110

2022

epsilon

Revista de Educación Matemática

Editada por la S.A.E.M. "THALES"

epsilon 110

Revista de Educación Matemática

Página de la revista: http://thales.cica.es/epsilon
Revista: epsilon@thales.cica.es

Sociedad Andaluza de Educación Matemática "Thales"

Edita
Sociedad Andaluza de
Educación Matemática "Thales"
Centro Documentación "Thales"
Universidad de Cádiz
C.A.S.E.M.
Facultad de Ciencias
Departamento de Matemáticas
Campus del Río San Pedro
Torre Central, 4ª planta
11510 Puerto Real (Cádiz)
Teléfono: 956012833
Email: thales.matematicas@uca.es

Maquetación
referencias.maquetacion@gmail.com

Depósito Legal
SE-421-1984

ISSN
2340-714X

Período
2022
Suscripción
Anual

SUMARIO / CONTENTS

Épsilon - *Revista de Educación Matemática* *2022, nº 110, 7-24*

Prácticas pedagógicas docentes en la solución de problemas matemáticos

Enrique Mateus-Nieves
ORCID iD: 0000-0002-0500-7450
Edwin Enrique Rodríguez Rojas
ORCID iD: 0000-0003-1107-8578
Universidad Externado de Colombia
jeman124@gmail.com
edwinrodriguezr@hotmail.com

Resumen: *El objetivo de este estudio fue caracterizar las prácticas docentes cuando enseñan a resolver problemas matemáticos de tipo aritmético, algebraico y geométrico. Esta soportado teóricamente en dos categorías: las prácticas pedagógicas docentes desde la perspectiva de Shulman y la resolución de problemas matemáticos. Se trata de un estudio de caso múltiple, de tipo analítico–descriptivo, con un muestreo sometido a criterios. Entre los resultados encontrados se destaca: compromiso y dedicación de los profesores para enseñar matemáticas. Débil formación disciplinar en los profesores. Deficiencias y desarticulación entre el conocimiento pedagógico del contenido con el disciplinar.*

Palabras clave: *Práctica docente; Conocimiento pedagógico del contenido; Resolución de problemas.*

Teaching pedagogical practices in solving mathematical problems

Abstract: *The aim of this study was to characterise teaching practices when teaching arithmetic, algebraic and geometric mathematical problem solving. It is theoretically supported in two categories: teaching practices from the perspective of Shulman mathematical problem solving. This is a multiple case study, of an analytical-descriptive type, with a sampling subject to criteria. Among the results found, the following stand out: teachers' commitment and dedication to teaching mathematics. Weak disciplinary*

training of teachers. Deficiencies and disarticulation between pedagogical knowledge of content and discipline.
Keywords: *Teaching practice; Pedagogical Knowledge of the content; problem resolution.*

1. INTRODUCCIÓN

En este trabajo mostramos algunos resultados de un trabajo investigativo que se desarrolló durante dos años en una institución de educación básica (primaria y secundaria), de carácter rural, ubicada en el departamento de Cundinamarca, Colombia. Se planteó como problema de investigación considerar si los bajos resultados académicos de los estudiantes en las pruebas extra institucionales (SABER[1] 3, 5, 7 y 9 aplicadas por el estado), referidas a la solución de problemas matemáticos, se debe al tipo de prácticas pedagógicas empleadas por los docentes que enseñan matemáticas, considerando que la mayoría de ellos, no tienen formación profesional en matemáticas. Buscamos caracterizar las concepciones y prácticas pedagógicas de los profesores, que enseñan asignaturas como: aritmética (en primaria), algebra, y geometría (en secundaria), a la acción real del profesor dentro y fuera del aula; dado que, subyacen concepciones pedagógicas que describen y explican los fenómenos educativos que se dan tanto en su estructura como en su funcionamiento. La identificación de tales concepciones, nos llevó a la compresión y explicación a nivel teórico de los elementos y los tipos de relaciones que las conforman y dan esencia al discurso pedagógico que sustenta y da significado a sus prácticas. Por ende, fue importante conocer no sólo el desarrollo de su actividad académica a través de lo que realizan, sino buscar de manera más profunda, las concepciones que dan soporte a dicho quehacer, determinando su avance, retroceso o estancamiento en la calidad de educación que imparten y la manera como asumen el saber y la acción pedagógica.

Se planteó como soporte teórico dos categorías: las prácticas pedagógicas docentes desde la perspectiva de Shulman propuesta en Rojas (2014) y la solución de problemas propuesto por Schoenfeld desde la perspectiva planteada en Contreras y Mejía (2019) y Santos-Trigo (2015). La metodología aplicada estuvo enfocada en estudio de caso múltiple, de tipo analítico–descriptivo, con un muestreo sometido a criterios.

Uno de los elementos identificados que muestra importantes deficiencias es la desarticulación del conocimiento pedagógico dentro de los procesos de aprender y de enseñar. Lo analizamos a la luz de cuatro elementos centrales: el rol de las creencias sobre la enseñanza y aprendizaje en la formación inicial del docente; la importancia del conocimiento pedagógico del contenido como un eje articulador en el proceso de formación; la vinculación entre teoría y práctica para contribuir en el desarrollo de un conocimiento de la enseñanza pertinente a los contextos en donde se implementa; y el desarrollo de prácticas reflexivas como una estrategia para articular y confrontar los anteriores elementos en la formación de los profesores.

1. Aplicadas por el Instituto Colombiano para el fomento de la educación superior (ICFES).

2. ANTECEDENTES

Quintero y Parra (2011) analizan la interdisciplinariedad que se da algunas instituciones educativas en Colombia, las formas de integración curricular, los modelos pedagógicos, el rol del docente-pensamiento del profesor; concluyendo que el modelo educativo implementado por estas instituciones da respuesta parcial a las necesidades de los estudiantes, dado que poco transforman el enfoque tradicional en un aprendizaje significativo que incorpore a los docentes en su práctica pedagógica y desde este espacio, integran los conocimientos que han sido fragmentados para darle a este una visión global de su entorno. Concluye que los docentes de estas instituciones educativas tienen poco conocimiento teórico sobre qué son los modelos pedagógicos y las funciones que éstos cumplen en las instituciones educativas.

La literatura en Educación Matemática muestra que en los últimos años han proliferado esquemas de categorización y descripción de diferentes tipos de conocimiento y creencias de los docentes (Ball, 1988; Carter y Doyle, 1987; Clandinin, 1986; Elbaz, 1983; Grossman, 1990; Leinhardt y Smith, 1985; Shulman, 1986b). Estos trabajos han sido realizados desde un enfoque cualitativo, siguiendo las directrices trazadas por Shulman (1986b y 1987), basados en la propuesta de Rojas (2014), para ello hemos considerado tres categorías específicas para estudiar el conocimiento previo y las creencias de los profesores: 1) el conocimiento y las creencias pedagógicas en general; 2) el conocimiento y las creencias sobre el área enseñada; y 3) el contenido del conocimiento pedagógico y las creencias.

Contreras y Mejía (2019) plantean heurísticas de Schoenfeld en la resolución de problemas, desde un enfoque basado en el conocimiento pedagógico del contenido al momento de resolver problemas matemáticos. Santos-Trigo (2015) identifica dificultades en este tipo de población, relacionadas con la forma como el docente enseña a resolverlos; resalta cinco elementos: 1) Acomodación operativa con necesidades de solución. 2) Reflexión operativa. 3) Sustitución de contenido. 4) Imitación de iniciativas. 5) Negación consiente. Indica que se habitúa al alumno a actuar de determinada manera.

Mateus-Nieves y Devia (2021) elaboran y aplican una propuesta que buscó articular las habilidades del pensamiento matemático con la Formulación y Resolución de Problemas de Enunciado verbal (PAEV) en población escolar que finaliza la educación primaria e inicia la secundaria. Encontrando cambios en la Formulación y Resolución de problemas aritméticos de enunciado verbal en los estudiantes. Entre las dificultades detectadas en los alumnos muestran las que están relacionadas con la longitud del enunciado, el orden de presentación de los datos, la situación de la pregunta, el tamaño de los números utilizados, elementos que afectan las estructuras sintáctica, semántica y matemática de los PAEV.

Mateus-Nieves *et al*, (2021) buscan articular habilidades del pensamiento, expresión oral y comprensión lectora con estudiantes que inician la educación básica secundaria, debido a que presentan problemas en comprensión y expresión oral; dificultades para conectar conceptos entre distintas disciplinas del saber. Plantean una investigación–Acción, desde el diseño y aplicación de una secuencia didáctica desarrollada desde dos categorías de análisis: 1) habilidades del pensamiento vs expresión oral. 2) habilidades de pensamiento vs comprensión lectora. Entre los resultados evidencian desarrollo de habilidades del pensamiento que permitió a los estudiantes, luego de aplicar la intervención, toma de conciencia sobre la necesidad de desarrollar habilidades para hablar coherentemente, escuchar con atención, leer y comprender lo leído, escribir con coherencia y cohesión, evidenciado en la producción tanto oral como escrita en los niños donde desarrollaron la investigación.

3. MARCO TEÓRICO

Esta investigación estuvo enmarcada en dos categorías: Las prácticas pedagógicas de los docentes desde la perspectiva de Shulman propuesta por Rojas (2014) considerando las concepciones de los docentes respecto a: 1) el conocimiento pedagógico y creencias en general; 2) el conocimiento y las creencias sobre la disciplina u objeto a enseñar; y 3) el contenido del conocimiento pedagógico y creencias. La segunda categoría aborda aspectos fundamentales sobre la solución de problemas matemáticos, propuestos por Schoenfeld (1985-1992) pero vistos desde el planteamiento de Santos-Trigo (2015) y Contreras y Mejía (2019).

3.1. Las prácticas pedagógicas de los docentes

Santos-Trigo (2015) muestra como Shulman desde 1986 plantea que toda actividad educativa tiene como respaldo una serie de creencias y teorías implícitas que forman parte del pensamiento del docente y que orientan sus ideas sobre el conocimiento, su enseñanza y sobre cómo se construye o cómo se aprende. Indica que el desarrollo del pensamiento del docente para la enseñanza surge como producto de las condiciones históricas, sociales, culturales, personales y otras que los actores del proceso educativo han desarrollado. Plantea categorizar este proceso en cuatro áreas generales: el conocimiento pedagógico general, el conocimiento del contenido, el conocimiento pedagógico del contenido y el conocimiento del contexto.

Por su parte, Contreras y Mejía (2019) indican que Shulman en 1987 estableció que un docente puede transformar la comprensión, las habilidades de desempeño y valores o actitudes deseadas, en acciones y representaciones pedagógicas. La docencia se inicia cuando el docente reflexiona en qué es lo que debe ser aprendido y cómo será aprehendido por los estudiantes. También menciona que la persona que se dedica a la docencia tiene un conocimiento base que, al menos, incluye siete subcategorías: el conocimiento del contenido; de lo pedagógico general; de lo curricular; de lo pedagógico del contenido; de los aprendices y sus características; de los contextos educativos y de los fines educativos.

3.1.1. El conocimiento pedagógico general

Salazar (2005) revela que ya Grossman en 1990, siguiendo los planteamientos porpuestos anteriormente por Shulma, afirma que la práctica educativa pasa por una multiplicidad de factores, entre ellos: características de la institución; experiencias previas de los profesores y alumnos; capacitación de los profesores y las teorías personales que, sobre la enseñanza, éstos han construido. Plantea, además del conocimiento de la materia y del conocimiento general pedagógico, que los profesores deben desarrollar un conocimiento específico (cómo enseñar su materia específica). Este tipo de conocimiento adquiere particular interés, debido a que defiende, propone y justifica un conjunto de saberes (amalgamados entre sí) sobre el contenido específico y cubre un vacío (o complemento) necesario sobre el conocimiento del profesor de una asignatura específica. De ahí que, compartimos la postura teórica de Pinto y González (2006) quienes plantean que no debemos limitarnos a estudiar cómo se enseña para obtener conocimiento, desde la didáctica general, sino que se debe buscar, que el profesor comprenda lo que se ha de aprender y cómo se debe enseñar ese contenido a partir de la propia práctica docente, de la comprensión de cómo el alumno aprende y comprende, resuelve problemas y desarrolla su pensamiento crítico acerca de dicho contenido.

3.1.2. El conocimiento del contenido

Shulman en 1986 (Contreras y Mejía, 2019) definió este segundo nivel de conocimiento como la "cantidad y organización de conocimiento *per se* en la mente del profesor" (p. 9). Como elemento esencial y previo a su labor de enseñar. El profesor deber tener un nivel mínimo de dominio del contenido que se propone enseñar: "el profesor necesita no sólo conocer o comprender qué, sino además saber también por qué esto es así, sobre qué supuestos pueden ser ciertas estas justificaciones y bajo qué circunstancias nuestras creencias en estas justificaciones pueden ser débiles y aún denegadas" (Shulman, 1986, p. 9).

El estudio del conocimiento del contenido matemático del profesor es una línea de investigación orientada a analizar su naturaleza conceptual y epistemológica, sus componentes, características y el grado de conocimiento matemático (genérico o específico) que tienen los profesores; así como sus relaciones con la enseñanza y el aprendizaje y con otros dominios de conocimiento.

El conocimiento del contenido temático-matemático se refiere a la cantidad y organización de conocimiento del tema *per se* en la mente del profesor. Para pensar apropiadamente acerca del conocimiento del contenido se requiere ir más allá del conocimiento de los hechos o conceptos de un dominio, se requiere entender las estructuras del tema. Según Schwab (1978), dichas estructuras incluyen las sustantivas y las sintácticas. Las primeras son la variedad de formas en las cuales los conceptos y principios básicos de la disciplina son organizados para incorporar sus hechos. La segunda es el conjunto de formas en las cuales son establecidas la verdad o falsedad, la validez o invalidez de alguna afirmación sobre un fenómeno dado.

3.1.3. El conocimiento pedagógico del contenido

Shulman, planteó en 1987, que este nivel representa la mezcla entre materia (disciplinar) y pedagogía por la que se llega a una comprensión de cómo determinados temas, situaciones problema se organizan, se representan y adaptan a los diversos intereses y capacidades de los alumnos, en otras palabras, cómo se exponen para su enseñanza. El conocimiento pedagógico del contenido, permitirá al profesor desarrollar un conocimiento didáctico de la materia que pretende enseñar (Contreras y Mejía, 2019). Esta es la categoría que "con mayor probabilidad permite distinguir entre la comprensión del especialista en un área del saber y la comprensión del pedagogo" (Contreras y Mejía, 2019, p. 52).

Esta categoría "es el conocimiento que va más allá del tema de la materia *per se* y que llega a la dimensión del conocimiento del tema de la materia para la enseñanza" (Shulman, 1987, p. 9). Aquí es inminente diferenciar el conocimiento pedagógico del contenido del conocimiento pedagógico general para la enseñanza; el primero es el conocimiento de principios genéricos de organización y dirección en el salón de clases; es un saber actuar, implica un método y una finalidad; es el conocimiento de las teorías y métodos de enseñanza que se ajustan al tema que se pretende enseñar. El segundo involucra un conocimiento teórico capaz de identificar los fenómenos educativos y distanciarse de ellos, observándolos con instrumentos de análisis para poder interpretarlos y explicarlos.

Incluye las formas "útiles de representación de ideas; analogías, ilustraciones, ejemplos, explicaciones y demostraciones; en pocas palabras, las formas de representación y formulación del tema que lo hace comprensible a otros" (Contreras y Mejía, 2019, p. 53). Está relacionado con todo el esfuerzo que hace el profesor para hacer comprensible su tema, en particular, incluyendo un entendimiento de lo que hace fácil o difícil el aprendizaje de tópicos específicos: "las concepciones y preconcepciones que los estudiantes de diferentes edades y antecedentes traen al aprendizaje de los tópicos y lecciones más frecuentemente enseñados" (Shulman, 1987, p. 10). Si estas preconcepciones son errores conceptuales, como lo son frecuentemente, los profesores necesitan el conocimiento de estrategias para reorganizar ese entendimiento de los estudiantes.

Grossman (1990) identifica cuatro fuentes a partir de las cuales el conocimiento pedagógico del contenido se genera y desarrolla: la observación de las clases, tanto en la etapa de estudiante como en la de profesor-estudiante; la formación disciplinar; los cursos específicos durante la formación como profesor y la experiencia de enseñanza en el salón de clases. En este contexto, Chevallard (1991) platea un concepto similar al del conocimiento pedagógico del contenido, denominado: *transposición didáctica*, "Un contenido de saber que ha sido designado como saber enseñar, sufre a partir de entonces un conjunto de transformaciones adaptativas que van a hacerlo apto para ocupar un lugar entre los objetos de enseñanza" (p. 52). En otras palabras, es un trabajo que transforma un objeto de saber a enseñar, en un objeto de enseñanza. Estas representaciones a que hace referencia son "formas de expresar, exponer, escenificar o representar ideas de otra manera, de suerte que los que no saben puedan llegar a saber, los que no entienden puedan comprender y discernir, y los inexpertos puedan convertirse en expertos" (Shulman, 1987, p.10). En otras palabras, se trata de estrategias de enseñanza a la luz del tópico específico, o bien, la didáctica del contenido específico. Así pues, el profesor debe tener un amplio repertorio de formas o alternativas de representación, algunas de las cuales derivan de la investigación, mientras que otras se originan de la práctica docente.

Un buen manejo de la disciplina significa saber que algo es así y comprender el porqué de esta naturaleza; saber bajo qué circunstancias se valida este conocimiento (Shulman, 1986, p. 9). No obstante, el conocimiento profundo de la disciplina se vuelve infructuoso sino se consideran los puntos de vista acerca del contenido que tienen los estudiantes. Diversos estudios[2] han demostrado la necesidad de esta relación entre el conocimiento profundo de la disciplina y de las ideas previas de los estudiantes.

3.1.4. El conocimiento del contexto

Existen numerosas perspectivas sobre el aprendizaje y el pensamiento dentro de la aproximación cognitiva que pueden ser aplicadas al estudio de las prácticas y concepciones pedagógicas de los profesores y de los estudiantes (Einsenhart y Borko, 1993; Putnam, Lampert y Peterson, 1990; Resnick, 1989). Estas, tienen como supuestos, los siguientes: Las estructuras de conocimiento y las representaciones del mundo juegan un papel central en el pensar, actuar y aprender. El aprendizaje como proceso activo y constructivo, es decir, que ocurre no sólo por registro de la información sino también por la interpretación de ésta. El conocimiento y el aprendizaje están situados en contextos y culturas determinados. El aprendizaje implica práctica contextualizada de tareas.

Shulman en 1987 afirmó que el manejo profundo de la disciplina y del contexto en que se pretende desarrollar, facilita al docente anticipar los componentes y relaciones del contenido que pueden presentar problemas para su comprensión (Loaiza y Duque, 2017). Al respecto Grossman (1990) plantea que los componentes del conocimiento del contexto de aprendizaje, el conocimiento del contenido involucra, conocimiento del currículo, de los estudiantes y de las estrategias didácticas. El valor agregado de esta categoría sólo es posible entenderla como un todo, puesto que su carácter transformativo y dinámico, la convierte en una forma de comprensión particular de quienes se dedican a la docencia.

Valbuena (2007) citando a De Longhi, (2000) realiza otras precisiones sobre el conocimiento del contexto afirmando que en las clases se encuentran presentes tres tipos de contextos: el situacional que se refiere al medio socio-cultural, ambiental, institucional y al momento histórico; el contexto lingüístico representado en el habla de profesores y alumnos, y en la terminología propia del contenido y su lógica; el contexto mental del docente y alumnos, conformado por todo lo "no observable" mencionado –como las representaciones y referentes sobre el tema. Afirma que el conocimiento sobre estos contextos permite moldear el conocimiento del contenido didáctico y de la materia, ya que adaptan los contenidos, estrategias y evaluaciones, al momento del año en que deben ocurrir.

