76

Vol. 27 (3)
2010

epsilon

Revista de Educación Matemática

Editada por la S.A.E.M. "THALES"

La revista Epsilon está reseñada en:
IN-RECS, Dialnet y Base de Datos del Centro de Documentación Thales.

epsilon 76

Revista de Educación Matemática

Sociedad Andaluza de Educación Matemática "Thales"

Página de la revista: http://thales.cica.es/epsilon
Revista: epsilon@thales.cica.es

Edita
Sociedad Andaluza de
Educación Matemática "Thales"
Centro Documentación "Thales"
Universidad de Cádiz
C.A.S.E.M.
11510 PUERTO REAL (Cádiz)

Maquetación e impresión
Grafitrés, S.L.
Cristóbal Colón, 12
41710 Utrera (Sevilla)

Depósito Legal
SE-421-1984

I.S.S.N.
1131-9321

Período
3º cuatrimestre 2010

Suscripción
ESPAÑA: 42,00 euros
PAÍSES DEL EURO: 63,00 euros
RESTO DE PAÍSES: 90 $ USA
(3 NÚMEROS AL AÑO)

S.A.E.M. THALES

Manuel Torralbo Rodríguez
Presidente
Rafael Bracho López
Vicepresidente
Agustín Carrillo de Albornoz Torres
Secretario General
Encarnación Amaro Parrado
Secretaria de Administración y Tesorería

SEDE

Facultad de Matemáticas
Edif. de la E.S.I. Informática. Ala L2
Avda. Reina Mercedes, s/n.
Aptdo. 1160
41080 SEVILLA
Tlfno. 954 62 36 58

SEDE ADMINISTRATIVA DE LA SOCIEDAD Y REVISTA

Centro de Documentación THALES
Universidad de Cádiz
CASEM. Campus del Río San Pedro
11510 - PUERTO REAL (Cádiz)
Tlf. y Fax: 956 01 60 50
Email: thales.matematicas@uca.es

ALMERÍA

Juan Guirado Granados
Delegado Provincial
IES Río Aguas. Sorbas.
04270 ALMERÍA

CÁDIZ

Paloma Pascual Albarrán
Delegada Provincial
Departamento de Matemáticas
Universidad de Cádiz
CASEM. Campus del Río San Pedro
Telf.: 956 016 050
11510 - PUERTO REAL (Cádiz)

CÓRDOBA

Manuel T. Castro Alberca
Delegado Provincial

GRANADA

María Peñas Troyano
Delegado Provincial
Aptdo. 673
18080 - GRANADA

HUELVA

Sixto Romero Sánchez
Delegado Provincial
Aptdo. 1209
21080 - HUELVA

JAÉN

Agustín Carrillo de Albornoz Torres
Delegado Provincial

MÁLAGA

Salvador Guerrero Hidalgo
Delegado Provincial
Tlfno.: 952 358 710
Fax: 952 334 092

SEVILLA

Ana Mª Martín Caraballo
Delegada Provincial
Tlfno.: 954 623 658
Sede: Facultad de Matemáticas
Apdo. 1160
41080 SEVILLA

ÍNDICE

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

PRÓLOGO

Desde su constitución en el año 1981, la Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales se ha caracterizado por su preocupación por la innovación en la enseñanza de las Matemáticas así como por la incorporación de nuevos recursos y materiales que ayuden en la mejora de los procesos de enseñanza y aprendizaje.

Por tanto, desde la SAEM THALES se ha apostado por la incorporación de las TIC como recursos para el aula, por lo que se han realizado numerosas actividades de formación con el objetivo de facilitar al profesorado el cambio necesario para adaptar su metodología a estos nuevos recursos.

Desde nuestra sociedad la calculadora se considera un recurso TIC más, que ofrece multitud de posibilidades para el aula de Matemáticas, por lo que siempre hemos promovido su uso en todos los niveles educativos y en todos los ámbitos, incluyendo cualquiera de las pruebas de evaluación que en la actualidad tiene que realizar el alumnado.

Para fomentar su uso la SAEM THALES elaboró un manifiesto a nivel andaluz a favor del uso de la calculadora en el aula y en las pruebas de acceso a la Universidad y promovió que desde la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas se redactara un manifiesto de características similares que fue apoyado por las sociedades federadas.

En nuestro convencimiento de las posibilidades que la calculadora ofrece en sus distintas versiones presentamos este monográfico de la revista EPSILON con propuestas para utilizar distintos tipos de calculadoras, desde las científicas hasta las CAS (cálculo simbólico) pasando por las gráficas.

Animamos a los no convencidos a conocer todo lo que la calculadora nos ofrece, esperando que estas actividades les cambie su opinión.

Epsilón - *Revista de Educación Matemática* *2010, Vol. 27(3), nº 76, pp. 9-31*

La competencia matemática con la calculadora gráfica Classpad 330

Mauricio Contreras del Rincón
I.E.S. Benicalap, València
Universitat de València

Resumen: *Un objetivo básico de la educación debe ser "aprender a matematizar" y este aprendizaje solamente se puede dar a través de la resolución de problemas. En este artículo se pretende analizar de qué manera contribuye la calculadora gráfica ClassPad 330 a lograr este objetivo, es decir, cómo influye la calculadora en el desarrollo de las competencias básicas.*

Palabras clave: *competencias básicas, competencia matemática, calculadora gráfica, ClassPad 330.*

Summary: *A basic objective in mathematical education is "learning math models" and this learning only is posible by solve problem. This article analize the way of contribution of graphic calculator ClassPad 330 in ordre to skill this objective, so how is the influence of graphic calculator in development of basic skills.*

Key words: *basic skills, mathematic competence, graphic calculator, ClassPad 330.*

1. COMPETENCIA MATEMÁTICA

Según la LOE, "los objetivos de la Educación Secundaria pretenden lograr la adquisición de aquellas competencias matemáticas que se consideran básicas para un ciudadano del siglo XXI".

Según el informe PISA 2003 (INECSE, 2005) la "competencia matemática" se refiere a las capacidades individuales de los estudiantes para analizar, razonar y comunicar eficazmente cuando formulan y resuelven problemas matemáticos en una variedad de dominios y situaciones. Un estudiante es "matemáticamente competente" si es capaz de enfrentarse con los problemas cotidianos más variados por medio de las matemáticas, si se atreve a pensar con ideas matemáticas. Usar e implicarse con las matemáticas significa no sólo utilizar las matemáticas y resolver problemas matemáticos sino también comunicar, relacionarse con, valorar e incluso, apreciar y disfrutar con las matemáticas.

Por lo tanto, un objetivo básico de la educación debe ser "aprender a matematizar" y este aprendizaje solamente se puede dar a través de la resolución de problemas. En este artículo se pretende analizar de qué manera contribuye la calculadora gráfica a lograr este objetivo, es decir, cómo influye la calculadora en el desarrollo de las competencias básicas. Para este análisis se recogen algunos ejemplos extraídos del proyecto de innovación desarrollado en el IES Benicalap de Valencia ("Materiales y recursos para el desarrollo de la competencia matemática") y de algunos cursos de formación del profesorado impartidos por el autor en CEFIRES.

2. EL PROYECTO DE INNOVACIÓN DEL IES BENICALAP

Desde el punto de vista de las matemáticas, el objetivo básico de este Proyecto es conseguir incrementar las competencias matemáticas de los estudiantes, especialmente, la competencia de modelización, es decir, la capacidad para traducir un problema real al lenguaje matemático, construir el modelo matemático adecuado a la situación, interpretar de manera adecuada los parámetros del modelo para validarlo y saberlo utilizar para resolver el problema inicial, criticando la solución e intentando su generalización.

2.1. Tipos de competencias

Las competencias que se consideran en este Proyecto son las mismas que las propuestas en el informe PISA, añadiendo una relativa al uso de la tecnología. Así, se establecen dos grupos de competencias matemáticas en la ESO: a) competencias de contenidos y b) competencias de procesos, tal como se muestra en la siguiente tabla. Entre paréntesis aparece el número de expectativas relacionadas con cada competencia:

COMPETENCIAS DE PROCESOS	COMPETENCIAS DE CONTENIDOS
Pensar y razonar (4)	Cantidad (3)
Argumentar (2)	Espacio y forma (6)
Comunicar (7)	Cambio y relaciones (4)
Modelizar (3)	Azar e incertidumbre (4)
Plantear y resolver problemas (5)	
Representar (4)	
Utilizar el lenguaje simbólico, formal y técnico de las operaciones (2)	
Usar de manera eficaz la tecnología (3)	

El foco de atención de este trabajo lo constituyen las competencias de procesos. Dichas competencias tratan de centrar la educación en el estudiante, en su aprendizaje y en el significado funcional de dicho proceso. Las competencias muestran los modos en que los estudiantes actúan cuando hacen matemáticas. Las tres primeras son competencias cognitivas de carácter general, mientras que las cuatro siguientes son competencias matemáticas específicas. En la siguiente tabla se muestran las capacidades que se incluyen en cada una.

Pensar y razonar	• Plantear cuestiones propias de las matemáticas (¿Cuántos hay? ¿Cómo encontrarlo? Si es así,... entonces, etc). • Conocer los tipos de respuestas que ofrecen las matemáticas a estas cuestiones. • Distinguir entre diferentes tipos de enunciados (definiciones, teoremas, conjeturas, hipótesis, ejemplos, afirmaciones condicionadas). • Entender y utilizar los conceptos matemáticos en su extensión y sus límites.
Argumentar	• Conocer lo que son las pruebas matemáticas y cómo se diferencian de otros tipos de razonamiento matemático. • Disponer de sentido para la heurística (¿Qué puede (o no) ocurrir y por qué?). • Crear y expresar argumentos matemáticos.
Comunicar	• Expresarse en una variedad de vías, sobre temas de contenido matemático, de forma oral y también escrita. • Entender enunciados de otras personas sobre estas materias en forma oral y escrita.
Modelar	• Estructurar el campo o situación que va a modelarse. • Traducir la realidad a una estructura matemática. • Interpretar los modelos matemáticos en términos reales. • Trabajar con un modelo matemático. • Reflexionar, analizar y ofrecer la crítica de un modelo y sus resultados. • Comunicar acerca de un modelo y de sus resultados (incluyendo sus limitaciones). • Dirigir y controlar el proceso de modelización.
Plantear y resolver problemas	• Plantear, formular y definir diferentes tipos de problemas matemáticos (puros, aplicados, de respuesta abierta, cerrados). • Resolver diferentes tipos de problemas matemáticos mediante una diversidad de vías.
Representar	• Decodificar, interpretar y distinguir entre diferentes tipos de representación de objetos matemáticos y situaciones, así como las interrelaciones entre las distintas representaciones. • Escoger y relacionar diferentes formas de representación de acuerdo con la situación y el propósito.
Utilizar el lenguaje simbólico, formal y técnico y las operaciones	• Decodificar e interpretar el lenguaje simbólico y formal y entender sus relaciones con el lenguaje natural. • Traducir desde el lenguaje natural al simbólico y formal. • Manejar enunciados y expresiones que contengan símbolos y fórmulas. • Utilizar variables, resolver ecuaciones y comprender los cálculos.

Junto a estas competencias, hay que tener en cuenta también las competencias de contenidos que se muestran en la siguiente tabla, por estar interrelacionadas.

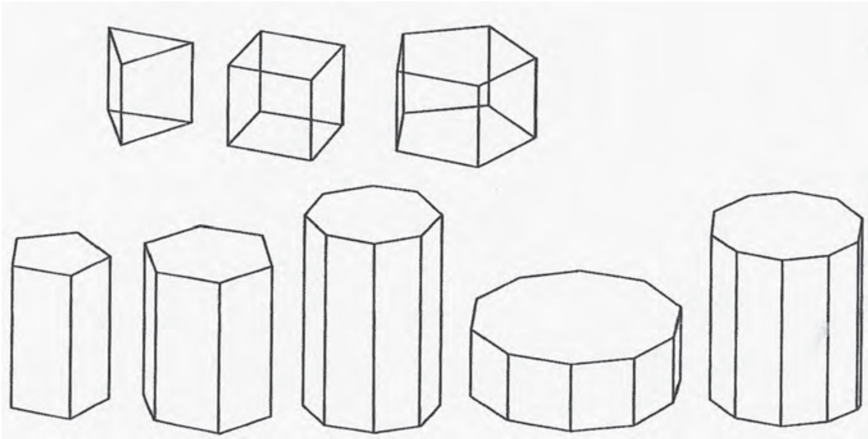
Cantidad	• Comprender los números, las diferentes maneras de representarlos, las relaciones entre ellos y los conjuntos numéricos. • Comprender los significados de las operaciones y cómo se relacionan unas con otras, aplicando este conocimiento a la resolución de problemas en contexto. • Calcular con fluidez (mentalmente, por escrito o con calculadora) y hacer estimaciones razonables en función del contexto.
Espacio y forma	• Analizar las características y propiedades de figuras geométricas de dos y tres dimensiones y desarrollar razonamientos matemáticos sobre relaciones geométricas. • Localizar y describir relaciones espaciales mediante coordenadas geométricas y otros sistemas de representación. • Aplicar transformaciones y usar la simetría para analizar situaciones matemáticas. • Utilizar la visualización, el razonamiento matemático y la modelización geométrica para resolver problemas. • Comprender los atributos mensurables de los objetos, y las unidades, sistemas y procesos de medida. • Aplicar técnicas, instrumentos y fórmulas apropiados para obtener medidas.
Cambio y relaciones	• Comprender patrones, relaciones y funciones. • Representar y analizar situaciones y estructuras matemáticas utilizando símbolos algebraicos. • Usar modelos matemáticos para representar y comprender relaciones cuantitativas. • Analizar el cambio en contextos diversos.
Azar e incertidumbre	• Formular preguntas que puedan abordarse con datos y recoger, organizar y presentar datos relevantes para responderlas, • Seleccionar y utilizar los métodos estadísticos apropiados para analizar los datos, • Desarrollar y evaluar inferencias y predicciones basadas en datos, • Comprender y aplicar conceptos básicos de Probabilidad.

2.2. Actividades para el aula

¿Cómo influye la calculadora gráfica ClassPad en el desarrollo de la competencia matemática? En los siguientes ejemplos se analiza el papel de la calculadora como herramienta para la resolución de problemas y para la puesta en acción de las competencias, especialmente en las actividades de modelar.

2.2.1. *Ejemplo de actividad de modelar en 1º ESO: prismas*

Las figuras que tienes a continuación representan prismas de distinta base:



Construye con palillos y plastilina o dibuja alguna más. Completa la siguiente tabla:

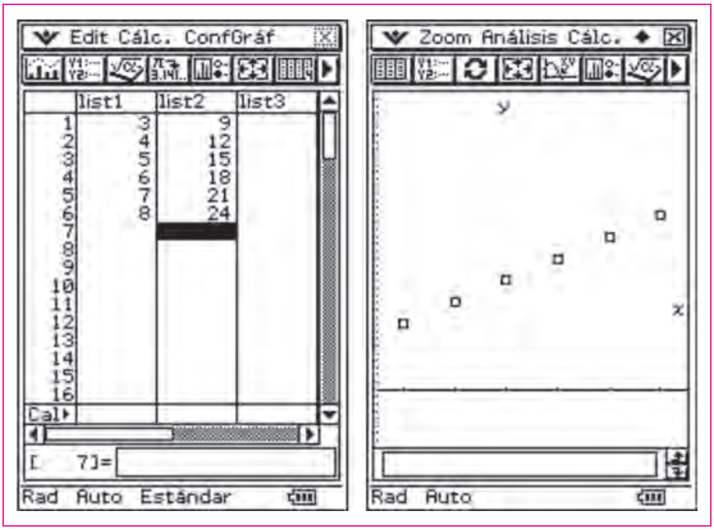
Nº de LADOS en la base	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*... ...*
Nº de ARISTAS							

a) ¿Cómo indicarías el número de aristas de un prisma que tuviera "n" lados en la base?

b) Si un prisma tiene 3 lados en la base podemos escribir que tiene 3 caras. ¿Cuántas caras tiene un prisma con 10 lados en la base? ¿Y otro que tenga "n" lados en la base?

c) ¿Cuántos lados en la base tiene un prisma con 20 vértices?

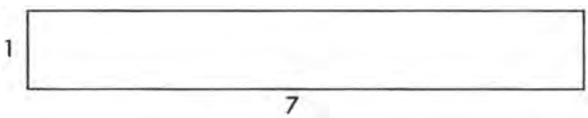
Para el desarrollo de esta actividad se necesitan prismas reales como modelo y un número suficiente de palillos para poder realizar las construcciones. Se requiere hacer cada figura y efectuar un conteo directo. Una vez completada la tabla, se trata de buscar regularidades, relacionando el número de lados de la base con el número de aristas. La regularidad es fácilmente expresable usando el lenguaje oral, pero el paso más difícil es escribir la fórmula que sintetiza la regularidad observada. Ese paso requiere, primero un nivel de conexión, en el que el estudiante asocia el número de aristas con los múltiplos de 3, es decir, un concepto geométrico (número de aristas) está asociado a un concepto aritmético (múltiplos de tres). La ClassPad permite completar la actividad haciendo una representación gráfica, aunque previamente hay que analizar si se pueden o no unir los puntos de la gráfica, teniendo en cuenta su dominio en el conjunto de los naturales. Para ello, basta editar la tabla de valores y a continuación representar gráficamente la tabla.



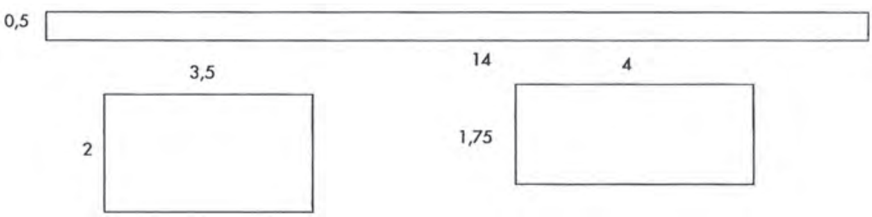
Otra conexión es con la proporcionalidad: el número de aristas es proporcional al número de lados de la base, siendo 3 la constante de proporcionalidad. ¿Tiene algo que ver esa constante de proporcionalidad con la representación gráfica? Con la ClassPad puede verse que sí: la constante de proporcionalidad marca la inclinación de la recta en la que están situados los puntos de la gráfica.

2.2.2. *Ejemplo de actividad de modelar en 2º ESO: área 7*

Este rectángulo tiene de área 7 unidades cuadradas:



Pero no es el único. Aquí tienes otros que también tienen área 7:

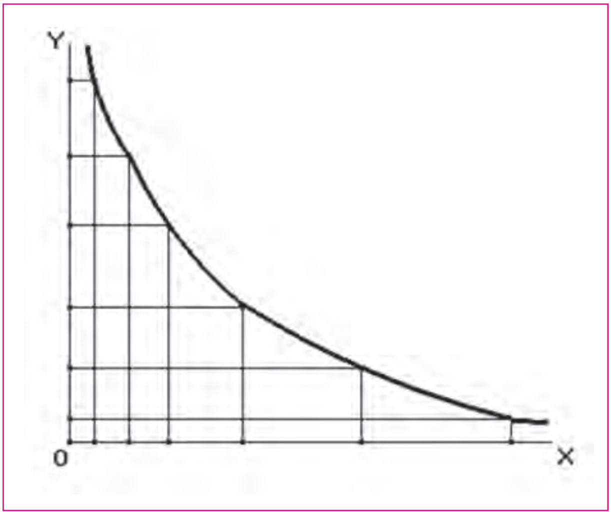


Dibuja unos cuantos más y escribe sus dimensiones. Completa la siguiente tabla:

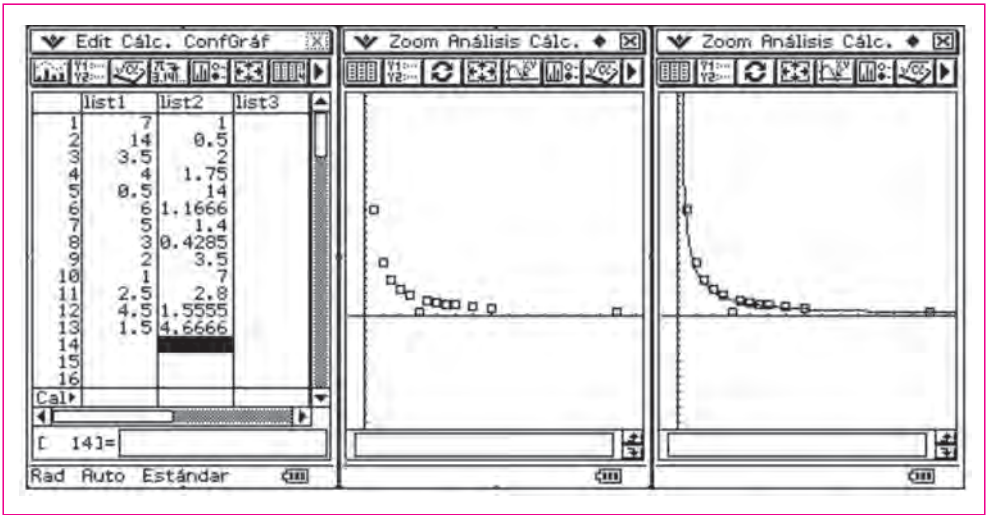
b (base)	*7*	*14*	*3,5*	*4*	… …
a (altura)	*1*	*0,5*	*2*	*1,75*	

Busca una fórmula que relacione la base y la altura de cada rectángulo.

Al igual que en 1º de ESO, realizar esta actividad requiere experiencia previa en la construcción de tablas y en la representación gráfica de funciones. La gráfica se puede obtener con facilidad, recortando los rectángulos en cartulina y superponiendo todos ellos, de forma que tengan un vértice común (que tomamos como origen de coordenadas. Los puntos de la gráfica serían los vértices opuestos al vértice común.



También es posible realizar la gráfica mediante la construcción de la tabla de valores y su representación gráfica con la ClassPad. La búsqueda de la fórmula que relaciona las dos dimensiones presenta dificultades debido a que el modelo no es lineal. No obstante, la ClassPad permite ajustar una curva de regresión, cuya expresión algebraica se puede obtener fácilmente. Los estudiantes deben conectar la actividad con el campo de la proporcionalidad para concluir que la base y la altura son inversamente proporcionales. Deben apreciar las diferencias entre un modelo de proporcionalidad directa y uno de proporcionalidad inversa y deben saber expresarlas verbalmente y por escrito.



2.2.3. *Ejemplo de actividad de modelar en 3º ESO: busca fórmulas*

En cada caso, representa gráficamente la tabla y busca una fórmula que relacione las dos variables en estudio:

a) Distancia recorrida por un vehículo que circula a velocidad constante.

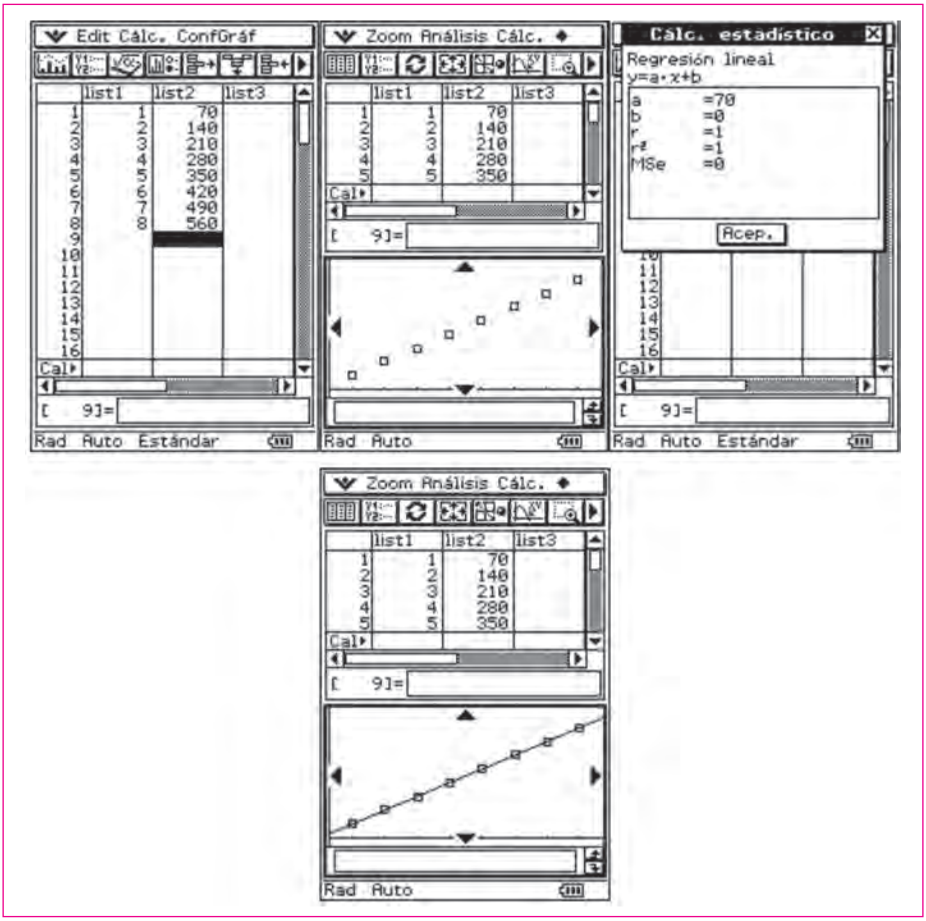
TIEMPO (horas)	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*
DISTANCIA (km)	*70*	*140*	*210*	*280*	*350*	*420*	*490*	*560*

b) Dinero que le va quedando a Pedro mientras va gastando sus ahorros a razón de 4 euros a la semana.

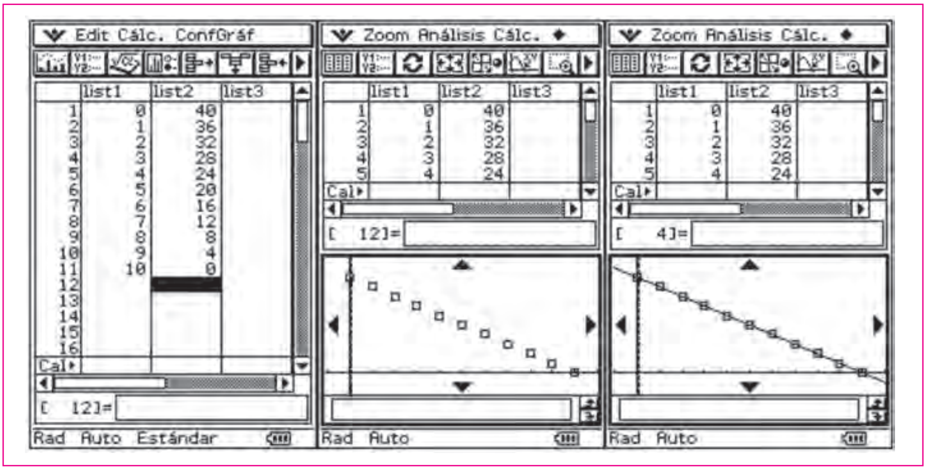
TIEMPO (semanas)	*0*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*
DINERO (euros)	*40*	*36*	*32*	*28*	*24*	*20*	*16*	*12*	*8*	*4*	*0*

Para poder hacer esta actividad, los estudiantes han debido tener experiencia previa en: a) la construcción de gráficas a partir de tablas, b) el uso de distintas escalas en los ejes de coordenadas, c) el reconocimiento de modelos lineales y el significado de sus parámetros, d) la diferencia entre un modelo de proporcionalidad directa y un modelo afín (no se puede aplicar una regla de tres para obtener valores de una función afín, a pesar de ser un modelo lineal), e) la obtención de fórmulas a partir de tablas, f) la lectura e interpretación de tablas y gráficos.

En la propuesta a) se puede recurrir a la calculadora gráfica para obtener el gráfico de dispersión y buscar después una recta que se ajuste a los datos.



De forma similar, la propuesta b) se puede hacer con la calculadora gráfica mediante la construcción de la tabla y su representación gráfica.

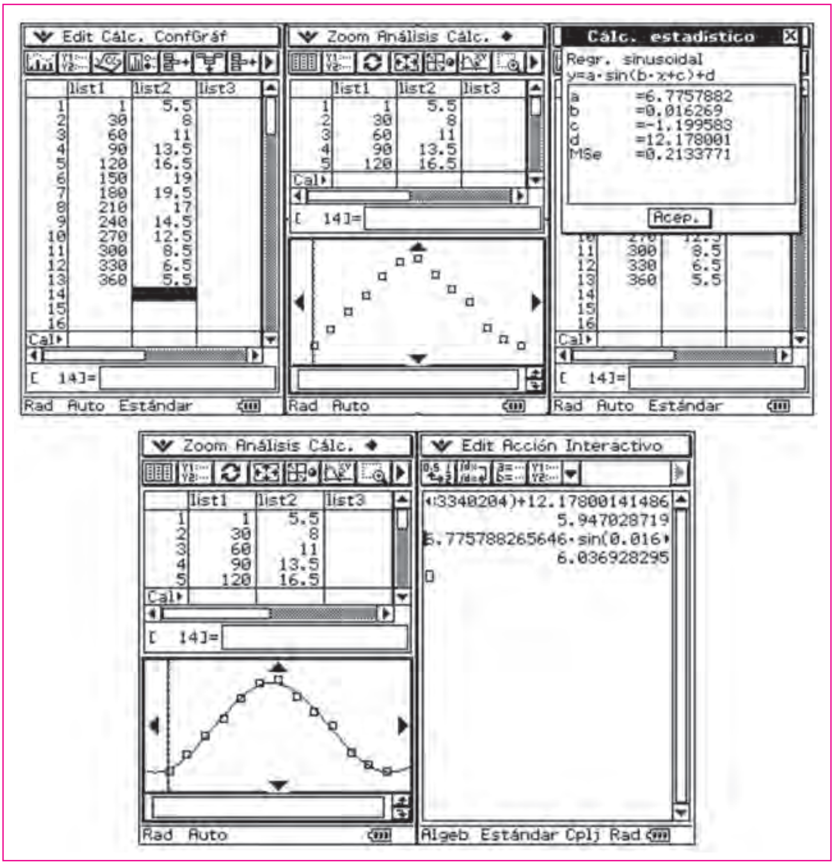


2.2.4. *Ejemplo de actividad de modelar en 4º ESO: horas de luz solar*

En la siguiente tabla se muestra el número de en Alaska durante un año. Busca un modelo matemático que permita estimar el número de horas de luz en febrero y abril del año siguiente:

	E	*F*	*M*	*A*	*M*	*J*	*J*	*A*	*S*	*O*	*N*	*D*	*E*
F	*1*	*30*	*60*	*90*	*120*	*150*	*180*	*210*	*240*	*270*	*300*	*330*	*360*
T	*5,5*	*8*	*11*	*13,5*	*16,5*	*19*	*19,5*	*17*	*14,5*	*12,5*	*8,5*	*6,5*	*5,5*

Teniendo en cuenta la naturaleza de los datos, la mejor forma de abordar esta tarea es recurrir a la calculadora gráfica para obtener la nube de puntos o diagrama de dispersión y ensayar distintos modelos funcionales. La forma del diagrama sugiere que el mejor modelo es de tipo sinusoidal. Con la calculadora gráfica es posible obtener directamente la fórmula de la función, lo que permite usar el modelo para estimar el número de horas de luz en febrero y abril. Previamente los estudiantes deben conocer el manejo de la calculadora gráfica para realizar análisis de regresión.



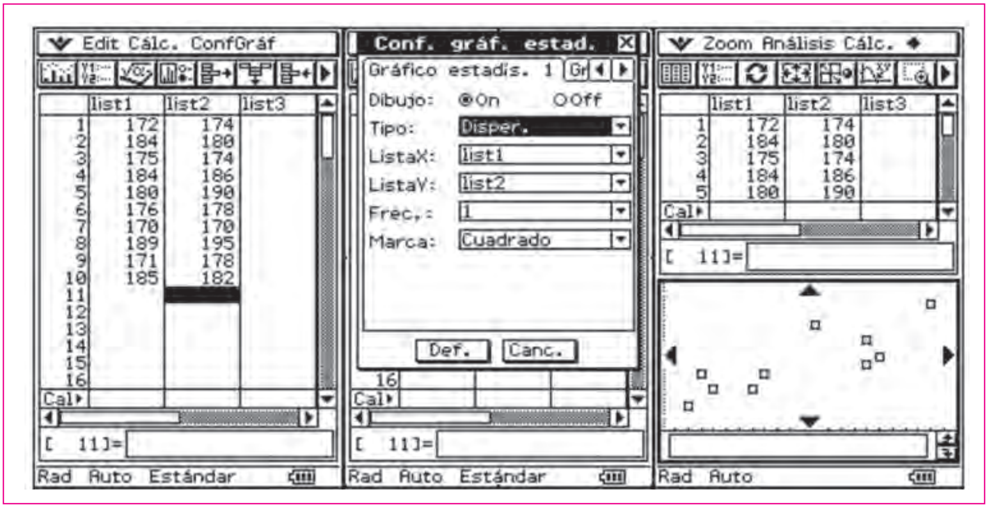
2.2.5. *Otro ejemplo de actividad de modelar en 4º ESO: padres e hijos*

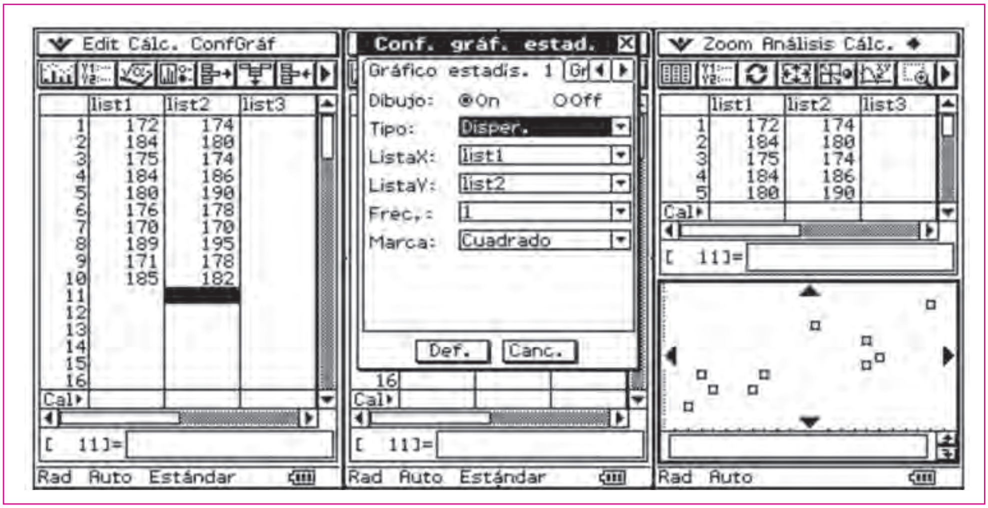
La altura de 10 padres y de su primer hijo varón está reflejada en la siguiente tabla:

TALLA DEL PADRE (X)	*TALLA DEL HIJO (Y)*
172	*174*
184	*180*
175	*174*
184	*186*
180	*190*
176	*178*
170	*170*
189	*195*
171	*178*
185	*182*

Utiliza la calculadora gráfica para representar estos datos. ¿Qué altura cabe esperar en un hijo cuyo padre mide 182 cm?.

Plantear la resolución del problema "manualmente" sería inapropiado, teniendo en cuenta la escala de los ejes. Por ello, se recomienda usar la calculadora gráfica (o una hoja de cálculo) para representar la nube de puntos. Una vez obtenida la gráfica, se trataría de buscar el modelo de mejor ajuste, lo que se puede hacer por medio de un análisis de regresión.



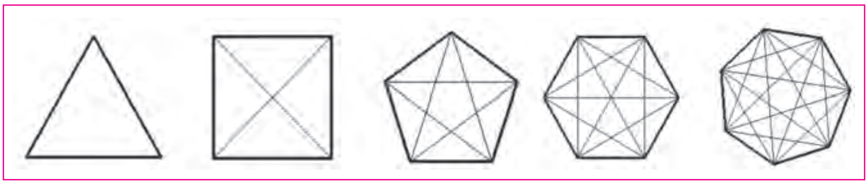


2.2.6. *Algunas dificultades*

La tarea del profesorado consistente en diseñar o buscar actividades que encajen en cada una de las "cajas" que llamamos competencias, resulta especialmente compleja. La razón es que un buen número de actividades interconectan varias competencias, de la misma forma que interrelacionan contenidos diferentes (de las propias matemáticas o, a veces, de las matemáticas con otras áreas). Esto hace que sea difícil decidir cuál es la competencia predominante en la actividad y es fuente de discusiones.

Por ejemplo, la siguiente tarea es fácilmente identificable con la competencia "comprender patrones, relaciones y funciones":

¿Cuál es el número de diagonales de un polígono de n lados?



ya que la propia tarea da pistas sobre la estrategia a seguir, consistente en analizar casos particulares y tratar de formular una conjetura a partir del análisis de dichos casos. En definitiva, lo esencial en la actividad es "buscar un patrón".

Sin embargo, ya no está claro que la siguiente tarea corresponda a la misma caja.

A un vendedor de juegos para ordenadores le dan a elegir entre dos modalidades de contrato:

Modalidad a).- 800 € mensuales, más 3 €. por cada nueva venta a partir de los 175 juegos vendidos.

Modalidad b).- 800 €. fijos más 50 €. por cada juego vendido desde el principio.

Determina la expresión que da la ganancia mensual en función de los juegos vendidos, según la modalidad de contrato elegida. Dibuja las gráficas. ¿Cuántos juegos debe vender para que le compense uno u otro contrato?

Probablemente porque esta actividad es más dispersa (se piden varias cosas, y difíciles) y, además, no está tan direccionada a la búsqueda del patrón, (aunque, desde luego, hay que encontrar dos patrones, uno para cada modalidad de contrato, y además, expresarlos algebraicamente). Pero, aunque los dos patrones-funciones estén explicitados algebraicamente, no será hasta la representación gráfica en unos mismos ejes de coordenadas cuando se comprenda la diferente naturaleza de cada uno. Por lo tanto, lo esencial en esta actividad no es encontrar el patrón, sino comprender el patrón y utilizar esa comprensión para comparar, a través de las gráficas, los modelos que siguen los dos tipos de contratos y después decidir.

Por tanto, ¿deberíamos poner esta tarea en la caja "plantear y resolver problemas" o en la caja "comprender patrones, relaciones y funciones"? Y otra discusión aparejada es la que tiene lugar sobre la distinción entre patrón, relación y función. ¿Son la misma idea?

3. SOBRE LA EVALUACIÓN

3.1. Tipos de tareas

Cada una de las competencias enunciadas puede tener diferentes niveles de profundidad; las tareas propuestas a los estudiantes son de diferentes tipos y muestran distintos niveles de conocimiento. En el estudio PISA se consideran tres niveles de complejidad a la hora de considerar los ítems con los que evaluar las competencias:

• *Primer nivel: reproducción*

Recoge aquellos ejercicios que exigen básicamente la reiteración de los conocimientos practicados, como son las representaciones de hechos y problemas comunes, recuerdo de objetos y propiedades matemáticas familiares, reconocimiento de equivalencias, utilización de procesos rutinarios, aplicación de algoritmos, manejo de expresiones con símbolos y fórmulas familiares, o la realización de operaciones sencillas.

• *Segundo nivel: conexión*

Recoge problemas que no son simplemente rutinarios, pero que están situados en contextos familiares o cercanos. Plantean mayores exigencias para su interpretación y requieren establecer relaciones entre distintas representaciones de una misma situación, o bien enlazar diferentes aspectos con el fin de alcanzar una solución.

• *Tercer nivel: reflexión*

Las tareas de este tipo requieren cierta comprensión y reflexión por parte del alumno, creatividad para identificar conceptos o enlazar conocimientos de distintas procedencias. Requieren competencias más complejas, implican un mayor número de elementos, exigen generalización y explicación o justificación de los resultados y toma de decisiones.

Según esta clasificación, la evaluación requiere que se tenga en cuenta los tres tipos de tareas. Una evaluación que solamente se centre en el nivel de reproducción sería inservible para analizar el grado de desarrollo de la competencia matemática de los estudiantes. Además, en el proceso de evaluación se deben combinar diferentes modalidades de actividades: de respuesta abierta o cerrada, de respuesta breve o compleja, de elección simple o múltiple, etc. En definitiva, podemos distinguir entre ejercicios, problemas e investigaciones.

Un ejercicio es una tarea de tipo rutinario, que para su resolución no requiere más que recordar una técnica sencilla ya practicada con anterioridad.

Un problema requiere establecer conexiones entre conceptos y relaciones, buscar técnicas matemáticas apropiadas, analizar el proceso de resolución y validarlo.

Una investigación es una situación abierta en la que, a veces, no está clara la pregunta, hay que tomar decisiones sobre el camino a tomar, retomar la tarea y validarla constantemente.

Las tareas que deben proponerse a los alumnos son de los tres tipos, ya que es la única forma de asegurar la posibilidad de que los estudiantes alcancen su propio nivel de desarrollo de la competencia matemática.

3.2. Actividades del nivel de reproducción

Las actividades del nivel de reproducción se limitan a reproducir técnicas o algoritmos previamente aprendidos. Son tareas que pueden desarrollarse directamente con la calculadora, sin necesidad de hacer conexiones con diferentes partes de las matemáticas, ni reflexionar sobre el proceso de resolución, estrategias a utilizar, etc. A continuación vamos a ver algunos ejemplos para cada bloque de contenidos:

• *Cantidad*

1) Efectúa las siguientes operaciones:

a) $\frac{3}{4}+\frac{2}{3}-\frac{1}{2}$ b) $\left(\frac{3}{5}-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(\frac{5}{3}+\frac{3}{4}\right)$ c) $\left(\frac{7}{5}-\frac{1}{11}\right)\cdot\left(\frac{3}{5}-2\right)$

c) $\left(\frac{8{,}4}{28{,}7-0{,}47}\right)^3$ d) $\sqrt[3]{\frac{1{,}91}{4{,}2-3{,}766}}$ e) $\left(\frac{1}{7{,}6}-\frac{1}{18{,}5}\right)^3$

2) Simplifica las siguientes expresiones radicales:

a) $3\sqrt{2}+4\sqrt{8}-\sqrt{32}+\sqrt{50}$ b) $\frac{3}{2-\sqrt{3}}$ c) $\frac{21}{\sqrt{8}+\sqrt{5}}$ d) $\sqrt{18}+\sqrt{96}-\sqrt{242}$

3) Efectúa la división y simplifica:

$$\frac{x^2}{x+5}$$

4) Expresa en una única fracción:

$$\frac{1}{x+2}+\frac{x}{x-2}$$

5) (Ecuación irracional). Utilizando el comando **solve**, resuelve la ecuación:

$$6+\sqrt{2x+3}=x$$

6) (Ecuación bicuadrada). Utiliza el comando **solve** para resolver la ecuación:

$$x^4-5x^2+4=0$$

7) (Ecuaciones trigonométricas). Resuelve las siguientes ecuaciones trigonométricas: a) $\sin(x) = \sqrt{2/2}$; b) $\tan(x) = 2$; c) $\sin(x) = \cos(x)$. Utiliza para ello el comando **solve**. Comprueba qué ocurre si se trabaja en el modo de grados y en el modo de radianes.

8) Halla el producto escalar de los vectores: a = (3, 4) y b = (−4, 3). ¿Qué ángulo forman?

9) Encuentra una matriz C que cumpla 2A+3B−C = 0, siendo:

$$A=\begin{bmatrix}3 & 5\\ 1 & 4\\ 6 & 2\end{bmatrix} \text{ y } B=\begin{bmatrix}3 & -1\\ 2 & 5\\ 6 & 3\end{bmatrix}$$

10) Utilizando el método de la matriz inversa, resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones lineales:

$$a)\ \left.\begin{array}{l} x + y = 2 \\ 2x - 2y = -4 \end{array}\right\} \quad b)\ \left.\begin{array}{l} 2x + y = 1 \\ x - y = 2 \end{array}\right\}$$

• ***Incertidumbre***

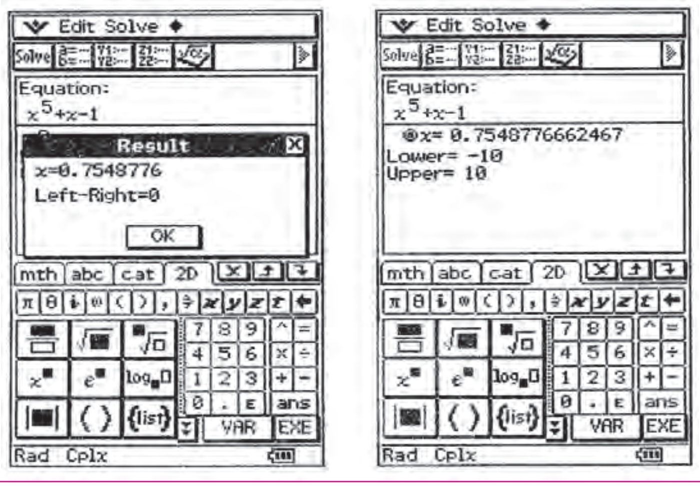
Un estudio de un fabricante de televisores indica que la duración media de un televisor es de 10 años, con una desviación típica de 0,7 años. Suponiendo que la duración media sigue una distribución normal:

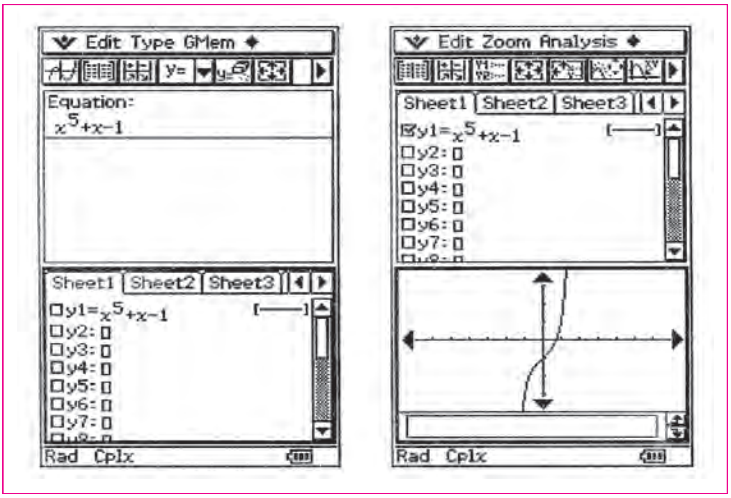
a) Calcula la probabilidad de que un televisor dure más de 9 años.

b) Calcula la probabilidad de que dure entre 9 y 11 años.

3.3. Actividades del nivel de conexión

1) Resuelve aproximadamente la ecuación: $x^5 + x - 1 = 0$ con la aplicación Resolución numérica, tomando como límites inferior y superior −10 y 10, respectivamente. Comprueba que la solución es, aproximadamente, 0.75. A continuación, toca el botón **Editor de gráficos**, selecciona la expresión $x^5 + x - 1$ y arrástrala con el lápiz táctil a la función **y1**. Pulsa en la casilla de selección de dicha función y a continuación toca el botón para representarla gráficamente. Si es necesario, modifica las dimensiones de la ventana de visualización, utilizando el menú . Comprueba en la ventana de gráficos 2D que, efectivamente, la gráfica corta al eje de abcisas en x=0,75.

