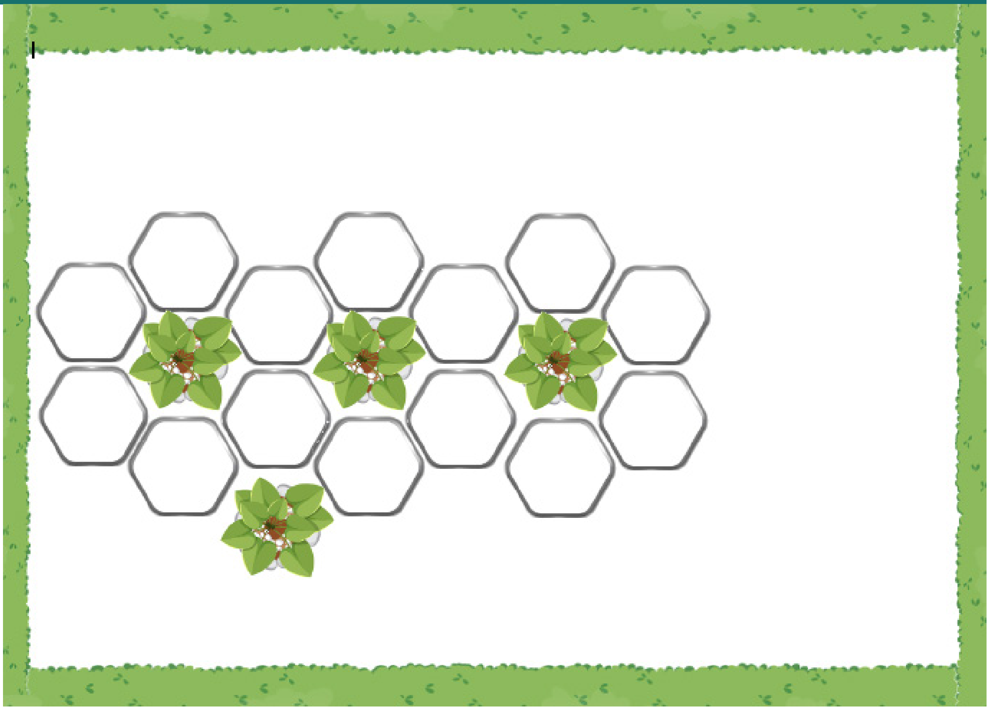
111

2022



epsilon

Revista de Educación Matemática

Editada por la S.A.E.M. "THALES"

epsilon 111

Revista de Educación Matemática

Página de la revista: http://thales.cica.es/epsilon
Revista: epsilon@thales.cica.es

Sociedad Andaluza de Educación Matemática "Thales"

Edita
Sociedad Andaluza de
Educación Matemática "Thales"
Centro Documentación "Thales"
Universidad de Cádiz
C.A.S.E.M.
Facultad de Ciencias
Departamento de Matemáticas
Campus del Río San Pedro
Torre Central, 4ª planta
11510 Puerto Real (Cádiz)
Teléfono: 956012833
Email: thales.matematicas@uca.es

Maquetación
referencias.maquetacion@gmail.com

Depósito Legal
SE-421-1984

ISSN
2340-714X

Período
2022

Suscripción
Anual

SUMARIO / CONTENTS

Épsilon - *Revista de Educación Matemática* *2022, nº 111, 7-28*

Errores del alumnado de Educación Secundaria al manejar y resolver sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas

Laura Muñiz-Rodríguez
Universidad de Oviedo. Asturias, España.
0000-0001-7487-5588
Luis J. Rodríguez-Muñiz
Universidad de Oviedo. Asturias, España.
0000-0001-8702-8361
Alba Abella Rodríguez
Colegio La Inmaculada. Ponferrada, León. España.

Resumen: *Se analizan los errores del alumnado de segundo curso de Educación Secundaria Obligatoria (13-14 años) al manejar y resolver sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas y se indaga sobre sus posibles causas. Se identifican tres tipos de errores: los motivados por una incorrecta utilización del lenguaje verbal y matemático, los de tipo técnico, y los derivados de aplicaciones incorrectas de definiciones, propiedades y teoremas. Algunos errores son similares a los identificados para ecuaciones, pero se detectan dos nuevos tipos de error característicos de los sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas: la incorrecta comprensión del concepto de solución de un sistema de ecuaciones (tanto gráfica como algebraicamente) y la imposibilidad de identificar el significado aritmético del método de resolución por reducción. Finalmente, se aportan sugerencias para el trabajo de aula para intentar minimizar los errores más frecuentes.*

Palabras clave: *álgebra; ecuaciones; educación matemática; educación secundaria; sistemas de ecuaciones lineales.*

Secondary education students' errors while handling and solving systems of two lineal equations with two unknowns

Abstract: *Second-year secondary education (13-14 years old) students' errors while handling and solving systems of two linear equations with two unknowns are analyzed and their possible causes are discussed. Three types of errors are identified: those derived from an incorrect use of both mathematical and verbal language, technical errors, and those derived from incorrect applications of definitions, properties, and theorems. Some of them are similar to those identified for linear equations, but two new types of mistakes are detected, that are typical from systems of two linear equations with two unknowns: the incorrect interpretation of the concept of solution of a system (both graphic and algebraic), and the impossibility of identifying the arithmetic meaning of the solving method by reduction. Finally, suggestions for classroom practice are provided, oriented to minimize the presence of the most frequent errors.*
Keywords: *algebra; equations; mathematics education; secondary education; systems of linear equations.*

1. INTRODUCCIÓN

El análisis de errores es una línea clásica en la investigación en educación matemática. Clasificarlos y comprender sus causas es el primer paso hacia el diseño de intervenciones didácticas (García Suárez, 2018; Götte y Mantica, 2021). Aunque existe literatura sobre los errores en el manejo de ecuaciones de primer grado, son menos numerosos los estudios publicados sobre los sistemas de ecuaciones lineales en Secundaria. En este trabajo se plantea un estudio exploratorio que ahonda en el conocimiento sobre los errores cometidos por estudiantes de Secundaria en el manejo y resolución de sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas, identificando nuevas asociaciones de errores.

El trabajo consta de una primera sección en la que se analiza el estado del arte sobre el concepto de error en educación matemática y se exponen distintas clasificaciones de errores célebres en la literatura. Posteriormente, se explica el diseño metodológico, se describe la muestra y se recogen los resultados. Finalmente, se relacionan los resultados con investigaciones previas y se elevan unas conclusiones vinculadas a la práctica docente.

2. MARCO CONCEPTUAL

2.1 Concepto de error y sus causas

En matemáticas un error es una expresión incompleta o deficiente de conocimiento, resultado de concepciones inadecuadas, la aplicación correcta de un procedimiento imperfecto, o la aplicación incorrecta de un procedimiento adecuado (Kilpatrick et al., 1998). Socas (1997) señala que hasta el alumnado con una actitud aparentemente satisfactoria en matemáticas podría ocultar errores conceptuales, incluso graves, que dificultarían su aprendizaje y que el error va más allá de la falta de conocimiento o la distracción, y puede ser entendido como "la presencia en el alumno de un esquema cognitivo inadecuado" (Socas, 1997, p. 124).

Rico (1992) sostiene que el estudio de los errores en matemáticas se remonta a Weiner en 1922, e identifica tres núcleos de interés: el análisis de los errores en la resolución de problemas como un método para estudiar el pensamiento matemático en términos del procesamiento de la información, el estudio de los patrones de error como un recurso de apoyo en la tarea del profesorado, y la enseñanza correctiva mediante métodos de diagnóstico y propuestas alternativas de trabajo para los estudiantes.

2.2. Clasificación de los errores

Entre las clasificaciones más habitualmente utilizadas se encuentra la de Radatz (1979), quien establece cinco categorías, basándose en las teorías sobre el procesamiento de la información, siendo una de ellas la que atribuye el error a un aprendizaje deficiente de requisitos, habilidades, hechos o conceptos previos. A pesar de la gran importancia de esta clasificación, se ha señalado (González-García et al., 2018; Rodríguez-Muñiz y Candás, 2017) que confiere mucho peso a los errores por aprendizaje deficiente previo, lo que puede llegar a distorsionar el estudio del tema en cuestión. Que la mayoría de los errores se agrupen en esta categoría del modelo de Radatz o bien pone la lupa sobre la propia clasificación utilizada o bien revela una situación que conlleva cuestionar seriamente tanto el contenido como la estructura del currículo impartido (González-García et al., 2018).

La clasificación propuesta por Movshovitz-Hadar et al. (1987) distingue seis categorías:

- Categoría 1: Datos mal utilizados. Discrepancia entre los datos proporcionados y la utilización que el alumnado hace de ellos.
- Categoría 2: Lenguaje malinterpretado. Traducción incorrecta de hechos matemáticos al cambiar de lenguaje.
- Categoría 3: Inferencias inválidas. Están vinculados a un uso incorrecto del razonamiento lógico.
- Categoría 4: Teoremas o definiciones deformados o aplicados incorrectamente.
- Categoría 5: Solución no verificada, incluso cuando los pasos seguidos sean correctos.
- Categoría 6: Errores técnicos: de cálculo, al seleccionar datos de una tabla, de manipulación algebraica, errores cometidos al ejecutar algoritmos conocidos, etc.

2.3. Estudios previos

Debido a la íntima relación entre ambos contenidos del currículo, se mencionan brevemente en primer lugar algunos trabajos en el ámbito de las ecuaciones de primer grado y, posteriormente, se hace un repaso por la literatura dedicada a los sistemas de ecuaciones. Esta última está menos presente en revistas científicas así que, por su relevancia para la presente investigación, también incluiremos trabajos académicos no publicados y congresos nacionales e internacionales.

Aunque no se pretenda realizar un catálogo exhaustivo, es ineludible citar la obra de Kieran (1989, 1996) por la identificación de los ámbitos de potencial dificultad del álgebra, en general, y de las ecuaciones, en particular. En Kieran (2006) encontramos una detallada revisión del estado del arte, hasta aquel momento. En Egodawatte (2011) se propone una clasificación de los errores en cuatro categorías conceptuales: los relativos a la comprensión de las variables, en el manejo de las expresiones algebraicas, a la hora de resolver ecuaciones, y en la resolución de problemas verbales. También en Castro (2012) se realiza un compendio de las dificultades del alumnado de Secundaria con el álgebra, identificando los problemas derivados de la transición de la aritmética al álgebra y del álgebra como lenguaje. Gran parte de la literatura clásica señala que una de las principales dificultades radica en los cambios de representación y, específicamente, en la traducción del lenguaje verbal al algebraico (Wagner y Parker, 1999).

Por las repercusiones para esta investigación, mencionaremos más detenidamente dos trabajos recientes. Molina et al. (2017) analizan dos grupos de estudiantes de segundo y cuarto curso de Secundaria, observando los errores que más persisten mediante un instrumento de dominó algebraico, fuera del contexto de la resolución de problemas. Clasifican los errores en tres categorías: la relacionada con la completitud de la expresión (expresiones incompletas o con información redundante), la procedente de la aritmética (confusiones entre división y producto, potencia y producto, suma y producto y división y potencia), y la procedente de las características simbólicas del álgebra (errores de generalización, de particularización, de uso de las letras y de complicación estructural). Concretamente, Molina et al. (2017) señalan las dificultades en la traducción del lenguaje verbal al algebraico y los problemas derivados de la imprecisión en la definición de la variable.

Pérez et al. (2019) analizan los errores en la resolución de ecuaciones lineales con una incógnita en un estudio con una muestra de alumnado de Secundaria. El estudio refleja que los errores cometidos están relacionados con operaciones aritméticas y errores algebraicos propios de las ecuaciones. Además, Pérez et al. (2019) subrayan la importancia de no restringir el estudio de errores a su clasificación, sino ahondar en la detección de su origen o causa para poder proporcionar estrategias de intervención al profesorado.

Entre los estudios más significativos que han analizado los errores cometidos por el alumnado de Secundaria en los sistemas de ecuaciones lineales cabe citar los trabajos de Filloy et al. (2003, 2010). Estos autores, que habían identificado un "corte didáctico" entre la aritmética y el álgebra cuando la variable x está a ambos lados de la desigualdad y deja de ser fácilmente identificable con un número, identifican en el caso de sistemas de ecuaciones un segundo "corte", surgido cuando se opera con una variable en términos de otra, como sucede en los métodos de igualación y sustitución.

Panizza et al. (1999) entrevistaron a seis estudiantes respecto al manejo de sistemas de ecuaciones. Determinaron que los estudiantes estaban muy influidos por la idea de solución única, lo que les impedía apreciar el sistema de ecuaciones como posible definidor de un conjunto infinito de soluciones.

En la investigación sobre los errores en sistemas de ecuaciones lineales hay una gran influencia de la teoría de registros de representación semiótica (Duval, 1999). El trabajo de Segura (2004) al analizar los errores que cometen estudiantes argentinos al resolver sistemas de ecuaciones lineales, indica que muchos surgen al cambiar de registro, entre el verbal y el algebraico, y también al pasar a la representación gráfica. También Oktaç y Trigueros (2010) señalan las dificultades para identificar gráficamente el concepto de solución de un sistema.

Ramírez et al. (2005) recomiendan discutir sistemas con infinitas soluciones, tanto gráfica como algebraicamente, mientras que Arellano y Oktaç (2009) subrayan la importancia de trabajar el cambio de representación no sólo de lo algebraico a lo gráfico, sino también de lo gráfico a lo algebraico. Bozzalla y García (2014), estudiando alumnado argentino de enseñanza media, insisten en esta falta de conexión entre las ideas de recta y su representación gráfica y la idea algebraica de sistema de ecuaciones lineales. La necesidad de trabajar con diferentes registros la subrayan también Campos y Parráguez (2019) tras analizar los errores cometidos por una muestra de estudiantes chilenos de Secundaria. También se encuentran propuestas de secuencias didácticas basadas en el uso de software de geometría dinámica para reforzar la conexión entre representaciones (Pérez y Vargas, 2019). Este tipo de estudios vinculando los softwares de representación gráfica y las expresiones algebraicas ya se iniciaron tiempo atrás (v.g., Engler et al., 2001).

Hariati y Septiadi (2019) estudiaron a seis estudiantes con respecto a su manejo de sistemas de ecuaciones lineales con tres incógnitas, y clasificaron los errores en varias categorías: comprensión del problema, transformación algebraica, procesado o manipulación, y escritura de la solución, observando diferencias según el nivel cognitivo del alumnado. Rodríguez Jara et al. (2019) realizan una construcción del conjunto de soluciones de un sistema lineal bajo el marco teórico APOE, señalando dificultades para conectar la geometría y el álgebra. Por su parte, Widada et al. (2020) proponen una aproximación en la etnomatemática para reducir los obstáculos al construir el sistema.

Aunque es más abundante la literatura sobre sistemas de ecuaciones lineales en el nivel universitario, no se ha considerado aquí porque a ese nivel se manejan los sistemas de ecuaciones desde el cálculo matricial lo que añade un elemento adicional de complejidad que no concurre en la etapa aquí analizada.

3. MÉTODO

3.1 Población y muestra

La población la constituye el conjunto de estudiantes de segundo de Educación Secundaria Obligatoria (ESO). La muestra consta de 20 alumnos de ese nivel educativo en un centro urbano de la ciudad de Oviedo (España), seleccionada mediante un muestreo por conveniencia, al ser el grupo al que se tuvo acceso.

Académicamente, el alumnado participante no tenía buenos resultados, la mayoría había suspendido matemáticas en la primera evaluación y dos personas repetían curso. Aunque era un grupo inquieto que se distraía con facilidad, se mostró receptivo y colaborador con la actividad. El método empleado era el de instrucción directa, con una aproximación deductiva, partiendo de definiciones, procedimientos y, posteriormente, ejercitando la práctica de resolución.

3.2. Instrumento

El instrumento fue diseñado por el equipo investigador, tras lo cual su contenido fue validado con la docente del grupo donde se iba a aplicar. Se trata de un cuadernillo que consta de seis problemas (Anexo I). Para su diseño se tuvieron en cuenta distintos referentes y criterios que describimos a continuación. En primer lugar, tras un análisis de todos los contenidos de la unidad didáctica se decidió centrarse en el método de reducción para resolver los sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas (también denominado suma-resta), así como en el método gráfico, por su capacidad de conexión con otros ámbitos de las matemáticas y porque, tras las observaciones iniciales realizadas en el aula, parecían ser los métodos en los que el alumnado presentaba más dificultades. Además, la literatura analizada también señalaba mayores dificultades en los cambios de representación y en las conexiones, por lo que el instrumento así definido nos permitió indagar precisamente sobre estos aspectos.

Para elaborar los problemas se consideraron los niveles de demanda cognitiva definidos por Krathwohl (cit. por Blanco et al., 2015). Los problemas incluidos son de rango cognitivo medio y alto según la clasificación de Krathwohl: los de rango cognitivo medio requieren establecer relaciones entre los conceptos y los datos, y los de rango cognitivo alto requieren el uso integrado de distintos conceptos interrelacionados. Se redujo al mínimo imprescindible el número de tareas que fueran exclusivamente de bajo rango cognitivo, ya que se consideraban suficientemente cubiertas con el trabajo realizado en el aula. Estos niveles son prácticamente coincidentes con los denominados "emplear" e "interpretar" del marco de las pruebas PISA (Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económicos [OCDE], 2017).

Por otro lado, siguiendo los referentes para la elaboración de problemas de Blanco et al. (2015) se han buscado diferentes formas de presentación: fotografías, tablas, gráficos y texto escrito, de manera que se requiera utilizar diferentes representaciones y cambiar de unas a otras.

El primer problema está basado en los problemas de balanzas mencionados en Blanco et al. (2015) para plantear una situación realista y que suponga un reto para el alumnado. Para minimizar el abandono, se pautó la resolución en cuatro apartados: primero identificar las variables, luego las ecuaciones, después construir el sistema y, por último, comprobar si unos valores dados podían ser soluciones del sistema. El segundo problema está encaminado a la búsqueda de patrones como proceso previo para la generalización (National Council of Teachers of Mathematics [NCTM], 2000; Schoenfeld, 1992) para comprender el mecanismo de resolución por reducción, en el que se insiste en el tercer ítem. El cuarto es un problema de identificación del sistema con la solución gráfica proporcionada, de este modo, se trabajan los cambios de representación del lenguaje gráfico al algebraico, pasando por el tabular, y pidiendo al alumnado una argumentación, para fomentar el proceso de comunicación (NCTM, 2000). En el problema quinto, se trabaja el cambio inverso: del lenguaje algebraico al gráfico. En el sexto problema se debe realizar un cambio de representación del lenguaje algebraico al verbal.

3.3. Recogida y análisis de datos

Se aplicó el instrumento a los 20 estudiantes durante la última sesión de la unidad didáctica referida a los sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas, que ocupó un total de 19 horas. La docente del grupo había utilizado una metodología mayoritariamente deductiva y expositiva, siguiendo un esquema tradicional de presentación de las nociones matemáticas que intervienen, introducción de ejemplos y planteamiento de ejercicios y problemas.

De manera exploratoria, es decir, sin hipótesis previamente establecidas respecto a los posibles resultados, se analizaron los errores en las producciones del alumnado con el objetivo de categorizarlos según la clasificación de Movshovitz-Hadar et al. (1987). Se seleccionó esta clasificación por tratarse, junto con Radatz (1979), de una de las clasificaciones generalistas más citadas. La clasificación de Radatz (1979) se descartó dado que en estudios previos (González-García et al., 2018) se observó que la categoría de errores debidos a un dominio deficiente de requisitos, habilidades, hechos o conceptos puede adquirir un peso muy grande, ya que muchos errores se pueden relacionar con un aprendizaje deficiente de conceptos previos. Si esto ocurre, se tiene poca información sobre las dificultades de la tarea en consideración, lo que dificulta una mejora en la práctica docente que permita mitigar esas dificultades. En la discusión se comparan los resultados obtenidos con otras clasificaciones de errores que, sin ajustarse al estudio realizado, son más específicas del campo del álgebra. Una vez realizada la categorización (objetivo principal del estudio), se indagó sobre las posibles causas, siguiendo a Socas (1997).

4. RESULTADOS

Tras el análisis de las respuestas del alumnado, se realiza un primer filtrado de resultados, observando en qué problemas se concentran más errores (Tabla 1). Se considera parcialmente correcto aquel problema en el que el estudiante llega a una solución válida, aunque por un método diferente al que se le pedía (ya que el método era uno de los objetos del análisis). Como se observa en la Tabla 1, casi todos los problemas, salvo el segundo, acumulan un importante número de errores, o directamente no fueron realizados. Conviene destacar el elevado número de producciones parcialmente correctas encontradas en el problema 1, fruto de haber resuelto el sistema de ecuaciones para encontrar la solución, sin comprobar su validez (Figura 1).

Tabla 1. Número de respuestas correctas, parcialmente correctas, incorrectas o en blanco en cada problema

	Problema					
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
Correcto	4	15	2	3	8	9
Parcialmente correcto	7	0	0	0	0	0
Incorrecto	9	5	16	15	12	5
En blanco	0	0	2	2	0	6

Utilizando solo las producciones incorrectas, la Tabla 2 resume la clasificación de los errores según el esquema de Movshovitz-Hadar et al. (1987). Téngase en cuenta que hay soluciones incorrectas que acumulan más de un tipo de error, de ahí que los totales de la Tabla 2 no siempre coincidan con el número de ejercicios incorrectos de la Tabla 1.

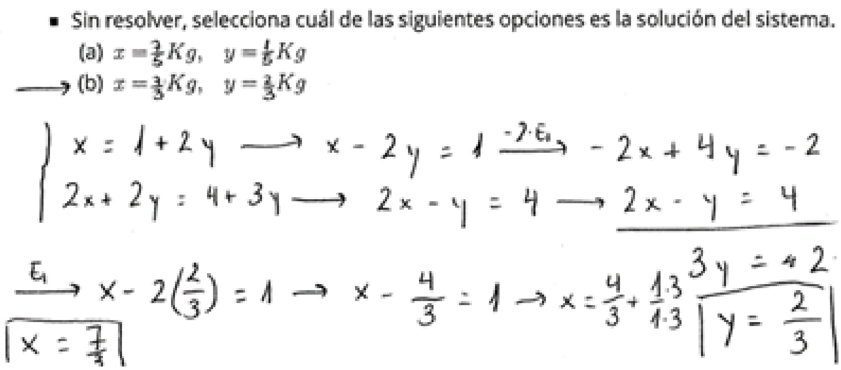


Figura 1. Ejemplo de producción del alumnado en el problema 1 con una resolución parcialmente correcta

Como se aprecia en la Tabla 2, los errores se concentran en tres de las categorías, siendo los más frecuentes los de lenguaje malinterpretado (que superan el 50 %), seguidos de errores técnicos (un tercio del total) y, finalmente, de teoremas o definiciones deformados.

Tabla 2. Número de errores encontrados en cada categoría, porcentaje de errores por problemas y total

	Problema						
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**Total**
Datos mal utilizados	- 0 %	- 0 %	- 0 %	- 0 %	- 0 %	- 0 %	0 0 %
Lenguaje malinterpretado	6 66.7 %	- 0 %	- 0 %	15 100 %	9 75 %	5 100 %	35 53.03 %
Inferencias no válidas	- 0 %	- 0 %	- 0 %	- 0 %	- 0 %	- 0 %	0 0 %
Teoremas o definiciones deformados	- 0 %	- 0 %	9 45 %	- 0 %	- 0 %	- 0 %	9 13.64 %
Solución no verificada	- 0 %	- 0 %	- 0 %	- 0 %	- 0 %	- 0 %	0 0 %
Errores técnicos	3 33.3 %	5 100 %	11 55 %	- 0 %	3 25 %	- 0%	22 33.33 %
Total	9	5	20	15	12	5	66

A continuación, se analizan ejemplos de producciones para cada problema.

4.3.1. Problema 1

Dos terceras partes de los errores en este problema se debieron al lenguaje malinterpretado, siendo el otro tercio de tipo técnico. La Figura 2 muestra un caso de mala interpretación de lenguaje, al hacer una traducción incorrecta del lenguaje pictórico al lenguaje algebraico.

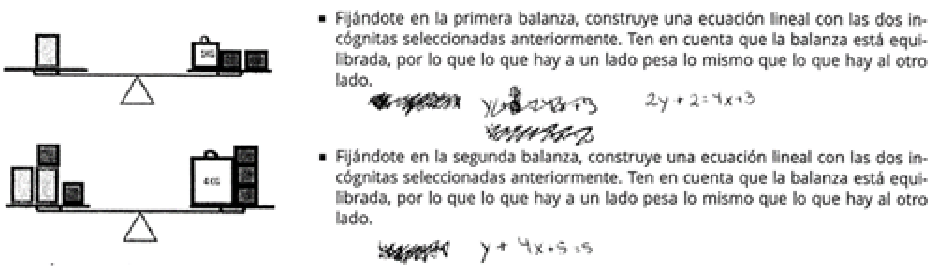


Figura 2. Ejemplo de una producción del alumnado en el problema 1 con un error de lenguaje mal interpretado

4.3.2. Problema 2

Este problema fue resuelto de manera correcta por la mayoría del alumnado, encontrándose solo cinco errores de tipo técnico. La Figura 3 muestra un ejemplo de error de este tipo. El estudiante no aplica correctamente el principio de equivalencia, pues al multiplicar por –2 la primera ecuación del sistema multiplica mal el segundo término, que pasa de –4 a 4. También conviene señalar que el segundo ítem pretendía que el alumnado buscara un patrón en la determinación de los coeficientes de la reducción, ligándolos al mínimo común múltiplo, sin embargo, nadie lo vinculó, y para realizar la reducción, los coeficientes de ambas ecuaciones se multiplican de modo cruzado, sin tener en cuenta si sería posible hacerlo con cantidades menores.

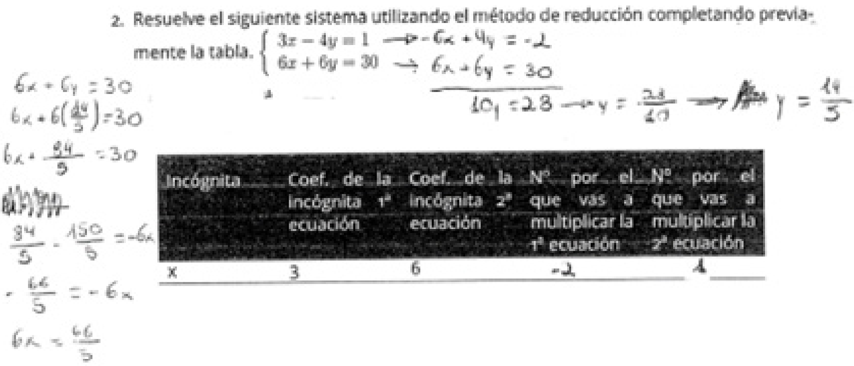


Figura 3. Ejemplo de una producción del alumnado en el problema 2 con un error técnico

4.3.3. Problema 3

Fue el problema que más errores generó. Algo más de la mitad de los errores se clasifican como técnicos, ya que suelen darse por omisiones de signos en la identificación de los coeficientes. Posiblemente, que las variables aparecieran siempre en el mismo orden en los sistemas contribuyó a que no hubiera errores de identificación. El resto de los errores pertenecen a la categoría de teoremas o definiciones deformados. Estos últimos aparecen ligados a una deformación tanto de la definición de coeficiente (que se complica cuando es literal y no numérico) como del procedimiento de reducción. En la Figura 4, en el tercer sistema del problema 3, al ser los coeficientes b y –1, se comete un error tanto en la identificación del coeficiente (error técnico, ya que se omite el signo) como en la determinación del valor (“Ninguno”) por el que es preciso multiplicar la primera ecuación (error de teoremas o definiciones deformados). Esta asignación de “Ninguno” como error asumimos que es discutible, ya que podría entenderse como que hay que dejar la ecuación sin operar (multiplicar por 1) en cuyo caso no sería un error. No obstante, entendemos que, en el contexto de la tarea y en el nivel escolar que se trabaja, habría sido más apropiado usar 1 como coeficiente, ya que “ninguno” en matemáticas puede significar 0.

