La revista Epsilon está reseñada en:
IN-RECS, Dialnet y Base de Datos del Centro de Documentación Thales.

epsilon 75

Revista de Educación Matemática

Página de la revista: http://thales.cica.es/epsilon
Revista: epsilon@thales.cica.es

Sociedad Andaluza de Educación Matemática "Thales"

Edita
Sociedad Andaluza de
Educación Matemática "Thales"
Centro Documentación "Thales"
Universidad de Cádiz
C.A.S.E.M.
11510 PUERTO REAL (Cádiz)

Maquetación e impresión
Grafitrés, S.L.
Cristóbal Colón, 12
41710 Utrera (Sevilla)

Depósito Legal
SE-421-1984

I.S.S.N.
1131-9321

Período
2º cuatrimestre 2010

Suscripción
ESPAÑA: 42,00 euros
PAÍSES DEL EURO: 63,00 euros
RESTO DE PAÍSES: 90 $ USA
(3 NÚMEROS AL AÑO)

ÍNDICE

7 **EDITORIAL**

INVESTIGACIÓN

9 **La investigación en Educación Matemática en la revista Epsilon. Análisis cienciométrico y temático (2000-2009)**
Rafael Bracho-López
Alexander Maz-Machado
Manuel Torralbo-Rodríguez
Noelia Jiménez-Fanjul
Natividad Adamuz-Povedano

27 **El método de MonteCarlo para el estudio de la primalidad de números**
Francisco Javier Martínez López
Sergio Martínez Puertas
Amalia Gallegos Ruiz
José Ramón Ferrón de Haro

41 **Demostración matemática. Concepciones de estudiantes de profesorado de matemática**
Virginia Montoro

IDEAS PARA EL AULA

57 **Estalmat: Una experiencia con cerillas**
Francisco Tomás Sánchez Cobo
Ángela Capel Cuevas

65 **Estadística Bidimensional**
José Mª Chacón Iñigo

83 **Taller de mosaicos con calculadora gráfica**
José Manuel Fernández Rodríguez
Encarnación López Fernández

101 **Podemos introducir a los estudiantes en la investigación en Matemáticas desde niveles educativos bajos. Un ejemplo**
Francisco Moreno Soto

EXPERIENCIAS

107 **Una isla de Matemáticas**
José Luís Ruiz Fernández
María del Carmen Galán Mata
Alicia González Ortiz
Diana Contreras Roso
Laura Vázquez Fournier

117 **Otra forma de aprender: Los poliedros regulares**
Lucía Guillén Portales

123 **Evaluación mediante competencias digitales: una experiencia con Mathematica**
Ángel F. Tenorio Villalón
Concepción Paralela Morales
Ana M. Martín Caraballo

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

137 **Problemas en la Resolución de Problemas**
F. Damián Aranda Ballesteros
Manuel Gómez Lara

EDITORIAL

La Junta Directiva de la Sociedad Andaluza de Educación Matemática THALES ha depositado su confianza en mí para liderar una nueva etapa de la revista Epsilon por lo que debo expresar mi agradecimiento. Desde este primer editorial quiero, en nombre del nuevo Comité Editorial, manifestar nuestro reconocimiento a la labor que Antonio Moreno y todo su equipo colaborador ha venido realizando estos últimos años al frente de la revista.

La sociedad y el conocimiento evolucionan y las revistas deben adaptarse a estos cambios y a las exigencias de sus lectores. Por tal razón hemos emprendido una reestructuración de la revista, en cuanto a las secciones y formatos, que se irán haciendo patentes con el correr de los números. Se tendrán cuatro secciones fijas: investigación, experiencias, ideas para el aula y, resolución de problemas. Otras dos, reseñas bibliográficas y, opinión y debate se publicarán cuando hayan aportaciones sobre estos temas. La sección de resolución de problemas tendrá acceso abierto en la Web de la revista para fomentar la participación del profesorado en su desarrollo.

Si bien la revista esta dirigida al profesorado de matemáticas de Enseñanza Secundaria, creemos que es importante incorporar algunos artículos de investigación, pues esta puede no solo repercutir en el aula sino que permite ampliar el rango de posibles lectores.

Uno de los retos que asumiremos es tratar de subsanar a medio plazo el desfase de la revista, por lo que en este año 2011 realizaremos un particular esfuerzo editorial. Esto último es indispensable no solo para que la revista vuelva ser incluida en las bases de datos en la que estuvo hace algunos años si no para su incorporación en otras. Con este propósito se han programado dos números monográficos: uno dedicado a la historia de las matemáticas y otro al trabajo con calculadoras, este último tendrá un editor invitado.

Finalmente debo señalar que el éxito de la revista Epsilon depende no solo de los comités editorial y científico, sino de los autores y de cada una de las personas que, de forma desinteresada, realizan labores de arbitraje de los artículos o hacen sugerencias sobre la forma de mejoría. Sin todos ellos no podría existir la revista.

Alexander Maz Machado
Director

Epsilón *- Revista de Educación Matemática* *2010, Vol. 27(2), nº 75, pp. 9-25*

La investigación en Educación Matemática en la revista Epsilon. Análisis cienciométrico y temático (2000-2009)

Rafael Bracho-López, Alexander Maz-Machado, Noelia Jiménez-Fanjul, Natividad Adamuz-Povedano, Pilar Gutiérrez-Arenas y Manuel Torralbo-Rodríguez
Universidad de Córdoba

Resumen: *Una de las actividades fundamentales inherentes al proceso de producción científica es la comunicación de los conocimientos y, sin duda, los canales más característicos de difusión científica son hoy día los artículos que se suelen publicar en revistas especializadas que, sometidos a ciertos controles de calidad, difunden resultados de investigaciones, estudios empíricos, innovaciones curriculares, etc. Por ello, todo medio de comunicación científica que se precie debe preocuparse de evaluar de forma más o menos sistemática la calidad de su producción.*

En este trabajo se presenta un estudio cienciométrico de los artículos científicos publicados en los últimos diez años en Epsilon, la revista de la Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales, realizado desde una perspectiva bibliométrica y conceptual o temática. Esta investigación se ha realizado coincidiendo con el último relevo en el equipo de dirección de la revista y a demanda de este, con el fin de identificar las características de la producción en la revista en los últimos tiempos con idea de planificar de forma adecuada la nueva línea editorial.

Palabras clave: *Educación matemática, cienciometría, bibliometría, revistas científicas, análisis temático.*

1. INTRODUCCIÓN

Tradicionalmente, cuando concluye una investigación los responsables de la misma suelen sentir la responsabilidad de divulgar los resultados para compartirlos con el resto de la comunidad científica; es así como la ciencia se configura como un complejo sistema social con sus propios canales de comunicación, normas y principios éticos, en el que las publicaciones científicas se han convertido desde hace más de tres siglos en los eslabones del proceso de transferencia de información y en el instrumento habitual de comunicación entre los investigadores (Mendoza y Paravic, 2006).

En el esquema general de la construcción del conocimiento científico, las revistas especializadas son los referentes capaces de organizar sistemáticamente los conocimientos acumulados, que se inician a partir del trabajo de los autores y que se perfeccionan y formalizan con las aportaciones de los editores y evaluadores hasta llegar a los usuarios.

Por otro lado, la evaluación de la producción científica es sin duda una cuestión de interés singular en los últimos tiempos y la Cienciometría es el campo disciplinar que ofrece métodos e instrumentos apropiados para este tipo de análisis. Centrándonos en el estudio cienciométrico de las revistas científicas, a través del estudio de una serie de indicadores adecuados es posible conocer el nivel de consolidación de un área de conocimiento, conocer los temas que se investigan con más cadencia, identificar a los autores e instituciones más productivos, así como el nivel de colaboración entre ellos y, en definitiva, orientar a los usuarios de las publicaciones y/o a los responsables de las mismas acerca de aspectos reveladores a partir de los trabajos que se publican (Terrada y Peris, 1988; Maz, Torralbo, Vallejo, Fernández-Cano y Rico, 2009).

En este trabajo, comenzamos realizando un breve recorrido histórico a través de las revistas españolas sobre Educación Matemática, para centrarnos a continuación en un análisis cienciométrico y conceptual de los artículos científicos sobre Educación Matemáticas publicados en la revista Epsilon en el periodo de tiempo comprendido entre el año 2000 y el año 2009, coincidiendo con el relevo en la dirección de la revista y en su equipo de redacción.

2. REVISTAS ESPAÑOLAS SOBRE EDUCACIÓN MATEMÁTICAS

Según Rico y Sierra (1994), las primeras referencias sobre Educación Matemática en publicaciones regulares españolas se encuentran en el *Boletín de la Institución Libre de Enseñanza (BILE)*, medio de comunicación de este establecimiento educativo laico que, como se sabe, tuvo una gran repercusión en la vida intelectual de nuestro país desde su fundación en 1876, hasta el comienzo de la Guerra Civil Española. En el primer tercio del siglo XX, también tiene una presencia significativa la *Revista de la Real Sociedad Matemática Española (RSME)* (1911-1917), que tuvo su continuación en la *Revista Matemática Hispano-Americana* (1919-1936), fundada por Julio Rey Pastor, y otras dos revistas que, no estando centradas en el universo matemático, publicaron bastantes artículos sobre Educación Matemática: *Revista de Escuelas Normales* (1923-1936) y *Revista de Pedagogía* (1922-1937). Pero sin duda la Guerra Civil cortó un desarrollo prometedor de la Educación en España y, en particular, de la Educación Matemática.

En la década de los cuarenta se produce la práctica desaparición de revistas científicas educativas. Fue en 1949 cuando inició su andadura la revista *Bordón*, como revista de la Sociedad Española de Pedagogía. *Bordón* comenzó mostrando un marcado interés por las didácticas específicas, publicando entre otros, diversos artículos sobre Educación Matemática y dedicando un monográfico en el año 53 a dicha área de conocimiento.

En la segunda mitad de los años cincuenta, como fruto de cierta inquietud por la Enseñanza Secundaria, comenzaron a aparecer algunas revistas educativas en las que también encontramos artículos dedicados a la Didáctica de las Matemáticas, entre ellas destacamos *Revista de Enseñanza Media* (REM) (1956) y *Vida Escolar* (1958).

En 1968, el Departamento de Metodología y Didáctica "Jorge Juan" de Matemáticas, inicia la publicación de *Cursillos sobre Didáctica Matemática*, inicialmente con periodicidad anual y, ya en la década de los setenta, empiezan a aparecer revistas que pronto tendrían gran repercusión en el mundo de la Educación, como *Cuadernos de Pedagogía* (1975) e *Infancia y Aprendizaj*e (1978).

Y desde luego, desde su fundación en 1983, debemos destacar el papel desempeñado por *Enseñanza de las Ciencias*, una revista de investigación sobre educación científica en general que, de manera particular, viene contribuyendo de forma constante a la comunicación y difusión de la investigación en Educación Matemática.

A mediados de los setenta, ante la preocupación por los problemas de aprendizaje de las Matemáticas derivados de la implantación de la Ley General de la Educación, surgieron varios grupos que investigaban sobre la viabilidad de otros programas y métodos y difundieron entre el profesorado ideas renovadoras, como el *Grupo Zero* de Barcelona, el *Grupo Cero* de Valencia, el *Equipo Granada Mats,* el *Colectivo Rosa Sensat*, el *Colectivo de Didáctica de las Matemáticas de Sevilla,* etc. Estos grupos jugaron un papel fundamental en la historia de la Educación Matemática en España, pero era evidente la necesidad de organizarse en estructuras más solidas y abiertas como podían ser los departamentos universitarios y las asociaciones de profesores de matemáticas (Rico y Sierra, 1994).

A finales de los setenta y principios de los ochenta se produce el inicio del movimiento asociativo entre profesores de Matemáticas como respuesta a las necesidades de afrontar los problemas de la Educación Matemática en ese tiempo. La primera asociación en constituirse fue la Sociedad Canaria *"Isaac Newton"*, en 1978; en 1980, lo hizo la Sociedad Andaluza de Educación Matemática *"Thales"*, y en 1981, la Sociedad Aragonesa *"Pedro Ciruelo"*. En 1984 surgió la Asociación de Profesores de Matemáticas de Andalucía, que en 1987 se fusionó con la Sociedad Thales, adoptando el nombre de Sociedad Andaluza de Educación Matemática *"Thales"*. En 1988 se produce otro hito importante con la constitución de la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas *(FESPM)*. A partir de este momento empiezan a constituirse asociaciones de profesorado de Matemáticas en la práctica totalidad de comunidades autónomas. En la actualidad son 20 las sociedades de profesorado integradas en la FESPM.

Entre la gran cantidad de actividades de formación del profesorado, académicas, divulgativas, etc. que se han venido desarrollando desde las asociaciones de profesores de matemáticas en los últimos años, sin duda destacan por su trascendencia los encuentros del profesorado y, en algunos casos significativamente relevantes, el fomento de la comunicación y difusión a través de las revistas científicas que las propias sociedades han ido editando.

TABLA 1
REVISTAS DE ASOCIACIONES DEL PROFESORADO DE MATEMÁTICAS

TÍTULO	EDITOR	PERIODO
Números (1ª Época)	Soc. Canaria I. Newton de Prof. de Mat.	1981 - 1990
Números (2ª Época)	Soc. Canaria I. Newton de Prof. de Mat.	1990 - 2010
Thales	Soc. Andal. de Prof. de Matemáticas "Thales"	1984 - 1987
Epsilon (1ª Época)	Asoc. Prof. de Mat. de Andalucía	1984 - 1987
Epsilon (2ª Época)	SAEM Thales	1987 - 2009
SUMA	FESPM	1988 - 2010
BIAIX	FEEMCAT	1992 - 2010
GAMMA	AGAPEMA	2001 - 2010

Fuente: Rico y Sierra (1994) y elaboración propia.

En la Tabla 1 se indican las revistas sobre Educación Matemática editadas por asociaciones del profesorado en nuestro país en los últimos años.

Otras asociaciones de la FESPM publican con más o menos regularidad sus propios boletines. Es el caso de la Sociedad de Ensinantes de Ciencia de Galicia (ENCIGA), que publica su boletín desde mayo de 1988; la Sociedad Madrileña de Profesores de Matemáticas *"Emma Castelnovo"*, desde 2006; la Sociedad Matemática de Profesores de Cantabria, desde 2008, y la Sociedad *"Puig Adam"* de Profesores de Matemáticas, que viene publicando regularmente tres boletines al año desde el año 1983.

Además de las revistas de sociedades de profesorado citadas, existen en la actualidad otras publicaciones periódicas españolas, de naturaleza más o menos científica, que vienen publicando artículos sobre Educación Matemática. Entre ellas hay tres especializadas en Educación Matemática: *SIGMA, UNO y PNA. SIGMA* es una publicación auspiciada por el Departamento de Educación, Universidades e Investigación del Gobierno Vasco, dirigida fundamentalmente al profesorado de Educación Primaria y de Educación Secundaria, *UNO* es una revista editada por la Editorial GRAÓ, especializada en publicaciones educativas; su andadura comenzó en septiembre de 1994 y desde entonces viene publicando cuatro números al año centrados en la Didáctica de las Matemáticas, y *PNA* es la única revista española centrada en la investigación en Educación Matemática; es una iniciativa del Grupo de Investigación en Didáctica de la Matemática: Pensamiento Numérico y Algebraico, del Plan Andaluz de Investigación, Desarrollo e Innovación (PAIDI), y publica regularmente cuatro números al año (septiembre, enero, marzo y junio), en inglés o español, desde septiembre de 2006.

En una situación intermedia entre las revistas especializadas en Educación Matemática y las más genéricas pero que también publican artículos sobre esta disciplina, podemos considerar a la revista *La Gaceta*, editada por la Real Sociedad Matemática Española (RSME). Esta revista, dedicada a la divulgación de las Matemáticas, publica artículos de muy variada naturaleza, entre los que un número considerable están relacionados con la Educación Matemática.

Por último, entre las revistas educativas más generalistas que vienen publicando con cierta regularidad artículos sobre Educación Matemática destacamos la ya mencionada *Enseñanza de las Ciencias*, editada por el Institut de Ciències de l'Educació de la Universitat Autònoma de Barcelona y el Vicerectorat d'Investigació de la Universitat de València; *Revista de Educación*, editada por el Ministerio de Educación; *Cuadernos de Pedagogía*, con sus más de 29 años de presencia ininterrumpida en el ámbito educativo; *Infancia y aprendizaje*, editada por la Fundación Infancia y Aprendizaje; *Perspectiva Escolar* e *Infancia*, ambas editadas por la Associació de Mestres Rosa Sensat y *BORDÓN, Revista Española de Pedagogía*, a la que ya hicimos referencia anteriormente.

3. INFORMACIÓN GENERAL SOBRE LA REVISTA EPSILON

Los datos generales de esta revista son los siguientes:

TABLA 2
DATOS GENERALES DE LA REVISTA EPSILON

Nombre:	*Epsilon: Revista de la Sociedad Andaluza de Educación Matemática THALES*
Área de Conocimiento:	Didáctica de la Matemática
ISSN:	1131-9321
Periodicidad:	Cuatrimestral
Inicio:	1984
Editor:	Sociedad Andaluza de Educación Matemática THALES
Director:	Alexander Maz Machado
Consejo de redacción:	Damián Aranda, Rafael Bracho, Fracisco España, José R. Galo, Manuel Gómez, Inmaculada Serrano
Comité científico:	Evelio Bedoya, Matías Camacho, José Carrillo, José Ortiz, Liliana Mabel Tauber, Mª del Mar Moreno, Modesto Sierra
Web:	http://thales.cica.es/epsilon

Fuente: Dialnet y http://thales.cica.es/epsilon

En sus inicios en 1984, la revista *Thales*, editada por la Sociedad Andaluza de Profesores de Matemáticas *"Thales"*, y la revista *Epsilon*, de la Asociación de Profesores de Matemáticas de Andalucía, se publican paralelamente. Esto ocurre hasta 1987, año en que se produce la fusión de ambas sociedades en la Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales (SAEM THALES). Entonces se comienza a publicar la nueva revista Epsilon que sigue publicándose en la actualidad.

Epsilon es, desde hace años, el vehículo de información, comunicación y participación de los socios de las SAEM THALES y del profesorado de Matemáticas de Andalucía de todos los niveles educativos, pero en ella también participan gran cantidad de autores nacionales e internacionales y también es leída esta publicación fuera de Andalucía.

En sus distintas etapas, *Epsilon* ha cambiado de formato y de estructura, aunque no demasiado. El último cambio se produce precisamente en el presente número, coincidiendo con la entrada en funciones del actual consejo de redacción, bajo la dirección de Alexander Maz Machado.

Desde hace algún tiempo, la revista ha ido acumulando un retraso considerable por lo que en los últimos años se ha venido realizando un esfuerzo importante para recuperar la periodicidad comprometida. En la actualidad el retraso existente es de dos números y se prevé que en el presente año se consiga la puesta al día.

En la nueva etapa que ahora comienza, la estructura de la revista constará de las siguientes secciones:

- Investigación en Educación Matemática.
- Experiencias en el aula.
- Ideas para el aula.
- Resolución de problemas.
- Información sobre eventos.
- Reseñas bibliográficas.

4. ESTUDIO CIENCIOMÉTRICO Y TEMÁTICO DE LA REVISTA EPSILON

Con el objetivo de analizar la contribución de *Epsilon* a la investigación en Educación Matemática en nuestro país en los últimos años, el consejo de redacción de la revista ha llevado a cabo un completo análisis cienciométrico de la misma en los últimos diez años. En este estudio se ha realizado un análisis diacrónico de los artículos científicos publicados en el periodo 2000-2009. Dicho análisis se ha abordado desde una doble perspectiva bibliométrica y temática.

En el análisis bibliométrico se han estudiado un total de 27 variables y diversos indicadores de producción, de colaboración y de citación, si bien en este trabajo se muestra solo un resumen. Para el análisis temático de los documentos se han utilizado las 16 variables definidas en la *Mathematics Education Subject Clasification (MESC)* para la catalogación en la base de datos MathEduc, ya que las categorías establecidas en dicho sistema son ampliamente aceptadas por la comunidad de investigadores en Educación Matemática y han sido utilizadas en estudios anteriores, lo que nos ha permitido realizar ciertos análisis comparativos. A través de nuestro análisis se ha podido comprobar el interés de los investigadores por un variado y completo conjunto de tópicos que responde a la problemática actual de la Educación Matemática.

4.1. Planteamiento del problema. Objetivos del estudio e hipótesis de trabajo

El objetivo general de esta investigación es analizar longitudinalmente los artículos científicos publicados en la revista *Epsilon* en el periodo comprendido entre 2000 y 2009, a través de un doble estudio bibliométrico y temático.

Para ello nos proponemos los siguientes objetivos específicos:

1. Realizar un análisis bibliométrico de la producción de investigación en la revista *Epsilon* a través de los artículos científicos publicados en los años de 1990 a 2009, analizando su evolución y aportando una visión diacrónica de dichos elementos así como de sus patrones y tendencias.
2. Catalogar y analizar temáticamente los documentos de la investigación.
3. Identificar los investigadores y las instituciones con mayor producción del campo disciplinar.

4.2. Diseño

Este estudio es longitudinal, de tipo descriptivo explicativo y en él se utilizan técnicas bibliométricas cuantitativas y cualitativas en concordancia con el análisis bibliométrico. Se ha hecho uso de datos cuantitativos como frecuencias, porcentajes de valores, estadísticos inferenciales con significación estadística y correlacionales e interpretaciones de los mismos.

La recogida de datos se ha realizado a través de la consulta directa de los ejemplares de la revista. En una base de datos de estructura relacional, confeccionada *ad hoc* en OpenOffice Base, se registró un conjunto de campos relacionados con las variables objeto de estudio. Más tarde se programaron una serie de consultas que fueron exportadas a una hoja de cálculo diseñada con el programa Calc, también del paquete OpenOffice, para el tratamiento estadístico de los datos.

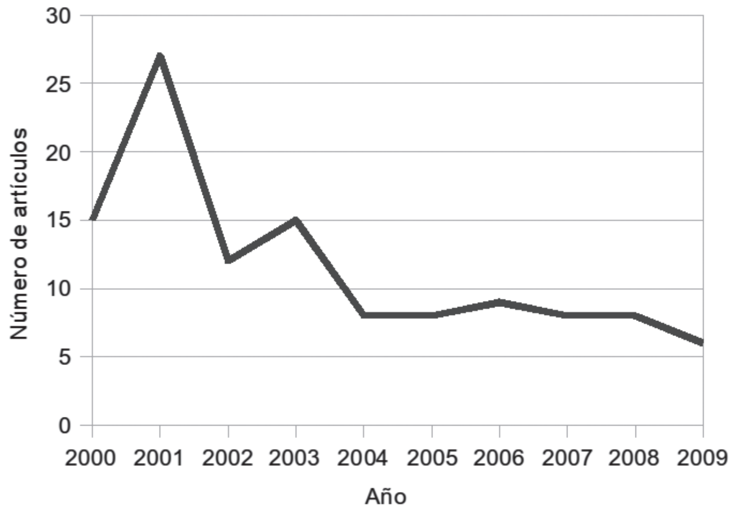
La revista Epsilon publica trabajos de distinta naturaleza (artículos científicos, trabajos de divulgación, experiencias en el aula, reseñas bibliográficas, información sobre actividades de la SAEM THALES, etc.). En este trabajo se han estudiado únicamente los artículos que el consejo de redacción de la revista ha catalogado como artículos científicos, dejando de lado otro tipo de trabajos.

4.3. Resultados del análisis cienciométrico

Regularidad productiva

Se obtiene un promedio de 11,6 artículos al año, que no es muy representativo debido a la alta dispersión (desviación típica = 6,24). Se puede hablar claramente de dos etapas bien diferenciables en cuanto al número de artículos por año: la primera hasta 2003, inclusive, y la segunda desde 2004, año en que se hizo cargo un nuevo equipo de dirección.

FIGURA 1
PRODUCTIVIDAD DIACRÓNICA DE ARTÍCULOS EN LA REVISTA EPSILON



Excluyendo el alto número de artículos publicados en 2001, probablemente como consecuencia de la actividad generada por el Año Mundial de la Matemática, y la ligera bajada de 2009, debida a que el nº 71 estuvo dedicado al XXV Aniversario de la Olimpiadas Matemáticas Thales y en él no se publicaron artículos científicos, sí se podría hablar de regularidad en una y otra etapa. La evidente diferencia entre ambas etapas creemos que se debe al cambio de enfoque y de estructura, ya que en el modelo de revista de los últimos años se mantiene aproximadamente el volumen de la revista, pero se ha ido introduciendo nuevas secciones, lo que ha hecho que se vea reducido el espacio destinado a la publicación de artículos de investigación.

Productividad de los autores y colaboración en la autoría

En los 116 artículos analizados han intervenido un total de 178 autores, de los cuáles 150 (84 %) solo han publicado un artículo (pequeños autores) (Price, 1986). Curiosamente el autor que más artículos ha publicado en el periodo analizado es el italiano Bruno D´Amore (5 artículos), seguido de su compañera Martha Fandiño, Félix Martínez de la Rosa, José M. Pacheco y Ana Rodríguez Chamizo, que publicaron 3 artículos.

Al analizar el número de autores que firman cada artículo, se observa que predominan los trabajos individuales (48,28 %), mientras que se obtiene un índice de colaboración o coautoría (I.C. = Nº de firmas / Nº de artículos) igual a 2,06, prácticamente igual al índice de dos firmas por trabajo que Bordons y Gómez (1997) establecen para las Ciencias Sociales en España.

TABLA 3
NÚMERO DE AUTORES POR ARTÍCULO PUBLICADO EN LA REVISTA EPSILON

Nº DE FIRMAS	FRECUENCIA	PORCENTAJE
1	56	48 %
2	37	31 %
3	17	15 %
4	2	2 %
5	2	2 %
6	1	1 %
7	0	0 %
8	0	0 %
9	1	1 %

Con idea de profundizar un poco más en las redes de colaboración entre autores se construyó la matriz de coautoría y se aplicó el programa Pajek (Batagelj y Mrvra, 2007). La representación gráfica obtenida inicialmente mediante el algoritmo de Kamada Kawai resultó extensa y compleja para poderla presentar en el formato de este documento; sin embargo, a la vista de ella, resulta evidente que no se puede hablar de una sola red continua, sino que hay un elevado número de nodos aislados, síntoma de un predominio de trabajos individuales o de colaboraciones esporádicas con pocos contactos de colaboración.

Para poder interpretar mejor las relaciones de interdependencia entre los nodos de la red se procedió a una serie de reducciones en las que se fueron depurando progresivamente los nodos aislados y las redes más pequeñas, hasta que se pudo identificar las cuatro redes de colaboración algo más significativas (Fig. 2).

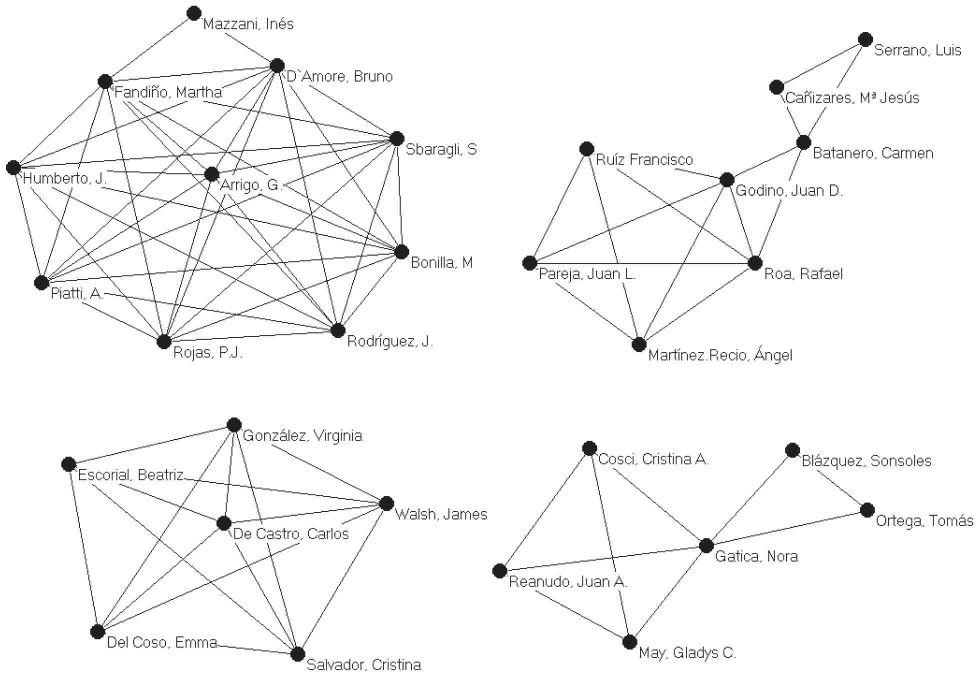
Productividad institucional

En conjunto, los autores firmantes de artículos en el periodo estudiado, provienen de un total de 71 instituciones, de las cuáles 39 son universidades, 22 son centros de enseñanza no universitarios y 10 son otro tipo de centros e instituciones. Si comparamos esta distribución de la presencia institucional en la revista Epsilon con la de otros estudios más amplios sobre revistas españolas de Ciencias Sociales (Bracho, 2010), observamos que existe una proporción notable de autores vinculados a centros de E. Primaria y de E. Secundaria.

Según la clasificación de Price (1986), podemos agrupar estas instituciones productoras en tres grupos:

- Grandes productoras (más de 10 artículos): 3 instituciones.
- Productoras media (entre 2 y 9 artículos): 16 instituciones.
- Productoras ocasionales (tan sólo un artículo): 52 instituciones.

FIGURA 2
PRINCIPALES REDES DE COLABORACIÓN EN AUTORÍA



Casi todas las instituciones más productivas son universidades (Tabla 4) y, entre ellas, destacan las universidades de Cádiz, Sevilla y Granada con 15, 13 y 11 artículos publicados, respectivamente.

Indicadores de citación

El análisis de citas, a pesar de las polémicas sobre él existentes, constituye un elemento esencial de la Cienciometría, ya que permite cuantificar la repercusión de las publicaciones científicas y de la producción de los investigadores, así como establecer las relaciones existentes entre los documentos científicos.

En nuestro análisis, hemos obtenido un total de 1.372 referencias bibliográficas en los 116 artículos publicados en las revistas que se han analizado en el periodo de 2000 a 2009, lo que supone una media de 11,8 referencias por artículo, notablemente inferior a la usual en revistas especializadas en investigación educativa, y una elevada desviación típica de 11,01.

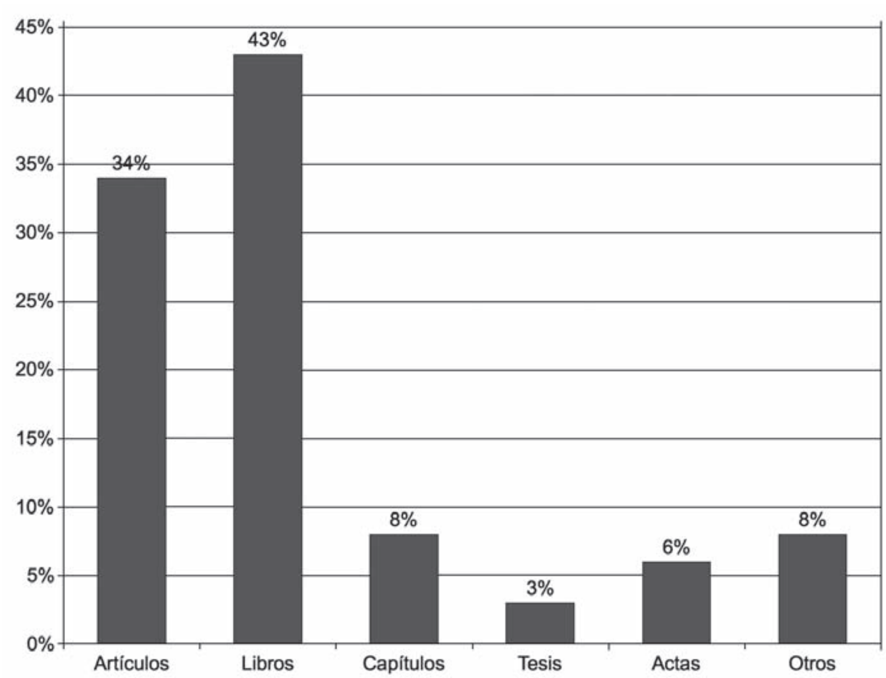
En cuanto a la antigüedad de las citas, se obtiene una media global de 23,41 años, bastante más alta que la que se obtiene para las Ciencias Puras y para las Ciencias Sociales en general, debido a la cadencia con la que aparecen artículos sobre Historia de las Matemáticas, como se verá más adelante, en los que se suele hacer referencia a documentos muy antiguos.

TABLA 4
INSTITUCIONES MÁS PRODUCTIVAS

INSTITUCIÓN	Nº DE ARTÍCULOS
Universidad de Cádiz	15
Universidad de Sevilla	13
Universidad de Granada	11
Universidad de Córdoba	6
Università di Bologna (Italia)	5
Universidad de Jaén	4
Universidad Nacional de Comahue (Argentina)	4
Universidad Politécnica de Valencia	4
CEP de Sevilla	3
CINVESTAV (México)	3
Universidad de Extremadura	3
Universidad de Huelva	3

Atendiendo al tipo de documentos citados se obtuvieron los siguientes resultados:

FIGURA 3
PORCENTAJES DE CITAS A LOS DISTINTOS TIPOS DE DOCUMENTOS



En términos globales, los documentos más citados han resultado ser los libros (43 %), seguidos de los artículos de revistas científicas (34 %). Con porcentajes mas bajos aparecen las citas a capítulos, tesis doctorales, actas de encuentros del profesorado y otros tipos de documentos.

Puesto que las revistas científicas son el cauce normal de difusión de los avances en el ámbito de la investigación, interesa saber cuáles son las tomadas como referencia habitual en el estudio que estamos realizando.

En total se cita a 214 revistas distintas. De ellas, en la tabla 5 se recogen los nombres de las 12 revistas más citadas, así como el número de veces que se cita a cada revista. Se observa que la propia revista *Epsilon* es una de las más citadas, mientras que otras dos revistas sobre Educación Matemática españolas: *SUMA*, la revista de la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas (FESPM) a la que pertenece la SAEM THALES, y *UNO*, de la editorial Graó, también aparecen destacadas. Por otro lado, *Educational Studies in Matematics, Recherches en Didactique des Mathématiques, Journal for Research in Mathematic Education y For the Learning of Mathematics*, las cuatro revistas que se pueden considerar el núcleo que nutre fundamentalmente de información a los investigadores en Educación Matemática (Torralbo, 2002; Vallejo, Fernández-Cano, Torralbo, Maz y Rico, 2008; Bracho, 2010), aparecen igualmente entre las más citadas, las dos primeras en los dos primeros lugares, mientras que las otras tienen una presencia algo más discreta.

TABLA 5
REVISTAS MÁS CITADAS

REVISTA	Nº DE VECES QUE SE CITA
Educational Studies inMathematics	28
Recherches en Didactique des Mathematiques	25
Suma	22
Epsilon	21
American Mathematical Monthly	21
International Journal of matematical education in Science and tecn.	18
Uno	17
Journal of Mathematical Behavior	16
Journal for Research in Mathematics Education	14
La Matemática e la sua Didattica	11
European Journal of Physics	11

Nos ha llamado la atención el hecho de que *Enseñanza de las Ciencias*, una de las publicaciones consolidadas como referente importante entre los investigadores en Educación Matemática en España, solo aparezca 5 veces citada en *Epsilon* en un periodo de diez años.

4.4. Resultados del análisis temático

Tal y como adelantamos en el punto 4, el análisis temático que hemos realizado se ha basado en las variables definidas en la *Mathematics Education Subject Classification (MESC)*, para la base de datos *MathEduc*.

La *MESC* se basa en un sistema de etiquetas constituidas por una letra mayúscula seguida de dos dígitos. La letra hace referencia a la categoría temática general, el primer dígito a la subcategoría dentro de ella en la que enmarcamos el trabajo, y el segundo dígito hace referencia al nivel educativo. Veamos un ejemplo: La letra G se asigna a la Geometría, como veremos enseguida. Dentro de la G hay 9 subcategorías (G10, ..., G90); por ejemplo, la G20 es para los trabajos relacionados con áreas y volúmenes. Pues bien, un trabajo catalogado con la etiqueta G22, trataría sobre áreas y volúmenes en Educación Primaria.

En primer lugar se ha consultado la catalogación de la base de datos *MathEduc* para cada artículo, respetándose el etiquetado cuando existía y, en los casos en los que el artículo no estaba catalogado conceptualmente, hemos realizado nosotros la catalogación. De los 116 artículos publicados en la revista *Epsilon* en el periodo que estudiamos, 69 (59,5 %) aparecían indexados en *MathEduc* y 47 (40,5 %) de ellos estaban sin clasificar conceptualmente y han sido catalogados por nosotros.

En la tabla 6 puede verse la distribución de estas etiquetas por categorías temáticas que se ha obtenido:

TABLA 6
ARTÍCULOS DE EPSILON AGRUPADOS POR CATEGORÍAS

CATEGORÍAS TEMÁTICAS	FRECUENCIA	PORCENTAJE
A: General	21	2,0 %
B: Política Educativa y Sistema Educativo	9	0,9 %
C: Psicología de la Educación Matemática...	12	1,2 %
D: Educación e Instrucción en Matemáticas	10	1,0 %
E: Fundamentos de las Matemáticas	3	0,3 %
F: Aritmética. Teoría de los Números. Cantidades	9	0,9 %
G: Geometría	15	1,4 %
H: Álgebra	12	1,2 %
I: Análisis	15	1,4 %
K: Combinatoria y Teoría de Grafos. Estadística...	21	2,0 %
M: Modelos Matemáticos, Matemáticas Aplicadas	21	2,0 %
N: Matemáticas Numéricas. Matemáticas Discretas...	11	1,1 %
P: Informática	0	0,0 %
Q: Educación Informática	0	0,0 %
R: Aplicaciones de la Informática	0	0,0 %
U: Materiales y Medios Educativos...	4	0,4 %
Total de Etiquetas	163	–

Se comprueba el interés de los investigadores del área por un variado y completo conjunto de tópicos que responde a la problemática actual de la Educación Matemática. Sólo se observan tres variables sin presencia significativa que, como es lógico, son las relacionadas con la informática, campo temático incluido en la catalogación de *MESC*.

Además de la categoría A, que como "cajón de sastre" recoge un considerable número de catalogaciones, destacan los artículos que tratan temas relacionados con la categoría M (Modelos matemáticos y Matemáticas Aplicadas) y la K (Combinatoria y Teoría de Grafos. Estadística), en coherencia con la preocupación actual del profesorado por el enfoque práctico de la enseñanza de las Matemáticas y su orientación hacia el desarrollo de las competencias básicas.

Por otro lado, un 44 % de los trabajos se centran en aspectos fundamentalmente curriculares (categorías F, G, H, I y K) y entre ello, además de los ya comentados sobre Estadística, destacan los artículos que tratan sobre Geometría o Análisis Matemático.

Mayor presencia esperábamos de los trabajos relacionados con "Materiales y Recursos Educativos", ya que en otros análisis más amplios se ha constatado un incremento en esta temática, sobre todo en los trabajos centrados en el uso educativo de los recursos TIC en la clase de Matemáticas. No obstante, creemos que este hecho se debe a la existencia de una sección específica destinada a las TIC que recoge los posibles trabajos que habrían podido incluirse en el apartado de artículos.

Si nos centramos en los temas más concretos (subcategorías temáticas), nos ha llamado la atención el considerable número de trabajos catalogados con la etiqueta A20, destinada a la temática relacionada con las Matemáticas recreativas. Quizá, además de la inquietud del profesorado por encontrar alternativas metodológicas que hagan más atractivas las Matemáticas, exista una motivación particular por el propio disfrute en torno a cuestiones que probablemente no estén destinadas a su aplicación en el aula.

Por último, hemos de comentar que en más de la mitad de los casos no se hace referencia al nivel educativo al que van dirigidos los trabajos (53 %) y, entre los trabajos en los que se indica esta característica, destacan los destinados a la enseñanza universitaria, mientras que los que se centran en la E.S.O. y Bachillerato doblan exactamente a los destinados a E. Infantil y E. Primaria.

5. INTERPRETACIÓN DE LOS RESULTADOS. CONCLUSIONES

En la línea de otros trabajos previos centrados en el análisis de la producción científica en Educación Matemática (Torralbo, 2002; Vallejo, et. al, 2008; Bracho, 2010), la presente investigación se centra en el análisis bibliométrico y temático de los artículos científicos publicados en la revista *Epsilon* en los últimos 10 años con la idea de conocer el mayor número de elementos posibles de dicha revista para poder intervenir con sentido positivo desde el nuevo equipo editorial, si se estima oportuno.

TABLA 7
FRECUENCIAS DE LOS NIVELES EDUCATIVOS EN LA REVISTA EPSILON

NIVEL EDUCATIVO	Nº DE ETIQUETAS
0: General	87
1: Educación infantil	4
2: Educación primaria	9
3: Educación secundaria elemental (ESO)	16
4: Educación secundaria superior (Bachillerato)	10
5: Enseñanza universitaria	30
6: Educción especial	0
7: Formación profesional	0
8: Facultades y escuelas de educación. Formación a distancia	0
9: Formación del profesorado	7
Total de Etiquetas	163

En general, a través del presente estudio se constata un nivel aceptable de concordancia con la producción científica en el ámbito de las Ciencias Sociales en el comportamiento, tanto de los indicadores bibliométricos de producción, colaboración y citación, como con el panorama temático observado en los trabajos a los que hacemos referencia en el campo de la Educación Matemática en España, un área de conocimiento que, en pocos años de existencia, ha desarrollado un alto grado de consolidación en nuestro país.

