¡PROMOCIÓN ESPECIAL PARA LOS LECTORES DE EPSILON!*

Enseña Matemáticas con TUTORMATES

TutorMates es una herramienta única en la docencia de las Matemáticas en la Educación Secundaria.

Mediante la integración de todos los contenidos curriculares vigentes en una plataforma que incorpora simuladores de matemáticas y geometría dinámica, se presenta como una aplicación completa para la enseñanza de las Matemáticas en el aula.

TUTORMATES®

- **TutorMates** en las aulas del 1º y 2º de la ESO durante el curso escolar 2010-2011.
- Material didáctico de apoyo a disposición de los docentes.
- No es imprescindible estar conectado a Internet para enseñar o trabajar con **TutorMates**.
- Disponible para los sistemas operativos Windows y Guadalinex.

*Los lectores de Epsilon pueden disponer gratuitamente de **TutorMates** para su uso en el aula durante el curso escolar 2010-2011 rellenando el formulario que encontrarán en:

www.tutormates.es/promo-epsilon

info@tutormates.es **www.tutormates.es** 902 43 00 38

Épsilon *- Revista de Educación Matemática* ***2012, Vol. 29(3), nº 82, 79-87, ISSN: 1131-9321***

Demostración de teoremas con GeoGebra ¿Es posible?

Agustín Carrillo de Albornoz Torres
Universidad de Córdoba
Instituto GeoGebra de Andalucía

RESUMEN: *GeoGebra constituye un excelente recurso para fomentar el uso de unas matemáticas distintas en el aula, sobre todo en niveles educativos de ESO y Bachillerato, sin olvidar Educación Primaria para los se dispone de una versión específica. Además, el uso de este software se está generalizando o al menos es conocido por la mayoría del profesorado interesado en incorporar las TIC a su trabajo diario. Este trabajo ofrece algunos ejemplos de aplicación de GeoGebra, en este caso para intentar demostrar teoremas, de los que se ofrecen cuatro ejemplos para justificar que con ayuda de las herramientas que el programa ofrece a las que añadimos el dinamismo, podemos considerar que nos ha permitido demostrarlos.*
PALABRAS CLAVE: *GeoGebra, ESO, Bachillerato, Teoremas*

Geogebra theorem proving is that possible?

INTRODUCCIÓN

Al utilizar GeoGebra como recurso para la enseñanza de las matemáticas destacamos todas las posibilidades que ofrece, entre ellas el dinamismo que facilita la manipulación de los objetos que intervienen en una construcción, lo que hace que nuestro alumnado pueda investigar qué ocurrirá al cambiar los objetos de posición y por tanto, podrá deducir relaciones y propiedades.

Cuando entre las actividades proponemos que se verifique o no un determinado teorema siempre recordamos que con GeoGebra no podemos demostrarlo, solo comprobarlo. Es evidente que la demostración de cualquier teorema requiere de un proceso analítico en el que se obtenga la certificación de la propiedad o relación que se desea demostrar.

No es menos cierto que en determinados niveles educativos, como puede ser el caso de Educación Secundaria o Bachillerato no es necesario el rigor que requiere una demostración y en ocasiones no es posible, ya requiere el uso de propiedades o relaciones que escapan del currículum de estos niveles educativos.

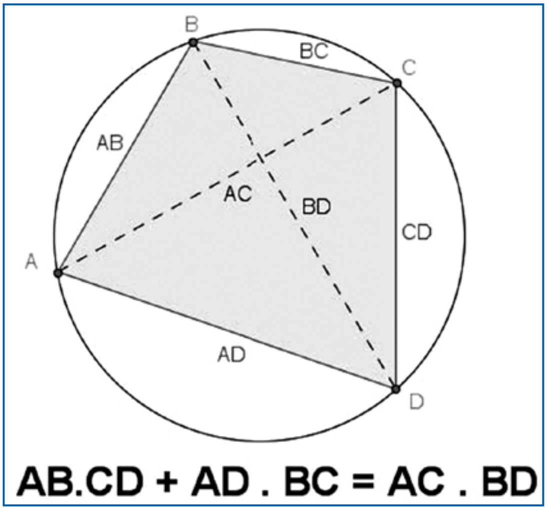
Teniendo en cuenta las consideraciones anteriores, sobre el rigor que requiere una demostración y las dificultades que podemos encontrar en estos niveles educativos, podemos alcanzar una posición intermedia en la que aprovechando las posibilidades que ofrece GeoGebra y las herramientas que está incorporando, sea posible estudiar determinados teoremas e incluso sea posible considerar que ha quedado demostrado atendiendo a la información facilitada por el programa.

Veamos algunos ejemplos en los que a partir de una construcción sea posible determinar que se cumple un teorema y en la que al manipular los objetos independientes, moviéndolos por todo el plano, nos permita afirmar que el teorema es cierto.

Comencemos con un teorema que requiere la comprobación de una relación numérica entre algunos elementos, como es el caso del teorema de Ptolomeo.

TEOREMA DE PTOLOMEO

Si un cuadrilátero está inscrito en una circunferencia, la suma de los productos de los pares de lados opuestos es igual al producto de las diagonales.



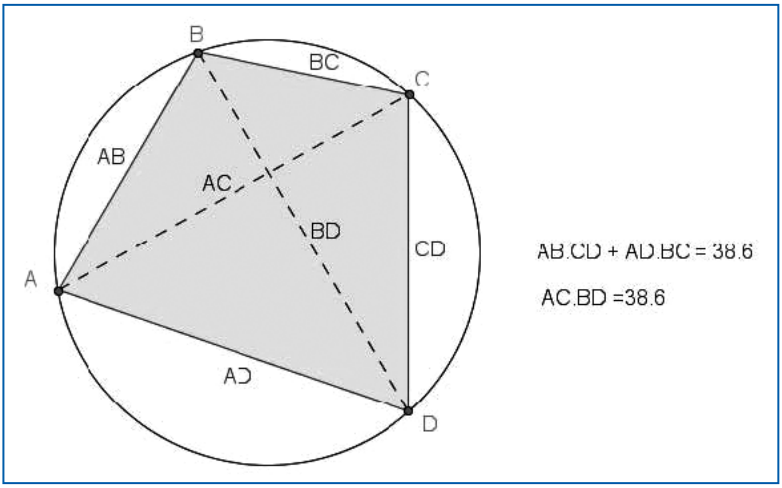
El primer paso que debemos realizar con GeoGebra será realizar la construcción de un cuadrilátero inscrito en una circunferencia, dibujando a continuación las diagonales, tal y como aparece en la imagen anterior.

A continuación, dado que la medida de los lados y de las diagonales aparece directamente al construirlos, solo nos quedará obtener el valor de las dos expresiones que deseamos comprobar que son iguales.

Por un lado, calculamos el valor de AB·CD+AD·BC, para lo que bastará con introducir esta expresión en la línea de entrada (o los nombres de los correspondientes segmentos, si no hemos procedido a renombrarlos) para obtener su valor.

De manera análoga obtendremos el valor del producto de las dos expresiones, escribiendo AC·BD en la línea de entrada.

Observamos que los dos valores coinciden tal y como aparece en la imagen siguiente:



Como último paso, para poder considerar que hemos demostrado el teorema bastará con manipular la construcción moviendo los objetos para considerar que la igualdad entre las dos expresiones se cumple.

Podemos pensar que los dos valores anteriores corresponden a una aproximación con tantos decimales como se hayan indicado a través de la opción **Redondeo** del menú **Opciones**, por lo que solo nos quedaría obtener el valor de la diferencia entre las dos cantidades para comprobar que siempre se mantiene igual a 0.

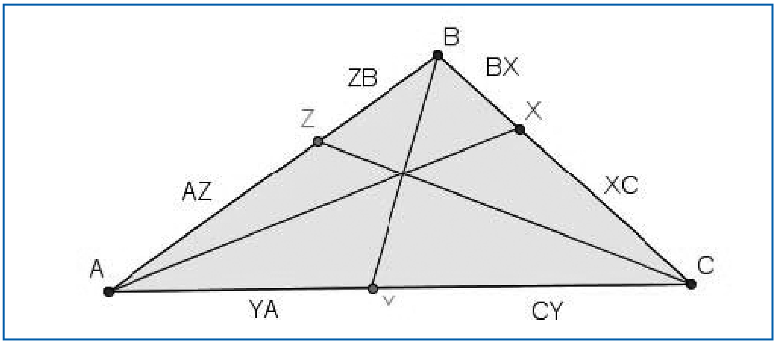
Un proceso similar servirá para considerar demostrado, aunque de manera gráfica el siguiente teorema, ya que se trata de comprobar una relación entre los valores de unas determinadas medidas obtenidas a partir de un triángulo.

