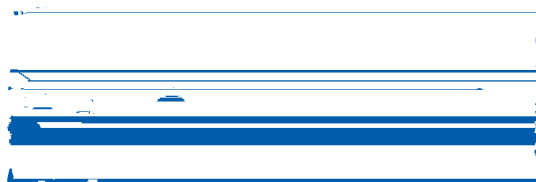




*La revista Epsilon está reseñada en:  
IN-RECS, Dialnet, Latindex, RESH, DICE y Base de Datos del  
Centro de Documentación Thales.*



# 80

## Revista de Educación Matemática

### Director

Alexander Maz (Universidad de Córdoba)

### Comité Editor

Damián Aranda (IES Blas Infante, Córdoba)

Rafael Bracho (Universidad de Córdoba)

José M<sup>a</sup> Chacón (IES Llanes, Sevilla)

Francisco España (IES Ángel de Saavedra, Córdoba)

José Galo (IES Alhakén II, Córdoba,)

Manuel Gómez (IES Blas Infante, Córdoba)

Inmaculada Serrano (Universidad de Córdoba)

### Comité Científico

Evelio Bedoya,

*Universidad del Valle, Colombia.*

Matías Camacho,

*Universidad de la Laguna, España.*

José Carrillo,

*Universidad de Huelva, España.*

M<sup>a</sup> Mar Moreno,

*Universidad de Lleida, España.*

José Ortiz,

*Universidad de Carabobo, Venezuela.*

Modesto Sierra,

*Universidad de Salamanca, España.*

Liliana Mabel Tauber,

*Universidad Nacional del Litoral,  
Argentina.*

**Página de la revista:** <http://thales.cica.es/epsilon>

**Revista:** [epsilon@thales.cica.es](mailto:epsilon@thales.cica.es)

Sociedad Andaluza de Educación Matemática “Thales”

### Edita

Sociedad Andaluza de  
Educación Matemática “Thales”  
Centro Documentación “Thales”

Universidad de Cádiz

C.A.S.E.M.

11510 PUERTO REAL (Cádiz)

Maquetación e impresión  
Utrerana de Ediciones, s.l.

Cristóbal Colón, 12  
41710 Utrera (Sevilla)

Depósito Legal  
SE-421-1984

I.S.S.N.  
1131-9321

Período  
2º cuatrimestre 2012

Suscripción  
ESPAÑA: 42,00 euros  
PAÍSES DEL EURO: 63,00 euros  
RESTO DE PAÍSES: 90 \$ USA  
(3 NÚMEROS AL AÑO)

## **S.A.E.M. THALES**

SIXTO ROMERO SÁNCHEZ

*Presidente*

FRANCISCO ESPAÑA PÉREZ

*Vicepresidente*

M<sup>a</sup> BELÉN SEPÚLVEDA LUCENA

*Secretaría General*

JOSÉ MARÍA VÁZQUEZ DE LA TORRE PRIETO

*Secretario de Administración y Tesorería*

## **SEDE**

FACULTAD DE MATEMÁTICAS

Edif. de la E.S.I. Informática. Ala L2

Avda. Reina Mercedes, s/n.

Apto. 1160

41080 SEVILLA

Tlfn. 954 62 36 58 - Fax: 954 236 378

e-mail: thales@cica.es

## **SEDE ADMINISTRATIVA DE LA SOCIEDAD Y REVISTA**

CENTRO DE DOCUMENTACIÓN THALES

Facultad de Ciencias. Departamento de  
Matemáticas

Campus del Río San Pedro, s/n

Torre Central, 4<sup>a</sup> Planta

11510 Puerto Real (Cádiz)

Tlf. y Fax: 956 012 833

e-mail: thales.matematicas@uca.es

## **ALMERÍA**

JUAN GUIRADO GRANADOS

*Delegado Provincial*

## **CÁDIZ**

PALOMA PASCUAL ALBARRÁN

*Delegada Provincial*

## **CÓRDOBA**

MARINA A. TOLEDANO HIDALGO (provis.).

*Delegado provincial*

## **GRANADA**

MARÍA PEÑAS TROYANO

*Delegado Provincial*

## **HUELVA**

M<sup>a</sup> ROCÍO BENÍTEZ CAMBRA (provis.).

*Delegada provincial*

## **JAÉN**

M<sup>a</sup> EUGENIA RUIZ RUIZ

*Delegada provincial*

## **MÁLAGA**

SALVADOR GUERRERO HIDALGO

*Delegado provincial*

## **SEVILLA**

ANA M<sup>a</sup> MARTÍN CARABALLO

*Delegada Provincial*

7

## EDITORIAL

9

## INVESTIGACIÓN

- 9 **Análisis matemático y didáctico de situaciones adidacticas a partir de un problema/ Mathematical analysis and teaching adidactic situation from a problem**

Mercedes Anido (Universidad Nacional de Rosario, Argentina)

Hector E. Rubio-Scol (Universidad Nacional de Rosario, Argentina)

- 27 **Modelización matemática en educación media. Un estudio de competencias en un grupo de estudiantes / Mathematical modeling in education. Study skills in a group of students**

Fabiola Guerrero (Liceo Bolivariano “El Molino”, Valencia. Estado Carabobo)

José Ortiz (Universidad de Carabobo, Campus La Morita, Maracay. Venezuela).

- 41 **Actividades interdisciplinarias universidad-institutos de enseñanza secundaria/ Activities interdisciplinary University-Secondary Schools**

M<sup>a</sup> Antonia Cejas-Molina (Universidad de Córdoba)

José Luis Olivares-Olmedilla (Universidad de Córdoba)

Antonio Blanca-Pancorbo (Universidad de Córdoba)

Lorenzo Salas-Morera (Universidad de Córdoba)

- 53 **Modelización matemática del trenzado artesanal/ Mathematical Modelling of craft braid/braiding**

Veronica Albanese (Universidad de Granada)

María Luisa Oliveras (Universidad de Granada)

Francisco Javier Perales (Universidad de Granada)

63

## EXPERIENCIAS

63

**El aprendizaje de la Estadística basado en proyectos de investigación/ An experience in teaching statistics using problem-based learning**

Ana Corberán-Vallet (Universitat de València)

Francisco J. Santonja (Universitat de València)

José D. Bermúdez (Universitat de València)

Enriqueta Vercher (Universitat de València)

79

**Las matemáticas de la violencia de género/ Mathematics and gender violence**

María Boyano de la Fuente (I.E.S. Mar del Sur. San Roque, Cádiz)

89

**Una experiencia docente en estadística: La actividad grupal/ A teaching experience on statistics: the group activity**

Antonia Ivars Escortell (Universitat de València)

M<sup>a</sup> Isabel López Rodríguez (Universitat de València)

Felix Ruiz Ponce (Universitat de València)

105

## IDEAS PARA EL AULA

105

**Ajedrez para trabajar patrones en matemáticas en Educación Primaria / Chess to work patterns in mathematics in Primary Education**

Alexander Maz-Machado (Universidad de Córdoba)

Noelia Jiménez-Fanjul (Universidad de Córdoba)

113

## RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

119

## NORMAS PARA LA PUBLICACIÓN

Durante la primera semana de julio se realizó en Málaga el XIV CEAM, el cual contó con una nutrida participación. Allí fue posible escuchar distintas conferencias plenarias y comunicaciones que brindaron una imagen global de buena actividad en la educación matemática andaluza.

En este marco de confraternidad se produjo el relevo en la Junta Directiva de la Sociedad Thales. Luego de dos mandatos, Manuel Torralbo cerraba un ciclo al frente de nuestra sociedad y da el relevo a Sixto Romero en la presidencia, quien junto al nuevo equipo muy seguramente continuara por la buena senda de los últimos años.

Quiero a nombre del Consejo Editorial y de los socios de la Thales, expresar a Manuel Torralbo y a toda la anterior Junta Directiva nuestro agradecimiento por la labor realizada en pro de la mejora de nuestra sociedad y en el fortalecimiento de algunas de las actividades que se han convertido en sello distintivo de la Thales, los cursos para profesores o el proyecto Estalmat, por mencionar algunos.

Nuevos y antiguos nombres para dirigir nuestra sociedad, pero con el mismo interés, voluntad y deseo de servicio de los anteriores. Deseamos que cuenten con todo el apoyo necesario para cumplir con los nuevos propósitos, más en esta época de crisis y recortes que toca a todos los sectores sociales.

De otra parte, la Consejería de Economía, Innovación, Ciencia y Empleo de la Junta de Andalucía ha otorgado el **XVIII Premio Andalucía de Investigación ‘Ibn al Jatib’** en las áreas de humanidades y ciencias jurídico-sociales a Luis Rico Romero, catedrático de didáctica de la matemática de la Universidad de Granada y socio de Thales. Quienes le conocemos hemos recibido con satisfacción la noticia, porque es un reconocimiento no solo a su labor académica para la mejora de la educación matemática sino también a los valores que ha inculcado entre sus discípulos.

ALEXANDER MAZ MACHADO  
Director

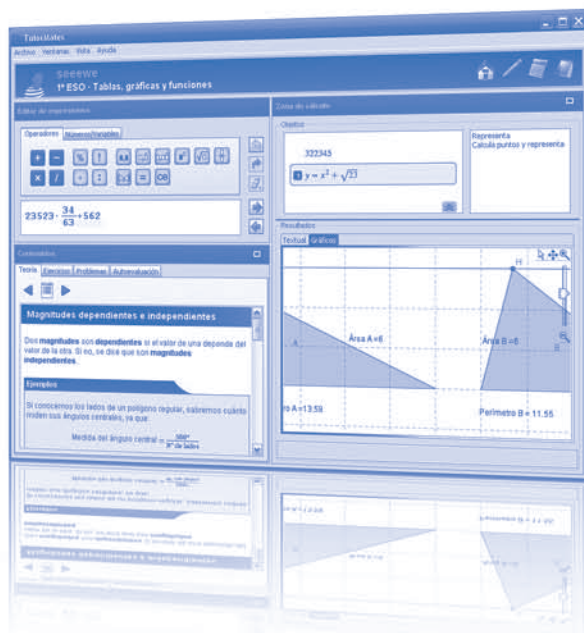
# Enseña Matemáticas con TUTORMATES

**TutorMates** es una herramienta única en la docencia de las Matemáticas en la Educación Secundaria.

Mediante la integración de todos los contenidos curriculares vigentes en una plataforma que incorpora simuladores de matemáticas y geometría dinámica, se presenta como una aplicación completa para la enseñanza de las Matemáticas en el aula.



**TUTORMATES**®



- **TutorMates** en las aulas del 1º y 2º de la ESO durante el curso escolar 2010-2011.
- Material didáctico de apoyo a disposición de los docentes.
- No es imprescindible estar conectado a Internet para enseñar o trabajar con **TutorMates**.
- Disponible para los sistemas operativos Windows y Guadalinux.

\* Los lectores de Epsilon pueden disponer gratuitamente de **TutorMates** para su uso en el aula durante el curso escolar 2010-2011 rellenando el formulario que encontrarán en:

[www.tutormates.es/promo-epsilon](http://www.tutormates.es/promo-epsilon)



## **Análisis matemático y didáctico de situaciones didácticas a partir de un problema**

**Mercedes Anido**

**Héctor E. Rubio Scola,**

*Universidad Nacional de Rosario, Argentina.*

[erubio@fceia.unr.edu.ar](mailto:erubio@fceia.unr.edu.ar)

[anidom@fceia.unr.edu.ar](mailto:anidom@fceia.unr.edu.ar)

**Resumen:** *El problema de investigación didáctica que trata este trabajo está centrado en análisis de las situaciones adidácticas de formulación y validación que, en el marco la teoría de Brousseau, revelan las distintas devoluciones que genera la selección de un problema. La experiencia se realiza en un primer curso de geometría. En una postura ecléctica se analiza la riqueza y creatividad de las distintas propuestas. Se considera que la resolución de problemas planteados tanto en el plano como en el espacio constituyen el respaldo geométrico e intuitivo para poder comprender luego el verdadero sentido de las posteriores abstracciones del Álgebra Lineal.*

**Palabras claves:** *situaciones adidácticas; dialéctica instrumento-objeto; concepto de distancia; pensamiento visual; aprendizaje por adaptación.*

## **Mathematical analysis and teaching adidactic situation from a problem**

**Abstract:** *The educational research problem addressed by this work is focused on analyzing situations and making adidactic validation, under the theory of Brousseau, reveal the different returns generated by the selection of a problem. The experiment was performed in a first course in geometry. In an eclectic approach examines the richness and creativity of the different proposals. It is considered that the resolution of problems in both the plane and in space are geometric and intuitive support to then understand the true meaning of the later abstractions of linear algebra.*

**Keywords:** *adidactic situations; dialectical instrument-object distance concept, visual thinking, learning adaptation.*

## EL PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN Y SU OBJETIVO

El problema de investigación didáctica que trata este trabajo está centrado en análisis de las situaciones adidácticas de formulación y validación que, en el marco la teoría de Brousseau (1996), revelan las distintas devoluciones que genera la selección de un problema. La experiencia se realiza en un primer curso de la llamada Matemática Básica de una Facultad de Ingeniería. En una postura ecléctica se analiza la riqueza y creatividad de las distintas propuestas. Se considera que la resolución de problemas planteados tanto en el plano como en el espacio tridimensional constituyen el respaldo geométrico e intuitivo para poder comprender luego el verdadero sentido de las posteriores abstracciones del Álgebra Lineal e incluso para disponer, por analogía, de una primera referencia visual explicativa de conceptos matemáticos que pueden presentarse en cualquier dimensión. Las representaciones geométricas son la esencia de la matematización horizontal con la Física. Los problemas adecuadamente seleccionados se constituyen en dispositivos didácticos esenciales para el aprendizaje de un conocimiento matemático. Fundamenta esta postura la expresión de distintos autores que tratan la epistemología del problema matemático y su importancia como estrategia metodológica. En el caso en estudio, el eje matemático es un problema de aplicación del Álgebra Lineal a la Geometría Analítica.

Existe un corriente entre los docentes Matemática de la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional de Rosario que considera que si bien es importante que el alumno interprete los métodos y técnicas de resoluciones propuestos por el profesor, en ejercicios y problemas que pueden ser de mera aplicación, debería además prepararse material didáctico y diseñar estrategias que brinden a los alumnos la oportunidad de resolver “verdaderos problemas”; como desafíos que activen su propia capacidad mental, creatividad, confianza en sí mismos y una reflexión crítica sobre sus propios procesos resolutivos que los prepare para resolver otros problemas de la Ciencia y de la Tecnología.

Se debería aspirar a la provisión de herramientas metodológicas para la enseñanza de la matemática en los primeros años de las carreras profesionales que requieran de esa ciencia, bajo la idea fundamental de fomentar la adquisición de estrategias resolutivas de problemas matemáticos a través del planteo de situaciones físicas, geométricas o de otro tipo que de alguna manera puedan ser relacionadas sea con la práctica profesional del futuro ingeniero o con la experiencia cotidiana de quien se está formando para serlo (Miyara, Piraino, & Anido, 2010).

Se considera que la resolución de problemas geométricos planteados tanto en el plano como en el espacio tridimensional constituyen el respaldo intuitivo para poder comprender luego el verdadero sentido de las posteriores abstracciones del Álgebra Lineal e incluso para disponer, por analogía, de una primera referencia visual explicativa de conceptos matemáticos que pueden presentarse en cualquier dimensión.

La Geometría Analítica, especialmente el estudio de los vectores geométricos, como soporte de Álgebra Lineal constituye la base matemática requerida para el estudio de muchas áreas de las ciencias naturales, sociales, los negocios, la computación etc. La modelización matemática de casi todos los problemas propios de la ingeniería requiere

la comprensión y manejo total de los conceptos y procedimientos de esa rama de la Matemática. Las representaciones geométricas son la esencia de la matematización horizontal (Freudenthal, 1981) con la Física.

Como respuesta a un cierto cuestionamiento del valor del conocimiento matemático adquirido por visualización, de Guzmán (1996) dice que la visualización en Matemática, es lo que es común, abstraible, y queda sometido a una elaboración racional, simbólica, que nos permita manejar más claramente la estructura subyacente a tales percepciones. Desarrollar el pensamiento visual y favorecer las habilidades de visualización son dos objetivos claves en la educación geométrica. Precisamente por esta importancia, cabe aclarar bien lo que se entiende por pensamiento visual y visualización, en términos que a menudo confunden en una sinonimia limitante o se relacionan con las simples imágenes que a menudo ilustran el discurso geométrico.

El pensamiento visual incluye la habilidad de visualizar, pero va más allá, al poder incluir aspectos tales como el reconocimiento rápido de determinantes formas o categorías, la manipulación automática de determinados códigos, etc. Explorar, seleccionar, simplificar, abstraer, analizar, comparar, completar, resolver, combinar..., son verbos que caracterizan parcelas del pensamiento visual (Alsina, 1997). “El pensamiento visual, afirma Marjorie Senechal citada por Alsina, Burges, Fortuny (1988), si se explota convenientemente, puede revolucionar la forma de hacer Geometría y de enseñarla”.

¿Cuál es el tema elegido bajo estos enfoques? En el contexto de un curso de un primer año de Álgebra y Geometría en distintas carreras universitarias es importante y básico el concepto de distancia. Este se plantea a través de distintas situaciones: distancia entre dos puntos tanto en el plano como en el espacio, distancia de un punto a una recta en el plano, distancia de un punto a un plano en el espacio, distancia de un punto a una recta en el espacio y distancia entre recta alabeadas. En todos estos casos el concepto geométrico de distancia es esencial en la modelización matemática de problemas en distintas dimensiones, principalmente de problemas de optimización en distintas aplicaciones tanto en las áreas de ingeniería como de la economía.

En este trabajo nos centraremos en el concepto de distancia de un punto a una recta en el espacio, pensada como longitud, sin convenciones sobre signo. Los problemas de distancia mencionados y en particular el problema de obtención de la distancia de un punto a una recta en el espacio, con las falencias de formación en geometría del espacio propias de la escuela media y no contempladas en las propuestas curriculares, presentan aristas delicadas.

Geoméricamente ¿a qué definición recurrir? ¿cómo imagina el alumno esa distancia? ¿intuye un único y mínimo recorrido? ¿qué auxilios didácticos utilizar? Y... aunque se intuya la existencia de esa distancia como única... ¿cómo se construye? ¿cómo medirla cuando se trata de materializarla en el espacio físico en el que nos ubicamos? ¿qué proceso constructivo geométrico seguir para obtenerla? ¿Se puede prescindir de su visualización? ¿Es necesario modelizar algebraicamente ese procedimiento o basta el conocimiento que ya posee de las operaciones del álgebra vectorial?

¿Cuáles son las concepciones de los alumnos y cuales son los obstáculos que las determinan y dificultan ese proceso vectorial? ¿Puede el alumno con sus conocimientos previos elaborar un procedimiento resolutorio o deducir una fórmula? ¿Qué rol juega en ese proceso la conjetura, la argumentación y la demostración? ¿El tiempo dedicado a esa libre elaboración es suficientemente productivo respecto a los objetivos y al desarrollo del curriculum de la asignatura? ¿Brinda este problema, abierto a las iniciativas de los alumnos, una oportunidad que no presentan otros temas, para facilitar la creación de contextos en los que el alumno aprenda a validar sus propias construcciones? ¿Es importante hacerlo? Precisamente partiendo, como hipótesis, de una respuesta afirmativa a esta última cuestión planteamos una investigación centrada en la construcción geométrica del concepto de distancia y en la comprensión por el alumno de la necesidad de una traducción analítica o vectorial para su obtención numérica.

Este punto del curriculum tradicionalmente se ha considerado, en el desarrollo de la materia, como un tema en el que el profesor debe presentar una fórmula, como aplicación inmediata del producto vectorial, perdiéndose la enorme riqueza de situaciones didácticas a la que el análisis geométrico del problema, por los mismos alumnos, puede proveer.

El objetivo inmediato del trabajo que se presenta es el análisis de las situaciones didácticas que, en el sentido de Brousseau (1996), dispara y genera el problema, en un “juego” de propuestas de soluciones, algunas de ellas imprevistas, por el propio docente.

Se muestra como un simple problema es fuente de aprendizaje y provoca un desequilibrio que aparece ante la falta de correspondencia entre los sistemas de conocimientos del alumno y los requisitos que se plantean ante una nueva situación.

Por otra parte, los conceptos matemáticos pueden ser considerados desde dos puntos de vista complementarios:

- su carácter de instrumento al estudiar su funcionamiento en los diversos problemas que permiten resolver;
- su carácter de objetos, en tanto que objetos culturales que tienen un lugar reconocido en el edificio del saber matemático.

Esta dialéctica instrumento-objeto, destacada por (Douady, 1995), tiene un papel muy importante en la construcción de situaciones de aprendizaje: un concepto desempeña seguido el papel de instrumento implícito en la resolución de un problema antes, de devenir un objeto de saber constituido. Los conceptos, además, pueden en general ser movilizados en diferentes dominios (geométrico, numérico o gráfico), lo que permitirá al maestro provocar desequilibrios cognitivos en los alumnos.

El valor del problema elegido, en nuestro caso, va mas allá de un conocimiento acotado; es un ejemplo movilizador de los diferentes dominios que señala Douady. Se pretende, así, que el alumno realice tareas que los hagan pensar, explorar formular hipótesis, verificar resultados tratando en lo posible que el alumno reproduzca a nivel de aula el trabajo científico del matemático, para generar de este modo, un saber que sea utilizable en otras situaciones y que sea transformado en un saber cultural.

En lo mediato, se trata de hacer un aporte a una Didáctica de la Matemática Operativa que eduque en la formación de un “pensamiento visual” en el que las manipulaciones con los objetos de la representación visual puedan traducirse, con mayor o menor esfuerzo, en las relaciones matemáticas abstractas que representan, (Guzmán, 1996) y a la vez, mostrar la importancia del enfoque geométrico de una teoría matemática lógicamente completa y especialmente apta para proponer, como problemas, propiedades que gradualmente motiven y entusiasmen a los alumnos en los procedimientos matemáticos de descubrimiento y validación, esenciales en la formación profesional. Más que el valor de un conocimiento matemático o método de investigación en sí mismos, se trata de promover la búsqueda de problemas que despierten el gozo por el trabajo matemático.

## **MARCO TEÓRICO Y METODOLÓGICO**

Se ha buscado detectar situaciones adidácticas de “acción”, “formulación” e “validación”, en el sentido de Brousseau, que surjan de la relación de los alumnos con los contenidos y el medio. Estas situaciones serían, en nuestro criterio de “observación dirigida”, los indicadores de un aprendizaje significativo caracterizado por Ausubel como “aprendizaje por descubrimiento” e ilustrado por él mismo en un ejemplo sobre la generalización de una propiedad de los triángulos (Ausubel y Robinson, 1969).

Brusseau (1998) llama “situación adidáctica a una situación matemática específica de un conocimiento concreto que, por sí misma, sin apelar a razones didácticas y en ausencia de toda indicación intencional, permite o provoca un cambio de estrategia por el alumno”.

La situación adidáctica es únicamente una parte de la situación más amplia, que Brousseau denomina “situación didáctica”, y comprende las relaciones establecidas explícita o implícitamente entre los alumnos, un cierto medio (que incluye instrumentos y objetos) y el profesor, con el objetivo de que los alumnos aprendan el conocimiento matemático. Se trata de una serie de intervenciones del profesor sobre el par alumno-medio destinadas a hacer funcionar las situaciones adidácticas y los aprendizajes que ellas provocan. La evolución de una situación didáctica requiere, por tanto, “la intervención constante, la acción mantenida y la vigilancia del profesor.” (Chevallard, Bosch, & Gascón, 1997).

### **Situaciones adidácticas de acción**

Una buena situación de acción debe permitir al alumno juzgar el resultado de su acción y ajustar esta acción, sin la intervención del profesor, gracias a la retroacción por parte del medio de la situación. Las informaciones que le devuelve la situación son percibidas por el alumno como sanciones o refuerzos de su acción.

En una situación de acción se produce un “diálogo” entre el alumno y la situación. Esta dialéctica de la acción le permite mejor el modelo implícito, es decir, tener reacciones que no puede todavía formular, probar ni, mucho menos, organizar en una teoría. En

todo caso la situación adidáctica provoca un aprendizaje por adaptación (de acuerdo con la teoría de Piaget) (Chevallard, Bosch, & Gascón, 1997).

### Situaciones adidácticas de formulación

Para que el alumno pueda explicitar su modelo implícito y para que esta formulación tenga sentido para él, es necesario que pueda utilizar dicha formulación para obtener él mismo o hacer obtener a alguien un resultado. En una situaciones adidácticas de formulación el alumno intercambia información con una o varias personas. Comunica lo que ha encontrado a un interlocutor o a un grupo de alumnos que le devuelve la información. (Chevallard, Bosch, & Gascón, 1997).

### Situaciones adidácticas de validación

En la dialéctica de la validación los alumnos debe demostrar porqué el modelo que ha creado es válido. Pero para que el alumno construya una demostración y esta tenga sentido para él es necesario que la construya en una situación, llamada de validación, en la que debe convencer a alguna otra persona. Una situaciones adidáctica de validación es la ocasión de someter el mensaje matemático (modelo explícito de la situación) como una aseveración a un interlocutor (oponente). El oponente puede pedir explicaciones suplementarias, rechazar las que no comprende o aquellas con las que no está de acuerdo (justificando su desacuerdo) (Chevallard, Bosch, & Gascón, 1997).

En lo metodológico, esta experiencia, se trata como un estudio de casos realizado con la metodología de investigación de la Ingeniería Didáctica (Artigue, Douday, Moreno, & Gómez, 1995) (Perkins, 2004) en un contexto de un primer curso normal (60 alumnos) de Álgebra y Geometría (primer cuatrimestre de primer año)

Se ha elegido a la Ingeniería Didáctica como marco metodológico, tanto a nivel didáctico como a nivel investigativo para el soporte y andamiaje de la construcción didáctica, por considerar que en el contexto de un paradigma cualitativo de investigación el “saber a enseñar “ y “el caso a investigar” son susceptibles de ser tratados a través de la Ingeniería Didáctica.

Como metodología de investigación, la Ingeniería Didáctica se caracteriza en primer lugar por un esquema experimental basado en las “relaciones didácticas” en clase, es decir, sobre la concepción, realización, observación y análisis de secuencias de enseñanza.

Dice Brousseau (1996; p. 125): “La Ingeniería Didáctica es la proposición y elección de condiciones que permiten desarrollar los conocimientos matemáticos del alumno. La legitimación de la elección de problemas y de sus variables se ha de recostar en la teoría didáctica., la producción de un objeto de enseñanza no es suficiente, sino se debe considerar el efecto que tendrá la manera como se ha de elaborar, describir y justificar la

utilidad de un nuevo artefacto didáctico. La diferencia entre la didáctica espontánea y la Ingeniería Didáctica es que sobre la materia de un problema la ingeniería distingue entre el problema y las propiedades del problema y como se han de considerar las razones por las cuales se habría de ensayar tal o cual cosa o de que manera se relacionan ciertos conocimientos didácticos”.

En el marco de la metodología que describe Artigue (1995) delimitamos nuestro proceso investigativo en cuatro fases: 1º Análisis Preliminar. 2º Concepción y Análisis a Priori de las situaciones didácticas de la ingeniería. 3º Experimentación. 4º Análisis a Posteriori y Evaluación.

En la confrontación de los dos análisis el a priori y a posteriori, se fundamenta en esencia la validación de las hipótesis formuladas en la investigación.

## **ANÁLISIS PREVIOS: FUNDAMENTO TEÓRICO**

En el marco de la Ingeniería Didáctica a la que dan lugar el aprendizaje de problemas de este tipo, interesa en la fase correspondiente a los “análisis previos”, determinar y profundizar en que concepción de la comprensión de problemas geométricos trabajaremos.

Se considera que a esos estudios preliminares se pueden integrar algunos elementos teóricos de análisis de la propuesta denominada “Enseñanza para la Comprensión” como herramientas útiles para el enfoque de la actividad didáctica que genera el problema.

Esta propuesta se originó en la Escuela de Graduados de Educación de Harvard y tiene como representantes principales a Howard Gardner, David Perkins y Vito Perrone. En ella, como su nombre lo indica, el papel central se encuentra en la comprensión, es decir la habilidad de pensar crítica y constructivamente para actuar con flexibilidad a partir de lo que se ha aprendido.

Es conveniente desarrollar la idea de la comprensión, pues ésta constituye el núcleo central de la propuesta desde una perspectiva pedagógica.

En la propuesta de la Enseñanza para la Comprensión se la entiende como la habilidad de pensar y actuar flexiblemente con lo que uno conoce. Es decir, que no se reduce únicamente al saber como sinónimo de conocimiento, sino que además implica la idea de poder hacer uso de él de manera variada.

Si un estudiante no puede ir más allá de un pensamiento y acción memorísticos, rutinarios, significa que hay falta de comprensión.

Para apreciar la comprensión de una persona hay que: 1) solicitarle que haga algo para usar o poner en práctica la comprensión: explicar, resolver un problema, construir un argumento, armar un producto, 2) lo que los estudiantes hacen no sólo muestra su comprensión actual, sino que también es probable que logren mayores avances al usar su comprensión como respuesta a un reto en particular y llegar a comprender mejor lo que se suponía comprendido.

En consecuencia, existe una identificación entre lo que es la comprensión y lo que Perkins (2004) llama desempeño flexible. “Comprender un tópico quiere decir ni más ni menos que ser capaz de desempeñarse flexiblemente en relación con el tópico: explicar, justificar, extrapolar, vincular y aplicar de maneras que van más allá del conocimiento y la habilidad rutinaria. Comprender es cuestión de ser capaz de pensar y actuar con flexibilidad a partir de lo que uno sabe. La capacidad de desempeño flexible es la comprensión”.

Pensamos que a las “situaciones adidácticas” (Brousseau, 1996), que se busca genere el propio alumno ante un problema, se suma una indagación sobre las capacidades de vinculación y extrapolación desde otras formas de resolución y esa es la flexibilidad que nos interesa.

De esa capacidad de vinculación y extrapolación, con conocimientos ya adquiridos surge otro tema a tener en cuenta en los análisis previos, constituido por las competencias de los estudiantes para abordar el tema. En este caso los alumnos participantes de la experiencia son alumnos ingresantes a la universidad que ya en un segundo mes de clase han elaborado los conceptos básicos de la Geometría Lineal del plano y el espacio con un enfoque vectorial (Anido, Katz, Guzman, 2007) o sea conocen los espacios vectoriales de los segmentos orientados en un eje, en el plano y en el espacio y su correspondencia con los espacios vectoriales, que la consideración de las respectivas bases, generan en  $\mathbb{R}^1$ ,  $\mathbb{R}^2$ ,  $\mathbb{R}^3$ . En relación a la temática propia de la Geometría Analítica, conocen las ecuaciones de la recta en el plano, la recta en el espacio y el plano en el espacio.

## LA CONCEPCIÓN Y EL ANÁLISIS A PRIORI

Se presenta como selección del profesor el siguiente problema para ser resuelto en forma grupal con un espacio previsto a posteriori para el análisis y discusión de las distintas propuestas de solución.

PROBLEMA: Dada la recta de ecuación

$$\begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = 2 + 6t \\ z = 4 + 3t \end{cases} t \in \mathfrak{R}$$

y el punto  $P_1(4, 5, 7)$  hallar la distancia del punto a recta.

Los alumnos ya han deducido y aplicado las fórmulas de distancia de un punto a una recta en el plano y distancia de un punto a un plano en el espacio. En ambos casos la construcción geométrica intuitiva ha sido fácil y la obtención de dos formulas análogas, a partir de los datos, implica; en el marco del concepto de generalización de Polya (1981), una generalización en la segunda de los procesos que llevaron a la obtención de la primera, Su obtención se basa en la proyección de un vector que une el punto dado (según el caso en el plano o espacio) con un punto cualquiera de la recta o plano, realizada sobre

el vector normal a la recta o al plano. Estrategia que permite obtener analíticamente las fórmulas de inmediata aplicación.

Precisamente en este análisis a priori, sobre el impacto del problema, se prevén como obstáculos epistemológicos los conceptos de: distancia de un punto a una recta en el plano y de distancia de un punto a un plano en el espacio. Los procedimientos conocidos que llevan a las respectivas fórmulas constituyen obstáculos en el sentido de que el alumno puede tratar de hacer erróneas generalizaciones.

Se considera, no obstante, que superadas las dificultades que emanan de estos obstáculos y, precisamente porque la confrontación con esas dificultades implica repasar y afianzar el manejo de la operatoria vectorial los alumnos, pueden llegar a procesos resolutivos propios y esa es la riqueza conceptual, capacidad de vinculación y flexibilidad que se espera a partir del problema planteado.

## **DESARROLLO Y ANÁLISIS A POSTERIORI: LAS PROPUESTAS DE LOS ALUMNOS**

Los alumnos trabajaron en grupos espontáneamente constituidos. Las primeras experiencias infructuosas de intentos de aplicación de las fórmulas conocidas sobre distancia de un punto a una recta en el plano o de distancia de un punto a una recta en el espacio, mostraron que los obstáculos epistemológicos previstos eran acertados: querían extender un procedimiento a una situación problemática que no le proporcionaba los datos para hacerlo (no existe una única ecuación de la recta en el espacio que generalice la forma general de la ecuación de la recta en el plano).

La idea de proyectar un vector determinado por el punto dado y un punto cualquiera de la recta sobre un vector normal, idea clave en la obtención de la distancia de un punto a una recta en el plano o de un punto a un plano en el espacio, tropezó con un obstáculo mucho mayor ¿sobre qué dirección de vector normal proyectar cuando hay infinitas direcciones de vectores normales a una recta en el espacio?

Ante los caminos rutinarios cerrados, comenzaron algunos grupos a hurgar en el bagaje de otros conocimientos y a buscar otras vinculaciones, analogías, extrapolaciones.