Sin embargo, no cabe duda que una cuestión preocupante, ya que podría incluso poner en peligro la visibilidad de la revista objeto de estudio en las bases de datos nacionales e internacionales en la que se encuentra catalogada, es el retraso acumulado en las entregas, una cuestión en la que se ha venido trabajando en los últimos años y que se espera resolver a lo largo del presente año.

En lo relativo a la regularidad en la publicación de artículos científicos, junto a trabajos de otra naturaleza, se han diferenciado claramente dos etapas coincidentes con los periodos de responsabilidad de los dos últimos equipos de dirección de la revista. De esta forma, se observa que en el último periodo ha descendido relativamente el número de artículos científicos por número o año, en beneficio de trabajos relacionados con experiencias en el aula, artículos divulgativos, etc., en respuesta probablemente acorde con la demanda de un importante número de socios y suscriptores. En cualquier caso, se observa una presencia considerable de artículos científicos desde hace años, que hace que la revista Epsilon sea un referente, no solo a nivel de innovación en el aula, sino también en el plano de la investigación en Educación Matemática en España, una característica que creemos que vale la pena seguir manteniendo viva.

En cuanto a la presencia de los autores, se cumple lo observado por Lotka (1926) en el sentido de que la mayoría de los autores publican un número reducido de trabajos, mientras que la mayoría de los artículos son publicados por un número muy limitado de investigadores, sin que llegue a tener sentido en este caso la verificación de la denominada "Ley de Lotka", dado que el número de artículos analizados es considerablemente inferior a doscientos. Más concretamente, prácticamente la mitad de los autores registrados publican un solo artículo en los diez años analizados, mientras que a pesar de no existir autores muy productivos, los que publican 3 o más artículos son responsables de la mayor parte de la producción.

A nivel de colaboración en la autoría, se observa una tendencia relativamente individualista en consonancia con lo que es habitual en las Ciencias Sociales. Si acaso, se han detectado algunas pequeñas redes integradas por pocos autores que no pueden llegar a considerarse como los denominados "colegios invisibles". Este hecho podría estar motivado por la escasa costumbre asociacionista en lo relativo a investigación educativa entre el profesorado no universitario, en buena parte responsable y receptor de los contenidos que se publican en la revista Epsilon.

De hecho, en el plano institucional, si bien prevalecen los autores vinculados a universidades, proporcionalmente la presencia de autores procedentes de centros educativos no universitarios es bastante mayor de lo habitual en las revistas científicas, lo que caracteriza a la publicación objeto de estudio como un importante vehículo de comunicación y de información para el profesorado de E. Primaria y E. Secundaria, un hecho que ha de tenerse en cuenta sin desatender al profesorado universitario, que también está claramente presente en la dinámica editorial de la revista.

Respecto a las implicaciones de los resultados obtenidos en el estudio de los indicadores de citación, en el análisis se obtienen resultados bastante esperados, lo cual nos transmite una sensación de normalidad que, en general, es un buen indicador del nivel científico de la revista.

En lo relativo al análisis temático de los documentos, se ha podido comprobar que se aborda un variado conjunto de temáticas que cubre todo el espectro de interés del profesorado de Matemáticas, destacando los trabajos que tratan temas relacionados con aspectos curriculares y, en particular, con cuestiones de naturaleza práctica en coherencia con la tendencia actual de orientar la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas hacia el desarrollo de las competencias básicas.

En definitiva, concluimos que se ha podido constatar tanto la presencia regular y mantenida de artículos científicos en la revista *Epsilon* a los largo de los últimos diez años, como el comportamiento bibliométrico y conceptual de estos documentos de acuerdo con los estándares de las Ciencias Sociales en general y de la Educación Matemática en particular, observándose, eso sí, ciertas características propias a tener en cuenta en la futura línea editorial de la revista.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Batagelj, V. y Mrvar, A. (2007). Pajek software, [Descargado el 12 de febrero de 2009 a partir de http://pajek.imfm.si/doku.php].

Bordon, M. y Gómez, I. (1997). La actividad científica española a través de los indicadores bibliométricos en el periodo 1990-93. *Revista General de Información y Documentación, 7*(2), 69-86.

Bracho, R. (2010). Visibilidad de la investigación en Educación Matemática en España. Análisis cienciometríco y conceptual de revistas científicas (1999-2008). Universidad de Córdoba. Tesis doctoral.

Lotka, A. F. (1926). The frequency distribution of scientific productivity. *Journal of Washington Academy of Science, 16*, 317-323.

Maz, A., Torralbo, M., Vallejo, M., Fernández-Cano, A. y Rico, L. (2009). La educación matemática en la revista enseñanza de las ciencias: 1983-2006. *Enseñanza de las Ciencias, 27*(2), 185-194.

Mendoza, S. y Paravic, T. (2006). Origen, clasificación y desafíos de las Revistas Científicas. *Investigación y Postgrado, 21* (1), 49-75.

Price, J. D. S. (1986). *Little Science, Big Science and beyond.* Nueva York: Columbia University Press.

Rico, L. y Sierra, M. (1994). Educación Matemática en la España del siglo XX. En J. Kilpatrick, L. Rico y M. Sierra, *Educación Matemática e Investigació*n (pp. 92-207). Madrid: Síntesis.

Terrada, M.L. y Peris, R. (1988). *Lecciones de Documentación Médica.* Valencia: Cátedra de documentación médica.

Torralbo, M. (2002). *Análisis cienciométrico, conceptual y metodológico de las tesis doctorales españolas en Educación Matemática.* Cordoba: Servicio de publicaciones de la Universidad de Córdoba.

Vallejo, M., Fernández-Cano, M. Torralbo, M., Maz, A. y Rico, L. (2008). History of Spanish Mathematics Education focusin on PhD Theses. *International Journal os Science and Mathematics Education, 6*(2), 313-327.

Epsilón - *Revista de Educación Matemática* *2010, Vol. 27(2), nº 75, pp. 27-39*

El método de Monte Carlo para el estudio de la primalidad de números

Francisco Javier Martínez López
IES Celia Viñas
Sergio Martínez Puertas, Amalia Gallegos Ruiz y José Ramón Ferrón de Haro
Universidad de Almería

INTRODUCCIÓN HISTÓRICA

El naturalista francés Georges-Louis Leclerc de Buffon (1707-1786) fue el primer científico destacado que intentó discutir públicamente las leyes de la evolución tal como dejó reflejado en su voluminosa obra *"Historia natural"*, en 44 tomos. Dado que todo se estropea con el tiempo, Buffon, quien había tenido el gran acierto de postular el cambio de las especies a lo largo del tiempo, cometió el error de considerar que la evolución era un simple fenómeno degenerativo: los monos serían humanos degenerados, los asnos caballos degenerados y así sucesivamente.

Buffon ocupa un lugar destacado en la historia de las ciencias, más concretamente en la de las Matemáticas, ya que fue el precursor del método de Monte Carlo, con el que los matemáticos usan el azar para conseguir informaciones muy difíciles de obtener mediante otros procedimientos y que se aplican en muy diversos problemas, incluido el de diseño de nuevos y complejos fármacos. ***El método de Monte Carlo fue bautizado así por su clara analogía con los juegos de ruleta de los casinos, el más célebre de los cuales es el de Monte Carlo.***

Otros precursores del método fueron Kurt Otto Friedrichs, Richard Courant o Guillermo Thomson Kelvin.

INTRODUCCIÓN AL CONCEPTO MATEMÁTICO

Bajo el nombre de "Método de Monte Carlo" o "Simulación Monte Carlo" se agrupan una serie de procedimientos que analizan distribuciones de variables aleatorias usando simulación de números aleatorios.

El Método de Monte Carlo da solución a una gran variedad de problemas matemáticos, haciendo experimentos con muestreos estadísticos en una computadora. El método es aplicable a cualquier tipo de problema, ya sea estocástico o determinístico.

Generalmente, en estadística los modelos aleatorios se usan para simular fenómenos que poseen algún componente aleatorio. Pero en el método de Monte Carlo, por otro lado, el objeto de la investigación es el objeto en sí mismo, un suceso aleatorio o pseudo-aleatorio se usa para estudiar el modelo.

A veces, la aplicación del método de Monte Carlo se usa para analizar problemas que no tienen un componente aleatorio explícito; en estos casos, un parámetro determinista del problema se expresa como una distribución aleatoria y se simula dicha distribución.

El uso real de los métodos de Monte Carlo como una herramienta de investigación, viene del trabajo de la bomba atómica, durante la Segunda Guerra Mundial. Este trabajo involucraba la simulación directa de problemas probabilísticos de hidrodinámica, concernientes a la difusión de neutrones aleatorios en material de fusión.

COMPROBACIÓN DE PRIMALIDAD. ESTUDIO TEÓRICO

Los algoritmos de Monte Carlo cometen ocasionalmente un error, pero encuentran la solución correcta con una probabilidad alta sea cual sea el caso considerado. Según Campos (1999), "e*sto es mejor que decir que funciona bien la mayoría de las veces"*, fallando tan sólo de vez en cuando en algunos casos especiales: no debe haber ningún caso en el cual la probabilidad de error sea elevada. Sin embargo, no suele darse ningún aviso cuando el algoritmo comete un error.

Posiblemente el algoritmo más famoso de Monte Carlo sea el que decide si un entero impar dado es o no primo. No se conoce ningún algoritmo para resolver este problema con certeza en un tiempo razonable cuando el número que hay que estudiar no tiene más que unos pocos centenares de dígitos decimales.

La historia de la comprobación probabilista de *primalidad* tiene sus raíces en *Pierre de Fermat*, el padre de la teoría de los números moderna. En 1640 enunció el teorema siguiente, que a veces se denomina teorema menor de Fermat.

Sea n un primo. Entonces,

$$a^{n-1} \bmod n = 1$$

para cualquier entero tal que $1 \leq a \leq n-1$

Podemos ver un ejemplo muy didáctico (Campos, 1999):

"Sean n=7 y a=5. Se tiene que es:

$$a^{n-1} = 5^6 = 15625 = 2232 \times 7 + 1$$

y, por tanto, tenemos que $a^{n-1} \bmod n = 1$".

Considérese ahora la versión contrapositiva del teorema de Fermat (enunciado contra recíproco del mismo teorema):

"Si a y n son enteros tales que $1 \leq a \leq n-1$, y si a^{n-1} mod $n \neq 1$, entonces n no es primo".

Una anécdota sobre Fermat y su teorema

"En su búsqueda de una fórmula que sólo produjese números primos, formuló la hipótesis de que $F_n = 2^{2^n} + 1$ es primo para todo n. Lo comprobó para: $F_0 = 3$, $F_1 = 5$, $F_2 = 17$, $F_3 = 257$, $F_4 = 65537$. Pero no pudo comprobarlo para $F_5 = 4294967297$. Fue Euler, casi cien años después, quien factorizó ese número:

$F_5 = 641 \times 6700417$" (Campos, 1999)

probando así la falsedad de la conjetura de Fermat.

Utilización del pequeño teorema de Fermat para comprobar la primalidad

En el caso de F_5, a Fermat le hubiera bastado con ver que

"$\exists \alpha$: $1 \leq \alpha \leq F_5 - 1$ *tal que* a^{F_5-1} mod $F_5 \neq 1$ $(\alpha=3)$" (Campos, 1999)

Esto sugiere el siguiente algoritmo probabilista para la comprobación de *primalidad*. Suponemos que $n \geq 2$:

```
public static boolean Fermat(long n)
{
    long a=rand.randomInt(1,(n-1));
    if( (a^(n-1) mod n) == 1)
        return true;
    else
        return false;
}[1]
```

Visto lo anterior, sabemos que n es compuesto cuando una llamada a *Fermat(n)* devuelva el valor falso por el teorema menor de Fermat.

1. Implementación en pseudocódigo adaptado a JAVA (obtenido en Campos, 1999).

¿Qué se puede decir, sin embargo, si *Fermat(n)* devuelve el valor verdadero? Para concluir que n es primo, necesitaríamos el recíproco y el contrapositivo del teorema de Fermat. Desafortunadamente, esto no es cierto.

Un entero a tal que $2 \leq a \leq n-2$ y que $a^{n-1} \bmod n = 1$ se denomina *testigo falso de primalidad* para *n,* si, de hecho, n es compuesto. Por esto, la modificación en el algoritmo sería la de elegir a entre 2 y $n-2$, luego el algoritmo sólo fallaría para números no primos cuando se elija un testigo falso de *primalidad*. Pero hay una parte buena y otra mala, la buena es que el número de testigos falsos de *primalidad* son pocos. De hecho, la probabilidad media de error del algoritmo sobre los números impares no primos menores que 1000 es menor que 0.033 y es todavía menor para números mayores que 1000.

La mala noticia es que hay números no primos que admiten muchos falsos testigos de *primalidad*. Un caso convincente es el que plantea un numero de 15 dígitos: en Campos (1999) vemos que "*Fermat(651693055693681) devuelve verdadero con una probabilidad mayor que 99.9965% a pesar de que no es primo"*. Por tanto, puede demostrarse que el algoritmo de Fermat no es p-correcto para ningún $p>0$, luego la "*probabilidad de error no puede disminuirse mediante repeticiones independientes del algoritmo*".

Afortunadamente, una pequeña modificación de la comprobación de Fermat resuelve esta dificultad. "*Sea n un entero impar mayor que 4, y sean s y t enteros tales que* $n-1 = 2^s t$, *donde t es impar. Obsérvense que s > 0 puesto que n-1 es par*" (Campos, 1999).

Por tanto, siempre y cuando n sea impar y $2 \leq a \leq n-2$, una llamada a *pruebaB(a, n)* devuelve el valor verdadero si y solo si $a \in B(n)$.

Veamos cómo evaluar *B(n)*:

```
public static boolean funciónB(long n)
{
        long a=rand.randomInt(2,(n–2));
        return pruebaB(a, n);
}
```

Donde *pruebaB* sería:

```
public static boolean pruebaB(long a,long n)
{
        int s = 0;
        long t = n–1;

        do
        {
```

```
            s++;
            t = t/2;
        }
        while(t%2 != 1);

        long x = expomod(a, t, n);

        if(x==1 || x==n–1)
            return true;
        for(int i=0; i<(s–1); i++)
        {
            x = (x*x)%n;
            if(x == n–1)
                return true;

        }
        return false;
}
```
[2]

Veamos un ejemplo para que nos quede más claro:

Comprobamos que 158 pertenece a *B(289)*. Hacemos $s = 5$ y $t = 9$ porque $n - 1 = 288 = 2^5 \text{ x } 9$. Entonces calculamos

$$x = a^t \bmod n = 158^9 \bmod 289 = 131$$

No concluye aquí la prueba, porque 131 no es 1 ni n–1. A continuación, elevamos x al cuadrado (modulo n) hasta 4 veces (s–1 = 4) para ver si obtenemos 288.

$$\text{x} = a^{2t} \bmod n = 131^2 \bmod 289 = 110$$

$$\text{x} = a^{2t} \bmod n = 110^2 \bmod 289 = 251$$

$$\text{x} = a^{2t} \bmod n = 251^2 \bmod 289 = 288$$

Llegados aquí, nos debemos detener, porque hemos encontrado el resultado que estábamos esperando n-1 y, en conclusión, podemos decir que 158 existe en *B(289)*.

Una extensión del teorema de Fermat demuestra que $a \in B(n)$ para todo $2 \leq a \leq n–2$ cuando n es primo. Se dice que n es un *pseudoprimo* fuerte con base a y que

2. Implementación en pseudocódigo adaptado a JAVA (obtenido en Campos, 1999).

a es un testigo falso fuerte de *primalidad* para *n* siempre que $n > 4$ es un número impar compuesto y $a \in B(n)$.

Por suerte, el número de falsos testigos de *primalidad* en el sentido fuerte es mucho menor que el de falsos testigos de *primalidad*. Podremos concluir con el siguiente teorema (Campos, 1999):

"*Consideremos un número impar arbitrario $n > 4$:*

- ✓ *Si n es primo, entonces* $B(n) = \{a \mid 2 \leq a \leq n-2\}$
- ✓ *Si n es compuesto, entonces* $\mid B(n) \mid \leq (n-9) / 4$"

Por tanto, *pruebaB* devolverá verdadero en las condiciones anteriores y falso con probabilidad de más de ¾ cuando *n* es un entero impar compuesto mayor que 4 y *a* se selecciona aleatoriamente entre 2 y *n*–2. En otras palabras, el algoritmo de Monte Carlo es ¾ correcto para la comprobación de *primalidad*; se conoce con el nombre de comprobación de Miller-Rabin.

```
public static boolean MillRab(long n)
{
        int a = rand.randomInt(2,(n-2));
        return pruebaB(a, n);
}
```
[3]

En el siguiente algoritmo siempre devuelve la respuesta correcta cuando $n > 4$ es primo. Cuando $n > 4$ es un impar compuesto, cada llamada a *MillRab* tiene como mucho una probabilidad de ¼ de llegar a un testigo falso fuerte, devolviendo verdadero de manera errónea.

```
public static String MillerRabin(long n, int s)
{
        int cont =0;
        for(int j=0;j<s;j++)
                if(MillRab(n)==true)
                        cont++;
                if(cont==s)
                        return "N PUEDE SER PRIMO";
                else
                        return "N ES COMPUESTO";
}
```
[4]

3. Implementación en pseudocódigo adaptado a JAVA (obtenido en Campos, 1999).

4. Implementación en pseudocódigo adaptado a JAVA (obtenido en Campos, 1999).

Dado que la única manera de que *MillerRabin* devuelva el valor verdadero en este caso es encontrar aleatoriamente k testigos falsos fuertes seguidos. Por tanto, *MillerRabin* es un algoritmo de Monte Carlo *"(1–4k) correcto"* para la *primalidad*.

El coste de la probabilidad de error ε es

$$“O(\log^3 n \log 1/\varepsilon)”$$

Por consiguiente, deducimos que tendrá menos error cuando el número es muy alto y, por el contrario, tendremos más probabilidades de error cuando el número es muy bajo.

Así pues, resumiendo, podemos decir, que el tiempo total necesario para decidir acerca de la *primalidad* de n con una probabilidad de error acotada por ε *es* de $O(\log^3 n \log 1/\varepsilon)$. Esto es, según Campos (1999), *"enteramente razonable"* en la práctica para números de mil dígitos y una probabilidad de error menor que 10^{-100}.

¿Puede un número ser probablemente primo?

Si se aplica diez veces la comprobación de Miller Rabin a algún entero impar n y se obtiene la respuesta verdadero en las diez ocasiones, se puede deducir que n será primo, salvo por la probabilidad de error dada. Pero esta afirmación carece de sentido pues un número es primo o no lo es, por tanto es mejor decir *"creo que es primo"*.

Amplificación de la ventaja estocástica

Los dos algoritmos de Monte Carlo estudiados hasta el momento tienen una propiedad útil: una de las respuestas posibles siempre es correcta cuando se obtiene. Uno garantiza que un número dado es compuesto, el otro que un producto matricial dado es incorrecto. Decimos que estos algoritmos están *sesgados*. Gracias a esta propiedad, es sencillo reducir arbitrariamente la probabilidad de error repitiendo el algoritmo un número apropiado de veces. La aparición de una sola respuesta "garantizada" basta para producir una certeza; un gran número de respuestas probabilistas idénticas, por otra parte, incrementa la confianza en que se haya obtenido la respuesta correcta. Esto se conoce con el nombre de *amplificación de la ventaja estocástica.*

Supongamos que disponemos de un algoritmo de Monte Carlo *no sesgado* cuya probabilidad de error sea no nula independientemente del caso que haya que resolver, y de la respuesta proporcionada. ¿Sigue siendo posible reducir arbitrariamente la probabilidad de error repitiendo el algoritmo? La respuesta es que depende de la probabilidad de error original. Por sencillez, vamos a concentrarnos en algoritmos que conciernen a la toma de decisiones. Considérese un algoritmo de Monte Carlo del cual lo único que se sabe es que es p-correcto. El primer comentario evidente es que la amplificación de la ventaja estocástica es imposible a no ser que p > ½ porque siempre existe el (inútil) algoritmo ½-correcto:

función *estúpida (x)*

Si *tiramoneda = cara* ***entonces devolver*** *verdadero*

Sino devolver *falso*

cuya "ventaja" estocástica no se puede amplificar. Siempre y cuando p ≥ ½, se define la *ventaja* de un algoritmo de Monte Carlo p-correcto como p – ½. Todo algoritmo de Monte Carlo cuya ventaja sea positiva se puede transformar en otro cuya probabilidad de error sea tan pequeña como deseemos. Comenzaremos por un ejemplo.

Sea MC un algoritmo de Monte Carlo no sesgado ¾-correcto para resolver algún problema de decisión. Considérese el siguiente algoritmo, que llama tres veces a *MC(x)* y devuelve la respuesta más frecuente:

función *MC3(x)*

t ← MC(x); u←MC(x); v←MC(x);

si *t = u* ***o*** *t = v* ***entonces devolver*** *t*

sino devolver *u*

¿Cuál es la probabilidad de error de MC3? Sean R y W las respuestas correcta e incorrecta respectivamente. Sabemos que t, u y v tienen una probabilidad mínima de ¾ de ser R, independientemente unas de otras. Supongamos por sencillez que esta probabilidad es exactamente de ¾, puesto que claramente el algoritmo MC3 sería todavía mejor si la probabilidad de error de MC fuera menor que ¼. Hay ocho resultados posibles para las tres llamadas a MC, cuyas probabilidades se resumen en la tabla siguiente:

t	*u*	*v*	*prob*	*MC3*
R	R	R	27/64	R
R	R	W	9/64	R
R	W	R	9/64	R
R	W	W	3/64	W
W	R	R	9/64	R
W	R	W	3/64	W
W	W	R	3/64	W
W	W	W	1/64	W

Sumamos las probabilidades asociadas a las filas 1, 2, 3 y 5 concluimos que MC3 es correcto con una probabilidad de 27/32, que es mejor que 84%.

Conclusión del estudio teórico

En esta primera parte hemos estado comentando ampliamente la evolución histórica del algoritmo de Monte Carlo que busca la *primalidad,* pasando por Fermat y terminando el Miller-Rabin, con este último "añadido" del MC. Por consiguiente, sólo nos resta mostrar el algoritmo más óptimo que hemos encontrado para la búsqueda de la *primalidad:*

```
public static boolean primoMR(int n, int t)
{
    boolean compuesto = true;
    int m=n-1; int s=0;
    int r,a,b;

    while ((m % 2) == 0)
    {
        s=s+1; m=m/2;// s = veces que 2 divide a n-1
    }

    r=m;
    int i=1;

    while (compuesto && (i<t))
    {
        a=(int)Math.floor(2+(Math.random()*(n-2)));
        //a=aleatorio 2..n-1
    if (mcd(a,n)!=1)
        i=t; //acabamos -> es compuesto

    else
    {
        b=(int)expRapida(a,r,n); // b = a^r mod n
        if ((b!=1) && (b!=-1) )
            for (int j=0; j<=s-1; j++)
                b=(int)expRapida(b,2,n);//b=b^2 mod n
        compuesto = (b!=1) && (b!=-1);
        // sigue sin ser primo
```

```
            }
            i++;
        }

        return !compuesto;
    }
```

ESTUDIO EXPERIMENTAL

Una vez llevada a cabo la implementación de los algoritmos de Miller-Rabin y de Fermat, nos dispusimos a realizar las pruebas con 50 números primos. Comenzamos desde números primos pequeños como el 13, 23 o 29, hasta acabar con números superiores a los 1000 millones. Dichos resultados se muestran en la tabla anexa.

Tras realizar estas pruebas con los 4 algoritmos, sacamos las siguientes conclusiones: Los métodos “primitivos” de Fermat y Miller-Rabin resultan ser bastante ineficientes. Como se refleja en la tabla, el método de Fermat ya comienza a fallar con el número 23. Mientras el de Miller-Rabin sólo da resultados correctos hasta el número 31.

Estos resultados explican porque fue necesaria la mejora de ambos algoritmos. Dicha mejora, explicada en los apartados anteriores, supuso un avance extraordinario en cuanto a eficiencia y veracidad en los resultados sobre la *primalidad* de los números primos. De pasar a ser métodos poco fiables y con gran porcentaje de error, se pasó a ser, especialmente el test de Miller-Rabin, el algoritmo con mayor porcentaje de acierto para números muy grandes.

Las pruebas llevadas a cabo con la implementación de los algoritmos detallada anteriormente nos muestran, que, tanto el método de ‘Fermat bueno’, como el método de ‘Miller-Rabin bueno’ aciertan en el 100% de los casos para números primos menores que 100.000.000.

Una vez sobrepasado ese límite, comienzan a apreciarse diferencias entre los métodos de ‘Fermat bueno’ y ‘Miller-Rabin bueno’. Fermat comienza a perder eficiencia y se dan algunos fallos, dando como resultado números compuestos, aquellos que son primos (véase en la tabla el caso de 100.000.007, 100.000.037, 100.000.039). Por el contrario, Miller-Rabin sigue mostrando que estos números son primos. Tan sólo es capaz de “fallar” cuando el factor de seguridad es igual a 2. No obstante, lo normal para obtener resultados fiables, es que el factor de seguridad sea mayor, siendo en este caso Miller-Rabin muy eficiente.

Para darnos cuenta de cuándo empieza a dar resultados “falsos” el algoritmo de Miller-Rabin tenemos que llegar hasta el número primo 180.000.017. A partir de este número, deja de ser fiable el resultado de dicho algoritmo, siendo indiferente el valor que tome el factor de seguridad.

No obstante, se puede observar como el algoritmo de Miller-Rabin mejoró considerablemente los resultados obtenidos por Fermat, ya que casi dobló el número de primos que es capaz de "acertar" (de 100.000.000 a 180.000.000). También se explica la necesidad de que se llevara a cabo la mejora de los algoritmos primitivos, puesto que éstos no ofrecían resultados fiables.

Llevamos a cabo también la implementación de la *clase validacion* que mostrará los tiempos de ejecución de los 4 algoritmos. Prácticamente, en todos los casos dichos tiempos fueron nulos. Tan sólo cuando llegamos a números cercanos a 1000.000.000 y el factor de seguridad se elevaba hasta 1000, hallamos tiempos de ejecución apreciables. Pero incluso en estos casos, dichos tiempos no llegaban a los 400 milisegundos (330 ms. con el número 1000000447 y factor de seguridad 1000).

CONCLUSIONES

Como conclusión podemos extraer, que Monte Carlo resulta ser un método muy válido para hallar la *primalidad* de números grandes. La probabilidad de error de dicho algoritmo es muy baja, y en base a las pruebas experimentales que hemos realizado, para números de 8 dígitos acierta en el 100% de las ocasiones y únicamente comienza a ser menos fiable con los números primos de 180 millones en adelante.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Allen, M. (2000). *Estructuras de datos en java.* Madrid: Addison Wesley.

Brassard, G. y Bratley, P. (1997). *Fundamentos de Algoritmia.* Madrid: Prentice Hall.

Campos, J. (1999). Algoritmos probabilistas. Archivo web, en http://www.lsi.upc.es/~iea/transpas/8_probabilistas/

De Berg, M., Van Kreveld, M., Overmaks, M. y Schwarzkopf, O. (2000). *Computacional Geometry. Algorithms and Applications.* 2nd edition. New York: Springer-Verlag.

Facultad de Informática. U.P.M. (2003). *Algorítmica.* Madrid: U.P.M.

O´Rourke, J. (1994). *Computacional Geometry in C.* New York: Cambridge University Press.

http://leebyte.iespana.es/leebyte/Programacion/Metodologia/Esq%20Algoritmicos/4_dinamica/tsld034.htm

ANEXO: RESULTADOS OBTENIDOS EN LA FASE EXPERIMENTAL

Número	Factor	M-R bueno	Fermat bueno	Fermat	M-R
13	2	PRIMO	PRIMO	COMPUESTO	PRIMO
23	200	PRIMO	PRIMO	COMPUESTO	PRIMO
29	100	PRIMO	PRIMO	COMPUESTO	PRIMO
31	100	PRIMO	PRIMO	COMPUESTO	**COMPUESTO**
101	100	PRIMO	PRIMO	COMPUESTO	COMPUESTO
10007	700	PRIMO	PRIMO	COMPUESTO	COMPUESTO
100103	10	PRIMO	PRIMO	COMPUESTO	COMPUESTO
1001041	2	PRIMO	PRIMO	COMPUESTO	COMPUESTO
10010411	2	PRIMO	PRIMO	COMPUESTO	COMPUESTO
90010421	2	PRIMO	PRIMO	COMPUESTO	COMPUESTO
90010421	20	PRIMO	PRIMO	COMPUESTO	COMPUESTO
95010439	2	PRIMO	PRIMO	COMPUESTO	COMPUESTO
95010439	20	PRIMO	PRIMO	COMPUESTO	COMPUESTO
96010459	20	PRIMO	PRIMO	COMPUESTO	COMPUESTO
99010433	20	PRIMO	COMPUESTO	COMPUESTO	COMPUESTO
99010433	2	PRIMO	PRIMO	COMPUESTO	COMPUESTO
100000007	10	PRIMO	**COMPUESTO**	COMPUESTO	COMPUESTO
100000007	2	COMPUESTO	PRIMO	COMPUESTO	COMPUESTO
100000007	10	PRIMO	COMPUESTO	COMPUESTO	COMPUESTO
100000037	10	PRIMO	COMPUESTO	COMPUESTO	COMPUESTO
100000037	2	PRIMO	PRIMO	COMPUESTO	COMPUESTO
100000039	2	COMPUESTO	COMPUESTO	COMPUESTO	COMPUESTO
100000039	20	PRIMO	COMPUESTO	COMPUESTO	COMPUESTO

Número	Factor	M-R bueno	Fermat bueno	Fermat	M-R
120000031	10	PRIMO	COMPUESTO	COMPUESTO	COMPUESTO
130000061	1000	PRIMO	COMPUESTO	COMPUESTO	COMPUESTO
140000089	1000	PRIMO	COMPUESTO	COMPUESTO	COMPUESTO
160000103	1000	PRIMO	COMPUESTO	COMPUESTO	COMPUESTO
170000177	1000	PRIMO	COMPUESTO	COMPUESTO	COMPUESTO
180000017	**100**	**COMPUESTO**	COMPUESTO	COMPUESTO	COMPUESTO
199990421	100	COMPUESTO	COMPUESTO	COMPUESTO	COMPUESTO
399990391	100	COMPUESTO	COMPUESTO	COMPUESTO	COMPUESTO
599990383	100	COMPUESTO	COMPUESTO	COMPUESTO	COMPUESTO
799990351	100	COMPUESTO	COMPUESTO	COMPUESTO	COMPUESTO
999990347	100	COMPUESTO	COMPUESTO	COMPUESTO	COMPUESTO
999999323	100	COMPUESTO	COMPUESTO	COMPUESTO	COMPUESTO
999999929	10	COMPUESTO	COMPUESTO	COMPUESTO	COMPUESTO
999999929	1000	COMPUESTO	COMPUESTO	COMPUESTO	COMPUESTO
1000000007	100	COMPUESTO	COMPUESTO	COMPUESTO	COMPUESTO
1000000007	1000	COMPUESTO	COMPUESTO	COMPUESTO	COMPUESTO
1000000447	20	COMPUESTO	COMPUESTO	COMPUESTO	COMPUESTO
1000000447	90	COMPUESTO	COMPUESTO	COMPUESTO	COMPUESTO
1000000447	900	COMPUESTO	COMPUESTO	COMPUESTO	COMPUESTO
1000000447	2000	COMPUESTO	COMPUESTO	COMPUESTO	COMPUESTO

Epsilón - *Revista de Educación Matemática* *2010, Vol. 27(2), nº 75, pp. 41-55*

Concepciones de los estudiantes de profesorado de matemática sobre la demostración

Virginia Montoro
Centro Regional Bariloche
Universidad Nacional del Comahue, Argentina

Resumen: *En el presente trabajo reseñaremos algunos de los resultados de una exploración de las concepciones de los estudiantes de profesorado de Matemática sobre la* demostración matemática. *Como base para esta investigación, se les propuso a los estudiantes, al comienzo de la asignatura Geometría Euclídea del Plano, tareas relacionadas con demostrar y se les entrevistó individualmente mediante preguntas abiertas.*

Se categorizaron las producciones de los estudiantes en cuanto a qué tipo de pruebas *realizaron cada uno de ellos al comienzo del estudio de la Geometría. Se analizaron las respuestas de estos estudiantes a algunas preguntas abiertas de la entrevista poniendo de manifiesto concepciones sobre el* aprendizaje *de la demostración matemática presentes en distintos grupos de estudiantes. Posteriormente se delinearon aspectos de las ideas de los estudiantes sobre* qué significa demostrar *en matemática, y si significa lo mismo en todas las ramas de esta ciencia y si esto es así en otras ciencias. Además de reseñar estos resultados, se establecen relaciones entre ellos y se dan conclusiones generales sobre las concepciones de los estudiantes de profesorado sobre la demostración matemática.*

Palabras clave: *Demostración; Profesores en formación; Matemáticas; Concepciones.*

Abstract: *The present paper reviews the results of an exploration of mathematics student teachers conceptions on mathematical proof. At the beginning of the "Euclidean Geometry of the Plane" course, students were asked to solve proof related problems and interviewed individually using open questions. Students´ solutions to the problems were categorized depending on what kind of proof each student used in this first approach to geometry. On the other hand, their answers to the questions in the interview were analyzed. Results highlighted conceptions on proof learning which are present in different groups of students. We outline different aspects of students´ ideas about what does it mean "to prove" in mathematics, and about whether it means the same in different areas of mathematics and in other sciences. Finally, we establish relationships among the results and we reach general conclusions regarding students´ conceptions on mathematical proof.*

Keywords: *Proof; Student teachers; Mathematics; Conceptions.*

INTRODUCCIÓN

La noción filosófica de *demostración*, desde la tradición platónico-aristotélica y hasta nuestros días, se relaciona con la derivación de un enunciado a partir de otros enunciados, llamados premisas, mediante la aplicación de determinadas leyes lógicas; en esta idea de demostración subyace siempre una búsqueda razonable de la verdad; sin embargo al término *demostración* se lo utiliza en los ámbitos sociales y profesionales más diversos y posee los mas diversos significados.

En matemática la idea de demostración y el verbo demostrar tienen una dimensión precisa y notable. Se diferencia claramente de procedimientos de verificación que se utilizan en otras áreas del saber como las ciencias experimentales, en donde las demostraciones se basan en la evidencia empírica de los hechos; o la economía, que se sustenta en la evidencia estadística de los resultados, o la historia, “demostrada” a través de evidencia de los datos y de los documentos. Al decir de Arsac (1987) la demostración es el procedimiento de validación que caracteriza la matemática respecto de las ciencias experimentales y así ocupa un lugar central desde el punto de vista epistemológico en esta disciplina.

En la literatura especializada aparecen definiciones *esenciales* de lo que se entiende por demostración de un teorema matemático: una sucesión de deducciones lógicas rigurosas desde alguna proposición ya aceptada hasta la que se pretende probar. Sin embargo no podemos soslayar que demostrar en matemática es una tarea cognitivamente compleja, no siempre tan diáfana como la redacción final de una demostración parece indicar; la denominada *demostración final* de un teorema es la culminación de un proceso, la presentación limpia y ordenada de una larga investigación nunca exenta de intuición, pruebas, errores, refinamientos, etc. (Polya,1954; Lakatos, 1976; Schoendfeld, 1992).

Consideramos a la demostración como esencial en el método matemático, y por lo tanto, un componente ineludible en la Educación Matemática y fundamentalmente en la formación de profesores; las pruebas están íntimamente conectadas con la construcción de las ideas matemáticas, demostrar debería ser una actividad tan natural como definir, representar o resolver problemas. Ahora bien, en el proceso de aprendizaje de la matemática, a la argumentación utilizada para *demostrar* una proposición, se la puede concebir bajo distintos aspectos, puede apareces con mayor o menor grado de explicitación y con distintos niveles de rigor; como un medio de autovalidar los conocimientos o como un contenido a aprender.

Respecto de la enseñanza y el aprendizaje de la demostración matemática encontramos los trabajos precursores de Polya (1954), Fischbein (1982), Balacheff (1987), Arsac (1992) y Duval (1991) que estudian situaciones de validación y prácticas argumentativas de los alumnos, las concepciones de verdad y falsedad y la tipología de pruebas que ellos producen. No podemos dejar de considerar los aportes (entre otros) de Dreyfus (1999), Godino y Martínez (1997, 2001), Martínez (2002), Ibáñez, (2002) y Sáenz (2002) que analizan los rasgos característicos del significado de la demostración en distintos contextos institucionales y las distintas dimensiones para este concepto como así también las dificultades con que se encuentran los estudiantes universitarios para producir demostraciones formales.

En el presente trabajo reseñaremos algunos de los resultados de la exploración de las concepciones de los estudiantes de profesorado de Matemática sobre la *demostración* realizada en el marco de dos proyectos de investigación: *La demostración en geometría en la formación de profesores* y *El aprendizaje de la demostración en geometría.* En estos proyectos nos propusimos como objetivo general el estudio del proceso de aprendizaje de la demostración por parte de estudiantes de Profesorado de Matemática en el contexto de problemas de Geometría y como objetivo particular, indagar acerca de las concepciones de estos estudiantes sobre la demostración matemática. Este trabajo tratará particularmente este último objetivo particular.

Como base para esta investigación, se les propuso a estudiantes del Profesorado de Matemática; al comienzo de la asignatura Geometría Euclídea del Plano, tareas relacionadas con *demostrar* y se los entrevistó individualmente mediante preguntas abiertas a fin de profundizar la indagación sobre sus concepciones sobre la demostración matemática.

En primera instancia se realizó una categorización de las producciones de los estudiante frente a las tareas de demostrar propuestas y se obtuvo información sobre *qué tipo de pruebas* realizaron cada uno de ellos al comienzo del estudio de la Geometría, para detalles puede verse Montoro (2005).

Si bien en el lenguaje matemático las palabras prueba y demostración se toman como sinónimos, en este trabajo; a fin de atender a toda la gama de argumentaciones que producen los estudiantes para justificar una aserción, optaremos por usar la palabra "prueba" en un sentido amplio, dado que el término "demostración" en Matemática que hace referencia a lo estrictamente formal. De este modo intentamos cubrir los distintos tipos de argumentaciones, desde los estadios más intuitivos a los estrictamente formales utilizando la palabra "prueba" para designa las distintas formas de realizar una argumentación que puede llevar a una justificación de lo que se está afirmando.

Con el fin de delinear aspectos de las concepciones de los estudiantes sobre *cómo se aprende a demostrar*, se analizaron las respuestas de estos estudiantes a algunas preguntas abiertas de la entrevista y mediante la interpretación del léxico utilizado se puso de manifiesto concepciones sobre el aprendizaje de la demostración matemática presentes en distintos grupos de estudiantes, ver detalles en Montoro (2007).

Es objetivo del presente artículo, además del ya propuesto de reseñar estos resultados, es encontrar relaciones entre ellos y dar conclusiones generales sobre las concepciones de los estudiantes de profesorado sobre la demostración matemática. También en esta línea, se analizaron otras preguntas de la entrevista y se delinearon aspectos de las ideas del los estudiantes sobre qué significa demostrar en matemáticas y si significa lo mismo en todas las ramas de esta ciencia y si esto es así en otras ciencias (Montoro, 2008).

METODOLOGÍA

Participantes

Participaron 13 estudiantes que cursaban la asignatura Geometría Euclídea del Plano del Profesorado de Matemática del Centro Regional Universitario Bariloche, de la Universidad Nacional del Comahue, Rep. Argentina. La asignatura citada corresponde al segundo año de estudios.

Las edades de estos estudiantes oscilaban entre 19 y 33 años, y en su totalidad habían cursado previamente las asignaturas Álgebra I y II; Cálculo I y II y Geometría Analítica; en éstas asignaturas trabajaron numerosas demostraciones y en la primera estudiaron elementos de lógica proposicional y métodos de demostración.

INSTRUMENTOS DE INDAGACIÓN

Se les propuso a los estudiantes; al comienzo de la asignatura Geometría Euclidea del Plano dos tareas para ser resueltas en forma individual por escrito y que se transcriben a continuación:

Tarea 1:

A continuación se presentan tres enunciados referidos a cuadriláteros:

- E1: Si un cuadrilátero es un rectángulo, entonces sus diagonales son congruentes.
- E2: Si las diagonales de un cuadrilátero son congruentes, entonces el cuadrilátero es un rectángulo.
- E3: Si las diagonales de un cuadrilátero no son congruentes, entonces el cuadrilátero no es un rectángulo.

Decir si E1, E2 y E3 son verdaderos o falsos, justificando cada respuesta.

Tarea 2:

Definición: Se llama mediatriz de un segmento a la recta perpendicular al mismo por el punto medio.