TEOREMA DE CEVA

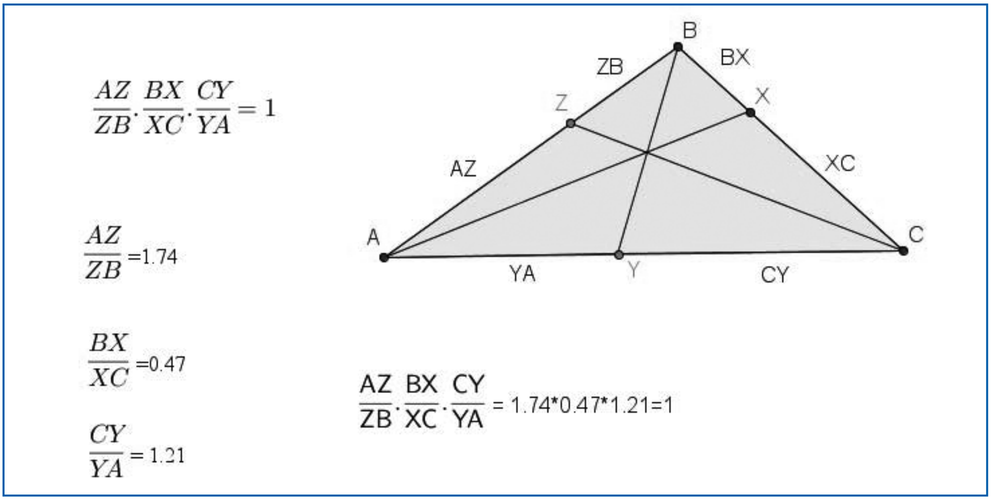
Si AX, BY y CZ son tres cevianas concurrentes de un triángulo ABC, entonces $\frac{AZ}{ZB}\cdot\frac{BX}{XC}\cdot\frac{CY}{YA}=1$.

Recordemos que una ceviana es el segmento que une un vértice de un triángulo con un punto del lado opuesto.

Al igual que en ejemplo anterior, comenzaremos dibujando los objetos necesarios; en este caso, un triángulo y dos cevianas. A continuación construimos la tercera ceviana con la condición establecida en el enunciado, que las tres sean concurrentes. Para ello, bastará encontrar el punto de corte en el lado de la recta que pasa por el vértice opuesto y por el punto de intersección de las dos cevianas dibujadas previamente.



Ya solo queda obtener los valores de las dos expresiones que deseamos comprobar, utilizando para ello las opciones de cálculo que nos ofrece la línea de entrada.



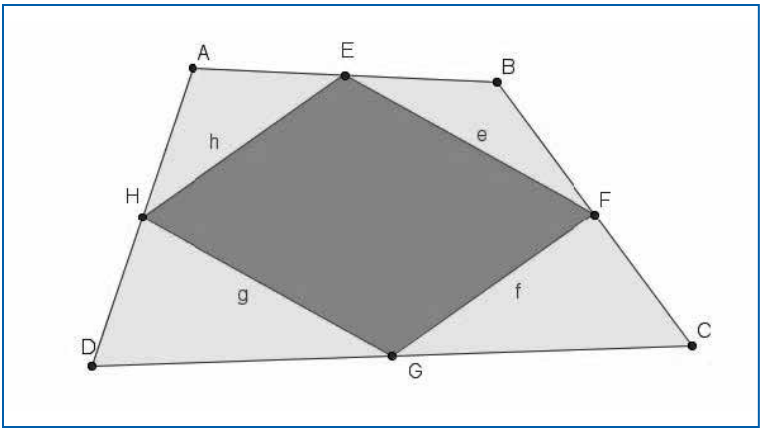
Y por último, para determinar que se cumple la igualdad, nos queda manipular la construcción.

Pasemos a un nuevo teorema que además de una comprobación numérica requiere que determinemos la relación existente entre unos elementos para deducir una cierta propiedad como ocurre en el siguiente teorema que es habitual en las actividades que habitualmente se realizan con GeoGebra, sobre todo en los cursos de formación para el profesorado.

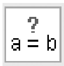
TEOREMA DE VARIGNON

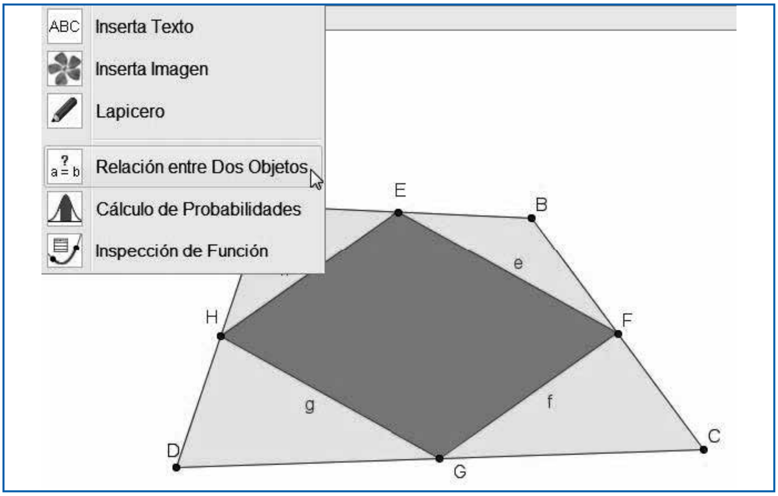
Los puntos medios de un cuadrilátero determinan un paralelogramo cuya área es la mitad del área del cuadrilátero.

Una vez dibujado el cuadrilátero ABCD, dibujamos un nuevo polígono EFGH, uniendo los puntos medios de cada uno de los lados.

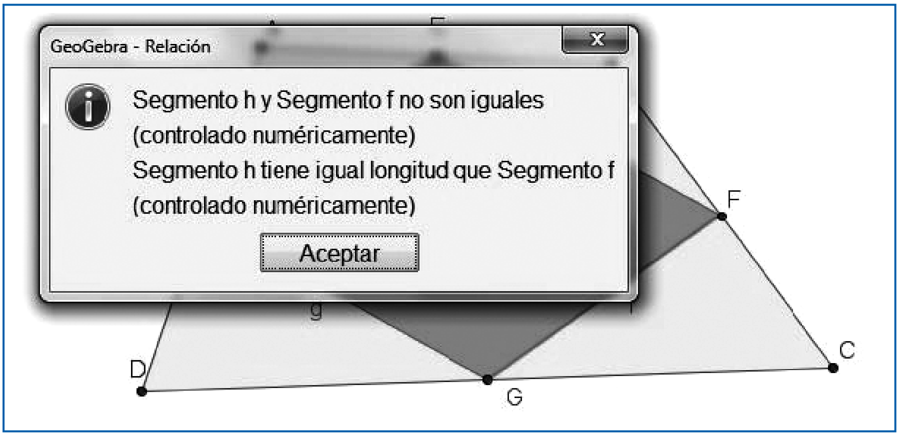


A continuación, tenemos que determinar la relación entre los lados h y f así como entre e y g, para deducir que se trata de un paralelogramo.

Para ello, utilizaremos la herramienta  **Relación entre dos objetos**.

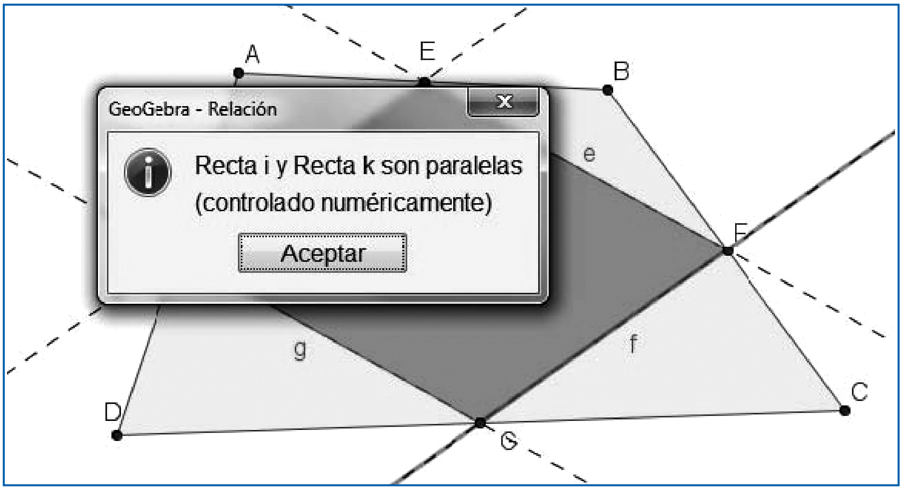


Una vez seleccionada esta herramienta marcamos los segmentos h y f, obteniendo que son segmentos distintos, lo cual es evidente pero que son del mismo tamaño, como podemos observar en la imagen siguiente:



La misma relación obtendremos entre los segmentos e y g.