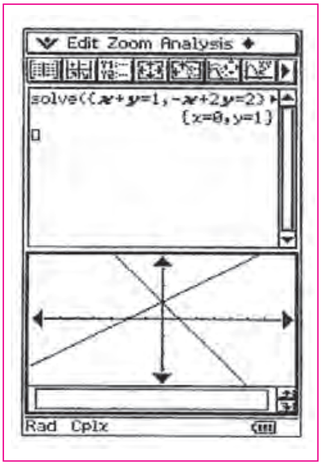




2) Resuelve el sistema de ecuaciones:

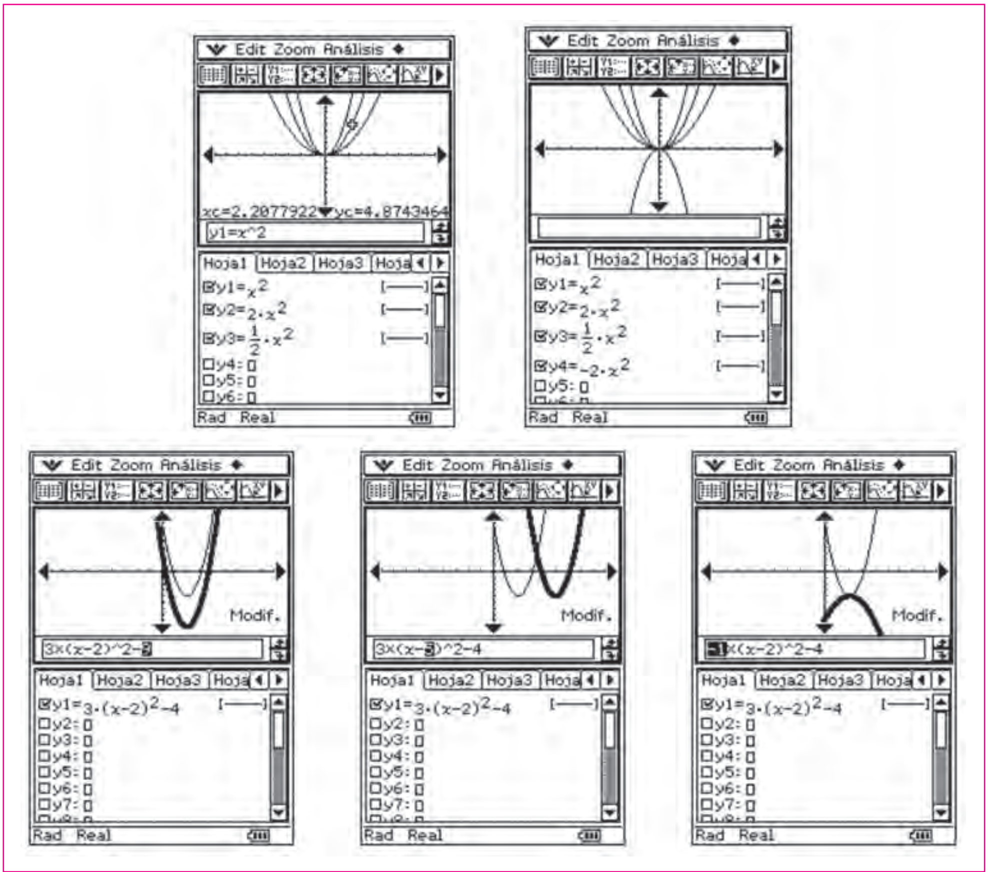
$$\left.\begin{array}{l} x + y = 1 \\ -x + 2y = 2 \end{array}\right\}$$

Utiliza para ello el comando solve de la aplicación **Principal**. Posteriormente, comprueba geométricamente el resultado. Para ello, en el editor de gráficos , introduce las funciones y1=−x+1, y2=(1/2)x+1, activa sus casillas y represéntalas gráficamente tocando el botón . Si es necesario modifica las dimensiones de la ventana gráfica. Comprueba gráficamente que la solución es la obtenida con el comando **solve**.

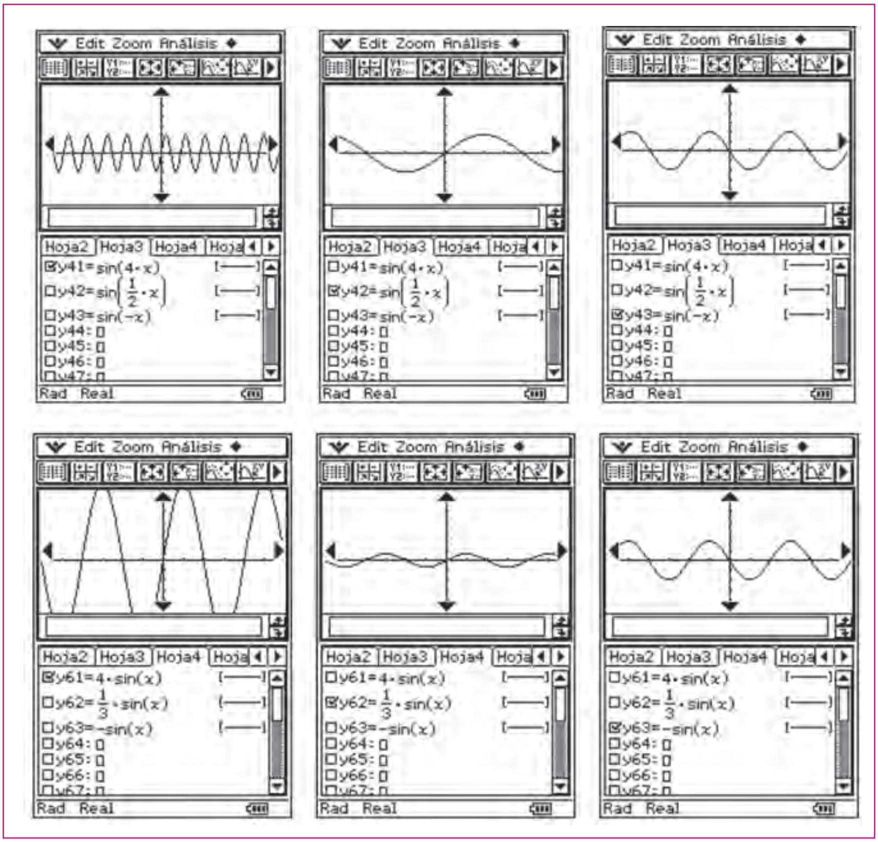


3.4. Actividades del nivel de reflexión

1) (Funciones cuadráticas) Investiga el significado de los parámetros *a*, *b* y *c* en la expresión *y=a(x–b)2+c* y en la expresión $y=ax^2+bx+c$.



2) (Funciones trigonométricas) Investiga el significado de los parámetros *a*, *b*, *c* y *d* en la expresión *y = a + b sen (cx +d)*.



4. ACTIVIDADES ASOCIADAS A COMPETENCIAS

Mostramos a continuación algunos ejemplos en los que la calculadora ClassPad 330 permite desarrollar algunas de las competencias propias de las matemáticas.

• *Pensar y razonar*

1) Al trazar las tres medianas de un triángulo, éste queda dividido en 6 triángulos. ¿Qué parte del área del triángulo original es el área de cada uno de esos triángulos?

2) Demuestra que la composición de dos simetrías de ejes paralelos es una traslación e indica sus características (dirección, vector de traslación).

3) Demuestra que la composición de dos simetrías de ejes secantes es un giro e indica sus características (centro y ángulo de giro).

• ***Representar***

1) Calcula

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{\sqrt{x+3} - 2}$$

Utilizando el botón en el teclado **[2D]** obtenemos:

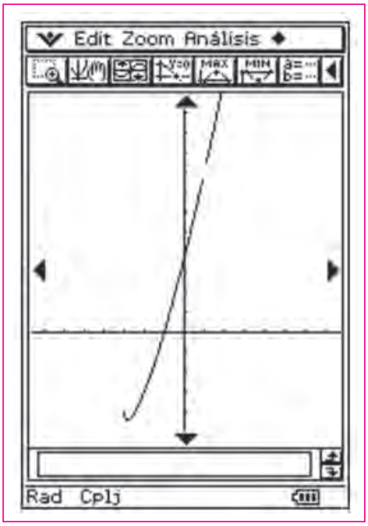
$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{\sqrt{x+3} - 2}$$

$$8$$

La representación gráfica en el menú **Gráficos y Tablas** de la función:

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{\sqrt{x+3} - 2}$$

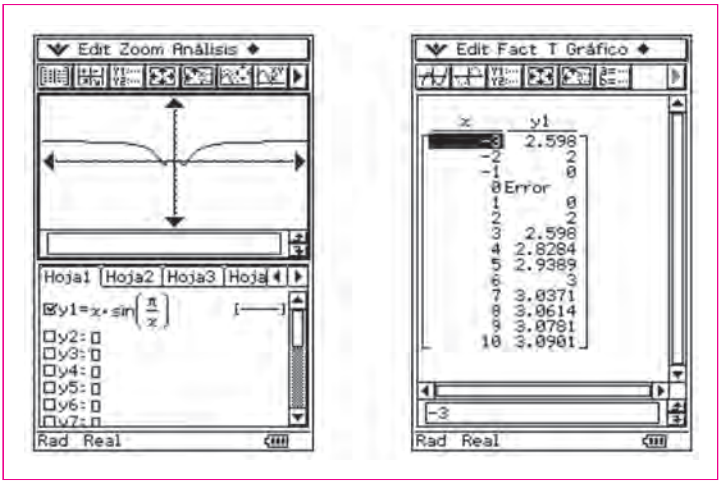
muestra que hay una discontinuidad para x=8.



2) Estudiar la continuidad (también podríamos decir el límite) de la función en el punto x=0

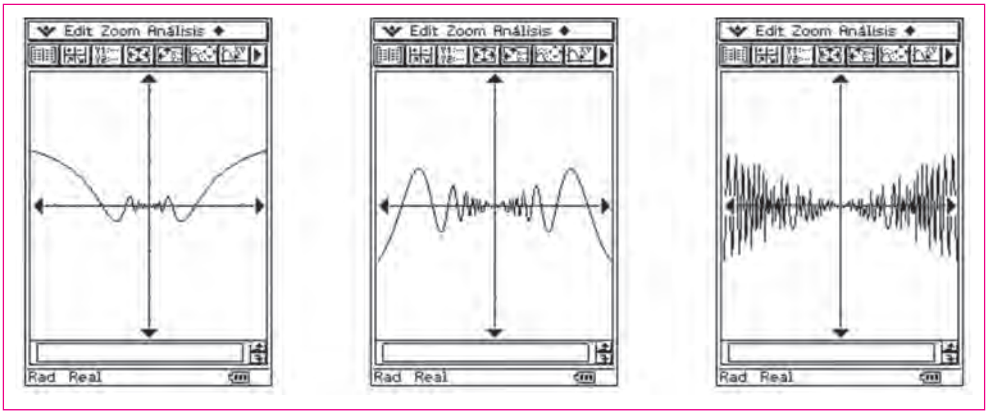
$$y = x\,\text{sen}\frac{\pi}{x} \text{ en el punto } x=0$$

Para mayor comodidad cambiaremos la unidad de medida de ángulos en radianes, en **/ Preferencias / Configuración / Formato básico / ángulo**.

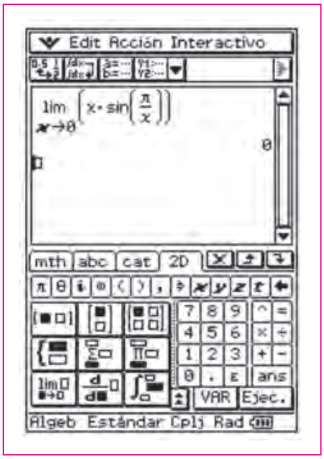


Se observa en una primera aproximación que la función parece continua en todos los puntos. Visualizando la tabla de valores con el botón , veremos ver que en el cero no está definida.

Estudiemos gráficamente el comportamiento de la función en cero utilizando el **Zoom Aumentar** varias veces, o cambiando con la opción **Zoom Cuadro**.



Viendo las gráficas, se puede observar que la función converge a cero, tanto por la derecha como por la izquierda, pero no está definida para ese valor. Observamos desde la gráfica que la función tiene una discontinuidad evitable en x=0. Podemos confirmar el valor del límite usando el teclado **2D** de la aplicación **Principal**.



• *Plantear y resolver problemas*

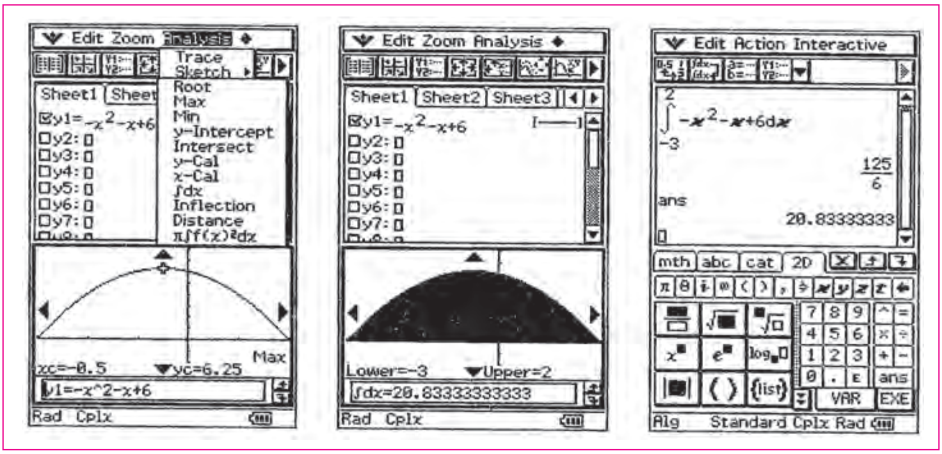
Según Arquímedes, el área de un segmento parabólico de base *b* y altura *h* es igual a:

$$A = \frac{2}{3}\, b \cdot n\ .$$

Por ejemplo, para el segmento de la parábola $y = -x^2 - x + 6 = (x - 2)\cdot(x+2)$ comprendido en el intervalo [−3, 2], se cumple que b=5 y h=6,25. Por tanto, según Arquímedes, su área es:

$$A = \frac{2}{3} b \cdot h = \frac{2}{3} \cdot 5 \cdot 6{,}25 = \frac{125}{6} \approx 20.83\ .$$

Utiliza la Classpad para representar gráficamente este segmento parabólico y para comprobar si se cumple la fórmula de Arquímedes.



5. CONCLUSIONES

La utilización de materiales manipulables y de recursos tecnológicos es esencial para desarrollar la competencia matemática. En particular, las ideas matemáticas requieren de soportes materiales que los estudiantes puedan manipular para analizar situaciones, formular conjeturas y comprobar propiedades. Es evidente que la calculadora gráfica es uno de dichos soportes.

En las actividades que se han presentado en este artículo se ponen en acción algunas de las tareas que permiten desarrollar la competencia matemática: modelar, pensar y razonar, representar, argumentar, conectar, comunicar, plantear y resolver problemas. Todas ellas son tareas que surgen de manera natural, por el mero hecho de usar la calculadora CAS, y las habilidades que los estudiantes ponen en juego con ellas no se podrían activar con los métodos clásicos de lápiz y papel, especialmente por la carga algebraica que contienen los algoritmos habituales. Con la ClassPad, la visualización de los problemas es inmediata, lo que favorece el tratamiento geométrico, disminuyendo la carga algebraica. Esta afirmación no va en detrimento del álgebra, más bien al contrario, estimula y favorece el aprendizaje del álgebra, pero de otra manera, ya que ahora es posible "ver" el álgebra, comprender el significado geométrico de las ecuaciones, ampliar el banco de datos de imágenes de curvas, funciones y construcciones geométricas.

En definitiva, la ClassPad es una buena herramienta que puede ayudar a estudiantes y profesores en el desarrollo de la competencia matemática.

BIBLIOGRAFÍA

NCTM (2003) Principios y Estándares para la Educación Matemática. Granada: S.A.E.M Thales.

PISA 2003. Pruebas de Matemáticas y de Solución de Problemas. (2005). Madrid: MEC, INECSE, SUMA.

Contreras, M. (2006) El currículum de Matemáticas con la ClassPad 300. Valencia (España). Contreras, M (ed.). ISBN: 978-84-689-8709-5.

Contreras, M. (2004) Matemáticas con la ClassPad 300: una alternativa dinámica. Curso de formación. Página web de la División Didáctica CASIO en www.flamagas.com. 2004.

Mora, J. A. y otros (2004) El estudio de funciones con calculadora gráfica. www.aulacasio.com.

Páginas web: Aula Casio: www.aulacasio.com; Abel Martín: www.aulamatematica.com; Mauricio Contreras: www.mauriciocontreras.es.

Epsilón - Revista de Educación Matemática 2010, Vol. 27(3), nº 76, pp. 33-41

El efecto del uso de la calculadora CAS en el nivel de álgebra alcanzado por los estudiantes con bajo rendimiento en matemáticas

Kim In Kyung
Lew, Hee-Chan
Universidad Nacional de Educación de Korea

Resumen: *En este artículo se observa el efecto del uso de la calculadora CAS en el estudio de álgebra por estudiantes con bajo rendimiento en matemáticas, llamados aquí alumnos de bajo rendimiento. Los participantes eran 70 estudiantes de décimo grado con bajo rendimiento de un instituto situado en el área metropolitana, que nunca habían usado una calculadora matemática educativa.*

Se dividió a los participantes objeto a estudio en dos grupos: un grupo experimental que contaba con la ayuda de una calculadora CAS para resolver los ejercicios, y un grupo control que sólo contaba con lápiz y papel para la resolución de los mismos ejercicios.

Para los dos grupos el contenido de los ejercicios era el mismo, pero la estructura era distinta.

El contenido consistía en números y operaciones, ecuaciones e inecuaciones y funciones. Las actividades del grupo control se resolvían sólo con el lápiz y papel y se comparaban las soluciones con las del profesor. El grupo experimental primero resolvía las actividades usando lápiz y papel y luego de nuevo, usando la calculadora CAS. Se les dijo que compararan los dos procesos de resolución de problemas, que compararan el procedimiento del lápiz y el papel con el de la calculadora CAS. El grupo experimental mostró aprendizaje metacognitivo usando el método de la calculadora CAS. Las actividades se llevaron a cabo una vez al día durante un mes. Los dos grupos realizaron tests de matemáticas antes y después de las actividades. Las calificaciones medias del grupo control y del experimental fueron muy distintas. Los resultados del análisis mostraron que, comparados con los resultados del test previo, los resultados del grupo experimental mejoraron considerablemente más que los del grupo control.

INTRODUCCIÓN

Actualmente, la enseñanza de matemáticas está influenciada por la tecnología. La tecnología mejora la capacidad del alumno para aprender, e influye en el estudio de las áreas consideradas fundamentales en matemáticas, es decir, en la enseñanza y el aprendizaje de las áreas que se tratan de forma sistemática. Muchos profesores de matemáticas apoyan el uso de la tecnología en la enseñanza de matemáticas. Algunos creen que la calculadora tiene un efecto mayor que el ordenador en la enseñanza de matemáticas ([2]) ya que la calculadora es más portátil y económica para sus alumnos que el ordenador.

TIMSS (Trenes in Internacional Math. And Science Study), encontró que el uso de la calculadora se relaciona en todos los países con la enseñanza de matemáticas.

De hecho, el uso de la calculadora ha llegado a ser una herramienta importante para hacer el test de TIMSS y para el aula ([1]). La calculadora se usa actualmente en el aprendizaje y la enseñanza de matemáticas en muchos países. El objetivo del uso de la tecnología es la mejora del entendimiento conceptual de los estudiantes a través de la exploración de otros métodos de resolución de problemas. Es decir, en lugar de restringir las formas de aprendizaje de los estudiantes, la tecnología ofrece una oportunidad exploratoria para los estudiantes ([2]).

Este artículo se centra en los estudiantes de bajo rendimiento que están cada vez más desatendidos en las clases de matemáticas. Después de que los estudiantes de bajo rendimiento recibieran 14 clases de aprendizaje experimental con la calculadora CAS, se observaron cambios en los logros matemáticos. Así pues, este estudio tiene como objetivo que los estudiantes de bajo rendimiento disfruten en clase de matemáticas, sin dejar de lado los requerimientos curriculares actuales. El uso de la calculadora CAS en el aprendizaje permite a los alumnos explorar nuevos métodos de resolución de problemas, los cuales pueden mejorar la comprensión de conceptos. Lo más importante es que una calculadora CAS puede ayudar a los estudiantes de bajo rendimiento no sólo a hacer cálculos, sino a desarrollar el conocimiento matemático.

En consecuencia, este trabajo ha intentado desarrollar el pensamiento algebraico y el nivel matemático en general de los estudiantes de bajo rendimiento.

MÉTODO

Cada día los estudiantes participaban en actividades diseñadas para el estudio de 50 minutos de duración desde las 5 pm a las 5:50 pm. Los sujetos eran 70 estudiantes de bajo rendimiento elegidos entre 495 estudiantes de décimo grado de un instituto del área metropolitana de una ciudad. Nunca habían usado una calculadora para aprender matemáticas.

Los sujetos se dividieron en dos grupos: un grupo experimental que estudió con ayuda del CAS (Classpad300), y un grupo control que estudió sólo con la ayuda de lápiz y papel. Había dos profesores por clase para enseñar a los dos grupos.

Para obtener los datos iniciales, se realizó un test previo en ambos grupos, en dos aulas al mismo tiempo donde utilizaron exclusivamente lápiz y papel. También se hizo un test posterior con los participantes. El diseño de los dos test tenia por objetivo comparar la mejora en el rendimiento de matemáticas, de esta manera en ambos test sólo se permitió el lápiz y el papel para la resolución de los problemas. Los dos tests consistían en 25 problemas de dificultad variada, desde nivel de octavo (colegio) hasta nivel de décimo grado (instituto). Asimismo, los contenidos eran números y operaciones, ecuaciones e inecuaciones, y funciones de álgebra.

El grupo experimental participó en 14 sesiones diseñadas para el estudio; sin embargo, hubo tres sesiones adicionales: una para el test previo, otra para el test posterior, y otra clase adicional sobre el uso de la calculadora CAS. Hubo 16 sesiones para el grupo control: 14 fueron idénticas a las del grupo experimental excepto por la metodología de la clase, y dos sesiones fueron para los tests previo y posterior. El grupo experimental primero realizó el test previo y la clase sobre el uso de la calculadora CAS y después tuvieron las 14 clases usando documentos desarrollados para la actividad. Después de las clases experimentales, los estudiantes realizaron un test posterior. Durante las clases, los profesores explicaron los contenidos matemáticos y los métodos de resolución posibles con las calculadoras CAS durante aproximadamente 15 minutos. Los 35 minutos restantes los estudiantes se concentraron en los ejercicios de la actividad. Los documentos diseñados para la actividad hacían participar a los dos grupos en actividades metacognitivas mientras estudiaban, y los documentos constaban de los mismos contenidos y problemas.

La única diferencia era el proceso de resolución. Al grupo control se les encargó resolver los problemas en 25 minutos, a continuación comparar sus respuestas con las del profesor y reflexionar sobre las respuestas. Al grupo experimental se les encargó primero resolver los problemas con lápiz y papel y luego con la calculadoras CAS. Después tenían que comparar y reflexionar sobre los dos procesos de resolución y sobre las soluciones obtenidas. Por ejemplo, para resolver $x=2x-4$, los estudiantes no podían simplemente usar el comando **solve**, sino que tenían que proceder paso a paso. Además, el profesor deliberadamente no les enseñaba comandos como **solve** a los estudiantes. De ahí que los estudiantes tenían que resolver este tipo de ecuaciones de la manera siguiente usando una calculadora CAS. Entonces los estudiantes necesitaban comparar y reflexionar sobre sus dos repuestas y procesos de resolución.

$$x = 2x-4$$
$$(x = 2x-4) - 2x$$
$$-x = -4$$
$$(-x = -4)* - 1$$
$$x = 4$$

Se recogieron los datos de los documentos de los ejercicios de los estudiantes, del test previo y del test posterior. Para analizar el rendimiento en matemáticas, especialmente la mejora en álgebra, se compararon las notas obtenidas en los test previo y posterior del grupo experimental y del grupo control y se analizaron los resultados.

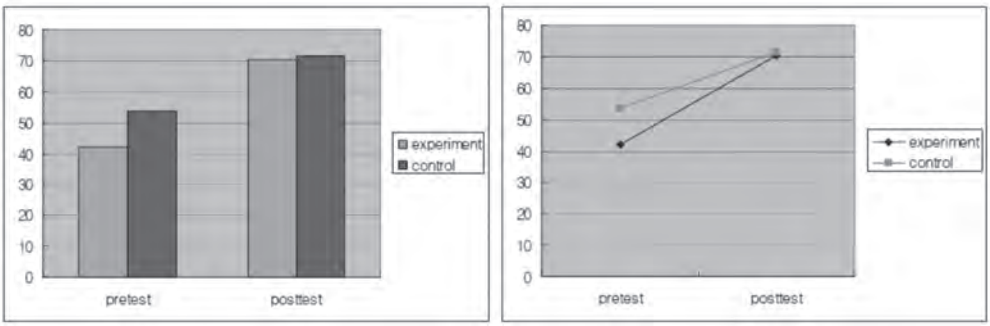
RESULTADOS Y ANÁLISIS

Los participantes se dividieron originalmente en 32 estudiantes en el grupo experimental y 35 en el grupo control. Sin embargo sólo se pudo hacer el análisis final de 26 estudiantes del grupo experimental y 30 del grupo control. El descenso en el número de estudiantes no estuvo relacionado con la no asistencia a las clases, sino por no haber realizado el test previo o posterior o alguno de los ejercicios de la actividad. Los datos de estos estudiantes se excluyeron deliberadamente de este estudio.

Efecto en el rendimiento matemático entre los grupos

Se investigó, por comparación, los cambios en el rendimiento matemático de los dos grupos. La nota media en el test previo de los 26 estudiantes en el grupo experimental fue de 41,94 y la nota media de los 30 estudiantes en el grupo control fue de 53,46. Las medias sugieren que al principio, los dos grupos se separaron a partes iguales por su rendimiento en matemáticas según los resultados de dos exámenes de mitad de periodo, dos exámenes finales y varios tests durante el curso anterior. Sin embargo, el objetivo principal de este artículo es el rendimiento en álgebra, y los resultados del test previo para el álgebra difieren entre los dos grupos.

GRÁFICO 3.1
CAMBIOS EN LAS NOTAS MEDIAS DE MATEMÁTICAS DEL GRUPO CONTROL Y EXPERIMENTAL



Antes de empezar con un mes de clases experimentales usando actividades diseñadas, la nota media del grupo experimental en el test previo fue de 41.94 y la nota media del grupo control fue de 53.46. En el test posterior, la nota media del grupo experimental aumentó en 28.53 es decir, un 68.03%, y la nota media del grupo control aumentó en 17.83 es decir un 33.35%. Esto implica que el grupo experimental mejoró más que el grupo control.

La tabla 3.1 muestra los resultados del test previo y posterior para los dos grupos. Como se menciona anteriormente, los dos grupos mejoraron como muestran las notas medias y modificaron sus desviaciones standard.

TABLA 3.1
RESULTADOS DE LOS TESTS PREVIO Y POSTERIOR

Group	Participants	Pretest		Posttest	
		Mean	Standard Deviation	Mean	Standar Deviation
Experiment	26	41.9423	22.11566	70.4654	13.70133
Control	30	53.4633	25.12392	71.2933	22.10264
Total	56	48.1143	24.26426	70.9089	18.52271

Para determinar estadísticamente cualquier diferencia significativa entre los dos grupos en el rendimiento matemático, se realizó un análisis de covarianza (ANCOVA) tomando el rendimiento matemático del test previo como la covariable y el rendimiento matemático del test posterior como la variable dependiente.

TABLA 3.2
RESULTADOS DEL ANCOVA

Variation	Sum of Squares	Degree of Freedom	Mean Square	F
Covariate (pretest)	12373.956	1	12373.956	101.106*
Group	20139.845	2	10069.922	82.280*
Error	6486.481	53	122.386	

* : p < . 001

En la tabla 3.2, se ve que estadísticamente hay diferencias significativas en los resultados de acuerdo al análisis ANCOVA cuando se usa el rendimiento matemático del test previo como covariable y el rendimiento matemático del test posterior como la variable dependiente (F=82.280, p<.001). De ahí que el grupo experimental que usó las calculadoras CAS parece haber mejorado más que el grupo control en el rendimiento matemático global.

GRÁFICO 3.2
EFECTO EN EL RENDIMIENTO MATEMÁTICO EN CADA GRUPO

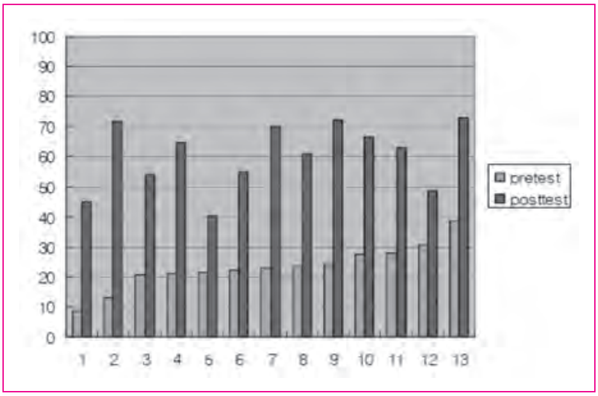
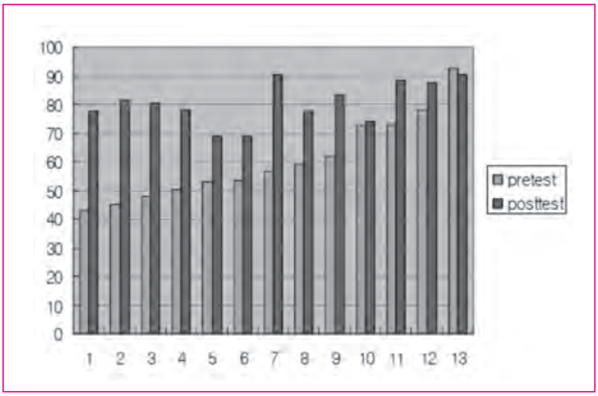


GRÁFICO 3.3
EFECTO EN EL RENDIMIENTO MATEMÁTICO ENTRE LOS GRUPOS DE ESTUDIANTES DEL EXPERIMENTO



Los gráficos 3.2 y 3.3 muestran los resultados en el rendimiento matemático del grupo experimental en el test previo y posterior. El test previo se usó para separar los 26 estudiantes del grupo experimental en dos grupos (grupo inferior: 13 estudiantes; y grupo superior: 13 estudiantes). El gráfico 3.2 compara los resultados del test previo y posterior de los 13 estudiantes del grupo inferior, y el gráfico 3.3 compara los resultados del test previo y posterior de los 13 estudiantes del grupo superior. En el gráfico 3.2, los 13 estudiantes mejoraron como mínimo 18 puntos respecto al test previo, y la mejora más impresionante fue de 58.7. En el gráfico 3.3 casi todos los estudiantes mejoraron entre 1.6 y 36.4 puntos. Un estudiante descendió de un 92.7 en el test previo a un 90.3 en el test posterior. De ahí que, generalmente, los estudiantes de un nivel inicial más bajo mejoraron significativamente más que los estudiantes de nivel inicial más alto (ver Tabla 3.3). Aún más, la diferencia entre el grupo superior y el inferior en el grupo experimental disminuyó de 37.1 puntos en el test previo a 20.1 puntos en el posterior.

TABLA 3.3
EFECTO EN EL RENDIMIENTO MATEMÁTICO DE LOS DOS GRUPOS DEL GRUPO EXPERIMENTAL

	Mean of Pretest	Mean of Posttest	increased scores
Bottom Group (13 students)	23.4	60.4	37
Top Group (13 students)	60.5	80.5	20

Efecto en el rendimiento matemático entre los estudiantes del grupo control

GRÁFICO 3.4
RENDIMIENTO MATEMÁTICO DE LOS 15 ESTUDIANTES DEL GRUPO INFERIOR DE CONTROL (PREDETERMINADOS POR EL TEST PREVIO)

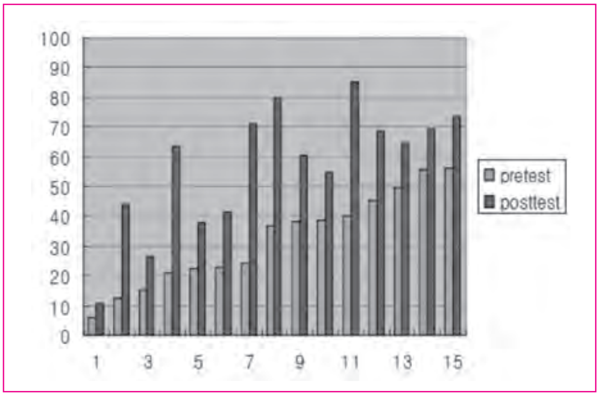
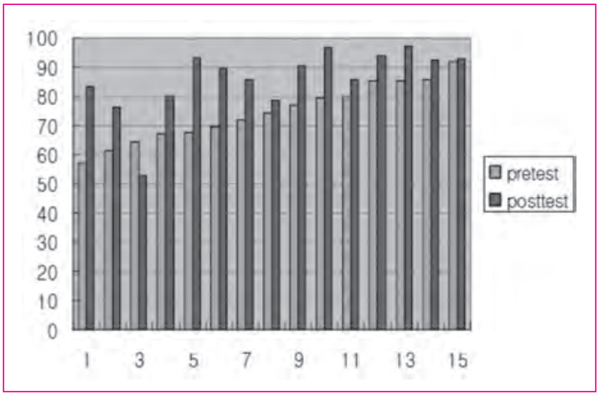


GRÁFICO 3.5
RENDIMIENTO MATEMÁTICO DE LOS 15 ESTUDIANTES DEL GRUPO SUPERIOR DE CONTROL (PREDETERMINADOS POR EL TEST PREVIO)



Los gráficos 3.4 y 3.5 muestran los resultados del grupo control en el test previo y posterior. El test previo se usó para separar a los 30 estudiantes del grupo control en dos grupos (grupo inferior: 15 estudiantes, y grupo superior: 15 estudiantes). El gráfico 3.4, muestra que todos los estudiantes del grupo inferior mejoraron. El incremento de las notas varió entre 4.8 y 46.8 puntos. El gráfico 3.5 muestra que los estudiantes del grupo superior mejoraron sus notas de test entre 0.7 y 26.1 desde el test previo al posterior. Sólo uno de los estudiantes disminuyó desde un 64.1 en el test previo a un 52.8 en el posterior. En consecuencia, de forma similar a los resultados del grupo experimental, los estudiantes del grupo inferior mostraron una mayor mejora en el test posterior que el grupo de estudiantes del grupo superior (ver Tabla 3.4). Más aún, la diferencia entre el grupo superior y el inferior del grupo control disminuyó de 42.2 puntos en el test previo a 29.2 puntos en el test posterior.

TABLA 3.4
EFECTO EN EL RENDIMIENTO MATEMÁTICO DE LOS DOS GRUPOS DEL GRUPO CONTROL

	Mean of Pretest	Mean of Posttest	Increased scores
Bottom Group (15 students)	32.4	56.7	24.4
Top Group (15 studens)	74.6	85.9	11.3

Efecto en el rendimiento matemático de los estudiantes del grupo experimental y del grupo control

En las secciones 1 y 2, los resultados experimentales muestran que la nota media del test posterior del grupo inferior del grupo experimental es significativamente similar a la nota media del test previo del grupo superior del grupo experimental. Sin embargo, la nota media del test posterior del grupo inferior del grupo control no alcanza la nota media del test previo del grupo superior del grupo control. La investigación de los grupos inferiores de los grupos experimental y de control en las gráficas 3.2 y 3.4 dio como resultado que la nota del test posterior del grupo inferior del grupo experimental mejoraron entre 40 y 70 puntos entre todos los estudiantes, una media de 50 puntos. Además la nota del test posterior del grupo inferior del grupo control mejoró entre 10 y 80 puntos, así que no parece haber diferencia. También la nota media del test posterior del grupo inferior del grupo experimental (60.4 puntos) fue mayor que la nota del test posterior del grupo inferior del grupo control (56.7 puntos).

La investigación de los grupos superiores de los grupos experimental y de control en los gráficos 3.3 y 3.5 encontró que las notas del test posterior del grupo superior del grupo experimental mejoraron de 68.8 a 90.3 puntos entre todos los estudiantes. De forma similar, las notas del test posterior del grupo superior del grupo control mejoraron de 70 a 80 puntos, excepto por un estudiante que disminuyó en su nota. La mejora entre los grupos inferiores de los dos grupos principales fue de entre 37 y 24.4 puntos. El grupo inferior del grupo control fue 9 puntos superior al grupo inferior del grupo experimental en el test previo, pero el grupo inferior del grupo experimental fue 3.7 puntos superior que el grupo inferior del grupo control en el test posterior. Más aún, la nota del test posterior (60.4 puntos) del grupo inferior del grupo experimental era mayor que la nota del test posterior (56.7 puntos) del grupo inferior del grupo control. El grupo superior del grupo control fue 14.1 puntos mayor que el grupo superior del grupo experimental en el test previo, pero el grupo superior del grupo control fue 5.4 puntos superior que el grupo superior del grupo experimental del test posterior.

4. CONCLUSIÓN

Como resultado del estudio se encontró que los estudiantes del grupo experimental lograron resultados estadísticamente superiores que los del grupo control. Esto es, los estudiantes con bajo rendimiento matemático tuvieron una influencia positiva en el aprendizaje al usar una calculadora CAS en vez de sólo lápiz y papel. En consecuencia,pensamos que si los estudiantes de rendimiento normal usaran la calculadora CAS, mostrarían una mejora en el aprendizaje respecto al uso exclusivo de lápiz y papel.

REFERENCIAS

1. Schmidt, W. H., Mcknight, C. C., et al. (1999). Facing the Consequences: Using TIMSS for a closer look at U.S. mathematics and science education. Dordrecht, Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

2. Stewart, S. (2005). Concerns Relating to the CAS Use at University Level. Proceedings of the Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia. Held at RMIT, Melbourne, 7-9 July, 2005.

Epsilón - Revista de Educación Matemática *2010, Vol. 27(3), nº 76, pp. 43-71*

A tu ritmo: "Verify", una herramienta TIC para seguir haciendo matemáticas de forma autónoma y fomentar la investigación matemática

Abel J. Martín Álvarez
IES Pérez de Ayala, Oviedo
Marta Martín Sierra
Facultad de Matemáticas, Universidad de Oviedo

Resumen: *Las TIC, en cualesquiera de las formas que pueden presentarse, son una poderosa herramienta para el aprendizaje autónomo del alumnado y, entre otras muchas cosas, puede ayudar a respetar los diferentes ritmos individuales. La novedosa aplicación **Verify** que mostramos, sirve como refuerzo para comprobar si las manipulaciones numéricas o alfabéticas que estamos haciendo son correctas, sin darnos, en ningún momento, la solución. Es un tutor que nos guía en actividades de simplificación y/o desarrollo de expresiones, comprobando que la nueva que se ha introducido es equivalente a la original. Si lo es, conseguirá una respuesta placentera, pero si no es así, necesitará corregirse el error antes de continuar, incitando a pensar y razonar sobre la negativa de la solución expuesta. Como muestra, presentamos una colección de actividades que sirvan como referencia y nos den ideas para que sea el propio profesorado quien lo utilice y diseñe sus propias actividades en el aula, sin olvidarnos, como podremos apreciar, que es un importante elemento de investigación matemática.*

Palabras Clave: *Verify, matemáticas, TIC, aprendizaje, calculadora, classpad.*

Niveles: *Desde Primaria hasta Universidad, dependiendo de la actividad propuesta.*

INTRODUCCIÓN

Los que llevamos muchos años preocupados por la didáctica y la pedagogía, intentando llegar al alumnado, motivarlo, que piense en todo momento, estamos de enhorabuena.

CASIO, con su calculadora de álgebra simbólica ClassPad, ha añadido una prestación de la que pueden disfrutar todos aquellos que tiene actualizada su máquina a partir del sistema operativo OS v. 2.0. Con el icono **f(x)=** se introduce una aplicación denominada "Verificación" (**Verify**) que multiplica las posibilidades educativas de la máquina, quedando cada vez más relegada la idea ancestral que la mayoría tienen del concepto de calculadora.

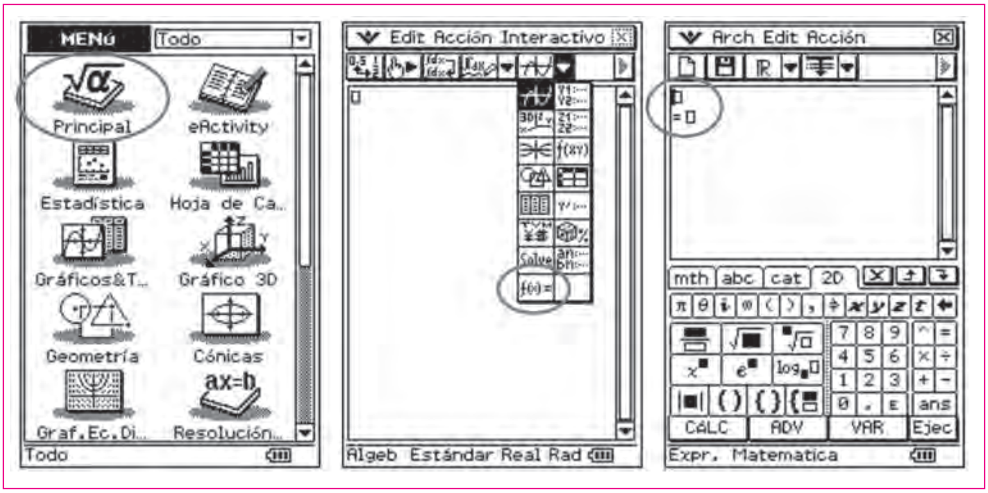
Se puede acceder a la verificación dentro de la aplicación **Principal** o la aplicación **eActivity**. En la aplicación Principal, puede almacenar las sesiones de verificación en la memoria ClassPad, y volver a abrir la sesión para un uso futuro. Las sesiones de verificación también pueden almacenarse dentro de una eActivity (actividad electrónica) que pondremos a disposición de la comunidad educativa.

INICIANDO LA VERIFICACIÓN. FUNCIONAMIENTO. NOCIONES BÁSICAS

Para iniciar la verificación se utiliza el procedimiento siguiente en ClassPad:

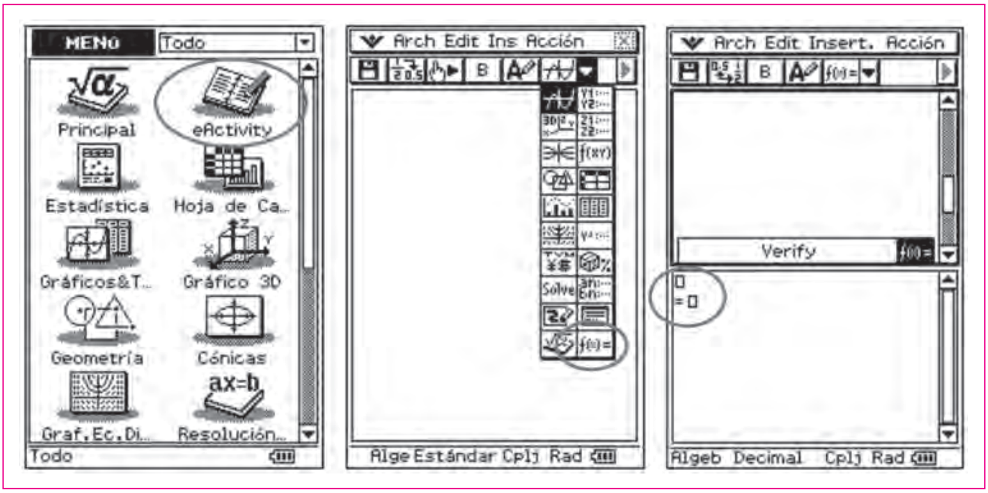
A) Desde el menú **Principal**, accedemos al menú desplegable en el que vemos el botón de flecha hacia abajo de la barra de herramientas de la figura 2.

FIGURAS 1, 2 Y 3
VENTANAS POSIBLES DE LA APLICACIÓN "VERIFY" DESDE "PRINCIPAL"



B) Desde el menú **eActivity**, también accedemos al menú desplegable, como antes, para poder dejar preparada una posterior actividad electrónica.

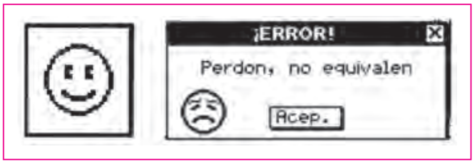
FIGURAS 4, 5 Y 6
VENTANAS POSIBLES DE LA APLICACIÓN "VERIFY" DESDE "eACTIVITY"



Los ejemplos iniciales que presentaremos a continuación permiten adquirir los conocimientos básicos necesarios para usar **Verify**. Nosotros nos decantamos por trabajar diseñando una actividad electrónica (eActivity), que permite muchas más posibilidades didácticas para compartir experiencias, pero los pasos serían idénticos a los que se hiciesen desde **Principal**, en el menú inicial.

En la verificación, se puede presionar **EXE** o tocar con el lápiz táctil para mover el cursor entre las líneas. Aparecerá un mensaje que nos hará saber si el resultado es o no válido.

FIGURAS 7 Y 8
MENSAJES INDICATIVOS DE "OPERACIÓN VÁLIDA" O DE "OPERACIÓN NO VÁLIDA"

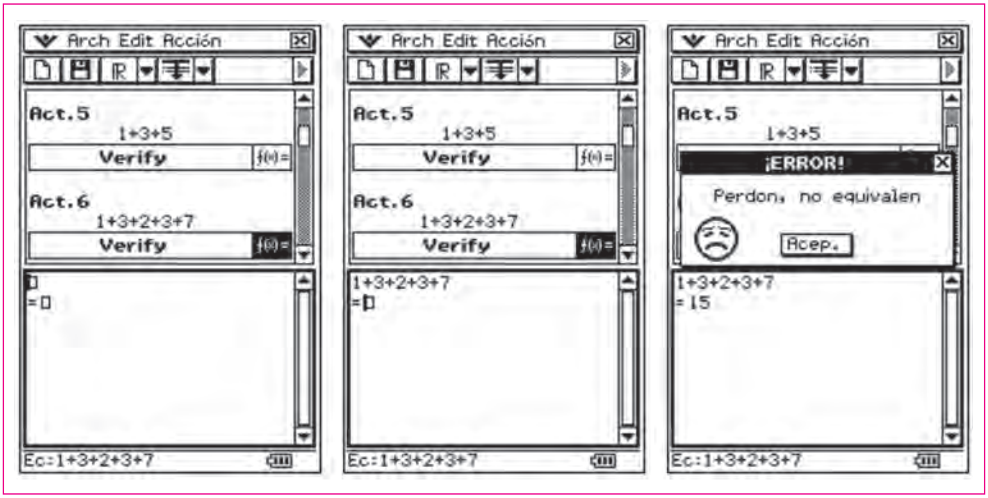


ACTIVIDADES INICIALES PROPUESTAS

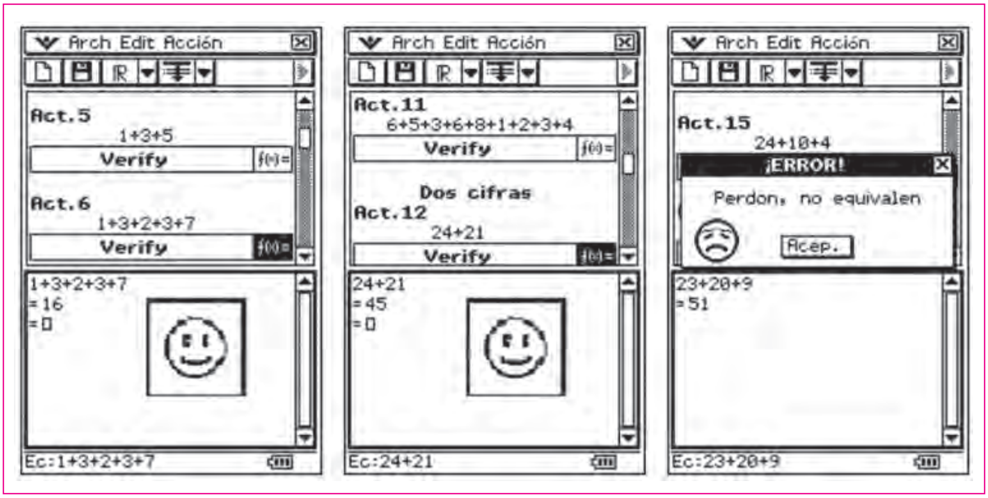
Enseñanza primaria. Actividad tipo I

Con la posibilidad de trabajar con actividades electrónicas podemos presentar ejercicios secuenciados y pensados para afrontar, de forma constructiva y meditada, ejercicios gradualmente más complejos que nos permitirán ir avanzando en el tema. Podríamos empezar con una batería de sencillos ejercicios, desde Primaria, de sumas de números naturales para fomentar el cálculo y la agilidad mental (Figura 9), arrastrando el enunciado sobre el rectángulo inferior (figura 10) con el ratón o lápiz de contacto. Por ejemplo, empezaremos este artículo con el que aparece con el nombre de **Act. 6**. Después colocaremos la propuesta de resultado (figura 11) para saber si es equivalente o no. Como vemos, si proponemos 15 como resultado nos da el mensaje de ¡ERROR! por lo que deberemos ir hacia atrás presionando **Acep.** e intentaremos corregirlo.