A continuación se enuncian tres propiedades relacionadas con la mediatriz de un segmento:

- *P1: Los puntos de la mediatriz de un segmento equidistan de los extremos del mismo.*

- *P2: Las mediatrices de los lados de un triángulo tienen un punto en común.*
- *P3: Todo triángulo se puede inscribir en una circunferencia.*

  – *3.a) Demostrar P1.*
  – *3.b) Justifica la siguiente afirmación: "P2 es verdadera".*
  – *3.c) A partir de P1 y P2 demostrar P3.*

Días más tarde se realizó una entrevista individual a cada uno de los participantes, con la presencia de una investigadora a cargo de la entrevista y otra observadora. En la que se lo consultó sobre el sentido de cada producción y además se le realizó las siguientes preguntas abiertas:

1. *¿Cómo piensas que se aprende a demostrar?*
2. *¿Qué consideras que te sirvió para aprender a demostrar?*
3. *¿Cómo hacías tus primeras demostraciones?*
4. *¿Y las actuales?*
5. *¿Cómo imaginas tus demostraciones después de recibido?*
6. *¿Cómo sabes cuando una demostración es correcta?*
7. *¿Consideras que demostrar es lo mismo en cualquier rama de la matemática?*
8. *¿Consideras que es lo mismo demostrar en matemática que en otras disciplinas?*

Las respuestas fueron orales y en forma de dialogo con la entrevistadora, que solo intervenía si era necesario aclarar algún aspecto; las respuestas fueron grabadas y luego trascriptas en su totalidad

METODOLOGÍA DE ANÁLISIS

Análisis del tipo de pruebas en tareas de demostrar (Tareas 1 y 2)

Para el análisis de las tareas 1 y 2 se realizó, en una primera etapa, una categorización de las producciones de los alumnos en cada uno de los ítems de las tareas, buscando en cada una de ellas indicadores que dieran cuenta del papel que se le asigna al ejemplo, la utilización de procedimientos propios de la matemática, el aporte de argumentos deductivos y de lenguaje simbólico.

Luego a cada producción se le asignó una categoría de *"tipo de prueba"* siguiendo la caracterización de Siñeriz y Ferraris (2005). En esta caracterización se denomina como pruebas *empíricas* aquellas que se sustentan en conocimientos prácticos que se captan a través de los sentidos y/o la acción; procedimientos de validación en los cuales se utilizan los ejemplos como elementos para convencer. Diferenciando según sea el papel del ejemplo en:

a) *Prueba ingenua* que consiste en extraer de la observación de un pequeño número de casos (en ocasiones sólo un caso) la certeza de verdad de una aserción.

b) *Prueba crucial* es aquella en la cual se usa un ejemplo cuidadosamente seleccionado por quien argumenta, tomado como representante de clase y finalmente.

c) *Prueba genérica* es un procedimiento de validación realizado mediante operaciones o transformaciones sobre un ejemplo.

Las pruebas *intelectuales* son aquellas que se componen de argumentaciones que implican propiedades y relaciones entre propiedades y su comunicación está caracterizada por el lenguaje matemático. Distinguiremos la experiencia mental y la deducción formal. En la *experiencia mental* se consideran ejemplos que no son tomados como elementos de convicción sino para ayudar a organizar la justificación o como soporte de la argumentación. Si bien los argumentos pueden ser informales, se sabe que con verificar en uno o varios casos no alcanza; hay conciencia de lo que falta, lo que lleva a producir otra clase de argumentos para convencer y por último en la *deducción formal* la justificación se basa en operaciones mentales sin recurrir necesariamente a la ayuda de ejemplos específicos. Se hacen inferencias en base al conocimiento de propiedades y definiciones, se realizan operaciones sintácticas con los enunciados que permiten trascender al ejemplo. La esencia de la justificación es la transformación de las expresiones simbólicas que se conectan en la argumentación (Siñeriz y Ferraris. 2005).

Con el propósito de evidenciar asociaciones entre las categorías asignadas a las pruebas ofrecidas por los estudiantes, como así también, agrupar a estos según sean similares los tipos de pruebas ofrecidos, aplicamos un Análisis Factorial de Correspondencias Múltiples (AFCM)[1] (Benzécri, 1973), método de análisis multivariado de datos especialmente diseñado para identificar asociaciones entre modos de respuestas de los/las participantes y agrupar a éstos según sus modos de respuesta. El AFCM fue aplicado a la tabla que cruza a los estudiantes y el tipo de prueba que producen éstos para cada ítems de cada una de las tareas 1 y 2, según la categorización citada.

Análisis de las concepciones de los estudiantes sobre el *aprendizaje de la demostración* (Preguntas abiertas 1 a 6)

Con el fin de delinear aspectos de las concepciones de los estudiantes sobre el *aprendizaje* de la demostración matemática, se analizaron las seis primeras preguntas abiertas enunciadas mas arriba. Se confeccionó una base de datos donde

1. Si bien el AFCM es un método especialmente útil para grandes matrices de datos; nada hay en su fundamentación que impida aplicarlo para pocos individuos; es utilizado aquí para evidenciar relaciones entre los modos de respuestas de los estudiantes, que de otra manera hubiesen sido muy difíciles de sacar a la luz y que pueden ser constatadas luego en los datos.

se asoció a cada estudiante sus respuestas literales; como así también su edad, el avance en la carrera y finalmente el tipo de pruebas producidas en las tareas 1 y 2.

Se utilizó una metodología de análisis que permite evidenciar similitudes y diferencias entre las respuestas de los distintos grupos de estudiantes y mediante la interpretación del léxico utilizado poner de manifiesto posibles concepciones presentes en distintos grupos de estudiantes. Se utilizó para ello el análisis lexicográfíco del corpus de respuestas respecto de las formas léxicas utilizadas por los estudiantes; de los segmentos repetidos y luego una análisis factorial de la tabla léxica agregada, que es aquella que cruza los grupos de individuos (según sea el tipo de pruebas que producen) con las formas léxicas utilizadas.

Con el propósito de descubrir ideas diferenciadas presentes en el corpus como así también tipos de respuestas y su relación con los tipos de pruebas que producen los estudiantes; se realizaron 3 análisis lexicográficos. El primer análisis corresponde a las respuestas de las preguntas: 1 y 2 que entendemos indagan sobre *cómo se aprende a demostrar*; el segundo análisis corresponde a las preguntas 3 y 4 que lo hacen sobre *qué cambia al aprender a demostrar* y por último el de las respuestas a las preguntas 5 y 6 que indagan sobre: *cómo es una demostración correcta*. A modo ilustrativo se las relacionó también con la edad y al avance en la carrera de los estudiantes. Para mayor detalle en la aplicación del análisis lexicográfico puede consultarse a Béncue (1991) y Lebart y otros (1995).

Para cada uno de estos análisis se realizó, además, una clasificación de las palabras (o grupo de palabras) utilizadas en las respuestas según estuviesen presentes en las mismas repuestas y su correspondiente asociación con alguno de los grupos de *tipos de pruebas*. Esta clasificación se realizó con el método de *clasificación jerárquica ascendente* (Ward, 1963) previo análisis factorial de correspondencias.

Análisis de las concepciones de los estudiantes sobre qué significa demostrar en matemática y en otras ciencias (Preguntas abiertas 7 y 8)

Con el propósito de delinear aspectos de las concepciones de los estudiantes sobre *qué significa demostrar* en matemática, como así también sobre posibles relaciones de estas concepciones con el tipo de pruebas que producen los estudiantes al comienzo del estudio de la Geometría, se realizó el análisis de las producciones de los participantes para las preguntas 7 y 8 según la siguiente secuencia; en una primera etapa y con el fin de sistematizar los datos primarios, se categorizaron las respuestas según los argumentos esgrimidos por los estudiantes para justificar su respuesta afirmativa o negativa a las preguntas. Luego con el propósito de evidenciar cuan similares o diferentes pueden ser las respuestas de los distintos estudiantes, como así también asociaciones entre las respuestas dadas a estas preguntas y posibles relaciones de estas con las pruebas que estos estudiantes producen aplicamos un Análisis Factorial de Correspondencias Múltiples (AFCM) (Benzécri, 1973), método de análisis multivariado de datos diseñado para identificar asociaciones entre modos de respuestas de los participantes y agrupar a éstos según sus modos de respuesta.

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

Del tipo de pruebas en tareas de *demostrar* (Tareas 1 y 2)

Respecto al tipo de pruebas producidas por los estudiante en las tareas 1 y 2 presentamos una tabla a continuación donde se muestra para cada estudiante, la edad, el avance en la carrera y el tipo de pruebas que produjeron en general (según las asociaciones explicitadas por el AFCM realizado) en las tareas 1 y 2.

La categoría que se le asignó a cada estudiante, responde al tipo de prueba que predomina en sus producciones ya que se observa que estos estudiantes suelen dar distintos tipos de prueba en los distintos ítems de una misma tarea. Entre los alumnos que dan pruebas intelectuales, vemos mayormente un cambio en el item 2b (contraejemplo) es decir que cuando tienen que "mostrar" un ejemplo que no cumple la proposición, tienden a satisfacerse con pruebas de un estatus menor que el formal, sin embargo los alumnos que tienden a dar pruebas experimentales repiten el tipo de prueba con el contraejemplo.

Tabla 1: se muestra para cada estudiante, la edad, el avance en la carrera y el tipo de pruebas que produjeron en general en las tareas 1 y 2.

	Edad	Avance en la carrera	Tipo de prueba
E1	Mas de 25	Avanzado	Experiencia Mental
E2	22-24	Medio	Formales
E3	19-21	Medio	Empíricas Genérica-Crucial
E4	19-21	Medio	Experiencia Mental
E5	Mas de 25	Medio	Empíricas Genérica-Crucial
E6	22-24	Medio	Formales
E7	19-21	Medio	Experiencia Mental
E8	19-21	Menor	Ingenuas
E9	19-21	Medio	Ingenuas
E10	19-21	Medio	Formales
E11	19-21	Medio	Ingenuas- Crucial
E12	19-21	Medio	Ingenuas
E13	22-24	Avanzado	Ingenuas

Concepciones de los estudiantes sobre el *aprendizaje de la demostración.* Las seis primeras preguntas abiertas de la entrevista

Resaltamos los aspectos comunes de las ideas diferenciadas en los tres análisis de las seis primeras preguntas (agrupadas de a 2) como componentes de la idea que poseen estos estudiantes respecto de *aprender a demostrar*; a saber:

- una teoría de demostrar; lógica, métodos de demostración
- de lo que partes; lo que te dan
- las herramientas, el cómo; lo que se usa, la trampita
- la fundamentación, justificar cada paso
- la conclusión, a lo que tienes que llegar

Estos distintos aspectos que se presentan como relevantes para los estudiantes a la hora de aprender a demostrar no están presentes en todas las respuestas, por el contrario vemos que hay grupos de estudiantes que se centran sólo en uno de ellos.

En cuanto a las concepciones de los estudiantes sobre el aprendizaje de la demostración que surgen del análisis de las 6 primeras preguntas de la entrevista y las relaciones de estas concepciones con el tipo de pruebas que producen cada uno de los participantes al comienzo del estudio de la Geometría; encontramos principalmente tres grupos de ideas:

- *se aprende una teoría de demostrar;* como podría ser aprender los métodos de demostración o estudiar lógica; relacionadas con estudiantes de menor edad y menor avance en la carrera y que producen mayormente pruebas ingenuas,
- *se aprende a demostrar entendiendo demostraciones bien presentadas,* consideran que pueden aprender comprendiendo los razonamientos de otros (profesor-libros), es decir suponen que pueden aprender de "ejemplos" de demostraciones y son estudiantes que producen principalmente pruebas de ejemplo genéricos o de ejemplo crucial, cuya principal característica es la de basarse en un ejemplo representativo,
- *a demostrar se aprende demostrando*; consideran que se aprende a demostrar haciendo sus propias demostraciones, idea asociada a los estudiantes de mediana edad, avanzados en la carrera y que producen mayoritariamente pruebas formales.

En cuanto a lo que estos estudiantes consideran como una demostración correcta podemos diferenciar tres grupos de ideas:

- *una buena demostración es la que llega a la conclusión*, sin embargo no nos dice nada de cómo llegar y bajo que condiciones: asociadas mayormente a estudiantes que dan pruebas ingenuas,

- *una demostración es correcta, cuando se tienen la seguridad de que es así*; parecieran confiar en sus propias argumentaciones, es un seguridad subjetiva. Este grupo está asociado a la última etapa de las pruebas empíricas y a la de experiencia mental,
- *la corrección de una demostración se centra en la justificación de cada paso*, asociada a los estudiantes que producen pruebas formales.

Concepciones de los estudiantes sobre qué significa demostrar en matemática y en otras ciencias. Preguntas abiertas 7 y 8

Se pudo establecer una tipología de los estudiantes, en relación a las posibles ideas sobre el significado de la demostración en matemática y sobre la diferencia entre lo que significa demostrar en distintas ramas de la matemática y en otras disciplinas, en tres clases, realizándose una caracterización de cada una de estas clases:

- *En otras disciplinas es aproximado*. Clase conformada por: E2; E3; E4; E5 y E6.

  Podríamos caracterizarla por la respuesta: *en otras disciplinas demostrar es aproximado, no formal; en matemática demostrar es decir porqué y la diferencia de la demostración en distintas ramas de la matemática esta dada por el grado de formalidad.*

- *En otras disciplinas es empírico.* Clase conformada por: E1; E8; E9 y E13.

  Podríamos caracterizarla por la respuesta: *en otras disciplinas demostrar es evidenciar experimentalmente y en las distintas ramas de la matemática, demostrar es distinto en cuanto a la formalidad.*

- *Una demostración es una secuencia*: Clase conformada por: E7, E10, E11 y E12.

  Puede caracterizarse por la respuesta: e*n matemática la demostración es una secuencia y en todas las ramas es lo mismo (una secuencia) y en cualquier disciplina es lo mismo, es una secuencia. La demostración como una secuencia (partir - desarrollar - llegar).*

No hay una asociación clara entre los grupos de estudiantes según sus tipos de respuestas y los tipos de pruebas que producen. Sin embargo es notable que en el primer grupo no hay ningún estudiante de los que producen pruebas ingenuas; estos están repartidos entre los dos últimos grupos.

CONCLUSIONES

Un grupo importante de estos estudiantes ofrecen pruebas empíricas al comenzar el estudio de la geometría, incluso muchas pruebas ingenuas, a pesar de haber cursado ya materias donde se ha visto a la demostración como un contenido específico.

Nos parece relevante resaltar los aspectos que los estudiantes destacan como importantes al momento de aprender a demostrar: aprender una teoría de demostrar; aprender lógica, métodos de demostración (particularmente el método por el absurdo); prestar atención a las hipótesis (lo que conozco, lo que ya sé, lo que me dan); tener en cuenta los axiomas; utilizar gráficos y figuras; aprender a fundamentar, a justificar; aprender a analizar (desarmar), a sintetizar (saber a donde llego) y a formalizar (necesidad de escribir).

En las respuestas de los estudiantes que producen pruebas formales encontramos presentes todos los aspectos citados en el párrafo anterior, es decir que su concepción de la demostración matemática es más rica que en los otros casos; consideran que se aprende a demostrar *demostrando*; haciendo muchas demostraciones; es decir la conciben como un procedimiento; un hacer; una habilidad que se adquiere relacionado con los contenidos y desarrollándola concretamente. Los estudiantes que producen pruebas ingenuas; están asociados principalmente al aspecto de *aprender una teoría de demostrar*; lo que nos hace pensar en cierta desconexión entre la valorización específica que hacen de aprender lógica por ejemplo (quizás sin relación a un contenido especifico) y las pruebas que producen estos estudiantes frente a una tarea de demostrar específica.

Podemos describir un gradiente, en cuanto a lo que consideran los estudiantes respecto a *cómo se aprende a demostrar*; entre la teoría de demostrar hacia la practica de demostrar. Desde los estudiantes que consideran que se aprende a demostrar, aprendiendo una *teoría de demostrar* y que producen pruebas ingenuas –es decir las pruebas más alejadas de una demostración matemática–; luego aquellos que consideran que pueden aprender con demostraciones bien presentadas, entendiendo los razonamientos de otros –profesor, libros–, es decir consideran que pueden aprender de “ejemplos” y que principalmente son estudiantes que producen pruebas genéricas o de ejemplo crucial, cuya principal característica es la de basarse en un ejemplo representativo; por último los estudiantes que consideran que se aprende a demostrar *demostrando;* haciendo sus propias demostraciones, idea que se asocia a los estudiantes de mediana edad, avanzados en la carrera (es decir que hacen la carrera en el tiempo estipulado) y que producen pruebas formales, esto es pruebas que podrían considerarse demostraciones matemáticas.

En cuanto a lo que estos estudiantes consideran como una demostración correcta; un grupo se centra en que una *buena demostración es la que llega a la conclusión*, sin embargo no nos dice nada de cómo llegar y bajo que condiciones, se trata de un grupo de respuestas asociadas mayormente a estudiantes que dan pruebas ingenuas. Otro grupo de estudiantes considera que una demostración es correcta cuando tienen *la seguridad de que es así*; parecieran confiar en sus propias argumentaciones, este grupo está asociado a la última etapa de las pruebas empíricas y a la de experiencia mental; justamente las etapas en que comienzan las argumentaciones deductivas, aunque posiblemente en leguaje coloquial no formalizado. Por otra parte los estudiantes que producen pruebas formales, centran la corrección de una demostración mayormente en la *justificación de cada paso.*

Profundizando en el sentido de si conciben a la demostración matemática como distinta según el dominio de conocimiento dentro de la matemática –en álgebra, en geometría o en análisis matemático– podemos concluir que la mayoría de los estudiantes que consideran que *es lo mismo demostrar en cualquier rama de la matemática,* describen a la demostración matemática como partir de algo (hipótesis, axiomas, lo que te dan) y luego mediante algún proceso (secuencia lógica, hacer algo, desarrollando) llegas a algo (concluir, llegar), es decir una secuencia: partir - desarrollar - llegar. En cambio de los que opinan que demostrar *es distinto en las distintas ramas de la matemática* centran esta diferencia en el grado de simbolismo, formalidad, lo estricto del álgebra versus lo aproximado, con números o dibujos y no formalidad del cálculo y la geometría. Hay un grupo de estudiantes que consideran que demostrar en todas las ramas de la matemática es decir porqué; sin embargo en algunas ramas es más formal (álgebra) que en otras (geometría y cálculo).

En cuanto a lo que consideran estos estudiantes respecto a *si demostrar significa lo mismo en otras disciplinas que en matemática* podemos describir tres grupos de estudiantes bien diferenciados: los que piensan que al igual que en matemática demostrar en cualquier disciplina es una secuencia partir - desarrollar - llegar; otro grupo que piensa que no es lo mismo dado que en otras disciplinas se demuestra *experimentalmente*, con datos y el tercer grupo que considera que en otras disciplinas se demuestra de manera no formal, aproximada.

El grupo de estudiantes que opina que tanto en matemática como en otras disciplinas demostrar es una secuencia lógica; equipara esta secuencia al método de otras disciplinas, esto junto con el dato de que la que la mayoría de ellos producen pruebas ingenuas enfrentados a la tarea de demostrar; nos hace preguntarnos sobre las características que tiene para estos estudiantes esa secuencia en matemática.

Este último hecho nos remite a la conclusión anterior de que en general los estudiantes que brindan pruebas ingenuas consideran que se aprende a demostrar estudiando una teoría de la demostración y que éstas serán correctas cuando se llega a *lo que hay que llegar* sin saber muy bien cómo fue este proceso; se podría pensar en esto como una suerte de *idealización* que realizan en cuanto a las demostraciones; ya que estos mismos estudiantes cuando se enfrentan a la tarea de demostrar, se limitan a "mostrar" un caso donde "evidentemente" es cierta la proposición, sin sentir la necesidad de deducir; de producir un argumento lógico que valide la veracidad de la implicación. Lo que nos lleva a la reflexión de que conocer una "teoría" de la demostración no garantiza un aprendizaje de la demostración y que desarrollar contenidos de lógica en las asignaturas no garantiza éste, sino que debiera ser un procedimiento presente en toda la formación del estudiante de matemática; a fin de que pueda éste interiorizarlo como parte inseparable del método Matemático.

Volviendo a la notable diferenciación que hacen estos estudiantes entre la demostración en álgebra, más formal y rigurosa y la demostración en geometría o cálculo, considerándola en estas ramas de la matemática como aproximada, que se puede hacer con ejemplos y no tan formal, pensamos que estas diferencias tienen que ver con su experiencia en las distintas asignaturas cursadas, lo que nos lleva a reflexionar sobre la coherencia en la formación de los futuros profesores, en cuanto a su formación específica en los procedimientos propios de la matemática. En cuanto a esta desconexión entre las asignaturas que cursan nuestros alumnos, nos lleva a plantearnos la necesidad de evidenciar la postura epistemológica de los distintos formadores de formadores.

Otro aspecto a destacar es que las repuestas de un grupo de estudiantes parecieran estar centradas más en la "tarea" que implica demostrar en general, que con validar conocimientos en relación a contenidos matemáticos específicos (conceptos - propiedades) implicados en las demostraciones. Es notable que en general no aparezca la demostración matemática como un medio para validar o convencerse de la verdad de una proposición, sino como un contenido dentro de las asignaturas. El aprender a demostrar aparece, más bien, relacionado con resolver la tarea de demostrar que se le plantea desde el exterior y no como una necesidad de validar los conocimientos. Es posible que estos aspecto no se hayan manifestado debido a la forma de indagación, ya que las preguntas que les realizamos están dirigidas hacia la demostración en general; pero se nos plantea aquí la posibilidad de buscar medios de indagación al respecto; es decir buscar un modo de sacar a la luz cómo se concibe a la demostración, si como una meta propuesta por las cátedras o un modo de validar una proposición o de convencerse de los conocimientos. Queda planteada esta posibilidad para seguir investigando porque de tratarse de una concepción arraigada, se convertiría en un obstáculo, muy importante para el aprendizaje de la matemática.

A modo de cierre diremos que las concepciones sobre la demostración de los futuros profesores de matemática distan de ser simples y uniformes y es un punto importante a tener en cuenta por los interesados en la formación de los futuros docentes de matemática. Reconocer esta multiplicidad de significados y componentes nos sitúa en mejores condiciones para estudiar su evolución en el aprendizaje de los estudiantes y para colaborar en el aprendizaje de este procedimiento esencial del método matemático. Es nuestra tarea como formadores de profesores de matemática mediar para que nuestros estudiantes posean un marco conceptual sólido en matemática y para ello deberemos prestar especial atención al proceso de aprendizaje de la demostración.

Agradecimientos: La presente investigación se ha realizado en el marco de dos proyectos de investigación avalados y subsidiados por la secretaría de Investigación de la Universidad Nacional del Comahue (Argentina): *La demostración en geometría en la formación de profesores,* PI 04B105 y *El aprendizaje de la demostración en geometría,* PI 04B134.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Alsina, C. (2003). C. D. Q. Como quisiéramos demostrar. *Epsilon,* 57, 345-356.

Arsac, G. (1987). El origen de la demostración: ensayo de epistemología didáctica. *Recherches en didactique des mathematiques, 8*(3), 267-312.

Balacheff, N. (1987). Processus de pruebe et situations de validation. *Educational Studies in Mathematics, 18,* 147-176.

Balacheff, N. (1990). Beyond a psychological approach: the psychology of mathematics education. *Learning of Mathematics, 10*(3), 2-8.

Béncue, M. (1991). *Análisis de datos textuales. Metodos estadísticos y algorímos.* Paris: CISIA.

Benzecri**,** J. P. (1973). *Practique de l'analyse des données*. Tomo 3: Linguistique et lexicologie. París: Dunod.

Carretero, M. (1997). *Introducción a la Psicología cognitiva*. Colección: Psicología Cognitiva y Educación. Buenos Aires: AIQUE.

Dreyfus, T. (1999). Johnny can't prove. *Educational Studies in Mathematics, 38*, 85-109.

Duval, R. (1991). Structure du raisonnement déductif et apprentissage de la demostration. *Educational Studies in Mathematics, 22*, 233-261.

Fischbein, E. (1982). Intuition an Proof. *For the learning of Mathematics, 3*(2), 9-24.

Godino, J. D. y Martínez, A. (1997). Significado de la demostración en educación matemática. *PME XXI,* Vol. 2, pp. 313-320. Lahti: PME.

Godino, J. D. y Martínez, A. (2001). Significados institucionales de la demostración. Implicaciones para la Educación Matemática. *Enseñanza de las Ciencias 19*(3), 405-414.

Ibáñez, M. J. (2002). Cuatro cuestiones en torno al aprendizaje de la demostración. En M. F. Moreno, F. Gil, M. Socas y J. D. Godino (Eds): *Investigación en Educación Matemática. Quinto Simposio de la sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (Pp. 11-26). Almeria: Servicio de Publicaciones de la Universidad de Almería.

Lakatos, I. (1978). *Pruebas y refutaciones*. Madrid: Alianza.

Lebart, L., Morineau, A. y Fénelon, J. (1979). *Traitement de Donnés Statistiques*. París: Dunod.

Lebart, L., Morineau, A. y Piron, M. (1995). *Statistique Exploratoire Multidimensionnelle.* París: Dunod.

Martínez, A. (2002). La demostración en matemática. Una aproximación epistemológica y didáctica. En M. F. Moreno, F. Gil, M. Socas y J. D. Godino (Eds): *Investigación en Educación Matemática. Quinto Simposio de la sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (Pp 29-43). Almeria: Servicio de Publicaciones de la Universidad de Almería.

Montoro, V. y Juan, M. T. (2005). Demostrar... demostrar... ¿ Qué es eso? Modo de indagación sobre las concepciones de estudiantes de profesorado acerca de la demostración en geometría. *Memorias del VII Simposio de Educación Matemática Chivilcoy*.

Montoro, V. (2005). Explorando la producción de los estudiantes de profesorado en cuanto a la demostración en geometría euclídea. *Resumen en Actas* XXVIII Salta: REM-UMA.

Montoro, V. (2007). Concepciones de estudiantes de profesorado acerca del aprendizaje de la demostración. *Revista Electrónica de Investigación en Educación en Ciencias, 2*(1), 101-121.

Polya, G. (1966). *Matemáticas y razonamiento plausible*. Madrid: Tecnos.

Sáenz, C. (2002). Sobre conjeturas y demostraciones en la enseñanza de las matemáticas. En M. F. Moreno, F. Gil, M. Socas y J. D. Godino (Eds): *Investigación en Educación Matemática. Quinto Simposio de la sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (Pp 47-62). Almeria: Servicio de Publicaciones de la Universidad de Almería.

Schoenfeld, A. H. (1992). Learning to think mathematically: problem solving, metacognition, and sense making in mathematics. En *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning, NTCS (Pp.* 334-370). Berkeley: Macmillan Publishing Company.

Siñeriz, L. y Ferraris, C. (2005). Tipos de prueba: una de las categorías de un Modelo Teórico del proceso de aprendizaje de la demostración en geometría. *Memorias del VII Simposio de Educación Matemática Chivilcoy*, Vol. XII.

Ward, J. (1963). Hierarchical grouping to optimize an objective function. *Journal American Statistic Association, 58*, 236-244.

Epsilón *- Revista de Educación Matemática* ***2010, Vol. 27(2), nº 75, pp. 57-64***

Estalmat: una experiencia con cerillas

Francisco T. Sánchez Cobo
Universidad de Jaén
Ángela Capel Cuevas
I.E.S. Huarte de San Juan

Resumen: *En este trabajo mostramos los resultados de una experiencia llevada a cabo en el campo de la resolución de problemas. Se presentan las diversas estrategias seguidas, planes empleados, así como distintas extensiones de los problemas propuestos. También queremos significar la relevancia de la resolución de problemas dentro del currículo matemático no universitario.*

Palabras clave: *Resolución de problemas; Heurísticos; Matemáticas.*

Abstract: *In this paper we show the results of an experience carried out in the field of problem solving. The variety of strategies and plans we have followed are presented, as well as, different generalizations of the proposed problems. We also want to emphasize the importance of the problems solving within the mathematical curriculum out of the university.*

Keywords: *Problem solving; Heuristic strategies; Mathematics.*

INTRODUCCIÓN

Dentro del abanico de actividades que organiza la Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales se encuentra el proyecto ESTALMAT, cuya idea fue iniciada e impulsada en nuestro país por Miguel de Guzmán. En cada edición se seleccionan cincuenta jóvenes, veinticinco por cada sede, que a partir de una prueba y una entrevista, muestran una destacada aptitud para las Matemáticas. Durante dos años, ellos recibirán una formación especial, principalmente, en nuestra disciplina, plasmada en una serie de cursos. Fruto del trabajo desarrollado en el curso denominado "Pólya y la heurística", comenzó la colaboración con una alumna de ESTALMAT, Ángela Capel, que continua en el tiempo y que, por ahora, ha devenido en el presente trabajo.

Este artículo tiene como objetivo poner de manifiesto variados aspectos en la resolución de problemas. El primero tiene que ver con la elaboración de un plan para resolverlo. El segundo hace referencia a la utilización de estrategias de resolución o heurísticos, que son las herramientas con la que abordaremos el proceso de resolución de los problemas planteados. Otro aspecto es el intentar resolver el problema por diferentes caminos, cuantos más mejor, ya que esto fortalecerá nuestra comprensión del mismo y nos permitirá establecer una tupida red de conexiones, que profundizará nuestro conocimiento sobre él. Una cuestión importante es la búsqueda de procedimientos que generalicen el problema dado, lo cual enriquecerá la situación problemática inicial. Podríamos añadir algunos más pero preferimos irlos mencionando en el texto conforme vayan apareciendo.

LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS

Todos los ciudadanos nos vemos enfrentados en nuestra vida diaria a la resolución de situaciones problemáticas, algunas de las cuales pueden matematizarse. Las Matemáticas pueden verse como un espacio de problemas, en el cual los matemáticos, desde siempre, nos hemos visto incitados a su resolución. Es por ello que, como diría Halmos, la resolución de problemas forma parte del "corazón de las Matemáticas".

Pero, qué entendemos por problema. Un problema es una situación en la que desconocemos, inicialmente, el procedimiento para obtener su solución, si es que la tiene (N.C.T.M., 2003). De ahí que para dos resolutores una misma situación pueda ser o no un verdadero problema.

Las ideas seminales de Pólya sobre resolución de problemas y heurísticos (Pólya, 1965) son básicos en este campo. Él ofrece todo un conjunto de estrategias para el resolutor: hacer una figura o diagrama, casos más sencillos, generalizar, analogía, trabajar marcha atrás, etc. En la década de los ochenta, las investigaciones de Schoenfeld revitalizan este campo, estimulando su introducción en los curricula de Matemáticas no universitarios (Schoenfeld, 1985). Desde entonces la resolución de problemas ocupa un lugar destacado dentro de la enseñanza de nuestra ciencia. Así, la Nacional Council of Teachers of Mathematics recoge dentro de sus Estándares la resolución de problemas, indicando que:

> Los programas de enseñanza de todas las etapas deberían capacitar a todos los estudiantes para:
>
> - Construir nuevos conocimientos a través de la resolución de problemas.
> - Resolver problemas que surjan de las Matemáticas y de otros contextos.
> - Aplicar y adaptar diversas estrategias para resolver problemas.
> - Controlar el proceso de resolución de los problemas matemáticos y reflexionar sobre él." (N.C.T.M., 2003).

De todo lo anterior se deduce que la resolución de problemas se constituye en una parte fundamental en la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas.

Un elemento primordial, en el proceso de resolución, es la elaboración de un plan. Los trabajos de Pólya (Pólya, 1965) y de Mason, Burton y Stacey (Mason, Burton y Stacey, 1988) nos pueden iluminar sobre este particular. Así, por ejemplo, Pólya establecía varias etapas dentro del proyecto para resolver un problema: (i) entender el problema; (ii) configurar un plan; (iii) ejecutar el plan, y, (iv) mirar hacia atrás.

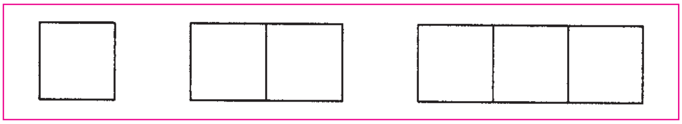
En la actualidad existen muchos concursos y olimpiadas de matemáticas donde la resolución de problemas es su eje central. Es por ello que se publican cierta cantidad de libros sobre problemas de estas competiciones. Merece la pena citar el manual de Tao (Tao, 2006), obra que escribió con quince años, por ser ganador de una medalla de oro de la Olimpiada Matemática Internacional celebrada en 1989, y, principalmente, por haber recibido la medalla Fields el año 2006, además de otros notables premios.

ACTIVIDADES CON CERILLAS

Dentro del curso, ya mencionado, de "Pólya y la heurística" uno de los problemas que se les ofrecía a los alumnos era el siguiente.

Problema 1. ¿Cuántas cerillas se necesitan para construir 14 cuadrados en línea, de forma que el lado de cada cuadrado sea una cerilla, como en la sucesión del dibujo?

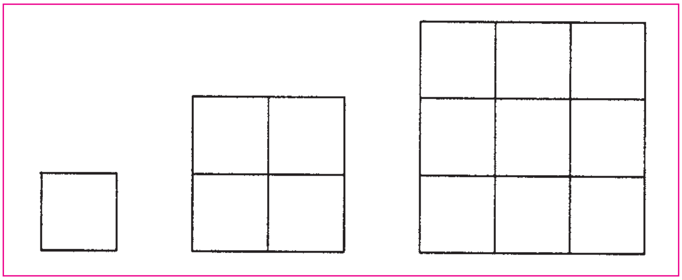
FIGURA 1



Otro problema ofrecido a los alumnos con la misma temática era el siguiente.

Problema 2. ¿Cuántas cerillas se necesitan para construir cuadrados unitarios formando otro cuadrado mayor, como en la siguiente sucesión del dibujo?

FIGURA 2



Ambos problemas comparten puntos de contacto. En las dos situaciones, hay una serie de elementos que nos sirven de guía para elaborar los planes de resolución, entre los cuales podemos citar los siguientes:

- Marco numérico.
- Posición de las cerillas.
- Configuración de cerillas.
- Análisis de los vértices.
- Parecido con otros objetos geométricos.

También se ha considerado procedimientos basados en la especificidad de la situación problemática. Por último, se ha diseñado un plan para resolver el problema 2 a partir del problema 1. Todo lo anterior se puede explicitar en los siguientes planes de resolución:

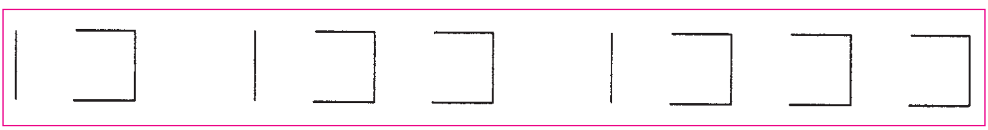
Plan 1. Deducir el término general de una sucesión.

Elaborando la siguiente tabla:

Nº cuadrados	1	2	3	4	…	n
Problema 1	4	7	10	13	…	1+3n
Problema 2	4	12	24	40	…	2n(n+1)

abordaríamos el problema dentro de su marco numérico. Una cuestión interesante es obtener ideas para resolver estos problemas a partir de la solución previamente alcanzada. Notemos que ahora lo importante no es la solución, pues ya la poseemos, sino los métodos de resolución. Es de subrayar que el camino habitual es del plan a la solución, mientras que ahora el proceso es al contrario. Usaremos esta técnica en el marco geométrico, por ejemplo, en el Problema 1:

FIGURA 3



O bien en el Problema 2, donde la expresión obtenida $2n(n+1) = 2(n^2+n)$, puede reinterpretarse de la siguiente manera

$$\text{Nº cerillas} = 2(\text{Nº cuadrados} + \text{Nº cuadrados por lado})$$

Plan 2. Posición de las cerillas.

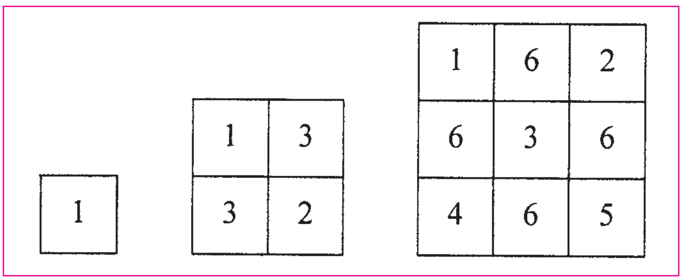
Básicamente, podemos clasificarlas con arreglo a dos criterios: i) cerillas interiores y del borde, y, ii) cerillas horizontales y verticales. Es evidente, que el número total de cerillas de cada figura se obtiene como suma de los dos tipos de cerillas. Bastará hallar los términos generales de las sucesiones correspondientes a cada caso, para resolver el problema general. Aquí descomponemos el problema en dos subproblemas. Es importante reseñar, que la idea de estudiar el número de cerillas verticales y horizontales es la clave que permite resolver la extensión de estos problemas, y que abordaremos en el siguiente parágrafo.

Plan 3. Estudio de las configuraciones de cerillas.

En este caso nos referimos: a) al estudio, exclusivamente, del número de cuadrados; b) al estudio del número de cuadrados, de formaciones con tres cerillas, de formaciones con dos cerillas y de formaciones con una cerilla, según el problema. En el apartado a) deberemos tener en cuenta las cerillas compartidas, para obtener el número de cerillas total. En el segundo apartado, tendremos que encontrar el número de configuraciones de cada tipo y el problema se resuelve elementalmente.

Cuando se trata del segundo problema, el contar el número de cuadrados se vuelve estéticamente atractivo. Veámoslo.

FIGURA 4



Plan 4. A partir de los vértices.

Igual que con las cerillas existen tres tipos de vértices, según el número de cerillas que confluyen a él. Resolveríamos como en el caso anterior.

Plan 5. Analogía con otros objetos matemáticos.

Ambos casos son, desde un punto de vista geométrico, redes o grafos conexos, y, por consiguiente, podemos aplicarle la fórmula, que es una reconversión de la usual,

$$\text{Cerillas} = \text{Arcos} = \text{Vértices} + \text{Cuadrados} - 1.$$

Esta es la forma en la que Ángela la redacta.

Plan 6. Resolver el problema 2 apoyándonos en el problema 1.

Se trata de un planteamiento puramente geométrico: descomposición de figuras. De este modo se consigue:

Cerillas figura problema 2 = n × Cerillas tira correspondiente – n(n–1).

Esta es una idea típica a la hora de resolver un problema, transformarlo en otro que si sabemos solucionar.

Para llevar a cabo estos planes se han utilizado los siguientes heurísticos: 1) hacer una figura o diagrama; 2) hacer una tabla; 3) estudio de casos sencillos; 4) generalizar; 5) analogías, y, 6) análisis de subproblemas. Estas son algunas de las herramientas básicas que deben formar parte del bagaje de todo resolutor, y que le permitirá, en bastantes ocasiones, diseñar caminos para hallar la solución de los problemas a los que se enfrenta.

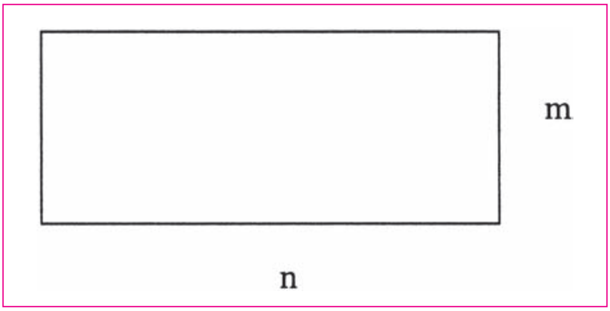
EXTENSIÓN DE LA ACTIVIDAD CON CERILLAS

Una manera, bastante natural, de extender las situaciones problemáticas presentadas, es aumentar la dimensión de los objetos matemáticos. En nuestro caso, sería estudiar las sucesiones formadas por cubos. Compartirían planes y estrategias de resolución con los problemas ya analizados, por lo que no vamos a incidir en este punto.

Otra posibilidad sería cambiar de polígono base para estudiar qué ocurre cuando se desarrollan en una dimensión (tiras), en dos dimensiones o en tres dimensiones. Sin embargo, esta prolongación es de corto recorrido, pues con las restricciones impuestas, únicamente podríamos trabajar con el triángulo equilátero.

La vía más fructífera es generalizar de tal forma que los problemas propuestos sean casos particulares. Por ejemplo, en el plano, tanto para las tiras como para las configuraciones de cuadrados, el rectángulo es la generalización. Sea el rectángulo n × m, donde las unidades de medida en la base y la altura son de igual magnitud.

FIGURA 5



Si deseamos conocer cuantas cerillas contiene esta figura de n × m cuadrados, podemos aplicar diversos de los planes mostrados en el parágrafo anterior. En particular, y por su cómoda aplicación al caso general, utilizaremos el plan 2, con el cálculo de las cerillas horizontales y verticales. Obsérvese que corresponden a cada una de las dimensiones del rectángulo. Es fácil determinar que el número total de cerillas será $n(m+1) + (n+1)m$, donde el primer sumando hace referencia al total de cerillas horizontales y el segundo al de verticales. Nótese que cuando se trata de tiras, como en el problema 1, será $m = 1$, obteniéndose el conocido $3n+1$. En las configuraciones de cuadrados, se tiene $m = n$; por lo tanto, se llega a $2n(n+1)$.

A partir de aquí, se puede generalizar a k dimensiones, siendo, si la longitud en la dimensión j es x_j, con $j = 1, 2, \ldots, k$, la cantidad:

$$\text{Nº cerillas} = x_1(x_2+1)(x_3+1) \ldots (x_k+1) + (x_1+1)\, x_2(x_3+1) \ldots (x_k+1) + \ldots + (x_1+1)(x_2+1) \ldots (x_{k-1}+1)\, x_k.$$

De esta manera, a partir de la expresión anterior podemos conseguir la fórmula de cualquiera de las situaciones evaluadas previamente. Además, se llega, para ciertos casos sencillos, a fórmulas en función del número de cuadrados y de la dimensión en la que crece la sucesión. Por ejemplo, cuando se trata de tiras, se crece en una dimensión, verbigracia, $x_1 = n$, pero las demás dimensiones tienen por medida la unidad. Entonces, se alcanza:

$$\text{Nº cerillas} = n2^{k-1} + (n+1)\, 2^{k-2}(k-1) = 2^{k-2}(k+1)\, n + 2^{k-2}(k-1).$$

CONCLUSIONES

Con esta experiencia queremos mostrar que los problemas, que los alumnos asumen como tal, son catalizadores de la actividad matemática. La aproximación a la mayoría de los conceptos matemáticos que se enseñan en primaria y secundaria, debería realizarse a partir de problemas, convenientemente elegidos. Aunque en la resolución de problemas el énfasis se sitúa tanto en los conceptos matemáticos implicados en el mismo, como en los elementos metamatemáticos inherentes –plan establecido, estrategias aplicadas, etc.–, otros aspectos, no menos interesantes, serían susceptibles de desarrollarse: defensa de nuestras ideas, elaboración de argumentos para justificarlas, revisión de la labor realizada, aumento del dominio del lenguaje, fomentar el trabajo en equipo, etc.