De manera general, aunque no es un error, se observó que la mayoría del alumnado intenta ajustar el sistema a partir de los coeficientes de la variable x, no considerando los de y.

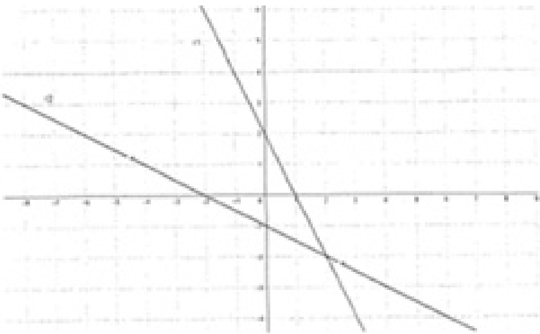
1) $\begin{cases} 3x + 7y = -1 \\ 5x - 13y = 29 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 4x - 11y = -17 \\ 7x - 9y = 5 \end{cases}$ 3) $\begin{cases} ax + by = 5 \\ x - 1y = 9 \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 2x + by = 0 \\ dx - 4y = 9 \end{cases}$ 5) $\begin{cases} ax + by = \\ dx + fy = \end{cases}$

Sistema	Incógnita	Coef. de la incógnita 1ª ecuación	Coef. de la incógnita 2ª ecuación	Nº por el que vas a multiplicar la 1ª ecuación	Nº por el que vas a multiplicar la 2ª ecuación
1)	x	3	5	-5	3
2)	x	4	7	-7	4
3)	y	b	1	N. ninguno	-a
4)	x	2	d	-d	2
5)	y	b	f	-d	a

Figura 4. Ejemplo de una producción del alumnado en el problema 3 con un error técnico y otro de la categoría de teoremas o definiciones deformados

4.3.4. *Problema 4*

Todos los errores cometidos se debieron a una mala interpretación del lenguaje. Parte del alumnado no pasó correctamente de la representación gráfica a la algebraica, debido a que no pudo identificar los puntos. Otra parte no supo identificar el punto de corte entre las dos rectas como la solución del sistema. Un ejemplo del primer tipo de error se ilustra en la Figura 5, donde, entre otros errores, se identifican (–1, 2) y (–2, 4) como puntos de la primera recta, a pesar de que el dato que se proporciona es (–1, 4).



r1

x	y
–1	4
-1	2
-2	4
-1	3

r2

x	y
2	–2
-1	-2
-2	-3
-8	3

Figura 5. Ejemplo de una producción del alumnado en el problema 4 con un error de lenguaje mal interpretado

4.3.5. Problema 5

Se han encontrado errores de dos categorías diferentes: mala interpretación del lenguaje y errores técnicos. Los errores que forman parte de la primera categoría se deben fundamentalmente a una incorrecta asociación entre lo representado mediante lenguaje algebraico y la representación gráfica. Los errores técnicos son, mayoritariamente, de manipulación de objetos algebraicos, como el ejemplo que se ilustra en la Figura 6, donde a partir de la ecuación –2x=0 se deduce que x=2.

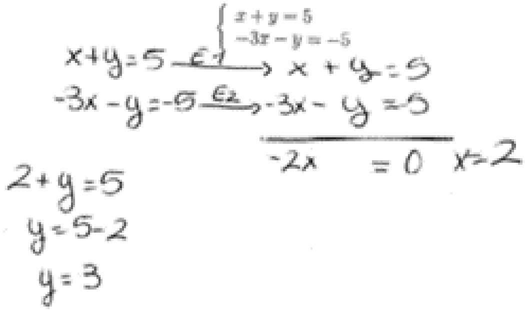


Figura 6. Ejemplo de una producción del alumnado en el problema 5 con un error técnico

4.3.6. Problema 6

Los errores encontrados corresponden a alumnado que no consiguió pasar del lenguaje algebraico al cotidiano, es decir, no se propuso un enunciado cuya traducción al lenguaje algebraico fuera precisamente el sistema dado. Vemos un ejemplo en la Figura 7, ya que el enunciado parte de valores numéricos concretos que harían innecesario el sistema.

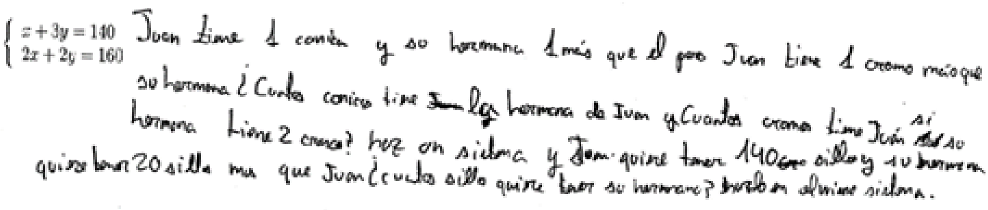


Figura 7. Ejemplo de una producción del alumnado en el problema 6 con un error de lenguaje malinterpretado

5. DISCUSIÓN

Los errores se distribuyen en tres de las categorías de la clasificación de Movshovitz-Hadar et al. (1987). La ausencia de otras categorías se puede explicar por diversos motivos. La categoría de solución no verificada agrupa aquellos errores que consisten en realizar un procedimiento que puede ser correcto pero que no proporciona una solución al problema y el estudiante no se percata por falta de comprobación de su resultado. A priori, era esperable que la categoría no tuviese una frecuencia relevante, ya que el alumnado de segundo de Secundaria aún no dispone de suficientes recursos matemáticos en el campo algebraico (Gasco-Txabarri, 2017), por lo tanto, es más habitual que no responda o que cometa algún error técnico. Además, el instrumento no estaba enfocado a analizar la capacidad de manejar distintos procedimientos, lo cual también reduce las posibilidades de aparición de este tipo de errores.

La ausencia de la categoría de datos mal utilizados podría obedecer a una advertencia realizada verbalmente, pidiendo que se detuvieran en la lectura comprensiva de los problemas. Además, el diseño del instrumento no incluye datos superfluos, lo cual reduce las posibilidades de equivocación en este sentido. También el diseño del instrumento creemos que explica la ausencia de errores en la categoría de inferencias no válidas: al separar cada problema en diferentes ítems se ha reducido notablemente la posibilidad de secuencias largas de razonamiento lógico. Estos aspectos serán retomados en las conclusiones.

Respecto a las causas de los errores observados, siguiendo a Socas (1997), parece que gran parte de los errores asociados a lenguaje malinterpretado y a teoremas y definiciones deformados tienen su origen en las dificultades asociadas a la complejidad de los objetos y a los procesos de pensamiento algebraico. La Figura 8 muestra un ejemplo de un error de lenguaje malinterpretado cuyo origen radica en una dificultad para manejar la complejidad del plano cartesiano en combinación con la expresión algebraica de una recta y con el propio significado de una recta, pues al valor x=4 no le pueden corresponder, al tiempo, los valores y=–1 e y=–4.

La complejidad de los procesos no siempre se manifiesta de esta forma. En la Figura 7 vemos lo que Molina et al. (2017) denominan "error de particularización", cuyo origen está vinculado, además de a esa complejidad, a los procesos de transición de lo aritmético a lo algebraico, entendido en este caso como lenguaje de generalización.

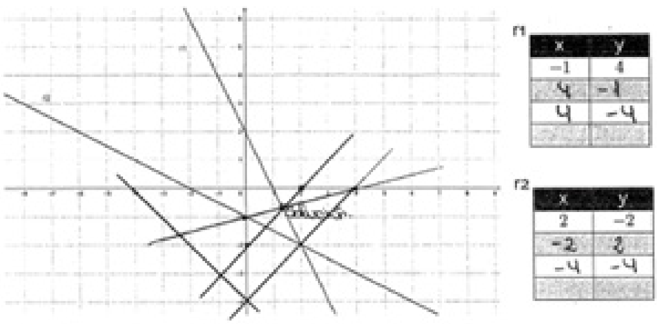


Figura 8. Ejemplo de error cuyo origen está relacionado con las dificultades asociadas a la complejidad de los objetos y a los procesos de pensamiento matemático

En cuanto a los errores técnicos, coincidimos con Pérez et al. (2019) en considerar sus causas mayoritariamente en el ámbito afectivo-emocional, según Socas (2007). El alumnado focaliza su atención en el algoritmo de resolución, descuidando operaciones algebraicas y aritméticas sencillas, que en otros casos demuestra que sabe hacer correctamente; por lo tanto, desvía la atención. La Figura 9 muestra un ejemplo de cómo el alumno o la alumna realiza correctamente todo el algoritmo hasta el paso final, en el cual descuida el signo.

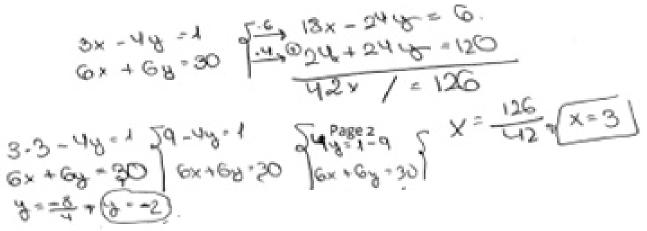


Figura 9. Ejemplo de error asociado al terreno afectivo-emocional

Más de la mitad (53 %) de los errores detectados se deben a errores de malinterpretación del lenguaje. Este tipo de errores son muy frecuentes en la literatura relativa tanto a ecuaciones de primer grado como a sistemas de ecuaciones (Castro, 2012; Segura, 2004). En este instrumento, además del manejo del lenguaje propiamente algebraico se manejan cambios del lenguaje pictórico al algebraico (en el caso del problema 1), del lenguaje gráfico y tabular al algebraico (problema 4), del algebraico al gráfico (problema 5) y del algebraico al verbal (problema 6). Se aprecia que el cambio del registro gráfico al algebraico acumula muchos de estos errores, lo cual es consistente con investigaciones previas: Bozzalla y García (2014) ya señalaban esa dificultad para identificar gráficamente la solución, como ocurre en el problema 4, que también requería el paso de la gráfica al lenguaje algebraico, algo señalado por Arellano y Oktaç (2009) como un obstáculo importante, poco ejercitado en Secundaria.

Son también abundantes los errores técnicos entre los cuales, según la clasificación de Movshovitz-Hadar et al. (1987), se incluyen los de manipulación algebraica. La Figura 10 recoge algunos de estos errores, detectados en la literatura previa, no sólo de sistemas de ecuaciones, sino de ecuaciones de primer grado en general (Molina et al., 2017; Pérez et al., 2019); son las llamadas “reglas del pasa”: “lo que está sumando, pasa restando”. El problema 3 es el que más errores de este tipo acumula, debidos mayoritariamente a la errónea identificación de coeficientes (especialmente, omitiendo signos).

Figura 10. Ejemplos de producciones de alumnado con errores técnicos en la manipulación algebraica

Una de las principales aportaciones de esta investigación es el concepto de solución. Uno de los ítems del problema 1 consistía en comprobar si un par de valores eran solución del sistema sin aplicar un método de resolución. Las respuestas a este ítem nos llevan a subrayar la necesidad de analizar detenidamente el concepto de solución de un sistema de ecuaciones y su significado algebraico. Además, en el problema 4 observamos esta misma dificultad, pero en relación con el significado gráfico del concepto de solución (Rodríguez Jara et al., 2019).

Otra aportación novedosa es la identificación de la desconexión del procedimiento de resolución mediante reducción con la aritmética de enteros, en concreto con la factorización y el mínimo común múltiplo (problema 2). Consideramos relevante reforzar esta conexión, pues advertirla reduce las cantidades involucradas en el proceso de resolución. No entendemos que se trate de una dificultad de origen aritmético, porque estas hacen referencia a la transición entre la aritmética y el álgebra como lenguaje de generalización de casos particulares. Más bien se trata de una falta de conexión entre bloques de contenido matemático que, a menudo, se estudian como compartimentos estancos, impidiendo que el alumnado advierta la relación entre un objeto aritmético y una posible aplicación en un método de resolución algebraico.

6. CONCLUSIONES

El trabajo realiza una descripción y una clasificación de los errores cometidos por un grupo de 20 estudiantes de segundo curso de Secundaria en España cuando resuelven problemas vinculados a sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas. El uso de la clasificación de Movshovitz-Hadar et al. (1987) permite reducir el peso de los errores debidos a aprendizajes previos insuficientes que resultan de la clasificación de Radatz (1979). Los resultados son consistentes con la literatura específica de ecuaciones lineales puesto que se describen errores ya advertidos en trabajos previos relacionados con el deficiente paso de unos registros de representación a otros (concretamente, algebraica, gráfica, tabular y verbal), dificultades para el manejo de ecuaciones y un uso incorrecto de la sintaxis algebraica. Además, el trabajo identifica dificultades propias de los sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas, en concreto, los problemas para identificar tanto algebraica como gráficamente el concepto de solución del sistema, la falta de conexión con el campo aritmético para aplicar el método de reducción, y una tendencia marcada a mecanizar el procedimiento, intentando ajustar el coeficiente de x.

Estos resultados llevan necesariamente a decisiones sobre la acción de aula. Una aproximación predominantemente algebraica dificultará la conexión entre distintos registros. Por lo tanto, es necesario reforzar los cambios de representación. Contando con software de geometría dinámica y hojas de cálculo, resulta fácil fomentar los cambios entre la representación algebraica, la tabular y la gráfica. GeoGebra se ha demostrado útil y didácticamente idóneo para mejorar el rendimiento académico del alumnado (Hohenwarter y Jones, 2007; Lasa, 2016; Pérez y Vargas, 2019; Soots y Shafer, 2018; Zengin y Tatar, 2017). Situaciones como la modelización de problemas de balanza, pueden abordarse manipulativamente (física y virtualmente), mediante ejemplos con ecuaciones de primer grado fácilmente exportables a sistemas de ecuaciones (García et al., 2016; Rojano, 2010).

Consideramos fundamental el entrenamiento del alumnado en el paso del lenguaje algebraico al verbal, específicamente en ese sentido, buscando una situación verbal que se acomode a un objeto algebraico dado. Si bien el cambio del lenguaje verbal al algebraico suele ser abordado al comienzo de la instrucción en álgebra, a menudo se reduce a la aplicación de reglas simplificadas de traducción que automatizan los procesos con grandes riesgos de error (Proulx et al., 2009), y se olvida que el razonamiento informal se ha probado eficiente al modelar sistemas de ecuaciones (Van Reeuwijk, 2001). La mecanización de la traducción algebraica de lo verbal facilita una comprensión limitada del cambio de representación y provoca que la traducción en el sentido contrario (del algebraico al verbal) se vea limitada. El cambio de representación de lo algebraico a lo verbal permite dar sentido al álgebra (Koedinger et al., 2008; Pecharromán Gómez et al., 2019) y fomenta la creación de problemas que tengan significado y se alejen de patrones muy presentes en libros de texto, que se limitan a representar operaciones, pero sin darles sentido (Cañadas et al., 2018).

Algunas limitaciones de este trabajo derivan de la muestra (no aleatoria y con un tamaño limitado). Aunque no haya intención de generalizar los resultados, esta limitación afectó al estudio de validación del instrumento, que solo pudo realizarse mediante validación de contenido por parte del equipo investigador y la profesora titular. La principal limitación se deriva del diseño del instrumento que, como se señaló en la clasificación de errores, impide dar representatividad a los errores que no se han detectado, y aumenta el peso interpretativo de los investigadores. El trabajo futuro pasa por diseñar, sobre esta base, un instrumento que permita observar otros tipos de errores dentro de la clasificación de Movshovitz-Hadar et al. (1987).

7. AGRADECIMIENTOS

Los autores agradecen la colaboración de la profesora Carmen Alonso y del alumnado.

8. REFERENCIAS

Arellano, F., y Oktaç, A. (2009). Algunas dificultades que presentan los estudiantes al asociar ecuaciones lineales con su representación gráfica. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, 22*, 357-365.

Blanco, L.J., Cárdenas, J.A., y Caballero, A. (2015). *La resolución de problemas de Matemáticas en la formación inicial de profesores de Primaria.* Universidad de Extremadura.

Bozzalla, A.E., y García, S.A. (2014). Análisis gráfico como puerta de entrada hacia el aprendizaje de sistemas de ecuaciones lineales de 2x2. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, 27*, 1031-1039.

Campos, S., y Parraguez, M. (2019). Entendendo sistemas de equaçoes lineares: um estudo de caso no contexto da escola no Chile. *Educaçao Matemática. Pesquisa, 21*(3), 347-368. https://doi.org/10.23925/1983-3156.2019vol21i3p347-368

Cañadas, M. C., Molina, M., y Del Río, A. (2018). Meanings given to algebraic symbolism in problem-posing. *Educational Studies in Mathematics, 98*(1), 19-37. https://doi.org/10.1007/s10649-017-9797-9

Castro, E. (2012). Dificultades en el aprendizaje del álgebra escolar. En A. Estepa, Á. Contreras, J. Deulofeu, M. C. Penalva, F. J. García, y L. Ordoñez (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVI* (pp. 75 - 94). SEIEM.

Duval, R. (1999). Representation, visual and visualization: Cognitive functions in mathematical thinking. Basic issues for learning. En F. Hitt, y M. Santos (Eds.), *Proceedings of the 21st annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematic Education* (Vol. 1, pp. 3-26). ERIC Clearinghouse for Science, Mathematics and Environmental Education.

Egodawatte, G. (2011). *Secondary school students' misconceptions in Algebra* (Tesis Doctoral no publicada). University of Toronto.

Engler, A., Vrancken, S., Müller, D., y Cadoche, L. (2001). Propuesta didáctica para estudiar sistemas de ecuaciones lineales. Sondeo de opiniones. *Educación Matemática, 13*(2), 127-139.

Filloy, E., Rojano, T., y Solares, A. (2003). Two meanings of the 'equal' sign and senses of and substitution methods. En N.A. Pateman, B. Dougherty, y J. Zilliox (Eds.), *Proceedings of the 27th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, vol. 4* (pp. 223-229). University of Hawaii.

Filloy, E., Rojano, T., y Solares, A. (2010). Problems Dealing with Unknown Quantities and Two Different Levels of Representing Unknowns. *Journal for Research in Mathematics Education, 41*(1), 52- 80. https://doi.org/10.5951/jresematheduc.41.1.0052

García Suárez, J. (2018). Determinación de fuentes de errores algebraicos a partir del empleo de técnicas de extrapolación algebraica. *Matemáticas, Educación y Sociedad, 1(*3), 1-14.

García, P.T., Díaz, J.L., y Vargas, J.R. (2016). El uso de manipulables para propiciar la comprensión del significado de ecuaciones lineales en la escuela secundaria. *EPISTEMUS, 10*(20), 55-61. https://doi.org/10.36790/epistemus.v10i20.23

Gasco-Txabarri, J. (2017). La resolución de problemas aritmético - algebraicos y las estrategias de aprendizaje en matemáticas. Un estudio en educación secundaria obligatoria (ESO). *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, RELIME, 20*(2), 167-192. https://doi.org/10.12802/relime.17.2022

González-García, A., Muñiz-Rodríguez, L., y Rodríguez-Muñiz, L. J. (2018). Un estudio exploratorio sobre los errores y las dificultades del alumnado de Bachillerato respecto al concepto de derivada. *Aula abierta*, *47*(4), 449-462. https://doi.org/10.17811/rifie.47.4.2018.449-462

Götte, M., y Mantica, A. M. (2021). Categorización de errores en geometría 3D en estudiantes de nivel superior. *Epsilon*, 108, 47-44.

Hariati, A., y Septiadi, D. D. (2019). Analysis of students' mistakes in solving system of linear equation in three variables: A case on HOTS problems. *International Journal on Teaching and Learning Mathematics, 2*(1), 29-38. https://doi.org/10.18860/ijtlm.v2i1.7616

Hohenwarter, M., y Jones, K. (2007). Ways of linking geometry and algebra, the case of Geogebra. *Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics, 27*(3), 126-131.

Kieran, C. (1989). *The early learning of algebra: A structural perspective*. Erlbaum.

Kieran, C. (1996). The changing face of school algebra. En C. Alsina, J.M. Álvarez, B. Hodgs Laborde, y A. Pérez (Eds.), *Eighth International Congress on Mathematical Education: Sel lectures* (pp. 271-290). SAEM Thales.

Kieran, C. (2006). Research on the learning and teaching of algebra. En A. Gutiérrez, y P. Boero (Eds.), *Handbook of research on the Psychology of Mathematics Education: Past, present and future* (pp. 11-49). Sens. https://doi.org/10.1163/9789087901127_003

Kilpatrick, J., Rico, L., y Gómez, P. (1998). *Educación matemática. Errores y dificultades. Resolución de problemas. Evaluación. Historia.* Universidad de Los Andes.

Koedinger, K.R., Alibali, M.W., y Nathan, M.J. (2008). Trade-offs between grounded and abstract representations: Evidence from algebra problem solving. *Cognitive Science, 32*(2), 366-397. https://doi.org/10.1080/03640210701863933

Lasa, A. (2016). *Instrumentación del medio material GeoGebra e idoneidad didáctica en procesos de resolución de sistemas de ecuaciones* (Tesis Doctoral no publicada). Universidad Pública de Navarra.

Molina, M., Rodríguez-Domingo, S., Cañadas, M.C., y Castro, E. (2017). Secondary school students' errors in the translation of algebraic statements. *International Journal of Science and Mathematics Education, 15*(6), 1137-1156. http://dx.doi.org/10.1007/s10763-016-9739-5

Movshovitz-Hadar, N., Zaslavsky, O., e Inbar, S. (1987). An empirical classification model for errors in high school mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education, 18*(1), 3-14. http://dx.doi.org/10.2307/749532

National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and standards for school mathematics.* NCTM.

Oktaç, A., y Trigueros, M. (2010). ¿Cómo se aprenden los conceptos de álgebra lineal? *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 13*(4-II), 373-385.

Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económicos (2017). *Marco de Evaluación y de Análisis de PISA para el Desarrollo: Lectura, matemáticas y ciencias.* OECD Publishing.

Panizza, M., Sadovsky, P., y Sessa, C. (1999). La ecuación lineal con dos variables: entre la unicidad y el infinito. *Enseñanza de las Ciencias, 17*(3), 453-61.

Pecharromán Gómez, C., Arce Sánchez, M. y Conejo Garrote, L. (2019). Estrategias y errores de conversión entre representaciones de intervalos de la recta real. *Enseñanza de las Ciencias, 37*(3), 169-187. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.2602

Pérez, E.G., y Vargas, V. (2019). Secuencia didáctica para el aprendizaje de sistemas de ecuaciones lineales con GeoGebra. *Revista electrónica AMIUTEM, VII* (2), 88-97.

Pérez, M., Diego, J.M., Polo, I., y González, M. J. (2019). Causas de los errores en la resolución de ecuaciones lineales con una incógnita. *PNA. Revista de Investigación en Didáctica de la Matemática, 13*(2), 84-103. https://doi.org/10.30827/pna.v13i2.7613

Proulx, J., Beisiegel, M., Miranda, H., y Simmt, E. (2009). Rethinking the teaching of systems of equations. *The Mathematics Teacher, 102*(7), 526-535.

Radatz, H. (1979). Error analysis in mathematics education. *Journal for Research in Mathematics Education, 10*(3), 163-172. https://doi.org/10.2307/748804

Ramírez, M.P., Oktaç, A., y García, C. (2005). Dificultades que presentan los estudiantes en los modos geométrico y analítico de sistemas de ecuaciones lineales. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, 19,* 413-418.

Rico, L. (1992). *Investigaciones sobre errores de aprendizaje en educación matemática*. Universidad de Granada.

Rodríguez Jara, M.A., Mena Lorca, A., Mena Lorca, J., Vásquez Saldias, P., y Del Valle Leo, M. E. (2019). Construcción cognitiva del conjunto solución de un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas. *Enseñanza de las Ciencias, 37*(1), 71-92. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.2194

Rodríguez-Muñiz, L. J., y Candás, P. (2017). Análisis de los errores cometidos al resolver un límite en exámenes de PAU. En *Libro de Actas VIII CIBEM, Vol. 4* (pp. 309–317). FESPM.

Rojano, T. (2010). Modelación concreta en álgebra. Balanza virtual, ecuaciones y sistemas matemáticos de signos. *Números*. *Revista de Didáctica de las Matemáticas, 75*, 5-20.

Schoenfeld, A.H. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense-making in mathematics. En D. Grouws (Ed.), *Handbook for Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 334-370). MacMillan. https://doi.org/10.1177/002205741619600202

Segura, S.M. (2004). Sistemas de ecuaciones lineales: una secuencia didáctica. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 7*(1), 49-78.

Socas, M. (1997). Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las matemáticas en la educación secundaria. En L. Rico (Ed.), *La educación matemática en la enseñanza secundaria* (pp. 125-154). Horsori.

Socas, M. (2007). Dificultades y errores en el aprendizaje de las matemáticas. Análisis desde el enfoque lógico semiótico. En M. Camacho, P. Flores y P. Bolea (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XI* (pp. 19-52). SEIEM.

Soots, K.L., y Shafer, K.G. (2018). Engaging Students with Linear Functions and GeoGebra: An Action Research Study. *North American GeoGebra Journal, 7*(1), 53-70.

Van Reeuwijk, M. (2001). From informal to formal, progressive formalization: An example on solving systems of equations. En H. Chick, K. Stacey, J. Vincent, y J. Vincent (Eds.), *The Future of the Teaching and Learning of Algebra, Proceedings of the 12th ICMI Study Conference* (Vol. 2, 613-620). The University of Melbourne.

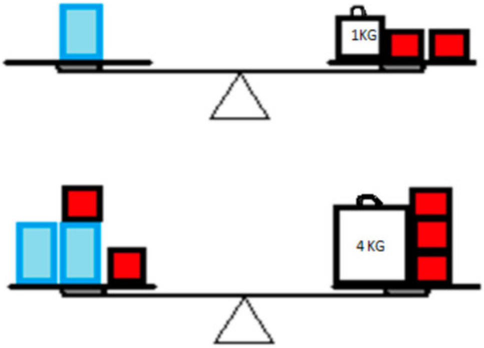
Wagner, S., y Parker, S. (1999). Advancing algebra. En B. Moses (Ed.), *Algebraic Thinking, Grades K-12* (pp. 328-340), NCTM.

Widada, W., Herawaty, D., Rahman, M.H., Yustika, D., Gusvarini, P. y Anggoro, A. F. (2020). Overcoming the difficulty of understanding systems of linear equations through learning ethnomathematics. *JPhCS, 1470*(1), 012074. https://doi.org/10.1088/1742-6596/1470/1/012074

Zengin, Y., y Tatar, E. (2017). Integrating Dynamic Mathematics Software into Cooperative Learning Environments in Mathematics. *Educational Technology & Society, 20*(2), 74-88.

9. ANEXO I. INSTRUMENTO

1. Calcula el peso de un brik de leche (figura azul grande) y de un tarro de salsa de tomate (figura roja pequeña).



- Identifica las incógnitas:
  x = peso en Kg de…………
  y = peso en Kg de…………
- Fijándote en la primera balanza, construye una ecuación lineal con las dos incógnitas seleccionadas anteriormente. Ten en cuenta que la balanza está equilibrada, así que lo que hay a un lado pesa lo mismo que lo que hay al otro lado.
- Fijándote en la segunda balanza, construye una ecuación lineal con las dos incógnitas seleccionadas anteriormente. Ten en cuenta que la balanza está equilibrada, así que lo que hay a un lado pesa lo mismo que lo que hay al otro lado.
- Construye un sistema con las dos ecuaciones anteriores. Realiza, además, las transformaciones necesarias para dejarlo en la forma

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

  donde *a, b, c, a', b'* y *c'* sean números.
- Sin resolver, selecciona cuál de las siguientes opciones es la solución del sistema.

(a) $x = \frac{7}{5}Kg, \quad y = \frac{1}{5}Kg$ (b) $x = \frac{7}{3}Kg, \quad y = \frac{2}{3}Kg$

2. Resuelve el siguiente sistema utilizando el método de reducción completando previamente la tabla.

$$\begin{cases} 3x - 4y = 1 \\ 6x + 6y = 30 \end{cases}$$

Incógnita	**Coef. de la incógnita 1ª ecuación**	**Coef. de la incógnita 2ª ecuación**	**Nº por el que vas a multiplicar la 1ª ecuación**	**Nº por el que vas a multiplicar la 2ª ecuación**
x	3	6		

¿Cómo afectaría a la resolución del sistema que el coeficiente de x en la primera ecuación fuera 8 en vez de 3?, ¿y si fuera 9?, ¿y si fuera 12? ¿Detectas algún patrón?