FIGURAS 9, 10 Y 11
OPERACIONES PARA DESARROLLAR LA AGILIDAD MENTAL



FIGURAS 12, 13 Y 14
SUBIENDO EL GRADO DE DIFICULTAD



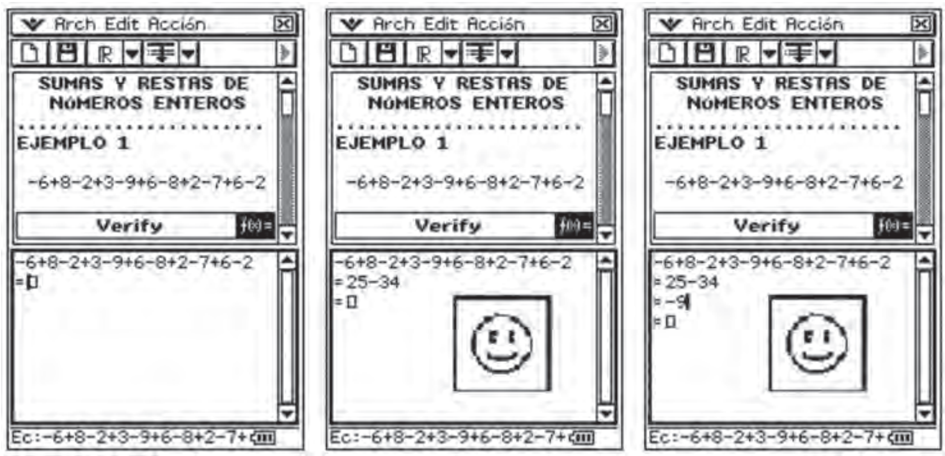
Cuando escribamos de resultado **16** ya aparecerá una cara con una sonrisa que señala el éxito de la respuesta. También podemos ver en las figuras 13 y 14 cómo la dificultad va aumentando. Algunas veces nuestras respuestas serán acertadas y otras con errores que habrá que autocorregir.

ENSEÑANZA PRIMARIA. ACTIVIDAD TIPO II

En muchos currículos de centros de Educación Primaria no se encuentra el conocimiento, reconocimiento y manejo de las operaciones con números enteros negativos. Desde aquí queremos lanzar una llamada de atención a esta cuestión pues, a estas edades, el alumnado está perfectamente capacitado y preparado para comprender, entender y operar con este tipo de números, tan utilizados en la vida cotidiana (temperaturas, ascensores, fechas históricas, deudas, etc.).

Veamos alguna actividad para fomentar el cálculo mental, con sumas y restas de números enteros. Podremos seguir diversas estrategias de cálculo: directamente, calculado el resultado mentalmente o con pasos intermedios, agrupando por un lado los positivos y por otro lado los negativos, determinando posteriormente el resultado final (Figura 17), recalcando el concepto de número natural y número entero.

FIGURAS 15, 16 Y 17
AGRUPANDO LOS POSITIVOS Y NEGATIVOS



ENSEÑANZA PRIMARIA. ACTIVIDAD TIPO III

Los mismos argumentos que hemos esgrimido en el anterior apartado son válidos para propugnar la enseñanza de este tipo de ejercicios en los últimos cursos de Educación Primaria.

En la práctica, para realizar este tipo de ejercicios, se suelen utilizar dos métodos:

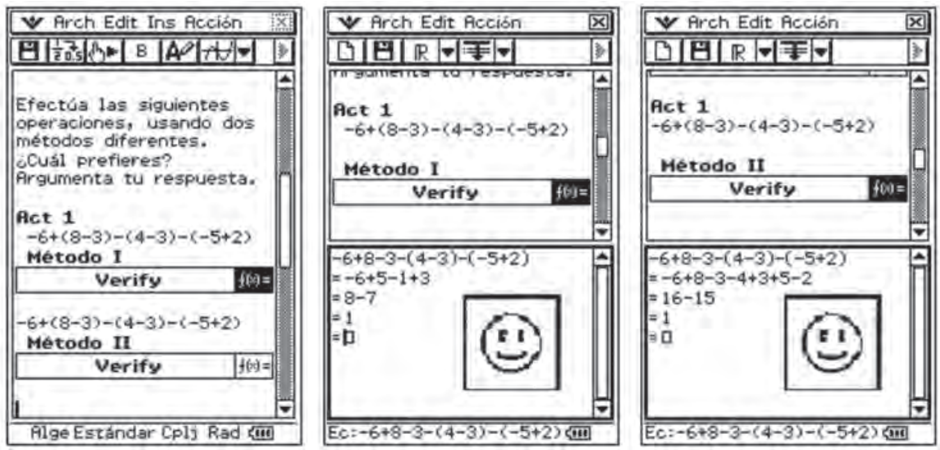
a) Realizar primero cada uno de los paréntesis y luego hacer las operaciones resultantes (figura 19).

b) Eliminar primero los paréntesis, manteniendo los números del interior con el signo que corresponda, según las normas convencionales y realizar las operaciones resultantes.

La máquina nos irá señalando, paso a paso, si lo que estamos haciendo es correcto o incorrecto. En el momento que se incurra en algún error nos detendremos para reflexionar sobre el mismo. Cada alumno realiza los ejercicios a su ritmo.

Veamos a continuación un ejercicio propuesto, con cada uno de sus pasos, según los dos métodos señalados:

FIGURAS 18, 19 Y 20
CON PARÉNTESIS. DOS MÉTODOS

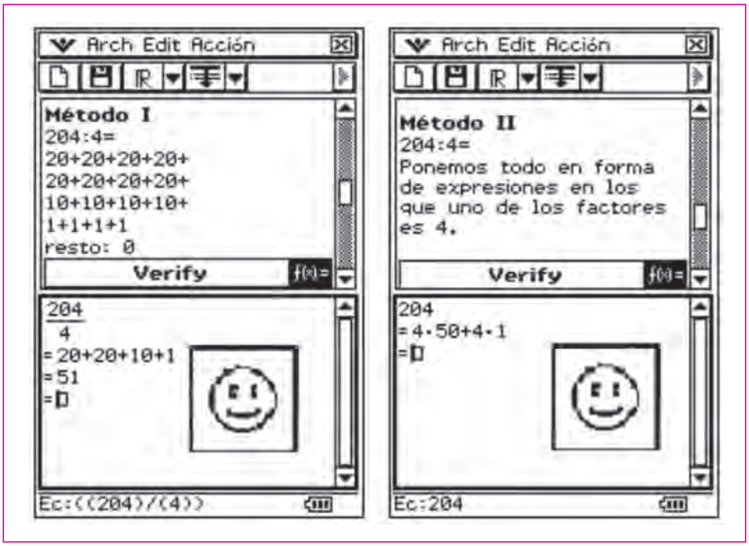


Llegado este punto no podemos dejar de señalar el excelente trabajo de Antonio Ramón Martín Adrián, Tony para los amigos, y el grupo de profesores que siguen las estrategias metodológicas para la enseñanza de los algoritmos tradicionales del C. P. de Aguamansa (Tenerife) con métodos alternativos, basados en el cálculo mental. Presentamos como muestra una de sus actividades, pero le vamos a añadir la utilización de esta excelente herramienta del **Verify**. Sirva como pequeño homenaje.

ENSEÑANZA PRIMARIA. ACTIVIDAD TIPO IV

En un aula de 3º de Educación Primaria, se afronta el concepto de división y se realiza de diversas formas por descomposición, mentalmente. A partir de una situación planteada previamente, se realiza la multiplicación descomponiendo mentalmente los números en las cifras que los constituyen, teniendo en cuenta el valor que tienen atendiendo a su posición.

FIGURAS 21 Y 22
DIVISIÓN POR DESCOMPOSICIÓN



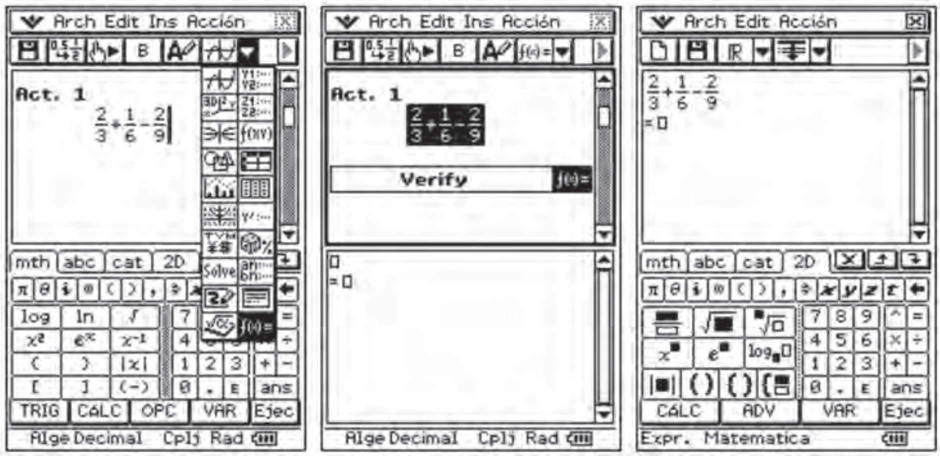
ENSEÑANZA PRIMARIA Y SECUNDARIA. ACTIVIDAD TIPO V

Resuelve el siguiente ejercicio, paso a paso:

$$\frac{2}{3} + \frac{1}{6} - \frac{2}{9}$$

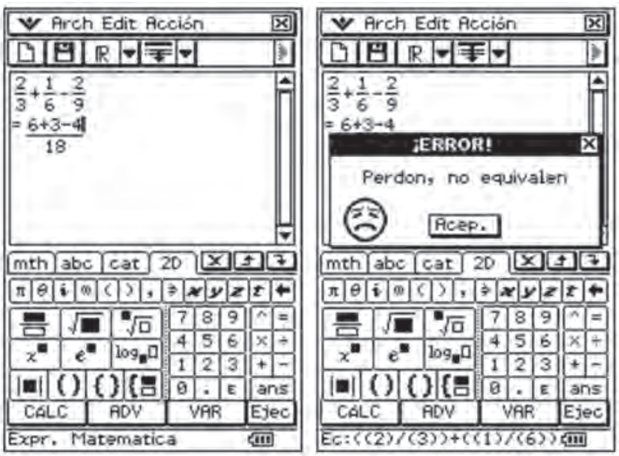
Como se puede apreciar, iniciamos esta actividad con un sencillo ejercicio, de dificultad mínima, para dar ideas a la hora de utilizar esta aplicación. Recuerda que, sobre el menú de aplicaciones, tocamos **eActivity** para prepararla, escribimos el enunciado (tocando **Keyboard**), y utilizamos la pestaña **2D**. A continuación presionamos el desplegable de flecha hacia abajo de la barra de herramientas y sobre la paleta de iconos que aparece, tocando f(x)= , hacemos un **Drag and Drop**, arrastramos la expresión al lugar reservado a la introducción de la primera ecuación, y soltamos, presionando de nuevo **Keyboard** para poder escribir cómodamente en **2D**.

FIGURAS 23, 24 Y 25
EXPLICACIÓN DE LA INTRODUCCIÓN DE DATOS



Realizamos mentalmente el mcm y procedemos a efectuar las operaciones y propuesta de resolución (Figura 26). Al presionar **EXE** o **Ejec**. verificará si la igualdad o igualdades introducidas son correctas y equivalentes (Figura 27).

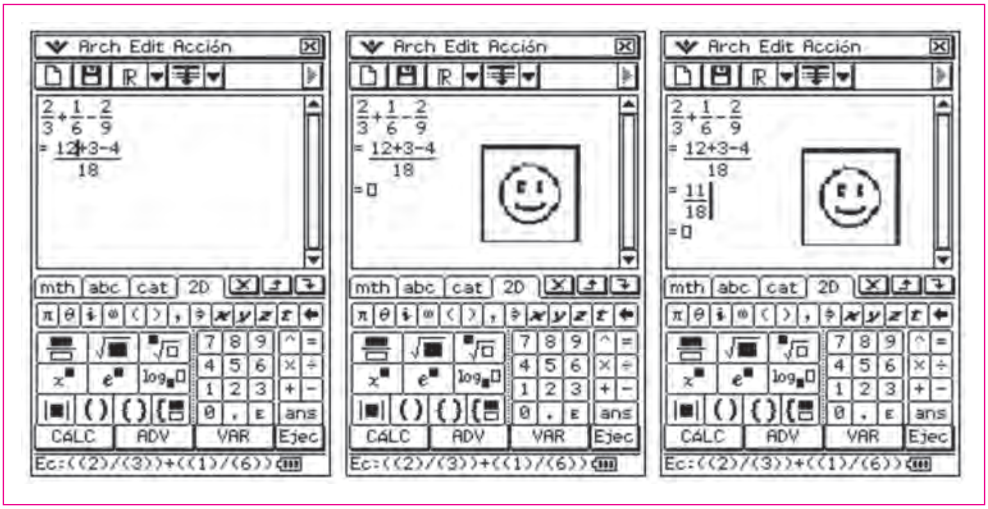
FIGURAS 26 Y 27



- **¡Ha habido un error**! la expresión **NO ES EQUIVALENTE**, pero no nos dice cuál es la solución, ni dónde está el desliz, se limita a ser un maestro corrector neutral donde los auténticos protagonistas de la actividad seremos nosotros, alumnado y profesorado, por lo que revisaremos el ejercicio. Presionamos **Acep.**

para cerrar el diálogo de error que aparece, lo buscamos y tratamos de subsanarlo a través de la reflexión (Figura 28). ¡Claro! en el primer número del numerador ha habido una confusión aritmética (no es 6 sino 12). Lo corregimos y presionamos de nuevo **EXE** (Figura 29). Seguimos efectuando todas las operaciones, paso a paso, y la calculadora irá comprobando si están correctas o existen fallos (Figura 30) en la ejecución.

FIGURAS 28, 29 Y 30



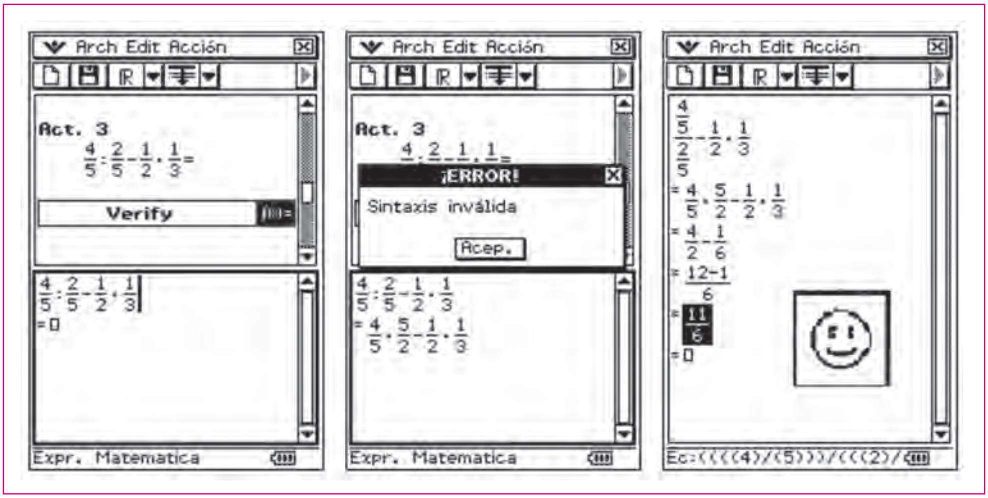
ENSEÑANZA PRIMARIA Y SECUNDARIA. ACTIVIDAD TIPO VI

Resuelve el siguiente ejercicio, paso a paso:

$$\frac{4}{5} : \frac{2}{5} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}$$

Procedemos de la forma anteriormente explicada, haciendo un **Drag and Dop** al lugar de la primera ecuación y empezamos a operar, observando que aparece en pantalla sintaxis inválida (Figura 32), así que habrá que pensar. Todo parece correcto pero el aviso de que lo que invalida la expresión es la SINTAXIS nos hace sospechar que es posible que los dos puntos (**:**) no los reconozca como división, sino como un signo ortográfico, por lo que lo cambiamos por (/) y comprobamos, presionando **EXE** de nuevo:

FIGURAS 31, 32 Y 33



Si seguimos realizando las operaciones obtendremos fácilmente la solución final. Esto nos enseña que una de las cosas más importantes es conocer nuestra máquina, su sintaxis, su lenguaje, sus particularidades... No podemos dejarnos llevar al pie de la letra por lo que hacemos con lápiz y papel pues, aunque este tipo de calculadoras incorpora un lenguaje natural, en muchas ocasiones las cosas no son lo que parecen y así poder practicar autónomamente las operaciones con fracciones. Al aumentar el grado de dificultad de las actividades, es el momento de comentar las diferentes formas de trabajar y presentar el éxito en la verificación de ClassPad.

Como se puede apreciar, la aplicación tiene varias formas de trabajar y presentarse:

FIGURA 34, 35 Y 36

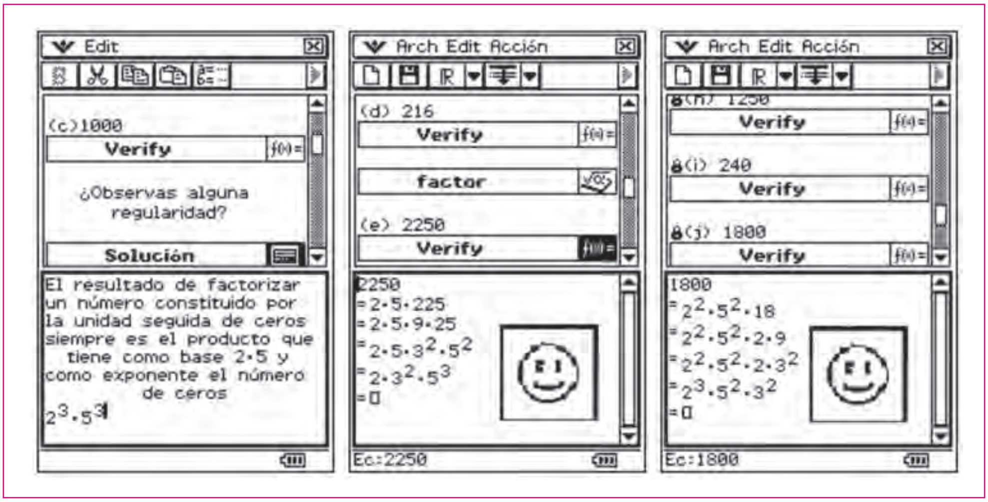
Figura 34: Amplía el campo de trabajo a los números complejos y nos presenta el acierto con una mano que tiene el pulgar hacia arriba y fiasco con el pulgar hacia abajo.
Figura 35: Restringe el campo de trabajo a los números Reales y nos presenta el acierto con una cara sonriente y el fracaso con una cara de tristeza.
Figura 36: Ahora ya sólo trabajamos con los números Reales positivos.

Veamos a continuación diversos ejemplos, entre los muchos que seguramente encontraremos, para utilizar esta aplicación de tanto interés didáctico para el aprendizaje independiente del alumnado.

ENSEÑANZA PRIMARIA Y SECUNDARIA. ACTIVIDAD TIPO VII

Es importante fomentar las actividades de factorización, realizadas mentalmente, con potencias de 10 (Figura 37) y trabajar el hábito de ver los números como producto de otros (Figuras 38 y 39). Con práctica, en muy poco tiempo, se consigue una destreza muy interesante de cara a la aplicación de estas técnicas.

FIGURAS 37, 38 Y 39
FACTORIZACIÓN DE NÚMEROS NATURALES REALIZADAS MENTALMENTE



ENSEÑANZA SECUNDARIA. ACTIVIDAD TIPO VIII

a) Resuelve la siguiente ecuación, paso a paso.

$$5x + 3 - 2x = 6x - 4 - 2$$

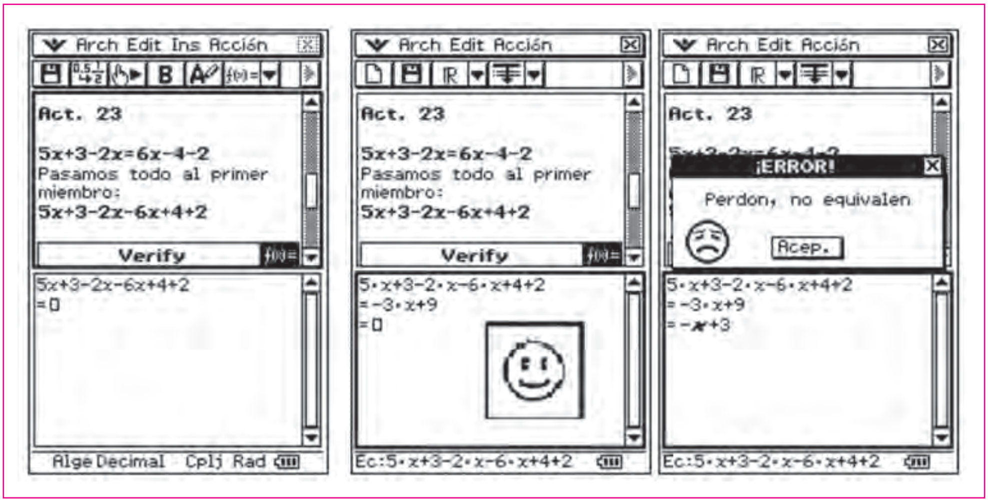
Una vez alcanzados los mínimos conocimientos en la resolución de ecuaciones, la dificultad estriba en operar correctamente. Una vez tengamos por un lado la suma total de las x y por otro lado la de los números, es sólo cuestión de interpretación.

Como **Verify** no tiene la posibilidad de resolver ecuaciones, pensamos una estrategia en la que la aplicación pueda sernos útil para resolver la parte menos creativa y más farragosa, paso a paso. Bajo la premisa no muy matemática de que lo que está sumando pasa restando y viceversa, es muy sencillo y procedemos a colocarlo todo en el primer miembro, a la manera de una ecuación igualada a cero:

$$5x + 3 - 2x = 6x - 4 - 2$$

$$5x + 3 - 2x - 6x + 4 + 2 = 0$$

FIGURAS 40, 41 Y 42



Al final obtenemos $-3x + 9$. Si volvemos a la situación inicial, resolvemos fácilmente la ecuación:

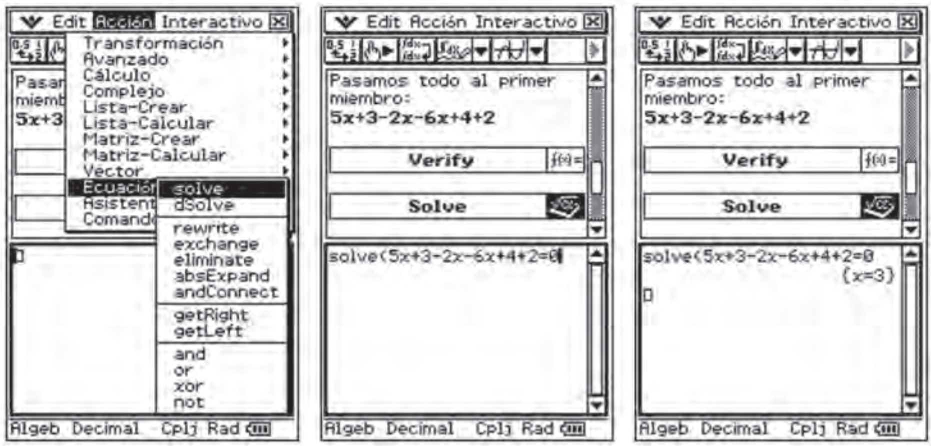
$$-3x + 9 = 0 \rightarrow -3x = -9 \rightarrow 3x = 9 \rightarrow x = 3$$

NOTA: Es muy interesante observar el detalle de que al trabajar con una expresión polinómica, nos devuelve ERROR al dividir todo por 3 (figura 42) ya que...

$$-3x + 9 \neq -x + 3$$

Si queremos comprobar si verdaderamente la solución obtenida es $x = 3$ bastará con utilizar la opción **solve** dentro de la aplicación.

FIGURAS 43, 44 Y 45



b) Resuelve la siguiente ecuación, paso a paso...

$$2x - 30 = x + 1 + x - 3$$

Seguiremos el procedimiento anterior y que puedes visualizar directamente en las siguientes pantallas para, de esta forma, no hacer excesivamente extensas las explicaciones, con la comprobación (figura 48) incluida.

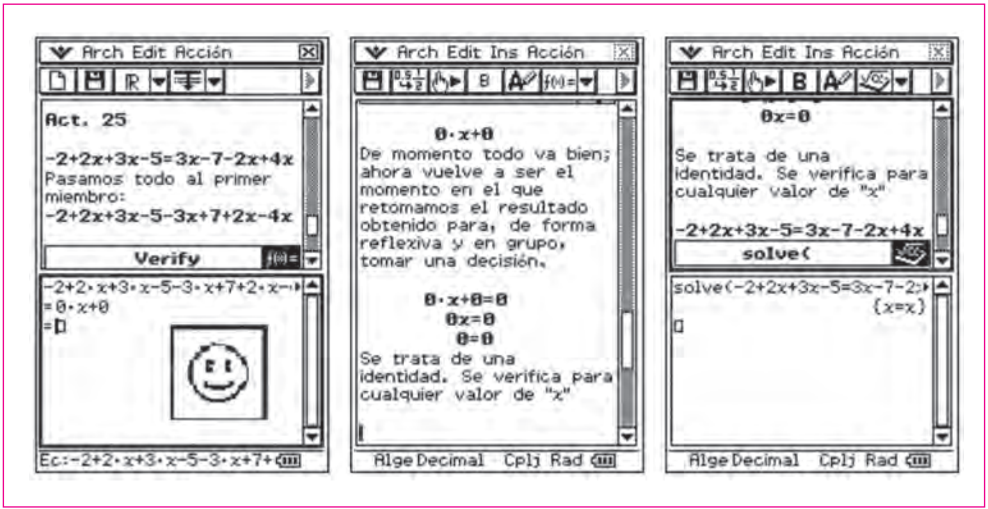
FIGURAS 46, 47 Y 48

c) Resuelve la siguiente ecuación, paso a paso...

$$-2 + 2x + 3x - 5 = 3x - 7 - 2x + 4x$$

Seguiremos el procedimiento anterior y que puedes visualizar directamente en las siguientes pantallas, con la comprobación (figura 51) incluida.

FIGURAS 49, 50 Y 51



d) Resuelve la siguiente ecuación, paso a paso...

$$7(x - 1) + 2(x - 1) - 3(x - 1) - x = - 5\ (x - 1) - 1$$

En este caso, el nivel de dificultad, dependiendo del nivel curricular, es mayor, con paréntesis, signos, etc. También seguiremos el procedimiento anterior y que puedes visualizar directamente en las siguientes pantallas, pasando cada SUMANDO al primer miembro, con la comprobación (figura 52) incluida.

Para verlo mejor, ya que excede la pantalla, trabajaremos con la pantalla del emulador, que puede llegar a ocupar toda la pantalla del ordenador.

FIGURA 52

ENSEÑANZA SECUNDARIA. ACTIVIDAD TIPO IX

Uno de los temas importantes en el desarrollo del aprendizaje de las matemáticas en los alumnos de secundaria, y que más quebraderos de cabeza ocasionan tanto en el alumnado como en el profesorado, utilizado en numerosas unidades didácticas, es la FACTORIZACIÓN de polinomios o de expresiones algebraicas.

No suelen ser interiorizados por los alumnos de manera sencilla y, muchas veces, se lanzan a su resolución sin un razonamiento ni análisis previo.

Es por ello que creemos que se hacía necesario crear un método de resolución, que no tiene por qué considerarse rígido, que permita seguir una estrategia adecuada de resolución, economizando tiempo y sobre todo, buscando que, siguiendo unas pautas mínimas, podamos empezar con problemas muy sencillos, para, sin darnos cuenta, llegar a resolver aquellos que al principio parecían inimaginables, permitiéndonos manejar expresiones algebraicas con la mayor soltura posible. El comando **Verify** es una aplicación muy interesante para el entrenamiento y la adquisición de estas destrezas en los casos de factorización directa, sin la utilización de algoritmos, pudiendo hacerse "a tu propio ritmo". A continuación presentamos unas actividades a través de la visualización directa de las propias pantallas:

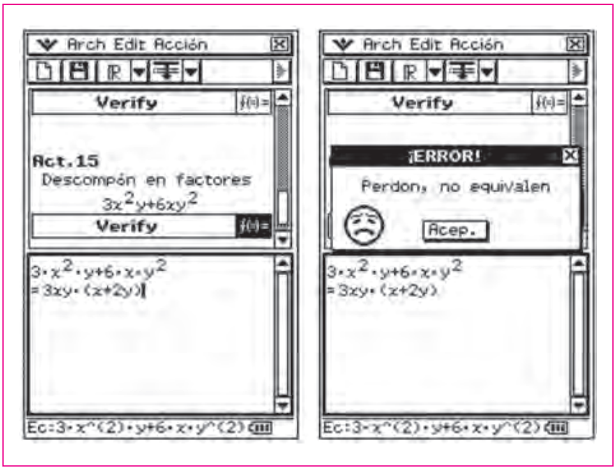
a) Sacar factor común (figuras 53 a 56)

b) Trinomio cuadrado perfecto (figuras 57 y 58)

c) Diferencia de cuadrados (figura 59)

d) Doble descomposición (figuras 60 a 62)

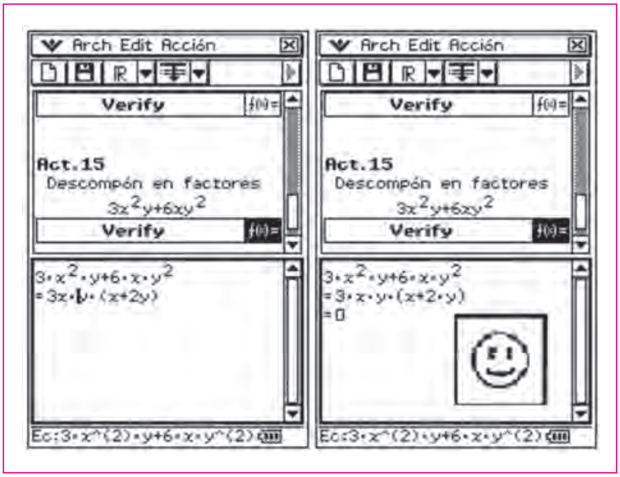
FIGURA 53 Y 54



¿Dónde puede estar el error? ¡La máquina es muy quisquillosa! ¡Piensa un poco!

Son cuestiones interesantes a nivel didáctico. Muchas veces estamos acostumbrados, en un alarde de pensamiento lateral, a interpretar cosas se dan por obvias pero que no lo son En este caso, aunque en la escritura natural habitual con lápiz y papel, cuando vemos *3xy* interpretamos que se trata del producto de esos 3 elementos, la ClassPad lo ve como el triple pero de una nueva variable denominada *xy* que no se trata del producto *x·y*. Pongamos el producto a ver qué pasa.

FIGURA 55 Y 56



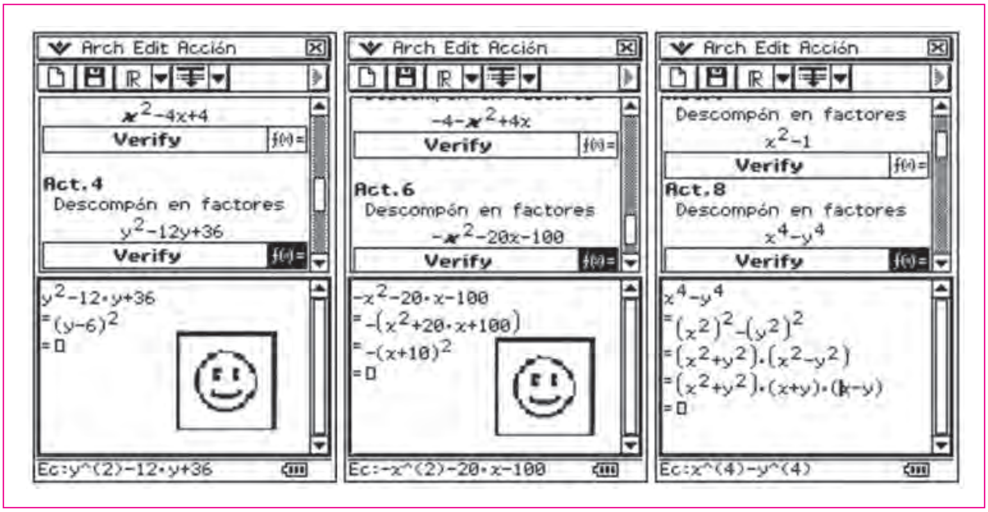
Factorizar, directa y mentalmente, una expresión que pueda responder a las siguientes formas:

$$(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$$

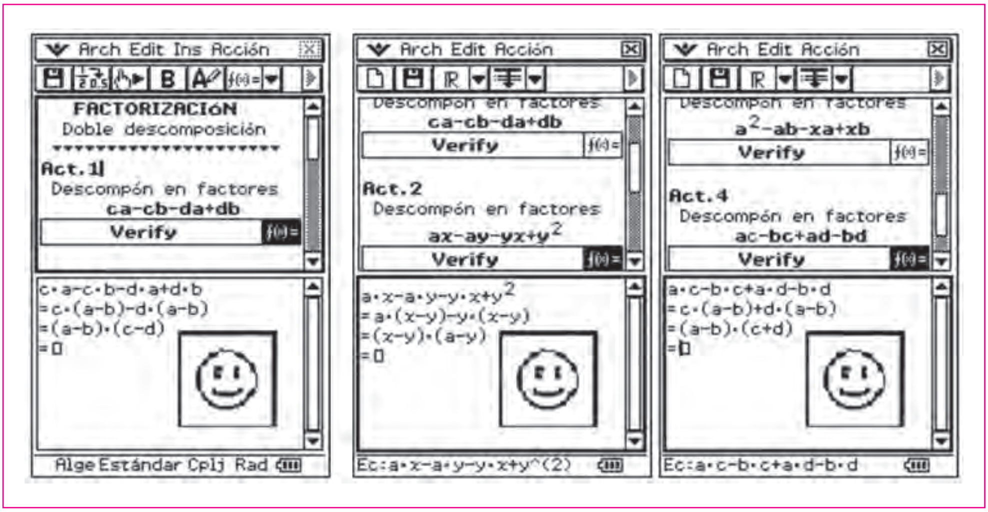
$$(a - b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$$

sin utilizar la fórmula para la resolución de ecuaciones de segundo grado ni Ruffini, resulta enriquecedor e interesante de cara a adquirir soltura y rapidez a la hora de reconocer un posible trinomio cuadrado perfecto. Veamos algunas actividades que forman parte de un protocolo con abundantes ejercicios que tienen por objetivo consolidad estos mecanismos.

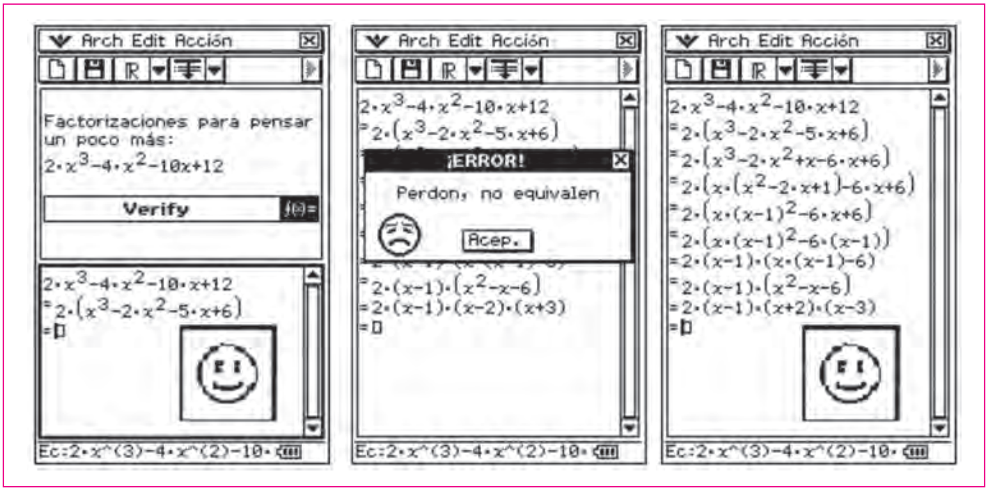
FIGURAS 57, 58 Y 59



FIGURAS 60, 61 Y 62



FIGURAS 63, 64 Y 65
MÁS EJERCICIOS DE FACTORIZACIÓN

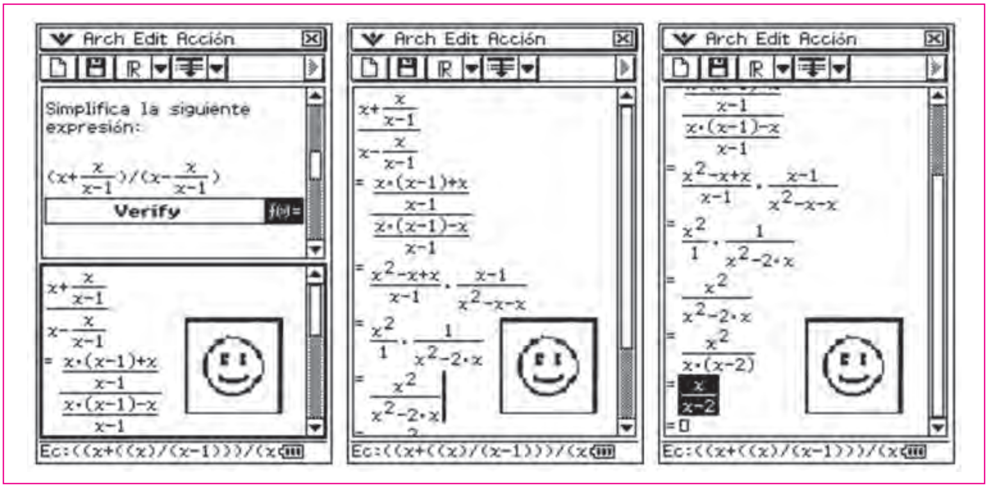


Como estamos comprobando, son numerosos los contenidos que podemos consolidar mediante la introducción del **Verify** como procedimiento alternativo y de gran aceptación por parte del alumnado en el aula. A continuación presentamos otros contenidos que puedan servir para dar ideas al profesorado.

ENSEÑANZA SECUNDARIA. ACTIVIDADES TIPO X

Podíamos haber elegido una actividad más sencilla, pero proponemos esta para observar cómo se presenta en pantalla este tipo de castillos de fracciones.

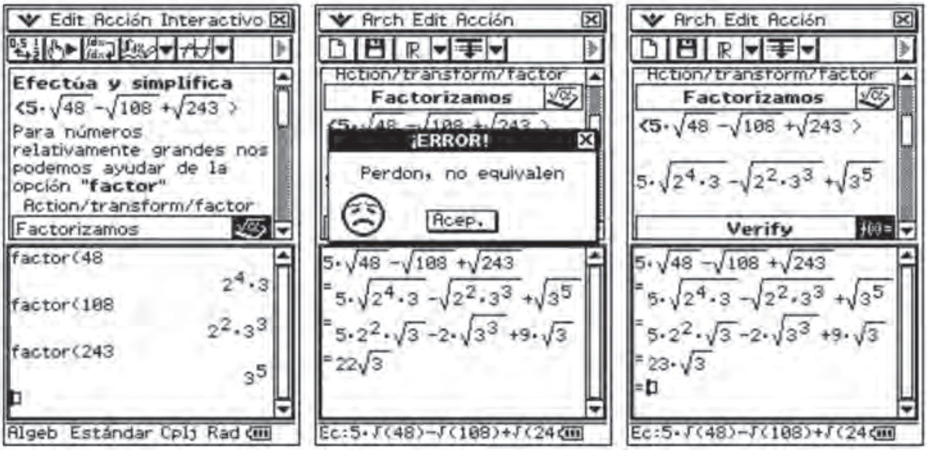
FIGURAS 66, 67 Y 68
FRACCIONES ALGEBRAICAS



ENSEÑANZA SECUNDARIA. ACTIVIDADES TIPO XI

El tema de los radicales da mucho juego para la práctica, la reflexión y la discusión, aglutinando gran cantidad de técnicas y conceptos aprendidos hasta el momento.

FIGURAS 69, 70 Y 71
EJERCICIOS DE OPERACIONES CON RADICALES



ENSEÑANZA SECUNDARIA. ACTIVIDADES TIPO XII

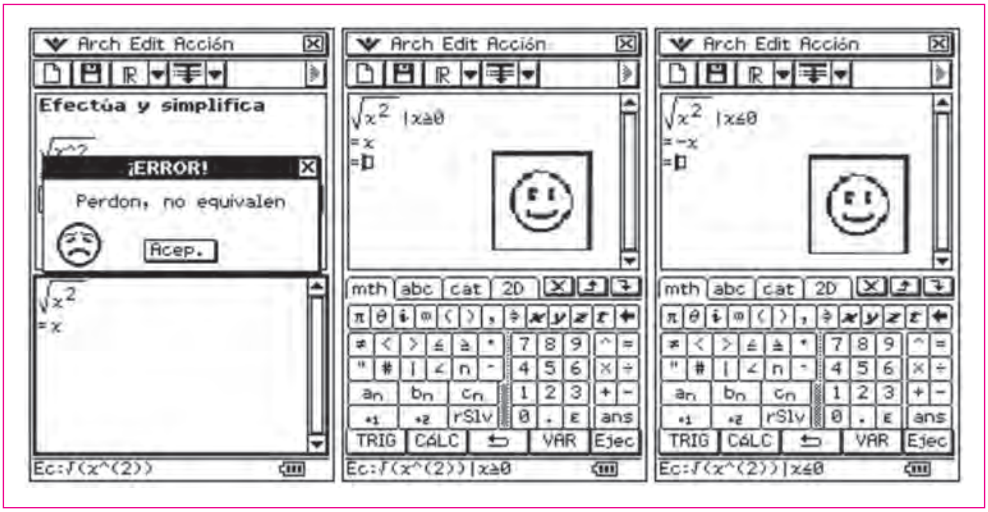
¿Qué crees que obtendremos al realizar $\sqrt{x^2}$?

Formula tu hipótesis y da un resultado. Podrás comprobar qué ocurre cuando la introducimos en **Verify**.

La calculadora te permitirá contrastar conjeturas, verificar hipótesis…

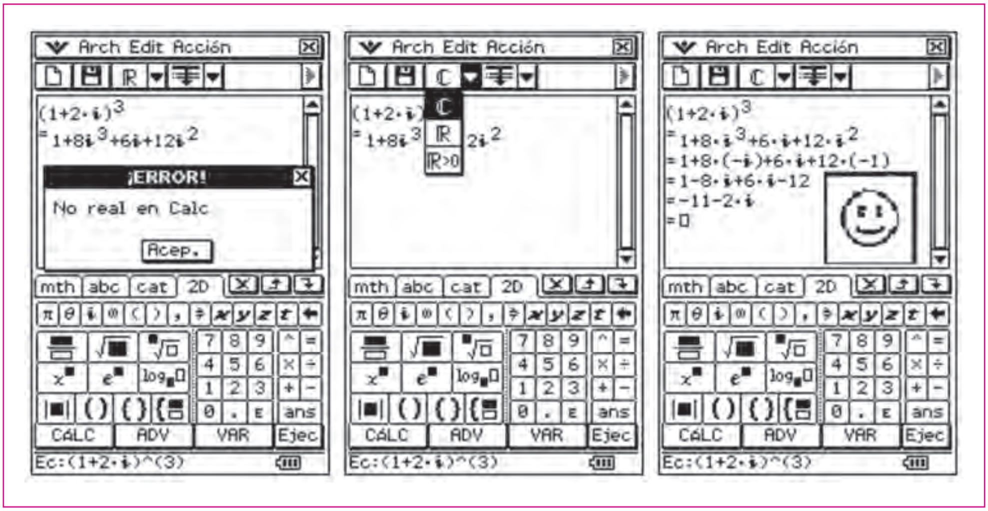
La tarea consistirá en conseguir que el **Verify** acepte las igualdades por lo que iniciaremos una labor de investigación matemática que nos permitirá conjeturar, pensar, analizar... Al final haremos una propuesta en las figuras 73 y 74 que deja al alumnado consciente del rigor de la máquina ante las matemáticas.

FIGURAS 72, 73 Y 74
INVESTIGACIONES CON RADICALES

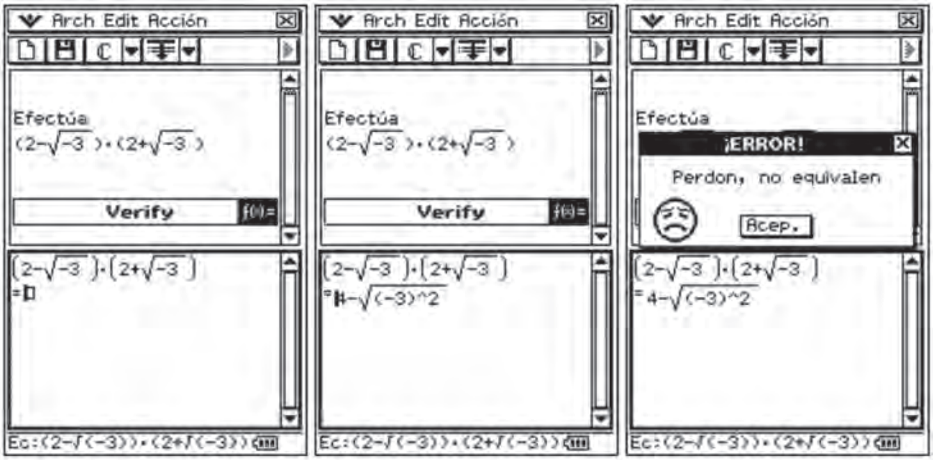


BACHILLERATO. ACTIVIDADES TIPO XIII

FIGURAS 75, 76 Y 77
EJERCICIOS DE INICIACIÓN CON NÚMEROS COMPLEJOS

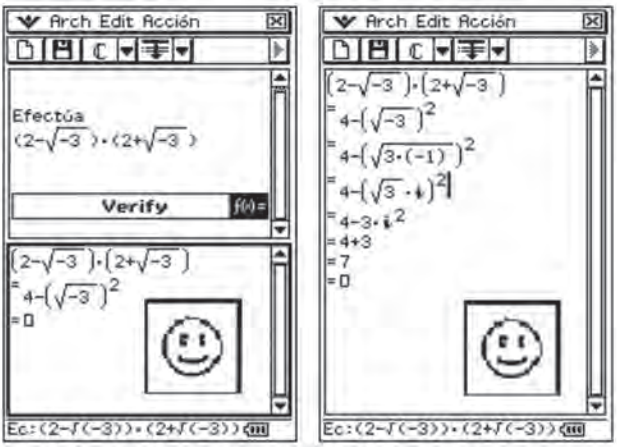


FIGURAS 78, 79 Y 80
MÁS EJERCICIOS CON NÚMEROS COMPLEJOS



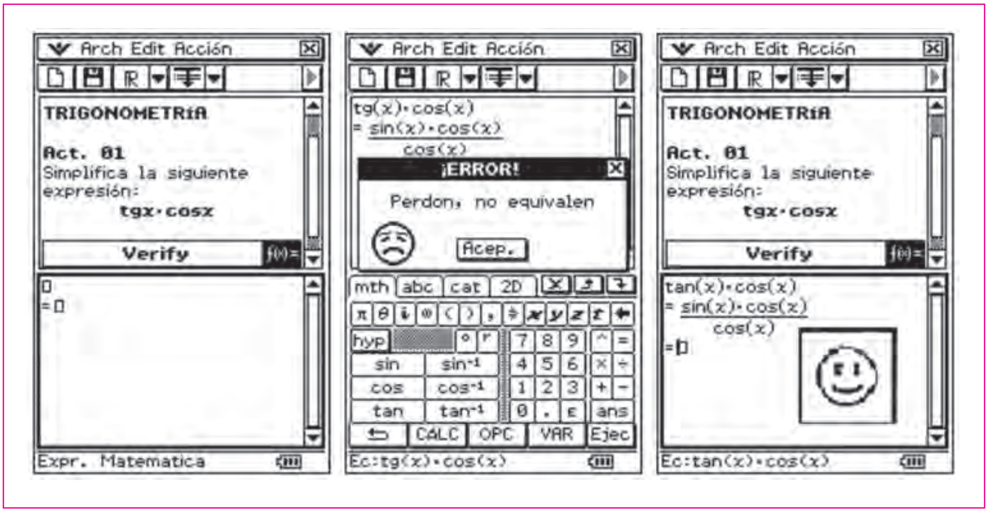
¿Dónde puede estar el error? ¡Cuántos conceptos que aplicamos habitualmente no son correctos! Iniciamos una nueva investigación.

