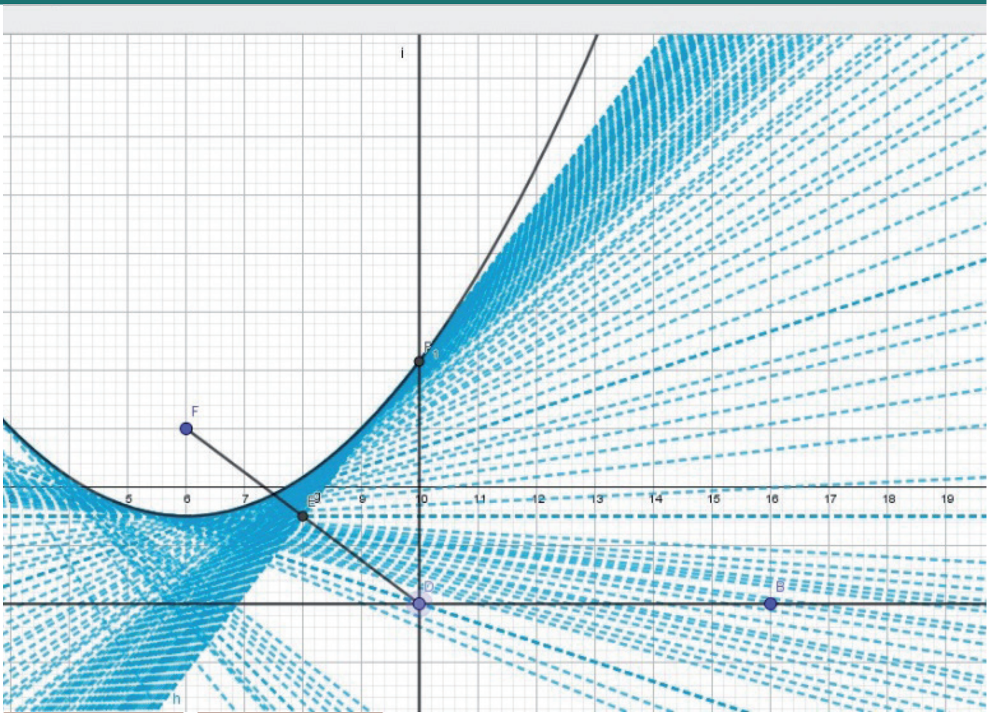
112

2022



epsilon

Revista de Educación Matemática

Editada por la S.A.E.M. "THALES"

epsilon 112

Revista de Educación Matemática

Página de la revista: http://thales.cica.es/epsilon
Revista: epsilon@thales.cica.es

Sociedad Andaluza de Educación Matemática "Thales"

Edita
Sociedad Andaluza de
Educación Matemática "Thales"
Centro Documentación "Thales"
Universidad de Cádiz
C.A.S.E.M.
Facultad de Ciencias
Departamento de Matemáticas
Campus del Río San Pedro
Torre Central, 4ª planta
11510 Puerto Real (Cádiz)
Teléfono: 956012833
Email: thales.matematicas@uca.es

Maquetación
referencias.maquetacion@gmail.com

Depósito Legal
SE-421-1984

ISSN
2340-714X

Período
2022

Suscripción
Anual

SUMARIO / CONTENTS

Épsilon *- Revista de Educación Matemática* ***2022, nº 112, 7-7***

Editorial

En el año 2010 recibí la confianza de la Junta directiva de la Sociedad THALES para dirigir la revista Epsilon. Debía continuar con la senda emprendida por mis antecesores en el cargo y emprender algunas acciones para mejorar y corregir aspectos que venía arrastrando la revista, entre ellos un notorio atraso en la publicación de los números. Esta fue la primera tarea acometida y que se logró. El segundo objetivo fue adecuarla a los nuevos tiempos, para ello se pasó a un formato digital y finalmente a ser una revista de acceso abierto para que todos sus contenidos estuvieran al alcance de la sociedad.

En estos casi 13 años al frente de la revista hemos logrado que la revista sea un buen referente en el profesorado de matemáticas y se ha captado la atención y colaboración de investigadores latinoamericanos y españoles.

Todas estas acciones han sido posibles por la desinteresada participación y colaboración de muchos compañeros de diversos ámbitos educativos, primaria, secundaria, univeristaria y no formal que han hecho parte tanto de los comités editoriales y científicos.

Un aspecto destacado es la actividad desarrollada por todos los revisores que han dedicado parte de su tiempo en revisar los artículos enviados y dando siempre sugerencias para su mejora, gracias a todos ellos que son parte imprescindible en el éxito de toda publicación de carácter académico.

Quiero manifestar mi agradecimiento a los presidentes de Thales que durante sus mandatos depositaron su confianza en mi trabajo: Manuel Torralbo, Sixto Romero y Salvador Guerrero. También a los compañeros de las diferentes juntas directivas que han apoyado la revista y en algunos casos aportado ideas para su mejora.

Doy gracias a los lectores, autores, revisores, comités, equipo de maquetación y todos aquellos que han aportado para que esta responsabilidad que asumí hace años haya salido adelante. He recibido grandes satisfacciones y alegrías en mi labor y también alguno que otro sinsabor pero que me han aportado una experiencia que he sabido utilizar en otros ámbitos.

La nueva dirección de Epsilon continuará con la labor de dar visibilidad a la revista y a la sociedad Thales, se enfrentarán a nuevos retos y propósitos que seguramente abordaran con ahínco y la dedicación necesaria. Les deseo muchos éxitos en esta nueva etapa y se que la inician con muchos ánimos y energías, por lo que seguramente el resultado será excelente.

Alexander Maz Machado
Director

Épsilon - *Revista de Educación Matemática* *2022, nº 112, 9-20*

La Función Exponencial y la forma en que se estiman los contagiados por COVID19: entrevista a Profesores de Escuela Secundaria

Patricia Sureda

Núcleo de Investigación en Educación en Ciencia y Tecnología (NIECYT), Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Bs. As., Tandil CP 7000, Argentina.

Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas (CONICET)

Juan B. Podavini

Departamento de Formación Docente, Facultad de Ciencias Exactas, Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Bs. As., Tandil CP 7000, Argentina.

Resumen: *Se utiliza la Teoría de los Campos Conceptuales para indagar sobre los esquemas vinculados a la enseñanza de la función exponencial en la escuela secundaria. En particular, se busca identificar si los profesores cuentan con invariantes operatorios que vinculen la Función Exponencial y la forma en que se estiman los contagiados por COVID19, y si lo estudian con sus alumnos en clase. Los resultados de las entrevistas a seis profesores en ejercicio muestran que sólo tres de ellos cuentan con algún tipo de estos invariantes; y que solo uno de ellos estudió matemáticamente esta problemática con sus alumnos.*

Palabras-clave: Función *Exponencial; Enseñanza; Profesores; Teoría de los Campos Conceptuales; COVID19*

The Exponential Function and the way in which those infected by COVID19 are estimated: interview to Secondary School Teachers

Abstract: *We use the Theory of Conceptual Fields to inquire about the schemes linked to the teaching of the exponential function in secondary school. In particular, we seek to identify if teachers have operational invariants that link the Exponential Function and the way in which those infected by COVID19 are estimated, and if they study it with their students in class. The results of the interviews with six teachers show that only three of them have some type of these invariants; and that only one of them studied this problem mathematically with his students.*
Keywords: *Exponential Function; Teaching; Teachers; Theory of Conceptual Fields; COVID19*

1. INTRODUCCIÓN

La importancia de analizar si los profesores de matemática en ejercicio cuentan con invariantes operatorios que vinculen la función exponencial con la forma de estimar los contagiados por COVID-19, está dada por una parte, por la importancia que la Teoría de los Campos Conceptuales (TCC) le da a la construcción del significado. En palabras de Vergnaud (1990) "Un concepto no puede ser reducido a su definición, al menos si se está interesado en su aprendizaje y enseñanza, pues es a través de las situaciones y de los problemas que se pretenden resolver como un concepto adquiere sentido para el niño". Desde otros marcos teóricos la modelización matemática se asumen también de suma importancia para la educación de cada ciudadano, ya que es una herramienta fundamental para comprender y analizar dichos acontecimientos matemáticos que se viven y observan día a día en la vida real (Alvarado, 2009; Niss, Blum y Galbraith, 2007; Ortiz, 2002 y Rodríguez, 2015). En esta misma dirección el estudio de la función exponencial mediante la estimación de la cantidad de contagiados por COVID-19, brinda la oportunidad de enseñar una matemática cuyo sentido se construya a partir de los problemas, en este caso, de la vida cotidiana que se intentan resolver (Sanchez y Garcia, 2020; Sureda y Rossi, 2022). Este problema revela también una de las características más importantes del crecimiento de la función exponencial, y esto es que hay un momento en el que el aumento se torna precipitado, y hay realmente una explosión en el crecimiento. Pero, para que el profesor pueda brindar una enseñanza con "sentido" para el estudiante, primero debe tener sentido para él.

Por otra parte, enmarcados en la discusión que plantea Chevallard (2017) respecto a la población de estudiantes a las cuales está dirigida la formación matemática escolar secundaria, coincidimos con él en que ésta debe estar dirigida no solo a los que serán matemáticos, o ingenieros, sino a todos aquellos ciudadanos que no vayan a estudiar matemáticas después del instituto, incluso cuando reciban una educación superior. En esta dirección, la enseñanza de la función exponencial vinculada a la estimación de contagiados por COVID-19 brinda una buena oportunidad para formar matemáticamente a esta última población.

2. MARCO TEÓRICO

2.1. Teoría de los Campos Conceptuales

Utilizamos la TCC (Vergnaud, 1990; 2013), con el fin de identificar algunos Invariantes Operatorios (IO) del profesoresorado de la escuela secundaria. El *esquema* es la organización invariante de la conducta del sujeto frente a una clase de situaciones. Desde este marco teórico, las acciones de los profesores de matemática en el aula, constituyen un conjunto de prácticas –frecuentemente espontáneas– que pueden ser entendidas en términos de esquemas más o menos primitivos acerca de la construcción del saber matemático, del aprendizaje de los alumnos y de la tarea de profesor. Los esquemas dirigen la acción del profesor en una situación de enseñanza, y en consecuencia, es posible relacionar la actividad didáctica del profesor con ellos. El esquema está compuesto por reglas de acción y de anticipaciones (puesto que estas generan una serie de acciones con el fin de lograr un cierto objetivo), pero también está compuesto, de manera esencial, de invariantes operatorios (conceptos-en-acto y teoremas-en-acto) y de inferencias. Los conceptos en acto son categorías pertinentes como variable, función, número real, etc.; y los teoremas en acto son proposiciones tomadas como verdaderas. Los conceptos y teoremas se construyen en forma solidaria, pues no hay conceptos sin teoremas que se refieran a ellos, ni teoremas en acto que se puedan construir sin conceptos. Los invariantes operatorios, correctos o no, son los que dirigen la acción del profesor en una situación de enseñanza, y es por esto que es posible relacionar la actividad didáctica del profesor con los invariantes operatorios mencionados.

2.2. El modelo de Contagio

La construcción de modelos matemáticos es útil a la epidemiología, ya que sus objetivos esenciales son el de poder describir, explicar y predecir los fenómenos y procesos de contagio que se suscitan en enfermedades epidemiológicas. Hay modelos estocásticos y determinísticos. Básicamente, de los determinísticos se utilizan tres modelos de contagio: SIR; SEIR y SEAR. Aquí sólo se presenta la expresión algebraica del modelo epidemiológico matemático SIR; debido a que se ajusta bastante bien a los primeros resultados de estudios del COVID-19. El modelo SIR, divide a la población de individuos afectados por el virus en tres clases:

- **S:** el grupo de individuos susceptibles de contraer el virus de una enfermedad transmisible, considerando que estas personas no tienen ningún tipo de inmunidad ante el agente infeccioso, lo cual provocaría su contagio ante la exposición del mismo;
- **I:** el grupo de individuos infectados y que son transmisores de la enfermedad al grupo S (susceptible);

- **R:** Es el conjunto de individuos recuperados de la infección, que se convierten en agentes inmunes a la enfermedad y por lo tanto no contagian. Cabe destacar, que en este modelo se considera "recuperados" a los fallecidos debido a que tampoco pueden contagiar.

En este modelo se pasa de susceptible a infectado mediante una tasa β, que es la tasa de infección por individuos, y que representa cuántas nuevas infecciones se producen por unidad de tiempo. Esta tasa es clave para la transmisión de la enfermedad, pues de alguna forma describe en una cierta población (N) cuál es la fuerza del virus (la fuerza del COVID-19 es mucho más fuerte que un resfrío común). Esta tasa (beta) está multiplicada $\frac{I}{N}$ por que es la probabilidad de que un susceptible tenga contacto con un infectado. Donde N es la población.

$$\beta \frac{I}{N}$$

Un infectado se puede recuperar a una tasa γ. Estos modelos asumen que el tiempo de permanencia en la clase I (el tiempo que permanece infeccioso) está distribuido exponencialmente. El modelo requiere de ecuaciones diferenciales mediante la cual se termina construyendo la expresión exponencial que representa a la cantidad de infectados. Esta es:

$$I(t) = I_0 . e^{k.t} \Rightarrow I(t) = I_0 . e^{(\beta - \gamma).t}$$

La cantidad de infectados por mes depende así de los valores de R_0, β, γ; con $R_0 = \frac{\beta}{\gamma}$.

Por ejemplo, si se habla de una tasa de contagio (R_0) de 2,5; despejando los valores de beta y gama, al cabo de 30 días se tendrán 406 contagiados (Sureda y Rossi, 2022):

$$I_{(30)} = 1. e^{(0,20025).30} \Rightarrow I_{(30)} = 406$$

Aún cuando no se espera que en secundaria se estudien cómo se construyen estos modelos epidemiológicos, si se pueden utilizar para realizar los cálculos; o aproximarse mediante exponenciales sencillas.

2.3. Aspectos metodológicos

Se realizaron entrevistas personales, semi-estructuradas a seis profesores de matemática, en torno a las siguientes cuestiones: el significado del concepto Función Exponencial, sus características, su enseñanza y su utilidad. Las entrevistas se grabaron en video y duraron aproximadamente 15 minutos con cada profesor. Luego se transcribieron y se obtuvieron alrededor de 120 episodios (E) por entrevista. El episodio cambiaba según si el turno de habla es del entrevistador o del profesor. Se tuvo también acceso a los documentos de clase de cada profesor. Esto nos permite comparar lo que dicen sobre la clase, con lo que efectivamente hacen en clase. Las características de los profesores se describen en la tabla 1; donde (T) significa recibido en una institución Terciaria y (U) Universitario; mientras que (P) significa que enseña en escuelas Públicas y (PR) en Privada.

Tabla 1. Características de los seis profesores

P1	**P2**	**P3**	**P4**	**P5**	**P6**
Profesor recibido en T	Profesora recibida en T	Profesora recibida en T	Profesora recibida en T y U	Profesora recibida de U	Profesor recibido de T
41 años	54 años	55 años	43 años	28 años	34 años
16 años antigüedad	17 años de antigüedad	17 años de antigüedad	18 años de antigüedad	5 años de antigüedad	4 años de antigüedad
Enseña en escuelas P	Enseña en escuelas P	Enseña en escuelas P	Enseña en escuelas P y PR	Enseña en escuelas PR	Enseña en escuelas PR

2.4. Análisis de Datos y Resultados

Se analizan las respuestas de seis profesores de matemática en ejercicio, a las siguientes preguntas: ¿Sabe usted cómo aumentan los casos de COVID19? ¿Hay algún modelo matemático que nos permita inferir cuántos contagiados habrá la próxima semana? ¿Me puede explicar cómo aumentan los casos de COVID19?

La tabla 2 contiene las transcripciones de la conversación con el profesor 1 relativa a esta pregunta.

Tabla 2. Respuesta del Profesor 1

Ep.	**Investigador**	**Ep.**	**Profesor 1**
E69	- ¿Sabe usted cómo aumentan los casos de COVID19?	E70	- Eh…sí.
E71	- ¿Hay algún modelo matemático que nos permita inferir cuántos contagiados habrá la próxima semana? O ¿me podes explicar cómo aumentan los casos de COVID?	E72	- Eh, un modelo matemático no. Lo que sí hay es proyecciones en función de ciertas condiciones que se tienen que dar, y que se mantengan esas condiciones, pero es muy variable.
E73	- Bien, bien. Y, eh…	E74	- O sea…

Ep.	Investigador	Ep.	Profesor 1
E75	- Si.	E76	- Si fuera un modelo matemático viste que está el crecimiento, justamente se llama crecimiento exponencial, pero no siempre es exponencial y, eh, depende de qué características externas no, no se comporta de una manera matemática que responda a una sola función o una aproximación de una función.

Este profesor comienza respondiendo que sabe la forma en que aumentan los casos de COVID19 (E70), sin embargo en el episodio E72, él afirma que no hay un modelo matemático que permita modelizar este tipo de crecimientos, pues según qué características estuvieran involucradas, el aumento no sería necesariamente exponencial (E76). Esta respuesta evidencia dos cosas: por una parte, la ausencia de esquemas que le permitan predecir cómo será el aumento de los contagiados de COVID19. Por otra parte, sus esquemas disponibles, como profesor, respecto a la función exponencial y su utilidad no van más allá de la resolución de tareas escolares. Pues aún cuando afirma que socialmente se dice que el crecimiento responde a un modelo exponencial, él afirma que la forma en que aumenta la cantidad de contagiados de COVID19 no se comporta de una manera matemática que responda a una sola función. Los invariantes operatorios posibles de inferir de sus respuestas son: *La cantidad de casos de COVID se estiman mediante diferentes funciones* (I.O1); *Los casos de COVID no se pueden estimar mediante una función exponencial* (I.O2).

En la tabla 3 se muestran las transcripciones de la conversación con el profesor 2 relativa a esta pregunta.

Tabla 3. Respuesta del Profesor 2

Ep.	Investigador	Ep.	Profesor 2
E87	- ¿Sabe usted cómo aumentan los casos de COVID19?	E88	- ¿Cómo aumentan?
E89	- Sí.	E90	- Claro ellos dicen en forma exponencial, jajá, ¿En la tele sale eso, no? Si, dicen eso, pero no, si fuese en forma exponencial… No, yo lo veo como… bueno en realidad no me puse a analizarlo, la verdad que me pasé las últimas dos semanas con el tema de que soy COVID positivo y me dio negativo el PCR, así que no, no vi de qué manera..., estoy al tanto de los números, de que ayer hubo como treinta y cinco mil y pico y qué sé yo, pero no lo analicé matemáticamente.

El profesor 2 comienza respondiendo que en los medios de comunicación, dicen que el modelo matemático que permite calcular la cantidad de contagiados de COVID19 es exponencial (E90); pero, aclara entre risas que él no lo considera así. Sin embargo, a medida que responde es posible advertir la formulación de diferentes esquemas (exponencial y no exponencial) y los invariantes operatorios que viven en ellos (*La cantidad de casos de COVID se estiman mediante una función exponencial* (I.O3); *Los casos de COVID no se pueden estimar mediante una función exponencial* (I.O2)) para terminar aceptando que no lo analizó matemáticamente. Esta respuesta muestra que aun cuando como profesor tiene todos los esquemas disponibles respecto a la función exponencial y su enseñanza (Podavini y Sureda; 2021), y reconoce haber escuchado en los medios de comunicación que el modelo es exponencial, este profesor no se tomó el tiempo para analizar matemáticamente la relación entre la función exponencial y la forma en que se estima el aumento en la cantidad de contagiados por COVID19.

La tabla 4 muestra las transcripciones de la conversación con el profesor 3, relativa a esta pregunta.

Tabla 4. Respuesta del Profesor 3

Ep.	**Investigador**	**Ep.**	**Profesor 3**
E93	- ¿Sabe usted cómo aumentan los casos de COVID19?	E94	- No, te soy sincero, no.

Este profesor que responde que no sabe cómo aumentan los casos de COVID19 (E94), enseña la función exponencial en sus cursos de 4to y 5to año de la escuela secundaria técnica (Podavini y Sureda; 2021). Esta respuesta demuestra, al igual que en la respuesta del profesor anterior, que dicho profesor no solo no establece una relación entre la función exponencial y el COVID19; sino que tampoco se lo cuestiona.

La siguiente tabla (tabla 5), contiene las transcripciones de la conversación con el profesor 4 relativa a esta pregunta.

Tabla 5. Respuesta del Profesor 4

Ep.	**Investigador**	**Ep.**	**Profesor 4**
E47	- ¿Sabe usted cómo aumentan los casos de COVID19?	E48	- Eh…actualmente no. El año pasado sí, lo trabajamos con los chicos, pero este año todavía no llegamos a función exponencial.

Ep.	Investigador	Ep.	Profesor 4
E49	- Bien, y ¿cómo la trabajaron el año pasado?	E50	- Trabajamos solamente en Argentina, no trabajamos a nivel mundial. Entonces ellos tuvieron que investigar en distintas fuentes, alguna páginas de internet que yo les dí, también podían buscar ellos por su cuenta en diarios, y una vez que se tenía toda esa información, se empezó a tabular. Luego, a partir de esa tabulación empezamos a hacer un análisis gráfico, de cómo se representaba, cómo iba creciendo y analizamos qué función se aproximaría a ese crecimiento. Pero este año no trabajamos nada con COVID.
E51	- Bien, y ¿a qué modelo llegaron?	E52	- A un modelo exponencial.

La respuesta del profesor 4, evidencia invariantes operatorios que establecen una relación entre la Función Exponencial (FE) y la forma de estimar los contagiados por COVID19 (E52): *La cantidad de casos de COVID se estiman mediante una función exponencial* (I.O3). De la conversación también es posible inferir que está interesado en una enseñanza mediante la resolución de problemas que tengan sentido para el estudiante (I.O4: *el sentido del concepto se construye a partir de los problemas que permite resolver*), pues de otra manera no se hubiera tomado el trabajo de preparar una tarea que no estaba todavía en los libros (E50). Finalmente, esto también se corresponde con sus invariantes operatorios relativos a la función exponencial: *Es una función cuyo: Aumento precipitado / Explosión numérica / Crecimiento es rápido* (I.O5) descritos en (Podavini y Sureda, 2021).

La siguiente tabla contiene las transcripciones de la conversación con el profesor 5, relativa a esta pregunta (tabla 6).

Tabla 6. Respuesta del Profesor 5

Ep.	Investigador	Ep.	Profesor 5
E7	- Bien. ¿Crees que es necesario enseñar la FE en la ES?	E8	- Sí.
E9	- ¿Por qué motivo?	E10	- Porque, justamente creo que de las funciones es la que más se aplica a distintos campos, como sea de economía, biología, y hoy por hoy, el COVID lo dejó en claro creo, por eso.
E11	- Bien, ya que me comentaste eso, digo, ¿sabes cómo aumentan los casos de covid19?	E12	- Los números no tengo idea, que aumentan exponencialmente lo sé.

Ep.	**Investigador**	**Ep.**	**Profesor 5**
E13	- Sí.	E14	- Pero, no sé los números.
E15	-No, no, bien, bien, pero quería preguntarte si había justamente algún modelo matemático que…	E16	- Ah, sí, sí!
…		…	
E19	- Bien, ¿vos enseñás la FE en la escuela secundaria?	E20	-En realidad no, porque tengo 6º, pero este año sí, porque como el año pasado fue virtual no llegaron a darlo, entonces estoy dando exponencial en uno de los sextos, pero generalmente no lo doy.
E21	-Bien. ¿O sea que lo estás dando en sexto?	E22	-Ahora sí.
E23	-Bien. ¿Y cómo lo estás? eh... ¿Qué es lo estás dando y cómo lo das? O sea ¿Cómo lo enseñas y que estás dando de la función exponencial?	E24	-Bien, empiezo el tema con un problema de aplicación, que básicamente no sepan, o sea, no saben lo que es la función exponencial, por ejemplo no sé, lo pongo al ejemplo del COVID…
E25	-Bien.	E26	-Que una persona contagia a 2 y esas 2 personas contagian a otras 2, y lo que vamos haciendo es hacer la tabla, y que ellos vayan completando la tabla de valores. A partir de eso los intento guiar para tratar de llegar a una…, o sea por ahí pregunto: ¿Qué pasa si son 50 personas?... como que ya nos damos cuenta que no podés seguir haciendo toda esa cuenta, intento llevarlos a formar la fórmula que represente a esa situación, lo cual cuesta muchísimo, o sea no se dan cuenta muy rápido qué es lo que está pasando, algunos sí y el resto es como que está calculando. Pero siempre empiezo con problemas.
E27	-Bien.	E28	-Después estudio crecimiento, decrecimiento, comportamiento y después ya voy a lo formal…

A partir de la conversación con el profesor 5 es posible inferir un invariante operatorio que relaciona la FE y la forma en que se estima la cantidad de contagiados por COVID19: *La cantidad de casos de COVID se estiman mediante una función exponencial* (I.O3). También al afirmar que estudiar la función exponencial no solo sirve para resolver problemas de matemáticas, sino también para resolver problemas en otras áreas, y en la vida cotidiana (E10 y E12) permite inferir la presencia de I.O4 y de I.O5 (*el sentido del concepto se construye a partir de los problemas que permite resolver; Es una función* *cuyo: Aumento precipitado / Explosión numérica / Crecimiento es rápido*). Luego, los E24 y E26 revelan que este profesor les propuso a sus estudiantes calcular numéricamente la cantidad de personas contagiadas para el caso en que cada uno contagiara otros 2; con el propósito de institucionalizar luego, la función exponencial. Si bien la expresión algebraica que el profesor formaliza con sus estudiantes es del tipo (E26), mientras que los modelos exponenciales que se utilizan son un poco más complejos, pues su construcción involucra derivadas parciales y ecuaciones diferenciales; la forma en que lo hace permite una primera aproximación, tanto para la comprensión del fenómeno social, como de la herramienta matemática en sí.

La última tabla contiene las transcripciones de la conversación con el profesor 6, relativa a esta pregunta.

Tabla 7. Respuesta del Profesor 6

Ep.	**Investigador**	**Ep.**	**Profesor 2**
E17	-Bien perfecto. ¿Qué enseña o enseñó de las funciones exponenciales en la escuela secundaria? Y ¿cómo lo enseñó?	E18	-Enseño la ecuación con situaciones problemáticas. El gráfico: cómo analizar un gráfico, las características del gráfico, dependiendo de los coeficientes, qué cosas pueden suceder y qué no en cada gráfico ¿sí?, también utilizando graficadores como el GeoGebra.
E19	-Bien, y ¿Qué tipo de situaciones?	E20	-Situaciones como por ejemplo, lo que estamos viviendo ahora del COVID, eh, otros problemas, que saco de algunas fotocopias que me dan los docentes que suplanto; porque yo estoy dando en ciclo básico, y suplanto a docentes que están en ciclo superior, así que...
E21	-Bien.	E22	-Esas situaciones problemáticas.
…		…	
E31	-Bien, y vos me estuviste hablando recién de la situación problemática de lo de…la situación actual, ¿sabe usted cómo aumentan los casos de COVID19?	E32	-Exponencialmente sí. Por medio de los contagios crece rápidamente.

La respuesta que el profesor 6 da a la pregunta: ¿qué tipos de situaciones problemáticas les proponía a sus alumnos para la enseñanza de la función exponencial? en el E20 al expresar que "les propone situaciones como las que la sociedad vive actualmente respecto a los casos de contagio de COVID19", permite inferir los siguientes invariantes operatorios: *La cantidad de casos de COVID se estiman mediante una función exponencial* (I.O3); *el sentido del concepto se construye a partir de los problemas que permite resolver* (I.O4). Luego, al preguntarle cómo se calcula el aumento de casos de contagios de COVID19, responde que aumentan rápidamente, exponencialmente (E32). Esta respuesta evidencia esquemas específicos de variación exponencial respecto a la rapidez en que los casos aumentan: *Es una función cuyo: Aumento precipitado / Explosión numérica / Crecimiento es rápido* (I.O5).

3. CONCLUSIONES

El análisis de las respuestas de seis profesores de matemática en ejercicio, que enseñan la función exponencial (FE) en la escuela secundaria, respecto a las preguntas: ¿sabe usted cómo aumentan los casos de COVID19?, ¿hay algún modelo matemático que nos permita inferir cuántos contagiados habrá la próxima semana?, ¿me puede explicar cómo aumentan los casos de COVID19? permite inferir que tres de ellos no cuentan con invariantes operatorios que les permitan vincular la forma en que se estiman la cantidad de contagiados por COVID19 y la función exponencial, aún cuando se habla masivamente en los medios de que el modelo es exponencial. La edad de ellos (41; 54 y 55 años), hace suponer una formación terciaria más centrada en la matemática, que en su utilidad (más común en las formaciones actuales). En contraposición con esto, los tres profesores en los que fue posible inferir invariantes operatorios que vinculan la FE con la forma de estimar la cantidad de contagiados, son profesores más jóvenes (28 y 34 años), o con amplia formación posterior en Enseñanza (dos Licenciaturas, una tecnicatura y un Magíster).