Por tanto, solo nos queda determinar que los lados son paralelos para comprobar que se trata de un paralelogramo. Para ello, es necesario dibujar las rectas que contienen a cada uno de los lados de manera que con la ayuda de la herramienta **Relación entre dos objetos** preguntamos sobre las dos rectas, obteniendo el siguiente resultado:

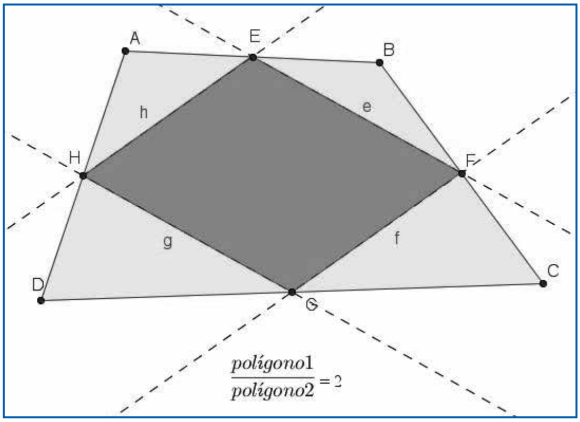


El mismo resultado nos dará el programa al preguntar por las otras dos rectas, por lo que al menos para este cuadrilátero podemos establecer que el polígono obtenido uniendo los puntos medios es un paralelogramo.

¿Y para otros casos? Solo hay que mover para comprobar que las relaciones se mantienen.

Por último, para establecer la relación entre las áreas bastará con calcular el valor del cociente entre las dos áreas, cuyos valores aparecen directamente en la vista algebraica y que en este caso serán polígono1 y polígono2.

Como el cociente es 2, podemos establecer que una es doble de la otra.



Por tanto, creo que podemos considerar demostrado o al menos decir que siempre se cumple el teorema de Varignon.

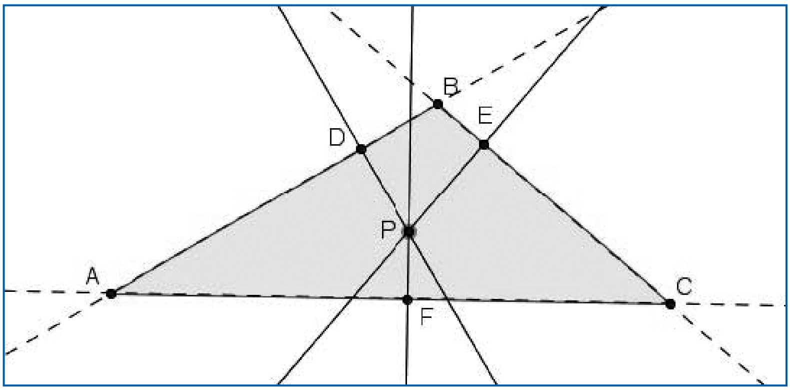
Veamos un teorema más relacionado con la recta de Simpson.

RECTA DE SIMPSON

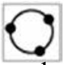
Los pies de las perpendiculares desde un punto P a los lados de un triángulo están alineados si y solo si P pertenece a la circunferencia circunscrita al triángulo.

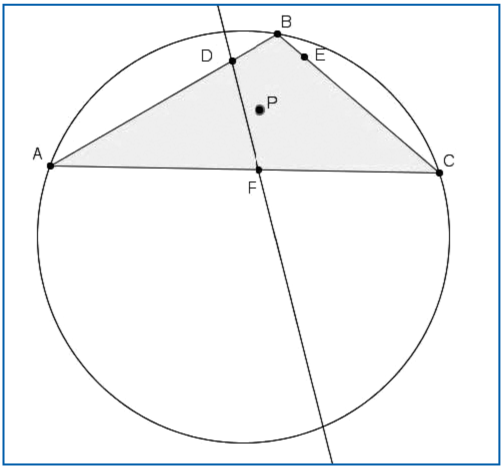
En este caso, la recta en la que se encuentran los tres puntos es la recta de Simpson.

Comenzaremos dibujando el triángulo ABC y un punto cualquiera P, obteniendo a continuación los pies de las perpendiculares desde este punto a los lados del triángulo, que llamamos D, E y F, tal y como muestra la siguiente figura:



Es evidente que los puntos no están alineados.

Para comprobar el teorema, dibujamos la circunferencia circunscrita utilizando la herramienta  **Circunferencia dados tres de sus puntos**. También, dibujamos la recta que pasa por dos de los pies de las perpendiculares, en este caso la recta que pasa por los puntos D y F.



Solo nos queda recurrir a las herramientas adecuadas que nos ofrece GeoGebra para comprobar que cuando P está sobre la circunferencia circunscrita, entonces el tercer punto E pertenece a la recta DF y por tanto E, D y F están alineados.

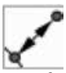
En un primer intento podemos acercar P a la circunferencia circunscrita de manera que visualmente comprobaremos que se dará la condición pedida, pero nos interesa aprovechar las opciones de GeoGebra para que nos ratifique esta relación.

Para ello, ya conocemos la herramienta **Relación entre dos objetos** que nos podrá decir, en este caso si E pertenece o no a la recta DF.

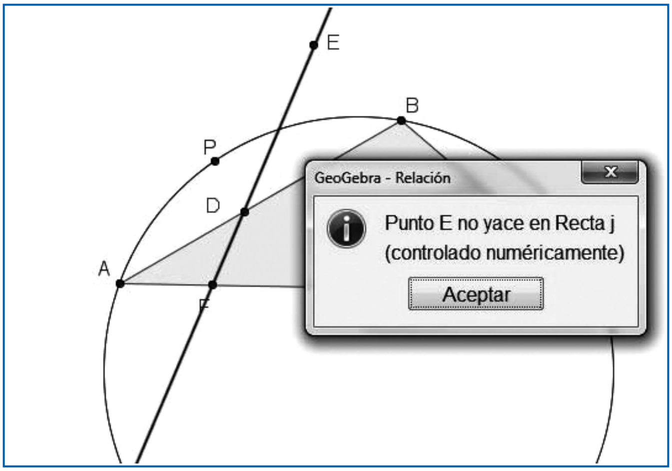
Si acercamos el punto P hasta situarlo sobre la circunferencia circunscrita y preguntamos la relación entre E y la recta, el resultado no es el esperado. (Ver figura página siguiente).

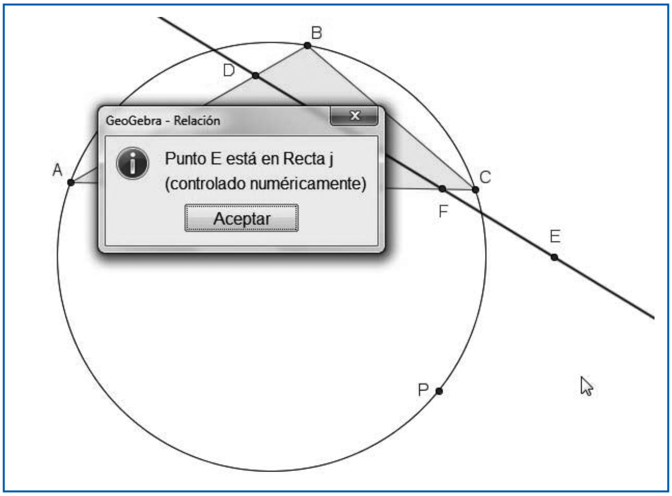
Es evidente, ya que P está sobre la circunferencia pero no pertenece a ella y por mucha precisión que tengamos, para el programa es imposible determinar una propiedad entre objetos que no están relacionados.

Acudimos a una nueva herramienta, en este caso la que nos permite redefinir un punto, de manera que podamos establecer que P no es un punto libre y si un punto de la circunferencia.

Esta herramienta es  **Adosa/Libera punto**, con la que al pulsar primero sobre P y después sobre la circunferencia hará que P deje de ser un objeto libre y esté creado sobre la circunferencia.