FIGURAS 81 Y 82
INVESTIGANDO EL ERROR DETECTADO ANTERIORMENTE



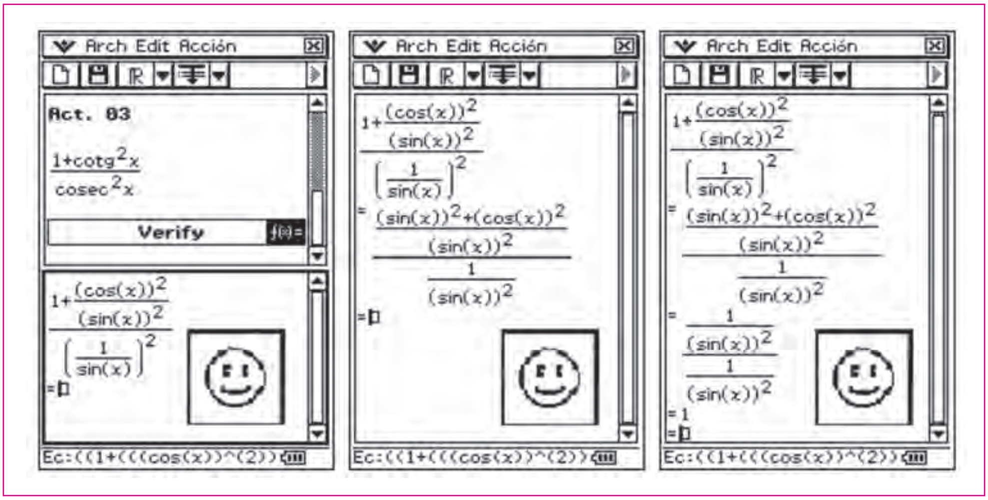
BACHILLERATO. ACTIVIDADES TIPO XIV

FIGURAS 83, 84 Y 85
SIMPLIFICACIONES TRIGONOMÉTRICAS

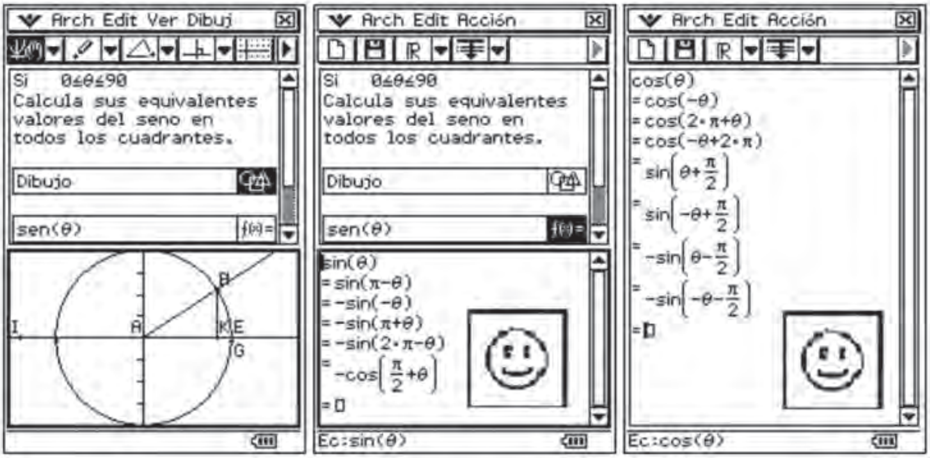


¿Por qué nos sale que no es equivalente en la Figura 84? ¿Dónde está el error?

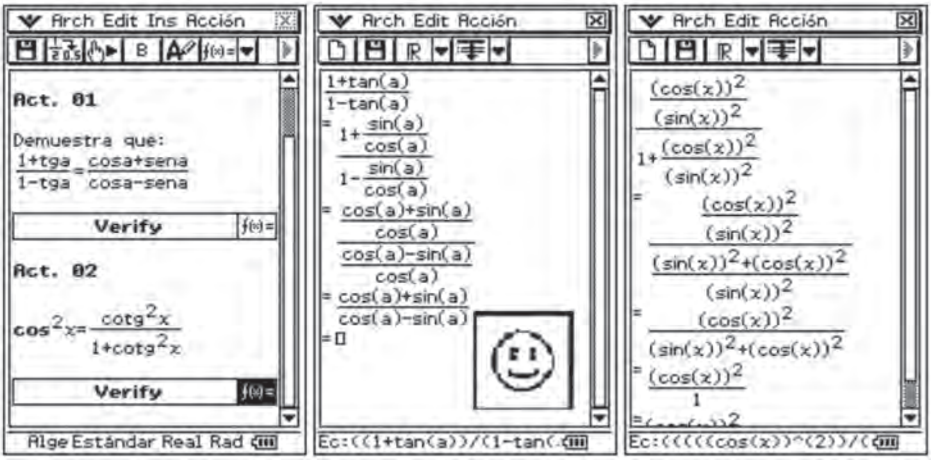
FIGURAS 86, 87 Y 88
SIMPLIFICACIONES TRIGONOMÉTRICAS



FIGURAS 89, 90 Y 91
RELACIONES TRIGONOMÉTRICAS EN LOS DIFERENTES CUADRANTES

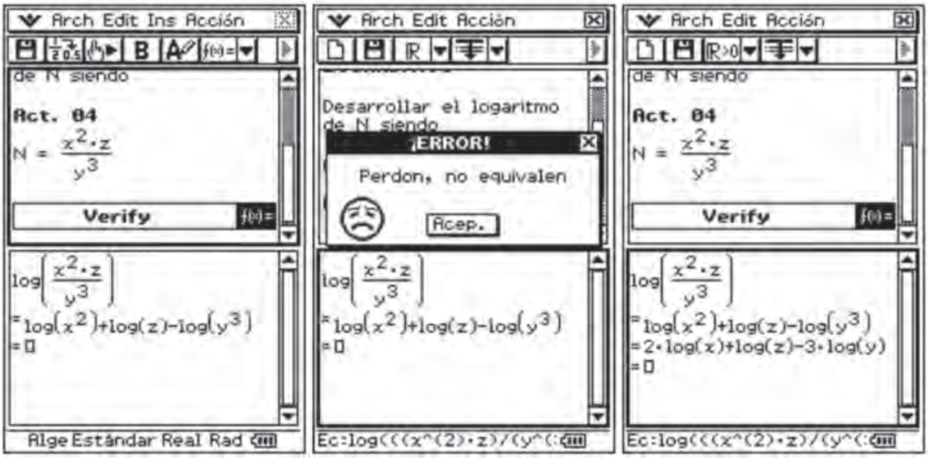


FIGURAS 92, 93 Y 94
DEMOSTRACIONES TRIGONOMÉTRICAS



BACHILLERATO. ACTIVIDADES TIPO XV

FIGURAS 95, 96 Y 97
APLICACIÓN DE PROPIEDADES DE LOGARITMOS



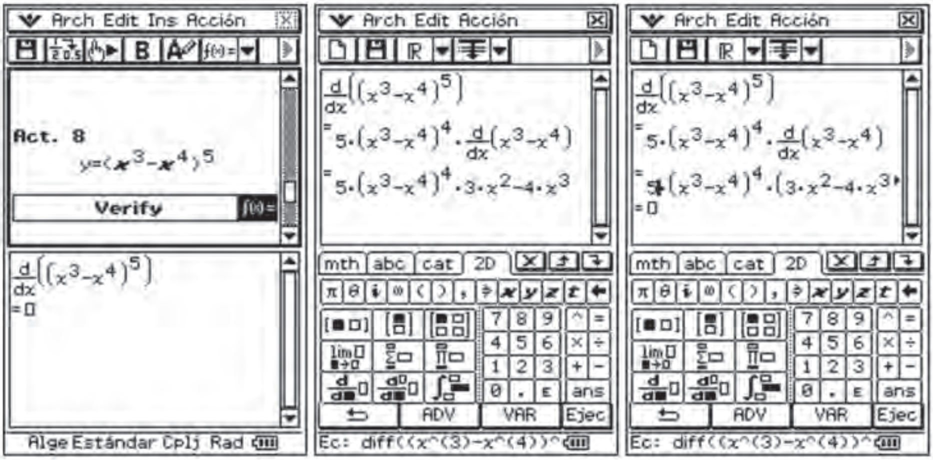
¿Por qué sale que no es equivalente en la Figura 96? ¿Dónde está el error?

Tenemos que estar continuamente tomando decisiones. La máquina, al estar mostrándonos como NO EQUIVALENTES expresiones que en la libreta, con lápiz y papel, sí damos por válidas, nos hace estar replanteándonos conceptos matemáticos y estudiando el porqué de las cosas.

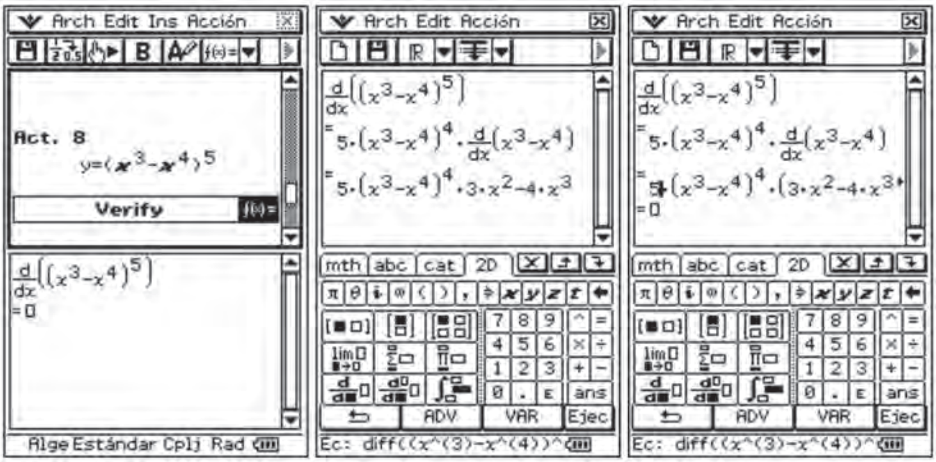
En este caso, son pocos los que dan con la respuesta y, sin embargo, es algo básico en los logaritmos. La inexistencia de logaritmos negativos hace que tengamos que trabajar en el campo de los Reales positivos, por lo que habrá que colocar la máquina con la opción R>0 que aparece el la barra de herramientas situada en la parte superior.

BACHILLERATO. ACTIVIDADES TIPO XVI

FIGURAS 98, 99 Y 100
APLICACIÓN A LAS DERIVADAS Y VISUALIZACIÓN DE LA REGLA DE LA CADENA



FIGURAS 101, 102 Y 103
APLICACIÓN A LAS DERIVADAS DE LA REGLA DE LA CADENA



Y así podríamos seguir proponiendo actividades, tantas como se nos puedan ir ocurriendo según vayamos desarrollando los distintos temas. Esto no es más que un inicio para dar que pensar, favoreciendo el desarrollo de estrategias alternativas, nuevos enfoques de resolución de problemas, de forma más ágil, pudiendo visualizar si las soluciones aportadas son viables, coexistiendo en todo momento los modelos de enseñanza – aprendizaje e incluso reforzando los métodos tradicionales, que pueden resultar incluso más sencillos, donde todos somos los protagonistas de las próximas propuestas: Es vuestro turno. Sin embargo no queremos finalizar sin hacerle un guiño a algunas cuestiones más lúdicas, donde **Verify** también tiene su momento.

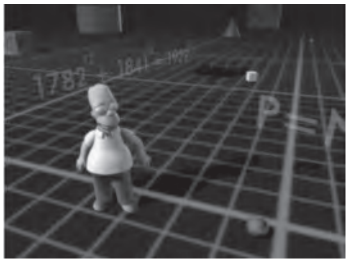
SECUNDARIA Y BACHILLERATO. ACTIVIDAD FINAL

Entremos en el mundo de los Simpson, y más concretamente, a analizar una parte del capítulo 6 de la temporada 7, emitido en 1995, muy interesante desde el punto de vista matemático y que lleva por título Homer.

¿Conoces el teorema de Fermat?

Si n es un número entero mayor que 2 (n > 2), entonces no existen números enteros *x, y, z* (excepto las triviales x = 0, y = 0, z = 0) tales que cumplan la igualdad:

$$\mathbf{x^n + y^n = z^n}$$



Argumento. En su intento por evitar a Patty y Selma, Homer Simpson encuentra un nuevo mundo en tres dimensiones detrás de un armario y pasa de su mundo habitual, en el plano, a una espectacular tercera dimensión e incluso al mundo humano. Ha pasado del folio al espacio.

En un momento determinado, aparecen unos fotogramas con una expresión que se observa detrás de Homer, en el fondo y que no ha pasado desapercibida para muchos, relacionada con lo que conocemos con el nombre de teorema de Fermat:

$$\mathbf{1782^{12} + 1841^{12} = 1922^{12}}$$

¿Cómo puede ser? ¿Sabes lo que es un contraejemplo?

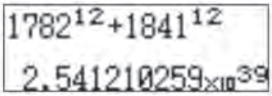
¡Increíble! Y además se proponen 3 números que SÍ verifican la igualdad formulada como imposible por Fermat, colocando un contraejemplo...

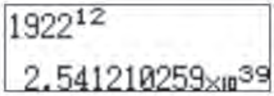
Un contraejemplo es una excepción a una regla general propuesta, es decir, un caso específico de la falsedad de una cuantificación universal (un “para todo”).

Hagamos la comprobación con la calculadora:

a) Efectúa con la calculadora $1782^{12} + 1841^{12}$ y anota el resultado.

b) Ahora realiza 1922^{12} y anota el resultado.





Como podemos comprobar, aparentemente sale lo mismo.

Ya has visto el año del estreno del capítulo. Hagamos un poco de historia.

En **1993**, en una serie de conferencias en el Instituto Isaac Newton, Andrew Wiles demuestra el teorema de Fermat, más de 100 folios de intensas matemáticas, aunque más tarde pudo comprobar que había un error que no consiguió resolver de inmediato.

En **1995** (año de estreno del epidodio), con la colaboración de Richard Taylor, logran demostrarlo con el desarrollo de la "teoría de funciones elípticas".

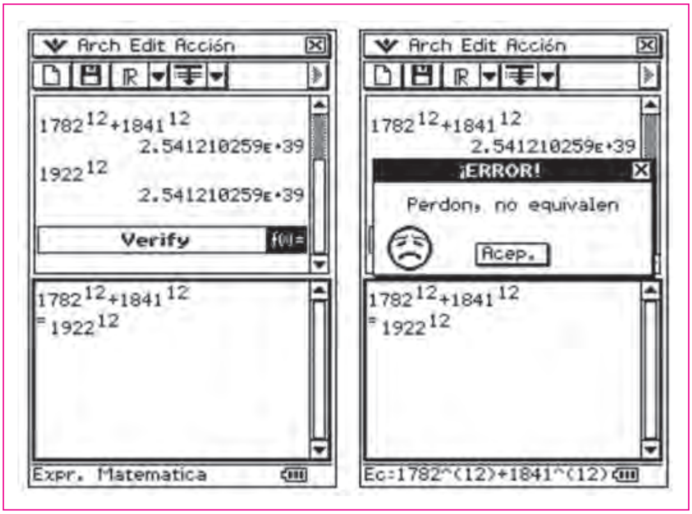
El Clay Institute, después de casi 5 años de estudio del teorema, procedió a entregarle el premio de 1 millón de dólares con el que estaba dotada la demostración.

Volvamos al contraejemplo y vamos a utilizar una herramienta más potente para ver los resultados de las operaciones.

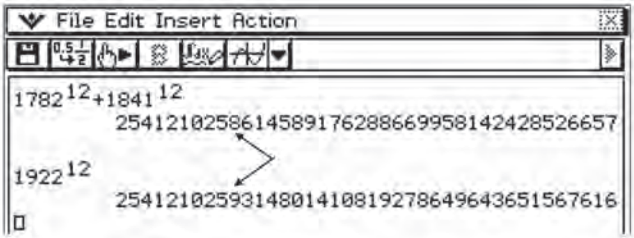
¿Es posible que Homer, es decir los guionistas, hayan encontrado un contraejemplo que contradiga este famoso teorema que ha traído de cabeza más de 300 años a los más famosos matemáticos?

¡Increíble! ¡Homer entra en un mundo en el que el teorema de Fermat se tambalea allá por ese año 1995.

Pero no nos fiamos; así que vamos a comprobarlo con la aplicación del **Verify**, que permite la verificación de igualdades:



Así que empezamos a sospechar que algún duendecillo ha influido en estos resultados; acudiremos a la versión 3.0 de ClassPad, capaz de realizar cálculos dando resultados con más cifras:



Como podemos observar, este duendecillo al que aludíamos se llama redondeo. La calculadora, cuando nos da el resultado aproximado, en la décima cifra (señalada por las flechas) se produce en el primer caso por exceso y en el segundo por defecto, produciendo una engañosa apariencia de igualdad.

Realmente David X. Cohen, uno de los guionistas y productores de "los Simpson" vuelve a mostrarnos su formación matemática, no en vano se había pasado muchas horas trabajando en un programa, con su ordenador, que buscaba combinaciones de x, y, z y n que parecían cumplir el último teorema de Fermat:

El resultado salta a la vista.

Buscaba que verificasen la igualdad antes mencionada con un error tan pequeño como se quisiera.

A MODO DE RESUMEN Y CONCLUSIÓN

Como ya hemos ido comentando a lo largo del tema, el objetivo que queremos transmitir a través de este artículo, es potenciar y dar a conocer esta aplicación, el **Verify**, casi desconocida y tan interesante a nivel didáctico, no sólo para el aprendizaje autónomo del alumnado, que respeta los ritmos individuales, proponiendo posibles actividades para llevar al aula, buscando siempre la reflexión, las bases del lenguaje matemático y algebraico, analizando los gazapos habituales que cometemos, de una forma interactiva, participativa y reflexiva, buscando estrategias alternativas, reforzando las competencias básicas y el comentado aprendizaje autónomo del alumnado y sobre todo, como método de investigación matemática, reordenando de manera constante nuestros conceptos adquiridos y posibilitando la capacidad de indagar.

Puede ser un buen punto de partida para que todos aquellos que estén interesados en el tema podamos compartir ideas y debatir en el http://classpadverify.blogspot.com que hemos creado, dentro del espacio www.aulamatematica.com, con el objetivo de ampliar, descargar actividades electrónicas y seguir trabajando, intercambiando propuestas, elaborando y desarrollando materiales, pudiendo llegar a convertirse en un auténtico laboratorio de matemáticas.

La calculadora científica como recurso en las matemáticas de secundaria y bachillerato

Lucía Vázquez Rodríguez
Licenciada en Matemáticas por la Universidad de Cádiz

Resumen: *Este trabajo está basado en el uso de la calculadora para comprobar resultados y resolver los problemas de forma inmediata, meditando previamente cuáles son las operaciones y pasos a seguir en su resolución. No obstante, dicho uso debe estar controlado, ya que un mal uso de la calculadora puede provocar que no se asimilen los conceptos teóricos correctamente. El tema que se trabajará será el de números Naturales para Primero de Secundaria, y estará orientado a aquellos alumnos que tengan soltura en los cálculos numéricos manualmente.*

Abstract: *This work is based on the use of the calculator to check results and resolve problems immediately, before pondering what the operations and steps for its resolution. However, such use must be controlled as a misuse of the calculator can cause not properly assimilate the theoretical concepts. The subject will be worked Natural Numbers First Secondary, and will be oriented towards students who are ease in the numerical calculations manually.*

Términos claves: *decimal, fracción, recta numérica.*

Keywords: *decimal, fraction, number line.*

INTRODUCCIÓN

En el siguiente trabajo utilizaremos la calculadora científica como herramienta para desarrollar uno de los temas del bloque de Números de 1º ESO, intercalando los conceptos teóricos con los ejercicios y problemas prácticos.

UNIDAD DIDÁCTICA: Números decimales
CURSO: 1º ESO

El uso de la calculadora en este tema será para comprobar resultados y resolver los problemas de forma inmediata, meditando previamente cuáles son las operaciones y pasos a seguir en su resolución. No obstante, dicho uso debe estar controlado, ya que un mal uso de la calculadora puede provocar que no se asimilen los conceptos teóricos correctamente. Por lo tanto, el alumno debe ser preparado previamente para poder utilizar dicha herramienta, y consciente de cuál es su función en este tema.

METODOLOGÍA

El modelo de aprendizaje que llevaremos a cabo en esta unidad didáctica será significativo. El alumno será el principal protagonista en el proceso de aprendizaje, será quien marque el ritmo del desarrollo de su propio aprendizaje, para desarrollar sus capacidades y posibilidades. El profesor adoptará un papel de guía, interviniendo para resolver las múltiples dudas que vayan surgiendo, así como agente motivador del alumnado, para que estos alcancen los objetivos propuestos. Y será quien adapte el contenido teórico a las posibilidades del grupo e intercale la teoría con los ejercicios a resolver.

El único material docente, además de su cuaderno de trabajo, que va a usar el alumno de forma regular será la calculadora científica y sería conveniente que cada alumno dispusiera de una para poder trabajar de forma individual tanto en clase como en casa.

Se propondrán actividades matemáticas para desarrollar competencias en los alumnos, tanto competencias básicas como competencias matemáticas específicas que capaciten a los alumnos para utilizar el conocimiento matemático en los distintos contextos en que éste se presenta.

Las competencias básicas serían las siguientes:

- Competencia matemática.
- Competencia en comunicación lingüística.
- Competencia en el conocimiento y la interacción con el mundo físico.
- Tratamiento de la información y competencia digital.
- Competencia para aprender a aprender.
- Autonomía e iniciativa personal.

Y las competencias matemáticas serían:

- Pensar y razonar.
- Argumentar.
- Comunicar.
- Plantear y resolver problemas.
- Representar.
- Utilizar el lenguaje simbólico, formal y técnico y las operaciones.
- Usar herramientas y recursos.

OBJETIVOS

Los objetivos que se pretenden alcanzar en esta unidad didáctica se recogen en los siguientes puntos:

- Profundizar en la noción de decimal a partir de los múltiples ejemplos descritos.
- Representar los números decimales en la recta numérica.
- Ordenar los números decimales.
- Distinguir los diferentes tipos de número decimales (exactos, periódicos puros, periódicos mixtos, no exactos y no periódicos).
- Pasar de fracción a decimal y de decimal a fracción.
- Operaciones con número decimales (suma, resta, multiplicación y división).
- Emplear los números decimales para interpretar y resolver problemas de la vida cotidiana.

CONTENIDO SELECCIONADO Y SU DESARROLLO

La lista de contenidos teóricos para el tema **Números decimales** es la siguiente:

- Unidades decimales.
- Números decimales.
- Comparación de números decimales.
- Representación de números decimales.
- Tipos de números decimales.
- De fracciones a decimales y de decimales a fracciones.
- Suma y resta de números decimales.
- Producto de números decimales.
- División de números decimales.

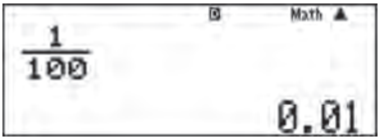
En cada uno de los bloques siguientes se desarrollaran los ejemplos teóricos con la calculadora. Y la resolución de los ejercicios propuestos a lo largo del tema así como los propuestos al final del tema también se resolverá con la calculadora en la medida en que sea necesario su uso. De este modo, los alumnos podrán comprobar los resultados, y obtener de forma inmediata la solución de los problemas, haciendo mayor hincapié en el proceso de resolución.

BLOQUE 1: UNIDADES DECIMALES

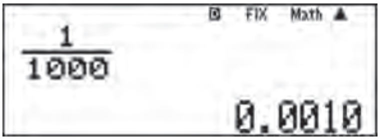
Expresan cantidades más pequeñas que la unidad. Comprobamos con la calculadora el paso de fracción a decimal en cada caso:

- Décima: 1/10 = 0,1

- Centésima: 1/100 = 0,01

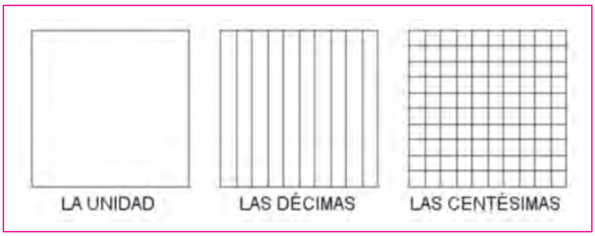


- Milésima: 1/1.000 = 0,001



- ...

Ejemplos:



Ejercicio 1. Expresa con cifras los siguientes números:

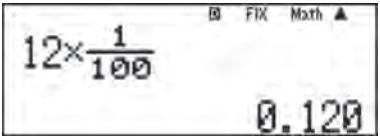
a) Doce centésimas.

b) Quince diezmilésimas.

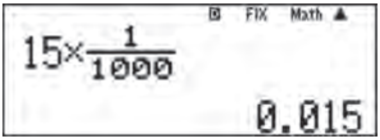
c) Ocho unidades y veinticinco décimas.

Solución:

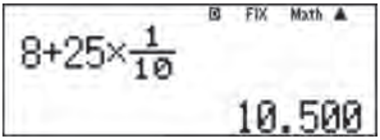
a) 12 · (1/100) =



b) 15 · (1/1000) =



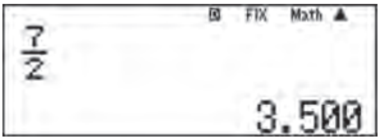
c) 8 + 25 · (1/10) =



BLOQUE 2: NÚMEROS DECIMALES

Los números decimales son una forma de escribir una fracción, pero sin escribir el numerador y el denominador, sino el resultado del cociente.

Ejemplo:



Los números decimales se usan para expresar cantidades que están comprendidas entre dos números enteros.

Un número decimal consta de parte entera y parte decimal:

– **Parte entera:** es la que está a la izquierda de la coma: unidades, decenas, centenas...

– **Parte decimal:** es la que está a la derecha de la coma: décimas, centésimas, milésimas...

Ejemplo:

1,52 está entre 1 y 2

PARTE ENTERA ← [1] , [52] → PARTE DECIMAL

Ejercicio 2. Indica la parte entera y la parte decimal de los siguientes números, pasándolas primero de fracción a números decimales:

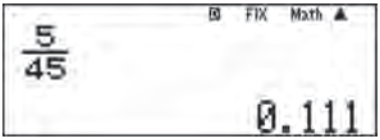
a) 5/45

b) 725/125

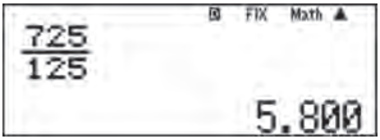
c) 1/35

d) 1055/558

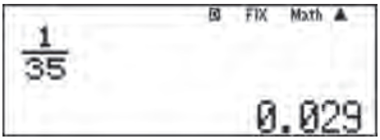
Solución:

a) 

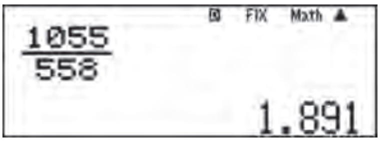
Parte entera: 0 Parte decimal: 111

b) 

Parte entera: 5 Parte decimal: 8

c) 

Parte entera: 0 Parte decimal: 29

d) 

Parte entera: 1 Parte decimal: 891

BLOQUE 3: COMPARACIÓN DE NÚMEROS DECIMALES

De dos números decimales es mayor el que mayor parte entera tenga; si la parte entera es igual, es mayor el que tenga mayor la cifra de las décimas; si es igual, comparamos las centésimas, y así sucesivamente.

Ejemplo:

3,528 < 3,539 < 3,842 < 5,221

Ejercicio 3. Ordena de menor a mayor los siguientes números:

a) 23,15; 23,149; 22; 23,015

b) 8; 7,95; 7,956; 7,95601

c) 0,001; 0,0001; 0,0002; 0,012

Solución:

a) 22 < 23,015 < 23,149 < 23,15

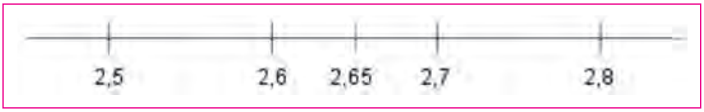
b) 7,95 < 7,956 < 7,95601 < 8

c) 0,0001 < 0,0002 < 0,001 < 0,012

BLOQUE 4: REPRESENTACIÓN DE NÚMEROS DECIMALES

Los números decimales se representan ordenados en la recta numérica.

Ejemplo:



Entre dos números decimales siempre hay más números decimales:

2,6 < 2,7

2,6 < 2,65 < 2,7

2,6 < 2,61 < 2,65 < ... < 2,69 < 2,7

Ejercicio 4. Representa en la recta numérica los siguientes números decimales:

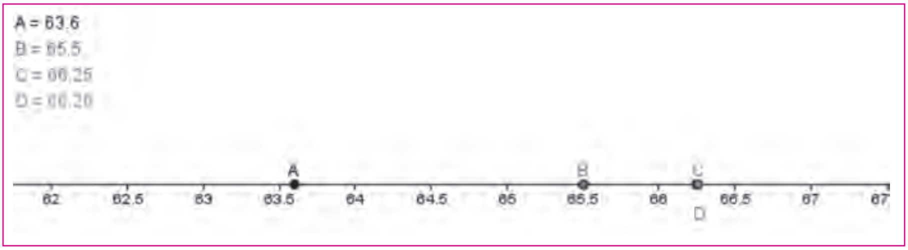
a) 66,256; 66,25; 63,6; 65,5

b) 7,15; 7,16; 7,156; 7,158

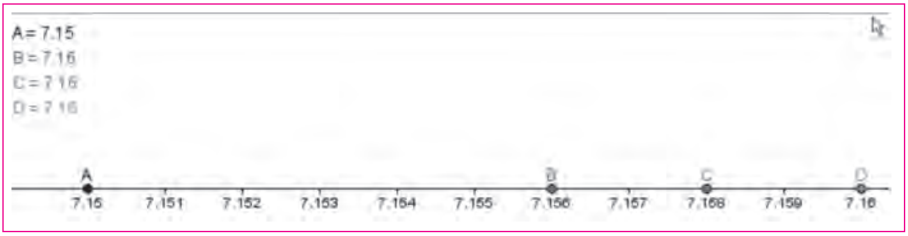
c) 2,12; 2,13; 2,012; 2,102

Solución:

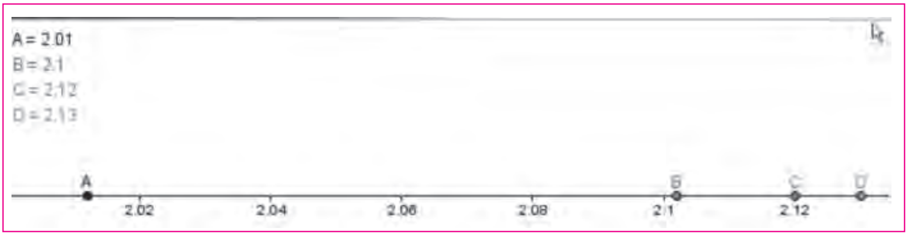
a)



b)



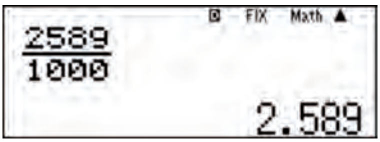
c)



BLOQUE 5: TIPOS DE NÚMEROS DECIMALES

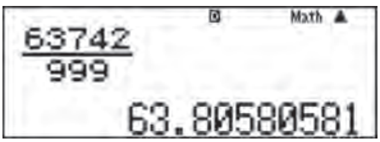
Números decimales exactos: tienen un número finito de cifras decimales.

Ejemplo:



Números decimales periódicos puros: la parte decimal, llamada periodo, se repite infinitas veces.

Ejemplo:

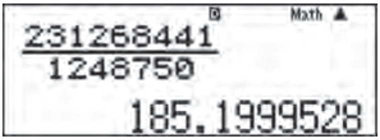


En este ejemplo, el periodo es 805 y la calculadora nos lo redondea en la última cifra decimal.

Números decimales periódicos mixtos: su parte decimal se compone de una parte no periódica y otra parte periódica.

Ejemplos:

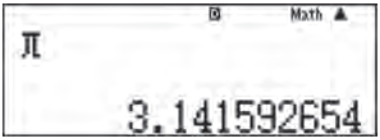
a) 4,265555555555555 donde el periodo es 5.

b) 

Donde el periodo es 527.

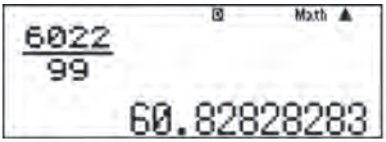
Números decimales no exactos y no periódicos: tienen infinitas cifras decimales no periódicas.

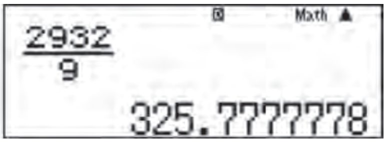
Ejemplo:



Ejercicio 5. Escribe dos decimales periódicos puros y otros dos no periódicos.

Solución:





No periódicos: 7,24456789865 y 678,541190078.

BLOQUE 6: DE FRACCIONES A DECIMALES Y DE DECIMALES A FRACCIONES

Para escribir una fracción como un número decimal sólo tenemos que calcular el cociente.

Usaremos para ello la opción que nos ofrece la calculadora pulsando la siguiente tecla  una vez escrita la fracción.

Ejercicio 6. Escribe las siguientes fracciones como un número decimal:

a) 6/15

b) 10/200

c) 8/24

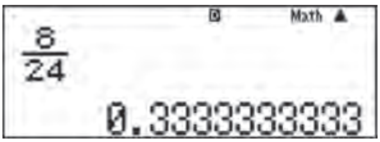
d) 5/6

Solución:

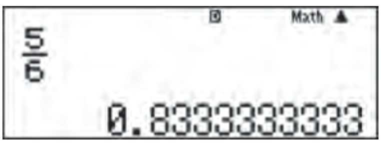
a)

b)

c)

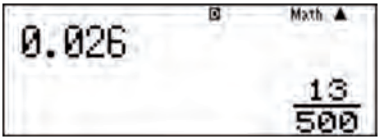


d)



Para escribir un decimal exacto en forma de fracción, escribimos el número sin la coma en el numerador, y en el denominador la unidad seguida de tantos ceros como cifras decimales tenga el número.

Ejemplo:



Ejercicio 7. Escribe como fracción los siguientes números decimales:

a) 32,59

b) 14,25

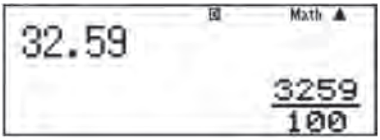
c) 0,1

d) 0,123

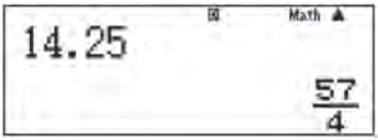
e) 58,315

Solución:

(a)

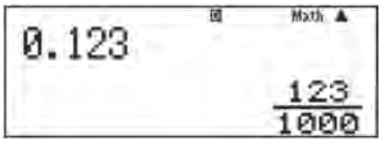


(b)

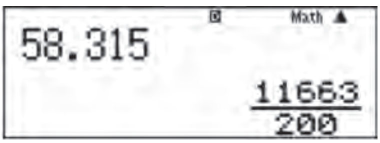


(c)

(d)



(e)



Para escribir un decimal periódico puro en forma de fracción:

1) Multiplicamos el número por la unidad seguida de tantos ceros como cifras tenga el periodo.
2) A este número le restamos el número decimal original.
3) La fracción que represente el número tendrá como numerador el número obtenido en el paso b, y por denominador la unidad seguida de tantos ceros como cifras tenga el periodo menos 1.

Ejemplo:

$$2{,}131313... = 2{,}\overline{13}$$

- Paso 1: $2{,}\overline{13} \cdot 100 = 213{,}\overline{13}$
- Paso 2: $213{,}\overline{13} - 2{,}\overline{13} = 211$
- Paso 3: $2{,}\overline{13} = \frac{211}{100-1} = \frac{211}{99}$

Para escribir un decimal periódico mixto en forma de fracción:

1) Multiplicamos el número por la unidad seguida de tantos ceros como cifras decimales no periódicas tenga el número (así tendremos un número decimal periódico puro).
2) Escribimos en forma de fracción el decimal periódico puro obtenido en el paso a.
3) La fracción que representa al número decimal original será la fracción obtenida en el paso b, dividida por la unidad seguida de tantos ceros como cifras no periódicas tenga el número decimal.

Ejemplo:

$$5{,}6343434... = 5{,}6\overline{34}$$

- Paso 1: $5{,}6\overline{34} \cdot 10 = 56{,}\overline{34}$
- Paso 2: $56{,}\overline{34} \cdot 100 = 5.634{,}\overline{34}$

$$5.634{,}\overline{34} - 56{,}\overline{34} = 5.578$$

$$56{,}\overline{34} = \frac{5.578}{100-1} = \frac{5.578}{99}$$

- Paso 3: $5{,}6\overline{34} = \frac{5.578}{99} : 10 = \frac{5.578}{990}$

BLOQUE 7: SUMA Y RESTA DE NÚMEROS DECIMALES

- Se colocan los números en columna haciendo coincidir las comas.
- Se suman, o se restan, unidades con unidades, décimas con décimas,...

Ejemplo:

$$\begin{array}{r} 638{,}542 \\ -\quad 6{,}231 \\ \hline 632{,}311 \end{array}$$

Ejercicio 8. Realiza las siguientes operaciones:

a) 56, 456 + 3,23 =

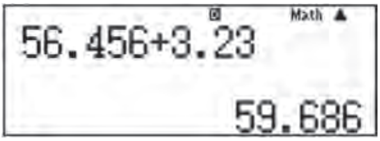
b) 789,009 + 34,456 =

c) 89,89 – 12,678 =

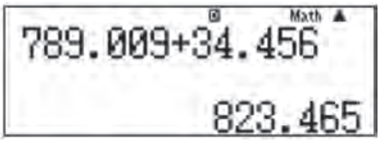
d) 2345,15 – 38,56 =

Solución:

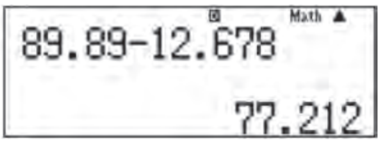
(a)



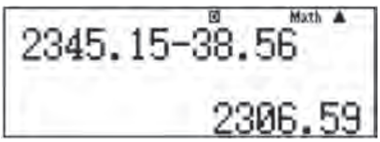
(b)



(c)



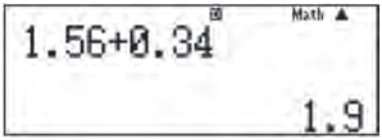
(d)



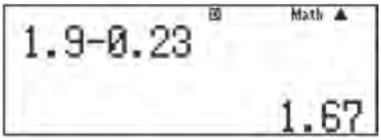
Problema 1. Silvia mide 1,56 m, Raquel mide 0,34 m más y Roberto mide 0,23 m menos que Raquel. ¿Cuánto mide el más alto?

Solución:

Raquel mide:



Roberto mide:



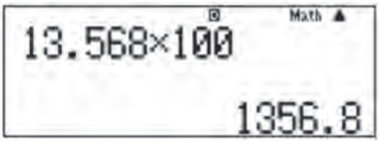
BLOQUE 8: PRODUCTO DE NÚMEROS DECIMALES

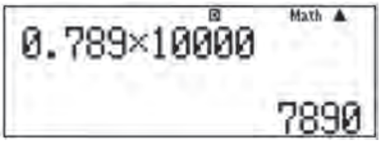
Se multiplican los números como si fuesen números enteros y se coloca la coma en el producto dejando tantos decimales como la suma de los decimales de los dos factores.

3,45	←	2 cifras decimales
x 2,5	←	1 cifra decimal
8,625	←	2 + 1 = 3 cifras decimales

Para multiplicar un número decimal por una unidad seguida de ceros (10, 100, 1.000,...), se desplaza la coma a la derecha tantos lugares como ceros acompañen a la unidad.

Ejemplos:





Ejercicio 9. Resuelve las siguientes operaciones:

a) 23,56 · 0,001

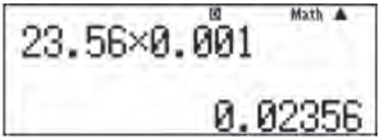
b) 894,12 · 2

c) 1,58 · 1,58

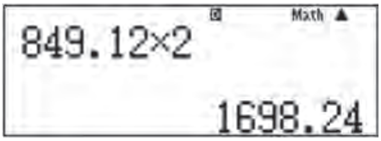
d) 0,88 · 2,015

Solución:

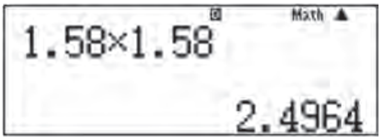
(a)



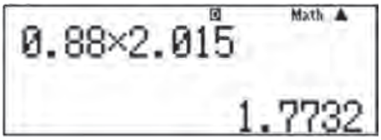
(b)



(c)



(d)



Ejercicio 10. Calcula:

a) 5,21·10

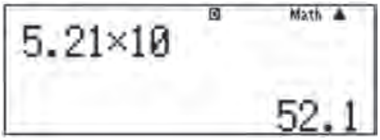
b) 100·3,157

c) 25,147·10.000

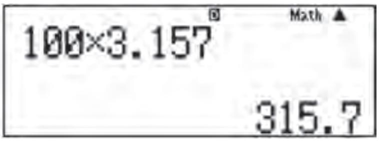
d) 39,547·1.000

Solución:

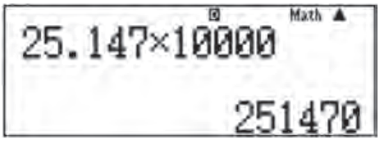
(a)



(b)



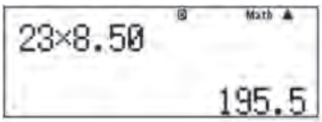
(c)

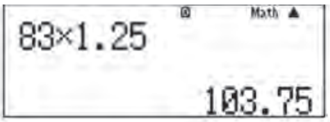


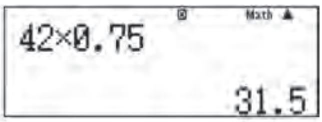
(d)

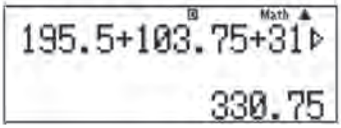
Problema 2. Para el viaje de fin de curso se ponen a la venta camisetas a 8,50 €, bolígrafos a 1,25 € y chapas a 0,75 €. Calcula cuánto dinero se ha obtenido si se vendieron 23 camisetas, 83 bolígrafos y 42 chapas.

Solución:









Se ha obtenido un total de 330,75 €.

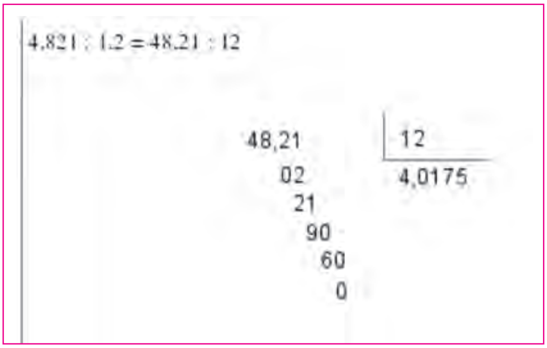
BLOQUE 9: DIVISIÓN DE NÚMEROS DECIMALES

Una opción es:

– Se multiplican el dividendo y el divisor por la unidad seguida de tantos ceros como sean necesarios para que el divisor sea un número entero.

– Se hace la división. Si el dividendo es un número decimal, al hacer la división colocamos una coma en el cociente en el momento en que bajamos la primera cifra decimal. La división termina cuando el resto es cero o se han obtenido tantas cifras decimales como se desee.

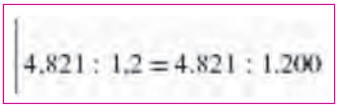
Ejemplo:



Otra opción es:

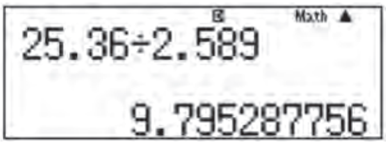
– Multiplicar dividendo y divisor por la unidad seguida de los ceros necesarios para que ambos sean números enteros, y después hacer la división.

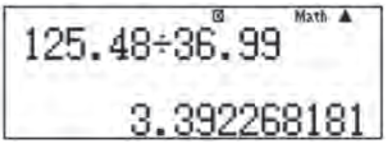
Ejemplo:



Para dividir un número decimal por una unidad seguida de ceros (10, 100, 1.000,...), se desplaza la coma a la izquierda tantos lugares como ceros acompañen a la unidad.

Ejemplos:





Ejercicio 11. Resuelve, con dos cifras decimales, las siguientes divisiones:

a) 62,2 : 15 =

b) 98,51 : 2,5 =

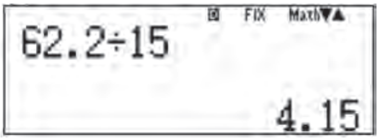
c) 623,57 : 2 =

d) 545 : 0,02 =

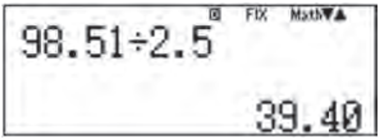
Para fijar el número de cifras decimales, en este caso 2 cifras, pulsamos **SHIFT + MODE + 6 + 2**

Solución:

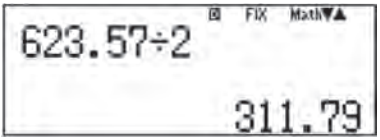
(a)



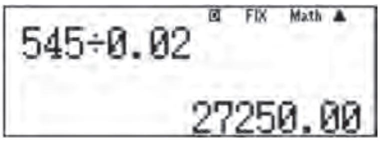
(b)



(c)



(d)



Ejercicio 12. Resuelve:

a) 2,015 : 100 =

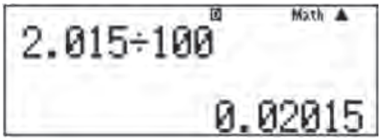
b) 63,23 : 10 =

c) 0,025 : 10.000 =

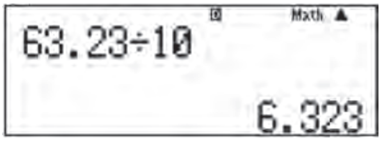
e) 987,12 : 1.000 =

Solución:

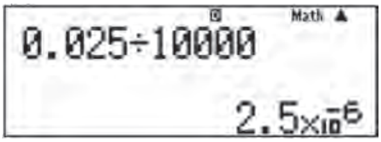
(a)



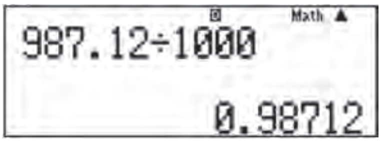
(b)



(c)



(d)



ACTIVIDADES FINALES

Estas actividades serán realizadas en casa para repasar los contenidos vistos en clase, su evaluación será incluida en la nota final del tema. Por lo tanto, es obligatorio que sean entregadas al final del tema antes de realizar la prueba final escrita.

Ejercicio 1. Indica, según el lugar que ocupan, el valor de cada una de las cifras de los siguientes números:

(Por ejemplo: 2,43: 2 unidades, 4 décimas, 3 centésimas)

1) 0,258
2) 52,1489
3) 1,2497
4) 12.591,23
5) 25,0014

Ejercicio 2. Escribe dos números decimales entre cada pareja de números:

1) 8 y 8,1
2) 0,002 y 0,01
3) 15,063 y 15,630
4) 3,1 y 4,1
5) 0,999 y 1

Ejercicio 3. Ordena de mayor a menor los siguientes números decimales:

1) 7,24; 7,254; 7,19; 7,26
2) 99,9; 99;99; 99,09; 99,999
3) 1,245; 1,2455; 1,25; 1,267

Ejercicio 4. ¿Cuántas cifras tiene el periodo de los siguientes números?:

1) 5,33333...
2) 85,2563636363636...
3) 45,2158158158158...
4) 0,121212121212121...
5) 0,10101020202020...