Evidentemente, a pesar de que la resolución de problemas sería conveniente diluirla dentro del currículo matemático, debe tener su propio espacio, en el cual se enseñe a diseñar planes para resolverlos, se expongan las distintas estrategias o heurísticos, se transmita una visión matemática del mundo, etc.

Agradecimientos: El presente trabajo se realiza dentro del Grupo de Investigación "Aproximación y Métodos Numéricos", FQM-178, subvencionado por la Junta de Andalucía.

Referencias bibliográficas

Coriat, M., García, C., Lara, A., Pérez, A., Pérez, R., Sandoval, P. y Vela, M. (1989). *Seis para cuadrar*. Madrid: Ministerio de Educación y Ciencia.

National Council of Teachers of Mathematics (2003). *Principios y Estándares para la Educación Matemática*. Armilla: Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales.

Mason, J., Burton, L. y Stacey, K. (1988). *Pensar matemáticamente*. Barcelona: Labor-MEC.

Pólya, G. (1965). *Cómo plantear y resolver problemas*. México: Trillas.

Schoenfeld, A. H. (1.985). *Mathematical Problem Solving*. Orlando: Academia Press.

Stacey, K. y Groves, S. (1999). *Resolver problemas: Estrategias*. Madrid: Narcea.

Tao, T. (2006). *Solving Mathematical Problems. A Personal Perspective*, 2ª edición, Norfolk: Oxford University Press.

Epsilón *- Revista de Educación Matemática* ***2010, Vol. 27(2), nº 75, pp. 65-81***

Estadística Bidimensional

José Mª Chacón Íñigo
I.E.S. Llanes, Sevilla

En esta nueva entrega de la sección "TIC" se muestran opciones y se abordan programas para trabajar en el aula la enseñanza y el estudio de Estadística bidimensional en el bachillerato. Se van a proponer sencillas actividades que se pueden realizar con software libre, con software comercial y con calculadoras gráficas (sin describir los programas ni comandos e instrucciones para utilizarlos).

PROPUESTAS PARA TRABAJAR CON SOFTWARE LIBRE

Gnumeric

Es una hoja de cálculo muy buena y muy fácil de usar. (Existe versión para Linux y para Windows; en Andalucía viene con las distribuciones de Guadalinex en los Centros Tics).

Dispone de una potente herramienta **"Análisis estadístico"**. Veamos su aplicación en la siguiente actividad.

En la tabla se muestran datos de automóviles de ocasión con respecto al kilometraje y precios de los modelos de cierta marca:

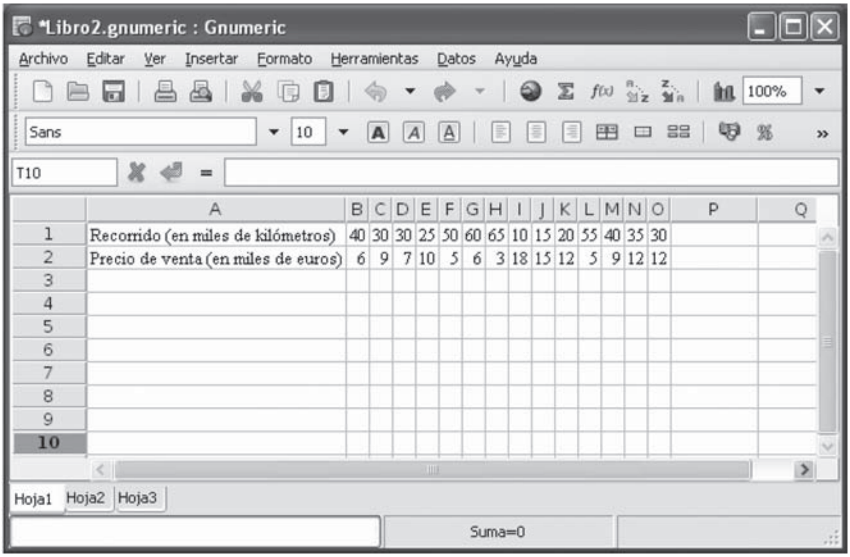
Recorrido (en miles de km.)	40	30	30	25	50	60	65	10	15	20	55	40	35	30
Precio de venta (en miles de euros)	6	9	7	10	5	6	3	18	15	12	5	9	12	12

a) Construye el diagrama de dispersión.

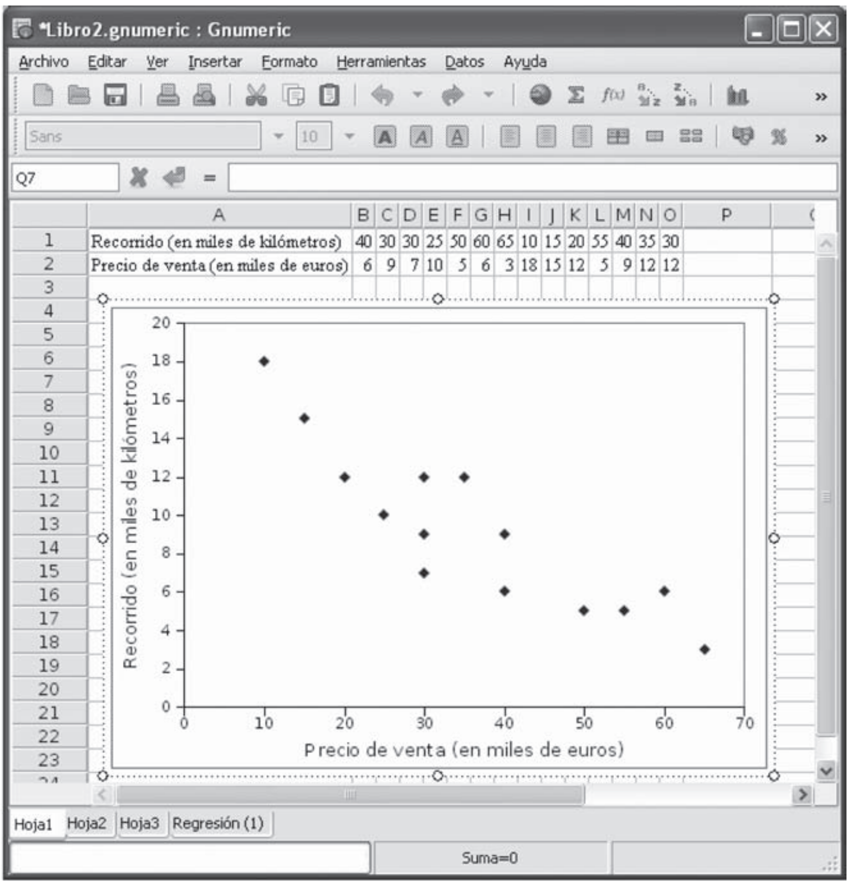
b) Estudia la correlación entre ambas variables.

c) Halla la recta de regresión de Y sobre X.

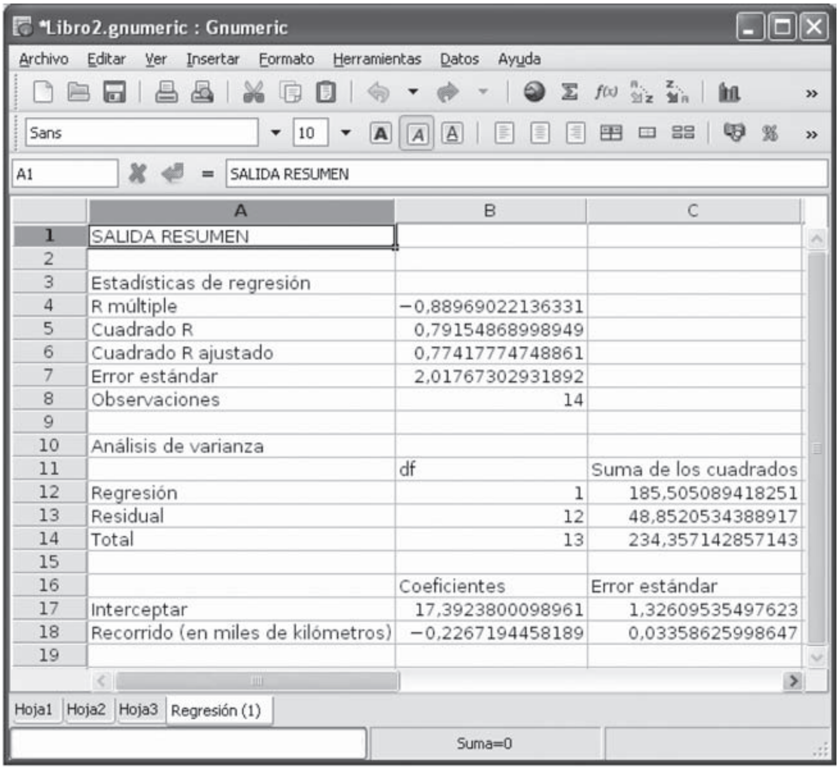
Introducimos los datos:



y construimos el diagrama de dispersión:



Activamos la herramienta **Análisis estadístico → Regresión:**



	A	B	C
1	SALIDA RESUMEN		
2			
3	Estadísticas de regresión		
4	R múltiple	−0,88969022136331	
5	Cuadrado R	0,79154868998949	
6	Cuadrado R ajustado	0,77417774748861	
7	Error estándar	2,01767302931892	
8	Observaciones	14	
9			
10	Análisis de varianza		
11		df	Suma de los cuadrados
12	Regresión	1	185,505089418251
13	Residual	12	48,8520534388917
14	Total	13	234,357142857143
15			
16		Coeficientes	Error estándar
17	Interceptar	17,3923800098961	1,32609535497623
18	Recorrido (en miles de kilómetros)	−0,2267194458189	0,03358625998647
19			

De esta hoja sólo comentaremos los resultados que habitualmente utilizamos en clase:

B4 Coeficiente de correlación lineal

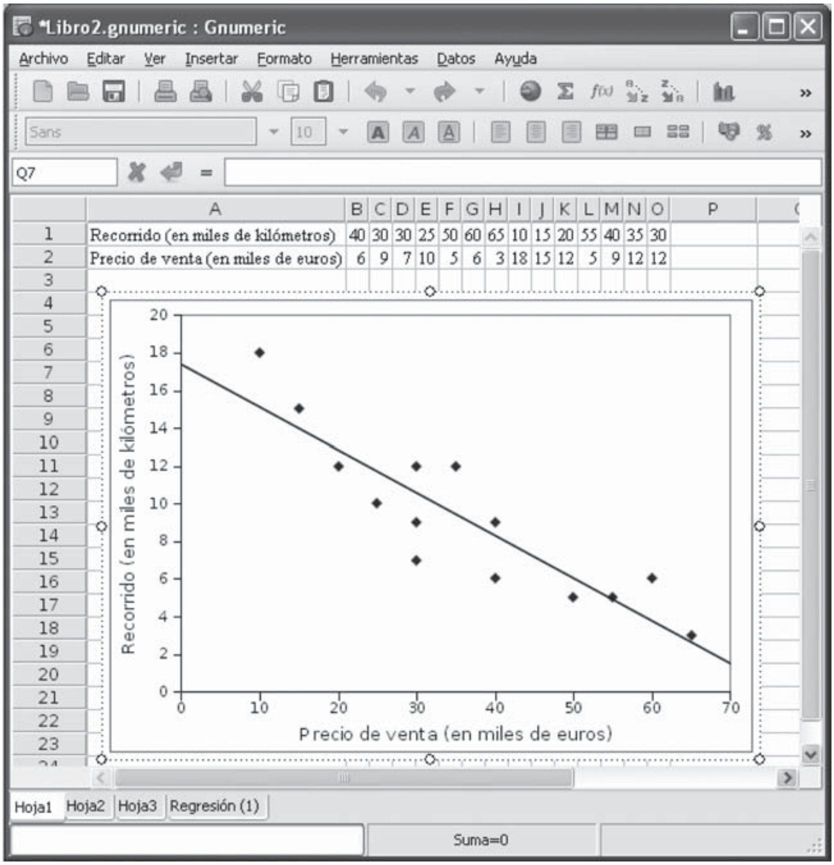
B5 Coeficiente de determinación

B8 Tamaño de la muestra analizada

B17 Ordenada en el origen de la recta de regresión de Y (precio) sobre X (kilómetros)

B18 Pendiente de la recta de regresión (y = –0,227x + 17,392)

Obsérvese que el coeficiente de correlación lineal es cercano a –1, lo que indica una relación fuerte e inversa, como podemos observar insertando la recta de regresión lineal:



WxMaxima

Conocidísimo y estupendo programa libre de cálculo simbólico; sus capacidades estadísticas son menos conocidas pero en la siguiente actividad vamos a observar como con pocas órdenes se pueden obtener muchos datos relativos a estadística bidimensional y gráficos.

Una compañía de seguros sospecha que el número de accidentes está en función de la edad del conductor. Para ello elige 10 personas de cada grupo de edad y contabiliza los accidentes totales del último año. Los datos fueron:

Edad	*20*	*25*	*30*	*35*	*40*	*45*
Nº de Accidentes	*10*	*11*	*9*	*7*	*4*	*5*

Realicemos un estudio bidimensional, observando los comandos y sus significados.

(%i1) A:matrix([20,10], [25,11], [30,9], [35,7], [40,4], [45,5])/* Definimos una matriz con dos columnas (bidimenisonal)*/;

$$(\%o1) \quad \begin{bmatrix} 20 & 10 \\ 25 & 11 \\ 30 & 9 \\ 35 & 7 \\ 40 & 4 \\ 45 & 5 \end{bmatrix}$$

(%i2) load("descriptive")/*Cargar el paquete DESCRIPTIVE que viene en la distribución de WxMaxima*/;

(%i3) range(A)/* Vector de rangos */;

(%o3) [25, 7]

(%i4) numer; true/* Pedimos los cálculos en forma decimal */;

(%o4) true

(%i5) mean(A)/* Vector de medias */;

(%o5) [32.5, 7.666666666666666]

(%i6) var(A)/* Vector de varianzas */;

(%o6) [72.91666666666666, 6.555555555555555]

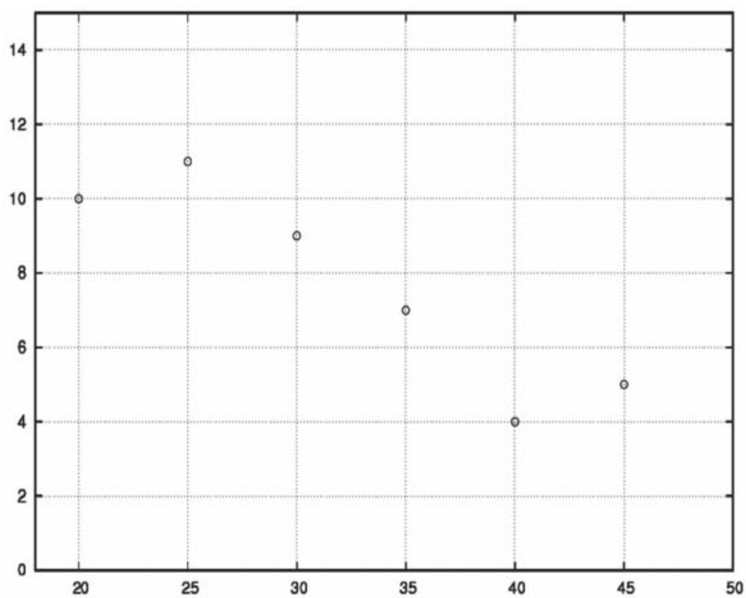
(%i7)cov(A)/* Matriz de covarianzas */;

$$(\%o7) \quad \begin{bmatrix} 72.91666666666652 & -20.0 \\ -20.0 & 6.555555555555557 \end{bmatrix}$$

(%i8) cor(A)/* Matriz de correlaciones */;

$$(\%o8) \quad \begin{bmatrix} 1.0 & -0.91476984760759 \\ -0.91476984760759 & 1.0 \end{bmatrix}$$

(%i9) scatterplot(A,point_type = circle)$

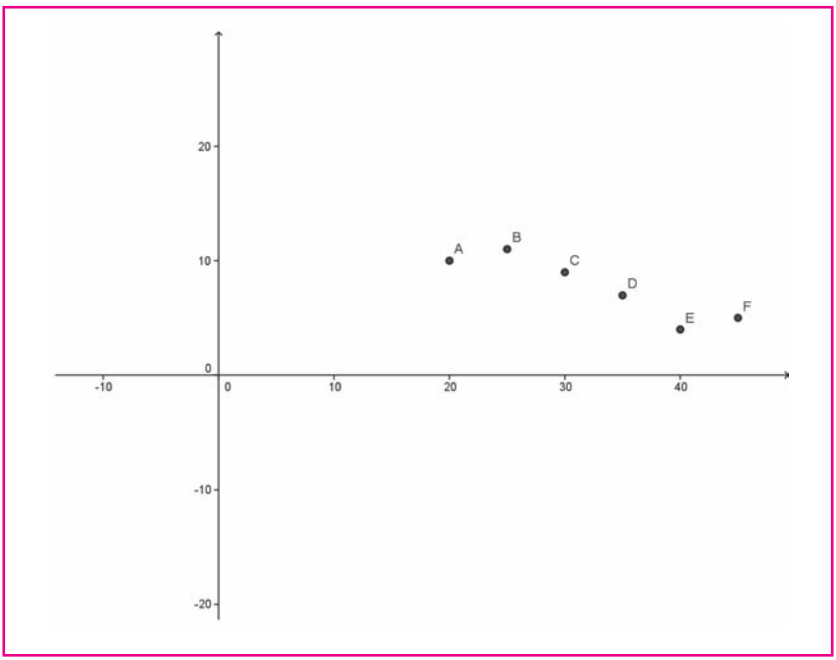


Geogebra

Sorprenderá el uso de este programa para trabajar con estadística bidimensional, ya que es bastante conocido como programa de geometría dinámica con herramientas de algebra; sin embargo desde la versión de desarrollo 3.1 (la próxima estable será la 3.2) incorpora nuevos comandos para hacer ajustes en una nube de puntos. (También se pueden hallar diferentes parámetros estadísticos unidimensionales).

Veamos a resolver el mismo problema que en el apartado anterior:

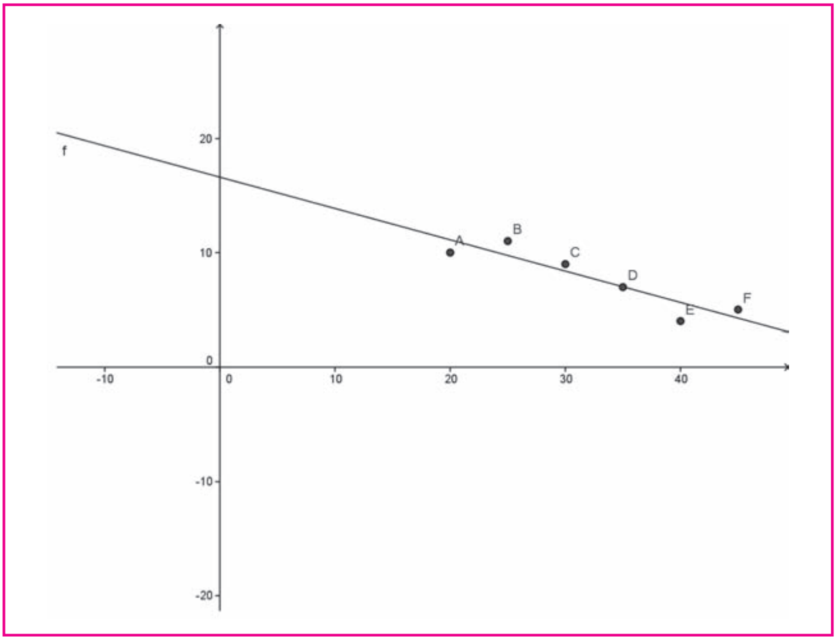
Definimos los puntos y los representamos.

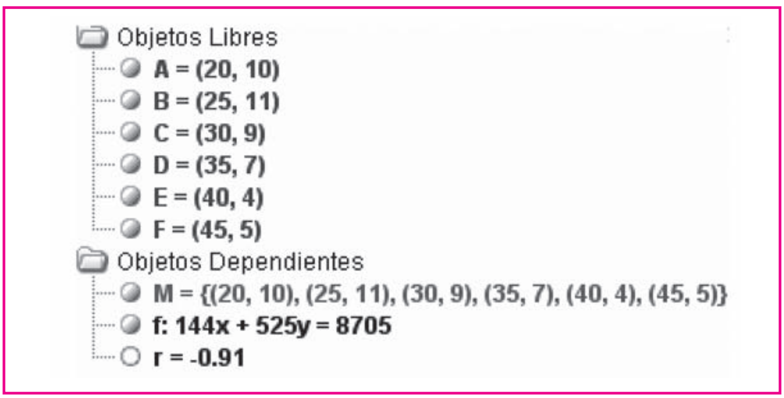


Llamamos M al conjunto de esos puntos: M = {A,B,C,D,E,F}

Para hallar el coeficiente de correlación: r = CPearson[M]

Para hallar la recta de regresión lineal: f = AjusteLineal[M]





A partir de ahí podemos añadir o mover puntos para ver el efecto en el coeficiente de correlación y en la recta.

PROPUESTA PARA TRABAJAR CON SOFTWARE LIBRE Y COMERCIAL

Comparación entre las hojas de cálculo de las suites ofimáticas Microsoft Office (Excel) y OpenOffice (Calc.)

Esta actividad de relación entre dos variables estadísticas muestra las similitudes a la hora de trabajar con las dos hojas de cálculo mencionadas.

Las edades de cinco alumnos de un centro escolar, y sus pesos respectivos se muestran a continuación:

Edad (Años)	3	4,5	6	7,2	8
Peso (Kg.)	17	19	25	33	34

a) Hallar las medias y desviaciones marginales.

b) Calcular el coeficiente de correlación lineal.

c) Hallar la recta de regresión de Y sobre X.

d) ¿Qué peso se espera que tenga un niño de 5 años?

e) Realizar un gráfico que contenga la nube de puntos y la recta de regresión.

Introducimos los datos en las celdas A, la edad, y en la B, el peso.

	A	B	C	D
1	**Edad**	**Peso**		
2	3	17		
3	4,5	19		
4	6	25		
5	7,2	33		
6	8	34		
7				
8			Media Edad	5,74
9			Media Peso	25,6
10			Desv. Típica Edad	1,808424729
11			Desv. Típica Peso	6,97423831
12				
13			Coeficiente de correlación	0,973328992
14			Pendiente recta regresión	3,753669276
15			Peso esperado para cinco años	22,82228474

Las funciones utilizadas en la hoja de cálculo (idénticas en Microsoft Excel y OpenOffice Calc) han sido:

=PROMEDIO(A2:A6)

=PROMEDIO(B2:B6)

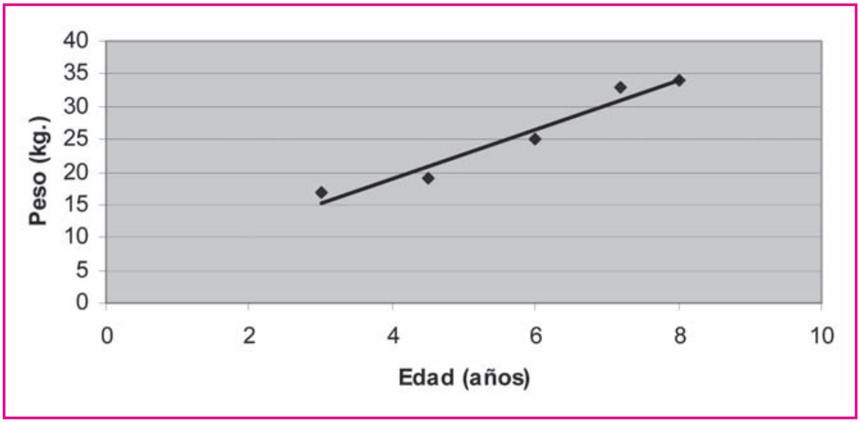
=DESVESTP(A2:A6)

=DESVESTP(B2:B6)

=COEF.DE.CORREL(A2:A6;B2:B6)

=PENDIENTE(B2;B6;A2:A6). La recta de regresión es y–25’6 = 3’75 (x–5’74).

=TENDENCIA(B2:B6,A2:A6,5)



PROPUESTA PARA TRABAJAR CON SOFTWARE COMERCIAL

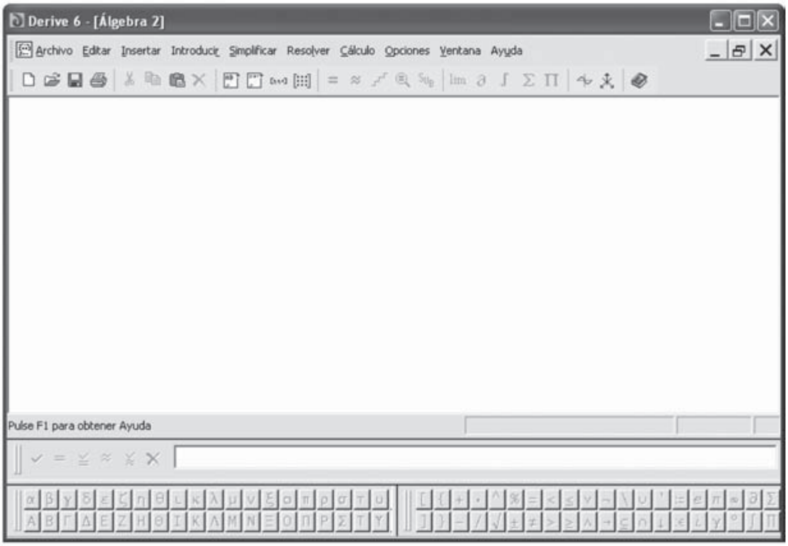
Derive

El clásico programa de cálculo simbólico comercial y no libre (aunque tiene versiones de evaluación temporal) también permite trabajar la Estadística bidimensional.

La siguiente tabla presenta datos correspondientes a la tasa de ocupación en función de la edad en España en el segundo cuatrimestre de 2008, según la Encuesta de Población Activa (EPA) del Instituto Nacional de Estadística. Realizar un diagrama de dispersión y ajustar por un gráfico de regresión lineal, cuadrático y cúbico.

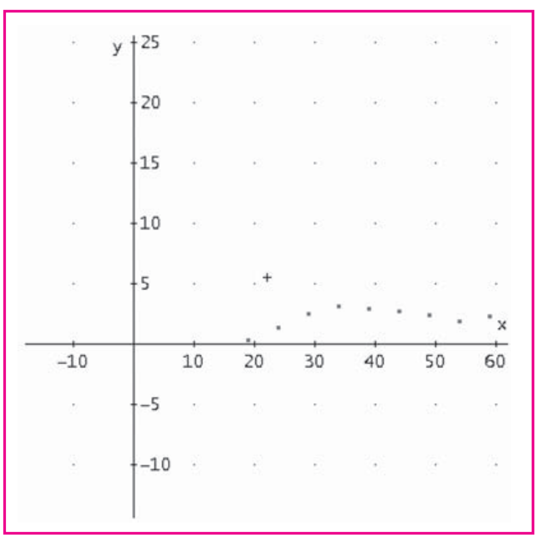
Edad (en años)		*Millones de personas*
19		*0,3*
24		*1,4*
29		*2,5*
34		*3,1*
39		*2,9*
44		*2,7*
49		*2,4*
54		*1,9*
59		*2,3*

Introducimos los datos en forma de matriz o tabla en la siguiente pantalla:



$$\#1: \quad \begin{bmatrix} 19 & 0.3 \\ 24 & 1.4 \\ 29 & 2.5 \\ 34 & 3.1 \\ 39 & 2.9 \\ 44 & 2.7 \\ 49 & 2.4 \\ 54 & 1.9 \\ 59 & 2.3 \end{bmatrix}$$

y los representamos:



Con la función FIT vamos a pedirle un ajuste lineal:

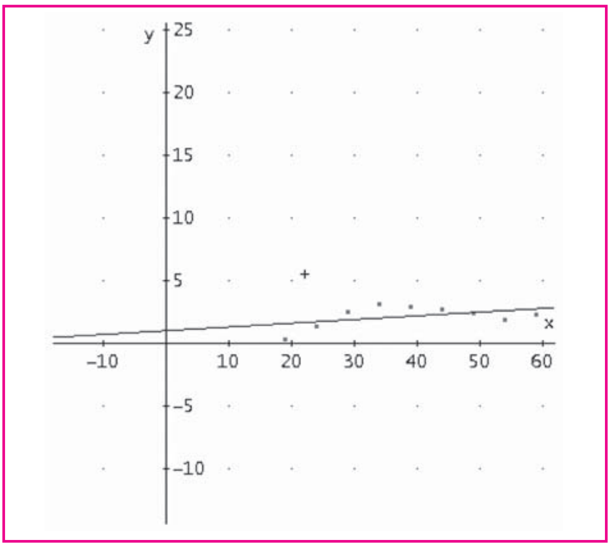
FIT([x,ax+b],#1)

(donde #1 es la etiqueta de la matriz de datos, aunque le podemos poner cualquier nombre)

y simplificando:

$$\#2: \quad \frac{89 \cdot x}{3000} + \frac{3029}{3000}$$

Ahora la representamos sobre el gráfico de dispersión:

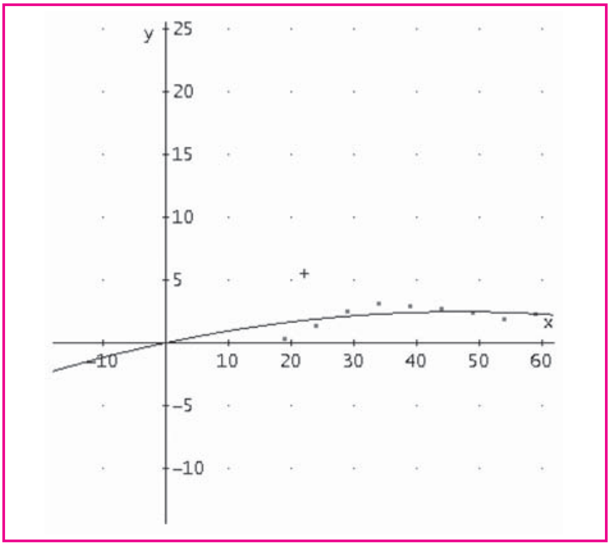


Obsérvese que el ajuste no es muy acertado (de hecho, con este mismo programa se puede hallar el coeficiente de correlación paso a paso y comprobar que es r = 0'48).

Intentemos un ajuste cuadrático con FIT ([x,aˆ2+bx+c],#1)

$$\#5: \quad \frac{973339079 \cdot x}{9228612000} + \frac{10368361 \cdot x^2}{9228612000}$$

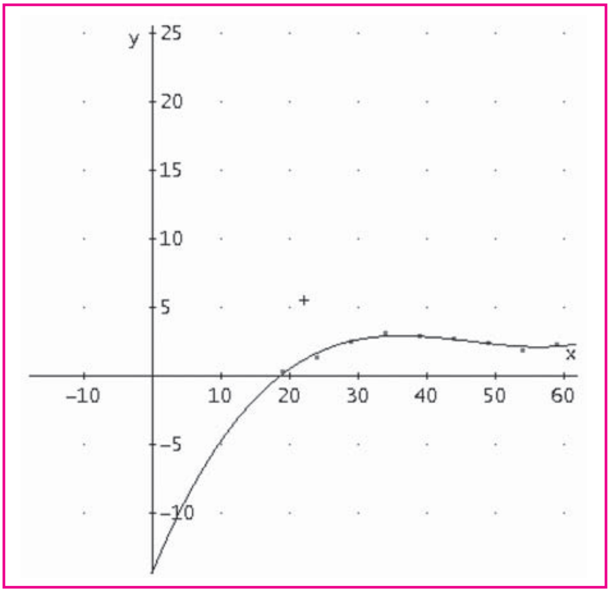
y representamos nuevamente sobre la nube de puntos:



Todavía podemos ajustar mejor:

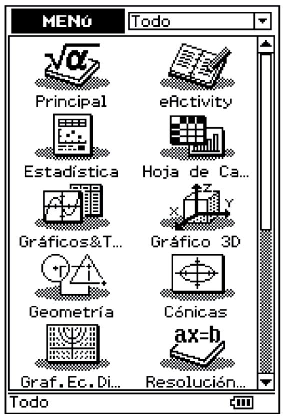
FIT([x,ax^3+bx^2+cx+d],#1)

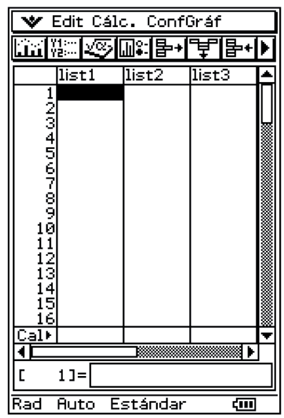
$$\#6: \quad \frac{49\cdot x3}{247500} - \frac{10583\cdot x2}{385000} + \frac{4199473\cdot x}{3465000} - \frac{8266099}{577500}$$



CALCULADORA GRÁFICA

Otro recurso con el que es posible incorporar nuevas herramientas al aula de matemáticas es la calculadora gráfica, ya que dispone también de buenas herramientas para el estudio estadístico bidimensional. Utilizamos la calculadora ClassPad 330-A de Casio.

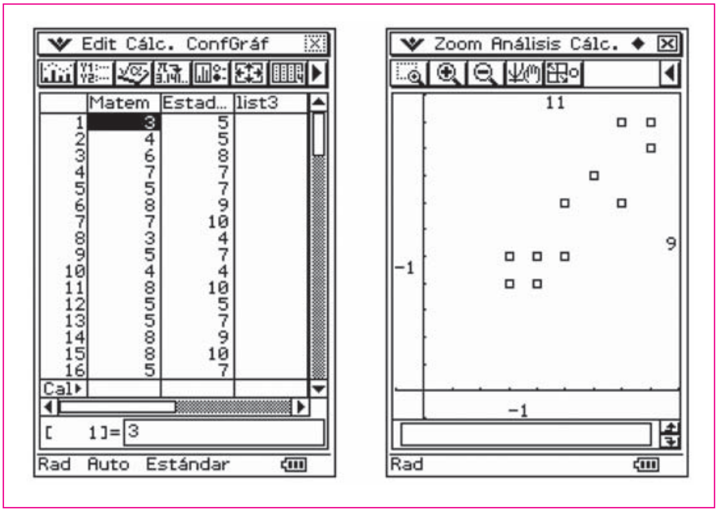




Las calificaciones obtenidas por un grupo de alumnos en las asignaturas de Estadística y Matemáticas han sido:

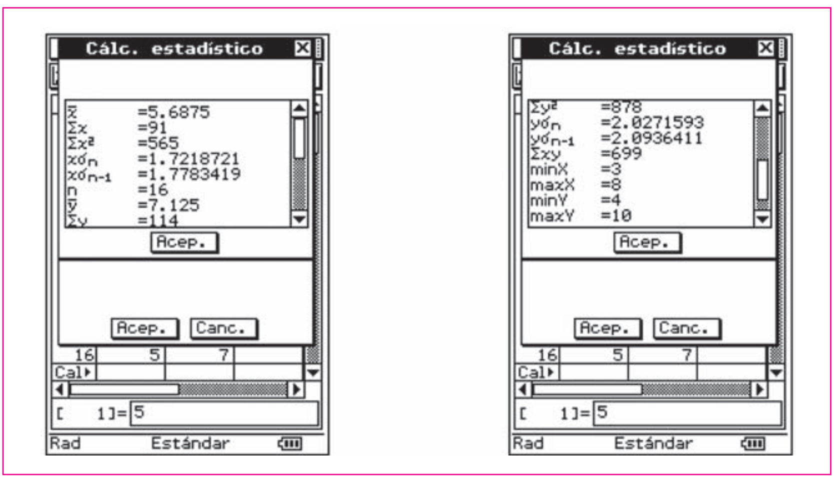
Matemáticas	3	4	6	7	5	8	7	3	5	4	8	5	5	8	8	5
Estadística	5	5	8	7	7	9	10	4	7	4	10	5	7	9	10	7

1. *Construye el diagrama de dispersión.*
2. *Estudia la correlación entre ambas variables.*
3. *Halla la recta de regresión de Y sobre X.*
4. *¿Qué nota se espera que obtenga un alumno en Estadística cuya nota en Matemáticas ha sido 2?*

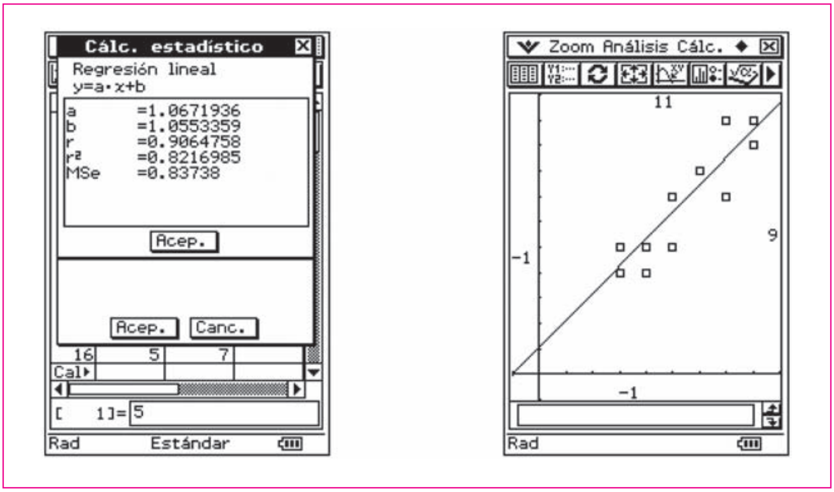


El primer paso para determinar el sentido y el grado de la correlación entre dos variables es dibujar el diagrama de dispersión. En esta actividad la nube es alargada lo que indica que hay correlación lineal, en principio; además es directa y parece que fuerte.

Datos marginales:

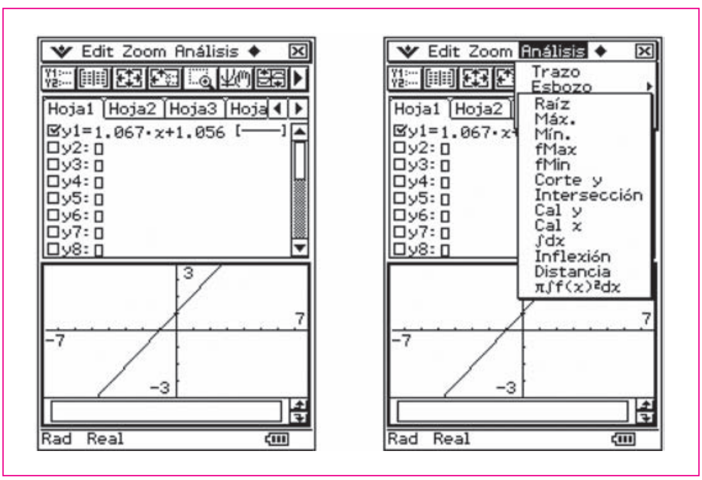


Para sacar el máximo provecho a la correlación vamos a hallar la recta de regresión que es la que mejor se ajusta a la nube de puntos.

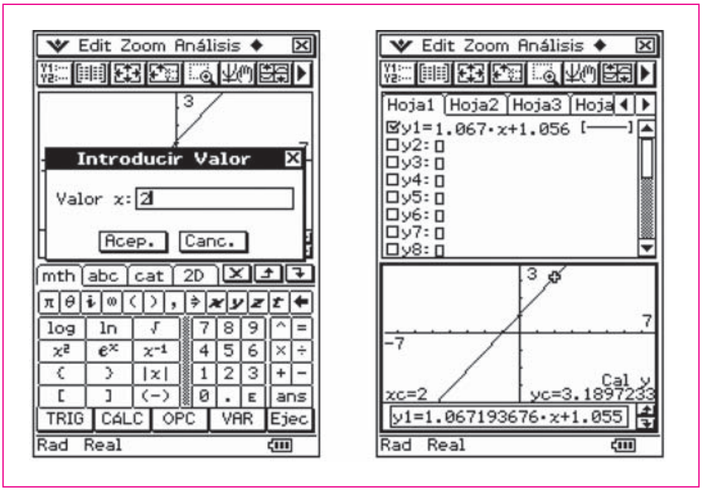


Obsérvese que aparece por primera vez el coeficiente de correlación lineal (al ser cercano a +1 la correlación es fuerte y directa como habíamos aventurado a con la observación del gráfico) y la expresión analítica de la recta.

Para hacer la estimación, en el menú **Gráficos** hallamos el valor esperado de *y* conocido *x*.



Por tanto se espera que obtenga un 3 aproximadamente.



REFERENCIAS

Gnumeric: http://projects.gnome.org/gnumeric/

xMaxima y WxMaxima: http://maxima.sourceforge.net/

Geogebra: http://geogebra.org

OpenOffice Calc: http://es.openoffice.org/

Microsoft Office Excel: http://office.microsoft.com/

Derive 6: versión de prueba que se puede buscar en la página http://education.ti.com/

Calculadoras ClassPad: http://www.aulacasio.com

Epsilón - *Revista de Educación Matemática* *2010, Vol. 27(2), nº 75, pp. 83-100*

Taller de mosaicos con calculadora gráfica

José Manuel Fernández Rodríguez
I.E.S. El Almijar. Cómpeta (Málaga)
Encarnación López Fernández
I.E.S. Vega del Mar. San Pedro de Alcántara (Málaga)

INTRODUCCIÓN

¿Quién no ha sucumbido alguna vez ante la belleza de los mosaicos de cualquiera de nuestros monumentos árabes? Abandonados en cuerpo y mente, contemplando cómo se van repitiendo las figuras y los colores sólo somos capaces de asomarnos al pozo de sabiduría que desde la formación matemática de hoy en día es necesaria para comprender esa realidad y los conocimientos que de ella se derivan.