3.1.5. Con relación a la segunda categoría Resolución de problemas

Santos-Trigo (2015) citando a Schoenfeld, propuso considerar un marco con cuatro componentes que sirven para el análisis de la complejidad del comportamiento en la resolución de problemas: 1) Recursos cognitivos: conjunto de hechos y procedimientos a disposición del resolutor, 2) Heurísticas: reglas para progresar en situaciones difíciles, 3) Control: aquello que permite un uso eficiente de los recursos disponibles y 4) Sistema

2. Ver: (Halim & Mohd.Meerah, 2002; Gess-Newsome, 1999; Magnusson, Krajcik y Borko, 1999, Hogan, Robinowitz & Craven, 2003; Halim & Mohd.Meerah, 2002; Darling- Hammond, 1998; Vadya, 1993).

de creencias: nuestra perspectiva con respecto a la naturaleza de la matemática y cómo trabajar en ella. Respecto al tipo de creencia, Schoenfeld se enfoca más en sobre cómo perciben el estudiante y los profesores o los matemáticos el asunto de la argumentación matemática formal a la hora de resolver un problema.

De las variables que hacen referencia a la dimensión de la enseñanza del proceso de resolución de problemas, destacamos tres: 1) El tipo y las características de los problemas. 2) Los métodos de enseñanza utilizados por el profesor. 3) Los conocimientos, las creencias y las actitudes del profesor sobre las matemáticas y su enseñanza aprendizaje.

4. METODOLOGÍA

La investigación es de tipo analítico–descriptivo, desde un enfoque de estudio de caso múltiple sometido a criterios[3]; se eligieron 13 profesores que cumplen: a) Enseñan matemáticas, considerando que en el entorno colombiano los profesores de primaria enseñan todas las asignaturas del currículo; mientras que en secundaria hay profesores encargados únicamente para enseñar esta disciplina. b) Han experimentado dificultades al enseñar matemáticas; c) les cuesta comprender situaciones en contexto que requieren solución por medio de modelos matemáticos y que deben ser enseñados a los estudiantes.

La institución donde se desarrolló este trabajo es de carácter estatal clasificada como rural, ubicada en un municipio del departamento de Cundinamarca. Esta escuela atiende población campesina de varias veredas que conforman el municipio, se dedican a labores de agricultura, pastoreo de ganado del que extraen leche para comercializar. El nivel de formación de los padres de estos estudiantes no supera la mitad de la educación básica secundaria, algunos apenas tienen formación primaria[4]. La dotación institucional es insuficiente, tanto en infraestructura, recursos y planta docente, que permita a los profesores desempeño de labores en condiciones óptimas para desarrollar su labor. Se buscó caracterizar el tipo de prácticas pedagógicas utilizadas por estos docentes y si estas potencian en los estudiantes la capacidad para solucionar problemas de tipo aritmético, algebraico y geométrico. La investigación se desarrolló en tres fases procesales:

- Fase 1: Planeación. A partir de la información recopilada en las pruebas externas sobre la competencia resolución de problemas matemáticos, se eligió el componente teórico descrito para respaldar la investigación, a partir de allí consideremos dos categorías de análisis: 1) caracterización de la planta docente que enseña matemáticas. 2). Identificar si la estructura curricular institucionalizada se ajusta a los parámetros establecidos por el Ministerio de Educación Nacional (MEN). Para la primera consideramos tres instrumentos: 1) una entrevista semiestructurada donde otorgamos un código a cada profesor, ej., P1 representa al primer docente, P2 al segundo y así sucesivamente hasta llegar a P13. En este instrumento se buscó caracterizar la formación disciplinar de los docentes en ejercicio, así como el interés por enseñar matemáticas tanto en primaria como en secundaria. 2)

3. Navarrete (2000) el muestreo por conveniencia (o sometido a criterios) es el procedimiento que consiste en la selección de las unidades de acuerdo a su disponibilidad.

4. Información extraída del registro de matrículas institucional.

grabación en video de 4 sesiones de clase (enfocadas en enseñar a solucionar problemas matemáticos), programadas por cada profesor, luego fueron trascritas en unidades de análisis. En la sesión de resultados se refieren algunos detalles arrojados por este instrumento. 3) diseño de fichas de observación para las sesiones de clase, con el objeto de validar la información recopilada en la entrevista. Para la segunda diseñamos la tabla 1 (mostrada en la sección de resultados), donde buscamos articular las prácticas pedagógicas identificadas de los docentes con las etapas para solucionar problemas matemáticos. Para ello diseñamos una serie de indicadores que nos permitieran determinar dos elementos. 1) si el plan de acción curricular institucionalizado se ajusta a los estándares emitidos por el MEN por los que la institución es evaluada «pruebas SABER». 2) si las practicas docentes se ajustan al modelo institucional vigente.

- Fase 2: Observación directa. Aplicamos los tres instrumentos para caracterizar la planta docente, luego triangulamos estos datos para obtener resultados. Determinamos en qué medida el plan de acción curricular institucionalizado se ajusta a los parámetros establecido por el MEN y al modelo de evaluación aplicado en las pruebas estándar nacionales descritos en la sesión de resultados.
- Fase 3: Análisis de la información, resultados y conclusiones. Sistematizamos la información recopilada, en matrices de triangulación, interpretamos los resultados, obtuvimos resultados y conclusiones.

5. RESULTADOS

5.1 Con relación a la caracterización de la planta docente

La tabla 1 muestra los resultados encontrados al sistematizar la información recopilada en la fase 1

Tabla 1 caracterización de la planta docente que enseña matemáticas

Item	Observaciones
Respecto a la formación profesional	Todos los profesores son licenciados en educación, dos con énfasis en matemáticas, dos con énfasis en lúdica matemática; dos en básica primaria; uno en básica prima con énfasis en español; tres con énfasis en administración educativa; dos en preescolar, uno en educación especial. once docentes tienen formación de postgrado a nivel de especialización, pero ninguno relacionado con matemáticas.
Experiencia docente	Seis profesores llevan menos de diez años; cuatro están entre de 10 y 20 años; tres más de veinte años; todos en el sector rural, en la misma institución.

Item	Observaciones
Gusto al enseñar matemáticas	Los docentes manifiestan que les gusta enseñar matemáticas, P1 dice "*enseño conservando la forma como me enseñaron mis profesores del colegio y algunos de la universidad*" [trascripción entrevista semiestructurada, unidad de análisis N° 32], es decir, imita la forma como a él le enseñaron. Encontramos que existe una creencia colectiva en la muestra, quienes manifiestan un sentimiento de "superioridad" frente a los estudiantes con respecto a los profesores que enseñan otras disciplinas. Consideran que los estudiantes piensan, que enseñar matemáticas genera cierto grado de superioridad con relación a los profesores de otras disciplinas.
Planeación de las clases	Todos los docentes manifiestan realizar planificación, organización y gestión para el desarrollo de sus clases, sin embargo, a través de la observación evidenciamos que este proceso lo realizan únicamente cinco de ellos, lo que demuestra que hay un alto porcentaje de docentes que dentro de su práctica pedagógica no realizan una planeación para el desarrollo de la clase, porque consideran tener "dominio y manejo los temas", así mismo, se evidencia que ocho docentes ofrecen a los estudiantes algún tipo de material para la gestión y desarrollo de sus clases. Los demás realizan la clase en forma magistral, enfatizando en el orden de las sillas, la postura y ubicación de los estudiantes para el desarrollo de la clase.

Creación propia

5.2. Con relación a las categorías: Prácticas pedagógicas de los docentes

5.2.1. Conocimiento pedagógico general

La tabla 2 muestra los resultados encontrados al triangular la información recopilada en las fases 1 y 2.

Tabla 2. Resultados fases 1 y 2 relacionados con el conocimiento pedagógico.

Item	Observaciones
Formación en pedagogía	Todos manifiestan haber recibido, durante su formación de licenciados, capacitación en pedagogía que les permite enfrentar las clases de manera dinámica, enseñar para un tipo de sociedad especifica (niños y adolescentes). Reconocen que la educación se da mediante procesos sociales y culturales. Es decir, procesos humanos comunicativos (conscientes o inconscientes) que posibilitan el resurgir de un tipo de hombre y de un tipo de sociedad. Son siempre procesos de captación de valores o intercambios simbólicos referidos a la potenciación de las diferentes dimensiones humanas (cognitiva, afectiva y comportamental).

Item	Observaciones
Conocimiento Pedagógico	Desde la observación de clases (realizada en la fase 2), se evidenció que utilizan metodologías de trabajo variadas, entre ellas: actividades en grupo, trabajo individual y uso de material didáctico. Particularmente en primaria se activa el juego como un elemento de interés para los niños, donde utilizan material manipulativo creado por los profesores para fomentar lo que han denominado "ludoteca del colegio", allí han construido ábacos, pentominos, tangram, usan lazos, pelotas, canicas, entre otras. En bachillerato se observa uso de fotocopias, diferentes libros de texto (diversas editoriales) que convergen al mismo tema.

Creación propia

Sin embargo, se observa en la muestra que no hay plena claridad que el Conocimiento Pedagógico siempre es un conocimiento de tipo teórico, práctico y crítico; en lo observado, se queda únicamente en lo teórico-práctico, descuidando la parte critica en los estudiantes. Esto es, no se promueve al estudiante a cuestionarse sobre su quehacer en el aula, sobre la utilidad e importancia de su proceso de formación, que le permita saber cómo actuar frente a determinadas situaciones sociales cotidianas, es decir, como actuar para potenciar a la persona y a la sociedad, cómo actuar para mostrar y captar valores. En definitiva, el Conocimiento Pedagógico sabe cómo modificar la realidad existente con base a un proyecto intencionado y de acuerdo a una opción moral concreta.

5.2.2. Con relación al conocimiento del contenido

En este apartado encontramos una posición casi unánime, once de los profesores consideran no tener la formación suficiente y necesaria para enseñar aritmética, algebra, geometría o estadística. Dado que disciplinarmente, carecen de elementos teórico-prácticos que les permita ofrecer una formación de calidad a sus estudiantes. Aquí todos son direccionados por los dos profesores que tiene licenciatura en educación con énfasis en matemáticas, pues se percibe la creencia de sus compañeros que ellos dos son personas idóneas que deben direccionar los planes de estudio, porque suponen manejan los temas con suficiente claridad.

Los docentes manifiestan que sus estudiantes presentan dificultades para comprender el lenguaje matemático, para resolver problemas aritméticos, algebraicos o geométricos. Sin embargo, en la observación de clases notamos que 10 de los 13 docentes no comprenden claramente el vocabulario expresado en los libros de texto que utilizan; se nota que para ellos es de difícil comprensión, y esto lo trasmiten a sus estudiantes, ej. P7 que enseña matemáticas a niños de grado cuarto de primaria dice: "*un terreno de forma cuadrada desea sembrarse con hortalizas…*" [trascripciones notas de observación de clases, unidad de análisis N° 332]. Sin embargo, el dibujo que hace en el tablero es un rectángulo que no es cuadrado. Aquí el profesor parece no conocer que todo cuadrado es rectángulo, pero no todo rectángulo es cuadrado; esto quizá, porque su formación disciplinar no es en matemáticas. Observamos que toman solo aquellas situaciones problema que para ellos son claras y solubles de forma sencilla; este tipo de ejercicios son los que trasmiten a sus estudiantes. Se observó que estos profesores no siempre sienten confianza con sus dos compañeros que son licenciados en matemáticas para preguntarles posibles dudas, se limitan a seguir el libro de texto como mapa de ruta, pero obviando aquellas situaciones que no comprenden claramente.

Los investigadores al notar esta situación dialogamos con los profesores extra clase; seis de ellos manifestaron: "*Los problemas matemáticos presentes en los libros de texto, muchas veces no los comprendemos en su totalidad, somos formados en pedagogía, pero no disciplinarmente en matemáticas, lo que limita nuestra labor*" [trascripción dialogo realizado extra clase con los profesores, unidad de análisis N° 528], por lo que no los comparten con sus estudiantes. Particularmente, situaciones problema en contexto. Notamos que los profesores confunden ejercicio con problema. Para algunos de ellos un ejercicio especifico, ej., resolver una ecuación, es un problema. Y cuando se les indagó qué entendían por problema matemático manifestaron: *"es toda aquella situación matemática donde necesitamos conocer un resultado"* [trascripción entrevista semiestructurada, unidad de análisis N° 198], desconociendo que esto también puede ser un ejercicio.

Luego de la intervención de los investigadores, les ayudamos a diferenciar que un ejercicio es una situación matemática cuyo objetivo principal es aplicar a una situación concreta, más o menos de forma mecánica, procedimientos y técnicas generales para encontrar un repuesta especifica. En otras palabras, es una situación puntal que requiere tareas definidas para encontrar una solución, por ejemplo: resolver –5 + 7 – 8=. Mientras que un problema matemático es una situación en contexto que necesita ser leída con atención para poder comprenderla correctamente; es una situación cuyo objetivo es organizar y relacionar los conocimientos que se poseen en miras de utilizarlos para lograr una respuesta clara y precisa. En términos de Schoenfeld (1992, p. 64) citando a Polya (1961, p. 24) un "problema matemático significa buscar de forma consiente una acción apropiada para lograr un objetivo claramente concebido, pero no alcanzable de manera inmediata".

A pesar de ello, observamos que los docentes establecieron con los estudiantes alguna estrategia o pasos para la solución de problemas, entre los que se encuentran: *leer el problema*, *analizarlo, dar una solución*. Las dificultades fueron notorias ante situaciones que involucran (en primaria), escenarios aritméticos con operaciones entre fracciones, potenciación, cálculo de raíces enteras, cálculo de áreas y perímetros. En secundaria, aplicación de la ley de signos, operatividad con números enteros y racionales, cálculo de áreas y perímetros de figuras planas no elementales. Se percibe ausencia de cálculo de volumen de algún solido recto, con base circular o en forma de cuadrilátero. Notamos que al enfrentar situaciones problema que involucra los temas antes mencionados, se limitan a leer la situación, tratan de analizarla, muchas veces de forma imprecisa, tal es el caso mostrado en la figura 1.

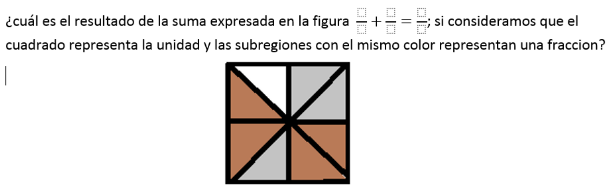


Figura 1. Situación problema propuesta a estudiantes de grado quinto de primaria
Fuente: Elaboración propia

Aquí P5 direcciona a los estudiantes a leer el problema; algunos niños expresan que las fracciones allí presentes son 3/4 y 4/4 y 2/4 y 4/4; respectivamente. Sobre estas fracciones operan y presentan respuestas incorrectas, porque olvidan en esta fase de análisis, que el enunciado del problema manifestó que el cuadrado representa la unidad. Compartimos la experiencia con el grupo de profesores que enseñan en primaria, para algunos de ellos, esto fue complejo de comprender y deducir del enunciado, por transitividad también lo será para sus estudiantes. Observamos que las estrategias heurísticas que trasmiten a sus alumnos son débiles. Y sobre ellas ofrecen respuestas que no son validadas como correctas o incorrectas.

En bachillerato suceden situaciones similares. En grado séptimo P4 planteó a sus estudiantes la siguiente situación problema: *¿Existen números enteros, que, al elevarse al cuadrado obtengamos como resultado 16? Justifique su respuesta*. [trascripciones notas de observación de clases, unidad de análisis N° 393]. En lo observado los estudiantes analizan la situación, el profesor los direcciona y encuentran que, hay un número entero cuyo valor es 4. P4 olvida mencionarle a sus estudiantes que ese número no es único, que la respuesta correcta es que hay dos números que satisfacen dicha situación ± 4.En grado octavo P10 plantea a sus estudiantes la siguiente situación relacionada con suma y resta de polinomios con coeficientes fraccionarios: "*halle la expresión que sumada con x^3-x^2+5 da como resultado 3x-6"* [trascripciones notas de observación de clases, unidad de análisis N° 417]. Orienta a sus estudiantes a trabajar en subgrupos leyendo la situación y busquen estrategias para solucionarla, se observa que él mismo pareciera no tener claro el camino conducente a una solución viable matemáticamente; sin embargo, razonan en grupo e interpretan que debe haber un polinomio, "*lo llaman x"*, que sumado con 3x-6 dé como resultado x^3-x^2+5. A pesar que el razonamiento parece válido no lo es, porque terminan realizando la siguiente suma: x+(3x+6), obviamente encontrando unos resultados carentes de validez. Se percibe débil el razonamiento del docente al momento de asignar a un polinomio una variable [trascripciones notas de observación de clases, unidad de análisis N° 483]. Situación similar se presentó en grado 9° ante la situación algebraica: "*resuelva la ecuación $(x+a)^2$-$(x-a)^2$=$(a+b)^2$"* [trascripciones notas de observación de clases, unidad de análisis N° 502], que por cuestión de espacio omitimos aquí. O en grado 5° ante la situación: *"Halle el perímetro y el área de un cuadrado de 11,3 m de lado",* aquí la dificultad estuvo en operar números decimales [trascripciones notas de observación de clases, unidad de análisis N° 430].

Notamos que realizan ejercicios para calcular áreas y perímetros con la misma estructura, esto es, dar valores enteros o decimales para el lado y ancho, luego calcular el área o el perímetro. Se observó que cuando trabajaban con cuadriláteros P7 manifiesta confusión para distinguir "ancho" de "alto" en este tipo de figuras planas. Por dialogo interno de los investigadores con P7, le invitamos a que en la próxima sesión de clase propusiera a sus estudiantes ejercicios donde se diera el valor del perímetro o del área y la medida de uno de sus lados, con el objeto de encontrar, bien sea, el lado faltante o el área o el perímetro según la situación presentada. Ej., "*El perímetro de un rectángulo es 20,4 dm. Si uno de sus lados mide 6,3 dm, halla el área*" [trascripciones notas de observación de clases, unidad de análisis N° 395]. Aquí las heurísticas empleadas por el P7 para orientar a sus estudiantes fueron limitadas dado que la falta de formación disciplinar le opacaba el trabajo realizado.

En términos generales se evidencia que los profesores parten de un conocimiento matemático apoyado en los libros de texto guía, eligen uno o varios problemas a los que les dan sentido para proponerlo a sus estudiantes. Resaltamos que todos los docentes buscaban que los alumnos se interesen en el problema propuesto, tratando de contextualizarlo y hallar algún tipo de solución, aunque muchas veces, estas no fueron validadas como correctas.

5.3. El conocimiento pedagógico del contenido

Este tipo de conocimiento está relacionado con el saber especializado resultado de la práctica y la experiencia del docente en el aula. Aquí Únicamente P3 y P13 (licenciados en educación con énfasis en matemáticas) y que trabajan en los últimos niveles de educación, manifiestan conocer parcialmente el tema. Pero indican no recordarlo. Percibimos que la totalidad de los docentes no tiene claro de qué se habla aquí, a pesar que más de la mitad de ellos llevan trabajando entre 10 y 20 años de experiencia docente en matemáticas. Desconocen que a pesar de no tener una formación disciplinar en matemáticas, poseen experiencias de aula que han adquirido durante sus años de ejercicio profesional, que, en cierto grado, les ha hecho "competentes" en algunos temas y que por desconocimiento no utilizan en beneficio de su labor docente.

Conocimiento del contexto

Este tipo de saber se encuentra relacionado al menos con tres tipos de conocimiento**:** de las orientaciones, estrategias y de los estudiantes. Sin embargo, a lo largo de la investigación observamos que los profesores, únicamente relacionaron este tipo de conocimiento con el momento de trabajar y dar solución a los problemas matemáticos. Esto es, buscan relacionar el tema del ejercicio a un contexto particular, (de aritmética, algebra o geometría), en que está planteado el problema; lo relacionan como aplicaciones de otras asignaturas (biología, lenguaje, sociales, artística, entre otras).

6. CONCLUSIONES

Con relación al conocimiento pedagógico general, se hace inminente potenciar en los docentes que este es un conocimiento crítico-reflexivo de un modelo teórico-ético que puede fundamentar el modelo práctico de su labor docente. Es hacer una reflexión crítica sobre su práctica pedagógica, para hacer disminuir lo falso, las incoherencias, lo dogmático, lo reduccionista, lo simplista que muchas veces el sistema escolar actual impone como axiomas. Creemos que poseer este tipo de Conocimiento Pedagógico empodera a los docentes en tres direcciones: 1) a generar modelos teóricos sobre qué tipo de educación, para qué tipo de hombre y para qué sociedad. 2) a generar modelos prácticos sobre cómo hacer esta educación y con qué recursos; y 3) a generar modelos crítico-reflexivos que controlen la calidad del proceso y del modelo aplicado, es decir, modelos evaluativos que garanticen el aprendizaje, respetando la dignidad plena de las personas, implicadas en dicho proceso.