La variación exponencial en general, y la función exponencial en particular, se destaca por ser la única que aún cuando su crecimiento puede comenzar siendo lento, llega un momento en que "explota" y comienza a ser muy rápido. Comprender esto empieza a ser cada vez más imprescindible para cada ciudadano debido a la incidencia que estas variaciones tienen en la vida actual. Por ejemplo, cualquier persona que accede a una tarjeta de crédito, o préstamo, tiene que poder entender de antemano que este tipo de variaciones son las que rigen la forma en que aumenta la deuda de la tarjeta de crédito (o préstamo) cuando se paga el mínimo, o no se paga. Pues no es lo mismo creer que aumentará de la forma: 2, 4, 6, 8, 10, etc.; que entender que lo hará por ejemplo, de la forma: 2, 4, 8, 16, 32, etc. De la misma forma, no es lo mismo pensar que si tengo COVID19 puedo infectar una persona, y está a una más y así; que realizar los cálculos y entender que, si contagio dos personas, y ellos a su vez contagian otros dos cada uno y así cada vez, habrá un momento en que el aumento será muy veloz. Sí cómo Chevallar (2017) nos ocupa enseñar matemática no solo para quienes la necesitaran en estudios superiores, sino también para esa parte de la población que quizás nunca vuelva a estudiar matemáticas, entonces brindarles este tipo de herramientas en la escuela secundaria se torna en un saber muy valioso para la toma de decisiones importantes como calcular previamente si podrá o no, pagar un préstamo, o si tomará medidas de aislamiento si tiene COVID19. Sobre todo, porque son variaciones que sólo se aprenden mediante enseñanza formal (Sureda y Otero, 2013).

4. REFERENCIAS

Alvarado, A. (2009). *Estudio y clasificación de funciones reales.* (Trabajo de ascenso). UPEL-IPM, Venezuela.

Niss, M., Blum, W. & Galbraith, P. L. (2007). Introduction. En: Blum, Werner Etál. (Eds.), *Modelling and Applications in Mathematics Education.* New York: Springer, 3-32.

Ortiz, J. (2002). *Modelización y calculadora gráfica en la enseñanza del álgebra. Estudio evaluativo de un programa de formación*. (Doctorado en Educación Matemática). Granada: Universidad de Granada.

Otero, R., Fanaro, A., Sureda, P., Llanos, V. y Arlego, M. (2014). *La teoría de los campos conceptuales y la conceptualización en el aula de matemática y física.* Buenos Aires: Dunken.

Pliego, E. C. (2011). *Modelos Epidemiológicos de Enfermedades Virales Infecciosas*. [Tesis de licenciatura]. Benemérita Universidad Autónoma de Puebla. https://www.fcfm.buap.mx/assets/docs/docencia/tesis/matematicas/ EmileneCarmelitaPliegoPliego.pdf

Podavini, J. y Sureda, P. (2021). La enseñanza de la Función Exponencial en la Escuela Secundaria: Los profesores. Un estudio de caso. En Álvarez, M., Carnelli, G., Díaz, L., Espinoza, F., Fórmica, A. y Scaglia, S. (Eds*.) Noticiero de la Unión Matemática Argentina, 56* (2).

Rodríguez, R. (2015) Enseñanza y aprendizaje de matemáticas a través de la modelación desde y para la formación de ingenieros. En: Arrieta, J. Y Díaz, L. (Eds.) *Investigaciones latinoamericanas en modelación matemática (163-194).* México: Gedisa.

Sanchez, C. y García, A. (2020). Modelización matemática y Geogebra en el estudio de la función exponencial usando el número de casos positivos del covid-19. *Visión Educativa IUNAES, 31(14)*, 156-163.

Sureda, P. y Rossi, L. (2022). Enseñanza de Ecuaciones Diferenciales en el nivel terciario mediante un REI relativo a los contagios de COVID-19. Aceptado para su presentación en el CITAD7: *7th International Conference on the Anthropological Theory of the Didactic.19-23* Jun 2022 Bellaterra, Barcelona (Spain).

Sureda, P. y Otero, R. (2013). Un estudio sobre el proceso de conceptualización de la función exponencial. *Revista Educación Matemática, 25* (2), 89-118.

Vergnaud, G. (1990). La teoría de los campos conceptuales. *Recherches en Didáctique des Mathématiques, 2*(10), 133-170.

Vergnaud, G. (2009). The Theory of Conceptual Fields. *Human Development, 52*, 83–94.

Vergnaud, G. (2013). ¿Por qué la Teoría de los Campos Conceptuales*? Infancia y Aprendizaje, 36*, 131-161.

Épsilon - Revista de Educación Matemática *2022, nº 112, 21-34*

Khan Academy, Google Classroom y Microsoft Excel como herramientas tecnológicas de evaluación del estudiante

Javier González Gómez
Alejandro M. Rosas Mendoza
Juan Gabriel Molina Zavaleta
Instituto Politécnico Nacional/CICATA – Legaria

Resumen: *En el presente documento se describe cómo el uso en conjunto de tres herramientas tecnológicas ha permitido, a manera de experiencia en clases, mejorar el desempeño docente en lo relativo a una mejor manera de realizar la evaluación continua.*
Palabras clave: *Khan Academy; herramientas tecnológicas; desempeño docente; experiencia con tecnología; tecnología en el aula.*

Khan Academy, Google Classroom and Microsoft Excel as technology tools for student assessment

Abstract: *This document describes how the joint use of three technological tools has allowed, as an experience in classes, to improve teaching performance in relation to a better way of carrying out continuous evaluation.*
Keywords: *Khan Academy, technological tools, teaching performance, experience with technology, technology in the classroom.*

1. INTRODUCCIÓN

Pensando un poco en una de las prácticas y didácticas comunes en el salón de clases, el docente de matemáticas, al abordar un tema frente al grupo comienza según su estrategia didáctica, una interacción con los estudiantes que puede ser tan dinámica como el docente tenga la capacidad de dirigir. Según los indicadores educativos de la República Mexicana publicados por la Dirección General de Planeación, Programación y Estadística Educativa (SEP, 2021) en el sistema educativo público se registró un total de 35,588,589 alumnos para 2,062,543 docentes, por lo que podemos decir de manera muy general que cada docente atiende un promedio de 17 alumnos, el docente tiene que evaluar a cada uno de ellos y es ahí, donde surge uno de los grandes retos para el docente, porque ese tiempo usado para evaluar a cada uno de ellos, puede afectar su desempeño en la labor de educar a cada uno de los estudiantes a su cargo.

¿Por qué puede afectar? Si consideramos un grupo de 20 alumnos, al cual, se les asigna una "tarea típica" de resolver n ejercicios del tema estudiado en clases, el docente, para poder evaluar a cada uno de los alumnos, tiene que "revisar" 20n ejercicios, que dependiendo del grado de dificultad, el tiempo que va a ocupar en hacer la revisión y registro de la actividad, va a consumir el tiempo de los periodos lectivos dedicados a la enseñanza de la asignatura, limitando de esta manera el avance y desarrollo del currículo de la materia. Esta situación es cotidiana para muchos educadores, en diversas investigaciones se describen características parecidas y como prueba de ello podemos observar una investigación particular realizada por Cuenca Villamonte (2018) en la cual evalúa a un grupo de 29 estudiantes con Ejercicios Matemáticos Personalizados (EMP) y menciona que la revisión y calificación se hizo fuera de clase para poder realizar un análisis minucioso ya que el tiempo en el aula no habría sido suficiente para hacerlo ahí mismo.

Todo esto es apenas viendo una actividad del plan de clases, y dado que la evaluación debe ser un proceso continuo, que permita recabar evidencias pertinentes sobre el logro de los aprendizajes y que permita retroalimentar el proceso de enseñanza – aprendizaje y mejorar sus resultados (SEP, 2013) el docente evalúa comúnmente con series de ejercicios "estudiados" durante un periodo de tiempo y los resultados obtenidos no siempre son los deseados, dando espacio a una discusión sobre su desempeño como docente de matemáticas.

A esta situación presentada se le ha buscado solución con el uso de la tecnología y los recursos didácticos existentes desarrollados en la actualidad por diversas organizaciones que trabajan en pro de la educación; de manera que en el presente documento se describe una experiencia del uso de las plataformas de Khan Academy y Google Classroom en el aula, además del uso de Microsoft Excel para el procesamiento de la información y determinación de calificaciones más objetivas en la evaluación.

1.1. Herramientas digitales para la educación

Los estudiantes de la actualidad son nativos digitales, como bien lo menciona Ramos (2021), se hace necesario e indispensable "que los docentes tengan acceso a los recursos adecuados para seguir el ritmo de la creciente cultura tecnológica".

Ramos (2021) considera que el uso de teléfonos inteligentes, tabletas y otros dispositivos tecnológicos en el aula no necesariamente tiene que tener un impacto negativo en el rendimiento de los estudiantes. Por el contrario, el aumento de la accesibilidad y el aumento constante de la tecnología presentan a los maestros una oportunidad única para aprovechar estos dispositivos que antes distraían y usarlos para facilitar el éxito en el aprendizaje de formas innovadoras. En este sentido, los docentes no necesitan luchar constantemente por la atención de sus alumnos, sino que pueden aceptarla libremente, introduciendo un nuevo entorno educativo que automáticamente fomentará la participación del alumno.

Es por ello que en este artículo se presentan algunas herramientas digitales que han mejorado nuestras clases, el desempeño del docente y la motivación de alumnos en el estudio del Cálculo diferencial e integral en el nivel medio superior.

1.1.1. Acerca de Khan Academy

Es una organización educativa sin fines de lucro, fundada por Salman Khan con la misión de "proporcionar una educación gratuita de nivel mundial para cualquier persona, en cualquier lugar" (Khan Academy, 2022). Como podemos encontrar en su sitio web https://es.khanacademy.org/about. En su plataforma se encuentran "ejercicios de práctica, videos instructivos y un panel de aprendizaje personalizado que permite a los estudiantes aprender a su propio ritmo, dentro y fuera del salón de clases".

Como docentes de matemáticas, podemos encontrar una enorme cantidad de contenido en esta plataforma, los contenidos son compatibles con los del sistema educativo en México, abarca temas desde el nivel de Preescolar hasta el sexto semestre de bachillerato, desde Matemáticas elementales hasta Ecuaciones diferenciales, esto nos permite *Privilegiar* esta herramienta según Wertsch (1990) citado por (Zbiek, Heid, & W. Blume) ya que se escoge Khan Academy intencionalmente sobre muchas opciones de libros didácticos diseñados específicamente para la asignatura de cálculo en el nivel medio superior debido a que las representaciones, conceptos y actividades didácticas son excelentes para aprender y desarrollar las competencias requeridas según el plan de clases.

Los beneficios que más podemos destacar de la plataforma y que la propia organización menciona en su sitio web (2022) es que los estudiantes practican a su propio ritmo, guiados por el maestro, pero con cierta autonomía para que al sentirse seguros de su comprensión luego aceleren su aprendizaje. El contenido es de confianza ya que es creado por expertos, con una biblioteca de ejercicios y lecciones que cubren temas de matemáticas, ciencias y más; se ha diseñado para que sea siempre gratis para estudiantes y maestros, sin anuncios ni suscripciones para desbloquear funcionalidades premium; en el espacio diseñado para el docente se cuenta con un panel para crear y administrar diversas clases con temas específicos de enseñanza en cada una de ellas; al mismo tiempo se tiene un listado de todos los estudiantes inscritos en cada clase y se puede ver a detalle las actividades que realiza, el tiempo en la plataforma y muchos indicadores más que le ayudan al docente a ver el progreso de cada alumno. Esta herramienta tendría un valor práctico y epistémico alto, por lo que le permita al docente hacer y por lo que le permitiría al alumno aprender, en el sentido de Molina y Rosas (2022).

Para acceder basta tener un computador o un dispositivo móvil y entrar por medio de un navegador web o por medio de la aplicación de dispositivo móvil, desarrollada por la misma organización, esta aplicación puede ser descargada de la tienda de aplicaciones con la que cuente el dispositivo electrónico que se esté usando.

1.1.2. Acerca de Google Classroom

Es una herramienta para el uso educativo que encontramos en la web desarrollada por Google, esta herramienta forma parte de la familia de aplicaciones que proporciona Google for Education. Según su propia página web dice que es "una herramienta segura y fácil de usar que ayuda a los educadores a administrar, medir y enriquecer las experiencias de aprendizaje." (Google, 2022)

A pesar de que tiene una edición pagada, la edición gratuita es bastante completa para poder disfrutar de los beneficios que se pueden obtener al usarla, entre esos beneficios podemos mencionar que se pueden administrar varias clases en un solo lugar; es fácil de usar ya que ha sido diseñada pensando en que sea simple y cualquiera le entienda en pocos minutos; se pueden preparar y programar tareas y cuestionarios en varias clases; permite que los estudiantes tomen fotografías de su tarea en papel y la envíen fácilmente con capturas de imágenes mejoradas; cumple con los estándares educativos globales más rigurosos en términos de seguridad y privacidad; no tiene anuncios y la información personal de los estudiantes no se usa a fin de crear perfiles para segmentar anuncios; y entre tantos otros beneficios el último a mencionar es que es de fácil adopción debido a que un 82.9% de la población en México en el 2020 que cuenta con un dispositivo, el sistema operativo de este es Android (Branch, 2021) que de igual manera, es un producto desarrollado por Google.

Google ha pasado de ser un simple buscador en la web a ser el proveedor de innumerables herramientas que se han vuelto instrumentos para muchas personas, entre ellas estamos los docentes y estudiantes incorporando "Google Classroom" a nuestras actividades. La génesis instrumental mencionada en (Zbiek, Heid, & W. Blume, 2007), nos hace entender el proceso de desarrollar maneras significativas de usar estas herramientas.

1.1.3. Acerca de Microsoft Excel

Este software no es tan reciente como los anteriores y desde su aparición se ha hecho tan popular e indispensable en muchas disciplinas ya que como menciona en su sitio web (Microsoft, 2022) es una herramienta eficaz que ayuda a obtener información con significado a partir de grandes cantidades de datos. Funciona bien para hacer cálculos sencillos y darle seguimiento a casi cualquier tipo de información. Todo esto es posible gracias a su configuración en forma de cuadricula de celdas ya que en ellas se pueden contener números, texto o fórmulas ordenándolos de esta manera en filas y columnas. En matemática educativa se han hecho investigaciones al respecto que lo involucran, en lo relativo al uso de hojas de cálculo. Como concluye Espinoza (2015) esta herramienta se puede utilizar para la enseñanza de conceptos matemáticos sin tener que recurrir a software adicional; su utilización puede ser sencilla, sin necesidad de saber programación se puede aprovechar la gran cantidad de funciones matemáticas con las que cuenta, o puede ser un uso sofisticado, ingresando mediante un lenguaje de programación llamado Visual Basic for Applications instrucciones para realizar tareas más complejas.

1.2. Descripción de la experiencia

Esta comienza en el año 2018, cuando en medio de la necesidad de preparar el contenido de las clases y buscando en la inmensidad del internet, optamos dos docentes de matemáticas del Centro de Bachillerato Tecnológico Agropecuario No. 24, hacer uso de las funcionalidades y contenido encontrado en la plataforma de Khan Academy, desde ese primer uso, semestre tras semestre (incluido el tiempo de la pandemia por el COVID – 19) se ha venido mejorando la didáctica de su implementación, al ver todos los beneficios y funcionalidades que presenta la plataforma, se presenta a continuación el proceso llevado a cabo que permite reproducir la experiencia de trabajo.

Lo primero es crear una cuenta por medio de la opción de registro.

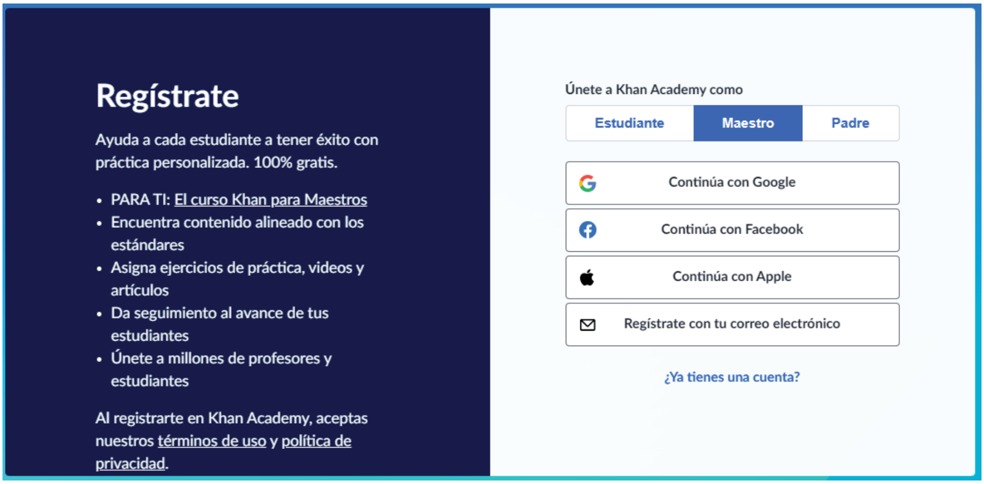


Imagen 1. Opciones de registro en Khan Academy

Una vez registrados, realizar el "Curso Khan para Maestros" es de gran utilidad para ver todo lo que la plataforma nos permite hacer y aprovechar al máximo sus funciones según nuestras necesidades.

Lo siguiente es "Agregar una clase" (Imagen 2), la cual podemos nombrar como deseemos en 50 caracteres o importarla si ya creamos previamente una clase en Google Classroom, a manera de experiencia; lo mejor es crearla primero en Khan Academy y posteriormente usar Classroom.

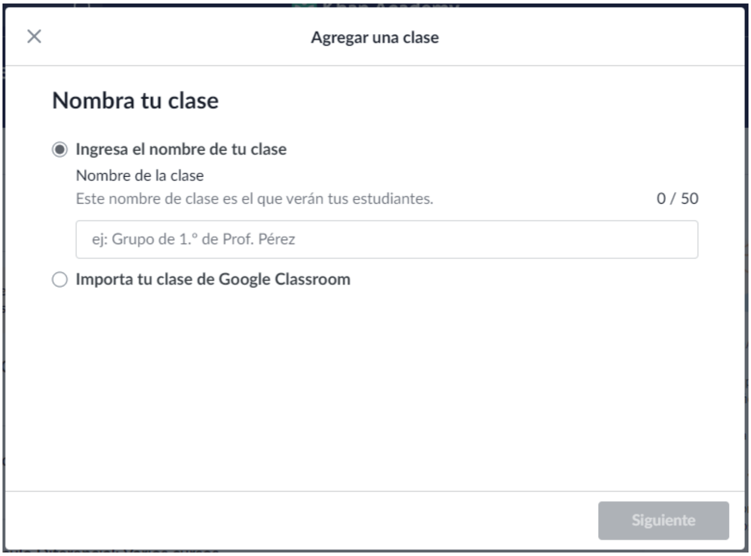


Imagen 2. Agregar una clase en Khan Academy

Después de nombrar la clase, podemos elegir el tema de matemáticas a estudiar o la selección de temas que tiene, por grados escolares (Imagen 3), desde uno hasta el número de temas que se considere importantes a ser estudiados durante el periodo de clases según el programa de estudios. Si el docente tiene dudas de que opciones elegir, puede dar en la opción "Saltar" para verificar el contenido que la plataforma ofrece en los temas propuestos y posteriormente elegir el tema con más seguridad.

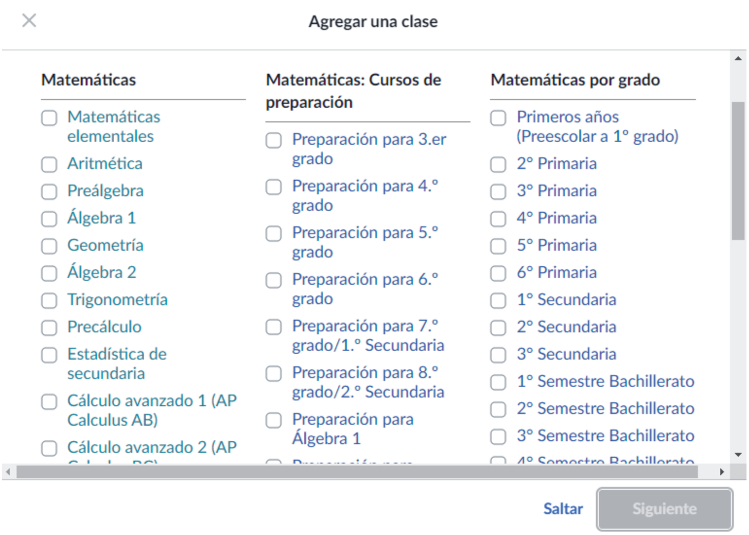


Imagen 3. Elegir un tema a estudiar

Como último paso en la creación de la clase, la plataforma nos pregunta cómo deseamos agregar a nuestros estudiantes (Imagen 4). La opción de invitar a los estudiantes por Google Classroom no la usamos porque como se mencionó anteriormente, primero creamos la clase en Khan Academy; las otras dos opciones fueron probadas y se llegó a la conclusión de que es mejor Crear las cuentas para los estudiantes a que ellos se unan con un enlace debido a que se puede tener un mejor control y mejor identificación de cada uno de ellos.

Si los alumnos crean sus cuentas, posteriormente algunos tienen problemas de acceso debido a que olvidan los datos con los que se registraron en la plataforma y crean una cuenta diferente para volver a ingresar duplicando de esta manera el registro de ellos mismos; otro problema común que se presenta es que si eligen la opción de registrarse con Google o Facebook, la plataforma toma el nombre con el cual están registrados en esos sitios y para el docente se vuelve complicado identificarlos ya que por lo general no se muestra su nombre completo o sucede que aparece un sobrenombre dificultando aún más el identificar al estudiante, por estos motivos, es preferible crear las cuentas de los estudiantes según la forma en la que se identifican comúnmente, con su nombre completo.

Imagen 4. Agregar a los estudiantes

En la Imagen 5, se muestra un ejemplo del momento en que se dejó a los estudiantes unirse con un enlace, en el lado izquierdo se observan nombres duplicados, incompletos y con errores de escritura, del otro lado se observa una lista de nombres de las cuentas que fueron creadas por el docente.

Imagen 5. Nombres de estudiantes registrados por su propia cuenta y estudiantes registrados por el docente.

Ya que se crearon las cuentas de los estudiantes se le proporciona a cada uno de ellos el usuario y contraseña generados por la misma plataforma, los datos con los cuales ellos iniciarán sesión y podrán ver los videos, las lecturas y tareas que nosotros como docentes asignemos desde nuestro “Panel del profesor” (Imagen 6).

Imagen 6. Panel del profesor

Después de enviarle tareas a los estudiantes, desde el mismo Panel, podemos consultar los puntos que obtienen en cada una de las tareas asignadas, incluso si vieron o no los videos que también le fueron enviados (Imagen 7).

ESTUDIANTES	Evalúa funciones mar. 5	Ejemplo resuelto: evaluar funciones a partir de su gráfica mar. 5	Evalúa funciones a partir de su gráfica mar. 5	Ejemplo resuelto: evaluar expresiones con notación de función	Evalúa expresiones de funciones mar. 5
ALVAREZ HERNANDEZ GUILLERMO	100	✓	100	✓	100
CRUZ CLEMENTE GRECIA DOLORES	100	✓	100	✓	100
CRUZ JIMENEZ ROSA GUADALUPE	100	✓	100	✓	25
CRUZ VELAZQUEZ JORGE ALBERTO	75	–	100	✓	50
ESCOBAR ANGEL DAVID RAFAEL	50	✓	75	✓	–
HERNÁNDEZ MERCHANT JESUS MAR...	100	✓	100	✓	100

Imagen 7. Puntuación que obtienen los estudiantes en las tareas.

Cabe destacar que en los ejercicios que se presentan en la plataforma, solo se le solicita al estudiante la respuesta correcta, puede ser por medio de elegir entre opción múltiple o escribir el resultado, ya sea un número o una ecuación según sea el caso y es por ello que el uso de la libreta para desarrollar el procedimiento que lleva a la solución sigue siendo indispensable al momento de intentar resolver algún ejercicio.

Para este momento, el docente tiene la ayuda de la tecnología a su favor, ya que los estudiantes saben en tiempo real si la respuesta que están colocando es correcta o no, de esta manera el docente observa en dónde se presenta más dificultad y puede reforzar el conocimiento de manera personalizada o general. Es importante señalar que esta situción tiene la desventaja de que no permite conocer la naturaleza del error, la cual podría no ser superada por el alumno. Hay diversas investigaciones en matemática educativa que señalan la importancia del error en matemáticas para el aprendizaje. Esta desventaja se libró con el apoyo de la aplicación Google Classroom.

Cuando ocurre el confinamiento por la pandemia, y las clases tienen que continuar de manera virtual, se hace necesario observar lo que los estudiantes están haciendo en su libreta, y este es el momento en el que Google Classroom entra en escena, ya que por ese medio podemos recibir esa evidencia, retroalimentar a los estudiantes, compartirle documentos todo de manera fácil y ordenada. En las siguientes imágenes (8, 9 y 10) se muestra una actividad asignada desde Khan Academy y cómo esta fue revisada por medio de Classroom para ver si el estudiante entendió el procedimiento y pudo realizar correctamente los ejercicios.

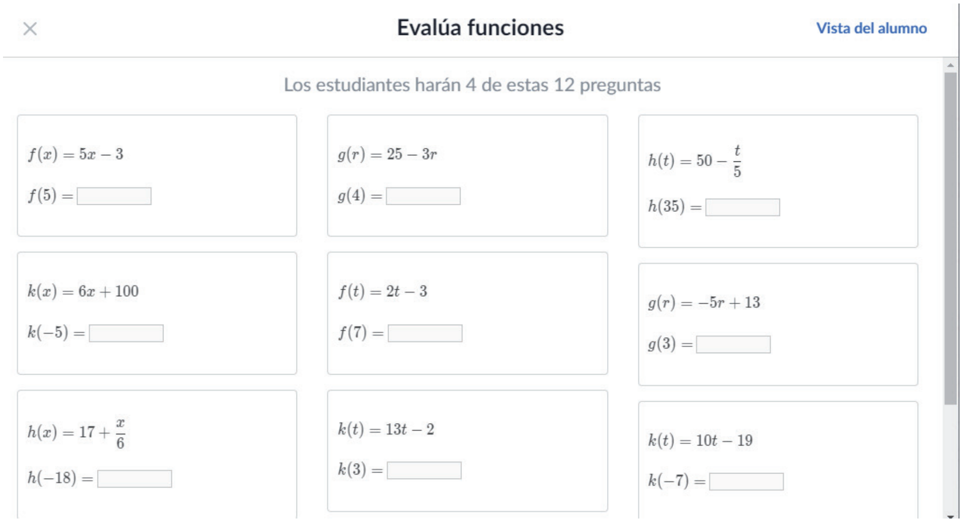


Imagen 8. Actividad asignada desde Khan Academy

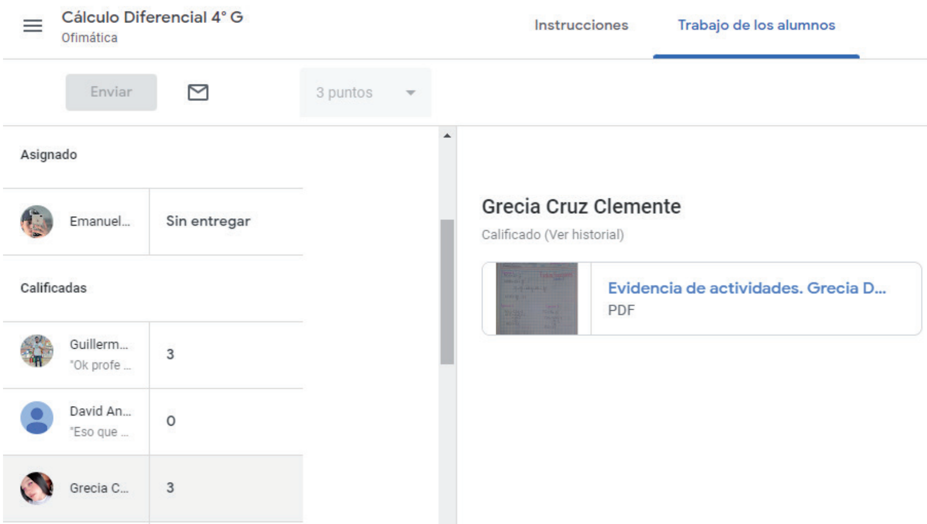


Imagen 9. Evidencias recopiladas por medio de Google Classroom

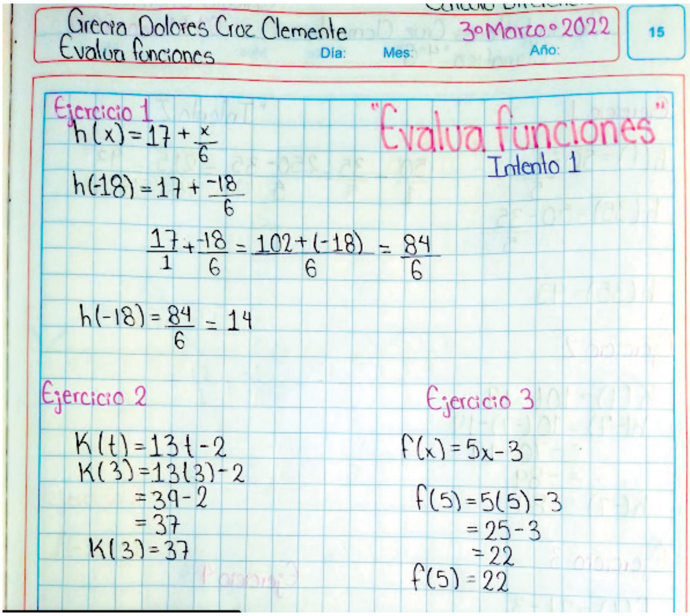


Imagen 10. Evidencia de trabajo de un estudiante en Google Classroom

Recientemente, después de volver de la modalidad virtual a la modalidad presencial a causa de la pandemia, el continuar recibiendo las tareas a través de Google Classroom, permite al docente tener evidencia del trabajo de los alumnos de manera ordenada y siempre al alcance desde cualquier dispositivo del cual se tenga acceso a internet.