A pesar de estas primeras dificultades no se amilanaron. Se observaron en algunos grupos dibujos como figuras de análisis, en otros grupos materializaciones de los elementos geométricos dados como datos: la recta como extensión de reglas o filo de la puerta o aristas del salón, la fijación de un punto en el espacio (punta de un dedo) y el trazado en el aire del segmento representativo de la distancia que buscaban obtener.

¿Cuál sería, en ese proceso, el aporte al aprendizaje y al pensamiento matemático? Promover, un aprendizaje de la Matemática en el sentido de Polya: “Las matemáticas son consideradas como una ciencia demostrativa, éste es sólo uno de sus aspectos. Hay que combinar observaciones, seguir analogías y probar una y otra vez. El resultado de la labor demostrativa del matemático, es el razonamiento demostrativo, la prueba; pero ésta a su vez, es construida mediante el razonamiento plausible, mediante la intuición. Si el

aprendizaje de las matemáticas refleja en algún grado la invención de esta ciencia, debe hacer en él un lugar para la intuición, para la inferencia plausible.”

A esas primeras etapas de discusión intergrupos, siguió la elaboración de distintas propuestas presentadas como trabajo grupal.

Entendiendo como devolución al “acto por el cual el profesor hace que el alumno acepte la responsabilidad de una situación de aprendizaje (adidáctica) o de un problema, y acepta él mismo las consecuencias de esta transferencia.” (Brousseau, en Douady; 1995: 67), distintas devoluciones fueron observadas y registradas.

Se transcriben seis casos que documentan el trabajo de los alumnos realizado en esa misma clase en el espacio de tiempo previsto (una hora de clase)

## CASO 1

Consideramos el vector dirección de la recta dada, y vamos a determinar el plano  $\pi$  perpendicular a la recta que contenga a  $P_1$ . Encontraremos la intersección  $S$  de la recta dada con el plano y el modulo del vector  $\overline{SP_1}$  es la distancia pedida.  
 $\vec{u} = (2,6,3) \rightarrow \pi) 2x + 6y + 3z + d = 0$

Como queremos que contenga al punto

$P_1(4, 5, 7)$  reemplazamos

$$2 \cdot 4 + 6 \cdot 5 + 3 \cdot 7 + d = 0 \rightarrow d = -59$$

La ecuación del plano que contenga a  $(4, 5, 7)$  será  $\rightarrow 2x + 6y + 3z - 59 = 0$

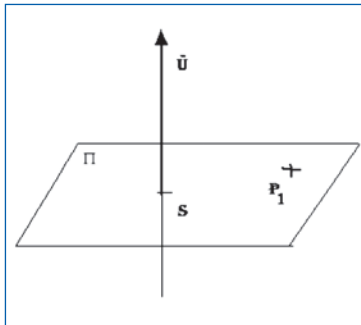
Buscamos ahora la intersección entre la recta y el plano, resolviendo un sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x = 3 + 2t & (1) \\ y = 2 + 6t & (2) \\ z = 4 + 3t & (3) \\ 2x + 6y + 3z - 59 & (4) \end{cases}$$

Remplazando (1), (2) y (3) en (4) obtenemos:  $2(3+2t) + 6(2+6t) + 3(4+3t) - 59 = 0$

Despejamos el parámetro “t”:  $t = \frac{29}{49}$

Y reemplazando ahora t en (1), (2) y (3) obtenemos el punto S



$$\begin{cases} x = 3 + 2\frac{29}{49} = \frac{205}{49} \\ y = 2 + 6\frac{29}{49} = \frac{272}{49} \\ z = 4 + 3\frac{29}{49} = \frac{283}{49} \end{cases} \quad \text{Luego } S \cap \pi = \left(\frac{205}{49}, \frac{272}{49}, \frac{283}{49}\right)$$

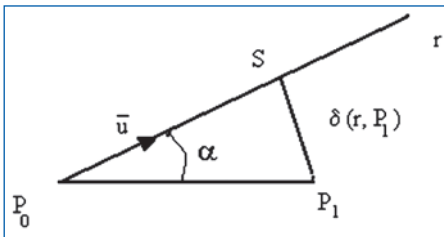
El módulo del vector con origen en el punto intersección de (al que llamamos S) y extremo en el punto  $P_1$  nos dará la distancia buscada

$$\delta(rP_1) = |\overline{SP_1}| = \sqrt{\left(4 - \frac{205}{49}\right)^2 + \left(5 - \frac{272}{49}\right)^2 + \left(7 - \frac{283}{49}\right)^2} \cong 1,355..$$

### ANÁLISIS

Esta propuesta se ciñe a la definición y construcción teórica geométrica del concepto de distancia de un punto a una recta en el espacio. Es un camino conceptualmente rico porque además ya en el terreno de la geometría analítica exige la interpretación geométrica de los coeficientes de la ecuación de un plano y la comprensión del significado de ecuación de un lugar geométrico, en este caso un plano, en cuanto a que la pertenencia de un punto significa la satisfacción de su ecuación.

### CASO 2



Consideramos un triángulo rectángulo formado por  $P_1$ , un punto cualquiera  $P_0$  de la recta y el pie S de recta perpendicular por  $P_1$ .

La distancia pedida es la longitud del cateto  $\overline{P_1S}$

Para obtenerlo podemos, primero, calcular con los datos dados, el módulo de  $\overline{P_0P_1}$  y el módulo del vector  $\text{Proy}_u \overline{P_0P_1}$  y aplicar luego el Teorema de Pitágoras para la obtención de un cateto conocida la hipotenusa y el otro cateto.

$$\overline{P_0P_1} = (4, -3, 5, -2, 7, -4) = (1, 3, 3) \Rightarrow |\overline{P_0P_1}| = \sqrt{1^2 + 3^2 + 3^2} = \sqrt{19}$$

$$|\text{Proy}_u \overline{P_0P_1}| = \frac{1}{|u|} |\overline{P_0P_1} \cdot u| = \frac{1}{\sqrt{4+36+9}} |(2, 6, 3) \cdot (1, 3, 3)| =$$

$$|\text{Proy}_u \overline{P_0P_1}| = \frac{1}{|7|} 29 = \frac{29}{7}$$

Planteando el triangulo rectángulo tendremos:  $|\overline{P_0P_1}|^2 = |\overline{SP_1}|^2 + |\text{Proy}_{\overline{u}}\overline{P_0P_1}|^2$

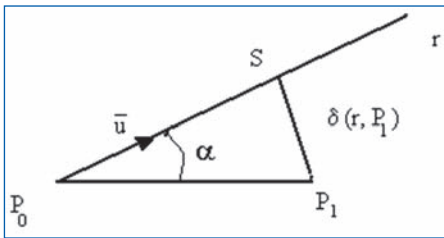
$$|\overline{SP_1}| = \delta(rP_1) = \sqrt{|\overline{P_0P_1}|^2 - |\text{Proy}_{\overline{u}}\overline{P_0P_1}|^2}$$

$$\delta(rP_1) = \sqrt{19 - \frac{29}{7}} \approx 1.355...$$

### ANÁLISIS

La propuesta segunda, exige un buen manejo de la operatoria del álgebra vectorial y una buena comprensión del concepto de proyección de un vector sobre otro y muestra una concepción totalmente vectorial de la Geometría Analítica.

### CASO 3



Teniendo en cuenta la figura observamos que

$$\cos \alpha = \frac{\overline{P_0P_1} \cdot \overline{u}}{|\overline{P_0P_1}| |\overline{u}|}$$

$$\overline{P_0P_1} = (1,3,3)$$

$$|\overline{P_0P_1}| = \sqrt{1^2 + 3^2 + 3^2} = \sqrt{19}$$

$$|\overline{u}| = \sqrt{2^2 + 6^2 + 3^2} = \sqrt{49} = 7$$

$$\cos \alpha = \frac{\overline{P_0P_1} \cdot \overline{u}}{|\overline{P_0P_1}| |\overline{u}|} = \frac{(1,3,3) \cdot (2,6,3)}{\sqrt{19} \cdot 7} = \frac{2 + 18 + 9}{7\sqrt{19}} = \frac{29}{7\sqrt{19}} = 0.9504$$

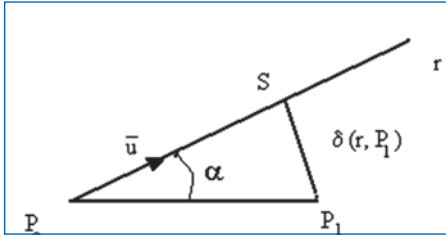
$$|\overline{P_0S}| = |\overline{P_0P_1}| \cos \alpha = \sqrt{19} \frac{29}{7\sqrt{19}} = \frac{29}{7}$$

Aplicando Pitágoras  $|\overline{P_1S}| = \sqrt{|\overline{P_0P_1}|^2 - |\overline{P_0S}|^2} = \sqrt{19 - \left(\frac{29}{7}\right)^2} \approx 1,355$

### ANÁLISIS

Esta propuesta tercera, es análoga a la segunda pero muestra un menor grado de conocimiento de las definiciones y propiedades vectoriales: los alumnos prescinden del concepto de vector proyección. Hacen todo el desarrollo con conceptos trigonométricos que los llevan implícitamente, a la deducción del módulo de la proyección de un vector sobre otro, concepto que se supone ya poseían

**CASO 4**



$$\cos \alpha = \frac{|\overline{P_0 P_1} \cdot \overline{u}|}{|\overline{P_0 P_1}| |\overline{u}|}$$

$$\overline{P_0 P_1} = (1, 3, 3)$$

$$|\overline{P_0 P_1}| = \sqrt{1^2 + 3^2 + 3^2} = \sqrt{19}$$

$$|\overline{u}| = \sqrt{2^2 + 6^2 + 3^2} = \sqrt{49} = 7$$

$$\cos \alpha = \frac{|\overline{P_0 P_1} \cdot \overline{u}|}{|\overline{P_0 P_1}| |\overline{u}|} = \frac{(1, 3, 3) \cdot (2, 6, 3)}{\sqrt{19} \cdot 7} =$$

$$\frac{2 + 18 + 9}{7\sqrt{19}} = \frac{29}{7\sqrt{19}} = 0.9504$$

Partiendo del coseno del ángulo  $\alpha$  obtengo el seno y determino el valor del segmento  $|\overline{P_1 S}| = \delta(r, P_1)$

$$\text{sen} \alpha = \pm \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \sqrt{1 - \left(\frac{29}{7\sqrt{19}}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{841}{931}} = \sqrt{\frac{90}{931}}$$

$$|\overline{P_1 S}| = \delta(r, P_1) = |\overline{P_0 S}| \text{sen} \alpha = \sqrt{19} \sqrt{\frac{90}{931}} = \sqrt{\frac{1710}{931}} \approx 1,355..(*)$$

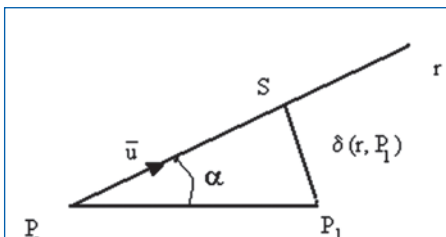
**ANÁLISIS**

En esta propuesta los alumnos utilizan métodos trigonométricos que podrían haber inducido una aplicación natural del módulo del producto vectorial ya conocido.

**CASO 5**

Este caso fue trabajado con los mismos alumnos de la propuesta 4 pero a requerimiento del docente por medio de una pregunta guía. (Intervención del profesor)

El docente plantea al grupo que trabajó la propuesta 4 el siguiente problema.



Con los datos vectoriales del problema inicial ¿Es posible calcular el seno de directamente sin conocer el coseno?

Un alumno recordó la fórmula del módulo del producto vectorial

$$|\overline{P_0 P_1} \wedge \overline{u}| = |\overline{P_0 P_1}| |\overline{u}| \text{sen} \alpha$$

El docente plantea al grupo que trabajó la propuesta 4 el siguiente problema. Con los datos vectoriales del problema inicial ¿Es posible calcular el seno de alfa directamente sin conocer el coseno?

Un alumno recordó a la fórmula del módulo del producto vectorial

$$|\overline{P_0P_1} \wedge \overline{u}| = |\overline{P_0P_1}| |\overline{u}| \operatorname{sen} \alpha, \text{ y de allí reemplazan en (*): } |\overline{P_0S}| = \delta(rP_1) = |\overline{P_0S}| \operatorname{sen} \alpha = \frac{|\overline{P_0P_1} \wedge \overline{u}|}{|\overline{u}|}$$

de donde se obtiene la fórmula que pide el programa de la asignatura

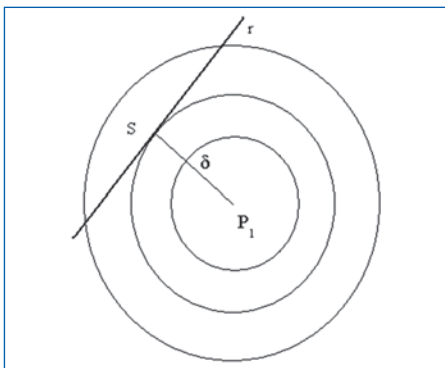
$$\delta(rP_1) = \frac{|\overline{P_0P_1} \wedge \overline{u}|}{|\overline{u}|}$$

$$\overline{P_0P_1} \wedge \overline{u} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 3 & 3 \\ 2 & 6 & 3 \end{vmatrix} = -9i + 3j + 0k = (-9, 3, 0)$$

$$|\overline{u}| = \sqrt{4 + 35 + 9} = \sqrt{49} = 7 \quad |\overline{P_0P_1} \wedge \overline{u}| = \sqrt{(-9)^2 + 3^2} = \sqrt{90}$$

$$\delta(rP_1) = \frac{|\overline{P_0P_1} \wedge \overline{u}|}{|\overline{u}|} = \frac{\sqrt{90}}{7} \cong 1,355$$

## CASO 6



Imaginamos una esfera con centro en el punto dado y tratamos de buscar condiciones para que la recta dada la toque tangencialmente y en consecuencia el radio sea la distancia del centro a la recta buscada.

Sea  $(x - 4)^2 + (y - 5)^2 + (z - 7)^2 = d^2$  la ecuación de esa esfera.

Para buscar la intersección con la recta dada planteamos el sistema

$$\begin{cases} x = 3 + 2t & (1) \\ y = 2 + 6t & (2) \\ z = 4 + 3t & (3) \\ (x-4)^2 + (y-5)^2 + (z-7)^2 = d^2 & (4) \end{cases} \quad P = (4,5,7)$$

Lo resolvemos por sustitución reemplazando (1), (2), (3), en (4) y obtenemos una ecuación de segundo grado en t

$$(3+2t-4)^2 + (2+6t-5)^2 + (4+3t-7)^2 = d^2$$

$$(-1+2t)^2 + (-3+6t)^2 + (-3+3t)^2 = d^2$$

$$49t^2 - 58t + 19 = d^2$$

Para que tenga solución única (pueden ser 0 o 1 o 2 soluciones), o sea que la recta sea tangente a la esfera, el discriminante de la ecuación de segundo grado debe ser igual a cero.

$$\Delta = b^2 + ac = 0 \Rightarrow 3364 - 4,49(19 - d^2) = 0 \Rightarrow 3364 - 3724 + 196d^2 = 0$$

$$-360 + 196d^2 = 0 \Rightarrow -360 + 196d^2 = 0 \Rightarrow 196d^2 = 360 \Rightarrow d^2 = \frac{360}{196}$$

$$\text{Tomando el valor positivo obtenemos } d = \sqrt{\frac{90}{49}} = \frac{\sqrt{90}}{7} = \frac{3\sqrt{10}}{7}$$

#### ANÁLISIS

Esta solución sorprendente implica un pensamiento algebraico geométrico no habitual en alumnos con la formación previa dada.

En el grupo que la presentó uno de los integrantes ha sido un alumno que en otras oportunidades descolló con propuestas totalmente creativas

#### CONCLUSIONES

La confrontación entre los análisis a priori y a posteriori ha superado las expectativas en cuanto a la variedad y riqueza conceptual de las devoluciones de los alumnos.

En el marco teórico propuesto nos encontramos con generalizadas situaciones adidácticas de acción, incluso de una acción que podríamos categorizar hasta de “acción física” de los alumnos, al tratar de “materializar la recta” en la línea que une los goznes de una puerta del salón de clase, fijar un punto y trazar con movimientos de un brazo la orientación de un plano perpendicular a la recta que pase por el punto...o acciones

similares con los elementos de los pupitres ya descriptas. Las acciones adidácticas de formulación se multiplicaron en las propuestas que entre sí han hecho los integrantes de cada grupo espontáneo de trabajo.

En cuanto a las situaciones de validación, además de las creadas al argumentar la validez del procedimiento en el propio grupo, se expuso y defendió cada propuesta frente a toda la clase y allí los mismos alumnos realizaron algunas de las reflexiones comparativas que hemos recuadrado en el análisis de cada propuesta.

Respecto al marco teórico referencial de la enseñanza para la comprensión 1) El problema planteado promovió la explicación, resolución, construcción de argumentos y armado de un producto, 2) lo que los estudiantes hicieron no sólo muestra su comprensión actual, sino que llegaron a discutir sobre lo que se suponía comprendido por ejemplo la equivalencia de algunos procedimientos y las supuestas ventajas de unos sobre otros.

Lo que mas vale ser destacado como positivo de esta experiencia es precisamente el grado de implicación, interés y motivación de los estudiantes que legitima el espacio dedicado a trabajos de esta tipo y le otorga lo que Godino llama “idoneidad emocional”, además de la “idoneidad cognitiva” que surge de la riqueza de las situaciones adidácticas planteadas (Godino, Bencomo, Font y Wilhelmi, 2007).

La metodología de trabajo que transforma el aula en un taller de conocimiento promueve, la perseverancia, responsabilidad y la autoestima que surge de la puesta en juego de su potencialidad en la resolución de problemas. Se resaltan las cualidades de estética y precisión de las matemáticas.

En cuanto a la interacción docente alumno: Se facilita la inclusión de los alumnos en la dinámica de la clase y no la exclusión. La interacción entre alumnos se favorece por el diálogo y comunicación entre los estudiantes que disparan las respuestas a veces no esperadas. Se favorece la inclusión en grupos y el trabajo colaborativo.

Respecto a autonomía se han contemplado momentos en los que los estudiantes asumen la responsabilidad del estudio. (Exploración, formulación y validación de la propuesta realizada). Los alumnos han realizado a nivel de aula el trabajo científico del matemático, para generar de este modo, un saber que sea utilizable en otras situaciones y que es demandado en el desarrollo curricular.

## REFERENCIAS

- Alsina, C., Fortuni, J. y Pérez, R. (. (1997). *¿Por qué Geometría?* Madrid: Sínteis.
- Alsina, C., Burges, C. y Fortuny, J. (1988). *Invitación a la didáctica de la geometría*. Madrid: Síntesis.
- Artigue, M., Douday, R., Moreno, I. y Gómez, P. (1995). *Ingeniería Didáctica en Educación Matemática*. Bogotá: Grupo Editorial Iberoamericano.
- Ausubel, D. y Robinson, F. G. (1969). *School Learning. An introduction in Educational Psychology*. Londres: Holt, Rinehart & Winston.

- Brousseau, G. (1996). La Didáctique des Mathématiques en la formació del professorat. *Butlletí de la Societat Catalana de Matemàtiques*, 11(1), 1-12.
- Brousseau, G. (1998). *Theorie des situations didactiques*. Grenoble: La Pensée sauvage.
- Chevallard, Y., Bosch, M. y Gascón, J. (1997). *Estudiar Matemáticas, el eslabón perdido entre enseñanza y aprendizaje*. Barcelona: ICE Universidad Autónoma y Ed. Horsori.
- de Guzmán, M. (1996). *El Rincón de la Pizarra – Ensayos de visualización en Análisis Matemático*. Madrid, España: Ediciones Pirámide.
- Douady, R. (1995). La ingeniería Didáctica y la Evolución de su Relación con el Conocimiento. En M. D. Artigue, *Ingeniería Didáctica* (págs. 34-56, 61-97). Bogotá: Grupo editorial Iberoamericano.
- Freudenthal, H. (1981). Major problems of mathematics education. *Educational Studies in Mathematics*, vol 12. 133-150. *Educational Studies in Mathematics* , 12, 133-150.
- Godino, J. D. (2007). Análisis y valoración de la idoneidad didáctica de procesos de estudio de las matemáticas. *Paradigma*, XXVII (2), 221-252.
- Guzmán, M. D. y de Guzmán, M. (1996). *El Rincón de la Pizarra – Ensayos de visualización en Análisis Matemático*. Madrid: Ediciones Pirámide.
- Miyara, A., Piraino, M. y Anido, M. (2010). *Del texto a la ecuación: reflexiones y propuestas para una enseñanza de la matemática basada en modelos*. Rosario, Argentina: UNR Editora.
- Perkins, D. (2004). Teaching for Meaning - Knowledge Alive - To create, communicate, organize, and act on knowledge -- These four skills encompass a neglected curriculum. *Educational Leadership*. Journal of the Department of Supervision and Curriculum Department of Supervision and Curriculum Development, N.E.A., 62 (1), 14.

# ¡Atrévete a ponerle nota!



**CASIO ClassPad 330.**  
**La calculadora número 1**  
**de su promoción.**

**Más de 500 aplicaciones gratuitas**  
**disponibles en internet.**

Gran pantalla LCD con lápiz-táctil y menú de iconos + sistema CAS para álgebra simbólica + e-actividades como hojas de trabajo electrónicas y otras aplicaciones + rotación de gráficos 3-D + memoria flash de 5,4Mb.

**CASIO.**  
[www.aulacasio.com](http://www.aulacasio.com)

Entra en [www.aulacasio.com](http://www.aulacasio.com)

El aula donde más se aprende sobre las calculadoras CASIO: con información, descargas, actividades, publicaciones, ofertas, etc.



## Modelización matemática en Educación Media. Un estudio de competencias en un grupo de estudiantes

**Fabiola Guerrero**

*Liceo Bolivariano “El Molino”, Valencia. Estado Carabobo.*

**José Ortiz**

*Universidad de Carabobo, Campus La Morita, Maracay. Venezuela.*

**Resumen:** *Las actividades de resolución de problemas reales en las clases de matemática, favorece la apropiación de los conceptos matemáticos y a concebir la utilidad de la matemática en la vida cotidiana, lo que conlleva al uso de la modelización como una herramienta que vincula la matemática con la realidad. Se estudiaron las competencias de modelización matemática y los sistemas de representación que utilizan los estudiantes del primer año de un liceo Bolivariano cuando resuelven problemas del mundo real. El estudio fue abordado como un estudio de caso bajo un enfoque cualitativo. Los sujetos participantes fueron 30 estudiantes de 12 a 14 años, organizados en grupos, se les planteó un problema real, previamente validado mediante el juicio de expertos. Los resultados obtenidos permiten concluir que los estudiantes no poseen todas las competencias para llevar a cabo un proceso de Modelización de manera independiente, porque se les dificulta la construcción del modelo matemático. Los sistemas de representación más usados son el lenguaje natural y el numérico, aunque para este nivel deberían hacer uso del sistema algebraico.*

**Palabras clave:** *Modelización Matemática; Competencias de Modelización Matemática; Sistemas de Representación*

## Mathematical modeling in education. Study skills in a group of students

**Abstract:** *Activities of real problems solving in the classroom encourages the appropriation of mathematical concepts and perceiving the utility of mathematics in everyday life; for this reason we use of mathematical modeling as a tool that links mathematics with reality. it is pertinent to study the mathematical modeling competencies and representation systems that use the students of first year in a high school Bolivarian when they*

*solve real world problems. The study was approached as a case study a qualitative approach. The subjects in this study were 30 students from 12 to 14 years, which were organized into groups. It was formulated to the subjects involved, a real problem, previously validated by expert opinion. It was conclude that students do not have the competencies necessary to carry out a modeling process independently; because the low level competency is the construction of the mathematical model. The representation systems used by students were the natural language and numbers, although in this level is considered that students can also use algebraic system.*

**Keywords:** Mathematical Modeling; Mathematical Modeling Competencies; Representation Systems.

## INTRODUCCIÓN

En búsqueda de una educación matemática de calidad, se han realizado numerosas investigaciones, entre otras, Aravena, Caamaño, y Giménez (2008); Biembengut y Hein (1999), que consideran necesario ofrecer a los estudiantes situaciones concretas que les permitan organizar información, describir relaciones matemáticas, enfrentar problemas con soluciones múltiples y entender la aplicabilidad de los conceptos y propiedades matemáticas.

De igual manera, se sostiene que el aprendizaje de la matemática requiere de una pluralidad de significados que le permitan al estudiante integrar con sentido los nuevos conceptos con los que ya posee (Rico, 2009). Por lo tanto, se hace relevante que la educación matemática sea contextualizada, enseñada y aprendida con base en objetos reales y sobre objetos reales, y desde la propia realidad del educando. En ese sentido, dada la importancia que presenta la contextualización de la educación matemática con la realidad del estudiante; Ortiz, Rico y Castro, (2004), consideran que la Modelización Matemática debería ser incluida en todos los niveles escolares ya que es una estrategia de enseñanza, que vincula la Matemática con el mundo real. Asimismo, la modelización matemática permite que los estudiantes resuelvan en sus aulas problemas no escolarizados, propios de su mundo físico y social que contribuirán a la apropiación de conceptos y objetos matemáticos, además ayudará a que los estudiantes comprendan y valoren la aplicabilidad de la matemática en sus actividades cotidianas.

Además de la contextualización y el trabajo con situaciones reales, Castro y Castro (1997) y Rico (2009) consideran que en toda actividad matemática deben estar presentes el uso de las representaciones o sistemas de representaciones por parte de los docentes y de los estudiantes, ya que éstas sirven para comunicar las ideas matemáticas e intervienen en la construcción de nuevos conocimientos, razón por la cual los estudiantes deben manejar el mayor número de representaciones posibles sobre un objeto matemático para facilitar su comprensión sobre el mismo. En este sentido, dentro de los principios y estándares del Consejo Nacional de Profesores de Matemáticas de Estados Unidos, NCTM (2000), se hace hincapié en el uso de los sistemas de representación al señalar que el currículo de Matemática debería hacer énfasis en las representaciones matemáticas para fomentar la comprensión de la misma, de tal manera que los estudiantes puedan, en primer

lugar, crear y usar representaciones para organizar, memorizar y comunicar ideas matemáticas, en segundo lugar, desarrollar un repertorio de representaciones matemáticas que puedan usarse de manera útil, flexible y apropiada y en último usar las representaciones para modelizar, interpretar fenómenos físicos, sociales y matemáticos.

Por otro lado, el estudio del álgebra comprende, lo que para Katz (2007) son las principales ideas de la matemática, la generalización y la abstracción, lo que proporciona un escenario propicio para la resolución de problemas, y problemas propios del mundo real y de la cotidianidad del estudiante, y para el uso de diferentes sistemas de representación, que conduzcan al estudiante a la apropiación y comprensión de un concepto matemático. Esta situación ha sido abordada por Aravena, Caamaño y Giménez (2008), quienes destacan que es necesario que la enseñanza del álgebra se realice mediante situaciones concretas que le permitan al estudiante organizar información, describir relaciones matemáticas, comunicar ideas matemáticas, enfrentar problemas con soluciones múltiples, entender la aplicabilidad de los conceptos y procesos matemáticos entre otros.

Sin embargo, según los profesores que laboran, en el escenario donde se realizó la presente investigación, la matemática es impartida de manera formal y abstracta, desarrollada con actividades ajenas al estudiante, sin vinculación con otras áreas de aprendizaje, ni con su mundo físico y social. Este panorama pareciera indicarnos que la enseñanza y el aprendizaje no se realiza en un contexto de modelización y aplicaciones.

En cuanto a los tópicos específicos del álgebra, la formación de los estudiantes se basa en la ejercitación y manejo de algoritmos, con excesiva formalidad y un alto grado de abstracción, constituidas por axiomas, definiciones y teoremas aislados unos de otros y con poca aplicabilidad en la realidad del estudiante, sin hacer énfasis en los distintos sistemas de representación, planteando la solución a problemas escolares, preparados para que den un resultado esperado, y que en la mayoría de los casos están descontextualizados de su realidad.

A lo largo de los años se ha creído que el aprendizaje del álgebra genera en los estudiantes muchas dificultades que pueden ser disminuidas si se enseña coordinando las diferentes representaciones y partiendo de su realidad como un elemento motivador, sin embargo si se presenta como un montón de técnicas aisladas y como procedimientos formales y mecánicos que deben aplicarse de forma automática para resolver un problema, se está diseñando un escenario para que los estudiantes no se apropien de los conceptos matemáticos, específicamente los relacionados con el álgebra, ni conciban la utilidad de la matemática en sus vidas cotidianas, lo que los conduce a un aprendizaje aparente, memorístico y parcializado de la misma. Esta situación podría ser un factor de gran influencia en el alto índice de estudiantes aplazados, en el bajo promedio en dicha asignatura y en otros aspectos relacionados con el poco éxito escolar.

Por lo dicho anteriormente en la investigación que aquí se reporta, y que forma parte de una más amplia, que se está desarrollando dentro de la Línea de Investigación Pensamiento Numérico y Algebraico (Ortiz, 2004), busca estudiar el proceso de modelización matemática que realizan los estudiantes de primer año de educación media cuando resuelven problemas del mundo físico y social. Este estudio comprende en primer lugar

el análisis de las competencias en modelización matemática y en segundo lugar determinar las representaciones utilizadas por los estudiantes al resolver dichos problemas.

## **CONSIDERACIONES TEÓRICAS**

Es importante conceptualizar lo que se entiende por competencias en modelización matemática y representaciones o sistemas de representaciones.

Para llevar a cabo el proceso de modelización matemática descrito por Blum y Niss (1991), el cual es la base teórica de esta investigación, se hace necesario que los estudiantes adquieran competencias que los ayuden a resolver estos problemas. De acuerdo con Kaiser (2007), el trabajo con modelización matemática en las aulas de clase no es suficiente del todo, sino que es importante trabajar con competencias en modelización que puedan ser desarrolladas por los estudiantes de forma independiente y que puedan ser utilizadas por ellos para comprender y modificar su entorno.

Las competencias en modelización matemática son el conjunto de recursos, habilidades, destrezas y aptitudes que tienen los estudiantes para realizar de forma independiente y exitosa todas las etapas de un proceso de modelización en un contexto determinado. Las competencias en modelización tomadas en cuenta en esta investigación son las descritas por Kaiser (2007) las cuales son: entender un problema del mundo real, construir un modelo de la realidad, crear un modelo fuera de un modelo del mundo real, resolver problemas matemáticos dentro de un modelo matemático, interpretar resultados matemáticos de una situación del mundo real, competencias para cambiar soluciones, si es necesario llevar a cabo otros procesos de modelización y por último competencias sociales: habilidad para trabajar en grupo y comunicarse por la vía matemática.

En cuanto a las representaciones Castro y Castro (1997) las describen como aquellas notaciones simbólicas o gráficas que son específicas para cada noción, mediante las que se expresan los conceptos y procedimientos matemáticos y sus características y propiedades más relevantes. Por su parte, Rico (2009) las define como todas aquellas herramientas, signos y gráficos, que hacen presentes los conceptos y procedimientos matemáticos y con las cuales los sujetos abordan e interactúan con el conocimiento matemático. Debido a su importancia en la construcción de los conceptos matemáticos y el auge que ha tenido en los últimos años como objeto de investigación, Rico (2009) consideró necesario delimitar el significado de esta noción señalando que el concepto de representación hace notorio una dualidad representante-representado y que la representación sustituye algo que existe y que es distinto. Este trabajo de Rico permite clarificar que no se deben confundir los objetos matemáticos con sus representaciones, ya que una cosa son las herramientas, (signos, símbolos o gráficos) con las que las personas abordan el conocimiento matemático y otra el concepto y los procedimientos matemáticos en sí, es decir, tanto las representaciones como el “algo” que representan están estrechamente relacionados, pero tienen funciones separadas.

Referente a los tipos de representaciones Castro y Castro (1997) sostienen que en la adquisición y elaboración de nuevos conceptos intervienen dos tipos de representaciones

que se encuentran estrechamente vinculadas, las representaciones internas, que son las que se utilizan para razonar y pensar sobre ideas matemáticas; y las representaciones externas que se utilizan para comunicar esas ideas.

En esta investigación se tomarán en cuenta las representaciones externas, por su carácter observable; dentro de las cuales se encuentran, según Castro y Castro (1997), las representaciones o sistemas de representaciones simbólicas que se basan en signos alfanuméricos estructurados. Y las representaciones o sistemas de representaciones gráficas que son combinaciones de figuras o iconos estructurados. Siendo estas estructuras simbólicas y gráficas las que ayudan a los estudiantes a comprender los conceptos matemáticos, por lo tanto, mientras más sistemas de representación domine el estudiante mayor será su comprensión del concepto.

Diversos investigadores han centrado el estudio de las representaciones de los conceptos matemáticos escolares en diversos sistemas simbólicos y gráficos así como en las relaciones entre ellos, al respecto Castro y Castro (1997) señalan los trabajos de Janvier, Kaput, Goldin y Duval, quienes han encontrado para los contenidos matemáticos de educación secundaria en primer lugar los sistemas numéricos y los algebraicos y en segundo lugar los sistemas basados en las medidas, la recta real, el plano cartesiano entre otros. Además, se pueden mencionar otros sistemas de representación como las configuraciones puntuales, tablas de valores, las representaciones geométricas y el lenguaje natural o expresiones verbales entre muchos otros.

## **METODOLOGÍA**

Esta investigación se aborda como un estudio de caso (Yin, 2003) bajo un enfoque cualitativo. Los sujetos de investigación fueron 30 estudiantes voluntarios del primer año de educación media del Liceo Bolivariano “El Molino”, ubicado en la ciudad de Valencia, Estado Carabobo, Venezuela; con edades comprendidas entre 12 y 14 años, que asisten regularmente a clase, durante el año escolar 2010-2011.