Observamos que los profesores de la muestra no son conscientes de sus concepciones, confunden la relación entre el saber específico de las matemáticas con el saber pedagógico del que enseña matemáticas, de modo que la relación entre sus pensamientos no es coherente con su actuación pedagógica en el aula de clase. De allí la pertinencia de diseñar programas de formación docente que estén orientados a la reflexión de los profesores sobre su práctica pedagógica. De hecho, las propuestas curriculares de dichos programas deberán partir de las creencias y de las concepciones de los docentes sobre el objeto de su disciplina, sus percepciones acerca de los estudiantes y sus saberes previos; acerca de los estilos de aprendizaje; porque las experiencias educativas previas de los docentes de una u otra forma inciden en sus prácticas posteriores.

El carácter científico de la pedagogía clama por procesos transformadores en la formación docente, basados en procesos serios de investigación, que permitan el desarrollo de docentes capaces de reflexionar y comprender las relaciones de las intenciones educativas con el contenido y con el contexto, que, por tanto, se convierta en un investigador crítico y analítico de su práctica y de la práctica en su contexto. Esta categoría brinda un ámbito importante de reflexión sobre los conceptos relacionados con la enseñabilidad de los contenidos matemáticos y la capacidad de los docentes para crear formas de representación que permitan a los estudiantes construir conocimiento. Esto es, no se dan procesos de meta cognición que involucre al alumno a investigar; a tratar de resolver problemas bien sea de tipo aritmético, algebraico o geométrico; predecir su solución; tratar de probar qué su respuesta es correcta; construir modelos matemáticos; usar lenguaje y conceptos matemáticos institucionalizados; intercambie sus ideas con otros; finalmente, reconozca cuáles de estas ideas son correctas y entre todas ellas elegir las que le sean útiles.

Resaltamos el compromiso y dedicación de los profesores de la muestra para enseñar matemáticas, a pesar que la mayoría de ellos, no tienen formación disciplinar enfocada en esta área del saber. Se observa un esfuerzo por hacer que sus clases sean lo más acertadas y adecuadas posibles. Sin embargo, el no tener una formación disciplinar en matemática hace que estos profesores presenten un nivel mínimo de dominio del contenido que pretenden enseñar, rebasando el conocimiento del contenido. La falta de formación disciplinar, de dominio de algunos temas y la inseguridad en la presentación de los mismos, incide en el tipo de clases que imparten a sus estudiantes. Conjeturamos que las prácticas docentes observadas son de un nivel de idoneidad bajo, debido a las características que hemos descrito, por ende, los bajos desempeños en las pruebas estándar aplicadas por el estado. Encontramos una mezcla entre la clase magistral, donde no se involucra otro tipo de metodologías que las de la clase tradicional.

Se requiere que quienes dirigen la educación en representación del estado (MEN) comprendan que es necesaria una formación disciplinar en matemáticas en las personas que enseñan, para poder lograr los resultados esperados; en el entorno colombiano cualquier profesional en áreas administrativas o ingenierías es “apto para enseñar matemáticas”. Cabe aclarar que en el contexto educativo colombiano no se ofrecen garantías suficientes (ni económicas, ni sociales), a los profesores, para trabajar en lugares de ruralidad como el descrito en este trabajo. Por ello los pocos que acceden a laborar en este tipo de instituciones educativas no tienen la formación disciplinar en matemáticas, necesaria para la labor que desempeñan. Consideramos que para alcanzar el nivel de desarrollo educacional se requiere de profesores formados y capacitados en matemáticas, que fomenten en sus estudiantes habilidades de pensamiento complejo, capaces de trabajar en contextos de diversidad; los resultados muestran que no es suficiente ser licenciado en educación, el énfasis es fundamental, como tampoco lo es ser profesional en otras disciplinas como administración o ingenierías. Encontramos una lógica contradictoria en el modelo aplicado por el estado en este tipo de instituciones, percibimos que entienden el conocimiento como construcción y la enseñanza como transmisión lo cual genera un abordaje en donde el conocimiento pedagógico no es un eje articulador de la formación de los estudiantes. Por estas razones creemos que, en algunos de quienes lideran el sector educativo de nuestro país, esto es en el MEN, tienen poco conocimiento teórico sobre qué son los modelos pedagógicos y las funciones que éstos cumplen en las instituciones educativas.

Con relación a la resolución de problemas encontramos que el tipo de situaciones que se desarrollan con los estudiantes son planteados a partir de fotocopias preparadas para la clase o los propuestos en el libro de texto, pertenecientes a situaciones de corte netamente intra matemático a nivel de ejercicios y uso limitado de problemas. Poco percibimos por parte de los docentes planteamiento de estrategias claras para abordar problemas matemáticos, ya que implícitamente intentan desarrollar las fases de solución propuestas por Schoenfeld, desde heurísticas débiles.

Encontramos que el plan de acción curricular institucionalizado se ajusta a los parámetros establecidos por el MEN, no así el modelo de implementación del mismo. La institución no contempló en la construcción de ese plan la opción de recibir profesores en nombramiento que tuvieran que, por necesidad de servicio, desempeñarse en áreas disciplinares que no son de su competencia, particularmente en matemáticas. De ahí que, las practicas docentes se ajustan parcialmente al modelo institucional vigente.

Consideramos que hacen falta más estudios sobre el conocimiento básico con que cuentan los profesores de matemáticas en ejercicio. Creeremos que parte de las fobias hacia el estudio de esta disciplina por parte de la mayoría de las personas se debe a procesos de formación débiles. Profundizar en este tipo de estudios, pueden llegar a develar caminos hacia una formación docente integral, con mayor grado de contextualidad, comprensión disciplinar y, por tanto, pedagógica, sin caer en modelos autistas que provoquen un activismo didáctico y no la búsqueda de construcciones de conocimiento por parte de los estudiantes.

7. REFERENCIAS

Ball, D. (1988). Prospective teachers' understandings of mathematics: what do they birng with them to teacher education? *Paper presented at the annual meeting of the American Educational Research Association*, New Orleans. LA.

Carter, K. y Doyle, W. (1987). Teachers' knowledge structures and comprehension processes. En J. Calderhead (ed.). *Exploring teachers'thinking*. Londres: Cassell, 147-160.

Chevallard, Y. (1991). La transposición didáctica, Argentina, *AIQUE,* 196, pp.30-56.

Clandinin, D.J. (1986). Classroom practice: *Teacher images in action.* Philadelphia: The Falmer Press.

Contreras, E., & Mejía, E. (2019). heurísticas de Schoenfeld en la resolución de problemas: un enfoque basado en el conocimiento pedagógico del contenido-pck. *Formación de Maestros*, Biblioteca digital CEDEC. U de Antioquia, 39-53.

Einsenhart, M., y Borko, H. (1993). *Designing classroom research: themes, issues and struggles*. Needham, MA: Allyn & Bacon.

Elbaz, F. (1983). *Teacher thinking: a study of practical knowledge*. New York: Nichols.

Fernández, J. A. (2006). Algo sobre resolución de problemas matemáticos en educación primaria. *Sigma*, 29-42.

Grossman, P. (1990). The making of a teacher: *Teacher knowledge and teacher education*, New York, Teacher College Press.

ICFES. (2014). *Instituto Colombiano para la Evaluación de la Educación*. Bogotá, D. C. Colombia. On line recuperado de http://www2.icfesinteractivo.gov.co/ReportesSaber359/estadisticas/reporteEstadisticasEstablecimiento.jspx

Leinhardt, G., y Smith, D. (1985). Expertise in mathematics instruction: subject matter knowledge. Journal of Educational Psychology, 77, 241-271.

Loaiza, Y., & Duque, P. (2017). Contexto de las prácticas pedagógicas de los maestros y los docentes. *Plumilla Educativa,* Ed. Instituto Pedagógico, universidad de Manizales. 60-78.

Mateus-Nieves, E., Alarcón Ayala, C., & Peñuela Bonilla S. (2021). Expresión Oral y Comprensión Lectora como Estrategias para Desarrollar Habilidades del Pensamiento. *International Journal of Development Research*. 11 (04), pp. 46307-46314, https://doi.org/10.37118/ijdr.21621.04.2021.

Mateus-Nieves, E., & Devia, H. (2021) Development of Mathematical Thinking Skill from the Formulation and Resolution of Verbal Arithmetic Problems. *Acta Sci. (Canoas), 23(1)*, 30-52.

MEN. (2006). Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas. En Ministerio de Educación Nacional (Ed.), *Estándares Básicos de Competencias en Lenguaje, Matemáticas, Ciencias y Ciudadanas* (pp. 46–95). Colombia.

Pinto, S. y González, M. (2006). Sobre la naturaleza conceptual y metodológica del conocimiento del contenido pedagógico en matemáticas. Una aproximación para su estudio, *Actas del X Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática*, 7 al 9 de septiembre, Universidad de Huesca, España, pp. 237-255.

Putnam, R., Lampert, M., & Peterson, P. (1990). Alternative perspectives on knowing mathematics in elementary schools. En: C. Cazden (Ed.), *Review of research in education,* V.16, pp.57-150. Washington, DC: American Educational Research Association.

Quintero M, y Parra, M. (2011). *Caracterización de la práctica pedagógica de profesores de Educación Básica, con relación a posibilidades de adelantar un trabajo interdisciplinario*. Universidad Pedagógica Nacional. Ed. UPN, Bogotá, D. C.

Resnick, L.B. (1989). Introduction. En: L.B. Resnick (Eds)., *Knowing, learning, and instruction: essays in honor of Robert Glaser* (pp.1-24). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Rojas, M. (2014). Las prácticas pedagógicas en la formación inicial de profesores. Análisis desde la perspectiva de la construcción del conocimiento profesional del profesor de ciencias. *Revista Tecné, Episteme y Didaxis: TED.* Número Extraordinario. 672-679.

Salazar, S. (2005). El conocimiento pedagógico del contenido como categoría estudio de la formación docente. Revista universidad de Costa Rica, 05 (02), 1-18.

Santos-Trigo, M. (2015). La Resolución de Problemas Matemáticos: Avances y Perspectivas en la Construcción de una Agenda de Investigación y Práctica. *Centro de Investigación y de Estudios Avanzados*, Ed. Cinvestav-IPN, 1-27.

Schwab, J. (1978). *Science, curriculum and liberal education,* Chicago, University of Chicago Press.

Valbuena, E. (2007). *El conocimiento didáctico del contenido biológico: estudio de las concepciones disciplinares y didácticas de futuros docentes de la universidad pedagógica nacional (Colombia).* (Tesis doctoral). Universidad Complutense de Madrid.

Utilidad de las estrategias de gamificación para la enseñanza de matemáticas: Percepciones del profesorado de Educación Secundaria de Andalucía

Jaime G. Cimas
IES El Sauce, La Carlota, Córdoba

Resumen: *El uso de la gamificación se ha extendido en la enseñanza de las matemáticas, lo que se refleja en el creciente número de estudios que examinan cómo esta repercute en la mejora de las competencias matemáticas y cómo los estudiantes responden a su implementación. Sin embargo, la investigación es limitada en cuanto a las opiniones docentes. Este estudio explora las percepciones del profesorado de matemáticas de secundaria de Andalucía acerca de la utilidad de la gamificación. Los resultados muestran una actitud positiva generalizada, revelan la falta de formación docente en gamificación y animan a seguir investigando en el ámbito.*
Palabras clave: *Educación Secundaria; enseñanza de matemáticas; gamificación; percepciones docentes.*

Usefulness of gamification for teaching mathematics: Perceptions of Secondary Education teachers in Andalusia

Abstract: *The use of gamification has become widespread in the teaching of mathematics as shown in the growing number of studies examining how these strategies impact the improvement of students' mathematical competences and how learners respond to its implementation. However, research is limited in terms of teachers' opinions. This study explores the perceptions of high school teachers of mathematics in Andalusia regarding the usefulness of gamification. Findings show a generally positive attitude among respondents, reveal a lack of teacher training in gamification, and encourage further research in the field.*
Keywords: *Secondary Education; mathematics education; gamification; teacher perceptions.*

1. INTRODUCCIÓN

En las últimos años, se ha producido un aumento del número de investigaciones centradas en analizar la aplicación del juego y de las estrategias de gamificación en la enseñanza de diversidad de materias educativas (Cózar-Gutiérrez y Sáez-López, 2016; Lo y Hew, 2020; Vélez-Osorio, 2016), así como su potencial para el aprendizaje (Bruder, 2015; Fithriani, 2021; Kapp, Blair y Mesch, 2013). Sin embargo, aún existen ciertas dudas en cuanto a los efectos de los juegos en el proceso de enseñanza y aprendizaje más allá del aparentemente evidente incremento de la diversión, la motivación y el compromiso del alumnado (Aldemir, Celik y Kaplan, 2018; Jabbar y Felicia, 2015). En este sentido, parece que la clave para conseguir beneficios en el aprendizaje del alumnado radica en la correcta selección de elementos de los juegos cuando se diseñan las actividades más que en el simple uso de los juegos como tal (Werbach, 2014).

En el área de matemáticas, el uso de estrategias educativas basadas en el juego también se ha extendido. Esto se ha visto reflejado en un aumento de estudios que tratan de examinar cómo el uso del juego y la gamificación en el aula repercute en la mejora de competencias matemáticas como el conocimiento numérico (Brezovszky et al., 2019), el pensamiento lógico-matemático (Godoy-Cedeño, Abad-Escalante y Torres-Caceres, 2020), las habilidades de cálculo (Díaz y Ángel, 2021) y el rendimiento general en la materia (Stranger-Johannessen, 2018; Yıldırım, 2017).

En cuanto a los agentes educativos implicados, existen trabajos centrados en las percepciones del alumnado y del profesorado sobre el uso de juegos. En el caso de los estudiantes, diversos muestran actitudes positivas entre el alumnado universitario hacia el uso de sistemas que utilizan elementos de juego (Cheong, Filippou y Cheong, 2014). En la misma línea, la literatura científica parece corroborar las opiniones positivas del estudiantado en lo que a aprendizaje de matemáticas se refiere (Papp, 2017; Yıldırım, 2017). Sin embargo, la investigación es limitada en el caso de los docentes, y aquellos estudios que han sido desarrollados en este ámbito indican que es necesario continuar analizando las percepciones del profesorado de matemáticas sobre la pertinencia de incluir elementos de los juegos en la enseñanza de la materia, pues solo conociendo lo que opinan los profesionales de la educación se puede garantizar una correcta implementación de estas estrategias y, en consecuencia, un aprendizaje óptimo de los contenidos curriculares (Brigham, 2019; Palacios-Hidalgo, en prensa). En este sentido, este estudio tiene como objetivo explorar las percepciones del profesorado de matemáticas de Educación Secundaria de la comunidad autónoma de Andalucía (España) acerca de la utilidad de las estrategias de gamificación para la enseñanza de la materia.

2. MARCO CONCEPTUAL Y TEÓRICO

2.1 Aprendizaje basado en el juego y gamificación

Como señalan Martín-Hierro y Pastor-Seller (2020), el aprendizaje basado en el juego "parte de una estrategia educativa innovadora en la que los niños y las niñas se convierten en los/las protagonistas de su propio aprendizaje" (p. 94). Por su parte, Cózar-Gutiérrez y Sáez-López (2016) lo definen como el uso de juegos como herramientas de enseñanza para mejorar la experiencia de aprendizaje manteniendo un equilibrio entre el contenido y el juego y su aplicación en el mundo real.

En relación con el aprendizaje basado en el juego (y erróneamente entendida como sinónimo de este concepto), la gamificación consiste en incorporar "elementos del diseño del juego para aprovecharlos en el contexto educativo" (Observatorio de Innovación Educativa del Tecnológico de Monterrey, 2016, p. 7), es decir, aplicar principios o mecánicas propias de los juegos (tales como el sistema de puntos, las recompensas o los diferentes niveles) para potenciar la experiencia de aprendizaje del alumnado jugador.

> La Gamificación funciona como una estrategia didáctica motivacional en el proceso de enseñanza-aprendizaje para provocar comportamientos específicos en el alumno dentro de un ambiente que le sea atractivo, que genere un compromiso con la actividad en la que participa y que apoye al logro de experiencias positivas para alcanzar un aprendizaje significativo. (Observatorio de Innovación Educativa del Tecnológico de Monterrey, 2016, p. 7)

Precisamente, estas premisas de mejorar la experiencia del alumnado han provocado la creciente atención que esta nueva forma de entender la enseñanza y el aprendizaje ha recibido en diversos ámbitos de la investigación (Karakoç, Eryılmaz, Özpolat y Yıldırım, 2020; Sailer y Homner, 2020). En este sentido, son numerosos los estudios centrados en analizar el uso del aprendizaje basado en el juego y la gamificación en áreas como la empresarial (Behl, Sheorey, Pal, Veetil y Singh, 2020), la laboral (Lowensteyn et al., 2019), la turística (Xu, Weber y Buhalis, 2014) o la sanitaria (van Gaalen et al., 2021), además de la educativa (Putz, Hofbauer y Treiblmaier, 2020).

Considerando el aumento de relevancia que han experimentado estos enfoques educativos, parece innegable el potencial que el aprendizaje basado en el juego y la gamificación tienen para el alumnado. En este sentido, Aldemir et al. (2018) señalan entre los beneficios que reporta el uso educativo de los juegos los siguientes: favorece la motivación y el compromiso del alumnado, potencia los logros académicos y el aprendizaje de materias diversas, mejora las calificaciones y la asistencia a las clases, y aumenta la satisfacción y el disfrute de los discentes. En contraposición, los autores también hacen referencia a estudios que critican la gamificación, advirtiendo que este tipo de estrategias utilizan elementos irrelevantes de los juegos que ignoran los aspectos críticos de su diseño que realmente motivan a los jugadores (Bogost, 2011), se centran en sumar puntos y dar unas recompensas (Robertson, 2010) que tienden a ser escasas para favorecer la diversión de quienes juegan (Bogost, 2011).

En cualquier caso, recientes estudios han revelado que el uso de estrategias de gamificación en el aula favorece el aumento del componente motivacional y afectivo del aprendizaje (Hamari, 2017; Ritzhaupt et al., 2021; Siew, 2018), así como del rendimiento académico del alumnado (Lister, 2015; Yıldırım y Şen, 2021). Por tanto, parece relevante seguir implementado esta modalidad de enseñanza en las aulas.

2.2. Investigación sobre el uso de la gamificación en la enseñanza de matemáticas

Al igual que en otras materias educativas, la investigación acerca del uso de estrategias de gamificación en la enseñanza de matemáticas ha crecido en lo últimos años. Así pues, estudios como el de Brezovszky et al. (2019) examinan los efectos de un entorno de aprendizaje basado en el uso de juegos para mejorar el conocimiento numérico y las habilidades matemáticas del alumnado de Educación Primaria, revelando una mejora de ambos aspectos como consecuencia del uso de este tipo de estrategias en el aula. En la etapa secundaria, investigaciones como la de Lo y Hew (2020) sugieren que el uso de la gamificación combinada con el *flipped learning* (o aprendizaje inverso) favorece el desarrollo de habilidades cognitivas de los estudiantes. En el contexto de educación superior, trabajos como el de Godoy-Cedeño et al. (2020) tratan de determinar el impacto de una herramienta de gamificación como *Kahoot!* en el desarrollo del pensamiento lógico-matemático del alumnado de diferentes grados universitarios, mostrando resultados positivos al respecto; en la misma línea, Yıldırım (2017) examina los efectos de la enseñanza basada en la gamificación en el rendimiento del alumnado, demostrando que dichas estrategias tienen un impacto positivo.