Con toda esta información en nuestras manos, debemos saber procesarla para poder evaluar a cada uno de los estudiantes, y Excel ayuda a hacerlo de manera eficaz.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	Nombre de la tarea	Nombre del estudiante	Puntuación en la fecha de entrega	Mejor puntuación obtenida	Puntos posibles	Número de intentos	Última fecha de terminación	Fecha de inicio	Fecha de entrega	URL de la tarea	Tipo de tarea
2090	Evalúa expresiones de fur	ALVAREZ HERNANDEZ GUILLE	4	4	4	3	mar. 4º, 8:	feb. 28º, 1	mar. 5º, 1:	https://es	Ejercicio
2091	Evalúa expresiones de fur	CRUZ CLEMENTE GRECIA DOL	4	4	4	1	mar. 3º, 1(	feb. 28º, 1	mar. 5º, 1:	https://es	Ejercicio
2092	Evalúa expresiones de fur	CRUZ JIMENEZ ROSA GUADAI	0	1	4	2	mar. 22º, :	feb. 28º, 1	mar. 5º, 1:	https://es	Ejercicio
2093	Evalúa expresiones de fur	CRUZ VELAZQUEZ JORGE ALB	2	2	4	1	mar. 4º, 6:	feb. 28º, 1	mar. 5º, 1:	https://es	Ejercicio
2094	Evalúa expresiones de fur	ESCOBAR ANGEL DAVID RAF/	0	0	0	0		feb. 28º, 1	mar. 5º, 1:	https://es	Ejercicio
2095	Evalúa expresiones de fur	HERNÁNDEZ MERCHANT JESI	4	4	4	3	feb. 28º, 1	feb. 28º, 1	mar. 5º, 1:	https://es	Ejercicio
2096	Evalúa expresiones de fur	LOPEZ RUIZ DANIEL	3	3	4	3	mar. 3º, 7:	feb. 28º, 1	mar. 5º, 1:	https://es	Ejercicio
2097	Evalúa expresiones de fur	MARTINEZ TORRES ALONDR/	4	4	4	3	mar. 4º, 1:	feb. 28º, 1	mar. 5º, 1:	https://es	Ejercicio
2098	Evalúa expresiones de fur	MENDOZA DOMINGUEZ NYD	3	3	4	2	mar. 5º, 1:	feb. 28º, 1	mar. 5º, 1:	https://es	Ejercicio
2099	Evalúa expresiones de fur	OVANDO ROQUE EMANUEL [	0	0	0	0		feb. 28º, 1	mar. 5º, 1:	https://es	Ejercicio
2100	Evalúa expresiones de fur	REYES PORTILLO JORGE SEBA	4	4	4	1	feb. 28º, 5	feb. 28º, 1	mar. 5º, 1:	https://es	Ejercicio
2101	Evalúa expresiones de fur	RIVERA OVANDO MARIA GU/	4	4	4	1	mar. 4º, 1:	feb. 28º, 1	mar. 5º, 1:	https://es	Ejercicio
2102	Evalúa expresiones de fur	RODRÍGUEZ NATAREN CARLC	4	4	4	6	mar. 3º, 1:	feb. 28º, 1	mar. 5º, 1:	https://es	Ejercicio
2103	Evalúa expresiones de fur	RUIZ MARTÍNEZ CARLOS MIG	4	4	4	3	mar. 3º, 1(	feb. 28º, 1	mar. 5º, 1:	https://es	Ejercicio
2104	Evalúa expresiones de fur	SANTIAGO HERNANDEZ MAR	3	3	4	4	mar. 5º, 5:	feb. 28º, 1	mar. 5º, 1:	https://es	Ejercicio
2105	Evalúa expresiones de fur	SILIAS VELÁZQUEZ XITLALY G	3	3	4	1	mar. 4º, 1:	feb. 28º, 1	mar. 5º, 1:	https://es	Ejercicio
2106	Evalúa expresiones de fur	TORRES PEREZ ANA PAOLA	2	2	4	2	mar. 5º, 1:	feb. 28º, 1	mar. 5º, 1:	https://es	Ejercicio
2107	Evalúa expresiones de fur	VELAZQUEZ JIMÉNEZ CONSU	4	4	4	5	mar. 4º, 2:	feb. 28º, 1	mar. 5º, 1:	https://es	Ejercicio

Imagen 11. Datos descargados de Khan Academy de tareas realizadas durante un semestre.

Khan Academy y Google Classroom permiten descargar toda esta información por medio de archivos que pueden ser leídos y resumidos con Microsoft Excel (Imagen 11). Como se observa, el total de la información descargada, tiene 2107 filas en las cuales se describe la información de cada tarea realizada por cada uno de los estudiantes.

Con un poco de conocimiento de Excel, se puede aprovechar la función de tablas dinámicas para hacer un resumen de toda esa información (Imagen 12) con la cual, según el puntaje obtenido de cada estudiante, se puede emitir una calificación según los resultados obtenidos y la cantidad de veces que intentaron resolver las tareas durante el semestre.

TAREAS	Suma de Puntos de Khan	Total de Intentos
ALVAREZ HERNANDEZ GUILLERMO	278	126
CRUZ CLEMENTE GRECIA DOLORES	344	73
CRUZ JIMENEZ ROSA GUADALUPE	294.5	92
CRUZ VELAZQUEZ JORGE ALBERTO	26.5	6
ESCOBAR ANGEL DAVID RAFAEL	223	142
HERNÁNDEZ MERCHANT JESUS MARTIN	330.5	107
LOPEZ RUIZ DANIEL	267.5	105
MARTINEZ TORRES ALONDRA	339.5	95
MENDOZA DOMINGUEZ NYDIA YOLERI	338	91
OVANDO ROQUE EMANUEL DE JESUS	102	12
REYES PORTILLO JORGE SEBASTIÁN	331	40
RIVERA OVANDO MARIA GUADALUPE	242.5	51
RODRÍGUEZ NATAREN CARLOS EDUARDO	330.5	106
RUIZ MARTÍNEZ CARLOS MIGUEL	318.5	76
SANTIAGO HERNANDEZ MARIA MONSERRAT	296	190
SILIAS VELÁZQUEZ XITLALY GUADALUPE	224	53
TORRES PEREZ ANA PAOLA	286	108
VELAZQUEZ JIMÉNEZ CONSUELO GUADALUPE	336.5	139

Imagen 12. Resumen de los datos descargados de Khan Academy

2. CONCLUSIONES

El asunto de la evaluación es un problema del cual en matemática educativa se han hecho varias investigaciones al respecto; como ya se ha mencionado, la gran cantidad de alumnos que se requiere evaluar es uno de esos problemas porque es muy complicado hacer una evaluación detallada de las diversas actividades pues el trabajo es multiplicado y exige mucho tiempo realizar esa tarea; por otra parte incorporar elementos automáticos con tecnología puede provocar evaluaciones que no sean muy precisas, lo cual sería otro trabajo a resolver asunto de futuras investigaciones.

Una solución muy buena al problema de tener que evaluar a los alumnos a distancia fue dedicar tiempo a tenerlos bien identificados realizando de manera correcta las cuentas con las que ellos iniciarían sesión en la plataforma seleccionada para estudiar la materia, en la planeación didáctica es muy importante saber a quién se evalúa y el alumno espera que el docente tenga esa claridad del estudiante al que está evaluando.

Aunque ya se ha regresado a la escuela en forma presencial, los efectos de la incorporación aún están presentes, ahora, por lo menos en el caso de esta experiencia que se reporta, nos quedamos con un modelo hibrido que mantiene aquellos elementos que apoyan la práctica docente. Un estudio interesante sería identificar qué aspectos de las herramientas tecnológicas usadas en pandemia se han conservado para su uso en las clases presenciales.

La experiencia de trabajo descrita en el presente artículo ha sido el resultado de varios semestres de implementación y mejoría, en los que se ha buscado que el alumno use el dispositivo móvil tanto en el aula como fuera de la escuela. De esto se han identificado ventajas y desventajas durante el tiempo que se ha usado esta didáctica. Entre las ventajas se ha observado que el estudiante se compromete más con su aprendizaje y aprende a usar su teléfono para actividades más productivas que suman a su desarrollo, el docente deja de pasar tanto tiempo calificando uno a uno y se concentra en cosas más importantes, como atender a quienes tienen más dificultad, identificar más rápido mayores obstáculos en el proceso de aprendizaje y ayudar a resolverlos en el aula.

3. REFERENCIAS

Branch. (2021). *Estadisticas de la situación digital de México en el 2020-2021*. Recuperado el 07 de Septiembre de 2022, de Porcentaje del tráfico web proveniente de sistemas operativo: https://branch.com.co/marketing-digital/estadisticas-de-la-situacion-digital-de-mexico-en-el-2020-2021/

Cuenca Villamonte , S. (2018). Ejercicios Matemáticos Personalizados como estrategia de enseñanza para la disminución del copiado en una clase de matemáticas del nivel bachillerato [Tesis de Maestría, Instituto Politécnico Nacional]. Obtenido de https://www.cicata.ipn.mx/assets/files/cicata/ProME/docs/tesis/tesis_maestria/2018/cuenca_2018.pdf

Espinoza B., J. (2015). Usos didácticos de la hoja electrónica Excel. *Revista Digital: Matemática, Educación e Internet*.

Google. (2022). *Google for Education*. Recuperado el 07 de Septiembre de 2022, de Classroom: https://edu.google.com/intl/ALL_mx/workspace-for-education/classroom/

Khan Academy. (2022). *Acerca de Khan Academy*. Recuperado el 07 de Septiembre de 2022, de https://es.khanacademy.org/about

Khan Academy. (2022). *Khan Academy | Práctica, lecciones y cursos en línea gratuitos*. Recuperado el 07 de Septiembre de 2022, de https://es.khanacademy.org/

Microsoft. (2022). *Tareas básicas en Excel*. Recuperado el 07 de Septiembre de 2022

Molina Zavaleta, J., & Rosas Mendoza, A. (2022). *Tecnología privilegiada en clases de matemáticas on-line debido al SARS-COV-2. Las aulas en pandemia: la COVID19 y sus efectos docentes.* España: Thompson.

Ramos, J. (2021). *Herramientas digitales para la educación.* XinXii.

SEP. (2013). Acuerdo Secretarial 653. En *Programa de estudios de Matemáticas.* México.

SEP. (Junio de 2021). *Dirección General de Planeación, Programación y Estadística Educativa.* Obtenido de Estadística Educativa: https://planeacion.sep.gob.mx/Doc/estadistica_e_indicadores/estadistica_e_indicadores_entidad_federativa/estadistica_e_indicadores_educativos_33Nacional.pdf

Zbiek, R., Heid, M., & W. Blume, G. (2007). Research on technology in mathematics education: A perspective of Constructs. *Second Handbook of Research on Mathematics Teching and Learling*, 1169-1207.

Tareas lógico-matemáticas y bloques lógicos de Dienes: una experiencia de aprendizaje cooperativo con futuros maestros de infantil

María de los Ángeles Hidalgo-Méndez
Carmen León-Mantero
José Carlos Casas-Rosal
Cristina Pedrosa-Jesús
Universidad de Córdoba

Resumen: *Presentamos una experiencia de trabajo cooperativo con futuros maestros de infantil basada en el uso de los bloques lógicos de Dienes para la resolución de tareas de seriación, ordenación y transformación.*
Palabras clave: *Futuros maestros de infantil; tareas lógico-matemáticas; bloques lógicos de Dienes; aprendizaje cooperativo.*

Logical-mathematical tasks and logical blocks of Dienes: a cooperative learning experience with preservice early childhood teachers

Abstract: *We present a cooperative work experience with preservice early childhood teachers based on the use of Dienes logical blocks to solve serialization, ordering and transformation tasks.*
Keywords: *Preservice early childhood teachers, logical-mathematical tasks, Dienes Logic Blocks, cooperative learning.*

1. INTRODUCCIÓN

La Educación Infantil es una etapa educativa esencial, en la que se establece como objetivo principal el desarrollo de los discentes de 0 a 6 años en todas sus dimensiones, a través de la búsqueda de la autonomía personal, el conocimiento positivo y equilibrado de sí mismos y la educación en base a los principios básicos de la convivencia en armonía.

El "Real Decreto 95/2022, de 1 de febrero, por el que se establece la ordenación y las enseñanzas mínimas de la Educación Infantil" (2022) indica que en esta etapa se comienzan a adquirir las competencias clave para el aprendizaje permanente, entre las que se encuentra la *Competencia matemática y competencia en ciencia, tecnología e ingeniería* (STEM). Esta abarca las destrezas lógico-matemáticas y la iniciación a las habilidades numéricas básicas, que se recomienda trabajar en base a la observación, clasificación, cuantificación, y a través de la manipulación de objetos y el juego, entre otros.

Asimismo, la legislación vigente establece entre los objetivos a alcanzar en el alumnado de esta etapa, el siguiente objetivo específico para el desarrollo del pensamiento matemático: "Iniciarse en las habilidades lógico-matemática, en la lectoescritura y el movimiento, el gesto y el ritmo" ("Real Decreto 95/2022", 2022, p. 14564)

Dada la importancia del desarrollo lógico-matemático en el alumnado de infantil, resulta esencial que los planes de formación de los futuros docentes cuenten con un programa de competencias que incida en los procesos de enseñanza y aprendizaje propios de las matemáticas como futuros profesionales (Baena et al., 2014). A su vez Sowder et al., (2010) destacan que es preciso planificar y efectuar propuestas que permitan al futuro profesorado reflexionar acerca de las posibles situaciones de enseñanza que favorezcan el desarrollo del pensamiento matemático en su alumnado por lo que es necesario incluir prácticas docentes que impliquen procesos matemáticos que permitan desarrollar una educación matemática de calidad.

En ese sentido, el uso de materiales manipulativos en las prácticas de aula se ha postulado como un recurso eficaz para la enseñanza de las matemáticas ya que estos proporcionan sentido a los conceptos y estructuras matemáticas, algo esencial para el aprendizaje de las matemáticas sobre todo en las primeras edades (Rico Romero y Segovia Álex, 2001). Así, los bloques lógicos de Dienes constituyen un material estructurado especialmente adecuado para trabajar tareas de lógico-matemática en los primeros años de Educación Infantil. Se trata de 48 piezas (figura 1) entre las que se pueden distinguir diferentes atributos con respecto a sus cuatro cualidades:

- Forma: Rectángulo, cuadrado, círculo y triángulo
- Color: Rojo, amarillo y azul
- Grosor: Fino y grueso
- Tamaño: Grande y pequeño

Siguiendo las aportaciones de Alsina (2006), las tareas sobre lógico-matemática se basan en el estudio de las cualidades sensoriales de los objetos desde tres perspectivas distintas, a saber, identificar las propiedades perceptibles de los objetos, relacionar las propiedades entre sí y operar en base a ellas. Entre las primeras actividades que se pueden abordar en las primeras edades encontramos las tareas de clasificación, ordenación, seriación y transformación. Su práctica en el aula acompañada de los conocimientos adquiridos por sus experiencias en la vida cotidiana permite desarrollar la capacidad de razonamiento de los escolares y establece las bases para construir otros conocimientos matemáticos.

Por otro lado, el perfil profesional de los maestros de Educación Infantil requiere del "saber hacer" del trabajo en equipo, ya sea con compañeros que pertenezcan a la misma institución educativa o no, en aras de atender a cada estudiante de forma eficaz, planificando situaciones de aprendizaje en las que se involucren diferentes materias o engloben un proyecto común y organizando el trabajo en el aula. Es por ello que el aprendizaje cooperativo en la formación inicial de los maestros constituye una práctica docente de calidad gracias a que fomenta el intercambio y el enfrentamiento entre puntos de vista moderadamente divergentes, lo que conlleva una discusión que da lugar a la revisión y reestructuración de los puntos de vista propios que favorecen el aprendizaje y el avance intelectual (Colomina y Onrubia, 2001).

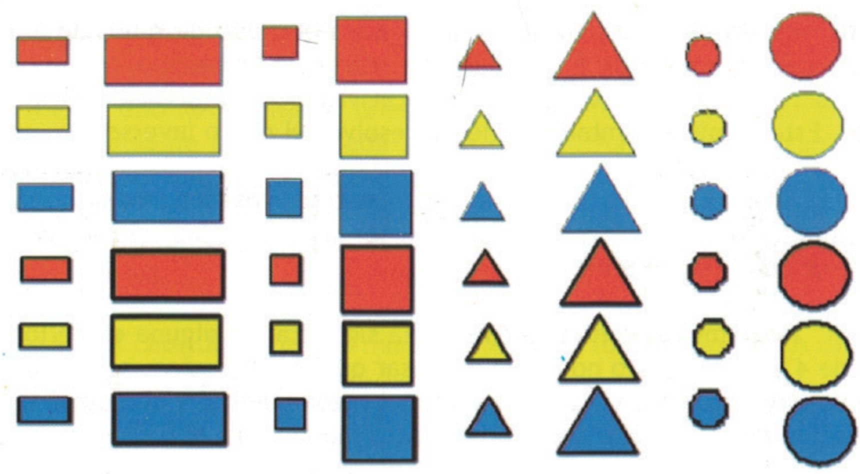


Figura 1. Bloques lógicos de Dienes (Ruesga, 2004)

Por todo lo anterior, se presenta una experiencia de aula en la que se abordaron diferentes tareas sobre lógico-matemática (seriación, ordenación y transformación) en la que se usan los bloques lógicos de Dienes como organizador curricular y la técnica de aprendizaje cooperativo denominada Rompecabezas de Aronson con alumnado del Grado en Educación Infantil.

La técnica del Rompecabezas o Jigsaw de Aronson consiste en realizar una tarea en equipo sobre una temática general y, posteriormente organizar al alumnado en grupos de trabajo, denominados expertos, que se ocupan de analizar una sección concreta de contenido (Aronson, 1978).

Para la evaluación de la tarea se hizo uso de la aplicación gratuita online *Padlet* que permite compartir en un muro común las fotos de las soluciones obtenidas por los grupos de trabajo y los grupos de expertos. Esta aplicación constituye una herramienta muy rápida y cómoda que facilita a alumnado y docente el proceso de entrega, retroalimentación y calificación de la tarea.

2. EXPERIENCIA

Esta experiencia se ha llevado a cabo en el marco de la asignatura *Desarrollo del pensamiento matemático* impartida en el primer cuatrimestre del primer curso del Grado en Educación Infantil de la Universidad de Córdoba durante el curso 2022/2023 en el desarrollo de una sesión teórica correspondiente al bloque de contenido 2, titulado *Desarrollo del pensamiento lógico-matemático*. En este se trabajan las distintas situaciones de aprendizaje que se pueden proponer en el aula de Educación Infantil para trabajar el desarrollo lógico-matemático a través de tareas de seriación, clasificación, ordenación y transformación.

Para ello, se realizaron agrupaciones en el grupo-clase de grupos de trabajo heterogéneos de seis personas cada uno. A cada grupo se le entregó un guion de trabajo estructurado en dos secciones principales basadas en la dinámica de trabajo cooperativo del Puzle o Rompecabezas de Aronson. En la primera sección se proponía realizar un conjunto de seis ejercicios prácticos sobre tareas de lógico-matemática usando los bloques lógicos de Dienes en las que debían participar todos los miembros del grupo cooperativo. A continuación, se detallan las actividades:

Actividad 1. Dibujad todas las piezas posibles que completan la siguiente serie. Identifica cuántas piezas forman el núcleo, construye la tabla que identifica los cambios en cada cualidad y define cuál es el criterio.

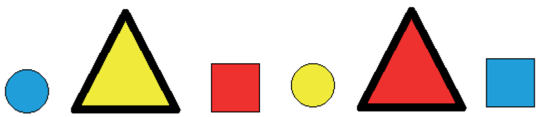


Figura 2. Imagen que acompaña a la actividad 1

Según Ruesga (2004), una tarea de seriación consiste en colocar una hilera de piezas de acuerdo con determinadas reglas de igualdad o diferencia de atributos entre piezas consecutivas. En este ejercicio se propone realizar una serie mediante el modo inverso, es decir, dadas las piezas iniciales de la serie, se solicita que esta se complete y que se identifique el criterio elegido para su elaboración.

Actividad 2. Dibujad una serie rítmicamente variable en la que se establezca el criterio: primero (1) diferencia solo en grosor y después (2) diferencia solo en color. Colocad todas las piezas posibles.

En este caso se propone realizar una serie rítmicamente variable, es decir, aquella en la que las diferencias o igualdades se repiten periódicamente sobre tres piezas (Ruesga, 2004).

Actividad 3. Completad la parrilla siguiente con las piezas, colocando los símbolos de los atributos en la primera fila y columna.

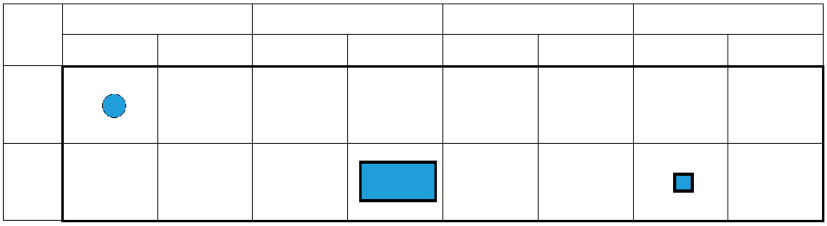


Figura 3. Imagen que acompaña a la actividad 3

La clasificación mediante rejillas o tableros consiste en colocar en una cuadrícula plana una serie de figuras que responde a la conjunción de valores de la cuadrícula. En este caso se trata de completar una parrilla en modo inverso, en la que ya aparecen colocadas algunas de las piezas. Así, el alumnado debe identificar los valores a los que corresponde cada fila y cada columna con las tarjetas de atributos y terminar de colocar el resto de las piezas.

Actividad 4. Colocad los atributos correspondientes en las bifurcaciones de la figura y dibujad las piezas que faltan. ¿Qué piezas se están ordenando?

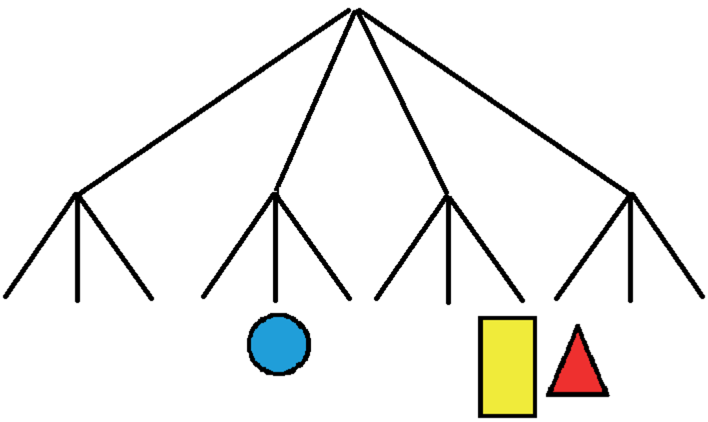


Figura 4. Imagen que acompaña a la actividad 4

En este ejercicio se pide que realicen una ordenación en modo inverso en una estructura con diagrama de árbol (Ruesga, 2004).”. Es este tipo de actividades debemos disponer las piezas basándonos en los criterios de ordenación establecidos. En primer lugar, se identifican las piezas que se están ordenando, a continuación, los atributos que rigen el criterio de cada una de las ramas del árbol y, por último, se completa la ordenación con las piezas que faltan.

Actividad 5. Indica qué elementos se están ordenando y cuál es el criterio para obtener la siguiente ordenación.

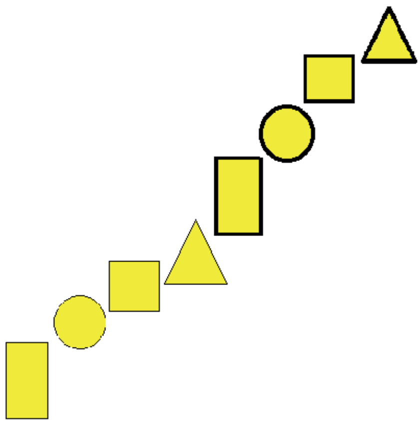


Figura 5. Imagen que acompaña a la actividad 5

De forma similar a la actividad anterior, en esta actividad se realiza una ordenación vertical en modo inverso, pero en este caso las piezas se disponen en columnas verticales (Ruesga, 2004).

Actividad 6. Dada la siguiente tarea de transformación, indica el tipo de operador lógico que se trabaja (directo o inverso), así como la situación inicial y la transformación que se aplica.

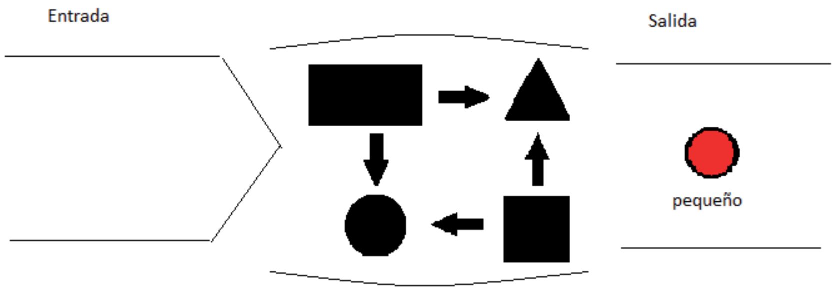


Figura 6. Imagen que acompaña a la actividad 6

Las transformaciones son procedimientos básicos en matemáticas (Ruesga, 2004) que consisten en establecer transformaciones entre conjuntos de piezas en función de sus atributos. En este ejercicio se presenta una transformación en modo inverso, ya que dado el criterio de transformación y la situación final, se pide la situación inicial.

Cuando los grupos de trabajo cooperativo realizaron las actividades, se les solicitó que se asignasen entre ellos los roles de expertos necesarios para poder abordar la segunda sección de esta experiencia. La decisión debían tomarla en grupo en base a las capacidades de cada uno observadas en la resolución de la primera sección, de tal forma que dentro de cada grupo hubiera un experto de cada una de las actividades. Además, cada alumno, realizó una foto de la actividad de la que eran expertos resuelta por su grupo de trabajo y la subió al muro de trabajo conjunto configurado a través de *Padlet.*

Una vez tomada la decisión, los grupos de trabajo se disolvieron y el grupo-clase se agrupó en los seis grupos de expertos de actividades. A continuación, se les solicitó resolver las siguientes actividades:

Expertos actividades 1 y 2. Verificad si las soluciones dadas por los grupos son correctas o incorrectas y justificad vuestras respuestas

Expertos actividades 3, 4, 5 y 6. ¿Cuántas soluciones son válidas para este ejercicio? Si vuestra respuesta es varias, añadid las soluciones que faltan. Si vuestra respuesta es que hay una única solución, justificad vuestra decisión.

Por último, un representante de cada grupo de expertos expuso las soluciones obtenidas con el apoyo de las fotos subidas al muro de *Padlet* y bajo la supervisión e intervención, cuando fue necesaria, de la docente encargada de la asignatura en este grupo-clase.