Como medio para recoger la información se planteó, a los participantes, un problema del mundo real, el cual fue discutido en seminario de línea de investigación (Ortiz, 2004) y posteriormente validado mediante el juicio de expertos. El problema fue seleccionado tomando en cuenta los siguientes criterios:

En primer lugar, debía ser un problema derivado de la cotidianidad del estudiante, basado en una realidad con la que los estudiantes se sintieran identificados, de manera que abordarlo fuese relevante y motivador; además al ser un problema con el que ellos se sintieran familiarizados, se les haría más fácil la formación de conjeturas o asunciones.

En segundo lugar, no debería generar una solución única, sino que, por el contrario, desprendiera un abanico de soluciones dependientes de las conjeturas realizadas por los resolutores; tomando en cuenta que uno de los aspectos más importantes dentro del proceso de modelización matemática es la realización de asunciones para entonces así poder encontrar una solución al problema planteado y que la toma de decisiones contribuya al desarrollo del pensamiento crítico en los estudiantes.

Y en último lugar, debía ser un problema que pudiera ser resuelto a través del Álgebra elemental o de la Aritmética, ya que uno de los objetivos es indagar sobre las competencias en modelización matemática que tienen los estudiantes de manera intuitiva, de modo que la resolución del problema no se viera afectado porque los estudiantes no pudieran crear o modificar construcciones generalizadas o modelos matemáticos, sino que pudieran dar una solución y así estudiar todas las competencias de modelización descritas por Kaiser (2007).

## RESULTADOS Y DISCUSIÓN

Como se mencionó anteriormente, para efecto de este trabajo, se planteó a los sujetos participantes, un problema del mundo físico y social, en el cual se esperaba que los estudiantes llevaran a cabo el proceso de modelización matemática, para luego analizar las competencias de modelización matemática y determinar las representaciones utilizadas. Estas últimas serían visualizadas en la construcción del modelo matemático que desarrollarían los estudiantes para hallar la solución al problema planteado y que corresponde a la tercera competencia de modelización matemática. El problema es el siguiente:

- La profesora Patricia vive en la Urbanización El Libertador, ubicado en la parroquia Tocuyito del Municipio Libertador, y trabaja en el Liceo Bolivariano “El Molino”, ubicado dentro de la misma parroquia. ¿Cuánto dinero gasta en pasaje la profesora Patricia por un día de trabajo, es decir, en ir de su casa al Liceo y en regresar del Liceo a su casa?

En la tabla 1 se muestran las competencias de modelización matemática que son analizadas y sus diferentes indicadores.

En relación al análisis de las competencias en modelización matemática que poseen los estudiantes del primer año del Liceo Bolivariano “El Molino” y a los sistemas de representación utilizados por ellos, los resultados arrojados por la investigación se muestran en la tabla 2, en la que se puede observar que sólo un grupo posee las siete competencias en modelización descritas por Kaiser (2007) y que son necesarias para llevar a cabo un proceso de modelización Independiente; y en la tabla 3, se resumen los sistemas de representación utilizados por los grupos de estudiantes.

## DESCRIPCIÓN Y DISCUSIÓN DEL TRABAJO REALIZADO POR LOS EQUIPOS

**Equipo n° 1:** Este primer equipo comprendió el problema que se le estaba planteando e identificó las variables involucradas en el mismo, tomó como hipótesis de trabajo la siguiente: “La profesora Patricia camina desde su casa hasta el puente de Tocuyito, de ahí toma una camioneta hasta el Molino (donde se encuentra ubicado el liceo) y de venida uno de sus compañeros le da la cola hasta Tocuyito y de ahí agarra una camioneta hasta su casa”. Como en total aborda dos camionetas y el costo del pasaje es de 2 Bs; en total la profesora Patricia gasta 4 Bs diarios en pasaje.

Competencias de Modelización	Indicadores
Competencia para entender un problema del mundo real	<ul style="list-style-type: none"> <li>✓ Comprende el Problema.</li> <li>✓ Identifica las variables involucradas en el problema.</li> <li>✓ Simplifica la información suministrada</li> </ul>
Competencia para construir un modelo de la realidad	<ul style="list-style-type: none"> <li>✓ Organiza la información relevante para el problema</li> <li>✓ Elabora asunciones o hipótesis del problema planteado</li> </ul>
Competencia para crear un modelo fuera de un modelo del mundo real	<ul style="list-style-type: none"> <li>✓ Representa la situación a estudiar</li> <li>✓ Relaciona las variables tomadas en consideración.</li> <li>✓ Selecciona símbolos apropiados para representar las variables.</li> </ul>
Competencia para resolver problemas matemáticos dentro de un modelo matemático	<ul style="list-style-type: none"> <li>✓ Utiliza los métodos matemáticos para lograr resultados y conclusiones</li> <li>✓ Domina los contenidos matemáticos</li> </ul>
Competencia para interpretar resultados matemáticos de una situación del mundo real	<ul style="list-style-type: none"> <li>✓ Analiza las implicaciones de la solución encontrada sobre la situación estudiada.</li> <li>✓ Intenta dar respuesta a las preguntas planteadas.</li> </ul>
Competencia para cambiar soluciones, si es necesario llevar a cabo otros procesos de modelización	<ul style="list-style-type: none"> <li>✓ Evalúa la validez de los resultados obtenidos</li> <li>✓ Intenta buscar otras soluciones</li> </ul>
Competencia social	<ul style="list-style-type: none"> <li>✓ Presenta habilidad para trabajar en grupo</li> <li>✓ Logra comunicarse por la vía matemática</li> </ul>

Tabla 1. Competencias de Modelización Matemática y sus respectivos indicadores

		Equipos						
Competencias	Indicadores	1	2	3	4	5	6	7
Competencia para entender un problema del mundo real	Comprende el Problema.	X	X	X	X	X	X	X
	Identifica de las variables involucradas en el problema.	X	X	X	X	X	X	X
	Simplifica la información suministrada.	X	X	X	X	X	X	X
Competencia para construir un modelo de la realidad	Organiza la información relevante para el problema	X	X	X	X	X	X	X
	Elabora asunciones o hipótesis del problema planteado	X	X	X	X	X	X	X
Competencia para crear un modelo fuera de un modelo del mundo real	Representa la situación a estudiar			X				
	Relaciona las variables tomadas en consideración.			X				
	Selecciona símbolos apropiados para representar las variables.			X				
Competencias para resolver problemas matemáticos dentro de un modelo matemático	Utiliza los métodos matemáticos para lograr resultados y conclusiones			X				
	Domina los contenidos matemáticos			X				
Competencias para interpretar resultados matemáticos de una situación del mundo real	Analiza las implicaciones de la solución encontrada sobre la situación estudiada.	X		X	X	X	X	X
	Intenta dar respuesta a las preguntas planteada.	X		X	X	X	X	X
Competencias para cambiar soluciones, si es necesario llevar a cabo otros procesos de modelización	Evalúa la validez de los resultados obtenidos	X	X	X		X	X	X
	Intenta buscar otras soluciones	X	X	X		X		
Competencias sociales	Presenta habilidad para trabajar en grupo	X	X	X		X	X	X
	Logra comunicarse por la vía matemática							

Tabla 2. Competencias en modelización matemática que poseen los grupos de estudiantes

Equipos Sistemas de R	E 1	E 2	E 3	E 4	E 5	E 6	E 7
Lenguaje Natural	x	x	x	x	x	x	x
Sistema Numérico		x		x	x	x	
Sistema Algebraico			x				

Tabla 3. Sistemas de representación utilizados por los grupos de estudiantes

Se considera que este grupo no construyó un modelo matemático que permitiera calcular cuánto dinero gasta la profesora Patricia en pasaje en un día de trabajo, sin embargo utilizó como sistema de representación el lenguaje verbal para encontrar una solución matemáticamente correcta, que dio respuesta a la situación planteada, en relación a la competencia resolución de problemas matemáticos dentro de un modelo matemático, se considera que no la poseen por no haber construido el modelo matemático. En cuanto a las competencias para cambiar soluciones o llevar a cabo otros procesos, el grupo mostró que era capaz de tomar en cuenta diferentes variables y en función a ellas buscar una solución al problema planteado.

**Equipo n° 2 y Equipo n° 5:** Estos equipos al igual que el primero comprendieron el problema que se les planteó e identificaron las variables involucradas en el mismo; para resolverlo tomaron como hipótesis la siguiente: “La profesora Patricia agarra cuatro camionetas diarias, cada una le cobra 2 Bs; en total serían 8 Bs”; por lo tanto demostraron poseer las dos primeras competencias. En relación a la competencia que implica construir un modelo matemático, estos equipos no demostraron poseerla, pues no construyeron ningún modelo que permitiera calcular cuánto dinero gasta la profesora Patricia en pasaje en un día de trabajo, sin embargo tomaron en cuenta algunas variables y llegaron a una solución matemáticamente correcta, que dio respuesta a la situación real planteada. El sistema de representación que emplearon fue el lenguaje natural y el sistema numérico (ver Figura 1).

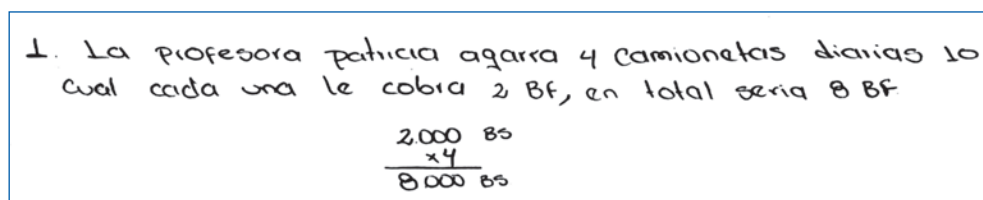


Figura 1. Producción del equipo 2.

Al igual que el equipo anterior la competencia relacionada con la resolución de problemas matemáticos dentro de un modelo matemático, se considera que no la poseen por no haber construido el modelo matemático. En cuanto a la competencia para interpretar resultados matemáticos de una situación del mundo real, se puede concluir que el equipo n° 2 demostró no obtenerla debido a que sólo hallaron la solución al problema, es decir, calcularon cuánto gasta en pasaje si toma cuatro camionetas, pero no dieron ninguna respuesta. Mientras que el equipo n° 5 se puede decir que si la poseen porque dieron respuesta a la situación planteada. Finalmente sobre las competencias para cambiar soluciones o llevar a cabo otros procesos, al igual que el equipo anterior, el grupo n° 2 mostró que era capaz de tomar en cuenta diferentes variables y en función a ellas buscar una solución al problema planteado. Mientras que el equipo n° 5 parece no poseerla.

**Equipo n° 3:** El equipo número 3 demostró comprender el problema planteado e identificó las variables involucradas en el mismo, como lo son el costo del pasaje y la cantidad de camionetas que debe tomar la profesora para llegar de su casa al liceo y de regresar del liceo a su casa. Fue el único equipo que para resolver el problema construyó un modelo matemático al plantear la siguiente ecuación:

$$X = C \cdot P$$

Llamaron X a la incógnita, es decir, el gasto en bolívares por concepto del pasaje

Llamaron C, a la cantidad de camionetas que debe tomar la profesora

Y llamaron P, al costo del pasaje

Para hallar una solución tomaron la siguiente hipótesis “la profesora Patricia agarra dos camionetas de ida al liceo y dos de venida, en total son cuatro camionetas” al resolver la ecuación obtuvieron como resultado que la profesora Patricia gasta 8 Bs en pasaje por un día de trabajo. Sin embargo este equipo no obtuvo esta sola respuesta si no que consideró otras hipótesis por ejemplo: “La profesora Patricia agarra dos camionetas de ida al liceo, de regreso le dan la cola hasta Tocuyito y de ahí agarra una camioneta hasta su casa” o “Si camina de su casa a la parada de Tocuyito y de ahí agarra una camioneta hasta el liceo, y de regreso agarra dos camionetas”.

En relación a los sistemas de representación utilizados por el equipo, se evidencian el sistema algebraico y el sistema verbal. En cuanto a la competencia para interpretar resultados matemáticos de una situación del mundo real, se puede decir que demostraron poseerla, debido a que se preocuparon por contestar la interrogante planteada. Y en cuanto a las competencias para cambiar soluciones o llevar a cabo otros procesos, este equipo tomó en cuenta varias hipótesis para hallar la solución al problema planteado (ver Figura 2).

**Equipo n° 4, Equipo n° 6 y Equipo n° 7:** Al igual que los anteriores, estos equipos comprendieron el problema que se les había planteado e identificaron las variables involucradas en el mismo, tomaron como hipótesis para realizarlo lo siguiente: “la profesora agarra dos camionetas de ida y dos de venida” en total gasta 8 Bs. en pasaje en un día de trabajo”. Estos equipos no realizaron ningún modelo matemático para hallar la solución al problema, sólo hallaron una solución en función a la hipótesis que se plantearon.

En cuanto a las representaciones utilizadas en la solución del problema tenemos que los equipos 4 y 6, utilizan el lenguaje natural y el sistema numérico mientras que el equipo 7 (ver Figura 3) sólo utiliza el lenguaje natural.

Para saber cuanto gasta la profesora Patricia en pasaje, tomamos en cuenta cuantas camionetas debe agarrar y el costo del pasaje, entonces vamos a realizar una ecuación para calcular cuanto gasta en pasaje en un día de trabajo

Si	X	, es la incognita	X = C.P
	C	, es la cantidad de camioneta.	X = 4.2 Bsp
	P	, es el costo del pasaje	X = 8 Bsp.
Tenemos	X = C.P		

Figura 2. Producción del equipo 3.

Nº 7 LA PROFESORA PATRICIA PAGO DEL LIBERTADOR A TOCUYITO DOS BS Y DE TOCUYITO AL MOLINO DOS BS SERIAN CUATRO BS Y DE REGRESO CUATRO BS MAS SERIAN EN TOTAL OCHO BS.

Figura 3. Producción del equipo 7.

Los equipos 4 y 6 tomaron una segunda hipótesis que fue: “Pero si le dan la cola de regreso desde el molino hasta Tocuyito, agarra 3 camionetas”; el equipo n° 4 tomó esta segunda hipótesis y halló el resultado, la profesora Patricia gastaría 6 Bs en pasaje. Mientras que el equipo n° 6 sólo planteó esa situación sin llegar a resolver.

Al igual que los equipos 1, 2 y 3 en relación a la competencia para resolver problemas matemáticos dentro de un modelo matemático, se considera que no la poseen por no haber construido el modelo matemático; la competencia para interpretar resultados matemáticos de una situación del mundo real, se puede decir que los tres equipos la poseen al dar respuesta a la situación planteada; y, en cuanto a las competencias para cambiar soluciones o llevar a cabo otros procesos, los grupos 4 y 6 tomaron en cuenta diferentes variables y en función de ellas buscaron solución al problema planteado.

En cuanto a las competencias sociales, todos los grupos demostraron trabajar en equipo, discutieron sus opiniones y llegaron a conclusiones, además en la fase de discusión le presentaron al resto de sus compañeros el trabajo realizado y los resultados obtenidos de manera eficaz pero con un escaso lenguaje matemático.

## CONCLUSIONES

Se concluye que los estudiantes del primer año de educación media poseen algunas competencias de modelización matemática, que aunque no son todas las necesarias para llevar a cabo un proceso de modelización independiente, son suficientes para afirmar que mostraron una modelización de carácter intuitiva, la cual podría “educarse” mediante la realización de actividades adecuadas en el aula, tal como sostienen Ortiz y Dos Santos (2011). Es decir, las competencias de modelización matemática podrían adquirirse con el tiempo y la práctica en las aulas de clase, para lo cual sería conveniente su incorporación en los currículos tal como sugieren Ortiz, Rico y Castro (2007). La competencia que menos poseen los estudiantes es la relacionada a la construcción del modelo matemático, lo cual podría deberse a la manera como el Álgebra es enseñada ya que los estudiantes han sido acostumbrados a resolver problemas tipos. Sin embargo, esto podría superarse si los estudiantes participaran con más frecuencia en actividades de modelización en las clases de matemática.

Por otra parte, los estudiantes abordaron el problema con bastante interés, lo que demuestra que incluir problemas reales en las clases de matemática generaría mayor motivación en los estudiantes hacia el estudio del álgebra. Aunado a esto, el estudio arrojó que los estudiantes presentan un escaso lenguaje matemático, el cual representa una dificultad al momento de comunicar sus ideas.

En cuanto a las representaciones que fueron utilizadas por los estudiantes, se concluye que, todos los grupos usaron el lenguaje natural, y en segundo lugar el sistema más utilizado fue el numérico. Sólo un grupo utilizó el sistema algebraico, a pesar de que en este nivel los estudiantes ya han trabajado expresiones algebraicas.

Las respuestas, dadas por los estudiantes, de cierta manera se relacionan con la enseñanza que han recibido, lo que hace suponer que los docentes podrían no estar haciendo énfasis en el uso de las diferentes representaciones al tratar un concepto matemático, por lo que se sugiere que en las actividades de matemática se trabaje con diferentes representaciones y con la conversión de una representación a otra, tal como lo plantea, Castro y Castro (1997) y Rico (2009).

Finalmente, aunque la mayoría de los estudiantes no mostró poseer la competencia para construir un modelo (sólo un grupo construyó el modelo matemático), se puede afirmar que los estudiantes tienen un potencial para resolver problemas de su entorno físico, natural y social. Esto hace suponer la pertinencia de incluir la modelización matemática en las clases de matemática de secundaria, donde el docente haría mayor énfasis en la construcción de los modelos y en la utilización de varios sistemas de representaciones de manera coordinada, de modo tal que los estudiantes pudieran comprender los conceptos matemáticos que están involucrados en la resolución de los problemas.

## RECOMENDACIONES

En este artículo se recomienda en primer lugar, abordar los contenidos matemáticos a través de la resolución de problemas reales, que preparen a los estudiantes para conocer y si es necesario modificar su entorno además, formar a los estudiantes para el estudio del álgebra; y en último lugar se recomienda que las actividades de resolución de problemas se centren en la modelización matemática como herramienta que vincula la matemática con la realidad del educando y que se establezca como prioridad el uso de diferentes sistemas de representación y el traslado de un sistema a otro; para garantizarle al estudiante una mayor comprensión de todas las propiedades y características de un concepto matemático.

## REFERENCIAS

- Aravena, M., Caamaño, C. y Giménez, J. (2008). Modelos Matemáticos a través de Proyectos. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 11(1), 49-92.
- Biembengut, M.S. y Hein, N. (1999). Modelación Matemática: Estrategia para enseñar y aprender matemáticas. *Educación Matemática*, 11(1), 119-134.
- Blum, W. y Niss, M. (1991). Applied Mathematical Problem Solving, Modelling, Applications, and Links to Others Subjects – State, Trends and Issues in Mathematics Instruction. *Educational Studies in Mathematics*, 22, 37-68.
- Castro, E. y Castro, E. (1997). Representaciones y Modelización. En L. Rico (Coord), *La Educación Matemática en la Enseñanza Secundaria*. (cap. 4, pp 95-122). Barcelona: Horsori
- Kaiser, G. (2007). Modelling and Modelling Competencies in School. En C. Haines, P. Galbraith, W. Blum y S. Khan (Eds.), *Mathematical Modelling. Education, Engineering and Economics*. Chichester, Reino Unido: Horwood Publishing
- Katz, V. (2007). *Algebra: Gateway to a Technological Future*. Washington, D.C: The Mathematical Association of America.
- NCTM (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston, VA: Autor. [Versión española: *Principios y Estándares para la Educación Matemática*. Sevilla: Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales]. Disponible en: <http://www.nctm.org/standards/>
- [Recuperado: 2009, Septiembre 15]
- Ortiz, J. (2004). Pensamiento Numérico y Algebraico. *Paradigma*, 25(1), 225-239
- Ortiz, J., Rico, L. y Castro, E. (2007). La Enseñanza del Algebra Lineal Utilizando Modelización y Calculadora Gráfica: un estudio con Profesores en formación. *PNA*, 2(4), 181-189.
- Ortiz, J. y Dos Santos, A. (2011). Mathematical Modelling in High-School Education. A Case Study. En G. Kaiser, W. Blum, R. Borromeo y G. Stillman (Eds.), *Trends in the teaching and learning of mathematical modelling*, New York: Springer

- Rico, L. (2009). Sobre las Nociones de Representación y Comprensión en la Investigación en Educación Matemática. *PNA*, 4(1), 1-14
- Yin, R. (2003). *Case Study Research. Design and Methods* (Third Edition, Applied Social Research Methods Series, Vol.5). Beverly Hills, CA: Sage.

## Actividades interdisciplinarias Universidad-Institutos de Enseñanza Secundaria

**M<sup>a</sup> Antonia Cejas-Molina**

*Departamento de Matemáticas*

**José Luis Olivares-Olmedilla**

*Departamento de Ingeniería Eléctrica*

**Antonio Blanca-Pancorbo**

*Departamento de Física Aplicada*

**Lorenzo Salas-Morera**

*Departamento de Proyectos de Ingeniería*

*Escuela Politécnica Superior de Córdoba, Universidad de Córdoba*

**Resumen:** Durante los cursos académicos 2009/2011 profesores universitarios y de enseñanza secundaria, hemos desarrollado una serie de proyectos destinados a mejorar el nivel académico de los alumnos que ingresan en la Universidad, concretamente en los estudios de ingeniería. En el presente artículo se describe una experiencia interdisciplinar basada en el Aprendizaje Basado en Problemas, que se enmarca dentro de un proyecto más amplio que comenzó a desarrollarse en el curso 2009-2010 y continuará en el curso 2012-13.

**Palabras clave:** Actividades Interdisciplinarias, Universidad, Institutos de Enseñanza Secundaria, Estudios de Ingeniería.

## Activities interdisciplinary University-Secondary Schools

**Abstract:** During the academic years 2009/2011 university professors and secondary school teachers, developed a series of projects to improve the academic level of students entering the University, specifically in engineering studies. This article describes an interdisciplinary experience based on problem-based learning, which is part of a much larger project that began in 2009-2010 and will continue during 2012-13.

**Key Words:** Interdisciplinary Activities, University, High school, Engineering Studies.

## INTRODUCCION

Si se analiza el plan de Estudios de la Enseñanza Secundaria Obligatoria y Bachillerato, puede comprobarse que son muchas y muy numerosas las asignaturas que un alumno a corta edad tiene que aprender. Si bien los conceptos llegan a ser asimilados por los estudiantes, no suelen establecer una relación entre ellos y menos aún encuentran una aplicación de lo estudiado en el mundo físico que les rodea. Posiblemente éste hecho contribuya a que el nivel académico de nuestros alumnos se aleje bastante de la media deseada, no hay más que remitirse al informe del Programa Internacional de Evaluación del Estudiante Pisa (2009) para ver el nivel de conocimientos de nuestros estudiantes. La escasa motivación del alumnado es otro de los factores, pues no hay nada más desmotivador para un alumno que no entender para qué sirve lo que se le está enseñando.

Generalmente dentro del proceso educativo el docente explica una parte de la materia y seguidamente, propone a los alumnos una actividad de aplicación de dichos contenidos. En los últimos años el Aprendizaje Basado en Problemas (ABP) plantea una metodología (en la que el docente no utiliza la lección magistral) para que los estudiantes adquieran conocimientos y los apliquen para solucionar un problema real o ficticio, implicando activamente al alumno en su aprendizaje, con la consiguiente motivación ya que se ve participe del mismo.

Barrows (1986) define al ABP como “un método de aprendizaje basado en el principio de usar problemas como punto de partida para la adquisición e integración de los nuevos conocimientos”. En esta metodología los protagonistas del aprendizaje son los propios alumnos, que asumen la responsabilidad de ser parte activa en el proceso.

Prieto (2006) defendiendo el enfoque de aprendizaje activo señala que “el aprendizaje basado en problemas representa una estrategia eficaz y flexible que, a partir de *lo que hacen los estudiantes*, puede mejorar la calidad de su aprendizaje universitario en aspectos muy diversos”. Así, el ABP ayuda al alumno a desarrollar y a trabajar diversas competencias. Entre ellas, de Miguel (2005) destaca: resolución de problemas, toma de decisiones, trabajo en equipo, habilidades de comunicación, etc.

En esta línea Salas, Cejas y Olivares (2009-2010) hemos planteado proyectos interdisciplinares desarrollados por profesorado universitario y de enseñanzas medias, para tratar de potenciar aquellos conocimientos necesarios para afrontar con éxito un primer curso de ingeniería. Las actividades programadas se están desarrollando en la asignatura de Proyecto Integrado en primer y segundo curso de bachillerato, se han diseñado de forma que se trabajen gran variedad de competencias tales como: uso de hojas de cálculo, clases de comunicación virtual mediante el software Skype y Yugma, etc.

## OBJETIVOS

En general, los estudiantes encuentran los conceptos explicados en clase excesivamente teóricos y abstractos, por ejemplo, no alcanzan a relacionar una ecuación con su gráfica, o un problema de química con lo que han visto en el laboratorio, y menos aún

saben utilizar los conceptos aprendidos para formular un modelo matemático que dé respuesta a aquellos problemas que frecuentemente se mencionan en los medios de comunicación. Será por tanto nuestro principal objetivo situar en un contexto real aquellos conceptos que se han ido estudiando en las diferentes asignaturas que conforman los estudios de Bachillerato.

En el planteamiento y resolución de la actividad, realizada con los alumnos de segundo curso de bachillerato, se van a trabajar, entre otros, los siguientes conceptos y técnicas matemáticas:

- Variable dependiente.
- Variable independiente.
- Proporcionalidad.
- Función continua.
- Función definida a trozos.
- Concepto de derivada como tasa de cambio.
- Técnicas de integración.
- Solución analítica del problema.
- Ecuación logística.
- Relación entre una ecuación con su gráfica.
- Extraer información de la solución gráfica.
- Uso de hojas de cálculo.

## **METODOLOGÍA**

Si bien los programas de matemáticas a nivel de bachillerato no contemplan el estudio de las ecuaciones diferenciales, el alumno está trabajando con ellas cuando resuelve problemas de dinámica, mecánica, etc. en las asignaturas de física. Basta con entender el concepto de derivada y conocer mínimamente las técnicas de integración para poder encontrar la solución general de la ecuación planteada, incluso sabe trabajar con las condiciones iniciales del problema para hallar la solución particular del mismo. Partimos de que el concepto de “*ecuación diferencial*” así como el de “*problema de valores iniciales*” no es conocido por el alumno, pero sí sabe trabajar con ellos. Planteamos entonces un problema de fácil comprensión para el alumnado, que versará sobre la población de un determinado hábitat, éste es de actualidad, tiene difusión en los medios de comunicación y su resolución conlleva consecuencias sociales, económicas, demográficas, etc.

Previamente a la resolución del problema el alumno, individualmente o en grupos de dos, llevará a cabo una labor de investigación a través de los medios de comunicación: prensa, radio, televisión, internet, etc. Con la información recabada, se procede a la formulación

matemática del mismo, la resolución y posterior debate de los resultados tiene lugar en clase con el profesor actuando como tutor.

## Planificación temporal del trabajo

El trabajo se ha desarrollado con los alumnos de la asignatura de Proyecto Integrado, durante el segundo cuatrimestre del curso académico 2010-11 y 2011-12, una vez que se ha avanzado lo suficiente en el programa de matemáticas para que tengan los conocimientos necesarios que les permitan desarrollar las competencias indicadas.

## Formulación del problema

En clase de la asignatura de Proyecto Integrado se plantea la siguiente cuestión:

- “Imaginemos que vivimos en una zona pesquera y quisiéramos saber: ¿Cuántas toneladas de pescado pueden recogerse al año sin exterminar la población de peces?”.

El problema planteado permitirá analizar, entre otras, las siguientes cuestiones.

Una pesca incontrolada:

- ¿Podría afectar a la industria pesquera de la región?.
- ¿Y a la economía en general?.
- ¿Aumentaría el paro de la zona pesquera?.
- ¿Tendría consecuencias demográficas?.
- ¿Se vería afectado el medioambiente de alguna manera?.

Cabe entonces preguntarse:

- ¿Qué tasa de pesca conserva en cantidades aceptables la población de peces y la industria pesquera?.

Formulado el problema y analizadas las posibles consecuencias que de él se derivan, el alumno debe recabar información al respecto, debiendo tener la documentación encontrada para la próxima clase de la asignatura indicada.

## RESOLUCIÓN

Para formular un modelo matemático que responda a las cuestiones planteadas, habrá que tener en cuenta los datos obtenidos en la investigación realizada por los alumnos y los conocimientos matemáticos aprendidos. La palabra clave en la pregunta formulada es *tasa*. En el lenguaje matemático las *tasas* son una derivada con respecto del tiempo, vamos a plantear una ecuación cuya incógnita es una función  $y(t)$  (toneladas de peces en

$t$  años), en dicha ecuación estableceremos una relación entre la función  $y(t)$  y su derivada  $y'(t)$ . La tasa de cambio neta de la población expresada en toneladas de pescado por año es  $\frac{dy(t)}{dt}$ , que se escribe  $y'(t)$  o simplemente  $y'$ .

A través del trabajo de investigación desarrollado por los alumnos sobre dinámica de poblaciones, han aprendido que si  $y(t)$  denota el tamaño de una población en un tiempo  $t$ , el modelo para el crecimiento exponencial, Zill, D.G. (2006), comienza con la suposición de que

$$\frac{dy}{dt} = Ky \quad [1]$$

con  $K > 0$ . Los casos reales de crecimiento exponencial en periodos largos de tiempo son difíciles de encontrar debido a que los recursos limitados del ambiente y la existencia de predadores ejercen, en algún momento, restricciones sobre el crecimiento de una población. Es de esperar que la ecuación [1] disminuya a medida que aumenta el tamaño de la población  $y$ ; lo que nos obliga a modificar el modelo.

En condiciones normales la tasa de crecimiento será constante o aproximadamente constante, ahora bien, dicha tasa debe reflejar el hecho de que un aumento considerable de la población inhibe el crecimiento reduciéndose la población, de modo que la nueva tasa de crecimiento será de la forma

$$\frac{dy}{dt} = y(a - by) \quad a > 0, \quad b > 0 \quad [2]$$

La ecuación diferencial [1] no proporciona un modelo muy preciso para la población cuando ésta es muy grande. Las condiciones de superpoblación, con los efectos nocivos resultantes en el ambiente, como contaminación y demandas excesivas como competencia por alimento, pueden tener un efecto inhibitorio en el crecimiento de la población.

Reescribiendo [2] como  $\frac{dy}{dt} = ya - by^2$ , el término no lineal  $-by^2$ ,  $b > 0$  se puede interpretar como un término de inhibición o competencia (superpoblación). Asimismo en la mayor parte de las aplicaciones la constante positiva  $a$  es mayor que la constante positiva  $b$ .

Si se tiene en cuenta la actividad pesquera en la zona, el modelo debe modificarse para tener en cuenta este hecho. Suponiendo que la captura se realiza a un ritmo  $H$  (tasa de captura), la ecuación diferencial que representa al modelo queda

$$\frac{dy}{dt} = y(a - by) - H \quad [3]$$

Se ha encontrado una ecuación donde se establece una relación entre una función, su derivada y la tasa de captura, pudiéndose formular matemáticamente el problema propuesto.

La ecuación planteada es difícil de resolver por los alumnos de Bachillerato, lo que nos lleva a simplificar el modelo admitiendo para ello varias situaciones, cuya viabilidad habrá que determinar posteriormente. Supongamos entonces los siguientes casos:

### Captura sin superpoblación

Admitamos que inicialmente, en un tiempo  $t = 0$  la población de peces existente es  $y_0$ . Al no existir superpoblación, la ecuación [3] se transforma en:

$$y' = a y - H \quad [4]$$

Separando las variables en la ecuación [4], integrando y sustituyendo las condiciones iniciales en la solución general, encontraría la solución:

$$y(t) = \frac{H}{a} + \left( y_0 - \frac{H}{a} \right) e^{at}, \quad t \geq 0 \quad [5]$$

En esta fase del trabajo, y dentro de las actividades programadas en Salas, L., Cejas, M. A. y Olivares, J. L. (2009) el alumno ha aprendido a trabajar con la hoja de cálculo de OpenOffice, pudiendo representar gráficamente la solución [5]. La figura 1 muestra el resultado obtenido para el valor de la constante  $a = 1$ ,  $H = 0$  en el rango  $0 < y_0 < 20$ .

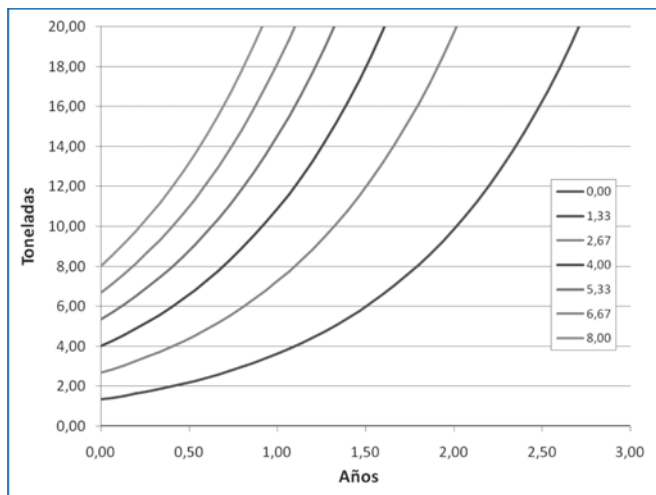


Figura 1. Crecimiento exponencial sin captura.

En la figura 2 se representa la solución [5] para  $0 < y_0 < 20$  y  $H = \frac{5}{3}$  toneladas anuales. Si  $y_0 < \frac{H}{a}$  pronto se extinguirá la población, pero si  $y_0 > \frac{H}{a}$  entonces crece sin límites, lo cual nunca sucede en la realidad.