En relación con las percepciones derivadas del uso del aprendizaje basado en el juego y las estrategias de gamificación en el aula de matemáticas, Papp (2017) explora las opiniones del alumnado acerca de estas experiencias, mostrando una mayor motivación y compromiso hacia las materias implicadas. De forma similar, Zaharin et al. (2021) investigan las percepciones de estudiantes en términos de habilidades desarrolladas, aceptación e interés tras la implementación de una experiencia de gamificación en el aprendizaje de los conceptos matemáticos de perímetro y área, reflejando opiniones positivas al respecto. Por su parte, Cheong, Filippou y Cheong (2014) revelan actitudes positivas entre el alumnado universitario hacia el uso de sistemas que utilizan elementos de los juegos debido a que estos favorecen la interacción social, el compromiso y el aumento del aprendizaje.

En el caso de los docentes de matemáticas, existen pocos estudios centrados en estudiar de manera exclusiva cómo estos perciben la utilidad de la gamificación para la enseñanza de contenidos de la asignatura. En un estudio de caso de carácter cualitativo, Brigham (2019) analiza cómo profesorado de Educación Primaria y Secundaria percibe estas estrategias, mostrando el aumento del compromiso del alumnado como uno de los principales beneficios de la aplicación de la gamificación en el aula. Por su parte, Palacios-Hidalgo (en prensa) plantea el diseño y pilotaje de un instrumento específico de tipo cuantitativo para examinar las opiniones del profesorado de matemáticas sobre el uso de la gamificación, revelando actitudes positivas hacia esta opción de enseñanza, la cuales, además, tienden a ser más favorables entre las mujeres y los docentes de Educación Primaria frente a las de los hombres y el profesorado de Secundaria. En ambos casos, los investigadores animan a seguir reflexionando sobre la formación del profesorado en estrategias de gamificación e investigando sus opiniones y actitudes para mejorar la aplicación en las aulas.

3. MÉTODO

El objetivo principal de este estudio es explorar las percepciones del profesorado de matemáticas de Educación Secundaria de la comunidad autónoma de Andalucía (España) acerca de la utilidad de las estrategias de gamificación para la enseñanza de la materia. Se establecen, además, las siguientes hipótesis:

- Hipótesis 1 (H1): El profesorado tiene percepciones positivas sobre la utilidad de las estrategias de gamificación para la enseñanza de las matemáticas.
- Hipótesis 2 (H2): Existen diferencias significativas en las percepciones del profesorado en función de género.
- Hipótesis 3 (H3): El profesorado que ha recibido formación específica en gamificación tiene percepciones más positivas acerca de la utilidad de estas estrategias que el profesorado que no ha recibido formación específica.
- Hipótesis 4 (H4): El profesorado con menos años de experiencia docente tiene percepciones más positivas acerca de la utilidad de las estrategias de gamificación que el profesorado con menos años de experiencia docente.

3.1. Participantes

El estudio utilizó un muestreo no probabilístico por redes o bola de nieve, un procedimiento seguido en situaciones en las que, debido a la dificultad para reclutar participantes potenciales para un estudio, se seleccionan individuos de dicha población quienes, a su vez, captan a otros hasta obtener una muestra suficiente (Hernández-Ávila y Carpio, 2019).

En este sentido, participaron un total de 44 docentes de Educación Secundaria especializados en la enseñanza de matemáticas de la comunidad autónoma de Andalucía (España). En cuanto al género, el 38,6 % de los docentes (n = 17) eran hombres, el 59,1 % (n = 26) eran mujeres, y el 2,3 % (n = 1) prefirió no dar este dato. En cuanto a la relación de los participantes con la docencia, el 97,7 % (n = 43) eran docentes en activo, mientras que el 2,3 % restante (n = 1) seguía formándose. En cuanto al tipo de enseñanza que impartían, la mayoría (97,7 %; n = 43) trabajaba en enseñanza reglada, mientras que uno de los participantes (2,3 %) prefirió omitir esta información. La edad del profesorado del estudio oscilaba entre los 25 y los 58 años (M = 40,25 años; DT = 7,945), mientras que la experiencia docente estaba comprendida entre los 0 y los 32 años (M = 11,02 años; DT = 8,470). Finalmente, en relación con la formación específica en estrategias de gamificación, el 47,73 % (n = 21) de los participantes indicó que sí la había recibido, en contraposición al 52,27 % (n = 23) restante, que señaló que nunca había recibido este tipo de formación.

3.2. Diseño, instrumento y procedimiento

El estudio siguió un enfoque cuantitativo e interpretativo para comprender las percepciones de los participantes en el estudio (della Porta y Keating, 2013). En cuanto al instrumento, se utilizó la versión en español del "Cuestionario sobre la utilidad de la gamificación en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en Educación Primaria y Secundaria" (Palacios-Hidalgo, en prensa). El cuestionario consta de un total de 25 ítems agrupados en cinco dimensiones: (1) información personal, con seis preguntas sobre la edad, el género, la situación docente, los años de experiencia docente, el tipo de enseñanza y la etapa educativa en la que imparten docencia los participantes; (2) conocimiento general sobre gamificación, con cinco preguntas; (3) formación en gamificación, con cuatro preguntas; (4) uso de la gamificación en la clase de matemáticas, con cinco preguntas; y (5) utilidad de la gamificación en matemáticas, con cinco preguntas. Algunas preguntas son de tipo sí/no, mientras que otras se miden mediante escalas Likert de cuatro puntos (1 = totalmente en desacuerdo; 2 = en desacuerdo; 3 = de acuerdo; 4 = totalmente de acuerdo). El instrumento se distribuyó de manera online utilizando la herramienta *Google Forms* entre septiembre y octubre de 2021.

3.3. Análisis de datos

Los datos cuantitativos obtenidos se analizaron con el software IBM SPSS (v. 25 para MacOS). Considerando el tamaño muestral, se utilizó la prueba de Shapiro-Wilk para determinar si la muestra seguía una distribución normal (Razali y Wah, 2011). El nivel de significación fue de $p < 0,05$ en todas las variables, por lo que se asumió que la muestra no seguía una distribución normal. En este sentido, se aplicaron pruebas no paramétricas (U de Mann-Whitney para determinar diferencias en función del género y la formación especifica en gamificación y test de Kruskal-Wallis para examinar las discrepancias en función de los años de experiencia docente) para determinar las diferencias estadísticamente significativas entre los docentes participantes en términos de género, formación específica en gamificación y años de experiencia docente.

4. RESULTADOS

4.1 Percepción general del profesorado

En la Tabla 1 se muestran los principales resultados descriptivos (en porcentajes y frecuencias) de las percepciones y actitudes del profesorado participante:

Tabla 1. Resultados descriptivos

Ítem	%				M	DT
	TD	D	A	TA		
	No		Sí			
Q01. Considero que tengo conocimientos necesarios para aplicar estrategias de gamificación en mi docencia.	11,4	29,5	29,5	29,5	2,77	1,008

Ítem	%				M	DT
	TD	D	A	TA		
	No		Sí			
Q02. Se han realizado experiencias de gamificación en mi centro educativo.	31,8		68,2		1,32	0,471
Q03. Conozco tareas en las que se utilizan estrategias de gamificación y que puedo emplear en mi docencia.	13,6	20,5	29,5	36,4	2,89	1,061
Q04. Sé diseñar actividades en las que se utilizan estrategias de gamificación.	20,5	27,3	25,0	27,3	2,59	1,106
Q05. Considero que la gamificación puede favorecer la inclusión del alumnado.	13,6	18,2	25,0	43,2	2,98	1,089
Q06.1. He recibido formación en gamificación en la universidad.	88,6		11,4		1,89	0,321
Q06.2. He recibido formación en gamificación en un centro de educación permanente (CEP).	77,3		22,7		1,77	0,424
Q06.3. He recibido formación en gamificación en congresos.	90,9		9,1		1,91	0,291
Q06.4. He recibido formación en gamificación en un grupo de trabajo o en mi centro.	79,5		20,5		1,80	0,408
Q06.5. He recibido autoformación en gamificación.	77,3		22,7		1,77	0,424
Q06.6. He recibido formación en gamificación de otras formas.	97,7		2,3		1,98	0,151
Q07. Considero que mi formación en gamificación es suficiente.	31,8	36,8	13,6	18,2	2,18	1,084
Q08. Me gustaría formarme/seguir formándome en gamificación.	13,6	13,6	22,7	50,0	3,09	1,096

<table>
<tr><th rowspan="3">Ítem</th><th colspan="4">%</th><th rowspan="3">M</th><th rowspan="3">DT</th></tr>
<tr><th>TD</th><th>D</th><th>A</th><th>TA</th></tr>
<tr><th colspan="2">No</th><th colspan="2">Sí</th></tr>
<tr><td>Q09. He realizado experiencias de gamificación en mi centro educativo.</td><td colspan="2">40,9</td><td colspan="2">59,1</td><td>1,41</td><td>0,497</td></tr>
<tr><td>Q10. Utilizo con frecuencia estrategias de gamificación cuando enseño matemáticas.</td><td>34,1</td><td>31,8</td><td>25,0</td><td>9,1</td><td>2,09</td><td>0,984</td></tr>
<tr><td>Q11. Utilizo con frecuencia estrategias de gamificación cuando enseño otras materias diferentes a las matemáticas.</td><td>44,1</td><td>32,4</td><td>17,6</td><td>5,9</td><td>1,85</td><td>0,925</td></tr>
<tr><td>Q12. Cuando utilizo estrategias de gamificación, el alumnado se muestra interesado y participativo.</td><td>20,0</td><td>10,0</td><td>25,0</td><td>45,0</td><td>2,95</td><td>1,176</td></tr>
<tr><td>Q13. Cuando utilizo estrategias de gamificación, el alumnado adquiere los contenidos trabajados.</td><td>20,0</td><td>30,0</td><td>30,0</td><td>20,0</td><td>2,50</td><td>1,038</td></tr>
<tr><td>Q14. Considero que las estrategias de gamificación son útiles para la enseñanza de contenidos del área de matemáticas.</td><td>12,2</td><td>26,8</td><td>29,3</td><td>31,7</td><td>2,80</td><td>1,030</td></tr>
<tr><td>Q15. Considero que la gamificación puede contribuir a mejorar el desarrollo de la competencia matemática y las competencias básicas en ciencia y tecnología en el alumnado.</td><td>11,4</td><td>22,7</td><td>31,8</td><td>34,1</td><td>2,89</td><td>1,017</td></tr>
<tr><td>Q16. Considero que la gamificación puede contribuir a mejorar el desarrollo del resto de competencias clave en el alumnado.</td><td>11,4</td><td>20,5</td><td>40,9</td><td>27,3</td><td>2,84</td><td>0,963</td></tr>
<tr><td>Q17. Considero que la gamificación puede contribuir a mejorar la motivación del alumnado hacia el aprendizaje de las matemáticas.</td><td>9,1</td><td>15,9</td><td>31,8</td><td>43,2</td><td>3,09</td><td>0,984</td></tr>
<tr><td>Q18. Considero que la gamificación puede contribuir a mejorar mi labor como docente de matemáticas.</td><td>11,4</td><td>22,7</td><td>31,8</td><td>34,1</td><td>2,89</td><td>1,017</td></tr>
</table>

Nota. TD = Totalmente en desacuerdo; D = En desacuerdo; A = De acuerdo; TA = Totalmente de acuerdo.

Fuente: Elaboración propia.

En relación con la dimensión 'conocimiento general sobre gamificación' (ítems Q01-Q05), si bien las respuestas de los participantes varían cuando se les preguntó si consideraban tener conocimientos necesarios para aplicar estrategias de gamificación en su enseñanza (Q01) y si sabían diseñar actividades en las que se utilizaran estas (Q04), la mayoría de los sujetos del estudio se mostró positivo en cuanto a su conocimiento sobre tareas en las que se emplean estrategias de gamificación para utilizar en su docencia (Q03) y al potencial de la gamificación para favorecer la inclusión del alumnado (Q05). Además, un porcentaje elevado de participantes señaló que se habían realizado experiencias de gamificación en su centro educativo (Q02).

En cuanto a la dimensión 'formación en gamificación' (ítems Q06-Q08), si bien en la descripción de la muestra del estudio ya se mostraba que más de la mitad de los participantes (52,27 %; n = 23) no había recibido formación específica en gamificación, los resultados descriptivos corroboran esta situación. En este sentido, una alta proporción de los docentes encuestados afirmó no haber recibido formación ni en la universidad, ni en los centros de educación permanente, ni en congresos, ni en un grupo de trabajo, ni en su centro, ni de manera autodidacta. En cualquier caso, la formación por parte de los centros de educación permanente (Q06.2) y la autoformación (Q06.5) fueron las respuestas principales en los casos en los que los docentes indicaron haber recibido entrenamiento específico en gamificación. Por otro lado, la mayoría de los participantes reveló que su formación en gamificación era insuficiente (Q07), mientras que la mitad mostró su interés por formarse o seguir formándose en estas estrategias (Q08).

En relación con el uso de la gamificación en la clase de matemáticas (ítems Q09-Q13), si bien el 59,1 % de los participantes indicó que había realizado experiencias de gamificación en su centro educativo (Q09), la respuesta más común cuando se les preguntaba por la frecuencia con que usaban la gamificación en la enseñanza de matemáticas (Q10) y de otras materias (Q11) fue negativa. No obstante, los encuestados indicaron que el alumnado tiende a mostrarse interesado y participativo (Q12) y a adquirir los contenidos trabajados (Q13) en las ocasiones en que emplean estrategias de gamificación.

Finalmente, en cuanto a la dimensión 'utilidad de la gamificación en matemáticas' (ítems Q14-Q18), las respuestas del profesorado participante se concentraron en los valores 'de acuerdo' y 'totalmente de acuerdo' cuando se les preguntó si creían que la gamificación era útil para la enseñanza de contenidos de matemáticas (Q14), y si podía contribuir a mejorar el desarrollo de la competencia matemática y las competencias básicas en ciencia y tecnología (Q15), otras competencias (Q16) y la motivación (Q17) del alumnado. De forma similar, la mayoría de los docentes indicó que la gamificación podía ayudarle a mejorar su trabajo como docente de matemáticas.

4.2. Diferencias en función del género del profesorado

La Tabla 2 presenta los resultados de la prueba U de Mann-Whitney aplicada a los ítems del cuestionario discriminando por la variable 'género':

Tabla 2. Diferencias entre participantes en función de su género

Ítem	Género	N	Rango promedio	Suma de rangos	U de Mann-Whitney	W de Wilcoxon	Z	sig.
Q01	Hombre	17	20,44	347,50	194,500	347,500	-0,686	0,493
	Mujer	26	23,02	598,50				
Q03	Hombre	17	18,53	315,00	162,000	315,000	-1,529	0,126
	Mujer	26	24,27	631,00				
Q04	Hombre	17	17,76	302,00	149,000	302,000	-1,848	0,065
	Mujer	26	24,77	644,00				
Q05	Hombre	17	19,68	334,50	181,500	334,500	-1,034	0,301
	Mujer	26	23,52	611,50				
Q07	Hombre	17	19,15	325,50	172,500	325,500	-1,261	0,207
	Mujer	26	23,87	620,50				
Q08	Hombre	17	21,29	362,00	209,000	362,000	-0,320	0,749
	Mujer	26	22,46	584,00				
Q10	Hombre	17	18,41	313,00	160,000	313,000	-1,592	0,111
	Mujer	26	24,35	633,00				
Q11	Hombre	17	16,04	224,50	119,500	224,500	-0,529	0,597
	Mujer	26	17,71	336,50				
Q12	Hombre	17	16,68	233,50	128,500	233,500	-1,442	0,149
	Mujer	26	21,86	546,50				
Q13	Hombre	17	17,46	244,50	139,500	244,500	-1,079	0,281
	Mujer	26	21,42	535,50				
Q14	Hombre	17	21,07	295,00	174,000	525,000	-0,236	0,813
	Mujer	26	20,19	525,00				
Q15	Hombre	17	22,00	374,00	221,000	572,000	0,000	1,000
	Mujer	26	22,00	572,00				
Q16	Hombre	17	20,56	349,50	196,500	349,500	-0,642	0,521
	Mujer	26	22,94	596,50				

Ítem	**Género**	**N**	**Rango promedio**	**Suma de rangos**	**U de Mann-Whitney**	**W de Wilcoxon**	**Z**	**sig.**
Q17	Hombre	17	21,59	367,00	214,000	367,000	-0,185	0,853
	Mujer	26	22,27	579,00				
Q18	Hombre	17	21,50	365,50	212,500	365,500	-0,220	0,826
	Mujer	26	22,33	580,50				

Nota. Solo se consideran las variables de tipo escalar.

Fuente: Elaboración propia.

Como se observa en la Tabla 2, las respuestas en el caso de las mujeres fueron más altas en todos los ítems excepto cuando se les preguntó si consideraban que las estrategias de gamificación eran útiles para la enseñanza de contenidos de matemáticas (Q14) y si creían que la gamificación podía ayudar al desarrollo de la competencia matemática del alumnado (Q15). No obstante, la significación en todos los casos fue $p > 0,05$, por lo que no pueden asumirse diferencias estadísticamente significativas entre hombres y mujeres (Zhu, 2016).

4.3. Diferencias en función de la formación en gamificación del profesorado

La Tabla 3 muestra los resultados de la prueba U de Mann-Whitney aplicada a los ítems del cuestionario discriminando por la variable 'formación específica en gamificación':

Tabla 3. Diferencias entre participantes en función de la formación en gamificación

Ítem	**Formación**	**N**	**Rango promedio**	**Suma de rangos**	**U de Mann-Whitney**	**W de Wilcoxon**	**Z**	**sig.**
Q01	Sí	21	27,67	581,00	133,000	409,000	-2,656	0,008
	No	23	17,78	409,00				
Q03	Sí	21	28,71	603,00	111,000	387,000	-3,205	0,001
	No	23	16,83	387,00				
Q04	Sí	21	28,14	591,00	123,000	399,000	-2,878	0,004
	No	23	17,35	399,00				
Q05	Sí	21	25,43	534,00	180,000	456,000	-1,527	0,127
	No	23	19,83	456,00				

Ítem	Formación	N	Rango promedio	Suma de rangos	U de Mann-Whitney	W de Wilcoxon	Z	sig.
Q07	Sí	21	27,98	587,50	126,500	402,500	-2,830	0,005
	No	23	17,50	402,50				
Q08	Sí	21	21,40	449,50	218,500	449,500	-0,583	0,560
	No	23	23,50	540,50				
Q10	Sí	21	27,02	567,50	146,500	422,500	-2,337	0,019
	No	23	18,37	422,50				
Q11	Sí	21	19,12	325,00	117,000	270,000	-1,012	0,311
	No	23	15,88	270,00				
Q12	Sí	21	24,98	524,50	105,500	295,500	-2,707	0,007
	No	23	15,55	295,50				
Q13	Sí	21	23,83	500,50	129,500	319,500	-1,965	0,049
	No	23	16,82	319,50				
Q14	Sí	21	21,26	446,50	204,500	414,500	-0,149	0,881
	No	23	20,73	414,50				
Q15	Sí	21	23,74	498,50	215,500	491,500	-0,639	0,523
	No	23	21,37	491,50				
Q16	Sí	21	23,95	503,00	211,000	487,000	-0,755	0,450
	No	23	21,17	487,00				
Q17	Sí	21	24,36	511,50	202,500	478,500	-0,975	0,329
	No	23	20,80	478,50				
Q18	Sí	21	24,43	513,00	201,000	477,000	-0,995	0,320
	No	23	20,74	477,00				

Nota. Solo se consideran las variables de tipo escalar.

Fuente: Elaboración propia.

Como se presenta en la Tabla 3, los participantes que indicaron haber recibido formación específica en estrategias de gamificación puntuaron más alto que los que señalaron que no. Sin embargo, las diferencias fueron estadísticamente significativas ($p >$ 0,05; Zhu, 2016) solo en siete de los ítems del cuestionario, lo que se traduce en que los docentes que habían sido formados en gamificación mostraron actitudes más positivas en cuanto a sus conocimientos necesarios para aplicar estas estrategias en su docencia (Q01), conocimiento sobre tareas en las que se emplea la gamificación (Q03), y conocimiento para diseñar actividades de este tipo (Q04). De forma similar, los participantes que habían recibido algún tipo de instrucción en gamificación revelaron utilizar con mayor frecuencia estas estrategias en la enseñanza de matemáticas (Q10) y sentir que su formación era suficiente (Q07). En relación con sus percepciones sobre los beneficios de la gamificación para sus estudiantes, el profesorado formado en este aspecto se mostró más positivo en cuanto al fomento del interés y la participación en el aula (Q12) y a la adquisición de los contenidos trabajados (Q13).