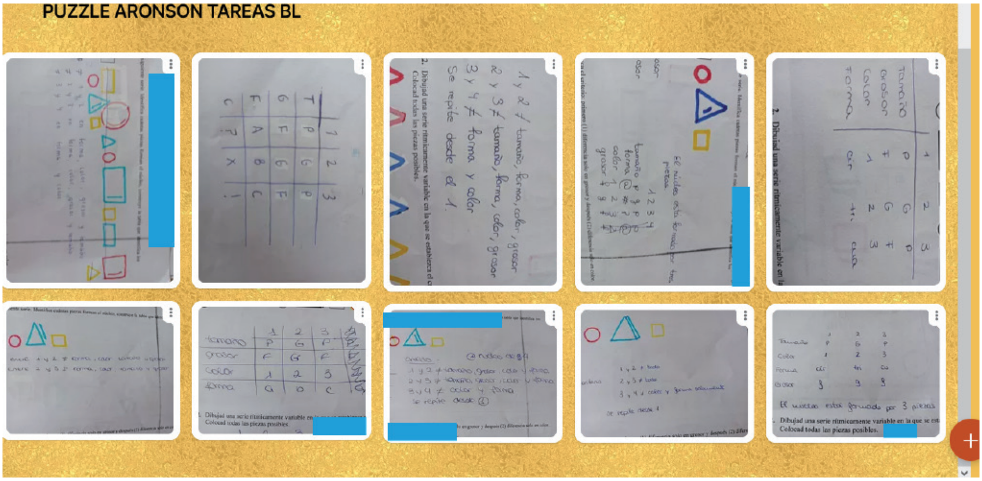


Figura 7. Captura del muro de Padlet

3. RESULTADOS

En general, los grupos de trabajo resolvieron de forma correcta la mayoría de las actividades, sin embargo, encontramos en sus respuestas ciertos errores y dificultades que merece la pena analizar.

En la búsqueda del criterio que rige la serie dada en la actividad 1, algunos alumnos no detectaron que el patrón del núcleo con respecto a la forma es círculo-triángulo-cuadrado, solo detectaron que las tres forman debían ser distintas. De ahí que su análisis de las cualidades de los elementos que forman el núcleo y la continuación de la serie arrojara el resultado de la Figura 8.

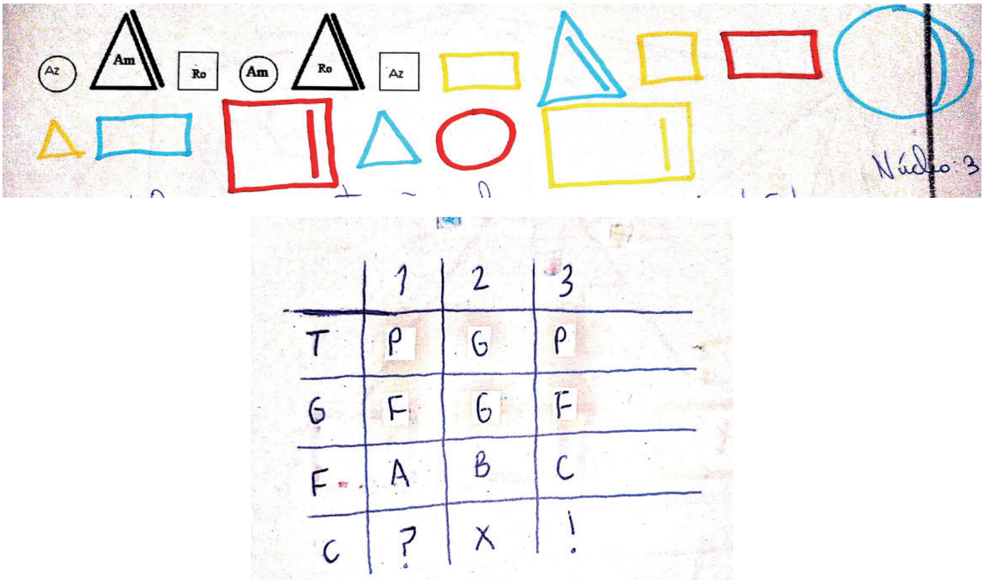


Figura 8. Continuación y análisis de las cualidades del núcleo de la serie de la actividad 1

En otros casos, a pesar de detectar de forma correcta el patrón y analizar las cualidades del núcleo adecuadamente, a la hora de establecer el criterio no concretan las diferencias o las igualdades dadas entre piezas consecutivas y olvidan que entre la tercera y la cuarta pieza hay una diferencia de color y forma solamente (Figura 9)

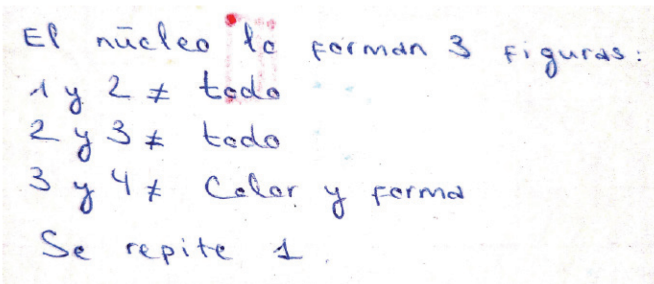


Figura 9. Análisis del criterio de la serie de la actividad 1

En el caso de las ordenaciones, la dificultad surge cuando deben señalar cuáles son los elementos que se están ordenando. En la figura 10 se muestran los errores cometidos en las actividades 4 y 5, en las que olvidan indicar que se están ordenando por un lado las piezas grandes y gruesas y, por otro, las grandes y amarillas.

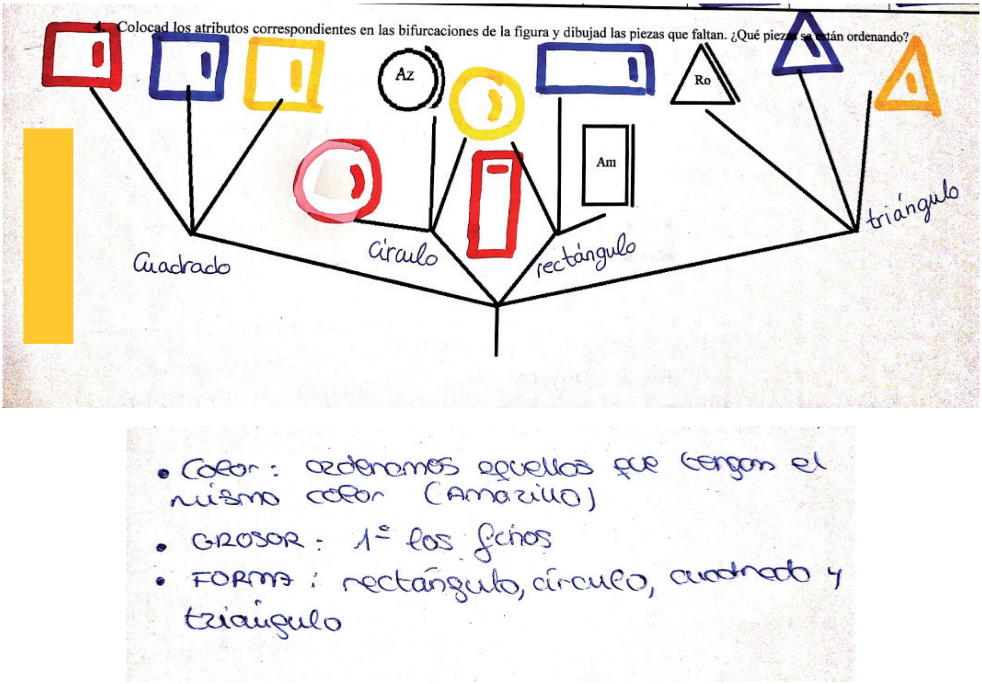


Figura 10. Identificación de las piezas ordenadas en las actividades 4 y 5

Es destacable que las actividades de los grupos de expertos se desarrollaran sin ningún tipo de error. Los expertos de la actividad 1 localizaron los errores cometidos por los grupos de trabajo y los de las actividades 3, 4, 5 y 6 identificaron sin dificultad la unicidad de solución en estos cuatro ejercicios. En este caso, los expertos de la actividad 2 estuvieron todos de acuerdo en que no se habían cometido errores en la resolución dada por los grupos de trabajo de la actividad 2.

4. CONCLUSIONES

A pesar de las dificultades que conlleva el trabajo cooperativo en la gestión de conflictos por parte del estudiantado y el aumento de la carga de trabajo para el docente, los beneficios obtenidos cuando se usan en el aula dinámicas de este tipo hacen que la balanza se incline a su favor. Entre estos beneficios se encuentra que cada alumno decide tomar el rol en el que se encuentra más cómodo y así poner en juego las capacidades en las que encuentren mayor afinidad. Por otro lado, la enseñanza entre iguales permite establecer situaciones de aprendizaje que ayuden a salvar la variabilidad en la percepción de las estructuras matemáticas, a través de las experiencias vividas por nuestros alumnos con respecto a las tareas sobre lógico-matemáticas.

Por último, el uso de materiales estructurados proporciona experiencias de aprendizaje de los conceptos y resultados matemáticos a través de su manipulación y la experiencia tras la resolución de casos prácticos. Asimismo, el uso de este tipo de material permite la evocación de representaciones que constituyen la base de la adquisición de las estructuras matemáticas.

5. REFERENCIAS

Alsina, Á. (2006). *Cómo desarrollar el pensamiento matemático de 0 a 6 años*. Editorial Octaedro-Eumo.

Aronson, E. (1978). *The jigsaw classroom*. Sage.

Baena González, M.I., Chica Merino, E., García-Paredes Martínez, M.E., y Gil Martínez, M.J., (2014). Formación de futuros maestros desde la práctica en el aprendizaje de las matemáticas. *Escuela abierta, 17*, 11-28.

Colomina, R. y Onrubia, J., (2001). Interacción educativa y aprendizaje escola: la interacción entre alumnos. En AC. Coll, J. Palacios y A. Marchesi (comps). *Desarrollo psicológico y educación. 2. Psicología de la Educación Escolar* (pp. 415 - 435). Alianza.

Real Decreto 95/2022, de 1 de febrero, por el que se establece la ordenación y las enseñanzas mínimas de la Educación Infantil (2022, 2 de febrero*). Boletín Oficial del Estado, 2022*(28), 14561- 14595

Rico Romero, L., y Segovia Alex, I. (2001). Unidades didácticas: organizadores. En E. Castro (Ed.), *Didáctica de la matemática en la educación primaria* (pp. 83-104). Síntesis.

Ruesga, M. P. (2004). *El inicio del razonamiento en la infancia*. Universidad de Burgos.

Sowder, J., Sowder, L. y Nickerson, S. (2010). *Reconceptualizing Mathematics for elementary mathematics teacher*. WH Freeman, Inc.

Épsilon - *Revista de Educación Matemática* *2022, nº 112, 45-53*

Visualización y estudio sistemático de la parábola con el aporte del software GeoGebra

Renata Teófilo de Sousa
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará
Francisco Régis Vieira Alves
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará
Maria José Araújo Souza
Universidade Estadual Vale do Acaraú

Resumen: *El objetivo de este trabajo es presentar diferentes demostraciones de la parábola, así como las posibilidades de su construcción geométrica, utilizando técnicas de diseño geométrico y el software de geometría dinámica GeoGebra. Como resultado, traemos un conjunto de tres construcciones realizadas en GeoGebra y disponibles para su uso, que pueden ser utilizadas como recurso metodológico por parte del docente.*
Palabras clave: *Parábola; Geometría; GeoGebra.*

Systematic study of the parabola with the contribution of GeoGebra software

Abstract: *The objective of this work is to present different demonstrations of the parabola, as well as possibilities of its geometric construction, using geometric design techniques and the GeoGebra dynamic geometry software. As a result, we bring a set of three constructions made in GeoGebra and available for use, which can be used as a methodological resource by the teacher.*
Keywords: *Parabola; Geometry; GeoGebra.*

1. INTRODUCCIÓN

La Geometría Analítica es una rama de las Matemáticas que trae una relación entre la Geometría y el Álgebra, en la cual podemos analizar cuestiones algebraicas geométricamente y viceversa. En el caso específico de las parábolas, estas son comúnmente estudiadas en la etapa escolar de forma relacionada con la gráfica de una función cuadrática. Sin embargo, su estudio dentro del campo de la Geometría Analítica suele estar disociado del estudio de funciones e incluso de su origen como sección cónica.

En este sentido, el problema a investigar en este trabajo surge de la dificultad de los profesores de Matemática para presentar un abordaje de la parábola diferente a la enseñanza tradicional –el binomio pizarra-pincel–, la poca asociación entre su sesgo algebraico, geométrico y analítico, además de la poca exploración de este tema utilizando tecnologías.

Así, el objetivo de este trabajo es presentar diferentes demostraciones de la parábola, así como las posibilidades de su construcción geométrica, utilizando técnicas de diseño geométrico y el software de geometría dinámica GeoGebra. De esta forma, buscamos ampliar la discusión del tema y facilitar la comprensión del estudiante a partir de la visualización geométrica, considerando que esta relación es poco discutida en los libros de texto.

2. DIFERENTES FORMAS DE CONSTRUIR LA PARABOLA

En esta sección, buscamos acercar diferentes formas de construir una parábola y explorar sus características, con sugerencias didácticas desde técnicas de dibujo geométrico manual hasta las posibilidades con el software de geometría dinámica GeoGebra, con el fin de facilitar la enseñanza y la visualización geométrica del alumno.

2.1. La parábola a través de pliegues de papel

Los pasos para entender esta construcción son, respectivamente:

1. Cuando tomamos una hoja de papel cuadrada (preferiblemente), debemos dibujar una línea d y marcar un punto F dentro de ella, que no pertenece a la línea d;
2. A partir de esto, elija cualquier punto, perteneciente a la línea d y doble la hoja, de modo que el punto elegido coincida con el punto F;
3. Al desdoblar la hoja, debe haber pliegues producidos por el plegado realizado;
4. Repitiendo este proceso varias veces, considerando el mayor número de puntos posible, veremos que todos los pliegues marcados en el papel formarán la figura de una parábola de foco F y directriz d, correspondiente a la línea trazada inicialmente en el papel.

Podemos ver esta construcción ejemplificada en la Figura 1:

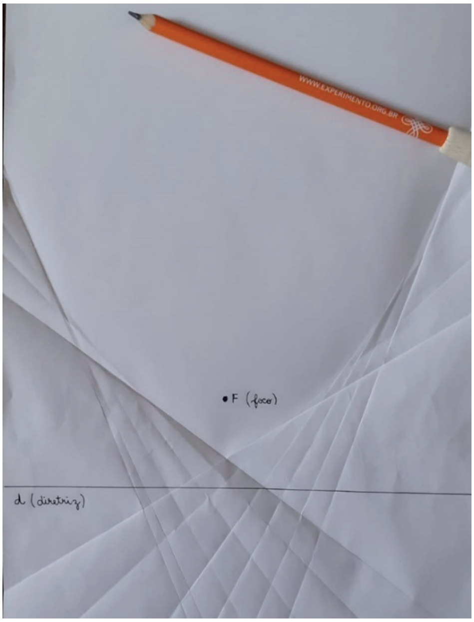


Figura 1

También traemos la posibilidad de transponer esta construcción realizada con lápiz y papel de forma física al entorno de geometría dinámica de GeoGebra, como en la Figura 2:

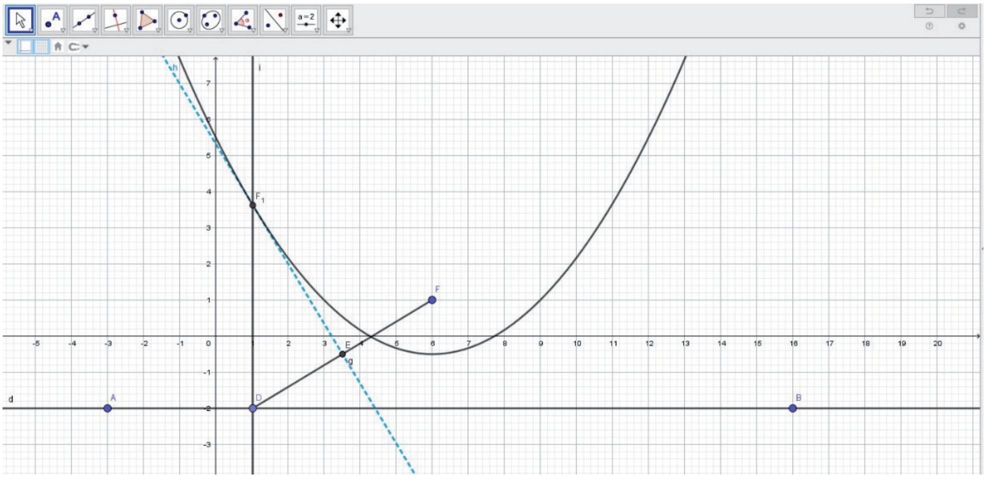


Figura 2

En la Figura 2, el punto *D* deslizante en la línea muestra la curva de la parábola desde la trayectoria del punto *F*. La línea *h* en azul, que se muestra en la Figura 2, representa una línea tangente a la parábola con foco *F* y directriz *d*. Habilitando la función "mostrar trazo”, tenemos las diversas rectas tangentes que se pueden trazar y que corresponden al lugar geométrico de la parábola, como se ilustra en la Figura 3:

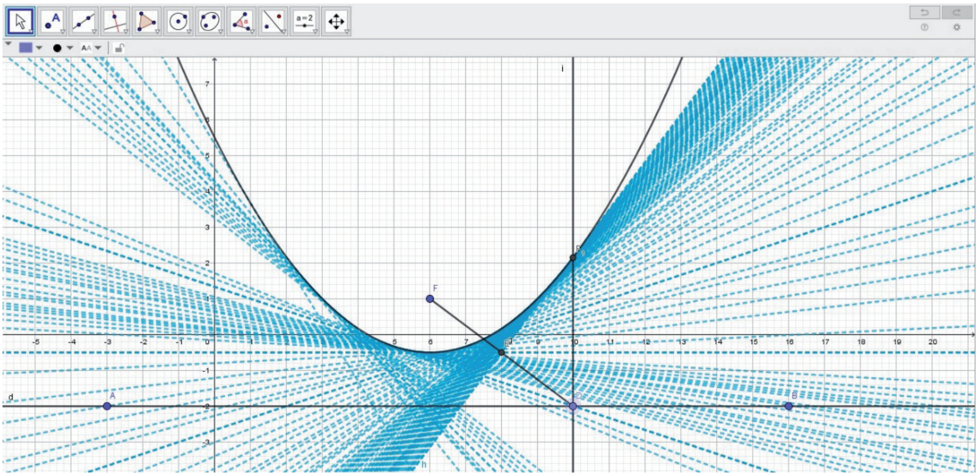


Figura 3

Las líneas tangentes en azul corresponden a pliegues de papel y se pueden construir en una secuencia de pasos simples en GeoGebra, tanto en el software como en la versión de la aplicación para teléfonos inteligentes:

1. Construye una recta *d* que será la directriz de la parábola y un punto *F* fuera de la recta *d*, que corresponderá al foco de la parábola;
2. Construya un punto de deslizamiento *D* sobre la directriz *d*, usando la herramienta “punto en objeto”;
3. Dibuja un segmento de línea que conecte el punto *D* con el punto *F*;
4. Con la herramienta “punto medio”, construya el punto medio del segmento $\overline{DF}$;
5. Dibujar una línea perpendicular al segmento $\overline{DF}$, pasando por el punto medio construido;
6. Dibuje otra línea perpendicular a la línea directriz *d*, pasando por el punto de deslizamiento *D* en ella;
7. Con la herramienta “intersección entre dos objetos”, construya el punto de intersección entre las dos perpendiculares construidas;
8. Con la herramienta “lugar geométrico”, haga clic en el punto de deslizamiento *D* sobre la recta directriz y en el punto de intersección de las dos perpendiculares;
9. Aparecerá un lugar geométrico correspondiente a la parábola de foco *F* y directriz *d*;
10. La recta perpendicular que pasa por el punto medio de $\overline{DF}$ es tangente a la parábola. Al hacer clic sobre esta línea con el botón derecho del ratón y “habilitar rastro”, mueva el punto deslizante *D* sobre la directriz y se trazarán las líneas tangentes a la parábola, correspondientes a los pliegues del papel.

Esta construcción está disponible en la comunidad geogebra.org y se puede acceder a ella a través de la dirección electrónica: https://www.geogebra.org/m/ujp8gymj.

2.2. Construyendo la parábola con regla y compás

Otra posibilidad de construir la parábola como un lugar geométrico es mediante el uso de técnicas de dibujo geométrico con instrumentos de regla y compás.

Por lo tanto, podemos comenzar el boceto de esta construcción en función de la secuencia de pasos:

1. Dibuja una línea directriz d y cualquier punto fuera de F, que será el foco de la parábola;
2. Dibuje una línea perpendicular a d que pase por F. El punto de intersección de la línea perpendicular y la directriz d es nuestro punto A (como en la Figura 4);
3. Obtener el punto medio del segmento $\overline{FA}$ como el punto V, vértice de la parábola;
4. Dibuja otra línea r paralela a d, a una distancia h_1;
5. Dibujar tantas rectas paralelas a d como se desee, considerando las distancias h_2, h_3, ..., h_n . Mide estas distancias con la apertura de la propia brújula;
6. Coloque la punta seca del compás en F y la apertura formando un radio igual a h_1. A partir de esto, describa un arco que intercepte r_1 en puntos P_1 y P_1';
7. Luego, abriendo el compás con un radio igual a h_2, dibujar otro arco interceptando r_2 hasta P_2 y P_2', y así sucesivamente, hasta los puntos P_n y P_n';
8. La parábola será la curva que pasa V por y los pares de puntos P_1 y P_1', P_2 y P_2', P_3 y P_3' hasta P_n y P_n'.

Un esquema de este modelo se puede presentar en las Figuras 4, 5 y 6:

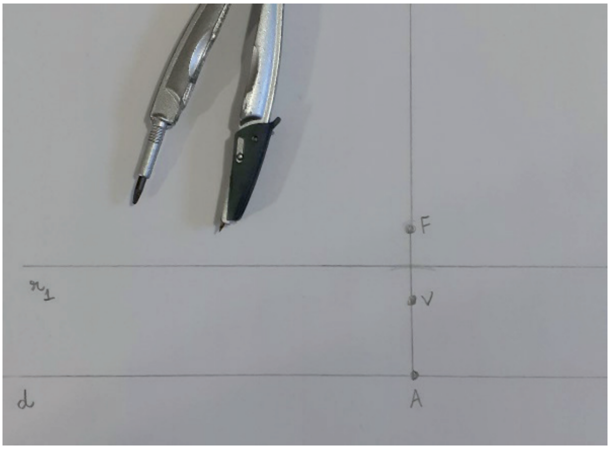


Figura 4

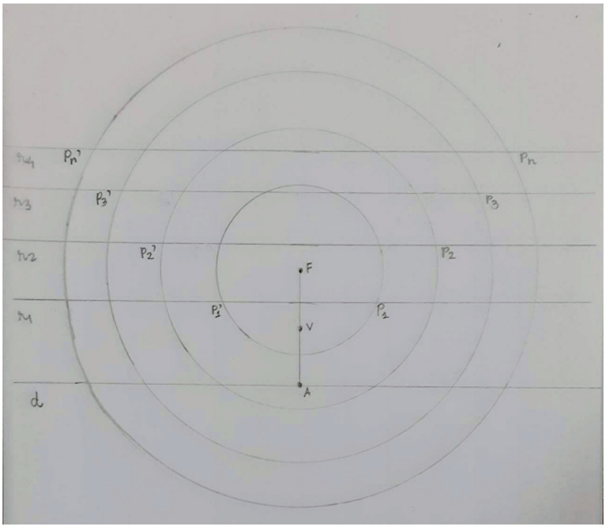


Figura 5

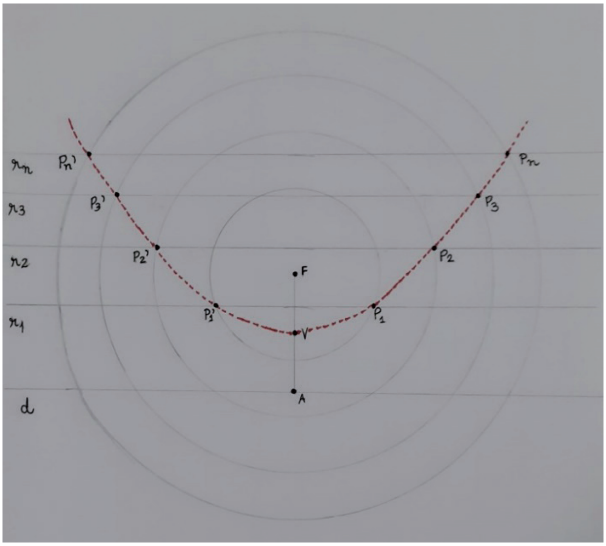


Figura 6

Tenga en cuenta que la curva que pasa por los puntos V, P_n y P_n' forma la parábola indicada. También podemos realizar esta construcción en GeoGebra, como se ilustra en la Figura 7.

Es posible notar la simetría de la parábola cuando dibujamos una línea que pasa por el segmento $\overline{FA}$ e incluso discutirlo en el aula, comparándolo con otros modelos de construcción de la parábola. Esta construcción está disponible para su uso en: https://www.geogebra.org/m/kc7axkh6.

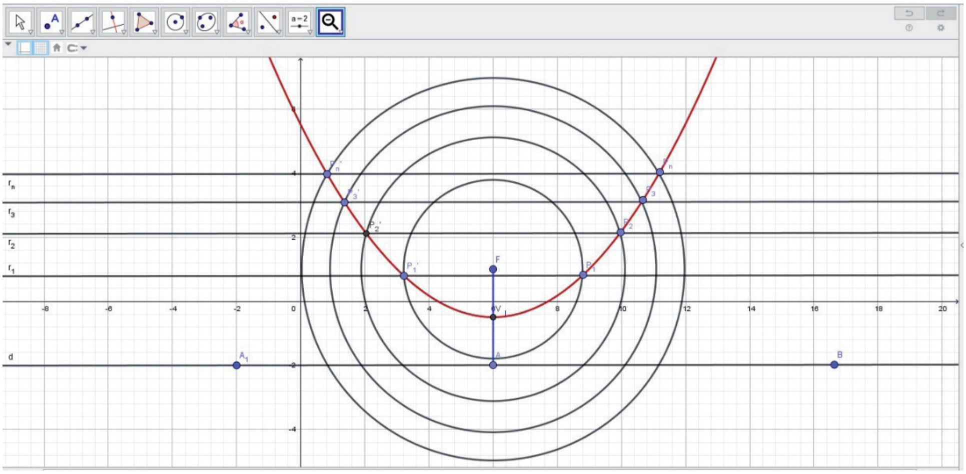


Figura 7

2.3. La parábola a partir de centros de círculos

Una definición menos común, pero no menos importante, de la parábola muestra cómo podemos considerarla desde una perspectiva diferente a comúnmente encontrado en los libros de texto, usando círculos.

La definición usual de una parábola es: La parábola con foco F y directriz recta d es el lugar geométrico de los puntos equidistantes del foco y de la directriz. Si P es un punto en la parábola, la perpendicular a d que pasa por P corta a d en T, tal que $PT = PF$. Por tanto, $C(P, PF2)$es tangente a d en T. Esta construcción se puede invertir, de modo que llegamos a otra definición de parábola, equivalente a la habitual: La parábola es el lugar geométrico de los centros de las circunferencias que contienen el punto F y tocan la línea d.

De esta definición podemos inferir que: dado un foco F y una directriz d, consideremos todas las circunferencias que pasan por F y son tangentes a d. El conjunto de centros C de todas estas circunferencias corresponden a una parábola de foco F y directriz d. Tal definición se puede ver en la Figura 8:

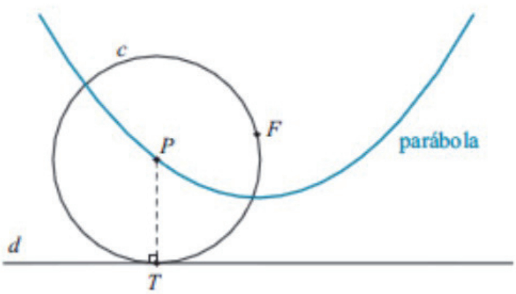


Figura 8

El GeoGebra trae una forma de entender la definición indicada en la Figura 9 de una manera más dinámica, como se ejemplifica en las Figuras 9 y 10:

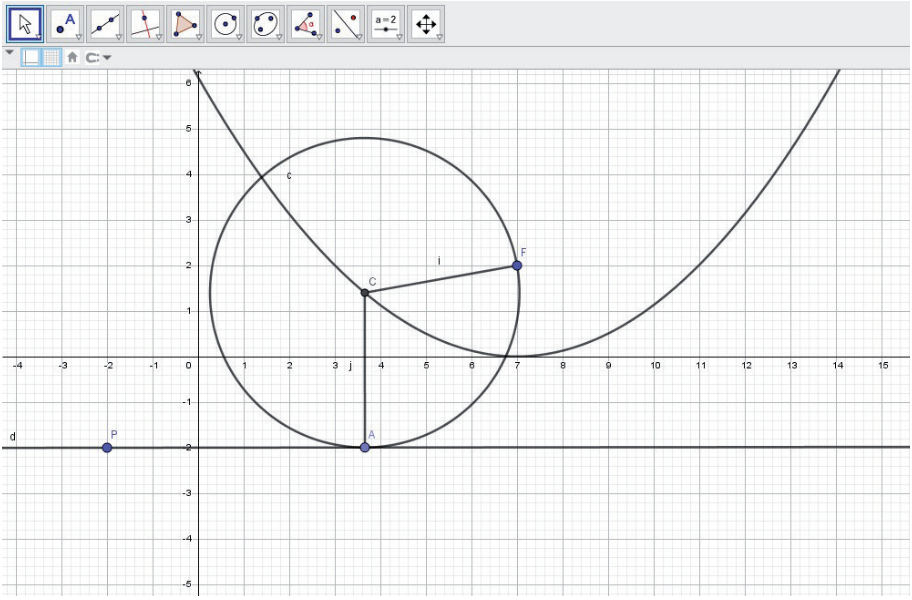


Figura 9

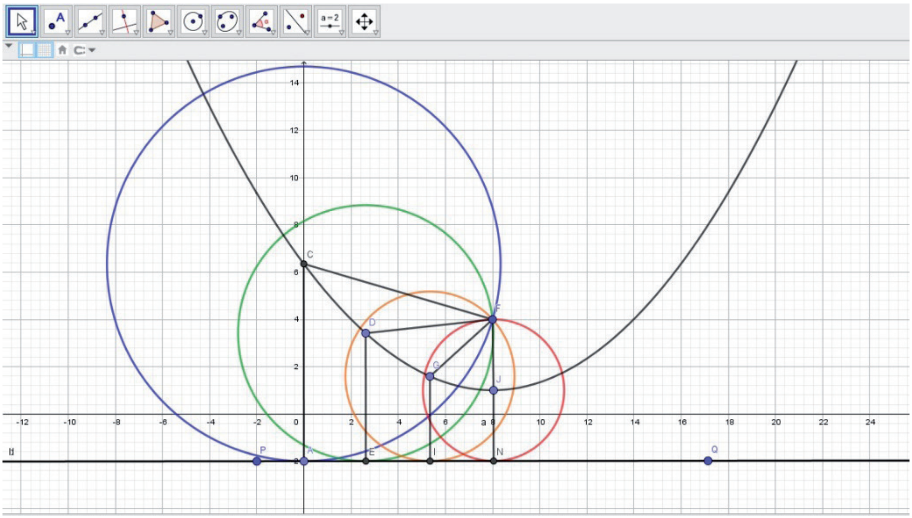


Figura 10

Vale la pena mencionar que este enfoque es inusual, de hecho. Pero también utiliza la distancia entre dos puntos en Geometría Analítica para demostrar que la medida del radio del círculo corresponde a la medida de la distancia del centro de este círculo a la directriz, cumpliendo la definición matemática de una parábola.