Por tanto, necesitamos un modelo mejor. Quizás haya que tener en cuenta el término de superpoblación descartado.

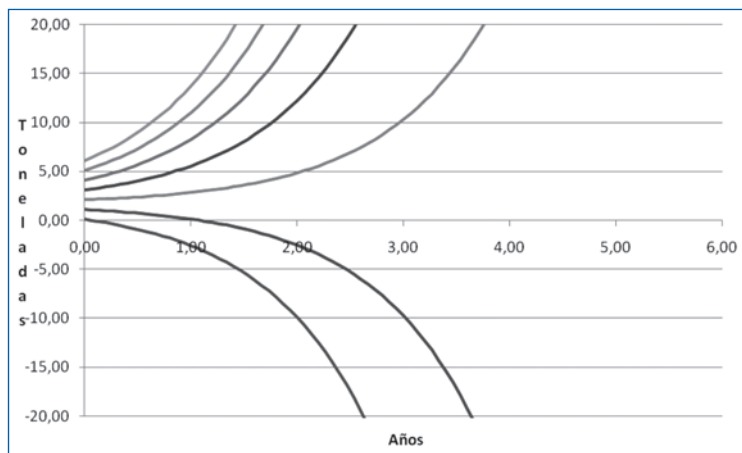


Figura 2. Crecimiento exponencial con captura

¿Qué habrá aprendido el alumno en esta fase?

- Fundamentalmente a aplicar los conceptos matemáticos estudiados a problemas reales, aparentemente sin ninguna conexión con lo que estudia.
- Llevar a cabo un proceso de investigación a través de internet, prensa, etc. sobre problemas reales.
- Construir un modelo matemático donde se relacionan las variables.
- Diferenciar entre variable independiente y dependiente.
- Dar significado al concepto de derivada.
- Encontrar la solución de un problema usando técnicas de integración.
- Relacionar una función con su gráfica.
- Extraer información de los datos encontrados.
- Validar el modelo construido.

Las conclusiones obtenidas ponen de manifiesto que hay que retomar las variables descartadas. La solución analítica se obtendrá separando las variables e integrando.

### Superpoblación sin captura de peces

Omitamos por el momento el término de la captura de la ecuación [3] y usemos el término de la superpoblación para obtener la ecuación:  $y' = ay - cy^2$ ,  $y(0) = y_0$ ,  $t \geq 0$ . La solución gráfica obtenida para  $H=0$ ,  $a = 1$ ,  $c = 1/12$  para  $0 < y_0 < 20$  se muestra en la figura 3.

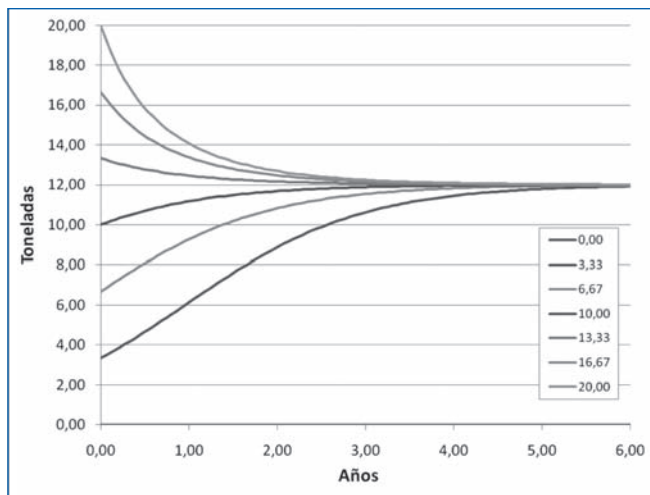


Figura 3. Superpoblación sin captura de peces  $H=0$ ,  $a = 1$ ,  $c = 1/12$

Se obtienen dos soluciones de equilibrio,  $y=0$  e  $y=12$ . Algo interesante es que al parecer el equilibrio superior atrae a las demás curvas solución no constantes en el cuadrante de población  $y \geq 0$ ,  $t \geq 0$ . Por sí sola, la población de peces tiende al equilibrio sin importar cuál sea la población inicial.

### Superpoblación y captura de peces

Empecemos por incluir una pesca moderada  $H = \frac{5}{3}$  toneladas por año. Gráficamente la solución de la ecuación [3] para  $H = 5/3$ ,  $a = 1$ ,  $c = 1/12$  en el rango  $0 < y_0 < 20$  se representa en la figura 4.

Puede observarse como en la recta de equilibrio superior convergen las curvas solución, pero no todas, las que comienzan debajo de la solución constante convergen hacia la extinción. La pesca moderada no parece ser muy dañina, al menos si el tonelaje inicial es lo suficientemente alto; sin embargo, incluso una tasa de captura moderada podría causar la extinción si el nivel inicial de población es bajo. No obstante, éste es un escenario en el que tanto la población de peces como la industria pesquera sobreviven bien.

Supongamos que no hay restricción para los pescadores y que la tasa de captura es mucho más alta, digamos que aumenta a 4 toneladas por año. En la figura 5 se representa la solución de la ecuación [3] para  $a=1$ ,  $c=1/12$  en el rango  $0 < y_0 < 20$ .

Es fácil observar que se produciría la extinción total de la especie.

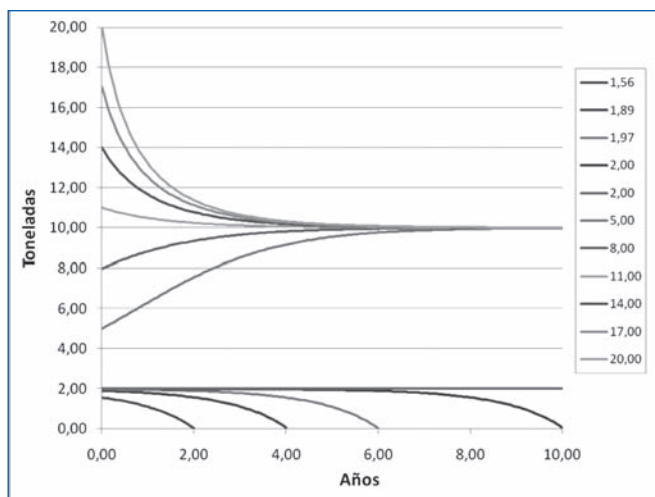


Figura 4. Superpoblación y captura de peces con  $H = 5/3$ ,  $a = 1$ ,  $c = 1/12$

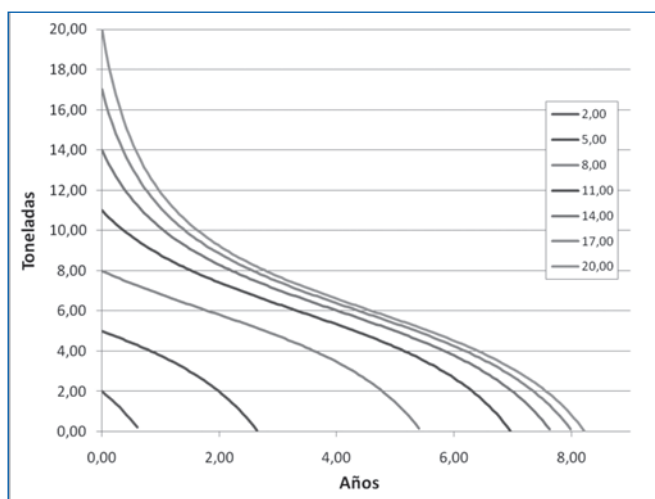


Figura 5. No hay restricción de pesca

### Prohibición de pesca

Al no poder permitir que se extinga la población de peces, veamos qué sucede con el modelo si después de cinco años de pesca a una tasa de 4 toneladas por año, se prohíbe esa actividad durante cinco años. Ahora la tasa de captura está dada por:

$$H(t) = \begin{cases} 4, & 0 \leq t < 5 \\ 0, & 5 \leq t \leq 10 \end{cases}$$

La complejidad de la ecuación [3] en este caso no hace viable su resolución, no obstante esta situación se mostró resuelta en clase, Borrelli (2002), donde se puso de manifiesto que después de cinco años de pesca intensa la población sobreviviente se dirige al nivel  $y=12$ . Hemos salvado la pesca pero a costa de la industria pesquera.

## **CONCLUSIONES Y CONSIDERACIONES FINALES**

El problema propuesto es complejo, pero nos ha parecido de interés por las implicaciones sociales que pueden tener las distintas opciones que se adopten en la captura de peces. Frecuentemente noticias sobre la moratoria en la captura de determinadas especies ocupan las portadas de los medios de comunicación, sin que el alumno pueda pensar que los conceptos matemáticos que estudia son necesarios para dar solución al problema.

Además al alumno se le ha mostrado aspectos como:

- A partir de una determinada realidad, parcialmente asequible al nivel educativo de los estudiantes, se ha construido un modelo analizando los pasos que conducen al mismo, con las habituales etapas de validación, análisis crítico, refinamiento, etc.
- Se han obtenido fórmulas para las soluciones del modelo matemático propuesto.
- El alumno ha interpretado las soluciones en términos de lo que sucede con la población de peces.
- El proceso de modelado nos ha permitido examinar las consecuencias de varias suposiciones acerca de la tasa de captura de la población de peces.
- Al alumno no le ha resultado sencilla la actividad desarrollada, en parte porque es la primera vez que analiza un problema en los términos llevados a cabo.
- En la formulación matemática del modelo la participación del profesor fue fundamental, hecha la primera simplificación, el alumno no tuvo dificultad para resolverlo y representarlo gráficamente.
- Terminada esta actividad, se plantearon problemas de menor complejidad, siendo necesario para su modelado matemático hacer uso de las correspondientes leyes físicas, químicas, etc. En esta línea se han propuesto problemas de mezclas químicas, circuitos eléctricos, mecánicos, descomposición de sustancias radiactivas, etc.
- Los alumnos participaron activamente en todo el proceso de resolución, sobre todo no dejó de resultarles sorprendente que problemas, cuyo enunciado de partida no parecía tener ninguna relación con las matemáticas, éstas fueran fundamentales para dar respuesta a los mismos.

## REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Barrows, H. S. (1986). A Taxonomy of problem-based learning methods. *Medical Education*, 20(6), 481–486.
- Borrelli, R., Coleman C. (2002). *Ecuaciones Diferenciales. Una perspectiva de modelación*. Madrid: Oxford.
- De Miguel, M. (2005). *Metodologías de enseñanza para el desarrollo de competencias. Orientaciones para el profesorado universitario ante el Espacio Europeo de Educación Superior*. Madrid: Alianza.
- PISA (2009). *Programa para la Evaluación Internacional de los Alumnos. Informe español*. Obtenido de [www.educacion.es/.../20101207-pisa2009-informe-espanol.pdf](http://www.educacion.es/.../20101207-pisa2009-informe-espanol.pdf)
- Prieto, L. (2006). Aprendizaje activo en el aula universitaria: el caso del aprendizaje basado en problemas. *Miscelánea Comillas. Revista de Ciencias Humanas y Sociales*, 64(124), 173-196.
- Salas, L., Cejas, M. A. y Olivares, J. L. (2009). Programación de actividades interdisciplinarias en colaboración Universidad-IES para mejorar el nivel de acceso de los estudiantes a las titulaciones de la EPS. *Proyecto de Mejora de la Calidad Docente n° 094012*. Universidad de Córdoba.
- Salas, L., Cejas, M. A. y Olivares, J. L. (2010). Programación conjunta de actividades interdisciplinarias en la asignatura de Proyecto Integrado de secundaria y bachillerato en colaboración Universidad-IES para mejorar el nivel de acceso de los estudiantes a las titulaciones de Ingeniería. *Proyecto de Mejora de la Calidad Docente n° 106013*. Universidad de Córdoba.
- Zill, D.G. (2006). *Ecuaciones diferenciales con problemas de valores en la frontera*. Ed. Thompson.



## Modelización matemática del trenzado artesanal

**Veronica Albanese**

*Universidad de Granada*

**María Luisa Oliveras**

*Universidad de Granada*

**Francisco Javier Perales**

*Universidad de Granada*

**Resumen:** *En este trabajo presentamos una modelización matemática de la realización del trenzado de origen artesanal con la intención de proporcionar a los profesores de matemáticas y a los maestros ideas y sugerencias para elaborar propuestas para el aula. Las ideas que desarrollamos se han generado durante una investigación etnográfica y etnomatemática de dos escenarios artesanales. Aquí resumimos los hallazgos más importantes del análisis etnomatemático que han consistido en la elaboración de un modelo matemático de la realización del trenzado que se basa en la utilización de los grafos y del lenguaje de la combinatoria.*

**Palabras clave:** *Etnomatemática, Modelización Matemática, trenzado.*

## Mathematical Modelling of craft braid/braiding

**Abstract:** *We present a mathematical modeling of the realization of craft braiding with the intention of providing to mathematics teachers some ideas to develop proposals for the classroom. The ideas developed were generated during an ethnographical and ethnomathematical study of two craft scenarios. Here we summarize the main findings of the ethnomathematical analysis which consisted in a mathematical model of the realization of the braiding, based on the use of graphs and combinatorial language.*

**Key words:** *Ethnomathematics, Mathematical Modeling, Braiding.*

## INTRODUCCIÓN

La Etnomatemática constituye una línea de investigación que abarca la antropología y la educación matemática en búsqueda de una manera diferente y más incluyente de hacer y considerar las matemáticas concebidas como un producto cultural (Bishop, 1999). En la Educación matemática esto se refleja en el objetivo de un aprendizaje significativo relacionado con el entorno social y cultural. El rol del docente se vuelve el del *enculturador matemático*, que valoriza el saber cotidiano y profesional y, en general, el saber inicial de los alumnos y su funcionalidad, los recursos contextualizados y el empleo del lenguaje natural además del simbólico (Bishop, 1999; Oliveras, 2005, 2006; Oliveras y Gavarrete, 2012).

El punto de partida del trabajo ha sido encontrar artesanías que tengan suficiente potencial matemático para lograr algunas aplicaciones educativas a niveles básico y técnico-profesional, conectando así la educación con el desarrollo de competencias laborales y de la vida diaria. Un trabajo pionero en este ámbito es el de Oliveras (1996).

Presentamos aquí una modelización matemática que ha surgido de una investigación etnográfica de algunas artesanías de trenzado (Oliveras y Albanese, 2012). Entendemos por *trenzado* la manera de realizar cordeles o trenzas entrelazando unos hilos, sin hacer nudos. Estos cordeles o trenzas tienen la peculiaridad de que, en cualquier punto, si se deja sin atar la madeja se va soltando, los hilos que la forman se separan, desarmando la estructura del cordel o trenza.

Uno de los Objetivos generales de la investigación es:

**O.1** Describir artesanías de trenzado y estudiarlas identificando los constructos matemáticos implícitos en ellas.

En este documento desarrollamos uno de los objetivos específicos que se enuncia así:

**O.2** Realizar una modelización matemática del trenzado artesanal.

## ETNOMATEMÁTICA, MODELIZACIÓN MATEMÁTICA Y EDUCACIÓN

Partiremos de sendas definiciones respecto de Modelo y Modelización:

*“Un modelo matemático de un fenómeno es un conjunto de símbolos y relaciones matemáticas que traducen, de alguna forma, el fenómeno en cuestión.”* (Bassanezi y Biembengut, 1997: 65).

*“La Modelización Matemática consiste en el arte de traducir un fenómeno determinado o problemas de la realidad en un lenguaje matemático: el modelo matemático.”* (Hein y Biembengut, 2006).

Es decir, la modelización matemática es el proceso de elaboración del modelo matemático.

Las Etnomatemáticas consideran la modelización matemática como una herramienta clave del proceso de construcción del conocimiento (D'Ambrosio, 2008). En su interés

por la contextualización del conocimiento y por la transmisión de un saber funcional a la solución de problemas reales a través de un aprendizaje significativo, destacan la importancia de la modelización porque comporta una mejor comprensión de las prácticas matemáticas, sea según el sistema matemático convencional, sea el sistema de pensamiento matemático de un determinado grupo cultural (Rosa y Orey, 2003).

Los investigadores en Etnomatemáticas suelen validar un modelo que un determinado grupo cultural construye para la resolución de un problema que aparece, procurando entender el modelo desarrollado por el grupo; ellos van al campo para conocer y entender la manera de resolver un problema por un grupo cultural (ScandiuZZi, 2002).

La educación en perspectiva etnomatemática sitúa su foco de interés en el pensamiento matemático del grupo cultural considerado, que construye el modelo y la validación se realiza según los criterios del sistema matemático informal. En esta visión, la manipulación de modelos sirve como estrategia de investigación del pensamiento matemático de los grupos culturales, a fin de desarrollar una educación matemática basada en otros codificadores. En este sentido:

- *“Conocer, entender y explicar un modelo o cómo determinadas personas o grupos sociales lo utilizan, puede ser significativo, principalmente, porque nos ofrece una oportunidad de penetrar el pensamiento de una cultura u obtener una mejor comprensión de sus valores”* (Bienbengut, citado en Rosa y Orey, 2003, p. 3, traducción propia).

Así que en las aulas de matemáticas se valoriza y comprende la influencia de una determinada cultura sobre las maneras de pensar, comunicar y transmitir matemáticas.

En una entrevista, D’Ambrosio expone que las Etnomatemáticas son una manera de hacer Educación Matemática, una educación que no consiste en pasar al alumno el conocimiento congelado en los libros, sino que es *“una práctica, una cosa viva, hacer matemáticas dentro de las necesidades ambientales, sociales y culturales”* (Blanco, 2008, p. 22). Y en otra entrevista (D’Ambrosio y Rosa, 2009) expresa su convicción, a propósito del potencial educativo del estudio de prácticas de grupos culturales diferentes, de que contribuye al desarrollo de valores como el respeto hacia otras culturas, y en el caso específico de nuestro trabajo, el respeto de las labores manuales como la artesanía (Oli-veras y Albanese, 2012).

## EL MODELO MATEMÁTICO

Definimos los conceptos básicos del lenguaje matemático formal que utilizamos en nuestro estudio: el grafo, la permutación, el ciclo.

- a) Un *grafo*  $|V|$  es un par ordenado  $G = (V, E)$ , donde  $V$  es un conjunto de vértices o nodos, y  $E$  es un conjunto de arcos o aristas, que relacionan estos nodos. Se considera  $V$  finito y se llama orden de  $G$  al número de vértices de  $V$ , indicado  $|V|$ .

- b) Un *circuito simple* en un grafo es una sucesión de nudos conectados por aristas, donde no se encuentra dos veces el mismo nudo, a excepción del primero y último que coinciden.
- c) Dado un conjunto finito de elementos, llamado  $V$ , una *permutación* es una correspondencia (o aplicación) biyectiva de  $V$  en sí mismo,  $p: V \rightarrow V$ , a veces indicada como reordenamiento. El conjunto de las permutaciones en  $V$  con la operación de composición forma un grupo, indicado  $S_V$ .
- 4) Se llama *ciclo*, y se indica  $\sigma = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ , la permutación que manda cíclicamente cada elemento en su sucesivo, o sea  $x_i$  en  $x_{i+1}$  hasta  $x_n$  en  $x_1$ , mientras deja fijos los que no aparecen. Si el ciclo contiene solo dos elementos se llama transposición. Dos ciclos se dicen disjuntos si no comparten ningún elemento de  $V$ . Cada elemento del grupo de permutaciones se puede escribir como composición de ciclos disjuntos (la composición, si los ciclos son disjuntos, es simplemente una yuxtaposición). Así que para expresar las permutaciones vamos a utilizar la notación de composición de ciclos disjuntos.

Para realizar el análisis imaginamos mirar la trenza o el cordel en construcción desde el punto de vista de la cola, o sea de donde los hilos están a punto de ser trenzados. En la modelización con grafos, los vértices o nudos representan las posiciones de los hilos a punto de ser trenzados, estas posiciones las indicaremos con letras minúsculas, mientras en el estudio posterior de los recorridos de los hilos, a estos mismo (los hilos) los representamos con números. Los arcos o aristas representan los movimientos de los hilos, respecto a la posición en la cual se encuentran en el momento de realizar el movimiento, que el artesano tiene que hacer cumplir a los hilos para crear la trama.

El trenzado toma forma repitiendo el mismo *paso*. El paso está constituido por unas unidades más simples que lo componen, los *movimientos mínimos*.

Los grafos permiten detectar de qué manera se realiza la acción de trenzar en función de una posición inicial de los hilos y de sucesivos intercambios de estas posiciones. Cabe destacar que lo que se intercambian son los hilos que se encuentran en determinadas posiciones. Por razones de claridad y fluidez del discurso, de aquí en adelante con “posiciones” nos referimos a los hilos que se encuentran en las posiciones determinadas en el paso en cuestión.

- a) *Movimiento mínimo*: es el movimiento que involucra dos o más hilos que intercambian sus posiciones; el conjunto de hilos es el mínimo tal que cada hilo del conjunto, en su movimiento, vaya ocupando una posición dejada vacía por el movimiento de otro hilo del conjunto y, a su vez, deje una posición vacía que sea ocupada por otro hilo del conjunto. En el grafo se describe a través de un circuito simple. En combinatoria a cada circuito se asocia un ciclo. El sentido horario o anti horario del circuito se refleja en el ciclo por el orden de los elementos. Si el ciclo es una transposición, asumimos la siguiente convención: suponiendo que  $x_1 < x_2$  (en el ordenamiento alfabético), un circuito entre  $x_1, x_2$  horario será  $(x_1, x_2)$ ; un circuito  $x_1, x_2$  anti horario será  $(x_2, x_1)$ .

- b) *Paso*: un paso del proceso de trenzar es el máximo conjunto de movimientos mínimos tal que cada vértice no pertenece a más de un movimiento. Un paso se representa en un único grafo en el que aparecen eventualmente más circuitos no conectados. En combinatoria se representa con un elemento del grupo  $S_V$  que resulta, eventualmente, de la composición de más de un ciclo. Se considera el orden en el que aparecen escritos los ciclos como el orden de ejecución de los movimientos.

Señalamos que todos los grafos relativos al mismo trenzado tienen la misma estructura (o esqueleto), en términos técnicos, el grafo *vacío* asociado, cuyo conjunto de aristas es nulo, es el mismo. Utilizamos la convención de disponer los nudos sobre los lados de un cuadrado. Ya que trataremos casos de 4 y 8 hilos, encontraremos respectivamente uno o dos nudos por lado.

Cabe destacar que algunos trenzados se realizan con una secuencia de varios pasos distintos. En este documento vamos a presentar solo trenzados elaborados con una secuencia simple donde la repetición de un único paso permite la construcción de la trenza o cordel.

## MODELIZACIÓN MATEMÁTICA DE CORDELES: ALGUNOS EJEMPLOS CON CUATRO Y OCHO HILOS

Presentamos en este apartado cómo realizar la modelización matemático-formal de algunos trenzados de cordeles, haciendo una reelaboración de los esquemas utilizados por Richard Owen (Owen, 1995), bajo la guía y las explicaciones proporcionadas por el Profesor Castagnolo durante una inmersión en el campo realizada en la región de Salta, Argentina. El nombre que hemos elegido para cada trenzado se refiere a la forma del grafo asociado. Ponemos de manifiesto que en este trabajo presentamos el análisis matemático y consideramos solo la manera en que se trenza, omitiendo cualquier referencia a los hallazgos de carácter etnográfico.

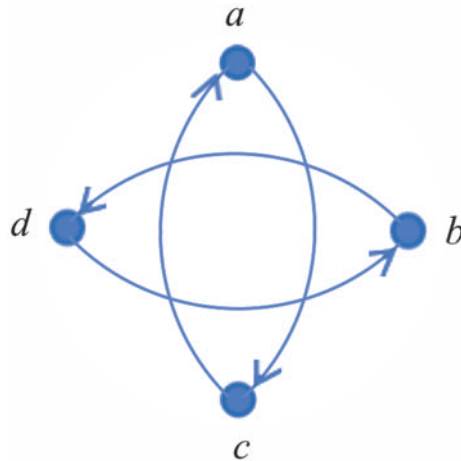
### La cruz simple de 4 hilos

Vamos a presentar la modelización del proceso de realización del trenzado que llamamos *la cruz simple* de cuatro hilos. El *grafo estructura* está constituido por cuatro nudos, correspondientes a los cuatro hilos, posicionados cada uno sobre *un lado* del cuadrado, que nombramos en sentido horario *a, b, c, d*, y colocamos con los lados en posiciones vertical y horizontal, partiendo del nudo situado arriba. El paso está compuesto por dos movimientos mínimos, el primer movimiento mínimo a realizar es el intercambio, en sentido horario, de los hilos que ocupan las posiciones *a, c*. El segundo movimiento mínimo es el intercambio en sentido anti horario de los hilos que ocupan las posiciones *b, d*. En el grafo estos se visualizan como dos circuitos de dos que se disponen como una cruz (de aquí el nombre). El grafo que representa el paso es el grafo *G1*.

En combinatoria este paso se representa con una permutación  $p_1$  en  $S_{\{a,b,c,d\}}$  compuesta por dos transposiciones  $\sigma_{1,1} = (a, c)$  y  $\sigma_{1,2} = (d, b)$ . Observamos que  $\sigma_{1,2}$  siendo en sentido anti horario, tiene las letras en orden alfabético decreciente.

Así que, de  $p_1 = \sigma_{1,1} \sigma_{1,2}$ , se obtiene

$$p_1 = (a, c) (d, b).$$



Grafo  $G1$ : Grafo del trenzado “cruz simple”.

Ahora vamos a numerar los hilos de la configuración inicial de manera tal que el hilo posicionado en el nudo  $a$  sea el hilo 1, el del nudo  $b$  sea el hilo 2, etc. De aquí en adelante siempre utilizamos esta convención para numerar los hilos de la configuración inicial. Para seguir el recorrido de aquellos en la trama aplicamos a la configuración inicial la permutación que describe el paso. Así que la permutación en función de las letras, o sea de las posiciones, se reescribe en función de los números, o sea de los hilos (en la tabla  $T1$  es la última columna de la derecha) y se aplica a la configuración inicial obteniendo una nueva configuración que se describe en la línea sucesiva de la tabla referida.

$a$	$b$	$c$	$d$	$p_i$	Paso específico
1	2	3	4	$p_1 = (a, c) (d, b)$	(1,3) (4,2)
3	4	1	2	$p_1 = (a, c) (d, b)$	(3,1) (2,4)
1	2	3	4	-	-

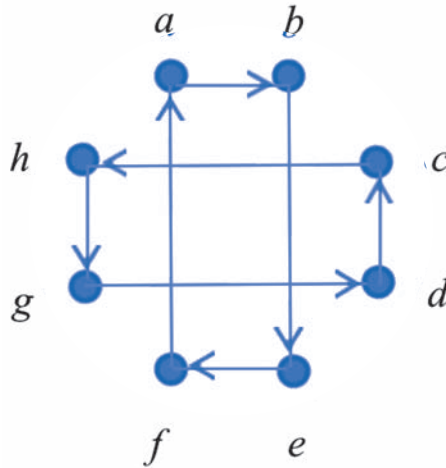
Tabla  $T1$ : Recorrido de los hilos del trenzado “cruz simple”.

Observamos que el número de veces que tenemos que repetir el paso para volver a la configuración inicial coincide con el orden de la permutación que describe el paso.

### La cruz de cuadrados de 8 hilos

Tratamos ahora la modelización del trenzado denominado *la cruz de cuadrados*. El grafo estructura consta de ocho nudos dispuestos dos por cada lado del cuadrado, que nombramos en sentido horario, partiendo del primero arriba a la izquierda  $a, b, c, d, e, f, g, h$ .

El único paso se representa con un grafo que está formado por dos circuitos de cuatro nudos; el primer circuito en sentido horario involucra los nudos  $a, b, e, f$ , el segundo en sentido anti horario involucra los nudos  $c, d, g, h$ .



Grafo  $G_2$ : Grafo del trenzado “cruz de cuadrados”.

En combinatoria, el paso está descrito por la permutación de  $S_{\{a,b,c,d,e,f,g,h\}}$  que se constituye por yuxtaposición de los dos ciclos  $\sigma_{1,1}=(a, b, e, f)$  y  $\sigma_{1,2}=(h, g, d, c)$ , es decir

$$p_1 = (a, b, e, f) (h, g, d, c),$$

Numerando los hilos en la configuración inicial como hemos convenido, realizamos la tabla  $T_2$ , que describe el recorrido de los hilos en la trama.

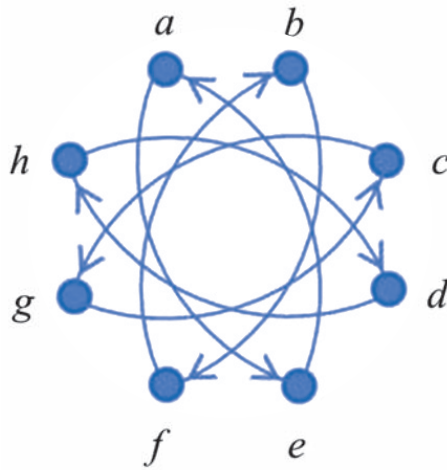
$a$	$b$	$c$	$d$	$e$	$f$	$g$	$h$	$p_i$	Paso específico
1	2	3	4	5	6	7	8	$p_1 = (a, b, e, f) (h, g, d, c)$	(1,2,5,6) (8,7,4,3)
6	1	4	7	2	5	8	3	$p_1 = (a, b, e, f) (h, g, d, c)$	(6,1,2,5) (3,8,7,4)
5	6	7	8	1	2	3	4	$p_1 = (a, b, e, f) (h, g, d, c)$	(5,6,1,2) (4,3,8,7)
2	5	8	3	6	1	4	7	$p_1 = (a, b, e, f) (h, g, d, c)$	(2,5,6,1) (7,4,3,8)
1	2	3	4	5	6	7	8	-	-

Tabla  $T_2$ : Recorrido de los hilos del trenzado “cruz de cuadrados”.

Observamos que con cuatro aplicaciones del paso se alcanza de vuelta la configuración inicial y apreciamos de nuevo que el número cuatro representa también el orden de la permutación, compuesta de dos ciclos de cuatro, que describe el paso.

### La estrella de 8 hilos

El trenzado de la estrella se basa en el mismo *grafo estructura* del trenzado precedente, ya que también se realiza con 8 hilos. El paso se visualiza con un grafo constituido por cuatro circuitos de dos. En el orden tenemos un circuito horario entre los nudos  $b, f$ ; un circuito horario entre los nudos  $d, h$ ; un circuito anti horario entre los nudos  $a, e$ ; un circuito anti horario entre los nudos  $c, g$ .



Grafo  $G3$ : Grafo del trenzado “estrella”.

En combinatoria encontramos una única permutación en  $S_{\{a,b,c,d,e,f,g,h\}}$  correspondiente al único paso que queda de la yuxtaposición de las cuatro transposiciones:

$$p_i = (b, f) (d, h) (e, a) (g, c).$$

Construimos entonces la tabla  $T3$  que describe el recorrido de los hilos:

$a$	$b$	$c$	$d$	$e$	$f$	$g$	$h$	$p_i$	Paso específico
1	2	3	4	5	6	7	8	$p_i = (b, f) (d, h) (e, a) (g, c)$	(2,6) (4,8) (5,1) (7,3)
5	6	7	8	1	2	3	4	$p_i = (b, f) (d, h) (e, a) (g, c)$	(6,2) (8,4) (1,5) (3,7)
1	2	3	4	5	6	7	8	-	-

Tabla  $T3$ : Recorrido de los hilos en el trenzado “estrella”.

Observamos que aquí también, para volver a la configuración inicial, tenemos que realizar un número de pasos análogo al orden de la permutación que representa el paso.

## CONSIDERACIONES FINALES

El propósito del trabajo aquí presentado es proporcionar a los Profesores de Matemática y a los Maestros unas herramientas de reflexión sobre las relaciones de las matemáticas con la cultura. Ponemos de manifiesto una vez más que nuestra intención ha sido estimular la creatividad del docente en la organización de su propia tarea profesional. Hemos pretendido exponer los hallazgos conseguidos en la modelización matemática del trenzado, en lugar de desarrollar una propuesta curricular concreta y detallada, convencidos que la originalidad y la propia experiencia personal pueden aportar nuevas perspectivas al momento de llevar estas ideas al aula.

Esta investigación está soportada por una Beca FPU (código de referencia AP2010-0235) del Ministerio de Educación, Cultura y Deporte del Gobierno de España, concedida a la investigadora V. Albanese ([Orden EDU/3445/2011, del 30 de noviembre](#), publicado en el B.O.E. n. 305 del 20-12-2012).”

## BIBLIOGRAFÍA

- Albanese, V. (2011). *Etnomatemáticas en Artesanías de Trenzado*. Tesis de Master no publicada. Granada, Universidad de Granada.
- Bassanezi, R. y Biembengut, M. (1997). Modelación matemática: una antigua forma de investigación, un nuevo método de enseñanza. *Revista de Didáctica de las Matemáticas*, (32), 13-25.
- Bishop, A. (1991). *Enculturación Matemática*. Barcelona: Paidós.
- Blanco, H. (2008). Entrevista al profesor Ubiratan D’Ambrosio. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática*, 1(1), 21-25.
- Castagnolo, A. (2012). La Etnomatemática Subyacente en los Textiles. *Journal of Mathematics and Culture*, 6(1), 119-134.
- D’Ambrosio, U. (2008). *Etnomatemática - Eslabón entre las tradiciones y la modernidad*. México: Limusa.
- Hein, N. y Biembengut, M. (2006). Modelaje matemático como método de investigación en clases de matemáticas. En: M. Murillo (presidente), *Memorias del V festival internacional de matemática*, 1-25.
- Oliveras, M. L. y Albanese, V. (2012). Etnomatemáticas en Artesanías de Trenzado: Un Modelo Metodológico para Investigación. *Bolema*, 26(44), en prensa.
- Oliveras, M. L. y Gavarrete, M. E. (2012). Modelo de Aplicación de Etnomatemáticas en la Formación de Profesores para Contextos Indígenas en Costa Rica. *RELIME*, en prensa.