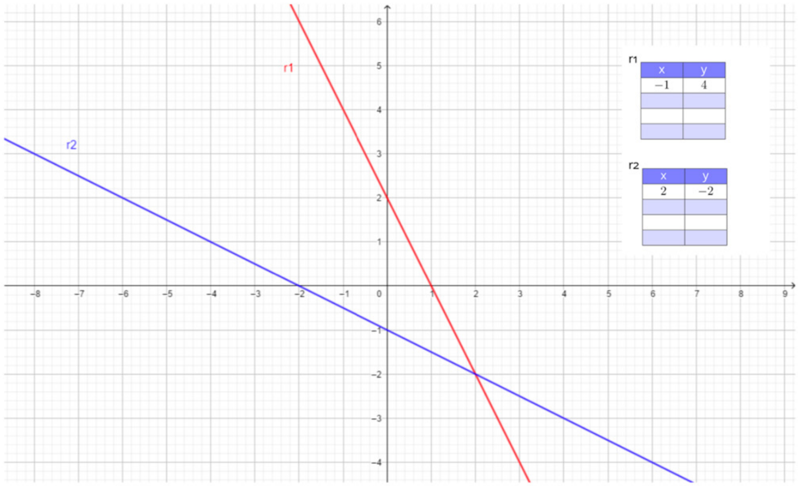
3. Completa la tabla con los siguientes sistemas de ecuaciones SIN RESOLVERLOS.

$$\begin{cases} 3x + 7y = -1 \\ 5x - 13y = 29 \end{cases} \quad 2) \begin{cases} 4x - 11y = -17 \\ 7x - 9y = 5 \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} ax + by = 5 \\ x - 1y = 9 \end{cases} \quad 4) \begin{cases} 2x + by = 0 \\ dx - 4y = 9 \end{cases} \quad 5) \begin{cases} ax + by = 3 \\ dx + fy = 8 \end{cases}$$

Sistema	**Incógnita**	**Coef. de la incógnita 1ª ecuación**	**Coef de la incógnita 2ª ecuación**	**Nº por el que vas a multiplicar la 1ª ecuación**	**Nº por el que vas a multiplicar la 2ª ecuación**
1)	x				
2)	x				
3)	y				
4)	x				
5)	y				

4. A partir de la siguiente gráfica, completa las tablas con los puntos de las rectas r1 y r2.



Determina a qué sistema de ecuaciones corresponde la gráfica (ninguno de los sistemas es equivalente a otro).

$$\text{(a)} \begin{cases} r1 \equiv 4x + y = 0 \\ r2 \equiv -x - y = -3 \end{cases}$$

$$\text{(b)} \begin{cases} r1 \equiv y = \frac{x-1}{3} \\ r2 \equiv y = 2x + 3 \end{cases}$$

Indica qué has hecho para responder la pregunta anterior……….

5. Resuelve por el método de reducción el siguiente sistema de ecuaciones y represéntalo gráficamente:

$$\begin{cases} x + y = 5 \\ -3x - y = -5 \end{cases}$$

6. Diseña un enunciado para el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x + 3y = 140 \\ 2x + 2y = 160 \end{cases}$$

Épsilon - *Revista de Educación Matemática* *2022, nº 111, 29-34*

Obstáculos epistemológicos en la adquisición de conceptos matemáticos elementales

Cristina Pedrosa-Jesús
Alexander Maz-Machado
María Rodríguez Baiget
Universidad de Córdoba

Resumen: *Cada vez que hay reuniones de profesores de matemáticas, salen a relucir las dificultades y errores en los que los estudiantes suelen incurrir en todos los niveles educativos. Sin embargo, pocas veces el profesorado se reflexiona sobre la naturaleza de esas dificultades pese a que la literatura científica ha ido identificando y categorizando algunas dificultades asociadas a los obstáculos epistemológicos. Presentamos unos breves ejemplos de obstáculos epistemológicos que se han evidenciado en el aula de matemáticas.*
Palabras Clave: *Obstáculos epistemológicos, dificultades, matemáticas, educación.*

Epistemological obstacles in the acquisition of elementary mathematical concepts

Abstract: *Whenever there are meetings of mathematics teachers, the difficulties, and mistakes that students tend to make at all levels of education come to the fore. However, teachers rarely reflect on the nature of these difficulties despite the fact that the scientific literature has been identifying and categorizing some difficulties associated with epistemological obstacles. We present some brief examples of epistemological obstacles that have become evident in the mathematics classroom.*
Keywords: *Epistemological obstacles, difficulties, mathematics, education.*

1. INTRODUCCIÓN

Generalmente, cuando los profesores enseñamos matemáticas en cualquier nivel educativo, solemos tener en cuenta las dificultades y, especialmente, los errores en los que suelen incurrir los alumnos. No obstante, casi siempre fijamos la atención en los errores de tipo matemático, de orden numérico, algorítmico o de representación y pocas veces en el propio concepto y lo que representa o significa. Existe una serie de dificultades no ligada a cuestiones numéricas que no permiten una correcta apropiación del conocimiento objetivo.

En este sentido, Brousseau (1983) afirma:

> […] El error no es solamente el efecto de la ignorancia, de la incertidumbre, del azar, tal como se cree en las teorías empiristas o conductistas del aprendizaje, sino el efecto de un conocimiento anterior que tenía su interés, su éxito, pero que, ahora, se revela falso o simplemente inadaptado. (p. 171)

Por tanto, como Cid (2016) señala, el aprendizaje de los individuos no puede entenderse como un proceso continuo en el que se va aumentando progresivamente el volumen de conocimientos, sino que, en ocasiones, para adquirir algún nuevo conocimiento es necesario modificar uno anterior que está obstaculizando ese aprendizaje.

Gastón Bachelard (1987) señala que algunas dificultades de aprendizaje de las personas se deben a que el conocimiento aprendido previamente se toma como único y verdadero, esto hace que se muestre reacio a adquirir nuevos conocimientos o conocimientos que rectifiquen o contradigan lo ya aprendido, a esto él lo llama obstáculo epistemológico. Estos obstáculos epistemológicos no se refieren a elementos de carácter externo que intervienen en los procesos del conocimiento científico, sino que tienen que ver con las condiciones psicológicas que entorpecen la evolución de ese conocimiento científico (Villamil, 2008).

Brousseau (1983) establece una serie de obstáculos específicos: obstáculo ontogenético, obstáculo cultural, obstáculo didáctico y obstáculo epistemológico.

Es Duroux (1982) quien plantea una serie de condiciones que se requieren para que una determinada concepción pueda ser considerada como un obstáculo, tres de ellas son:

- **a)** Un obstáculo será un conocimiento, una concepción, no una dificultad ni una falta de conocimiento.
- **b)** Este conocimiento produce respuestas adaptadas a un cierto contexto, frecuentemente reencontrado.
- **c)** Pero engendra respuestas falsas fuera de este contexto. Una respuesta correcta y universal exige un punto de vista notablemente diferente. (pp. 20-21)

Como se indica y señalan algunos autores, existe una relación entre los obstáculos y las concepciones que un individuo posee. Algunos investigadores enfatizan que los procesos de enseñanza y aprendizaje de la matemática están influenciados por las concepciones de los profesores sobre el conocimiento científico (Hashweb, 1996; Trent & Dixon, 2004).

2. ¿CUÁNDO SE OBSERVAN EN EL AULA?

Uno de los primeros obstáculos epistemológicos a los que se enfrentan los estudiantes en relación con las matemáticas ocurre en el paso del conjunto de los números naturales a los números enteros. En los primeros años de Educación Primaria, se enseñan los naturales indicando que estos empiezan en 1 (N^* o en cero según la corriente matemática que abrace el maestro) y que no hay nada más por debajo de este número y, por tanto, este conjunto numérico está acotado inferiormente.

Sin embargo, cuando se les enseñan los números enteros, los alumnos de los primeros cursos de Educación Primaria se encuentran que justamente debajo de ese número que era la cota inferior del conjunto existe otro conjunto numérico infinito. Este choque de conceptos viene a revelar que un nuevo conocimiento se opone a uno previo que ha sido asimilado por el niño, constituyéndose en un obstáculo epistemológico. Ante esta nueva información, el sujeto debe eliminar el concepto previo o hacer un reacomodamiento del concepto original con el nuevo. Esto último es lo que los profesores pretendemos, es decir, que asuman el nuevo concepto de número entero como un concepto diferente del de número natural. Los obstáculos epistemológicos relacionados con la enseñanza y aprendizaje de los números negativos han sido objeto de amplias investigaciones (Borba, 1995; Cid, 2016; Vidal, & Barra, 2019).

Otro ejemplo en esta misma situación se reconoce cuando se enseña la multiplicación de números naturales; los alumnos observan que, en este conjunto, el producto de dos de ellos da por resultado un número que siempre es mayor a cualquiera de ellos. Esto es válido siempre en este contexto. Sin embargo, cuando se estudian los números racionales esto ya no es cierto para la multiplicación cuando uno de los factores pertenece al intervalo [0,1] porque el producto será igual a 1 o menor que los factores. Como afirma Barrantes (2006, p. 3) “el conocimiento anterior (el resultado de dos factores siempre es un número mayor) se convierte en un obstáculo para adquirir un nuevo conocimiento en el ámbito de los números racionales”.

Estos obstáculos no solo son observables en la enseñanza de las matemáticas de Educación Primaria o Secundaria, también son evidentes a nivel universitario. Así, Plaza (2016) realizó un estudio con alumnos de ingeniería para detectar obstáculos en actividades de modelamiento matemático de fenómenos o procesos de ingeniería, en un curso de Ecuaciones Diferenciales. En este estudio se detectaron obstáculos asociados a *Falencia en conceptos del fenómeno a modelar* y un *Uso de un lenguaje no cotidiano* entre otros.

3. UNA EXPERIENCIA PRÁCTICA EN EL AULA

En el Grado de Educación Primaria, en el que se forman los maestros para este ciclo educativo, en una actividad inicial de diagnóstico, les planteamos a los alumnos de primer curso una situación elemental de geometría:

"Señala en el triángulo todos los ángulos internos y los ángulos externos:"

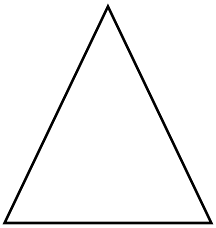


Figura 1

Sabemos que la respuesta correcta es:

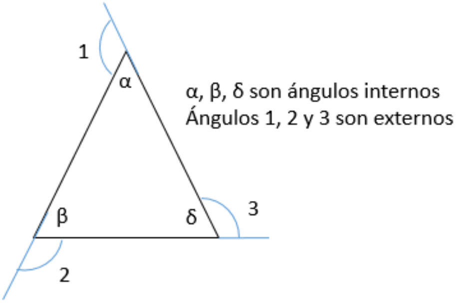


Figura 2

Sin embargo, el 94,3% de los alumnos respondieron de la siguiente manera:

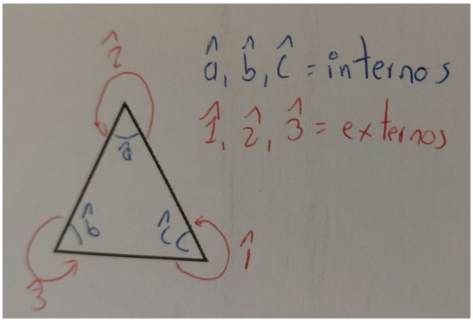


Figura 3

Como se observa en las respuestas dadas, hay evidencia de que aún persisten de manera dominante los conceptos de interno y externo aprendidos en Educación Primaria. Continúan asociando interno como lo de "*dentro de*" y externo con lo que esta "*por fuera de*". Los alumnos no han considerado que se hallan en un contexto diferente y siguen pensando en el contexto topológico, sin percatarse de que la actividad es en un contexto geométrico de ángulos.

Tomando en cuenta que en ese curso (primero del Grado de Educación Primaria) hay un tema específico de geometría donde se recuerda nuevamente lo que son ángulos internos y externos de polígonos, decidimos realizar una actividad equivalente con alumnos de tercer año de la misma titulación en la asignatura de Didáctica de la geometría y la medida.

En esta actividad diseñada para los alumnos de tercero, cambiamos el triángulo con un heptágono no regular para verificar que dominaban el concepto de ángulo exterior independientemente del tipo de polígono.

“Señala en el polígono todos los ángulos internos y los ángulos externos:”

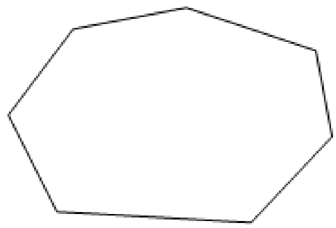


Figura 4

Solamente el 27,3% de los alumnos respondió de manera correcta a la actividad. La mayoría de las repuestas erróneas eran del tipo de la figura 5:

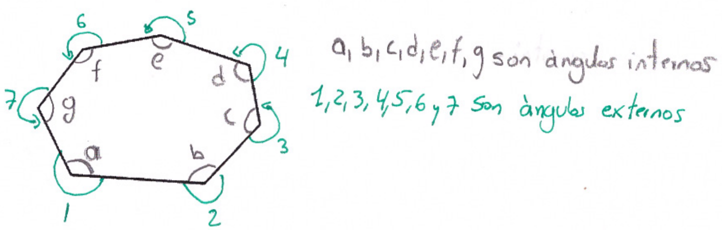


Figura 5

Se halló que, pese a que los alumnos en su primer año recibieron los conocimientos necesarios para comprender el significado del concepto de ángulo exterior de un polígono, en cursos superiores no eran capaces de identificarlo en una figura dada, es decir, muy pocos alumnos del tercer curso daban mejores respuestas que las brindadas por los de primer curso.

Lo más llamativo es que en otra pregunta se les preguntaba “cuánto suman las medidas de los ángulos externos de un polígono convexo” y el 87,4% respondió correctamente que la suma es igual a 360º. Lo anterior indica que los estudiantes han aprendido ciertas definiciones y teoremas de manera memorística y sin asociarlos o razonar sobre su contexto o su significado.

4. CONCLUSIONES

Los obstáculos epistemológicos asociados a los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas están presentes en todos los niveles educativos. Hemos mostrado algunos ejemplos de otros estudios y lo observado en nuestra propia experiencia profesional con estudiantes universitarios.

Hemos visto cómo conceptos adquiridos en los primeros años de la Educación Primaria continúan estando presentes en los alumnos pese al continuo uso y manejo de conceptos relacionados a estos, durante los diferentes ciclos educativos superiores. Parece que hay dificultades para reacomodar tales conceptos o adecuarlos a los nuevos contextos matemáticos.

Se hace necesario que, en los planes de formación de los futuros maestros y profesores de matemáticas, se muestren y se trabajen aspectos relacionados con los obstáculos epistemológicos para que estos sean tenidos en cuenta en la planificación curricular.

5. REFERENCIAS

Bachelard, G. (1987). *La formación del espíritu científico.* México: Siglo XXI.

Barrantes, H. (2006). Los obstáculos epistemológicos. *Cuadernos de investigación y formación en educación matemática* 2, 1-7.

Borba, R. E. (1995). Understanding and operations with integers: difficulties and obstacles. *Proceedings of the 19th International Conference of* PME, vol. 2, 226-231.

Brousseau, G. (1983). Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 4*(2),165-198.

Bruno, A. (1997). La enseñanza de los números negativos: aportaciones de una investigación. *Números*, 29, 5-18.

Duroux, A. (1982). La valeur absolue: difficultés majeures pour une notion mineure. Memoria de DEA. Publications de l'IREM, Burdeos.

Hashweb, M. Z. (1996). Effects of science teachers' epistemological beliefs in teaching. *Journal of Research in Science Teaching, 33*(1), 47–63.

Plaza, L. F. (2016). Obstáculos presentes en modelación matemática. Caso ecuaciones diferenciales en la formación de ingenieros. *Revista científica*, *25*(2), 176-187.

Trent, S. C., & Dixon, D. J. (2004). My eyes were opened: Tracing the conceptual change of pre-service teachers in a special education/multicultural education course. *Teacher Education and Special Education,* 27, 119–133.

Vidal, R., & Barra, M. (2019). Un modelo para caracterizar la justificación de reglas y algoritmos del ámbito numérico–algebraico en libros de texto. *Matemáticas, educación y Sociedad, 2*(2), 33-49.

Villamil, L. E. (2008). La noción de obstáculo epistemológico en Gastón Bachelard. *Espéculo: Revista de Estudios Literarios*, *38*, 25-30.

Épsilon - *Revista de Educación Matemática* *2022, nº 111, 35-49*

Una aproximación al álgebra escolar desde la generalización de patrones por medio del software de Geogebra

Sebastián Castañeda Martínez
Karen Velasco Restrepo
Benemérita Universidad Autónoma de Prueba
Carolina Castañeda Martínez
Universidad Autónoma de Zacatecas

Resumen: *Este trabajo propone una secuencia didáctica simulada por el software de GeoGebra para introducir al estudio del álgebra por medio de la generalización de patrones. La secuencia consta de tres situaciones y cada una de estas presenta preguntas que orientan al estudiante y al docente con el fin de que puedan realizar las observaciones de cada una de las situaciones de los applets. Finalmente, se espera que este tipo de actividades permitan un mejor acercamiento al álgebra y se logre construir el concepto por medio de observaciones de generalizades en cada caso.*
Palabras clave: *Álgebra, Patrones, Generalización, GeoGebra, Situaciones.*

An approach to school algebra from pattern generalization using Geogebra software

Abstract: *This paper proposes a didactic sequence simulated by GeoGebra software to introduce the study of algebra through the generalization of patterns. The sequence consists of three situations and each of these presents questions that guide the student and the teacher so that they can make observations of each of the situations of the applets. Finally, it is hoped that this type of activities will allow a better approach to algebra and that the concept can be constructed by means of observations of generalities in each case.*
Keywords: *Algebra, Patterns, Generalization, GeoGebra, Situations.*

1. INTRODUCCIÓN

El siguiente trabajo presenta la elaboración de una secuencia didáctica pensada para estudiantes de séptimo grado de la Educación Básica. Esta secuencia involucra actividades que tienen como principal propósito desarrollar razonamiento algebraico en los estudiantes, a partir de la generalización de patrones.

Para Vergel (2015) la generalización de patrones es considerada como una de las formas más importantes de introducir el álgebra en la escuela, debido a que, entre otros aspectos, posibilita a los estudiantes acercarse a situaciones de variación que se constituyen como importantes para el desarrollo del pensamiento algebraico. Teniendo en cuenta lo anterior, se hace necesario poner atención a los procesos que dan lugar a la emergencia del pensamiento algebraico en la escuela.

Esta secuencia didáctica está compuesta por tres situaciones ideadas para realizar en tres o cuatro sesiones de clases, cada una con 60 minutos aproximadamente, con el fin de que los estudiantes intercambien ideas y reafirmen sus conjeturas. La secuencia se apoya de herramientas tecnológicas, más específicamente desde un software de geometría dinámica conocido como GeoGebra, debido a que consideramos de gran importancia el uso de software dinámicos, que permitan ser un medio de enseñanza y que contribuyan a la participación, ayudando a los estudiantes a visualizar contenidos matemáticos que son más complicados de afrontar desde un dibujo estático.

La secuencia está diseñada con el fin de que los estudiantes se aproximen al álgebra, por medio de uno de los procesos de desarrollo de razonamiento algebraico conocido como "la generalización de patrones", además nos apoyamos en la resolución de problemas como alternativa complementaria para la comprensión del estudiante en estos procesos de aprendizaje del álgebra, puesto que para la mayoría de los estudiantes existe una brecha enorme entre la aritmética y el álgebra.

En este caso, se utilizaron concepciones históricas y filosóficas de los números pitagóricos, en los cuales se pueden identificar relaciones y propiedades que aportan al objetivo de la presente secuencia. Además, se aborda en el cierre de la secuencia, el proceso de resolución de problemas, que es mencionado por el MEN (1998).

A continuación, la tabla 1 presenta algunos aspectos generales del recurso didáctico.

Tabla 1. Descripción del contexto del recurso pedagógico

Nombre del recurso:	Aprendiendo álgebra desde la generalización de patrones geométricos.
Nivel o grado escolar:	Grado: 7°
Objeto matemático:	Generalización de patrones, y resolución de problemas que presentan patrones y variaciones.
Referentes curriculares en el que se enmarca la situación:	Procesos Generales: Razonamiento, Modelación, Resolución de problemas, Comunicación Estándares Básicos para el reconocimiento de patrones, en ellos se puede reconocer una coherencia vertical y horizontal.

Resumen del recurso didáctico:	Este recurso cuenta con una estructura, que propone una secuencia didáctica con 3 actividades las cuales permiten reconocer y establecer patrones.
Descripción del software:	El software permite una interacción del estudiante con el objeto matemático a desarrollar, además de comprender las relaciones entre figuras geométricas.
Tiempo:	3 o 4 sesiones de 1 hora.
Población:	La secuencia didáctica desarrollada en este trabajo va dirigida a poblaciones que cuenten con recursos tecnológicos, tales como computadores, Tablet, proyector, internet (o descargar los archivos de GeoGebra y pasarlos a cada Tablet y/o computador). Por otra parte, se recomienda a los docentes tener un conocimiento del software a utilizar (GeoGebra).
Fuente: Elaboración propia	

2. MARCO CONCEPTUAL

En esta sección se proponen las perspectivas didáctica, curricular y matemática para consolidar y fundamentar algunos referentes conceptuales que sustentan la problemática planteada, el diseño de la secuencia didáctica y un aporte para los docentes de matemáticas que deseen implementar nuevas estrategias, en estudiantes de grado 7° de la Educación Básica Secundaria. En la perspectiva didáctica se tiene como eje central la Teoría de las Situaciones Didácticas (TSD) planteada por Brousseau (2007). La segunda se aborda desde los Lineamientos Curriculares de Matemáticas (1998), los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas (2006) y los Derechos Básicos de Aprendizaje en Matemáticas (2015). En la tercera perspectiva se encuentran algunos conceptos matemáticos que emergen en el diseño de la propuesta de aula, siendo foco principal los polinomios y ecuaciones que modelan los patrones.

2.1. Perspectiva didáctica

Brousseau (1999) define la noción de situación como: “Hemos llamado situación” a un modelo de interacción de un sujeto con cierto medio que determina a un conocimiento dado como el recurso del que dispone el sujeto para alcanzar o conservar en este medio un estado favorable. Algunas de estas “situaciones” requieren de la adquisición anterior todos los conocimientos y esquemas necesarios, pero hay otras que ofrecen una posibilidad al sujeto para construir por sí mismo un conocimiento nuevo en un proceso “genético”.

Ahora bien, la teoría de situaciones didácticas planteada por Brousseau (2007), para fines de la estructura teórica de la secuencia propuesta en este trabajo, se caracteriza de la siguiente manera:

- Es intencional, se construye con el propósito de que alguien aprenda algo.
- La situación se describe en función de las estrategias que los estudiantes puedan adoptar.
- Su evolución requiere del acompañamiento y orientación constante del profesor.
- La resolución de problemas implica la toma de múltiples decisiones por parte de los estudiantes y de ir modificándose para el logro del objetivo.

Por otra parte, se plantean situaciones que tienen una secuencialidad con el objetivo de construir y desarrollar el pensamiento matemático de los estudiantes, estas se consideran fundamentales para el desarrollo metodológico de este trabajo. A continuación, se describen cada una de las situaciones:

1. **Situación de Acción:** Esta situación pone al estudiante en contacto con una actividad o problema cuya solución es precisamente el conocimiento que se quiere enseñar. Su objetivo fundamental es establecer interacciones entre el sujeto y el medio.
2. **Situación de Formulación:** La formación de un conocimiento corresponde a la capacidad del sujeto para retomarlo, es decir, reconocerlo, identificarlo, descomponerlo y reconstruirlo en un sistema lingüístico. Para lo anterior, se debe involucrar a otro sujeto, a quien el primero debe comunicar dicha información.
3. **Situación de Validación:** El emisor ya no es un informante, sino un proponente, y el receptor, un oponente. Se supone que poseen las mismas informaciones necesarias para tratar una cuestión. (Cooperan en la búsqueda de la verdad).
4. **Situación de Institucionalización:** Los docentes se ven en la obligación de cerrar dicha situación de aprendizaje, hablando del objeto de enseñanza al que hacía referencia la actividad, identificarlo, acercar las producciones de los conocimientos a otras creaciones.

2.2. Perspectiva curricular

En los Lineamientos Curriculares de Matemáticas (MEN, 1998), se propone una estructura que tiene como propósito fundamental desarrollar pensamiento matemático en los estudiantes.

Para desarrollar este pensamiento se propone un currículo que no concibe los contenidos como eje central en la enseñanza. El currículo debe ser visto como un dispositivo que articula varios elementos: Procesos generales, Conocimientos Básicos y Contextos.

Los procesos generales se relacionan con el aprendizaje, siendo los ejes fundamentales, el razonamiento, la resolución y planteamiento de problemas, la comunicación, la modelación y la elaboración, comparación y ejercitación de procedimientos. Para objeto de este trabajo centraremos la atención en el razonamiento y la modelación, ya que aparecen como procesos de pensamiento de gran importancia que debe tener todo sujeto que aprende matemáticas, debido a que favorece un acercamiento de los estudiantes a las matemáticas y particularmente en el estudio de las relaciones siendo está una de las características fundamentales del álgebra.

Por otra parte, los Conocimientos Básicos hacen referencia a los procesos específicos que desarrollan el pensamiento matemático, teniendo en cuenta los sistemas propios de las matemáticas. Cabe resaltar que el énfasis no está puesto en los contenidos, por ejemplo, enseñar ecuaciones, sino para qué enseñar ecuaciones, es decir, el énfasis está en preguntarse para qué enseñar y no en preguntarse qué enseñar. Los procesos específicos se agrupan en cinco tipos de pensamientos básicos: el pensamiento numérico, el pensamiento espacial, el pensamiento métrico, el pensamiento aleatorio y el pensamiento variacional. Ahora bien, los sistemas se agrupan en: sistemas numéricos, sistemas geométricos, sistemas de medida, sistemas de datos y sistemas algebraicos y analíticos. De acuerdo con lo anterior, para efectos de esta propuesta se centrará la mirada en el pensamiento variacional y los sistemas algebraicos y analíticos respectivamente.

Por último, los Contextos tienen relación con los ambientes que rodean al estudiante, como las condiciones sociales, económicas, culturales, creencias, entre otras y que le dan sentido a las matemáticas que aprende. Estos contextos deben propiciar situaciones problemas, ya sea de las mismas matemáticas, de la vida diaria o de las otras ciencias. Para producto de esta propuesta se enfocará la mirada preferiblemente en los contextos de las mismas matemáticas.

Ahora bien, los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas (MEN, 2006), establecen que las competencias matemáticas no surgen de la nada, por el contrario, se necesitan ambientes de aprendizaje en los cuales se vean reflejadas situaciones problema significativas y comprensivas, ya que permiten desarrollar competencias en los estudiantes con un mayor grado de complejidad. Por lo anterior, se consideran necesarias e importantes las situaciones problema en la aproximación al álgebra, puesto que se evidencian grandes dificultades en el paso de la aritmética al álgebra por parte de los estudiantes, es decir, que se presenta una ruptura entre estos dos dominios.