Parte del protocolo de esta construcción es similar a la construcción presentada en el inciso anterior, con la diferencia de ver las circunferencias y sus radios. Esta compilación también está disponible en la comunidad geogebra.org y está lista para uso en el aula en https://www.geogebra.org/m/sdkgzavy.

3. CONSIDERACIONES FINALES

Buscamos explorar la parábola y sus características en este trabajo, buscando una comprensión que relacione diferentes formas de construir la parábola y de comprenderla. Las construcciones presentadas pueden ser exploradas en el contexto de las aulas de la Escuela Secundaria.

Además, también trajimos el uso de la tecnología en la exploración de sus elementos utilizando el software de geometría dinámica GeoGebra, a partir de algunas posibilidades de construcción geométrica de la parábola, con el fin de subsidiar el trabajo del profesor de matemáticas y ofrecer una lectura que ayude a la estudiante en la comprensión de este tema, a través de la visualización geométrica.

4. REFERENCIAS

Alves, F. R. V. (2020). Situações Didáticas Olímpicas (SDOs): Ensino de Olimpíadas de Matemática com arrimo no software GeoGebra como recurso na visualização. Alexandria – *Revista de Educação, Ciência e Tecnologia*, *13*(1), 319-349. DOI: https://doi.org/10.5007/1982-5153.2020v13n1p319.

Cerqueira, A. A. (2015). *Parábola e suas aplicações*. Tesis de Maestría, Universidade Federal da Bahia, Salvador. Recuperado el 15 de agosto de 2021, de: https://repositorio.ufba.br/ri/bitstream/ri/22969/1/adriano.pdf

Kilhian, K. (2011). *Construção Geométrica da Parábola com Régua e Compasso.* O Baricentro da Mente. Recuperado el 25 de agosto de 2021, de: https://www.obaricentrodamente.com/2011/06/construcao-geometrica-da-parabola-com.html

Sousa, R. T., & Alves, F. R. V. (2022). Didactic Engineering and Learning Objects: A Proposal for Teaching Parabolas in Analytical Geometry. *Indonesian Journal of Science and Mathematics Education*, 5(1), 1-16.

Souza Júnior, J. C., & Cardoso, A. (2003). Estudo das cônicas com Geometria Dinâmica. *RPM - Revista do Professor de Matemática*, 68, SBM: Sociedade Brasileira de Matemática, 2003.

Venturi, J. J. (2003). *Cônicas e Quádricas.* 5 ed. Curitiba: Livrarias Curitiba.

Épsilon - *Revista de Educación Matemática* *2022, nº 112, 55-72*

Estudio del tratamiento de las demostraciones y deducciones lógicas en los libros de texto de matemáticas y propuesta de mejora al respecto

Manuel Vázquez Mourazos
IES Arcebispo Xelmírez I; España

Resumen: *En la materia de matemáticas del bachillerato científico-tecnológico, se presta especial hincapié a labores relativas al cálculo. En cambio, las demostraciones y los procesos deductivos están ligados a un segundo plano.*
En este artículo se presenta un análisis del tratamiento de las demostraciones y los procesos deductivos en los libros del texto de las dos últimas décadas. Así, para completar este análisis y aportar una nueva visión al respecto, se presentará una propuesta a seguir para incluir estos conocimientos en el bachillerato.
Palabras clave *Demostración matemática; proceso deductivo; bachillerato científico; libros de texto; lógica; razonamiento.*

Study of the treatment of logical proofs and deductions in mathematics textbooks and proposal for improvement in this regard

Abstract: *In the subject of mathematics of the scientific-technological baccalaureate, special emphasis is given to tasks related to calculation. Instead, the proofs and deductive processes are tied to the background.*
This article presents an analysis of the treatment of proofs and deductive processes in the textbooks of the last two decades. Thus, to complete this analysis and provide a new vision in this regard, a proposal will be presented to follow to include this knowledge in high school.
Keywords *Mathematical proof; deductive process; scientific baccalaureate; textbooks; logic; reasoning.*

1. INTRODUCCIÓN

Socialmente se considera que las matemáticas consisten en una multitud de herramientas de cálculo. Pocas veces se relacionan las matemáticas con otras perspectivas diferentes que no sean los números, las operaciones o los problemas. Entonces, ¿son realmente las matemáticas meras herramientas de cálculo? La respuesta es negativa y cualquier persona que haya cursado estudios superiores en matemáticas es consciente de ello. Sin embargo, durante la educación secundaria y el bachillerato sólo se enseña al alumnado esta visión meramente numérica de las matemáticas.

Uno de los conceptos poco trabajados en las aulas de matemáticas, a pesar de su importancia, son las demostraciones y, junto con ellas, los procesos deductivos. Hay muchas definiciones acerca de lo que se entiende por demostración, algunas de ellas pueden ser las siguientes:

> "Podemos considerar la demostración de una proposición p como una cadena finita de transformaciones que se realizan mediante reglas lógicas y que se forman a partir de proposiciones verdaderas[1] o supuestamente verdaderas[2] y las cuales nos conducen a la proposición p." (Lodoño, 2006)

> "Por demostración se entiende el procedimiento en que partiendo de unas ciertas hipótesis y mediante razonamientos lógicos se consigue la conclusión deseada. (…) El propio Euclides[3] demostró que el número de primos es infinito partiendo de que solamente había una cantidad finita de ellos." (Sáenz, 2002, pág. 48)

Tras la lectura de estas definiciones, podemos entender por demostración como un proceso tras el cual se verifica la veracidad de una hipótesis. Este hecho, que a la sociedad coloquial le puede parecer desligado de las matemáticas, es la base de esta ciencia que se basa en teoremas, verdades que son eternas por el hecho de haber sido demostradas. En este sentido, cualquier lector de este artículo se puede hacer las siguientes preguntas: ¿he estudiado alguna demostración en la educación secundaria? ¿alguna vez en clase de matemáticas se habló acerca de este concepto? ¿me comentaron mis profesores del instituto la importancia de las demostraciones en las matemáticas?

Aunque en algunos casos pueda haber alguna respuesta afirmativa, la realidad es que, probablemente, la mayoría de respuestas a estas preguntas sean negativas. Este hecho se vislumbra muy bien en el nivel que tienen los alumnos de nuevo ingreso en las carreras científico tecnológicas, para los cuales existen los conocidos "*Curso 0*" al inicio de estas carreras universitarias para que sus nuevos alumnos adquieran el nivel necesario en este sentido.

Con esta perspectiva, se hace esencial la introducción de las demostraciones y de los procesos deductivos como un pilar fundamental de la enseñanza de las matemáticas. En algunos artículos como (Vázquez Mourazos, 2020) se aporta una estrategia de introducción de conceptos relacionados con las demostraciones y el pensamiento lógico desde la perspectiva de la secundaria. Sin embargo, en este artículo se pretenderá ir más allá y

1. Las proposiciones verdaderas son las que se conocen como tautologías.
2. Las proposiciones supuestamente verdaderas son las que se conocen con el nombre de hipótesis.
3. Lo que hizo Euclides fue llegar a una contradicción suponiendo que el número de primos era finito.

hacer un análisis del tratamiento de las demostraciones en los libros de texto en las últimas dos décadas. Todo ello, para proponer una serie de ejemplos que ayuden a la introducción de estos conceptos en los estudios del bachillerato, etapa previa a la universidad.

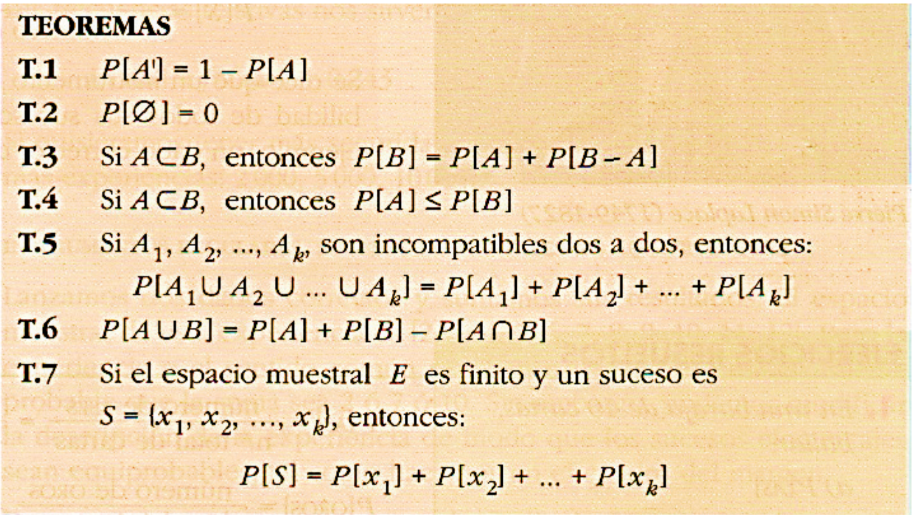
2. ESTUDIO DEL TRATAMIENTO DE LAS DEMOSTRACIONES Y LOS PROCESOS DEDUCTIVOS EN LOS LIBROS DE TEXTO

Para dar comienzo a este apartado, se empezará haciendo referencia a algunos trabajos que ya han estudiado este tema. Así, en el artículo (Ruiz de Gauna Gorostiza, Dávila , Etxeberria, & Sarasua, 2013) se hace un análisis de los libros de texto durante los primeros años de la democracia hasta la LOGSE. A este respecto, el artículo concluye exponiendo: "*Los libros de la primera etapa de la LGE se llenaron de escritura simbólica y de métodos deductivos, eran libros del profesor, no del alumno y algunos de ellos muy formalistas*" (pág. 276). Sin embargo, se hace notar, al mismo tiempo, que según avanzaba la sociedad y se abría España tras la dictadura, los libros de texto también lo hacían hacia una perspectiva más pedagógica. En la publicación se refleja diciendo: "*Ya en la segunda etapa de la LGE, había textos en los que se proponían caminos, se hacían sugerencias, se utilizaban las gráficas para indagar en las demostraciones y se abrían líneas innovadoras.*" (pág. 276).

Entonces, viendo esta primera reflexión sobre lo que acontecía hace en torno a 50-60 años, se pueden obtener algunas conclusiones. Pues bien, se indica que el nivel de rigurosidad que se planteaba en la primera etapa de la LGE se enfocaba hacia el profesorado, pero no hacia el alumnado debido a su complejidad. Sin embargo, el modelo del que se habla en la segunda etapa se aproxima más a lo que debería ser la educación matemática. Es decir, se trata de un modelo que guía progresivamente a los alumnos hacia el conocimiento haciendo que éstos descubran por ellos mismos las propiedades, las fórmulas y sean capaces de vislumbrar lo que se pretende mostrarles a través de ejemplos gráficos u otras técnicas. Así, lo ideal sería un modelo en el que no se agobie al alumnado con conceptos nuevos pidiéndoles un nivel de rigor que aún no dominan, pero que sí se les haga una introducción progresiva y adecuada hacia el nivel que tendrán que dominar en un futuro.

Como se ha visto con esa muestra del artículo citado, los libros de texto dependen del momento histórico y de la sociedad, pero, al mismo tiempo, también lo hacen de las leyes educativa o de las editoriales entre otros diversos factores. Para mostrar un análisis más cercano a nuestro tiempo, se hará un repaso por algunos manuales de las dos últimas décadas.

En la **Figura 1** se observa un extracto del libro de primer curso del bachillerato de (Colera, Oliveira, García, & Santaella, 2012). En dicha imagen, se puede observar un tratamiento muy pobre de las demostraciones. Únicamente se limita a enumerar una serie de resultados que los alumnos deberán creer con fe ciega y sin haberlos analizado previamente. No se aporta una demostración, ni una interpretación de la demostración, ni siquiera unas pautas del motivo por el cual dichos resultados son ciertos. Bien es verdad que se tratan de teoremas muy obvios e incluso intuitivos. Sin embargo, si el único aliciente que tienen los alumnos para creer en dichos resultados es el simple hecho de que éstos aparecen reflejados en el libro de texto, se estará a contribuir a un crecimiento muy pobre e inexistente del espíritu crítico de los estudiantes.



TEOREMAS

T.1 $P[A'] = 1 - P[A]$

T.2 $P[\varnothing] = 0$

T.3 Si $A \subset B$, entonces $P[B] = P[A] + P[B - A]$

T.4 Si $A \subset B$, entonces $P[A] \leq P[B]$

T.5 Si $A_1, A_2, \ldots, A_k$, son incompatibles dos a dos, entonces:

$$P[A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_k] = P[A_1] + P[A_2] + \ldots + P[A_k]$$

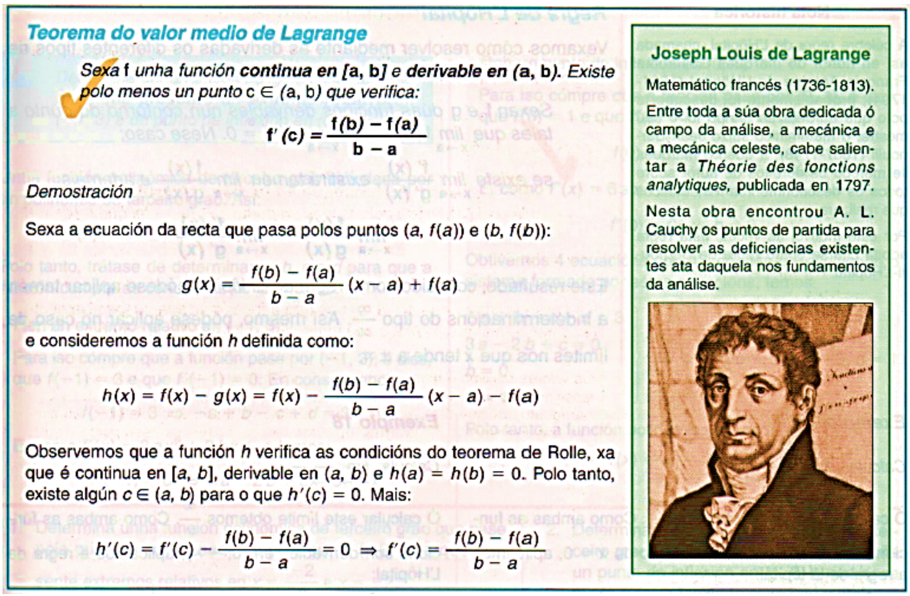
T.6 $P[A \cup B] = P[A] + P[B] - P[A \cap B]$

T.7 Si el espacio muestral E es finito y un suceso es $S = \{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$, entonces:

$$P[S] = P[x_1] + P[x_2] + \ldots + P[x_k]$$

Figura 1.Teoremas de estadística en matemáticas I de Anaya (2012), pág. 353.

Esto hace cuestionar si a lo largo de los últimos años esta situación haya sido análoga. Por consiguiente, es interesante analizar los antiguos libros de texto y ver su evolución. En este sentido, las diferencias son notorias dependiendo también de las editoriales que se consideren, entre otros factores.



Teorema do valor medio de Lagrange

Sexa f *unha función* **continua en [a, b]** *e* **derivable en (a, b)**. *Existe polo menos un punto* c ∈ (a, b) *que verifica:*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Demostración

Sexa a ecuación da recta que pasa polos puntos $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$:

$$g(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a)$$

e consideremos a función h definida como:

$$h(x) = f(x) - g(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) - f(a)$$

Observemos que a función h verifica as condicións do teorema de Rolle, xa que é continua en $[a, b]$, derivable en (a, b) e $h(a) = h(b) = 0$. Polo tanto, existe algún $c \in (a, b)$ para o que $h'(c) = 0$. Mais:

$$h'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0 \Rightarrow f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Joseph Louis de Lagrange

Matemático francés (1736-1813).

Entre toda a súa obra dedicada ó campo da análise, a mecánica e a mecánica celeste, cabe salientar a *Théorie des fonctions analytiques*, publicada en 1797.

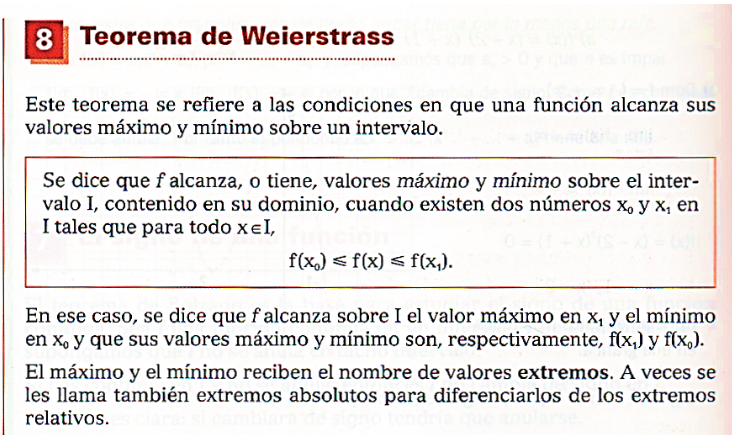
Nesta obra encontrou A. L. Cauchy os puntos de partida para resolver as deficiencias existentes ata daquela nos fundamentos da análise.

Figura 2. Teorema del valor medio en matemáticas II de Rodeira (2001), pág. 265.

En la **Figura 2** se puede ver un extracto del manual (Gómez Gejo & García Sanmartín (Eds.), 2001) de la editorial Rodeira. En ella, se muestra como a lo largo del libro se observan ciertos recuadros (como el que se muestra) donde se indican teoremas relevantes del temario con una demostración del mismo donde se utilizan conocimientos aprendidos en temas anteriores. De este modo, se fomenta esa asociación de ideas y la integración del conocimiento.

Esto podría hacer pensar que entre finales de los 90's y principios del nuevo milenio, los libros de texto tenían otro enfoque diferente del que vienen teniendo en los últimos años en lo que se refiere a los procedimientos deductivos. Sin embargo, esto no tiene por qué ser así, el hecho de encontrar una referencia como la que se ha mostrado no es muestra de que realmente en cursos pasados fuese mejor el tratamiento de estos aspectos. De hecho, dependiendo de la editorial que se considere, el tratamiento es muy diverso.

Se puede tomar como ejemplo (Álvarez & Ruíz, 1999) de la editorial Vicens Vives. Este libro de texto, del segundo curso del bachillerato, data del año 1999 pero su tratamiento de las demostraciones dista mucho de presentarlas como algo relevante e importante. En las páginas 185, 188 o 212 se muestran diferentes teoremas que carecen de una demostración o de una interpretación geométrica que las explique. Únicamente se presentan los resultados de la forma en que se muestra en la **Figura 3** y se acompañan de una serie de ejercicios resueltos con los que tener un modelo que seguir en la realización de los ejercicios que se proponen para los alumnos.



8 Teorema de Weierstrass

Este teorema se refiere a las condiciones en que una función alcanza sus valores máximo y mínimo sobre un intervalo.

Se dice que *f* alcanza, o tiene, valores *máximo* y *mínimo* sobre el intervalo I, contenido en su dominio, cuando existen dos números x_0 y x_1 en I tales que para todo $x \in I$,

$$f(x_0) \leq f(x) \leq f(x_1).$$

En ese caso, se dice que *f* alcanza sobre I el valor máximo en x_1 y el mínimo en x_0 y que sus valores máximo y mínimo son, respectivamente, $f(x_1)$ y $f(x_0)$.
El máximo y el mínimo reciben el nombre de valores **extremos**. A veces se les llama también extremos absolutos para diferenciarlos de los extremos relativos.

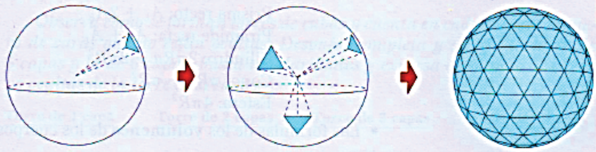
Figura 3. Teorema de Weierstrass matemáticas II en Vicens Vives (1999), pág. 188.

Sin embargo, aunque tiene este tipo de carencias en lo que se refiere al proceso de razonamiento matemático, tiene ciertos aspectos muy interesantes desde el punto de vista del lenguaje matemático. Pues bien, para que resulte más comprensible el estudio de la estadística, este manual incluye entre sus contenidos las Leyes de Morgan y los aspectos básicos de la teoría de conjuntos que son esenciales en el lenguaje matemático y para la buena comprensión de aspectos relacionados con probabilidad. Este hecho se puede comprobar en las páginas 24-29 de dicha referencia donde incluso se expone lo que es un diagrama de Venn y los utiliza para ejemplificar y mostrar de forma visual los resultados introducidos.

Para entender la filosofía que siguen estos manuales en el bachillerato, también es necesario ver la forma en que estos mismos libros de texto tratan estos temas en los últimos cursos de la E.S.O. Por ello, teniendo en cuenta esta misma época (finales de la década de los 90's principios del 2000) se analizará algún manual de estos últimos cursos de la educación secundaria obligatoria. Concretamente, se tomaron los ejemplares de (Gill Martos, 1999) relativo a 3º de la E.S.O y (Colera R. , 1999) correspondiente al último curso de la misma etapa educativa.

En el ejemplar de (Gill Martos, 1999) es especialmente interesante algunas muestras de integración del conocimiento con el fin último de deducir propiedades nuevas a partir de las que ya son conocidas. Un ejemplo de esta práctica se encuentra en la página 163 cuando se deduce la fórmula de la superficie de la esfera utilizando la expresión del volumen de una pirámide y del volumen de la esfera (vistos con anterioridad en el temario del libro). Además, con esta técnica, que se puede ver en la **Figura 4**, se está introduciendo al alumnado, sin que éste lo sepa, en los fundamentos básicos del cálculo integral al mostrar un procedimiento idéntico al método exhaustivo[4] que ya utilizó Arquímedes en su tiempo para obtener el área de una circunferencia. Además, son ideas que se utilizan con frecuencia en campos avanzados como el concepto de discretización dentro de la matemática aplicada.

El volumen de la esfera se puede aproximar sumando los volúmenes de muchas pirámides triangulares iguales, cuyas bases (triángulos) están inscritos o circunscritos en la superficie esférica y cuyos vértices están en el centro de la esfera.



Si llamamos $B_1, B_2 ..., B_n$ al área de las bases de las pirámides y h es la altura de cada pirámide, resulta que el volumen de la esfera se aproxima a:

$$\frac{1}{3}B_1h + \frac{1}{3}B_2h + ... + \frac{1}{3}B_nh = \frac{1}{3}(B_1 + B_2 + ... + B_n)h$$

A medida que el número de triángulos sobre la esfera aumenta, ocurre que:

- La suma de las áreas de las bases de las pirámides $B_1 + B_2 + ... + B_n$ tiende a ser el área S de la superficie esférica.
- Las alturas (h) de las pirámides tienden a ser el radio (R) de la superficie esférica.

Por lo tanto, el volumen de la esfera es $V = \frac{1}{3}S \cdot h$, y teniendo en cuenta el valor del volumen de la esfera visto en la página anterior, resulta:

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{1}{3}S \cdot h$$

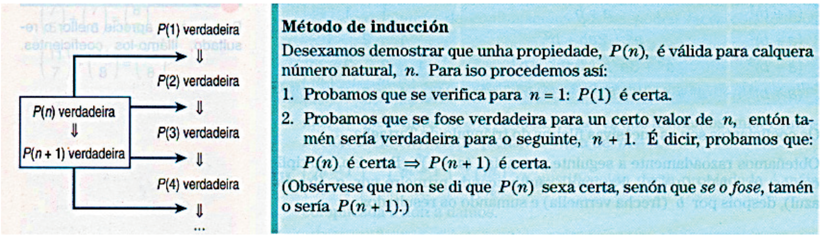
de donde

$$S = 4\pi R^2$$

Figura 4. Demostración de la superficie de una esfera en 3º ESO en Santillana, pág. 163.

4. Arquímedes (287 B.C. – 212 B.C) utilizó un cálculo integral limitado pero riguroso, que precedió en casi 200 años a la invención del Cálculo Integral de Newton, y que usó para calcular áreas y volúmenes de figuras curvilíneas.

Por otra parte, en (Colera R. , 1999) se introducen algunos métodos de deducción y demostración como puede ser el método de inducción, tal y como se puede apreciar en la **Figura 5**. Con esta perspectiva, se procura introducir algunos procedimientos básicos que son utilizados de forma asidua en el pensamiento matemático. Además, con la ayuda de este tipo de razonamiento abstracto, se está trabajando conjuntamente aspectos del lenguaje matemático y del proceso del simbolismo para representar situaciones reales mediante la simbología matemática. De este modo, se estaría trabajando conjuntamente ambos aspectos, los procesos de razonamiento y el lenguaje simbólico, dentro de una misma actividad.



Método de inducción

Desexamos demostrar que unha propiedade, $P(n)$, é válida para calquera número natural, n. Para iso procedemos así:

1. Probamos que se verifica para $n = 1$: $P(1)$ é certa.
2. Probamos que se fose verdadeira para un certo valor de n, entón tamén sería verdadeira para o seguinte, $n + 1$. É dicir, probamos que: $P(n)$ é certa $\Rightarrow$ $P(n + 1)$ é certa.

(Obsérvese que non se di que $P(n)$ sexa certa, senón que *se o fose*, tamén o sería $P(n + 1)$.)

Figura 5. Método de Inducción en 4º ESO en Anaya (1999), pág. 264.

Así, se pueden sacar, a priori, algunas conclusiones sobre lo visto hasta al momento. Se puede apreciar que a finales de la década de los 90's y principios de los 2000, había un interés mayor sobre la introducción de los procesos deductivos y el entendimiento del alumnado del simbolismo matemático para expresar la realidad. De hecho, la introducción de estos conceptos en los últimos cursos de la E.S.O propicia que esta labor, a lo largo del bachillerato, fuese mucho más fructífera.

Sin embargo, a pesar de la perspectiva que aportan en los extractos sacados de estos libros de texto, lo cierto es que los ejercicios y actividades que plantean, de forma genérica, son del tipo calcular o resolver. Así mismo, el hecho de que aparezcan reflejados en los libros de texto demostraciones o razonamientos como los vistos en la **Figura 2**, la **Figura 4** o la **Figura 5** son útiles siempre y cuando los docentes hagan hincapié en dichos enfoques. Pero, si, por el contrario, los docentes se limitan a que los alumnos realicen los ejercicios de cálculo de dichos ejemplares, únicamente aquellos alumnos con un poco de curiosidad aprovecharán los recursos mostrados. Así mismo, sí es cierto que a principios del presente milenio los libros de texto sí tenían presente esta perspectiva en sus ejemplares, pero no lo reflejan en sus actividades o ejercicios de una forma clara y concisa provocando que los alumnos practiquen y manipulen las demostraciones, los razonamientos y la escritura matemática para manejar con soltura estos aspectos del conocimiento.