- Oliveras, M. L. (2005). Microproyectos para la educación intercultural en Europa. *UNO Revista de Didáctica de las Matemáticas* 38, 70-81.
- Oliveras, M. L. (2006) Etnomatemáticas. De la multiculturalidad al mestizaje. En: Giménez, J., Goñi J. M., y Guerrero S. (Ed.) *Matemáticas e interculturalidad* (117-149). Barcelona, España: Graó.
- Oliveras, M. L. (1996). Etnomatemáticas. Formación de profesores e innovación curricular. Granada: Comares.
- Owen, R. (1995). *Braids: 250 patterns from Japan, Peru y beyond*. Loveland, Colo: Interweave Press.
- Orey, D. y Rosa, M. (2004). Ethnomathematics and the teaching and learning mathematics from a multicultural perspective. En: Favilli, F. (Ed.) *Proceeding of the 10th International Congress of Mathematics Education* (pp. 139-148). Copenhagen: Tipografia Editrice Pisana.
- Rosa, M. y Orey, D.C. (2003). Vinho e queijo: etnomatemática e modelagem. *Bolema, SP(20)*, 1-6.
- Scandiuzzi, P.P. (2002). Água e Óleo: modelagem e etnomatemática. *Bolema*, (17), 52-58.

## El aprendizaje de la Estadística basado en proyectos de investigación

Ana Corberán-Vallet  
Francisco J. Santonja  
José D. Bermúdez  
Enriqueta Vercher

*Departamento de Estadística e Investigación Operativa,  
Universitat de València*

**Resumen:** *Presentamos nuestra propuesta de reestructuración de la asignatura de Estadística de los grados en Ciencia y Tecnología de los Alimentos y en Nutrición Humana y Dietética bajo el paradigma del aprendizaje basado en problemas. Siguiendo esta metodología, el estudiante trabaja en proyectos de investigación, de forma que completar el proyecto supone analizar, entender e integrar los conceptos teóricos estudiados. En los proyectos propuestos se analizaron las propiedades nutricionales de los alimentos en la dieta mediterránea. La valoración de la experiencia por parte de los estudiantes muestra que su percepción sobre la utilidad de la asignatura ha mejorado después de cursarla.*

**Palabras clave:** *Estadística; aprendizaje basado en problemas; actitudes.*

## An experience in teaching statistics using problem-based learning

**Abstract:** *We present our proposal to restructure the Statistics course in Food Science and Technology and in Human Nutrition and Dietetics using the problem-based learning pedagogic approach. Within this framework, the students are expected to analyze, understand and integrate the basic concepts of Statistics to solve different problems proposed by the professor. The proposed projects dealt with the analysis of the nutritional properties of foods from the Mediterranean diet. The student evaluation of the experience shows that their perception of the course usefulness improved after having attended it.*

**Key words:** *Statistics; problem-based learning attitudes.*

## INTRODUCCIÓN

La experiencia que se presenta se realiza dentro del marco de la asignatura de Estadística de primer curso de los grados en *Ciencia y Tecnología de los Alimentos* y en *Nutrición Humana y Dietética*, ambos adscritos a la Facultad de Farmacia, en la Universitat de València. Se trata de una asignatura de introducción a la Estadística que aborda conceptos básicos de estadística descriptiva y de inferencia estadística: intervalos de confianza y contrastes de hipótesis -paramétricos y no paramétricos- de datos cuantitativos, ordinales y categóricos. Esta asignatura se imparte en el cuatrimestre de primavera y tiene 6 créditos ECTS, de los cuales se imparten 45 horas de clase en aula convencional (sin ordenadores), 8 horas en el aula de informática y 2 horas de tutorías en grupo. Además del seguimiento de las sesiones teóricas y prácticas de las distintas asignaturas, la coordinación de primer curso propone a los estudiantes la realización de un seminario dirigido en el contexto de alguna de las asignaturas impartidas en el cuatrimestre. El objetivo de los seminarios es brindar a los estudiantes la posibilidad de profundizar en aquellas asignaturas que sean de su agrado, trabajando en el desarrollo de un proyecto concreto.

Con el convencimiento de que la Estadística no es sólo un conjunto de conceptos, procedimientos y técnicas, sino también una forma de pensar y de abordar el análisis de datos, el departamento de Estadística e Investigación Operativa de la Universitat de València ha ido modificando la metodología docente de la asignatura de Estadística para las Ciencias de la Salud durante los últimos años, acomodando su desarrollo teórico y ejercicios prácticos a las diferentes titulaciones donde está inscrita, utilizando las propuestas metodológicas que aparecían en el libro de Samuels (1989). Así pues, la enseñanza tradicional basada fundamentalmente en sesiones magistrales ha evolucionado hacia un método docente que incentiva la participación del estudiante mediante la resolución de problemas. Sin embargo, en muchas ocasiones, la resolución de los problemas propuestos implica una repetición mecánica de las rutinas aprendidas, sin una adecuada orientación que garantice la participación consciente del estudiante en la adquisición del conocimiento.

En esta experiencia nos acercamos a la docencia de la asignatura de Estadística en los grados anteriormente mencionados con el objetivo de rediseñar nuevamente tanto el sistema de transmisión de contenidos como la evaluación de los conocimientos adquiridos. En concreto, nos proponemos la reestructuración de la asignatura bajo el paradigma del aprendizaje basado en problemas (ABP). Este método docente, donde el estudiante es protagonista de su propio aprendizaje, consiste en que los estudiantes de forma autónoma y en grupo, y guiados por el profesor, encuentren la solución a distintas situaciones prácticas que el profesor les plantea, de forma que completar las tareas encomendadas suponga tener que buscar, analizar, entender e integrar los conceptos básicos de la materia: terminología, principios, procedimientos y técnicas estadísticas. Al inicio del curso el estudiante no tendrá suficientes conocimientos y habilidades, pero, a lo largo del proceso de aprendizaje y a medida que se profundice en el programa de la asignatura, los estudiantes deberán ser capaces de descubrir qué conceptos, herramientas y estrategias de la Estadística necesitan conocer y aplicar para avanzar en la resolución de la cuestión propuesta. El profesor asume, pues, un rol de apoyo, entrenamiento y seguimiento de las dinámicas de aprendizaje del grupo para cerciorarse de que se consiguen los objetivos de aprendizaje marcados.

Se puede decir que el aprendizaje basado en problemas o proyectos de investigación fuerza al estudiante a dirigir su propio aprendizaje, desarrollando habilidades de organización, trabajo en equipo, manejo de la información y análisis crítico; destrezas relacionadas con el *aprender a aprender*. Además, esta metodología facilita la interdisciplinariedad y la integración de conocimiento, atravesando las barreras propias del conocimiento fragmentado en disciplinas y asignaturas. Para más información sobre esta metodología docente se puede consultar Benito y Cruz (2005).

La reestructuración de la asignatura de Estadística será llevada a cabo en dos cursos académicos:

**Fase I: Curso 2011-2012.** En este curso se ha introducido el aprendizaje basado en proyectos (ABP) en las clases prácticas y en los seminarios dirigidos. En relación a las clases de teoría también se ha iniciado una deriva hacia el ABP mediante el desarrollo y análisis de casos reales al final de cada tema.

**Fase II: Curso 2012-2013.** En esta fase se concluirá con la introducción del ABP también en las sesiones teóricas, en las que se tiene que seguir insistiendo en la adquisición de conceptos e instrumentos estadísticos mediante la resolución de casos prácticos, al final de cada tema, y de proyectos de investigación, que se plantearán al comienzo del curso y se irán resolviendo conforme se introduzcan nuevos conceptos y técnicas estadísticas.

En las secciones siguientes se detallan las acciones desarrolladas en la primera fase de nuestra experiencia. Concretaremos cómo se ha introducido el aprendizaje fundamentado en proyectos en las sesiones prácticas y seminarios dirigidos y señalaremos la importancia de los estudios de un caso para la adquisición de los conceptos teóricos: terminología y principios básicos de la estadística. También aportamos información sobre la valoración de los estudiantes en relación a los cambios introducidos en la estrategia docente, utilizando los datos del cuestionario que se aplicó al final del curso (ver Apéndice). Con esta encuesta se ha intentado medir si ha habido un cambio en la actitud de los estudiantes hacia la materia de Estadística, tanto en el aspecto del aprendizaje de contenidos como en su percepción respecto de la importancia y pertinencia de la misma en la titulación elegida.

## OBJETIVOS

Además de motivar el aprendizaje de los conceptos estadísticos que constituyen el temario de la asignatura de Estadística, los principales objetivos que pretendemos conseguir al rediseñar la misma son:

- Fomentar la capacidad de aplicación de los conocimientos teóricos mediante el análisis de casos reales, acercando así el trabajo que realizará el estudiante a lo que será su futuro quehacer profesional. La resolución de casos prácticos en el ámbito de la titulación será fundamental para mejorar la percepción de los estudiantes sobre la importancia de la asignatura de Estadística.

- Mostrar la posibilidad de aprender con la estadística; en este caso, aprender aspectos relacionados con los alimentos como, por ejemplo, su composición, propiedades, consumo, etc.
- Desarrollar las competencias transversales de trabajo en equipo, toma de decisiones y habilidades interpersonales.
- Aumentar las habilidades de investigación en las áreas concretas de los grados involucrados.

En definitiva, se quiere conseguir que el alumno aprenda analizando proyectos y trabajando con datos reales, no simplemente escuchando y repitiendo conceptos previamente introducidos. Se pretende que su actividad y trabajo en la asignatura de Estadística sean lo más parecidos posible a algunos de los que deberá desarrollar en su futura vida profesional.

Por otra parte, creemos que este nuevo enfoque del aprendizaje de la estadística ayudará a conseguir que desaparezcan las actitudes negativas que suelen ir asociadas a la docencia de las asignaturas de estadística, y también de matemáticas, cuando se imparten en otras titulaciones (véanse, por ejemplo, Muñoz-Goy, 2010; Vanhoff et al, 2011).

En nuestro contexto, no puede obviarse el hecho de que el Departamento de Estadística e Investigación Operativa obtiene puntuaciones por encima de la media de la Universitat de València en las encuestas de evaluación docente, en todos los ítems salvo en el ítem que pregunta sobre la “importancia de la asignatura en el contexto de la titulación”. Nuestra propuesta es, por tanto, una apuesta metodológica que en el caso de obtener resultados positivos podría ser exportada a otras titulaciones en las que la Estadística es también una asignatura de primer curso de grado.

## DESCRIPCIÓN DE LA EXPERIENCIA (FASE I)

En esta sección detallamos el paso de un modelo docente basado fundamentalmente en sesiones magistrales y sesiones de resolución de problemas (en clase y en el aula de informática) a un modelo mixto con sesiones expositivas, sesiones interactivas y sesiones prácticas orientadas al aprendizaje basado en problemas.

### Desarrollo de las sesiones prácticas

El trabajo en el aula de informática se estructuró como sigue:

- Presentación de proyectos e introducción al manejo de software específico para el análisis de datos (1 hora).
- Estadística descriptiva (1 hora).
- Inferencia estadística. Análisis de una muestra (2 horas).
- Inferencia estadística. Análisis de dos muestras (2 horas).
- Análisis de datos categóricos (2 horas).

Los proyectos con los que se trabajaron fueron:

Proyecto 1: *Análisis del valor nutritivo de las verduras congeladas.*

Proyecto 2: *Características nutricionales del pan de molde y tostado.*

El primer proyecto fue el hilo conductor del discurso que el docente utilizó para la orientación y la organización del trabajo a realizar. El segundo sirvió para el análisis y la reflexión de los estudiantes.

El docente mostró las posibilidades de adquisición de datos reales utilizando la información que presentan las marcas *Frudesa*®, *Bimbo*® y *Maheso*® en sus páginas web. A través de dichas páginas se pudo acceder a información sobre las características de sus productos (cantidad de carbohidratos, proteínas, kilocalorías, grasa, etc.). Este detalle sirvió de inicio para la reflexión sobre la constitución de la base de datos de cada uno de los proyectos. Así comenzó la primera sesión: elaboración de una base de datos en SPSS.

Las siguientes sesiones se iniciaron con la propuesta de algunos retos por parte del profesor como, por ejemplo, analizar qué cantidad promedio de proteínas presenta el pan de molde que tenemos a nuestra disposición en el mercado, o estudiar si el pan tostado tiene en promedio más grasa que el no tostado. Se ha comprobado cómo estas propuestas hacen que los alumnos-trabajando en grupo- concreten y analicen éstas y otras cuestiones generadas en el entorno del proyecto que se les ha encomendado. Al igual que en la primera sesión, los estudiantes dispusieron de material escrito (proporcionado por el profesor) detallando cómo utilizar SPSS para realizar el análisis estadístico requerido.

Al final de cada sesión, los alumnos elaboraron un pequeño informe con los logros obtenidos. Por su parte, el profesor finalizó las sesiones con el análisis de la base de datos del primer proyecto, el de las verduras congeladas que, como hemos comentado anteriormente, sirvió de hilo conductor. Es importante decir que esta reflexión final se realizó después de que los estudiantes hubieran investigado y trabajado en su propio proyecto, y no antes.

## **Desarrollo de los seminarios dirigidos**

Para el curso 2011-12 se propusieron dos temas de seminario relacionados con la asignatura de Estadística, cuyos títulos eran: “Estudio de los hábitos alimenticios de los estudiantes de la Facultad de Farmacia” y “Aplicación de técnicas estadísticas elementales para la exploración de una base de datos nutricional”. Cinco estudiantes del grado en Ciencia y Tecnología de los Alimentos y doce del grado en Nutrición Humana y Dietética decidieron realizar el seminario dirigido en el contexto de la asignatura de Estadística. En concreto, decidieron trabajar sobre el proyecto que exigía la exploración de una base de datos nutricional. Para ello, se les propuso trabajar con la Base de Datos Española de Composición de Alimentos-BEDCA (Agencia Española de Seguridad Alimentaria y Nutrición, Ministerio de Sanidad, Servicios Sociales e Igualdad, <http://www.bedca.es>) en la que se describen las características nutritivas de los alimentos más frecuentes en la dieta mediterránea.

Una vez detallado el objetivo de la investigación, los estudiantes concretaron la base de datos que utilizaron en el estudio (definida a partir de la base BEDCA) y realizaron los análisis que consideraron oportunos para la consecución del mismo. Al finalizar la tarea, los estudiantes entregaron una memoria con los resultados obtenidos y presentaron la investigación ante el resto de compañeros de clase. La memoria se presentó bajo el formato de introducción-metodología-resultados-conclusiones, similar a la de un artículo de investigación, y la presentación de la investigación se realizó utilizando *powerpoint*.

En todas las fases de la elaboración del proyecto de investigación, la retroalimentación que se produjo fue continua: diálogo estudiantes-profesores, reuniones periódicas para analizar los avances y discutir posibles estrategias de resolución, ensayos de la presentación, etc.

### Desarrollo de los estudios de un caso en las sesiones teóricas

El trabajo presencial en el aula se planteó utilizando sesiones expositivas e interactivas. Las sesiones expositivas tenían el apoyo de herramientas audiovisuales y de material complementario para los distintos temas (esquemas y resúmenes); dichas sesiones permitieron proporcionar al estudiante el marco conceptual de desarrollo de contenidos básicos de Estadística, imprescindible para dar respuesta a las cuestiones planteadas tanto en los estudios de un caso como en la resolución de problemas adicionales planteados en el aula.

Una parte importante de las clases interactivas se organizaron para discutir en grupo los estudios de un caso. Los datos reales en los que estaban basados estos problemas fueron recogidos del libro de Samuels et al (2012), en el que aparecen las referencias explícitas de los trabajos de investigación que dieron lugar a dichos datos. También se utilizaron algunas páginas de internet que presentan estudios de un caso en función de los diferentes conceptos estadísticos que se quieran analizar, véase por ejemplo: [http://onlinestatbook.com/case\\_studies\\_rvls/index.html](http://onlinestatbook.com/case_studies_rvls/index.html).

Los distintos casos propuestos se desarrollaron en relación con la temática general de las titulaciones en las que están matriculados nuestros estudiantes. Así, por ejemplo, se estudió el contenido proteico de la leche de vaca, la dependencia entre la tasa metabólica basal y la masa corporal, el rendimiento del trigo cultivado en parcelas, el contenido en grasas de diferentes tipos de pan de molde, el efecto de las dietas en la calidad de la carne de cerdo, la resistencia de cultivos a los ataques de parásitos, etc. Mediante la discusión en grupo, el profesor trató de detectar los posibles fallos de comprensión de los conceptos teóricos y prácticos que permitirían dar respuesta a las preguntas planteadas.

### Evaluación

La evaluación de las sesiones prácticas, a partir de los informes elaborados por los estudiantes al final de las mismas, constituyó el 5% de la nota; los informes individuales sobre los estudios de un caso propuestos en cada tema representó el 15% de la nota;

la evaluación de los seminarios dirigidos constituyó el 10% de la nota y el examen final escrito constituyó el 70% de la nota final.

Cabe destacar que, después de la corrección de cada informe (teórico o práctico) por parte del profesor, se realizó una tutoría de seguimiento para clarificar de forma individual y en grupo los contenidos y conceptos adquiridos en cada tema. Respecto a los seminarios dirigidos, los propios compañeros valoraron tanto la importancia del tema estudiado como la presentación y defensa de los resultados obtenidos, por lo que una parte de esa calificación incluía los resultados de la co-evaluación de los estudiantes. Hay que destacar que la nota del seminario dirigido (10%) se incorpora como tal en las calificaciones de todas las materias del semestre. El examen escrito pedía la resolución de cuatro estudios de un caso, similares a los que se habían trabajado durante el curso.

## VALORACIÓN DE LA EXPERIENCIA (FASE I)

Para permitir que los estudiantes evaluaran la bondad de la experiencia, se trabajó con una adaptación del cuestionario propuesto por Darias (2000). Dicho cuestionario (presentado en el Apéndice de este trabajo) fue planteado a los estudiantes de las dos titulaciones, que respondieron al mismo de forma anónima al final del curso; los resultados del análisis estadístico se presentan a continuación. Asimismo, hemos comparado las calificaciones obtenidas por los estudiantes de los grupos involucrados en esta primera fase de la experiencia (curso 2011-2012) con las calificaciones de los cursos 2009-2010 y 2010-2011.

### Respecto de la importancia de la asignatura

Aunque se considera que la asignatura no es la más importante para su futuro desarrollo profesional (ítem 5), los estudiantes admiten que la asignatura es necesaria en su formación como científicos (ítem 1). Además, piensan que la adquisición de habilidades en el análisis de la información (análisis de datos) puede ser un hecho determinante para su futuro desarrollo profesional (ítem 4). Como se observa en la Tabla 1, sólo el 25% de los estudiantes encuestados manifiestan su desacuerdo con esta concepción definida a partir de los tres ítems señalados. En los tres ítems, el percentil 25 es igual a 3 (3: neutral, ni de acuerdo ni en desacuerdo).

		Ítem 1	Ítem 2	Ítem 3	Ítem 4	Ítem 5	Ítem 6	Ítem 7	Ítem 8
Media		<b>3,49</b>	2,62	3,04	<b>3,63</b>	<b>4,00</b>	2,38	2,99	2,77
Percentiles	25	<b>3,00</b>	2,00	2,00	<b>3,00</b>	<b>3,00</b>	2,00	2,00	2,00
	50	<b>4,00</b>	3,00	3,00	<b>4,00</b>	<b>4,00</b>	2,00	3,00	3,00
	75	<b>4,00</b>	3,00	4,00	<b>4,00</b>	<b>5,00</b>	3,00	4,00	3,00

Tabla 1: Resultados sobre la importancia de la asignatura

## Respecto de la actitud ante la asignatura

Antes de analizar las valoraciones de los ítems relacionados con la actitud ante la asignatura (ítems 9-26), se realiza un análisis factorial de componentes principales con rotación varimax. El objetivo es reducir la dimensión de la escala y detectar factores que permitan la mejor comprensión de la información. Los resultados del análisis factorial se presentan en la Tabla 2. El índice de Kaiser-Meyer-Olkin (KMO) resultó ser igual a 0,667 y los resultados de la prueba de esfericidad de Barlett fueron los siguientes:  $\chi^2=325,90$ ; g.l.=36; p-valor<0.01. La varianza total explicada es del 75,13%.

Como se observa en la Tabla 2, se consigue una solución factorial basada en tres dimensiones, o factores, y nueve ítems:

Factor 1 (*Deseo de saber*). Este factor, o dimensión, está definido por los ítems 13, 14, 23 y 24. Como se puede comprobar, se trata de ítems que recogen la motivación hacia el conocimiento.

Factor 2 (*Respuesta ante las sesiones prácticas*). Los ítems que definen esta dimensión son los siguientes: ítem 15, ítem 17 e ítem 25. En este caso, son ítems que recogen la respuesta de los estudiantes ante las sesiones prácticas.

Factor 3 (*Respuesta ante las sesiones teóricas*). Son los ítems 10 y 16 los que dan sentido al tercer factor. Como se puede comprobar, son los ítems que miden la respuesta de los estudiantes ante las sesiones teóricas.

En aras de encontrar una estructura de factores robusta y consistente, y siguiendo la propuesta de Hair et al. (2004), se consideró excluir los ítems que no saturasen, en su factor de pertenencia, por encima de 0,60. Así mismo, también se rechazaron los ítems que no alcanzaran una comunalidad mínima de 0,60.

Ítems	Factor 1	Factor 2	Factor 3	Comunalidad
13	0,858			0,781
14	0,818			0,756
23	0,725			0,608
24	0,827			0,784
15		0,848		0,786
17		0,878		0,794
25		0,684		0,598
10			0,908	0,867
16			0,743	0,789
Varianza	34,72%	28,56%	11,85%	
Homogeneidad	0,827	0,784	0,750	
Varianza global de la escala	75,13%			
Homogeneidad global de la escala	0,659			

Tabla 2: Resultados del análisis factorial

Analizando los resultados de los ítems de cada uno de los factores (ver Tabla 3), observamos que los estudiantes manifiestan voluntad de adquirir más conocimientos estadísticos (ítems 13 y 14), aunque no consideran oportuno matricularse en más cursos de estadística (ítems 23 y 24). Los valores medios de los ítems 13, 14, 23 y 24 son, respectivamente, 3,10; 3,12; 2,37 y 2,34.

		Ítem 13	Ítem 14	Ítem 23	Ítem 24	Ítem 15	Ítem 17	Ítem 25	Ítem 10	Ítem 16
<b>Media</b>		3,10	3,12	2,37	2,34	2,55	2,74	2,62	2,66	2,64
<b>Percentiles</b>	<b>25</b>	3,00	3,00	1,00	1,50	2,00	2,00	2,00	2,00	2,00
	<b>50</b>	3,00	3,00	2,00	2,00	2,00	2,00	2,00	2,00	2,00
	<b>75</b>	4,00	4,00	3,00	3,00	3,00	4,00	3,00	3,00	3,00

Tabla 3: Resultados sobre la actitud ante la asignatura

De la misma manera, los estudiantes señalan su interés por las sesiones prácticas (percentil 75 del ítem 25 es igual a 3) y manifiestan que ni las sesiones prácticas ni las teóricas, tal y como se han concebido en el curso, suponen una dificultad para ellos (ítems 15, 17, 10 y 16). En estos cuatro ítems, el percentil 50 es igual a 2 y el percentil 75 igual a 3. Por lo tanto, se puede decir que se manifiestan seguros y sin temores respecto de la asignatura.

### Percepción global sobre la utilidad de la Estadística

Los estudiantes manifiestan que su percepción sobre la utilidad de la asignatura ha mejorado después de cursarla. Sólo el 25% de los estudiantes se pronuncian en contra de esta afirmación (percentil 25 del ítem 27 es 3).

Un análisis de correspondencias múltiples (ver Figura 1) nos ayuda a ver qué perfil presenta el estudiante que manifiesta que su percepción sobre la estadística ha mejorado después del curso. Como se puede ver en el área señalada, se trata de estudiantes que consideran que la estadística puede ser determinante en el desarrollo de su profesión y que se manifiestan seguros y capaces ante la asignatura.

Cabe destacar que en todos los estudios consultados, en los que se ha utilizado un cuestionario similar para analizar las componentes que constituyen la actitud de los estudiantes ante la Estadística (Darias, 2000; Tejero y Castro, 2011; Méndez y Macía, 2007), se detecta que el componente que mejor explica el constructo ‘actitud ante la estadística’ es el que se define como la ansiedad/calma que se produce en el aprendizaje de la Estadística, o la seguridad/inseguridad respecto a la capacidad ante las tareas propias de la disciplina, es decir, lo que nosotros hemos definido como ‘respuesta del estudiante ante las sesiones prácticas o teóricas’. En nuestro caso, detectamos que la concepción que se le ha dado a la asignatura provoca que la ‘actitud de los estudiantes ante la Estadística’

venga determinada por su interés por profundizar en el conocimiento de la misma y no por sus temores e inseguridades.

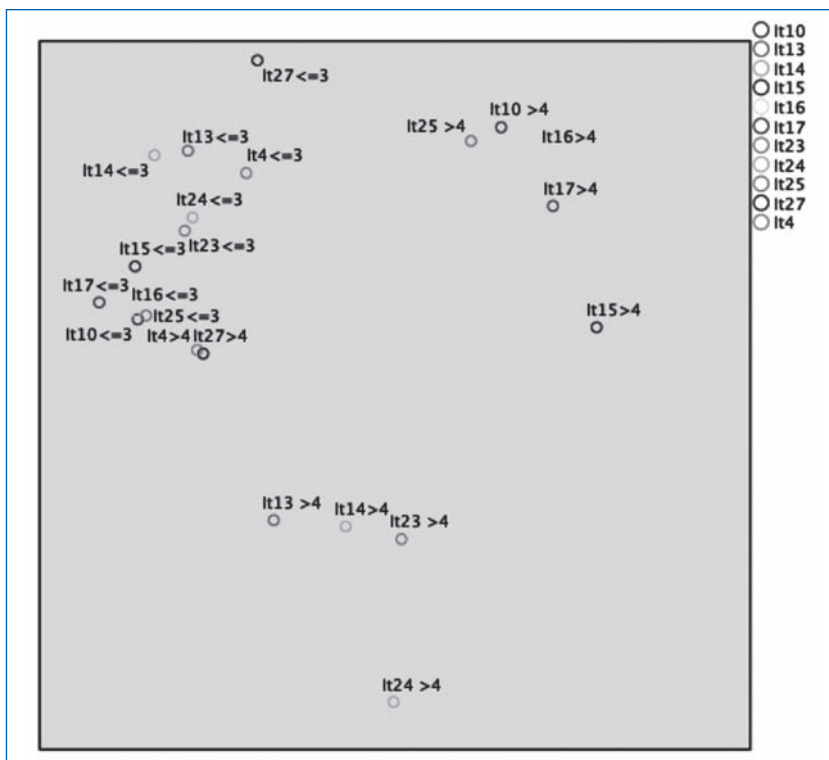


Figura 1: Percepción sobre la Estadística según perfiles de estudiantes

## Comparación de resultados

En este apartado presentamos el análisis estadístico de los resultados obtenidos por los estudiantes matriculados en los grupos en los que hemos aplicado la primera fase de esta experiencia de innovación (grupo del experimento: GE), en la primera convocatoria de la asignatura de Estadística del curso 2011-2012, frente a los resultados obtenidos por los estudiantes de los cursos 2009-2010 y 2010-2011 (grupo control: GC), también en la primera convocatoria de la asignatura de Estadística.

La Tabla 4 presenta un resumen de los resultados obtenidos por los grupos GC y GE con respecto a dos situaciones de interés: presentarse o no a los exámenes de la primera convocatoria y los que superan la asignatura o los que la suspenden, de entre los presentados.

Se ha realizado un test de la Ji-cuadrado para las dos tablas de datos anteriores y en ambos casos se ha rechazado la hipótesis nula de homogeneidad de resultados en los grupos GC y GE, con un p-valor de 0.004 para la tabla de la izquierda y de 0.032 para la de la derecha.

	GC	GE		GC	GE
Presentados	131	95	Suspenden	46	20
No presentados	96	34	Superan conv.	85	75

Tabla 4: Resultados obtenidos por los grupos GE y GC

Con respecto a la tendencia que presentan tanto la proporción de no presentados como la evolución de los resultados numéricos obtenidos por los estudiantes en los cursos analizados, pueden consultarse las Figuras 2 y 3, en donde los resultados correspondientes al GC para los cursos 2009-10 y 2010-11 han sido desagregados. (*Véanse fig. 2 y 3*).

También en este caso, y a la luz de los resultados obtenidos, parece aconsejable continuar con la experiencia planteada de reestructuración de la asignatura de Estadística.

## PLANIFICACIÓN DE LA FASE II

En el próximo curso, se quiere concretar el proceso de adaptación de la asignatura con la introducción del ABP en la presentación de los conceptos, es decir, en las llamadas sesiones de teoría. Para ello, se diseñará la asignatura bajo el hilo conductor de un proyecto, por ejemplo, el *Análisis del valor nutricional de las verduras congeladas*, el cual servirá para la presentación del concepto de población (todos los productos disponibles en el mercado) y muestra (los que consideramos para el estudio), introducción de conceptos básicos de estadística descriptiva (mediante el estudio, por ejemplo, de la cantidad de proteínas que presentan los productos contenidos en la base de datos) e inferencia estadística (considerando, por ejemplo, el estudio de la cantidad promedio de proteínas en distintas marcas que comercializan verduras congeladas). Todo ello acompañado de un análisis pormenorizado de los estudios de un caso de cada tema, pues entendemos que permiten dar una amplia perspectiva de los diferentes campos y contextos en los que la Estadística es útil e importante para el diseño y análisis de los resultados de un experimento.

Pretendemos realizar todas las tareas con el software libre R, bajo su interfaz R-Commander. Esta interfaz gráfica, que cubre las necesidades básicas de cualquier usuario de técnicas estadísticas, permite trabajar en el entorno R sin que el usuario tenga que conocer el lenguaje de comandos propios de este entorno. Las instrucciones de uso del programa serán incluidas como material complementario en las notas de clase, que constituirán el libro de apoyo para el seguimiento adecuado de la asignatura.

Finalmente, será fundamental el diseño de una estrategia de evaluación acorde con la nueva metodología docente. El sistema de evaluación que se piensa diseñar para la asignatura contemplará la evaluación de la adquisición de destrezas en la aplicación de la Estadística a la práctica científica, tanto de manera individual (estudios de un caso) como en equipo (proyectos) y el desarrollo de las competencias transversales (habilidades interpersonales, pensamiento crítico, etc.).

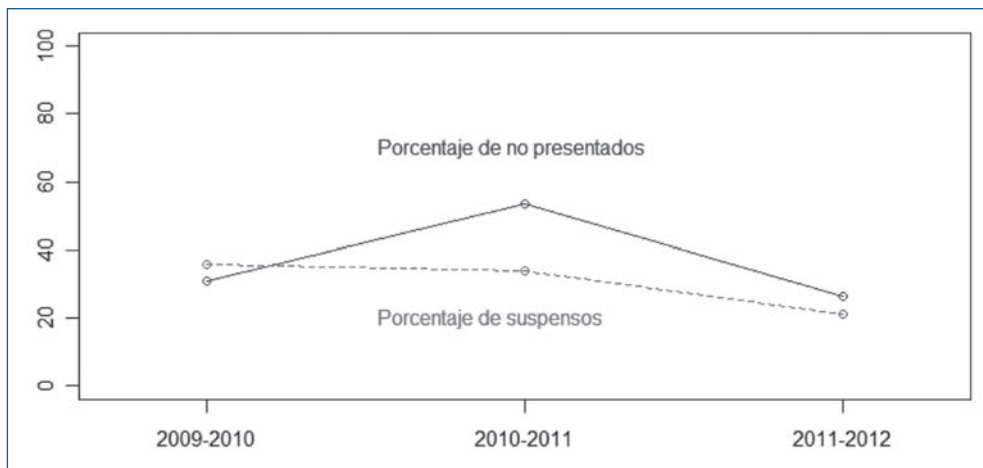


Figura 2: Evolución de los porcentajes de no presentados y suspensos

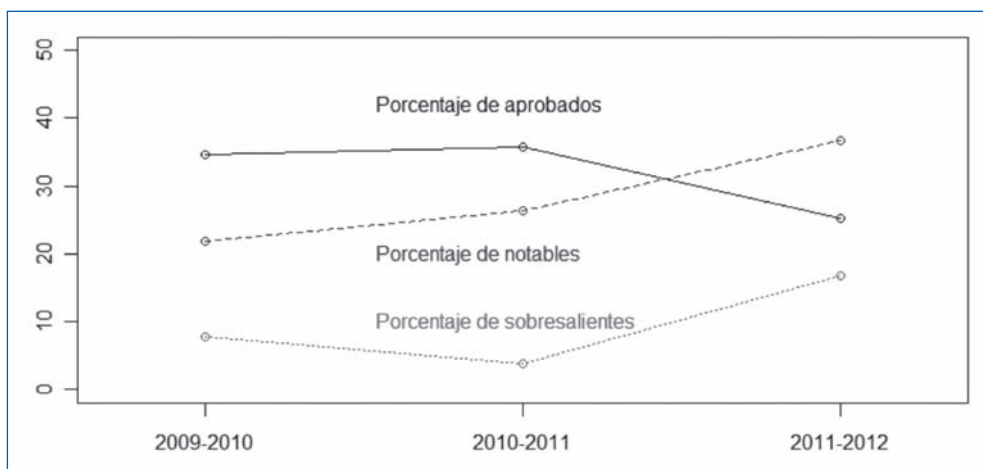


Figura 3: Evolución de las calificaciones de los estudiantes presentados en la 1ª convocatoria de la asignatura de Estadística

## CONCLUSIONES

Como se puede comprobar, la dinámica adoptada con la propuesta de desarrollar la asignatura de Estadística en base a proyectos de investigación exige de la reflexión y la toma de decisiones por parte de los alumnos sobre:

- Las variables relevantes que contiene el problema.
- Las diferentes alternativas de análisis para abordar la investigación.