Así mismo, los estándares proponen una estructura desde una coherencia vertical y horizontal de las competencias que se pretenden desarrollar en los estudiantes, categorizadas por grados de escolaridad, es decir, 1° a 3°, de 4° a 5°, de 6° a 7°, de 8° a 9°, de 10° a 11° y por tipo de pensamiento matemático. Para fines de esta propuesta se tendrán en cuenta la coherencia vertical y horizontal del pensamiento variacional y sistemas algebraicos y analíticos de grado séptimo (7°), relacionados con el proceso de razonamiento y modelación. La siguiente tabla explicita lo anterior:

Tabla 2. Coherencia vertical y horizontal en los Estándares básicos de competencias

De 6° a 7°: PENSAMIENTO VARIACIONAL Y SISTEMAS ALGEBRAICOS Y ANALÍTICOS. Describo y represento situaciones de variación relacionando diferentes representaciones (diagramas, expresiones verbales generalizadas y tablas).	
COHERENCIA VERTICAL	**De 10° a 11°:** Analizo las relaciones y propiedades entre las expresiones algebraicas y las gráficas de funciones polinómicas y racionales y de sus derivadas.
	De 8° a 9°: Analizo en representaciones gráficas cartesianas los comportamientos de cambio de funciones específicas pertenecientes a familias de funciones polinómicas, racionales, exponenciales y logarítmicas.
	De 4° a 5°: Describo e interpreto variaciones representadas en gráficos.
	De 1° a 3° : Reconozco y describo regularidades y patrones en distintos contextos (numérico, geométrico, musical, entre otros).
COHERENCIA HORIZONTAL	
Pensamiento y sistemas numéricos.	Reconozco y generalizo propiedades de las relaciones entre números racionales (simétrica, transitiva, etc.) y de las operaciones entre ellos (conmutativa, asociativa, etc.) en diferentes contextos.
Pensamiento espacial y sistemas geométricos	Resuelvo y formulo problemas que involucren relaciones y propiedades de semejanza y congruencia usando representaciones visuales.
Pensamiento métrico y sistemas de medidas	Identifico relaciones entre distintas unidades utilizadas para medir cantidades de la misma magnitud.
Pensamiento aleatorio y sistemas de datos	Predigo y justifico razonamientos y conclusiones usando información estadística.

Fuente: Elaboración propia, obtenida de la estructura de la coherencia vertical y horizontal en los Estándares Básicos de Competencias (MEN, 2006).

2.3. Perspectiva Matemática

Como se mencionó anteriormente en este trabajo, existen dificultades en el paso de la aritmética al algebra, que no tienen su origen solamente desde una perspectiva didáctica, sino que radican también en la naturaleza misma del álgebra, es decir, problemas de concepciones y conceptualizaciones de conceptos algebraicos (polinomio, ecuación, variable, etc.).

Por lo anterior, se hace uso de los patrones debido a que juegan un papel destacado en los procesos de generalización, puesto que estimulan la observación, formulación, argumentación y validación de conjeturas. Los patrones se consideran como "algo" que se repite con regularidad. Un patrón es una propiedad, una regularidad, una cualidad invariante que expresa una relación estructural entre los elementos de una determinada configuración, disposición y composición. Se entienden así los patrones como una sucesión de signos que bien puede ser gestuales, gráficos, de comportamiento, entre otros, los cuales se construyen siguiendo una regla de repetición. (Castro, 2013).

3. METODOLOGÍA

Para llevar a cabo este trabajo se decidió emplear una metodología derivada de "La Teoría de las situaciones didácticas (TSD)", la cual según Brousseau (2007), "se utiliza para diseñar secuencias con situaciones didácticas". El proceso de construcción de la secuencia didáctica según la TSD es la siguiente:

1. **Situación de Acción:** Teniendo en cuenta esta situación, para el diseño de esta primera situación, se elaboraron una serie de preguntas que permitirán al estudiante interactuar con el software, y logre identificar el objeto matemático que se está trabajando desde la manipulación y visualización.
2. **Situación de Formulación:** En el diseño de esta situación los estudiantes deben formular y comunicar a otros compañeros cuál es la forma en que está razonando para resolver las preguntas entorno a la situación.
3. **Situación de Validación:** Está situación fue diseñada con el objetivo de que los estudiantes por medio de la situación problema validen los conocimientos desarrollados hasta el momento en una situación totalmente distinta a las anteriores
4. **Situación de Institucionalización:** Por último, en esta fase es el docente el encargado de institucionalizar el concepto matemático en este caso los patrones algebraicos que están siendo modelados por una ecuación.

Como se mencionó anteriormente se diseñaron tres (3) situaciones que están direccionadas por una serie de preguntas que varían entre ocho (8) y doce (12), cabe resaltar que esta es una situación didáctica y por tanto debe ser guiada por un docente capaz de implementar el software GeoGebra y la TSD. El uso de GeoGebra en clase es algo recomendado en diversas investigaciones sobre educación matemática (Arribas y Galán, 2020; de Sousa y otros, 2022). El tiempo considerado necesario y/o pertinente para la implementación de esta secuencia es de tres a cuatro sesiones cada una de una hora, se propone que al finalizar cada situación se realizará una mesa redonda, con el fin de aportar ideas y recolectar los razonamientos de los estudiantes.

4. DISEÑO Y ANÁLISIS DE LA SECUENCIA DIDÁCTICA

El objetivo de las situaciones es guiar al estudiante de grado séptimo de Básica Secundaria, a acercarse paso a paso a la construcción de los conceptos y al afianzamiento de las características fundamentales del álgebra en el reconocimiento de patrones geométricos. La secuencia de estas situaciones pretende lograr que los estudiantes identifiquen fenómenos visuales relacionados con las variaciones y patrones presentadas en cada una de las situaciones, que les permitirá identificar, luego en una construcción, las relaciones que se presentan en los patrones y así lograr determinar una ecuación, predecir el valor o cantidad de elementos que tiene la posición del patrón geométrico y por último percibir las variaciones que se presentan en cada situación.

4.1. Situación 1

El propósito de esta situación es que los estudiantes se familiaricen con algunos fenómenos visuales relativos al reconocimiento de patrones geométricos. La figura No. 1 presenta la figura inicial de la situación, dos deslizadores (*a* y *b*), que permiten el arrastre y visualización de las figuras siguientes moviendo los deslizadores de cero (0) a uno (1), y por último tiene un botón que permite que los estudiantes construyan la figura 4 con ayuda de las bolas que aparecen ahí.

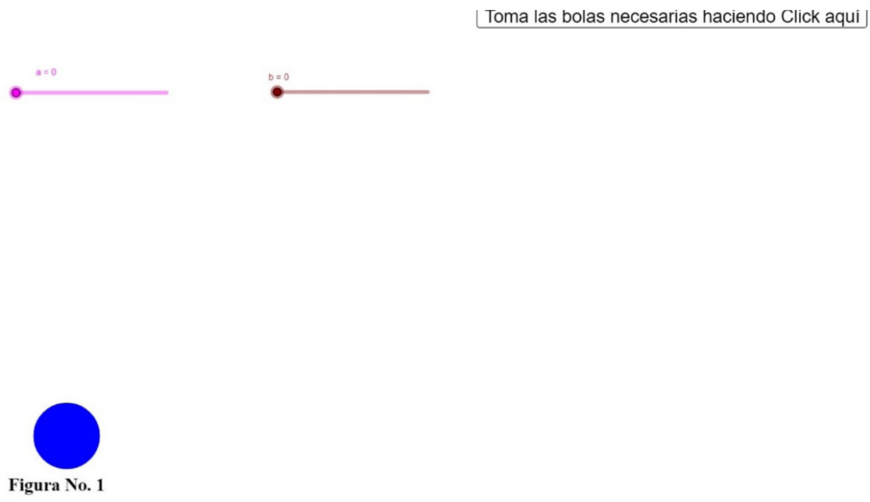


Figura 1. Situación 1. Tomado de GeoGebra

Por otra parte, en la figura 2 se puede visualizar todas las figuras cuando se mueven los deslizadores, y cuando se presiona el botón. (Se visualizan los números triangulares)

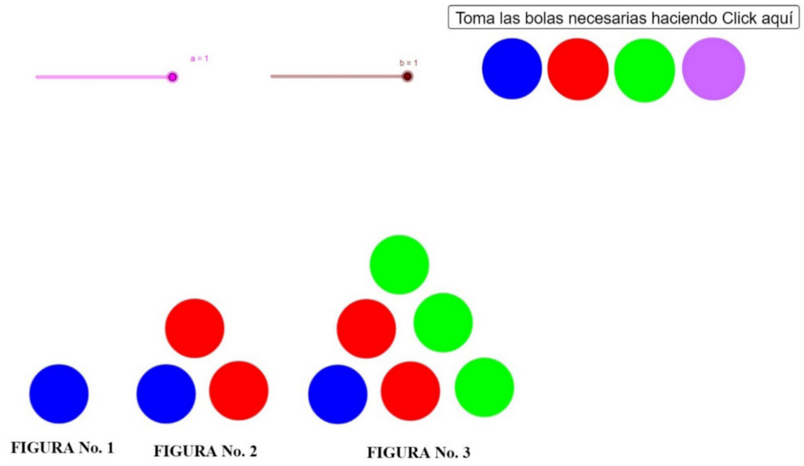


Figura 2. Situación 1. Tomado de GeoGebra

Tabla 3 Preguntas para el estudiante y descripción de cada pregunta. Situación 1

Preguntas de la situación 1	Descripción y análisis de la pregunta
1. Mueve el deslizador de a = 0 hasta a = 1. 2. ¿Qué sucedió al mover el deslizador?	Esta pregunta tiene como objetivo que el estudiante visualice y describa que sucede al mover el deslizador.
3. ¿Qué forma tiene la figura 2?	Está pregunta pretende que los estudiantes describan la figura y así logren encontrar relaciones.
4. Mueve el deslizador de b=0 a b=1 5. ¿Qué sucedió al mover el deslizador?	Esta pregunta tiene como objetivo que el estudiante visualice y describa que sucede al mover el deslizador.
6. ¿Qué forma tiene la figura 2?	Está pregunta pretende que los estudiantes describan la figura y así logren encontrar relaciones.
7. ¿Cuál es la relación que tienen la figura uno y la figura dos? 8. ¿Cuál es la relación que tienen la figura dos y la figura tres?	En el desarrollo del pensamiento algebraico se pretende que los estudiantes identifiquen relaciones entre cantidades con el fin de determinar el patrón. En este caso son los números triangulares.
9. ¿Cuál es la diferencia que tienen la figura uno y la figura dos? 10. ¿Cuál es la relación que tienen la figura dos y la figura tres?	En el desarrollo del pensamiento algebraico se pretende que los estudiantes identifiquen relaciones entre cantidades con el fin de determinar la variación.

Preguntas de la situación 1	Descripción y análisis de la pregunta
11. Presiona el botón "*toma las bolas necesarias haciendo clic aquí"*, construye la figura No. 4 y determina cuántas bolas tiene en total.	Se pretenda que el estudiante a partir del análisis y visualizaciones anteriores el estudiante sea capaz de encontrar el patrón para determinar la cantidad de bolas totales.

Fuente: Elaboración propia.

4.2. Situación 2

El propósito de esta situación es que una vez los estudiantes se han familiarizado con los fenómenos visuales relativos a los patrones geométricos, utilicen ese conocimiento para predecir la cantidad de bolas de una determinada figura. La figura No. 3 presenta la figura inicial, además tiene dos deslizadores (*a* y *b*), estos permiten el arrastre y visualización de las figuras siguientes moviendo los deslizadores de cero (0) a uno (1), es decir, la figura 2 y figura 3, y por último tiene un botón que permite que los estudiantes construyan la figura 4 con ayuda de las bolas que aparecen ahí.

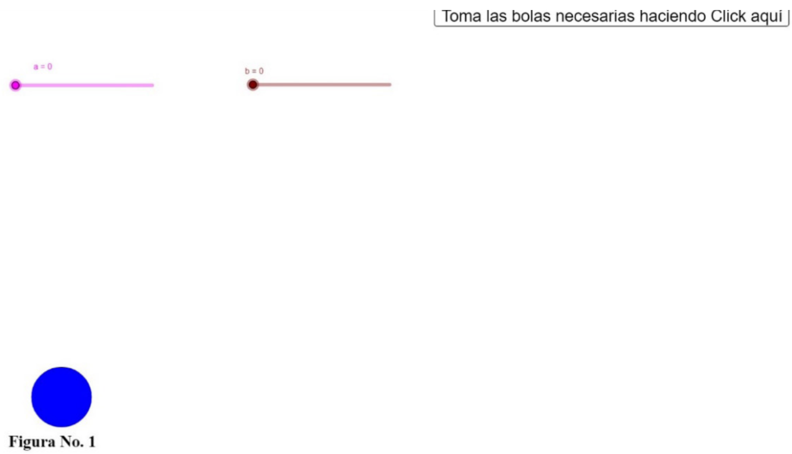


Figura 3. Situación 2. Tomado de GeoGebra

En este caso, la figura 4 permite visualizar todas las figuras cuando se mueven los deslizadores, y cuando se presiona el botón. (se visualizan los números cuadrados)

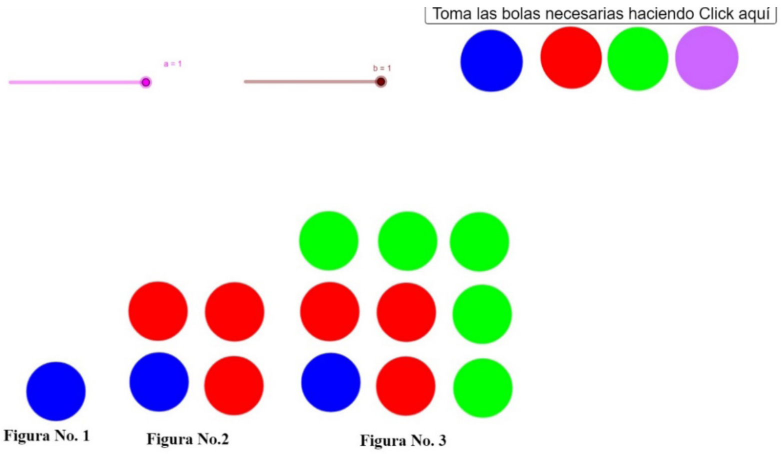


Figura 4. Situación 2. Tomado de GeoGebra

Tabla 4. Preguntas para el estudiante y descripción de cada pregunta. Situación 2

Preguntas de la situación 2	Descripción y análisis de la pregunta
1. Mueve el deslizador de a=0 a a=1 2. ¿Qué sucede al mover el deslizador?	Esta pregunta tiene como objetivo que el estudiante visualice y describa que sucede al mover el deslizador.
3. ¿Qué forma tiene la figura 2?	Está pregunta pretende hacer que los estudiantes describan la figura y así logren encontrar relaciones.
4. ¿Cuál es la relación que tienen la figura 1 y la figura 2?	En el desarrollo del pensamiento algebraico se pretende que los estudiantes identifiquen relaciones entre cantidades con el fin de determinar el patrón. En este caso son los números cuadrados.
5. Mueve el deslizador de b=0 a b=1 6. ¿Qué sucede al mover el deslizador?	Esta pregunta tiene como objetivo que el estudiante visualice y describa que sucede al mover el deslizador.
7. ¿Qué forma tiene la figura 3?	Está pregunta pretende hacer que los estudiantes describan la figura y así logren encontrar relaciones.
8. ¿Cuál es la relación que tienen la figura 2 y la figura 3? 9. ¿Cuál es la relación que tienen la figura 1 y la figura 3?	En el desarrollo del pensamiento algebraico se pretende que los estudiantes identifiquen relaciones entre cantidades con el fin de determinar el patrón. En este caso son los números cuadrados.

Preguntas de la situación 2	Descripción y análisis de la pregunta
10. Teniendo en cuenta las respuestas anteriores, construye la figura que sigue (figura No. 4). Compara la respuesta con tus compañeros.	Se pretenda que el estudiante a partir del análisis y visualizaciones anteriores el estudiante sea capaz de encontrar el patrón para determinar la cantidad de bolas totales.
11. Considerando lo anterior, ¿Cuántas bolas tiene en total la figura No 10?, ¿la figura No. 50?, y ¿la figura No. 50? expone tu respuesta a tus compañeros y compara.	Este apartado tiene como objetivo que los estudiantes encuentren una forma (heurística) de hallar la cantidad total de bolas para una figura determinada y si es posible que expresen las relaciones en lenguaje natural o simbólico.

Fuente: Elaboración propia.

4.3. Situación 3

El propósito de esta situación es que una vez los estudiantes se han familiarizado con los fenómenos visuales planteados en las situaciones uno (1) y dos (2) , utilicen ese conocimiento para predecir la cantidad de movimientos que se realizan dependiendo del número de bolas rojas. Está situación tiene un contexto diferente, pues se pretende validar los conocimientos que han construido los estudiantes hasta el momento.

La figura 5 presenta el juego inicial, es decir cuando el deslizador llamado *bolas* es igual a 2. Este diseño, permite el arrastre y visualización de los distintos juegos moviéndolo a 4 bolas y a 6 bolas. En adición las bolas se pueden mover arrastrándolas con el ratón.

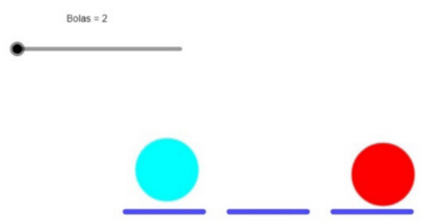


Figura 5. Situación 3 cuando bolas es igual a 2. Tomado de GeoGebra

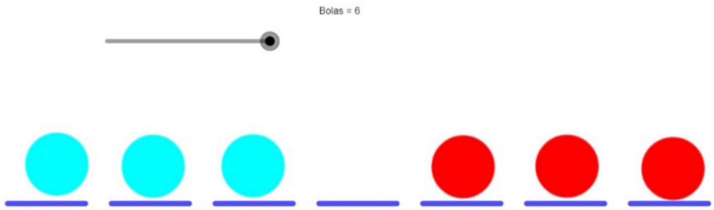


Figura 6. Situación 3 cuando bolas es igual a 6. Tomado de GeoGebra

Tabla 5. Preguntas para el estudiante y descripción de cada pregunta. Situación 2

<table>
<tr><td colspan="2">El objetivo del juego es pasar las bolas azules al lugar de las rojas y éstas al de las azules. Para ello se deben cumplir las siguientes reglas:
Una ficha puede moverse a la casilla de al lado si está libre, y también puede saltar sobre una de distinto color si a continuación hay un hueco, ninguna ficha puede retroceder ¿Cuántos movimientos necesitas para conseguirlos?</td></tr>
<tr><th>Preguntas de la situación 3</th><th>Descripción y análisis de la pregunta</th></tr>
<tr><td>1. Mueve el deslizador a bolas = 2, luego juega con las condiciones propuestas anteriormente. ¿Cuál es la relación entre la bola azul y la cantidad de movimientos? Compara tu respuesta con tu compañero.
2. Mueve el deslizador a bolas = 4, luego realiza la actividad juega con las condiciones propuestas anteriormente. ¿Cuál es la relación entre las bolas azules y el número de lanzamientos?</td><td>En el desarrollo del pensamiento algebraico se pretende que los estudiantes identifiquen relaciones entre cantidades con el fin de determinar el patrón y la relación entre la bola roja y el total de movimientos para ganar el juego. Debido a la complejidad del juego es importante que los estudiantes se comuniquen para ver cómo se está entendiendo la situación problema.</td></tr>
<tr><td>3. ¿Qué relación se presenta cuando se realiza la actividad con una bola azul y cuando se realiza la actividad con dos bolas azules? Compara tu respuesta con tu compañero.</td><td>En el desarrollo del pensamiento algebraico se pretende que los estudiantes identifiquen relaciones entre cantidades con el fin de determinar la variación. En este caso el cambio y la dependencia de la cantidad de bolas rojas y los movimientos totales.</td></tr>
</table>

Preguntas de la situación 3	Descripción y análisis de la pregunta
4. Mueve el deslizador a bolas = 6, luego realiza la actividad juega con las condiciones propuestas anteriormente. ¿Cuál es la relación entre las bolas azules y el número de lanzamientos? Compara tu respuesta con tu compañero	En el desarrollo del pensamiento algebraico se pretende que los estudiantes identifiquen relaciones entre cantidades con el fin de determinar el patrón y la relación entre la bola roja y el total de movimientos para ganar el juego.
5. ¿Qué relación se presenta cuando se realiza la actividad con dos bolas azules y cuando se realiza la actividad con tres bolas azules? 6. ¿Qué relación se presenta cuando se realiza la actividad con una bola azul y cuando se realiza la actividad con tres bolas azules?	En el desarrollo del pensamiento algebraico se pretende que los estudiantes identifiquen relaciones entre cantidades con el fin de determinar la variación. En este caso el cambio y la dependencia de la cantidad de bolas rojas y los movimientos totales.
7. Teniendo en cuenta lo anterior, modela el problema mediante una ecuación, compruébala con tus compañeros, y halla la cantidad de movimientos cuando se tienen, diez bolas azules, cincuenta bolas azules, cien bolas azules.	Está pregunta tiene como objetivo que los estudiantes logren modelar el problema mediante una ecuación, o establezcan relaciones que les permitan determinar la cantidad de movimientos a partir de la cantidad de bolas azules.

Fuente: Elaboración propia.

5. CONCLUSIONES

Estas situaciones permiten la visualización de cada uno de los patrones por medio del arrastre de los deslizadores, en relación con lo que sucede con el applet de GeoGebra. Particularmente, se puede evidenciar qué varía y qué permanece constante, con el fin de que los estudiantes encuentren regularidades que les permitan realizar las construcciones de figuras nuevas a partir de las iniciales.

En este sentido, es de gran importancia que este tipo de actividades se realicen como mínimo en parejas, con el fin que se propicie una interacción y discusión entorno a las observaciones que se presentan y así, poder llegar a generalizaciones.

Por otra parte, la secuencia está diseñada con el objetivo de que los estudiantes, en primer lugar, realicen una observación sobre las figuras presentadas y puedan realizar conjeturas y representaciones pictóricas que los orienten a la abstracción por medio de una ecuación de dos variables. Además, se espera que los estudiantes encuentren las relaciones entre las cantidades y puedan identificar las variables dependientes e independientes.

Finalmente, se presenta a continuación el enlace de la página en la cual se propone la secuencia didáctica https://sebastiancastaneda9.wixsite.com/misitio

6. REFERENCIAS

Arribas, F., & Galán, M. D. C. (2020). Trabajando con la app de Geogebra en el aula. *Épsilon*, *Revista de educación matemática*, *105*, 51-57.

Bednarz, N., Kieran, C., & Lee, L. (1996). *Aproximaciones al álgebra: perspectivas para la investigación y la enseñanza.* Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Brousseau, G., (1999), *Educación y didáctica de las matemáticas*. Mexico D.F. Educación Matemática (prensa).

Brousseau, G. (2007). *Iniciación al estudio de la teoría de las situaciones didácticas.* Buenos Aires, Argentina: Libros del Zorzal. Traducido por: Dilma Fregona.

Castro, E. (2013). *Exploración de patrones numéricos mediante configuraciones puntuales. Estudio con escolares de Primer Ciclo de Secundaria* (12-14 años). Tesis doctoral. Universidad de Granada. Granada.

de Sousa, R. T., Alves, F. R. V., & Souza, M. J. A. (2022). La Teoría de los Conceptos Figurativos y GeoGebra: el concepto y la visualización en geometría dinámica. *Matemáticas, educación y sociedad*, *5*(1), 1-17.

Freudenthal, H. (1983). *Fenomenología Didáctica de las Estructuras Matemáticas*. Dordrecht: Reidel. 1 Traducción de Luis Puig, publicada en Fenomenología didáctica de las estructuras matemáticas. Textos seleccionados. México: CINVESTAV, 2001.

Gallardo, A., & Rojano, T. (1988). Áreas de dificultades en la adquisición del lenguaje aritmético-algebraico. *Researchs in Didactique dec Mathématiques, 9*, 155- 188.

Ministerio de Educación Nacional [MEN] (1998). *Lineamientos curriculares para matemáticas*. Bogotá, Colombia.

Ministerio de Educación Nacional [MEN] (2006). *Estándares básicos de competencias en matemáticas*. Bogotá, Colombia.

Ministerio de Educación Nacional (MEN) (2015). *Derechos básicos de aprendizaje*. Bogotá, Colombia.

Socas, M. (2007). Dificultades y errores en el aprendizaje de las matemáticas. Análisis desde el enfoque lógico semiótico. En M. Camacho, P. Flores y P. Bolea (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XI* (pp. 19-52). La Laguna: SEIEM.

Socas, M. (2011). La enseñanza del Álgebra en la Educación Obligatoria. Aportaciones de la investigación. *Números, revista de didáctica de las matemáticas*, 77, 5-34.

Rojano T. (1994). La matemática escolar como lenguaje. Nuevas perspectivas de investigación y enseñanza. *Enseñanza de las Ciencias 12* (1), p. 18-32.

Vergel, R. (2015). Generalización de patrones y formas de pensamiento algebraico temprano. *PNA, 9*(3), 193-215.

Promover el sentido algebraico en educación primaria: Tareas con patrones

Cristina Ayala-Altamirano
Universidad de Almería
María D. Torres
Rafael Ramírez
Universidad de Granada

Resumen: *En este artículo describimos diferentes tareas que pueden emplearse en el aula de Educación Primaria para promover el desarrollo del sentido algebraico. Para ello reflexionamos sobre las variables consideradas en el diseño de las tareas, describimos algunas dinámicas de aulas para implementar las tareas.*
Palabras clave: *Educación primaria, patrones, pensamiento algebraico, sentido algebraico, tareas algebraicas.*

Fostering algebraic sense at elementary education: Tasks with patterns

Abstract: *In this paper we describe different tasks that might be used in the Primary Education classroom to promote the development of algebraic sense. For this purpose, we reflect on the variables considered in the design of the tasks, we describe some classroom activities to implement the tasks.*
Keywords. *Elementary education, patterns, algebraic thinking, algebraic sense, algebraic tasks.*

1. INTRODUCCIÓN

Recientemente el currículo español ha incorporado el sentido algebraico como un saber básico alrededor del concepto del sentido matemático en la educación primaria. El sentido algebraico está relacionado con el reconocimiento de patrones y las relaciones entre variables, la expresión de regularidades o la modelización de situaciones con expresiones simbólicas (Ministerio de Educación y Formación Profesional, 2022, p. 24.486).

Como consecuencia de este nuevo aspecto incorporado sobre el álgebra desde la temprana edad en el currículo escolar, es importante dar información relevante a los docentes sobre qué tareas pueden usar para fomentar el pensamiento algebraico. Parte central de la actividad de diseño e implementación que un profesor debe realizar consiste en identificar las tareas que mejor se adecuen a la consecución de objetivos desde el punto de vista curricular.

2. PENSAMIENTO ALGEBRAICO EN EDUCACIÓN PRIMARIA

La investigación sobre el pensamiento algebraico en edades tempranas ha sido notable en los últimos años y ha aportado información sobre lo que realizan los estudiantes cuando se enfrentan a tareas que fomentan el pensamiento algebraico (Ramírez et al, 2020; Ayala-Altamirano y Molina, 2021; Torres et al, 2021). La investigación ha contestado en parte a la pregunta sobre ¿qué tipo de oportunidades de aprendizaje necesitamos incluir en el aula para lograr el pensamiento algebraico? En este trabajo exponemos algunas de las tareas que potencian el sentido algebraico dentro del reconocimiento de patrones.

El álgebra se considera a menudo como una puerta de entrada a las matemáticas superiores, sobre todo porque proporciona el lenguaje en el que se comunican las matemáticas. El álgebra es el lenguaje en el que se expresa la generalidad y la generalidad es el alma de las matemáticas. Para aprender el lenguaje del álgebra es necesario percibir algún patrón o regularidad, y luego tratar de expresarlo de forma sucinta para poder comunicar tu percepción a otra persona, y utilizarla para responder a preguntas concretas. (Mason et al, 1985, p. 8).

El pensamiento algebraico en las primeras etapas escolares debe incluir el desarrollo de formas de pensar; la relación entre cantidades, la identificación de estructuras y la generalización, entre otras (Kieran, 2004). El pensamiento algebraico consiste en ver lo general en lo particular, reconociendo patrones y relaciones de dependencia entre variables y expresando estas regularidades mediante diferentes representaciones, así como modelizar situaciones matemáticas o del mundo real con expresiones simbólicas.

El estudio del álgebra requiere un cambio en el pensamiento del alumnado, de las situaciones numéricas más concretas a la búsqueda de generalidades para representar y comprender relaciones cuantitativas entre cantidades variantes e invariantes, constituyendo así una herramienta matemática que permite comprender, estudiar y modelar diferentes sucesos que se presentan en el mundo (Cemat, 2021).