En esta misma línea, se sitúan manuales más actuales. En el ejemplar de (Nieto, 2011), un manual de 1º de Bachillerato del año 2011, se sigue una estructura genérica en todos los temas. Se presentan lecciones muy cargadas de contenido resaltando en cuadros como en los que se muestra en la **Figura 6** los resultados a los que se va llegando. Posteriormente, se presentan ejercicios resueltos y explicados para que, luego, en la última de las páginas de cada lección los pupilos reproduzcan estas resoluciones en otros ejercicios del mismo estilo, pero con números diferentes.

- **El teorema de los senos** afirma que, en un triángulo cualquiera, los lados son proporcionales a los senos de sus ángulos opuestos.

$$\frac{a}{\text{sen A}} = \frac{b}{\text{sen B}} = \frac{c}{\text{sen C}}$$

Figura 6. Teorema del seno en Editex (2011), pág. 96.

Así, aumenta una mala praxis que se incrementa según el paso del tiempo. Al igual que sucedía en la **Figura 1** donde se muestra un extracto del manual (Colera, Oliveira, García, & Santaella, 2012), la filosofía seguida es la similar a este caso. Se enmarcan los resultados en recuadros llamativos para que los alumnos tengan a mano las herramientas a usar en las resoluciones mecánicas de los ejercicios.

Si $f(x) = x^n$ entonces $f'(x) = n \cdot x^{n-1}$, $n \in \mathbb{N}$.

Demostración:

Para demostrarlo usamos la definición de derivada y la regla de *Ruffini* para calcular el límite:

$$b^n - x^n = (b - x)\cdot(b^{n-1} + x\cdot b^{n-2} + x^2\cdot b^{n-3} + \ldots + x^{n-2}\cdot b + x^{n-1})$$

$$f'(x) = \lim_{b\to x} \frac{f(b) - f(x)}{b - x} = \lim_{b\to x} \frac{b^n - x^n}{b - x} = \lim_{b\to x} \frac{(b-x)\cdot(b^{n-1} + x\cdot b^{n-2} + x^2\cdot b^{n-3} + \ldots + x^{n-2}\cdot b + x^{n-1})}{b - x} =$$

$$\lim_{b\to x}\left(b^{n-1} + xb^{n-2} + \ldots + x^{n-1}\right) = nx^{n-1}.\ \text{c.q.d.}$$

Figura 7. Demostración de la fórmula de la derivada de la n-ésima potencia en Marea Verde (plataforma web), pág. 353.

Para terminar con este análisis de los libros de texto, en la **Figura 7** se observa un extracto de los apuntes actuales que se pueden obtener en la plataforma “Marea Verde” (Muñoz & Moya, s.f.). En dicho extracto, se vuelve a ver una temática recurrente, se observa el resultado resaltado en un recuadro y la demostración aparece como a modo de curiosidad. Luego, en los ejercicios no se observa ninguna reflexión acerca de las demostraciones o de los resultados mostrados y tampoco se pide que los alumnos intenten deducir y escribir matemáticamente algún resultado sencillo.

Así pues, se comprueba que el uso de los libros de texto no es suficiente para trabajar las dimensiones del razonamiento matemático y del lenguaje simbólico. Sin embargo, si pueden resultar de apoyo aquellos manuales que incluyan alguna demostración para que el docente, mediante su explicación, apoye visualmente el contenido de los manuales con el fin de que los alumnos comprendan las dimensiones de los diferentes razonamientos. De hecho, si la única relación que tienen con las demostraciones es que éstas aparecen a continuación de los resultados a modo de curiosidad, los alumnos toman la concepción de que éstas son irrelevantes. En este sentido, en (Wheeler, 1990, pág. 3) se expresa esta idea diciendo: “*son simplemente un juego, porque saben cuál es resultado*”. De esta forma, se pueden extraer varias ideas básicas de las reflexiones obtenidas de este análisis:

- El enfoque de los libros de texto no ha variado en gran medida en las dos últimas décadas. Aun así, se aprecian diferencias en la forma en la que éstos presentan sus ejercicios y actividades y su evolución al respecto se enfoca hacia los conocidos "*ejercicios tipo*" que consisten en la resolución metódica y reproductiva de un método de cálculo.
- En general, carecen de ejercicios y actividades que impliquen razonar y aplicar métodos lógicos para llegar a un resultado. En otras palabras, no se muestran actividades de una taxonomía de Bloom avanzada o de un pensamiento matemático avanzado que permita trabajar los procesos de deducción y demostración junto con el lenguaje matemático.
- De forma frecuente, aparecen recuadros enmarcando los resultados que deben de utilizar los alumnos en esos ejercicios metódicos que se presentan al final de las unidades. Sin embargo, en algunos de ellos se presentan, a continuación de dichos recuadros, las demostraciones de los resultados mostrados, por lo que los docentes deberían de explicar y razonar junto con sus alumnos estos procedimientos para que éstos se acostumbren al escepticismo y razonamiento científico.

3. PROPUESTA DE MEJORA

En este apartado se procederá a aportar una propuesta de mejora a modo de ejemplificación para mejorar la perspectiva vista en la sección anterior. Con ello no se pretende dar una receta infalible al respecto, pues el tema a tratar no tiene una solución única e imbatible, sino que se intentará formular una serie de pautas a seguir en base a lo visto hasta el momento.

Con este afán, se tomará una serie de ejemplos del currículum de bachillerato en los que se puede dar un enfoque diferente para introducir las novedades aquí planteadas. Así, se planteará una serie de ejercicios y actividades redactas de un modo diferente para involucrar en ellas el empleo de técnicas de demostración y conocimientos del lenguaje matemático.

3.1. Demostración de la suma de *n* los primeros números impares

Uno de los contenidos en el bloque de álgebra en el bachillerato son las sucesiones de números. De hecho, en el decreto 86/2015 (Decreto 86/2015, 2015) uno de los contenidos en dicha etapa es el B2.3 que dice: "*Sucesiones numéricas: término general, monotonía y anotación*". En este sentido, uno de los contenidos fundamentales en esta unidad es la suma de los términos de una sucesión. Para ello, se dota de una serie de fórmulas a los alumnos, pero, en muchas ocasiones, sin demostrarlas.

Por eso, una buena iniciativa sería que los alumnos tentasen demostrar el sentido de las fórmulas que utilizan en lugar de creerlas ciegamente. Con este afán, se pueden introducir los diferentes métodos de demostración que los alumnos deberían de manejar. Por ejemplo, uno de los contenidos del bachillerato establecidos en el decreto 86/2015 (Decreto 86/2015, 2015) dice: "*Métodos de demostración: resolución al absurdo, método de* *inducción, contraejemplos, razonamientos encadenados, etc.”*. Por ello, se plantea la siguiente actividad:

Actividad: Deduce una fórmula para la suma de los n primeros números naturales impares. Para ello, ten en cuenta que el n-ésimo número natural impar se puede escribir como $2n-1;\ \forall\ n \in \mathbb{N}$ y ten presente la siguiente imagen que servirá de ayuda:

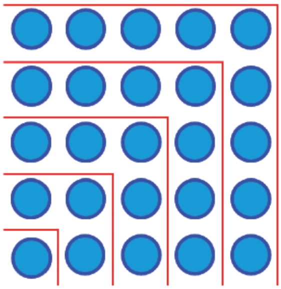


Figura 8: Suma de los n primeros números impares

Una vez obtenida la fórmula tienes una suposición de que estás en lo correcto. Sin embargo, no la has comprobado para todos los números y, por tanto, no la has demostrado. Para asegurar que es correcta demuéstrala por inducción siguiendo los siguientes pasos:

1. Comprueba si realmente es cierta la fórmula (pues podría no serlo), para ello, observa si se verifica para los primeros números más sencillos.
2. Si has encontrado algún número para el que no se verifique entonces la fórmula es incorrecta. En caso contrario, debes tratar de buscar una forma de comprobar la fórmula para cualquier número, es decir, para un número arbitrario n.
3. Ya que has comprobado que la fórmula es cierta para los primeros números naturales impares, puedes suponer que se cumple para n-1.
4. Ante la anterior suposición, conoces la suma de los n-1 primeros números impares. Entonces, sumándole a dicha suma el valor del n-ésimo número impar, deberías de obtener la fórmula que calculaste.

En esta actividad, empleando un recurso gráfico, se intenta despertar el sentido deductivo de los alumnos. Se plantea que deduzcan una fórmula para la suma de los n primeros números impares. Sin embargo, se les indica que la fórmula obtenida debe ser demostrada, pues, en caso contrario, no tienen ninguna certeza de que sea válida para el caso general (se fomenta el escepticismo científico). Así, se les indica en primer lugar que la comprueben con algunos números sencillos para que, luego, si creen que es válida, procedan mediante inducción. De este modo, se darían cuenta que n puede ser cualquier número natural (el verdadero significado de $\forall\ n \in \mathbb{N}$) y, por tanto, no estarían comprobando que la fórmula se cumple para un número concreto, sino para cualquier n arbitrario. Con esta propuesta se estaría poniendo en práctica el contenido de la **Figura 5**.

3.2. Deducción del Teorema de Darboux y análisis del mismo

El análisis matemático es una de las ramas más estudiadas en el bachillerato. En esta etapa, resultados como el Teorema de Bolzano, Weierstrass, del valor medio o de Darboux. Por ello, sería interesante, al igual que en los anteriores apartados, guiar el conocimiento de los alumnos haciendo que éstos construyan sus propias conclusiones y resultados. Algunos de estos Teoremas, como puede ser el Teorema de Darboux, se pueden deducir de otros anteriores. Para ello, únicamente es necesario utilizar alguna función matemática o idea principal de la que partir.

Teorema de Darboux: Sea $f(x)$ una función continua definida en un intervalo $[a, b]$ y k un número comprendido entre los valores $f(a)$ y $f(b)$, es decir, $f(a) \leq k \leq f(b)$, entonces, existe algún valor $c \in [a, b]$ tal que $f(c) = k$

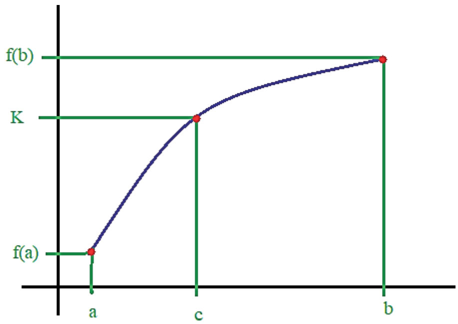


Figura 9: Teorema de Darboux

Actividad: Toma la función $g(x)$ que se define como,

$$g(x) = f(x) - k$$

y aplicándole el Teorema de Bolzano en el intervalo $[a, b]$, intenta demostrar el Teorema de Darboux.

Como se puede observar en la actividad anterior, se presenta una actividad con las indicaciones necesarias para poder demostrar el Teorema de Darboux. De este modo, se está ayudando a asociar conocimientos al implicar el Teorema de Bolzano y mostrar que, en matemáticas, al igual que en la vida misma, el conocimiento está integrado. Así, es mucho más interesante que los alumnos puedan llegar a construir su conocimiento que sencillamente tomarlo como cierto. Además, el resultado que se pretende demostrar en este ejercicio es muy intuitivo y resulta casi obvio, por lo que la construcción de su demostración inducirá implícitamente a la consecución del aumento del escepticismo científico por parte del alumnado al ver que nada se toma por verídico hasta su demostración.

Obviamente, este procedimiento no se puede seguir con todos los Teoremas. Pues bien, no todos ellos tienen la misma complejidad y es notoria la dificultad de que los alumnos puedan llegar a deducir la demostración de ciertos resultados. En estos casos, lo más conveniente sería mostrar la demostración acompañada de una interpretación geométrica que aporte un apoyo visual a la abstracción que se está a producir en el sentido matemático. Sin embargo, una de las mayores problemáticas en este sentido es que los alumnos suelen dispersarse y tomar como ciertas las conclusiones de los teoremas que se presenten. Por ello, en estos casos es conveniente poner ejemplos que contradigan las hipótesis para que se den cuenta de su necesidad. Además, esto contribuirá a una mejor comprensión de las dimensiones del enunciado de los teoremas (hipótesis & tesis) al mismo tiempo que aclarará la interpretación de la demostración que se dé en cada uno de ellos.

Teorema de Weierstrass: Una función $f(x)$ continua definida en un intervalo cerrado y acotado $[a, b]$, alcanza sus valores máximo y mínimo en el intervalo $[a, b]$.

Actividad: Contesta a las siguientes cuestiones:

1. Considera la función $f(x) = e^x$ y el intervalo $[0, 1]$. ¿Cuál es su máximo en dicho intervalo? ¿Y el mínimo? ¿Qué relación guarda lo obtenido con el Teorema de Weierstrass?
2. Si ahora consideras el intervalo $[0, +\infty)$. ¿Cuál es su mínimo en dicho intervalo? ¿Y el máximo? ¿Qué relación guarda lo obtenido con el Teorema de Weierstrass?
3. Pasa a considerar ahora el intervalo $(0, 1)$. ¿Cuál es su máximo en este nuevo intervalo? ¿Y el mínimo? ¿Qué relación guarda lo obtenido con el Teorema de Weierstrass?

En la actividad anterior se muestra un ejemplo de cómo se podría abordar la interiorización por parte de los alumnos de la importancia de las hipótesis en un teorema. Normalmente, los ejercicios de los libros de texto son idílicos y apenas presentan problemáticas con los teoremas que se introducen a lo largo de los temas. De este modo, no se suelen contradecir las hipótesis y los alumnos conciben que los resultados se pueden aplicar sin tener ninguna condición en cuenta. Por ello, mostrar una serie de preguntas, como las que se pueden observar, en las que se contradigan las hipótesis de los teoremas ayuda a que se tenga en cuenta esta consideración pocas veces tratada. De este modo, se estarán tratando contenidos de los manuales como el de la **Figura 3**.

3.3. La probabilidad y su relación con la teoría de conjuntos

En la rama de la estadística y la probabilidad es fundamental la teoría de conjuntos. Esta teoría involucra conocimientos básicos del lenguaje matemático y que, al mismo tiempo, son muy intuitivos. Además, también se pueden crear los teoremas básicos de la probabilidad a partir de una serie de axiomas. La construcción por axiomas está muy presente en las matemáticas y, de hecho, fue así como Euclides creó su geometría en su obra *Los elementos* (escrito entorno al 300 a.C).

Actividad: Se partirá de los siguientes AXIOMAS:

- Axioma 1: Para cualquier suceso S, $P(S) \geq 0$

- Axioma 2: Dados dos sucesos incompatibles, la probabilidad de que su unión se produzca es igual a la suma de sus probabilidades. Esto es:

$$\text{Si } A \cap B = \emptyset \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) \cup P(B)$$

- Axioma 3: La probabilidad total es $P(E) = 1$:

Entonces, utilizando los axiomas anteriores se pretenderá demostrar los siguientes resultados:

Teorema 1: Dado un suceso A y A', su suceso contrario, entonces $P(A') = 1 - P(A)$.

Teorema 2: La probabilidad del suceso vacío, es decir, del $\emptyset$, es nula. Esto es $P(\emptyset) = 0$.

En la actividad anterior se muestra un ejemplo de una actividad que podría ser desarrollada por alumnos de bachillerato. Al realizarla estarían practicando la creación de resultados por axiomas y, conjuntamente, la concatenación de razonamientos al enlazar un hecho con su consecuencia y así sucesivamente hasta llegar al resultado final. Además, con esta actividad se está a introducir el concepto de "*axioma*" y, con él, una introducción a la creación del pensamiento y razonamiento matemático a partir de ellos.

Por otro lado, la estadística es una rama muy dinámica de las matemáticas que permite crear una gran variedad de propuestas muy variadas. Por ello, se puede utilizar su dinamismo como una oportunidad para introducir y reforzar los procesos del pensamiento deductivo. Con este afán, se presenta otra posible actividad que permitiría a los alumnos deducir una fórmula observando su comportamiento para que, luego, procurasen demostrarla a partir del propio experimento haciendo una generalización del mismo.

Por otro lado, la estadística es una rama muy dinámica de las matemáticas que permite crear una gran variedad de propuestas muy variadas. Por ello, se puede utilizar su dinamismo como una oportunidad para introducir y reforzar los procesos del pensamiento deductivo. Con este afán, se presenta otra posible actividad que permitiría a los alumnos deducir una fórmula observando su comportamiento para que, luego, procurasen demostrarla a partir del propio experimento haciendo una generalización del mismo.

Como realizar un experimento manual es muy tedioso en estadística (pues se deben hacer muchas repeticiones para obtener resultados fiables) se utilizará el software estadístico de libre uso R. En la **Figura 10** se muestra un código que representa el experimento de lanzar un dado n veces (en el caso del código se toma 100000 como tamaño de muestra). Con la ayuda de este código los alumnos pueden realizar la siguiente actividad donde obtendrán conclusiones del experimento realizado previamente.

```
n=100000;                                      #tamaño de la muestra
muestra=sample(1:6,size=n,replace=TRUE) #creación de la muestra
A=0; B=0; C=0; AUB=0; AYB=0;   AnoC=0;        #contadores a cero
for (i in 1:n){                                #conteo de las repeticiones
  if (muestra[i] == 1) {A=A+1; B=B+1; AUB=AUB+1; AYB=AYB+1; AnoC=AnoC+1;}
  else if(muestra[i] == 2) {A=A+1; C=C+1; AUB=AUB+1;}
  else if(muestra[i] == 3) {A=A+1; B=B+1; AUB=AUB+1; AYB=AYB+1; AnoC=AnoC+1;}
  else if(muestra[i] == 4) {A=A+1; C=C+1; AUB=AUB+1}
  else if(muestra[i] == 5) {B=B+1; AUB=AUB+1;}
}
PA=A/n;       #frecuencia de A
PB=B/n;       #frecuencia de B
PC=C/n;       #frecuencia de C
PAUB=AUB/n;   #frecuencia de la unión de A y B
PAYB=AYB/n;   #frecuencia de la intersección de A y B
PAnoC=AnoC/n; #frecuencia de que suceda A pero no C
```

Figura 10: Código R para un experimento deductivo

Actividad: En el código se representa el experimento de lanzar un dado n veces. Considerando los siguientes conjuntos, que representan el suceso de que al lanzar un dado se obtenga alguno de los valores que contienen dichos conjuntos,

$$A = \{1,2,3,4\} \qquad B = \{1,3,5\} \qquad C = \{2,4\}$$

los valores en el código de PA, PB, PC, $PAUB$, $PAYB$ y $PAnoC$ representan las frecuencias de que suceda A, B, C, $A \cup B$, $A \cap B$ y $A \setminus C$ respectivamente. Como el valor de la muestra es muy elevado, dichas frecuencias se aproximan a la probabilidad de que suceda cada uno de dichos sucesos. Por tanto, se pueden conjeturar ciertas relaciones entre las probabilidades de los conjuntos.

1. Escribe la probabilidad de $P(A \cup B)$ como relación de otras probabilidades. Por ejemplo, ¿es cierto que $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$?
2. ¿Qué relación hay entre los conjuntos A y C? ¿Y entre sus probabilidades? ¿Qué relación podrías conjeturar entonces? Y si consideras los conjuntos A, C, y $A \setminus C$, y , ¿qué relación hay entre ellos? Entonces, ¿qué suposición podrías concluir?

Así, se presenta una actividad que con sus preguntas es una especie de guía sobre la reflexión que se debería de hacer sobre el experimento. De esta forma, se enseña a los alumnos el tipo de preguntas que deberían de hacerse ante una experimentación. Se muestra así una fase del pensamiento matemático que, comúnmente, se asocia a las ciencias experimentales menos a las matemáticas y que se trata de la fase de experimentación y conjeturas.

Actividad: En base a la observación del experimento realizado con el código de R, intenta generalizarlo para un caso cualquiera (usando las reflexiones obtenidas sobre las relaciones de los conjuntos y sus probabilidades en la actividad anterior) para demostrar los siguientes resultados:

Teorema 1: Si dos hechos A y B verifican que $A \subset B$, entonces $P(B) = P(A) + P(B \setminus A)$

Teorema 2: Si dos hechos A y B verifican que $A \subset B$, entonces $P(A) \leq P(B)$

Teorema 3: Dados dos sucesos A y B, se cumple que:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

De este modo, se presenta la finalización de la actividad experimental con R. Este paso consiste en demostrar lo que se ha deducido con el experimento a un caso genérico cualquiera. Para ello, los alumnos cuentan con la reflexión propuesta anteriormente y que será la información que necesiten para la demostración de dichos teoremas. Además. comprobarán que lo que están haciendo es generalizar la situación expuesta en el experimento realizado con el código de R al mismo tiempo que se utilizan los axiomas y resultados de la primera actividad propuesta. De esta manera, se estará a fomentar la visión del alumnado de integrar y tener en cuenta todo el conocimiento matemático previo en lugar de encerrarse en los conceptos tratados en una única actividad.

4. CONCLUSIONES

Una vez finalizada la exposición de la ejemplificación de la propuesta de mejora, se concluirá haciendo una síntesis de las ideas expuestas en el artículo. Por una parte, tanto en la introducción como en el apartado de análisis de los libros de textos se aprecia una necesidad visible en la enseñanza de las matemáticas. Estas ideas se podrían resumir en los siguientes puntos:

- La importancia que suscita en las matemáticas el buen entendimiento de un razonamiento, de una fórmula o de un planteamiento, justifica la necesidad de mostrar un aprendizaje que tenga en cuenta actividades que guíen a los alumnos hacia el conocimiento de los procesos de razonamiento y de la adquisición de un lenguaje matemático básico.
- Los libros de texto, de forma genérica, ofrecen un apoyo acerca de estas cuestiones. Sin embargo, no resultan suficientes debido a que los ejercicios y actividades que proponen resultan ser de una taxonomía de Bloom baja y no involucran a los alumnos en actividades que les hagan pensar y reflexionar. Por ello, estos libros y manuales deberán ser apoyados por actividades diseñadas por los docentes para que aborden los puntos estudiados en este trabajo y que involucren a los alumnos en estas cuestiones.
- La implementación de las cuestiones estudiadas en este trabajo no es incompatible con la realización de ejercicios mecánicos que doten de destreza y práctica a los alumnos con las cuestiones de cálculo. De hecho, estas actividades también son necesarias como un primer acercamiento para que los estudiantes adquieran manejo con las operaciones, sin embargo, resulta caótico realizar ejercicios de este tipo de forma reiterada. En ese sentido, una vez adquirida dicha destreza es necesario profundizar en los conocimientos y, en este punto, es donde se enmarca el encuadre del estudio realizado en este trabajo.
- Para obtener los objetivos planteados, es necesario mantener este tipo de metodología en el aula de una forma constante a lo largo del bachillerato. No se trata de demostrar continuamente todo aquello que se plantee, sino de trabajar aquellos

conceptos teóricos que permitan implementar de una forma, más o menos asidua, este tipo de metodologías. Además, es necesario evaluar este tipo de actividades para que los alumnos las vean como una cuestión necesaria y no algo pasajero. En este sentido, se podrían evaluar mediante rúbricas haciendo, por ejemplo, trabajos en grupo (ya sean escritos o que consistan en una exposición oral) lo que permitirá trabajar mediante aprendizaje cooperativo y colaborativo entre otras técnicas de trabajo.

Sin embargo, también es cierto que esta metodología tiene una serie de desventajas. Pues bien, su implementación no resulta del todo sencilla y depende de otros factores. Principalmente depende de dos: el nivel con el que los alumnos llegan al bachillerato de la E.S.O, respecto de estas cuestiones, y la prueba de acceso a la universidad que hace del bachillerato un curso muy denso en el que el tiempo es un bien muy preciado.

Tratando la primera problemática, el nivel con el que llegan los alumnos a la E.S.O, sería idílica una implicación al respecto de todo el profesorado docente. Si los alumnos no tienen ningún conocimiento (o conocimientos muy superfluos acerca de estas cuestiones) el profesorado de bachillerato deberá dedicarle una serie de sesiones a revertir esta situación inicial. Esto hace que se tenga que reprogramar la programación inicial de dicho curso que está cargado de contenidos. De este modo, en la E.S.O se deberían de tratar los conocimientos básicos de la lógica y el simbolismo matemático. Como se ha señalado anteriormente, esto no sólo es necesario para los alumnos que sigan cursando estudios en estas ramas, sino que servirá de ayuda a todos ellos como futuros ciudadanos y, en esta línea, todos se beneficiarían de dichos conocimientos. En consecuencia, la implicación de los docentes en todos los cursos de la educación secundaria resulta crucial para una mejor adquisición de estos contenidos.

Por otra parte, la prueba del acceso a la universidad marca de una forma rotunda todo el periodo del bachillerato. Tanto es así que los ejercicios y actividades realizadas se enfocan continuamente con el único objetivo de superar esta prueba. Sin embargo, dotar a los alumnos de las capacidades y conocimientos que se han expuesto en este trabajo, permitirá que éstos puedan resolver cualquier actividad que se les plantee de una forma mucho más objetiva y entendiendo mejor el procedimiento seguido. Por ejemplo, si un alumno está acostumbrado a realizar un ejercicio de forma rutinaria, pero sin comprender el procedimiento seguido y el lenguaje utilizado, cuando a éste le varíen el planteamiento del enunciado probablemente no sepa resolverlo. Sin embargo, otro alumno que sepa razonar e interpretar ese otro enunciado, sí tiene mejores cualidades para plantear la actividad y llegar a una solución. Así, más allá de las interpretaciones geométricas que se piden en las pruebas de acceso a la universidad, el estudio de las demostraciones y del lenguaje matemático se justifica por sí mismo al mejorar las cualidades de cualquier estudiante de ciencias ante pruebas de este tipo.

En este sentido, sería interesante rescatar la cita de (Ibañes & Ortega, 2003, pág. 57) que decía: “El reconocimiento de los procesos matemáticos, por parte de los alumnos, puede mejorar sensiblemente con las instrucciones adecuadas sin que aquello precise de una docencia dilatada en el tiempo”. Pues bien, esta cita refleja ese sentir de que cualquier docente, si realmente está comprometido, podría llevar a cabo, en mayor o menor medida, las conclusiones obtenidas del estudio realizado en este trabajo.

Por otra parte, me gustaría recalcar que este trabajo no pretende plantear un cambio radical en el sentir del bachillerato, sino provocar una reflexión en la comunidad docente con el fin de aportar una perspectiva que mejore las capacidades de los alumnos. No se trata de reformular completamente la metodología del bachillerato ni mucho menos hacer de esta etapa educativa una metodología cercana o igual a la de la universidad o estudios superiores. Lo que se trata de plantear, es el bachillerato como una transición entre la educación secundaria obligatoria y esos estudios superiores que cursarán gran parte del alumnado.

Así, se considera que esta visión sería especialmente fructífera debido a la estructura del bachillerato en aulas similares a las de la E.S.O. Pues bien, a pesar de ser una etapa agobiante y cargada de contenidos, el equipo docente tiene los conocimientos pedagógicos para transmitir y profundizar en esa transición de un aprendizaje más rudimentario hacia un nivel de rigurosidad más amplio.

Por el contrario, en la universidad y los estudios superiores, de forma general, la situación es completamente diferente. Las aulas están masificadas, los contenidos se dan de forma abrupta muchas veces y los alumnos necesitan ser autónomos ante esos profesores que dejan de tener ese carácter pedagógico de los profesionales de la educación secundaria. Por ello, resulta muy interesante aprovechar esa etapa educativa de dos años con el fin de que los estudiantes sientan esa progresión de la E.S.O hacia una mayor autonomía en su razonamiento, en su lógica y en la visión que tendrán que tener en un futuro.

Finalmente, y, para concluir, sería resaltable marcar algunas líneas de investigación futuras que completen o ayuden a cumplir los objetivos marcados con el estudio y las reflexiones realizadas en el presente trabajo. A este respecto, se resaltan dos líneas principales:

- La propuesta de mejora aquí planteada no se ha podido llevar a cabo debido a su envergadura. Como se ha dicho, el trabajo se trata de un estudio teórico y la propuesta de mejora es una ejemplificación de algunas medidas planteadas. Sin embargo, se necesitaría mantener la metodología propuesta durante todo el bachillerato para evaluar los resultados y, en este sentido, cualquier estudio práctico que se realice al respecto completaría el estudio teórico aquí realizado.
- Hacer una reflexión profunda acerca de la prueba de acceso a la universidad y hacer un mayor enfoque en dicha prueba sobre aspectos relacionados con el razonamiento, la lógica y el lenguaje simbólico ayudaría a los objetivos planteados. Por ello, la realización de investigaciones enfocadas hacia la reflexión de esta prueba en el campo científico-tecnológico también ayudaría al cumplimiento de los objetivos estudiados.

5. REFERENCIAS

Álvarez, F., & Ruíz, A. (1999). *Funciones 2, Matemáticas.* Barcelona: Vicens Vives.
Colera, J., Oliveira, M., García, R., & Santaella, E. (2012). *Matemáticas I.* Madrid: Anaya.
Colera, R. (1999). *Matemáticas 4º ESO.* Anaya.
Gill Martos, J. (1999). *Matemáticas 3º ESO.* Santillana.

Gómez Gejo, M., & García Sanmartín (Eds.), A. (2001). *Matemáticas II.* A Coruña: Rodeira, Grupo Edebé.