- La planificación de las tareas a desarrollar en función de la alternativa elegida.
- La evaluación del proceso de resolución.

Se observó que los proyectos planteados se alejan de una aplicación mecánica de rutinas aprendidas, es decir, se alejan de los ejercicios con problemas bien definidos para cuya resolución es suficiente realizar una secuencia de acciones siguiendo una aplicación rutinaria.

Esta claro que esta metodología docente implica un esfuerzo mayor por parte del profesorado: mayor dedicación al conocimiento de recursos de contextualización de la asignatura en el programa (o título de grado) donde está inscrita; mayor dedicación a la supervisión del aprendizaje de los alumnos, a la revisión de informes, a las reuniones de planificación, a las reuniones de retroalimentación, etc. Pero, como hemos visto en la sección anterior, el esfuerzo merece la pena.

**Agradecimientos.** La segunda fase de este proyecto se realizará con una ayuda de la Universitat de València para Proyectos de Innovación Educativa 2012/13, programa “Finestra Oberta”, código UV-SFPIE\_DOCE12-80948.

## REFERENCIAS

- Benito, A. y Cruz, A. (2005). *Nuevas claves para la Docencia Universitaria en el Espacio Europeo de Educación Superior*. Madrid: Narcea.
- Darias, E.J. (2000). Escala de actitudes hacia la estadística. *Psicothema*, 12(2), 175-178.
- Hair, J. F., Anderson, R.E., Tatham, R.L. y Black, W.C. (2004). *Análisis multivariante*. Madrid: Pearson.
- Méndez, D. y Macía, F. (2007). Análisis factorial confirmatorio de la escala de aptitudes hacia la Estadística. *Cuadernos de Neuropsicología*, 3(1), 174-371.
- Muñoz-Goy, C. (2010). *Valoración del cambio de estrategia docente en una asignatura de Estadística para Ciencias Sociales*. VII Jornadas Internacionales de Innovación Universitaria. Universidad Europea de Madrid.
- Samuels, M.L. (1989). *Statistics for the Life Sciences*. San Francisco: Dellen.
- Samuels, M.L., Witmer, J.A. y Schaffner, A.A. (2012). *Statistics for the Life Sciences*, 4ª edición. Boston: Pearson.
- Tejero, C. M. y Castro, M. (2011). Validación de la escala de actitudes hacia la Estadística en estudiantes españoles de Ciencias de la Actividad Física y el Deporte. *Revista Colombiana de Estadística*, 34(1), 1-14.
- Vanhoff, S., Kuppens, S., Castro Sotos, A. E., Verschaffel, L. y Onghena, P. (2011). Measuring statistics attitudes: structure of the survey of attitudes towards statistics. *Statistics Education Research Journal*, 10, 35-51.

## PÁGINAS WEB:

Base de Datos Española de Composición de Alimentos-BEDCA. Agencia Española de Seguridad Alimentaria y Nutrición, Ministerio de Sanidad, Servicios Sociales e Igualdad, <http://www.bedca.es>

Rice Virtual Lab in Statistics. Case Studies (D. M. Lane), [http://onlinestatbook.com/case\\_studies\\_rvls/index.html](http://onlinestatbook.com/case_studies_rvls/index.html)

## APÉNDICE

### Cuestionario facilitado a los estudiantes

Las siguientes afirmaciones han sido elaboradas de forma que te permitan indicar hasta qué punto estás de acuerdo o en desacuerdo con las ideas aquí expresadas. Debes rodear con un círculo, según tu grado de acuerdo o de desacuerdo con la afirmación correspondiente, uno de los siguientes cinco números:

1. Totalmente en Desacuerdo
2. En Desacuerdo
3. Neutral, ni de acuerdo ni en desacuerdo
4. De Acuerdo
5. Totalmente de Acuerdo

### Importancia de la Estadística

1. Considero que la Estadística es una materia muy necesaria en mi carrera.	1 2 3 4 5
2. La Estadística no presenta utilidad práctica para el profesional medio.	1 2 3 4 5
3. La Estadística puede ser útil para el que se dedique a la investigación pero no para el profesional medio.	1 2 3 4 5
4. Saber utilizar la Estadística incrementará mis posibilidades de trabajo.	1 2 3 4 5
5. Para el desarrollo profesional de nuestra carrera considero que existen otras asignaturas más importantes que la Estadística.	1 2 3 4 5
6. Para el desarrollo profesional de mi carrera una de las asignaturas más importantes que ha de estudiarse es la Estadística.	1 2 3 4 5
7. Espero tener que utilizar poco la Estadística en mi vida profesional.	1 2 3 4 5
8. Me gustaría tener una ocupación en la cual tuviera que utilizar la Estadística.	1 2 3 4 5

### Actitud hacia la Estadística

9. La Estadística, tal y como se concibe en las sesiones prácticas, se me da bastante mal.	1 2 3 4 5
10. La Estadística, tal y como se concibe en las sesiones teóricas, se me da bastante mal.	1 2 3 4 5
11. El estudiar o trabajar con la Estadística, <i>tal y como se concibe en las sesiones prácticas</i> , no me asusta en absoluto.	1 2 3 4 5
12. El estudiar o trabajar con la Estadística, <i>tal y como se concibe en las sesiones teóricas</i> , no me asusta en absoluto.	1 2 3 4 5
13. Quiero llegar a tener un conocimiento más profundo de la Estadística, <i>tal y como se concibe en las sesiones prácticas</i> .	1 2 3 4 5
14. Quiero llegar a tener un conocimiento más profundo de la Estadística, <i>tal y como se concibe en las sesiones teóricas</i> .	1 2 3 4 5
15. La Estadística, <i>tal y como se concibe en las sesiones prácticas</i> , es una de las asignaturas que más temo.	1 2 3 4 5
16. La Estadística, <i>tal y como se concibe en las sesiones teóricas</i> , es una de las asignaturas que más temo.	1 2 3 4 5
17. Cuando me enfrento a una tarea propuesta <i>en las sesiones prácticas</i> me siento incapaz de pensar con claridad.	1 2 3 4 5
18. Cuando me enfrento a una tarea propuesta <i>en las sesiones teóricas</i> me siento incapaz de pensar con claridad.	1 2 3 4 5
19. Estoy calmado/a y tranquilo/a cuando me enfrento a una tarea propuesta <i>en las sesiones prácticas</i> .	1 2 3 4 5
20. Estoy calmado/a y tranquilo/a cuando me enfrento a una tarea propuesta <i>en las sesiones teóricas</i> .	1 2 3 4 5
21. La Estadística, <i>tal y como se concibe en las sesiones prácticas</i> , es agradable y estimulante para mí.	1 2 3 4 5
22. La Estadística, <i>tal y como se concibe en las sesiones teóricas</i> , es agradable y estimulante para mí.	1 2 3 4 5
23. Si tuviera oportunidad me inscribiría en más cursos de Estadística, <i>tal y como se concibe en las sesiones prácticas</i> , de los que son necesarios.	1 2 3 4 5
24. Si tuviera oportunidad me inscribiría en más cursos de Estadística, <i>tal y como se concibe en las sesiones teóricas</i> , de los que son necesarios.	1 2 3 4 5
25. La materia, <i>tal y como se imparte en las sesiones prácticas</i> de la asignatura de Estadística, es muy poco interesante.	1 2 3 4 5
26. La materia, <i>tal y como se imparte en las sesiones teóricas</i> de la asignatura de Estadística, es muy poco interesante.	1 2 3 4 5

### Utilidad de la Estadística

27. Mi percepción sobre la utilidad de la Estadística ha mejorado después de asistir a las clases impartidas durante este curso.	1 2 3 4 5
--	-----------



## Las matemáticas de la violencia de género

**María Boyano de la Fuente**

*I.E.S. Mar del Sur. San Roque, Cádiz.*

**Resumen:** *Con motivo del día contra la Violencia de Género, y como parte de las actividades realizadas dentro del Plan de Igualdad del Centro, se han realizado varios estudios estadísticos en el I. E. S. La Laguna, de El Padul, Granada, con alumnas y alumnos de 1º de E.S.O. cuyo punto de partida han sido las víctimas del año 2010.*

**Términos Clave:** *violencia de género, víctimas, estudios estadísticos, matemáticas*

## Mathematics and gender violence

**Summary:** *On the Day against Gender Violence, and as part of the activities of the Equality Plan of the Center, some statistical studies have been made at IES La Laguna, El Padul, Granada, with students of 1º ESO, whose starting point was the victims of 2010.*

**Keywords:** *Gender violence, statistical studies, victims, mathematics.*

### DESCRIPCIÓN

Hoy en día, a pesar del trabajo que se está haciendo y de los avances que poco a poco se van consiguiendo, seguimos viviendo en una sociedad en la que la figura del hombre sigue estando por encima de la de la mujer. Es por eso por lo que desde la asignatura de matemáticas, y con motivo de la jornada contra la violencia de género, se ha intentado que las alumnas y los alumnos se involucren en conseguir un cambio en el mundo en el que no sea un peligro el mero hecho de ser mujer. Partiendo del recuerdo de las víctimas, se ha aprovechado para hacer una pequeña incursión en el campo de la estadística, parte del currículum que, por falta de tiempo, no se suele tratar en 1º de E.S.O.

A la hora de planear las diferentes actividades que iban a realizarse para el 25 de Noviembre, propuse el análisis de la procedencia de las distintas víctimas y el número de asesinatos cometidos por mes. Para poder llevar a cabo el estudio, se necesitaba información sobre las víctimas: nombre, procedencia, edad, fecha y forma de morir. Después de consultar varias páginas, se consideró más completa y acorde con la actividad la información aparecida en <http://ibasque.com/mujeres-muertas-en-espana-por-violencia-machista/>.

Para empezar, se repartieron fichas con los datos de las víctimas hasta la fecha del trabajo a los alumnos y a las alumnas. El reparto se hizo, por orden de lista, al alumnado de dos grupos de primero de la E.S.O. Todas las alumnas y alumnos recibieron dos fichas. Al haber más fichas que alumnado, para que trabajaran por igual, se contó con la ayuda de las alumnas y alumnos del aula de Educación Especial de 2º de E.S.O. (Hasta la fecha de realización del trabajo había ya 73 víctimas). A continuación, se les repartieron dos cartulinas de colores en las que tendrían que escribir a color la información de las fichas y se les indicó que dejaran margen suficiente a la izquierda para colocar el número de víctima.

Las primeras reacciones de las alumnas y de los alumnos al leer el modo de morir de las víctimas fueron de asombro y de repulsa, lo que les animó a realizar los carteles con mucho entusiasmo.

Como ya se habían estudiado en el primer tema los números decimales y los números romanos, los alumnos y las alumnas tuvieron que expresar los números que les habían sido asignados en ambos sistemas de numeración. Una parte del alumnado dibujó los números (cuando no tenían muchos dígitos) y otra parte los recortó en cartulina.

Una vez terminadas las cartulinas, fueron colgadas a lo largo del pasillo de la planta baja del centro.

El siguiente paso del estudio era contabilizar las víctimas por provincias y autonomías, así como los meses en que se habían producido. Para ello, haciendo uso de la pizarra digital, se elaboraron tablas en la hoja de cálculo Calc y se fueron rellenando. Aquí nos encontramos con la dificultad añadida de tener que enseñar a manejar lo básico en la hoja de cálculo. Apoyándonos en la pizarra digital, y aprovechando que el alumnado de 1º de E.S.O. tenía los portátiles desde el curso anterior, se les indicó paso a paso cómo elaborar tablas, darles formato y calcular sumas y porcentajes. Se crearon varias tablas: Número de víctimas por Comunidad Autónoma, número de víctimas por Provincia y número de víctimas por mes. Se les indicó que las variables que se iban a utilizar eran cuantitativas, ya que se iba a considerar el número de víctimas, no las cualidades que tuvieran estas. (*Véase pág. 82-83*).

Una vez hechas las tablas, se les explicó en qué consistía la frecuencia y qué representaba el porcentaje calculado. Con los porcentajes por delante se les preguntó si estaba relacionado el número de víctimas con el número de habitantes en cada comunidad autónoma y si se cumplía que a mayor número de habitantes, mayor número de asesinatos.

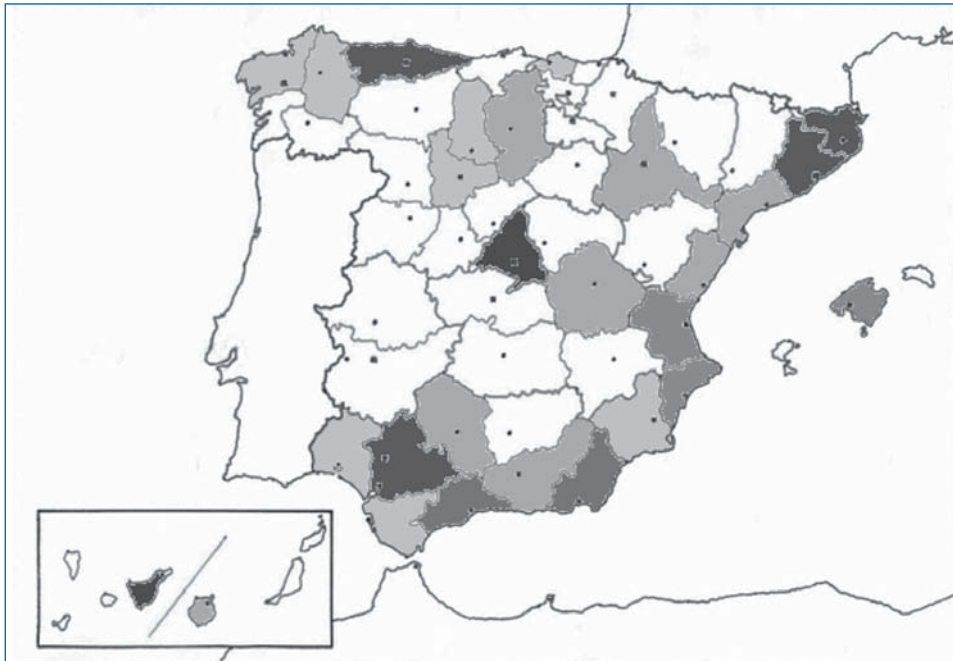
El siguiente paso fue la explicación y realización de gráficos con la hoja de cálculo. Para este estudio se crearon tanto diagramas de barras como de sectores. Previamente, se les explicaron los conceptos de ejes de coordenadas y representación de puntos para saber interpretar los gráficos que iban a construir. Se realizaron dos gráficos para cada una de las tablas. Para las víctimas por provincias, evitando que fueran demasiados datos en una misma tabla y no se vieran bien, se optó por elaborar una nueva tabla en la que se relacionaran las provincias y el número de víctimas. (*Véase pág. 81-83*).

Para completar el estudio, se realizaron cartogramas. Utilizando dos mapas mudos de España, uno por comunidades y otro por provincias, se colorearon con distintas

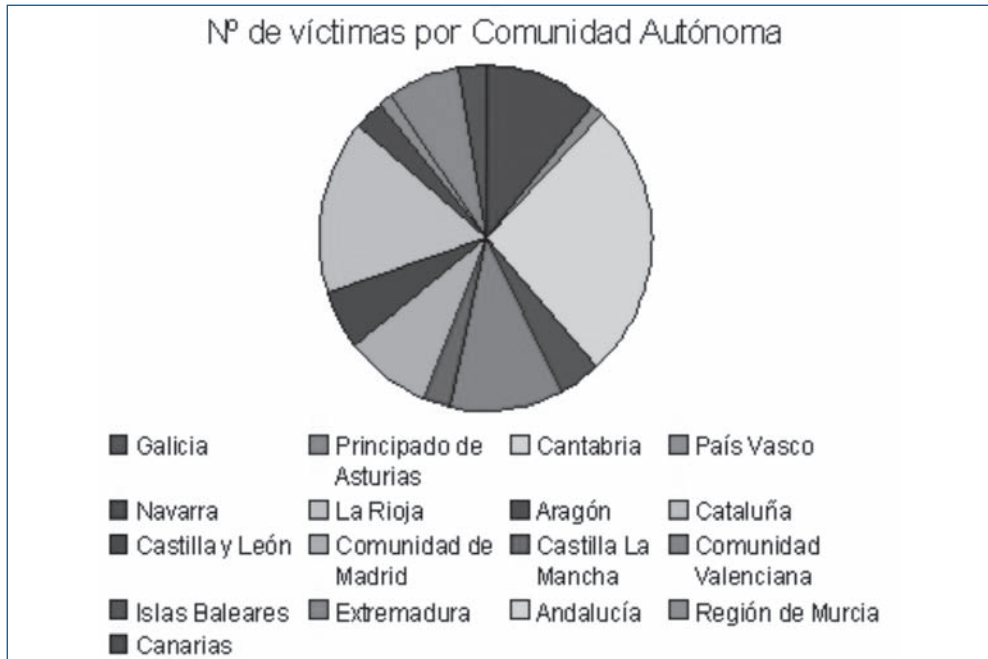


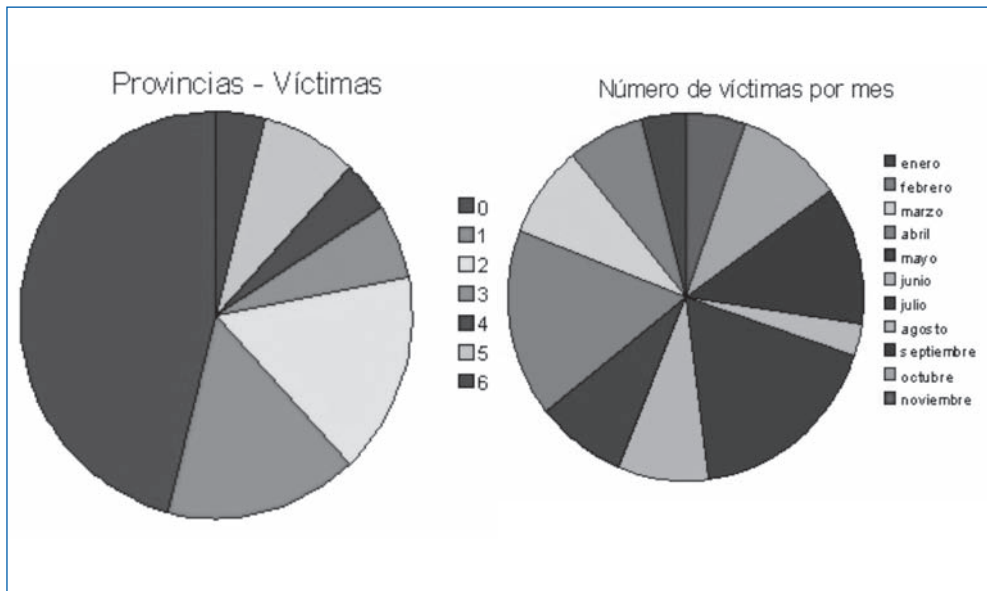
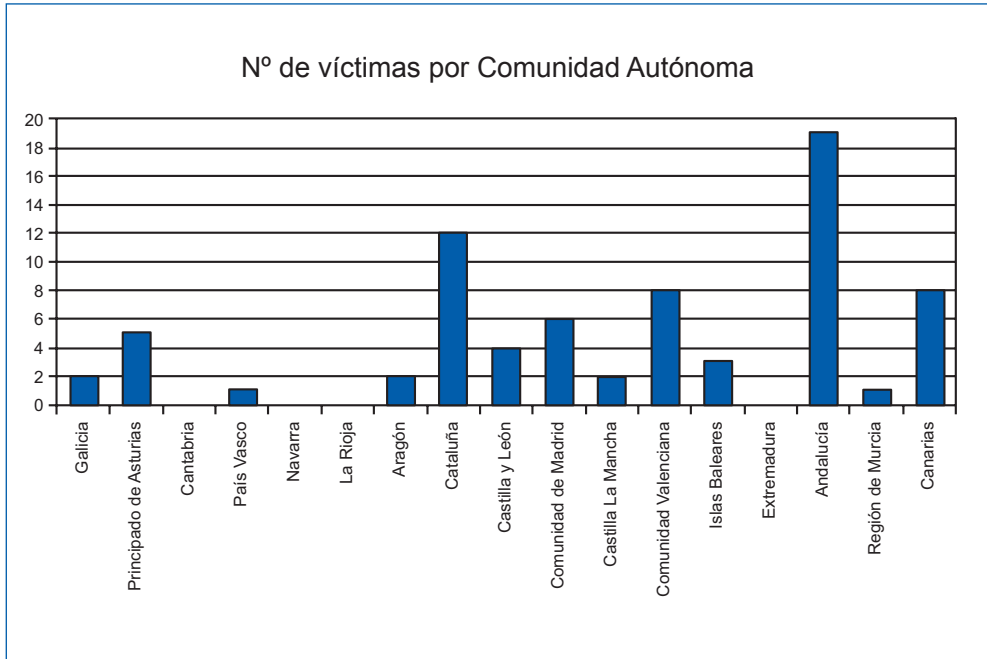
tonalidades de morado, en función del número de víctimas. Para ello se utilizó el programa de manipulación de imagen Gimp, que tenían en sus portátiles, por lo que hubo que darle unas nociones mínimas para que pudieran utilizarlo. Para realizar esta parte hubo

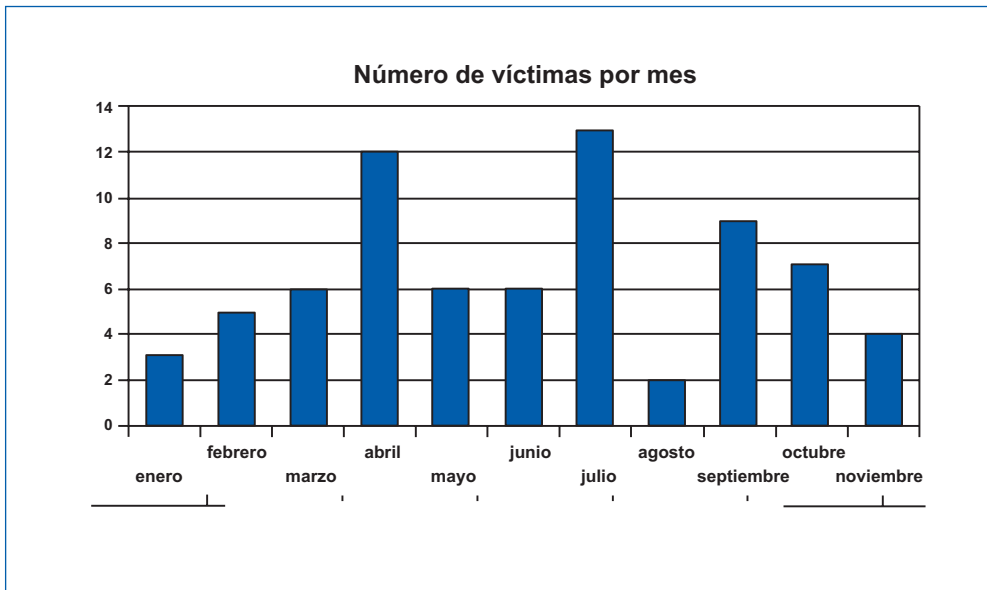
Nº de víctimas a fecha de 14/11/2010				
Comunidades Autónomas	Nº de víctimas	Porcentaje	Población	Porcentaje
Galicia	2	2,74%	2.797.653	5,96%
Principado de Asturias	5	6,85%	1.084.341	2,31%
Cantabria	0	0,00%	592.250	1,26%
País Vasco	1	1,37%	2.178.339	4,64%
Navarra	0	0,00%	636.924	1,36%
La Rioja	0	0,00%	322.415	0,69%
Aragón	2	2,74%	1.347.095	2,87%
Cataluña	12	16,44%	7.512.381	16,00%
Castilla y León	4	5,48%	2.559.515	5,45%
Comunidad de Madrid	6	8,22%	6.501.717	13,85%
Castilla La Mancha	2	2,74%	2.098.373	4,47%
Comunidad Valenciana	8	10,96%	5.111.706	10,89%
Islas Baleares	3	4,11%	1.106.049	2,36%
Extremadura	0	0,00%	1.107.220	2,36%
Andalucía	19	26,03%	8.415.490	17,92%
Región de Murcia	1	1,37%	1.461.979	3,11%
Canarias	8	10,96%	2.118.519	4,51%
<b>TOTAL</b>	<b>73</b>	<b>100,00%</b>	<b>46.951.966</b>	<b>100,00%</b>

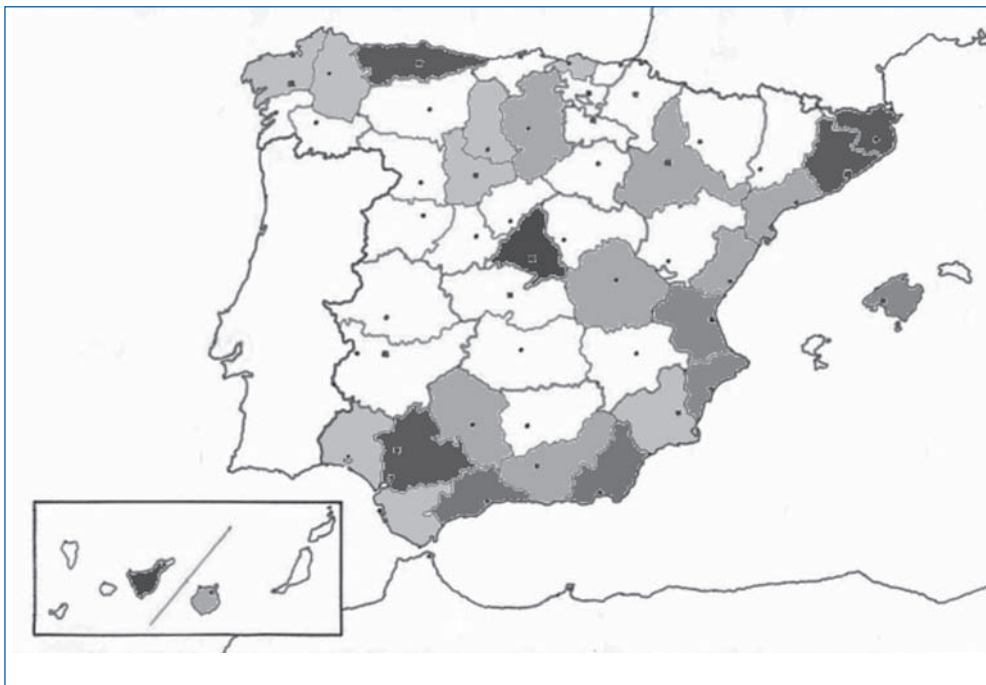
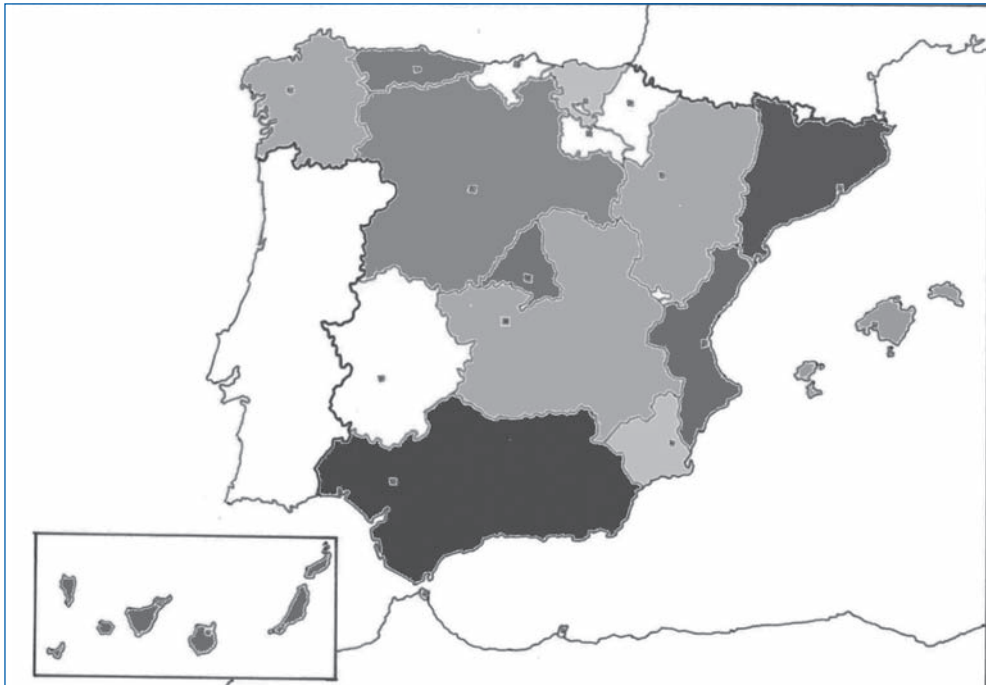


Mes	Nº víctimas	Porcentaje
enero	3	4,11%
febrero	5	6,85%
marzo	6	8,22%
abril	12	16,44%
mayo	6	8,22%
junio	6	8,22%
julio	13	17,81%
agosto	2	2,74%
septiembre	9	12,33%
octubre	7	9,59%
noviembre	4	5,48%
	73	1









una parte del alumnado que tuvo que consultar los nombres de las comunidades y provincias, ya que aún no lo habían estudiado ese año y no lo recordaban de anteriores. (Véase pág. 84).

**Conclusiones:** Mientras duró el estudio, los alumnos y las alumnas comentaban los distintos casos con compañeros y compañeras que no estaban realizando la actividad. Durante el tiempo en que estuvieron los carteles expuestos asistió bastante público, tanto alumnado del centro como padres, madres y vecinos y vecinas del pueblo.

La actividad sirvió para que se dieran cuenta de que todos y todas somos iguales y que nadie debe ser maltratado bajo ningún concepto.

A partir de los porcentajes, llegaron a la conclusión de que no tiene por qué ocurrir siempre como este año, ya que hombres que cometen este tipo de asesinatos, desgraciadamente, pueden aparecer en cualquier lugar y en cualquier momento.

Termino con una cita de Pitágoras: Educad a los niños y no será necesario castigar a los hombres.

## **REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS:**

- Red Feminista (2010). Mujeres asesinadas es España por violencia machista en 2010. Fuente: Red Feminista, CIMTM, C. Reina Sofía y diarios locales. Recuperado el 14 de Noviembre de 2010, de <http://ibasque.com/mujeres-muertas-en-espana-por-violencia-machista/>
- N.D. (2010). Mapas mudos de España por Comunidades Autónomas y Provincias. Recuperados el 10 de Noviembre de 2010, de <https://picasaweb.google.com/117512293819530603904/Mapas>



## Una experiencia docente en estadística. Análisis comparativo licenciatura- grado

M<sup>a</sup> Isabel López Rodríguez

Antonia Ivars Escortell

Félix Ruiz Ponce

*Departamento de Economía Aplicada*

*Universidad de Valencia*

**Resumen:** Desde el curso 2007-2008, se ha desarrollado una actividad grupal en la asignatura Estadística II (Programa Innovación Educativa) titulación de ADE-Derecho. El objetivo de ésta ha sido el trabajo de algunos temas y ejercitar las competencias de trabajo en grupo, capacidad organizativa y comunicativa.

*En el curso 2011-2012 se ha impartido la asignatura citada en 2º curso del Doble Grado y en 3er curso de la Doble Licenciatura.*

*El trabajo que se presenta analiza si existen diferencias significativas en los resultados académicos entre ambas titulaciones y estudia el efecto de la asistencia/ausencia de los estudiantes a la actividad grupal.*

**Palabras clave:** Innovación educativa, trabajo en grupo, análisis comparativo, resultados académicos

### A teaching experience on statistics: the group activity

**Abstract:** Since the academic year 2007-2008 a group activity has been performed in the framework of an Innovative Educational Program for the Statistics II subject of the ADE-Derecho degree. It aims for the development of different skills as working in a group or communicative and organizing capabilities.

*The Statistics II subject has been taught during 2011-2012 in the 2<sup>nd</sup> and 3<sup>rd</sup> years of the double grade and degree, respectively.*

*Our work looks for the existence of significant differences in the academic results of students belonging to both populations and analyzes the influence of attending the group activity in the students' performance.*

**Key words:** *Innovative education, group activity, comparative analysis, academic performance*

## INTRODUCCIÓN

El nuevo escenario que ha supuesto la implantación del Espacio Europeo de Educación Superior (EEES), ha originado una lógica preocupación en gran parte de los profesionales universitarios acerca de la evaluación del rendimiento académico de los alumnos sometidos a las nuevas metodologías docentes implícitas en los nuevos planes de estudio.

Sin embargo, dicha inquietud ya se percibía antes de la implantación de Bolonia. En este sentido cabe citar a Blesa, Bonet y Mas (2000), Molero (2007) y Lebcir, Wells y Bond (2008) y, como trabajos posteriores a la implantación, los de Claveria (2009 y 2011). Un punto común de los trabajos citados consiste en la utilización de técnicas inferenciales que permitan detectar diferencias significativas, en cuanto al rendimiento, entre distintas poblaciones de estudiantes.

Así, a modo de ejemplo, indicar que Molero utiliza el ANOVA para comparar las notas de dos promociones distintas de la misma titulación cuya diferencia radica fundamentalmente en el método de enseñanza utilizado (tradicional para una de las promociones y adaptado al EEES para la otra), Claveria en su primer trabajo (2009) concluye el impacto positivo de la introducción de un sistema de evaluación continua haciendo uso de modelos de regresión lineal múltiple y un modelo Logit, y completa en el segundo trabajo citado (2011) el estudio teniendo en cuenta las expectativas del alumno, utilizando para ello un contraste de igualdad de medias en muestras relacionadas.