Granadinos de nacimiento y matemáticos de formación, estamos teniendo una aproximación tardía (gracias a la docencia) a la comprensión de esta realidad.

Este taller surge como fruto de una inquietud, la de trasladar a nuestro alumnado los conceptos relativos a los movimientos en el plano a través de la realidad y de la historia de nuestra cultura.

La herramienta utilizada ha sido la calculadora gráfica ClassPad 300, en particular su módulo de geometría, pues permite realizar construcciones geométricas de una forma fácil e intuitiva, una vez conocida la ventana con sus menús y paletas de iconos. Se ha preferido utilizar, siempre que ha sido posible, las paletas de iconos de la barra de herramientas en lugar de los menús para favorecer el uso de las instrucciones necesarias.

Vamos a construir dos mosaicos y vamos a analizarlos desde la perspectiva de la teoría de grupos. No se trata de realizar un taller de grupos cristalográficos planos sino de utilizar la información que éstos nos aportan para la construcción en sí.

LA PAJARITA

Primeras construcciones

Para construir este mosaico se ha partido de un triangulo equilátero y se ha seguido el siguiente proceso:

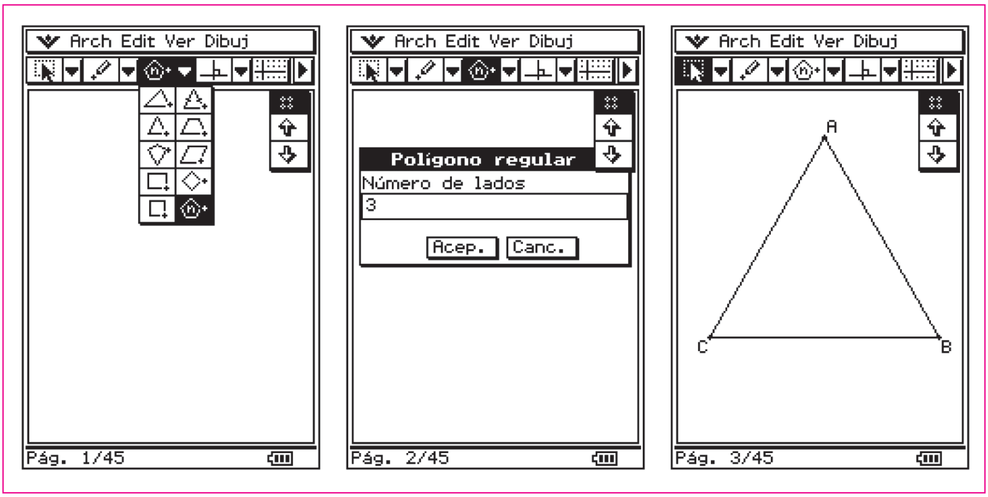
1. Construcción de un polígono regular de tres lados (Secuencia de pantallas nº 1):

a) Tocamos la tercera flecha hacia debajo de la barra de herramientas se abre la paleta de iconos del menú secundario **Forma especial** del menú **Dibujo.**

b) Tocamos sobre el icono **Polígono regular** e inducimos el número de lados deseado (se puede hacer utilizando el icono **Triángulo equilátero**, pero la imagen queda menos limpia).

d) Tocamos en un punto de la pantalla táctil de la calculadora y arrastramos para seleccionar el área donde se va a trazar el triángulo (intentaremos seleccionar el mayor área posible).

SECUENCIA DE PANTALLAS Nº 1:
CONSTRUCCIÓN DE UN TRIÁNGULO REGULAR



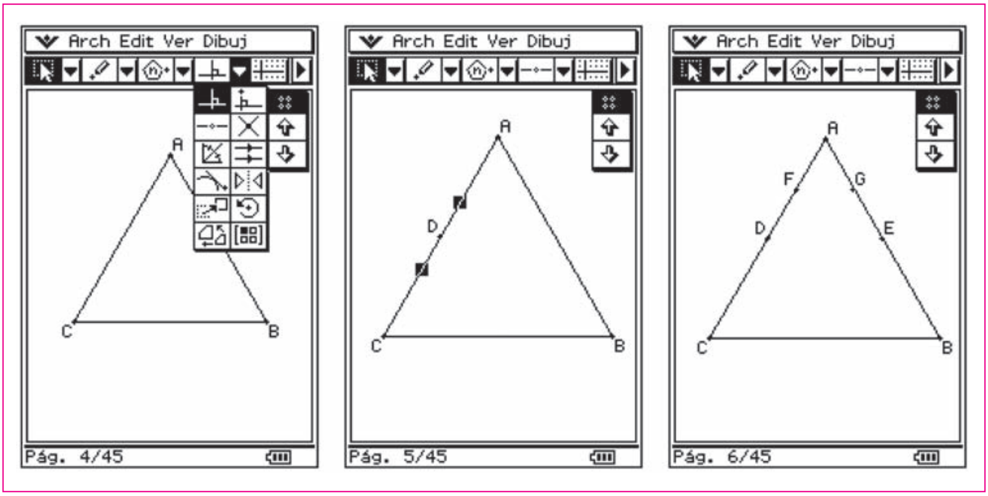
2. A continuación, utilizando el icono **Punto medio** del submenú **Construir** del menú **Dibujo** vamos a construir los puntos D, E, F, y G (Secuencia de pantallas nº 2).

a) Seleccionamos la cuarta flecha hacia debajo de la barra de herramientas y tocamos sobre el icono **Punto medio.**

b) Seleccionamos el lado AC y tocamos sobre el icono (que ya aparece en la barra de herramientas), ya hemos construido el punto D. Repitiendo la secuencia con el lado AB obtenemos el punto E.

c) Marcamos ahora los puntos A y D para construir su punto medio F. Haciendo lo mismo con los puntos A y E, obtenemos el punto G.

**SECUENCIA DE PANTALLAS Nº 2:
CONSTRUCCIÓN DE PUNTOS MEDIOS**



3. Construcción del baricentro del triángulo AED (secuencia de pantallas nº 3):

a) Para dibujar una recta que pase por los puntos E y F vamos a seleccionar el icono **línea infinita** del menú **Dibujo** que aparece cuando tocamos la segunda flecha hacia debajo de la barra de herramientas y se despliega la correspondiente paleta de iconos. Una vez hecho esto tocamos sobre los puntos E Y F y se dibuja la recta que queríamos.

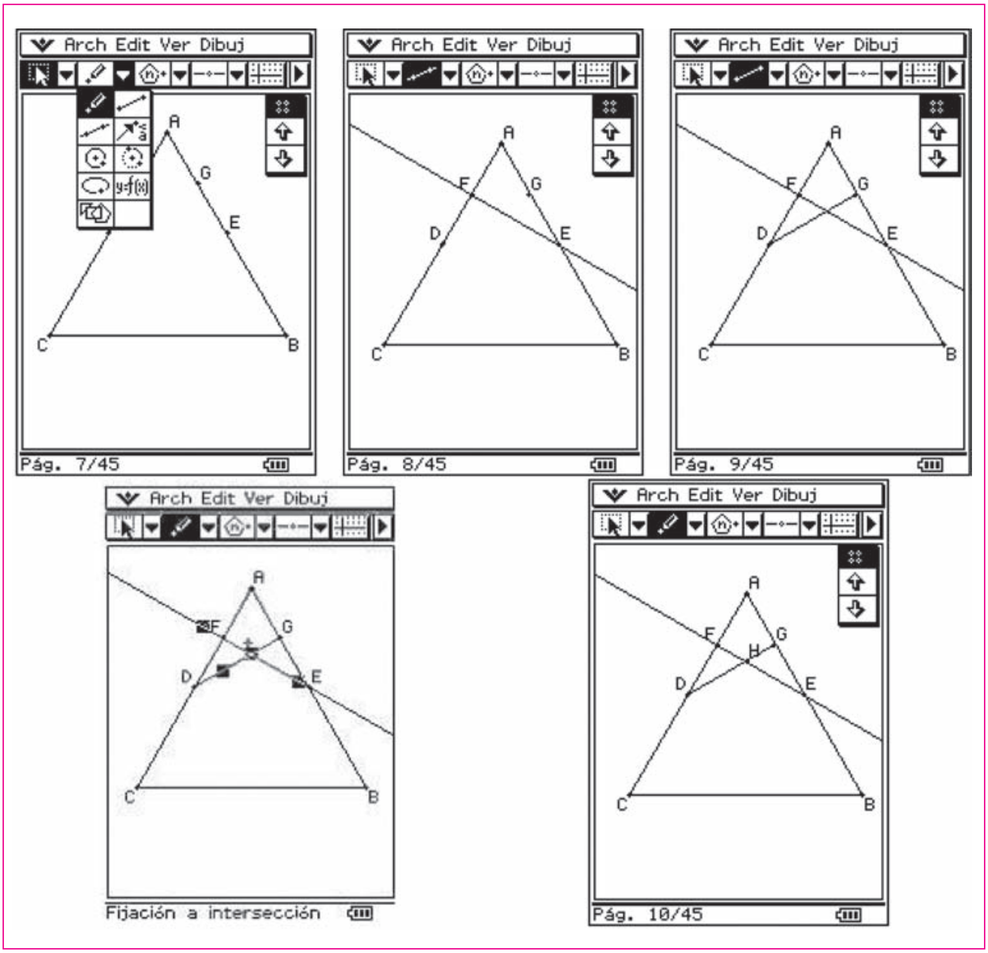
b) Aunque se puede obrar de la misma forma con los puntos D y G vamos a utilizar el icono **segmento de línea** , lo seleccionamos en la misma paleta de iconos y tocamos sobre los puntos D Y G.

c) Por último fijaremos un punto a la intersección de la recta y el segmento recién construidos seleccionando el icono **Punto** , también de la misma paleta. A continuación tocaremos sobre la pantalla y sin dejar de presionar moveremos el puntero hasta que aparezcan seleccionadas la recta y el segmento y nos aparezca en la parte inferior de la pantalla el mensaje *Fijación a la intersección* (tal y como muestra la cuarta imagen de la secuencia de pantallas nº 3), en ese momento dejaremos de presionar con el puntero y aparecerá el punto H.

4. El siguiente paso es construir un arco de circunferencia que una los puntos A y D y que tenga su centro en un punto simétrico al H respecto del segmento AC (Secuencia de pantallas nº 4: Construcción del arco de circunferencia):

a) Seleccionamos el icono **Círculo** en la misma paleta de iconos del paso anterior. Tocamos en F como centro y en H para proporcionar el radio de la circunferencia.

SECUENCIA DE PANTALLAS Nº 3:
CONSTRUCCIÓN DEL BARICENTRO DEL TRIÁNGULO AED



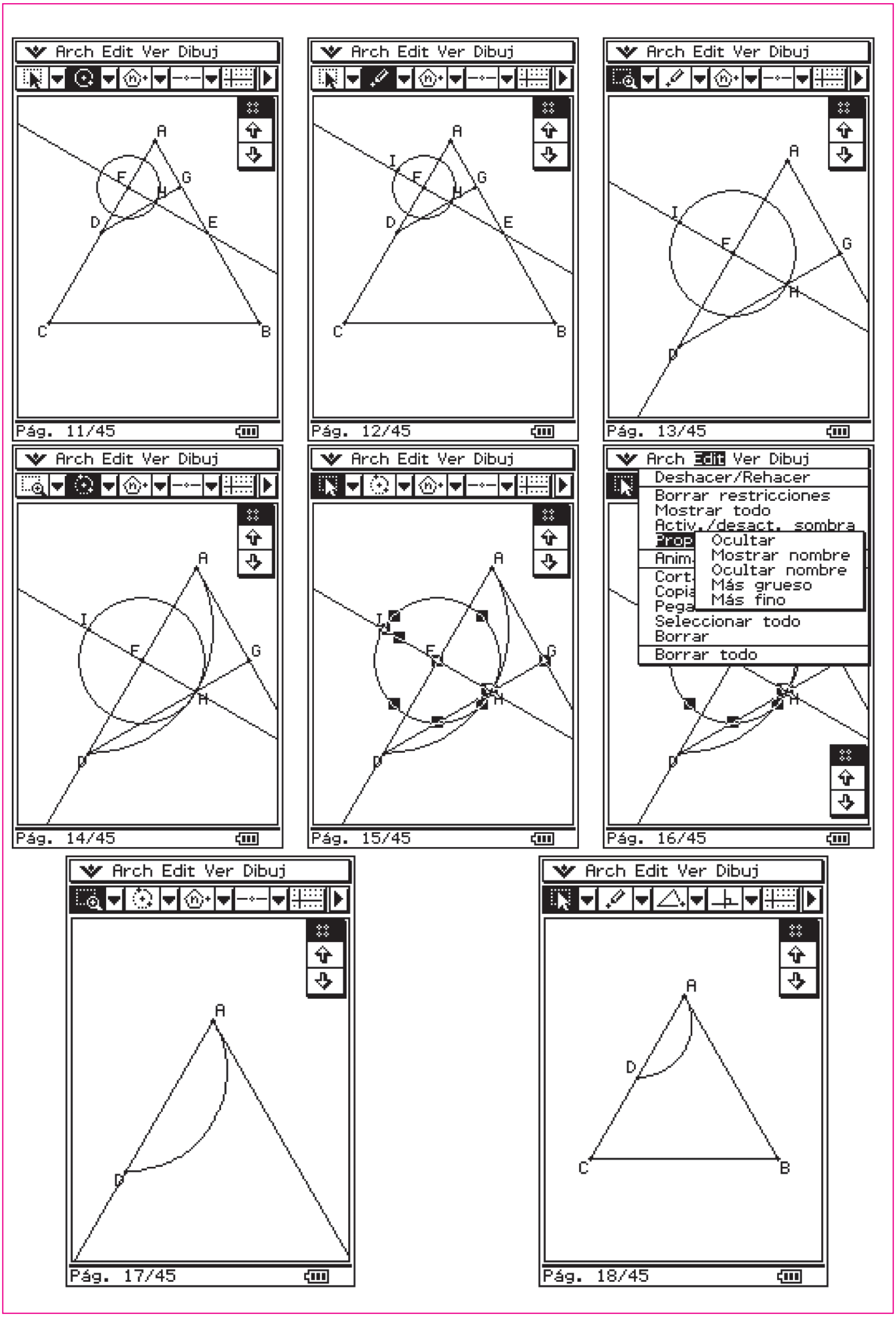
b) Con Fijamos el punto I a la intersección de la recta y la circunferencia de igual forma a como lo hicimos con el punto H.

c) Si queremos agrandar la zona de trabajo podemos utilizar el icono **Cuadro de zoom** del menú **Ver** que aparece cuando tocamos en la primera flecha hacia debajo de la barra de herramientas. Tocando y arrastrando marcamos el área que queremos agrandar.

d) Para trazar el arco de circunferencia buscado seleccionaremos el icono **Arco** , a continuación tocaremos con nuestro puntero sobre los puntos I para el centro, D y A (en ese orden) para los extremos del arco.

e) Vamos a ocultar todos los elementos de nuestra construcción salvo el triángulo y el arco de circunferencia. Para ello los vamos seleccionando uno a uno hasta tenerlos todos, tocamos en el menú **Edición** (Edit), tocamos en

SECUENCIA DE PANTALLAS Nº 4:
CONSTRUCCIÓN DEL ARCO DE CIRCUNFERENCIA



Propiedades y en **Ocultar**. Si no hubiésemos seleccionado algún elemento repetimos la secuencia de instrucciones.

f) Por último, para ver el triángulo completo tocaremos el menú **Ver** y en **Zoom ajustar pantalla**.

5. Para dibujar la pajarita vamos a utilizar el icono **Rotación**, que se encuentra en la paleta de iconos que se despliega al presionar la cuarta flecha hacia debajo de la barra de herramientas (Secuencia de pantallas nº 5: Dibujando la pajarita):

a) Seleccionamos el arco de circunferencia, tocamos el icono **Rotación**, la calculadora nos pide con un mensaje en la parte inferior de la pantalla que le indiquemos el centro del giro, seleccionamos el punto D; a continuación nos aparece un cuadro de diálogo para que introduzcamos el valor del ángulo del giro, escribiremos 180.

b) Seleccionamos también el nuevo arco y repetimos el proceso anterior tomando como centro de giro el punto C (vértice inferior izquierda) y valor del ángulo de giro – 60 º.

c) Repetimos el paso anterior pero con centro de giro A y valor del ángulo de giro 60º.

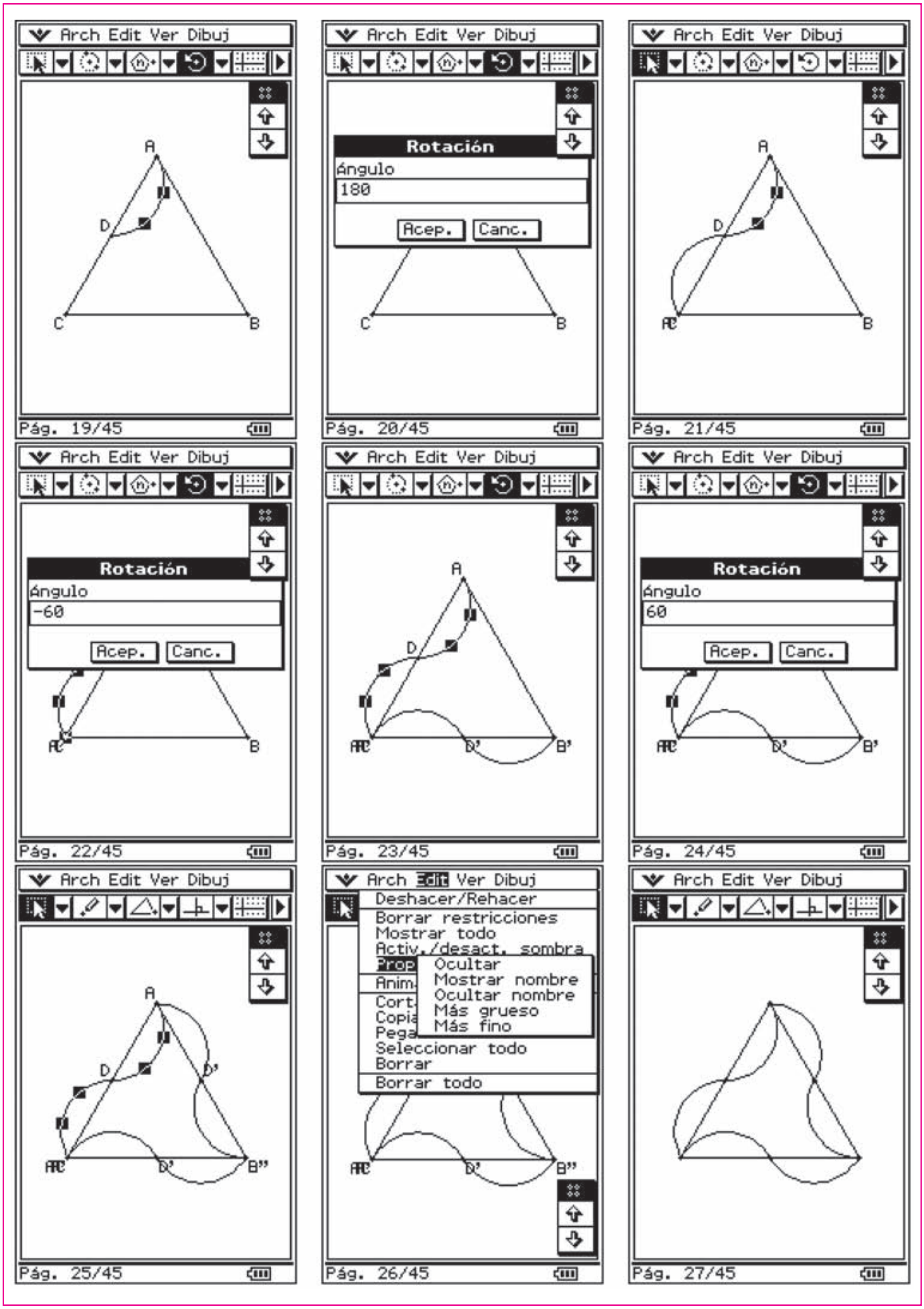
d) Por último vamos a ocultar los rótulos de los puntos ya que muchos de ellos se superponen y la construcción se va "ensuciando". Para ello, sin ningún objeto seleccionado, tocamos en el menú **Edición**, en **Propiedades** y en **Ocultar nombre**. En este momento guardaremos la construcción en un archivo que llamaremos *pajarita*. Para ello tocaremos sobre el menú **Archivo (Arch)** en el submenú **Guardar (Guar.)** escribiremos el nombre y tocaremos el botón **Guardar (Guar.).**

Análisis y construcción del mosaico

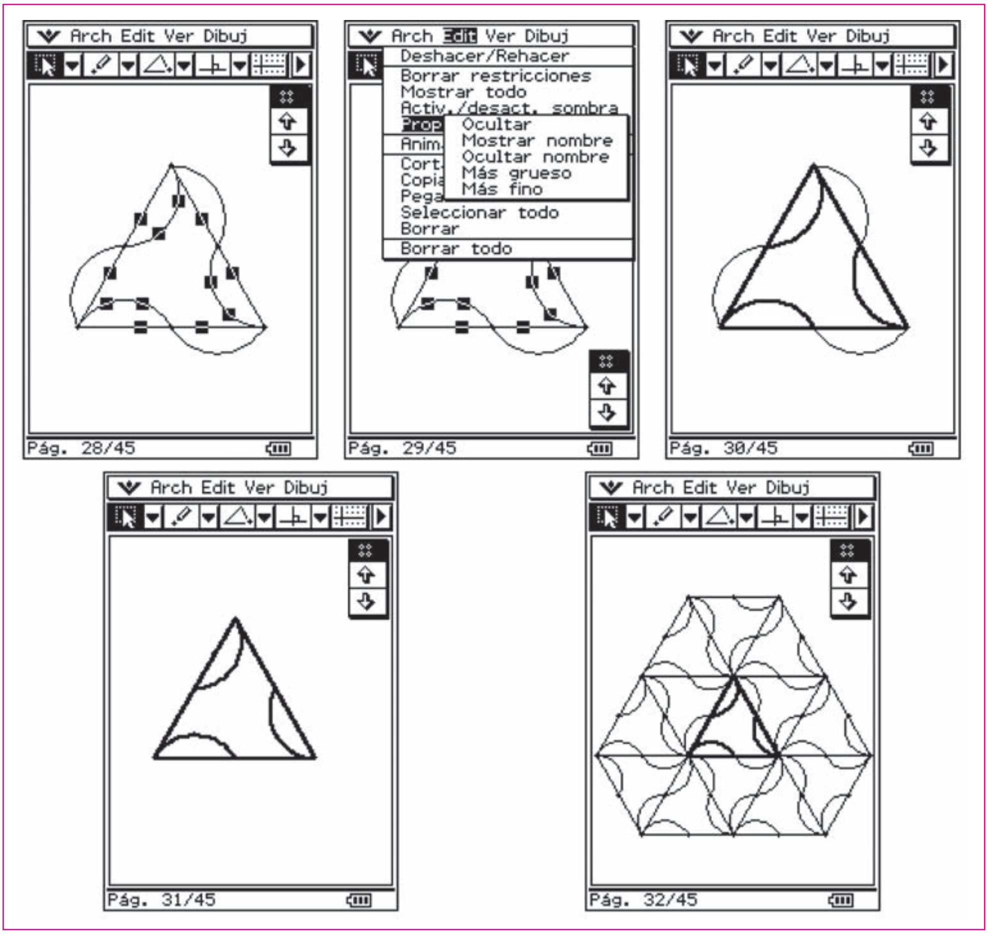
Probablemente cualquier profesional de la construcción "conocedor de su oficio", al que se le planteara cubrir una superficie con esta figura, no tendría ningún problema en realizarlo. Sólo necesitaría, además de los materiales y herramientas al uso, unas cuantas cajas de baldosas triangulares como la que aparece en la secuencia de pantallas nº 6.

Pero nosotros los matemáticos debemos ir siempre más allá, profundizando en nuestra construcción. Para ello vamos a utilizar los conocimientos que nos aporta la Teoría de Grupos Cristalográficos Planos, no hace falta ser un experto para ello; es suficiente con indagar en la red de redes para encontrarse con documentos que nos aclaren los conceptos necesarios. En la bibliografía aparecen los utilizados.

SECUENCIA DE PANTALLAS Nº 5: DIBUJANDO LA PAJARITA



SECUENCIA DE PANTALLAS Nº 6:
RECUBRIENDO EL PLANO I



La definición formal de grupo de cristalográfico plano dada por Francisco Rivero (2) es la siguiente: *"Un grupo G de movimientos en el plano es un grupo cristalográfico si el subgrupo de G formado por las traslaciones es un grupo abeliano infinito y generado por dos elementos"*.

También sabemos gracias al Teorema de Fedorov (1981) que existen 17 grupos cristalográficos planos no isomorfos. Cada uno de ellos recibe una denominación que procede de la cristalografía, y se pueden clasificar según la naturaleza de sus giros.

En el artículo de Rafael Pérez "*Un matemático pasea por la Alhambra*" (1) y en la conferencia de Ceferino Ruiz en el *ISAGA (Granada 2006)* (3) se pueden ver la clasificación de estos 17 grupos y como aparecen todos en nuestra querida Alhambra.

En estas referencias bibliográficas aparece clasificado nuestro mosaico como perteneciente al grupo **p6**, esto quiere decir que:

- Que el mosaico se forma a partir de una celda primitiva que se traslada a la que llamaremos región generatriz unidad.
- Que la menor rotación posible es de orden 6.
- Que no tiene ninguna reflexión.

En el mosaico que nos ocupa, la región generatriz unidad está formada por un rombo resultado de unir dos triángulos equiláteros por uno de sus lados; los lados del rombo determinan las traslaciones con las que se genera el subgrupo de traslaciones que caracteriza al grupo cristalográfico plano correspondiente. Existe, además, en nuestro mosaico, una tesela o celda básica (fundamental) formada por un triángulo isósceles cuya superficie es un sexto de la región generatriz unidad y a partir de la que se puede generar la misma, sin reflexiones y utilizando rotaciones de orden 3 y 2 ($2\pi/3$ y π respectivamente) en dos centros distintos.

Prosigamos con nuestra construcción a la luz de esta información.

6. Construcción de la Región generatriz unidad (Secuencia de pantallas nº 7):

Aunque podemos construir la tesela básica a partir del la baldosa triangular de la primera imagen se la secuencia de pantallas nº 7, vamos a obviar su realización en aras de una mayor rapidez. A estas alturas tenemos que estar minimamente familiarizados con el entorno de trabajo de la ClassPad 300, vamos pues a abrir un archivo que contiene a la tesela básica ya construida y a continuación utilizaremos los giros del grupo p6 para construir la región generatriz unidad.

a) Tocamos sobre el menú **Archivo**, después sobre **Abrir**, cuando se nos abra la pantalla del Administrador de archivos tocamos sobre la flecha de la carpeta **geo** para que se muestren todos los archivos que contiene. seleccionamos el archivo **fund**, confirmamos nuestra selección tocando sobre el botón **Abrir** y ya tendremos en nuestra pantalla la tesela básica ya construida.

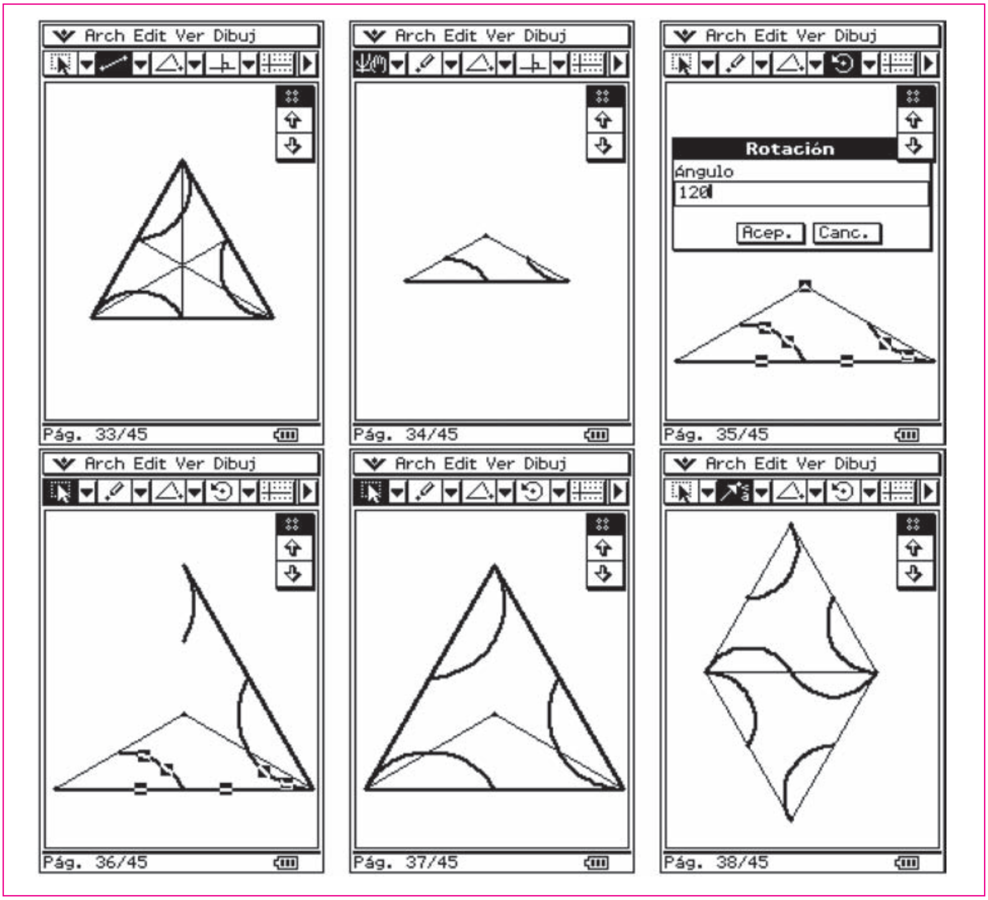
b) Para reconstruir la baldosa triangular vamos a realizar dos giros () de 120º y 240º tomando como centro del giro, en ambos casos, el vértice superior de nuestra tesela.

c) Una vez efectuado el paso anterior realizaremos otro giro, esta vez de 180º, eligiendo como centro el punto medio de la base del triángulo. Ya hemos conseguido la región generatriz unidad, que, como ya habíamos dicho, está formada por un rombo resultado de unir dos triángulos equiláteros por uno de sus lados

7. Trasladando la región generatriz unidad (Secuencia de pantallas nº 8):

Por último, para acabar nuestro trabajo con este mosaico sólo nos queda ver como generamos el mosaico con las traslaciones y utilizando que, por ejemplo, el vértice A es un centro de giro de orden 6 de dicho mosaico.

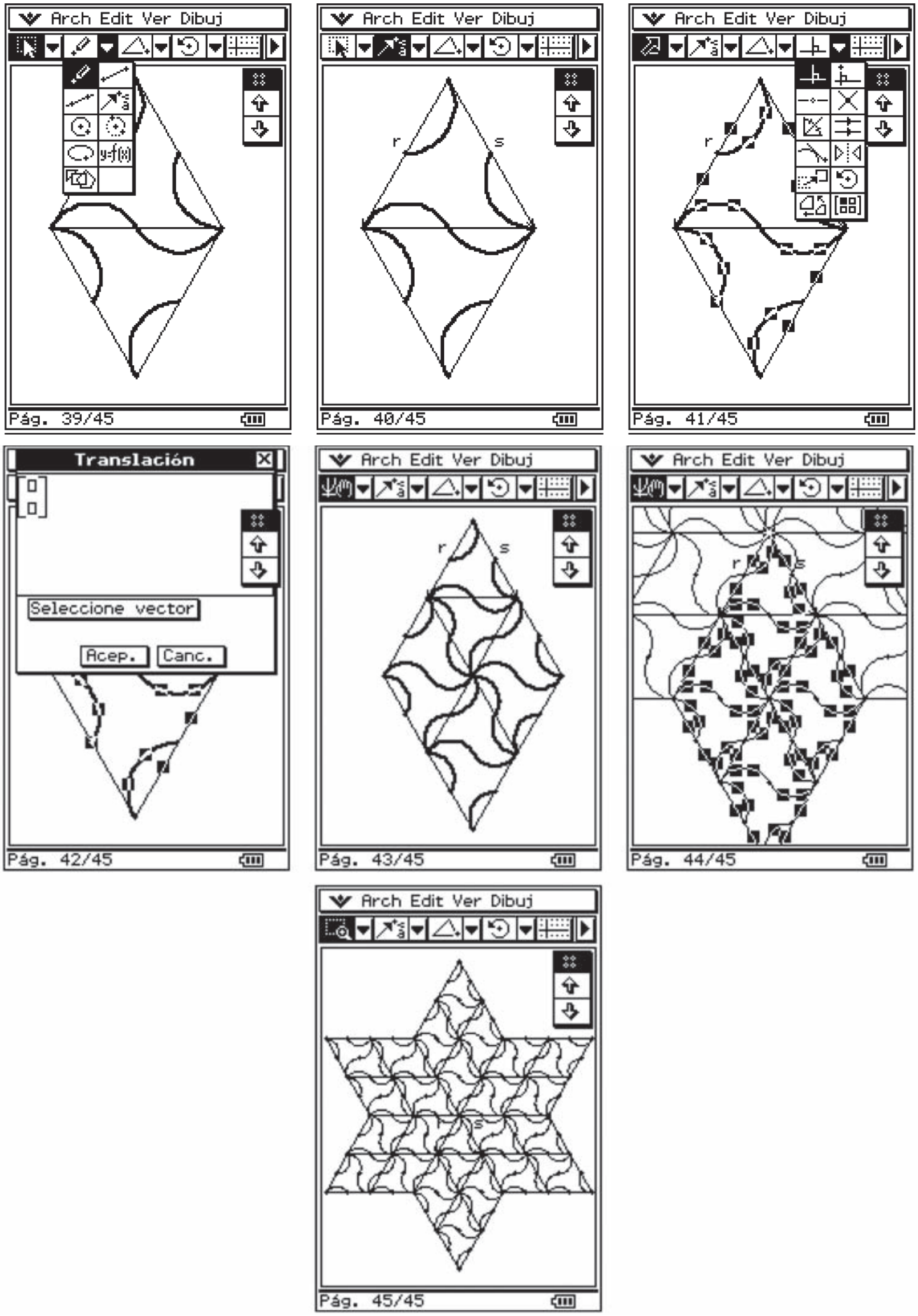
**SECUENCIA DE PANTALLAS Nº 7:
CONSTRUCCIÓN DE LA REGIÓN GENERATRIZ UNIDAD**



a) Lo primero que tenemos que hacer es definir los vectores que nos van a definir las traslaciones. Para ello vamos a seleccionar el icono **Vector** del menú **Dibujo** que, como podéis apreciar en la primera imagen de la secuencia de pantallas nº 8, aparece al desplegar la segunda paleta de iconos. Tocaremos los vértices superior e inferior izquierda del triángulo para generar el vector $\vec{r}$; a continuación generaremos el vector $\vec{s}$ de forma análoga.

b) Una vez seleccionados todos los elementos visibles de nuestra construcción realizaremos sendas translaciones según los vectores $\vec{r}$ y $\vec{s}$. Tocaremos la cuarta flecha hacia abajo de la barra de herramientas para que se abra la paleta de iconos del menú secundario **Construir** del menú **Dibujo**, en ella presionaremos sobre el icono **Traslación**. Nos aparece el cuadro de diálogo de traslación, tocamos seleccionar vector y seguidamente presionamos sobre le vector $\vec{r}$; a continuación repetimos los mismos pasos con el vector $\vec{s}$ Si queremos ampliar nuestra construcción con nuevos rombos, realizaremos una nueva selección de elementos y repetiremos el proceso anterior.

SECUENCIA DE PANTALLAS Nº 8: RECUBRIENDO EL PLANO II



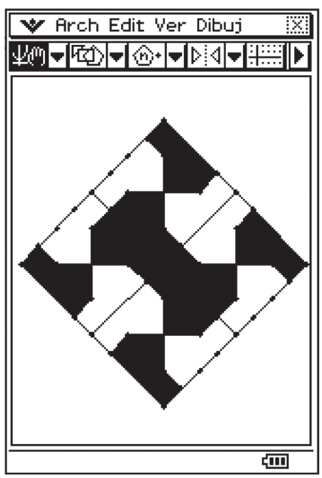
c) Seleccionamos todos los elementos visibles de la construcción (podemos ayudarnos del icono **Cuadro de zoom**). Realizaremos cinco giros de cetro A (vértice superior de la construcción) y ángulos 60º, 120º, 180º, 240º y 300º; el resultado es espectacular.

EL HUESO NAZARÍ

El segundo mosaico que vamos a construir es el “hueso nazarí” que, junto con el de la pajarita, es el más conocido de los mosaicos nazaríes. No vamos a construirlo siguiendo dos caminos distintos, solamente vamos a realizar nuestra construcción a la luz de la información aportada por la teoría de grupos cristalográficos planos.

Como puede deducirse en la figura nº 1, la región generatriz unidad se puede generar a partir de cualquiera de los cuadrados en los que se encuentra dividida, utilizando como movimiento dos simetrías con los ejes perpendiculares y paralelos a los lados del cuadrado que forma la región.

FIGURA 1: REGIÓN GENERATRIZ UNIDAD DEL MOSAICO



Este tipo de construcción corresponde al grupo cristalográfico plano **pmm**, es decir:

- Que el mosaico se forma a partir de una celda primitiva que se traslada.
- Que hay alguna reflexión en dos direcciones.
- Que la menor rotación posible es de orden 2.
- Que los centros de rotación están sobre los ejes de reflexión.

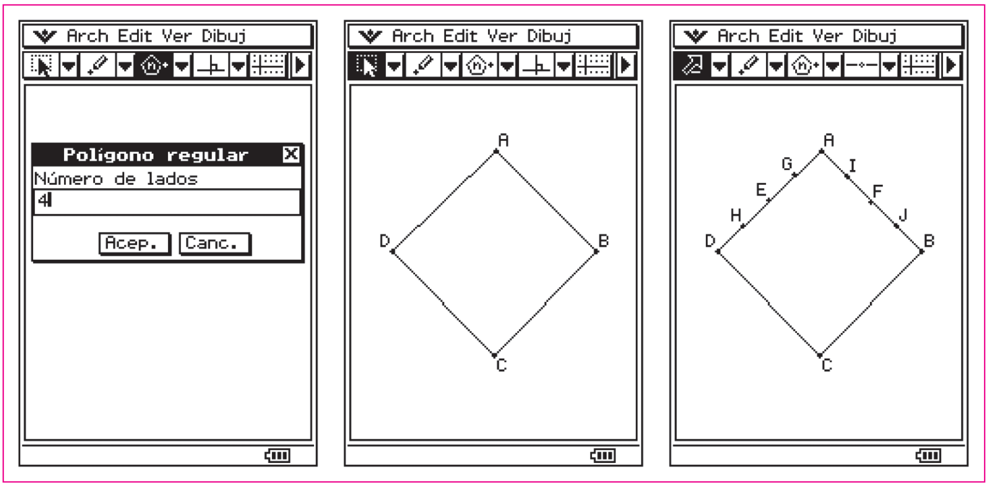
Comencemos la construcción. Como no vamos a utilizar muchas herramientas nuevas, tendremos que estar pendientes de las respectivas secuencias de imágenes pues las instrucciones serán más concisas que en la construcción del mosaico anterior.

1. Vamos pues a construir nuestra celda fundamental (secuencias de pantallas nº 9, 10 y 11):

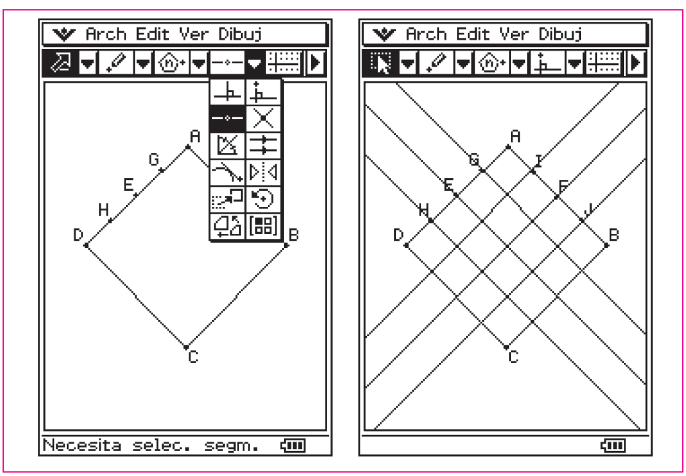
   a) Comenzaremos construyendo el cuadrado que delimita la celda fundamental situando en él los puntos E, F, G, H, I y J.

   b) Trazaremos una retícula de rectas perpendiculares a los lados del cuadrado y que pasen por los puntos construidos en el punto anterior. Utilizaremos el icono **Perpendicular** de la cuarta paleta.