Ibañes, M., & Ortega, T. (2003). Reconocimiento de procesos matemáticos en alumnos de primer curso de bachillerato. *Enseñanza de ciencias 21*, 49-63.

Larrosa Cañestro, I. (14 de Febrero de 2014). *Teorema del seno*. Obtenido de http://www.xente.mundo-r.com/ilarrosa/GeoGebra/TeorSeno.html

Larrosa Cañestro, I. (s.f.). *Actividades con Geogebra*. Obtenido de http://www.xente.mundo-r.com/ilarrosa/GeoGebra/

Lodoño, J. (2006). *Geometría Euclidiana.* Colombia: Universidad de Antioquia.

Muñoz, J., & Moya, P. (s.f.). *Marea verde*. Obtenido de http://www.apuntesmareaverde.org.es

Nieto, &. (2011). *Matemáticas 1º Bachillerato.* Editex.

Ruiz de Gauna Gorostiza, J., Dávila , P. B., Etxeberria, J. M., & Sarasua, F. J. (2013). Los libros de texto de matemáticas del bachillerato en el periodo 1970-2005. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 245-276.

Sáenz, C. (2002). Sobre conjeturas y demostraciones en la enseñanza de las matemáticas. *Investigación en educación matemática: Quinto Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (págs. 45-62). Almería: Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática, SEIEM.

Vázquez Mourazos, M. (2020). Utilización del kahoot para la introducción de la lógica proposicional en la ESO. *Épsilon (106)*, 61-68.

Wheeler, D. (1990). Aspects of mathematical proof. *Interchange 21(1)*, 1-5.

Enfoque alternativo a la resolución de ecuaciones diferenciales con retardo

Gabriel Pérez Lance
Universidad del CEMA

Resumen: *En gran número de problemas cuando se pretende realizar un análisis dinámico, surge la necesidad de resolver ecuaciones diferenciales. En los sistemas reales, muchas veces las variables que se consideran impactan sobre otras variables, pero no lo hacen de manera instantánea, sino que existe un retardo. Esto puede deberse al tiempo de demora que posee un dispositivo, o bien, en un contexto de mercados, podría ser el tiempo de reacción de los agentes. Así, la relación entre causa y efecto no es inmediata y por eso, el modelo ahora contendrá a la función y a su derivada evaluadas en diferentes momentos.*
Palabras clave: *retardo; ecuaciones diferenciales; función historia; tiempo; demora.*

An alternative approach on time-delay differential equations

Abstract : *It is the case that, across multiple sciences that use mathematical modeling, when trying to perform dynamical analysis, the need to solve differential equations often arises. In real systems, many times the variables that are considered have an impact on other variables. Motivation arises from the need to describe time-delayed phenomena that can be found for instance in electronic or mechanical devices or even in the market context by modeling the reaction time of the agents involved. In this way, differential equations will also have to involve some extra parameter to take this delay into account.*
Keywords: *time delay; differential; equations; history function; delay.*

1. INTRODUCCIÓN

Desde el siglo XVII Isaac Newton (1643-1727) y Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716), analizaron el problema que consiste en encontrar una curva caracterizada por una propiedad dada por sus tangentes. A partir de ese momento –o incluso antes–, las ecuaciones diferenciales han comenzado a ser parte del foco de atención de grandes matemáticos y físicos. Newton demostró que el problema de las tangentes tenía solución. A este trabajo se sumaron Gottfried Wilhlm Leibniz, Jacob Bernoulli (1654-1705) y Johann Bernoulli (1667-1748). Luego, matemáticos como Jacopo Riccati (1676-1754), Daniel Bernoulli (1700-1782) y Leonhard Euler (1707-1783), estudiaron las ecuaciones diferenciales de orden superior. A ellos le siguieron Joseph Louis Lagrange (1736-1813) y Jean le Rond D'Alembert (1717-1783). En 1776, Lagrange desarrolla el método de variación de parámetros. Durante el siglo XIX Rudolf Lipschitz (1832-1903), demuestra la existencia y unicidad de ciertas ecuaciones diferenciales; continuando con ese trabajo Augustin Louis Cauchy (1789-1857). También hacen su aporte Jules Henri Poincaré (1854-1912), en su estudio sobre Mecánica Celeste y Aleksandr Liapunov (1857-1918) con sus trabajos acerca del problema general de la estabilidad de los movimientos. Así, se han estudiado y desarrollado métodos cerrados y métodos numéricos para resolver diversos tipos de ecuaciones diferenciales.

En las ecuaciones diferenciales, las funciones y sus derivadas están evaluadas en el mismo momento "t". Esto, en los problemas reales, no necesariamente tiene porqué ser así, es decir, los eventos, debido a su tiempo de ocurrencia, implican retardos y entonces puede ocurrir que la función y su derivada deban ser evaluadas en momentos distintos. Esta problemática da lugar a las ecuaciones diferenciales con retardo (EDR) y ha sido tratada, por ejemplo, por Liz Marzán (2006), en su trabajo acerca de ecuaciones diferenciales con retraso, dinámica de poblaciones y números primos. También en los estudios de Bel (2014), en relación con las soluciones oscilatorias en ecuaciones diferenciales con retardo. Otro ejemplo de las aplicaciones de las EDR es mostrado por Amster (2017) en la ecuación de Malthus con retardo, al estudiar modelos de crecimiento. El estudio de las EDR representa un paso más allá de las ecuaciones diferenciales y entrañan un notable comportamiento y marcada complejidad, pero son necesarias para modelizar adecuadamente ciertos fenómenos.

2. CONCEPTOS PRELIMINARES

Considerando un escenario en que no existiera un *delay*, entonces escribiríamos, por ejemplo:

$$\frac{dx(t)}{dt} = F(t, x(t)) \tag{1}$$

Pero si se tratara de un modelo donde se quisiera incorporar la existencia de retardos, entonces se debería escribir

$$\frac{dx(t)}{dt} = F(t, x(t-\tau)) \tag{2}$$

donde estamos reflejando que la derivada en determinado momento depende de la variable en cierto momento anterior.

Se podría entonces pensar en un enfoque más abarcativo y plantear el caso de un sistema descripto por

$$G(x'(t), x'(t-\tau), x(t), x(t-\tau)) = 0 \tag{3}$$

O incluso podría tener diferentes retardos, o ser cada uno de ellos una función de t, y además podría ser de orden n:

$$G[x^{(n)}(t),\ldots,x''(t), x'(t), x(t), x^{(n)}(t-\tau_n(t)),\ldots, x''(t-\tau_2(t)), x'(t-\tau_1(t)), x(t-\tau_0(t))] = 0 \tag{4}$$

La ecuación anterior podría ser escalar, pero en un caso más general aún, podría ser de tipo matricial o vectorial, en cuyo caso tendríamos un sistema de ecuaciones diferenciales con retardo, que describirían el problema en cuestión.

3. CONSIDERACIONES SOBRE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES CON RETARDO

Sea la ecuación diferencial con retardo (EDR)

$$x'(t) = ax(t) + bx(t-\tau) \tag{5}$$

donde a, b y τ son constantes escalares reales.

Dado que se trata de una ecuación diferencial (con retardo) que es lineal y con coeficientes constantes, podemos proceder de manera similar al enfoque que se utiliza para las ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO) del tipo Euler. Es decir, vamos a suponer que una solución es de la forma

$$x(t) = e^{r.t} \tag{6}$$

en donde $r \in$ C.

Entonces reemplazando (6) en (5), se obtiene

$$re^{r.t} = ae^{r.t} + be^{r.t}e^{-\tau.r} \tag{7}$$

y puesto que la expresión (7) se verifica para todo t, entonces necesariamente debe ocurrir que:

$$r = a + be^{-\tau.r} \tag{8}$$

La ecuación (8) es la ecuación característica asociada a la EDR, y es una ecuación trascendente en variable compleja. Considerando que $r = \alpha + i.\beta$, entonces podemos escribir:

$$\alpha + i.\beta = a + b.e^{-\tau.(\alpha+i.\beta)}$$

esto implica

$$\alpha + i.\beta = a + b.e^{-\tau.\alpha}e^{-i.\tau.\beta}$$

y aplicando la relación de Euler: $e^{i.\psi} = cos(\psi) + i.sin(\psi)$, entonces:

$$\alpha + i.\beta = a + b.e^{-\tau.\alpha}[cos(-\tau.\beta) + i.sin(-\tau.\beta)]$$

Si se toma la parte real y la parte imaginaria en ambos miembros de la ecuación anterior, se obtiene:

$$\alpha = a + b.e^{-\tau.\alpha}cos(-\tau.\beta)$$
$$\beta = b.e^{-\tau.\alpha}sin(-\tau.\beta)$$

entonces:

$$\begin{cases} \alpha = a + b.e^{-\tau.\alpha}cos(\tau.\beta) \\ \beta = -b.e^{-\tau.\alpha}sin(\tau.\beta) \end{cases} \tag{9}$$

El sistema de ecuaciones trascendentes (9) tiene infinitas soluciones, pues si en la ecuación (8) hacemos el cambio de variable

$$z = \frac{1}{r-a}$$

, entonces

$$1 = z.be^{-\tau/z-\tau.a}$$

y si $be^{-\tau.a} = \eta$, surge que:

$$ze^{-\tau/z} = \frac{1}{\eta}$$

donde η es distinto de cero, dado que *b* no es nulo porque sino no se trataría de una ecuación diferencial con retardo.

La función $f(z) = ze^{-\tau/z}$ es una función analítica con una singularidad esencial en $z = 0$, por lo tanto, por el teorema de Picard, en cualquier vecinal de $z = 0$, la función alcanza todo el plano complejo con a lo sumo una excepción. Esto implica que existe una cantidad infinita numerable de valores complejos z_n que verifican

$$f(z_n) = \frac{1}{\eta}$$

De este modo, hay infinitas soluciones (autofunciones) de la ecuación diferencial (5), de la forma:

$$x_n(t) = e^{rn.t} \tag{10}$$

con $r_n = a + \frac{1}{z_n}$.

Además, debido a la linealidad de la ecuación (5), entonces también será solución cualquier combinación lineal de las autofunciones $x_n(t)$.

En contraposición a las ecuaciones diferenciales ordinarias, las ecuaciones diferenciales con retardo tienen asociado un espacio de soluciones de dimensión infinita.

Esto se relaciona con otro rasgo distintivo de las ecuaciones diferenciales con retardo, con respecto a las ecuaciones diferenciales ordinarias, y es que la condición inicial que requieren es el valor de la función en todo un intervalo, y no sólo en un punto.

Dado que trataremos exclusivamente el caso de sistemas causales, entonces por (5)

$$x'(t) - ax(t) = bx(t - \tau) \ \forall t > -\tau$$

por lo tanto $\forall t \in [0;\tau]$:

$$x'(t) - ax(t) = bx(t - \tau)$$

Dada la condición inicial: $x(t) = \varphi(t) \ \forall t \in [-\tau;0]$, implica

$$x'(t) - ax(t) = b\ \varphi(t - \tau) \ \forall t \in [0;\tau] \tag{11}$$

Puesto que $\varphi(t)$ es conocida $\forall t \in [-\tau;0]$, entonces en el intervalo $[0;\tau]$ la solución de la EDR (5) va a coincidir con la solución de la EDO (11).

Luego, se puede obtener la solución de la EDR correspondiente al intervalo $[\tau;2\tau]$ tomando como condición inicial el valor obtenido para $x(t)$ en el intervalo $[0;\tau]$.

Procediendo de este modo de manera recursiva, es posible determinar la solución de la EDR (5) $\forall t > -\tau$. Este procedimiento se conoce como *método de pasos*.

4. EJEMPLO DE APLICACIÓN DE LAS EDR

Consideremos la EDR:

$$x'(t) = ax(t) + b\ x(t - \tau) \ \forall t > -\tau, \text{ con } x(t) = \varphi(t) \ \forall t \in [-\tau;0] \tag{12}$$

Sean $a = -2$, $b = 1/3$, $\tau = c = 1$ y la función historia $\varphi(t) = 1$ en $[-1;0]$ por lo tanto, la EDR a resolver es:

$$x'(t) = -2x(t) + \frac{1}{3}\, x(t-1) \quad \forall t \geqslant -1 \quad , \text{con } x(t) = 1 \ \forall t \in [-1;0] \tag{13}$$

Entonces, para obtener la solución correspondiente a $t \in [0;1]$, debemos resolver:

$$x'(t) = -2x(t) + 1$$

Se trata de una EDO lineal, a coeficientes constantes tipo Euler, con autovalor igual a -2. Obtenemos la solución de la homogénea asociada y una solución particular (por el método de determinación de parámetros), y así la solución es:

$$x(t) = \frac{5}{6}e^{-2t} + \frac{1}{6} \quad \forall t \in [0;1] \tag{14}$$

Luego repetimos el procedimiento para $t \in [1;2]$. En este caso hay que resolver:

$$x'(t) = -2\, x(t) + \frac{5}{6}\, e^{-2(t-1)} + \frac{1}{6}$$

y se trata nuevamente de una EDO tipo Euler, cuya solución es:

$$x(t) = (-\frac{5}{36}\, e^2 + \frac{5}{6})\, e^{-2t} + \frac{1}{36} + \frac{5}{18}\, e^2\, t\, e^{-2t} \quad \forall t \in [1;2] \tag{15}$$

Aplicando nuevamente, de manera análoga, el método para el siguiente tramo se obtiene:

$$x(t) = -\frac{5}{216}(-5e^4 + 6e^2 - 36e^{-2t}) + \frac{1}{216} + (-\frac{5}{36}e^4 + \frac{5}{18}e^2)te^{-2t} + \frac{5}{108}e^4t^2e^{-2t} \quad \forall t \in [2;3] \tag{16}$$

y de este modo se podría proceder para los siguientes intervalos, y tener toda la respuesta temporal de $x(t)$.

Se muestra en el siguiente gráfico, la solución de la EDR (13) obtenida mediante los diferentes tramos según las ecuaciones (14), (15) y (16) por el método de pasos:

```
> x_pasos:=(t)->piecewise(t<0,c,t>=0 and t<=tau,x1(t),t>=tau and
  t<=2*tau,x2(t),t>=2*tau and t<=3*tau,x3(t));
```

$x\_pasos :=$

$t \to \text{piecewise}(t < 0, c, 0 \leq t \textbf{ and } t \leq \tau, \text{x1}(t), \tau \leq t \textbf{ and } t \leq 2\,\tau, \text{x2}(t), 2\,\tau \leq t \textbf{ and } t \leq 3\,\tau, \text{x3}(t))$

```
> plot(x_pasos(t),t=-tau..3*tau);
```

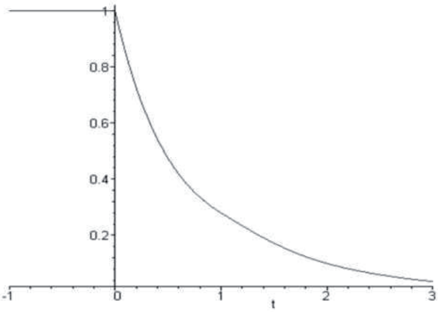


Gráfico 1. x(t) correspondiente a la EDR (13) obtenida por el método de pasos.
Fuente: elaboración propia.

Otro modo de abordar el tema sería buscar la respuesta temporal del sistema, mediante las autofunciones (10) de la ecuación característica (8) mencionada anteriormente.

Para el caso del ejemplo dado, la ecuación característica asociada a la EDR (13) resulta:

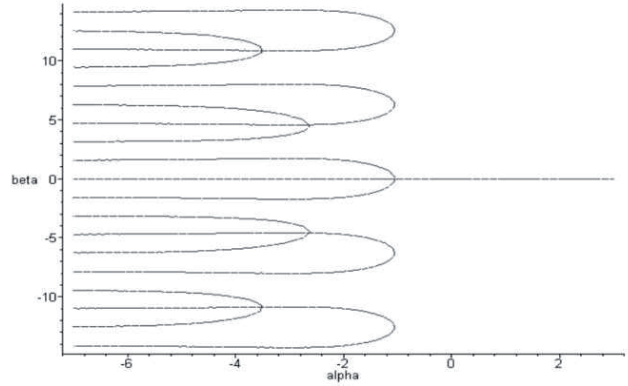
$$r = -2 + \frac{1}{3}e^{-r} \tag{17}$$

y recordando que $r = \alpha + i.\beta$, entonces se obtiene según lo visto anteriormente:

$$\begin{cases} \alpha = -2 + \frac{1}{3}e^{-\alpha}cos(\beta) \\ \beta = -\frac{1}{3}e^{-\alpha}sin(\beta) \end{cases} \tag{18}$$

El gráfico a continuación muestra el lugar geométrico en el plano complejo, de los puntos que verifican las ecuaciones anteriores y los puntos de intersección (soluciones) del sistema.

```
with(plots):
implicitplot({alpha=a+b*exp(-alpha*tau)*cos((beta)*tau),
beta=-b*exp(-alpha*tau)*sin((beta)*tau)},alpha=-7..3,beta=-15..15,
numpoints=4000, axes=FRAME);
```




```
fsolve({alpha=a+b*exp(-alpha*tau)*cos(beta*tau),beta=-b*exp(-alpha*t
au)*sin(beta*tau)});
```

$$\{\beta = 0.,\ \alpha = -1.048693409\}$$

Gráfico 2. Lugar geométrico asociado al sistema de ecuaciones trascendentes.
Fuente: elaboración propia.

```
Nt:=7;
```

$$Nt := 7$$

```
for i from 1 by 1 to Nt do
alpha[i]:=fsolve(-b*tau*exp(-alpha*tau)*(-sqrt(1-((alpha-a)/b*exp(alpha*tau))^2))=
        =(2*i*Pi-arccos(((alpha-a)/b*exp(alpha*tau)))));

beta[i]:=evalf(1/tau*(2*i*Pi-arccos((alpha[i]-a)/b*exp(alpha[i]*tau))));  end do;
```

$\alpha_1 := -2.628754231$ $\alpha_2 := -3.492964474$ $\alpha_3 := -3.947926773$ $\alpha_4 := -4.258775551$

$\beta_1 := 4.575836612$ $\beta_2 := 10.85894381$ $\beta_3 := 17.16576553$ $\beta_4 := 23.46598311$

$\alpha_5 := -4.495329916$ $\alpha_6 := -4.686396736$ $\alpha_7 := -4.846702537$

$\beta_5 := 29.76148158$ $\beta_6 := 36.05394247$ $\beta_7 := 42.34437443$

Figura 1. Solución numérica z_0. Fuente: elaboración propia.

```
alpha[0]:=-1.048693409:beta[0]:=0:
z[0]:=alpha[0]+beta[0]*I;
```

$$z_0 := -1.048693409$$

```
for i from 1 by 1 to Nt do z[i]:=alpha[i]+I*beta[i] end do;
```

$$z_1 := -2.628754231 + 4.575836612\,I$$
$$z_2 := -3.492964474 + 10.85894381\,I$$
$$z_3 := -3.947926773 + 17.16576553\,I$$
$$z_4 := -4.258775551 + 23.46598311\,I$$
$$z_5 := -4.495329916 + 29.76148158\,I$$
$$z_6 := -4.686396736 + 36.05394247\,I$$
$$z_7 := -4.846702537 + 42.34437443\,I$$

Figura 2. Algunas soluciones numéricas alpha y beta y algunos autovalores de la ecuación característica. Fuente: elaboración propia.

Los autovalores z_n hallados permiten construir soluciones de la EDR (13). Dado que el espacio solución de la EDR es de dimensión infinita, sólo vamos a considerar N+1 autofunciones, ya que como la parte real de los autovalores es negativa y aumenta en módulo, entonces para valores de t positivos, tendremos exponenciales negativas y no habrá demasiado error al truncar el número de autofunciones a utilizar.

Entonces tomaremos como aproximación de la respuesta temporal –es decir la solución de la EDR (13)–, la siguiente combinación lineal de autofunciones:

$$x(t) = \sum_{i=0}^{N} d_i\, e^{\alpha_i . t}\, cos(\beta_i . t) \tag{19}$$

donde hemos considerado sólo la parte real de las autofunciones, puesto que la solución de la EDR es real y los escalares de la combinación lineal también son reales.

Debido a la restricción impuesta por la función historia, en el caso práctico bajo estudio debería ocurrir que para los valores de t entre –1 y 0, $x(t)$ fuera igual a 1.

Esto implica que:

$$x(t) = \sum_{i=0}^{N} d_i\, e^{\alpha_i . t}\, cos(\beta_i . t) = 1 \quad \forall t \in [-1;0] \tag{20}$$

Dado que tenemos una cantidad finita de autofunciones, no es posible encontrar escalares d_i para que se pueda verificar la identidad anterior en todo el intervalo, pero sí podemos elegir los escalares d_i, para que en determinados valores de t la expresión se cumpla.

Esto, justamente refleja el hecho de que vamos a obtener una aproximación a la verdadera solución, por haber tomado una cantidad finita de autofunciones.

Entonces, dividimos el intervalo $[-1;0]$ en N partes iguales, y así tendremos un conjunto de valores de t equiespaciados (con $N = 7$):

$$t_0 = -1,\ t_1 = -6/7,\ t_2 = -5/7,\ \ldots,\ t_7 = 0$$

De este modo, reemplazando cada uno de estos valores t_i en la ecuación (20) obtendremos el sistema de ecuaciones descripto por:

$$\sum_{j=0}^{N} d_j\, e^{\alpha_j . t_i} \cos(\beta_j . t_i) = 1 \quad \forall i = 0..N \tag{21}$$

```
for nt from 0 by 1 to Nt do t[nt]:=-tau+tau/(Nt)*(nt) end do;
```

$$t_0 := -1 \quad t_1 := \frac{-6}{7} \quad t_2 := \frac{-5}{7} \quad t_3 := \frac{-4}{7} \quad t_4 := \frac{-3}{7} \quad t_5 := \frac{-2}{7} \quad t_6 := \frac{-1}{7} \quad t_7 := 0$$

Figura 3. Vector de tiempos. Fuente: elaboración propia.

Ahora se construye la matriz ***Afi*** con los coeficientes del sistema de ecuaciones y la matriz ***Bfi*** correspondiente a los términos independientes:

```
> for i from 0 by 1 to Nt do for j from 0 by 1 to Nt do Afi[i+1,j+1]:=Re(exp(z[j]*t[i]))
  end do end do;
> evalm(Afi);
```

$$\begin{bmatrix}
2.853919775 & -1.886262678 & -4.478893278 & -5.843780524 & -6.776326456 & -7.485989610 & -8.059189478 & -8.540106384 \\
2.456850057 & -6.762996572 & -19.82802269 & -16.06916126 & 11.61870974 & 43.82856196 & 48.39371536 & 10.58128473 \\
2.115025186 & -6.485785421 & 1.181091763 & 16.00115905 & -10.35967995 & -18.43345818 & 23.13689617 & 12.43905318 \\
1.820758872 & -3.882317912 & 7.336990751 & -8.848520635 & 7.585388439 & -3.508391385 & -2.633003787 & 9.459941538 \\
1.567434227 & -1.173737438 & -.2614898351 & 2.590123293 & -5.005395215 & 6.744235010 & -7.208434402 & 6.094656969 \\
1.349354984 & .5518133442 & -2.710756376 & .5898785267 & 3.080996347 & -2.184175001 & -2.441525095 & 3.564498900 \\
1.161617400 & 1.155656816 & .03214642583 & -1.356334263 & -1.796849857 & -.8450598977 & .8287305729 & 1.944018354 \\
1. & 1. & 1. & 1. & 1. & 1. & 1. & 1.
\end{bmatrix}$$

Figura 4. Matriz de los coeficientes del sistema de ecuaciones asociado a la condición inicial. Fuente: elaboración propia.

Resolviendo el sistema

$$Afi.C = Bfi$$

se obtiene la matriz C con los escalares d_i que permiten implementar la respuesta temporal $x(t)$.

```
Bfi:=Matrix(Nt+1,1):
for i from 0 by 1 to Nt do Bfi[i+1,1]:=1 end do:
evalm(Bfi);
```

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

```
C:=evalm(inverse(Afi)&*Bfi);
```

$$C := \begin{bmatrix} .7193698650 \\ .1604770805 \\ .0428146742 \\ .0212484821 \\ .01441514996 \\ .01228620526 \\ .01299458852 \\ .0163939544 \end{bmatrix}$$

Figura 5. Matriz de términos independientes y matriz de escalares solución del sistema para las condiciones inicial. Fuente: elaboración propia.

```
x:=(t)->sum(C[i+1,1]*exp(alpha[i]*t)*cos(beta[i]*t),i=0..Nt);
```

$$x := t \to \sum_{i=0}^{Nt} C_{i+1,\,1}\, \mathrm{e}^{(\alpha_i\, t)} \cos(\beta_i\, t)$$

```
plot({x_pasos(t),x(t)},t=-tau..3*tau,y=-1..2,numpoints=2000,color=[r
ed,blue]);
```

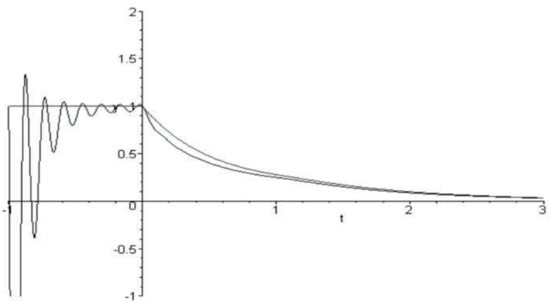


Gráfico 3. Implementación mediante autofunciones y su comparación con la respuesta obtenida según el método de pasos. Fuente: elaboración propia.

Según se puede observar en el gráfico, la respuesta obtenida para $t > 0$ por este método es muy similar a la que se obtuvo anteriormente mediante el método de pasos. En el tramo correspondiente a la función historia (condiciones iniciales) entre -1 y 0, si bien la función implementada con las autofunciones verifica en los puntos t_i especificados que coincide con $\varphi(t)$, fuera de estos puntos tiene grandes oscilaciones. Esto se debe a que los autovalores tienen parte real negativa, y entonces en el tramo donde t es negativo, quedan exponenciales que divergen.

Se realiza a continuación, un enfoque planteando consideraciones de energía, tomando como señal de entrada a la función historia, e imponiendo como condición, que el valor eficaz de la diferencia entre la respuesta y la excitación (en el intervalo correspondiente a la condición inicial), sea mínimo.

Formalmente, esto es: minimizar

$$\int_{-\tau}^{0} [y(t) - \phi(t)]^2 \, dt, \text{ sujeto a } y(0) = \varphi(0), \tag{22}$$

con

$$y(t) = \sum_{i=0}^{N} d_i \, e^{\alpha_i . t} \, cos(\beta_i . t) \tag{23}$$

y

$$y(0) = \sum_{i=0}^{N} d_i \tag{24}$$

Para resolver el problema, planteamos el lagrangiano:

$$L = \int_{-\tau}^{0} [y(t) - \phi(t)]^2 \, dt - \lambda . [y(0) - \phi(0)]$$

y dado que la condición necesaria de primer orden es:

$$\nabla L = 0$$

entonces:

$$\frac{\partial L}{\partial d_i} = \int_{-\tau}^{0} 2[y(t) - \phi(t)].e^{\alpha_i.t} \, cos(\beta_i.t) \, dt - \lambda = 0 \quad \forall i = 0..N$$

y

$$\sum_{i=0}^{N} d_i = \phi(0)$$

definiendo $\gamma_i(t) = e^{\alpha i.t} \, cos(\beta_i.t)$, entonces la expresión anterior es:

$$\frac{\partial L}{\partial d_i} = \int_{-\tau}^{0} 2[y(t) - \phi(t)].\gamma_i(t) \, dt - \lambda = 0 \quad \forall i = 0..N$$

implica

$$\frac{\partial L}{\partial d_i} = \int_{-\tau}^{0} \sum_{j=0}^{N} 2\gamma_j(t).\gamma_i(t).d_j \, dt - \int_{-\tau}^{0} 2\gamma_i(t)\phi(t) \, dt - \lambda = 0 \quad \forall i = 0..N$$

por lo tanto:

$$\sum_{j=0}^{N} \left[\int_{-\tau}^{0} 2\gamma_j(t).\gamma_i(t).dt \right] d_j - \left[\int_{-\tau}^{0} 2\gamma_i(t)\phi(t) \, dt \right] - \lambda = 0 \quad \forall i = 0..N$$

entonces, definiendo: la condición necesaria para la existencia de puntos estacionarios es:

$$c_{ij} = \int_{-\tau}^{0} 2\gamma_j(t).\gamma_i(t).dt \qquad \forall i = 0..N \qquad \forall j = 0..N$$

$$indp_i = \int_{-\tau}^{0} 2\gamma_i(t)\phi(t) \, dt \qquad \forall i = 0..N$$

y

$$\sum_{i=0}^{N} d_i = \phi(0)$$

las últimas dos ecuaciones conducen al sistema:

$$\begin{cases} c_{00}d_0 + c_{01}d_1 + c_{02}d_2 + ... + c_{0N}d_N - indp_0 - \lambda = 0 \\ c_{10}d_0 + c_{11}d_1 + c_{12}d_2 + ... + c_{1N}d_N - indp_1 - \lambda = 0 \\ c_{20}d_0 + c_{21}d_1 + c_{22}d_2 + ... + c_{2N}d_N - indp_2 - \lambda = 0 \\ c_{30}d_0 + c_{31}d_1 + c_{32}d_2 + ... + c_{3N}d_N - indp_3 - \lambda = 0 \\ \qquad\qquad\qquad ... \\ c_{N0}d_0 + c_{N1}d_1 + c_{N2}d_2 + ... + c_{NN}d_N - indp_N - \lambda = 0 \\ d_0 + d_1 + d_2 + d_3 + ... + d_N = \phi(0) \end{cases} \tag{25}$$

y si se definen:

$$P = \begin{bmatrix} c_{00} & c_{01} & c_{02} & ... & c_{0N} & -1 \\ c_{10} & c_{11} & c_{12} & ... & c_{1N} & -1 \\ c_{20} & c_{21} & c_{22} & ... & c_{2N} & -1 \\ c_{30} & c_{31} & c_{32} & ... & c_{3N} & -1 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ c_{N0} & c_{N1} & c_{N2} & ... & c_{NN} & -1 \\ 1 & 1 & 1 & ... & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$Indp = \begin{bmatrix} indp_0 \\ indp_1 \\ indp_2 \\ indp_3 \\ ... \\ indp_N \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \text{y} \qquad D = \begin{bmatrix} d_0 \\ d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ ... \\ d_N \\ \lambda \end{bmatrix}$$

entonces el sistema (25) se puede escribir matricialmente como:

$$P.D = Indp$$

resolviendo el sistema (25), se obtiene entonces la matriz D cuyos elementos son los escalares adecuados para implementar la respuesta temporal $y(t)$ mediante las autofunciones.