Siguiendo los pasos de los autores citados, el trabajo que se presenta pretende, básicamente, detectar la existencia de diferencias significativas en el rendimiento académico de los alumnos de las licenciaturas y los nuevos grados. Dicho objetivo surge del hecho de que con la entrada en vigor de los Grados, muchas de las titulaciones existentes en los planes de estudios anteriores han dado paso a otras que suponen una continuación natural de aquellas y que, por tanto, comparten la mayoría de los objetivos y materias.

Tal es el caso del Proyecto de Innovación Educativa (PIE) de la doble licenciatura de ADE-Derecho y del doble grado de ADE-Derecho, de manera que entre las materias comunes entre ambas se pueden citar algunas de corte cuantitativo, como son las Estadística Descriptiva y la Inferencia Estadística, aunque bajo distinta denominación y en distinta situación temporal. En efecto:

- En la doble licenciatura de ADE-Derecho, se ha impartido en el primer cuatrimestre de tercer curso, bajo la designación de “Estadística II”.
- En el doble grado de ADE-Derecho, la denominación es “Introducción a la Inferencia Estadística” y está ubicada en el primer cuatrimestre de segundo curso.

Por otra parte, desde el curso 2007-2008 se ha desarrollado una actividad grupal, de carácter voluntario, en la asignatura Estadística II de la doble licenciatura, cuyo propósito era doble: por una parte, consolidar los conceptos que conforman esta asignatura y que no habían sido objeto de la evaluación continua y por otra ejercitar la competencia del trabajo en grupo. Los resultados obtenidos, a nivel de una mejora en el rendimiento académico, han sido francamente buenos en las cinco promociones de la doble licenciatura que participaron en este experimento docente.

Así, dado que en el curso 2011-2012 se ha producido la circunstancia irrepetible<sup>1</sup> de la coincidencia de impartición de la parte inferencial de la Estadística en los dos planes de estudio citados, se ofertó a los estudiantes del Doble Grado la posibilidad de participar en la actividad grupal, permitiendo realizar un análisis de las semejanzas/discrepancias entre ambas titulaciones.

Concretando, el objetivo del presente trabajo, según todo lo expuesto, es por una parte describir el desarrollo y resultados obtenidos en la realización de la actividad y por otra realizar un estudio comparativo de las notas obtenidas por los alumnos en el examen final de la materia de Inferencia Estadística en las dos titulaciones en función de dos factores: la titulación a la que pertenecen y la asistencia/ausencia a la actividad grupal.

El interés del segundo de los objetivos citados no reside únicamente en que se trate de distintas titulaciones sino en que se da la circunstancia de que desde que se adquieren las nociones básicas de Estadística I hasta que se inicia la Estadística II transcurre 1 año y 3 meses en la Doble Licenciatura y 3 meses en el Doble Grado, lo que a priori podría hacer que repercutiera negativamente en el rendimiento académico de los alumnos de la Doble Licenciatura. Además se pretende constatar si en el Doble Grado la actividad propuesta sigue redundando de manera positiva en el proceso enseñanza-aprendizaje.

## **CARACTERÍSTICAS DESTACABLES DE LAS DOBLES TITULACIONES**

Aunque en el epígrafe anterior ya se ha dejado constancia de algunas de las relaciones entre las dos titulaciones objeto de estudio, parece conveniente exponer, de forma resumida, algunas particularidades que se presentan en éstas<sup>2</sup> y que suponen puntos de similitud y disparidad. Así, se hará referencia a la estructura (duración y total de créditos) y cuestiones relativas a la materia docente de contenido inferencial. En concreto:

---

1. Al tratarse del curso académico en que se extinguía el 3er año de la Doble Licenciatura y al mismo tiempo el primer año en que se ponía en marcha el 2º curso del Doble Grado.

2. Acerca de la doble licenciatura se puede encontrar más información de forma detallada en los siguientes trabajos: Dasi, A et al. (2007), Díez, R, et al. (2011), Esteban, J, Rojo, C et al. (2009), Esteban, J, Bachero, J. M. et al. (2009), Ivars, A. et al. (2009), López, M.I et al (2010).

## **1. Estructura de las titulaciones**

- La Doble Licenciatura de ADE-Derecho está estructurada en 6 cursos con un total de 453,5 créditos ECTS, con una reducción de presencialidad del alumno del 25%, lo que conlleva más tiempo libre fuera de las aulas para que el alumno organice sus estudios
- El Doble Grado consta de 5 cursos con un total de 370,5 créditos ECTS. Sin embargo, en este caso la presencialidad es del 100%, lo que se traduce en que el estudiante posee menos tiempo libre para autoorganizarse.
- Otro rasgo diferenciador radica en la financiación. El PIE, puesto en marcha en el curso 2003-2004, surgió como respuesta a la convocatoria que desde el rectorado de la Universitat de València se formuló con el objetivo de desarrollar experiencias de innovación educativa dentro del contexto de convergencia al Espacio Europeo de Educación Superior (EEES), y contó con la subvención necesaria para su puesta en marcha, de manera que pudieron ofertarse una gran cantidad de actividades académicas (seminarios, conferencias,...) que proporcionaban al alumnado una visión general de lo que sería su vida profesional. Esta situación, sin embargo, no se ha dado en el Doble Grado.

## **2. Estadística Inferencial**

En el caso de la materia objeto de análisis del trabajo que se presenta, cabe destacar que en ambos planes de estudio coincide tanto en contenido como los créditos asignados, es decir las asignaturas “Estadística II” e “Introducción a la Inferencia Estadística” se imparten con el mismo temario, cuentan con un total de 6 créditos ECTS, y el sistema de evaluación es idéntico. Lo indicado posibilita, obviamente, la comparativa entre ambas. La única diferencia ya quedó reflejada en el epígrafe anterior, recuérdese que radicaba en la ubicación temporal de las mismas dentro de su titulación.

## **DESCRIPCIÓN, DESARROLLO Y RESULTADOS DE LA ACTIVIDAD GRUPAL**

Según se indicó en la introducción los objetivos fundamentales de la actividad grupal son:

- Trabajar aquella parte de la materia que no había sido objeto de evaluación continua.
- Ejercitar las competencias del trabajo en grupo.

Lo que conlleva que, además, se potencie la organización entre los alumnos, éstos desarrollen su expresión en público de conceptos de tipo estadístico y se consiga transformar la competitividad negativa en positiva, al tratarse de una actividad grupal en la que tienen que colaborar para conseguir objetivos comunes.

Para el correcto seguimiento del trabajo parece conveniente, en cualquier caso, realizar una breve descripción de la actividad docente llevada a cabo, así como del desarrollo de la misma en el curso 2011-2012 y los resultados obtenidos.

## DESCRIPCIÓN

Recuérdese que, tal como se indicó, la actividad grupal objeto de análisis se ha venido desarrollando en la Doble Licenciatura en los últimos 5 años<sup>3</sup>, siendo la base de la misma los equipos y los encuentros, de manera que:

- Los equipos: están formados por 8 alumnos. Su composición es obra del profesor, quien elige a los componentes de cada equipo entre los alumnos interesados en participar en la actividad. Para la confección de la lista de integrantes, el docente tiene en cuenta básicamente dos cuestiones: el rendimiento del alumno (según la nota obtenida en la evaluación continua) y su grado de relación con el resto de componentes del equipo. Así, con el objetivo de que los grupos sean lo más heterogéneos, selecciona a aquellos que no suelen coincidir en los trabajos conjuntos que se han desarrollado a lo largo del curso y que, además, han obtenido resultados dispares en la evaluación continua.
- Los encuentros: en cada encuentro participan dos equipos a los que se les formulan preguntas que deben resolver dentro de un tiempo establecido. Se realizan los encuentros necesarios para que cualquier equipo concurse con todos los demás.

Una vez formados los equipos y elaborada una relación de los distintos encuentros que van a producirse, se pasa a la realización de los mismos, en los que se formulan distintas preguntas a cada equipo. En este sentido debe tenerse en cuenta que:

- Todos los encuentros se realizan en un aula, en la que estarán presentes los dos equipos que van a participar. Los 8 componentes de cada equipo se sitúan en dos columnas de 4 filas con dos alumnos en cada una (esto es en columna y por parejas), tal y como se muestra en la figura 1, siendo decisión del equipo la composición de las parejas.
- Una vez ubicados los dos equipos, se formula a cada equipo un total de 3 preguntas de dificultad creciente (que conforman, atendiendo a la misma, 3 bloques) de la siguiente forma:
  - ✓ La primera pregunta se realiza a la primera pareja, de forma que si no contesta en tiempo o la respuesta es errónea pasa a contestarla la segunda pareja, si ésta falla o no contesta se formula a la tercera, después a la cuarta y, si en esta ocasión tampoco hubiese respuesta o fuese incorrecta pasaría a contestarla la 4ª pareja del equipo contrario, acción a la que se denota rebote.

---

<sup>3</sup> Más información en Esteban, J. et al. (2009).

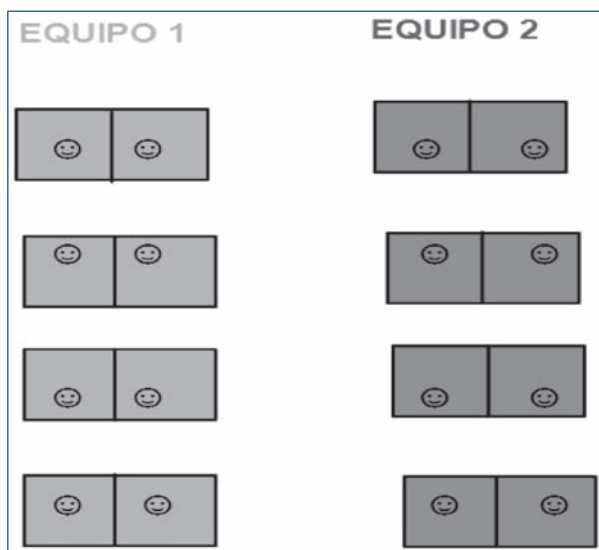


Figura 1. Estructura equipos. (Fuente: Elaboración propia)

- ✓ La segunda pregunta se realiza en primer lugar a la segunda pareja, procediendo de modo similar al descrito anteriormente, pero en el siguiente orden: 3<sup>a</sup>, 4<sup>a</sup>, 1<sup>a</sup> y rebote a la cuarta pareja del otro equipo.
- ✓ La tercera pregunta se realiza en primer lugar a la tercera pareja, y se seguirá una secuencia similar, esto es: 4<sup>a</sup>, 1<sup>a</sup>, 2<sup>a</sup> y rebote a la cuarta pareja del otro equipo.

Las preguntas son proyectadas de modo que sea visible para todos los alumnos presentes en el aula. Tanto si la pregunta se contesta satisfactoriamente como si no, al finalizar se proyecta también la respuesta y el profesor la lee en voz alta, haciendo las precisiones necesarias para lograr que los integrantes de los dos equipos sean capaces de entender su resolución. De este modo se consigue que esta actividad suponga un afianzamiento de la materia para el alumno.

A modo de ejemplo en las figuras 2, 3 y 4 se detallan una pregunta de cada bloque junto con su respuesta.

Dado que la dificultad de las preguntas de los bloques es creciente, las parejas de los equipos tienen un tiempo máximo para contestarlas y una puntuación distinta, que oscila entre 10 puntos si contestan bien en la 1<sup>a</sup> oportunidad y 2 puntos en el caso de rebote.

## DESARROLLO Y RESULTADOS DE LA ACTIVIDAD GRUPAL

En la actividad descrita que, recuérdese, es de carácter voluntario, participaron un total de 40 alumnos de los cuales 16 eran estudiantes de la doble licenciatura y 24 del doble grado.

### PREGUNTA 6

Indicar como se distribuye y cuando se utiliza la siguiente variable aleatoria

$$\frac{n_X \cdot n_Y - 1}{n_Y} \cdot \frac{\sigma_y^2}{n_X - 1} \cdot \frac{S_x^2}{S_y^2}$$

### PREGUNTA 6

Indicar como se distribuye y cuando se utiliza la siguiente variable aleatoria

$$\frac{n_X \cdot n_Y - 1}{n_Y} \cdot \frac{\sigma_y^2}{n_X - 1} \cdot \frac{S_x^2}{S_y^2}$$

RESPUESTA: se distribuye según una F de Snedecor con  $n_x - 1$  grados de libertad en el numerador y  $n_y - 1$  grados de libertad en el denominador y se utiliza para resolver problemas inferenciales que hagan referencia a la razón de varianzas de 2 poblaciones Normales (siendo las muestras extraídas independientes)

Figura 2. Ejemplo de pregunta y respuesta Bloque 1. (Fuente: Elaboración propia)

### PREGUNTA 20

Si se plantea el siguiente contraste acerca de la varianza de una población Normal con media desconocida:

$$H_0 : \sigma^2 = 5$$

$$H_1 : \sigma^2 \neq 5$$

Y para tomar una decisión se extrae una muestra de tamaño 26, tomando la variable utilizada para resolver el contraste (suponiendo que es cierto lo que dice la hipótesis nula) el valor 38'55; ¿que decisión se tomará a un nivel de significación del 5%? (Razonar la respuesta indicando el estadístico utilizado, la región de aceptación y la regla de decisión)

### PREGUNTA 20

Si se plantea el siguiente contraste acerca de la varianza de una población Normal con media desconocida:

$$H_0 : \sigma^2 = 5$$

$$H_1 : \sigma^2 \neq 5$$

Y para tomar una decisión se extrae una muestra de tamaño 26, tomando la variable utilizada para resolver el contraste (suponiendo que es cierto lo que dice la hipótesis nula) el valor 38'55; ¿que decisión se tomará a un nivel de significación del 5%? (Razonar la respuesta indicando el estadístico utilizado, la región de aceptación y la regla de decisión)

RESPUESTA: 1) Estadístico utilizado:  $\frac{n S^2}{\sigma^2}$  que se distribuye según una chi-dos con  $n-1=26-1=25$  grados de libertad  
 2) Se trata de un contraste paramétrico bilateral con región de aceptación: ]1312, 4055 [  
 3) Dado que 38'55  $\notin$  ]1312, 4055 [ la decisión será: NO RECHAZAR. No con  $\alpha=5\%$

Figura 3. Ejemplo de pregunta y respuesta Bloque 2. (Fuente: Elaboración propia)

### PREGUNTA 34

Para resolver el contraste de bondad del ajuste:

$$H_0: X \sim N(\mu=57'4; \sigma=19'73)$$

por el método de la  $\chi^2$ , se ha tomado una muestra de tamaño 200 y tras obtener las frecuencias teóricas se ha elaborado la siguiente tabla:

h <sub>i</sub>	n <sub>h<sub>i</sub></sub>	n <sub>T<sub>i</sub></sub>
-20	8	6'74
-10	20	32'14
0	60	72'46
10	50	64'54
20	30	21'94
30	0	3'08
$\Sigma$	200	200

Obtener los grados de libertad de la  $\chi^2$  así como el valor crítico del test (para  $\alpha = 5\%$ ). (Realizar, en caso necesario la(s) corrección(es) de continuidad correspondientes, indicando cual(es) ha(n) sido esta(s) y porque se ha(n) llevado a cabo)

### PREGUNTA 34

Para resolver el contraste de bondad del ajuste:

$$H_0: X \sim N(\mu=57'4; \sigma=19'73)$$

por el método de la  $\chi^2$ , se ha tomado una muestra de tamaño 200 y tras obtener las frecuencias teóricas se ha elaborado la siguiente tabla:

h <sub>i</sub>	n <sub>h<sub>i</sub></sub>	n <sub>T<sub>i</sub></sub>
-20	8	6'74
-10	20	32'14
0	60	72'46
10	50	64'54
20	30	21'94
30	0	3'08
$\Sigma$	200	200

Obtener los grados de libertad de la  $\chi^2$  así como el valor crítico del test (para  $\alpha = 5\%$ ). (Realizar, en caso necesario la(s) corrección(es) de continuidad correspondientes, indicando cual(es) ha(n) sido esta(s) y porque se ha(n) llevado a cabo)

RESPUESTA: Dado que existe una frecuencia teórica menor que 5 (concretamente la última) habrá que agrupar (en este caso con la anterior bastará) hasta conseguir que todas las frecuencias teóricas superen 5, por lo que  $m=5$  y dado que no habría que estimar ningún parámetro  $k=0$ , por lo que la  $\chi^2$  tendrá  $m-k-1=5-0-1=4$  g.l. y para un nivel de significación del 5% el valor crítico es 9'488

Figura 4. Ejemplo de pregunta y respuesta Bloque 3. (Fuente: Elaboración propia)

Así, siguiendo las pautas indicadas en la descripción de la actividad, se formaron 3 equipos de 8 estudiantes (para el Doble Grado) y 2 equipos de 8 estudiantes (para la Doble Licenciatura), estableciéndose dos ligas paralelas, una para cada titulación, y un último encuentro en el que participarían los vencedores de cada liga. Por tanto los encuentros realizados fueron:

- Doble Grado: debido a que cada equipo debía competir con los demás, se establecieron 3 encuentros (entre los equipos: 1 y 2; 2 y 3; 1 y 3).
- Doble Licenciatura: un único encuentro entre los dos equipos.
- Doble Licenciatura-Doble Grado: un encuentro entre los equipos ganadores.

Los resultados obtenidos por los distintos grupos se resumen en la siguiente tabla:

TITULACIÓN	EQUIPOS	PUNTUACIÓN TOTAL ENCUENTROS	PUNTUACIÓN MEDIA POR ENCUESTRO
DOBLE LICENCIATURA			
	EQUIPO 1	22	22
	EQUIPO 2	<b>28</b>	28
DOBLE GRADO			
	EQUIPO 1	46	23
	EQUIPO 2	<b>56</b>	28
	EQUIPO 3	54	27
5º ENCUESTRO			
	EQUIPO 2 (DL)	18	
	EQUIPO 2 (DG)	18	

**Tabla 1.** Resultados Actividad Grupal. Fuente: Elaboración propia a partir de los resultados de la actividad grupal

Como se puede observar en los tres encuentros del doble grado obtuvo mayor puntuación media el equipo 2 (28 puntos) y en la doble licenciatura el equipo 2 con igual puntuación. Además enfrentados estos dos equipos ganadores, se logró un empate a 18 puntos.

## ANÁLISIS COMPARATIVO

Según lo indicado en la introducción, acerca de los objetivos propuestos en el trabajo que se presenta, el primer paso del análisis comparativo consistirá en analizar si existen diferencias significativas, respecto a la nota media del examen, entre ambas titulaciones, para lo que se comprobará, previamente, que se verifica la hipótesis de Normalidad. De la observación de los datos contenidos en las tablas siguientes:

Tamaño Muestral	Parámetros Normales		P-valor
	Media	Desviación Típica	
55	8,1682	1,77684	0,106

Tabla 2. Test de Kolmogorov-Smirnov para la Nota de Examen de D. Licenciatura  
Fuente: Elaboración propia a partir de las notas de 1ª convocatoria

Tamaño Muestral	Parámetros Normales		P-valor
	Media	Desviación Típica	
44	7,3442	2,00079	0,140

Tabla 3. Test de Kolmogorov-Smirnov para la Nota de Examen de D. Grado. Fuente:  
Elaboración propia a partir de las notas de 1ª convocatoria

Se deduce que la variable “Nota Examen” en ambas titulaciones soporta un ajuste a una distribución Normal.

Además, atendiendo al resultado del test de Levene, contenido en la tabla 4, no se rechaza la igualdad de las varianzas

	Doble Licenciatura	Doble Grado	Razón-F	P-Valor
Desviación Típica	1,77684	2,00079		
			1,543	0,217

Tabla 4. Prueba de Levene para la Igualdad de Varianzas. Fuente: Elaboración propia a partir de las notas de 1ª convocatoria

Por lo que asumiendo igualdad de varianzas, los datos recogidos a continuación:

	Intervalo de confianza para la diferencia de medias (al 95%)		Valor <i>t</i>	g.l.	P-Valor
	Extremo inferior	Extremo superior			
Con varianzas iguales	0,06972	1,57846	2,168	97	0,033

Tabla 5. Contraste de Igualdad de Medias. Fuente: Elaboración propia a partir de las notas de 1<sup>a</sup> convocatoria

Permiten concluir que, trabajando con un nivel de significación del 5%, se detectan diferencias significativas, siendo superior la nota media de los alumnos de la Doble Titulación (basta comparar las medias muestrales en ambas titulaciones, contenidas en las tablas 2 y 3).

Este resultado induce algunas vías de reflexión ya que, tal y como se comentó con anterioridad, la conclusión esperada era la opuesta, esto es, dado que los estudiantes del Doble Grado habían adquirido los conocimientos de Estadística Descriptiva e Inferencial casi de manera secuencial, parecía que deberían haber sido éstos los que destacaran frente a los de la Doble Licenciatura. Entre las vías de especulación, podrían citarse las siguientes:

- ¿Está el P.I.E. mejor estructurado que el Doble Grado?, es decir, en el caso de la asignatura que se está considerando, el hecho de que esté ubicada en 3<sup>er</sup> curso, ¿hace el trabajo con alumnos potencialmente más maduros repercuta positivamente en los resultados académicos?
- ¿Se producen consecuencias negativas de la implantación de los grados a “coste cero”?, esto es, el hecho de que la presencialidad del alumno sea superior en el grado y la disminución de financiación para actividades complementarias ¿repercuta negativamente en los resultados académicos?

En cualquier caso, a partir del rechazo de igualdad de notas medias en el examen final, puede plantearse si la asistencia/ausencia a la actividad grupal propuesta ha producido efectos significativamente diferentes en ambas titulaciones, es decir: “Si en cada titulación se consideran los 2 grupos que se genera atendiendo a la participación o no del alumno a la actividad grupal, ¿se rechazará que la nota media en el examen final ha sido la misma para ambos subgrupos en ambas titulaciones?, o por el contrario ¿volverá a revelarse un comportamiento distinto para la Doble Licenciatura y el Doble Grado?. Para dar respuesta a esta pregunta se procede de modo similar al caso anterior, esto es, haciendo uso del test de Kolmogorov-Smirnov se analizará si se verifica las hipótesis de Normalidad y se resolverán los siguientes contrastes:

$$\begin{aligned}
 (1) \quad & H_0: \mu_{DL-SI} = \mu_{DL-NO} \\
 & H_1: \mu_{DL-SI} \neq \mu_{DL-NO} \\
 (2) \quad & H_0: \mu_{DG-SI} = \mu_{DG-NO} \\
 & H_1: \mu_{DG-SI} \neq \mu_{DG-NO}
 \end{aligned}$$

Siendo:

$\mu_{DL-SI}$  ( $\mu_{DG-SI}$ )=nota media de los alumnos de la doble Licenciatura (Grado) que participan en la actividad grupal.

$\mu_{DL-NO}$  ( $\mu_{DG-NO}$ )= nota media de los alumnos de la doble Licenciatura (Grado) que no participan en la actividad grupal.

Así, los datos contenidos en las tablas que siguen:

Tamaño Muestral	Parámetros Normales		P-valor
	Media	Desviación Típica	
15	8,6467	1,37898	0,451

Tabla 6. Test de Kolmogorov-Smirnov para la Nota de Examen de DL-SI. Fuente: Elaboración propia a partir de las notas de 1ª convocatoria

Tamaño Muestral	Parámetros Normales		P-valor
	Media	Desviación Típica	
40	7,9887	1,88885	0,129

Tabla 7. Test de Kolmogorov-Smirnov para la Nota de Examen de DL-NO. Fuente: Elaboración propia a partir de las notas de 1ª convocatoria

Tamaño Muestral	Parámetros Normales		P-valor
	Media	Desviación Típica	
24	7,9821	1,47780	0,480

Tabla 8. Test de Kolmogorov-Smirnov para la Nota de Examen de DG-SI. Fuente: Elaboración propia a partir de las notas de 1ª convocatoria

Tamaño Muestral	Parámetros Normales		P-valor
	Media	Desviación Típica	
20	6,5785	2,29809	0,877

Tabla 9. Test de Kolmogorov-Smirnov para la Nota de Examen de DG-NO. Fuente: Elaboración propia a partir de las notas de 1ª convocatoria

Permiten concluir que la variable “Nota Examen” en los cuatro grupos considerados (DL-SI, DL-NO, DG-SI y DG-NO) soporta un ajuste a una distribución Normal.

Además, atendiendo al resultado de la prueba de Levene, contenido en las tablas 10 y 11:

	DL-SI	DL-NO	Razón-F	P-Valor
Desviación Típica	1,37898	1,88885		
			1,114	0,296

Tabla 10. Prueba de Levene para la Igualdad de Varianzas entre DL-SI y DL-NO.

Fuente: Elaboración propia a partir de las notas de 1<sup>a</sup> convocatoria

	DG-SI	DG-NO	Razón-F	P-Valor
Desviación Típica	1,47780	2,29809		
			6,614	0,014

Tabla 11. Prueba de Levene para la Igualdad de Varianzas entre DG-SI y DG-NO.

Fuente: Elaboración propia a partir de las notas de 1<sup>a</sup> convocatoria

NO se rechaza la igualdad de las varianzas entre DL-SI y DL-NO, mientras que la hipótesis de igualdad de varianzas es rechazada si se consideran DG-SI y DG-NO, para un nivel de significación del 5%, no rechazándose para  $\alpha=1\%$ .

Así, las tablas 12 a 14 contienen los resultados del contraste de igualdad de medias, para los 2 grupos de la Doble Licenciatura asumiendo varianzas iguales y para los del Doble Grado bajo el mismo supuesto (válido si  $\alpha=1\%$ ) y no suponiendo igualdad de varianzas (caso en que  $\alpha=5\%$ ).

Intervalo de confianza para la diferencia de medias (al 95%)		Valor t	g.l.	P-Valor
Extremo inferior	Extremo superior			
-0,41605	1,73188	1,229	53	0,225

Tabla 12. Contraste Igualdad de Medias: DL-SI y DL-NO. Fuente: Elaboración propia a partir de las notas de 1<sup>a</sup> convocatoria

Intervalo de confianza para la diferencia de medias (al 95%)		Valor t	g.l.	P-Valor
Extremo inferior	Extremo superior			
0,24669	2,56047	2,448	42	0,019

Tabla 13. Contraste Igualdad de Medias: DG-SI y DG-NO (supuesto varianzas iguales).

Fuente: Elaboración propia a partir de las notas de 1<sup>a</sup> convocatoria

	Intervalo de confianza para la diferencia de medias (al 95%)		Valor <i>t</i>	g.l.	P-Valor
	Extremo inferior	Extremo superior			
Varianzas desiguales	0,18875	2,61842	2,356	31,282	0,025

Tabla 14. Contraste Igualdad de Medias: DG-SI y DG-NO (supuesto varianzas desiguales). Fuente: Elaboración propia a partir de las notas de 1ª convocatoria

En cualquier caso, la conclusión a la que se llega es la misma, esto es, no se rechaza la hipótesis nula del contraste (1) y sí se rechaza para el contraste (2), esto es: “No se rechaza que la nota media obtenida en el examen sea la misma para los alumnos de la doble Licenciatura, ya hayan participado o no en la actividad grupal, mientras que para los estudiantes del doble Grado se rechaza la igualdad de medias, siendo superior para el caso de los alumnos que sí asistieron a la actividad propuesta (basta comparar las medias muestrales en ambos grupos, contenidas en las tablas 8 y 9)”.

A modo de resumen de lo obtenido hasta el momento, y trabajando para un nivel de significación del 5%:

- Existen diferencias significativas entre el rendimiento académico de la Doble Licenciatura y el Doble Grado a favor de los primeros.
- Para la Doble Licenciatura: no existen diferencias significativas en la nota media del examen final entre los alumnos que participaron en la actividad y los que no lo hicieron.
- Para el doble Grado: existen diferencias significativas tanto en la dispersión como en la nota media del examen final entre los alumnos que participaron en la actividad y los que no lo hicieron.

## CONCLUSIONES

Atendiendo a los objetivos propuestos y los resultados obtenidos se concluye que:

- A pesar de que a priori se pensó que la ubicación de la Estadística Inferencial en la Doble Licenciatura sería un hándicap negativo para los estudiantes de esta titulación, la información empírica no sustenta esta hipótesis, ya que se observan diferencias significativas entre la nota media de éstos y los del Doble Grado. La nota media de los de la Doble Licenciatura en la asignatura citada es superior a la obtenida por los del Doble Grado. Esta conclusión abre varias vías de reflexión, esto es, surgen cuestiones como las que siguen:

- ✓ ¿Presenta una mejor estructura el PIE que el Doble Grado?, es decir, ¿el hecho de que la asignatura se imparta en un curso superior permite que los estudiantes estén más maduros y receptivos a las técnicas estadísticas?.

- ✓ ¿Los resultados obtenidos son fruto de la implantación de los Grados a “coste cero”? Es decir, al no disminuir la presencialidad en el aula de los alumnos del Doble Grado y no existir la financiación que se daba en la Doble Licenciatura, provoca que el estudiante disponga de menos tiempo para organizarse y de una menor formación complementaria (que se derivaba de la financiación).
- Ambas titulaciones no muestran el mismo patrón de comportamiento si se tiene en cuenta la asistencia/ausencia del alumno a la actividad grupal propuesta, pues mientras que para el caso de la Doble Licenciatura no se detecta diferencias significativas en la nota media de la prueba de síntesis entre los alumnos que acudieron a la actividad y los que se ausentaron, la conclusión es la contraria en el Doble Grado, detectándose en esta titulación diferencias significativas a favor de los asistentes a la actividad.

## REFERENCIAS

- Blesa, P., Bonet, M.P. y Más, J. (2000) Análisis de resultados académicos de la Universidad Politécnica de Valencia: uso de almacenes de datos. Instituto de Ciencias de la Educación, Universidad Politécnica de Valencia.
- Claveria, O. (2009) ¿Puede ayudar la evaluación continua a mejorar el rendimiento de los alumnos?. *Revista de Formación e Innovación Educativa Universitaria*, 2, pp. 194-209.
- Claveria, O. (2011) Análisis de las expectativas y el rendimiento del alumnado ante la implantación de un sistema de evaluación continua. *Revista d’Innovació Docent Universitària*, 3, pp. 44-71.
- Dasí, A.; García, J.; Huguet, A.; Juan, R.; Montagud, M.D.; Gollnert, G. (2007). “Innovación educativa en la Universidad: ADE-Derecho”, PUV Universitat de València, Valencia.
- Diez, R.; Ivars, A.; López, M.I. (2011): Capítulo libro Experiencias de Innovación Docente en estadística, 155-168. Eds: Pavía, J.M.; Martínez, R. Morillas, F. G. Valencia
- Esteban, J; Rojo, C.; Ruiz, F. (2009). “Características deseables en los estudios de ADE-Derecho: una perspectiva desde la visión del alumnado”. *Anales de Economía Aplicada*. Delta Publicaciones Universitarias.
- Esteban, J.; Bachero, J.M.; Ivars, A.; López, M.I. (2009). “Descripción de una actividad grupal en el PIE de ADE-Derecho de la Universidad de Valencia”. Valencia: Promolibro.
- Ivars, A.; López, M.I.; Ruiz, F. (2009). “ADE-Derecho en la Universitat de València: estudio de una experiencia piloto”. *Anales de Economía Aplicada*. Delta Publicaciones Universitarias.
- Lebcir, R.M., Wells, H. y Bond, A. (2008) Factors affecting academic performance of International students in Project Management courses: A case study from a British Post 92 University. *International Journal of Project Management*, 26, pp. 268-274.

- López, M.I., Díez, R.; Ivars, A. (2010). “La docencia de la Estadística en el PIE de ADE-Derecho: Volumen de trabajo del Alumno y del profesor”. @tic. Revista d’innovació educativa. Universitat de Valencia.
- MEC (2006): “Propuesta para la renovación de las metodologías educativas en la Universidad”. Madrid. Ministerio de Educación y Ciencias; ([http://www.mec.es/educa/ccuniv/html/metodologías/docu/PROPUESTA\\_RENOVACIÓN.pdf](http://www.mec.es/educa/ccuniv/html/metodologías/docu/PROPUESTA_RENOVACIÓN.pdf))
- Molero, D. (2007): “Rendimiento académico y opinión sobre la docencia del alumnado participante en experiencias piloto de implantación del Espacio Europeo de educación Superior”. Revista Electrónica de Investigación y Evaluación Educativa, 13, pp. 175-190.



## Ajedrez para trabajar patrones en matemáticas en Educación Primaria

**Alexander Maz-Machado**

**Noelia Jiménez-Fanjul**

*Universidad de Córdoba*

**Resumen:** *Presentamos una propuesta para integrar algunos elementos del ajedrez en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en segundo y tercer curso de Educación Primaria. En particular se orienta hacia el reconocimiento de patrones geométricos y numéricos.*

**Palabras Clave:** *Patrones geométricos, ajedrez, matemáticas, recursos didácticos.*

## Chess to work patterns in mathematics in Primary Education

**Abstract:** *We present a proposal to integrate chess elements during the teaching and learning of mathematics in the second and third years of the Primary Education. In particular, this proposal is aimed towards geometrical and numerical patterns recognition.*

**Keywords:** *Geometrical patterns, Chess, Mathematics, Teaching manipulatives.*

### INTRODUCCIÓN

Hace ya un par de décadas que Miguel de Guzmán (1989) señalaba que las matemáticas y los juegos tenían mucho en común. Además destacaba los beneficios de utilizarlos en los procesos de enseñanza: “El juego matemático bien escogido puede conducir al estudiante de cualquier nivel a la mejor atalaya de observación y aproximación inicial a cualquiera de los temas de estudio con los que se ha de enfrentar” (p. 62).