Ejercicio 5. Convierte las siguientes fracciones en decimales:

1) 34/546
2) 1/25
3) 89/99
4) 25/172
5) 2/37

Ejercicio 6. Convierte en fracción los siguientes números decimales:

1) 3,456
2) 34,55555555555…
3) 0,023
4) 7,889898989898
5) 576,2399999999…

Ejercicio 7. Calcula:

1) 25,3 + 15,8 =
2) 156,3 + 0,23 - 14,2 =
3) 269,001 + 0,002 =
4) 0,01 – 0,101 + 0,214 =
5) 3,61458 – 2,001 – (2,135 + 0,1) =

Ejercicio 8. Realiza las siguientes operaciones:

1) $34,56 \cdot 2,13 =$
2) $12,2 \cdot 100 =$
3) $0.1245 \cdot 1,24 =$
4) $23,4555 : 100 =$
5) $24,56 : 1,24 =$
6) $0,0023 \cdot 1000 =$

Ejercicio 9. Resuelve, con tres cifras decimales, las siguientes divisiones:

1) $25 : 3 =$
2) $5,36 : 0,07 =$
3) $0,002 : 0,013 =$
4) $102,5 : 17 =$

Problemas:

1. Luis ha pensado un número y le da las siguientes pistas a Sara para que lo adivine:

– Está más cerca de 4 que de 5.

– Está a la misma distancia de 45 décimas que de 46 décimas.

¿Qué número ha pensado Luis?

2. Una vaca produce al día 12,8 litros de leche. ¿Cuántos litros dará en un año? Si a las 20 semanas del año comienza a producir 13,5 litros al día. Al cabo de ese año ¿cuántos litros habrá dado?

EVALUACIÓN

La evaluación de esta unidad sería siguiendo el mismo modelo que para el resto de las unidades de todo el curso. Para ello dividiremos la nota final de toda la unidad en las siguientes partes:

Nota de la prueba final (60%). En esta unidad dicha prueba consta de dos partes, por un lado la parte realizada de modo tradicional en papel (30%) y la segunda parte realizada con la calculadora científica en la que se evaluará la resolución de ejercicios y problemas similares a los resueltos en clase con la ayuda de la calculadora (30%). En el caso en el que no se use la calculadora la nota final corresponderá al examen escrito.

Nota de clase (30%). Evaluaríamos la participación del alumno en la realización de los ejercicios y problemas en clase, así como la utilización que se le haga a la calculadora científica.

Nota del trabajo realizado en casa (10%). Sería las actividades realizadas en casa por parte del alumno, y luego corregidas por el profesor.

CALIFICACIÓN FINAL: 60% · A + 30% · B + 10% · C

Epsilón - *Revista de Educación Matemática* *2010, Vol. 27(2), nº 75, pp. 95-108*

Taller de calculadoras: curvas clásicas, animaciones con la ClassPad

José Manuel Fernández Rodríguez
I.E.S. El Almijar, Competa (Málaga)
Encarnación López Fernández
I.E.S. Virgen del Mar, San Pedro de Alcántara (Málaga)

Resumen: *Manipular objetos geométricos, investigar y descubrir relaciones, analizar las consecuencias de los cambios que introducimos, son algunas de las posibilidades que nos ofrecen los programas de geometría dinámica. En este taller construiremos, utilizando la aplicación Geometría de la calculadora ClassPad 330, alguna de las curvas que han destacado a lo largo de la historia de la Matemática. Realizaremos nuestras propias animaciones y aprenderemos a modificarlas para que tengan el aspecto que nosotros deseemos. En la documentación que se ofrece aparecen las construcciones como curvas mecánicas de la espiral de Arquímedes, la espiral logarítmica, la cuadratíz de Dinóstrato, la concoide de Nicómedes, la cicloide y la deltoide (como consecuencia del sistema tolemaico de epiciclos y deferentes).*

Palabras clave: *Trisección, curvas mecánicas.*

ESPIRAL DE ARQUÍMEDES

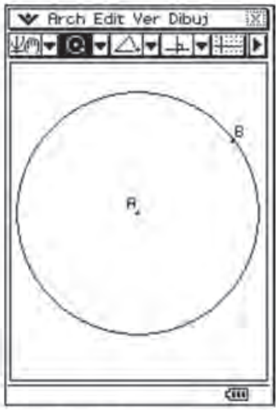
"Imaginaos una línea que gira con velocidad constante alrededor de un extremo, manteniéndose siempre en un mismo plano, y un punto que se mueve a lo largo de la línea con velocidad lineal constante: ese punto describirá una espiral".

Vamos a animar un punto (C) de una circunferencia. Construiremos el segmento AC y en él animaremos el punto D, al que le pondremos trazo. De esta forma conseguiremos que el segmento gire a la vez que el punto D se desplaza por el segmento, obteniendo así la curva buscada.

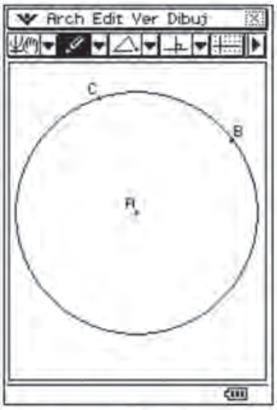
TABLA 1
LA ESPIRAL DE ARQUÍMEDES

Menú ClassPad.

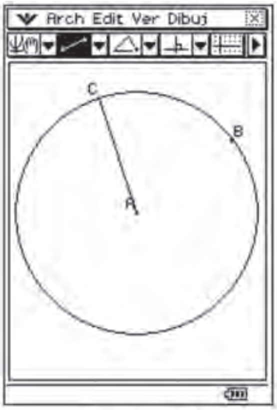
Pantalla de geometría.



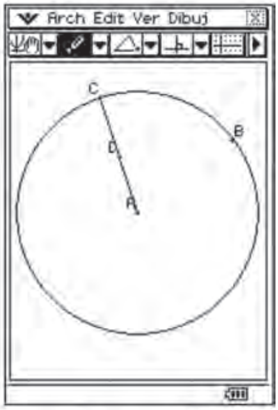
Circunferencia de centro A y de radio $|\overline{AB}|$.



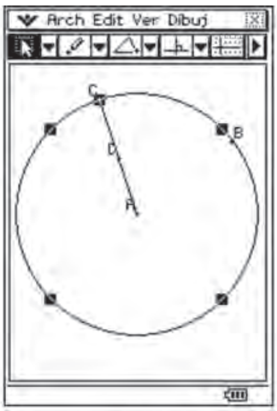
C, un punto de la circunferencia.



El segmento $\overline{AC}$.

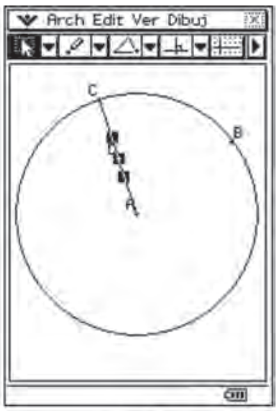


D, un punto de $\overline{AC}$.



Seleccionamos la circunferencia y el punto C.

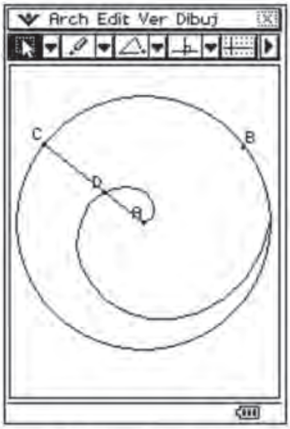
Agregamos animación.



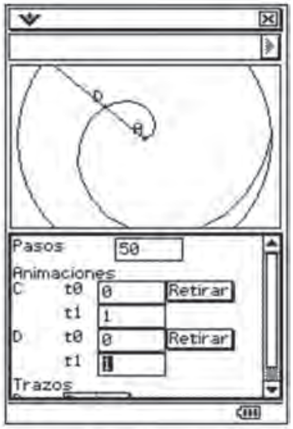
Seleccionamos D y $\overline{AC}$, y lo animamos.

TABLA 1
CONTINUACIÓN

Con D seleccionado le activamos la opción trazo.

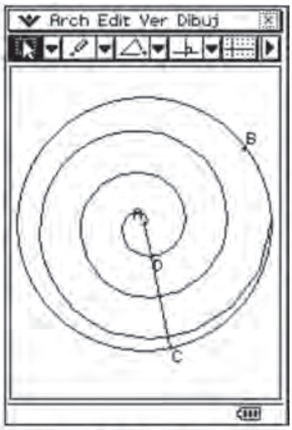


Resultado de reproducir la animación.



Si editamos la animación.

Hacemos que C de tres vueltas.



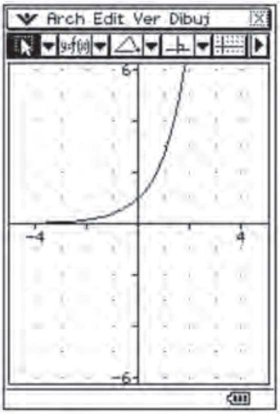
Resultado de la animación.

ESPIRAL LOGARÍTMICA

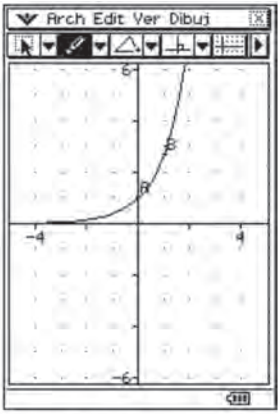
La idea de la construcción es similar a la utilizada en la espiral de Arquímedes, pero ahora vamos a animar el punto B sobre la curva $y=e^x$; el punto que irá dejando el trazo ahora será uno sobre la circunferencia.

TABLA 2
LA ESPIRAL LOGARÍTMICA

Introducimos la expresión de la función.

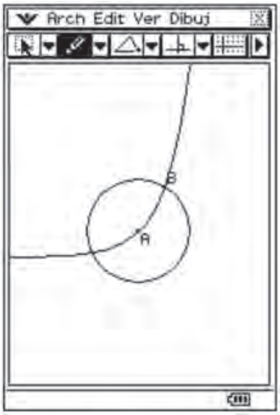


Representación gráfica.

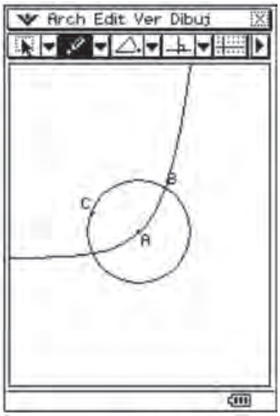


Fijamos a la curva los puntos A (0,1) y B.

Animamos B sobre la curva.

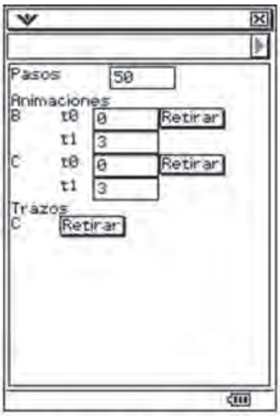


Círculo de centro A y de radio $|AB|$

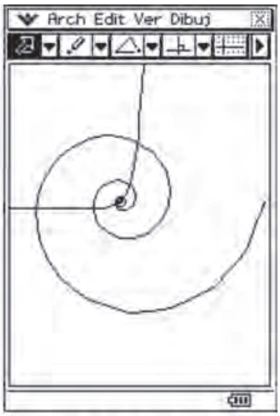


Situamos C sobre el círculo.

Le activamos el trazo y lo animamos.



Editamos las animaciones.



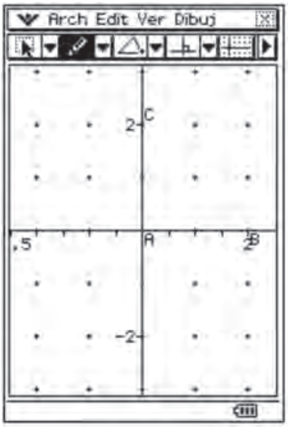
Resultado de la animación.

CUADRATIZ DE DINÓSTRATO

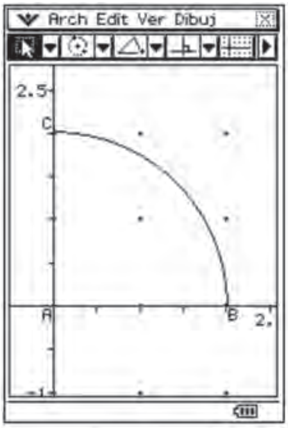
Dinóstrato utilizó la trisectriz de Hipias para cuadrar el círculo, por eso se la conoce también como la cuadratriz de Dinóstrato. Esta curva se genera por la intersección de dos rectas que se mueven, una de ellas, paralela al eje de abscisas, se desplaza verticalmente con velocidad constante y la otra gira con velocidad angular constante sobre el origen de coordenadas; el movimiento es tal que ambas rectas coinciden de forma simultánea con el eje de abscisas.

Vamos a realizar la construcción sólo para el primer cuadrante.

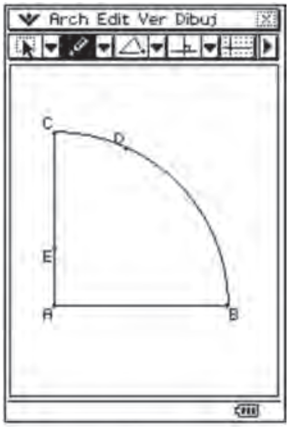
TABLA 3
LA CUADRATRIZ DE DINÓSTRATO



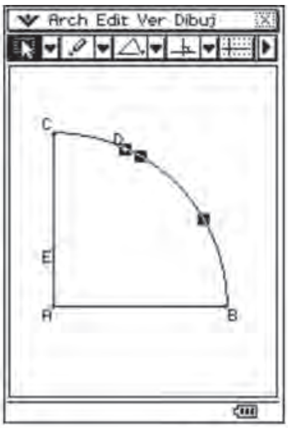
Construimos los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$.



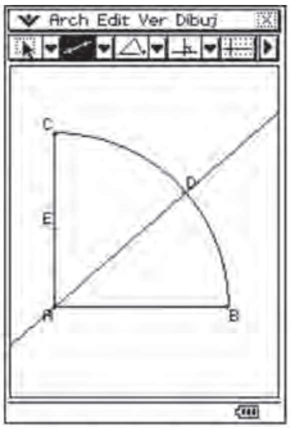
Arco de circunferencia BC.



Un punto sobre el arco y otro sobre el segmento.

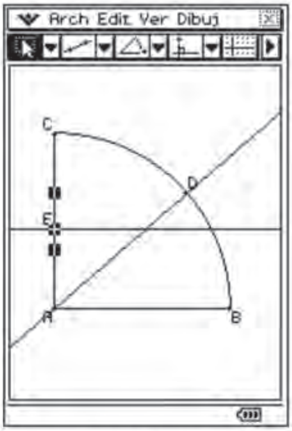


Animamos el punto D sobre el arco.

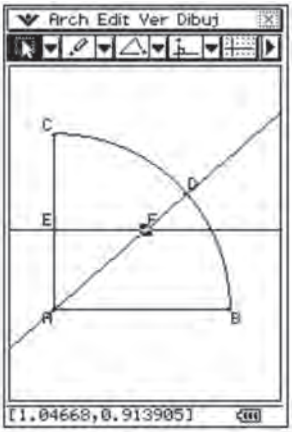


Construimos la recta que pasa por A y D.

TABLA 3
CONTINUACIÓN

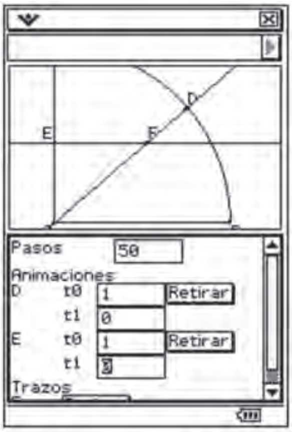


Trazamos la perpendicular a $\overline{AC}$ por E.

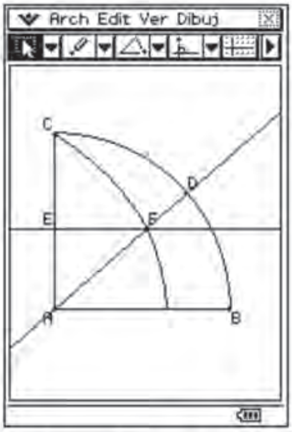


Fijamos F a la intersección.

Animamos E sobre $\overline{AC}$ y activamos el trazo para F.



Editando los parámetros de la animación.

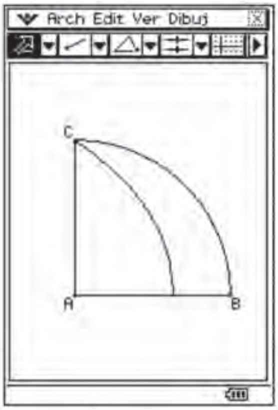


Resultado de la animación: la cuadratriz de Dinóstrato.

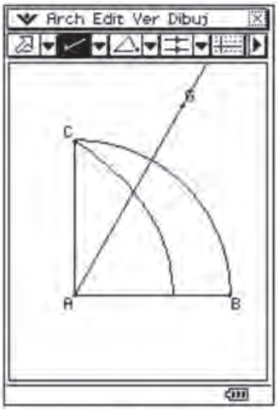
TRISECCIÓN

Vamos a describir a continuación el procedimiento a seguir para trisecar un ángulo. La idea no es complicada ya que, como la trisectriz de Hipias es el lugar geométrico de los puntos de corte de dos rectas cumplirán, lógicamente las condiciones de las dos rectas; esto se traduce en que, la proyección sobre AC del arco de trisectriz determinado por un ángulo es directamente proporcional a la amplitud de dicho ángulo. Este hecho nos va permitir dividir cualquier ángulo sin más que dividir la proyección sobre AC del arco de trisectriz que determina dicho ángulo.

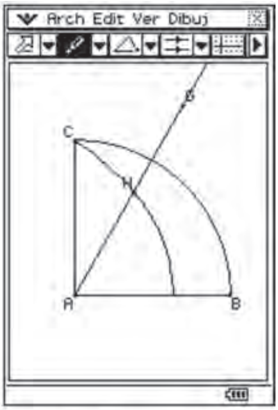
TABLA 4
TRISECANDO UN ÁNGULO



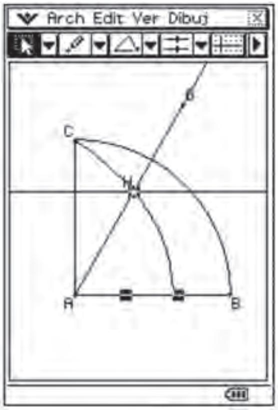
Partimos de la construcción anterior.



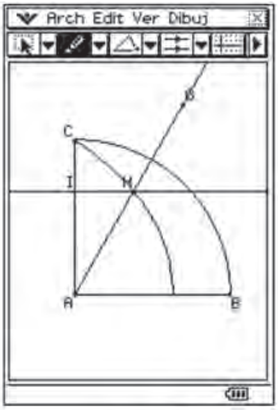
Determinamos el ángulo que vamos a trisecar.



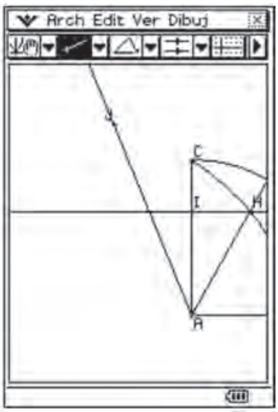
La semirrecta AG corta a la trisectriz en H.

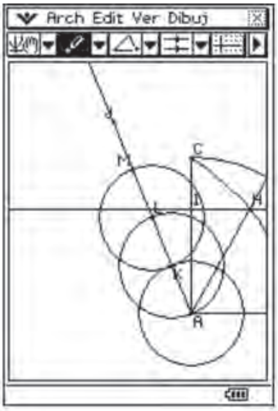


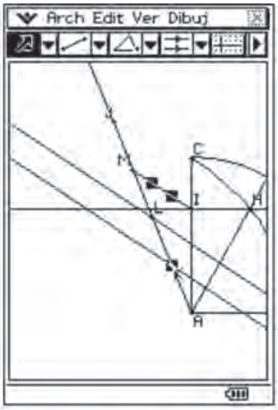
Proyectamos $\overline{AH}$ sobre $\overline{AC}$.

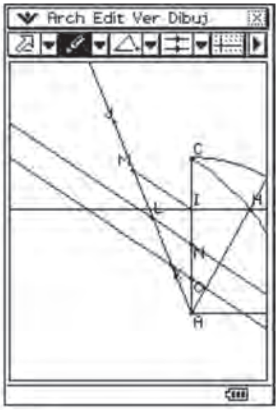


Obtenemos $\overline{AI}$.



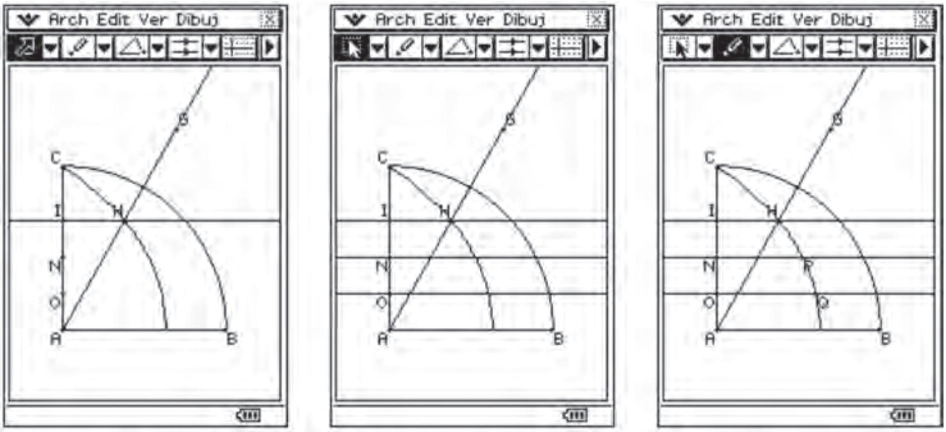




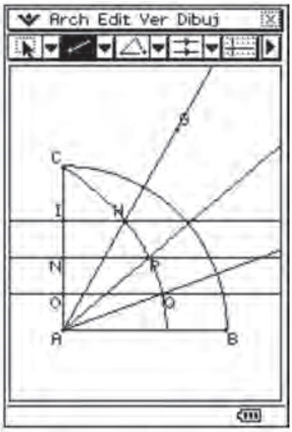


Dividimos $\overline{AI}$ en tres partes iguales obteniendo los puntos O y M.

TABLA 4
CONTINUACIÓN



Trasladamos la división de $\overline{AI}$ sobre la trisectriz obteniendo los Puntos P y Q que nos determinan …

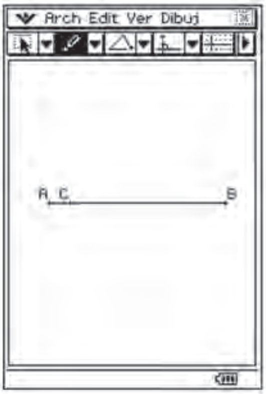


… la trisección del ángulo elegido.

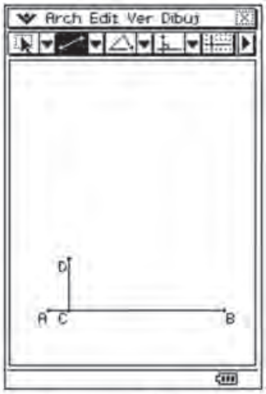
CICLOIDE

Podemos definir la cicloide como la curva que describe un punto de una circunferencia cuando ésta rueda, sin deslizarse, por una línea recta. Curva de máxima resistencia estructural, tautócrona y braquistócrona; son propiedades que por sí solas hablan de la importancia de esta curva, si además nombramos a Galileo, Pascal o Newton, queda patente lo mucho que ésta nos puede enseñar. En esta construcción, tras hacer rodar la circunferencia sobre un segmento, ajustaremos algunos parámetros para obtener el resultado deseado.

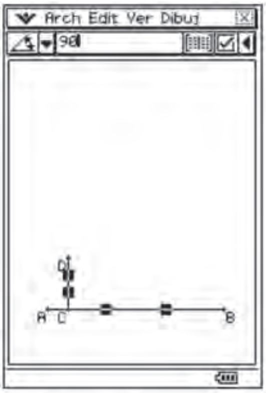
TABLA 5
LA CICLOIDE



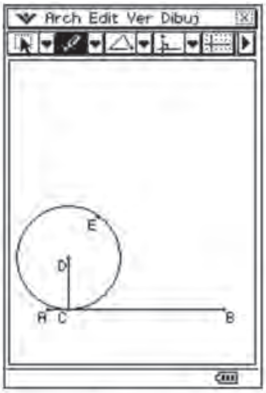
Animamos C en $\overline{AB}$.



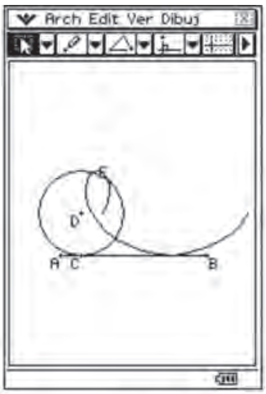
Construimos el radio de la circunferencia



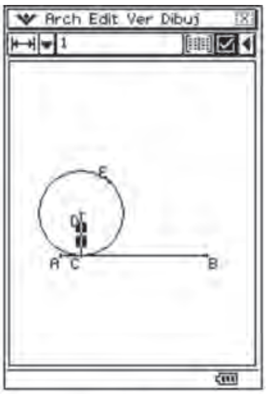
Lo hacemos perpendicular al segmento $\overline{AB}$.

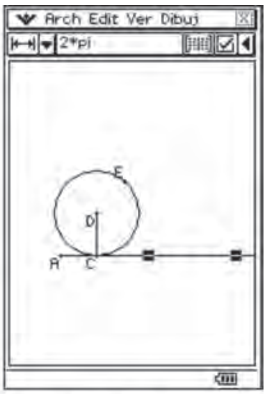


Construimos la circunferencia y animamos E sobre ella.



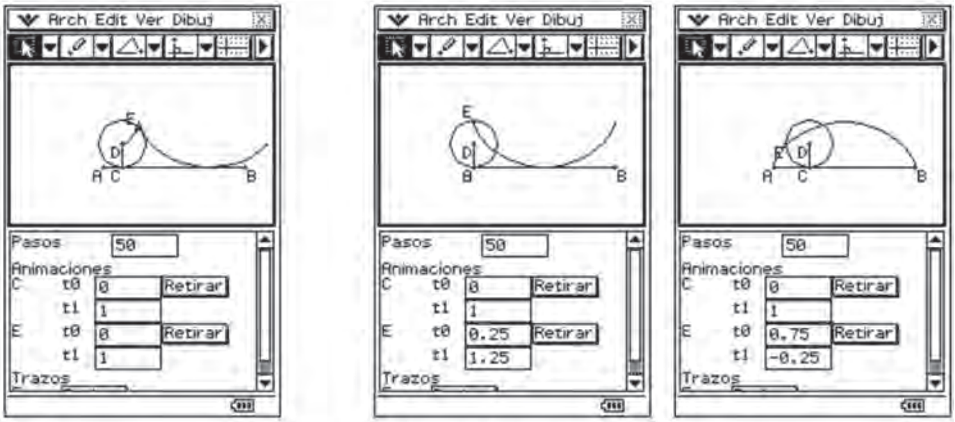
Resultado de la animación.



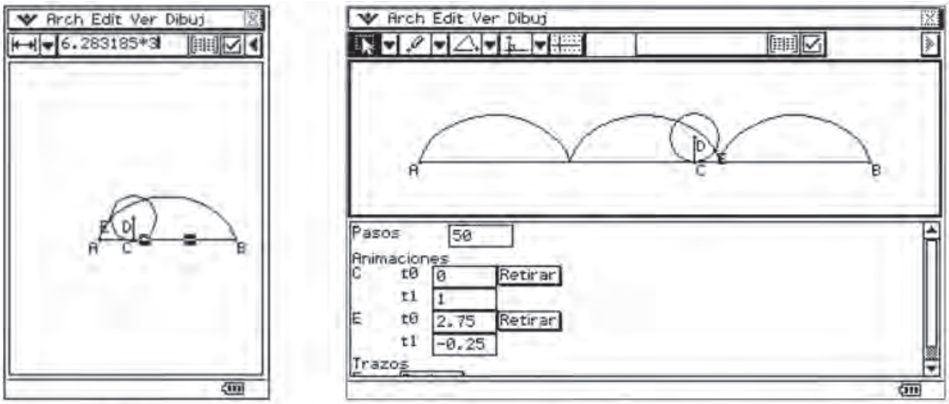


Longitude de la circunferencia iguala a la de $\overline{AB}$.

TABLA 5
CONTINUACIÓN



Ajustando los parámetros de la animación.



Hacemos la longitud del segmento tres veces la de la circunferencia y modificamos los parámetros de la animación.

LA CONCOIDE DE NICÓMEDES

La concoide de Nicómedes (siglo II a. C) aparece al trisecar un ángulo por medio del método de Arquímedes (siglo III a. C.). Podemos definirla como el lugar geométrico de los pares de puntos G y H, situados sobre una recta que pasa por un punto fijo D, el polo, y otro punto E que a su vez se desplaza a lo largo de una recta (que contiene al segmento $\overline{ABAB}'$) llamada directriz. La distancia de G a E y de H a E es una distancia fija. Este método de construcción se lo debemos a Roberval.

FIGURA 1
LA CONCOIDE DE NICÓMEDES

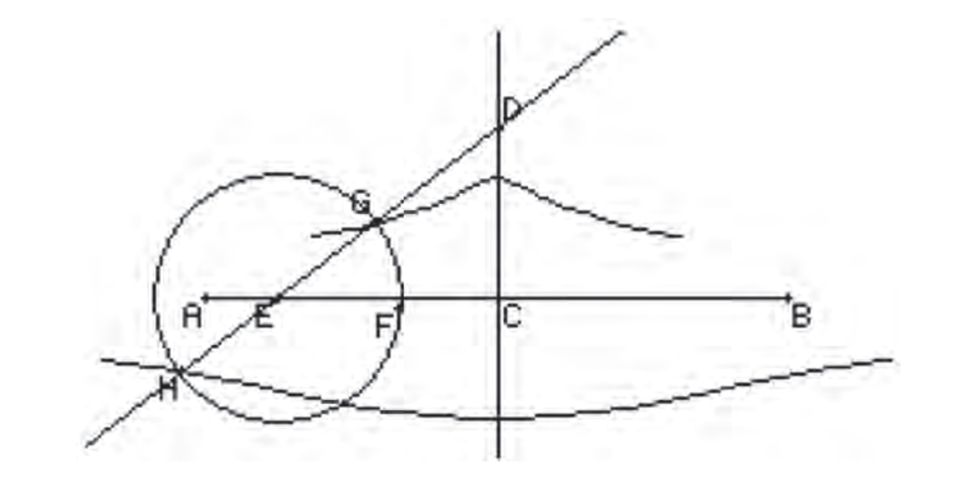
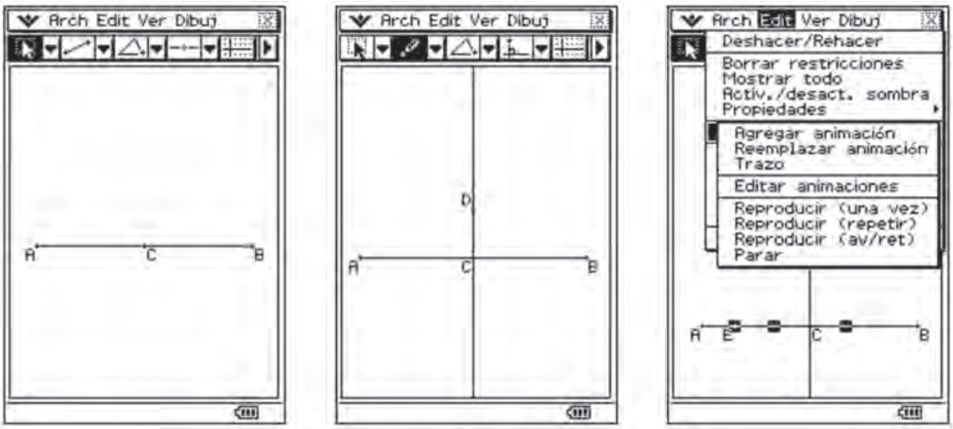
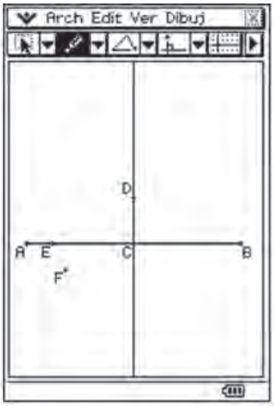


TABLA 6
LA CONCOIDE

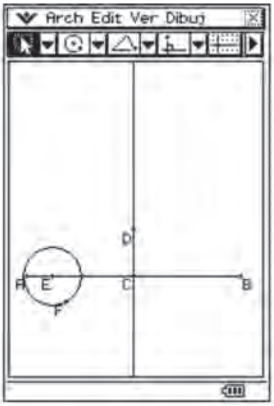


Construyendo los puntos D y E, animando el punto E en $\overline{AB}$.

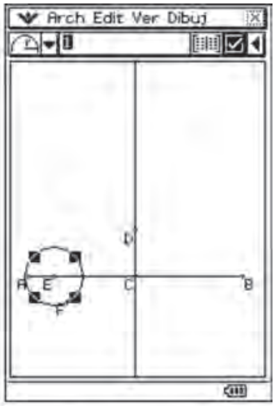
TABLA 6
CONTINUACIÓN



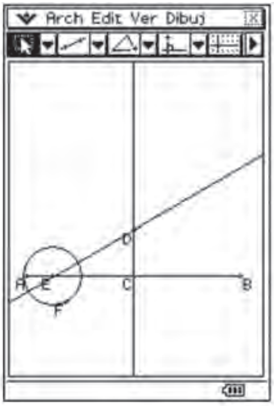
Elegimos F.



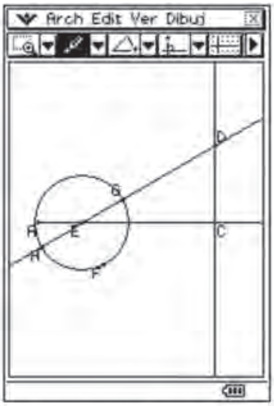
Construimos la circunferencia de radio $|EF|$.



Fijamos el radio a 1.

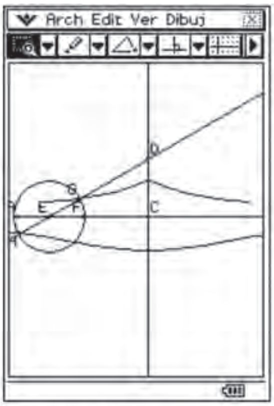


Construimos la recta que pasa por D y E.

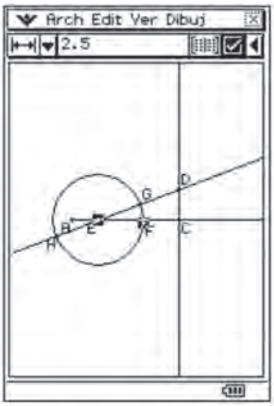


Corta a la circunferencia en G y H.

Activamos el trazo de G y H.



Resultado de la animación.



Aumentamos el radio de la circunferencia.

Resultado de la animación.

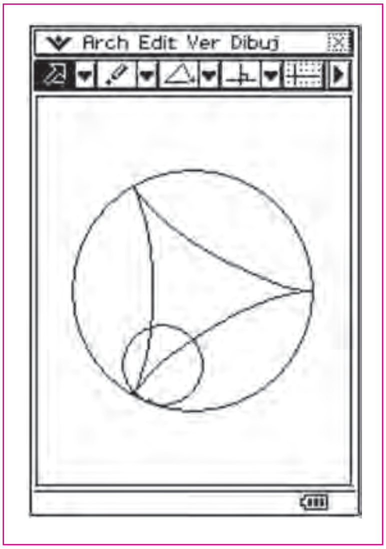
EPICICLOS Y DEFERENTES

Para explicar algunas observaciones (retrogradación, variación del tamaño y de la luminosidad de ciertos planetas), Tolomeo estableció un modelo matemático para las órbitas de los planetas en las que les asignaba a cada uno un círculo imaginario llamado deferente que contenía al nuestro en su interior. Cada planeta girará a su vez en un nuevo círculo, llamado epiciclo, cuyo centro será un punto de su deferente.

El *Almagesto* de Tolomeo comparte con los *Elementos* de Euclides, la gloria de ser los textos científicos en uso durante más tiempo. Desde su concepción en el siglo II hasta finales del Renacimiento, su obra determinó a la astronomía como ciencia.

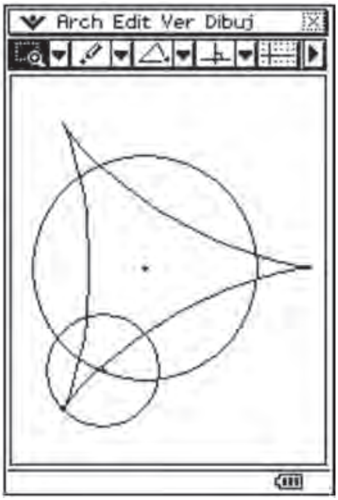
Sería un error por nuestra parte considerar la obra de Tolomeo sólo como una teoría astronómica errónea ya que desde el punto de vista matemático posee una gran riqueza y permite construir gran cantidad de curvas.

FIGURA 2
LA DELTOIDE



Sirva de muestra la deltoide, es una hipocicloide en la cual el radio de la circunferencia que gira es la tercera parte del radio de la circunferencia fija (figura 2). También se puede generar a partir de epiciclos y deferentes cuyos radios estén en razón 1/2 (figura 3).

FIGURA 3
RESULTADO DE LA ANIMACIÓN DE LA DELTOIDE



BIBLIOGRAFÍA

De Andrés, Luis Carlos. "De las Trisectrices, la Cicloide y otras Curvas". http://divulgamat.ehu.es/weborriak/TestuakOnLine/03-04/PG03-04-lcandres.pdf

Páramo Fonseca, Aquiles. "Temas de cálculo integral. La gran belleza de las trocoides". http://temasmatematicos.uniandes.edu.co/Trocoides/paginas/introduccion.htm#cp0

Pérez Sanz, Antonio. "Curvas en la Naturaleza". http://divulgamat.ehu.es/weborriak/TestuakOnLine/04-04/PG-04-05-perez.pdf

Pérez Sanz, Antonio. "Curvas con historia: de las cónicas a las ecuaciones de las flores". http://platea.pntic.mec.es/~aperez4/curvashistoria.pdf

Sada Allo, Manuel. "Webs interactivas de matemáticas. Cicloides y trocoides". http://recursos.pnte.cfnavarra.es/~msadaall/geogebra/trocoides.htm

ClassPad 300. Guía del Usuario. http://www.classpad.org/index.php

Epsilón - *Revista de Educación Matemática* *2010, Vol. 27(3), nº 76, pp. 109-148*

Modelar y resolver problemas con la calculadora ClassPad 330

Mauricio Contreras del Rincón
I.E.S. Benicalap (Valencia)

UNAS PALABRAS PARA EMPEZAR

En Portugal, los exámenes finales de matemáticas que dan acceso a la Universidad vienen realizándose desde el año 1999 con calculadora gráfica. No es que se tolere el uso de calculadora gráfica en la resolución de los problemas, es que la resolución de los problemas propuestos no sería posible si no se dispone de una buena calculadora gráfica. En pocas palabras, la calculadora gráfica es obligatoria, como podemos observar en los mismos enunciados de los exámenes. Por otra parte, la calculadora gráfica está presente no solamente en los exámenes nacionales que permiten acceder a la Universidad, si no también en los exámenes finales de matemáticas de 10º, y 11º año de Secundaria, en los que también su uso es obligatorio.

En nuestro país la situación es muy diferente. En cada comunidad autónoma las normas de selectividad son distintas y los currículos de secundaria y Bachillerato también son diferentes. Se podría decir que, mientras el currículum aconseja y apuesta por el uso de las TIC, en particular, de las calculadoras (y de las gráficas también), lo cierto es que hay comunidades autónomas donde no se permite el uso de calculadoras gráficas, o donde se tolera el uso de algunas marcas y no de otras, o donde se permite el uso de gráficas, pero no el de calculadoras CAS.

Sin embargo, la tendencia en todos los países europeos es a utilizar cada vez más tecnología para la resolución de problemas, y, en particular, calculadoras gráficas y CAS sin ningún tipo de restricción, tal como se aprecia en los países nórdicos y centroeuropeos.

Las actividades que se proponen en este texto proceden de los exámenes de selectividad portugueses. Aunque en Portugal se permite calculadora gráfica, no se permite en cambio, el uso de CAS. En este trabajo se apuesta por la tecnología CAS de la ClassPad 330, ya que con ella se facilita mucho el trabajo de modelización, el cual es un poco más complejo con la calculadora gráfica. La intención de este trabajo es mostrar que hay matemáticas que se pierden si no se usa una calculadora gráfica o simbólica en las clases. Hay maneras de ver los conceptos e ideas matemáticas que no serían posible si no se dispone de tecnología gráfica o CAS. Hay conexiones entre campos conceptuales diferentes que no se aprecian si no se dispone de tecnología gráfica o CAS. Si repasamos las competencias matemáticas según PISA, (Pensar y razonar, argumentar, comunicar, modelar, plantear y resolver problemas, representar, utilizar el lenguaje simbólico, formal y técnico y las operaciones), vemos que la calculadora ClassPad 330 favorece el desarrollo de todas ellas. Por tanto, prohibir o restringir su uso sería equivalente a prohibir o restringir que todos los estudiantes alcancen mejores niveles de desarrollo de su competencia matemática. El objetivo de este trabajo es ayudar a estudiantes y profesores en la tarea de lograr una mayor competencia matemática y un mejor nivel en el uso de tecnologías.

LOS PROBLEMAS

1. Horas de Sol

En el presenta año civil, en Lisboa, el tiempo que transcurre entre la salida y ocultación del Sol, en el dia que ocupa el lugar n del año, está dado, en horas, aproximadamente, por:

$$f(n) = 12{,}2 + 2{,}64 \cdot \operatorname{sen} \frac{\pi \cdot (n - 81)}{183}, \quad n \in \{1, 2, 3, ..., 366\}$$

(el argumento de la función seno está expresado en radianes).

Por ejemplo,: en el dia 3 de febrero, trigésimo cuarto día del año, el tiempo que transcurre entre la salida y ocultación del Sol fue de f (34) ≈ 10,3 horas.

1) En el día 24 de Marzo, Día Nacional del Estudiante, el Sol salió a las seis y media de la mañana. ¿En qué instante se ocultó el Sol ese día? Presenta el resultado en horas y minutos (los minutos redondeados a las unidades).

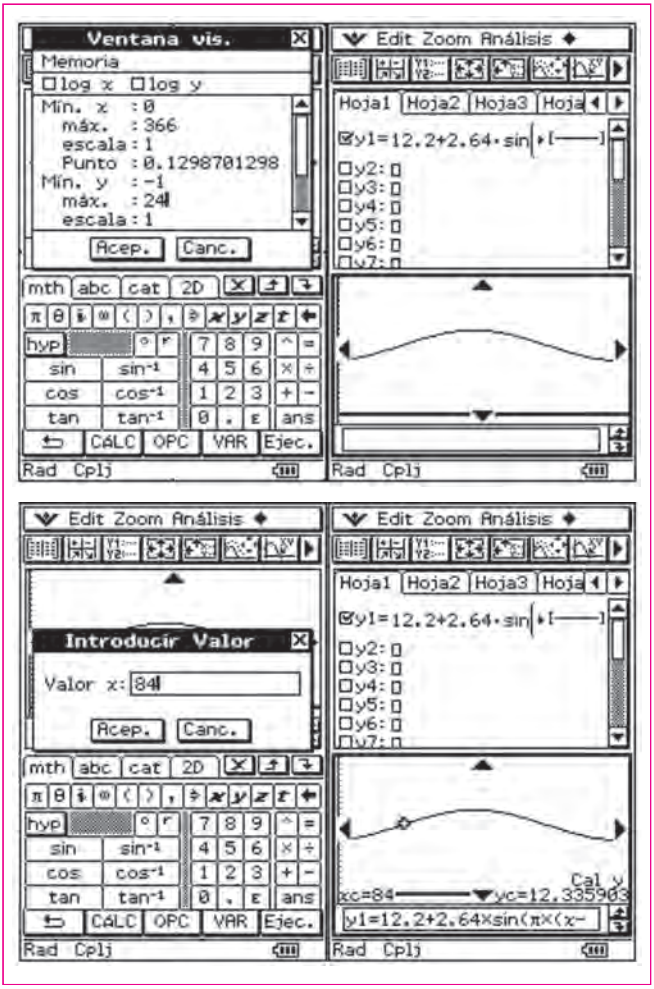
Notas:

- Recuerda que, en el presente año, el mes de Febrero tiene 29 días.
- Siempre que, en los cálculos intermedios, realices redondeos, conserva, como mínimo, tres cifras decimales.

2) En algunos días del año, el tiempo que transcurre entre el nacimiento y la ocultación del Sol es superior a 14,7 horas. Utilizando la calculadora, determina en cuántos días del año ocurre esto. Indica cómo lo haces.

Resolución

1) El día 24 de Marzo es el día 31+29+24=84 del año. Para ver cuántas horas de sol hubieron ese día, representamos la gráfica de la función y calculamos el valor f(84), con la opción **Análisis / Resolución gráfica / CalY**

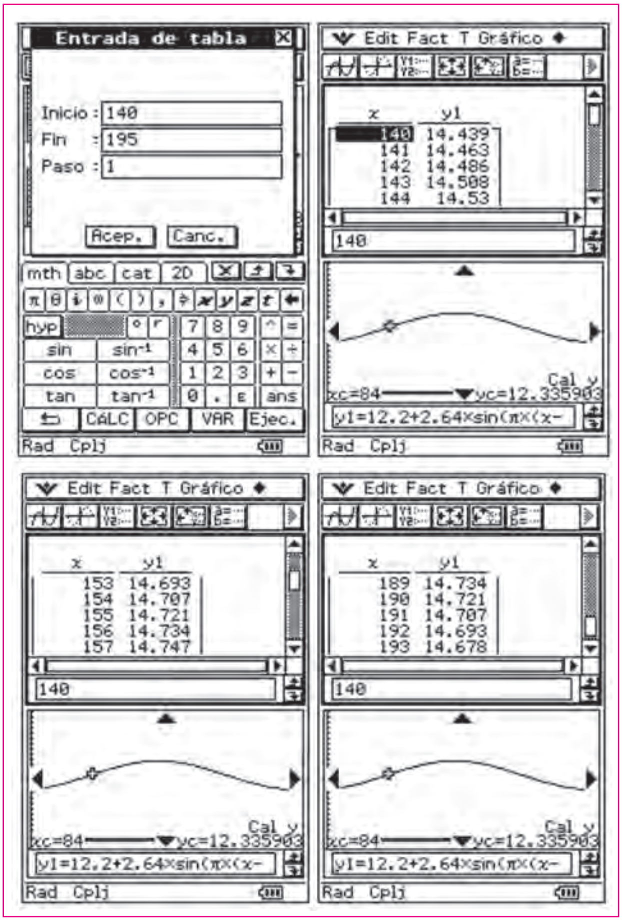


Ese día, el número de horas de sol fueron 12.335903. Podemos concluir que la puesta de Sol del día 24 de Marzo tuvo lugar a las 6 h 30 m + 12 h 20 m = 18 h 50 m.

2) Pretendemos hallar n de forma que f(n)>14.7. Con la calculadora gráfica tenemos dos formas de obtener la respuesta.

Primera forma: usando tablas de valores

Construimos una tabla de valores de la función, tal como se indica a continuación:

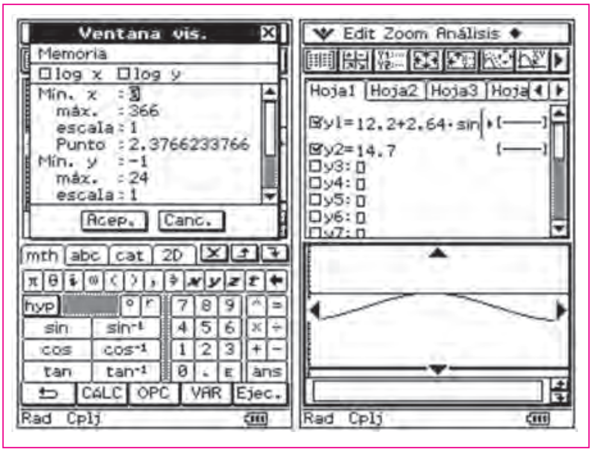


Vemos que f(x) > 14.7 si 154 ≤ x ≤ 191, lo que supone un total de 191 – 153 = 38 días. Por tanto, durante 38 días, el número de horas de sol es superior a 14,7 horas.