4.4. Diferencias en función de la experiencia del profesorado

En la Tabla 4 se presentan los resultados de la prueba de Kruskal-Wallis discriminando por la variable 'años de experiencia docente':

Tabla 4. Diferencias entre participantes en función de la experiencia docente

Ítem	Experiencia docente	N	Rango promedio	H de Kruskal-Wallis	sig.
Q01	de 0 a 5 años	14	20,64	1,904	0,386
	de 6 a 15 años	19	25,42		
	de 16 a 32 años	11	19,82		
Q03	de 0 a 5 años	14	21,39	0,308	0,857
	de 6 a 15 años	19	23,66		
	de 16 a 32 años	11	21,91		
Q04	de 0 a 5 años	14	22,29	0,740	0,691
	de 6 a 15 años	19	24,08		
	de 16 a 32 años	11	20,05		
Q05	de 0 a 5 años	14	26,82	3,547	0,170
	de 6 a 15 años	19	22,13		
	de 16 a 32 años	11	17,64		
Q07	de 0 a 5 años	14	19,43	1,469	0,480
	de 6 a 15 años	19	24,66		
	de 16 a 32 años	11	22,68		
Q08	de 0 a 5 años	14	26,79	3,636	0,162
	de 6 a 15 años	19	22,13		
	de 16 a 32 años	11	17,68		

Ítem	Experiencia docente	N	Rango promedio	H de Kruskal-Wallis	sig.
Q10	de 0 a 5 años	9	25,82	1,747	0,417
	de 6 a 15 años	18	21,79		
	de 16 a 32 años	7	19,50		
Q11	de 0 a 5 años	13	21,33	6,465	0,039
	de 6 a 15 años	16	18,56		
	de 16 a 32 años	11	9,86		
Q12	de 0 a 5 años	13	26,12	9,783	0,008
	de 6 a 15 años	16	21,63		
	de 16 a 32 años	11	12,23		
Q13	de 0 a 5 años	14	25,88	7,841	0,020
	de 6 a 15 años	17	21,25		
	de 16 a 32 años	10	13,05		
Q14	de 0 a 5 años	14	23,54	2,532	0,282
	de 6 a 15 años	19	21,76		
	de 16 a 32 años	11	16,15		
Q15	de 0 a 5 años	14	25,79	3,447	0,178
	de 6 a 15 años	19	23,37		
	de 16 a 32 años	11	16,82		
Q16	de 0 a 5 años	14	25,86	2,499	0,287
	de 6 a 15 años	19	22,58		
	de 16 a 32 años	11	18,09		
Q17	de 0 a 5 años	14	26,75	3,473	0,176
	de 6 a 15 años	19	22,13		
	de 16 a 32 años	11	17,73		
Q18	de 0 a 5 años	14	28,04	4,629	0,099
	de 6 a 15 años	19	21,08		
	de 16 a 32 años	11	17,91		

Nota. Solo se consideran las variables de tipo escalar.

Fuente: Elaboración propia.

Los resultados de la prueba de Kruskal-Wallis mostrados en la Tabla 4 reflejan que el profesorado con menos experiencia docente (entre 0 y 5 años) puntuó más alto en la mayoría de los ítems considerados, mientras que los docentes con experiencia de entre 6 y 15 años reveló mayor puntuación en cuatro de las preguntas. En esta línea, se observaron diferencias estadísticamente significativas (p > 0,05; Zhu, 2016) en tres de los ítems del cuestionario a favor del profesorado con menos experiencia, lo que se traduce en una mayor frecuencia de uso de las estrategias de gamificación en la enseñanza de materias diferentes a las matemáticas (Q11) por parte de estos docentes, así como una mayor conciencia sobre la mejora del interés y la participación del alumnado (Q12) y de la adquisición de contenidos de matemáticas (Q13).

5. DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

Este estudio ha tratado de explorar las percepciones del profesorado de matemáticas de Educación Secundaria de Andalucía en relación con la utilidad de la gamificación para la enseñanza del área. En este sentido, y tras utilizar la prueba de Shapiro-Wilk, el tamaño de la muestra (n = 44) se ha considerado válido para la aplicación de las pruebas no paramétricas (U de Mann-Whitney y test de Kruskal-Wallis) desarrolladas (Fahoome y Sawilowsky, 2000; Razali y Wah, 2011). Así, los resultados de los análisis realizados han permitido examinar las actitudes de los docentes participantes en el estudio hacia el uso de la gamificación, las posibles diferencias entre los diferentes sectores que componen la muestra y otros aspectos relacionados y relativos a su formación en este tipo de estrategias. Además, los datos obtenidos han permitido dar respuesta a las hipótesis del estudio.

En relación con H1 (*El profesorado tiene percepciones positivas sobre la utilidad de las estrategias de gamificación para la enseñanza de las matemáticas*), esta hipótesis se formuló en base a investigaciones previas que revelan que los docentes de matemáticas consideran que la gamificación puede ser útil para el alumnado (Brigham, 2019; Palacios-Hidalgo, en prensa). En este sentido, la hipótesis se corrobora, pues, de forma general, los participantes en el estudio se mostraron positivos en cuanto a su conocimiento sobre gamificación y a la utilidad de estas estrategias para la enseñanza de contenidos de matemáticas, el desarrollo de la competencia matemática y la mejora de la motivación del alumnado (ver Tabla 1). No obstante, cabe señalar en este sentido que, si bien existe una actitud positiva generalizada hacia la gamificación, los resultados del estudio también constatan una falta de formación docente en este ámbito.

H2 (*Existen diferencias significativas en las percepciones del profesorado en función de género*) se formuló teniendo en cuenta otros estudios que demuestran la existencia de diferencias entre hombre y mujeres en torno a la frecuencia de uso de la gamificación para enseñar matemáticas (Palacios-Hidalgo, en prensa). En este sentido, la hipótesis se rechaza pues, las mujeres participantes tendieron a mostrarse más positivas acerca de la utilidad de la gamificación para la enseñanza de contenidos de matemáticas y para el desarrollo de la competencia matemática de los estudiantes, estas diferencias no son estadísticamente significativas (ver Tabla 2). Por tanto, se corroboran los hallazgos de Palacios-Hidalgo (en prensa).

Por otro lado, H3 (*El profesorado que ha recibido formación específica en gamificación tiene percepciones más positivas acerca de la utilidad de estas estrategias que el profesorado que no ha recibido formación específica*) se estableció en torno a la premisa de que, si los docentes tienen más conocimiento acerca de las estrategias de gamificación, serán más conscientes de sus beneficios para el alumnado. La hipótesis se corrobora, pues los resultados de los análisis demostraron la existencia de diferencias significativas a favor de los participantes que indicaron haber recibido formación específica en gamificación en relación con su conocimiento sobre estas estrategias, la frecuencia de uso, el fomento del interés y la participación del alumnado y la mejora de adquisición de contenidos (ver Tabla 3). En esta perspectiva, el presente estudio parece mostrar que los docentes de matemáticas son conscientes, de forma general, de los beneficios de la gamificación para la enseñanza de matemáticas que señala la literatura científica (Cheong et al., 2014; Papp, 2017; Zaharin et al., 2021).

Finalmente, H4 (*El profesorado con menos años de experiencia docente tiene percepciones más positivas acerca de la utilidad de las estrategias de gamificación que el profesorado con menos años de experiencia docente*) se formuló basándose en la idea de que, si los docentes tienen menos experiencia docente (asumiéndose, por tanto, que tienen una formación más actual), estos tendrán mayor conocimiento de estrategias didácticas innovadoras tales como la gamificación. La hipótesis también se corrobora, puesto que el profesorado con menos experiencia docente (en concreto, con 0 a 5 años de experiencia) parece ser más consciente que el resto de profesorado participante de cómo la gamificación puede mejorar el interés y la participación del alumnado a la vez que e aprendizaje de contenidos de la asignatura (ver Tabla 4). Estos resultados siguen la línea de otros estudios que revelan que el profesorado con menos experiencia profesional es más proclive a la implementación de ideas innovadoras en el aula (p. ej. Flores-Tena, Ortega-Navas y Sánchez-Fuster, 2021).

Los resultados del estudio deben interpretarse teniendo en cuenta tres limitaciones. En primer lugar, solo se consideró profesorado de una etapa educativa y de una comunidad autónoma concreta (Educación Secundaria y Andalucía respectivamente) por lo que las conclusiones pueden no ser aplicables a docentes de otros contextos. En segundo lugar y en relación con la limitación anterior, si bien el tamaño muestral del estudio ha sido suficiente para obtener resultados significativos, el número de participantes ha sido reducido como consecuencia de las dificultades de acceso a sujetos de estudio por parte del equipo de investigación. En tercer lugar, el estudio sigue un enfoque exclusivamente cuantitativo basado en las autopercepciones de los participantes, por los que los resultados podrían estar sesgados por el carácter del instrumento y el método de análisis empleados. En este sentido, futuros estudios deberían considerar ampliar la muestra reclutando docentes de diferentes contextos, así como realizar análisis cualitativos adicionales y utilizar fuentes de información adicionales para complementar los resultados cuantitativos aquí descritos. En cualquier caso, este estudio pone de relieve la necesidad de promover formación docente específica en gamificación desde las universidades y los centros de formación permanente y anima a seguir investigando sobre el potencial de estas estrategias para la enseñanza y aprendizaje de matemáticas.

6. REFERENCIAS

Aldemir, T., Celik, B., y Kaplan, G. (2018). A Qualitative Investigation of Student Perceptions of Game Elements in a Gamified Course. *Computers in Human Behavior*, *78*, 235–254. https://doi.org/10.1016/j.chb.2017.10.001

Behl, A., Sheorey, P., Pal, A., Veetil, A. K. V., y Singh, S. R. (2020). Gamification in e-Commerce: A Comprehensive Review of Literature. *Journal of Electronic Commerce in Organizations*, *18*(2), 1–16. https://doi.org/10.4018/JECO.2020040101

Bogost, I. (2011, August 8). Gamification is Bullshit: My Position Statement at the Wharton Gamification Symposium. *bogost.com*. Recuperado de https://bit.ly/3Gkc9I6

Brezovszky, B., McMullen, J., Veermans, K., Hannula-Sormunen, M. M., Rodríguz-Aflecht, G., Pongsakdi, N., Laakkonen, E., y Lehtinen, E. (2019). Effects of a Mathematics Game-Based Learning Environment on Primary School Students' Adaptive Number Knowledge. *Computers & Education*, *128*, 63–74. https://doi.org/10.1016/j.compedu.2018.09.011

Brigham, J. (2019). *Can Games Work for You? Teacher Perceptions of Gamification in Mathematics Grades 6-8* (Tesis doctoral). Kennesaw State University, Kennesaw. Recuperado de https://bit.ly/3sc2Ghk

Bruder, P. (2015). GAME ON: Gamification in the Classroom. *The Education Digest*, *80*(7), 56–60.

Cheong, C., Filippou, J., y Cheong, F. (2014). Towards the Gamification of Learning: Investigating Student Perceptions of Game Elements. *Journal of Information Systems Education*, *25*(3), 233–244. Recuperado de https://bit.ly/34mrFWW

Cózar-Gutiérrez, R., y Sáez-López, J. M. (2016). Game-Based Learning and Gamification in Initial Teacher Training in the Social Sciences: An Experiment with MinecraftEdu. *International Journal of Educational Technology in Higher Education*, *13*(2), 1–11. https://doi.org/10.1186/s41239-016-0003-4

della Porta, D., y Keating, M. (2013). ¿Cuántos enfoques hay en ciencias sociales? Introducción epistemológica. En D. della Porta y M. Keating (Eds.), *Enfoques y metodologías en las ciencias sociales. Una perspectiva pluralista* (pp. 31–51). Madrid: Ediciones Akal.

Díaz, E., y Ángel, I. (2021). Aprendizaje en las matemáticas. La gamificación como nueva herramienta pedagógica. *Revista de Investigación en Ciencias de la Educación HORIZONTES*, *5*(17), 311–326. Recuperado de https://bit.ly/3sbVnGq

Fahoome, G., y Sawilowsky, S. S. (2000). Review of Twenty Nonparametric Statistics and their Large Sample Approximations. *Comunicacion presentada en el Annual Meeting of the American Educational Research Association (New Orleans, LA, abril 24-28, 2000)* (pp. 1–42). Washington: AERA. Recuperado de https://bit.ly/3gqRlUN

Fithriani, R. (2021). The Utilization of Mobile-Assisted Gamification for Vocabulary Learning: Its Efficacy and Perceived Benefits. *Computer Assisted Language Learning Electronic Journal (CALL-EJ)*, *22*(3), 146–163. Recuperado de https://bit.ly/39UbHm6

Flores-Tena, M. J., Ortega-Navas, M. del C., y Sánchez-Fuster, M. C. (2021). Las nuevas tecnologías como estrategias innovadoras de enseñanza-aprendizaje en la era digital. *Revista Electrónica Interuniversitaria de Formación del Profesorado*, *24*(1), 29–42. https://doi.org/10.6018/reifop.406051

Godoy-Cedeño, C. E., Abad-Escalante, K. M., y Torres-Caceres, F. del S. (2020). Gamificación en el desarrollo del pensamiento lógico matemático en universitarios. *3C TIC: Cuadernos de desarrollo aplicados a las TIC*, *9*(3), 107–145. https://doi.org/10.17993/3ctic.2020.93.107-145

Hamari, J. (2017). Do Badges Increase User Activity? A Field Experiment on the Effects of Gamification. *Computers in Human Behavior*, *71*, 469–478. https://doi.org/10.1016/j.chb.2015.03.036

Hernández-Ávila, C. E., y Carpio, N. (2019). Introducción a los tipos de muestreo. *Revista ALERTA*, *2*(1), 75–79. https://doi.org/10.5377/alerta.v2i1.7535

Jabbar, A. I. A., y Felicia, P. (2015). Gameplay Engagement and Learning in Game-Based Learning: A Systematic Review. *Review of Educational Research*, *85*(4), 740–779. https://doi.org/10.3102/0034654315577210

Kapp, K. M., Blair, L., y Mesch, R. (2013). *The Gamification of Learning and Instruction. Fieldbook. Ideas into Practice*. San Francisco: Wiley.

Karakoç, B., Eryılmaz, K., Özpolat, E. T., y Yıldırım, İ. (2020). The Effect of Game-Based Learning on Student Achievement: A Meta-Analysis Study. *Technology, Knowledge and Learning*, 1–16. https://doi.org/10.1007/s10758-020-09471-5

Lister, M. C. (2015). Gamification: The Effect on Student Motivation and Performance at the Post-Secondary Level. *Issues and Trends in Educational Technology*, *3*(2), 1–22. Recuperado de https://bit.ly/34rL1tt

Lo, C. K., y Hew, K. F. (2020). A Comparison of Flipped Learning with Gamification, Traditional Learning, and Online Independent Study: The Effects on Students' Mathematics Achievement and Cognitive Engagement. *Interactive Learning Environments*, *28*(4), 464–481. https://doi.org/10.1080/10494820.2018.1541910

Lowensteyn, I., Berberian, V., Berger, C., Da Costa, D., Joseph, L., y Grover, S. A. (2019). The Sustainability of a Workplace Wellness Program that Incorporates Gamification Principles: Participant Engagement and Health Benefits after 2 Years. *American Journal of Health Promotion*, *33*(6), 850–858. https://doi.org/10.1177/0890117118823165

Martín-Hierro, L., y Pastor-Seller, E. (2020). El aprendizaje basado en el juego como herramienta socioeducativa en contextos comunitarios vulnerables. *Revista Prisma Social*, (3), 88–114. Recuperado de https://bit.ly/3Gk4RUV

Observatorio de Innovación Educativa del Tecnológico de Monterrey. (2016). *Gamificación*. Monterrey: EduTrends. Recuperado de https://bit.ly/35lO8DO

Palacios-Hidalgo, F. J. (en prensa). Math Teachers' Perceptions about Gamification Strategies: An Exploratory Study in the Spanish Context. En C. A. Huertas-Abril, E. Fernández-Ahumada, y N. Adamuz-Povedano (Eds.), *International Approaches and Practices for Gamifying Mathematics* (pp. 1–25). Hershey: IGI Global.

Papp, T. A. (2017). Gamification Effects on Motivation and Learning: Application to Primary and College Students. *International Journal for Cross-Disciplinary Subjects in Education*, *8*(3), 3193–3201. Recuperado de https://bit.ly/3ANWijS

Putz, L.-M., Hofbauer, F., y Treiblmaier, H. (2020). Can Gamification Help to Improve Education? Findings from a Longitudinal Study. *Computers in Human Behavior*, *110*, 1–12. https://doi.org/10.1016/j.chb.2020.106392

Razali, N. M., y Wah, Y. B. (2011). Power Comparisons of Shapiro-Wilk, Kolmogorov-Smirnov, Lilliefors and Anderson-Darling Tests. *Journal of Statistical Modeling and Analytics*, *2*(1), 13–14. Recuperado de https://bit.ly/3rj1gC7

Ritzhaupt, A. D., Huang, R., Sommer, M., Zhu, J., Stephen, A., Valle, N., Hampton, J., y Li, J. (2021). A Meta-Analysis on the Influence of Gamification in Formal Educational Settings on Affective and Behavioral Outcomes. *Educational Technology Research and Development*, *69*, 2493–2522. https://doi.org/10.1007/s11423-021-10036-1

Robertson, M. (2010, November 10). Can't Play, Won't Play. *Kotaku* [Blog Post]. Recuperado de https://bit.ly/3GkAduB

Sailer, M., y Homner, L. (2020). The Gamification of Learning: A Meta-Analysis. *Educational Psychology Review*, *32*, 77–112. https://doi.org/10.1007/s10648-019-09498-w

Siew, P. H. (2018). Pedagogical Change in Mathematics Learning: Harnessing the Power of Digital Game-Based Learning. *Educational Technology & Society*, *21*(4), 259–276. https://doi.org/10.2307/26511553

Stranger-Johannessen, E. (2018). Exploring Math Achievement through Gamified Virtual Reality. En V. Pammer-Schindler, M. Pérez-Sanagustín, H. Drachsler, R. Elferink, y M. Scheffel (Eds.), *Proceedings of the 13th European Conference on Technology-Enhanced Learning 3-6 September 2018, Leeds, United Kingdom* (pp. 613–616). Cham: Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-98572-5_57

van Gaalen, A. E. J., Brouwer, J., Schönrock-Adema, J., Bouwkamp-Timmer, T., Jaarsma, A. D. C., y Georgiadis, J. R. (2021). Gamification of Health Professions Education: A Systematic Review. *Advances in Health Sciences Education*, *26*, 683–711. https://doi.org/10.1007/s10459-020-10000-3

Vélez-Osorio, I. M. (2016). La gamificación en el aprendizaje de los estudiantes universitarios. *Rastros Rostros*, *18*(33), 27–38. https://doi.org/10.16925/ra.v18i33.1683

Werbach, K. (2014). (Re)Defining Gamification: A Process Approach. En A. Spagnolli, L. Chittaro, y L. Gamberini (Eds.), *Persuasive Technology* (pp. 266–272). Cham: Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-07127-5_23

Xu, F., Weber, J., y Buhalis, D. (2014). Gamification in Tourism. En Z. Xiang y I. Tussyadiah (Eds.), *Proceedings of the International Conference on Information and Communication Technologies in Tourism in Dublin, Ireland, January 21-24, 2014* (pp. 525–537). Cham: Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-03973-2_38

Yıldırım, İ. (2017). The Effects of Gamification-Based Teaching Practices on Student Achievement and Students' Attitudes toward Lessons. *Internet and Higher Education*, *33*, 86–92. https://doi.org/10.1016/j.iheduc.2017.02.002

Yıldırım, İ., y Şen, S. (2021). The Effects of Gamification on Students' Academic Achievement: A Meta-Analysis Study. *Interactive Learning Environments*, *29*(8), 1301–1318. https://doi.org/10.1080/10494820.2019.1636089

Zaharin, F. Z., Abd Karim, N. S., Adenan, N. H., Md Junus, N. W., Tarmizi, R. A., Abd Hamid, N. Z., y Abd Latib, L. (2021). Gamification in Mathematics: Students' Perceptions in Learning Perimeter and Area. *Jurnal Pendidikan Sains Dan Matematik Malaysia*, *11*, 72–80. https://doi.org/10.37134/jpsmm.vol11.sp.7.2021

Zhu, W. (2016). $p < 0.05$, < 0.01, < 0.001, < 0.0001, < 0.00001, < 0.000001, or < 0.0000001. *Journal of Sport and Health Science*, *5*(1), 77–79. https://doi.org/10.1016/J.JSHS.2016.01.019

Épsilon - *Revista de Educación Matemática* *2022, nº 110, 45-55*

Una aventura pirata matemática en un parque urbano con Mathcitymap

Mª José Fdez de la Cigoña Cantero
Mª Isabel Docampo Naray
Profesoras de Matemáticas, IES Aldebarán, Alcobendas

Resumen: *En esta experiencia hemos buscado que nuestros alumnos observen el mundo con mirada matemática, que saquen las Matemáticas del aula y contextualicen los ejercicios, que empleen sus dispositivos móviles y herramientas tecnológicas innovadoras como instrumento de aprendizaje y que realicen un trabajo cooperativo.*
Palabras clave: *MathCityMap, Matemáticas en la calle, Aprendizaje Significativo, STEAM, Ruta Matemática, ABP*

A mathematical pirate adventure in an urban park with Mathcitymap

Abstract: *In this experience we have sought for our students to observe the world with a mathematical gaze, to take Mathematics out of the classroom and contextualize the exercises, to use their mobile devices and innovative technological tools as a learning chance and to carry out cooperative work.*
Keywords*: MathCityMap, Maths in the street, Significant Learning, STEAM, Math Trail, PBL*

1. INTRODUCCIÓN

No es una idea nueva que solo el aprendizaje significativo es profundo y relevante y contribuye al desarrollo integral de la persona. La frase *"Dímelo y lo olvido, muéstramelo y lo recuerdo, involúcrame y lo aprendo"*, atribuida falsamente en ocasiones a Benjamin Franklin y, citada otras veces, no sabemos si con mayor acierto, como proverbio chino, demuestra, en cualquier caso, la consciencia sobre esta necesidad, y hace tiempo que forma parte del acervo de los profesores de todo el mundo. Tanto la LOMCE como la LOMLOE enfatizan estas ideas y no creemos necesario insistir en ellas. La actividad que mostramos a continuación es un intento de sacar las matemáticas a la calle, en un contexto lúdico pero a la vez de trabajo serio y reflexivo, que consideramos extremadamente útil para conseguir el objetivo de que el aprendizaje trascienda el examen y se asiente en la mente de los estudiantes.