Si ahora volvemos a preguntar la relación entre el punto E y la recta DF el resultado será el que aparece en la imagen siguiente:

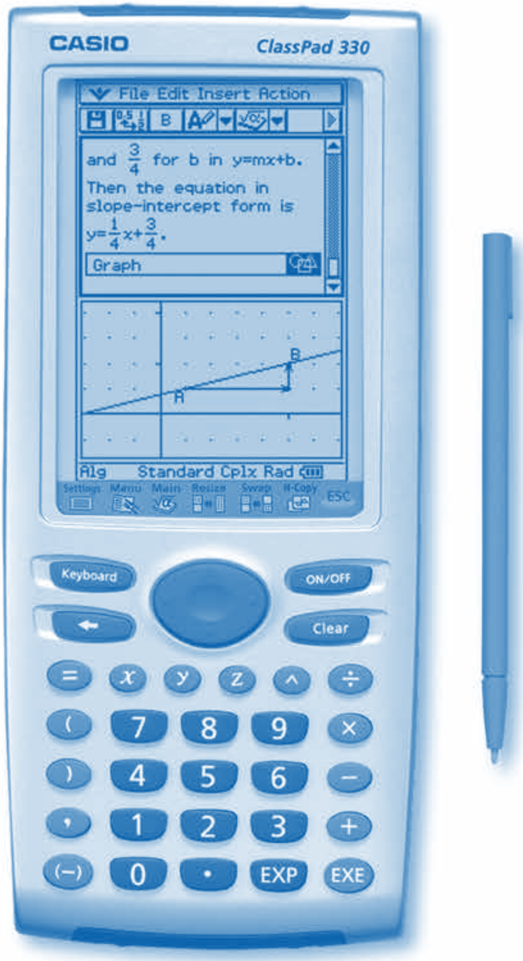




Por tanto, cuando P pertenece a la circunferencia circunscrita, los puntos E, D y F están alineados, con lo que podemos considerar, una vez que variemos las posiciones de todos los objetos que la relación se cumple.

Es evidente que de manera analítica no se ha demostrado ninguno de los teoremas anteriores, pero no es menos cierto que las posibilidades y las herramientas que hemos utilizado, a las que añadimos el dinamismo de GeoGebra, nos permiten decir que los teoremas se cumplen, por lo que podemos considerar que los hemos demostrado al menos de manera gráfica.

¡Atrévete a ponerle nota!



CASIO ClassPad 330.
La calculadora número 1 de su promoción.

Más de 500 aplicaciones gratuitas disponibles en internet.

Gran pantalla LCD con lápiz-táctil y menú de iconos + sistema CAS para álgebra simbólica + e-actividades como hojas de trabajo electrónicas y otras aplicaciones + rotación de gráficos 3-D + memoria flash de 5,4Mb.

CASIO®
www.aulacasio.com

Entra en **www.aulacasio.com**

El aula donde más se aprende sobre las calculadoras CASIO: con información, descargas, actividades, publicaciones, ofertas, etc.

Épsilon *- Revista de Educación Matemática* ***2012, Vol. 29(3), nº 82, 89-96, ISSN: 1131-9321***

Una selección de recursos de Internet para la enseñanza de la estadística "Estadisticadospuntocero"

Jesús Temprado, J. Gabriel Molina y Jaime Sanmartín
Metodología de las CC del Comportamiento
Facultad de Psicología, Universitat de València
Av. Blasco Ibáñez, 21, 46010, Valencia
e-mail: jetemar@gmail.com

RESUMEN: *El objetivo de nuestro trabajo es intentar proporcionar una Web 2.0 que sirva de apoyo a los estudiantes de Psicología en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la asignatura de Estadística. Para ello, hemos basado el diseño de este recurso de Internet en una recopilación activa de Applets que faciliten la comprensión y adquisición de algunos conceptos, ya que en estos se suelen integrar procedimientos gráficos y datos que ofrecen una visión sencilla y útil de la materia. Cabe destacar, a su vez, la naturaleza cooperativa del proyecto así como la vinculación al concepto Web 2.0.*
Palabras *clave: Web 2.0, Applets, Estadística, Psicología.*

A selection of Internet resources for teaching Statistics "Estadisticadospuntocero"

ABSTRACT: *We aimed, with this work, to provide a Web2.0 resource oriented in order to support the teaching-learning process of the subject of Statistics. The design of this internet resource was focused on providing an active compilation of web applets developed to support learning of some statistical concepts which are usually taught in the statistical training of the psychology undergraduates. These applets usually integrate graphical and data-driven procedures that offer a helpful insight to understand some statistical concepts and methods which may involve some difficulties to be taught and learnt. An important fact of the web site, was its collaborative nature.*
Key *Words: Web 2.0, Applets, Statistic, psychology*

INTRODUCCIÓN

El nuevo marco del EEES (Espacio Europeo de Educación Superior) se basa en un sistema de créditos -el denominado sistema ECTS- en el que el aprendizaje de los estudiantes cobra especial importancia. Esta nueva unidad de medida, nueva forma de entender el crédito, conforma un nuevo modelo educativo centrado más en el trabajo autónomo del estudiante que en las horas lectivas de los docentes (UdIE, 2010). Así pues, lo que realmente se pretende computar no es la duración temporal de las clases impartidas por el profesor, sino el volumen del trabajo global del alumno.

Es bien sabido que la enseñanza de la estadística en la educación superior, supone un gran desafío para los docentes. Y se torna especialmente complicada en titulaciones que no son propias de las Ciencias Experimentales, tales como: las Ciencias Sociales, las Ciencias de la Salud o las Ciencias de la Educación (Molina et al; 2011). Este hecho implica que, a menudo, se presenten dificultades, tanto para los profesores como para los estudiantes, relacionadas con diversos factores. Entre ellos, encontramos la falta de motivación por parte del alumnado, acusada en una escasa actitud participativa, pero también la insuficiente contextualización de los contenidos y de los recursos didácticos de los que disponemos para abordar la materia (Fernández Morales, A. 2010). Cosa que afecta directamente, tanto a la práctica del docente como al proceso de aprendizaje del estudiante, es decir, al funcionamiento normal y correcto del curso.

Por esta razón, para conseguir que la estadística sea más atractiva para los alumnos, y poder hacer frente al problema de la falta de motivación al que nos referíamos anteriormente, en este trabajo hemos apostado por las TIC como herramientas de apoyo a la enseñanza. Para ello, hemos seguido la línea que Schneiter (2008) marcó ya en sus trabajos. Este autor defiende que el uso de instrumentos educativos basados en las TIC, destinados a la simulación, la investigación o la ilustración, tienen un claro potencial para mejorar tanto el interés como la comprensión de los contenidos estadísticos. Ésta es, una línea de trabajo que se está consolidando por su capacidad de integrar en la estrategia didáctica recursos interactivos que permitan a los estudiantes comprender y asimilar los conceptos más abstractos, aquellos que presentan mayores dificultades de aprendizaje en el aula tradicional (Dinov et al. 2008, Lundsford et al. 2006, Schneiter 2008). Señalaremos que el recurso tecnológico utilizado con mayor frecuencia, por su versatilidad y su flexibilidad, es el *Applet* (Fernández Morales, A. 2010). Estos *Applets* interactivos favorecen la enseñanza de la materia que nos ocupa, puesto que proporcionan múltiples representaciones de nuevos conceptos y facilitan, a su vez, la experimentación (Schneiter; 2008).

Para subrayar este nuevo concepto del proceso de enseñanza, nos apoyaremos en los enfoques más recientes. Estas perspectivas actuales, del mismo modo que otros autores, proponen el uso de contenidos de aprendizaje interactivos y dinámicos, enriquecidos con enlaces, como: las herramientas basadas en la Web para sistemas de aprendizaje híbrido, entornos virtuales de aprendizaje colaborativo, blogs en tiempo real y otros recursos para la evaluación y autoevaluación (Fernández Morales, A. 2010).

Es así como, siguiendo estas directrices, y adaptándonos a las necesidades que existen actualmente en el nuevo contexto universitario, desde el Departamento de Metodología y las Ciencias del Comportamiento de la Facultad de Psicología, en la Universidad de Valencia, decidimos iniciar nuestro proyecto. Para ello, contamos con los procesos pedagógicos relacionados con las TIC y utilizamos los recursos libres de los que disponíamos en Internet. De esta manera, optamos por crear un espacio Web con carácter 2.0 donde poder recopilar los mejores *Applets* de estadística, aquellos que mejor ilustraran los contenidos de la asignatura.