SECUENCIA DE PANTALLAS Nº 9: CELDA FUNDAMENTAL I



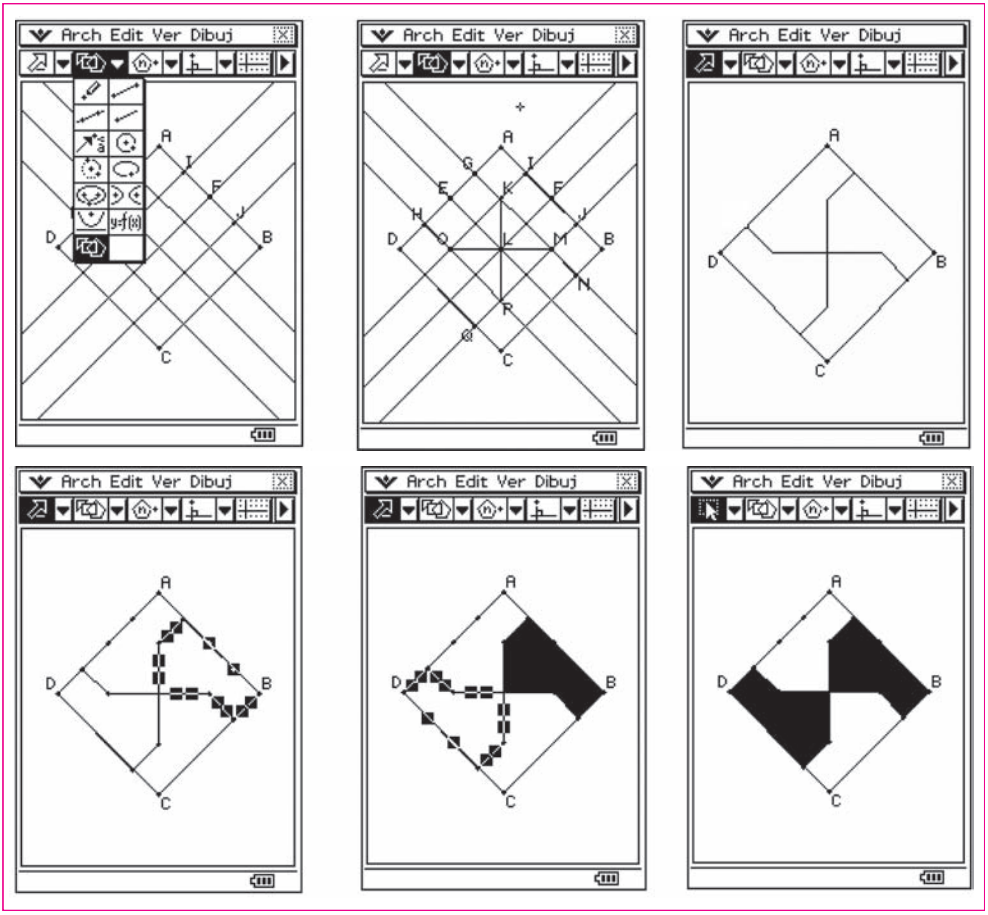
SECUENCIA DE PANTALLAS Nº 10: CELDA FUNDAMENTAL II



c) Utilizando el icono **Polígono** de la segunda paleta, vamos construir dos polígonos cerrados, el primero de vértices I, K, L, M, N y B; y el segundo de vértices H, O, L, P, Q y D. Seguidamente, ocultaremos las rectas y los puntos que han sido necesarios para la construcción.

d) Por último seleccionamos todos los lados de cada polígono y en el menú edición activamos la propiedad de sombra, quedando así construida la celda fundamental tal y como queríamos.

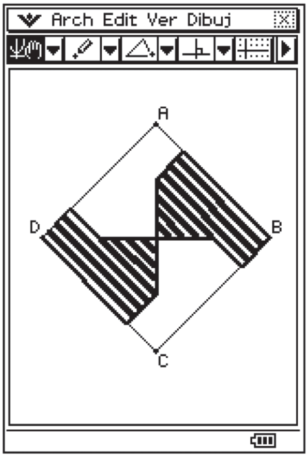
SECUENCIA DE PANTALLAS Nº 11: CELDA FUNDAMENTAL III



2. Para construir la región generatriz unidad vamos a utilizar una celda fundamental “distinta” de la anterior, donde hemos sustituido el sombreado de los polígonos por un conjunto de segmentos paralelos con un grosor superior que harán las veces de relleno. Esta decisión se debe a que el efecto de sombra de un polígono no se conserva cuando realizamos una transformación del mismo y a la dificultad de seleccionar un determinado elemento cuando se encuentra superpuesto con otros. Vamos a abrir el fichero **huesof** que se encuentra en la carpeta

anterior **geo**. A continuación, utilizando los iconos **Reflexión** y **Giro**, vamos a construir la región generatriz unidad (secuencia de pantallas nº 12):

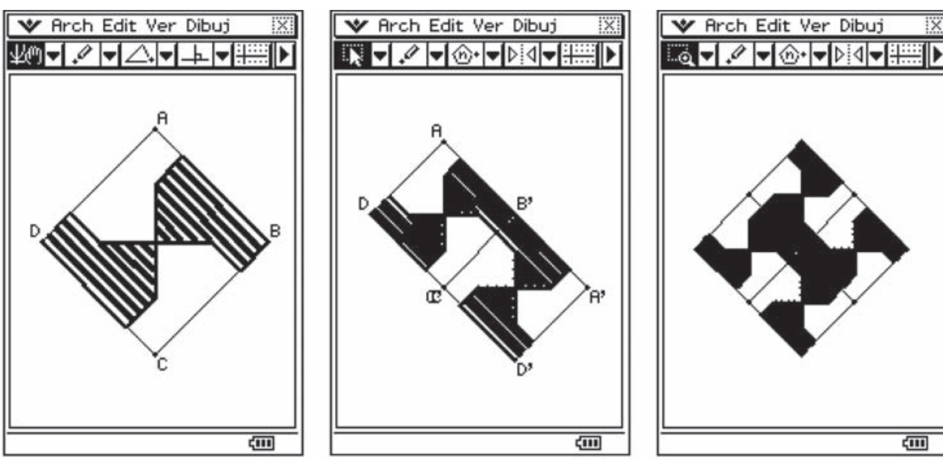
FIGURA 2: ARCHIVO HUESOF



a) Tocamos sobre el icono y después sobre el lado BC. A continuación anulamos la selección que se ha producido y volvemos a repetir el procedimiento pero realizando la reflexión sobre el lado AB.

b) Por último ocultaremos los nombres y los objetos que nos "ensucien" la construcción.

SECUENCIA DE PANTALLAS Nº 12: REGIÓN GENERATRIZ UNIDAD

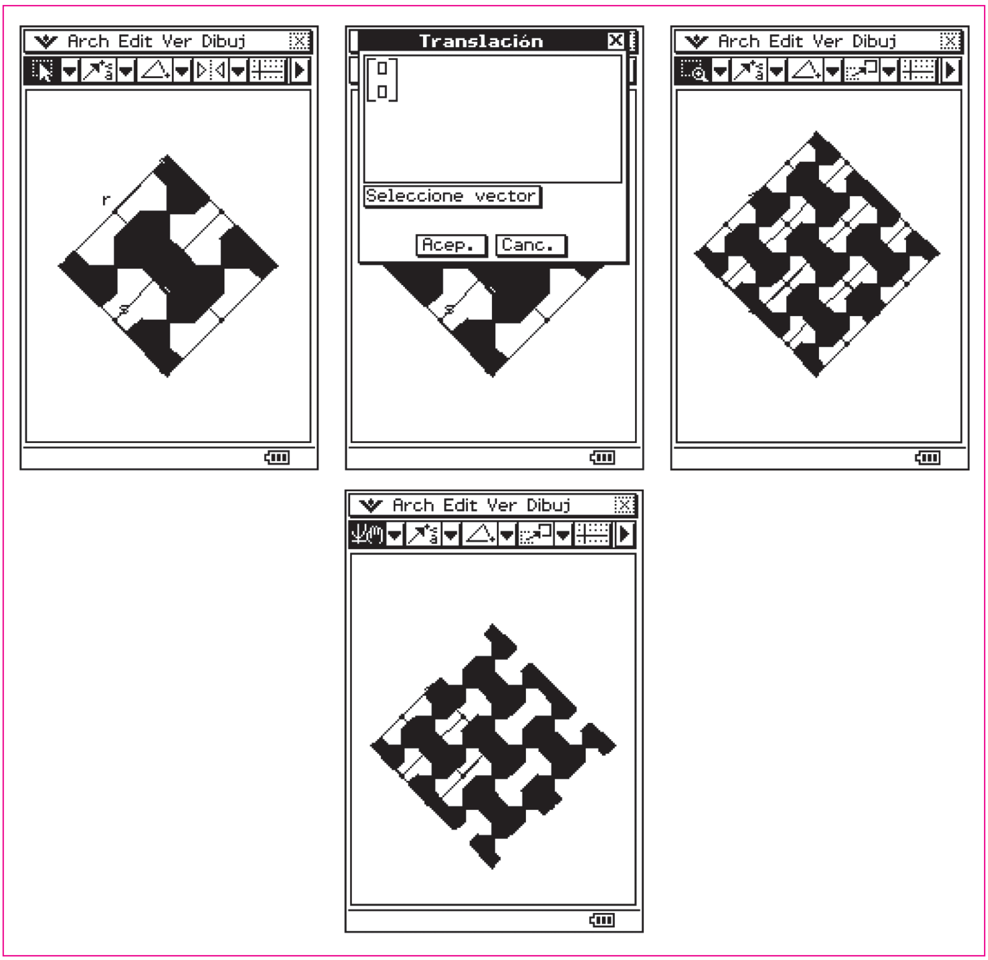


3) Para acabar lo único que nos queda es añadir los vectores que nos van a definir las traslaciones y aplicarlas para construir nuestro mosaico (secuencia de pantallas nº 13).

a) Con el icono **Vector**, definimos los vectores $\vec{r}$ y $\vec{s}$. Una vez hecho esto, con el icono **Traslación**, realizaremos sendas traslaciones según los vectores anteriores.

b) Si queremos ampliar nuestra construcción, realizaremos una nueva selección de elementos y repetiremos el paso anterior.

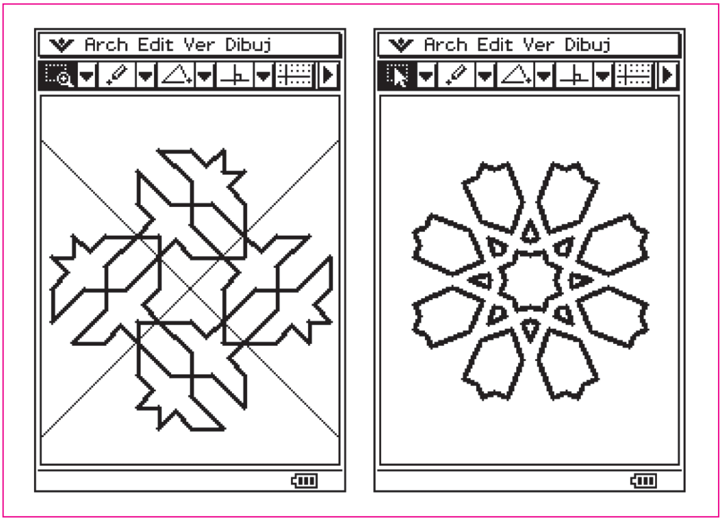
SECUENCIA DE PANTALLAS Nº 13: RECUBRIENDO EL PLANO III



OTRAS CONSTRUCCIONES

A continuación se proponen algunos mosaicos que se pueden construir utilizando la ClassPad 300. En el Anexo I se ofrecen las imágenes a partir de las que se han realizado las construcciones.

FIGURA 3: MOSAICOS PROPUESTOS



BIBLIOGRAFÍA

Pérez Gómez, Rafael: "Un matemático pasea por la Alambra". http://www.divulgamat.net/weborriak/TestuakOnLine/HasierakoIkasgaiak/RafaelPerezFMA2004.pdf

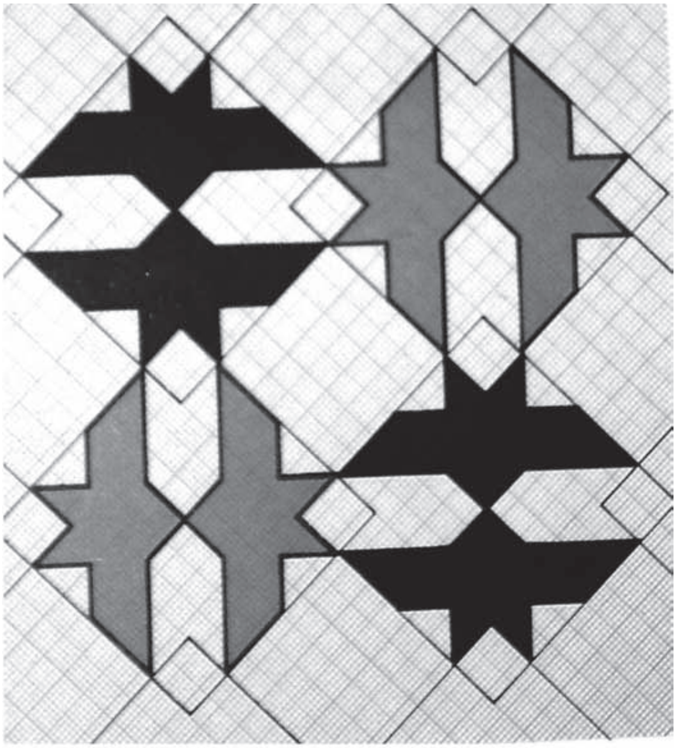
Ruiz Garrido, Ceferino: "Geometry in the Alhambra". ISAGA (Granada 2006). http://gigda.ugr.es/isaga06/downloads.htm

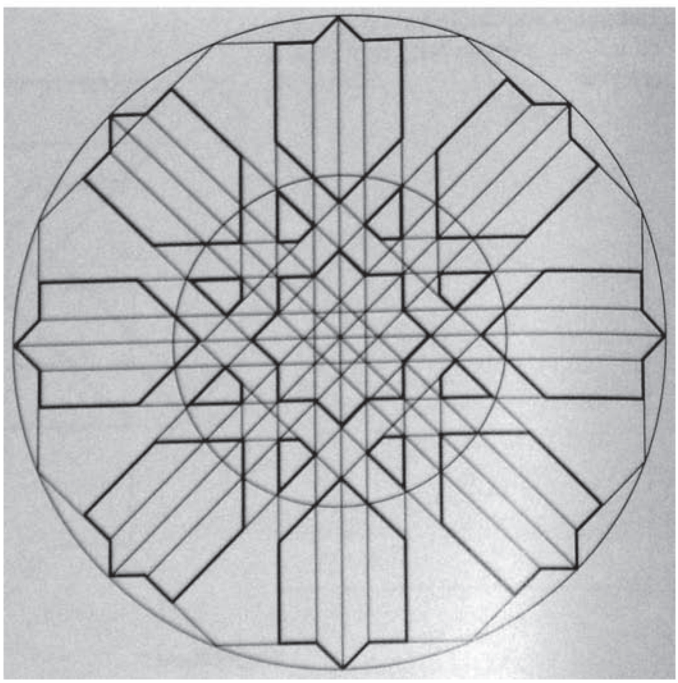
Rivero Mendoza, Francisco: "Grupos Cristalográficos Planos". Boletín de la Asociación Matemática Venezolana Vol. VI, No. 1 (1999). http://www.emis.de/journals/BAMV/conten/vol6/frivero.pdf

ClassPad 300. Guía del Usuario. http://www.classpad.org/index.php

"La Alhambra". Revista Epsilon. S.A.E.M. THALES, Granada 2005.

ANEXO I: IMÁGENES DE MOSAICOS





Epsilón *- Revista de Educación Matemática* ***2010, Vol. 27(2), nº 75, pp. 101-106***

Podemos introducir a los estudiantes en la investigación en matemáticas desde niveles educativos bajos. Un ejemplo

Francisco Moreno Soto
I.E.S.O. "Cuatro de Abril". Zahinos.

INTRODUCCIÓN

Las condiciones de la educación han cambiado en la recién constituida sociedad de la información, produciendo un desajuste en la misma, tradicionalmente conservadora de los objetivos, contenidos y métodos, al disociar el mundo de los intereses de los alumnos y de la sociedad de los procesos educativos realizados en las aulas. Este desajuste se va ahondando cada vez con más rapidez y profundidad por este retraso en la adaptación en la educación, adaptación que debería lograr el mismo nivel que en otras actividades humanas. En este proceso cabe interrogarse sobre qué cambios en los objetivos, contenidos y secuenciación pueden producir beneficio en los procesos de aprendizaje (Cabezas y Roanes, 2000).

Por otra parte, la matematización de todas las ciencias, incluidas las llamadas humanas y sociales entre las que podemos incluir la Economía, plantea problemas en los estudios al afectar a alumnos que pueden tener dificultades, por diversas razones, para construir "el edificio" matemático necesario en su formación.

Por todo ello, debemos plantearnos un nuevo enfoque en la educación matemática, dirigido hacia la investigación y el descubrimiento, con el fin de dar una respuesta eficaz a los problemas señalados anteriormente.

En este trabajo presentamos un ejemplo de cómo llevar a la práctica esta idea; para ello haremos uso de un parámetro estadístico poco habitual como es el del inverso del coeficiente de variación.

MEDIDAS DE DISPERSIÓN

Las distribuciones estadísticas de un solo carácter pueden ser resumidas cuantitativamente desde dos puntos de vista: el de la tendencia central y el de la dispersión. En este sentido, Calot (1974) definió algunas propiedades deseables para una característica de tendencia central o de dispersión. Así, éstas deben:

1. Definirse de manera objetiva, lo que conduce a expresiones algebraicas.
2. Usar todas las observaciones y no algunas de ellas solamente.
3. Tener un significado concreto.
4. Ser sencillas de calcular.
5. Prestarse fácilmente al cálculo algebraico.
6. Ser poco sensible a las fluctuaciones y errores muestrales.

El problema es que alguna de estas condiciones podrían ser contradictorias (condiciones 2 y 6) y no será posible encontrar una característica que responda simultáneamente a todas estas condiciones.

Por medidas de tendencia central entendemos una serie de medidas o valores que tratan de representar o resumir una distribución de frecuencias dada, sirviendo además para realizar comparaciones entre distintas distribuciones de frecuencia. Suelen denominarse también promedios. Entre las más destacadas podemos citar: la mediana, la moda, la media o una generalización de esta última como es la φ-media.

Ahora bien, acompañando a las medidas anteriores siempre aparecen las medidas de dispersión que tienen como propósito estudiar lo concentrada que está la distribución en torno a algún promedio. Las medidas de dispersión más habituales son: las diferencias y las desviaciones. Según que las desviaciones sean respecto a la mediana o a la media y según se considere la mediana o la media de la serie de desviaciones, se obtiene varios índices de dispersión: la mediana de las desviaciones absolutas a la mediana o MEDA utilizada en balística (artillería), la desviación absoluta media respecto a la mediana, la desviación absoluta media respecto a la media, la desviación cuadrática media y la desviación típica.

Ahora centrémonos en este último parámetro de dispersión.

Definición 1. La varianza es la media de las desviaciones cuadráticas de los datos respecto a la media.

$$s^2 = \sum_{i=1}^{k} f_i (x_i - \overline{x})^2$$

Según el teorema de Köning:

$$s^2 = \sum_{i=1}^{k} f_i (x_i - \overline{x})^2 = \sum_{i=1}^{k} f_i x_i^2 - \overline{x}^2$$

Esta medida tiene un problema y es que está expresada en unidades al cuadrado, lo que puede producir una falsa imagen de la dispersión de la distribución. Para evitar este problema, en su lugar suele utilizarse la desviación típica que es la raíz cuadrada positiva de la varianza, es decir:

$$s = + \sqrt{s^2}$$

medida que satisface las condiciones 1, 2 y 5 de Calot. Además la desviación típica es más sensible que la media a las fluctuaciones en el muestreo y a los valores erróneos (puesto que aquellos aparecen al cuadrado). A veces su cálculo es demasiado pesado en ciertos campos de aplicación en los que las condiciones excluyen prácticamente el uso de cualquier tipo de máquina de calcular y exigen un resultado numérico rápido. Es así como en el control industrial se prefiere el recorrido (diferencia entre el mayor y el menor valor de los datos) más rápido de calcular que la desviación típica.

Otras características de dispersión son los cuantiles y los momentos que pueden entenderse como generalizaciones de la mediana y la varianza.

Una medida de comparación interesante es el coeficiente de variación que se define (en general para variables positivas únicamente) como la razón de la desviación típica a la media:

$$CV = \sigma \,/\, \bar{x}$$

Como la media y la desviación típica se expresan en la misma unidad que la variable X, se trata de una cantidad sin dimensión, independiente de las unidades elegidas, es decir, invariante ante un cambio de escalas. Este hecho permite que pueda utilizarse este coeficiente para comparar distribuciones diferentes.

EL INVERSO DEL COEFICIENTE DE VARIACIÓN

Las medidas de dispersión descritas son las más habituales pero, ¿se pueden utilizar otras? La respuesta a esta pregunta es afirmativa, siendo una de las medidas más llamativas el inverso del coeficiente de variación.

Definición 2. Se define el inverso del coeficiente de variación (en general para variables positivas únicamente) como la razón de la media a la desviación típica:

$$\textit{Inverso del coeficiente de variación} = \frac{\bar{x}}{\sigma}$$

Este índice se utiliza en campos como la ingeniería, coeficiente señal-ruido o la biología, índice de inercia fenotípica (Pérez Fernández y Moreno Soto, 2001).

INVESTIGACIÓN PROPUESTA: COMPARACIÓN DE EMPRESAS

Como señalamos en la introducción, en este trabajo presentamos un ejemplo de como podría enfocarse la enseñanza de las matemáticas para acercar al alumno a la investigación y el descubrimiento. Pasemos a describirlo.

Consideraciones curriculares

- Materia: Matemáticas de Bachillerato de Humanidades y Ciencias Sociales.
- Curso: 1º ó 2º.
- Área temática elegida: Estadística Descriptiva.
- Objetivo planteado: el alumno debe adquirir los conceptos señalados en los apartados 2 y 3, para poder aplicarlos en situaciones presentes en la Economía y la Empresa. La mayoría de los conceptos del apartado 2 se supondrán conocidos, por lo que el trabajo se centrará fundamentalmente en los contenidos del apartado 3 que serán adquiridos por descubrimiento.
- Método de trabajo: formulación de un pequeño trabajo de investigación.

El trabajo debe terminar con la formulación de una expresión del tipo siguiente en la que el alumno debe reconocer un inverso del coeficiente de variación.

$$I = \frac{\sum_i (S_i \; x \; \bar{P}_i)}{nxSD_{sp}} \qquad (4.1)$$

Comentarios acerca de la expresión del índice final

Veamos en qué sentido el índice (4.1) se corresponde con un inverso del coeficiente de variación. Para ello debemos señalar qué representa cada una de las componentes que aparecen en el índice.

$$I = \frac{\sum_i (S_i \; x \; \bar{P}_i)}{nxSD_{sp}}$$

donde:

Si = número de productos supervivientes con el tratamiento i.

$\bar{P}_i$ = valor medio de la variable para el tratamiento i.

n = número de tratamientos.

SD_{sp} = desviación típica del total de las medidas.

Si analizamos detenidamente esta expresión podemos comprobar como se trata de una aplicación de inverso del coeficiente de variación:

(1) $Si \times \bar{P}_i$ = Suma de los valores de la variable P bajo el tratamiento i

(2) $\sum_i (S_i\, x\, \bar{P}_i)$ = Suma de todos los valores de la variable P

(3) $\sum_i (S_i\, x\, \bar{P}_i)/n$ = Valor medio de la variable (por tratamiento)

(4) $$I = \frac{\dfrac{\sum_i (S_i\, x\, \bar{P}_i)}{n}}{SD_{sp}}$$ = inverso del coeficiente de variación, puesto que el denominador es la desviación típica.

Problema propuesto

Enunciamos ahora el problema propuesto para llevar a cabo la investigación: encontrar un índice que permita comparar distintos tipos de empresa de forma que podamos determinar cual de ellas se adapta mejor a las distintas circunstancias del mercado. Para ello se deberá tener en cuenta:

1) Se trata de empresas dedicadas a distintos sectores: conserveras, madereras,…
2) Cada empresa lanza una serie de productos al mercado de los cuales unos sobreviven pasado un tiempo y otros no.
3) Cada producto lleva asociado una serie de tratamientos (gastos): mayor o menor gasto en publicidad; mayor o menor gasto en I+D, …, que harán que el producto sobreviva o no. Cada tratamiento presenta una serie de niveles, que en general serán n.
4) Para cada producto se dispone de datos con los que se puede estudiar distintas variables relacionadas con él: beneficio obtenido, cantidad exportada, beneficios procedentes del mercado interno,…, de forma que puedo calcular el valor medio de la variable estudiada para el producto cuando el tratamiento presenta el nivel i.

Comentarios finales

Es evidente que intentar aplicar este índice a datos reales se hace altamente difícil; es más, podemos asegurar que es prácticamente inviable por toda la compleja trama de relaciones que se dan entre los distintos participantes y sobre todo por los gastos asociados que implica. Sin embargo, no es éste el objetivo de este trabajo; como ya señalamos 1 el objetivo real es que el alumno asimile desde la acción los contenidos de tanto de forma conceptual como de forma práctica.

En todo caso el profesor puede ayudarse de ejemplos simplificados (dos o tres empresas y pocos productos y niveles), acordes con el contexto e intereses de sus alumnos, que permitan llevar a cabo el estudio de aplicaciones modélicas y así trabajar los parámetros a estudiar basándose en estos ejemplos.

Puede ser aconsejable el uso de programas de ordenador (no hace falta que sean complejos, bastará una hoja de cálculo).

La construcción de las expresiones por el alumnado como "caja negra" (Drijvers, 1995) puede ser rentable en la comprensión y memorización, así como en el análisis del comportamiento al variar los datos.

La idea defendida en este trabajo podría, y debería, ser extendida a los niveles universitarios. Incluso el ejemplo aquí utilizado puede ser aplicado, quizá con mayor complejidad, en la materia de Estadística Descriptiva de carreras universitarias como la Diplomatura en Empresariales.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Cabezas, J. y Roanes, E. (2000). A proposal of organisation of curricular changes in mathematics propitiated by the use of computers. En *Proceedings of the 13th International Conference on Technology in Collegiate Mathematics* (pp. 40-44). Atlanta GA: Addison Wesley Longman.

Calot, C. (1974). *Curso de Estadística Descriptiva*. Madrid: Paraninfo.

Drijvers, P. (1995). White-Box/Black-Box revisited. *The Int. Derive Journal, 2*(1), 3-14.

García, A. (1997). *Estadística Aplicada: conceptos básicos*. 2ª edición. Madrid: UNED.

Pérez, M. y Moreno, F. (2001). *Aplicación del índice de inercia fenotípica para la elección de especies vegetales susceptibles de uso en restauración ambiental*. Cádiz: Universidad de Cádiz.

Williams, D. G., Mack, R. N. y Black, R. A. (1995). Ecophysiology of introduced Pennisetum setaceum on Hawaii: the role of phenotypic plasticity. *Ecology,* (76), 1569-1580.

Epsilón *- Revista de Educación Matemática* ***2010, Vol. 27(2), nº 75, pp. 107-116***

Una isla de matemáticas

José Luis Ruiz Fernández, María del Carmen Galán Mata, Alicia González Ortiz, Diana Contreras Roso y Laura Vázquez Fournier
IES Padre José Miravent

Resumen: *En este artículo explicamos el proyecto que nuestro grupo de trabajo "**Matemáticas Recreativas**" bajo el amparo del Departamento de Matemáticas del IES Padre José Miravent ha llevado a cabo en la localidad onubense de Isla Cristina.*

El objetivo principal del proyecto ha sido el acercar las matemáticas a nuestros alumnos/as a través de la investigación y de la diversión que pueden encontrar en los juegos, la fotografía y en la resolución de problemas. Y por supuesto, el hacerles ver que pueden encontrar matemáticas en sitios inimaginables y que tan sólo para descubrirlas deben mirar con los ojos adecuados.

1. INTRODUCCIÓN

La historia de nuestro grupo de trabajo, "***Matemáticas Recreativas***" surge como hemos dicho, de la inquietud de los miembros del departamento por mejorar el interés de los alumnos/as de nuestro centro por las matemáticas. Al principio, como suele pasar, los medios con los que contábamos eran escasos y las dificultades muchas, pero teníamos algo muy importante a nuestro favor, una gran ilusión. Esta ilusión se transformó en ideas que cuando nos dimos cuenta ya se estaban llevando a cabo y eran todo un éxito. Nuestra labor, si bien la consideramos humilde, está llena sobre todo, y aunque suene un poco cursi, de pasión, de empeño y de amor por las matemáticas.

Entre las actividades que hemos realizado y que luego detallaremos, están:

- "***El Tablón de las mates***", lugar en el colocábamos de forma periódica:
  - "*El Problema de la Semana*" .
  - "Concurso de Sudokus y Kakuros".
  - "*El Personaje Matemático Misterioso*".
  - "*Curiosidades Matemáticas*".

- "***Concurso de Postales Navideñas***".
- "***Concurso Cifras y Letras***".
- "***Concurso de Fotografía Matemática***".
- ***"Participación en la Feria de la Ciencia de Sevilla"***. Esta actividad, quizás la más importante, implicaba dos cosas: primero, la selección de una serie de juegos y actividades relacionadas con las matemáticas y que tuvieran importancia desde un punto de vista histórico, integrador, didáctico y por supuesto matemático; segundo, la selección de una serie de alumnos/as de nuestro centro de (4º ESO y 1º Bachillerato), nuestros "*Alumnos ayudantes*", cuya labor consistiría en la elaboración de algunos de estos juegos, en conocer algo de la historia de ese juego y por último en practicar con ellos hasta entenderlos bien.

  Con el diseño de estos juegos y actividades se estaba creando un excelente recurso didáctico que nos ayudaría en nuestras clases de matemáticas.

Toda esta "Pequeña revolución matemática" no pasó desapercibida en Isla Cristina y provocó que apareciéramos varias veces en los medios de comunicación locales como la tele y el periódico. Nos estábamos haciendo famosos, y lo que es más, estábamos consiguiendo que se hablara de matemáticas, y de nuestro instituto.

EL TABLÓN DE LAS MATES

El tablón era nuestro lugar dentro del instituto, nuestro medio de comunicación con nuestros alumnos/as, el sitio dónde colocábamos toda la información y los diversos juegos, actividades y curiosidades matemáticas que íbamos realizando. En este "Rincón de las Matemáticas" como antes dijimos teníamos:

- ***Concurso de Sudokus y Kakuros***. Todas las semanas se planteaban dos sudokus y un Kakuro para que quien quisiera pudiera resolverlos. Cada sudoku bien resuelto valía 5 puntos que se iban acumulando cada semana. La dificultad de los sudokus y de los kakuros fue variando durante el concurso entre fáciles, medios y difíciles. La última semana se puso un sudoku que estuvo en la fase final del campeonato de España y tuvimos dos alumnas que fueron capaces de resolverlo.
- ***Concurso del Problema de la Semana***. Se planteaban semanalmente dos problemas: uno con nivel para la ESO y otro con nivel de Bachillerato. Para su resolución los alumnos/as debían usar la lógica y los conceptos y procedimientos que se explicaban en clase y que a su vez le permitían desarrollar razonamientos y estrategias que daban solución a los problemas. Los problemas eran valorados sobre 10 puntos y los alumnos/as estaban obligadas a explicar cómo habían llegado a dar con la solución que ellos proponían. Lo curioso y más gratificante de esta actividad es que escucha-

bas a los alumnos comentar estos problemas por los pasillos, se le veía que les llamaban la atención y estaban haciendo matemáticas.

Véase este ejemplo:

Problema de la semana "Semana 1"

¿Qué "fórmula secreta" se utiliza para obtener cada resultado a partir de los números iniciales?

8809 = 6	7111 = 0	2172 = 0	6666 = 4
1111 = 0	3213 = 0	7662 = 2	9312 = 1
0000 = 4	2222 = 0	3333 = 0	5555 = 0
8193 = 3	8096 = 5	7777 = 0	9999 = 4
7756 = 1	6855 = 3	9881 = 5	5531 = 0

2581 = ?

- ***Matemátic@ del mes***. A lo largo de un mes, cada tres o cuatro días, se iban poniendo pistas sobre la vida de un matemático/a famoso/a y los alumnos/as tenían que adivinar a quién nos estábamos refiriendo. La experiencia vale mucho la pena, ya que con ella se complementa una parcela, la historia de las matemáticas, que por desgracia muchos de nosotros no contamos muchas veces por falta de tiempo y otras por desconocimiento. Nos ha llamado la atención el interés mostrado por los alumnos en esta actividad e incluso por otros profesores que no son de la disciplina de Matemáticas. Véase este ejemplo:

PISTA 1

Se hizo pasar por un hombre para poder estudiar matemáticas

PISTA 2

Se carteaba con grandes matemáticos de su época, que reconocieron su valía

PISTA 3

Tiene sus propios números primos

PISTA 4

Le iban a otorgar el grado de doctora, pero murió antes de poder recibirlo

PISTA 5

Contribuyó a la demostración del famoso "Último Teorema de Fermat", demostrándolo para cierto tipo de números

PISTA 6

Sus padres se opusieron a que estudiara matemáticas

- ***Curiosidades matemáticas***. En este apartado tenían cabida noticias recogidas de periódicos e Internet relacionadas con las matemáticas. Así mismo, también realizábamos pequeños artículos sobre películas y libros que tuvieran relación con las matemáticas. Esta actividad, en un principio la pensamos llevar a cabo solamente nosotros, pero luego nos dimos cuenta que sería más enriquecedor si hacíamos extensiva la participación a todo el centro. Así, para ello creamos una plantilla con los epígrafes clave que debían recoger los artículos y así, poco a poco y de forma voluntaria alumnos/as y profesores de otras disciplinas nos sorprendían con sus aportaciones.

Véase este ejemplo de artículo:

La relación de las matemáticas con Google

A pesar de que el uso del buscador Google está muy extendido entre los internautas, no es tan conocido de dónde proviene el nombre. Según explica la propia compañía, la palabra Google proviene del término matemático "**googol**", un número gigantesco representado por el dígito 1 seguido de cien ceros (El término googol fue acuñado en 1938 por Milton Sirotta, un niño de nueve años, sobrino del matemático estadounidense Edward Kasner). Los fundadores del buscador más famoso del mundo, Sergey Brin y Larry Page, "eligieron este nombre haciendo alusión a la gran cantidad de información que existe en el mundo". Tanto Brin como Page siempre han proclamado que la misión de Google consiste en "organizar esta información" y conseguir "hacerla universalmente accesible y útil" para los usuarios.

CONCURSO DE POSTALES MATEMÁTICAS NAVIDEÑAS

El Concurso de Postales Matemáticas Navideñas fue una idea un poco loca que surgió al ver como el Departamento de Inglés elaboraba postales para felicitar la Navidad y pensamos que, por qué no hacíamos nosotros algo parecido, postales matemáticas para felicitar la Navidad. El primer año el concurso tuvo poca participación pero no por ello lleno de originalidad y gracia: Papá Noel explicando matemáticas en una pizarra, unos Reyes Magos que son números, un compendio de números recortados de las diversas ofertas de supermercados y grandes superficies, un árbol de Navidad hecho de números, una "nevada" de números, etc. Sin embargo el segundo año el concurso fue un éxito de participación y un derroche de imaginación y creatividad de nuestros alumnos/as. Pongamos por ejemplo la postal ganadora que presenta en la portada un árbol de Navidad que resulta ser un triángulo de Tartaglia, y en su interior aparecen diversos polígonos y figuras geométricas tocando instrumentos musicales para celebrar la Navidad.

FOTOGRAFÍA NÚMERO 7
LEYENDA "POSTAL GANADORA DEL CONCURSO"

CONCURSO CIFRAS Y LETRAS

Nuestro grupo de trabajo en colaboración con el Departamento de Lengua y Literatura, propuso un concurso similar al juego "Cifras y Letras". Se hacían equipos de dos alumnos y tenían que competir entre ellos. Primero se hizo una liguilla y los clasificados pasaron a una semifinal y de ahí a la final. Hubo varias categorías por niveles: primer ciclo de la ESO, segundo ciclo de la ESO y Bachillerato. El juego que seguía la misma dinámica que el conocido programa constaba de varias pruebas de letras y de cifras: En la de "Letras" debían con 9 letras formar la palabra más larga; y en la de "Cifras" debían con 6 números debían obtener otro número de tres cifras o aproximarse lo más posible a él. La liguilla de clasificación y la semifinal se planteó en los recreos, y no sólo los alumnos/as participantes renunciaron a perderse el descanso del día en el que concursaban sino que además la actividad contaba con público. La fase final se realizó el día en el que el centro celebra el día de Andalucía y ésta fue para orgullo nuestro, una de las actividades estrella y de las que contó con mayor número de asistentes.

CONCURSO DE FOTOGRAFÍA MATEMÁTICA

En un lugar con tanto encanto como es Isla Cristina, donde la luz llena cada recoveco y donde los bellos atardeceres cautivan para siempre, nos propusimos celebrar un concurso de fotografía que tuviera a las matemáticas como tema central. Son muchos a los que un concurso de esta temática les suena como algo raro y hace que realmente no sepan lo que fotografiar, por ello vimos necesario incluir en las bases una pequeña explicación de lo que se pretendía con el concurso.

Aunque en un principio creímos conveniente por comodidad cerrar la participación a los alumnos/as de nuestro centro, finalmente hicimos extensivo a todo el pueblo de Isla Cristina haciendo especial hincapié en los centros educativos de la localidad, a saber, colegios e instituto. Esto repercutió, como no podía ser de otra manera en una gran participación que hizo que pensáramos en exponer las fotografías en algún lugar público para que pudieran ser vistas por todo el mundo. A esto se brindó "El Centro de Mayores de Isla Cristina", lo cuál nos pareció una excelente idea, y allí estuvieron expuestas las fotos durante todo un mes para alegría de los abuelos de Isla Cristina.

Mostramos aquí algunas fotografías sobre el concurso:

FOTO NÚMERO 1
LEYENDA: "OCHO. FOTOGRAFÍA GANADORA"

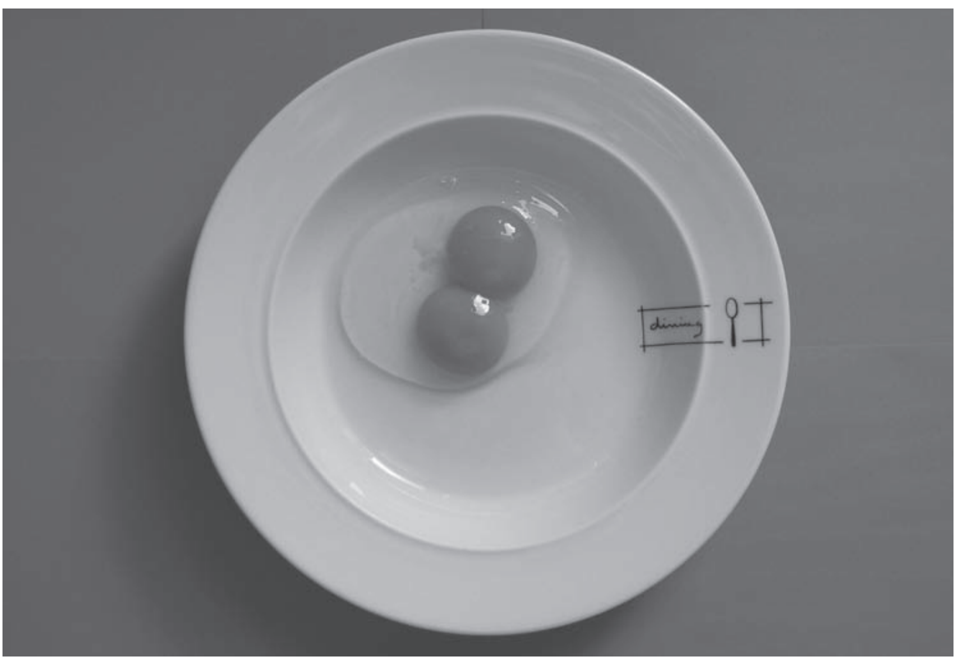


FOTO NÚMERO 2
LEYENDA: "LA ESPIRAL DEL TIEMPO"

FOTO NÚMERO 3
LEYENDA "SUMA"

FERIA DE LA CIENCIA DE SEVILLA

Como antes decíamos, éste era el objetivo más importante de nuestro proyecto, y desde luego de los más ilusionantes, la participación con un stand, que luego llamaríamos "Matemáticas por todas partes" en la Feria de la Ciencia de Sevilla. Nuestra gran baza, la idea de preparar a los alumnos/as ayudantes, que serían nuestro factor humano.

FOTOGRAFÍA NÚMERO 6
LEYENDA "NUESTRO FACTOR HUMANO"

Así, el grupo de trabajo se encargó de elaborar fichas con información sobre cada uno de los juegos y actividades que presentábamos y que luego los alumnos/as ayudantes debían trabajar y practicar. Conforme íbamos trabajando aparecieron nuevos retos, como el de presentar nuestro trabajo a algunos colegios e incluso participar en la Semana de la Ciencia de Isla Cristina. A todo dijimos que si, y aunque aún había muchas cosas que no habíamos terminado, realmente fueron buenas pruebas para la posterior participación en la Feria de la Ciencia.

Bueno, finalmente llegó el día y nuestro autobús salió camino de Sevilla, serían tres días en los cuáles nuestros alumnos/as ayudantes presentarían a toda aquella persona que se acercara a nuestro stand "Matemáticas por todas partes" el trabajo desarrollado.

Entre las actividades que presentamos se encontraban:

- **Pentominós, Tangram clásicos y Tangram ovalado**: En esta actividad se pedía a los participantes que contruyeran diferentes figuras con las piezas con distintos niveles de dificultad.