Por otra parte, el interés por el uso de la tecnología como instrumento de aprendizaje no ha hecho sino crecer en los últimos años, movido por la realidad de un mundo cada vez más tecnológico y unos alumnos cada vez más dependientes de la tecnología. En esta actividad el uso de la tecnología es esencial, pero no sustitutivo sino complementario de la comprensión lectora y el pensamiento matemático en la resolución de problemas.

Por último, es necesario desarrollar las competencias clave que promuevan la autonomía de las personas como ciudadanos de un mundo cambiante y global. Esta experiencia trabaja las siete competencias básicas: desarrolla una historia que enlaza con personajes de la literatura juvenil; requiere resolver cuestiones matemáticas; está fundamentada en una herramienta digital y se entrega también en formato digital; el *feedback* de los estudiantes nos ha corroborado que es muy motivadora y contribuye de manera fundamental a *aprender a aprender*; está pensada para realizarse en equipo; requiere iniciativa para resolver con los conocimientos matemáticos cuestiones reales a pie de calle; y se desarrolla en un parque público, aprovechando los elementos arquitectónicos y ornamentales del entorno.

Aunque elaborada desde el Departamento de Matemáticas, la propuesta es claramente una actividad STEAM y tiene la ambición de convertirse en un proyecto pluridisciplinar, que incorpore a los Departamentos de Física y Química, Lengua y Literatura, Biología y Geología, Educación Física y Matemáticas, en una visión más integradora del proceso de aprendizaje. Pensamos, y otras experiencias de aprendizaje así lo corroboran, que incorporar las Matemáticas a los Proyectos de Aprendizaje es un reto todavía pendiente por parte de muchos equipos docentes en Primaria (Véase, por ejemplo, en las referencias, el trabajo "El aprendizaje basado en proyectos, un constante desafío"de Rekalde Rodríguez y García Vílchez). En Secundaria es aún más difícil debido a la estanquidad de los departamentos.

2. EL PROYECTO Y LA HERRAMIENTA

MathCityMap es la herramienta principal del proyecto Mobile Math Trails in Europe, un proyecto Erasmus+, coordinado por la Universidad Goethe-Frankfurt y del que forman parte las siguientes instituciones:

- Goethe University, Frankfurt, Alemania
- Univerzita Konstantina Filozofa, Nitra, Eslováquia
- Université Claude Bernard, Lyon, Francia
- Instituto Engenharia de Sistemas e Computadores, Investigação e Desenvolvimento, Lisboa, Portugal
- Instituto Superior de Engenharia, Oporto, Portugal
- Autentek GmbH (empresa de software), Berlín, Alemania
- FESPM, Santander, España.

Con ella se han desarrollado ya rutas a lo largo de todo el mundo, Solo en Europa hay varios cientos de propuestas que ofrecen una forma diferente de hacer turismo, recorriendo calles, plazas y parques con una mirada matemática.

Aunque para crear rutas es necesario registrarte, una vez incorporadas a la aplicación las rutas son públicas y pueden ser visitadas por cualquier usuario, esté registrado o no. De modo que los alumnos pueden acceder como invitados sin introducir ninguna información personal, lo que garantiza la protección de datos.

Cada actividad en la ruta tiene que estar perfectamente diseñada, incluyendo una fotografía, un enunciado claro (que puede contener subtareas), una propuesta de solución, material adicional necesario para resolverla si procede (cinta métrica, recipiente, cronómetro, calculadora, teodolito…) y nivel curricular mínimo al que va dirigida. Existe una serie de requisitos para que una tarea sea aceptada. Entre otros, que solo se pueda resolver in situ, es decir, que haya que estar físicamente en el lugar de la tarea para poder encontrar la solución; que requiera alguna acción real (contar, medir,...); y que incorpore alguna pista o ayuda a la que se pueda recurrir si no se da con la solución fácilmente.

Las fotos deben contener geolocalización en sus metadatos, para que la herramienta cree un mapa con todas las actividades, que posteriormente los usuarios pueden seguir desde sus dispositivos móviles.

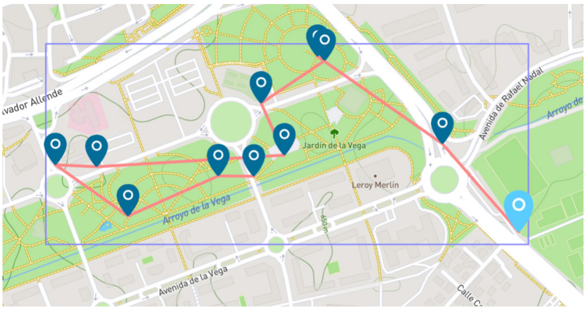
Todas las actividades pasan por una revisión por parte del equipo del proyecto antes de ser aprobadas y subidas a la plataforma.

Existen tutoriales de la aplicación desarrollados por los propios responsables del proyecto y disponibles en su sitio web, https://mathcitymap.eu/es/tutoriales/.

La aplicación MathCityMap es gratuita y tiene una finalidad exclusivamente educativa. Está financiada por la Unión Europea a través de Erasmus+. Todo esto la convierte en una propuesta idónea para ser utilizada en el diseño de actividades formativas de centro.

3. NUESTRA RUTA Y SU REPERCUSIÓN

Nuestra ruta, ***Un paseo pirata matemático por el Jardín de la Vega*** fue diseñada respondiendo a una solicitud del Proyecto ***Marzo, Mes de las Matemáticas***, un proyecto de la red DiMa para la divulgación de las Matemáticas. Consiste en un recorrido por el parque Jardín de la Vega, situado en Alcobendas, Madrid. El recorrido tiene un hilo conductor, una aventura pirata que hemos desarrollado para dar sentido a los problemas matemáticos planteados. El cálculo de volúmenes, pendientes, múltiplos y divisores, coordenadas, velocidades o probabilidades se convierte aquí en la herramienta necesaria para enfrentarse a unos piratas y recuperar un botín. Consta de once pruebas para un nivel de 3º o 4º de ESO, a lo largo de un recorrido de 1,5 km. Aunque la aplicación estima un tiempo de realización del recorrido de dos horas y media, nuestra experiencia es que los estudiantes emplean más bien tres horas o tres horas y media.



El paseo concluye en un área recreativa infantil llamada El Barco Pirata, que se ajusta perfectamente a nuestra narrativa.

Esta ruta es, por supuesto, pública y accesible a todo el que quiera utilizarla en el aula o simplemente realizarla en su tiempo libre a través de la plataforma MathCityMap, y se puede encontrar con el código 484267, con el nombre “Un paseo pirata” o simplemente buscando en el mapa en la zona de Alcobendas. Pero, pese a ser solamente una modesta actividad de instituto, ha tenido repercusión en distintos medios. La propuesta:

- ha sido compartida en el sitio web de MarzoMates.
- ha sido elegida como Ruta del Mes por el propio proyecto MoMaTrE en mayo de 2021.
- se ha publicado en la plataforma Vivir Los Parques.
- y también ha encontrado eco en la edición Nº1559 del 27 de mayo de 2021, de la revista municipal de Alcobendas, Siete díaS.

Este éxito se debe también en parte a nuestros alumnos de 3º y 4º de ESO del IES Aldebarán, que hicieron que el número de descargas llamara la atención de los coordinadores del proyecto.

Queremos señalar que, aunque esta actividad está diseñada en el parque urbano *Jardín de la Vega*, la mayoría de las actividades se pueden reproducir en casi cualquier entorno urbano (donde podamos encontrar fuentes, enrejados, escaleras, rampas, paradas de autobús, etc., todos ellos elementos muy habituales en nuestros pueblos y ciudades).

4. LA PUESTA EN PRÁCTICA PARA EL AULA EN TIEMPOS DE PANDEMIA

Nuestro planteamiento era desarrollar la actividad en tres sesiones:

- una sesión introductoria en el aula para la presentación de la actividad y sus requerimientos en cuanto a tiempo, material, etc.
- una jornada lectiva en el parque para realizar las misiones. (Entre los desplazamientos, un tiempo de descanso a media mañana y la realización de las actividades sería necesaria la jornada escolar completa). MathCityMap ofrece la posibilidad de crear un grupo clase a través del cual, cuando realizas el trabajo de campo con los alumnos, el profesor tiene a los alumnos en todo momento geolocalizados y conectados a través de un chat.
- una sesión de clase para puesta en común, exposición de los trabajos presentados y valoración de la actividad.

Desgraciadamente, el curso pasado la pandemia nos impidió realizar la actividad en gran grupo, con lo que nuestra propuesta fue que lo hicieran en pequeños grupos en horario extraescolar. Los alumnos se distribuyeron en parejas o grupos de tres, y les dimos un mes de plazo para entregar sus producciones, ya que tenían que emplear los fines de semana para tomar las medidas in situ y debían después elaborar presentaciones con su experiencia y sus resultados. Por una parte las profesoras recibimos mucho menos feedback inmediato sobre las dificultades y el modo de resolverlas, y sobre las fortalezas y debilidades del diseño de la ruta. Pero a cambio los estudiantes se vieron envueltos en una experiencia de aprendizaje mucho más autónoma.

Como motivación inicial, proyectamos en el aula una presentación: Un paseo matemático pirata por Arroyo de la Vega.

4.1. ¿ En qué consiste la propuesta?

El Corsario Verde es nuestro enemigo de toda la vida. Estamos constantemente compitiendo con él. En esta ocasión ha robado nuestro botín y queremos recuperarlo. Tenemos ante nosotros un mapa con 11 misiones que resolver. ¿Seremos capaces?

Nuestra tarea consiste en realizar las 11 misiones que impedirán que el Corsario Verde se salga con la suya; tomar medidas, realizar las operaciones necesarias explicitando las herramientas matemáticas utilizadas y mostrar el resultado obtenido en cada misión, todo esto acompañado de fotos que demuestren nuestra partición en las misiones y un pantallazo del resultado obtenido en la aplicación MathCityMap.

4.2. ¿ Cómo son las misiones ? Mostramos algunas como ejemplo

<table>
<tr><th colspan="2">#8 Acceso a La Esfera</th></tr>
<tr><td></td><td>Buscamos una rampa por donde subir nuestros pesados cañones que nos defenderán del inminente ataque del Corsario Verde. Aunque van sobre ruedas, una rampa con pendiente demasiado pronunciada requerirá un sobreesfuerzo para nuestros ya maltrechos hombres, llegando a poner en riesgo su estabilidad. Para que una rampa, de más de 6m de longitud, se considere accesible su pendiente no excederá del 6%. Calcula la pendiente de esta rampa de acceso a La Esfera para saber si servirá para nuestros propósitos.</td></tr>
<tr><th colspan="2">#9 Llenando toneles</th></tr>
<tr><td></td><td>Para hacernos a la mar necesitamos agua potable. ¿ Cuánto tiempo tardaremos en llenar un tonel de 60 litros? Para esta actividad necesitas un recipiente con volumen conocido (botella, vaso medidor, …) y un cronómetro. OJO: EL AGUA DE ESTA FUENTE NO ES EN REALIDAD POTABLE.</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th colspan="2">#10 La batalla final</th></tr>
<tr><td></td><td>Sabes que el barco del Corsario Verde se mueve en esta ensenada. Pero es de noche y hay tormenta. La visibilidad es nulo y solo te queda una bala de cañón. Si disparas tu bala al azar, ¿ qué probabilidad tienes de dar en el blanco? Da tu respuesta con dos decimales.</td></tr>
</table>

4.3. ¿ Qué material necesitamos?

- Teléfono con la aplicación MathCityMap descargada. La ruta tiene el código 484267.
- Bolígrafo
- Cuaderno
- Calculadora
- Cinta métrica
- Vaso medidor
- Octante o teodolito casero.

4.4. ¿ Cómo se entrega la actividad ?

Presentación en power point, genially, canva,... subida al Aula Virtual.

4.5. ¿ Cómo se califica la actividad?

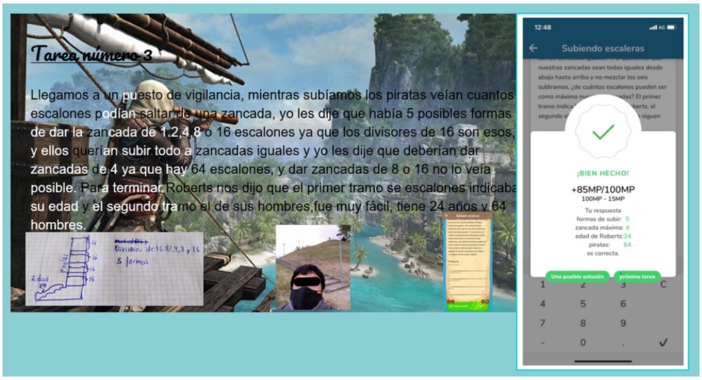
Para la calificación tuvimos en cuenta la creatividad y originalidad de la presentación, la realización completa de las tareas y la valoración personal sobre la experiencia, utilizando la siguiente rúbrica:

Foto del lugar donde aparecen ellos o su nombre	**No se incluye la foto en ninguna tarea**	**Menos del 25% de las tareas incluyen la foto**	**Entre el 25% y el 50% de las tareas incluyen foto**	**Entre el 50% y el 75% de las tareas incluyen la foto**	**Entre el 75% y el 100% de las tareas incluyen la foto**	**Todas las tareas incluyen la foto**
	0 puntos	1 punto	2 puntos	3 puntos	4 puntos	5 puntos
Medidas necesarias	**No se incluyen medidas**	**Menos del 25% de las tareas incluyen medidas**	**Entre el 25% y el 50% de las tareas incluyen medidas**	**Entre el 50% y el 75% de las tareas incluyen medidas**	**Entre el 75% y el 100% de las tareas incluyen medidas**	**Todas las tareas incluyen medidas**
	0 puntos	1 punto	2 puntos	3 puntos	4 puntos	5 puntos
Operaciones	**No se incluyen las operaciones**	**Menos del 25% de las tareas incluyen las operaciones**	**Entre el 25% y el 50% las incluyen**	**Entre el 50% y el 75% las incluyen**	**Entre el 75% y el 100% las incluyen**	**Todas las tareas las incluyen**
	0 puntos	1 puntos	2 puntos	3 puntos	4 puntos	5 puntos
Resultados en las unidades de medida adecuadas	**Los resultados no incluyen las unidades adecuadas**	**Menos del 25% de las tareas incluyen las unidades adecuadas**	**Entre el 25% y el 50% de las tareas las incluyen**	**Entre el 50% y el 75% de las tareas las incluyen**	**Entre el 75% y el 100% de las tareas las incluyen**	**Todas las tareas las incluyen**
	0 puntos	1 punto	2 puntos	3 puntos	4 puntos	5 puntos
Herramientas matemáticas utilizadas para la resolución (teoremas,fórmulas, algoritmos,...)	**No describe las herramientas matemáticas utilizadas**	**Menos del 25% de las tareas incluyen la descripción de las herramientas**	**Entre el 25% y el 50% de las tareas la incluyen**	**Entre el 50% y el 75% de las tareas la incluyen**	**Entre el 75% y el 100% de las tareas la incluyen**	**Todas las tareas la incluyen**
	0 puntos	1 punto	2 puntos	3 puntos	4 puntos	5 puntos
Originalidad y creatividad de la presentación	**No presenta la tarea**	**La presentación es pobre**	**La presentación es buena**		**La presentación es original y creativa**	
	0 puntos	1 punto	2 puntos		3 puntos	
Redacción y ortografía de la valoración de la tarea	**No presenta la valoración**		**La valoración está mal redactada o con faltas de ortografía**		**La valoración está bien redactada sin faltas de ortografía**	
	0 puntos		1 punto		2 puntos	

5. LOS RESULTADOS DE LOS ESTUDIANTES

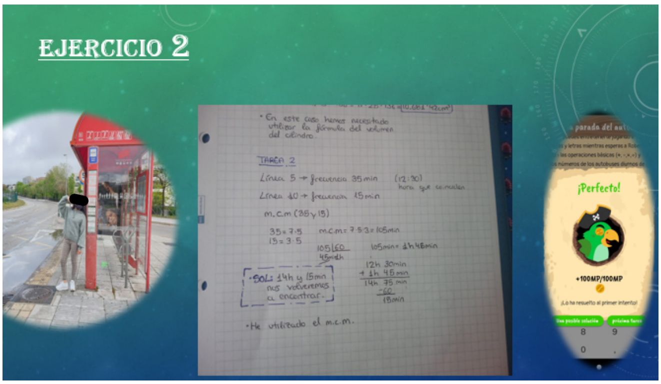
Una vez entregados todos los trabajos, hicimos una presentación con algunas de las tareas: "Un paseo pirata matemático de alumnos de 3º y 4º ESO por Arroyo de la Vega"

Los estudiantes se involucraron bastante en el juego y muchos de ellos decidieron incorporar también la estética pirata en las producciones que nos enviaron, demostrando (y desarrollando) su creatividad.

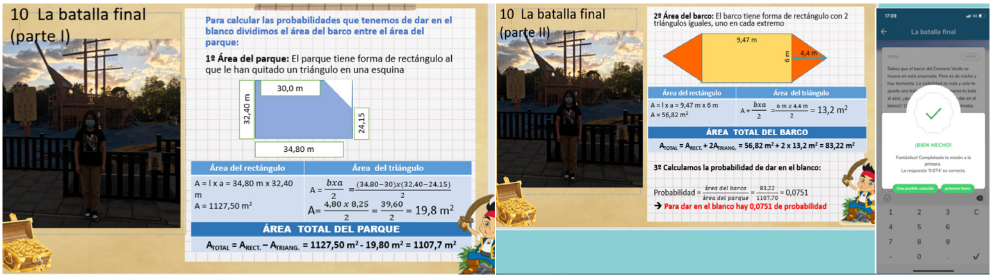


De los 7 items que se calificaban en la rúbrica, el primero, "Aportar una fotografía donde aparecen ellos o un cartel con su nombre" fue cumplido al 100%. De hecho, comentaron que en un principio, a veces entre tomar las medidas y resolver la misión se les olvidaba sacar la fotografía y tenían que volver más tarde a sacarla.