Las principales competencias que debe ofrecer una Web 2.0 (O'Reilly, T. 2006):

- Debe ofrecer servicios en lugar de un software cerrado.
- Control sobre fuentes de datos únicos y difíciles de replicar que se enriquezcan a medida que más gente las utilice.
- Confiar en los usuarios como co-desarrolladores.
- Aprovechar la inteligencia colectiva.
- Sacar partido de "the long tail". Atender al poder colectivo de muchos sitios Web pequeños que forman la gran mayoría del contenido de la Web, en lugar de centrarse en los grandes sitios Web, mediante el autoservicio del cliente.
- Software no limitado a un solo dispositivo.
- Interfaces de usuario y modelos de desarrollo sencillos.

Con todo, podríamos decir que el objetivo de nuestro trabajo es el de elaborar una Web 2.0 con una primera colección de los mejores *Applets* disponibles en Internet, donde los usuarios puedan participar activamente en su elaboración. En definitiva, pretendemos hacer de ésta una herramienta de apoyo para los estudiantes y docentes, y al mismo tiempo, fomentar el desarrollo de nuevas competencias relacionadas con el proceso de enseñanza-aprendizaje colaborativo fuera del aula.

MÉTODO

En primer lugar, hablaremos de los materiales necesarios para la elaboración del presente trabajo. Por una parte, necesitamos una serie de recursos que se hallaban dispersos por Internet. Estos *Applets* son los principales protagonistas de nuestro trabajo. Pero de ellos, sólo utilizamos aquellos que mejor ilustraran los conceptos estadísticos, y que fueran de acceso libre. Por otra parte, otro de los medios que utilizamos en esta propuesta, fueron las herramientas que ofrece *Google* para crear espacio Web 2.0, a saber, "Google sites".

Una vez contamos con los medios pertinentes, comenzamos la construcción de la Web. Este proceso se llevó a cabo en cuatro fases: búsqueda de recursos (*Applets*) y fuentes bibliográficas, preparación y elaboración de un espacio Web 2.0 ("Google sites"), clasificación de los contenidos según los criterios del programa de la asignatura de Estadística incluida en el -Plan de estudios del Grado en Psicología, Universitat de València (2009)- y, por último, una breve explicación sobre su funcionamiento. A continuación haremos un análisis más detallado del procedimiento según la fase concreta.

La primera fase, como hemos apuntado, consistió en realizar una búsqueda exhaustiva en Internet de todos aquellos *Applets* libres, que mejor ilustrasen los conceptos estadísticos del temario de Estadística en el Grado de Psicología. Hemos de destacar que ampliamos nuestro ámbito de investigación, no ajustándonos sólo a contenidos en español sino también en inglés. Para ello utilizamos los principales buscadores de la red: *Google* y *Yahoo*.

La segunda fase, se inicia una vez seleccionamos aquellos *Applets* de mayor calidad. En ella, nos centramos en buscar las posibilidades que ofrece Internet para crear una Web con carácter 2.0 de forma gratuita. En nuestro caso, nos decidimos por "Google sites" como espacio donde ubicar los *Applets* seleccionados. Los motivos que nos llevaron a escoger las herramientas que ofrece *Google* fueron, principalmente, las continuas actualizaciones que realizan de sus productos, la facilidad de uso de los mismos, la compatibilidad con la infinidad de aplicaciones (blogs, cuentas de correo, etc.) y la gran aceptación por parte de los usuarios de los productos *Google*. De esta manera, en comparación con otras opciones valoradas, nos permitía una gestión más flexible y personalizada de los permisos a la hora de aportar contenidos al sitio.

Así pues, ofrecimos a los usuarios dos maneras de colaborar a la hora de aportar contenidos. La primera de ellas requería del uso de la aplicación "Google Groups". Esta aplicación es un servicio que ofrece *Google* que permite la formación de listas de correo electrónico, con el objetivo de mantener comunidades o, incluso, de facilitar la comunicación entre personas. De este modo, creamos un grupo en "Google Groups" bajo el nombre "*estadisticadospuntocero*". A este grupo le dimos los permisos para poder editar en la Web y, por lo tanto, cada miembro del mismo, podrá modificar los contenidos. Para registrarse, únicamente hay que pinchar el enlace (ver Figura 1), el cual da acceso directo al registro en el grupo. Cierto es, que hay una previa y continua supervisión de los administradores de la página para evitar un uso incorrecto de la misma. Pensamos que, dado el mayor grado de implicación que requiere, esta opción pueda ser más utilizada por docentes.

Una segunda opción para esta colaboración activa, requirió del uso de "Google Docs". Se trata de otro servicio gratuito de Google, que proporciona útiles basados en Web, para poder crear fácilmente documentos, hojas de cálculo, así como cuestionarios y presentaciones, y que permite, al mismo tiempo, colaborar en ellos a todo aquel que quiera hacerlo. Nosotros hemos utilizado "Form" puesto que resulta una aplicación de gran utilidad para crear cuestionarios, que posteriormente pueden ser insertados en la Web. En nuestro caso, formulamos un cuestionario con una pregunta única y abierta, dejando un espacio en blanco donde poder insertar el texto bajo el título "Gracias por colaborar y enriquecer nuestra Web" (ver Figura 1). La intención es que, en este espacio, los usuarios puedan escribir sus sugerencias y aportaciones, para que éstas lleguen automáticamente a los administradores, a través de una hoja de cálculo, para su posterior revisión, valoración y aceptación o no, de las propuestas recibidas. Esta modalidad de aportar contenidos es la que menos implicación requiere y, probablemente, sea la más utilizada por los estudiantes, ya que les permite relacionarse directamente con los administradores, de una manera anónima y sin ningún tipo de compromiso.

Estas dos opciones para aportar contenidos, las reagrupamos y las ubicamos en una página a la que denominamos "Aportaciones", incluida en el menú principal de la Web. Apuntaremos que hemos conseguido un acceso a la página sencillo y rápido (ver Figura 1).

Figura 1. Aportaciones, Fuente: Elaboración propia

Tras haber decidido los contenidos y su posterior ubicación, entramos de lleno en la tercera fase. Ésta consistió en estructurar estos contenidos en función del temario de la asignatura Estadística del Grado de Psicología. Para este fin, diferenciamos dos grandes bloques, estos son: “Estadística descriptiva” y “Estadística inferencial”. Dentro de cada uno de ellos, desglosamos los temas correspondientes y los conceptos más importantes de cada apartado y, posteriormente, adecuamos los *Applets* pertinentes para poder explicar mejor los contenidos que nos ocupan. En algunos casos, encontramos varios *Applets* para explicar un solo concepto y, en otros, un solo *Applet* nos sirve para clarificar distintos conceptos.

La cuarta y última fase la centramos en aportar una breve explicación del funcionamiento de la Web que habíamos elaborado. En esta etapa final, decidimos añadir una breve descripción en español junto a cada *Applet,* así como la cita del autor y el organismo donde se ha desarrollado. Con ello pretendíamos alcanzar dos objetivos, por una parte queríamos lograr una estandarización de los contenidos, cosa que conseguimos utilizando, en la medida de lo posible, la misma fórmula descriptiva de los mismos. Por otra parte, pretendíamos facilitar su uso ya que, en muchos casos, la página a la que redirecciona el enlace puede estar en inglés o, simplemente, la explicación puede ser demasiado compleja.

RESULTADOS

Para acabar haremos una valoración global de los resultados obtenidos. Consideramos que hemos obtenido una Web dinámica, con una amplia cantidad de *Applets* para la enseñanza de la Estadística. Todos ellos nos sirven para ilustrar con claridad, muchos de los conceptos básicos de la materia incluidos en el temario de la asignatura.

La manera de organizar los contenidos depende directamente de la disposición de los mismos dentro del temario de la asignatura de Estadística. Así que hemos conseguido ajustarnos a lo establecido en el plan de estudios de la titulación (Universitat de València, 2009). De esta forma, resultará mucho más sencillo localizar aquellos recursos que los usuarios necesiten. Como hemos apuntado anteriormente, en una primera serie, los *Applets* se clasificaron tomando como referencia las dos grandes ramas de la estadística. Ésta es, pues, una clasificación bastante tradicional. Por ello, encontramos un primer bloque, con el nombre de "*Estadística descriptiva*" y, un segundo bloque, bajo el epígrafe de "*Estadística inferencial*". Cada uno de estos bloques cuenta con una página diferente para cada uno de los tema. Y dentro de cada tema se han colocado aquellos conceptos de especial relevancia.

Llegados a este punto, pensamos que deberíamos destacar en el trabajo el carácter 2.0. Esta característica dota al sitio de una mayor agilidad a la hora de modificar contenidos, cosa que permitirá, consecuentemente, una actualización constante por parte de todas aquellas personas que quieran colaborar en la Web. Y esto ha sido posible gracias a las distintas opciones de colaborar, según el grado de implicación que cada uno esté dispuesto a asumir.