Centrándonos en el reconocimiento de patrones, el Real decreto 157/2022, del 1 de marzo, destaca sobre los patrones: Estrategias para la identificación, descripción oral, descubrimiento de elementos ocultos y extensión de secuencias a partir de las regularidades en una colección de números, figuras o imágenes. En este sentido es de interés la creación de tareas que propicien la interacción entre los estudiantes y el profesor, en torno a tareas sobre generalización de patrones, que puedan ofrecer a los estudiantes la oportunidad de reflejar su pensamiento algebraico contribuyendo al sentido algebraico.

3. PATRONES EN CLASE DE MATEMÁTICAS

Las actividades que involucran patrones ofrecen oportunidades para explorar regularidades y captar estructuras. Además, pueden ayudar al desarrollo del sentido numérico (Wijns et al., 2019). La Figura 1 muestra tres tipos de patrones y algunas actividades que se pueden plantear en Educación Primaria.

Tipo de patrones	Actividades		Ejemplo de instrucción
De repetición	Copiar / Duplicar	→	Hacer el mismo patrón
	Crear	→	Inventa un patrón
	Extender	→	¿Cuál es el siguiente elemento?
De desarrollo	Interpolar/extrapolar	→	¿Cuáles son los elementos que faltan en la secuencia?
	Generalizar/ Traducir	→	Sigue el mismo patrón, pero usando distintos materiales/números
Estructura espacial	Identificar la unidad de repetición o patrón	→	¿Cuál es el patrón que sigue la secuencia?

Figura 1. Tipos de patrones y actividades apropiadas para Educación Primaria

4. TAREAS CON PATRONES MATEMÁTICOS

Aquí presentamos tres ejemplos de situaciones que involucran patrones y que hemos presentado en clases con estudiantes de 3º a 6º de primaria.

4.1. Jugando con los amigos

4.1.1. Objetivo

Analizar un patrón de desarrollo y estructura espacial.

4.1.2. Nivel

Educación primaria

4.1.3. Metodología

El patrón asociado a esta actividad puede ser verbalizado como sumar cinco cada vez (patrón recursivo) o multiplicar por cinco el número de turno así saber la cantidad total de jugares (patrón funcional, y=5x). Además, su estructura espacial muestra cinco grupos de jugadores, un grupo está en el centro del cuadrilátero y los otros cuatro están en las esquinas (ver figura 2). Se sugiere presentar el contexto en una puesta en común y luego realizar las siguientes actividades en parejas.

4.1.4. Presentación del contexto:

Un grupo de amigos está realizando un juego en el patio de su escuela. Al inicio se organizan como muestra la Figura 2A. Al siguiente turno invitan a otras personas, tal como muestra la Figura 2B. Y luego invitan a otras más, ver Figura 2C.

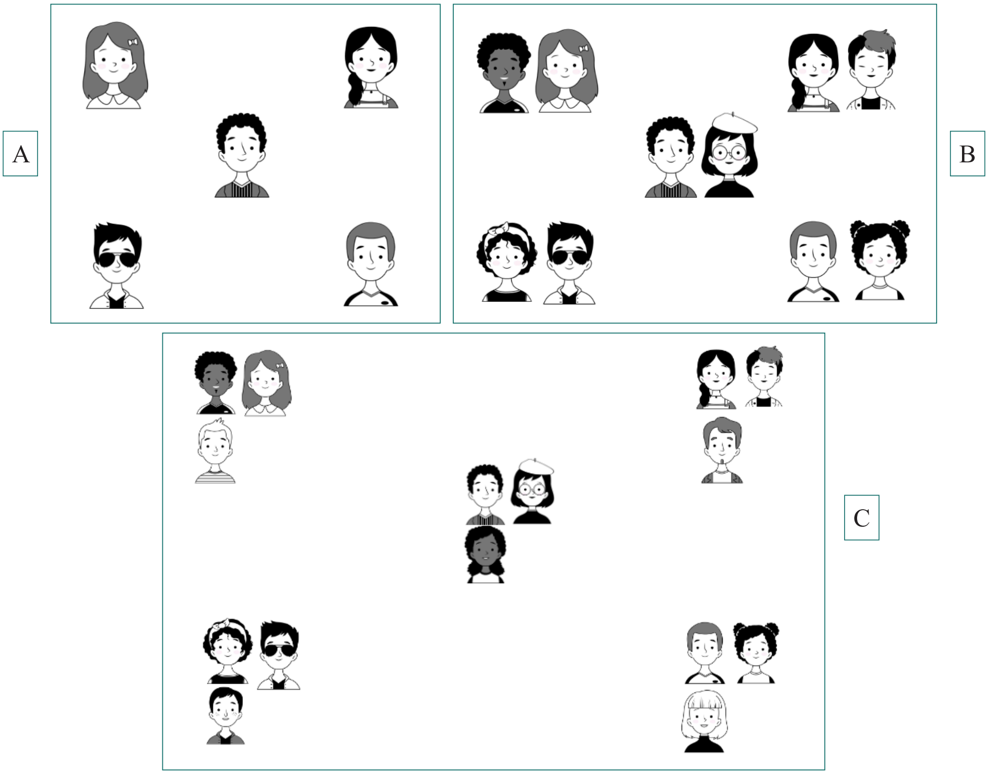


Figura 2. Organización jugadores en los primeros turnos
Fuente imágenes: www.freepik.es

4.1.5. Actividad 1 - Copiar el patrón

Sin mostrar las imágenes anteriores, pedir a las y los estudiantes que representen a través de un dibujo cada ronda del juego. El objetivo es visualizar si han captado el patrón numérico y la configuración espacial. Un error frecuente es que los estudiantes se centren en los aspectos numéricos, sin tener en cuenta la estructura espacial, tal como se ejemplifica en la Figura 3.

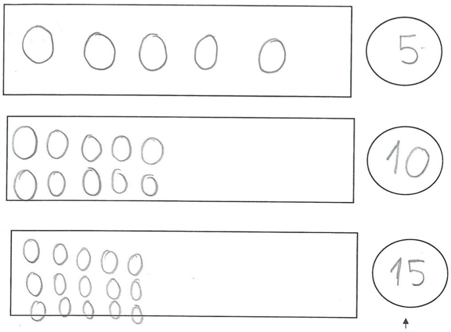


Figura 3. Respuesta de estudiante de 3º de primaria

4.1.6. Actividad 2 - Extender el patrón

El juego continúa, ¿Cuántas personas jugarían en el siguiente turno? Dibuja como se organizarían. Para evaluar si las respuestas fueron correctas o no se puede mostrar la imagen de la organización (Figura 4).

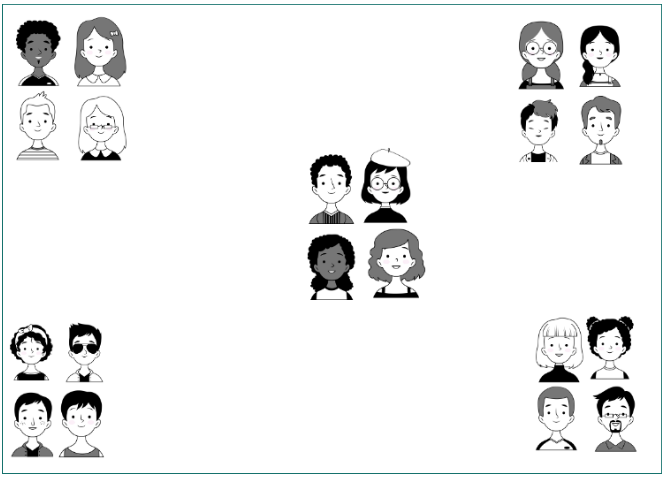


Figura 4. Organización jugadores en el cuarto turno
Fuente imágenes: www.freepik.es

4.1.7. Actividad 3 - Extrapolar el patrón

Un estudiante de otro curso ha dibujado cómo sería el juego en varios turnos, pero ha olvidado dibujar algunos. Complétalos dibujando y escribiendo el número de personas que juegan (ver Figura 5).

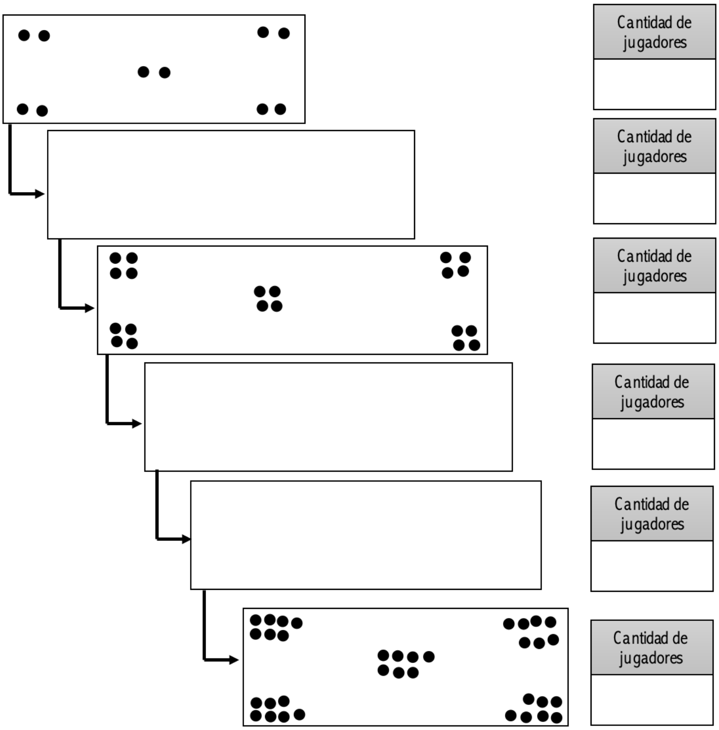


Figura 5. Actividad de extrapolación del patrón

4.1.8. Actividad 4 – Reconocer el patrón de la secuencia

Hay distintas formas de preguntar por el patrón. Una alternativa es preguntar directamente ¿Cuál es el patrón que se sigue en el juego? Otra es mostrar respuestas ficticias y discutir sobre la validez de estas (ver Figuras 6 y 7). En la Figura 6 se muestra una secuencia correcta en cantidad de personas, pero con distinta estructura espacial. En la Figura 7 se presenta una secuencia con una estructura espacial correcta pero errónea en cuanto a la cantidad de personas.

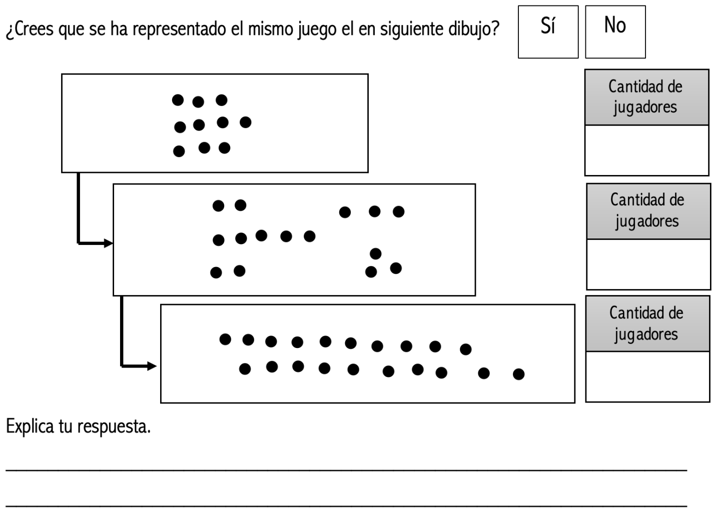


Figura 6. Analizar y reconocer el patrón A

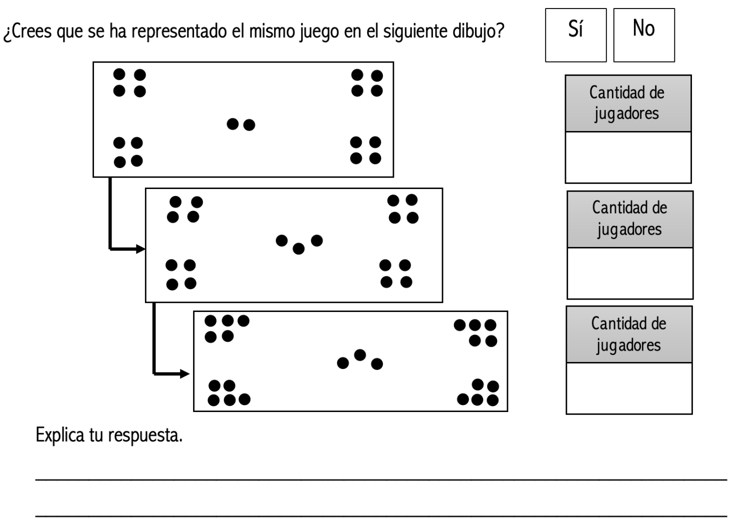


Figura 7. Analizar y reconocer el patrón B

4.1.9. Actividad 5 – Extender los descubrimientos a otros casos similares

Ahora en el juego hay un árbitro, tal como se muestra en la Figura 8.

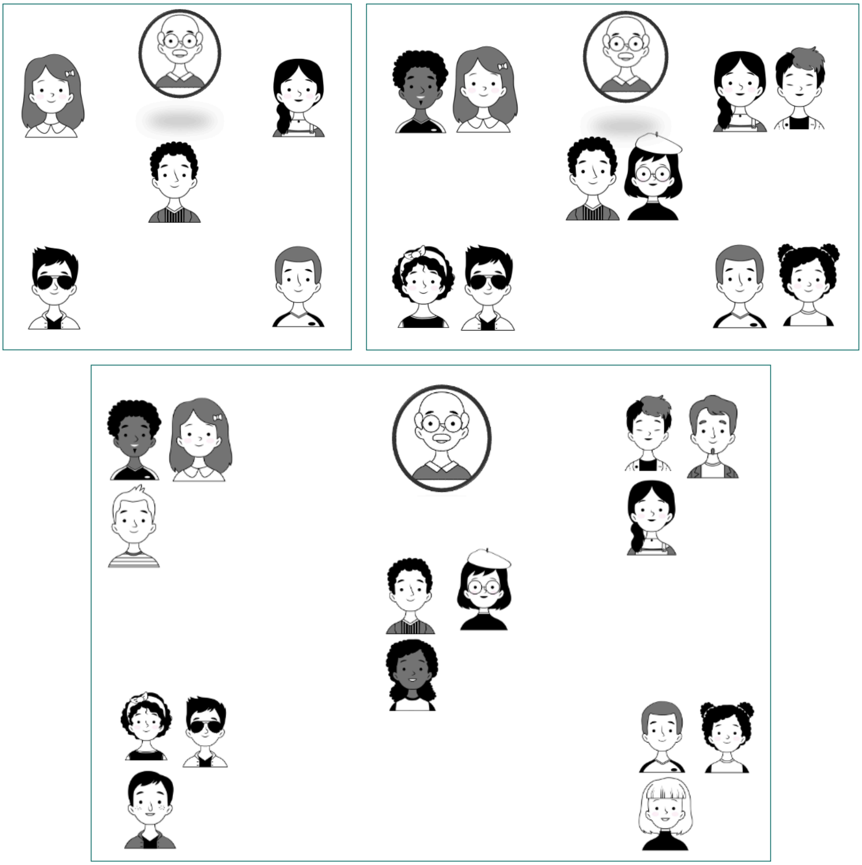


Figura 8. Organización jugadores en los primeros turnos al jugar con un arbitro
Fuente imágenes: www.freepik.es

Plantear a los estudiantes preguntas como:

- ¿Cuántas personas hay en el patio en cada ronda del juego?
- ¿De cuánto en cuánto aumenta la cantidad de personas en cada ronda?
- ¿En qué se parece y en qué se diferencia ambas formas de jugar?

Al responder las siguientes preguntas los estudiantes podrían encontrar otros patrones. Por ejemplo, podrían señalar que en la primera modalidad del juego son solo múltiplos de cinco, o números cuya unidad es cero o cinco. Mientras en la modalidad de juego con árbitro son números cuya unidad es uno o seis. Se recomienda preguntar por un número que no cumple con las condiciones anteriores así favorecer la discusión o preguntar por un número muy grande, así comprobar si logran generalizar sus descubrimientos.

- Si hay 21 personas en el patio, ¿están jugando solos o con un árbitro? ¿Cómo lo supiste?

- Si hay 35 personas en el patio, ¿están jugando solos o con un árbitro? ¿Cómo lo supiste?
- Si hay 43 personas en el patio, ¿están jugando el juego anterior ya sea solos o con un árbitro?

4.2. Comiendo con los amigos

4.2.1. Objetivo

Analizar un patrón de desarrollo y estructura espacial.

4.2.2. Nivel

Educación primaria

4.2.3. Metodología

Esta actividad muestra como un grupo de amigos se sientan alrededor de una mesa. La estructura espacial depende de la figura geométrica escogida para representar la mesa. En 2º de primaria hemos realizado la actividad con mesas cuadradas, mientras que desde 3º hemos propuesto mesas trapezoidales. Estas últimas tienen un mayor grado de dificultad por dos razones: es una figura con la que están poco familiarizados y les cuesta dibujarla y porque en los lados paralelos de la figura no hay igual cantidad de personas sentadas. En la figura 9 mostramos las dos propuestas, sin embargo, más adelante detallaremos el proceso seguido solo para las mesas trapezoidales.

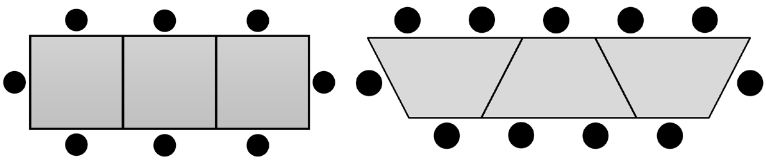


Figura 9. Ejemplo de distribución de comensales según forma de la mesa

4.2.4. Presentación del contexto

Mostrar ejemplos de cómo se han sentado a medida que se agrega una mesa más (ver Figura 10). Pedir que los estudiantes verbalicen cómo es la organización espacial, que no solo señalen cuántos amigos comen en cada caso.

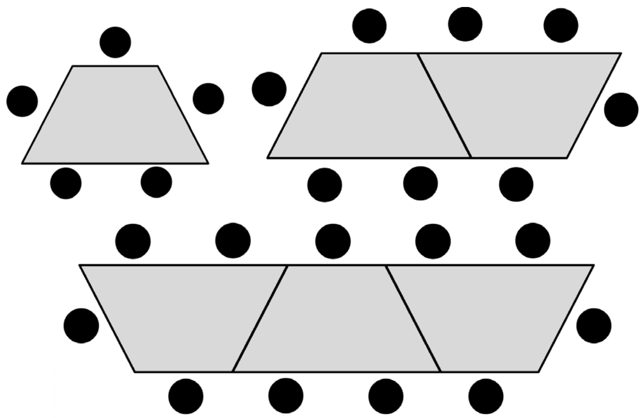


Figura 10. Ejemplo de distribución de amigos en una, dos y tres mesas

4.2.5. Actividad 1 - Copiar el patrón

Pedir que copien la secuencia mostrada en la Figura 10.

4.2.6. Actividad 2 - Extender el patrón

Preguntar por la cantidad de amigos cuando se agrega una mesa más.

4.2.7. Actividad 3 - Extrapolar el patrón

Al igual que en la actividad anterior (ver Figura 5), mostrar una secuencia con elementos que falten en posiciones intermedias de la secuencia.

4.2.8. Actividad 4 - Reconocer el patrón de la secuencia

Preguntar:

- ¿Cuál es el patrón que se sigue la cantidad de amigos comiendo?
- Si hay 32 personas, ¿cuántas mesas se necesitan? Dibuja cómo se sentarían.
- Si hay 30 personas, ¿cuántas mesas se necesitan? Dibuja cómo se sentarían.

4.2.9. Actividad 5 – Extender los descubrimientos a otros casos similares

Comparar la forma de sentarse con otros casos como los que se muestran en la Figura 11.

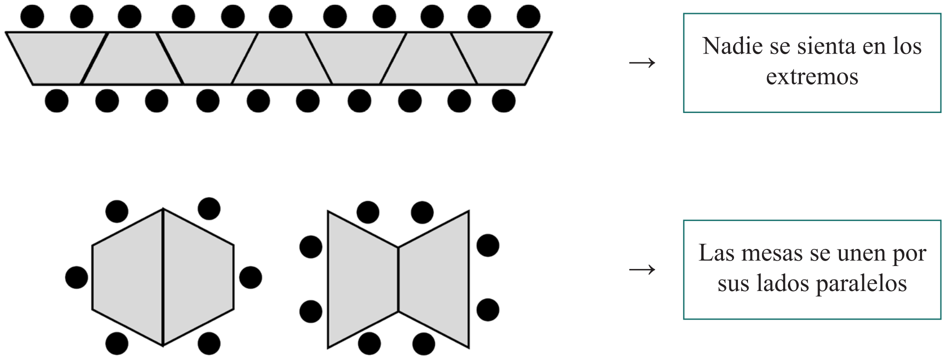


Figura 11. Ejemplo de otras distribuciones de las mesas

4.3. Embaldosando el patio

4.3.1. Objetivo

Analizar un patrón de desarrollo y estructura espacial.

4.3.2. Nivel

Educación primaria

4.3.3. Metodología

En esta actividad los estudiantes deben descubrir cuál es el patrón que permite conocer la cantidad de baldosas que necesitan para construir un camino.

4.3.4. Presentación del contexto:

La secuencia muestra como se organizan unas baldosas alrededor de unas macetas empleadas para construir un camino. Al inicio se organizan como muestra la Figura 12A, luego como lo muestran las Figuras 12B y 12C.

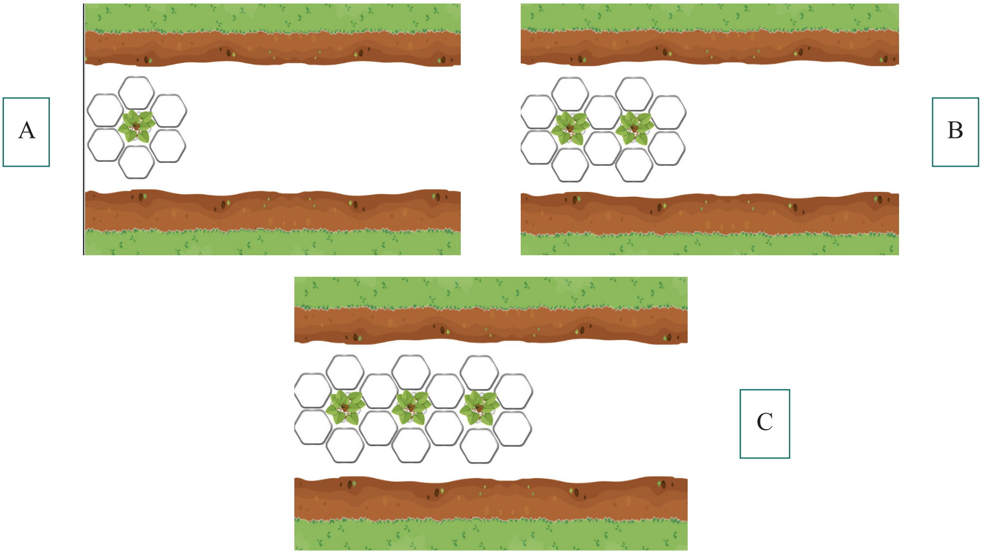


Figura 12. Distribución de baldosas
Fuente imagen: www.freepik.es

4.3.5. Actividad 1 - Copiar el patrón

Pedir que los estudiantes que representen cada etapa de construcción del camino. El objetivo es visualizar si han captado el patrón numérico y la configuración espacial, por lo que las representaciones pueden ser dibujos o algún material manipulativo. En una puesta en común preguntar: ¿Cuántas baldosas se necesitan al inicio? ¿y luego?

4.3.6. Actividad 2 - Extender el patrón

La construcción del camino continúa, ¿Cuántas baldosas se necesitan para la siguiente etapa? Dibuja el camino y explica cómo lo supiste. Deberían representar lo que muestra la Figura 13.

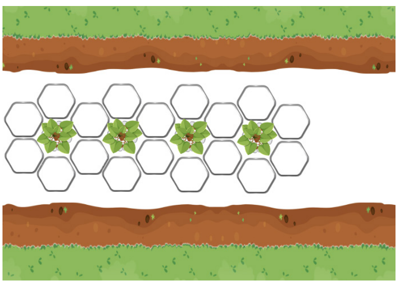


Figura 13. Ejemplo de un camino con cuatro macetas

4.3.7. Actividad 3 - Extrapolar el patrón

Al igual que en las actividades previas, se puede mencionar que un estudiante de otro curso ha dibujado cómo sería el camino en diversas etapas, pero ha olvidado algunos dibujos. Complétalos dibujando y escribiendo el número de baldosas que se necesitan en total cada vez. ¿Cómo lo supiste?

4.3.8. Actividad 4 – Reconocer el patrón de la secuencia

Preguntar directamente cuál es el patrón de la secuencia o mostrar ejemplos que deban analizar (ver Figura 14).

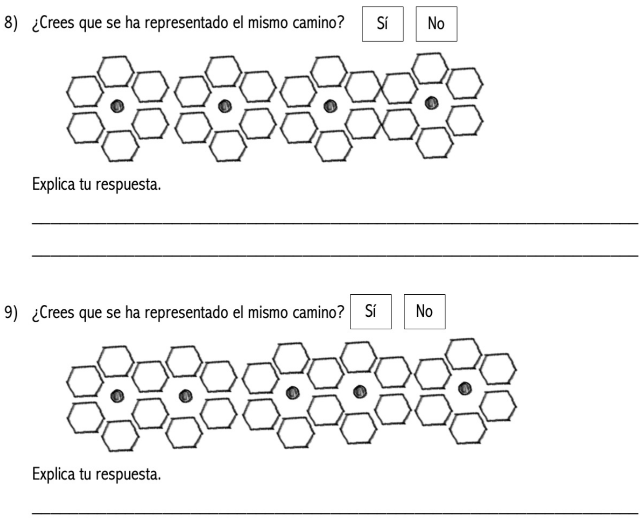


Figura 14. Ejemplos para analizar

4.3.9. Actividad 5 – Extender los descubrimientos a otros casos similares

Ahora seguirán haciendo lo mismo, pero para cubrir la superficie de un patio. ¿Cuántas baldosas necesitarán para rodear la maceta en cada caso? ¿En qué se parece y en qué se diferencia la forma de saber cuántas baldosas son necesarias en cada caso? (ver Figura 15). En estos casos el patrón ya no es sumar cuatro baldosas cada vez, los estudiantes tienen que observar que dependiendo de la posición de las macetas se necesitan cuatro o tres baldosas.

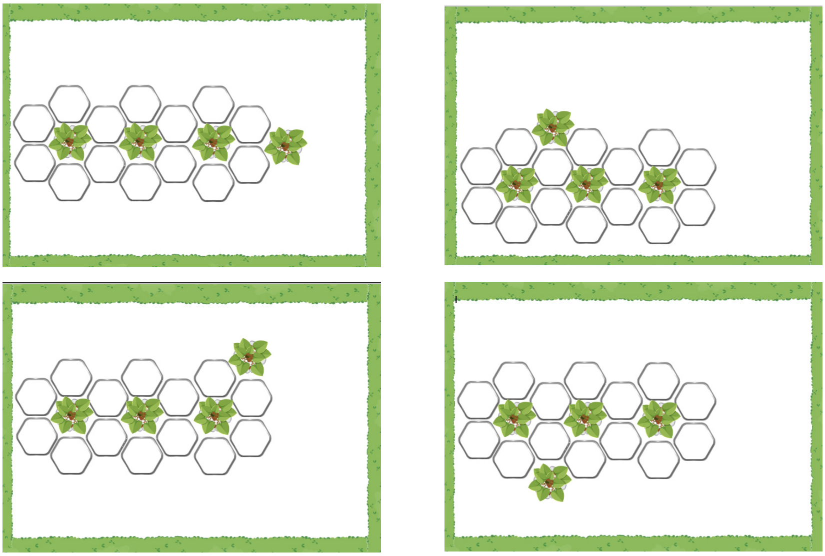


Figura 15. Otras formas de organizar las macetas

4.3.10. Actividad 6 – Crear un patrón

Tomando de referencia el patrón anterior, los estudiantes pueden crear embaldosados con otras figuras u otra distribución de las baldosas hexagonales. En una puesta en común pueden discutir sobre cuál es el patrón que han seguido o si no han seguido ninguno.