Aunque no se les pedía escribir las operaciones en un procesador de textos, la mayoría de alumnos lo intentó, y se encontraron con la dificultad que ello conlleva. Así que para solucionarlo, los alumnos insertaron en su trabajo una fotografía de su cuaderno con las operaciones:



A pesar de todo, algún grupo demostró gran competencia digital y fue capaz de escribir las operaciones en un procesador de texto e incluirlas en su presentación:



El item de la rúbrica que más les sorprendió fue el de la valoración de la tarea. Muchos no la escribieron porque no están acostumbrados a este tipo de preguntas en matemáticas. y sus valoraciones fueron muy escuetas, limitándose a contestar: “Me gustó mucho”, “Fue muy larga”, “La misión de la altura era muy difícil”.

Después de una puesta en común en el aula, donde cada grupo pudo contar su experiencia, pudimos hacer una mejor valoración de la actividad, llegando a las siguientes conclusiones:

- Estaban sorprendidos de encontrar tantas matemáticas en el parque de su barrio.
- Les gustó salir a hacer matemáticas fuera del aula.
- Les llevó más tiempo del esperado y acabaron físicamente cansados.
- La actividad más difícil, sobre todo para los alumnos de 3ºESO, fue la de la altura y el volumen de la pirámide.
- La actividad que más satisfacción personal les causó resolver fue La batalla final.
- Las más divertidas el Photo Call y Llenando Toneles.
- La más sencilla, Esperando el autobús.
- La de Acceso a la Esfera les indignó, ya que la rampa resultó no ser accesible para personas con movilidad reducida.

6. REFERENCIAS

GALEANA, L. (N. d.). Aprendizaje basado en proyectos. Cursos Montessori. Disponible en: https://cursos.montessorispace.com/wp-content/uploads/2021/03/ilovepdf_merged-30-3.pdf

LUDWIG, M., JABLONSKI, S. (2019). Doing Math Modelling Outdoors- A Special Math Class Activity designed with MathCityMap, *En Fifth International Conference on Higher Education Advances*. 26 - 28 de junio de 2019, Valencia, España. Disponible en https://m.riunet.upv.es/handle/10251/124545

MARTÍ, J. A., HEYDRICH, M., ROJAS, M. y HERNÁNDEZ, A, (2010). Aprendizaje basado en proyectos: una experiencia de innovación docente. *Revista Universidad EAFIT*, 46,(158), 11-21 Disponible en https://www.redalyc.org/pdf/215/21520993002.pdf

S. D. (n. d.) Otras experiencias con MathCityMap alededor del mundo, disponibles en https://mathcitymap.eu/en/mooc-mathcitymap-all-over-the-world/

REKALDE, I. y GARCÍA, J. (2015) El aprendizaje basado en proyectos, un constante desafío. *Innovación Educativa*, 25, 219-234**.** Disponible en https://revistas.usc.gal/index.php/ie/article/view/2304

ROMERO, F. (2009). Aprendizaje Significativo y Constructivismo, *Temas para la Educación,* ISSN: 1989-4023. Disponible en https://www.feandalucia.ccoo.es/docu/p5sd4981.pdf

Épsilon - *Revista de Educación Matemática* *2022, nº 110, 57-67*

Matemática superior desde un punto de vista elemental

Oscar Gómez-Rojas
Universidad Distrital Francisco José de caldas
Astrid Cuida
Universidad de Valladolid
Cristina Pedrosa Jesús
Universidad de Córdoba

Resumen: *Por regla general las exposiciones teóricas en matemáticas se hacen con una alta exigencia de rigor lógico. Sin embargo, en muchas ocasiones la idea central de una demostración puede ser relativamente sencilla y fácilmente traducible a una presentación más intuitiva. Atraer la atención sobre este hecho con un ejemplo particular es el propósito del presente artículo.*
Palabras clave: *rigor, conjuntos numerables y no numerables, densidad, medida cero, cubrimiento.*

Higher mathematics from an elementary point of view

Abstract: *As a general rule the theoretical exhibitions in mathematics are made with a high demand for logical rigor. However, in many cases the central idea of a demonstration can be relatively simple and easily translatable into a more intuitive presentation. To draw attention to this fact with a particular example is the purpose of this article.*
Keywords: *Rigor, countable and non−countable sets, density, measure zero, coverage*

1. INTRODUCCIÓN

La matemática más que un conjunto de técnicas es un sistema de ideas con diversos grados de sofisticación. Esta afirmación no constituye una novedad, recordemos que los griegos veían en la práctica de las matemáticas abstractas un valioso método de entrenamiento mental. Como referencia rápida de este hecho podemos recordar el "*No entre aquí quien no sepa geometría*" que presidía la entrada a la academia de Platón.

La alta especialización del conocimiento propio de nuestros días hace difícil que alguien, no iniciado, entre en contacto con un conocimiento con el exclusivo interés de *ejercitar su intelecto*. Es un lugar común el que muchas personas se sienten repelidas por las matemáticas, sin embargo, es posible que, sin ser conscientes de ello, pasemos por alto el hecho de que el rigor, propio de las matemáticas, puede, en ocasiones, constituirse en un muro impenetrable que evita el paso a los posibles curiosos. Esto, en parte, porque aunque la intuición juega un importante papel a la hora de la creación matemática, suele quedar disimulada, o del todo oculta, en las presentaciones formales. Veamos un ejemplo: si una persona camina dando pasos de 70cm y hay en su ruta una franja transversal de 1m de ancho, es claro que necesariamente deberá pisarla. Esta es la idea que se esconde detrás de la demostración de la densidad de los racionales en los reales que mostraremos más adelante.

El objetivo de este artículo es presentar el desarrollo de un tema, que muchas personas podrían considerar complejo, abandonando un poco el rigor y con un fuerte apoyo intuitivo. Al hacer esto buscamos resaltar las ideas más que la presentación rigurosa. Buena parte del camino la haremos guiados por las enseñanzas de Raymond Smullyan en su libro de divulgación matemática *Satán, Cantor y el infinito*.

1.1. Problema

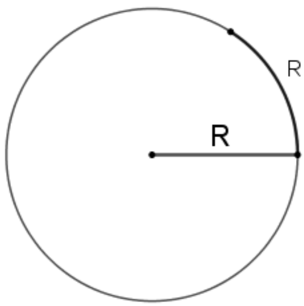


Figura 1

Sobre una circunferencia de radio R se sobrepone un arco de longitud igual al radio, el extremo del arco superpuesto determina un punto sobre la circunferencia (figura 1). A partir de este punto se vuelve a sobreponer el segmento, generándose así un nuevo punto (figura 2). La reiteración de este proceso genera una sucesión de puntos sobre la circunferencia (consideramos como primer punto de la sucesión el inicial de la primera superposición) (figura 3). Sobre esta sucesión $P = \{P_1, P_2, P_3, \ldots\}$ de puntos surgen los siguientes interrogantes:

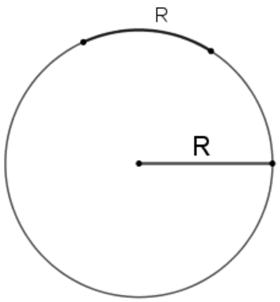


Figura 2

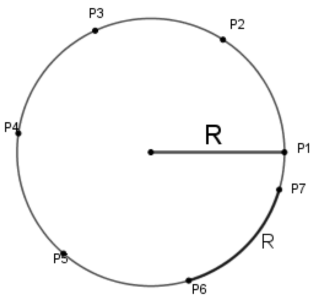


Figura 3

1. ¿En algún momento un nuevo punto coincide con uno ya generado anteriormente? (Una respuesta afirmativa a esta pregunta implica que de este momento en adelante cada uno de los nuevos puntos coinciden con alguno de los ya generados y, en consecuencia, la sucesión constará de un número finito de elementos).
2. Si la respuesta de 1 es negativa, el conjunto de puntos es infinito, en este caso ¿coincidirá este conjunto con la totalidad de puntos en la circunferencia?
3. Si la respuesta de 2 es negativa ¿es el conjunto de puntos denso[1] en la circunferencia?

1.2. Desarrollo

Para responder la primera pregunta supongamos que el k–ésimo punto generado coincide con el primero (esta suposición se fundamenta en el hecho de que si dos puntos de la sucesión coinciden –esto es, si para $1 < m < n$, $P_m = P_n$ entonces, por la forma en que está construida la sucesión, necesariamente $P_{(m-1)} = P_{(n-1)}$. Podemos entonces afirmar que el primer punto que aparece repetido es el primero de la sucesión), entonces, luego de k sobreposiciones habremos dado un número exacto de vueltas, lo que implica que la suma de las longitudes de los k arcos coincide con la longitud de la circunferencia multiplicada por un número entero, llamémosle z. Esto es $kR = (2\pi R)z$ y entonces tendríamos que $\pi = k/2z$ lo cual se contradice con el hecho de que es un número irracional[2]. Por lo tanto, todos los puntos de la sucesión son diferentes y, en consecuencia, el conjunto de puntos es infinito.

Para la discusión de las preguntas 2 y 3 veamos las siguientes figuras en las que aparecen los primeros 100, 200 y 400 puntos de la sucesión respectivamente:

1. Lo que quiere decir la palabra “denso”, en este caso, es que, si tomamos cualquier trozo de la circunferencia, por pequeño que sea (exceptuando el caso extremo de tomar un único punto), este debe contener por lo menos un punto de la sucesión P que estamos considerando.
2. La irracionalidad de π es un hecho del que muy pocas veces hacemos uso.

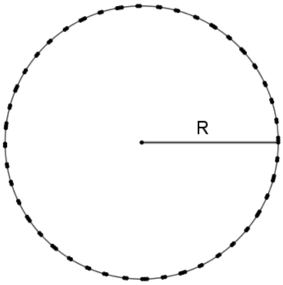


Figura 4 (100 puntos)

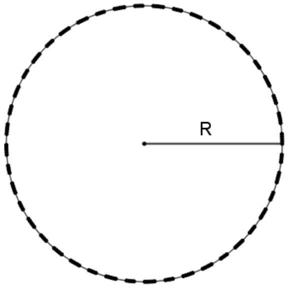


Figura 5 (200 puntos)

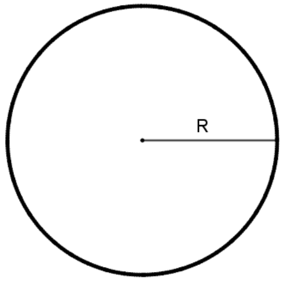


Figura 6 (400 puntos)

Los puntos de la sucesión parecen "llenar" la circunferencia, sin embargo, para responder a esta pregunta es necesario profundizar un poco más sobre la estructura de los números reales. Para ello acudimos a un juego de retos que propone Raymond Smullyan en su libro Satán, Cantor y el infinito. La solución de cada reto por parte del lector lo va introduciendo gradualmente al tema de los cardinales de los conjuntos infinitos.

1.2.1. Reto 1

Imaginemos que yo soy el diablo y ustedes mis víctimas en el infierno. Ahora les notifico que los someteré a una prueba. Les digo: "Estoy pensando en un número entero positivo, que he escrito en este trozo de papel doblado. Cada día, tienen una y solo una posibilidad de acertar de que número se trata. Cuando lo adivinen quedarán libres, pero no antes." Entonces, ¿existe alguna estrategia mediante la cual podrían estar seguros de salir tarde o temprano?[3]

1.2.2. Reto 2

Con las mismas condiciones anteriores, ahora escribo un número entero positivo o un entero negativo.[4]

3. Aquí vemos la naturaleza de los números naturales, en los cuales se alcanza cualquier elemento comenzando en 1 y sumando 1 en cada paso. Así que el condenado debe decir: 1 el primer día, 2 el segundo, 3 el tercero y así sucesivamente; con toda seguridad algún día quedará libre.

4. La solución de este reto muestra que el conjunto $\mathbb{Z}$ es numerable. Un conjunto A es numerable si existe una biyección f entre $\mathbb{N}$ y A, entonces se puede escribir A=$\{f(1), f(2), f(3),..\}$ si hacemos $a_n = f(n)$ entonces se tiene A = $\{a_1, a_2, a_3, \ldots\}$.Que un conjunto pueda ser escrito de esta manera lo caracteriza como "numerable".

1.2.3. Reto 3

La siguiente prueba que les planteo a mis víctimas es bastante más difícil. Esta vez escribo dos números en un trozo de papel o quizás el mismo número escrito dos veces (alerta de spoiler: el pie de página contiene la solución)[5].

1.2.4. Reto 4

Ahora pido que no solo adivinen cuáles son los números sino también el orden en el que fueron escritos.

La solución del reto 4 muestra que el conjunto de los números racionales positivos es numerable ya que podemos establecer una biyección entre racionales y parejas ordenadas de enteros, $(a,b) \longrightarrow \frac{a}{b}$.

Veamos ahora que es imposible que el conjunto de puntos de nuestro problema “llene” la circunferencia. Para entender esto definamos lo que es un cubrimiento de un conjunto de números reales. Supongamos que tenemos el conjunto $A = \{-5, 0, 2\}$, el conjunto de intervalos abiertos B[6] $= \{(-6, -4), (-1, 1), (1, 3)\}$ es un cubrimiento abierto del conjunto A ya que todo elemento de A pertenece a al menos un elemento del conjunto B.

Necesitamos, además, un conjunto de infinitos números positivos que, sin embargo, tengan una suma finita. En efecto, veamos que

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\cdots+\frac{1}{2^n}+\cdots=1.$$

Esta suma sigue la lógica de una de las paradojas de Zenón. Se comienza en ½ y siempre se suma la mitad de lo que le falta para llegar a 1. Esto es, con cada nuevo sumando se disminuye a la mitad la distancia a 1[7] (figura 7).

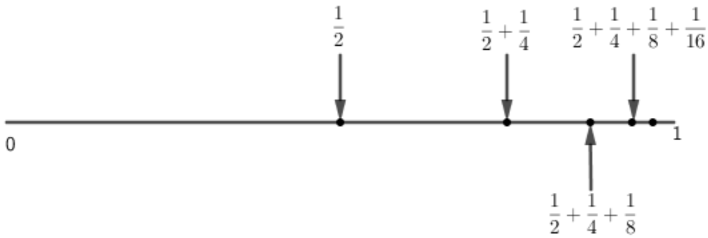


Figura 7

5. Solución: (1, 1), (1, 2), (2, 2), (1, 3), (2, 3), (3, 3), (1,4), (2,4), (3,4), (4,4), …

6. Un intervalo abierto es un conjunto de números reales de la forma $\{x \mid a < x < b\}$, se representa como (a,b).

7. Entonces cada vez estamos más cerca de 1 sin llegar a tocarlo. Claro, también estaremos más cerca de 2, sin embargo la distancia al 1 se hará más pequeña que cualquier número que podamos pensar. Este es el sentido de una suma infinita ya que si al sumar una cantidad finita de términos se obtuviera como resultado 1 entonces, al seguir sumando los números restantes, la suma superaría a 1.

Si A es numerable podemos escribir A = $\{a_1, a_2, a_3, \ldots\}$ ahora tomamos los intervalos $\left(a_1 - \frac{\varepsilon}{4}, a_1 + \frac{\varepsilon}{4}\right)$, $\left(a_2 - \frac{\varepsilon}{8}, a_2 + \frac{\varepsilon}{8}\right)$, $\left(a_3 - \frac{\varepsilon}{16}, a_3 + \frac{\varepsilon}{16}\right)$,... que cubren respectivamente a a_1, a_2, a_3,..., donde el primer intervalo mide $\frac{\varepsilon}{2}$, el segundo $\frac{\varepsilon}{4}$, el tercero $\frac{\varepsilon}{8}$, etc., entonces la suma de las longitudes de todos los intervalos del cubrimiento es $\frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{8} + \ldots = \varepsilon\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots\right) = \varepsilon$. Entonces ningún conjunto numerable A puede "llenar" un intervalo abierto, por ejemplo (0, 1), ya que tomando $\varepsilon = ½$, es posible cubrir el conjunto A con un cubrimiento para el cual la suma de las longitudes de todos los intervalos del cubrimiento es ½ mientras que el intervalo (0, 1) tiene una medida de 1. Por la misma razón el conjunto de puntos del problema, que es un conjunto numerable, no puede "llenar" la circunferencia ya que esta tiene una medida de $2\pi R$.

Queda pendiente entonces el tema de la densidad. ¿Es denso el conjunto de puntos sobre la circunferencia? Esto es, ¿cualquier segmento de la circunferencia contiene puntos del conjunto P? Esta propiedad es independiente del tamaño de la circunferencia, si tomamos $R = \frac{1}{2\pi}$ la circunferencia medirá 1. Ahora extendemos esta circunferencia sobre una recta (figura 8).

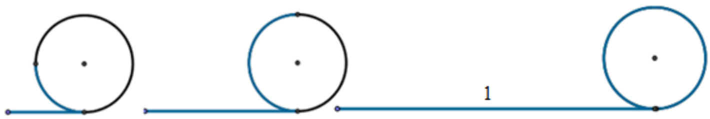


Figura 8

Y así, en adelante vamos a trabajar la circunferencia rectificada sobre el intervalo [0, 1). Todos los puntos del conjunto P corresponden ahora, gracias a esta transformación, a puntos de este intervalo y el segmento de circunferencia arbitrario que debemos tomar para verificar la presencia de puntos del conjunto P se corresponde con un subintervalo de [0, 1).

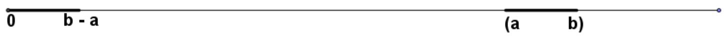
Vamos a presentar ahora una demostración de la densidad de los racionales en los reales[8]. Esta demostración es de capital importancia en esta discusión ya que es idéntica a la última parte de la demostración que nos ocupa. Entonces, luego de esta demostración, el trabajo que haremos consistirá en desarrollar las herramientas y establecer los resultados que nos permitan crear una analogía entre las dos demostraciones. Una vez hecho esto daremos por terminada la demostración ya que la última parte es análoga, paso a paso, a la que presentamos a continuación.

La prueba que mostraremos de la densidad de los racionales sobre ℝ emplea fuertemente la intuición geométrica. Debemos probar que cualquier intervalo (a,b) de números reales contiene por lo menos un racional. Si $a < 0$ y $b > 0$ se tiene el resultado ya que $0 \in (a,b)$. Probaremos el resultado para el caso $0 < a < b$ ya que el caso $a < b < 0$ se deduce por simetría a partir de aquel.

Dado el intervalo (a,b):

8. Esto significa que, si tomamos cualquier segmento de la recta real este, necesariamente, contine al menos un número racional. Véase nota 1.

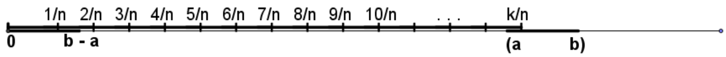
Entonces $b - a > 0$:



Existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n} < b - a$:

Este $\frac{1}{n}$ será el tamaño del paso con el que se obtendrán los puntos $1/n$, $2/n$, $3/n$,…:

Como el tamaño del paso es menor que la longitud del intervalo necesariamente luego de k pasos “caeremos” en el intervalo (a,b):



Entonces el racional $\frac{k}{n} \in (a,b)$, que era lo que queríamos demostrar.

Desarrollaremos ahora las últimas herramientas. Recordemos la función piso (floor) que a cada número real x le asigna el mayor entero menor o igual que x. Se representa $\lfloor x \rfloor$. Una manera fácil de entender esta función es que si x es entero entonces $\lfloor x \rfloor$ es x; de lo contrario $\lfloor x \rfloor$ es el primer entero a la izquierda de x. Así $\lfloor 8 \rfloor = 8$, $\lfloor 5.42 \rfloor = 5$, $\lfloor \pi \rfloor = 3$, $\lfloor -7 \rfloor = -7$, $\lfloor -2.2 \rfloor = -3$. La gráfica de esta función es (figura 9).