- **Cubo Soma**: Fabricamos una versión de este juego en madera, en la cual se pedía que se formara un cubo a partir de distintas piezas.
- **El Juego de las 8 Reinas**: Se pedía a los visitantes que intentaran colocar el mayor número de reinas en un tablero de ajedrez sin que puedan ser capturadas entre ellas.
- **El juego del solitario**: Para este tradicional juego diseñamos fichas con diferentes posiciones en las cuáles iba aumentando el nivel de dificultad hasta llegar al juego completo.
- **Los nueves hombres de Morris:** Quizás uno de los juegos de estrategia más antiguos del mundo, elaborado también el Taller de Plástica en madera.
- **La mancala**: Este juego lo construimos gracias al Departamento de Plástica que en el taller de Cerámica hizo mancalas con diferentes formas. Fue una auténtica atracción, y siempre había gente jugando a éste divertido y entretenido juego basado en la captura y la recolección de semillas que se encuentran depositados en los hoyos que forman el tablero.

FOTOGRAFÍA NÚMERO 5
LEYENDA "LA MANCALA"

- **Un planetario**: Diseñamos un pequeño planetario hecho a escala en el cual se debía colocar los planetas sabiendo la distancia al Sol en notación científica de cada uno de ellos. Así mismo, los alumnos explicaban como para algunos planetas se cumple la curiosa Ley de Bode.

- **Juego "Trivial de Astronomía y Matemáticas"**: El juego que sigue la misma dinámica que el trivial se diferencia de éste en el tipo de preguntas. Los temas de nuestras preguntas eran: Historia de las Matemáticas, Curiosidades matemáticas, Astronomía Básica, Contenidos matemáticos de la ESO.

CONCLUSIÓN

A veces el contexto en el que debes de dar clase te obliga a adaptarte a él, a crear situaciones y formas de trasmitir conceptos y procedimientos que se alejan de los tradicionales, pero que ni mucho menos son peores o aprenden menos. La maestría del profesor está ahí en saber conjugar unos con otros y en crear un ambiente en clase y fuera de ella que haga que las matemáticas sean disfrutadas por sus alumnos/as y que las vean como una disciplina llena de belleza. De la intención de mejorar nuestras clases y hacerlas más atractivas surgió todo esto, y aunque sabemos que queda mucho por hacer, sabemos también que algo hemos conseguido. Sólo nos queda por último agradecer al ayuntamiento de Isla Cristina y al Director del IES Padre José Miravent toda la ayuda que siempre nos ha brindado.

BIBLIOGRAFÍA PARA OBTENER IDEAS Y RECURSOS

Fernández, G. y Carcavilla, J. L. (1989). *Historia de las Matemáticas en cómic*. 2ª Edición. Armilla: Proyecto Sur.

Mataix, S. (1999). *Matemática es nombre de mujer*. Barcelona: Editorial Rubes.

Stewart, I. (2008). *Historia de las Matemáticas en los últimos 10.000 años.* Barcelona: Crítica.

Capó, M. (2007). *101 juegos de lógica para novatos*. Madrid: Nivola.

Dudeney, H. (2007). *Acertijos, desafíos y tableros mágicos*. Barcelona: RBA.

Mazza, F. (2009). *El Gran libro de los enigmas: rompecabezas y juegos de lógica.* Barcelona: RBA.

Norman L. C. (2008). *El país de las mates para novatos.* 2ª edición. Tres Cantos: Nivola.

Segarra, L. (2007). *Juega y sorpréndete con las matemáticas.* Barcelona: Círculo de Lectores.

Páginas Web:

http://www.krazydad.com/puzzles.php

http://www.elpais.com/

http://www.20minutos.es/

http://masquemates.blogspot.com

http://www.muyinteresante.es/

http://www.microsiervos.com/

http://www.sectormatematica.cl/olimpiadas.htm

http://www.divulgamat.net/

Otra forma de aprender: los poliedros regulares

Lucía Guillén Portales
IES Bahía de Algeciras

Resumen: *Con motivo de la Semana Cultural de mi Instituto, desde el Departamento de Matemáticas surgió la idea de realizar un taller de Cuerpos Geométricos y que de esta forma el alumnado conociera todos los elementos presentes en los mismos.*

DESCRIPCIÓN DE LA ACTIVIDAD

Siempre existe una forma alternativa de aprender, si ésta es divertida, los alumnos y alumnas se acercarán a descubrir un nuevo mundo. Esto ocurrió cuando nos planteamos otra forma de enseñar algunos cuerpos geométricos, en forma de taller, en la Semana Cultural de mi centro. Paso a paso describo todo el proceso de la construcción de los cinco poliedros regulares.

Lo primero que hicimos fue pensar sobre los materiales que necesitaríamos y cómo elaboraríamos las figuras, que luego tendríamos que explicar a los alumnos.

Decidimos que construiríamos los cinco poliedros regulares, de tal forma que los alumnos pudieran contar los vértices y las aristas de forma más visual y táctil. Por lo tanto los materiales fundamentales serían tubos de PVC, que harían el papel de aristas, y luego papel celofán, papel de cocina y cola. También necesitaríamos una segueta para cortar los tubos a la medida deseada y pinturas de colores para una vez construidas las figuras, pintarlas. Para comprar el número de tubos exactos, decidimos la medida de cada uno de los poliedros, midiendo las aristas del tetraedro, hexaedro y octaedro, 50 cm y las del dodecaedro e icosaedro, 25 cm. Una vez decidida la medida nos dispusimos a la compra de los materiales para que todo estuviera listo el día del taller, que duraría dos días.

En la Semana Cultural, se ofertan numerosos talleres, por lo que los profesores del centro se reparten para dar cobertura a todos. Los profesores del Departamento abrimos el taller de Cuerpos Geométricos, donde teníamos todos los materiales necesarios. La mayoría de los alumnos y alumnas con los que contamos el primer día eran de 1º y 2º ESO, por lo que antes de empezar con la construcción tuvimos que introducir unas ideas básicas sobre los poliedros y les facilitamos unas fichas donde aparecían los poliedros desarrollados, para que se hicieran un esquema mental de lo que teníamos que hacer. Decidimos que empezaríamos con la construcción del tetraedro, hexaedro y octaedro.

PRIMERA FASE: CORTAR LOS TUBOS

Con la segueta en la mano, los alumnos tenían que calcular cuántos tubos tenían que cortar para construir el tetraedro y el hexaedro. Se formaron dos grupos, construyendo cada uno de ellos una figura. EL primero de los grupos cortó seis aristas y el segundo doce, cada una de 50 cm.

SEGUNDA FASE: ¿CÓMO CONSTRUIMOS LOS POLIEDROS?

Teniendo en cuenta el desarrollo plano de las figuras, cada grupo comenzó a unir los tubos con ayuda de papel celofán, el primero de los grupos formó en primer lugar un triángulo y el segundo grupo un cuadrado. Luego fueron colocando el resto de los tubos para obtener el tetraedro y el hexaedro.

TERCERA FASE: COLA Y PAPEL

Una vez que teníamos el esqueleto de los poliedros, llegó el momento de destacar los vértices, para ello utilizamos papel y cola y envolvimos las figuras hasta que quedaron completamente cubiertas. Esto nos permitiría pintarlas después. En esta fase, los alumnos se divirtieron mucho, ya que no era tarea fácil que el papel quedará fijado en los tubos de PVC y los vértices y tuvieron que insistir y realizar varias veces la tarea.

FIGURA 1
OCTAEDRO A FALTA DE SER PINTADO

CUARTA FASE: SECADO

Ya teníamos los dos poliedros y nos quedaba pintarlos, pero teníamos que dejarlos secar ya que aún estaban mojados de la cola.

La primera parte del taller estaba hecha. Los dos grupos de alumnos se marchaban a otros talleres, aunque todos querían volver al día siguiente para terminar de realizar su trabajo.

Los profesores, con ayuda de los alumnos, recogimos el aula, limpiamos todo y preparamos de nuevo el material, para los nuevos alumnos que llegaban al segundo turno del taller.

Era como si el taller comenzara de nuevo, aunque la tarea de explicarles lo que queríamos construir era más sencilla, ya que teníamos los dos poliedros montados, el tetraedro y el hexaedro. Llegaba el momento de construir los demás poliedros regulares. Los nuevos grupos decidieron que construirían el octaedro y el dodecaedro. Esta vez, el trabajo era más complicado, tenían que cortar más tubos y la construcción del esqueleto de la figura requería más ayuda de todos los miembros del grupo.

En la primera fase, los alumnos estuvieron contando cuántas aristas tendrían que cortar y en la segunda fue cuando surgiendo los primeros inconvenientes. El grupo del octaedro no tuvo demasiados problemas, ya que se fijaron en el tetraedro ya construido. Pero el grupo que construiría el dodecaedro, empezó a dudar sobre cómo hacerlo. En ese momento explicamos las características del triángulo y lo estable que es, a diferencia del pentágono. Ayudamos a la construcción del dodecaedro, que evidentemente, no estaba rígido como el resto de las figuras, sino que estaba más deforme, dada su dificultad. Una vez que tenían el esqueleto, procedieron a la tercera y cuarta fase. (Ver figura 2).

Se terminaba el primer día del taller y todos los profesores del Departamento estábamos muy satisfechos con los resultados. Los alumnos habían estado muy motivados, habían comentado con el resto de compañeros la construcción de los poliedros y fueron numerosos alumnos de otros talleres los que se acercaron al nuestro para ver qué estaban haciendo. Muchos preguntaban con curiosidad qué eran aquellas figuras y nosotros aprovechamos la ocasión para explicar las diferencias entre las figuras planas y los cuerpos geométricos. Por primera vez desde que entré en el centro, dejé de escuchar que los tetraedros eran triángulos y los cubos cuadrados, ¡qué satisfacción! Terminaba el trabajo más duro y ahora quedaba pintar las figuras.

Al comenzar el segundo día del taller, ya teníamos a numerosos alumnos esperando. Algunos del día anterior y otros nuevos alumnos que preguntaban interesados si ellos podrían construir algo. Aún nos quedaba construir el icosaedro y cuatro alumnos decidieron que ellos lo harían. El resto de alumnos procedió a pintar las figuras que ya estaban secas.

FIGURA 2
DODECAEDRO, ANTES DE COLA Y PAPEL

QUINTA FASE: PINTADO DE LAS FIGURAS

Dos alumnos comenzaron a pintar el octaedro y cuál fue mi sorpresa, que se unieron a ellos dos de los alumnos más disruptivos del centro; estaban interesadísimos, preguntaron por las características de esas figuras y estuvieron todo el taller pintando y entre ellos se decían: "pinta el vértice de negro y tú las aristas de rosa"; los profesores estábamos muy contentos de que alumnos que diariamente en clase no se interesan por la materia estuvieran aprendiendo sin darse cuenta los cuerpos geométricos. (Ver figura 3).

Así transcurrió la mañana, con el pintado de los poliedros y la construcción del icosaedro.

El taller terminó y pensamos que sería una buena idea colocar los poliedros en un lugar visible, ya que en todos los cursos íbamos a empezar con el bloque de Geometría y los alumnos podrían observar las figuras para estudiar sus elementos y características.

En los siguientes días, un grupo de alumnos colaboró para terminar de pintar el icosaedro, de forma que ya teníamos los cinco poliedros regulares perfectamente terminados.

FIGURA 3
PINTANDO EL OCTAEDRO

Dada la forma y distribución de las aulas en nuestro centro, podríamos colgarlas, como veréis en la fotografía que muestro al final. Con tanza, colocamos las cinco figuras y fue un éxito. Los alumnos que habían colaborado en su construcción, lo decían orgullosos y a lo largo del tercer trimestre casi todos los alumnos del centro, salieron de sus aulas en las clases de matemáticas para contar las aristas, las caras o los vértices de los poliedros.

FIGURA 4
POLIEDROS EN EL AIRE

Los compañeros del centro nos dieron la enhorabuena al Departamento por el interés que había suscitado el taller y por los resultados.

BALANCE FINAL

Todos los profesores del Departamento, fuimos conscientes, una vez más, que enseñar de forma divertida es mucho más sencillo y que no sólo se aprende con la realización de ejercicios, por lo que nos propusimos acercar nuestra asignatura a los alumnos de una forma diferente, aunque sea durante una semana del curso. Todo es empezar.

Epsilón - *Revista de Educación Matemática* *2010, Vol. 27(2), nº 75, pp. 123-135*

Evaluación mediante competencias digitales: una experiencia con Mathematica

Ángel F. Tenorio Villalón, Concepción Paralera Morales y Ana M. Martín Caraballo

Resumen: *A continuación presentamos una experiencia de evaluación de las competencias digitales y electrónicas del alumnado en la asignatura de Fundamentos Matemáticos de la Informática II haciendo uso del programa de cálculo simbólico Matemática 7.0. Con ello se pretendía además de la evaluación de las competencias citadas, que los alumnos fuesen capaces de resolver de forma razonada una serie de problemas propuestos en las aulas de informática habilitadas para ello. Como ejemplo de trabajo, se ha descrito el tema de la Factorización LU.*

INTRODUCCIÓN

La Universidad Pablo de Olavide desarrolla desde hace seis años su actividad en el Espacio Europeo de Educación Superior. Desde entonces, los profesores y alumnos vienen hablando y trabajando en competencias. El proceso de adaptación al mismo no ha sido fácil, pero los resultados han sido buenos. La Universidad ha hecho posible que el profesorado pueda formarse mediante diferentes cursos orientados a los nuevos conceptos y métodos de la Educación Superior en el Marco Europeo.

Fruto de estos años de innovación, se ha desarrollado un Nuevo Modelo Docente. El objetivo es que profesores y estudiantes constituyan un equipo con el fin de llegar a una buena transmisión de conocimientos, adquisición de competencias y el éxito de la formación.

Los alumnos se encontrarán agrupados en tres niveles de organización docente, con grupos de 60, 20 y 10 alumnos, en los que se desarrollarán actividades diferentes (clases magistrales, actividades prácticas, seminarios, etc.).

La Universidad Pablo de Olavide ha venido trabajando para transformar el 90% de sus títulos actuales de Licenciatura y Diplomatura en Grados Universitarios para el presente curso académico, así los estudiantes podrán estudiar Programas Formativos integrados en el Espacio Europeo de Educación Superior.

El Grado es un Título Universitario Superior que sustituye a las Licenciaturas y a las Ingenierías (BOE, 2005, 2007). En nuestra universidad se formarán los nuevos graduados en Administración y Dirección de Empresas, Biotecnología, Ciencias Ambientales, Ciencias de la Actividad Física y del Deporte, Ciencias Políticas y de la Administración, Derecho, Finanzas y Contabilidad, Humanidades, Nutrición Humana y Dietética, Relaciones Laborales y Recursos Humanos, Sociología, Trabajo Social y Traducción e Interpretación. Al finalizar los estudios los estudiantes obtendrán el Suplemento Europeo al Título (SET) que especificará todas las materias y asignaturas cursadas, con su equivalencia en Créditos Europeos (ECTS), y su versión inglesa (BOE, 2003).

En el caso de nuestra Ingeniería ITIG, el Grado en Informática se pondrá en marcha para el próximo curso 2010/2011.

Sabiendo la relevancia del uso de las nuevas tecnologías y de la fuerte apuesta que ha realizado la Universidad Pablo de Olavide en ellas, se impone en las nuevas titulaciones el desarrollo de la competencia digital. Un claro ejemplo de ello es la virtualización de asignaturas, creando los campus virtuales, haciendo uso por defecto de las plataformas en las asignaturas o implantando modalidades semivirtuales de algunas titulaciones (Aquino, Fedriani, Melgar, Paralera y Tenorio, 2006).

En este trabajo, planteamos cómo se trabaja y evalúa una asignatura de contenido matemático, con la ayuda de un programa de cálculo simbólico.

MODELO DE TRABAJO CON EL ALUMNADO

La asignatura de Fundamentos Matemáticos de la Informática II forma un bloque de materias junto con la asignatura Estadística (también Asignatura Troncal de 2º curso) y Fundamentos Matemáticos de la Informática I (Asignatura Troncal de 1er curso) que proveen a los alumnos de un conocimiento introductorio de las técnicas y herramientas matemáticas y estadísticas necesarias en su futuro académico y profesional (ANECA, 2005).

El carácter de la asignatura es esencialmente instrumental, destacando la utilización de software matemático como apoyo en la resolución de problemas, además los contenidos explicados han de ayudar al estudiante en su formación técnico-científica, aportando un lenguaje y metodologías propias de las disciplinas científicas.

Por tanto, se espera que esta asignatura sirva para que el alumno desarrolle sus habilidades en el razonamiento lógico y en la comprensión del lenguaje formal. Por otro lado, en esta asignatura se intenta transmitir además la necesidad de resolver problemas, proporcionando a los alumnos procesos eficaces de pensamiento que no se vuelven obsoletos o antiguos.

Para conseguir los objetivos propuestos la metodología docente se realiza de la siguiente forma:

- **Clases presenciales:** Se trabajará, por lo general, desde la perspectiva del aprendizaje significativo, por tanto, se hace imprescindible la asistencia a clase por los alumnos, así, el alumno irá construyendo su conocimiento a partir de la documentación e información ofrecida por el profesorado de la asignatura.

Las clases presenciales serán de tres tipos:

- Enseñanzas Básicas (clases teóricas de 1 hora por semana): En estas clases se desarrollarán los contenidos teóricos del programa mediante lecciones magistrales. La participación activa del alumno mediante preguntas y sugerencias se considera fundamental para una mejor asimilación de los contenidos impartidos. Los cuatro subgrupos de la asignatura formarán un único grupo para estas sesiones.
- Actividades Prácticas y de Desarrollo o APD (una clase de 2 horas cada dos semanas): Estas sesiones se realizarán en aulas de informática y en ellas se resolverán en la pizarra ejercicios relacionados con los contenidos teóricos explicados en las Enseñanzas Básicas y se darán procedimientos para su resolución con el paquete de cálculo simbólico *Mathematica 7.0* y el programa *Grin 4.0*.
- Actividades académicas dirigidas (se darán 12 horas al año, repartidas en tres sesiones cada cuatrimestre): Se realizarán actividades individuales y/o grupales que se harán a lo largo del curso en 6 seminarios de 2 horas de duración cada uno. En estos seminarios los alumnos tendrán que presentar a sus compañeros y al profesor trabajos que se han realizado de forma individual o grupal y que habrán sido tutorizados por el profesor. Estos trabajos persiguen, además del perfeccionamiento de los conocimientos propios de la materia, impulsar entre el alumnado la búsqueda de información, su análisis y síntesis; plantear problemas reales para que el alumno aprenda a enfrentarse a ellos a través del método más adecuado; fomentar el trabajo en grupo y desarrollar la capacidad de exponer públicamente de forma cuidada y efectiva, a la vez que concisa, los objetivos del trabajo y los resultados obtenidos, utilizando el vocabulario específico de la materia.

* **Tutorías personalizadas:** Serán opcionales para los alumnos. En ellas, el profesor debe tratar de orientar el estudio personal del alumno que lo necesite, aclarar las dudas que le puedan surgir en relación con los contenidos de la asignatura, corregir hábitos y conceptos mal adquiridos, recuperar los niveles de conocimiento de los alumnos con escasa formación previa y facilitar bibliografía adicional.
* **Trabajo personal autónomo del alumno:** El alumno debe asimilar los conocimientos transmitidos y construidos en las clases presenciales.
* **Realización de exámenes:** Los exámenes constarán de preguntas teóricas y prácticas, en ellos, el alumno deberá demostrar los conocimientos adquiridos sobre la asignatura y la utilización del software matemático que se em-

plea en ella. Aunque no toda la asignatura se evaluará mediante exámenes escritos, para una mejor descripción de la evaluación de la asignatura ver lo referente a las técnicas de evaluación.

UN EJEMPLO DE TRABAJO CON EL ALUMNADO

A continuación se muestra cómo trabajamos con el paquete de cálculo simbólico Mathematica los conceptos en una APD del cuatrimestre de Cálculo Numérico que se imparte en la ITIG. Debe tenerse en cuenta que el planteamiento de la APD y de los problemas de la misma está basado en el sistema de evaluación de los conocimientos que tendrá que afrontar el alumnado. Concretamente, nos centramos en un tratamiento computacional de problemas asistido con la ayuda del software anteriormente indicado. Por tanto, estaríamos hablando de que de este modo, el alumnado tendrá que resolver una serie de problemas (con dificultades similares a las vistas en clase) empleando los conocimientos, procedimientos y técnicas tratados en los tres tipos de sesiones presenciales.

Desarrollaremos mediante un ejemplo el tratamiento hecho con problemas relativos a la resolución de sistemas de ecuaciones lineales y, más concretamente, usando la factorización LU. Dichos sistemas se supondrán compatibles determinados ya que si es compatible indeterminado se pasaría una o varias de las incógnitas como parámetro a los términos independientes (dependiendo del grado de libertad del sistema) y podríamos trabajar el sistema como si fuese compatible determinado.

Por tanto, previamente a ver cómo tratamos este tipo de problemas en clase, recordaremos estos métodos y algunos resultados esenciales relativos a ellos. Esta parte teórica se les impartiría a los alumnos previamente en sesiones de EB.

Factorización Lu

Empezamos recordando la factorización LU de una matriz cuadrada $A \in M_n(\Re)$. Dada la matriz A se dice que la matriz es LU-factorizable si existen dos matrices L y $U \in M_n(\Re)$ tales que: $A=L \cdot U$, siendo L una matriz triangular inferior con diagonal principal de 1 y U una matriz triangular superior.

Si tenemos un sistema de n ecuaciones con n incógnitas tal que su matriz de coeficientes es A, dicho sistema se expresaría como sigue, siendo $\vec{x}$ el vector de incógnitas y $\vec{b}$ el vector de términos independientes:

$$A \cdot \vec{x} = \vec{b} \tag{1}$$

En caso de existir la factorización LU de la matriz A, el sistema anterior podría escribirse de la siguiente forma:

$$L \cdot (U \cdot \vec{x}) = \vec{b} \tag{2}$$

Obsérvese que el sistema de ecuaciones (2) podría resolverse en las siguientes dos etapas:

- ***Etapa 1:*** Se resuelve el sistema $L{\cdot}\vec{y}=\vec{b}$, consistente en un sistema cuya matriz de coeficiente asociada es triangular inferior (y por tanto escalonada) y con pivotes iguales a 1. Con lo cual, estamos en la matriz correspondiente al último estadio del método de Gauss considerando que empezamos a tomar los pivotes por la última columna y por la última incógnita. Obviamente resolver un sistema del tipo $L{\cdot}\vec{y}=\vec{b}$ es sumamente sencillo, pues solo hay que despejar la incógnita de la primera ecuación, sustituirla en la segunda, despejar la incógnita que queda en dicha ecuación, sustituir las incógnitas calculadas en la tercera ecuación y seguir con el proceso hasta despejar todas las incógnitas. Obtenemos de este modo el valor del vector de incógnitas auxiliares $\vec{y}$.
- ***Etapa 2:*** Se resuelve el sistema $U{\cdot}\vec{x}=\vec{y}$. Obsérvese que el vector de incógnitas $\vec{y}$ que aparecía en la etapa anterior correspondía al producto $U{\cdot}\vec{x}$ en la expresión (2). Por tanto, una vez conocido el valor del vector $\vec{y}$, podemos calcular el valor del vector $\vec{x}$ con la resolución del sistema $U{\cdot}\vec{x}=\vec{y}$. Nótese que la matriz de coeficientes U de este sistema es triangular superior (y, por tanto, nuevamente escalonada) por lo que estamos otra vez en el último estadio del método de Gauss (esta vez en la manera habitual aunque los pivotes no serán necesariamente iguales a 1). Por tanto, nuevamente estamos ante un sistema bastante sencillo de resolver. Obtenemos de este modo el valor del vector de incógnitas $\vec{x}$ del sistema.

Obsérvese que una vez obtenida la factorización LU de la matriz A (si esta existe), podemos emplearla para cualquier sistema que la tenga como matriz de coeficientes. Por tanto, el problema de resolver el sistema que tiene a la matriz A como matriz de coeficientes se reduciría a resolver dos sistemas cuyas respectivas matrices de coeficientes ya están escalonadas. Y estos sistemas son mucho más sencillos de resolver. Además, cuando ya se tiene calculada la factorización LU y el sistema a resolver es muy grande, el número de operaciones disminuye considerablemente usando dicha factorización con respecto al uso de método de Gauss o de Gauss-Jordan.

Cuando uno trabaja con factorizaciones LU para resolver un sistema de ecuaciones lineales, debe tenerse en cuenta que no todas las matrices admiten dicha factorización. No obstante, esto no es un problema para usar la factorización LU en la resolución de sistemas de ecuaciones lineales debido al siguiente resultado:

Teorema: Si el sistema (1) puede resolverse con el método de Gauss sin intercambiar filas, entonces puede obtenerse una factorización LU de la matriz de coeficientes A.

Por tanto, si la matriz A no es LU-factorizable, solo se requerirá intercambiar filas de la matriz A para obtener una matriz que sí será factorizable. Estos cambios de fila se traducen en el sistema como cambios en el orden de las ecuaciones.

En consecuencia, siempre podremos resolver un sistema de ecuaciones lineales dado por la factorización LU. En el peor de los casos, lo único que tendremos que hacer es reordenar previamente las ecuaciones.

Ejemplo del tratamiento de este tipo de problemas

A continuación, pasamos a explicar cómo trabajamos este tipo de problemas con los alumnos haciendo uso del paquete de cálculo simbólico Mathematica. Para ello, creemos que lo más oportuno es hacerlo con algunos de los problemas que trabajamos en clase.

Consideremos el sistema de ecuaciones dado de la siguiente forma:

$$\begin{cases} 2.01x + y + 2z = 5.01 \\ 2x + 3y + 2z = 7 \\ 4x + 16y + 4z = 24 \end{cases}$$

y veamos el tipo más completo de enunciados que podemos plantearles a nuestros estudiantes al respecto de la factorización LU, indicando la resolución del ejemplo propuesto y cómo se usaría Mathematica en dicha resolución:

Problema: Obtén la factorización LU para la matriz de coeficientes del sistema anterior y resuelve el sistema con dicha descomposición.

Resolución: En un primer estadio, los alumnos tendrán que expresar el sistema de forma matricial:

$$\begin{pmatrix} 2.01 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \\ 4 & 16 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5.01 \\ 7 \\ 24 \end{pmatrix} \tag{3}$$

Una vez hecho esto, factorizarán la matriz de coeficiente:

$$A = \begin{pmatrix} 2.01 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \\ 4 & 16 & 4 \end{pmatrix}$$

haciendo uso del software Mathematica (del que emplearemos el código correspondiente a la versión 7). De este modo, lo primero que tendremos que hacer con Mathematica es definir la matriz A:

```
In[1]:= a := ( 2.01  1  2
               2     3  2
               4    16  4 )

In[2]:= {lu, p, cn} = LUDecomposition[a]

Out[2]= {{{4., 16., 4.}, {0.5025, -7.04, -0.01}, {0.5, 0.710227, 0.00710227}}, {3, 1, 2}, 6262.8}

In[3]:= MatrixForm[lu]

Out[3]//MatrixForm=
( 4.       16.       4.
  0.5025   -7.04     -0.01
  0.5      0.710227  0.00710227 )
```

Los estudiantes no tienen que calcular las matrices L y U de la factorización a mano, sino que pueden usar el comando **LUDecomposition** para dicho cálculo. Nótese que la salida del comando **LUDecomposition** está formada por tres datos que se guardan en tres variables (y que para el tipo de problemas que consideraremos solo se requieren los dos primeros datos obtenidos con el comando). La primera salida corresponde a la expresión abreviada de la factorización LU y se guarda en la variable **lu** del **Out[2]**. Dicha matriz aparece como la salida **Out[3]** escrita de forma matricial y representa que la factorización LU viene dada por las matrices:

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.5025 & 1 & 0 \\ 0.5 & 0.710227 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad U = \begin{pmatrix} 4. & 16. & 4. \\ 0 & -7.04 & -0.01 \\ 0 & 0 & 0{,}007 \end{pmatrix}$$

Por tanto, simplemente con el comando **LUDecomposition** se obtendría una factorización LU. Pero, y aquí es donde veremos si los alumnos han entendido el procedimiento LU aunque no factoricen manualmente la matriz y el cálculo lo haga el ordenador, tienen que ver si la factorización LU obtenida corresponde a la matriz A que tenían o si esta factorización corresponde a otra matriz obtenida mediante intercambio de filas. Este dato lo obtienen de la segunda salida del comando **LUDecomposition**. La salida que en el **Out[2]** se almacena en la variable **p**. En el ejemplo que hemos puesto, la salida es el vector **{3,1,2}**.

```
In[2]:= {lu, p, cn} = LUDecomposition[a]

Out[2]= {{{4., 16., 4.}, {0.5025, -7.04, -0.01}, {0.5, 0.710227, 0.00710227}}, {3, 1, 2}, 6262.8}
```

Esa salida representa el orden en el que se han tenido que considerar las filas de la matriz A para obtener la factorización LU anteriormente indicada. Por tanto, la matriz que se ha factorizado no es A sino la que se obtiene poniendo como primera fila a la fila 3 de A, como segunda fila a la fila 1 de A y como tercera fila a la fila 2 de A:

$$\begin{pmatrix} 4 & 16 & 4 \\ 2.01 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 9 & 9 \\ 0.5025 & 1 & 0 \\ 0.5 & 0.710227 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4. & 16. & 4. \\ 0 & -7.04 & -0.01 \\ 0 & 0 & 0{,}007 \end{pmatrix}$$

Nos interesará que Mathematica guarde la información en dos matrices (llamadas **l** y **u**) a las matrices L y U así calculadas. Para ello, debe programarse un comando denominado **LUMatrices**, cuyo código viene indicado en el *Documentation Center* del programa y al que los alumnos tienen acceso durante las sesiones de problemas y el examen. A continuación, indicamos cómo obtendrían las matrices L y U con el software:

```
In[4]:= LUMatrices[m_?MatrixQ] :=
          {m - # + IdentityMatrix[Length@m], #} &[
            m * Array[Boole[#1 ≤ #2] &, Dimensions@m]]
        {l, u} = LUMatrices[lu]

Out[5]= {{{1., 0., 0.}, {0.5025, 1., 0.}, {0.5, 0.710227, 1.}}, {{4., 16., 4.}, {0, -7.04, -0.01}, {0, 0, 0.00710227}}}

In[6]:= MatrixForm[l]

Out[6]//MatrixForm=
  1.      0.        0.
  0.5025  1.        0.
  0.5     0.710227  1.

In[7]:= MatrixForm[u]

Out[7]//MatrixForm=
  4.  16.    4.
  0   -7.04  -0.01
  0   0      0.00710227
```

Indicar antes de continuar que no es necesario definir el comando **LUMatrices** para introducir las matrices L y U en el software, sino que también se podrían haber definido directamente tales matrices directamente interpretando correctamente la forma abreviada **lu** de las matrices L y U que devuelve el comando **LUDecomposition**.

Una vez obtenida la factorización LU de una matriz obtenida reordenando las filas de A, podemos usar dicha factorización para resolver el sistema. Debe tenerse en cuenta que el sistema (3) es equivalente al que se obtendría al reordenar las ecuaciones como se indica en el vector **{3,1,2}**, devuelto por el comando **LUDecomposition**. En concreto, el sistema resultante sería el que indicamos a continuación donde se han reordenado tanto las filas de la matriz de coeficientes como la matriz de términos independientes, para mantener las ecuaciones originales:

$$\begin{pmatrix} 4 & 6 & 4 \\ 2.01 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 \\ 5.01 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Usando la factorización LU, el sistema se escribiría como:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.5025 & 1 & 0 \\ 0.5 & 0.710227 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4. & 16. & 4. \\ 0 & -7.04 & -0.01 \\ 0 & 0 & 0,007 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{x} \\ \mathrm{y} \\ \mathrm{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 \\ 5.01 \\ 7 \end{pmatrix} \qquad (4)$$

Ahora emplearíamos nuevamente el paquete Mathematica para resolver dos sistemas:

1) ***Primer sistema:*** resolvemos el sistema determinado por la matriz de coeficientes

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.5025 & 1 & 0 \\ 0.5 & 0.710227 & 1 \end{pmatrix}$$

el vector auxiliar de incógnitas

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4. & 16. & 4. \\ 0 & -7.04 & -0.01 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

y el vector de términos independientes

$$\begin{pmatrix} 24 \\ 5.01 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Obsérvese que lo que se hace es considerar un primer sistema cuya matriz de coeficiente es la matriz L y obtener la solución para el vector de incógnitas auxiliares $(x', y', z')^t$. Para ello, podemos bien resolver el problema despejando manualmente las incógnitas (lo cual hemos descartado en nuestra asignatura) o usando la matriz inversa y realizando los cálculos con ayuda del paquete Mathematica:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \mathrm{L}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 24 \\ 5.01 \\ 7 \end{pmatrix}$$

De este modo, obtenemos que el vector de incógnita auxiliar (salvado como **incogAuxiliar**) es el siguiente:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 \\ -7.05 \\ 0.00710227 \end{pmatrix}$$

2) ***Segundo sistema:*** Ahora resolvemos el sistema determinado por la matriz de coeficientes:

$$U = \begin{pmatrix} 4. & 16. & 4. \\ 0 & -7.04 & -0.01 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

el vector de incógnitas:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

y el vector de términos independientes:

$$\begin{pmatrix} 24 \\ -7.05 \\ 0.00710227 \end{pmatrix}$$

obtenido como solución en el sistema anterior.

Es decir, hacer:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = U^{-1}. \begin{pmatrix} 24 \\ -7.05 \\ 0.00710227 \end{pmatrix}$$

```
In[9]:= Inverse[u].incogAuxiliar

Out[9]= {1., 1., 1.}
```

Por tanto, obtenemos la solución del sistema que buscamos y que viene dada por el vector:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Con todo lo anterior, tendríamos completamente finalizado el problema planteado al alumnado. Obsérvese que no nos centramos en preocuparnos si el alumnado ha realizado bien los cálculos (eso lo hace el software) sino en que el alumnado aplique correctamente el método de factorización LU para la resolución de un sistema de ecuaciones lineales. Deben saber interpretar las salidas del comando **LUDecomposition**. En primer lugar (y esto es optativo dependiendo de que uno les indique que pueden implementar el comando **LUMatrices** al resolver el problema), deben saber interpretar la salida **lu** que recoge la forma abreviada de las matrices L y U y escribirlas por separado; en segundo lugar, deben determinar si el vector **p** que devuelve el comando **LUDecomposition** indica que deben considerarse cambios de filas y en caso de ser necesarias, indicar dichos cambios; tercero, escribir correctamente el sistema factorizado a resolver, intercambiando los términos independientes de la manera adecuada si se tuvieron que realizar cambios de filas para obtener la factorización LU; y finalmente resolver los dos sistemas de ecuaciones dados por las matrices L y U respectivamente.

TÉCNICAS DE EVALUACIÓN

La evaluación de la asignatura se basará en una serie de actividades realizadas durante el curso y no solo en la realización de un examen final escrito. Cada una de estas actividades tendrá un peso distinto en la calificación final de la asignatura, fijado en función de la complejidad de la actividad, así como del esfuerzo y dedicación necesarios por parte del alumno a ésta.

En cada cuatrimestre se evaluarán tanto las enseñanzas teóricas como las prácticas, al igual que las actividades académicas dirigidas. Concretamente, se llevarán a cabo las actividades siguientes:

- Evaluación de las enseñanzas teóricas y prácticas: Se realizará un examen escrito al final de cada cuatrimestre que constará de preguntas teóricas y prácticas, pretendiéndose con ello que el alumno demuestre los conocimientos adquiridos en las clases presenciales y la utilización del software matemático empleado.

  Adicionalmente, al finalizar cada una de las APD, se les envía una serie de problemas complementarios para que profundicen de manera autónoma los problemas tratados en la sesión.

- Evaluación de las actividades académicas dirigidas: En cada cuatrimestre, los alumnos deberán entregar resueltos en los seminarios una serie de ejercicios propuestos por el profesor, de los cuales el profesor designará uno por cada alumno para que lo exponga ante sus compañeros. Por tanto, se valorará tanto la realización como la exposición de dicho trabajo.

  Se evaluará asimismo la capacidad de trabajo en grupo y de exposición oral y pública del alumno, además de la comprensión de la Asignatura, mediante la resolución de problemas, de forma colectiva, propuestos por el profesor y de la respuesta a las cuestiones teóricas que sean planteadas por el profesor a cualquier miembro del grupo.

En cuanto al cuatrimestre tratado en este trabajo, comentar que al alumnado se les cuelga todo el material teórico que se explicarán en las sesiones de teoría, en el que se ejemplificarán los conceptos tratados y las aplicaciones de los resultados explicados. En ocasiones y dependiendo de la dificultad de los conceptos, se cuelgan algunos problemas resueltos para que dispongan de más material a la hora de afrontar el trabajo autónomo y que pueden leer y consultar con detenimiento.

Nos centramos en crearles un hábito de trabajo al tratar un problema. En el caso de los sistemas de ecuaciones, primero se comprobaría si el sistema satisface las condiciones necesarias de los teoremas de convergencia correspondiente al método que se quiere aplicar. Si no lo satisface, comprobaríamos cómo el alumno manipula dicho sistema con transformaciones elementales (por filas y columnas) para obtener un sistema equivalente que sí satisfaga las hipótesis del teorema de convergencia del método y justificar que el método es aplicable. Una vez que el alumno ha justificado la aplicabilidad del método, deberá proceder a la resolución del sistema con ese método asistido por el programa *Mathematica*. Para ello, pueden programar una simple rutina que se encargue de realizar todas las operaciones pertinentes o simplemente escribir manualmente las sentencias que realizan los cálculos necesarios. Debe tenerse en cuenta que nuestro objetivo es evaluar la capacidad de nuestro alumnado para resolver un problema de manera razonada y justificada. También evaluamos los conceptos de precisión y de exactitud en este tipos de problemas, ya que pueden prepararse problemas de tal modo que para obtener una precisión en el resultado final del sistema, puede ser necesario imponer una mayor precisión en los datos de partida que la pedida para el dato final. Debe tenerse en cuenta que los cálculos involucrados en la aplicación del método pueden conllevar un aumento del error en los resultados intermedios y, por tanto, una pérdida de precisión.

En el caso de la factorización LU, el alumno debe estudiar previamente a su aplicación las condiciones iniciales del sistema y determinar si el sistema que tenemos es LU-factorizable o si hemos de considerar otro sistema de ecuaciones equivalente (transformaciones elementales por filas y columnas) que sí sea LU-factorizable. En caso de que sea necesario considerar un sistema equivalente, se debería indicar el nuevo sistema teniendo cuidado que los cambios realizados en la matriz de coeficiente factorizada también se realicen en el vector de términos independientes. Queremos recalcar que el cálculo de las matrices L y U involucradas en la factorización no son realizadas por los alumnos, sino que se calculan con la ayuda de los pertinentes comandos en *Mathematica*. El alumnado debe saber utilizar y aplicar correctamente las matrices resultantes de los cálculos en *Mathematica* al método de resolución trabajado.

CONCLUSIONES

Durante los últimos tres cursos académicos, esta metodología didáctica y evaluativa se ha llevado a la práctica teniendo como resultado que la inmensa mayoría de los alumnos matriculados no abandone la asignatura y supere la misma. Hablando en términos porcentuales, el cuatrimestre de Cálculo Numérico en el curso 2008/2009 presentó un porcentaje de aprobado del 77.4% y una tasa de abandono del 24.2%. La mayoría del alumnado, pese a protestar en principio de la carga de trabajo diario que conlleva este tipo de sistema evaluativo, se muestra receptivo al mismo ya que puede obtener hasta 4.5 puntos de una calificación sobre 10 antes de presentarse a la prueba escrita.

Para el curso próximo con la entrada del grado en Informática de Gestión cabría plantearse la posibilidad de eliminar la evaluación final escrita y pensar solamente en una evaluación mediante las tareas y actividades dirigidas a lo largo del cuatrimestre.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ANECA (2005). *Libro Blanco del Título de Grado en Ingeniería Informática*. Obtenido el 19 de enero de 2008 desde: http://www.aneca.es/activin/docs/libroblanco_jun05_informatica.pdf.

Aquino, N.; Fedriani, E.M.; Melgar, M.C.; Paralera, C. y Tenorio, A.F. (2006). El sistema ECTS aplicado a la asignatura de matemáticas de la licenciatura en administración y dirección de empresas de la universidad Pablo de Olavide. En *actas de las I jornadas nacionales de intercambio de experiencias piloto de implantación de metodologías ECTS* (pp. 8). Badajoz: Universidad de Extremadura.

BOE (2003). Real Decreto 1125/2003 del 18 de septiembre de 2003, núm. 224, por el que se establece el sistema europeo de créditos y el sistema de calificaciones en las titulaciones universitarias de carácter oficial y validez en todo el territorio nacional.

BOE (2005). Real Decreto 55/2005 del 25 de enero de 2005, núm. 21, por el que se establece la estructura de las enseñanzas universitarias y se regulan los estudios universitarios oficiales de Grado.

BOE (2007). Real Decreto 1393/2007 del 30 de octubre de 2007, núm. 260, por el que se establece la ordenación de las enseñanzas universitarias oficiales.

Epsilón - *Revista de Educación Matemática* *2010, Vol. 27(2), nº 75, pp. 137-154*

Problemas en la Resolución de Problemas

F. Damián Aranda Ballesteros
Manuel Gómez Lara

1. JUSTIFICACIÓN

La resolución de problemas es considerada en la actualidad la parte más esencial de la educación matemática. Mediante la resolución de problemas, los estudiantes experimentan la potencia y utilidad de las Matemáticas en el mundo que les rodea.