Dentro de los muchos juegos que pueden servir como recurso didáctico para la enseñanza de las matemáticas está el ajedrez. Los psicólogos han considerado esta actividad, dentro de su doble condición de juego/deporte, como idónea para analizar las diferencias cognitivas de los individuos durante los procesos mentales que se ponen en acción durante su práctica (Saariluoma, 2001; Charness, 1981; Robbins *et al.*, 1996; Chase y Simon, 1973). Recientemente se ha comparado su táctica y estrategia con las que se ejercitan

durante algunos juegos tecnológicos como los video juegos (Pérez-Latorre, 2012), lo cual indica la gran riqueza visual y cognitiva así como lo dinámico y actual del juego.

Algunos estudios se han centrado en las diferencias en las calificaciones entre alumnos practicantes y no practicantes de ajedrez y se han hallado diferencias de un mejor desempeño en Matemáticas y Ciencias Sociales por parte de los que practican el ajedrez (Kovacic, 2012). Las conexiones entre las matemática y el ajedrez ofrecen un escenario adecuado para que a través del juego se desarrollen competencias matemáticas.

Algunos de los componentes de la práctica del ajedrez son la concentración y el desarrollo de estrategias para la resolución de problemas y del pensamiento lógico, todos ellos necesarios para las matemáticas. Ejemplo de esta asociación, es que en 1993 se fundó en Quebec una organización la *Chess 'n' Math Association* para ayudar a los niños a mejorar su juego después de las clases ordinarias en la escuela, a través de escuelas de verano (Purden, 1998).

Según se recoge en el currículo de matemáticas para Primaria, en el bloque de geometría se deben trabajar los siguientes conceptos:

- La situación en el espacio, distancias y giros.
  - Descripción de posiciones y movimientos, en relación a uno mismo y a otros puntos de referencia.
  - Uso de vocabulario geométrico para describir itinerarios: líneas abiertas y cerradas; rectas y curvas.
  - Interpretación y descripción verbal de croquis de itinerarios y elaboración de los mismos.
- Formas planas y espaciales.
  - Las figuras y sus elementos. Identificación de figuras planas en objetos y espacios cotidianos.
  - Identificación de los cuerpos geométricos en objetos familiares. Descripción de su forma, utilizando el vocabulario geométrico básico.
  - Comparación y clasificación de figuras y cuerpos geométricos con criterios elementales.
  - Formación de figuras planas y cuerpos geométricos a partir de otras por composición y descomposición.
- Regularidades y simetrías.
  - Búsqueda de elementos de regularidad en figuras y cuerpos a partir de la manipulación de objetos.
  - Interpretación de mensajes que contengan informaciones sobre relaciones espaciales.
  - Resolución de problemas geométricos explicando oralmente y por escrito el significado de los datos, la situación planteada, el proceso seguido y las soluciones obtenidas.

- Interés y curiosidad por la identificación de las formas y sus elementos característicos.
- Confianza en las propias posibilidades; curiosidad, interés y constancia en la búsqueda de soluciones.

Precisamente el ajedrez favorece el desarrollo de la mayoría de estos conceptos. A continuación presentamos una actividad para realizar con alumnos de segundo y tercero de primaria utilizando el ajedrez como elemento mediador del conocimiento.

## ACTIVIDAD

Se utilizara un tablero de ajedrez y sus piezas. En caso de que los alumnos no sepan jugar al ajedrez procederemos a explicar algunos aspectos básicos. Se les indica que cada cuadro pequeño que forma el tablero se denomina casilla y que estas son blancas y negras (claras y oscuras).

Los niños deben aprender a distinguir entre las filas, las columnas y las diagonales (Fig. 1). Se puede acompañar con preguntas como: ¿Cuántas filas hay? ¿Cuántas columnas hay? ¿Cuántas diagonales blancas hay? ¿Cuántas casillas de cada color tiene el tablero? ¿Cuántas son en total? ¿Qué forma geométrica tiene el tablero? Una vez que se han familiarizado, lo comprenden se pasa a enseñar las piezas con su nombre y cómo se mueven en el tablero. Para esta actividad bastará con conocer el movimiento del Alfil, la Dama y el Caballo (Figura 2). Debe tenerse en cuenta que el movimiento del caballo representa una mayor dificultad para aquellos que recién lo están aprendiendo.

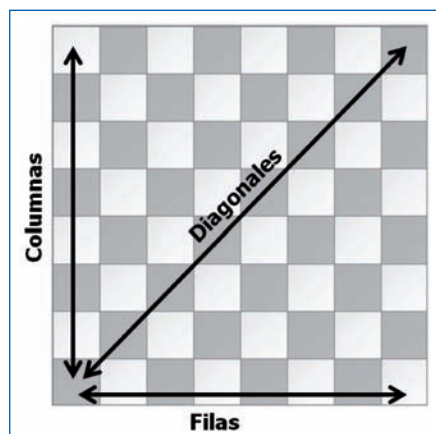


Figura 1.

A continuación se procede a colocar el alfil en una de las esquinas del tablero y se pide a los alumnos que cuenten a cuántas casillas diferentes puede ir desde allí. Luego se ubica el alfil en cualquier casilla sobre el borde del tablero y se repite la pregunta. Los alumnos encontrarán que en ambas posiciones el resultado es 7. Luego, se coloca en la segunda casilla de una de las diagonales y se vuelve a preguntar por el número de casillas a las que se puede desplazar desde esa casilla. Se repite la operación por diferentes casillas de la diagonal con la misma pregunta (Figura 3). Los alumnos hallarán que las respuestas son 7, 9, 11 y 13 casillas.

Luego se procede a realizar la misma actividad con la Dama, colocándola primero en una de las casillas de la esquina del tablero y se procede al conteo como con el alfil (Figura 4). Obtendrán por respuesta 21, 23, 25 y 27 casillas, porque es el resultado del número combinado de casillas de la Torre (7) más el del alfil.

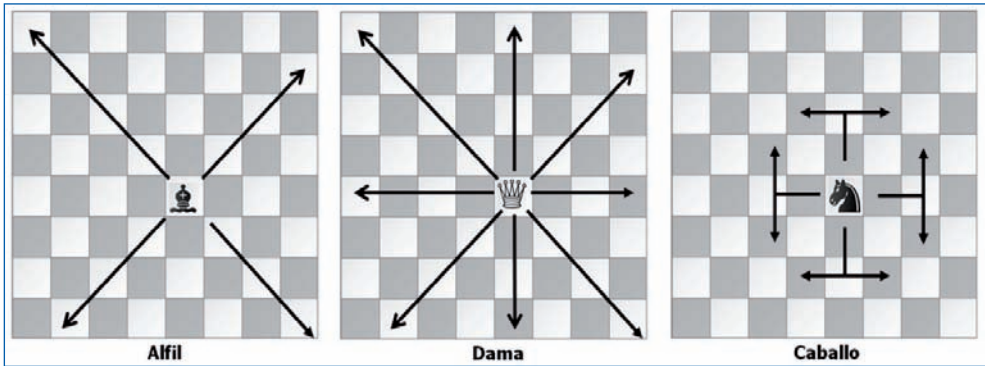


Figura 2.

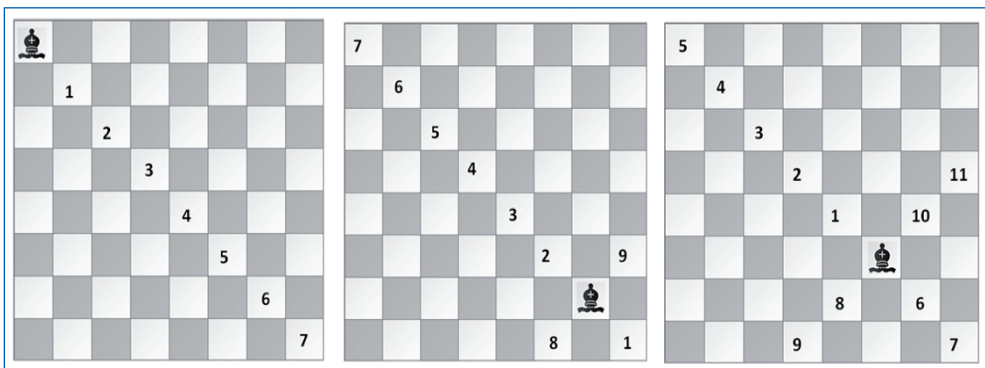


Figura 3.

Una vez realizados los conteos, se pide a los alumnos que dibujen el tablero de ajedrez en una hoja pero sin diferenciar las casillas blancas de las negras. Cuando lo tengan dibujado se les indica que coloquen el alfil en cada una de las casillas del tablero y que para aquellas que el resultado sea 7 las coloreen de rojo. Las casillas de 9 de color azul, las de 11 de color amarillo y para las de 13 de color verde.

Quando hayan terminado con la actividad con el alfil se pide que repitan el ejercicio con la dama y que coloreen las casillas según el número de respuestas. Los alumnos obtendrán para cada figura, Alfil y Dama los patrones de la figura 5. Como se observa, el patrón geométrico es igual, sin embargo, el patrón numérico no lo es. Sobre esta diferencia se preguntará a los alumnos. Es importante que comprendan que una misma representación puede tener significados distintos. Asimismo, permite mostrar como lo numérico y lo geométrico están relacionados. Surgen entonces preguntas como ¿En qué lugares el Alfil tiene más opciones de desplazamiento? ¿En cuáles tiene menos? ¿Y para la Dama? Los alumnos deben concluir el lugar idóneo para colocar las piezas para tener mayor cobertura de casillas.

Una vez realizados los gráficos que representan las posibilidades de movimiento para la Dama y el Alfil, se propone la misma actividad para el Caballo. Esta pieza tiene cinco posibilidades numéricas 2, 3, 4, 6 y 8 casillas, una más que las halladas para las otras dos

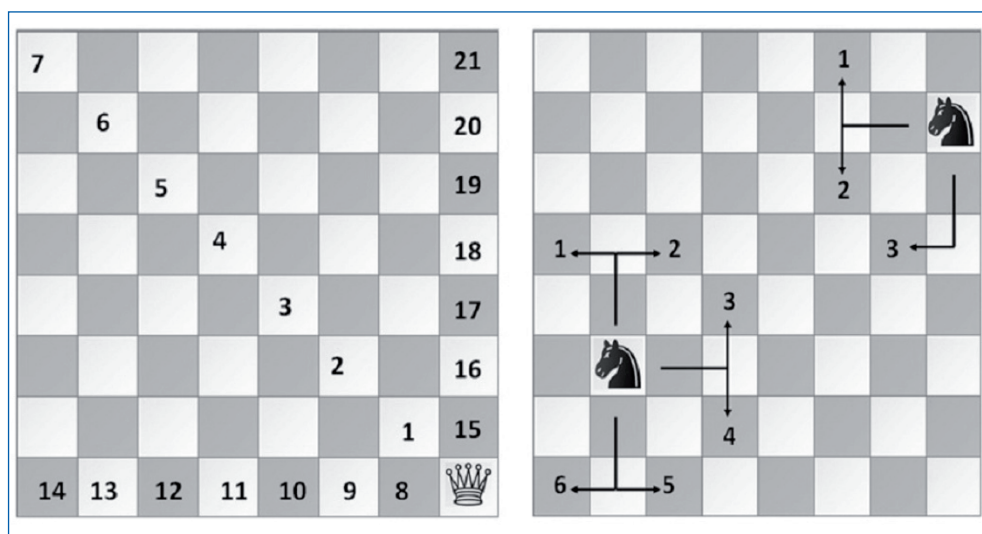


Figura 4.

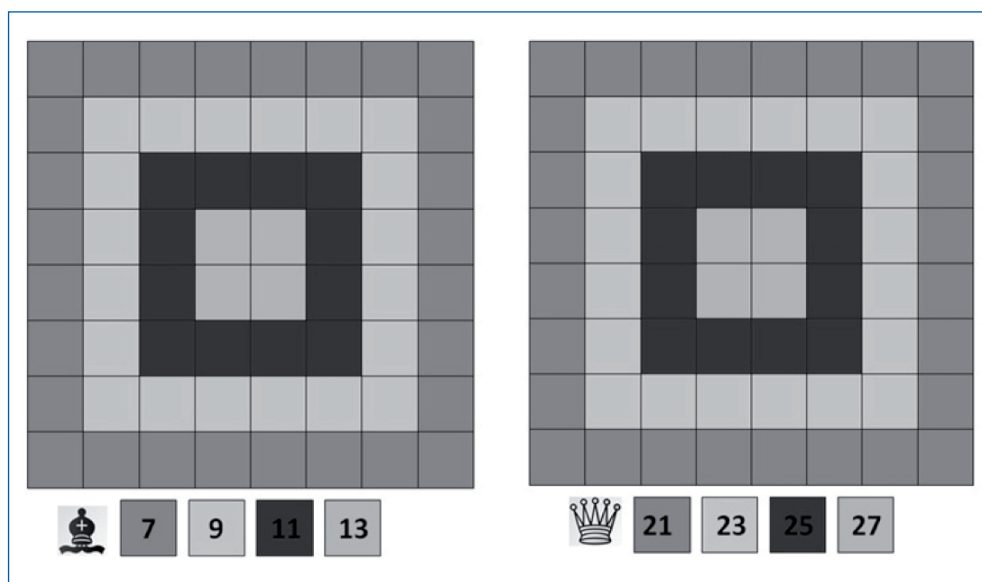


Figura 5.

piezas. Los alumnos observarán que el patrón geométrico es diferente (Figura 6) al del Alfil y la Dama. Esto elimina la idea inicial que se forman respecto a que todos los patrones geométricos son iguales. Se procede a realizar las preguntas: ¿En qué lugares el Caballo tiene más opciones de desplazamiento? ¿En cuáles tiene menos?

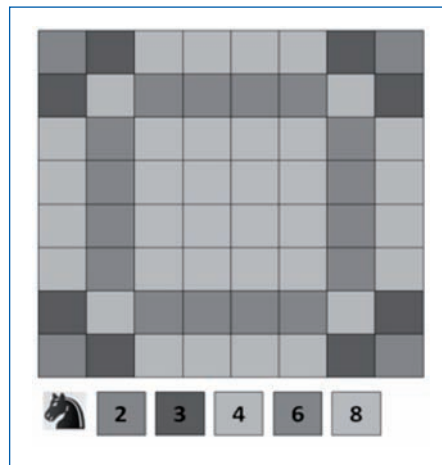


Figura 6.

## REFLEXIONES FINALES

El utilizar los juegos como medio para introducir o reforzar conceptos matemáticos o geométricos crea una empatía entre los alumnos y las matemáticas algo que es importante en los primeros años de escolarización. Si se acepta en diversos sectores que el ajedrez además de un juego es una actividad mental y cognitiva beneficiosa para quienes la practican, entonces vale la pena preguntarse ¿por qué no aprovechar este potencial para llevarlo al aula con los alumnos de primaria? Una de las posibles respuestas, es que los docentes desconocen este potencial y en ocasiones hasta desconocen las reglas de este juego. Esta es una de las principales razones para presentar esta propuesta: brindar a los maestros una forma de integrar los elementos del ajedrez en el aula para apoyar la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.

Por lo tanto, hemos propuesto un primer acercamiento a los patrones geométricos y numéricos a través de una sencilla actividad lúdica que está al alcance de los escolares de segundo y tercer grado de Educación Primaria.

## REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Charness, N. (1981). Aging and skilled problem solving. *Journal of Experimental Psychology: General*, 110, 21-38.
- Chase, W. G. y Simon, H. A. (1973). Perception in Chess. *Cognitive Psychology*, 4, 55-83.
- De Guzmán, M. (1989). Juegos y Matemáticas. *Suma*, 4, 61-64.
- Kovacic, D. M. (2012). Ajedrez en las escuelas. Una buena movida. *PSIENCIA. Revista Latinoamericana de Ciencia Psicológica*, 4(1), 29-41.

- Pérez-Latorre, O. (2012). Del Ajedrez a StarCraft. Análisis comparativo de juegos tradicionales y videojuegos. *Comunicar, Revista Científica de Educomunicación*, XIX(38), 121-129.
- Purden, C. (1998). The chess and Math connection. *CA Magazine*, 131(7), 17.
- Robbins, T. W., Anderson, E. J. Barker, D. R., Fearnlyhough, C., Henson, R., Hudson, S. & Baddeley, A. D. (1996). Working memory in chess. *Memory & Cognition*, 24, 83-93.
- Saariluoma, P. (2001). Chess and content-oriented psychology of thinking. *Psicológica*, 22, 143-164.



## Soluciones de los problemas

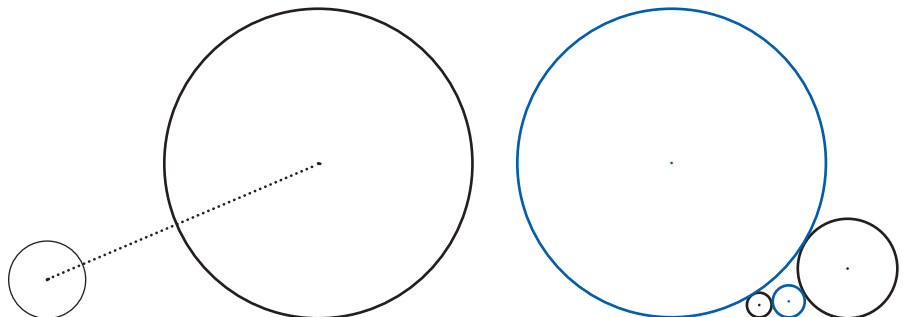
F. Damián Aranda Ballesteros  
Manuel Gómez Lara

## Solutions to problems

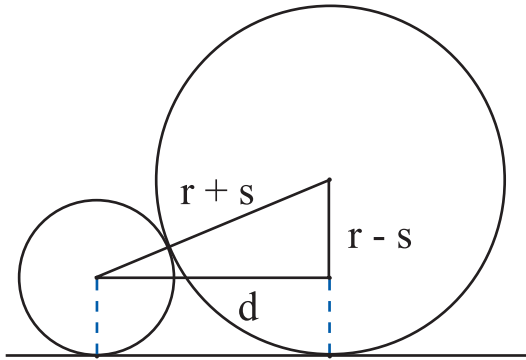
## RE\_009\_EPSILON

Sean dadas dos circunferencias de centros  $O_1$  y  $O_2$ , y radios  $R_1$  y  $R_2$ , respectivamente ( $R_1 < R_2$ ). Sea  $r$  una tangente exterior común a ambas circunferencias y  $p$  el valor de la distancia entre los centros.

- Determine el valor de los radios  $r_1$  y  $r_2$  de las circunferencias que, siendo tangentes exteriores a ambas circunferencias, lo sea también a la recta  $r$ .
- Si ambas circunferencias son ahora tangentes ( $p = R_1 + R_2$ ), deduzca en este caso, el valor de los radios  $r_1$  y  $r_2$  de las circunferencias tangentes.
- Indique cómo realizaría la construcción de ambas circunferencias.
- Pruebe que la relación  $\frac{1}{\sqrt{R_1}} = \frac{1}{\sqrt{r_1}} + \frac{1}{\sqrt{r_2}}$  es condición necesaria y suficiente para que las dos circunferencias solución del problema sean también tangentes entre sí. Verifica esta situación para el caso de que  $R_1 = \frac{1}{6}R_2$  y halla el valor de  $p$  correspondiente.



a) Se adivina que, si dos circunferencias son tangentes exteriores entre sí y sus radios son, respectivamente  $r$  y  $s$ , entonces



$$d^2 = (r + s)^2 - (r - s)^2; d = 2\sqrt{r \cdot s}$$

En el caso que nos ocupa, tenemos por un lado que:

$d_1 = 2\sqrt{R_1 \cdot r}$ , respecto de la circunferencia de radio  $R_1$

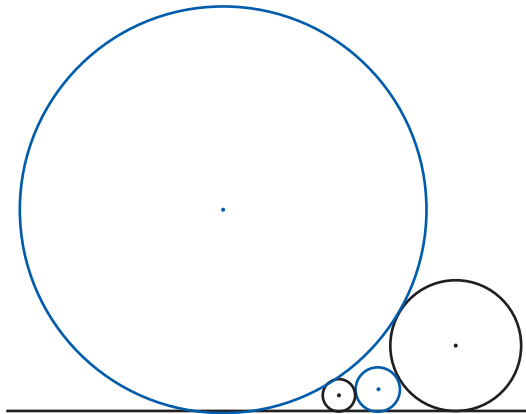
$d_2 = 2\sqrt{R_2 \cdot r}$ , respecto de la circunferencia de radio  $R_2$

(1)

En las circunferencias dadas, se verifica:

$$d^2 = p^2 - (R_1 - R_2)^2; d = \sqrt{p^2 - (R_1 - R_2)^2} \quad (2)$$

Relacionando ambos hechos (1) y (2), por un lado, tenemos que:



- En el caso de la circunferencia de menor radio,  $r_1$ :  $d_1 + d_2 = d$
- En el caso de la circunferencia de mayor radio,  $r_2$ :  $d_1 - d_2 = d$

En definitiva:

- En el caso de  $r_1$ :

$$2\sqrt{R_1 \cdot r_1} + 2\sqrt{R_2 \cdot r_1} = \sqrt{p^2 - (R_1 - R_2)^2}$$

$$r_1 = \frac{p^2 - (R_1 - R_2)^2}{4(\sqrt{R_1} + \sqrt{R_2})^2}$$

$$2\sqrt{R_1 \cdot r_2} - 2\sqrt{R_2 \cdot r_2} = \sqrt{p^2 - (R_1 - R_2)^2}$$

- En el caso de  $r_2$ :

$$r_2 = \frac{p^2 - (R_1 - R_2)^2}{4(\sqrt{R_1} - \sqrt{R_2})^2}$$

Para posicionar dichas circunferencias, ya una vez conocidos sus radios,  $r_1$  y  $r_2$ , usamos las relaciones  $d_1 = 2\sqrt{R_1 \cdot r_1}$  y  $d_2 = 2\sqrt{R_1 \cdot r_2}$ , respectivamente.

b) Si ambas circunferencias son ahora tangentes ( $p = R_1 + R_2$ ), deduzca en este caso, el valor de los radios  $r_1$  y  $r_2$  de las circunferencias tangentes.

En este caso particular,

$$\text{En el caso de } r_1: r_1 = \frac{R_1 R_2}{(\sqrt{R_1} + \sqrt{R_2})^2}$$

$$\text{En el caso de } r_2: r_2 = \frac{R_1 R_2}{(\sqrt{R_1} - \sqrt{R_2})^2}$$

c) Su construcción geométrica.

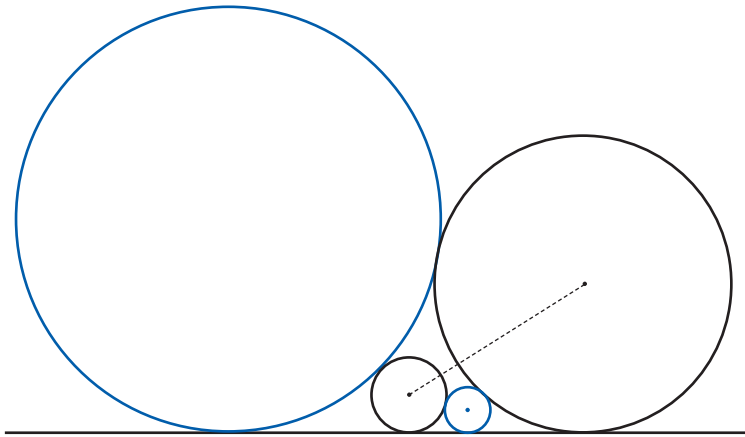
Los radios se obtendrían como cuarta proporcional y las distancias como medias proporcionales. Veámoslo:

$$\text{En el caso de } r_1: \frac{r_1}{p - (R_1 - R_2)} = \frac{p + (R_1 - R_2)}{R_1 + R_2 + 2\sqrt{R_1 R_2}}$$

$$d_1 = 2\sqrt{r_1 R_1}$$

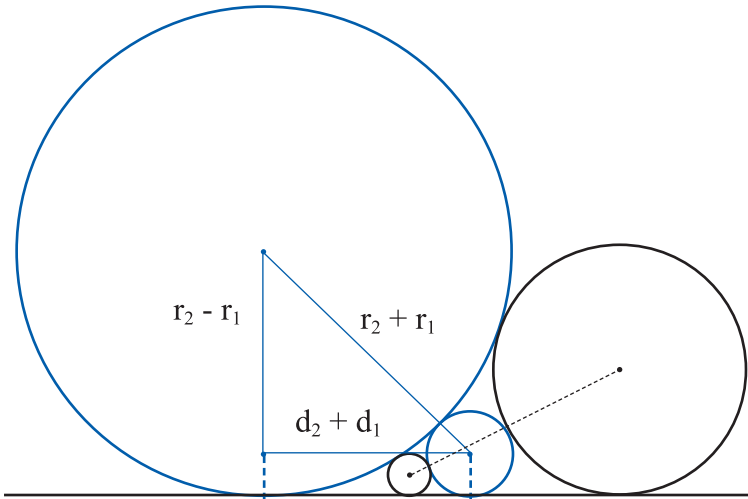
$$\text{En el caso de } r_2: \frac{r_2}{p - (R_1 - R_2)} = \frac{p + (R_1 - R_2)}{R_1 + R_2 - 2\sqrt{R_1 R_2}}$$

$$d_2 = 2\sqrt{r_2 R_1}$$



d) Pruebe que la relación  $\frac{1}{\sqrt{R_1}} = \frac{1}{\sqrt{r_1}} + \frac{1}{\sqrt{r_2}}$  es condición necesaria y suficiente para que las dos circunferencias solución del problema sean también tangentes entre sí. Verifica esta situación para el caso de que y halla el valor de p correspondiente.

Si las circunferencias solución del apartado a) son tangentes entre sí, deberá darse la siguiente situación:



Consecuentemente se verificará:

$$(d_2 + d_1)^2 = (r_1 + r_2)^2 - (r_1 - r_2)^2 \rightarrow d_2 + d_1 = 2\sqrt{r_1 r_2}$$

Ahora bien,  $d_1 = 2\sqrt{R_1 r_1}$  y  $d_2 = 2\sqrt{R_1 r_2}$ .

Por tanto, se tendrá:  $\sqrt{R_1 r_1} + \sqrt{R_1 r_2} = \sqrt{r_1 r_2} \rightarrow \sqrt{R_1 r_1} + \sqrt{R_1 r_2} = \sqrt{r_1 r_2} \rightarrow$

$$\sqrt{R_1} = \frac{\sqrt{r_1 r_2}}{\sqrt{r_1} + \sqrt{r_2}} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{R_1}} = \frac{1}{\sqrt{r_1}} + \frac{1}{\sqrt{r_2}} \quad (I)$$

Buscaremos ahora la condición que deberá cumplir p, una vez conocidos los valores de  $R_1$  y  $R_2$ . ( $R_1 < R_2$ )

Para los valores antes obtenidos, desarrollamos la expresión (I)

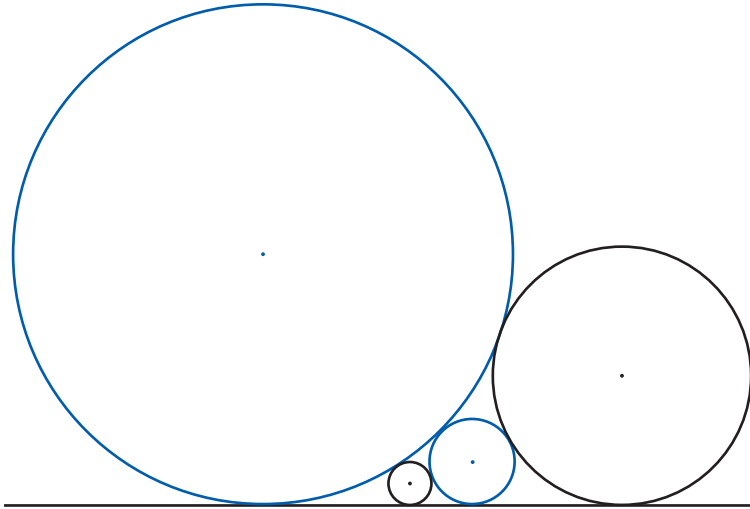
$$\left. \begin{aligned} r_1 &= \frac{p^2 - (R_1 - R_2)^2}{4(\sqrt{R_1} + \sqrt{R_2})^2} \\ r_2 &= \frac{p^2 - (R_1 - R_2)^2}{4(\sqrt{R_1} - \sqrt{R_2})^2} \end{aligned} \right\} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{r_1}} + \frac{1}{\sqrt{r_2}} = \frac{1}{\sqrt{R_1}} \rightarrow \frac{2(\sqrt{R_1} + \sqrt{R_2}) + 2(-\sqrt{R_1} + \sqrt{R_2})}{\sqrt{p^2 - (R_1 - R_2)^2}} = \frac{1}{\sqrt{R_1}}$$

$$\frac{4\sqrt{R_2}}{\sqrt{p^2 - (R_1 - R_2)^2}} = \frac{1}{\sqrt{R_1}} \rightarrow 4\sqrt{R_1 R_2} = \sqrt{p^2 - (R_1 - R_2)^2}; \quad \rightarrow \quad p = \sqrt{(R_1 - R_2)^2 + 16R_1 R_2}$$

$$p^2 = (R_1 - R_2)^2 + 16R_1 R_2 \rightarrow p = \sqrt{(R_1 - R_2)^2 + 16R_1 R_2}$$

En el caso particular que nos ocupa, siendo  $R_1 = \frac{1}{6} R_2$

$$p = \sqrt{\left(\frac{1}{6} R_2 - R_2\right)^2 + 16 \frac{1}{6} R_2 R_2} = \sqrt{\left(\frac{1}{6} R_2 - R_2\right)^2 + 16 \frac{1}{6} R_2^2} = \sqrt{\frac{25+96}{36}} R_2 \rightarrow p = \frac{11}{6} R_2$$





# NORMAS PARA LA PUBLICACIÓN

## ENVÍO DE ARTÍCULOS

Los artículos enviados a la revista Epsilon pasan por un proceso de revisión por pares. Para enviar un artículo para su evaluación, siga las siguientes instrucciones:

1. Los trabajos deben ser originales y de Educación Matemática. El artículo no debe haber sido publicado con anterioridad en una revista y los autores deben poseer los derechos de autor correspondientes. Los autores enviarán una carta firmada donde certifiquen que no está en proceso de evaluación en otras revistas
2. Los artículos pueden ser: de investigación (experimental o un estudio teórico), de ideas para el aula, de experiencias. También se aceptan artículos para la sección de resolución de problemas.
3. Todo artículo debe estar escrito en castellano y debe incorporar referencias bibliográficas, en todo caso, deben seguir las normas del manual de publicación de la APA (quinta edición) de acuerdo con el siguiente modelo:

**Para artículo de revista:** Leinhardt, G., Zaslavsky, O. y Stein, M. (1990). Functions, graphs and graphing: tasks. Learning and teaching. *Review of Educational Research*, 60(1), 1-64.

**Para libro:** Fernández, A. y Rico, L. (1992). *Prensa y educación Matemática*. Madrid: Síntesis.

**Para capítulo de libro, actas de congreso o similar:** Fuson, K. (1992). Research on whole number addition and subtraction. En Grouws, D. (ed.) *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, 243-275. MacMillan Publishing Company: New York.

**Para artículo de revista electrónica o información en Internet:** Cutillas, L. (2008). Estímulo del talento precoz en matemáticas. *Números* [en línea], 69. Recuperado el 15 de febrero de 2009, de <http://www.sinewton.org/numeros/>

4. El artículo deberá tener una extensión máxima de 7.000 palabras, incluyendo las tablas y los anexos si es de investigación. Para las secciones experiencias e ideas para el aula la extensión máxima será de 3.000 palabras. El formato de párrafo debe ser: letra Times New Roman tamaño 12 e interlineado sencillo y sin sangrado. Párrafos con espaciado anterior de 6 pts. Los subtítulos deben estar sin numeración.
5. El artículo debe incluir en español e inglés: (a) el título del trabajo, (b) un resumen con un máximo de 100 palabras, y (c) de tres a seis términos claves.

6. El archivo con el artículo debe enviarse en formato doc y pdf.
7. Los esquemas, dibujos, gráficas e imágenes deben enviarse por separado (en una carpeta aparte del documento de texto) en formato TIFF o JPG con una resolución mínima de 300 puntos por pulgada. Cada archivo debe estar claramente identificado y se debe indicar en el texto el lugar donde se ubica. Las fotos en las que aparezcan menores deberán estar pixeladas o tener autorización escrita del tutor (se adjuntará copia con el archivo).
8. Se debe enviar una segunda versión del artículo en la que no aparezcan los nombres de los autores, ni información relativa a ellos o que pueda servir para identificarlos (e.g., institución a la que pertenecen, citas y referencias bibliográficas propias, agradecimientos, datos del proyecto en el que se enmarca el trabajo). En esta versión, reemplace las citas y referencias bibliográficas por “Autor, 2008” o “Autor et al., 2008”. En las referencias bibliográficas propias se debe eliminar el título y el nombre de la revista o el título del libro donde se publica.
9. Los datos de los autores (nombre, institución a la que pertenecen, dirección de correo electrónico, dirección postal y número de teléfono y fax) deben incluirse en un archivo aparte. Utilice únicamente un apellido o los dos pero separados por un guión.
10. Los autores deben ser los dueños de los derechos de autor del documento que se envía y, en su caso, haber obtenido los derechos para publicar aquel material de otros autores que se incluya en el documento.
11. Cuando el artículo tenga más de un autor, éstos designarán a un autor de contacto quien se encargará de toda la comunicación con la revista Epsilon.
12. Los archivos se deben enviar al centro de documentación Thales [thales.matematicas@uca.es](mailto:thales.matematicas@uca.es) señalando si es un trabajo de investigación, experiencias o ideas para el aula.
13. Una vez aceptado el artículo para su publicación, se solicitará al autor de contacto que firme una carta de cesión de derechos de autor en nombre de todos los autores del trabajo.