Si bien nos hubiese gustado dejar la página totalmente abierta a todo el mundo, esto no ha sido posible, puesto que la estadística no suele ser la asignatura preferida en una carrera como Psicología. Así pues, de momento, mejor establecer una serie de pequeños filtros, aunque con ello tengamos que sacrificar un ápice la libertad y la agilidad en el intercambio de información.

Únicamente nos queda señalar que éste ha sido un primer paso. Por nuestra parte, hemos lanzado una página con los mejores *Applets* gratuitos que hemos encontrado en Internet hasta la fecha. Pero esperamos que, a partir de ahora, los futuros usuarios (tanto alumnos como profesores) utilicen la Web para consultar y aportar contenidos de una manera crítica y rigurosa. Sólo de esta manera mejoraremos entre todos el rendimiento del proceso enseñanza-aprendizaje dentro de un marco puramente colaborativo. Este es solamente el principio.

Dirección Web: *https://sites.google.com/site/estadisticadospuntocero*

E-mail contacto*: jetemar@gmail.com*

AGRADECIDIMIENTOS

Jesús Temprado agradece la confianza depositada en él durante este proyecto por los profesores J. Gabriel Molina y Jaime Sanmartin, y especialmente desea agradecer la colaboración y ayuda, totalmente altruista, prestada por su compañera y amiga Raquel Molina Villa (Facultad de Filología, Universitat de Valencia).

BIBLIOGRAFÍA

Bouciguez, M. J; Santos, G. (2010), «Applets en la enseñanza de la física: Un análisis de las características tecnológicas y disciplinares». *Revista Eureka sobre Enseñanza y Divulgación de las Ciencias,* Vol. 7, Núm. 1, 2010, pp. 56-74.

Bush*, S;* Menzies*,* G. and Thorp, S. (2009), *An Array of Online Teaching Tools. Teaching Statistics.* Volume 31, Num. 1.

Dinov*,* I.D*;* Christou*,* N; Sanchez*,* J. (2008)*, «*Central Limit Theorem. New SOCR Applet and Demonstration Activity»*. Journal of Statistics Education,* 16 (2), pp. 1-15. http://www.amstat.org/publications/jse/v16n2/dinov.pdf

Férnandez Morales*,* A. (2010), *«*Recursos tecnológicos y actividades no presenciales para un mejor aprendizaje de la Estadística Actuarial. *@tic». Revista d'Innovació Educativa.* (nº5), Recuperado el 1 de Julio de 2012. http://ojs.uv.es/index.php/attic/article/viewArticle/283

García Barneto*,* A. y Gil Martín*,* M. R. (2006): *«*Entornos constructivistas de aprendizaje basados en simulaciones informáticas». Recuperado 18 Julio 2012, *Revista Electrónica de Enseñanza de las Ciencias*, 5 (2), 304-322.

Inzunza*,* S*;* (2007*), «*Recursos de Internet para apoyo de la investigación y educación estadística»*. Revista Iberoamericana de Educación* núm. 41/4. Recuperado 19 Julio de 2012, de http://www.rieoei.org/experiencias142.htm

Jiménez*,* J. J. (2009), «Biografías de científicas. Una aproximación al papel de la mujer en ciencias desde un enfoque socioconstructivista con el uso de las TIC»*,* en *Eureka sobre Enseñanza y Divulgación de las Ciencias*, 6(2), pp. 264-277. http://www.apac-eureka.org/revista/

Lunsford*,* M.*;* Holmes-Rowell*, G.;* Goodson-Espy*, T.* (2006*), «*Class-room Research: Assessment of Student Understanding of Sam-pling Distributions of Means and the Central Limit Theorem in Post-Calculus Probability and Statistics Classes»*. Journal of Statistics Education,* 14(3), pp. 1-19.

Molina, J. V., Rodrigo, M. F. y Bonavía, T. (2011)*, «*La docencia de Estadística en el Grado de Psicología: una experiencia de colaboración interdisciplinar con la asignatura de Psicología Social del Trabajo. @tic»*. Revista d'Innovació Educativa* (nº 5). Recuperado 30 de Julio de 2012, de http://ojs.uv.es/index.php/attic/article/view/287/383

Schneiter, K; (2008), *«*Two Applets for Teaching Hypothesis Testing Utah State University», *Journal of Statistics Education,* Volume 16, Number 3. Recuperado 18 Julio 2012, de www.amstat.org/publications/jse/v16n3/schneiter.html

Schwarz, Carl James, Sutherland, Jason. (1997), «An On-Line Workshop Using a Simple Capture-Recapture Experiment to Illustrate the Concepts of a Sampling Distribution»*,* en *Journal of Statistics Education,* vol. 5, núm. 1, American Statistical Association, USA. Recuperado 24 de Julio de 2012, de *http://www.amstat.org/publications/jse/v5n1/schwarz.html*.

Tim O'Reilly*;* (2006), *Qué es Web 2.0. Patrones del diseño y modelos del negocio para la siguiente generación del software. Sociedad de la información.* Recuperado 24 Julio de 2012, de *http://sociedadinformacion.fundacion.telefonica.com/*

Udie (Unidad de Innovación Educativa de la Universidad de Valencia, 2010), *Conceptos clave del proceso de Bolonia. Recuperado 30 Julio de 2012, de http://www.uv.es/udie/ClavesBolonia.wiki*

UNIVERSITAT DE VALÈNCIA (2009)*, Plan de estudios del Grado en Psicología*. Recuperado 30 de Julio de 2012, de *http://centros.uv.es/web/centros/psicologia/data/estudios/seccionesadd/E10/PDF0.pdf*

Épsilon - *Revista de Educación Matemática* *2012, Vol. 29(3), nº 82, 97-112, ISSN: 1131-9321*

El XIV Congreso de la S.A.E.M. "Thales" en Málaga

Salvador Guerrero

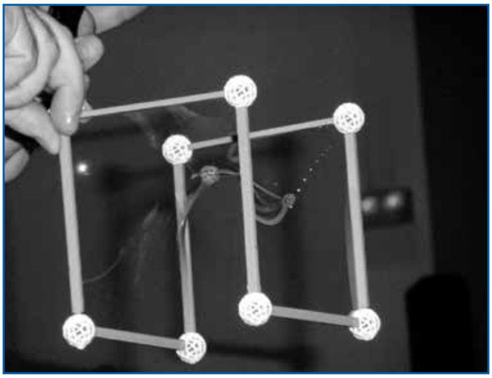
Durante los días 4, 5 y 6 de julio de 2012 se ha celebrado en Málaga el XIV Congreso de Educación y Aprendizaje Matemático de la SAEM Thales, en la Escuela Superior de Informática de Málaga, con la asistencia de 160 personas. La sesión inaugural fue presidida por el presidente de la Sociedad, Manuel Torralbo Rodríguez.

Los congresos bienales de la SAEM Thales tienen dos importantes tareas: por un lado, que sus socios (y los asistentes, en general) puedan conocer las novedades y tendencias que aparecen en el campo de la Educación Matemática, y estar al día de todas ellas; por otro lado, servir de presentación de los trabajos que sus socios realizan durante esos dos años en sus labores docentes.

El XIV Congreso ha llevado por título "Diversidad y Matemáticas" abarcando esa diversidad en la educación matemática su amplia extensión, por entender que en las circunstancias actuales es necesario resaltar esa diversidad amplia que existe en todos los aspectos de la enseñanza y el aprendizaje en la educación matemática, sobre todo en los niveles más iniciales de la educación en matemáticas.

El sentido más habitual de "diversidad del alumnado" pretende tomar conciencia de que el acento en la educación matemática debe ponerse en los alumnos, diversos de por sí en cuanto a su procedencia geográfica y multicultural, aspectos sociales, económicos y ambiente familiar así como su formación curricular previa, su capacidad intelectual y






desarrollo emocional, su ritmo de aprendizaje. Todo ello hace de cada clase un conjunto heterogéneo y diverso de alumnos.