(Extracto de contenidos sacado de la página web http://platea.pntic.mec.es/jescuder/prob_int.htm)

- El párrafo 243 del Informe Cockroft señala en su punto quinto que la enseñanza de las Matemáticas debe considerar la “resolución de problemas, incluyendo la aplicación de las mismas situaciones de la vida diaria”.
- El N.C.T.M. de Estados Unidos, declaraba hace más de diez años que “el objetivo fundamental de la enseñanza de las Matemáticas no debería ser otro que el de la resolución de problemas”.
- En el libro de Hofsdadter, Gödel, Escher y Bach, se dice que “las capacidades básicas de la inteligencia se favorecen desde las Matemáticas a partir de la resolución de problemas, siempre y cuando éstos no sean vistos como situaciones que requieran una respuesta única (conocida previamente por el profesor que encamina hacia ella), sino como un proceso en el que el alumno estima, hace conjeturas y sugiere explicaciones”.
- Santaló (1985), gran matemático español y además muy interesado en su didáctica, señala que “enseñar matemáticas debe ser equivalente a enseñar a resolver problemas. Estudiar matemáticas no debe ser otra cosa que pensar en la solución de problemas”.
- En una conferencia pronunciada en 1968 George Polya decía: “Está bien justificado que todos los textos de matemáticas, contengan problemas. Los problemas pueden incluso considerarse como la parte más esencial de la educación matemática. Un gran descubrimiento resuelve un gran problema, pero en la solución de todo problema, hay un cierto descubrimiento. El problema que se plantea puede ser modesto; pero, si pone a prueba la curiosidad que induce a poner en juego las facultades inventivas, si se resuelve

por propios medios, se puede experimentar el encanto del descubrimiento y el goce del triunfo”.

- M. de Guzmán (1984) comenta que “lo que sobre todo deberíamos proporcionar a nuestros alumnos a través de las matemáticas es la posibilidad de hacerse con hábitos de pensamiento adecuados para la resolución de problemas matemáticos y no matemáticos. ¿De qué les puede servir hacer un hueco en su mente en que quepan unos cuantos teoremas y propiedades relativas a entes con poco significado si luego van a dejarlos allí herméticamente emparedados? A la resolución de problemas se le ha llamado, con razón, el corazón de las matemáticas, pues ahí es donde se puede adquirir el verdadero sabor que ha traído y atrae a los matemáticos de todas las épocas. Del enfrentamiento con problemas adecuados es de donde pueden resultar motivaciones, actitudes, hábitos, ideas para el desarrollo de herramientas, en una palabra, la vida propia de las matemáticas”.
- En España, el currículo del Área de Matemáticas en Primaria y Secundaria concede extraordinaria importancia al tema dedicándole mucha atención, especialmente desde los contenidos de procedimientos y actitudes.

2. LA CREACIÓN MATEMÁTICA

Una de las reflexiones más profundas que se han hecho sobre la creatividad en matemática es la realizada a principios de siglo por Henri Poincaré, uno de los más grandes matemáticos de su tiempo. En una conferencia pronunciada ante la Sociedad Psicológica de París hizo interesantísimas revelaciones sobre sus propias experiencias como creador:

> “\... ¿Qué es, de hecho, la creación matemática? No consiste en hacer combinaciones nuevas con entes matemáticos ya conocidos. Cualquiera podría hacerlo, pero las combinaciones que se podrían hacer así serían un número limitado y en su mayoría totalmente desprovistas de interés. Crear consiste precisamente no en construir las combinaciones inútiles, sino en construir las que son útiles y que están en una minoría. Crear es discernir, es escoger…”.
>
> “\... A menudo, cuando se trabaja en un problema difícil, no se consigue nada la primera vez que se comienza la tarea. Luego se toma un descanso más o menos largo y uno se sienta de nuevo ante la mesa. Durante la primera media hora se continúa sin encontrar nada. Después, de repente, la idea decisiva se presenta ante la mente…”.
>
> “\...Hay que hacer otra observación a propósito de las condiciones de este trabajo inconsciente. Se trata de que tal trabajo no es posible, y en todo caso no es fecundo, si no está por una parte precedido y por otra seguido de un período de trabajo consciente. Estas inspiraciones súbitas no se presentan más que tras algunos días de esfuerzos voluntarios, aparentemente estériles, en los que uno ha creído no hacer nada interesante, y piensa haber

tomado un camino falso totalmente. Estos esfuerzos no fueron, por tanto, tan estériles como se pensaba…”.

El pensamiento creativo se ha dividido en divergente y convergente. El primero consiste en la habilidad para pensar de manera original y elaborar nuevas ideas, mientras que el segundo se relaciona con la capacidad crítica y lógica para evaluar alternativas y seleccionar la más apropiada. Evidentemente ambos tipos de pensamiento juegan un rol fundamental en la resolución de problemas. La rutina suprime los estímulos necesarios para el acto creativo. La mayor parte de los grandes artistas comienzan imitando a sus maestros. Más aún se ha llegado a afirmar, en parte en broma y en parte en serio, que la originalidad no es otra cosa que un plagio no detectado”. En cualquier caso es claro que la imitación puede ser un primer paso válido hacia la originalidad. En particular observaremos y no vacilaremos, llegado el caso, en imitar las técnicas de resolución de problemas empleadas con éxito por nuestros compañeros, maestros o colegas.

3. IMPLEMENTACIÓN EN NUESTRA REVISTA DE LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Nuestra revista EPSILON no es ajena a este sentir y por ello, desde este foro, se impulsará de un modo práctico y concreto este quehacer matemático. La faceta de Resolución de Problemas comprenderá varios aspectos interesantes:

- Una primera será la de enviar problemas a la redacción. Es evidente que la faceta de creación de un problema es la más importante. La originalidad de los mismos no debe servir de obstáculo e impedimento para nuestra participación. Un “viejo problema” ya conocido puede servirnos de estímulo por sus nuevos enfoques, su justificación en un contexto diferente o por las distintas formas de resolución, sus aspectos didácticos, etc. Puede que un problema nos sirva como fuente de otras nuevas o similares situaciones problemáticas convirtiéndose dicho problema en un Problema-Tipo. Por tanto, animamos desde aquí a que se nos envíen toda clase de problemas sin más que indicar la referencia del mismo y la solución propuesta por parte del remitente.
- Un segundo aspecto será la del envío de la propia resolución del problema. Para ello, el lector enviará su propuesta a la redacción. Esta revisará la misma y será referenciado en el siguiente número de la Revista. De entre todas las respuestas recibidas, se publicará en la página web, la más adecuada teniendo en cuenta los aspectos de originalidad, simplicidad, elegancia, y posibilidades de generalización. Se estudiará la posibilidad de incluir también algunas de las propuestas recibidas en elsiguiente número de la Revista.

Aquellos lectores que deseen colaborar deberán contactar con nosotros por el correo electrónico: problemas.epsilon@thales.cica.es

4. DISTINTAS SECCIONES DE PROBLEMAS, DISTINTOS OBJETIVOS

4.1. RETOS MATEMÁTICOS: Problemas de Nivel Medio y de Nivel Superior (propuestos y resueltos)

A esta sección pertenecerán todos aquellos problemas cuyos contenidos (objeto) y destinatarios (sujeto) queden implicados dentro de nuestro sistema educativo (Secundaria, Bachillerato y Universidad). Pueden servir como recursos para una preparación olímpica, a modo de un cierto desafío o reto matemático o, simplemente como un puro divertimento en nuestro quehacer matemático. Más adelante, con la recopilación y catalogación que de los mismos problemas se vayan haciendo a posteriori, se irá constituyendo un importante banco de problemas como recurso didáctico. No creemos que de un problema lo único que importa sea su solución. Este aspecto es el último y, a veces, sucederá que en la puesta en escena de las ideas previas relacionadas con el problema, se sucedan más éxitos que en el propio desarrollo del mismo. Esto ya significa, en sí mismo, un avance en nuestro conocimiento aunque, puede que no se vea reconocido posteriormente con la solución del mismo. Ahora bien, una vez trabajado el problema en todos sus aspectos colaterales, la propia lectura a posteriori de la resolución del mismo profundizará, sin duda, en nuestro conocimiento enriqueciéndonos con nuevas destrezas y estructuras de pensamiento. La reflexión final del problema desde su inicio hasta su resolución final ha adquirido así una impronta propia e individualizada en nosotros, convirtiéndonos en sujetos activos e interactivos de la resolución de problemas.

Por tanto, pensamos que sus aspectos previos, es decir, la génesis del mismo, las motivaciones del autor que lo crea o lo recrea, su desarrollo y su posterior destino hacia el futuro resolutor hacen de la resolución de problemas un recurso inigualable como generador de contenidos, relaciones, destrezas, procedimientos y actitudes.

4.2. PROBLEMAS DIVULGATIVOS: Problemas-Tema y Problemas Divulgativos (propuestos y resueltos)

A esta sección pertenecerán aquellas otras propuestas que se puedan considerar como problemas-tipo, monográficos, con una gran riqueza en sus aspectos divulgativos y didácticos, relacionados con las ciencias, la naturaleza y el arte. Deberán pertenecer a esta sección aquellos problemas o situaciones cotidianas que la Matemática explica y justifica. Somos conocedores de la importancia de la Matemática como ciencia que interpreta la realidad física y encuentra en la Naturaleza, el Arte y la Técnica auténticos problemas. Debido a su abstracción, las matemáticas son universales en un sentido en que no lo son otros campos del pensamiento humano. Tienen aplicaciones útiles en los negocios, la industria, la música, la historia, la política, los deportes, la medicina, la agricultura, la ingeniería y las ciencias naturales y sociales. Es muy amplia la relación entre las matemáticas y los otros campos de la ciencia básica y aplicada. Ello obedece a varias razones, incluidas las siguientes:

- La relación entre la ciencia y las matemáticas tiene una larga historia, que data de muchos siglos. La ciencia le ofrece a las matemáticas problemas interesantes para investigar, y éstas le brindan a aquélla herramientas poderosas para el análisis de datos. Con frecuencia, los modelos abstractos que han sido estudiados por los matemáticos, por el puro interés que despiertan han resultado ser muy útiles para la ciencia tiempo después. La ciencia y las matemáticas están tratando de descubrir pautas y relaciones generales, y en este caso ambas son parte del mismo quehacer.
- Las matemáticas son el principal lenguaje de la ciencia. El lenguaje simbólico matemático ha resultado ser en extremo valioso para expresar las ideas científicas sin ambigüedad. La declaración $a = F/m$ no es sólo una manera abreviada de decir que la aceleración de un objeto depende de la fuerza que se le aplique y de su masa; sino que es un enunciado preciso de la relación cuantitativa entre esas variables. Más importante aún, las matemáticas proporcionan la gramática de la ciencia, las reglas para el análisis riguroso de ideas científicas y datos.

5. EPÍLOGO

No queremos finalizar esta presentación sin agradecer y reconocer públicamente cuántas páginas web y revistas, tanto electrónicas como en formato papel, que desde hace tiempo cubren desde sus contenidos, este importante quehacer matemático. Sin menoscabo del simplismo que ello conlleva, debemos testimoniar las siguientes tres direcciones de Internet, con un alto e interesantísimo nivel divulgativo en la Resolución de Problemas:

1. **La Revista Escolar de Matemáticas** digital para uso de alumnos y profesores de Educación Media promovida por el profesor **D. Francisco Bellot Rosado**, cuya labor ha sido distinguida tanto a nivel nacional como internacional.

   http://www.oei.es/oim/revistaoim/index.html/

2. **Página personal de D. Francisco Javier García Capitán**, amplísimo compendio de múltiples contenidos que rebosan entusiasmo, trabajo, genialidad y mucha generosidad.

   http://garciacapitan.auna.com

3. **El Laboratorio Virtual de Triángulos con CABRI** es una revista on-line de matemáticas dedicada a la resolución de problemas sobre triángulos. Está dirigida desde 2002 por **D. Ricardo Barroso Campos**, que puntualmente, quincena a quincena, realiza una labor investigadora y divulgativa sobre la Geometría. Es causa de la aparición de un amplio número de magníficos resolutores de problemas, siendo además pionero en el uso de los recursos tecnológicos.

   http://personal.us.es/rbarroso/trianguloscabri/index.htm/

6. PROPUESTA DE PROBLEMAS

Sección 1 (Retos matemáticos)

RE_001_EPSILON

Sea a_n la sucesión de números reales que verifica para todo número natural *n*:

$$1 \cdot a_1 + 2 \cdot a_2 + 3 \cdot a_3 + \ldots + n \cdot a_n = n^3 \cdot a_n$$

Halla el valor que debe tener a_1 para que se cumpla: $2011 \cdot a_{2011} = 1$.

RE_002_EPSILON

Los puntos A(m,16), B(18,p) y el origen de coordenadas forman un triángulo equilátero.

Calcula los valores de "m" y de "p".

RE_003_EPSILON

Construye un triángulo rectángulo cuya hipotenusa c es dada, si se sabe además que la mediana relativa al ángulo recto C es la media geométrica de los catetos de dicho triángulo.

RE_004_EPSILON

Prueba las siguientes igualdades:

a) $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} . k = 2^{n-1}.n$

b) $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} . k^2 = 2^{n-2}.(n+1).n$

RE_005_EPSILON

Halla el valor de la suma siguiente:

$$\sqrt[3]{10+6\sqrt{3}} + \sqrt[3]{10-6\sqrt{3}} + \sqrt[3]{7+5\sqrt{2}} + \sqrt[3]{7-5\sqrt{2}} + \sqrt[3]{26+15\sqrt{3}} + \sqrt[3]{26-15\sqrt{3}}$$

RE_006_EPSILON

a) Una recta trazada desde el vértice A de un triángulo equilátero ABC corta al lado opuesto BC en un punto P y a la circunferencia circunscrita en el punto Q.

Prueba que se verifica la igualdad: $\dfrac{1}{PQ} = \dfrac{1}{BQ} + \dfrac{1}{CQ}$

b) Con la notación del apartado anterior, prueba que las siguientes sumas son constantes y halla el valor de las mismas:

$$AQ^2 + BQ^2 + CQ^2 = K_1;\ AQ^4 + BQ^4 + CQ^4 = K_2;$$

SECCIÓN 2 (PROBLEMAS DIVULGATIVOS)

DI_001_EPSILON. *TRIÁNGULOS EPSILIANOS*

Sea un triángulo ABC.

a) Probar la equivalencia de estas dos condiciones:

i) $\angle A = 2.\angle B$

ii) $a^2 = b^2 + b.c$

Nota: A los triángulos que verifican alguna de las dos condiciones anteriores, los llamaremos **triángulos epsilianos**. Este tipo de triángulos ha sido estudiado por muchos autores (F. Bellot). Han aparecido en muchos problemas de Olimpiadas Matemáticas. Son ejemplos notables de este tipo, los triángulos de la escuadra y del cartabón y el triángulo sublime (36º, 72º y 72º).

Veamos algunas de sus consecuencias inmediatas:

b) En todo triángulo epsiliano ($a^2 = b^2 + b.c \Leftrightarrow \angle A = 2.\angle B$) se verifica:

i) AI = a-b. (I= incentro)

ii) La longitud de la bisectriz interior $w_a = b{\cdot}c/a$

c) Encuentra los triángulos epsilianos que sean isósceles.

d) Si denominamos triángulo genuinamente epsiliano al que cumple la doble condición de ser epsiliano, es decir, A=2B=4C.

Es evidente que entonces se verificará la relación $a^2=2s{\cdot}c$ (siendo s = semiperímetro).

e) Prueba que sólo existe un único triángulo epsiliano en el que las medidas de sus lados sean números naturales consecutivos.

f) Determina el triángulo epsiliano de menor perímetro posible, si se sabe que el tercer ángulo $\angle C$ es obtuso y las medidas de sus lados a, b y c son números naturales.

g) Encuentra los triángulos epsilianos en los que uno de sus lados sea dos veces mayor que otro.

h) Encuentra y ordena de forma creciente, según su perímetro, los primeros seis triángulos epsilianos tales que las medidas de sus lados vengan representadas por números naturales.

DI_002_EPSILON. *VISTA DESDE LA CIMA DEL TEIDE*

La constitución atmosférica tiene un influjo muy grande sobre la visibilidad de los objetos distantes. Las experiencias físicas demuestran que la transparencia del aire aumenta prodigiosamente cuando se halla difundida en la atmósfera con uniformidad cierta cantidad de agua.

Así se puede asegurar en general que el Pico será rarísima vez visible a una gran distancia en los meses secos y calurosos; y que por el contrario se verá de más lejos en los meses de Enero y Febrero, inmediatamente después de haber llovido con fuerza, ó bien pasadas algunas horas.

"Varias personas de inteligencia y verdad aseguran haber visto el Teide a la distancia de cuarenta y seis ó cuarenta y siete leguas de veinte al grado, lo que supone el valor de refracción atmosférica de ciento cincuenta y ocho milésimas del arco, cosa que no es extraordinario en zonas templadas".

La refracción levanta los objetos y modifica la tangente del ángulo de depresión del horizonte del mar:

$$Tang(D) = \frac{1}{1-r} \,.\, Tan(\alpha)\ ; \qquad \begin{array}{ll} D & \rightarrow \textit{ángulo de depresión aparente} \\ \alpha & \rightarrow \textit{ángulo de depresión real} \\ r & \rightarrow \textit{coeficiente de refracción} \end{array}$$

Primera cuestión: Calcula la altura de Teide.

Segunda cuestión: Compara la superficie avistada desde la cima del Teide con la superficie de España.

Tercera cuestión: "Se ha suscitado la cuestión de si sería posible que desde la cima del Teide se descubriera la costa de África". La parte más cercana es el cabo de Borjador, que dista 56 leguas. Si se considera un coeficiente de refracción normal para la zona r=0'08, ¿A qué altura debería situarse un lugar de la costa de África para ser visto desde la cima del Teide?

7. SOLUCIONES DE LOS PROBLEMAS

Sección 1 (Retos Matemáticos)

Sección 2 (Problemas Divulgativos)

DI_001_EPSILON. *TRIÁNGULOS EPSILIANOS*

Sea un triángulo ABC.

a) Probar la equivalencia de estas dos condiciones:

i) $\angle A = 2.\angle B$

ii) $a^2 = b^2 + b.c$

Nota: A los triángulos que verifican alguna de las dos condiciones anteriores, los llamaremos **triángulos epsilianos**. Este tipo de triángulos ha sido estudiado por muchos autores (F. Bellot). Han aparecido en muchos problemas de Olimpiadas Matemáticas. Son ejemplos notables de este tipo, los triángulos de la escuadra y del cartabón y el triángulo sublime (36º, 72º y 72º).

Veamos algunas de sus consecuencias inmediatas:

b) En todo triángulo epsiliano ($a^2 = b^2 + b.c \Leftrightarrow \angle A = 2.\angle B$) se verifica:

i) AI = a–b. (I = incentro)

ii) La longitud de la bisectriz interior $w_a = b \cdot c/a$

c) Encuentra los triángulos epsilianos que sean isósceles.

d) Si denominamos triángulo genuinamente epsiliano al que cumple la doble condición de ser epsiliano, es decir, A=2B=4C. Es evidente que entonces se verificará la relación $a^2=2s \cdot c$ (siendo s = semiperímetro).

e) Prueba que sólo existe un único triángulo epsiliano en el que las medidas de sus lados sean números naturales consecutivos.

f) Determina el triángulo epsiliano de menor perímetro posible, si se sabe que el tercer ángulo $\angle C$ es obtuso y las medidas de sus lados a, b y c son números naturales.

g) Encuentra los triángulos epsilianos en los que uno de sus lados sea dos veces mayor que otro.

h) Encuentra y ordena de forma creciente, según su perímetro, los primeros seis triángulos epsilianos tales que las medidas de sus lados vengan representadas por números naturales.

Sol:

a) Probar la equivalencia de estas dos condiciones:

$$i)\ \angle A = 2.\angle B$$
$$ii)\ a^2 = b^2 + b.c$$

(i→ii) $\angle A = 2.\angle B \Rightarrow a^2 = b^2 + b.c$

$\frac{senA}{a} = \frac{senB}{b}$; $\qquad \frac{2.senB.\cos B}{a} = \frac{senB}{b}$; $\qquad \frac{a}{b} = 2.\cos B$

$\frac{senB}{b} = \frac{senC}{c} = \frac{sen(A+B)}{c}$; $\qquad \frac{senB}{b} = \frac{senA.\cos B + \cos A.senB}{c} = \frac{2.senB.\cos^2 B + \cos A.senB}{c}$;

$\frac{1}{b} = \frac{2\cos^2 B + \cos A.}{c}$; $\qquad \frac{c}{b} = 2.\cos^2 B + \cos A = 4.\cos^2 B - 1$

En definitiva:

$$\frac{a}{b} = 2\cos B; \qquad \frac{c}{b} = 4.\cos^2 B - 1$$

Por tanto,

$$\frac{a^2}{b^2} = \frac{c}{b} + 1 \Rightarrow a^2 = b^2 + b.c$$

$$(ii \rightarrow i)\ a^2 = b^2 + b.c \Rightarrow \angle A = 2.AB$$

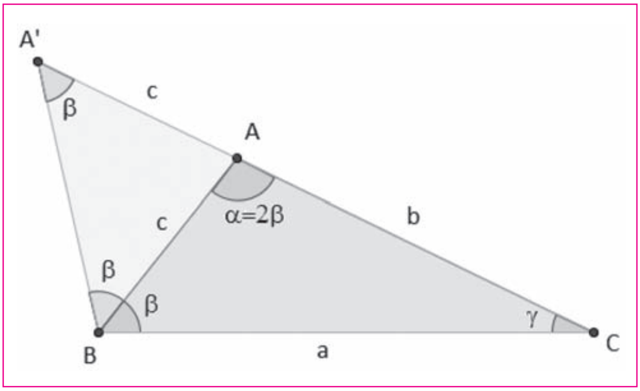
La relación a2=b2+b·c la podemos expresar de la forma:

$$\frac{a}{b+c} = \frac{b}{a}$$

En el triángulo inicial ABC, prolongamos el lado b hasta una longitud igual al lado c. Así, determinamos el punto A´. Obtenemos dos triángulos ABC y A´BC que son semejantes, al tener el ángulo C en común y verificarse entre sus lados:

$$\frac{a}{b+c} = \frac{b}{a}$$

Por tanto, la medida del ángulo A´ será igual a la del ángulo B del triángulo ABC, que por otra parte coincidirá con el ángulo A´BA. De esta forma, tenemos que la medida del ángulo A deberá ser el doble de la del ángulo B, ∠A = 2.∠B:



b) En todo triángulo epsiliano ($a^2 = b^2 + b.c \Leftrightarrow \angle A = 2.\angle B$) se verifica:

i) AI = a–b. (I = incentro)

ii) La longitud de la bisectriz interior w_a = b·c/a

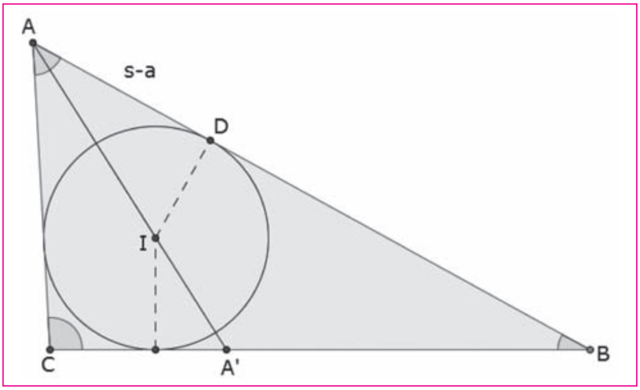
$$i)\ \cos B = \frac{a}{2b} = \frac{s-a}{AI} \Rightarrow AI = \frac{(2s-2a).b}{a} = \frac{(b+c-a).b}{a} \Rightarrow$$

$$AI = \frac{\left(\frac{a^2}{b} - a\right).b}{a} = a - b$$

ii) AA´=wa=A´B. Por el teorema de la bisectriz, se tiene que:

$$\frac{c}{BA'} = \frac{b}{CA'} \Rightarrow \frac{c}{wa} = \frac{b}{a-wa} = \frac{b+c}{a} \Rightarrow$$

$$w_a = \frac{a.c}{b+c} = \frac{a.c}{\frac{a^2}{b}} = \frac{b.c}{\text{a}}$$



c) Encuentra los triángulos epsilianos que sean isósceles.

Sea el triángulo epsiliano dado por la caracterización ya probada: $a^2 = b^2 + b.c \Leftrightarrow \angle A = 2.\angle B$.

Si buscamos que el triángulo además sea isósceles, tendrá que ser de alguna de las dos formas siguientes:

c1.- A=2B, C=A→ Triángulo sublime {A=72º, B=36º, C=72º}.

Consecuencias inmediatas de este particular triángulo.

$$a^2 = b^2 + b.a \rightarrow \left(\frac{a}{b}\right)^2 = 1 + \left(\frac{a}{b}\right) \rightarrow \frac{a}{b} = \frac{1\sqrt{5}}{2} = \text{ø (Número de Oro)}$$

c2.- A=2B, C=B→ Triángulo rectángulo isósceles {A=90º, B=45º, C=45º}.

d) Si denominamos triángulo genuinamente epsiliano al que cumple la doble condición de serepsiliano, es decir, A=2B=4C.

Es evidente que entonces se verificará la relación $a^2=2s\cdot c$ (siendo s = semiperímetro):

Por ser A=2B → $a^2=b^2+b\cdot c$;

Por ser B=2C → $b^2=c^2+c\cdot a$;

Entonces: $a^2=c^2+c\cdot a+b\cdot c =c\cdot(a+b+c)=2s\cdot c$

e) Prueba que sólo existe un único triángulo epsiliano en el que las medidas de sus lados sean números naturales consecutivos.

Sea el triángulo epsiliano dado por la caracterización ya probada: $a^2 = b^2 + b.c \Leftrightarrow \angle A = 2.\angle B$.

Si imponemos que las medidas de sus lados sean números naturales consecutivos, deberá pasar alguno de los siguientes casos:

Casos posibles	$a^2 = b^2 + b.c$
{b=n–1; a=n; c=n+1}	$n^2 = (n-1)^2+(n-1)(n+1)$ n=0 → b=–1, a=0, c=1 ABSURDO n=2 → b=1, a=2, c=3 TRIÁNGULO IMPOSIBLE
{b=n–1; c=n; a=n+1}	$(n+1)^2 = (n-1)^2+(n-1)n$ n=0 → b=–1, c=0, a=1 ABSURDO **n=5 → b=4, c=5, a=6 TRIÁNGULO EPSILIANO**
{c=n–1; b=n; a=n+1}	$(n+1)^2 = n^2+(n-1)n$ NO HAY SOL ENTERA

Solamente pue, tenemos el triángulo epsiliano de lados b=4, c=5, a=6.

f) Determina el triángulo epsiliano de menor perímetro posible, si se sabe que el tercer ángulo $\angle C$ es obtuso y las medidas de sus lados a, b y c son números naturales.

Sea el triángulo epsiliano dado por la caracterización ya probada: $a^2 = b^2 + b.c \Leftrightarrow \angle A = 2.\angle B$.

Supongamos ahora que el ángulo C es obtuso.

Entonces se tendrá la desigualdad b<a<c. Como C=180º–(A+B) = 180º–3B >90º.

Entonces B<30º y $\cos B = \dfrac{a}{2b} > \dfrac{\sqrt{3}}{2}$; $2 > 2\cos B = \dfrac{a}{b} > \sqrt{3}$. Por tanto,

$\sqrt{3} < \dfrac{a}{\mathrm{b}} < 2$.

Como a, b y c son números naturales sin divisores comunes (menor perímetro) y $a^2=b\cdot(b+c)$, se tendrá que tanto b como b+c no tendrán ningún divisor en común y así para que sea cierta la igualdad $a^2=b\cdot(b+c)$ con números naturales, se tendrá que cumplir que $b= m^2$ y $b+c= n^2$.

De esta forma, $a^2 = (m\cdot n)^2$. Entonces: $a=m\cdot n$;

$$\sqrt{3} < \frac{a}{b} = \frac{m.n}{m2} = \frac{n}{m} < 2\ ; \quad \sqrt{3} < \frac{n}{m} < 2$$

El primer par de números enteros m, n que satisfacen la desigualdad anterior se obtiene para los valores m=4; n=7, lo que da lugar a los valores: a=28, b=16 y c=33, triángulo epsiliano con los lados números enteros y de perímetro mínimo con el ángulo C obtuso.

g) Determina, salvo semejanzas, los triángulos epsilianos en los que uno de los lados del triángulo sea dos veces mayor que otro.

Sea el triángulo epsiliano dado por la caracterización ya probada: $a^2 = b^2 + b.c \Leftrightarrow \angle A = 2.\angle B$. Si imponemos la condición de que uno de los lados sea el doble que otro, se nos presentarán los siguientes casos:

Casos posibles	$a^2 = b^2 + b.c$	Triángulo
a =2b	$4b^2=b^2+bc$; 3b=c	{a=2k; b=k; c=3k} No hay triángulo
a =2c	$4c^2=b^2+bc$; $b = \frac{-1+\sqrt{17}}{2}.c$	{a=2k; $b = \frac{-1+\sqrt{17}}{2}.k$; c=k} **TRIÁNGULO OBTUSÁNGULO,** ya que: $\cos A = \frac{c-b}{2b} < 0$
b =2a	b>a ; b<a CONTRADICCIÓN	
b =2c	$a^2=4c^2+2c^2$; $a = \sqrt{6}.c$	{$a = \sqrt{6}.k$; b=2k; c=k} **TRIÁNGULO OBTUSÁNGULO,** ya que: $\cos A = \frac{c-b}{2b} < 0$
c = 2a	$a^2 = b^2 + 2a.b$; $a = (1+\sqrt{2}).b$	{$a = (1+\sqrt{2}).k$, b=k, $c = (2+2\sqrt{2}).k$ } No hay triángulo
c=2b	$a^2 = b^2 + 2.b^2$; $a = \sqrt{3}.b$	{$a = \sqrt{3}.k$, b=k, c=2k} **TRIÁNGULO RECTÁNGULO**: A=60º, B=30º,C=90º

h) Encuentra y ordena de forma creciente, según los valores del lado a, los primeros siete triángulos epsilianos tales que las medidas de sus lados vengan representadas por números naturales.

a	b	c	Perímetro	Triángulo
6	4	5	15	Acutángulo
12	9	7	28	Acutángulo
15	9	16	40	Acutángulo
20	16	9	45	Acutángulo
28	16	33	77	Obtusángulo
30	25	11	66	Obtusángulo
35	25	24	84	Obtusángulo

DI_002_EPSILON. VISTA DESDE LA CIMA DEL TEIDE

La constitución atmosférica tiene un influjo muy grande sobre la visibilidad de los objetos distantes. Las experiencias físicas demuestran que la transparencia del aire aumenta prodigiosamente cuando se halla difundida en la atmósfera con uniformidad cierta cantidad de agua.

Así se puede asegurar en general que el Pico será rarísima vez visible a una gran distancia en los meses secos y calurosos; y que por el contrario se verá de más lejos en los meses de Enero y Febrero,inmediatamente después de haber llovido con fuerza, ó bien pasadas algunas horas.

"Varias personas de inteligencia y verdad aseguran haber visto el Teide a la distancia de cuarenta y seis ó cuarenta y siete leguas de veinte al grado, lo que supone el valor de refracción atmosférica de ciento cincuenta y ocho milésimas del arco, cosa que no es extraordinario en zonas templadas".

La refracción levanta los objetos y modifica la tangente del ángulo de depresión del horizonte del mar:

$$Tang(D) = \frac{1}{1-r} \cdot Tan(\alpha) \; ; \quad \begin{array}{ll} D & \rightarrow \textit{ángulo de depresión aparente} \\ \alpha & \rightarrow \textit{ángulo de depresión real} \\ r & \rightarrow \textit{coeficiente de refracción} \end{array}$$

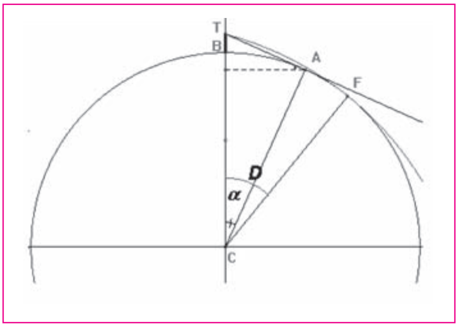
Primera cuestión: Calcula la altura de Teide.

Segunda cuestión: Compara la superficie avistada desde la cima del Teide con la superficie de España.

Tercera cuestión: "Se ha suscitado la cuestión de si sería posible que desde la cima del Teide se descubriera la costa de África". La parte más cercana es el cabo de Borjador, que dista 56 leguas. Si se considera un coeficiente de refracción normal para la zona r=0'08, ¿A qué altura debería situarse un lugar de la costa de África para ser visto desde la cima del Teide?

Sol:

SOLUCIÓN PRIMERA CUESTIÓN:



α es el ángulo de depresión real.

La distancia $\overline{BT} = H$ es la altura del Teide.

La distancia $\overline{CB} = R$ es la radio de la Tierra.

La línea $\overline{TA}$ es la visual sin refracción.

El arco $\overline{BA}$: distancia que permite ver el Teide sin refracción.

La línea $\overline{TF}$ es la visual con refracción.

El arco $\overline{BF}$: distancia que permite ver el Teide con refracción

Podemos hacer los cálculos con el Coseno o con la Tangente (es más fácil con la tangente al considerar la refracción).

$$Tang(\alpha) = \frac{Sen(\alpha)}{Cos(\alpha)} = \frac{\sqrt{1-\left(\frac{R}{R+H}\right)^2}}{\frac{R}{R+H}} = \frac{\sqrt{(R+H)^2 - R^2}}{R} = \frac{\sqrt{2RH + \cancel{H}^2}}{R} = \sqrt{\frac{2H}{R}}$$

D es el ángulo de depresión aparente.

$$Tang(D) = \frac{1}{1-r}\sqrt{\frac{2H}{R}}$$

Sabemos que 46’5 leguas equivalen a un ángulo:

$$\text{D} = \frac{46'5}{20} = 2^{\text{o}}\ 19'\ 30''$$

Radio medio de la Tierra:

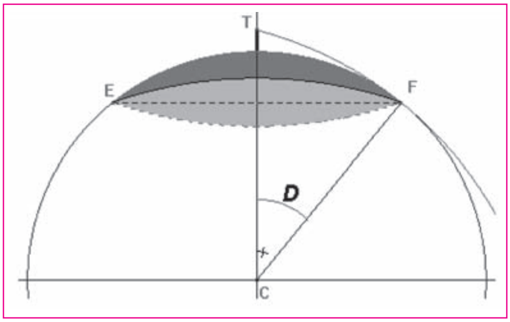
$$R = \frac{4000000}{6'28} \approx 6371000 \text{ metros}$$

$$Tang(2^{\text{o}}\ 19'\ 30'') = \frac{1}{1-0'158}\sqrt{\frac{2H}{6371000}} \Rightarrow H \approx 3722 \text{ metros}$$

CON CARÁCTER DIVULGATIVO:

$$\textit{Una legua marina s } \frac{1}{20} \cdot \frac{40000\ km}{360^{\text{o}}} = \textit{5555 metros}$$

SOLUCIÓN SEGUNDA CUESTIÓN:



El arco *EF* girado alrededor del eje *CT* describirá un casquete esférico que será la extensión superficial de superficie terrestre que descubre la vista desde la cima.

La superficie del casquete esférico es:

$$S_{Casquete} = Circulomáximo \times Alturadel\ casquete$$

CON CARÁCTER DIVULGATIVO:

Seno verso (D) = 1 – Cos(D)

La altura del casquete es:

$$h_{Casquete} = R – R \cdot Cos(D) = R[1 – Cos(D)] = R \times Senoverso(D)$$

Por lo tanto:

$$S_{Casquete} = 40000 \text{ km} \times 6371 \text{ km} \times Senoverso\ (2^{\circ}\ 19'\ 30'')$$

Extensión superficial que descubre la vista desde la cima del Teide:

$$S_{Casquete} = 209787 \text{ km}^2$$

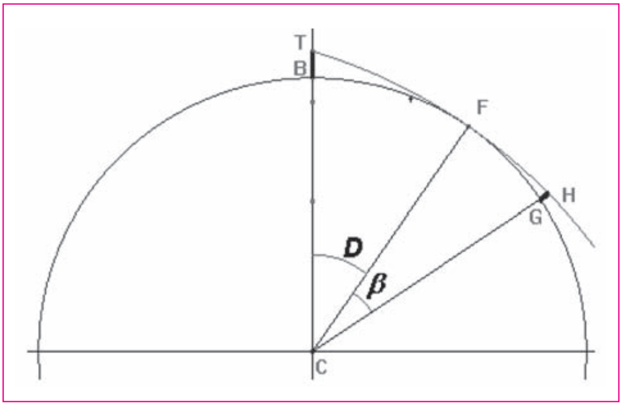
Extensión superficial de España:

$$S_{España} \approx 500000 \text{ km}^2$$

Comparación:

$$\frac{209787}{500000} \approx 40\%$$

SOLUCIÓN TERCERA CUESTIÓN:



Si el coeficiente de refracción es $r = 0'08$, el ángulo de depresión aparente será:

$$Tang(D) = \frac{1}{1 - 0'08}\sqrt{\frac{7444}{6371000}}$$

Se obtiene $D = 2^{\circ}\ 7'\ 40''$.
Si el cabo Borjador está del Teide a 56 leguas:

$$56 \text{ leguas} = \left(\frac{56}{20}\right)^{\circ} = 2^{\circ}\ 48' \Rightarrow \beta = 40'\ 20''$$

Por lo tanto:

$$Tang(40'\ 20'') = \frac{1}{1 - 0'08}\sqrt{\frac{2\overline{GH}}{6371000}} \Rightarrow \overline{GH} = 371 \textit{ metros de altura}$$

NORMAS PARA LA PUBLICACIÓN

ENVÍO DE ARTÍCULOS

Los artículos enviados a la revista Epsilon pasan por un proceso de revisión por pares. Para enviar un artículo para su evaluación, siga las siguientes instrucciones:

1. Los trabajos deben ser de Educación Matemática. El artículo no debe haber sido publicado con anterioridad en una revista y los autores deben poseer los derechos de autor correspondientes.
2. Los artículos pueden ser: de investigación (experimental o un estudio teórico), de ideas para el aula, de experiencias. También se aceptan artículos para la sección de resolución de problemas.
3. Todo artículo debe estar escrito en castellano y debe incorporar referencias bibliográficas, en todo caso, deben seguir las normas del manual de publicación de la APA (quinta edición) de acuerdo con el siguiente modelo:

    Para artículo de revista: Leinhardt, G., Zaslavsky, O. y Stein, M. (1990). Functions, graphs and graphing: tasks. Learning and teaching. *Review of Educational Research, 60*(1), 1-64.

    Para libro: Fernández, A. y Rico, L. (1992). *Prensa y educación Matemática*. Madrid: Síntesis.

    Para capítulo de libro, actas de congreso o similar: Fuson, K. (1992). Research on whole number addition and subtraction. En Grouws, D. (ed.) *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, 243-275. MacMillan Publishing Company: New York.

    Para artículo de revista electrónica o información en Internet: Cutillas, L. (2008). Estímulo del talento precoz en matemáticas. *Números* [en línea], 69. Recuperado el 15 de febrero de 2009, de http://www.sinewton.org/numeros/

4. El artículo deberá tener una extensión máxima de 7.000 palabras, incluyendo las tablas y los anexos si es de investigación. Para las secciones experiencias e ideas para el aula la extensión máxima será de 3.000 palabras. El formato de párrafo debe ser: letra Times New Roman tamaño 12 e interlineado sencillo y sin sangrado. Párrafos con espaciado anterior de 6 ptos. Los subtítulos deben estar sin numeración.
5. El artículo debe incluir en español e inglés: (a) el título del trabajo, (b) un resumen con un máximo de 100 palabras, y (c) de tres a seis términos claves.

6. El archivo con el artículo debe enviarse en formato doc y pdf.
7. Los esquemas, dibujos, gráficas e imágenes deben enviarse por separado (en una carpeta aparte del documento de texto) en formato TIFF o JPG con una resolución mínima de 300 puntos por pulgada. Cada archivo debe estar claramente identificado y se debe indicar en el texto el lugar donde se ubica. Las fotos en las que aparezcan menores deberán estas pixeladas o tener autorización escrita del tutor (se adjuntara copia con elarchivo).
8. Se debe enviar una segunda versión del artículo en la que no aparezcan los nombres de los autores, ni información relativa a ellos o que pueda servir para indentificarlos (e.g., institución a la que pertenecen, citas y referencias bibliográficas propias, agradecimientos, datos del proyecto en el que se enmarca el trabajo). En esta versión, reemplace las citas y referencias bibliográficas por "Autor, 2008" o "Autor et al., 2008". En las referencias bibliográficas propias se debe eliminar el título y el nombre de la revista o el título del libro donde se publica.
9. Los datos de los autores (nombre, institución a la que pertenecen, dirección de correo electrónico, dirección postal y número de teléfono y fax) deben incluirse en un archivo aparte. Utilice únicamente un apellido o los dos pero separados por un guión.
10. Los autores deben ser los dueños de los derechos de autor del documento que se envía y, en su caso, haber obtenido los derechos para publicar aquel material de otros autores que se incluya en el documento.
11. Cuando el artículo tenga más de un autor, éstos designarán a un autor de contacto quien se encargará de toda la comunicación con la revista Epsilon.
12. Los archivos se deben enviar al centro de documentación Thales thales.matematicas@uca.es señalando si es un trabajo de investigación, experiencias o ideas para el aula.
13. Una vez aceptado el artículo para su publicación, se solicitará al autor de contacto que firme una carta de cesión de derechos de autor en nombre de todos los autores del trabajo.