5. CONCLUSIONES

La generalización de patrones ha sido considerada como una de las formas más importantes de introducir el álgebra en la escuela (Radford, 2010), pues posibilita a los estudiantes acercarse a situaciones de variación importantes para el desarrollo del pensamiento algebraico.

En este trabajo nos centramos en tareas que tratan el reconocimiento de patrones como una vía para promover el sentido algebraico en la escuela. Las tareas presentadas ponen el foco en la identificación de la unidad de repetición, en la extensión y generalización del patrón. Las tareas que hemos presentado abordan patrones de desarrollo donde se da expansión o reducción del elemento inicial. Son tareas que implican una estructura espacial del patrón a partir de la cual reconocer la unidad de repetición. Son tareas que mantienen contextos cercanos al estudiantes y también contextos tradicionales con una nueva visión que promueven el desarrollo de distintas actividades y habilidades al momento de trabajar con los patrones.

6. AGRADECIMIENTOS

Este trabajo se ha realizado en el proyecto con referencia PID2020-113601GB-I00, financiado por la Agencia Estatal de Investigación (AEI) de España.

7. REFERENCIAS

Ayala-Altamirano, C. y Molina, M. (2021). Fourth-graders' justifications in early algebra tasks involving a functional relationship. *Educational Studies in Mathematics. 107*(2), 359–382.

Comité Español de Matemáticas (2021). Bases para la elaboración de un currículo de Matemáticas en Educación no Universitaria.

Kieran, C. (2004). Algebraic thinking in the early grades: What is it? *The Mathematics Educator, 8*(1), 139-151.

Mason, J., Grahamn, A., Pimm, D. y Gowar, N. (1985). *Routes to/Roots of algebra*. The Open University Press.

Ministerio de Educación y Formación Profesional (2022). Real Decreto 157/2022, de 1 de marzo, por el que se establecen la ordenación y las enseñanzas mínimas de la Educación Primaria. *BOE, 52* (24386- 24504). Autor.

Radford, L. (2010). Layers of generality and types of generalization in pattern activities. *PNA, 4*(2), 37-62.

Ramírez, R., Brizuela, B. y Blanton, M. (2020). Kindergarten and first-grade students´ understandings and representations of arithmetic properties. *Early Childhood Education Journal.* https://doi.org/10.1007/s10643-020-01123-8.

Torres, M. C., Moreno, A. y Cañadas, M. C. (2021). *Generalization process by second grade students. Mathematics, 9*,1109. https://doi.org/10.3390/math9101109

Wijns, N., Torbeyns, J., De Smedt, B. y Verschaffel, L. (2019). Young children's patterning competencies and mathematical development: A review. En K. M. Robinson, H. P. Osana y D. Kotsopoulos (Eds.) *Mathematical learning and cognition in early childhood* (pp. 139-161). Springer

Épsilon - *Revista de Educación Matemática* *2022, nº 111, 67-89*

Los contenidos matemáticos en el currículo de Educación Infantil: contrastando la legislación educativa española con la investigación en educación matemática infantil

Ángel Alsina
Universidad de Girona

Resumen: *Se analiza la presencia de los contenidos matemáticos en la legislación educativa española de Educación Infantil (Real Decreto 95/2022, de 1 de febrero, por el que se establece la ordenación y las enseñanzas mínimas de la Educación Infantil) y se contrasta con los datos que emergen de la investigación en educación matemática infantil. Para ello, se han utilizado términos clave que se han obtenido a través de un proceso deductivo-inductivo, que ha tenido en cuenta las aportaciones de diversos organismos y autores que han abordado estas cuestiones. El análisis muestra que, en la legislación educativa española de Educación Infantil, hay más sombras que luces, es decir, existe una distancia muy considerable con la investigación en educación matemática infantil. Se concluye que esta es una cuestión muy preocupante, sobre todo para el caso de las Comunidades Autónomas del estado español que reproduzcan los contenidos educativos del Decreto 95/2022 en los respectivos currículos de infantil, sin una reflexión de fondo fundamentada en los datos que provienen de la investigación.*
Palabras clave: *legislación educativa, currículo, educación matemática infantil, investigación en educación matemática, Educación Infantil.*

Mathematical contents in the Early Childhood Education curriculum: contrasting Spanish educational legislation with research in early childhood mathematics education

Abstract: *This paper analyses the presence of mathematical content in the Spanish educational legislation for Early Childhood Education (Royal Decree 95/2022, of 1 February, which establishes the organisation and minimum teaching of Early Childhood*

Education) and contrasts it with the data emerging from research in early childhood mathematics education. In order to do so, key terms have been used which have been obtained through a deductive-inductive process, which has taken into account the contributions of various institutions and authors who have addressed these issues. The analysis shows that there are more shadows than lights in Spanish educational legislation in Early Childhood Education, i.e. there is a very considerable gap with research in early childhood mathematics education. It is concluded that this is a very worrying issue, especially in the case of the Spanish Autonomous Communities that reproduce the educational contents of Decree 95/2022 in their respective curricula, without any in-depth reflection based on the data from research.
Keywords: *educational legislation, curriculum, early childhood mathematics education, research in mathematics education, Early Childhood Education.*

1. INTRODUCCIÓN

En España estamos muy acostumbrados a los cambios de legislación educativa: ocho leyes de educación en cuarenta años de democracia, desde la LOECE de 1980 hasta la LOMLOE de 2020. Sin entrar a valorar las repercusiones globales de esta inestabilidad en la calidad de la educación (véase, por ejemplo, de Azcárraga, 2022), este artículo se focaliza en la legislación educativa española de Educación Infantil. En concreto, se analiza la presencia de las matemáticas en dicha legislación y se contrasta con los datos que emergen de la investigación en educación matemática infantil, un campo muy productivo en las últimas décadas (Alsina, 2016).

En relación a la legislación educativa española de Educación Infantil, durante los últimos quince años (2007-2021, ambos incluidos) ha estado vigente el Real Decreto 1630/2006, de 29 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas del segundo ciclo de Educación Infantil. Con base en este decreto, en la Orden ECI/3960/2007, de 19 de diciembre, por la que se establece el currículo y se regula la ordenación de la educación infantil, el Ministerio de Educación y Ciencia determinaba, para los centros que pertenecen a su ámbito de gestión, el currículo de la Educación Infantil, del que formaban parte las enseñanzas mínimas fijadas en el citado real decreto para el segundo ciclo.

Alsina (2013a) realizó un análisis exhaustivo de la presencia de las matemáticas en la Orden ECI/3960/2007. En aquel entonces, dicho análisis se contrastó con otras orientaciones curriculares internacionales, en especial los estándares para la educación matemática del NCTM (2003). Alsina (2019a) sintetizó las principales omisiones identificadas y se propusieron ya "algunas actualizaciones que se deberían realizar en consonancia con los datos de la investigación en educación matemática infantil y/o diversas orientaciones curriculares internacionales de reconocido prestigio" (p. 188). Posteriormente, el Grupo de Trabajo del Comité Español de Matemáticas (CEMat) ha elaborado el documento *Bases para la elaboración de un currículo de Matemáticas en Educación no Universitaria,* que recoge "unos principios fundamentales para el diseño y desarrollo del currículo de la educación matemática en todos los niveles. Esta propuesta se desarrolla como una forma de colaborar en los procesos de planificación existentes en el Ministerio de Educación y Formación Profesional, y no de suplantarlos” (CEMat, 2021, p. 9). Este documento, a diferencia del Libro Blanco de las Matemáticas (RSME y Fundación Areses, 2020), aborda de forma rigurosa la educación matemática infantil. Por esta razón, se trata de una propuesta de consulta imprescindible para el futuro profesorado, el profesorado en activo, los formadores de profesores y, más en general, todos los profesionales y personas interesadas en la educación matemática en general y la educación matemática infantil en particular, considerando que:

> […] tiene la doble pretensión tanto de iniciar el debate como de orientar, en un desarrollo posterior, la planificación, ayudando de este modo al profesorado de todos los niveles a identificar las estrategias y actividades precisas que mejorarán la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en el aula (CEMat, 2021, p. 9).

Volviendo a la legislación educativa española de Educación Infantil, el Real Decreto 1630/2006 ha quedado derogado por el Real Decreto 95/2022, de 1 de febrero, por el que se establece la ordenación y las enseñanzas mínimas de la Educación Infantil, de implementación a partir del curso escolar 2022-2023. Considerando las finalidades de este artículo, se analiza la presencia de los contenidos matemáticos, se contrasta con datos de la investigación en educación matemática infantil y se describen algunas estrategias y recursos para mejorar la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en Educación Infantil. Los términos clave empleados para el análisis han surgido a través de un proceso deductivo-inductivo basado en las descripciones realizadas por diversos autores y organismos del ámbito de la educación matemática infantil que tienen el mérito de haber explicitado los conocimientos matemáticos que deberían aprender los niños durante la etapa de Educación Infantil, en algunos casos desde el nacimiento y en otros a partir de los 3-4 años.

2. LOS CONTENIDOS MATEMÁTICOS EN EL CURRÍCULO ESPAÑOL DE EDUCACIÓN INFANTIL

Para la definición de los términos clave en torno a los contenidos matemáticos, como se ha indicado, se han considerado las aportaciones de organismos y autores como Alsina (2006, 2011, 2015), Canals (1989), Castro y Castro (2016), Chamarro (2005), Clements y Sarama (2015), Geist (2014) y el NCTM (2003). Con base en ello, en la Tabla 1 se describen los términos clave utilizados para cada bloque de contenidos matemáticos propuestos por el NCTM (2003): álgebra, números y operaciones, geometría, medida y estadística y probabilidad. Cabe señalar que, en algunos casos, además del sustantivo se ha identificado también el verbo correspondiente: p. ej., cuantificador/cuantificar; cálculo/calcular; relación/relacionar, clasificación/clasificar; medida/medir; etc.

Tabla 1. Términos clave utilizados para analizar la presencia de los contenidos matemáticos en el Real Decreto 95/2022

Bloques	Términos claves
Álgebra Temprana	álgebra (temprana), percepción (sensorial), cualidad (sensorial), atributo, característica (objeto, elemento), agrupación, relación, clasificación, ordenación, correspondencia, seriación, patrón, cambio.
Números y Operaciones	cuantificador, cantidad (discreta, continua), número, numeral, numeración, enumeración, subitización, contaje, conteo, operación (aritmética), cálculo, suma, adición, resta, sustracción.
Geometría	espacio, espacial, movimiento, posición (relativa), sentido de la dirección, distancia, figura (geométrica), línea (recta, curva), cuerpo geométrico, transformación (métrica; geométrica).
Medida	medida (medir), magnitud, atributo (mensurable), tamaño (volumen), longitud, altura, masa (peso), capacidad, grosor, tiempo.
Estadística y Probabilidad	estadística, dato (recolección, representación, interpretación), tabla (estadística, de recuento, de frecuencias), probabilidad, incertidumbre (seguro, probable, imposible).

El análisis se ha efectuado en el Anexo II del decreto, en el que se describen los contenidos educativos de las tres áreas de la Educación Infantil. El término "contenidos educativos" se utiliza en un sentido amplio en el documento e incluye los niveles de desempeño (competencias específicas) y los saberes básicos (conocimientos, destrezas y actitudes).

2.1. Álgebra temprana

Una primera búsqueda genérica del término "álgebra (temprana)" en la legislación educativa española de infantil no muestra ninguna coincidencia, lo cual no significa que no se aborden conocimientos en torno a este bloque de contenidos.

El álgebra temprana es una propuesta de cambio curricular que emerge a partir de diversos estudios (Carraher y Schliemann, 2007; Kaput, 2000), cuyo propósito es promover el desarrollo de habilidades asociadas al pensamiento algebraico desde la Educación Infantil (Alsina, 2019b; Cai y Knuth, 2011; Kaput et al., 2017; NCTM, 2003). En este sentido, los currículos contemporáneos de países como Estados Unidos, Australia y Singapur, entre otros, no han quedado ajenos a estos planteamientos y han incorporado conocimientos de naturaleza algebraica desde las primeras edades. A partir del análisis de contenido de estos currículos, Pincheira y Alsina (2021) han identificado los conocimientos matemáticos involucrados en la resolución de tareas que promueven el desarrollo del pensamiento algebraico temprano en Educación Infantil. Desde este prisma, caracterizan el álgebra temprana como:

> La capacidad de desarrollar modos de pensamiento algebraico durante las primeras edades en situaciones vinculadas tanto al álgebra propiamente como a otras áreas del currículo de matemáticas, tales como números, geometría, medida, etc. Para empoderar estos modos de pensamiento algebraico, se debería capacitar a todos los niños y niñas de Educación Infantil para experimentar con elementos u objetos a partir del reconocimiento de atributos con el propósito de establecer relaciones (clasificaciones, ordenaciones, correspondencia, etc.), realizar seriaciones a partir de patrones de repetición (identificación, construcción y representación del patrón) y describir cambios cualitativos y cuantitativos (Pincheira y Alsina, 2021, p. 175-176).

Tomando en consideración los elementos de esta definición, junto con los términos de búsqueda de la Tabla 1, en la Tabla 2 se muestran los contenidos educativos del álgebra temprana en el decreto de infantil.

Los conocimientos asociados al álgebra temprana se localizan principalmente en el área 2 y, en menor medida, en el área 1. En ambos ciclos, estos conocimientos se refieren sobre todo al reconocimiento de cualidades y atributos de los objetos para comparar semejanzas y diferencias y establecer relaciones (clasificaciones, ordenaciones y correspondencias), por lo que no se aprecian diferencias substanciales a lo largo de la etapa de infantil, sino más bien una continuidad: en el primer ciclo se otorga especial importancia a descubrir las características de los objetos y qué acciones pueden hacerse con ellos; mientras que, en el segundo ciclo, los niños deben progresar en la exploración de las cualidades y atributos para realizar distintos tipos de relaciones e iniciarse en la observación de los efectos que producen los cambios, contextualizados en el propio cuerpo y el medio físico.

Desde un punto de vista general, la investigación en torno al álgebra temprana en Educación Infantil aborda tres tipos de conocimientos matemáticos importantes (Alsina, 2022):

- Reconocimiento de atributos para establecer relaciones: clasificaciones, ordenaciones, correspondencias, etc.
- Patrones de repetición: identificación, construcción y representación del patrón.
- Descripción de cambios: cualitativos y cuantitativos.

Como puede observarse en la Tabla 2, el primer grupo de conocimientos es, con diferencia, el más presente en el decreto 95/2022. Estos conocimientos están bien alineados con los planteamientos de diversos organismos y autores que subrayan la necesidad de que, en un primer momento, es imprescindible que los niños exploren los objetos del entorno para identificar sus distintas cualidades y atributos, como paso previo imprescindible para poder establecer relaciones entre ellos. Así, por ejemplo, Alsina (2015), entre otros, hace referencia al desarrollo de estos contenidos en el primer ciclo (0-3 años); mientras que otros autores como Canals (1989) y Alsina (2006, 2022), proponen incluso una distribución por edades para niños del segundo ciclo (3-6 años) alrededor de cuestiones relacionadas al reconocimiento de atributos y la realización agrupaciones de elementos con distintos niveles de dificultad en función de la edad.

La referencia a los patrones, en cambio, es nula en la legislación educativa española de infantil. En Alsina (2019a) ya se proponía una actualización en este sentido, recomendando que se hiciera mención explícita a la comprensión de patrones de repetición sencillos desde

Tabla 2. El álgebra temprana en el Real Decreto 95/2022

	Primer ciclo (0-3 años)	**Segundo ciclo (3-6 años)**
Área 1	1.1 Adecuar sus acciones y reacciones a cada situación, en una interacción lúdica y espontánea con el entorno, explorando sus posibilidades motoras y perceptivas y progresando en precisión, seguridad, coordinación e intencionalidad. (p. 14577) El contacto con las otras personas y con los objetos. Iniciativa y curiosidad por aprender nuevas habilidades. (p. 14578)	1.1 Progresar en el conocimiento de su cuerpo ajustando acciones y reacciones y desarrollando el equilibrio, la percepción sensorial y la coordinación en el movimiento. (p. 14579) 1.3 Manejar diferentes objetos, útiles y herramientas en situaciones de juego y en la realización de tareas cotidianas, mostrando un control progresivo y de coordinación de movimientos de carácter fino. (p. 14579) Imagen global y segmentaria del cuerpo: características individuales y percepción de los cambios físicos. (p. 14580) Los sentidos y sus funciones. El cuerpo y el entorno.(p. 14580)
Área 2	1.1 Relacionar objetos a partir de sus cualidades o atributos básicos, mostrando curiosidad e interés. (p. 14584) 3.1 Interesarse por las actividades en contacto con la naturaleza y las características de los elementos naturales del entorno, mostrando respeto hacia ellos y hacia los animales que lo habitan. (p. 14584) Curiosidad e interés por la exploración del entorno y sus elementos. (p. 14584) Exploración de objetos y materiales a través de los sentidos. (p. 14584) Identificación de las cualidades o atributos de los objetos y materiales. Efectos que producen diferentes acciones sobre ellos. (p. 14584) Relaciones de orden, correspondencia, clasificación y comparación. (p. 14584) Efectos de las propias acciones en el medio físico y en el patrimonio natural y cultural. (p. 14584)	1.1 Establecer distintas relaciones entre los objetos a partir de sus cualidades o atributos, mostrando curiosidad e interés. (p. 14585) Cualidades o atributos de objetos y materiales. Relaciones de orden, correspondencia, clasificación y comparación. (p. 14585) Influencia de las acciones de las personas en el medio físico y en el patrimonio natural y cultural. El cambio climático. (p. 14586)
Área 3	Sin datos	Sin datos

los 3 años, idea que también se menciona de forma explícita en el documento del CEMat (2021), pero lamentablemente los legisladores no lo han tenido en cuenta.

La propuesta de iniciar el trabajo de los patrones en Educación Infantil tiene ya una trayectoria consolidada, puesto que promueve el desarrollo cognitivo de los niños, favorece la comprensión de las matemáticas y fomenta los inicios del pensamiento algebraico (Acosta y Alsina, 2020; NCTM, 2003; Rittle-Johnson et al., 2013; Wijns et al., 2019, entre otros). De acuerdo estos autores, las tareas con patrones pueden consistir en: a) duplicar el mismo patrón; b) ampliar la secuencia; c) encontrar elementos faltantes; y d) construir el mismo patrón con diferentes materiales. Las principales habilidades que se movilizan en este tipo de tareas son copiar, extender, interpolar y traducir, respectivamente.

Finalmente, un tercer conocimiento matemático importante en relación al álgebra temprana es el cambio, que está presente de forma muy superficial en el segundo ciclo de infantil. Las ideas sobre cambio y las relaciones que se establecen entre los cambios se abordan en el marco del pensamiento funcional (Warren y Cooper, 2005). En el ámbito de la Educación Infantil, desde una perspectiva amplia, el cambio se conceptualiza como una transformación a través de un operador (Canals, 1989; Alsina, 2006, 2022) y propuestas curriculares como el NCTM (2003) lo mencionan explícitamente: p. ej., "describir cambios cualitativos, como ser más alto o describir cambios cuantitativos, como el aumento de estatura de un alumno en dos pulgadas en un año" (NCTM, 2003, p. 94), por su papel para entender el desarrollo de las funciones en las etapas escolares posteriores. Así, pues, la incorporación de ideas vinculadas al cambio en Educación Infantil permite a los niños "comprender que la mayoría de las cosas cambia con el tiempo, que muchos cambios pueden describirse matemáticamente y son predecibles, ayuda a tener una base para aplicar las matemáticas a otros campos y para entender el mundo" (NCTM, 2003, p. 94).

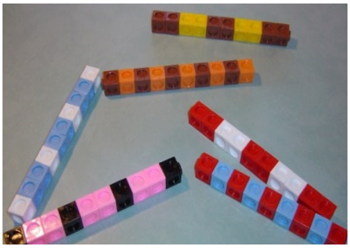
Algunas estrategias y recursos para trabajar todos estos conocimientos en infantil se describen en Alsina (2006, 2020, 2022). Más concretamente, en estas fuentes se muestran ejemplos de actividades implementadas en contextos reales, materiales manipulativos y juegos, recursos literarios, tecnológicos e incluso gráficos. A modo de ejemplo, en la Figura 1 (ver en la página 74) se muestran algunos materiales manipulativos.

2.2. Números y operaciones

Este bloque de contenidos, según el NCTM (2003), es el que tiene mayor peso en la etapa de Educación Infantil; sin embargo, sorprende que, en la legislación educativa española, el término "número" aparece dos veces en todo el documento y el término "cálculo" ninguna. Un análisis más detallado de los contenidos educativos en torno a este bloque de contenido se muestra en la Tabla 3.

Ejemplo de clasificación por un criterio de forma: cubos, pirámides y esferas.

Ejemplo de correspondencia cualitativa a partir de un cuadro de doble entrada (producto cartesiano).



Policubos para construir series y clasificarlas según el patrón de repetición (AB, ABB, AABB).

Ejemplo de cambio con la Máquina de Cambiar Cualidades: entra un círculo amarillo, el operador indica el cambio y deben predecir qué pieza sale.

Figura 1. Materiales manipulativos para trabajar conocimientos importantes de álgebra temprana en infantil. Fuente: Alsina (2022, p. 74-75)

Tabla 3. Los números y operaciones en el Real Decreto 95/2022

	Primer ciclo (0-3 años)	**Segundo ciclo (3-6 años)**
Área 1	Sin datos	Sin datos
Área 2	1.2 Emplear los cuantificadores básicos más significativos relacionados con su experiencia diaria, utilizándolos en el contexto del juego y la interacción con los demás. (p. 14584) Cuantificadores básicos. (p. 14584)	1.2 Emplear los cuantificadores básicos más significativos en el contexto del juego y en la interacción con los demás. (p. 14585) Cuantificadores básicos contextualizados. (p 14586) Funcionalidad de los números en la vida cotidiana. (p. 14586)

	Primer ciclo (0-3 años)	**Segundo ciclo (3-6 años)**
Área 3	Formas escritas y otros símbolos presentes en el entorno. (p. 14591) Acercamiento a los usos del lenguaje escrito. (p. 14591)	Aproximación al código escrito desde las escrituras indeterminadas. (p. 14594) Otros códigos de representación gráfica: imágenes, símbolos, números… (p. 14594)

Aun asumiendo que el decreto 95/2022 establece las enseñanzas mínimas de la Educación Infantil, es bastante preocupante la escasa consideración que el bloque de números y operaciones tiene en el documento. Como puede apreciarse en la Tabla 3, se mencionan los cuantificadores, es decir, términos que se utilizan para referirse a cantidades continuas (todo, mucho, alguno, poco, ninguno, etc.): la funcionalidad de los números en la vida cotidiana, sin ninguna precisión acerca de qué números; y, por último, la aproximación a la representación gráfica de las cantidades de elementos a través de números.

Existe una larga trayectoria de investigación sobre el desarrollo del pensamiento numérico en infantil que Alsina (2022) sintetiza a partir de tres conocimientos matemáticos importantes:

- La comprensión de los números.
- La representación de los números.
- El cálculo aritmético.

En el decreto de infantil se hace alusión a las dos primeras cuestiones, aunque de forma bastante superficial, y se omite completamente la tercera.

En relación a la comprensión de los números, además de los cuantificadores y la funcionalidad de los números, algunas cuestiones fundamentales que mencionan la mayoría de autores y organismos son el reconocimiento de la cantidad de objetos de una colección (el cardinal) a partir de procesos como la subitización y el conteo, la recta numérica (el ordinal) o bien comparar cantidades de elementos por criterios cuantitativos: clasificar, ordenar, hacer correspondencias o seriaciones por criterios cuantitativos, usando los comparativos "más… que"; "menos… que"; "tanto… como"; o "igual… que" (Alsina, 2006, 2015, 2022; Canals, 1989; Castro y Castro, 2016; Chamarro, 2005; Clements y Sarama, 2015; Geist, 2014; NCTM, 2003; entre otros).

Sobre la representación de los números, si bien se recomienda la aproximación al código escrito ya desde el primer ciclo, no se concreta el proceso evolutivo que siguen los niños desde las primeras representaciones concretas de las cantidades de elementos hasta la notación convencional, considerando también otros tipos de representaciones pictóricas (Alsina, 2022). En este sentido, cabe señalar que autores como Alsina (2006) o Berdonneau (2008) precisan que en infantil no debería priorizarse la representación escrita de los números, es decir, su notación convencional. El primero argumenta que dedicar tiempo y esfuerzo a esta práctica va en contra de otras cuestiones más relevantes que necesitan los niños para comprender los números y la segunda menciona que:

> la caligrafía de las cifras no es indispensable en educación infantil, y es mejor esperar a la etapa sensible propia de cada niño, es decir, el momento en que está realmente maduro para este aprendizaje, que se realizará de forma más rápida, fácil y segura (p. 295).

Finalmente, en relación al cálculo, Alsina (2019a) ya había recomendado la necesidad de incluir en el currículo español de infantil una enseñanza mínima que se refiera a la comprensión de los significados de las operaciones elementales de suma y resta y cómo se relacionan unas con otras, o bien calcular con fluidez y hacer estimaciones razonables con las cantidades que pueden comprender, de acuerdo también con el NCTM (2003). En la misma línea, el CEMat (2021) ha recomendado incluir el sentido de las operaciones en infantil; sin embargo, como ya se ha indicado, esta cuestión no ha sido considerada.

Las orientaciones didácticas para trabajar estos aspectos en infantil son claras e impulsan el uso de contextos reales, materiales manipulativos y juegos, recursos literarios, tecnológicos y también gráficos, usados estos últimos al final de itinerarios de enseñanza que garanticen la comprensión tanto de los números como de las operaciones (Alsina, 2006, 2013b, 2022). A modo de ejemplo, en la Figura 2 (ver en la página 77) se muestran algunos materiales manipulativos para abordar la enseñanza y el aprendizaje de los números y las operaciones en el aula de infantil.

2.3. Geometría

Los conocimientos de geometría presentes en el Decreto 95/2022 se identifican principalmente a partir del término “espacial(es)” y “movimiento(s)”, que aparecen en cuatro y trece ocasiones respectivamente para referirse a nociones espaciales y a desplazamientos para ubicarse y explorar el espacio, mientras que otras nociones como “geometría”, “posición” o “figura” no aparecen en ninguna ocasión asociadas al desarrollo del pensamiento geométrico.

En la Tabla 4 (ver en la página 78) se muestra la presencia de contenidos educativos asociados a la geometría en el decreto de infantil.

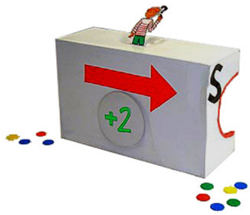
Los conocimientos presentes en la legislación educativa española de Educación Infantil referentes a la geometría se refieren en su totalidad a cuestiones referentes a la posición en el espacio, es decir, a la geometría espacial. Se propone que, a lo largo de toda la etapa de infantil, los niños vayan desarrollando conocimientos que les permitan organizar el espacio que les rodea a partir de la exploración, el movimiento, los desplazamientos, la coordinación visomotora, juegos de expresión corporal, danzas, etc. En cambio, sorprendentemente, no se menciona ninguna enseñanza mínima referente a las figuras geométricas o las transformaciones, lo cual se contrapone con los datos que provienen de la investigación acerca del desarrollo del pensamiento geométrico en infantil.

Así, por ejemplo, cuando Piaget e Inhelder (1948) explicaron cómo se aprende a representar el espacio, mencionaron también que, desde el nacimiento, pero sobre todo a partir del momento en el que los niños empiezan a andar, son capaces de distinguir algunas figuras a partir de la percepción visual y táctil. Unos años más tarde, el matrimonio Van Hiele ofrecieron una explicación mucho más completa para comprender cómo los niños de las primeras edades van desarrollando su conocimiento geométrico relativo a las figuras, a partir

Ejemplo de clasificación por criterios cuantitativos, según la cantidad de agujeros de los botones.

Ejemplos de correspondencia cuantitativa a partir de dominós, en la que tienen que asociar según la cantidad de elementos.