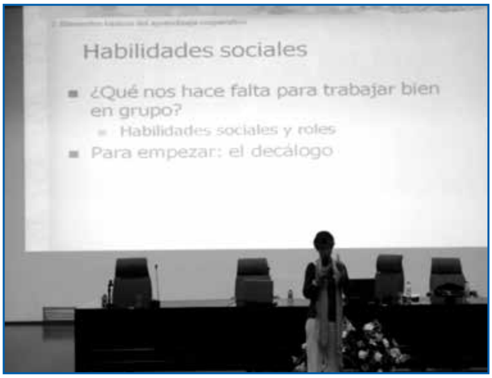
Pero también existe una diversidad de actividades de aprendizaje para acceder a los mismos contenidos, constituyendo así una amplia panoplia de construcción de currículos para atender a esa diversidad de alumnados, aunque en los currículos oficiales y en los libros de texto parezca que sólo hay una de ellas.

La irrupción de las tecnologías ha aumentado la diversidad de instrumentos, herramientas y métodos que existen para presentar actividades en diversos formatos y con diversas capacidades, de modo que es necesario para los profesores el conocimiento de las nuevas herramientas tecnológicas e informáticas, que son ya de uso cotidiano en la vida de nuestros alumnos, así como de los límites, ventajas e inconvenientes de dichas herramientas y de las sinergias que entre unos y otras pueden producirse de modo que no sean sólo métodos accesorios de presentación sino que puedan producir nuevas formas de acceso a los niveles conceptuales de los currículos.

Sin olvidar, por último la diversidad de contenidos curriculares que la propia irrupción de las anteriores diversidades y el continuo desarrollo de los aconteceres vitales, pueden producir en la selección de contenidos, que el profesor debe conocer para seleccionar los contenidos de sus cursos, aún dentro del marco legal de referencia.

El XIV Congreso se ha estructurado mediante conferencias generales, comunicaciones, talleres, exposiciones y un zoco de presentaciones y contactos, además de varios stands de presentación: de la División Didáctica de CASIO-Flamagas, de libros de



educación matemática a cargo de la librería “Avinareta”; del Instituto Andaluz de Estadística, y el de la SAEM Thales.

Las CONFERENCIAS GENERALES trataron de temas variados y fueron impartidas por:

> Rafael López Camino, catedrático de Geometría de la Universidad de Granada, sobre “**Experimentos con pompas de jabón. Una aproximación a la geometría**”; Xavier Vilella Miró, profesor del IES Vilatzara de Mar y Formador de Profesores, sobre “**Cuatro claves para el éxito en la clase de Matemáticas**”; Paloma Gavilán Bouzas, catedrática de Matemática de IES y profesora asociada en la Universidad de Alcalá, sobre “**El aprendizaje cooperativo como medida de atención a la diversidad y mejora del rendimiento personal**”; Marta Macho Stadler, de la Universidad del País Vasco, sobre “**Leyendo Matemáticas**”; Blas Ruiz Jiménez, titular del Departamento de Lenguaje y Ciencias de la Computación de la Universidad de Málaga, sobre “**Paseando entre la Matemática recreativa y la programación recreativa**”; así como una de Blanca Troughton sobre “**Con A de Astrónoma**”.

Aunque el GeoGebra tuvo una amplia representación en los TALLERES, como era de esperar por la novedad y actualidad de este excelente programa de trabajo para la enseñanza e investigación en Geometría, y la reciente creación del Instituto Andaluz de

Geogebra, gestionado por la SAEM Thales, hubo también talleres con otros enfoques. Han sido:

- “La discoteca de los números”, a cargo de Iranzu López de Dicastillo Garnica, Mª Inmaculada Palomo Sáenz y Mª Leonor López de Dicastillo Roldán.
- “Dinámicas de aprendizaje cooperativo”, de Raquel Alario Gavilán y Paloma Gavilán Bouzas.
- “Comprendiendo la correlación a partir de sus representaciones”, por Mª Magdalena Gea, Pedro Arteaga, Gustavo R. Cañadas y J. Miguel Contreras.
- “Modelizando el mundo”, por José Manuel Fernández Rodríguez y Encarnación López Fernández.
- “Una propuesta: incorporar algunos conceptos de grafos en distintos niveles de escolaridad”, de Teresa C. Braicovich
- “Piensa un número” de José Muñoz Santonja, Antonio Fernández-Aliseda Redondo y Juan Antonio Hans Martín.
- “La calculadora científica en el aula de matemáticas”, por Encarnación Amaro Parrado y Agustín Carrillo de Albornoz Torres.
- “Cálculo simbólico y gráfico con la calculadora”, de José Mª Chacón Iñigo y Agustín Carrillo de Albornoz Torres.
- “Modelos y problemas con la ClassPad 330”, de Mauricio Contreras del rincón.
- “Creación de actividades GeoGebra con moodle”, por José Luís Cañadilla López de Coca.
- “GeoGebra en el bloque de análisis”, de Miguel Ángel Fresno Martínez, Ana Belén Heredia Álvarez y María Peñas Troyano.
- “GeoGebra y la diversidad en el aula de matemáticas”, a cargo de Raúl Falcón Ganfornina y Ricardo Ríos Collantes de Terán.
- “Introducción a GeoGebra 3D”, José Manuel Dos Santos Dos Santos.
- “Consultas sencillas y análisis de información estadística: SIMA”, por José Antonio Moreno Muñoz.
- “Materiales y recursos para la enseñanza de la geometría”, de Luís Berenguer Cruz.
- “Materiales y recursos para la enseñanza de los números y el álgebra”, de Luís Berenguer Cruz.
- “Marcapáginas matemático: propuestas para incluir la lectura en el aula de matemáticas”, por Rafael Ramírez Uclés y Pablo Flores Martínez.
- “Matemáticas en la magia”, de Manuel Amaro Parrado.

Las 28 COMUNICACIONES presentadas dan idea de la amplitud de trabajos, conocimientos y necesidades en este campo de la educación matemática:

- Una experiencia de puesta en práctica de aprendizaje cooperativo en el aula”, de José Manuel Fernández Rodríguez y Encarnación López Fernández.
- “Leemos, dibujamos y hacemos progresiones”, de Paloma Pascual Albarrán.
- “Investigación estadística sobre la presión arterial”, de Miguel Hernández Portillo.

- Las situaciones (didácticas) de formación matemática o las competencias del saber enseñado", de Maricela Rodríguez Ramírez, Maricela Soto Quiñones, Claudia Piña Robles y José A. Jáquez Salazar.
- "La construcción del reparto en el aula de preescolar: un problema matemático y las competencias de resolución", de Maricela Rodríguez Ramírez, Maricela Soto Quiñones, Claudia Piña Robles y José A. Jáquez Salazar.
- Estudio de inecuaciones de dos variables, de Stella N. Gatica y Alexander Maz-Machado
- "Poesía visual y matemáticas", de Antonio Ledesma López, Antonio Fernández-Aliseda Redondo, José Muñoz Santonja y Juan Antonio Hans Martín.
- "Desarrollo colaborativo de competencias en la escuela TIC 2.0 (PIV-040-11)", de Francisco José Rodríguez Villanego, José Antonio Salgueiro González, José Luís Alcón Camas, Eduardo Caballero Herrero, Juana Doblado Vera, José Román Galo Sánchez, José Manuel Galván Romero, Ángeles Greciano Martín, Luís Miguel Iglesias Albarrán, Mª Dolores Jiménez Jiménez, María José Rodríguez Marín-Arroyo, Antonio de los Santos Soler y Joaquín Abel Soult Guerrero.
- "Uso de la pizarra digital interactiva en el PIV-040-11", de Francisco José Rodríguez Villanego, José Antonio Salgueiro González, José Luís Alcón Camas, Eduardo Caballero Herrero, Juana Doblado Vera, José Román Galo Sánchez, José Manuel Galván Romero, Ángeles Greciano Martín, Luís Miguel Iglesias Albarrán, Mª Dolores Jiménez Jiménez, María José Rodríguez Marín-Arroyo, Antonio de los Santos Soler y Joaquín Abel Soult Guerrero.
- "Matemática informal y sentido numérico en escolares de primer ciclo de educación primaria", de Cristina Adrián, Noelia Jiménez-Fanjul, Alexander Maz-Machado, Rafael Bracho López y Teresa García.
- "Cine y matemáticas: zapeando las mates", de Teresa Valdecantos Dema.
- "1812: A ver qué se me ocurre", de Teresa Valdecantos Dema.
- Reflexión sobre cómo enseñar matemática recreativa en Profundiza", de Jordi Alba Rodríguez y Pablo Flores Martínez.
- "Comprensión de frecuencias y representaciones asociadas a las tablas de contingencias", de Gustavo R. Cañadas, José M. Contreras, Mª Magdalena Gea y Pedro Arteaga.
- "Gráficos estadísticos en una serie de libros de educación primaria", de Pedro Arteaga, Mª Magdalena Gea, José M. Contreras y Gustavo R. Cañadas.
- Patrones, comunicación y reflexión en matemáticas", Amparo Govea Fontanilla e Inmaculada Otero Mateos.
- "Interpolación polinómica y la división de secretos", de Ángela Rojas Matas y Alberto Cano Rojas.
- "El tablón de mates", de Carmen Galán Mata, Alicia González Ortiz y José Luís Ruiz Fernández.
- "Materiales digitales para matemáticas", de José Muñoz Santonja y Mariano Real Pérez.
- "Itinerario curricular para el desarrollo de competencias en el aula de matemáticas de 3º de ESO", de José Muñoz Santonja y Mariano Real Pérez.