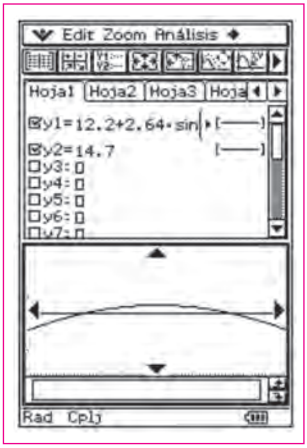
Nota: debes configurar la calculadora para que los ángulos se expresen en radianes.

Segunda forma: usando gráficos

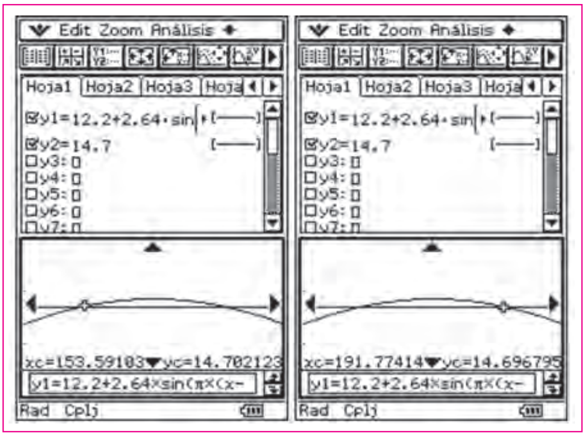
Introduce la función Y2 = 14.7 en el editor de gráficos y representa gráficamente las dos funciones, con la siguiente ventana de visualización:



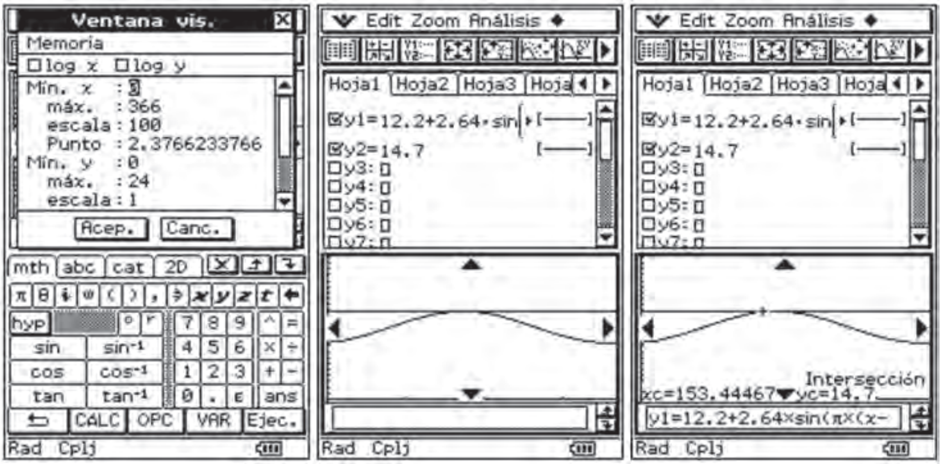
Ampliamos la zona central del gráfico con un zoom de cuadro:



A continuación, hallamos los puntos de intersección con el cursor de recorrido.



lo que confirma el resultado obtenida con las tablas de valores. También podemos obtener el mismo resultado, usando el comando **Análisis / Resolución gráfica / Intersección**, tal como indican las siguientes pantallas:



Comprobamos que las 14,7 horas de sol ocurrirán en dos instantes, aproximadamente, correspondientes a 153,445 días y 191,555 habiendo por tanto 191 – 154 + 1 = 38 días con más de 14,7 horas de sol.

Competencias

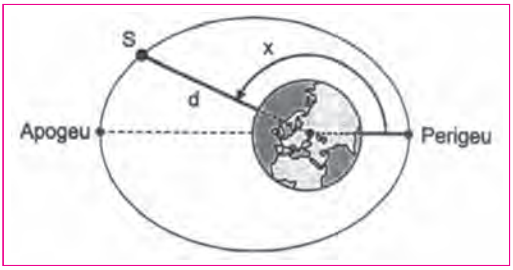
En esta actividad hay que utilizar el cursor de recorrido, tablas de valores y gráficos de la calculadora gráfica para resolver una inecuación trigonométrica, interpretando previamente la función correspondiente en el contexto del fenómeno periódico en estudio. Con la ClassPad, el problema se resuelve gráficamente, en vez de algebraicamente.

- Modelar: como el modelo ya está dado en el enunciado por medio de la función seno, más que construir el modelo, hay que comprenderlo interpretándolo en el contexto del fenómeno periódico que se está analizando.
- Conectar tablas y gráficos para resolver problemas.
- Representar y comunicar el resultado.

2. El Satélite

Un satélite S tiene una órbita elíptica alrededor de la Tierra, tal como se representa en la figura. Ten en cuenta que los elementos señalados en ella no están en la misma escala. En la elipse están señalados dos puntos:

- El apogeo, que es el punto de la órbita más alejado del centro de la Tierra.
- El perigeo, que es el punto de la órbita más próximo al centro de la Tierra.



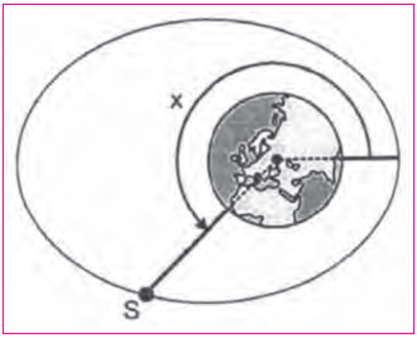
El ángulo, x, señalado en la figura, tiene su vértice en el centro de la Tierra, su lado origen para por el perigeo, y su lado extremo pasa por el satélite S y su amplitud está comprendida entre 0 y 360 grados.

La distancia d, en km, del satélite al centro de la Tierra, está dada por:

$$d = \frac{7820^{o}}{1 + 0{,}07 \cdot \cos x}$$

Considera que la Tierra es una esfera de radio 6378 km.

1) Determina la altitud del satélite (distancia a la superficie de la Tierra) cuando éste se encuentra en el apogeo. Presenta el resultado en km, redondeando a las unidades.
2) En cierto instante, el satélite está en la posición indicada en la figura.



La distancia al centro de la Tierra es, entonces, de 8.200 km.

Determina el valor de x, en grados, redondeando a las unidades.

Resolución

1) Si el satélite se encuentra en el apogeo, el ángulo x tiene amplitud igual a 180º. Basta calcular d(180), que es la distancia del satélite al centro de la Tierra.

La distancia del satélite al centro de la Tierra en el apogeo es 8408,6 km.

Si a esta distancia le restamos el radio de la Tierra, tenemos 8408,6 – 6378 = 2030,6 km, que es la altitud a la que está el satélite cuando se encuentra en el apogeo.

2) El razonamiento en este apartado es inverso al del apartado anterior. Queremos resolver la ecuación d(t)=8200, lo que podemos hacer con el comando **solve** de la calculadora:

Como el ángulo x está en el tercer cuadrante, la solución es:

$$X = 360º - 131.4541813 = 228.5458187º = 228,55º$$

Competencias

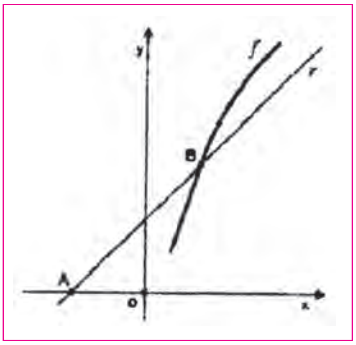
Como el modelo ya viene en el enunciado, nuevamente hemos de comprender el modelo conectándolo con el contexto de la situación planteada. Después hay que usar el modelo para resolver una ecuación trigonométrica que permita obtener el ángulo pedido.

- Modelar: comprender el modelo, dado por la función coseno en términos de la situación propuesta.
- Conectar el modelo con la situación propuesta para obtener valores particulares y para dar el paso inverso, resolviendo la ecuación trigonométrica que permite resolver el problema.
- Argumentar la validez de la solución recurriendo a las propiedades de las funciones trigonométricas.

3. Función

Considera la función f de dominio R, definida por f(x)=2x – cos x:

1) Utilizando el teorema de Bolzano, demuestra que la función f tiene, por lo menos, un cero en el intervalo (0, π).
2) Sea f' la función derivada de f. Demuestra que f'(x)>0, para todo x de R, y justifica que el cero de f, cuya existencia está garantizada por el enunciado del apartado anterior, es el único cero de esta función.
3) En la figura de abajo están representadas: a) parte del gráfico de la función f, b) parte de una recta, cuya inclinación es de 45º, que contienen al punto A(–3, 0) y que corta al gráfico de la función f en el punto B.



Utilizando la calculadora, determina el área del triángulo AOB, donde O designa el origen de coordenadas. Presenta el resultado redondeando a las unidades.

Resolución

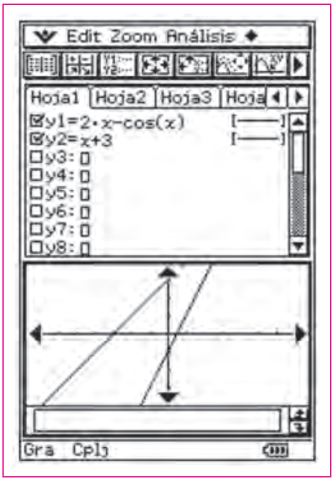
1) Se trata de ver que la función f cumple las hipótesis del teorema de Bolzano. Evidentemente, f es continua en $[0, \pi]$ y $f(0)= -1<0$ y $f(\pi)=2\pi+1>0$. Aplicando el teorema de Bolzano, existe al menos un punto a € $(0, 2\pi)$ tal que $f(a)=0$.

2) La derivada de la función es $f'(x)=2-(-\text{sen } x)=2+\text{sen}x$. Como $\text{sen } x > 0$ en el intervalo $(0, \pi)$, resulta que $f'(x)>0$, para $x€(0, \pi)$.

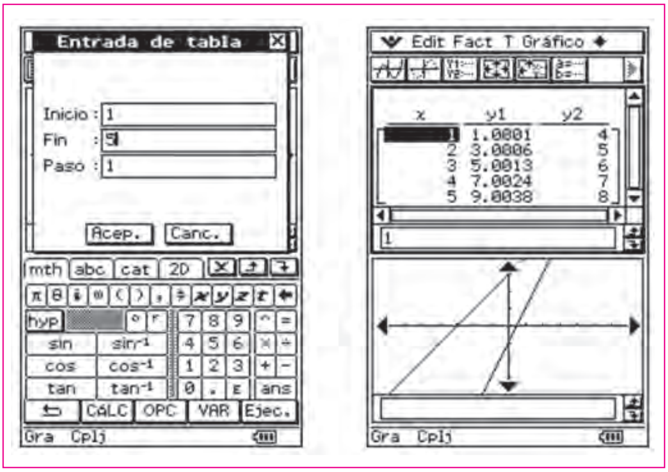
3) La recta r que contiene al punto A(-3, 0) y cuya inclinación es 45º, tiene por ecuación la expresión $y=x+3$. De hecho, la ecuación de una recta es del tipo $y =mx+b$, en la que m es la pendiente de la recta y b la ordenada en el origen. La inclinación 45º de la recta corresponde a una pendiente $m=1$ (basta observar que para cualquier vector director de la recta, los vectores componentes tienen la misma norma). Para calcular b se sabe que el punto A de coordenadas (-3, 0) pertenece a la recta. Por tanto: $0=1\times(-3)+b \leftrightarrow b=3$. Así, la ecuación de la recta es $y=x+3$.

Para determinar el área del triángulo AOB, debemos hallar, en el sistema de referencia dado, las coordenadas del punto B.

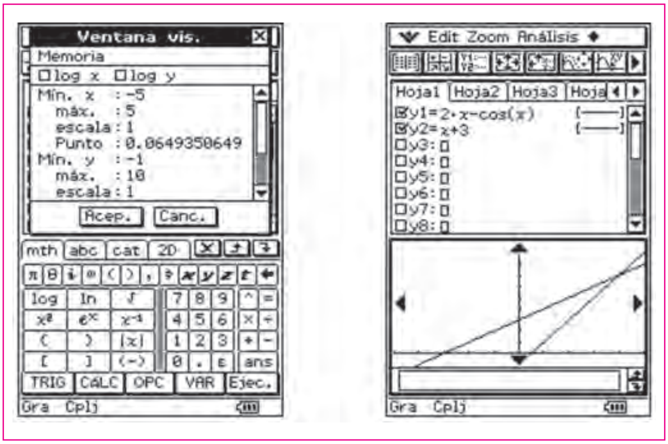
En el menú **Gráficos y Tablas**, introducimos la función f y la recta r.



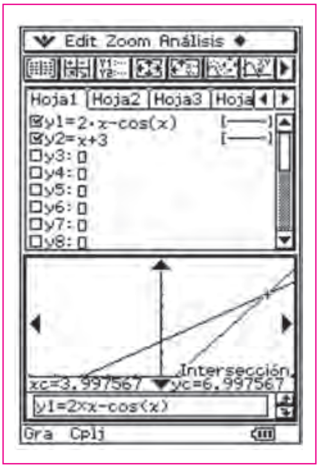
Para definir mejor la ventana de visualización, podemos ver que los valores de x varían entre 2 y 3 y que el valor de la ordenada está comprendido entre 5 y 6. Introducimos una tabla de valores, tal como se indica a continuación.



Analizamos los valores de la tabla y deducimos que la mejor ventana de visualización para el gráfico es la siguiente:



Podemos determinar las coordenadas del punto B, a través de la intersección de la recta r con la función f. Para ello, recurrimos al comando **Análisis / Resolución gráfica / Intersección**.



Concluimos que las coordenadas del punto B son, aproximadamente, (2.32, 5,32).

Podemos determinar el área A del triángulo AOB.

Sea B' la proyección ortogonal del punto B sobre el eje OX. Tenemos:

$$A = \frac{AO \times BB'}{2} = \frac{|0-(-3)| \times |0-5.32|}{2} = \frac{3 \times 5.32}{2} = 7.79 \approx 8 \text{ unidades.}$$

Redondeando a las unidades, el área A del triángulo AOB es igual a 8 unidades cuadradas.

Competencias

En este caso no hay propiamente una actividad de modelización, pero si la hay de argumentación y razonamiento matemático, puesto que hay que utilizar teoremas y propiedades de las funciones para hacer demostraciones, pensar, razonar y argumentar. Además el cálculo del área del triángulo AOB, requiere el uso de tecnología para hallar el punto de intersección B.

- Argumentar: utilizar las propiedades de la función para justificar otras nuevas.
- Representar: hay que dibujar la gráfica de la función y de la recta para hallar el punto de intersección y usarlo para obtener el área pedida.
- Conectar; asociar el punto de intersección de dos gráficas con la resolución del sistema formado por sus ecuaciones.

4. "Antidor – Acción rápida y prolongada"

Un laboratorio farmacéutico lanza al mercado un nuevo analgésico, el Anti-Dor. La concentración de este medicamento, en decigramos por libro de sangre, t horas después de ser administrado a una persona, está dada por:

$$C(t) = t^2 \cdot e^{-0.6 \cdot t} \quad (t \geq 0)$$

El laboratorio realiza una campaña de promoción de este medicamento, basada en el slogan "AntiDor: Acción rápida y prolongada".

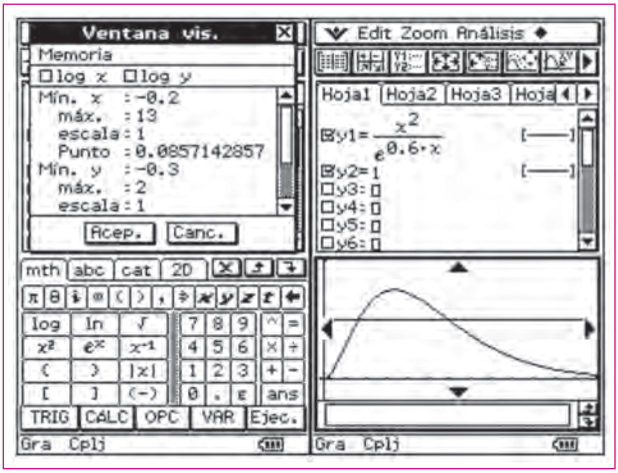
En una breve redacción de sesenta a ciento veinte palabras, comenta el slogan, teniendo en cuenta que:

- Para la mayoría de dolores, el AntiDor solo produce efecto si su concentración es superior a 1 decigramo por libro de sangre.
- De acuerdo con una asociación de defensa del consumidor, un buen analgésico debe comenzar a producir efecto, como máximo, media hora después de haberse tomado, y su acción debe permanecer durante, por lo menos, cinco horas (después de haber comenzado a producir efecto).

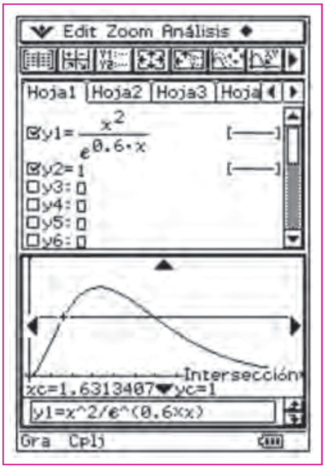
Nota: En la resolución de esta cuestión, debes utilizar la calculadora gráfica e ilustrar la redacción con el trazado de uno o más gráficos.

Resolución

Para la mayoría de los dolores, el Antidor apenas produce efecto si su concentración en la sangre fuera superior a 1 decigramo por litro. Teniendo en cuenta esto, hacemos un análisis conjunto de las dos funciones $C(t) = t^2 \cdot e^{-0.6 \cdot t}$ $(t \geq 0)$ y $E(t) = 1$, $(t \geq 0)$, siendo E(t) el valor a partir del cual se da el efecto. Utilizamos la siguiente ventana de visualización:

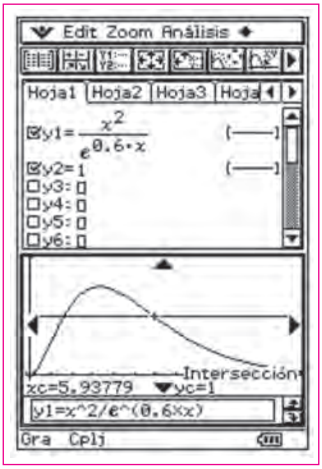


Usamos el comando **Análisis / Resolución gráfica / Intersección** para determinar los puntos de corte de las dos funciones.



Con el primer punto de intersección podemos inferir que el medicamento solo comienza a tener efecto más de una hora y media después de haber sido administrado (cerca de 1.631 horas después).

Por lo que se refiere a la acción prolongada, podemos también observar que el segundo punto de intersección de las curvas acontece 5.938 horas después de la administración del medicamento.



Así, hallando la diferencia, tenemos 5.938 – 1.631 = 4.307 horas de duración del medicamento, lo que contradice las premisas de la asociación de defensa del consumidor para una acción prolongada.

Podemos afirmar que estamos ante un caso de publicidad engañosa, ya que la acción del Antidor no es rápida (pues hace efecto más de una hora y media después de haber sido tomado) ni prolongada (pues el efecto dura menos de cinco horas).

Competencias

Aunque el modelo ya está construido, hay que comprenderlo, para poder analizar si la publicidad que hace el fabricante es o no correcta. Comprender el modelo implica representarlo gráficamente y analizar si algunos valores particulares se ajustan o no al mismo. Después hay que representar gráficamente la línea de nivel y=1 para poder estudiar la eficacia del medicamento.

- Modelar: comprender el modelo, analizando su validez.
- Representar: dibujar la gráfica de la función y de la línea de nivel y=1 para encontrar el intervalo de eficacia del medicamento.
- Conectar: los puntos de intersección de la gráfica con la línea de nivel son los extremos del intervalo de eficacia del medicamento.

5. Una función

Considera la función f, de dominio R^+, definida por $f(x) = 3x - 2 \ln x$.

1) Utiliza métodos exclusivamente analíticos para resolver las dos cuestiones siguientes:

    1.1) Estudia *f* en cuanto a la existencia de asíntotas de su gráfica.

    1.2) Demuestra que la función *f* tiene un único mínimo.

2) El gráfico de *f* contiene un único punto cuya ordenada es el cuadrado de la abcisa. Utilizando la calculadora, determina un valor aproximado para la abcisa de este punto (presenta el resultado redondeado a las décimas). Explica cómo hacerlo (en la explicación debes incluir el gráfico, o gráficos, que consideréis oportuno para resolver esta cuestión.

Resolución

1.1) Se cumple que

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} (3x - \ln x) = +8$$

Además

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} (3x - \ln x) = +8$$

Por lo tanto, el eje OY es una asíntota vertical de la gráfica de la función.

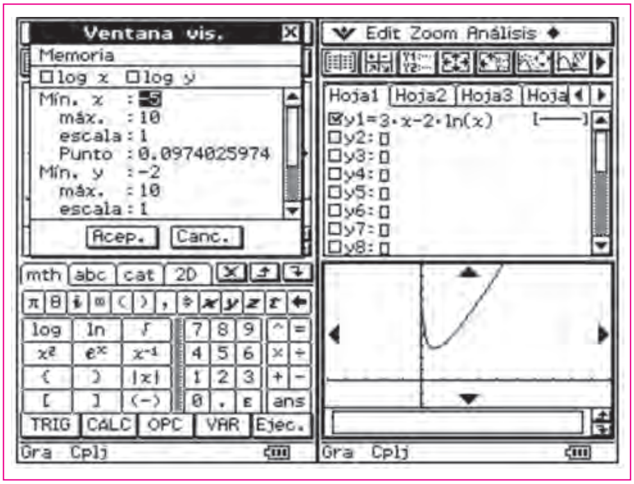
1.2) Se cumple que:

$$f'(x) = 3 - \frac{2}{x} = 0 \leftrightarrow 3 = \frac{2}{x} \rightarrow 3x = 2 \rightarrow x = \frac{2}{3}$$

Este es el único valor crítico y como f es derivable en su dominio, esto indica que solamente puede haber un único máximo. En efecto,

$$f''(x) = \frac{2}{x^2} \geq 0$$

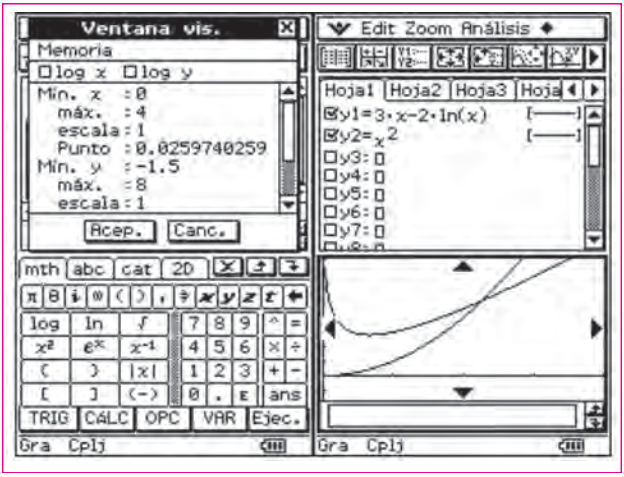
Por tanto, x=2/3 es un mínimo relativo. La gráfica de la función muestra, que en efecto, solo hay un único mínimo relativo.



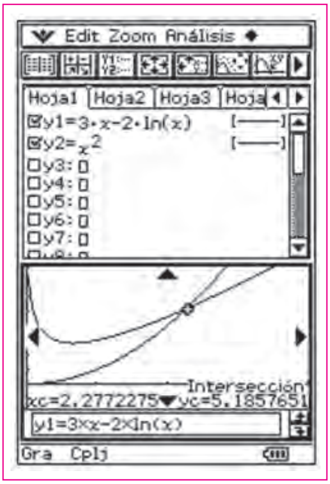
2) La abcisa del punto del gráfico de f cuya ordenada es el cuadrado de la abcisa, puede calcularse hallando el valor de la abcisa del punto de intersección de la gráfica de f con la gráfica de la parábola de ecuación $y = x^2$, Gráficos y tablas introducimos las expresiones de dichas funciones, A continuación estudiamos la evolución de dichas funciones mediante una tabla de valores, en la que se muestren f(1), f(2), f(3), f(4) y f(5).

Examinando la evolución de los valores de la dos funciones, a través de la tabla, podemos observar que el valor de la abcisa del punto pedido está comprendido entre 2 y 3.

Teniendo en cuenta la observación de la tabla, así como el hecho de que el gráfico f solo admite una asíntota vertical (x=0) y un mínimo único, x=2/3 , siendo f(2/3)=2,8, podemos elegir la siguiente ventana de visualización:



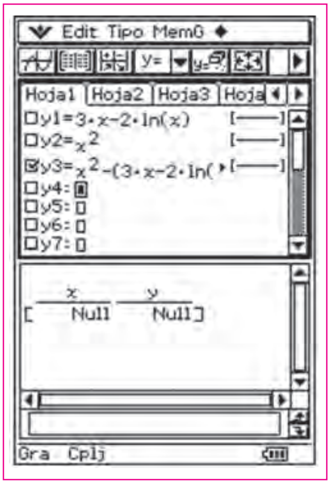
Podemos ahora determinar las coordenadas del punto de intersección de las dos gráficas, seleccionando el comando **Análisis / Resolución gráfica / Intersección**.



Concluimos que las coordenadas del punto de intersección son, aproximadamente, (2.27, 5.18). El valor aproximado a las décimas de la abcisa del punto pedido es 2.3.

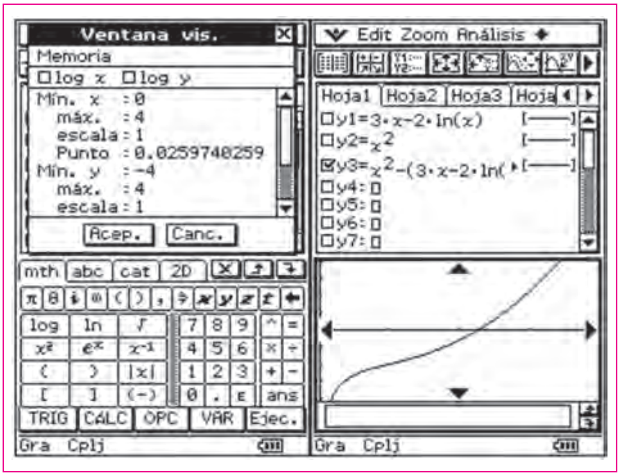
Otra forma:

Como el punto del gráfico de f cuya ordenada es el cuadrado de la abcisa puede ser visto como el punto de intersección de las gráficas de las funciones f e y = x^2, su abcisa se puede calcular resolviendo la ecuación $x^2 = 3x - \ln x$. En el menú **Gráficos y tablas**, introducimos la expresión $Y3 = x^2 - (3x - \ln x)$:

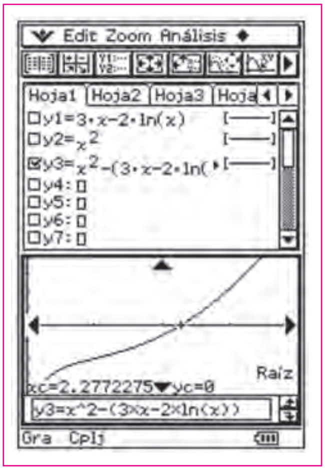


Vamos a examinar la evolución de los valores de la función editada en Y3 mediante una tabla. En la lista de funciones, seleccionamos solamente la función Y3. Define el intervalo de salida de la tabla y muestra la tabla:

Observamos en la tabla que el cero de la función Y3 está comprendido entre 2 y 3. (Esto lo podemos afirmar, ya que la función Y3 es continua en R^+, aplicando el teorema de Bolzano). Basándonos en esto, podemos elegir la siguiente ventana de visualización:



Podemos ahora determinar el valor del cero de la función, seleccionando el comando **Análisis / Resolución gráfica / Raíz**.



Vemos que se cumple que la función tiene un cero para x=2,27. Por tanto, el valor aproximado a las décimas para la abcisa del punto pedido es 2.3.

Competencias

En este caso, se trata de hallar el punto de intersección de las gráficas de las funciones $f(x) = 3x - 2\ln x$, $g(x) = x^2$, lo que puede hacerse gráficamente, mediante el comando Intersección del menú Resolución gráfica o numéricamente, mediante la construcción de una tabla de valores de la función g(x)-f(x) o mediante la obtención del cero de esta función. Es decir, lo que tradicionalmente ha sido un problema de álgebra, se puede enfocar desde un punto de vista gráfico o numérico, acercando así el problema a un núcleo más amplio de estudiantes:

- Modelar: comprender que se puede trabajar con las dos funciones f y g o solamente con una, la resta de ambas. En este caso, no hay modelo de ninguna situación real.
- Representar: hay que dibujar las gráficas de las dos funciones o de la función resta de la dos.
- Conectar: hay que comprender que el punto de corte de la gráfica de la función resta f-g con el eje OX corresponde al valor 0 de la función resta f-g en la tabla de valores.

6. Un problema de alturas

Supongamos que la altura A (en metros) de una generación de sexo masculino puede ser expresada, aproximadamente, en función de su peso p (en kilogramos), por:

A(p)= – 0,52 + 0,55 ln (p), (donde ln representa el logaritmo de base e)

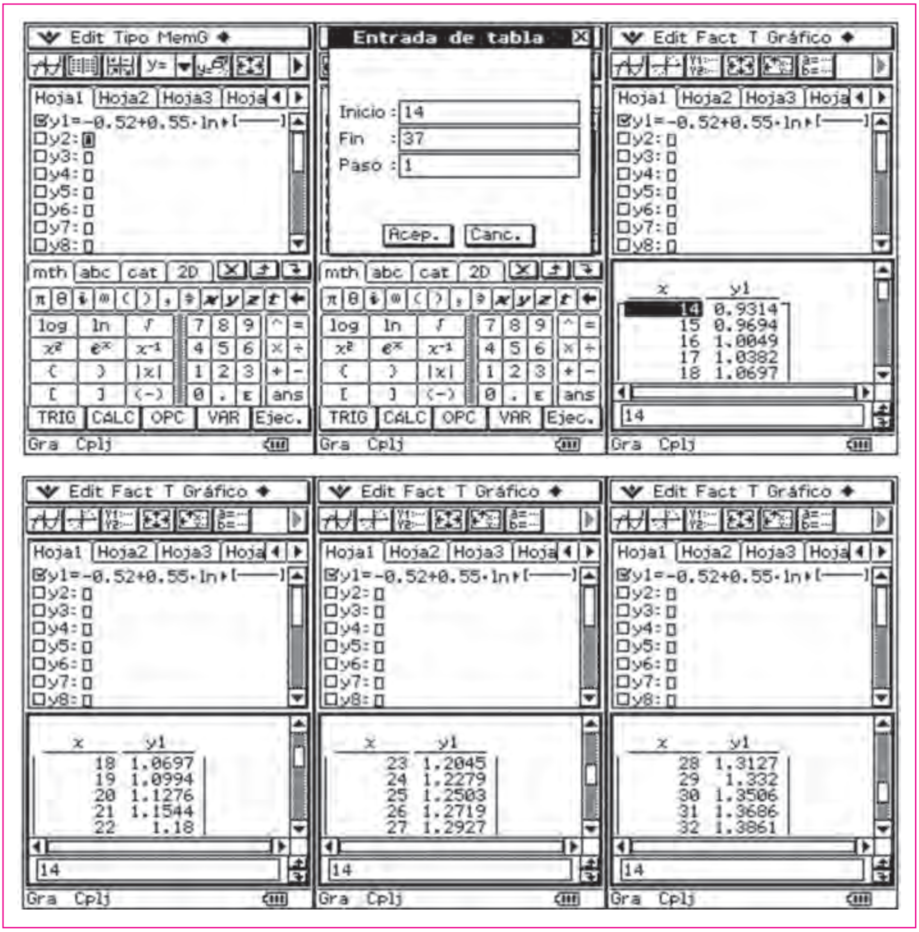
Recurriendo a métodos analíticos y utilizando la calculadora para efectuar cálculos numéricos, resuelve las siguientes cuestiones:

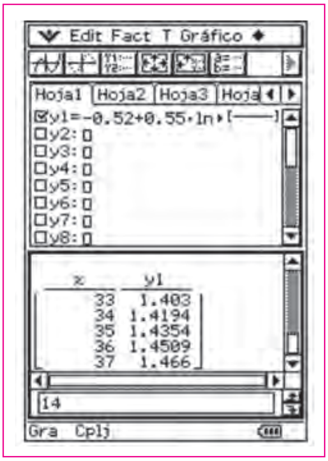
1) Ricardo mide 1,4 m de altura. Admitiendo que la altura y el peso de Ricardo están de acuerdo con la igualdad referida, ¿cuál será su peso? Presenta el resultado en kilogramos, redondeando a unidades.

2) Comprueba que, para cualquier valor de p, la diferencia A(2p) – A(p) es constante. Determina un valor aproximado de esa constante (con dos cifras decimales) e interpreta ese valor en el contexto de la situación descrita.

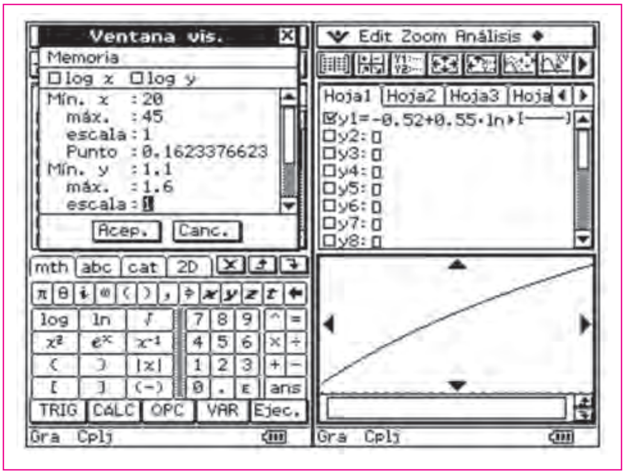
Resolución

1) Introducimos la fórmula de la función en el menú **Gráficos y tablas**. Examinamos la evolución de la función por medio de una tabla de valores:

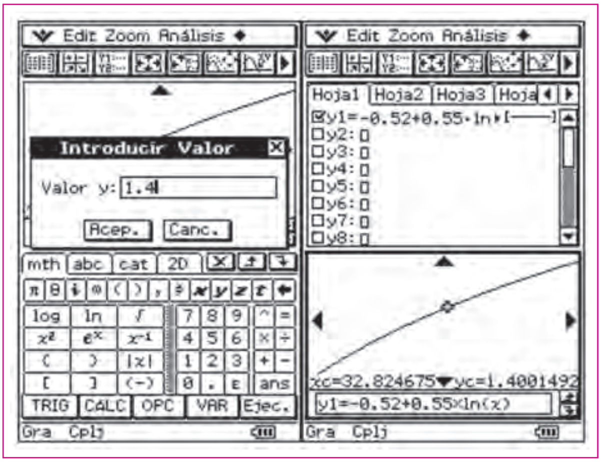




Podemos conjeturar que, en la situación referida, el peso de Ricardo está comprendido entre 32 y 33 kilogramos. Usamos la siguiente ventana de visualización:



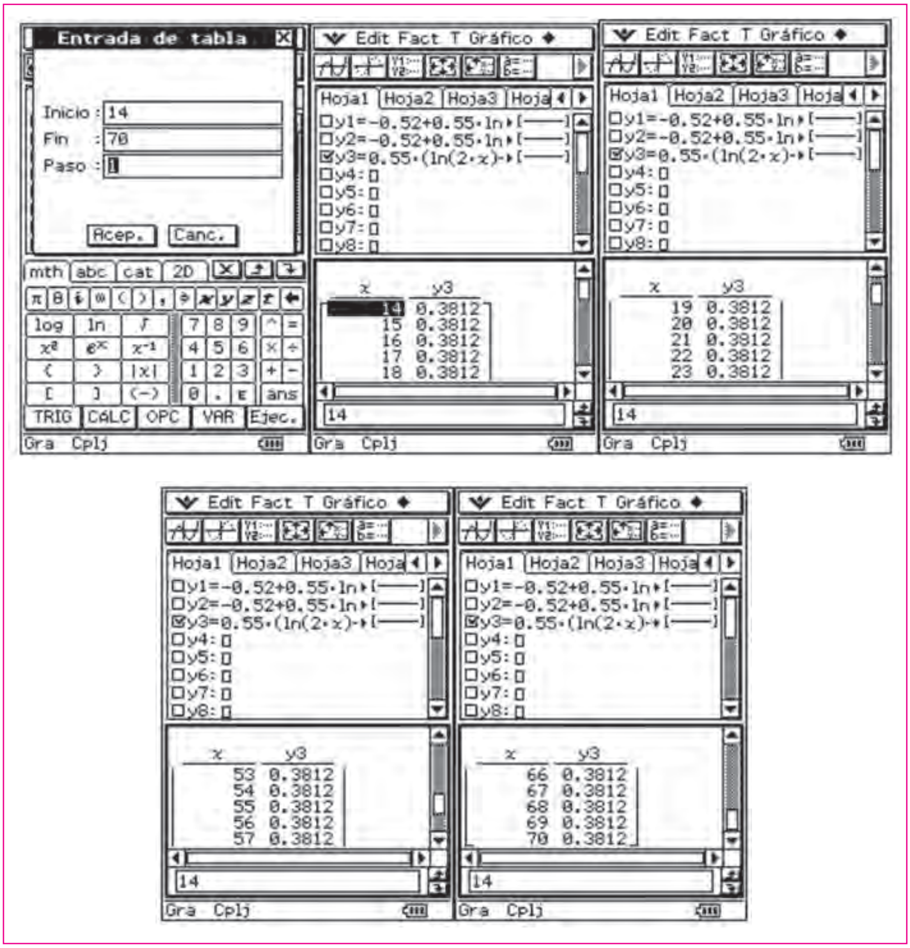
Seleccionamos el comando **Análisis / Resolución gráfica / CalX** e introducimos 1.4 como valor de Y:



En la situación referida, el peso de Ricardo es aproximadamente 33 kilogramos.

2) En Y2 escribimos la expresión Y2=–0.52+0.55 ln (2x) correspondiente a A(2p). Queremos ver que, para cualquier valor de p, la diferencia A(2p) – A(p) es constante. Por tanto, escribimos en Y3 el resultado de Y2 – Y1.

A continuación, desactivamos las funciones Y1 e Y2 y dejamos activa Y3. Construimos una tabla de valores de Y3, tal como se indica a continuación:



Observando, a través de la tabla, la evolución de los valores de la función Y3, vemos que la diferencia A(2p) – A(p) permanece constante, y dicha constante es, aproximadamente, 0,38. En el contexto de la situación descrita, este valor significa que un niño con el doble del peso de otro, tendrá 38 centímetros más de altura.

Competencias

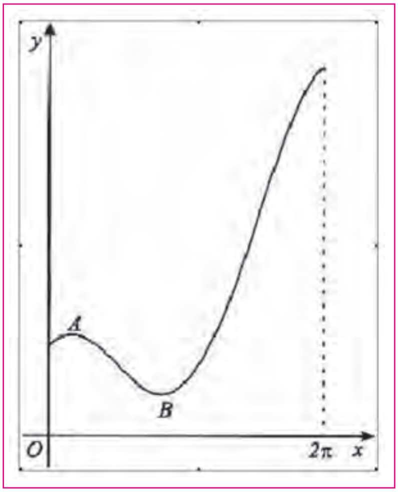
En primer lugar hay que sustituir en la expresión algebraica para obtener el peso de Ricardo. Se busca en este primer apartado una comprensión del modelo que relaciona la altura y el peso. La ClassPad permite una visualización del modelo y sus herramientas algebraicas para resolver el problema. El apartado 2 se puede hacer mediante una tabla de valores, mediante una gráfica o simbólicamente.

- Modelar: comprender el modelo que relaciona el peso y la altura y aplicarlo para obtener valores particulares.

- Representar: hay que dibujar la gráfica de la función.
- Conectar: hay que comprender que una tabla de valores de la función puede ser suficiente para hallar el peso conociendo la altura y para decidir si la resta A(2p)–A(p) es o no constante.
- Argumentar y comunicar: hay que utilizar la tabla de valores para argumentar que la resta A(2p) – A(p) es constante.

7. Sube y baja

En la figura está representado el gráfico de la función f, de dominio $[0, 2\pi]$, definida por $f(x) = x + 2 \cos x$.



A y B son puntos del gráfico cuyas ordenadas son extremos relativos de f.

1) Sin recurrir a la calculadora, resuelve las siguientes cuestiones:

   1.1) Demuestra que la ordenada del punto A es $\dfrac{\pi + 6\sqrt{3}}{6}$

   y que la del punto B es $\dfrac{5 \cdot \pi + 6\sqrt{3}}{6}$

   1.2) ¿Cuál es el recorrido de f?

2) Considera la recta tangente a la gráfica de f en el punto A. Esta recta corta al gráfico en otro punto C. Recurriendo a la calculadora gráfica, determina un valor aproximado para la abcisa del punto C (presenta el resultado redondeando a las décimas). Explica cómo hacerlo (en la explicación debes incluir el gráfico, o gráficos, que consideres oportuno para resolver esta cuestión.

Resolución

1) Como f/x)=x+2cosx → f'(x)=1–2senx=0 → sen x = 1/2 → x = π/6 ó x = 5π/6. Hay, por tanto, dos valores críticos. Por el criterio de la segunda derivada: f''(x)=–2cos x. Entonces: f''(π/6)=–2cos (π/6)=–1.73<0 → x=π/6 es un máximo relativo (punto A) y

$$f(\pi/6)=\frac{\pi}{6}+2\cdot\cos(\frac{\pi}{6})=\frac{\pi}{6}+2\cdot\sqrt{1-\frac{1}{4}}=\frac{\pi}{6}+\sqrt{3}=\frac{\pi+6\sqrt{3}}{6}$$

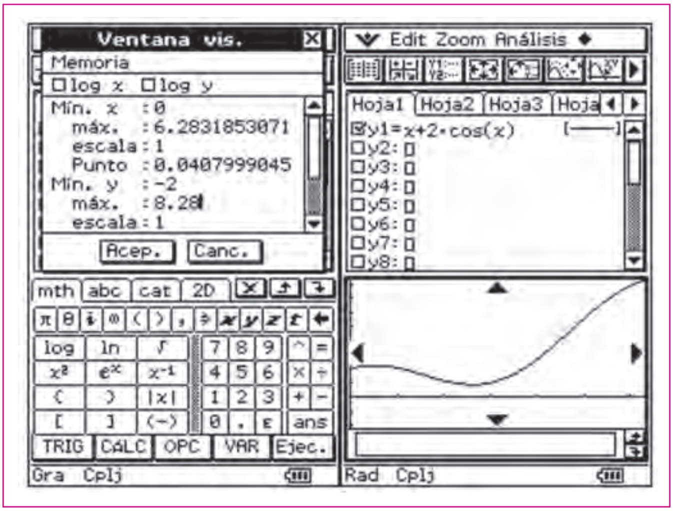
Por otra parte, f''(5π/6)=–2 cos(5π/6)=1.732>0 → x=5π/6 es un mínimo relativo (punto B) y

$$f(5\pi/6)=\frac{5\pi}{6}+2\cdot\cos(\frac{5\pi}{6})=\frac{5\pi}{6}-2\cdot\cos(\frac{\pi}{6})=\frac{5\pi}{6}-\sqrt{3}=\frac{5\pi-6\sqrt{3}}{6}$$

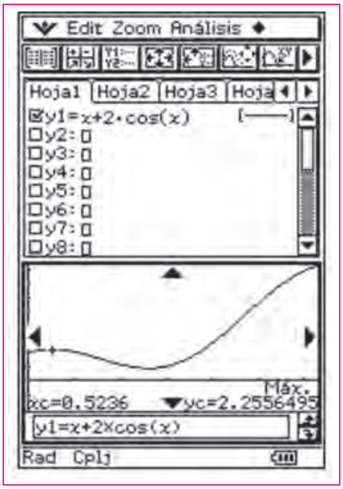
2) Introducimos la función en el menú Gráficos y tablas. Teniendo en cuenta que el dominio es [0, 2π] y que el recorrido de f es

$$\left[\frac{5\pi-6\sqrt{3}}{6}, 2\pi+2\right]$$

consideramos la siguiente ventana de visualización:



El punto A es el máximo de la función. Configuramos la ClassPad para que muestre en pantalla el valor de la derivada de la función en cada punto. Para calcular el máximo, seleccionamos el comando **Análisis / Resolución gráfica / Max**, obteniendo:

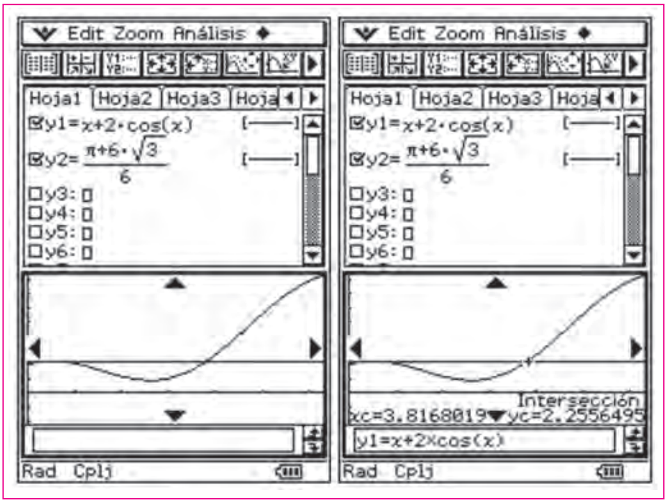


Las coordenadas (0.523599; 2.25565) representan al punto A (máximo de la función).

La recta tangente al gráfico de f en el punto A tiene por ecuación:

$$Y = \frac{\pi + 6\sqrt{3}}{6}$$

Editamos esta expresión en Y2. Para determinar la abcisa del punto C, recurrimos al comando **Análisis / Resolución gráfica / Intersección**



Concluimos así que las coordenadas del ponto C son, aproximadamente, (3.81; 2.25).

El valor aproximado a las décimas para la abcisa del punto C es 3,8.

Competencias

En primer lugar hay que sustituir en la expresión algebraica para obtener el peso de Ricardo. Se busca en este primer apartado una comprensión del modelo que relaciona la altura y el peso. La ClassPad permite una visualización del modelo y sus herramientas algebraicas para resolver el problema. El apartado 2 se puede hacer mediante una tabla de valores, mediante una gráfica o simbólicamente:

- Modelar: comprender el modelo que relaciona el peso y la altura y aplicarlo para obtener valores particulares.
- Representar: hay que dibujar la gráfica de la función.
- Conectar: hay que comprender que una tabla de valores de la función puede ser suficiente para hallar el peso conociendo la altura y para decidir si la resta A(2p)-A(p) es o no constante.
- Argumentar y comunicar: hay que utilizar la tabla de valores para argumentar que la resta A(2p) – A(p) es constante.

8. Busca la tangente

De una función f, de dominio $[-\pi, \pi]$, sabemos que su derivada f' está definida igualmente en el intervalo $[-\pi, \pi]$ y está dada por: $f'(x)=x+2\cos(x)$.

El gráfico de f contiene un único punto donde la recta tangente es paralela al eje OX. Utilizando la calculadora, determina un valor, redondeado a las centésimas, para la abcisa de ese punto. Explica cómo hacerlo.