Ejemplo de material para promover la composición de números (Numicon): por ejemplo, reunir dos piezas que sumen tres; etc.



Ejemplo de máquina de cambiar cantidades, para trabajar el sentido de las operaciones de suma y/o resta.

Figura 2. Materiales manipulativos para trabajar conocimientos importantes de números y operaciones en infantil. Fuente: Alsina (2022, p. 107-108)

de la Teoría de los Niveles de Razonamiento Geométrico. Para estos autores, siguiendo un cierto paralelismo con las explicaciones piagetianas relativas al periodo sensoriomotriz, los primeros aprendizajes en relación a las figuras se realizan a partir de la exploración del entorno, aunque a medida que van superando niveles se lleva a cabo un proceso de abstracción progresivo. Desde esta perspectiva, estos autores establecieron un modelo en el que se diferencian cinco niveles de adquisición (Van Hiele y Van Hiele, 1958), tres de los cuales se empiezan a desarrollar a lo largo de los dos ciclos de infantil (Alsina, 2022):

- Nivel 0, visualización y reconocimiento: en este nivel no se presta atención a los elementos de las figuras, sino que los niños identifican las figuras más comunes con su nombre a través de descripciones visuales y de manera global.
- Nivel 1, análisis: en este nivel empiezan a tomar conciencia de los elementos básicos de las figuras y las propiedades que tienen.
- Nivel 2, orden y deducción informal: se dan cuenta de las posibles relaciones que se pueden establecer entre las distintas figuras (p. ej., a partir de clasificaciones según sus propiedades); y empieza el interés y la necesidad de las definiciones y de realizar ciertos razonamientos geométricos.

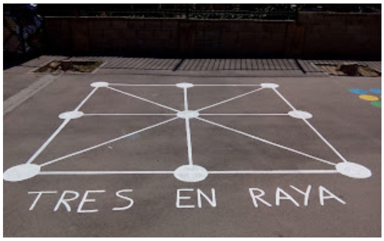
Tabla 4. La geometría en el Real Decreto 95/2022

	Primer ciclo (0-3 años)	**Segundo ciclo (3-6 años)**
Área 1	1.1 Adecuar sus acciones y reacciones a cada situación, en una interacción lúdica y espontánea con el entorno, explorando sus posibilidades motoras y perceptivas y progresando en precisión, seguridad, coordinación e intencionalidad. (p. 14577) Curiosidad e interés por la exploración sensomotriz. Integración sensorial del mundo a través de las posibilidades perceptivas. (p. 14578) Exploración y experiencias activas. El movimiento libre como fuente de aprendizaje y desarrollo. (p. 14578) Experimentación manipulativa y dominio progresivo de la coordinación visomotriz en el contacto con objetos y materiales. (p. 14578) Adaptación y progresivo control del movimiento y de la postura en las diferentes situaciones de la vida cotidiana. (p. 14578)	1.1 Progresar en el conocimiento de su cuerpo ajustando acciones y reacciones y desarrollando el equilibrio, la percepción sensorial y la coordinación en el movimiento. (p. 14579) El movimiento: control progresivo de la coordinación, el tono, el equilibrio y los desplazamientos. (p. 14580) Dominio activo del tono y la postura en función de las características de los objetos, acciones y situaciones. (p. 14580)
Área 2	1.3 Aplicar sus conocimientos acerca de las nociones espaciales básicas para ubicarse en los espacios, tanto en reposo como en movimiento, jugando con el propio cuerpo y con los objetos. (p. 14584) Nociones espaciales básicas en relación con el propio cuerpo y los objetos. (p. 14584)	1.3 Ubicarse adecuadamente en los espacios habituales, tanto en reposo como en movimiento, aplicando sus conocimientos acerca de las nociones espaciales básicas y jugando con el propio cuerpo y con objetos. (p. 14585) Nociones espaciales básicas en relación con el propio cuerpo, los objetos y las acciones, tanto en reposo como en movimiento. (p. 14586)
Área 3	5.2 Manifestar interés y disfrute hacia actividades individuales o colectivas relacionadas con la literatura infantil, las obras musicales, los audiovisuales, las danzas o las dramatizaciones, avanzando en una actitud participativa. (p. 14591) Expresión libre a través del gesto y el movimiento. (p. 14592) Desplazamientos por el espacio. (p. 14592)	3.6 Ajustar armónicamente su movimiento al de los demás y al espacio como forma de expresión corporal libre, manifestando interés e iniciativa. (p. 14592) Posibilidades expresivas y comunicativas del propio cuerpo en actividades individuales y grupales libres de prejuicios y estereotipos sexistas. (p. 14594) Juegos de expresión corporal y dramática. (p. 14594)

Otro conocimiento geométrico relevante que prácticamente no se considera en el decreto de infantil son las transformaciones geométricas: únicamente, se hace alusión a una transformación que cambia la posición (desplazamientos), pero no se mencionan los giros y las simetrías, ni tampoco las transformaciones que permiten cambiar la forma de las figuras (composición y descomposición, principalmente).

Son muchos los autores que han descrito orientaciones didácticas para promover la enseñanza y el aprendizaje de estos conocimientos tanto en la Escuela Infantil como en el segundo ciclo. De forma sintética, estas orientaciones plantean que es necesario trabajar las nociones geométricas a partir del movimiento, la manipulación y la representación gráfica a partir de contextos reales, materiales manipulativos y juegos, recursos literarios, tecnológicos y gráficos, o incluso a través del arte (Alsina, 2006, 2011, 2015, 2022; Canals, 1989; de Castro y Flecha, 2012; Edo, 2008; por citar algunos ejemplos). A modo de ejemplo, en la Figura 3 se muestran algunos materiales manipulativos para trabajar cuestiones relacionadas con la posición y las figuras geométricas.

Taller de topología I y II: material comercializado para trabajar nociones relativas a la posición relativa.



Juegos de patio (o de mesa), como el Tres en Raya, para trabajar la posición relativa y la noción de línea recta (vertical, horizontal o inclinada).

Materiales para la construcción de cuerpos geométricos, principalmente: *Polydron*, etc.

Tangram circular para la composición de formas.

Figura 3. Materiales manipulativos para trabajar conocimientos importantes de geometría en infantil. Fuente: Alsina (2022, p. 140)

2.4. Medida

Del conjunto de palabras clave de la Tabla 1, las que están presentes en el Decreto 95/2022 con un significado asociado al bloque de medida son: "medida(s), que aparece en dos ocasiones; "medir" que está presente dos veces también; y "tiempo" ("temporal" o "temporales"), que aparece ocho veces en total.

En la Tabla 5 se exponen los contenidos educativos que se han identificado en torno a este bloque de contenidos:

Tabla 5. La medida en el Real Decreto 95/2022

	Primer ciclo (0-3 años)	**Segundo ciclo (3-6 años)**
Área 1	1.4 Adquirir nociones temporales básicas para ubicarse en el tiempo a través de las actividades y rutinas de la vida cotidiana, así como de otros acontecimientos. (p. 14577) 3.2 Reconocer y anticipar la sucesión temporal de actividades, ritmos biológicos y pautas socioculturales que estructuran la dinámica cotidiana, asociándola a elementos, procedimientos y actitudes concretas. (p. 14577) Curiosidad e interés por la exploración sensomotriz. Integración sensorial del mundo a través de las posibilidades perceptivas. (p. 14578)	3.2 Respetar la secuencia temporal asociada a los acontecimientos y actividades cotidianas, adaptándose a las rutinas establecidas para el grupo y desarrollando comportamientos respetuosos hacia las demás personas. (p. 14579)
Área 2	Nociones temporales básicas: cambio y permanencia, continuidad; sucesión y simultaneidad; pasado, presente y futuro. (p. 14584)	1.4 Identificar las situaciones cotidianas en las que es preciso medir, utilizando el cuerpo u otros materiales y herramientas para efectuar las medidas. (p. 14585) 1.5 Organizar su actividad, ordenando las secuencias y utilizando las nociones temporales básicas. (p. 14585) Situaciones en las que se hace necesario medir. (p. 14586) El tiempo y su organización: día-noche, estaciones, ciclos, calendario... (p. 14586)
Área 3	Sin datos	Sin datos

Como puede apreciarse en la Tabla 5, los conocimientos referentes al bloque de contenidos de medida están presentes en las áreas 1 y 2 de ambos ciclos. En el primer ciclo, se hace referencia principalmente a aprender a situarse progresivamente en el tiempo a partir de rutinas y de puntos de referencia elementales como pasado, presente y futuro, mientras que en el segundo ciclo se indican otras referencias temporales como el día y la noche, las estaciones, etc., todas ellas necesarias para ordenar las situaciones en el tiempo. Adicionalmente, en el primer ciclo, también se ha identificado un conocimiento acerca de la exploración sensoriomotriz y de las posibilidades perceptivas, que son cuestiones imprescindibles para el descubrimiento de las distintas magnitudes. En el segundo ciclo se da un paso más y se menciona la práctica de medida, pero no se precisan los atributos mensurables (longitud, capacidad, masa, etc.).

Si se tienen en cuenta los datos que aportan diversos organismos y autores (Alsina, 2006, 2015; Canals, 1989; NCTM, 2003; entre otros), en el decreto de infantil se omiten cuestiones relevantes sobre el proceso de aprendizaje de las magnitudes continuas, como por ejemplo la necesidad de realizar comparaciones directas, con el propio cuerpo, de dos valores de una magnitud usando los comparativos "más… que", "menos… que", "igual… que" o "tanto… como", lo que da lugar a relaciones de equivalencia y orden, es decir, clasificaciones y ordenaciones respectivamente (únicamente se menciona esta idea para el caso concreto del tiempo). Asimismo, tampoco están presentes las composiciones y descomposiciones, que son imprescindibles para un conocimiento profundo de los distintos atributos mensurables como la longitud, la masa, la capacidad, etc. (p. ej., observar que el contenido de dos botellas de 1l de agua cabe en una botella de 2l).

Por otro lado, aunque se menciona la práctica de medir, no se explicita que para que los niños pueden llevar a cabo mediciones de una determinada magnitud es necesario cuantificar, es decir, utilizar unidades que pueden ser antropométricas, no convencionales y, al finalizar la etapa, estándares (sobre todo las unidades más características del Sistema Métrico Decimal como el metro, el litro, etc.). En este contexto, Alsina (2022) subraya que, además de conocer las principales unidades de medida, es necesario también empezar a utilizar los instrumentos más característicos para medir las magnitudes elementales y expresar las medidas correctamente.

Para mejorar el proceso de enseñanza y aprendizaje de la medida en infantil teniendo en cuenta el conjunto de conocimientos descritos, es recomendable planificar propuestas en diversos contextos. En este sentido, es recomendable iniciar la enseñanza en situaciones reales que sean significativas para los niños. Se trata, en definitiva, de fomentar que se den cuenta de que los atributos mensurables forman parte de nuestra vida cotidiana y que necesitamos comprenderlos para desenvolvernos mejor en ella. En segundo lugar, se pueden utilizar diversos materiales manipulativos, que pueden ser tanto comercializados como diseñados por el propio profesorado, con la intención de realizar, entre otras acciones, comparaciones directas que den lugar a clasificaciones, ordenaciones, etc. Los juegos en los que interviene la medida son otro recurso metodológico fundamental en las primeras edades, dado que los niños se encuentran en una fase lúdica de su desarrollo, por lo que este recurso nunca debería relegarse a "un premio" para los que terminan antes. Por último, los recursos literarios, tecnológicos y gráficos completan las secuencias de enseñanza de los atributos mensurables desde lo concreto hacia lo abstracto, con el propósito de que los niños desarrollen un buen sentido de la medida, es decir, que puedan reconocer, estimar y contabilizar magnitudes. A modo de ejemplo, en la Figura 4 se muestran algunos materiales manipulativos que pueden apoyar este proceso.

Varas rojas (M. Montessori) para hacer ordenaciones por un criterio de longitud (corto y largo).

Botellas de diversas capacidades para hacer composiciones y descomposiciones (p. ej., con dos botellas de ½ l rellenar una botella de 1 l)

Unidades no convencionales (p. ej., manos hechas con cartulina) para cuantificar la medida de longitud.

Cinta métrica para medir la longitud con unidades convencionales (cm)

Figura 4. Materiales manipulativos para trabajar conocimientos importantes de medida en infantil. Fuente: Alsina (2022, p. 168-169)

2.5. Estadística y probabilidad

El Decreto 95/2002 prácticamente no considera este bloque de contenidos, a pesar de las recomendaciones de diversos autores y organismos que, desde hace ya años, apuestan por la enseñanza de la estadística y la probabilidad en Educación Infantil (Alsina, 2012, 2017, 2018, 2021; Batanero et al., 2021; CEMat, 2021; NCTM, 2003; Rodríguez-Muñiz et al., 2021; Vásquez et al., 2018; entre otros). Estas recomendaciones responden a la necesidad de desarrollar la alfabetización estadística y probabilística desde las primeras edades, con el propósito de que los niños aprendan progresivamente a analizar críticamente la gran avalancha de datos y puedan tomar decisiones en situaciones de incertidumbre.

A pesar de esta ausencia, se ha tratado de identificar algunos contenidos educativos del decreto de infantil que guardan relación con cuestiones del ciclo de investigación estadística o con la probabilidad intuitiva (Tabla 6).

Tabla 6. La estadística y probabilidad en el Real Decreto 95/2022

	Primer ciclo (0-3 años)	**Segundo ciclo (3-6 años)**
Área 1	Estrategias para identificar y evitar situaciones de riesgo o peligro. (p. 14578)	Sin datos
Área 2	Sin datos	Sin datos
Área 3	Sin datos	Iniciación a estrategias de búsqueda de información, reelaboración y comunicación. (p. 14594) Lectura e interpretación crítica de imágenes e información recibida a través de medios digitales. (p. 14594)

En la Tabla 6 se observa que en el decreto de infantil aparece un único conocimiento en torno a la probabilidad, curiosamente en el primer ciclo, que se puede relacionar con la identificación de la posibilidad de ocurrencia de los hechos, y dos conocimientos en el segundo ciclo vinculados con las fases del ciclo de investigación estadística: la recolección (y organización) de datos y la interpretación crítica de información (únicamente a través de medios digitales), aunque no se especifica a qué tipo de información se refiere. En relación a estos conocimientos, por un lado, resulta curioso que, en lo que respecta al desarrollo de estrategias para identificar y evitar situaciones de riesgo o peligro, no haya una continuidad en el segundo ciclo que permita a los niños ir apropiándose de términos vinculados a la probabilidad como imposible, seguro, etc.; por otro lado, sorprende que se mencionen estrategias de búsqueda, reelaboración y comunicación de información, sin nombrar ninguna de ellas (p. ej., tablas y gráficos estadísticos), o bien que se incentive la interpretación crítica de información recibida a través de medios digitales, sin considerar los datos que surgen de contextos reales cercanos a los niños.

Como se ha indicado, en los últimos años la investigación en torno a la Didáctica de la Estadística y la Probabilidad en infantil ha aportado muchos datos sobre qué conocimientos enseñar y cómo, en buena medida porque se ha hecho cada vez más evidente que es necesaria una sociedad más alfabetizada en estos conocimientos. Así, por ejemplo, en la presentación de un monográfico sobre estadística y probabilidad en infantil, Alsina (2021) argumenta y caracteriza la enseñanza de la estadística y la probabilidad a partir de los tres años: las finalidades (¿para qué se enseña? y ¿por qué se enseña?), las prácticas (¿cómo se enseña?) y la organización de la enseñanza (¿cuándo se enseña? y ¿qué se enseña?). De manera muy sintética, y considerando otras aportaciones de organismos y autores como Alsina (2012, 2017, 2018, 2021), Batanero et al. (2021), CEMat (2021), NCTM (2003), Rodríguez-Muñiz et al. (2021) y Vásquez et al. (2018), entre otros, algunas cuestiones elementales que no se recogen en el decreto de infantil son:

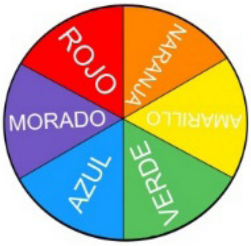
- Empezar a comprender las relaciones entre la probabilidad y la estadística en el marco de la estocástica, que se encarga de estudiar fenómenos que dependen del azar a través del análisis de datos: p. ej., si se lanza un dado una sola vez y sale 5, no garantiza que la próxima vez salga el mismo valor, razón por la cual necesitamos hacer muchos lanzamientos y recoger los datos, organizarlos, representarlos e interpretarlos.
- A partir de un reto, recolectar datos correspondientes a variables cualitativas, principalmente. Seguidamente, definir las categorías de la variable y organizar los datos (clasificarlos) en tablas de recuento y en tablas de frecuencias a través de la transnumeración.
- Representar datos, sobre todo a partir de gráficos de barras simples con material manipulativo, cuidando tanto las cuestiones matemáticas como estéticas, de manera que se muestren tanto las categorías como el intervalo frecuencial (de 1 en 1, habitualmente).
- Interpretar los datos que dan respuesta al reto planteado, comparando numéricamente las frecuencias de cada categoría a partir de los comparativos “más...que”, “menos…que”, “tanto…como”, etc.
- Analizar la posibilidad de ocurrencia en situaciones de incertidumbre (contextos reales y experimentos estocásticos, principalmente), para aprender el uso de lenguaje probabilístico elemental en una escala cualitativa desde imposible hasta seguro, en el contexto de la probabilidad intuitiva.

Son también muchos los organismos y autores que aportan orientaciones didácticas para trabajar estos aspectos en el aula a través de contextos reales, materiales manipulativos y juegos, recursos literarios, tecnológicos y gráficos. En Alsina (2022) se puede consultar una muestra exhaustiva de propuestas alrededor de estos diversos recursos y, a modo de ejemplo, en la Figura 5 (ver en la página 85) se muestran algunos materiales manipulativos que se pueden utilizar para la enseñanza y el aprendizaje de contenidos de estadística y probabilidad.

3. CONSIDERACIONES FINALES

En este artículo se ha analizado la presencia de los contenidos matemáticos en la legislación educativa española de Educación Infantil, en concreto el Real Decreto 95/2022, de 1 de febrero, por el que se establece la ordenación y las enseñanzas mínimas de la Educación Infantil.

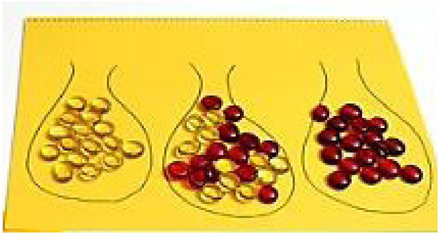
En este decreto, la Educación Infantil se organiza en tres áreas correspondientes a ámbitos propios de la experiencia y el desarrollo infantil: Crecimiento en Armonía; Descubrimiento y Exploración del Entorno; Comunicación y Representación de la Realidad. Aunque se asume completamente esta organización, que trata de evitar sectorizar el conocimiento en asignaturas y, en su lugar, mostrar una visión más globalizada, se considera que el análisis de la presencia de los contenidos matemáticos puede contribuir a reflexionar acerca de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en Educación Infantil. En este sentido, precisamente, el CEMat (2021) señala que “con el cambio



Ruleta de colores: para hacer diversos lanzamientos y analizar los resultados.

Ositos de colores (u otros materiales contables): p. ej., para contabilizar en una tabla de recuento en qué color se detiene la flecha en la ruleta de colores.

Policubos para representar datos (cada cubo puede tomar un valor de 5, 10, etc.).



Experimentos estocásticos con bolitas de colores: p. ej., a partir de tres grupos de bolas (amarillas, amarillas y rojas y rojas respectivamente), razonar de qué grupo se pueden extraer dos bolas rojas.

Figura 5. Materiales manipulativos para trabajar conocimientos importantes de estadísitca y probabilidad en infantil. Fuente: Alsina (2022, p. 200-201)

del currículo de matemáticas que se llevará a cabo con motivo de la implantación de la LOMLOE, la sociedad española tiene la oportunidad de llevar a cabo un proceso de reflexión sobre la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas" (p. 9). Este proceso de reflexión es absolutamente necesario y debería culminar con la toma de decisiones acerca de qué nuevos conocimientos matemáticos se deberían incorporar en el currículo y cuáles se podrían eliminar por su escaso impacto en el desarrollo de las habilidades matemáticas en infantil, por ejemplo.

Para apoyar este proceso de reflexión, se ha contrastado la presencia de los contenidos matemáticos en la legislación educativa de Educación Infantil con los datos que provienen de la investigación en educación matemática infantil. Este contraste se ha realizado con la intención de generar un debate que sirva para mejorar la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en Educación Infantil.

Para analizar la presencia de los contenidos matemáticos, se han utilizado términos clave que se han obtenido a través de un proceso deductivo-inductivo, que ha tenido en cuenta las aportaciones de diversos organismos y autores que han abordado estas cuestiones (Alsina, 2006, 2011, 2015; Alsina et al., 2021; Canals, 1989; Castro y Castro, 2016; Chamarro, 2005; Clements y Sarama, 2015; Geist, 2014; NCTM, 2003; entre otros). A partir del análisis realizado, se extraen las siguientes conclusiones acerca de la presencia de los contenidos matemáticos:

- Álgebra temprana: los contenidos se focalizan en el reconocimiento de cualidades y atributos para establecer relaciones (clasificaciones, ordenaciones, correspondencias, etc.). Considerando la caracterización del álgebra temprana en Educación Infantil de Pincheira y Alsina (2021) o los estándares de contenido del NCTM (2003), entre otros, se omiten absolutamente los patrones y el cambio tiene una presencia implícita.
- Números y operaciones: los contenidos se refieren a los cuantificadores, la funcionalidad de los números en la vida cotidiana y la aproximación a la representación gráfica de las cantidades de elementos, pero no se mencionan aspectos fundamentales para construir la noción de número como la subitización, las relaciones cuantitativas (clasificaciones, ordenaciones, correspondencias), etc. Además, se omite completamente el cálculo aritmético. En general, pues, la presencia de contenidos de números y operaciones es muy escasa, y no se tienen en consideración los datos que provienen de la investigación en educación matemática infantil (Alsina, 2006, 2015, 2022; Canals, 1989; Castro y Castro, 2016; Chamarro, 2005; Clements y Sarama, 2015; Geist, 2014; NCTM, 2003; entre otros).
- Geometría: los contenidos se refieren a cuestiones referentes a la posición en el espacio, es decir, a la geometría espacial, lo cual es necesario, pero no suficiente. En este sentido, no se mencionan las aportaciones acerca de las figuras geométricas (el análisis de sus propiedades, las relaciones entre ellas, etc.) realizadas por Piaget e Inhelder (1948) o Van Hiele y Van Hiele (1958), entre otros. Tampoco se hace referencia a las transformaciones geométricas (Alsina, 2006, 2022; CEMat, 2021; NCTM, 2003).
- Medida: los contenidos se focalizan en el reconocimiento de la magnitud del tiempo y en la práctica de medida, pero sin concretar los atributos mensurables (longitud, capacidad, masa, etc.). Se omiten diversos aspectos relevantes como las comparaciones directas, las composiciones y descomposiciones, la cuantificación a través de distintos tipos de unidades (antropométricas, no convencionales y estándares), o el uso inicial de los instrumentos más característicos para medir (Alsina, 2006, 2015, 2022; Canals, 1989; NCTM, 2003; entre otros).
- Estadística y probabilidad: se hacen referencias implícitas a la recolección (y organización) de datos, la interpretación crítica de información (únicamente a través de medios digitales) y a la posibilidad de ocurrencia de los hechos, pero prácticamente no se considera este bloque de contenidos, a pesar de las recomendaciones de diversos autores y organismos que, desde hace ya años, apuestan por la enseñanza de la estadística y la probabilidad en Educación Infantil (Alsina, 2012, 2017, 2018, 2021; Batanero et al., 2021; CEMat, 2021; NCTM, 2003; Rodríguez-Muñiz et al., 2021; Vásquez et al., 2018; entre otros).

En definitiva, pues, el análisis realizado acerca de la presencia de las matemáticas en el Decreto 95/2022 muestra que, en la legislación educativa española, hay más sombras que luces, es decir, existe una distancia muy considerable con la investigación en educación matemática infantil. Esta es una cuestión muy preocupante, sobre todo para el caso de las Comunidades Autónomas del estado español que reproduzcan íntegramente estos contenidos educativos en los respectivos currículos de infantil, sin una reflexión de fondo fundamentada en los datos que emergen de la investigación en educación matemática infantil.

4. REFERENCIAS

Acosta, Y., y Alsina, Á. (2020). Learning patterns at three years old: Contributions of a learning trajectory and teaching itinerary. *Australasian Journal of Early Childhood, 45*(1) 14–29.

Alsina, Á. (2006). *Como desarrollar el pensamiento matemático de 0 a 6 años.* Octaedro-Eumo.

Alsina, Á. (2011). *Educación matemática en contexto de 3 a 6 años.* ICE-Horsori.

Alsina, Á. (2012). La estadística y la probabilidad en Educación Infantil: conocimientos disciplinares, didácticos y experienciales. *Didácticas Específicas*, *7*, 4-22.

Alsina, Á. (2013a). Early Childhood Mathematics Education: Research, Curriculum, and Educational Practice. *Journal of Research in Mathematics Education, 2*(1), 100-153.

Alsina, Á. (2013b). La numeración y el cálculo en la Educación Infantil: De la mecánica a la comprensión. *Aula de Infantil, 71,* 28-33.

Alsina, Á. (2015). *Matemáticas intuitivas e informales de 0 a 3 años. Elementos para empezar bien.* Narcea, S.A. de Ediciones.

Alsina, Á. (2016). Contribuciones de la investigación en educación matemática infantil para el diseño, gestión y evaluación de buenas prácticas. En J. A. Macías, A. Jiménez, J. L. González, M. T. Sánchez, P. Hernández, C. Fernández, F. J. Ruiz, T. Fernández y A. Berciano (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XX* (pp.19-38). SEIEM.

Alsina, Á. (2017). Contextos y propuestas para la enseñanza de la estadística y la probabilidad en Educación Infantil: un itinerario didáctico. Épsilon, 95, 25-48.

Alsina, Á. (2018). El número natural para organizar, representar e interpretar la información (estadística, azar y probabilidad). En M.C. Múñoz-Catalán y J. Carrillo (Eds.), *Didáctica de las Matemáticas para maestros de Educación Infantil* (pp. 173-211). Editorial Paraninfo.

Alsina, Á. (2019a). La educación matemática infantil en España: ¿qué falta por hacer? *Números. Revista de Didáctica de las Matemáticas, 100,* 85-108

Alsina, Á. (2019b). Del razonamiento lógico-matemático al álgebra temprana en Educación Infantil. *Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia, 8*(1), 1-19.

Alsina, Á. (2020). Itinerario de enseñanza para el álgebra temprana. *Revista Chilena de Educación Matemática, 12*(1), 5-20.

Alsina, Á. (2021). Ça *commence aujourd'hui*: alfabetización estadística y probabilística en la educación matemática infantil. *PNA, 15*(4), 243-266.

Alsina, Á. (2022). *Itinerarios didácticos para la enseñanza de las matemáticas (3-6 años).* Graó.

Batanero, C., Álvarez-Arroyo, R., Hernández-Solís, L.A., y Gea, M. M. (2021). El inicio del razonamiento probabilístico en educación infantil. *PNA, 15*(4), 267-288.

Berdonneau, C. (2008). *Matemáticas acticas (2-6 años).* Graó.

Cai, J., y Knuth, E. (2011). *Early algebraization. A Global dialogue from multiple perspectives*. Springer.

Canals, Mª. A. (1989). *Per una didàctica de la matemàtica a l'escola. I. Parvulari.* Eumo.

Carraher, D. W., y Schliemann, A. D. (2007). Early algebra and algebraic reasoning. En F. K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 669-705). NCTM e IAP.

Castro, E., y Castro, E. (Eds.) (2016). *Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en Educación Infantil.* Pirámide.

CEMat (2021). *Bases para la elaboración de un currículo de Matemáticas en Educación no Universitaria.* Recuperado de https://matematicas.uclm.es/cemat/wp-content/uploads/bases2021.pdf

Chamorro, M.C. (2005). *Didáctica de las matemáticas para Educación Infantil.* Pearson-Prentice.