Se muestra a continuación, la resolución mediante este enfoque, aplicada al caso práctico anterior.

```
cuadr:=(aa,bb)->int(exp(2*aa*t)*(cos(bb*t))^2,t=-tau..0);
```

$$cuadr := (aa, bb) \to \int_{-\tau}^{0} e^{(2\,aa\,t)} \cos(bb\,t)^2\,dt$$

```
cruzad:=(aa1,bb1,aa2,bb2)->Int(2*exp(aa1*t)*(cos(bb1*t))*exp(aa2*t)*
(cos(bb2*t)),t=-tau..0);
```

$$cruzad := (aa1, bb1, aa2, bb2) \to \int_{-\tau}^{0} 2\,e^{(aa1\,t)} \cos(bb1\,t)\,e^{(aa2\,t)} \cos(bb2\,t)\,dt$$

```
linea:=(aa,bb)->int(2*c*exp(aa*t)*(cos(bb*t)),t=-tau..0);
```

$$linea := (aa, bb) \to \int_{-\tau}^{0} 2\,c\,e^{(aa\,t)} \cos(bb\,t)\,dt$$

```
N:=5;
```

$$N := 5$$

Figura 6. Funciones para la obtención de los coeficientes. Fuente: elaboración propia.

```
for i from 0 to N do P[i+1,i+1]:=2*cuadr(alpha[i],beta[i]) end do;
```

$$P_{1,1} := 6.813104782$$
$$P_{2,2} := 31.81076902$$
$$P_{3,3} := 152.8290352$$
$$P_{4,4} := 340.0556242$$
$$P_{5,5} := 588.4114420$$
$$P_{6,6} := 895.1036972$$

Figura 7. Obtención de los elementos de la diagonal de P. Fuente: elaboración propia.

```
for i from 0 to N do for j from 0 to N do if (i<>j) then
P[i+1,j+1]:=evalf(cruzad(alpha[i],beta[i],alpha[j],beta[j])) end if
end do; end do;
for i from 0 to N do P[i+1,N+2]:=-1 end do;
```

$$P_{1,7} := -1$$
$$P_{2,7} := -1$$
$$P_{3,7} := -1$$
$$P_{4,7} := -1$$
$$P_{5,7} := -1$$
$$P_{6,7} := -1$$

```
for j from 1 to N+1 do P[N+2,j]:=1; end do;
```

$$P_{7,1} := 1$$
$$P_{7,2} := 1$$
$$P_{7,3} := 1$$
$$P_{7,4} := 1$$
$$P_{7,5} := 1$$
$$P_{7,6} := 1$$

Figura 8. Fila y columna adicional, relacionadas con la restricción, para la matriz P. Fuente: elaboración propia.

```
for i from 0 to N do indp[i+1,1]:=linea(alpha[i],beta[i]) end do;
```

$$indp_{1,1} := 3.535675459$$
$$indp_{2,1} := -5.056056158$$
$$indp_{3,1} := -5.731552975$$
$$indp_{4,1} := -5.872749998$$
$$indp_{5,1} := -5.925125632$$
$$indp_{6,1} := -5.950380140$$

```
indp[N+2,1]:=1;
```

$$indp_{7,1} := 1$$

Figura 9. Elementos correspondientes a los términos independientes del sistema. Fuente: elaboración propia.

```
> evalm(indp);
```

$$\begin{bmatrix} 3.535675459 \\ -5.056056158 \\ -5.731552975 \\ -5.872749998 \\ -5.925125632 \\ -5.950380140 \\ 1 \end{bmatrix}$$

```
> evalm(P);
```

[6.813104782 , -11.76618519 , -15.47774441 , -16.33869768 , -16.66317287 , -16.81982022 , -1]
[-11.76618519 , 31.81076902 , 33.28296156 , 23.01631427 , 18.23184153 , 15.84314219 , -1]
[-15.47774441 , 33.28296156 , 152.8290352 , 135.2505650 , 88.33314043 , 64.64706677 , -1]
[-16.33869768 , 23.01631427 , 135.2505650 , 340.0556242 , 285.4261797 , 179.6751374 , -1]
[-16.66317287 , 18.23184153 , 88.33314043 , 285.4261797 , 588.4114420 , 483.1639459 , -1]
[-16.81982022 , 15.84314219 , 64.64706677 , 179.6751374 , 483.1639459 , 895.1036972 , -1]
[1 , 1 , 1 , 1 , 1 , 1 , 0]

Figura 10. Matriz de los términos independientes y matriz de los coeficientes del sistema. Fuente: elaboración propia.

```
matrizEscalares2:=evalm(inverse(P)&*indp);
```

$$matrizEscalares2 := \begin{bmatrix} .8387420627 \\ .1391562842 \\ .009712661255 \\ .006751254319 \\ .001817265251 \\ .003820472145 \\ .1862456364 \end{bmatrix}$$

Figura 11. Matriz de los escalares solución del sistema. Fuente: elaboración propia.

```
xxxx:=(t)->sum(matrizEscalares2[i+1,1]*exp(alpha[i]*t)*cos(beta[i]*t
),i=0..N);
```

$$xxxx := t \to \sum_{i=0}^{N} matrizEscalares2_{i+1,\,1}\, e^{(\alpha_i\, t)} \cos(\beta_i\, t)$$

```
plot({x_pasos(t),xx(t),xxxx(t)},t=-tau..3*tau,y=-1..2,numpoints=2000
,color=[red,blue]);
```

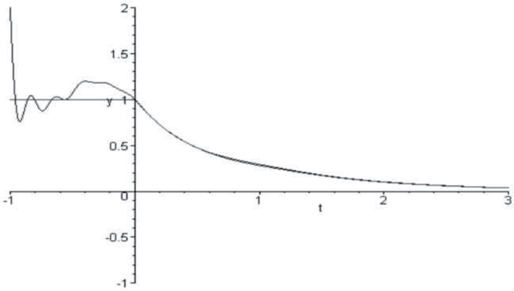


Gráfico 4. Implementación mediante autofunciones (con condición inicial basada en la energía) y su comparación con la respuesta obtenida según el método de pasos. Fuente: elaboración propia.

Según se observa en la figura anterior, utilizando el criterio de minimizar el valor eficaz, disminuye la oscilación en la zona correspondiente a la función historia, y a su vez, para $t > 0$, la respuesta temporal coincide con la obtenida por el método de pasos.

Otro modo de resolver el problema planteado consiste en utilizar derivadas parciales para extraer los coeficientes del lagrangiano, y con esto construir las ecuaciones correspondientes a las componentes del gradiente de L, para finalmente aplicar un solver.

La implementación de este procedimiento es el siguiente:

```
> y:=(t)->sum(d[i]*exp(alpha[i]*t)*cos(beta[i]*t),i=0..5);
```

$$y := t \rightarrow \sum_{i=0}^{5} d_i\, e^{(\alpha_i t)} \cos(\beta_i t)$$

```
> L:=expand(Int(((y(t)-1))^2,t=-tau..0)-lambda*(y(0)-1));
```

$$
\begin{aligned}
L := \int_{-1}^{0} & 1 + 2\, d_0\, e^{(-1.048693409\, t)}\, d_5\, e^{(-4.495329916\, t)} \cos(29.76148158\, t) \\
& + 2\, d_1\, e^{(-2.628754231\, t)} \cos(4.575836612\, t)\, d_2\, e^{(-3.492964474\, t)} \cos(10.85894381\, t) + d_1^2 \left(e^{(-2.628754231\, t)}\right)^2 \cos(4.575836612\, t)^2 \\
& + 2\, d_1\, e^{(-2.628754231\, t)} \cos(4.575836612\, t)\, d_4\, e^{(-4.258775551\, t)} \cos(23.46598311\, t) \\
& + 2\, d_1\, e^{(-2.628754231\, t)} \cos(4.575836612\, t)\, d_3\, e^{(-3.947926773\, t)} \cos(17.16576553\, t) \\
& + 2\, d_2\, e^{(-3.492964474\, t)} \cos(10.85894381\, t)\, d_3\, e^{(-3.947926773\, t)} \cos(17.16576553\, t) \\
& + 2\, d_1\, e^{(-2.628754231\, t)} \cos(4.575836612\, t)\, d_5\, e^{(-4.495329916\, t)} \cos(29.76148158\, t) \\
& + 2\, d_3\, e^{(-3.947926773\, t)} \cos(17.16576553\, t)\, d_5\, e^{(-4.495329916\, t)} \cos(29.76148158\, t) \\
& + 2\, d_3\, e^{(-3.947926773\, t)} \cos(17.16576553\, t)\, d_4\, e^{(-4.258775551\, t)} \cos(23.46598311\, t) \\
& + 2\, d_2\, e^{(-3.492964474\, t)} \cos(10.85894381\, t)\, d_5\, e^{(-4.495329916\, t)} \cos(29.76148158\, t) \\
& + 2\, d_2\, e^{(-3.492964474\, t)} \cos(10.85894381\, t)\, d_4\, e^{(-4.258775551\, t)} \cos(23.46598311\, t) + d_2^2 \left(e^{(-3.492964474\, t)}\right)^2 \cos(10.85894381\, t)^2 \\
& + 2\, d_4\, e^{(-4.258775551\, t)} \cos(23.46598311\, t)\, d_5\, e^{(-4.495329916\, t)} \cos(29.76148158\, t) + d_3^2 \left(e^{(-3.947926773\, t)}\right)^2 \cos(17.16576553\, t)^2 \\
& + d_4^2 \left(e^{(-4.258775551\, t)}\right)^2 \cos(23.46598311\, t)^2 + d_5^2 \left(e^{(-4.495329916\, t)}\right)^2 \cos(29.76148158\, t)^2 \\
& - 2\, d_1\, e^{(-2.628754231\, t)} \cos(4.575836612\, t) - 2\, d_5\, e^{(-4.495329916\, t)} \cos(29.76148158\, t) - 2\, d_4\, e^{(-4.258775551\, t)} \cos(23.46598311\, t) \\
& - 2\, d_2\, e^{(-3.492964474\, t)} \cos(10.85894381\, t) - 2\, d_3\, e^{(-3.947926773\, t)} \cos(17.16576553\, t) - 2\, d_0\, e^{(-1.048693409\, t)} \\
& + d_0^2 \left(e^{(-1.048693409\, t)}\right)^2 + 2\, d_0\, e^{(-1.048693409\, t)}\, d_4\, e^{(-4.258775551\, t)} \cos(23.46598311\, t) \\
& + 2\, d_0\, e^{(-1.048693409\, t)}\, d_2\, e^{(-3.492964474\, t)} \cos(10.85894381\, t) + 2\, d_0\, e^{(-1.048693409\, t)}\, d_3\, e^{(-3.947926773\, t)} \cos(17.16576553\, t) \\
& + 2\, d_0\, e^{(-1.048693409\, t)}\, d_1\, e^{(-2.628754231\, t)} \cos(4.575836612\, t)\, dt - \lambda d_0 - \lambda d_1 - \lambda d_2 - \lambda d_3 - \lambda d_4 - \lambda d_5 + \lambda
\end{aligned}
$$

Figura 12. Planteo del problema considerando minimización del valor eficaz.
Fuente: elaboración propia.

El lagrangiano que hemos planteado, es una expresión de segundo grado en varias variables. Cuando calculemos (para buscar puntos estacionarios) su gradiente, sus componentes van a ser todas expresiones lineales con un término independiente. Entonces si en cada una de las componentes del gradiente, es decir, para cada derivada parcial del lagrangiano, tomamos a su vez la derivada parcial con respecto a cada variable, tendremos los coeficientes de las ecuaciones del sistema lineal que debemos resolver, y a su vez, los términos independientes se pueden obtener igualando a cero todas las variables en cada componente del gradiente de L, y evaluando dicha componente en ese caso.

Finalmente, se obtienen los escalares que minimizan el valor eficaz, aplicando solver a la conjunción de las ecuaciones obtenidas, junto con la ecuación de restricción.

Se muestra el código correspondiente a la generación de los términos independientes, la construcción de las ecuaciones y la aplicación del solver:

```
for i from 0 by 1 to 5 do
indep[i]:=evalf(subs(d[0]=0,d[1]=0,d[2]=0,d[3]=0,d[4]=0,d[5]=0,lambda=0,diff(L,d[i]))) end do;
```

$$indep_0 := -3.535675459$$
$$indep_1 := 5.056056157$$
$$indep_2 := 5.731552976$$
$$indep_3 := 5.872749998$$
$$indep_4 := 5.925125633$$
$$indep_5 := 5.950380140$$

Figura 13. Términos independientes. Fuente: elaboración propia.

```
> for i from 0 to 5 do
  eq[i]:=evalf(diff(L,d[i],d[0]))*d[0]+evalf(diff(L,d[i],d[1]))*d[1]+evalf(diff(L,d[i],d[2]))*d[2]+
  evalf(diff(L,d[i],d[3]))*d[3]+evalf(diff(L,d[i],d[4]))*d[4]+evalf(diff(L,d[i],d[5]))*d[5]+indep[i
  ]-lambda; end do;
```

$$eq_0 := 6.813104784\,d_0 - 11.76618519\,d_1 - 15.47774441\,d_2 - 16.33869768\,d_3 - 16.66317287\,d_4 - 16.81982022\,d_5 - 3.535675459 - \lambda$$
$$eq_1 := -11.76618519\,d_0 + 31.81076902\,d_1 + 33.28296156\,d_2 + 23.01631427\,d_3 + 18.23184153\,d_4 + 15.84314219\,d_5 + 5.056056157 - \lambda$$
$$eq_2 := -15.47774441\,d_0 + 33.28296156\,d_1 + 152.8290353\,d_2 + 135.2505650\,d_3 + 88.33314043\,d_4 + 64.64706677\,d_5 + 5.731552976 - \lambda$$
$$eq_3 := -16.33869768\,d_0 + 23.01631427\,d_1 + 135.2505650\,d_2 + 340.0556244\,d_3 + 285.4261797\,d_4 + 179.6751374\,d_5 + 5.872749998 - \lambda$$
$$eq_4 := -16.66317287\,d_0 + 18.23184153\,d_1 + 88.33314043\,d_2 + 285.4261797\,d_3 + 588.4114421\,d_4 + 483.1639459\,d_5 + 5.925125633 - \lambda$$
$$eq_5 := -16.81982022\,d_0 + 15.84314219\,d_1 + 64.64706677\,d_2 + 179.6751374\,d_3 + 483.1639459\,d_4 + 895.1036973\,d_5 + 5.950380140 - \lambda$$

```
>
> i:='i';
```

$$i := i$$

```
> escalares:=solve({eq[0],eq[1],eq[2],eq[3],eq[4],eq[5],diff(L,lambda)});
```

$escalares :=$

$$\{d_2 = .009712661205,\ \lambda = .1862456375,\ d_0 = .8387420627,\ d_3 = .006751254333,\ d_5 = .003820472150,\ d_1 = .1391562844,\ d_4 = .001817265249\}$$

```
> xx:=(t)->subs(escalares,y(t));
```

$$xx := t \rightarrow \mathrm{subs}(escalares, y(t))$$

Figura 14. Aplicación del solver para la obtención de los escalares óptimos.
Fuente: elaboración propia.

De este modo, el solver devuelve los escalares adecuados y con ellos se implementa la función $xx(t)$.

La gráfica de la función obtenida es:

```
plot({x_pasos(t),xx(t)},t=-tau..3*tau,y=-1..2,numpoints=2000,color=[red,blue]);
```

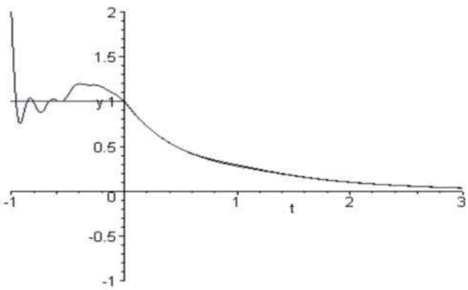


Gráfico 5. Respuesta temporal mediante autofunciones y comparación con método de pasos.
Fuente: elaboración propia.

Según se observa la misma respuesta temporal coincide exactamente con la que se obtuvo anteriormente.

5. FENÓMENOS OSCILATORIOS EN LAS EDR

Para que un sistema descripto por una EDO genere una respuesta oscilatoria, es necesario que sea al menos de segundo orden.

Si se considera ahora una EDR de primer orden como la planteada originalmente, pero ahora con los parámetros:

$$a = 0,\ b = -1{,}3,\ c = 1,\ \tau = 1$$

y la función historia $\varphi(t) = 1$ en $[-1;0]$ entonces la EDR (12)

$$x'(t) = ax(t) + b\,x(t-\tau)\ \forall t > -\tau,\ \text{con } x(t) = \varphi(t)\ \forall t \in [-\tau;0]$$

resulta:

$$x'(t) = -1{,}3\ x(t-1)\ \forall t > -1,\ \text{con } x(t) = 1\ \forall t \in [-1;0] \tag{26}$$

Para el caso particular en que $a = 0$, si se aplica el método de pasos explicado anteriormente de manera recursiva, se obtiene la siguiente expresión:

$$x(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{b^k (t-(k-1)\,\tau)^k}{k!} \quad \forall t \in [n\,\tau;(n+1)\tau] \tag{27}$$

entonces, para el caso particular planteado es:

$$x(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1{,}3)^k (t-k+1)^k}{k!} \quad \forall t \in [n;n+1] \tag{28}$$

Por otra parte, según se mostró previamente, la ecuación característica asociada a la EDR es:

$$r = a + be^{-\tau.r}$$

y aplicado a este caso particular, resulta:

$$r = -1{,}3e^{-r} \tag{29}$$

En el gráfico siguiente se pueden ver los lugares geométricos de los puntos que verifican la igualdad de las partes real e imaginaria correspondientes a la ecuación anterior:

```
with(plots):

implicitplot({alpha=a+b*exp(-alpha*tau)*cos(beta*tau),beta=-b*exp(-a
lpha*tau)*sin(beta*tau)},alpha=-5..2,
beta=-26..26,numpoints=8000,axes=frame);
```

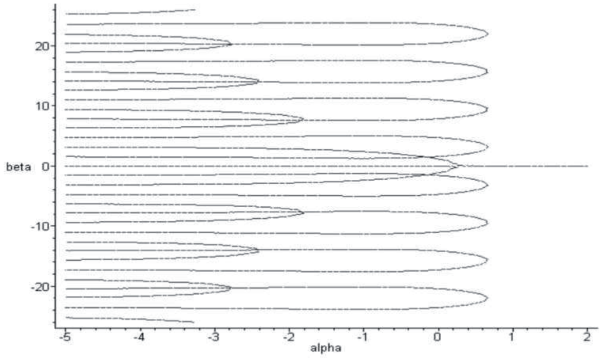


Figura 15. Lugar geométrico en el campo complejo, para los puntos que verifican cada una de las dos ecuaciones trascendentes. Fuente: elaboración propia.

Mediante el uso de un solver, se pueden encontrar algunos de los valores que verfican el sistema de ecuaciones trascendentes, para obtener de este modo, un subconjunto de autovalores de la ecuación característica.

También se construye, a partir del método de pasos, la expresión y el gráfico para la respuesta temporal $x(t)$.

```
for delta from 0 by 1 to 9 do
solucion:=fsolve({alpha=a+b*exp(-alpha*tau)*cos(beta*tau),beta=-b*ex
p(-alpha*tau)*sin(beta*tau)},{alpha,beta},{beta=0+delta*2*Pi..(delta
+1)*2*Pi}); resultado[delta]:=solucion; end do;
```

$$solucion := \{\beta = 1.480475016, \alpha = -.1340832564\}$$
$$resultado_0 := \{\beta = 1.480475016, \alpha = -.1340832564\}$$
$$solucion := \{\beta = 7.622616807, \alpha = -1.795762551\}$$
$$resultado_1 := \{\beta = 7.622616807, \alpha = -1.795762551\}$$
$$solucion := \{\beta = 13.96778327, \alpha = -2.388803758\}$$
$$resultado_2 := \{\beta = 13.96778327, \alpha = -2.388803758\}$$
$$solucion := \{\alpha = -2.756681015, \beta = 20.28528405\}$$
$$resultado_3 := \{\alpha = -2.756681015, \beta = 20.28528405\}$$
$$solucion := \{\alpha = -3.024609196, \beta = 26.59027567\}$$
$$resultado_4 := \{\alpha = -3.024609196, \beta = 26.59027567\}$$
$$solucion := \{\beta = 32.88865863, \alpha = -3.235579635\}$$
$$resultado_5 := \{\beta = 32.88865863, \alpha = -3.235579635\}$$
$$solucion := \{\beta = 39.18310837, \alpha = -3.409653323\}$$
$$resultado_6 := \{\beta = 39.18310837, \alpha = -3.409653323\}$$
$$solucion := \{\alpha = -3.557850013, \beta = 45.47501506\}$$
$$resultado_7 := \{\alpha = -3.557850013, \beta = 45.47501506\}$$
$$solucion := \{\alpha = -3.686883336, \beta = 51.76517562\}$$
$$resultado_8 := \{\alpha = -3.686883336, \beta = 51.76517562\}$$
$$solucion := \{\alpha = -3.801149722, \beta = 58.05408141\}$$
$$resultado_9 := \{\alpha = -3.801149722, \beta = 58.05408141\}$$

Figura 16. Subconjunto de soluciones del sistema de ecuaciones trascendentes.
Fuente: elaboración propia.

```
for delta from 0 by 1 to 9 do z[delta]:=alffa[delta]+I*betta[delta]
end do;
```

$$z_0 := -.1340832564 + 1.480475016\, I$$
$$z_1 := -1.795762551 + 7.622616807\, I$$
$$z_2 := -2.388803758 + 13.96778327\, I$$
$$z_3 := -2.756681015 + 20.28528405\, I$$
$$z_4 := -3.024609196 + 26.59027567\, I$$
$$z_5 := -3.235579635 + 32.88865863\, I$$
$$z_6 := -3.409653323 + 39.18310837\, I$$
$$z_7 := -3.557850013 + 45.47501506\, I$$
$$z_8 := -3.686883336 + 51.76517562\, I$$
$$z_9 := -3.801149722 + 58.05408141\, I$$

Figura 17. Soluciones complejas z_n. Fuente: elaboración propia.

```
x_pasos:=(t)->sum(b^k*(t-(k-1)*tau)^k/k!,k=0..n);
```

$$x\_pasos := t \rightarrow \sum_{k=0}^{n} \frac{b^k \left(t-(k-1)\,\tau\right)^k}{k!}$$

```
x_pasos(t);
```

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1.300000000)^k \left(t-1.\,k+1.\right)^k}{k!}$$

```
f:=(t)->piecewise(t<0,c,t>=0,subs(n=trunc(t/tau)+1,x_pasos(t)));
```

$$f := t \rightarrow \text{piecewise}\left(t<0,\, c,\, 0 \leq t,\, \text{subs}\left(n=\text{trunc}\left(\frac{t}{\tau}\right)+1,\, \text{x\_pasos}(t)\right)\right)$$

Figura 18. Expresión de la solución de la EDR, mediante el método de pasos.
Fuente: elaboración propia.

```
plot({f(t)},t=-1..30);
```

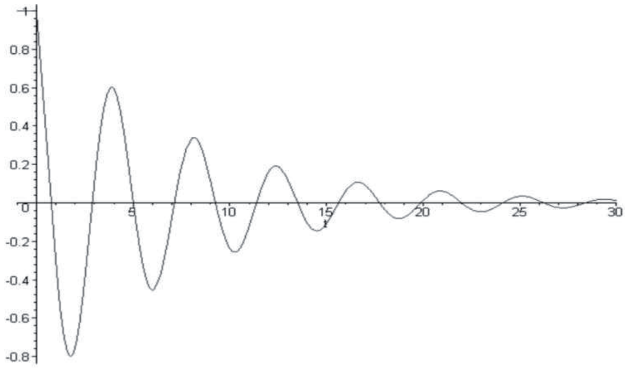


Gráfico 6. Respuesta temporal $x(t)$. Fuente: elaboración propia.

Según se observa en el gráfico, aun cuando se trata de un sistema de primer orden, la respuesta temporal es de carácter oscilatorio.

6. RESULTADOS Y CONCLUSIONES

Los modelos descriptos mediante ecuaciones diferenciales con retardo, aun cuando no sean de orden superior, conducen a una considerable complejidad matemática, pero por otra parte, resultan muy interesantes, porque dan la posibilidad de incorporar un elemento que verdaderamente existe en el contexto real, y es la existencia de demoras en la transmisión de la información. A su vez, tal como se pudo observar en el apartado anterior, aún en sistemas de primer orden, es posible tener comportamientos oscilatorios, lo cual, en sistemas descriptos por ecuaciones diferenciales de primer orden, no es factible. Las ecuaciones diferenciales con retardo tienen asociado un espacio solución de autofunciones de dimensión infinita, y por lo tanto requieren, como condición de borde o inicial, no sólo la información de la función y sus derivadas en puntos específicos, sino que precisan de lo que se denomina función historia, es decir el comportamiento previo, sobre todo un intervalo continuo denso.

Se abordó el problema mediante el desarrollo basado en autofunciones para aproximar a la solución, y esto es posible siempre que el sistema converja, pues de ese modo es razonable asumir que el error al truncar la serie de autofunciones (por tratarse de exponenciales negativas) estará acotado.

La intención del trabajo fue llevar a cabo una introducción de las EDR, mostrando su existencia y explicando su utilidad, como una mejor modelización a ciertos problemas reales, señalando además las similitudes y diferencias de estas con respecto a las EDO. Se mostraron dos casos concretos y bien simples, para ejemplificar dos comportamientos bien diferenciados: uno de respuesta amortiguada sin oscilaciones, y el otro con una respuesta temporal oscilatoria. También se mostraron algunas estrategias para abordar la resolución de este tipo de ecuaciones diferenciales con retardo.

7. REFERENCIAS

Amster, P. (2017). *Ecuaciones diferenciales con retardo*. Cursos y seminarios de matemática Serie B.

Bel, A. L. (2014). *Soluciones oscilatorias en ecuaciones diferenciales con retardo*.

Bellman, R. and Cooke, K. (1963). *Differential-Difference Equations*. Academic Press, New York & London.

Churchill, R. (2010). *Variable compleja y aplicaciones*. 5ta. ed. Madrid: MacGraw-Hill.

F. Murray and K. Miller (2007). *Existence Theorems for Ordinary Differential Equations*, 1ra. ed., New York.

Fridman, E, (2014). *Introduction to Time-Delay Systems: Analysis and Control*. 2014th ed. Birkh¨auser.

González, A. G. E., Almeida, G. G., & Vales, E. A. (2010). "Estabilidad local de ecuaciones diferenciales ordinarias con retardo y aplicaciones". *Miscelánea Matemática, Sociedad Matemática Mexicana*, 51, 73-92.

Liz Marzán, E. (2006). *Sobre ecuaciones diferenciales con retraso, dinámica de poblaciones y números primos*

Smith H. (2011). "An Introduction to Delay Differential Equations with Applications to the Life Sciences". *Texts in Applied Mathematics*, vol 57. Springer, New York.

Valdés, J. E. N., & Segura, C. N. (2002). "La historia de las ecuaciones diferenciales ordinarias contadas por sus libros de texto". *Xixím: Revista electrónica de didáctica de las matemáticas*, (2), 1.