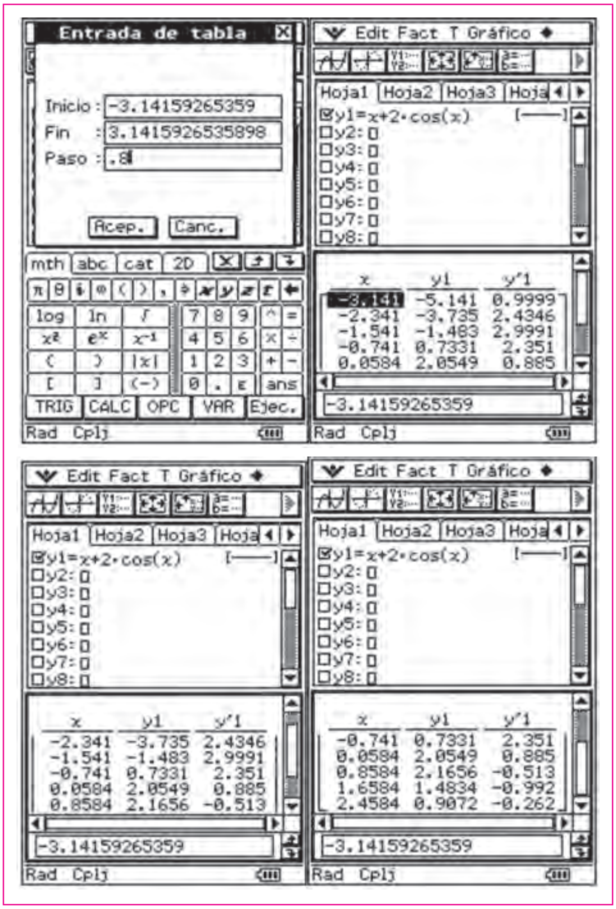
Resolución

Para que una recta paralela al eje OX sea tangente al gráfico de f en un punto dado, la derivada de la función en ese punto debe ser 0.

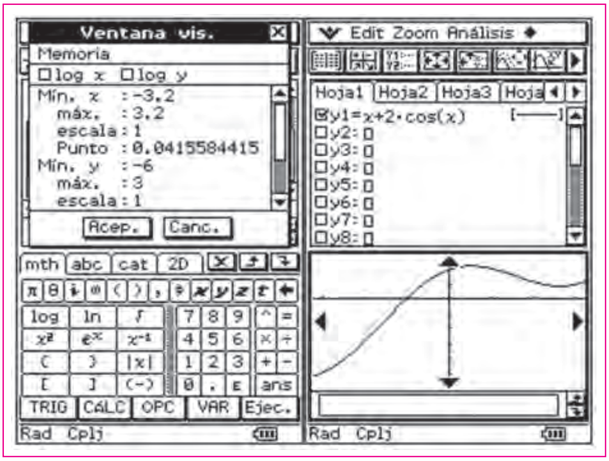
Introducimos la fórmula de la función f' en el menú **Gráficos y tablas**. Previamente, configuramos la ClassPad para que los ángulos se expresen en radianes.

A continuación analizamos la evolución de la función f' mediante una tabla de valores.

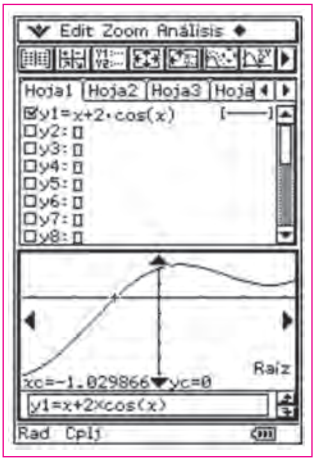
El intervalo de salida de la tabla será [–π, π].



Podemos observar que cuando el valor de x está comprendido entre –π y π, los respectivos valores de f'(x) están comprendidos entre –5,20 y 2,19. Teniendo en cuenta esta observación, podemos elegir la siguiente ventana de visualización:



Para determinar el cero de f', seleccionamos el comando **Análisis / Resolución gráfica / Raíz**, obteniendo el siguiente resultado:



Concluimos así que el cero de f' ocurre para x=–1,03, que es la abcisa del punto buscado.

Competencias

En este problema hay que utilizar las propiedades de las derivadas, relacionándolas con la forma de la gráfica de la función. La ClassPad permite visualizar la gráfica, al mismo tiempo que podemos recorrer con el cursor ésta, obteniendo en cada punto sus coordenadas y también el valor de la derivada en cada punto. También se puede visualizar una tabla de valores, o usar comandos específicos de la calculadora para determinar el punto de corte de la gráfica con el eje OX.

- Modelar: en esta tarea no hay que modelar ninguna situación contextual.
- Representar: hay que dibujar la gráfica de la función.
- Conectar: hay que relacionar las propiedades de las derivadas con la gráfica de la función, conectando el hecho de tener derivada nula con el hecho de tener tangente horizontal.
- Pensar y razonar: hay que comprender y razonar porqué la pendiente de la recta tangente es la derivada de la función y porqué si la derivada es cero la recta tangente es horizontal.
- Argumentar y comunicar: hay que utilizar la tabla de valores o el gráfico de la función para argumentar que la derivada se anula cuando la recta tangente es horizontal y localizar el punto de tangencia.

9. Una inecuación

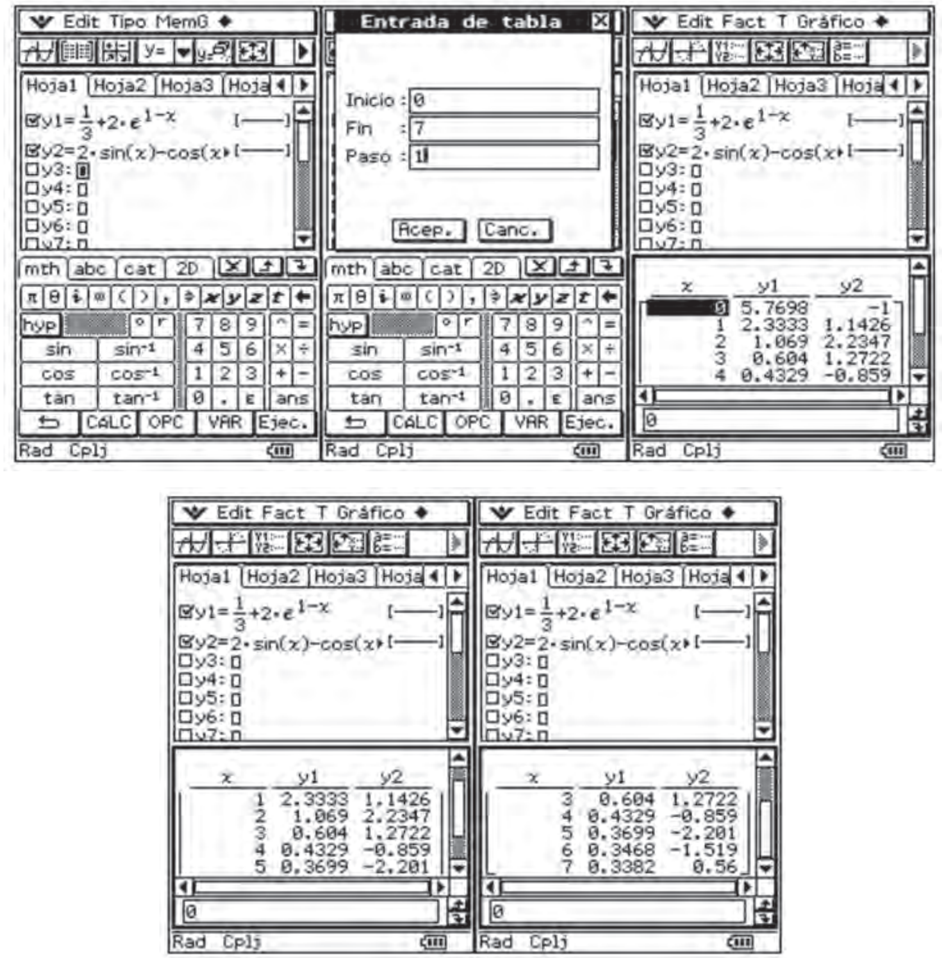
Considera las funciones f y g, de dominio R, definidas por:

$$f(x) = \frac{1}{3} + 2 \cdot e^{1-x} \qquad\qquad g(x) = 2 \text{ sen } x - \cos x$$

Utilizando la calculadora, determina las soluciones enteras de la inecuación $f(x)>g(x)$ en el intervalo $[0, 2\pi]$. Explica como lo haces.

Resolución 1

En el menú **Gráficos y tablas**, introducimos las dos expresiones. Como se pretende determinar las soluciones enteras de la inecuación $f(x)>g(x)$ en el intervalo $[0, 2\pi]$, vamos a considerar valores de x comprendidos entre 0 y 7. De esa forma definimos los parámetros de salida de la tabla de valores:



Vemos que f(x) es mayor que g(x) para los valores enteros {0, 1, 4, 5, 6}.

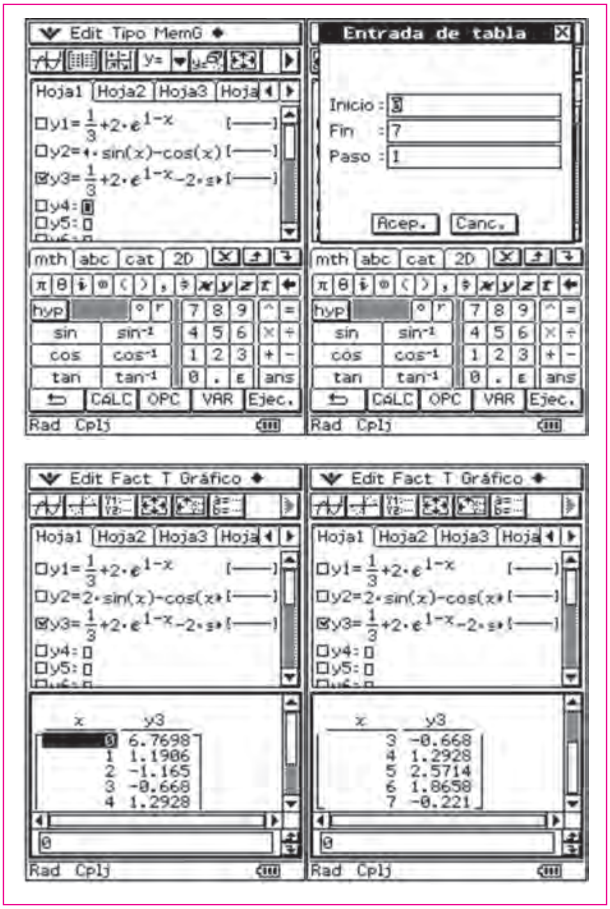
Resolución 2

Se cumple que f(x)>g(x) es equivalente a f(x) – g(x)>0.

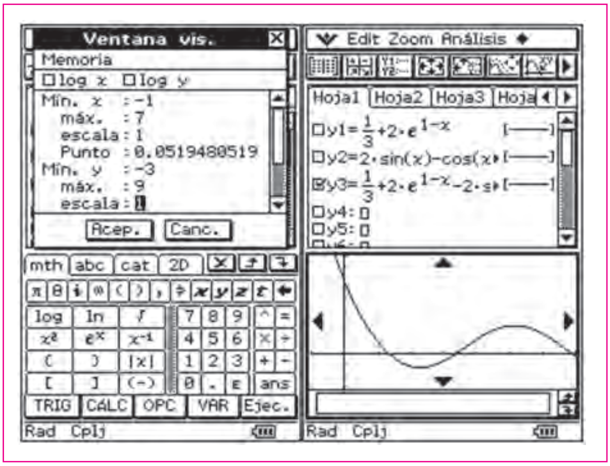
En el menú **Gráficos y tablas**, escribimos la expresión de las funciones f, g y f – g.

Desactivamos Y1 e Y2 y dejamos seleccionada Y3.

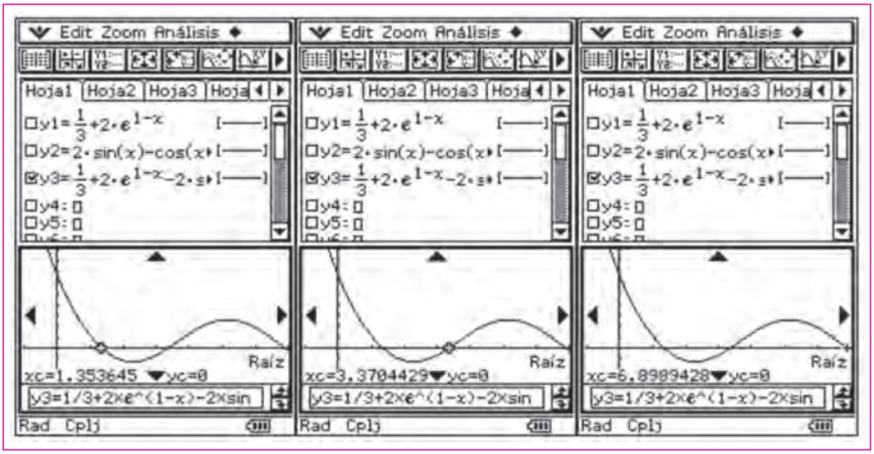
A continuación, visualizamos una tabla de valores de Y3, dando a x valores entre 0 y 7.



En esta tabla vemos que los valores de f(x) – g(x) están comprendidos entre −1,17 y 6,77. Teniendo en cuenta esta observación, definimos la siguiente ventana de visualización:



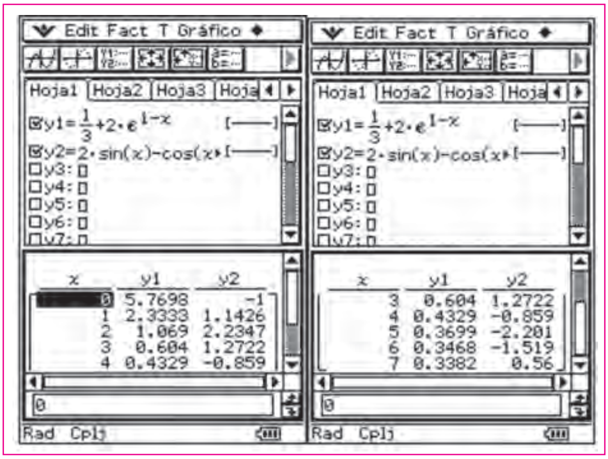
Seleccionamos el comando **Análisis / Resolución gráfica / Raíz** para hallar los ceros de la función f(x) – g(x).



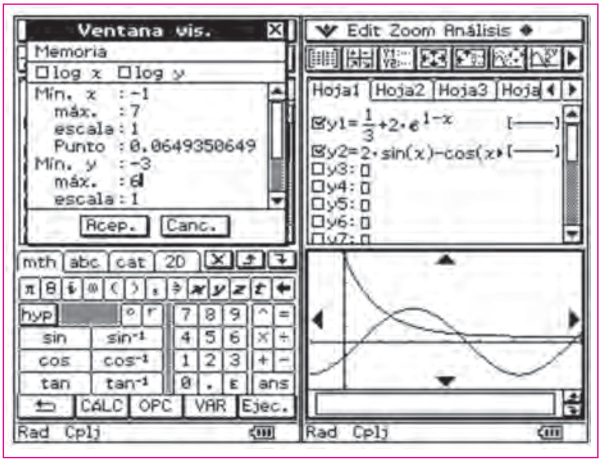
Vemos que los ceros de f – g son 1,35; 3,37; 6,89. Por lo tanto, la función f – g toma valores positivos en los intervalos [0; 1,35), (3,37; 2π). Por lo tanto, los valores enteros para los que f(x) – g(x) es positiva son: 0 y 1 en el intervalo [0; 1,35), y 4, 5 y 6 en el intervalo (3,37; 2π). Por tanto, las soluciones enteras de la inecuación son {0, 1, 4, 5, 6}.

Resolución 3

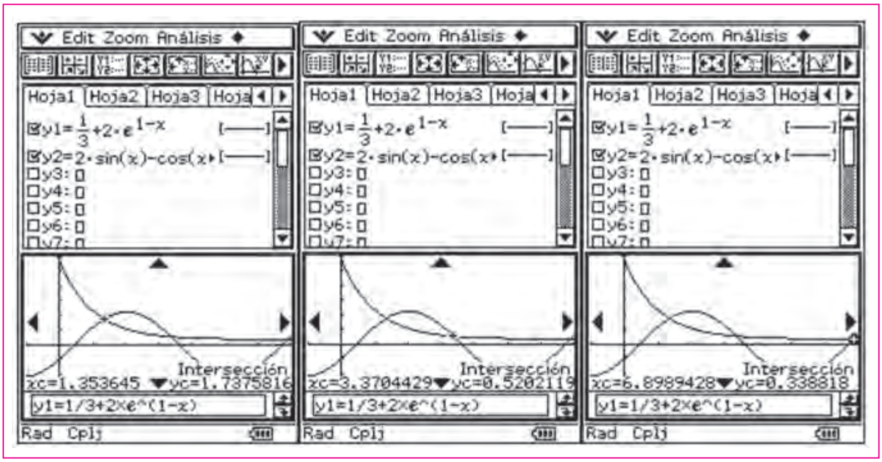
Escribimos las dos funciones en Y1 e Y2. Para proceder a la representación gráfica necesitamos determinar la mejor ventana de visualización. Para ello, analizaremos la evolución de los valores de las dos funciones, mediante una tabla de valores. La tabla la construimos entre 0 y 7, ya que el dominio de las funciones es el intervalo [0, 2π].



En la tabla observamos que los valores de f(x) están comprendidos entre 0,34 y 5,77 y los valores de g(x) están comprendidos entre –2,20 y 2,23. Teniendo en cuenta esta observación, seleccionamos la siguiente ventana de visualización:



A continuación, seleccionamos el comando **Análisis / Resolución gráfica / Intersección**, para hallar los puntos de corte de las dos funciones:



Vemos que los tres puntos de intersección se obtienen para x=1,35, x=3,37 y x=6.89. Vemos, además que entre x=1,35 y x=3,37, la gráfica de f(x) va por encima de la gráfica de g(x) y lo mismo ocurre si x>6.89. Por tanto, el conjunto de las soluciones enteras de la inecuación f(x)>g(x) en el intervalo [0, 2π] es {0, 1, 4, 5, 6}.

Competencias

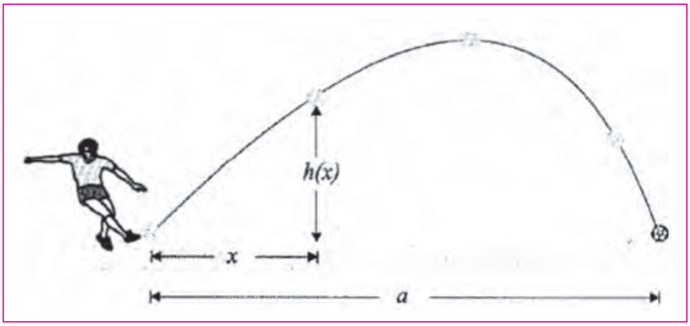
En este caso hay que resolver una inecuación en la que intervienen funciones irracionales transcendentes. La resolución algebraica con lápiz y papel es muy compleja; por ello, la calculadora CAS cumple un papel esencial, al acercar un contenido matemático difícil a un sector amplio de estudiantes, que si no fuera por la calculadora no podrían abordar la tarea. Para la resolución existen distintas estrategias: se puede construir una tabla de valores de cada función y compararlas, o bien se puede construir una tabla de valores de la función resta de ambas y estudiar su signo y comprobar el resultado visualizando la gráfica; o, simplemente, bastaría representar gráficamente ambas funciones y localizar el intervalo comprendido entre los puntos de intersección de ambas gráficas. La ClassPad permite hacer cualquiera de estas cosas, gracias a las opciones relativas a gráficos y tablas de valores.

- Modelar: en esta tarea no hay que modelar ninguna situación contextual.
- Representar: hay que dibujar la gráfica de las funciones o de la función resta de ambas y estudiar sus propiedades.
- Conectar: hay que relacionar el intervalo solución de la inecuación con el intervalo en el que una gráfica va por encima de la otra, cuyos extremos son puntos de corte de las dos gráficas. O relacionar el intervalo solución con el intervalo en el que la gráfica de la función resta está situada por encima del eje OX, cuyos extremos son los ceros de la función resta.

- Pensar y razonar: hay que comprender y razonar porqué existe solamente una cantidad finita de soluciones, siendo que las gráficas tienen infinitos puntos. Hay que comprender y razonar la existencia de restricciones de tipo numérico a la hora de resolver el problema y que, por tanto, la resolución gráfica conlleva inevitablemente soluciones extrañas que se deben eliminar.
- Argumentar y comunicar: hay que utilizar las tablas de valores o los gráficos de las funciones para argumentar que solamente hay una cantidad finita de soluciones enteras.

10. El balón de fútbol

En la figura está representada la trayectoria de un balón de fútbol después de haber sido golpeada por un jugador de la selección española, durante un encuentro de preparación para la EURO-2012.



Designamos por a la distancia, en metros, entre el punto donde el balón fue golpeado y el punto donde cae. Considera la función h definida en [0, a] por $h(x)=2x+10 \ln (1 - 0.1x)$.

Admitimos que h(x) es la distancia, en metros, del balón al suelo, en el momento en que su proyección sobre el suelo se encuentra a x metros del lugar donde fue golpeado.

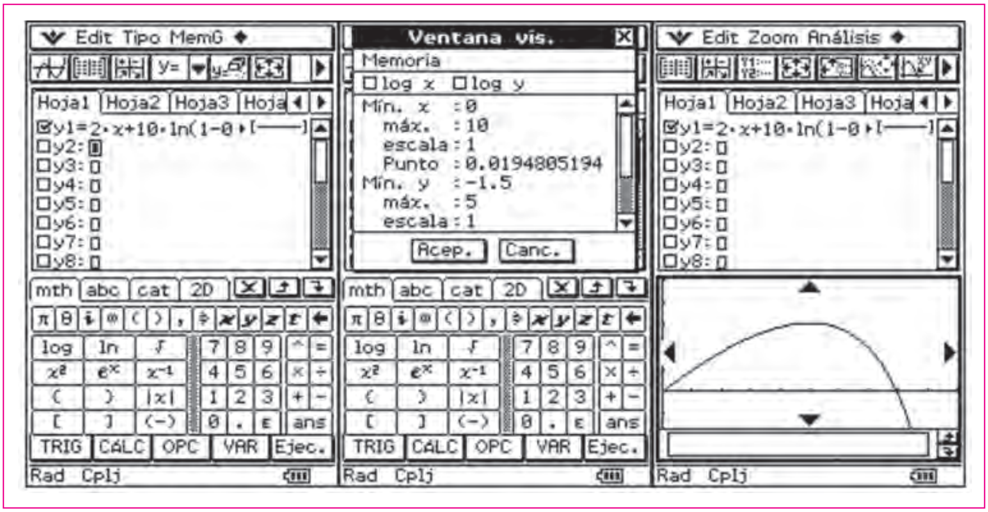
Utilizando la calculadora, determina el valor de a, redondeando a las décimas. Explica cómo lo haces, presentando todos los elementos obtenidos en la utilización de la calculadora.

Resolución

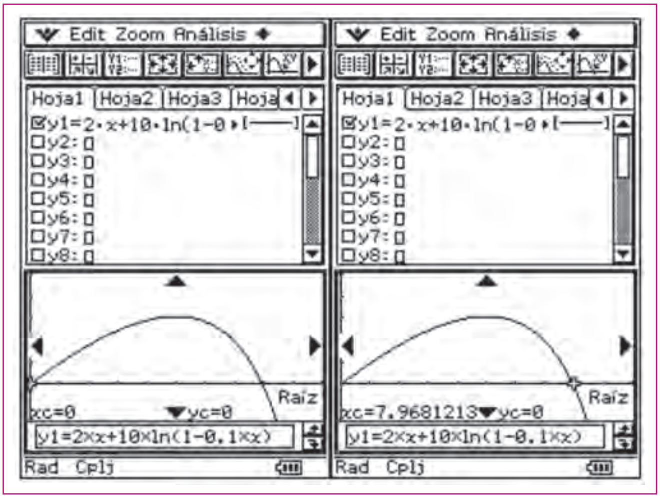
Se pretende encontrar la solución de la ecuación $h(x)=0$.

En el menú **Gráficos y tablas**, introducimos la fórmula de la función $Y1 = 2x + 10 \ln(1–0{,}1x)$.

Visualizamos la gráfica con la siguiente ventana de visualización:



Para calcular el cero de esta función, usamos el comando **Análisis / Resolución gráfica / Raíz**.



En el momento en que el balón fue lanzado, la altura a la que se encontraba del suelo era de cero metros. Lo mismo se verifica en el momento en que cae. Vemos que a = 7,97.

Competencias

En este problema hay que hallar el cero de la función que da la altura del balón en cada instante. Este cero se puede obtener gráficamente, visualizando la función o mediante una resolución algebraica, la calculadora CAS permite hacer las dos cosas:

- Modelar: en esta tarea ya se da el modelo, por tanto, se trata de comprender el modelo, más que construirlo. Comprender el modelo significa interpretar el significado de la ecuación en relación con el contexto del problema.
- Representar: hay que dibujar la gráfica de la función que da la altura según el tiempo transcurrido.
- Conectar: hay que relacionar el punto de intersección con el eje OX con la solución del problema.
- Pensar y razonar: hay que comprender y razonar que, aunque la gráfica presenta una parte negativa para los valores de Y, más allá del punto de corte con OX, no tiene sentido que el balón esté situado por debajo del suelo. Por tanto, hay que comprender y razonar que el modelo tiene sus límites, separando del modelo matemático del problema real a resolver.
- Argumentar y comunicar: hay que utilizar el gráfico de la función para argumentar en qué momento el balón alcanza su máxima altura, qué altura alcanza, y en qué momento toca el suelo.

CONCLUSIONES

En las diez actividades anteriores se ponen en acción algunas de las tareas que permiten desarrollar la competencia matemática: modelar, pensar y razonar, representar, argumentar, conectar, comunicar, plantear y resolver problemas. En algunas ocasiones estas acciones están implícitas en la tarea que se propone, en otras tareas surgen de manera natural, por el mero hecho de usar la calculadora CAS, y las habilidades que los estudiantes ponen en juego con ellas no se podrían activar con los métodos clásicos de lápiz y papel, especialmente por la carga algebraica que contienen los algoritmos habituales.

Con la ClassPad, la visualización de los problemas es inmediata, lo que favorece el tratamiento geométrico, disminuyendo la carga algebraica. De esta manera es posible acercar las matemáticas a los estudiantes, al evitar un amplio abanico de dificultades que se plantearían si no se usara la calculadora. Además, supone también una revolución metodológica, porque se puede abordar la resolución de problemas de varias maneras: aritmética (por ejemplo, mediante tablas de valores), gráfica (mediante la visualización de gráficas y figuras geométricas) y algebraica (mediante las funciones y comandos CAS).

Por tanto, el uso de la ClassPad supone un gran avance al permitir reflexionar sobre estrategias y contenidos que no se podrían tratar sin tecnología. Por ello, cualquier prohibición del uso de calculadoras supone una restricción en el aprendizaje de las matemáticas, significa cerrar la puerta a importantes contenidos matemáticos para muchos estudiantes. Más bien al contrario, debería favorecerse el uso de tecnologías en general y de la ClassPad en particular, para lograr una mejora en el desarrollo de la competencia matemática.

BIBLIOGRAFÍA

GAVE, Gavinete de avallaçao educacional. (2007) *Teste intermédio de Matemática*. Ministerio da Educaçao. Portugal.

GAVE, Gavinete de avallaçao educacional. (2008) *Teste intermédio 11º ano Matemática B*. Ministerio da Educaçao. Portugal.

GAVE, Gavinete de avallaçao educacional. (2007) *Teste intermédio 10º ano Matemática A*. Ministerio da Educaçao. Portugal.

GAVE, Gavinete de avallaçao educacional. (2006) *Exame Nacional do Ensino Secundário*. Ministerio da Educaçao. Portugal.

GAVE, Gavinete de avallaçao educacional. (2004) *Teste intermédio de Matemática*. Ministerio da Educaçao. Portugal.

PISA 2003. *Pruebas de Matemáticas y de Solución de Problemas*. (2005). Madrid: MEC, INECSE, SUMA.

Contreras, M. (2006) *El currículum de Matemáticas con la ClassPad 300.* Valencia (España). Contreras, M (ed.). ISBN: 978-84-689-8709-5.

Contreras, M. (2004) *Matemáticas con la ClassPad 300: una alternativa dinámica. Curso de formación.* Página web de la División Didáctica CASIO en www.flamagas.com. 2004.

Páginas web: Aula Casio: www.aulacasio.com; Abel Martín: www.aulamatematica.com; Mauricio Contreras: www.mauriciocontreras.es.

Sacándole partido a la CASIO fx570MS en sistemas electrónicos de telecomunicación*

Pablo Guerrero-García y Ángel Santos-Palomo
Universidad de Málaga

Resumen: *Se ofrece una colección de secuencias no triviales de tecleado para enfatizar que, a la hora de diseñar ejemplos ilustrativos para un curso completo de métodos numéricos como los que se preveen para la Reforma Educativa en los cursos previos a la obtención del grado en sistemas electrónicos de telecomunicación, todo lo que se necesita es una humilde calculadora científica estándar como la CASIO FX-570MS cuando un laboratorio de ordenadores o una calculadora gráfica no son asequibles. El único requisito es una planificación cuidadosamente elegida tanto de las estructuras de datos como de la ordenación computacional.*

Palabras clave: *Calculadora científica estándar, métodos numéricos, métodos de enseñanza, técnicas para el aula.*

SEMBLANZA

Hay situaciones en las que un laboratorio de ordenadores o una calculadora gráfica no son asequibles, principalmente cuando hay implicada algún tipo de evaluación masiva. El tratar de evitar el copieteo electrónico a través de dispositivos inalámbricos y la asusencia de laboratorios lo suficientemente grandes como para acomodar a todos los alumnos a la vez ha llevado a las autoridades académicas a prohibir precisamente los mismos recursos cuyo uso promueven cuando se trata de enseñar. Esto lleva a inconsistencias como la de que los profesores usan MATLAB o una CLASSPAD 330 en el aula, pero los alumnos tienen que apañárselas con una calculadora científica estándar cuando tienen que evaluarse.

El principal objetivo de esta contribución es proporcionar una colección de secuencias no triviales de tecleado para diseñar ejemplos ilustrativos para un curso completo de métodos numéricos con una humilde calculadora científica estándar como la CASIO FX-570MS [1]. Nuestra experiencia docente con ingenieros en sistemas electrónicos de telecomunicación nos reveló que los alumnos sólo son

* Informe Técnico MA-08/01, 30 Marzo 2008, *http://www.satd.uma.es/matap/investig.htm.* Contribución a presentar por el autor indicado con una estrella (a quien debe dirigirse la correspondencia) en el 8th CMMSE International Conference, Special Session on *Mathematics, the Education Reform and the use of New Teaching Resources*, La Manga del Mar Menor (Murcia, España), Junio 2008.

capaces de manejar expresiones directas en contraposición con procedimientos iterativos, y que ellos no están al tanto de la mayoría de las características de sus baratas calculadoras científicas estándar. Una planificación cuidadosamente elegida tanto de las estructuras de datos como de la ordenación computacional les permite descubrir toda la potencia computacional que se habían estado perdiendo, y ahora ellos adquieren esta destreza en un curso *ad-hoc* específico titulado *La calculadora científica estándar* impartido en nuestra universidad, cf. página 2 de *http://hs.sci.uma.es:8070/ht/ProgramacionDocente Centro 306.pdf.*

Desgraciadamente, recopilar una colección de ejemplos específicos para ilustrar todos los aspectos de un curso numérico es una tarea tediosa, pero los resultados son ampliamente satisfactorios. La variedad de estrategias empleadas implica que la adaptación no es ni mucho menos trivial: debe hacerse de manera concisa, ya que cada ejemplo debe explicarse y resolverse en menos de veinte minutos ya que no se quiere dedicar más de diez horas en total del curso ad-hoc completo. Los ejemplos, que han sido extraídos de [2, 3, 4] y referencias citadas en ellos, pueden clasificarse como sigue:

1. Evaluación y álgebra no lineal:
    - Modelo aritmético de punto flotante.
    - Determinante del producto de dos matrices.
    - Cálculo de raíces de ecuaciones algebraicas.
    - Tablas de funciones e iteraciones de punto fijo.
    - Método de Newton para ecuaciones no lineales.
    - Ecuaciones no lineales y raíces múltiples.
    - Método de Birge-Vietta para ecuaciones algebraicas.
2. Álgebra lineal:
    - Premultiplicado por matrices elementales.
    - Resolución de sistemas de ecuaciones lineales.
    - Método iterativo de Jacobi para resolver un SEL.
    - Método iterativo de Gauss-Seidel para resolver un SEL.
    - Deflacción en ecuaciones algebraicas de grado mayor que 3.
    - Método de las potencias.
3. Interpolación y aproximación:
    - Interpolación osculatoria (esquema general).
    - Interpolación osculatoria (cálculos intermedios).

- Ajuste lineal (cuadrático).
- Ajuste no lineal (exponencial).
- Ajuste no lineal (hiperbólico).
- TFD como suma de exponenciales complejas.
- TIFD como suma de exponenciales complejas.

4. Problemas diferenciales:

- Elección del tamaño de paso en derivación numérica.
- Carga de condensador bajo coincidencia de intensidades.
- Extrapolación de Romberg (esquema general).
- Extrapolación de Romberg (cálculos intermedios).
- Método de Euler.
- Método predictor-corrector.

Este muestrario podría ayudar a otros profesores numéricos en la preparación de sus clases para enfatizar ciertos aspectos numéricos espec´ıficos que incrementen el nivel de difusión de la forma de trabajar del analista numérico cuando no tiene a mano un ordenador, de la misma forma que un mago tiene su propio ramillete de trucos. En las páginas siguientes puedes encontrar nuestras veintiséis cartas. ¿Cuáles son las tuyas?

REFERENCIAS

[1] CASIO, FX-570MS *guía del usuario y funciones adicionales*, 2003.

[2] P. Guerrero-García, *Transparencias de Métodos Numéricos*, Dpto. Matemática Aplicada, Universidad de Málaga, Diciembre 2003.

[3] P. Guerrero-García y Á. Santos-Palomo, *Ejemplos numéricos de motivación sobre sistemas electrónicos de telecomunicación*, Informe Técnico MA-06/01, Dpto. Matemática Aplicada, Universidad de Málaga, Marzo 2006, *http://www.satd.uma.es/matap/investig.htm*. Versión en inglés presentada como póster en el International Congress of Mathematicians, Madrid 2006, pp. 184-185.

[4] Á. Santos-Palomo, *Transparencias de Métodos Numérico*s, Dpto. Matemática Aplicada, Universidad de Málaga, Septiembre 2003.

Modelo aritmético de punto flotante

Para calcular $x_1 \oplus (x_2 \oplus (x_3 \oplus x_4))$ en aritmética de 4 dígitos y redondeo,

$x_1 = 1.2342, \qquad x_2 = 0.34291, \qquad x_3 = 0.012896, \qquad x_4 = 0.0009875,$

hay que hacer:

MODE^5 2 (Sci) 4

.0009875 =

+ .01290 = SHIFT$_{\text{Rnd}}$

+ .3429 = SHIFT$_{\text{Rnd}}$

+ 1.234 = SHIFT$_{\text{Rnd}}$

1.591×10^{00}

•First •Prev •Next •Last •Go Back •Full Screen •Close •Quit

Determinante del producto de dos matrices

Para calcular $\det(M_1^T M_1)$ primero introducir M_1 como A en memoria,

$$M_1 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

MODE^3 2 (Mat)

SHIFT$_{\text{MAT}}$ 1 (Dim) 1 (A) 3 = 3 =

2 = = 3 = −1 = 1 = 2 = 1 = = 2 = AC

y después proceder como sigue:

SHIFT$_{\text{MAT}}$ ▶ 2 (Trn) SHIFT$_{\text{MAT}}$ 3 (Mat) 1 (A)

× SHIFT$_{\text{MAT}}$ 3 (Mat) 1 (A) =

6 ▶ -1 ▶ 6 ▶ -1 ▶ 1 ▶ 2 ▶ 6 ▶ 2 ▶ 17

SHIFT$_{\text{MAT}}$ ▶ 1 (Det) SHIFT$_{\text{MAT}}$ 3 (Mat) 4 (Ans) =

1

•First •Prev •Next •Last •Go Back •Full Screen •Close •Quit

Cálculo de raíces de ecuaciones algebraicas

Para calcular las raíces de $\lambda^2 - 19\lambda + 45 = 0$ hacemos:

MODE^3 1 (Eqn) ► 2

$1 = -19 = 45 =$

16.22681202 ▼ 2.773187976

mientras que para calcular las de $-\lambda^3 + 24\lambda^2 - 84\lambda + 1 = 0$ hacemos:

MODE^3 1 (Eqn) ► 3

$-1 = 24 = -84 = 1 =$

19.74923447 ▼ 0.011945511 ▼ 4.238820018

•First •Prev •Next •Last •Go Back •Full Screen •Close •Quit

Tablas de funciones e iteraciones de punto fijo

Para hacer una tabla de valores para $g(x) = x\exp(x)$:

$\text{ALPHA}_{\text{X}} \times \text{SHIFT}_{e^x}\ \text{ALPHA}_{\text{X}}$

CALC -3 = CALC -1 = CALC 0 =

-0.14936 -0.36788 0.0000

CALC 1 = CALC 3 = CALC $-.5$ =

2.7183 60.257 -0.30327

La misma técnica puede usarse para implementar iteraciones de punto fijo con $g(x) = \sqrt{10 - x^3}/2$ empezando desde $x_0 = 1.5$ hasta $x^* \approx 1.3652$:

$\sqrt{\ }$ (10− $\text{ALPHA}_{\text{X}}\ \text{SHIFT}_{x^3}$) ÷ 2

CALC 1.5 = CALC Ans = CALC Ans =

1.2870 1.4025 1.3455

CALC Ans = CALC Ans = CALC Ans =

1.3752 1.3601 1.3678

MODE^5 2 (Sci) 5

CALC Ans = $\text{SHIFT}_{\text{Rnd}}$

En aritmética de 5 dígitos la única diferencia es 1.3751 en vez de 1.3752.

•First •Prev •Next •Last •Go Back •Full Screen •Close •Quit

Método de Newton para ecuaciones no lineales

El resolutor de ecuaciones no lineales (Newton) permite obtener (si converge) los ceros de $f(x)$ uno a uno empezando de un buen punto inicial:

$$f(\lambda) = -\lambda^3 + 24\lambda^2 - 84\lambda + 1 = 0$$

$-$ ALPHA$_{\mathsf{X}}$ SHIFT$_{x^3}$ + 24 × ALPHA$_{\mathsf{X}}$ x^2 − 84 × ALPHA$_{\mathsf{X}}$ + 1

SHIFT$_{\mathsf{SOLVE}}$ 18 = SHIFT$_{\mathsf{SOLVE}}$

19.74923447

▶ SHIFT$_{\mathsf{SOLVE}}$ 0 = SHIFT$_{\mathsf{SOLVE}}$

0.011945511

▶ SHIFT$_{\mathsf{SOLVE}}$ 3 = SHIFT$_{\mathsf{SOLVE}}$

4.238820018

▶ SHIFT$_{\mathsf{SOLVE}}$ SHIFT$_{10^x}$ 8 = SHIFT$_{\mathsf{SOLVE}}$

Can't solve

•First •Prev •Next •Last •Go Back •Full Screen •Close •Quit

Ecuaciones no lineales y raíces múltiples

Ajustar la resistencia R del potenciómetro disipador de energía requiere

$$f(R) = \exp(A \cdot R) \cdot \cos(B \cdot \sqrt{C - D \cdot R^2}) - E = 0,$$

siendo $A = -0.005$, $B = 0.05$, $C = 2000$, $D = 0.01$ y $E = 0.01$. Así,

MODE^4 2 (Rad) SHIFT$_{e^x}$ (ALPHA$_{\mathsf{A}}$ × ALPHA$_{\mathsf{X}}$) ×

cos (ALPHA$_{\mathsf{B}}$ × √ (ALPHA$_{\mathsf{C}}$ − ALPHA$_{\mathsf{D}}$ × ALPHA$_{\mathsf{X}}$ x^2)) − ALPHA$_{\mathsf{E}}$

SHIFT$_{\mathsf{SOLVE}}$ −.005 = ▼ .05 = 2000 = .01 = .01 = ▲ ▲ ▲ ▲ SHIFT$_{\mathsf{SOLVE}}$

328.1514291

con 0 como punto inicial. Pero el resolutor no puede calcular las raíces de

$$f(x) = (x-1)^7 = 0$$

(ALPHA$_{\mathsf{X}}$ − 1) ∧ 7

SHIFT$_{\mathsf{SOLVE}}$ 0 = SHIFT$_{\mathsf{SOLVE}}$ ▶ SHIFT$_{\mathsf{SOLVE}}$ 2 = SHIFT$_{\mathsf{SOLVE}}$ ▶ SHIFT$_{\mathsf{SOLVE}}$

Can't solve (0.9982) Can't solve (1.002)

•First •Prev •Next •Last •Go Back •Full Screen •Close •Quit

Método de Birge-Vietta para ecuaciones algebraicas

Surgen problemas cuando el punto inicial es un cero de $P'(x)$, siendo

$$P(x) = x^3 - 3x^2 - 7$$

ALPHA$_{\text{X}}$ SHIFT$_{x^3}$ $-$ 3 $\times$ ALPHA$_{\text{X}}$ x^2 $-$ 7

SHIFT$_{\text{SOLVE}}$ 2 = SHIFT$_{\text{SOLVE}}$

Can't solve

► SHIFT$_{\text{SOLVE}}$ 0 = SHIFT$_{\text{SOLVE}}$

Can't solve

► SHIFT$_{\text{SOLVE}}$ 1 = SHIFT$_{\text{SOLVE}}$

Can't solve

► SHIFT$_{\text{SOLVE}}$ 4 = SHIFT$_{\text{SOLVE}}$

3.554149219

Para calcular todas las raíces de $P(x) = 0$ hacemos:

MODE^3 1 (Eqn) ► 3

1 = -3 = = -7 =

3.554 ▼ SHIFT$_{\text{Re}\leftrightarrow\text{Im}}$ $-0.2771 + 1.376i$ ▼ SHIFT$_{\text{Re}\leftrightarrow\text{Im}}$ $-0.2771 - 1.376i$

•First •Prev •Next •Last •Go Back •Full Screen •Close •Quit

Premultiplicado por matrices elementales

Se quiere premultiplicar por $B = F_{32}(-1)$ una matriz A:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}.$$

Primero introducir A y B en memoria,

MODE^3 2 (Mat)

SHIFT$_{\text{MAT}}$ 1 (Dim) 1 (A) 3 = 3 =

1 = 2 = 3 = 4 = 5 = 6 = 7 = 8 = 9 = AC

SHIFT$_{\text{MAT}}$ 1 (Dim) 2 (B) 3 = 3 =

1 = = = = 1 = = = -1 = 1 = AC

y después proceder como sigue:

SHIFT$_{\text{MAT}}$ 3 (Mat) 2 (B) $\times$ SHIFT$_{\text{MAT}}$ 3 (Mat) 1 (A) =

1 ► 2 ► 3 ► 4 ► 5 ► 6 ► 3 ► 3 ► 3

•First •Prev •Next •Last •Go Back •Full Screen •Close •Quit

Resolución de sistemas de ecuaciones lineales

Siendo $\epsilon = 10^{-4}$, se quieren resolver los sistemas lineales

$$\begin{bmatrix} 1 & 1+\epsilon \\ 1-\epsilon & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+\epsilon+\epsilon^2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1-\epsilon & 1-\epsilon^2 \\ 1 & \epsilon+\epsilon^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

cuyas soluciones es fácil comprobar que son

$$x = \begin{bmatrix} 1 \\ \epsilon \end{bmatrix}, \qquad y = \begin{bmatrix} (1-2\epsilon)(1-\epsilon)^{-2} \\ \epsilon(1+\epsilon)^{-1}(1-\epsilon)^{-2} \end{bmatrix}.$$

Procedemos de la forma siguiente, utilizando la regla de Cramer:

MODE[3] 1 (Eqn) 2 (Unknowns)

1 = 1.0001 = 1.00010001 = .9999 = 1 = 1 =

1 ▼ 0 AC

.9999 = .99999999 = 1 = 1 = .00010001 = 1 =

0.99999999 ▼ 1.00010002×10^{-4}

El número de condición del primero es $4\cdot10^8$ y $\delta(\hat{x}) = 10^{-4}$, mientras que el número de condición del segundo es 2.6 y $\delta(\hat{y}) = 2\cdot10^{-12}$.

•First •Prev •Next •Last •Go Back •Full Screen •Close •Quit

Método iterativo de Jacobi para resolver un SEL

Se quieren realizar un par de iteraciones del método de Jacobi para

$$\left.\begin{array}{l} 1\cdot x_1 + 2\cdot x_2 + 3\cdot x_3 = 9 \\ 4\cdot x_1 + 5\cdot x_2 + 6\cdot x_3 = 12 \\ 7\cdot x_1 + 8\cdot x_2 + 10\cdot x_3 = 13 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} A = (\quad -2\times B - 3\times C + 9) \div 1 \\ B = (-4\times A \quad - 6\times C + 12) \div 5 \\ C = (-7\times A - 8\times B \quad + 13) \div 10 \end{array}\right\}$$

$$\text{obteniéndose} \quad \mathbf{x}_J^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{x}_J^{(1)} = \begin{bmatrix} 9 \\ 2.4 \\ 1.3 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{x}_J^{(2)} = \begin{bmatrix} 0.3 \\ -6.36 \\ -6.92 \end{bmatrix}.$$

ALPHA$_\text{A}$ ALPHA$_=$ (−2 × ALPHA$_\text{B}$ −3 × ALPHA$_\text{C}$ + 9) ÷ 1 =

ALPHA$_\text{B}$ ALPHA$_=$ (−4 × ALPHA$_\text{A}$ −6 × ALPHA$_\text{C}$ + 12) ÷ 5 =

ALPHA$_\text{C}$ ALPHA$_=$ (−7 × ALPHA$_\text{A}$ −8 × ALPHA$_\text{B}$ + 13) ÷ 10 =

▲ ▲ CALC 0 = 0 =	9	▲ ▲ CALC 2.4 = =	0.3
▲ ▲ CALC 0 = 0 =	2.4	▲ ▲ CALC 9 = =	−6.36
▲ ▲ CALC 0 = 0 =	1.3	▲ ▲ CALC = 2.4 =	−6.92

•First •Prev •Next •Last •Go Back •Full Screen •Close •Quit

Método iterativo de Gauss-Seidel para resolver un SEL

Se quieren realizar un par de iteraciones del método de Gauss-Seidel para

$$\left.\begin{array}{r} 1\cdot x_1+2\cdot x_2+\ \ 3\cdot x_3=9 \\ 4\cdot x_1+5\cdot x_2+\ \ 6\cdot x_3=12 \\ 7\cdot x_1+8\cdot x_2+10\cdot x_3=13 \end{array}\right\} \begin{array}{l} A=(\qquad -2\times B-3\times C+9)\div 1 \\ B=(-4\times A\qquad -6\times C+12)\div 5 \\ C=(-7\times A-8\times B\qquad +13)\div 10 \end{array}\Bigg\}$$

obteniéndose $\mathbf{x}_{GS}^{(0)}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$; $\mathbf{x}_{GS}^{(1)}=\begin{bmatrix}9\\-4.8\\-1.16\end{bmatrix}$; $\mathbf{x}_{GS}^{(2)}=\begin{bmatrix}22.08\\-13.872\\-3.0584\end{bmatrix}$.