Clements, H.D., y Sarama J. (2015). *El aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas. El enfoque de las Trayectorias de Aprendizaje.* Learning Tools LLC.

de Azcárraga, J. A. (2022). La nueva legislación educativa: por qué no mejorará la educación pública en España. *Revista Española de Pedagogía, 80* (281), 111-129.

de Castro, C., y Flecha, G. (2012). Buscando indicadores alternativos para describir el desarrollo del juego de construcción con niños de 2 y 3 años. En M. Marín y N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática. Comunicaciones de los grupos de investigación. XV Simposio de la SEIEM* (pp. 455-472). SEIEM.

Edo, M. (2008). Matemáticas y arte en la Educación Infantil. *Uno, 47,* 37-53.

Geist, E. (2014). *Children are born mathematicians: supporting mathematical development, birth to age 8.* Pearson.

Kaput, J. (2000). *Transforming algebra from an engine of inequity to an engine of mathematical power by "algebrafying" the K-12 curriculum*. National Center for Improving Student Learning and Achievement in Mathematics and Science.

Kaput, J. J., Carraher, D.W., y Blanton, M. L. (2017). *Algebra in the Early Grades*. Routledge.

NCTM (2003). *Principios y Estándares para la Educación Matem*ática. Sociedad Andaluza de Educación Matemática THALES.

Piaget, J., e Inhelder, B. (1948). *La représentation de l'espace chez l'enfant.* PUF.

Pincheira, N., y Alsina, Á. (2021). Hacia una caracterización del álgebra temprana a partir del análisis de los currículos contemporáneos de Educación Infantil y Primaria. *Educación Matemática, 33*(1), 153-180.

Rittle-Johnson, B., Fyfe, E. R., McLean, L. E., y McEldoon, K. L. (2013). Emerging understanding of patterning in 4-year-olds. *Journal of Cognition and Development, 14*(3), 376–396.

Rodríguez-Muñiz, L.J., Muñiz-Rodríguez, L., y Aguilar, Á. (2021). El recuento y las representaciones manipulativas: los primeros pasos de la alfabetización estadística. *PNA, 15*(4)*, 311-338.*

RSME, y Fundación Ramón Areces (2020). *El Libro Blanco de las Matemáticas*. Editorial Centro de Estudios Ramón Areces, S.A.

Van Hiele, P.M., y Van Hiele, D. (1958). A method of initiation into geometry at secondary schools. En H. Freudenthal (Ed.), *Report on methods of initiation into geometry* (pp. 67-80). J. B. Wolters.

Vásquez, C., Díaz-Levicoy, D., Coronata, C., y Alsina, Á. (2018). Alfabetización estadística y probabilística: primeros pasos para su desarrollo desde la Educación Infantil. *Cadernos Cenpec, 8*(1), 154-179.

Warren, E., y Cooper, T. (2005). Introducing functional thinking in year 2: A case study of early algebra teaching. *Issues in Early Childhood, 6*(2), 150-162.

Wijns, N., Torbeyns, J., De Smedt, B., y Verschaffel, L. (2019). Young children's patterning competencies and mathematical development: A review. En K. Robinson, H. Osana, y D. Kotsopoulos (Eds.), *Mathematical Learning and Cognition in Early Childhood* (pp. 139–161). Springer International Publishing.

Épsilon - *Revista de Educación Matemática* *2022, nº 111, 91-103*

Cuadrados mágicos aditivos y multiplicativos de orden 4

Luis Barrios Calmaestra
I.E.S. José de Mora. Baza. Granada

Resumen: *En este artículo se describen procedimientos para la construcción de cuadrados mágicos aditivos de orden cuatro y, a partir de ellos, se explica la forma de construir cuadrados mágicos multiplicativos de orden cuatro con todas las propiedades de los cuadrados aditivos. También se describe la construcción de cuadrados mágicos aditivos y multiplicativos utilizando cuadrados latinos.*
Palabras clave: *cuadrado mágico aditivo, cuadrado mágico multiplicativo, cuadrado latino, divisores de un número.*

Additive and multiplicative magic squares of order 4

Abstract: *This article describes procedures for the construction of additive magic squares of order four and, from them, it is explained how to construct multiplicative magic squares of order four with all the properties of additive squares. It is also described the construction of additive and multiplicative magic squares using latin squares.*
Keywords: *additive magic square, multiplicative magic square, latin square, divisors of a number.*

1. INTRODUCCIÓN

En el artículo de Barrios (2021) se ha descrito la forma de construir infinitos cuadrados mágicos multiplicativos de orden 3, 4 y 5 utilizando todos los divisores de números de la forma $N=p^n \cdot q^n$, siendo p y q números primos. Los cuadrados de orden cuatro se construyeron formando un cuadrado de 4x4 con parejas de números (*m,n*), tomando ambas coordenadas los valores 0, 1, 2 y 3, de forma que, en cada fila, en cada columna y, en las dos diagonales, no se repitiera ni la primera ni la segunda coordenada. Ambas coordenadas se utilizaron para los exponentes de los números primos p y q.

En este artículo se describen, en primer lugar, procedimientos para la construcción de cuadrados mágicos aditivos de orden 4, intercambiando los números de filas, columnas o diagonales, o también sumando cuadrados latinos. Los cuadrados mágicos de orden 4 más conocidos se pueden obtener por algunos de estos métodos.

En segundo lugar, se describen procedimientos para la construcción de cuadrados mágicos multiplicativos de orden 4 utilizando todos los divisores de los números que tienen 16 divisores. Además de los números cuya factorización es de la forma $p^3 \cdot q^3$, con p y q números primos, existen más números con 16 divisores. A partir de los cuadrados mágicos aditivos, se pueden obtener cuadrados mágicos multiplicativos con las mismas características.

Por último, se explica la obtención de cuadrados mágicos multiplicativos de orden 4 utilizando cuadrados latinos.

2. CUADRADOS MÁGICOS ADITIVOS

Partiendo del cuadrado con los dieciséis primeros números naturales ordenados por filas, se pueden construir distintos cuadrados mágicos aditivos, de orden 4 y de constante mágica 34, intercambiando las posiciones de algunos números (S. D).

Por ejemplo, invirtiendo los números de las dos diagonales:

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

16	2	3	13
5	11	10	8
9	7	6	12
4	14	15	1

El cuadrado mágico de Albert Durero se obtiene, a partir del anterior, intercambiando las dos columnas centrales (Barrios, 2020a):

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

Además de las propiedades que debe tener un cuadrado para considerarse mágico, también suman 34, distintos grupos de cuatro números, entre ellos:

- Los números situados en los cuatro cuadrados centrales.
- Los números situados en las cuatro esquinas.
- Los números centrales de las primera y última filas.
- Los números centrales de las primera y última columnas.

- Los números de los cuatro cuadrados que resultan al dividir por la mitad horizontal y verticalmente.
- Las esquinas de los cuadrados de 3x3 que se pueden formar.

3. SUMA DE CUADRADOS LATINOS

Un cuadrado latino de orden n es un cuadrado de n filas y n columnas en las que se colocan n números, de forma cada número aparece n veces y que en cada fila y en cada columna aparecen los n números una sola vez. No se exige esta condición para las diagonales.

Otro procedimiento para construir cuadrados mágicos aditivos de orden 4, con los dieciséis primeros números naturales, es el siguiente.

Se expresan los números del 1 al 16 como las siguientes sumas:

1 = 0 + 1	2 = 0 + 2	3 = 0 + 3	4 = 0 + 4
5 = 4 + 1	6 = 4 + 2	7 = 4 + 3	8 = 4 + 4
9 = 8 + 1	10 = 8 + 2	11 = 8 + 3	12 = 8 + 4
13 = 12 + 1	14 = 12 + 2	15 = 12 + 3	16 = 12 + 4

En el primer sumando aparecen los números 0, 4, 8 y 12. En el segundo, los números 1, 2, 3 y 4.

Se construyen ahora dos cuadrados de cuatro filas y cuatro columnas con los dos conjuntos de números, de forma que, en cada fila, en cada columna y en las dos diagonales principales no se repita ningún número. Sumando los números de las casillas que ocupan la misma posición en ambos cuadrados se obtienen un cuadrado mágico aditivo. Hay que evitar la repetición de números en el cuadrado final.

El cuadrado mágico conocido como Chautisa Yantra, se obtiene como suma de los números de los cuadrados (Barrios, 2020b):

4	8	0	12		3	4	1	2		7	12	1	14
0	12	4	8		2	1	4	3		2	13	8	11
12	0	8	4	+	4	3	2	1	=	16	3	10	5
8	4	12	0		1	2	3	4		9	6	15	4

Este cuadrado tiene todas las propiedades del cuadrado de Durero y, además:

- los números situados en todos los cuadrados de 2x2 de filas y columnas consecutivas también suman 34.
- los tres números situados en las diagonales secundarias junto con el número situado en la esquina opuesta también suman 34.

Un cuadrado mágico con la propiedad anterior se dice que es un cuadrado mágico pandiagonal.

También es posible obtener un cuadrado mágico repitiendo números en filas o columnas en los dos cuadrados que se suman. Por ejemplo, el cuadrado mágico de Alberto Durero se obtiene de la siguiente forma:

12	0	0	12
4	8	8	4
8	4	4	8
0	12	12	0

+

4	3	2	1
1	2	3	4
1	2	3	4
4	3	2	1

=

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

4. CUADRADOS MÁGICOS MULTIPLICATIVOS

Un cuadrado mágico multiplicativo de orden 4, no se puede construir con los dieciséis primeros números naturales. En el artículo "Barrios, L., 2021" se ha tratado la construcción de cuadrados mágicos multiplicativos con todos los divisores de los números de la forma $N=p^3q^3$, que tienen exactamente 16 divisores.

Pero existen más números con 16 divisores. Al expresar 16, como producto de números naturales, de todas las formas posibles, se tiene:

$$16 = 16\cdot 1 = 8\cdot 2 = 4\cdot 4 = 4\cdot 2\cdot 2 = 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2$$

Entonces, tienen exactamente 16 divisores los números cuya factorización es de la forma:

- $N=p^{15}$, siendo p primo. Número de divisores: 15+1=16.
- $N=p^7\cdot q$, siendo p y q números primos. Número de divisores: 8·2=16.
- $N=p^3\cdot q^3$, siendo p y q números primos. Número de divisores: 4·4=16.
- $N=p^3\cdot q\cdot r$, siendo p, q y r números primos. Número de divisores: 4·2·2=16.
- $N=p\cdot q\cdot r\cdot t$, siendo p, q, r y t números primos. Número de divisores: 2·2·2·2=16.

Los procedimientos que se describen a continuación para la construcción de cuadrados mágicos multiplicativos son válidos también para números que puedan expresarse de estas formas con factores no primos, aunque para estos números los cuadrados construidos solo contienen parte de sus divisores y no todos, como sucede cuando los factores son primos.

Al realizar giros o simetrías en cada uno de los cuadrados se obtiene otro cuadrado mágico con las mismas características.

5. DIVISORES DE N=p^{15}. CONSTANTE MÁGICA: p^{30}

Si p es un número primo, el número p^{15} tiene 15+1=16 divisores:

$$\text{div}(p^{15}) = \{1, p, p^2, p^3, p^4, p^5, p^6, p^7, p^8, p^9, p^{10}, p^{11}, p^{12}, p^{13}, p^{14}, p^{15}\}$$

El producto de todos los divisores es p^{120}. La constante mágica es la raíz cuarta de este producto p^{30}.

Si se escoge cualquier cuadrado mágico aditivo, por ejemplo, el cuadrado Chautisa Yantra, y se sustituye el número de cada casilla por una potencia de p, con dicho número menos una unidad como exponente, se obtiene un cuadrado mágico multiplicativo con las mismas características que el cuadrado mágico aditivo y con constante mágica: p^{30}.

7	12	1	14
2	13	8	11
16	3	10	5
9	6	15	4

→

p^6	p^{11}	1	p^{13}
p	p^{12}	p^7	p^{10}
p^{15}	p^2	p^9	p^4
p^8	p^5	p^{14}	p^3

Ejemplo para p=2. Constante mágica: 2^{30}.

2^6	2^{11}	1	2^{13}
2	2^{12}	2^7	2^{10}
2^{15}	2^2	2^9	2^4
2^8	2^5	2^{14}	2^3

6. DIVISORES DE N=$p^7 \cdot q$. CONSTANTE MÁGICA: $p^{14} \cdot q^2$

Si p y q son dos números primos, el número p^7q tiene $(7+1)\cdot(1+1)$=16 divisores:

$$\text{div}(p^7q) = \{1, p, p^2, p^3, p^4, p^5, p^6, p^7, q, pq, p^2q, p^3q, p^4q, p^5q, p^6q, p^7q\}$$

El producto de todos los divisores es $p^{56}\cdot q^8$. La constante mágica es la raíz cuarta de este producto, $p^{14}\cdot q^2$.

Se pueden distribuir los 16 divisores en un cuadrado, situando los números de la primera fila y la primera columna y, en las casillas restantes, el producto del primer elemento de la fila por el primer elemento de la columna.

1	q	p	pq
p^2	p^2q	p^3	p^3q
p^4	p^4q	p^5	p^5q
p^6	p^6q	p^7	p^7q

Si se escoge cualquier cuadrado mágico aditivo, por ejemplo, el cuadrado Chautisa Yantra, y se sustituye el número de cada casilla por el número que ocupa esa casilla en el cuadrado con los divisores, se obtiene un cuadrado mágico multiplicativo con las mismas características que el cuadrado mágico aditivo y con constante mágica: $p^{14}\cdot q^2$.

7	12	1	14
2	13	8	11
16	3	10	5
9	6	15	4

$\rightarrow$

p^3	p^5q	1	p^6q
q	p^6	p^3q	p^5
p^7q	p	p^4q	p^2
p^4	p^2q	p^7	pq

Ejemplo para $p=2$ y $q=3$. Constante mágica: $2^{14}\cdot 3^2=147456$.

8	96	1	192
3	64	24	32
384	2	48	4
16	12	128	6

7. DIVISORES DE $N=p^3\cdot q^3$. CONSTANTE MÁGICA: $p^6\cdot q^6$

Si p y q son dos números primos, el número p^3q^3 tiene $(3+1)\cdot(3+1)=16$ divisores:

$$\mathrm{div}(p^3q^3) = \{1, p, q, pq, p^2, q^2, pq^2, p^2q, p^2q^2, p^3, q^3, pq^3, p^3q, p^2q^3, p^3q^2, p^3q^3\}$$

El producto de todos los divisores es $p^{24}\cdot q^{24}$. La constante mágica es la raíz cuarta de este producto, $p^6\cdot q^6$.

Se pueden distribuir los 16 divisores en un cuadrado, situando los números de la primera fila y la primera columna y, en las casillas restantes, el producto del primer elemento de la fila por el primer elemento de la columna.

Épsilon, 2022, nº 110, 91-103, ISSN: 2340-714X

1	p	q	pq
p^2	p^3	p^2q	p^3q
q^2	pq^2	q^3	pq^3
p^2q^2	p^3q^2	p^2q^3	p^3q^3

Si se escoge cualquier cuadrado mágico aditivo, por ejemplo, el cuadrado Chautisa Yantra, y se sustituye el número de cada casilla por el número que ocupa esa casilla en el cuadrado con los divisores, se obtiene un cuadrado multiplicativo con las mismas características que el cuadrado mágico aditivo y con constante mágica: $p^6 \cdot q^6$.

7	12	1	14
2	13	8	11
16	3	10	5
9	6	15	4

→

p^2q	pq^3	1	p^3q^2
p	p^2q^2	p^3q	q^3
p^3q^3	q	pq^2	p^2
q^2	p^3	p^2q^3	pq

Ejemplo para p=2 y q=3. Constante mágica: $2^6 \cdot 3^6=46656$.

12	54	1	72
2	36	24	27
216	3	18	4
9	8	108	6

8. DIVISORES DE $N=p^3 \cdot q \cdot r$. CONSTANTE MÁGICA: $p^6 \cdot q^2 \cdot r^2$

Si p, q y r son tres números primos, el número p^3qr tiene $(3+1)\cdot(2+1)\cdot(2+1)=16$ divisores:

$$div(p^3q^3) = \{1, p, q, r, pq, pr, qr, pqr, p^2, p^2q, p^2r, p^2qr, p^3, p^3q, p^3r, p^3qr\}$$

El producto de todos los divisores es $p^{24} \cdot q^8 \cdot r^8$. La constante mágica es la raíz cuarta de este producto, $p^6 \cdot q^2 \cdot r^2$.

Se pueden distribuir los 16 divisores en un cuadrado, situando los números de la primera fila y la primera columna y, en las casillas restantes, el producto del primer elemento de la fila por el primer elemento de la columna.

1	q	r	qr
p	pq	pr	pqr
p^2	p^2q	p^2r	p^2qr
p^3	p^3q	p^3r	p^3qr

Si se escoge cualquier cuadrado mágico aditivo, por ejemplo, el cuadrado Chautisa Yantra, y se sustituye el número de cada casilla por el número que ocupa esa casilla en el cuadrado con los divisores, se obtiene un cuadrado mágico multiplicativo con las mismas características que el cuadrado mágico aditivo y con constante mágica: $p^6 \cdot q^2 \cdot r^2$.

7	12	1	14
2	13	8	11
16	3	10	5
9	6	15	4

→

pr	p^2qr	1	p^3q
q	p^3	pqr	p^2r
p^3qr	r	p^2q	p
p^2	pq	p^3r	qr

Ejemplo para p=2, q=3 y r=5. Constante mágica: $2^6 \cdot 3^2 \cdot 5^2 = 14400$.

10	60	1	24
3	8	30	20
120	5	12	2
4	6	40	15

9. DIVISORES DE N=p·q·r·t. CONSTANTE MÁGICA: $p^2 \cdot q^2 \cdot r^2 \cdot t^2$

Si p, q, r y t son cuatro números primos, el número pqrt tiene (1+1)·(1+1)·(1+1)·(1+1)=16 divisores:

div(pqrt) = {1, p, q, r, t, pq, pr, pt, qr, qt, rt, pqr, pqt, prt, qrt, pqrt}

El producto de todos los divisores es $p^8 \cdot q^8 \cdot r^8 \cdot t^8$. La constante mágica es la raíz cuarta de este producto, $p^2 \cdot q^2 \cdot r^2 \cdot t^2$.

Se pueden distribuir los 16 divisores en un cuadrado, situando los números de la primera fila y columna y, en las casillas restantes, el producto del primer elemento de la fila por el primer elemento de la columna.

1	r	t	rt
p	pr	pt	prt
q	qr	qt	qrt
pq	pqr	pqt	pqrt

Si se escoge cualquier cuadrado mágico aditivo, por ejemplo, el cuadrado Chautisa Yantra (Barrios, 2020b), y se sustituye el número de cada casilla por el número que ocupa esa casilla en el cuadrado con los divisores, se obtiene un cuadrado mágico multiplicativo con las mismas características que el cuadrado mágico aditivo y con constante mágica: $p^2 \cdot q^2 \cdot r^2 \cdot t^2$.

7	12	1	14
2	13	8	11
16	3	10	5
9	6	15	4

→

pt	qrt	1	pqr
r	pq	prt	qt
pqrt	t	qr	p
q	pr	pqt	rt

Ejemplo para p=2, q=3, r=5, t=7. Constante mágica: $2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7^2 = 44100$.

14	105	1	30
5	6	70	21
210	7	15	2
3	10	42	35

10. PRODUCTO DE CUADRADOS LATINOS

Un procedimiento descrito para la construcción de cuadrado mágicos aditivos ha sido a partir de dos cuadrados latinos. También este método se puede utilizar para la construcción de cuadrados mágicos multiplicativos.

Se construyen ahora dos cuadrados latinos de cuatro filas y cuatro columnas con dos conjuntos de números, de forma que, en cada fila, en cada columna y en las dos diagonales principales no se repita ningún número. Multiplicando los números de las casillas que ocupan la misma posición en ambos cuadrados se obtienen un cuadrado mágico multiplicativo. Hay que evitar la repetición de números en el cuadrado final.

Ejemplo. Si se construye un cuadrado latino con los números 1, 2, 3 y 4 y otro con los números 1, 5, 6 y 7, se obtiene uno de los cuadrados mágicos multiplicativos de menor constante mágica que se puede construir, 5040=7! Se pueden construir varios cuadrados mágicos multiplicativos con estos cuadrados latinos. Los cuadrados mágicos obtenidos con estos números no son pandiagonales.

1	2	3	4
3	4	1	2
4	3	2	1
2	1	4	3

x

1	5	6	7
7	6	5	1
5	1	7	6
6	7	1	5

=

1	10	18	28
21	24	5	2
20	3	14	6
12	7	4	15

La constante mágica más pequeña para un cuadrado mágico multiplicativo pandiagonal es $14400=2^6\cdot3^2\cdot5^2$. Este cuadrado mágico multiplicativo fue publicado por Harry A. Sayles (1913). Se obtiene con los divisores de $N=p^3\cdot q\cdot r$, con $p=2$, $q=3$ y $r=5$, $(120=2^3\cdot3\cdot5)$.

1	8	2	4
2	4	1	8
4	2	8	1
8	1	4	2

x

1	3	5	15
15	5	3	1
3	1	15	5
5	15	1	3

=

1	24	10	60
30	20	3	8
12	2	120	5
40	15	4	6

Igual que éste, todos los cuadrados mágicos multiplicativos obtenidos anteriormente con los números que tienen dieciséis divisores se pueden obtener multiplicando los números de dos cuadrados latinos.

Ejemplo. Uno de los cuadrados mágicos multiplicativos que se pueden obtener con los divisores de $N=p^3\cdot q^3$, con $p=2$ y $q=3$, se puede obtener también con los dos cuadrados latinos siguientes. En este caso se repiten números en las diagonales de los cuadrados latinos.

4	2	1	8
2	4	8	1
8	1	2	4
1	8	4	2

x

3	27	1	9
1	9	3	27
27	3	9	1
9	1	27	3

=

12	54	1	72
2	36	24	27
216	3	18	4
9	8	108	6

11. PROPUESTA DE UTILIZACIÓN EN EL AULA

La utilización de actividades de Matemáticas Recreativas en nuestras clases nos permite captar la atención de nuestro alumnado, utilizar estrategias de resolución de problemas y hacer pensar y reflexionar sobre los procedimientos de resolución utilizados y los resultados obtenidos.

Si además estas actividades tienen relación con los contenidos académicos que estemos trabajando en ese momento, nos ayudarán a reforzarlos y a que el alumnado vea utilidad y se sienta más interesado por lo que está estudiando.

Los cuadrados mágicos, tanto aditivos como multiplicativos, despiertan esta curiosidad en el alumnado. Las coincidencias en las sumas o en los productos de filas, columnas y diagonales que tiene un pequeño conjunto de números dispuestos en filas y columnas le dan esa imagen de mágicos que indica su nombre.

Los cursos apropiados para realizar esta actividad pueden ser segundo y tercero de E.S.O. Los contenidos del currículo relacionados son divisibilidad, potencias, raíces, giros, simetrías y valor numérico de una expresión algebraica.

La actividad se puede plantear intentado que, dirigidos por el profesor, sean los alumnos quienes vayan realizando los pasos necesarios para la construcción de los cuadrados mágicos.

Empezando por los cuadrados mágicos aditivos.

1. Construye un cuadrado de cuatro filas y cuatro columnas con los dieciséis primeros números naturales. Intenta construir un cuadrado mágico aditivo intercambiando números.
2. Construye dos cuadrados latinos con cuatro números. Suma los números que ocupan el mismo lugar en cada uno para obtener un cuadrado mágico, procurando que sean números distintos. Investiga todas las propiedades que puede tener.

Y continuando con los cuadrados mágicos multiplicativos.

3. Sabiendo que el número de divisores de un número se obtiene multiplicando los exponentes más una unidad de todos los factores primos que aparecen en su descomposición en factores primos, ¿cómo debe ser la factorización de un número para que tenga exactamente dieciséis divisores?
4. Calcula en cada uno de los casos encontrados en la actividad anterior, el número más pequeño posible con esa factorización y sus dieciséis divisores.
5. Después de calcular los números y todos sus divisores, para construir el cuadrado mágico se necesita calcular la constante mágica. Se pueden pedir a los alumnos ideas para su cálculo. Una vez descubierta la forma de calcularla, vamos a hacerlo de forma generalizada. Se multiplican todos los divisores aplicando el producto de potencias con la misma base. Ahora hay que calcular la raíz cuarta para conocer el producto de los elementos de cada línea, que también se puede deducir aplicando propiedades de las potencias.
6. A continuación, con las indicaciones del profesor, se construye el cuadrado mágico multiplicativo, siguiendo los procedimientos descritos en el artículo.
7. Vamos a realizar la comprobación de que los cuadrados numéricos construidos verifican las propiedades de un cuadrado mágico multiplicativo y estudiar también el resto de las propiedades que encierra el cuadrado obtenido.
8. Construye dos cuadrados latinos con cuatro números. Multiplica los números que ocupan el mismo lugar en cada uno para obtener un cuadrado mágico multiplicativo, procurando que sean números distintos. Investiga todas las propiedades que puede tener.

9. En cada uno de los cuadrados construidos en este artículo se indica que al realizar giros o simetrías en el cuadrado se obtiene otro cuadrado mágico con las mismas características. Se puede proponer también al alumnado que realice giros de 90º, 180º y 270º o simetrías respecto de los ejes de simetría de un cuadrado y que obtenga los cuadrados resultantes. Sin hacer cálculos, deducir si el nuevo cuadrado también es un cuadrado mágico multiplicativo.

10. Para finalizar, como se pueden construir infinitos cuadrados mágicos multiplicativos, vamos a repartir entre nuestro alumnado cuadrados mágicos. Les proponemos que elijan uno de los procedimientos, los números primos necesarios y que construyan con ellos un cuadrado de orden 4, sustituyendo en la expresión general de los cuadrados los valores de p, q, r y t por los primos elegidos. Pueden hacer algunas comprobaciones para asegurarse de que han obtenido cuadrados mágicos multiplicativos.

12. CONCLUSIÓN

Algo tan sorprendente como los cuadrados mágicos aditivos o multiplicativos, en especial los de orden cuatro, debido a la cantidad de agrupaciones de cuatro números cuya suma o producto coincide con la constante mágica, puede hacer pensar al que los conoce con poca profundidad, en la existencia de un número muy reducido de estos objetos matemáticos. Sin embargo, en este artículo se estudian distintos procedimientos para su construcción y, en cada uno de los casos estudiados, existen infinitos cuadrados mágicos, con las propiedades exigidas para tener esa denominación y con otras propiedades que los hacen más interesantes todavía.

Los cuadrados mágicos aditivos se pueden construir con números naturales consecutivos. Los cuadrados mágicos multiplicativos no se pueden construir así, pero sí se pueden construir utilizando todos los divisores de los números cuyo número de divisores es un número cuadrado perfecto. En el caso de los de orden cuatro, con dieciséis divisores. En este artículo se ha comprobado que, a partir de cualquier cuadrado mágico aditivo de orden cuatro, se pueden construir infinitos cuadrados mágicos multiplicativos, con las mismas propiedades que los cuadrados aditivos.

Y todos los procedimientos descritos para la construcción de cuadrados mágicos aditivos y multiplicativos son perfectamente comprensibles para nuestros alumnos, pues utilizan conocimientos estudiados en los cursos de Educación Secundaria Obligatoria. Esto supone que, además de darles a conocer estos objetos matemáticos, pueden participar en su construcción, haciéndoles aumentar el interés y la admiración por ellos.

13. REFERENCIAS

Barrios, L. (2020a). Cuadrado mágico de Durero. Adición matemática. https://blogsaverroes.juntadeandalucia.es/recursosdematematicas/cuadrado-magico-de-alberto-durero/

Barrios, L. (2020b). Chautisa Yantra. https://blogsaverroes.juntadeandalucia.es/recursosdematematicas/chautisa-yantra/

Barrios, L. (2021). Construcción de infinitos cuadrados mágicos multiplicativos. *Épsilon, 109,* 75-91.

Sayles, H. (1913). Geometric Magic Squares and Cubes. *The Monist 23*(4):631-640.

S.D. (S. D.). The smallest possible multiplicative magic squares. http://www.multimagie.com/English/Multiplicative.htm