- "Propuestas para el docente de educación infantil y primaria: matemáticas y ciencias a través de la literatura infantil", de R. Fernández Cézar, C. Aguirre Pérez y C. Harris
- Jugando con la cicloide", de Juan Núñez Valdés y Mª Luisa Rodríguez Arévalo
- Curvas y trayectorias", de Francisco Orti Navarro
- Inventar problemas: una forma de desarrollar las competencias básicas", de Juan Jesús Barbarán Sánchez, José Antonio Fernández Bravo y Ana Huguet Ruiz.
- "El instituto de estadística y cartografía de Andalucía" de Cristina Fernández Álvaro y Diego D. Iglesias Espinosa.
- "Funciones de crecimiento: una experiencia de aplicación de la metodología de aprendizaje basado en resolución de problemas con GeoGebra", de José Manuel Dos Santos Dos Santos
- "Análisis de una evaluación diversa en matemática empresarial", de Eugenio M. Fedriani Martel, Mª del Carmen Melgar Hiraldo e Inmaculada Romano Paguillo.
- "Concepciones personales de estudiantes de bachillerato sobre alcanzabilidad y rebasabilidad del límite finito de una función en un punto", de José Antonio Fernández Plaza, Enrique Castro Martínez, Luís Rico Romero y Juan Fco. Ruiz Hidalgo

Las EXPOSICIONES sirvieron de contrapunto y descanso a las actividades más habituales y nos mostraron una manera muy dinámica de interactuar con todo un centro o con toda una ciudad en la presentación de contenidos matemáticos. Fueron:

> "**Con A de Astrónoma**" cedida por la Sociedad Andaluza de Astronomía, dentro del Proyecto de Mujer y Astronomía, presentando una selección de astrónomas cuya importancia ha sido grande para el desarrollo de esta ciencia, "**Cine y Matemáticas**", donde se han seleccionado referencias a películas con una estructura matemática o que hacen referencia a conceptos matemáticos; "**Poesía Visual y Matemáticas**", del Grupo Alquerque, donde el elemento plástico predomina sobre el resto de componentes del contenido, y que se puede visitar virtualmente en: http://www.grupoalquerque.es/poesiavisual/ expo_pv.html
> y la exposición sobre "**El sabor de las matemáticas**", creación de Mercedes Siles con la fotografía de Pedro Reyes, donde se ponen en analogía la creación en la gastronomía y las matemáticas, que se presentó también hace poco en Imaginary en nuestra ciudad.

En el ZOCO hubo presentación y realización de distintas construcciones para el desarrollo de la actividad matemática en el aula, siendo de destacar las "**Matemáticas Recreativas**" de Carmen Galán Mata y las hermanas González Ortiz (Alicia, Fidela Mª y Alejandra), "**La Discoteca de los Números**" de Iranzu López de Dicastillo Garnica, Mª Inmaculada Palomo Sáenz y Mª Leonor López de Dicastillo Roldán, y la "**Geometría flexible con polifieltros 3D**" de Dolores Jiménez Cárdenas y José Luis Rodríguez Blancas, el creador de la web de "Juegos Topológicos" tan interesante en muchos aspectos para el profesorado y la enseñanza de las matemáticas.

Finalmente, en el apretado programa del Congreso durante estos escasos días no se olvidaron los aspectos lúdicos. Los organizadores obsequiaron a los socios asistentes, además de con las comidas de mediodía, (que permitió una rápida continuación de los trabajos después del descanso) con una cena en el grandiosos marco del Jardín Botánico de La Concepción de Málaga, acompañada de una velada musical.

Nuestra felicitación al Comité Organizador así como a todos los socios de la Thales en Málaga que han hecho posible la celebración de este XIV Congreso del la SAEM Thales.

NORMAS PARA LA PUBLICACIÓN

ENVÍO DE ARTÍCULOS

Los artículos enviados a la revista Epsilon pasan por un proceso de revisión por pares. Para enviar un artículo para su evaluación, siga las siguientes instrucciones:

1) Los trabajos deben ser originales y de Educación Matemática. El artículo no debe haber sido publicado con anterioridad en una revista y los autores deben poseer los derechos de autor correspondientes. Los autores enviarán una carta firmada donde certifiquen que no está en proceso de evaluación en otras revistas

2) Los artículos pueden ser: de investigación (experimental o un estudio teórico), de ideas para el aula, de experiencias. También se aceptan artículos para la sección de resolución de problemas.

3) Todo artículo debe estar escrito en castellano y debe incorporar referencias bibliográficas, en todo caso, deben seguir las normas del manual de publicación de la APA (quinta edición) de acuerdo con el siguiente modelo:

   - **Para artículo de revista:** Leinhardt, G., Zaslavsky, O. y Stein, M. (1990). Functions, graphs and graphing: tasks. Learning and teaching. *Review of Educational Research, 60*(1), 1-64.
   - **Para libro:** Fernández, A. y Rico, L. (1992). *Prensa y educación Matemática*. Madrid: Síntesis.
   - **Para capítulo de libro, actas de congreso o similar:** Fuson, K. (1992). Research on whole number addition and subtraction. En Grouws, D. (ed.) *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, 243-275. MacMillan Publishing Company: New York.
   - **Para artículo de revista electrónica o información en Internet:** Cutillas, L. (2008). Estímulo del talento precoz en matemáticas. *Números* [en línea], 69. Recuperado el 15 de febrero de 2009, de http://www.sinewton.org/numeros/

4) El artículo deberá tener una extensión máxima de 7.000 palabras, incluyendo las tablas y los anexos si es de investigación. Para las secciones experiencias e ideas para el aula la extensión máxima será de 3.000 palabras. El formato de párrafo debe ser: letra Times New Roman tamaño 12 e interlineado sencillo y sin sangrado. Párrafos con espaciado anterior de 6 ptos. Los subtítulos deben estar sin numeración.

5) El artículo debe incluir en español e inglés: (a) el título del trabajo, (b) un resumen con un máximo de 100 palabras, y (c) de tres a seis términos claves.

6) El archivo con el artículo debe enviarse en formato doc y pdf.

7) Los esquemas, dibujos, gráficas e imágenes deben enviarse por separado (en una carpeta aparte del documento de texto) en formato TIFF o JPG con una resolución mínima de 300 puntos por pulgada. Cada archivo debe estar claramente identificado y se debe indicar en el texto el lugar donde se ubica. Las fotos en las que aparezcan menores deberán estas pixeladas o tener autorización escrita del tutor (se adjuntara copia con el archivo).
8) Se debe enviar una segunda versión del artículo en la que no aparezcan los nombres de los autores, ni información relativa a ellos o que pueda servir para indentificarlos (e.g., institución a la que pertenecen, citas y referencias bibliográficas propias, agradecimientos, datos del proyecto en el que se enmarca el trabajo). En esta versión, reemplace las citas y referencias bibliográficas por "Autor, 2008" o "Autor et al., 2008". En las referencias bibliográficas propias se debe eliminar el título y el nombre de la revista o el título del libro donde se publica.
9) Los datos de los autores (nombre, institución a la que pertenecen, dirección de correo electrónico, dirección postal y número de teléfono y fax) deben incluirse en un archivo aparte. Utilice únicamente un apellido o los dos pero separados por un guión.
10) Los autores deben ser los dueños de los derechos de autor del documento que se envía y, en su caso, haber obtenido los derechos para publicar aquel material de otros autores que se incluya en el documento.
11) Cuando el artículo tenga más de un autor, éstos designarán a un autor de contacto quien se encargará de toda la comunicación con la revista Epsilon.
12) Los archivos se deben enviar al centro de documentación Thales thales.matematicas@uca.es señalando si es un trabajo de investigación, experiencias o ideas para el aula.
13) Una vez aceptado el artículo para su publicación, se solicitará al autor de contacto que firme una carta de cesión de derechos de autor en nombre de todos los autores del trabajo.

SUMARIO / CONTENTS

S.A.E.M. «THALES»