ALPHA$_{\text{A}}$ ALPHA$_{=}$ (-2 × ALPHA$_{\text{B}}$ -3 × ALPHA$_{\text{C}}$ + 9) ÷ 1 =

ALPHA$_{\text{B}}$ ALPHA$_{=}$ (-4 × ALPHA$_{\text{A}}$ -6 × ALPHA$_{\text{C}}$ + 12) ÷ 5 =

ALPHA$_{\text{C}}$ ALPHA$_{=}$ (-7 × ALPHA$_{\text{A}}$ -8 × ALPHA$_{\text{B}}$ + 13) ÷ 10 =

▲ ▲ CALC 0 = 0 =	9	▲ ▲ CALC = =	22.08
▲ ▲ CALC = 0 =	-4.8	▲ ▲ CALC = =	-13.872
▲ ▲ CALC = =	-1.16	▲ ▲ CALC = =	-3.0584

•First •Prev •Next •Last •Go Back •Full Screen •Close •Quit

Deflacción en ecuaciones algebraicas de grado mayor que 3

Los polos de un sistema con func. transferencia $H(s)=N(s)/D(s)$, donde

$$D(s)=s(s+3)(s^2+2s+2)+(s+2)=s^4+5s^3+8s^2+7s+2,$$

ALPHA$_{\text{X}}$ ∧ 4 + 5 × ALPHA$_{\text{X}}$ SHIFT$_{x^3}$ + 8 × ALPHA$_{\text{X}}$ x^2 + 7 × ALPHA$_{\text{X}}$ + 2

SHIFT$_{\text{SOLVE}}$ -5 = SHIFT$_{\text{SOLVE}}$ ► SHIFT$_{\text{SOLVE}}$ 5 = SHIFT$_{\text{SOLVE}}$

-3.065994892 $\qquad$ -0.472901719

Deflaccionando $D(s)$ en aritmética de 4 dígitos con -0.4729 se obtiene resto 0 y $E(s)=s^3+4.527s^2+5.859s+4.229$, cuyas raíces son

MODE^3 1 (Eqn) ► 3 1 = 4.527 = 5.859 = 4.229 =

-3.066▼ SHIFT$_{\text{Re}\leftrightarrow\text{Im}}$ $-0.7306+0.9196i$▼ SHIFT$_{\text{Re}\leftrightarrow\text{Im}}$ $-0.7306-0.9196i$

Sin embargo, al deflaccionar $E(s)$ en la misma aritmética con -3.066 se obtiene $F(s)=s^2+1.461s+1.380$ pero resto $-2\cdot 10^{-3}$, cuyas raíces son

MODE^3 1 (Eqn) ► 2 1 = 1.461 = 1.380 =

SHIFT$_{\text{Re}\leftrightarrow\text{Im}}$ $-0.7305+0.9200i$ ▼ SHIFT$_{\text{Re}\leftrightarrow\text{Im}}$ $-0.7305-0.9200i$

•First •Prev •Next •Last •Go Back •Full Screen •Close •Quit

Método de las potencias

Empezando desde $x^{(0)} = [1;1;1] = B$, para aplicar método potencias a

$$A = \begin{bmatrix} -4 & 14 & 0 \\ -5 & 13 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix},$$

primero introducir A y B en memoria, y hacer que MatAns tenga B:

MODE³ 2 (Mat) SHIFT MAT 1 (Dim) 1 (A) 3 = 3 =

−4 = 14 = = −5 = 13 = = −1 = = 2 = AC SHIFT MAT 1 (Dim) 2 (B) 3 = =

1 = 1 = 1 = AC SHIFT MAT 3 (Mat) 2 (B) ÷ 1 =

y después proceder como sigue:

SHIFT MAT 3 (Mat) 1 (A) × SHIFT MAT 3 (Mat) 4 (Ans) ÷ 1 = 10 ▼ 8 ▼ 1 AC ▶

= 72 ▼ 54 ▼ −8 AC ▶ = 468 ▼ 342 ▼ −88 AC ▶ = 2916 ▼ 2106 ▼ −644

Para normalización en ℓ_∞, dividir por 10 (en vez de por 1) al final de la primera línea anterior (luego por 7.2, después por 6.5 y así sucesivamente).

Interpolación osculatoria (esquema general)

Se desea obtener el polinomio de interpolación osculatoria en aritmética de 2 dígitos para:

i	x_i	$f(x_i)$	$f'(x_i)$	$f''(x_i)$
0	1	1	0.5	2
1	2	2	−1	•

El esquema a seguir para calcular diferencias divididas estilo Neville es:

i	z_i	$f[z_i]$	$f[z_{i-1}, z_i]$	$f[z_{i-2}, \dots, z_i]$	$f[z_{i-3}, \dots, z_i]$	$f[z_{i-4}, \dots, z_i]$
0	1	1.0 → A				
1	1	1.0 → B	**0.50** → B			
2	1	1.0 → C	**0.50** → C	**1.0** → C		
3	2	2.0 → D	1.0 → D	0.50 → D	−0.50 → D	
4	2	2.0 → E	**−1.0** → E	−2.0 → E	−2.5 → E	−2.0 → E

y entonces el polinomio de interpolación osculatoria queda:

$$P_4(x) = \mathrm{A} + \mathrm{B}(x-1) + \mathrm{C}(x-1)^2 + \mathrm{D}(x-1)^3 + \mathrm{E}(x-1)^3(x-2)$$

donde los cálculos intermedios (de abajo hacia arriba) se hicieron así:

Interpolación osculatoria (cálculos intermedios)

MODE^5 2 (Sci) 2

$-1.0 =$ $\mathsf{SHIFT}_{\mathsf{Rnd}}$ Ans $\mathsf{SHIFT}_{\mathsf{STO}}$ E =

$2.0 =$ $\mathsf{SHIFT}_{\mathsf{Rnd}}$ Ans $\mathsf{SHIFT}_{\mathsf{STO}}$ D = $1.0 =$ $\mathsf{SHIFT}_{\mathsf{Rnd}}$ Ans $\mathsf{SHIFT}_{\mathsf{STO}}$ C =

($\mathsf{ALPHA}_{\mathsf{D}}$ − $\mathsf{ALPHA}_{\mathsf{C}}$) ÷ $(2-1)$ = $\mathsf{SHIFT}_{\mathsf{Rnd}}$ Ans $\mathsf{SHIFT}_{\mathsf{STO}}$ D =

$0.50 =$ $\mathsf{SHIFT}_{\mathsf{Rnd}}$ Ans $\mathsf{SHIFT}_{\mathsf{STO}}$ C =

$0.50 =$ $\mathsf{SHIFT}_{\mathsf{Rnd}}$ Ans $\mathsf{SHIFT}_{\mathsf{STO}}$ B =

$1.0 =$ $\mathsf{SHIFT}_{\mathsf{Rnd}}$ Ans $\mathsf{SHIFT}_{\mathsf{STO}}$ A =

($\mathsf{ALPHA}_{\mathsf{E}}$ − $\mathsf{ALPHA}_{\mathsf{D}}$) ÷ $(2-1)$ = $\mathsf{SHIFT}_{\mathsf{Rnd}}$ Ans $\mathsf{SHIFT}_{\mathsf{STO}}$ E = $\blacktriangle^2$

($\mathsf{ALPHA}_{\mathsf{D}}$ − $\mathsf{ALPHA}_{\mathsf{C}}$) ÷ $(2-1)$ = $\mathsf{SHIFT}_{\mathsf{Rnd}}$ Ans $\mathsf{SHIFT}_{\mathsf{STO}}$ D =

$2.0 \div 2 =$ $\mathsf{SHIFT}_{\mathsf{Rnd}}$ Ans $\mathsf{SHIFT}_{\mathsf{STO}}$ C = $\blacktriangle^8$

($\mathsf{ALPHA}_{\mathsf{E}}$ − $\mathsf{ALPHA}_{\mathsf{D}}$) ÷ $(2-1)$ = $\mathsf{SHIFT}_{\mathsf{Rnd}}$ Ans $\mathsf{SHIFT}_{\mathsf{STO}}$ E = $\blacktriangle^8$

($\mathsf{ALPHA}_{\mathsf{D}}$ − $\mathsf{ALPHA}_{\mathsf{C}}$) ÷ $(2-1)$ = $\mathsf{SHIFT}_{\mathsf{Rnd}}$ Ans $\mathsf{SHIFT}_{\mathsf{STO}}$ D = $\blacktriangle^5$

($\mathsf{ALPHA}_{\mathsf{E}}$ − $\mathsf{ALPHA}_{\mathsf{D}}$) ÷ $(2-1)$ = $\mathsf{SHIFT}_{\mathsf{Rnd}}$ Ans $\mathsf{SHIFT}_{\mathsf{STO}}$ E =

$\mathsf{ALPHA}_{\mathsf{A}}$ = $\mathsf{ALPHA}_{\mathsf{B}}$ = $\mathsf{ALPHA}_{\mathsf{C}}$ = $\mathsf{ALPHA}_{\mathsf{D}}$ = $\mathsf{ALPHA}_{\mathsf{E}}$ =

•First •Prev •Next •Last •Go Back •Full Screen •Close •Quit

Ajuste lineal (cuadrático)

Para encontrar la parábola $\varphi(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$ que mejor aproxima a

i	0	1	2	3	4
x_i	0	2	3	5	6
$f(x_i)$	1	3	3	5	4

procedemos de la forma siguiente:

MODE^2 2 (Reg) ▶ 3 (Quad) $\mathsf{SHIFT}_{\mathsf{CLR}}$ 1 (Scl) =

0 , 1 DT 2 , 3 DT 3 , 3 DT 5 , 5 DT 6 , 4 DT

$\mathsf{SHIFT}_{\mathsf{S\text{-}SUM}}$ 1 $(\sum x^2)$ = $\mathsf{SHIFT}_{\mathsf{S\text{-}SUM}}$ ▶ 3 $(\sum xy)$ =

74 64

$\mathsf{SHIFT}_{\mathsf{S\text{-}SUM}}$ ▶ ▶ 1 $(\sum x^3)$ = $\mathsf{SHIFT}_{\mathsf{S\text{-}SUM}}$ ▶ ▶ 2 $(\sum x^2y)$ =

376 308

$\mathsf{SHIFT}_{\mathsf{S\text{-}VAR}}$ ▶ ▶ 1 (A) = $\mathsf{SHIFT}_{\mathsf{S\text{-}VAR}}$ ▶ ▶ 2 (B) = $\mathsf{SHIFT}_{\mathsf{S\text{-}VAR}}$ ▶ ▶ 3 (C) =

0.95238 1.1429 − 0.095238

•First •Prev •Next •Last •Go Back •Full Screen •Close •Quit

Ajuste no lineal (exponencial)

Para realizar un ajuste exponencial a los datos de la siguiente tabla:

i	0	1	2	3	4
x_i	1.00	1.25	1.50	1.75	2.00
$f(x_i)$	5.10	5.79	6.53	7.45	8.46

procedemos como se describe a continuación:

MODE^2 2 (Reg) 3 (Exp) SHIFT$_{\text{CLR}}$ 1 (Scl) =

1 , 5.1 DT 1.25 , 5.79 DT 1.5 , 6.53 DT 1.75 , 7.45 DT 2 , 8.46 DT

SHIFT$_{\text{S-SUM}}$ 1 $(\sum x^2)$ = SHIFT$_{\text{S-SUM}}$ ▶ 3 $(\sum xy)$ =

11.875 14.424

SHIFT$_{\text{S-SUM}}$ ▶ 1 $(\sum y^2)$ = SHIFT$_{\text{S-SUM}}$ ▶ 2 $(\sum y)$ =

17.852 9.4053

SHIFT$_{\text{S-VAR}}$ ▶ ▶ 1 (A) = SHIFT$_{\text{S-VAR}}$ ▶ ▶ 2 (B) =

3.0725 0.50572

●First ●Prev ●Next ●Last ●Go Back ●Full Screen ●Close ●Quit

Ajuste no lineal (hiperbólico)

Para realizar un ajuste hiperbólico de la forma $y = a/(c + bx)$ con $a = g(b, c) = \exp(c + b)$ a los datos (con 6 dígitos significativos correctos) de

x_i	0.00000	1.00000	2.00000	3.00000
y_i	−0.250000	−0.142857	−0.100000	−0.0769231

hacemos primero un ajuste lineal para $1/y = C + Bx$,

MODE^2 2 (Reg) ▶ 1 (Lin) SHIFT$_{\text{CLR}}$ 1 (Scl) =

0 , −1 ÷ .25 DT 1 , −1 ÷ .142857 DT 2 , −1 ÷ .1 DT 3 , −1 ÷ .0769231 DT

SHIFT$_{\text{S-VAR}}$ ▶ ▶ 1 (A) = SHIFT$_{\text{S-VAR}}$ ▶ ▶ 2 (B) =

−4.00000358 − 2.99999813

Dado que $c = Ca$ y $b = Ba$, para obtener a basta resolver la ENL

$$a = \exp(c + b) = \exp(Ca + Ba) = \exp((C + B)a) = g(a);$$

ALPHA$_{\text{X}}$ − SHIFT$_{e^x}$ (− 7 × ALPHA$_{\text{X}}$) SHIFT$_{\text{SOLVE}}$ SHIFT$_{\text{SOLVE}}$ 0.2177636

Luego en este caso $a \approx 0.217764$ es el único punto fijo en $[0, 1]$ de $g(a) = \exp(-7a)$, con lo cual $c = -4a \approx -0.871054$ y $b = -3a \approx -0.653291$.

●First ●Prev ●Next ●Last ●Go Back ●Full Screen ●Close ●Quit

TFD como suma de exponenciales complejas

La transformada de Fourier discreta de $y = [2; -1; 1; 4]$ es:

$$c_k = \sum_{r=0}^{3} y_r e^{-ikx_r} = 2{\cdot}e^{-ikx_0} + (-1){\cdot}e^{-ikx_1} + 1{\cdot}e^{-ikx_2} + 4{\cdot}e^{-ikx_3}, \qquad k \in 0:3,$$

donde los x_r son 4 nodos equiespaciados en $[0, 2\pi)$, luego

$$c_0 = 2 \cdot e^{-i00} + (-1) \cdot e^{-i0\pi/2} + 1 \cdot e^{-i0\pi} + 4 \cdot e^{-i03\pi/2} = 6$$
$$c_1 = 2 \cdot e^{-i10} + (-1) \cdot e^{-i1\pi/2} + 1 \cdot e^{-i1\pi} + 4 \cdot e^{-i13\pi/2} = 1 + 5i$$
$$c_2 = 2 \cdot e^{-i20} + (-1) \cdot e^{-i2\pi/2} + 1 \cdot e^{-i2\pi} + 4 \cdot e^{-i23\pi/2} = 0$$
$$c_3 = 2 \cdot e^{-i30} + (-1) \cdot e^{-i3\pi/2} + 1 \cdot e^{-i3\pi} + 4 \cdot e^{-i33\pi/2} = 1 - 5i$$

MODE^4 2 (Rad) MODE 2 (Cmplx)

2 − 1 SFT$_\angle$ (− 0 π ÷ 2) + 1 SFT$_\angle$ (− 0 π) + 4 SFT$_\angle$ (− 0 × 3 π ÷ 2) = SFT$_{\text{Re}\leftrightarrow\text{Im}}$

2 − 1 SFT$_\angle$ (− 1 π ÷ 2) + 1 SFT$_\angle$ (− 1 π) + 4 SFT$_\angle$ (− 1 × 3 π ÷ 2) = SFT$_{\text{Re}\leftrightarrow\text{Im}}$

2 − 1 SFT$_\angle$ (− 2 π ÷ 2) + 1 SFT$_\angle$ (− 2 π) + 4 SFT$_\angle$ (− 2 × 3 π ÷ 2) = SFT$_{\text{Re}\leftrightarrow\text{Im}}$

2 − 1 SFT$_\angle$ (− 3 π ÷ 2) + 1 SFT$_\angle$ (− 3 π) + 4 SFT$_\angle$ (− 3 × 3 π ÷ 2) = SFT$_{\text{Re}\leftrightarrow\text{Im}}$

•First •Prev •Next •Last •Go Back •Full Screen •Close •Quit

TIFD como suma de exponenciales complejas

La transformada inversa de Fourier discreta de $c = [6; 1+5i; 0; 1-5i]$ es:

$$y_r = \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3} c_k{\cdot}e^{ikx_r} = \frac{1}{4}{\cdot}(6{\cdot}e^{i0x_r} + (1+5i){\cdot}e^{i1x_r} + 0{\cdot}e^{i2x_r} + (1-5i){\cdot}e^{i3x_r}),\ r \in 0:3,$$

donde los x_r son 4 nodos equiespaciados en $[0, 2\pi)$, luego

$$y_0 = (6 \cdot e^{i0x_0} + (1+5i) \cdot e^{i1x_0} + 0 \cdot e^{i2x_0} + (1-5i) \cdot e^{i3x_0})/4 = 2$$
$$y_1 = (6 \cdot e^{i0x_1} + (1+5i) \cdot e^{i1x_1} + 0 \cdot e^{i2x_1} + (1-5i) \cdot e^{i3x_1})/4 = -1$$
$$y_2 = (6 \cdot e^{i0x_2} + (1+5i) \cdot e^{i1x_2} + 0 \cdot e^{i2x_2} + (1-5i) \cdot e^{i3x_2})/4 = 1$$
$$y_3 = (6 \cdot e^{i0x_3} + (1+5i) \cdot e^{i1x_3} + 0 \cdot e^{i2x_3} + (1-5i) \cdot e^{i3x_3})/4 = 4$$

MODE^4 2 (Rad) MODE 2 (Cmplx) 1 + 5 SFT$_i$ SFT$_{\text{STO}}$ A =

(6 + AHA$_\text{A}$ × 1 SFT$_\angle$ (0 π ÷ 2) + SFT$_{\text{Conjg}}$ AHA$_\text{A}$ × 1 SFT$_\angle$ (3 × 0 π ÷ 2)) ÷ 4 =

(6 + AHA$_\text{A}$ × 1 SFT$_\angle$ (1 π ÷ 2) + SFT$_{\text{Conjg}}$ AHA$_\text{A}$ × 1 SFT$_\angle$ (3 × 1 π ÷ 2)) ÷ 4 =

(6 + AHA$_\text{A}$ × 1 SFT$_\angle$ (2 π ÷ 2) + SFT$_{\text{Conjg}}$ AHA$_\text{A}$ × 1 SFT$_\angle$ (3 × 2 π ÷ 2)) ÷ 4 =

(6 + AHA$_\text{A}$ × 1 SFT$_\angle$ (3 π ÷ 2) + SFT$_{\text{Conjg}}$ AHA$_\text{A}$ × 1 SFT$_\angle$ (3 × 3 π ÷ 2)) ÷ 4 =

•First •Prev •Next •Last •Go Back •Full Screen •Close •Quit

Elección del tamaño de paso en derivación numérica

Para $f(x) = \ln(x)$, se quiere aproximar $f'(2.00)$ mediante

$$f'(a) \approx \frac{-3 \cdot f(a) + 4 \cdot f(a+h) - f(a+2h)}{2 \cdot h}$$

conocidos los siguientes valores con 5 decimales correctos:

i	0	1	2	3	4
x_i	2.00	2.01	2.02	2.06	2.12
$f(x_i)$	0.69315	0.69813	0.70310	0.72271	0.75142

(-3 × ALPHA$_{\mathrm{A}}$ + 4 × ALPHA$_{\mathrm{B}}$ – ALPHA$_{\mathrm{C}}$) ÷ (2 × ALPHA$_{\mathrm{D}}$)

CALC .69315 = .69813 = .70310 = .01 =

0.49850

CALC = .72271 = .75142 = .06 =

0.49975

SHIFT$_{d/dx}$ ln ALPHA$_{\mathrm{X}}$, 2 , .01) =

0.500000010

SHIFT$_{d/dx}$ ln ALPHA$_{\mathrm{X}}$, 2 , .06) =

0.499999979

Carga de condensador bajo coincidencia de intensidades

Se desea estimar $Q(t^*) = \int_0^{t^*} \varphi(t)\mathrm{d}t$ con la fórmula de Simpson, siendo

$$\varphi(t) = I_1(t) - I_2(t), \qquad I_1(t) = \mathrm{sen}(t), \qquad I_2(t) = \exp(t-1)t,$$

para $t^* > 0$ raíz de $f(t) = g(t) - t = \mathrm{sen}(t)\exp(1-t) - t$ calculada con 7 dígitos significativos correctos mediante $t_{k+1} = g(t_k)$ a partir de $t_0 = 0.5$:

MODE^4 2 (Rad) sin ALPHA$_{\mathrm{X}}$ × SHIFT$_{e^x}$ (1 – ALPHA$_{\mathrm{X}}$)

CALC .5 =	CALC Ans =	CALC Ans =	···	CALC Ans =
0.7904391	0.8763436	0.8695468	···	0.8703867

sin ALPHA$_{\mathrm{X}}$ – SHIFT$_{e^x}$ (ALPHA$_{\mathrm{X}}$ – 1) × ALPHA$_{\mathrm{X}}$

CALC .8703867 ÷ 2 = × .8703867 × 4 ÷ 6

0.10108

∫dx sin ALPHA$_{\mathrm{X}}$ – SHIFT$_{e^x}$ (ALPHA$_{\mathrm{X}}$ – 1) × ALPHA$_{\mathrm{X}}$, 0 , .8703867 , 1)

Math error

► ∫dx sin ALPHA$_{\mathrm{X}}$ – SHIFT$_{e^x}$ (ALPHA$_{\mathrm{X}}$ – 1) × ALPHA$_{\mathrm{X}}$, 0 , .8703867 , 4)

0.10145

Extrapolación de Romberg (esquema general)

Siendo $f(x) = \exp(-x^2)$, se desea aproximar $\int_1^{1.5} f(x)\mathrm{dx}$ por extrapolación de Romberg en aritmética de 7 dígitos:

MODE^5 2 (Sci) 7 SHIFT$_{e^x}$ − ALPHA$_X$ x^2

CALC 1 = SHIFT$_{Rnd}$ Ans SHIFT$_{STO}$ A = ▲^{2} $f(1) \approx 3.678794 \times 10^{-01} \rightarrow$ A

CALC 1.125 = SHIFT$_{Rnd}$ Ans SHIFT$_{STO}$ B = ▲^{2} $f(1.125) \approx 2.820630 \times 10^{-01} \rightarrow$ B

CALC 1.25 = SHIFT$_{Rnd}$ Ans SHIFT$_{STO}$ C = ▲^{2} $f(1.25) \approx 2.096114 \times 10^{-01} \rightarrow$ C

CALC 1.375 = SHIFT$_{Rnd}$ Ans SHIFT$_{STO}$ D = ▲^{2} $f(1.375) \approx 1.509774 \times 10^{-01} \rightarrow$ D

CALC 1.5 = SHIFT$_{Rnd}$ Ans SHIFT$_{STO}$ E = $f(1.5) \approx 1.053992 \times 10^{-01} \rightarrow$ E

El esquema a seguir en este proceso de extrapolación por paso al límite es:

$T_1(h) = 0.1183197 \rightarrow$ B

$T_2(h) = 0.1093104 \rightarrow$ C

$T_1(h/2) = 0.1115627 \rightarrow$ C

$T_3(h) = 0.1093644$

$T_2(h/2) = 0.1093610 \rightarrow$ D

$T_1(h/4) = 0.1099114 \rightarrow$ D

donde los cálculos intermedios (de abajo hacia arriba) se hicieron así:

•First •Prev •Next •Last •Go Back •Full Screen •Close •Quit

Extrapolación de Romberg (cálculos intermedios)

(ALPHA$_A$ + ALPHA$_E$ + 2 × (ALPHA$_C$ + ALPHA$_B$ + ALPHA$_D$)) ÷ 16

= SHIFT$_{Rnd}$ Ans SHIFT$_{STO}$ D = ▲^{2} $T_1(h/4) = 1.099114 \times 10^{-01} \rightarrow$ D

(ALPHA$_A$ + ALPHA$_E$ + 2 × ALPHA$_C$) ÷ 8

= SHIFT$_{Rnd}$ Ans SHIFT$_{STO}$ C = ▲^{2} $T_1(h/2) = 1.115627 \times 10^{-01} \rightarrow$ C

(ALPHA$_A$ + ALPHA$_E$) ÷ 4

= SHIFT$_{Rnd}$ Ans SHIFT$_{STO}$ B = ▲^{2} $T_1(h) = 1.183197 \times 10^{-01} \rightarrow$ B

(4 × ALPHA$_D$ − ALPHA$_C$) ÷ 3

= SHIFT$_{Rnd}$ Ans SHIFT$_{STO}$ D = ▲^{2} $T_2(h/2) = 1.093610 \times 10^{-01} \rightarrow$ D

(4 × ALPHA$_C$ − ALPHA$_B$) ÷ 3

= SHIFT$_{Rnd}$ Ans SHIFT$_{STO}$ C = ▲^{5} $T_2(h) = 1.093104 \times 10^{-01} \rightarrow$ C

(16 × ALPHA$_D$ − ALPHA$_C$) ÷ 15 = $T_3(h) = 1.093644 \times 10^{-01}$

SHIFT$_{CLR}$ 2 (Mode) = AC ∫dx SHIFT$_{e^x}$ − ALPHA$_X$ x^2 , 1 , 1.5 , 5)

0.1093643 Simpson opción 5 (i.e., 33 puntos)

•First •Prev •Next •Last •Go Back •Full Screen •Close •Quit

Método de Euler

Para resolver $y'(x) = \text{sen}(x \cdot y(x))$ con $y(0) = 3$ en el intervalo $0 \le x \le 5$ usando el método de Euler con $h = 1$ en aritmética de 4 dígitos:

MODE^4 2 (Rad) MODE^5 2 (Sci) 4

ALPHA_{Y} + 1 × sin (ALPHA_{X} × ALPHA_{Y})

CALC 3 = 0 = $\text{SHIFT}_{\text{Rnd}}$

3.000×10^{00}

CALC Ans = 1 = $\text{SHIFT}_{\text{Rnd}}$

3.141×10^{00}

CALC Ans = 2 = $\text{SHIFT}_{\text{Rnd}}$

3.140×10^{00}

CALC Ans = 3 = $\text{SHIFT}_{\text{Rnd}}$

3.145×10^{00}

CALC Ans = 4 = $\text{SHIFT}_{\text{Rnd}}$

3.159×10^{00}

•First •Prev •Next •Last •Go Back •Full Screen •Close •Quit

Método predictor-corrector

Para resolver $y'(x) = (x - y(x))/2$ con $y(0) = 2$ en $0 \le x \le 1$ usando (con $h = 0.5$ y aritmética de 4 dígitos) el método predictor-corrector

$k_1 = h \cdot f_i \to \text{A}$, $k_2 = h \cdot f(x_i + h/2, w_i + k_1/2) \to \text{B}$, $w_{i+1} = w_i + k_2 \to \text{C}$,

$$w_{i+1}^P = w_i + \frac{h}{2}(3f_i - f_{i-1}) \to \text{D}, \quad w_{i+1} = \frac{4}{3}w_i - \frac{1}{3}w_{i-1} + \frac{2h}{3}f_{i+1}^P \to \text{E}$$

MODE^5 2 (Sci) 4 (ALPHA_{X} − ALPHA_{Y}) ÷ 2 CALC 0 = 2 = $\text{SHIFT}_{\text{Rnd}}$ × .5 =

$\text{SHIFT}_{\text{Rnd}}$ Ans $\text{SHIFT}_{\text{STO}}$ A = -5.000×10^{-01}

$\blacktriangle^3$ CALC 0 + .5 ÷ 2 = 2 + ALPHA_{A} ÷ 2 = $\text{SHIFT}_{\text{Rnd}}$ × .5 =

$\text{SHIFT}_{\text{Rnd}}$ Ans $\text{SHIFT}_{\text{STO}}$ B = -3.750×10^{-01}

2 + ALPHA_{B} = $\text{SHIFT}_{\text{Rnd}}$ Ans $\text{SHIFT}_{\text{STO}}$ C = 1.625×10^{00}

$\blacktriangle^6$ CALC .5 = ALPHA_{C} = $\text{SHIFT}_{\text{Rnd}}$ -5.625×10^{-01}

ALPHA_{C} + .5 × (3 × Ans + 1) ÷ 2 = $\text{SHIFT}_{\text{Rnd}}$ Ans $\text{SHIFT}_{\text{STO}}$ D = 1.453×10^{00}

$\blacktriangle^3$ CALC 1 = ALPHA_{D} = $\text{SHIFT}_{\text{Rnd}}$ -2.265×10^{-01}

(4 × ALPHA_{C} − 2 + 2 × .5 × Ans) ÷ 3 = $\text{SHIFT}_{\text{Rnd}}$ Ans $\text{SHIFT}_{\text{STO}}$ E = 1.425×10^{00}

•First •Prev •Next •Last •Go Back •Full Screen •Close •Quit

Epsilón - Revista de Educación Matemática 2010, Vol. 27(2), nº 75, pp. 165-171

Una sesión en ESTALMAT: números y calculadoras

Encarnación Amaro Parrado
IES Virgen de la Cabeza. Marmolejo (Jaén)
Agustín Carrillo de Albornoz Torres
Universidad de Córdoba
José Mª Chacón Íñigo
IES Llanes (Sevilla)
Concepción García Severón
IES Velázquez (Sevilla)

Resumen: *Descripción y justificación de las actividades propuestas a alumnos del primer año del Proyecto Estalmat en una sesión de tres horas. El objetivo es trabajar algunas propiedades de los números trabajando con la calculadora científica e insistir en el buen uso de la misma así como en sus limitaciones.*

El *proyecto para la detección y el estímulo del talento precoz en matemáticas* (ESTALMAT) es ya, después de seis años de andadura exitosa en Andalucía, conocido por muchos profesores de matemáticas, por muchas instituciones que han colaborado en él y por cada vez un sector más amplio de la sociedad.

Los cincuenta alumnos y alumnas de 12, 13 y 14 años seleccionados en una prueba que se realiza en junio y en la que se trata de medir su especial aptitud e interés por las matemáticas, reciben clases durante dos cursos escolares los sábados por la mañana, en las dos sedes que cubren la amplitud de nuestro territorio: Facultad de Ciencias de Granada y Facultad de Matemáticas de Sevilla.

Esta sesión la concebimos para que se incluyera entre las primeras a desarrollar en Primer Curso de ESTALMAT, y así hemos venido haciéndolo a lo largo de las ediciones que lleva ya el proyecto. Lo proponemos así porque los conceptos que se manejan son fáciles y el objetivo que perseguimos es que los chicos, en unos casos observen y deduzcan propiedades sencillas de los números.

En general, estos alumnos le sacan bastante partido a la calculadora, pero no está de más incidir en que este instrumento es una auténtica herramienta matemática que viene en nuestra ayuda para liberarnos de operaciones tediosas y repetitivas, pero que este ahorro hay que emplearlo en pensar en qué queremos que haga por nosotros, cómo tiene que hacerlo (con qué prioridades) y, como siempre, sea “a mano o a máquina”, juzgar el acierto del resultado.

Cuando se destierra la pereza de repetir múltiples veces, con números distintos, una cierta cadena de operaciones, la calculadora puede poner de manifiesto propiedades de las que, en estos niveles, no puede hacerse una demostración formal.

Y también añadimos actividades en los que parece que la calculadora no nos va a servir de ayuda. Pero sí. Sólo hay que pararse a pensar un poco matemáticamente y comprobar que, entre la deducción acertada y la agilidad de la máquina, los resultados brillan.

Mostramos, a continuación, algunas de las actividades que proponemos en la sesión y la resolución con la calculadora, y que creemos que son efectivas para conseguir los objetivos que pretendemos. Desde luego sí podemos asegurar que en el ambiente general de la clase no hemos encontrado mayores dificultades por parte de los chicos para abordarlas, y creemos que se trasmite con ellas un acercamiento a las utilidades de la calculadora así como a la capacidad de generalizar propiedades.

ACTIVIDADES

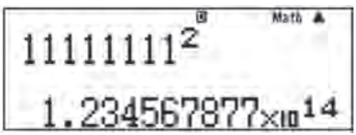
- ¿Qué dice tu calculadora al preguntarle por el resultado de la operación 11111111^2? (mostrar).

  Quizá te ayude ir poco a poco…

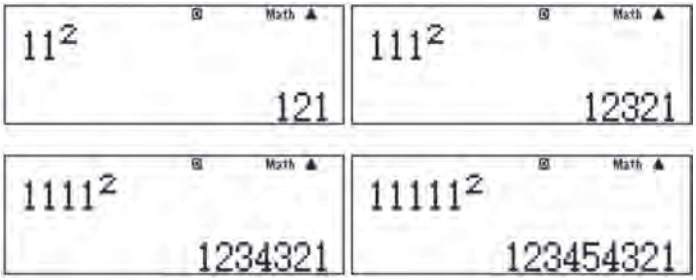
  1^2
  11^2
  111^2
  111^2
  1111^2
  11111^2
  111111^2
  1111111^2

Desarrollo

Al utilizar la calculadora (en las sesiones se utiliza el modelo fx-82ES de Casio con *natural display*, o sea, con escritura natural en pantalla), aparece:



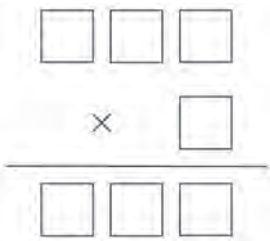
Esta notación no suele ser conocida por el alumnado del primer curso de Estalmat, con lo que no pueden interpretar el resultado; por eso a continuación realizan los cálculos sugeridos.



A partir de este momento ya se aventuran a decir que:

Si ahora le pedimos que cuenten las cifras a partir de la segunda, observan que hay 14, con lo que se puede introducir ya el concepto de notación científica.

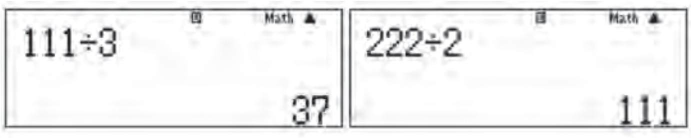
- Encuentra multiplicaciones que cumplan estas condiciones:
  - Las tres cifras del multiplicando son diferentes.
  - De la cifra del multiplicador no se sabe nada.
  - Las tres cifras del resultado del producto son iguales.

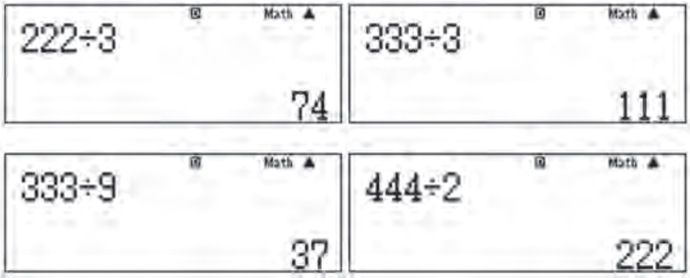


La calculadora y los criterios de divisibilidad pueden ayudarte. Hay más de una solución.

Desarrollo

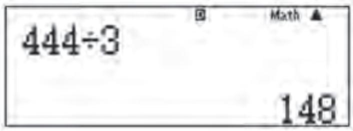
Probando la división con números de 3 cifras iguales:





Hasta aquí observan que no sirve ninguna de las operaciones que han realizado.

Pero en el siguiente paso, ya tienen una solución: 148 × 3 = 444.



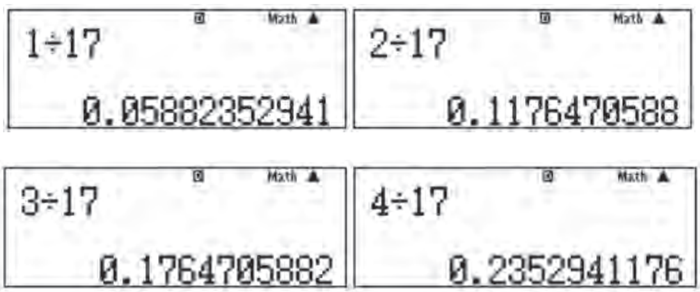
(Han estado trabajando la divisibilidad y los criterios).

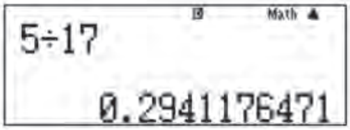
Y así continúan hallando las demás soluciones.

- Alicia ha tratado de investigar el periodo obtenido al dividir por 17. Después de dividir por 17 los números 1, 2, 3, 4 y 5, cree que ya tiene el periodo completo, que supone tiene 16 cifras. Compruébalo utilizando la calculadora.

  Intenta escribir el resultado que se obtendría al dividir 36 entre 17 con veinte cifras decimales.

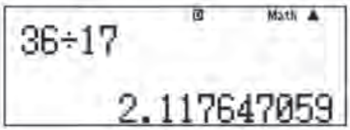
Desarrollo





Con estas operaciones, efectivamente ya creen que tienen todas las cifras del periodo.

Ahora efectúan:



Y ya contestan que $\frac{36}{17} = 2'11764705882352941176$.

En las dos actividades siguientes utilizan las raíces y las potencias y comprueban por aproximación los resultados. Van probando y llegan a lo pedido.

- Un cubo (hexaedro) tiene un volumen de 200 cm^3. calcula la longitud de su arista con toda la exactitud que permita la calculadora.

  ¿Cuánto suman sus aristas? ¿Cuál es su área total?

- *En las tres actividades que siguen hay que trabajar con alguna estrategia de búsqueda.*

  15.252 es el producto de dos números naturales consecutivos. Hállalos.

  357.627 es el producto de tres números impares consecutivos. Hállalos.

  206.725 es la suma de dos cuadrados perfectos consecutivos ¿Cuáles son?

- ¿Cuál es la última cifra de 3^{26}?

  ¿Cuáles son las dos últimas cifras de 7^{123}?

  Deduce cuál es la última cifra del número resultante de la siguiente operación:

$$17^{1983} + 11^{1983} - 7^{1983}$$

En la actividad anterior observan que la última cifra se van repitiendo cada ciertas potencias de 3 y de 7, respectivamente. Análogo razonamiento siguen para el último apartado y después suman y restan.

- ¿Como harías estas operaciones si la tecla x está estropeada y no pueden utilizarse los paréntesis?

  » 37 x 12

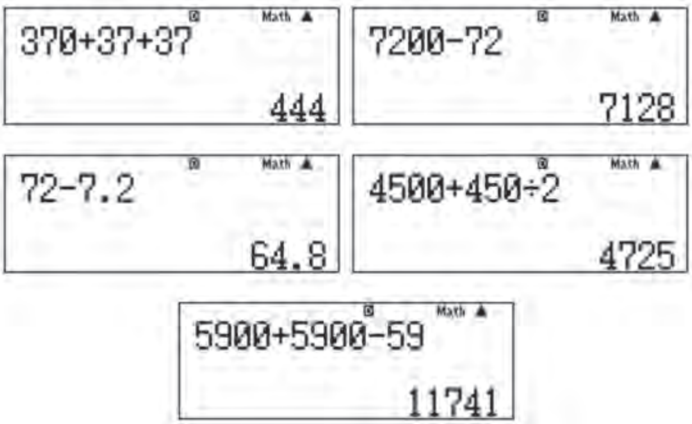
  » 72 x 99

  » 72 x 0.9

  » 45 x 105

  » 59 x 199

Desarrollo



Nota: en esta actividad, en los primeros años y usando modelos más antiguos de las calculadoras, no era necesario poner la restricción de no usar los paréntesis; con el modelo mencionado más arriba ocurre que son iguales los resultados de operar de la siguiente forma:

con lo que la actividad no tendría sentido.

- Usa la calculadora para obtener $\sqrt{2+\sqrt{2}}$

  Y ahora para obtener $\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}$

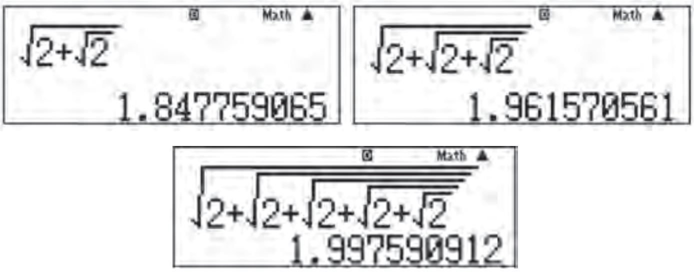
Con esa secuencia debes obtener con la mayor aproximación que te permita la calculadora el valor de:

$$\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots}}}}}$$

(Los puntos suspensivos indican que se prosigue así indefinidamente).

Desarrollo

Esta actividad tenía más sentido con otros modelos de la calculadora. En esta sesión de ESTALMAT, la hacen casi directamente:



Probando con más pasos llegan a la conclusión de que *el límite* es 2.

MATEMÁTICAS
CON CALCULADORA

EDUCACIÓN SECUNDARIA OBLIGATORIA
4º CURSO

Editan:
SAEM THALES y
División Didáctica CASIO

SOCIEDAD ANDALUZA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA "THALES"

FLAMAGAS
División didáctica
www.aulaCASIO.com

Actividades para realizar con calculadora

Proponemos a continuación distintas actividades para realizarlas con el modelo de calculadora indicada.

CON CALCULADORA CIENTÍFICA

1. Observa:

$$1 + \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \ldots$$

a) Halla el valor de la expresión con 4 sumandos.

b) Si aumentamos el número de sumandos, ¿aumenta o disminuye el valor de la expresión?

c) Calcula el valor de la expresión cuando el número de sumandos sea 100.

d) ¿A qué valor se aproxima la expresión cuando hay infinitos sumandos?

2. ¿En qué número termina 2^{83}?

Observa en qué cifra terminan las sucesivas potencias de 2 y busca una regla que te permita saber la última cifra de cualquier potencia de base 2.

3. Encuentra algunas fracciones que verifiquen:

$$\frac{7}{4} < \frac{a}{b} < \frac{8}{4} .$$

4. Calcula el valor de:

$$\frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \frac{3}{1000} + \frac{3}{10000} + \ldots$$

5. Dada la serie:

$$\frac{1}{9} - \frac{1}{99} + \frac{1}{999} - \frac{1}{999} + \ldots$$

Intenta averiguar el valor al sumar 10 términos. ¿Y al sumar 20 términos?

Si sumamos los cien primeros términos ¿cuál es su valor?

CON CALCULADORA GRÁFICA

1. Comprueba, con la ayuda del teorema de Bolzano, que la función $f(x) = 2x^3 - 5x^2 + 1$ corta el eje de abscisas en un punto del intervalo (2, 3).

   a) Con la ayuda de la tabla de valores, halla dicho punto de corte con un error más pequeño que 0,05.

   b) Comprueba gráficamente que existe dicho punto perteneciente al intervalo (2, 3).

   c) Desde la ventana gráfica determina la solución.

2. A partir de una función f(x) representa, sin calcular previamente, la función derivada.

   Aplica el procedimiento a la representación de la función f(x) = sen x.

3. Estudia la continuidad de la función f.

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 1 & x < 1 \\ x2 + 2 & 1 \leq x < 3 \\ 1-x & x \geq 3 \end{cases}$$

CON CALCULADORA CAS (CÁLCULO SIMBÓLICO)

En la sección dedicada a este tipo de calculadoras, aunque también las podíamos haber propuesto en la sección anterior, planteamos varias actividades que corresponden a ejercicios de las pruebas de acceso a la Universidad de la convocatoria del 2010.

Estas actividades se han extraído de los exámenes propuestos en distintas comunidades por lo que observaremos que son similares, aunque queremos destacar que corresponden a comunidades en las que las normas sobre el uso de las calculadoras son diferentes.

Llama por tanto la atención que en ocasiones, cuando se plantea el uso de la calculadora en las PAU una de las razones en contra es que esto supondría que habría que cambiar los tipos de ejercicios, lo cual no es del todo necesario o al menos no sirve como justificación para prohibir el uso de cualquier tipo de calculadora en las pruebas de acceso.

Comencemos con una propuesta sobre matrices.

1. Sean las matrices:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad C=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

   Calcular la matriz X que cumpla la ecuación A X B = C.

2. Sean las matrices:

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -4 & -2 \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 5 & -4 \end{pmatrix} \qquad C=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

   a) Determina la matriz X que verifica $X + B\,C = A^2$.
   b) Calcula las matrices C^6 y C^7.

3. Dada la matriz:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -5 \end{pmatrix}$$

   a) Hallar la matriz $N = 2.A.A^t - 5.1$, siendo $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

   b) Resolver la siguiente ecuación matricial: $A.X = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$.

La primera actividad corresponde a una prueba de la Comunidad Andaluza en la que no están permitidas las calculadoras gráficas ni simbólicas y las otras dos, se han propuesto en Cataluña y en Canarias, comunidades en las que si está permitido el uso de cualquier tipo de calculadoras.

Y ahora unas propuestas sobre funciones en las que se repite la misma situación, en unas comunidades si se permite el uso de las calculadoras y en otras como en Andalucía no.

1. Considera la función $f(x) = x^2 + 4$.

   a) Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa x = 1.

   b) Esboza el recinto limitado por la gráfica de f, el eje de ordenadas y la recta de ecuación y = 2x + 3. Calcula su área.

2. a) Representa las parábolas $f(x) = x^2 - 3x - 1$ y $g(x) = -x^2 + x + 5$.

   c) Calcula el recinto limitado por ambas gráficas.

De estas últimas actividades, la primera corresponde a Andalucía (prohibición de calculadoras) y la segunda a Castilla La Mancha, comunidad en la que se permite el uso de cualquier tipo de calculadora.

ENVÍO DE ARTÍCULOS

Los artículos enviados a la revista Epsilon pasan por un proceso de revisión por pares. Para enviar un artículo para su evaluación, siga las siguientes instrucciones:

1. Los trabajos deben ser de Educación Matemática. El artículo no debe haber sido publicado con anterioridad en una revista y los autores deben poseer los derechos de autor correspondientes.
2. Los artículos pueden ser: de investigación (experimental o un estudio teórico), de ideas para el aula, de experiencias. También se aceptan artículos para la sección de resolución de problemas.
3. Todo artículo debe estar escrito en castellano y debe incorporar referencias bibliográficas, en todo caso, deben seguir las normas del manual de publicación de la APA (quinta edición) de acuerdo con el siguiente modelo:

   Para artículo de revista: Leinhardt, G., Zaslavsky, O. y Stein, M. (1990). Functions, graphs and graphing: tasks. Learning and teaching. *Review of Educational Research, 60*(1), 1-64.

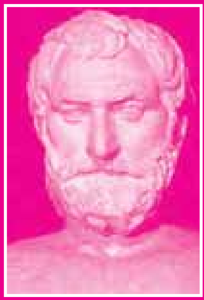
   Para libro: Fernández, A. y Rico, L. (1992). *Prensa y educación Matemática*. Madrid: Síntesis.

   Para capítulo de libro, actas de congreso o similar: Fuson, K. (1992). Research on whole number addition and subtraction. En Grouws, D. (ed.) *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, 243-275. MacMillan Publishing Company: New York.

   Para artículo de revista electrónica o información en Internet: Cutillas, L. (2008). Estímulo del talento precoz en matemáticas. *Números* [en línea], 69. Recuperado el 15 de febrero de 2009, de http://www.sinewton.org/numeros/

4. El artículo deberá tener una extensión máxima de 7.000 palabras, incluyendo las tablas y los anexos si es de investigación. Para las secciones experiencias e ideas para el aula la extensión máxima será de 3.000 palabras. El formato de párrafo debe ser: letra Times New Roman tamaño 12 e interlineado sencillo y sin sangrado. Párrafos con espaciado anterior de 6 ptos. Los subtítulos deben estar sin numeración.
5. El artículo debe incluir en español e inglés: (a) el título del trabajo, (b) un resumen con un máximo de 100 palabras, y (c) de tres a seis términos claves.

6. El archivo con el artículo debe enviarse en formato doc y pdf.
7. Los esquemas, dibujos, gráficas e imágenes deben enviarse por separado (en una carpeta aparte del documento de texto) en formato TIFF o JPG con una resolución mínima de 300 puntos por pulgada. Cada archivo debe estar claramente identificado y se debe indicar en el texto el lugar donde se ubica. Las fotos en las que aparezcan menores deberán estas pixeladas o tener autorización escrita del tutor (se adjuntara copia con elarchivo).
8. Se debe enviar una segunda versión del artículo en la que no aparezcan los nombres de los autores, ni información relativa a ellos o que pueda servir para indentificarlos (e.g., institución a la que pertenecen, citas y referencias bibliográficas propias, agradecimientos, datos del proyecto en el que se enmarca el trabajo). En esta versión, reemplace las citas y referencias bibliográficas por "Autor, 2008" o "Autor et al., 2008". En las referencias bibliográficas propias se debe eliminar el título y el nombre de la revista o el título del libro donde se publica.
9. Los datos de los autores (nombre, institución a la que pertenecen, dirección de correo electrónico, dirección postal y número de teléfono y fax) deben incluirse en un archivo aparte. Utilice únicamente un apellido o los dos pero separados por un guión.
10. Los autores deben ser los dueños de los derechos de autor del documento que se envía y, en su caso, haber obtenido los derechos para publicar aquel material de otros autores que se incluya en el documento.
11. Cuando el artículo tenga más de un autor, éstos designarán a un autor de contacto quien se encargará de toda la comunicación con la revista Epsilon.
12. Los archivos se deben enviar al centro de documentación Thales thales.matematicas@uca.es señalando si es un trabajo de investigación, experiencias o ideas para el aula.
13. Una vez aceptado el artículo para su publicación, se solicitará al autor de contacto que firme una carta de cesión de derechos de autor en nombre de todos los autores del trabajo.



S.A.E.M. «THALES»