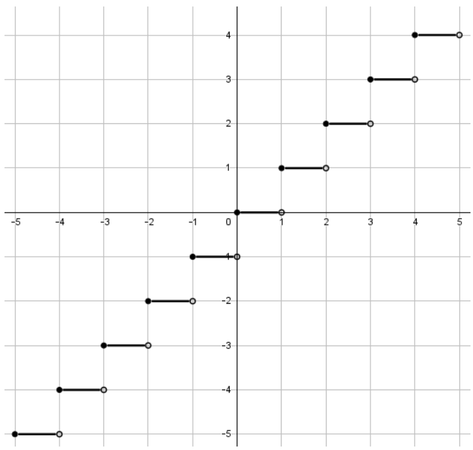


Figura 9

A partir de la función piso podemos definir la función parte fraccionaria, que se nota $\{x\}$ de la siguiente manera

$$\{x\}=x-\lfloor x \rfloor \qquad (1)$$

La grafica de la función $\{x\}$ es (figura 10)

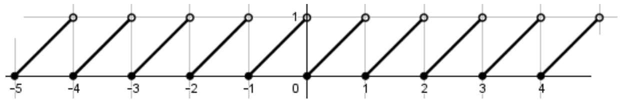


Figura 10

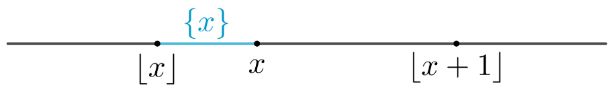
Tenemos que, por ejemplo, $\{5.23\} = 5.23-\lfloor 5.23 \rfloor = 5.23-5 = 0.23$ lo cual justifica el nombre. Sin embargo, el caso de los número negativos es un poco diferente, veamos un ejemplo: $\{-4.7\} = -4.7-\lfloor -4.7 \rfloor = -4.7-(-5) = 0.3$. Generalizando este ejemplo tenemos que para x no entero

$$\{-x\} = 1-\{x\} \qquad (2)$$

Traduzcamos la definición formal de la función a una representación gráfica que nos permita mejorar la comprensión de la función, así como la visualización de algunas de sus propiedades. Para ello despejamos x en (1) y obtenemos

$$x = \lfloor x \rfloor+\{x\} \qquad (3)$$

que gráficamente queda (recordemos que $\lfloor x \rfloor$ o es x, o está a la izquierda de x):



Entonces todo número real puede escribirse según (3), en donde $0 \leq \{x\} < 1$.
¿Cómo calcular $\{x+y\}$? Veamos: $x+y$ se puede reescribir, empleando 3, como

$$\lfloor x \rfloor+\{x\}+\lfloor y \rfloor+\{y\} = \lfloor x \rfloor+\lfloor y \rfloor+\{x\}+\{y\}$$

Donde $\lfloor x \rfloor+\lfloor y \rfloor$ es un entero, entonces $\{x+y\}$ depende exclusivamente de $\{x\}+\{y\}$ según la siguiente fórmula:

$$\{x+y\} = \begin{cases} \{x\}+\{y\} & si \;\; \{x\}+\{y\} < 1 \\ \{x\}+\{y\}-1 & si \;\; \{x\}+\{y\} \geq 1 \end{cases}. \qquad (4)$$

Es posible generalizar (4) de la siguiente manera, si n{x} < 1[9] entonces

$$\{nx\}=n\{x\} \qquad (5)$$

Si {x}≥{y} entonces, nuevamente empleando (3) x−y=⌊x⌋−⌊y⌋+{x}−{y} de donde concluimos que

$$\{x-y\}=\{x\}-\{y\} \qquad (6)$$

Una propiedad interesante que caracteriza a un número irracional es que no posee dos múltiplos naturales que tengan la misma parte decimal. Más precisamente: dado $\alpha \in \mathbb{I}$, no existen naturales distintos m y n tales que $\{n\alpha\}=\{m\alpha\}$. En caso contrario se tendría que $n\alpha - m\alpha = k \in \mathbb{Z}$ y así $\alpha = k / (n-m)$ lo cual es una contradicción.

Veamos ahora un resultado capital en nuestra indagación:

Lema: Dados un número irracional ç$\alpha > 0$ y un real ε con $0 < \varepsilon < 1$ entonces existe un número natural n tal que $\{na\} < \varepsilon$.

En primer lugar sea $N > 1/\varepsilon$. Consideremos el conjunto

$$R=\{\{\alpha\},\{2\alpha\},\{3\alpha\},\ldots,\{N\alpha\}\}$$

Por la propiedad que acabamos de demostrar sabemos que R está formado por N números diferentes. Sea b el máximo elemento de R. Nótese que R genera una partición del intervalo $[0, b]$ en N subintervalos donde, de ser todos iguales tendrían una longitud de b/N y, en cualquier caso, la longitud del más pequeño no excede a b/N. Sean j y k naturales tales que $\{j\alpha\}$ es el extremo izquierdo del menor de tales intervalos y $\{k\alpha\}$ su extremo derecho. En consecuencia $0 < \{k\alpha\} - \{j\alpha\} \leq \frac{b}{N} < \frac{1}{N} < \varepsilon$ (si el menor de tales intervalos es el primero de la izquierda entonces $k = 1$ y hacemos $j = 0$). Entonces, según la propiedad (6) $0 < \{(k-j)\,\alpha\} < \varepsilon$. Si $k - j > 0$ hacemos $n = k - j$, entonces $\{n\alpha\} < \varepsilon$ y hemos terminado.

El caso $k - j < 0$ requiere un poco más de trabajo. Para este caso sea $-m = k - j$ entonces $\{-m\alpha\} < \varepsilon$. Hacemos $\{-m\alpha\} = \varepsilon^*$, entonces $0 < \varepsilon^* < \varepsilon < 1$. Empleando (3) podemos escribir

$$-m\alpha = \lfloor -m\alpha \rfloor + \{-m\alpha\},$$

entonces

$$-\mathrm{m}\alpha = \text{entero negativo} + \varepsilon^* \qquad (7)$$

Sea p el mayor natural tal que $p\varepsilon^* < 1$ (de donde $1 - p\varepsilon^* > 0$), esto implica que $(p + 1)\varepsilon^* > 1$[10] o, de forma equivalente

$$1 - p\varepsilon^* < \varepsilon^* \qquad (8)$$

9. Recordemos que nx=x+x+⋯+x donde x aparece *n* veces.
10. No es $(p + 1)\varepsilon^* \geq 1$ ya que, por definición, ε^* es irracional.

Si multiplicamos (7) por p obtenemos

$$-pm\alpha = \text{entero negativo} + p\varepsilon^*$$

y, por lo tanto $\{-pm\alpha\} = p\varepsilon^*$ entonces (8) se transforma en

$$0 < 1 - \{-pm\alpha\} < \varepsilon^* < \varepsilon.$$

y, aplicando (2), finalmente se tiene

$$0 < \{pm\alpha\} < \varepsilon.$$

Haciendo $n = pm$ se tiene $\{n\alpha\} < \varepsilon$. Que era lo que se quería demostrar.

Acabamos de obtener la última pieza del rompecabezas. Retomemos: si $R = \frac{1}{2\pi}$ la circunferencia medirá 1 y al ser "extendida" coincidirá con el intervalo [0, 1). La representación del punto P_n en el intervalo [0, 1) queda determinada por $\{\frac{n}{2\pi}\}$. La figura 11 ilustra el caso de la primera vuelta completada y el punto correspondiente en [0, 1).

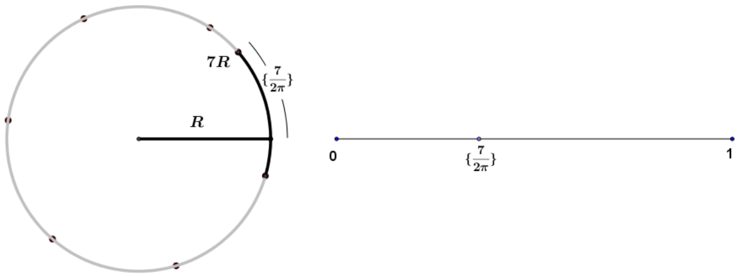


Figura 11

Para demostrar la densidad del conjunto de puntos en [0, 1] tomamos un intervalo abierto $(a,b) \subset [0,1)$ (figura 12) calculamos $\varepsilon = b - a$ y empleamos el lema donde $\alpha = \frac{1}{2\pi}$ y así obtenemos n tal que $\{na\} < \varepsilon$ y entonces procedemos igual que en la demostración de la densidad de los racionales en los reales. La conclusión queda justificada por (5) ya que se tendría $k\{n\alpha\} = \{(kn)\alpha\}$.

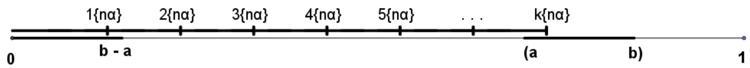


Figura 11

2. CONCLUSIÓN

Quien hace una demostración se ayuda de intuiciones geométricas, algebraicas, etc., y luego consigna todo esto en una estructura rigurosa. Quien hace una primera lectura de una demostración generalmente verifica la corrección lógica de esta línea por línea. Sin embargo, más que esta verificación lo que desea el lector es *ver* algo del pensamiento del autor al concebir su idea. La forma rigurosa que se estila para consignar este tipo de razonamientos no siempre ayuda a aclarar esta visión y, principalmente, el lector principiante puede sentirse intimidado por la complejidad de la estructura que se le presenta. Buscar, en lo posible, las intuiciones subyacentes constituye un método muy adecuado para la profunda comprensión de las demostraciones matemáticas.

3. REFERENCIAS

Smullyan, R. (2007). *Satán, Cantor y el infinito*. Barcelona: RBA Desafíos matemáticos.

Niven, I. (1956). *Irrational numbers*. Carus Mathematical Monographs 11. The Mathematical Association of America.

Staib, J. H. y Demos, M. S. *On the limit points of the sequence* {sin n}. Drexel Institute of Technology. http://users.auth.gr/~siskakis/sin(n).pdf

Una introducción a la ecuación de la recta en contexto de pandemia utilizando GeoGebra

Viviana Aharonian
Alejo Colombo
CICATA, IPN, Ciudad de México, México

Resumen: *Este trabajo propone una actividad didáctica para introducir al estudio de la ecuación de la recta. La actividad es una adecuación de un formato tradicional a uno en línea obligado por la pandemia. En el documento se describen las elecciones tomadas para esta modificación. Se encontró que GeoGebra permitió a la mayoría de los estudiantes comprender la relación entre los parámetros de la ecuación de la recta y su representación gráfica.*
Palabras clave: *Actividad de Aula, Constructos, GeoGebra, Virtualidad.*

An introduction of the equation of the line in a pandemic context using GeoGebra

Abstract: *This article proposes a didactic activity to introduce the study of the equation of the line. The activity is an adaptation of a traditional format to the online one forced by the pandemic. The document describes the choices made for this modification. It was found that GeoGebra allowed most of the students to understand the relationship between the parameters of the equation of the line and its graphical representation.*
Keywords: *Classroom Activity, Constructs, GeoGebra, Virtuality*

1. INTRODUCCIÓN

En este artículo se propone una actividad en la que se introduce la ecuación de la recta a estudiantes que no tienen conocimiento previo. La actividad estaba pensada para trabajar en el aula, pero con el pasaje abrupto a la virtualidad debido a la pandemia nos vimos obligados a adaptarla a las circunstancias. Esto implicó una forma de trabajo con los grupos de forma virtual y se decidió que la manera más eficiente en este contexto era usando

GeoGebra. Como consecuencia, realizamos un análisis crítico de la propuesta utilizando los constructos planteados por Zbiek et al. (2007).

Esta secuencia didáctica está pensada para ser trabajada con estudiantes de tercer año de Ciclo Básico (14-15 años) en tres actividades principales; es una introducción al tema de la ecuación de la recta y está basada en la utilización de GeoGebra.

En un comienzo, previo a la pandemia, este tema se podía trabajar con papel y lápiz sin problema alguno en nuestra institución. Al pasar a trabajar esta actividad en la virtualidad obligados por la pandemia, se tuvieron que implementar herramientas tecnológicas en la clase de matemáticas, una de ellas fue GeoGebra, esta elección mostró ventajas y desventajas. Una de las ventajas evidentes es relativa a la rapidez para realizar construcciones. Esto agiliza mucho el trabajo y permite darle fluidez a la hora de compartir las propuestas (compartiendo pantalla, por nombrar un ejemplo). Hubiese sido más laborioso que realizaran las actividades en papel y lápiz para luego sacarle foto y compartirlas.

Acercar a los estudiantes a trabajar con GeoGebra es importante ya que es un programa sumamente potente que se puede utilizar en cursos más avanzados para trabajar con distintos conceptos. Las herramientas que ofrece el programa son muy versátiles, lo que da fluidez a la hora de trabajar distintos temas (Arribas y Galán, 2020; Teófilo de Sousa y otros, 2022).

La desventaja que advertimos fue que se depende de las facilidades materiales que dispongan los estudiantes. Por ejemplo, si los estudiantes sólo disponen de un celular para trabajar no sería lo mejor para visualizar la pantalla y compartir lo trabajado; en la actividad se trabaja con varias pestañas y se necesitaría un celular con una pantalla de por lo menos seis pulgadas de diagonal.

Finalmente, analizamos la actividad a partir de distintos constructos planteados por Zbiek *et al*. (2007) estos son: génesis instrumental, fidelidad cognitiva, fluidez representacional y caja blanca/caja negra. Estos conceptos nos brindan una herramienta de análisis que nos permite mirar críticamente nuestro trabajo a partir de distintos puntos de análisis.

1.1. Objetivo

Que los estudiantes reconozcan la ecuación de la recta y sus propiedades.

1.2. Objetivos particulares

Que los estudiantes puedan encontrar puntos cuyas coordenadas verifiquen la ecuación de la recta a partir de la representación gráfica.

Que los estudiantes grafiquen ecuaciones de rectas con GeoGebra para aprender a utilizar la herramienta.

1.3. Desarrollo

Antes de comenzar la actividad se crearon salas dentro de la sesión para formar equipos de cuatro estudiantes. La actividad estuvo disponible en Crea que es la plataforma que se utiliza habitualmente en Uruguay, para subir e intercambiar material y realizar los encuentros virtuales por Conference. La actividad también se puede realizar utilizando otras plataformas como Google Meet o Zoom, por ejemplo.

La actividad está conformada por tres actividades. Luego de realizar que cada subactividad, se reunió todo el grupo para intercambiar los resultados que cada equipo obtuvo para discutirlos. Se prioriza que los propios estudiantes sean los que validen los resultados y que no sea el docente quien realice dicha tarea. Para esto, se formulan preguntas buscando la participación de los estudiantes.

2. ACTIVIDAD 1

Dada la ecuación x+2y = -4

- **a)** ¿Cuántas incógnitas tiene la ecuación?
- **b)** ¿Si x = 2 e y = -3, se verifica la igualdad?
- **c)** ¿Hay más valores de x e y que verifiquen la ecuación? ¿Puedes encontrar tres pares más que verifiquen la ecuación?
- **d)** Y si x = 3 e y = -2, ¿se verifica la ecuación? ¿Puedes encontrar tres pares que no verifiquen la ecuación?

En esta actividad 1 se fomenta que los estudiantes empiecen a trabajar con la búsqueda de soluciones de la ecuación elegida. Reconocer que hay dos incógnitas puede parecer una tarea fácil, pero la experiencia con alumnos de estas edades nos ha mostrado que el trabajar con las dos incógnitas de manera simultánea puede generar dificultades en algunos de ellos.

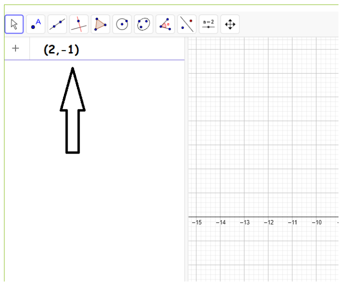
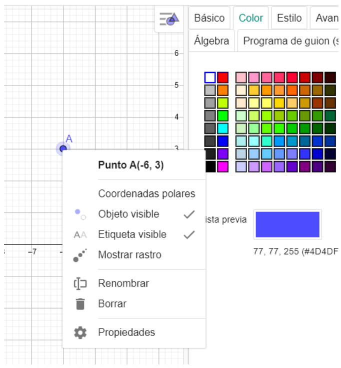
Por lo anterior, en la parte b les preguntamos a los estudiantes utilizando valores concretos para que reconozcan una solución. Luego, en la siguiente parte buscamos que los estudiantes exploren distintas soluciones con el objetivo de que encuentren alguna estrategia para lograr pares que verifiquen la ecuación. En la parte d se pretende que los alumnos se den cuenta que hay valores que no verifican.

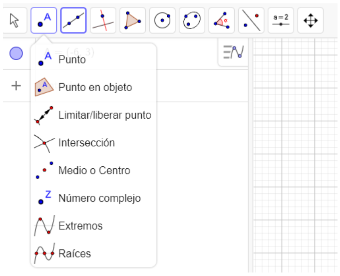
Es importante recordar que la clase es virtual, por lo que los estudiantes están cada uno en su casa, pero que de todas formas están trabajando en grupos en un espacio privado en el que pueden intercambiar verbalmente. Esto significa que pueden “probar” cada uno a su manera y luego chequear los resultados debido a que es un trabajo en equipo.

En la puesta en común esperamos que los estudiantes den sus resultados y que además cuenten si utilizaron alguna estrategia para encontrar soluciones. Es posible que algunos simplemente sustituyeron ambas incógnitas y encontraron fácilmente distintas soluciones, pero también es posible que hayan sustituido una incógnita y despejado la segunda. No está de más aclarar que cualquiera de las estrategias es válida para trabajar.

Posteriormente se trabaja la actividad 2. En ella volveremos a plantear un trabajo en equipos, donde presentamos la actividad. En esta oportunidad se busca que los estudiantes se familiaricen con GeoGebra y al mismo tiempo puedan desarrollar las tareas de ésta. Para ello en la actividad incluimos una columna que explica cómo utilizar el programa.

3. ACTIVIDAD 2

<table>
<tr><th>Actividades</th><th>Método</th></tr>
<tr><td>1. Utilizando GeoGebra, representa los pares encontrados en la actividad 1, en un sistema de ejes coordenados.</td><td>Abre GeoGebra y coloca en la entrada los valores obtenidos como muestra la imagen adjunta.

</td></tr>
<tr><td>2. Pinta de verde los puntos cuyas coordenadas verifican la ecuación, y de rojo los puntos cuyas coordenadas no verifiquen la ecuación.</td><td>Haz clic en el botón secundario sobre el punto que desees para abrir el menú de propiedades y busca la opción de color.

</td></tr>
<tr><td colspan="2">3. ¿Qué observas? Formula alguna conjetura:
____
____
____
______________________________</td></tr>
</table>

<table>
<tr>
<td>4. Explora las herramientas que dispone el programa GeoGebra para justificar tus observaciones.</td>
<td>Puedes buscar las distintas opciones haciendo clic derecho en las herramientas arriba de la ventana de GeoGebra
</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">5. ¿Pueden realizar alguna conclusión?
____
____
____
____________________</td>
</tr>
</table>

Luego de que los estudiantes trabajen en sus respectivos subgrupos se realiza una puesta en común. Es importante que sean los estudiantes los que comparten pantalla para mostrar sus resultados a los compañeros.

Esperamos que los estudiantes digan que los puntos verdes están alineados, y que por lo tanto pertenecen a una recta. La idea es que los estudiantes utilicen las herramientas que ofrece el programa GeoGebra para justificar sus conclusiones.

4. ACTIVIDAD 3

a) Utilizando las herramientas de GeoGebra, informa una ecuación de una recta que admita como solución el par (-1;8)

b) La que encontraste, ¿es la única posible?, ¿puedes informar otra distinta?

En una puesta en común, se comparte pantalla y se escriben las ecuaciones que proponen los estudiantes. La idea es tener varias ecuaciones que cumplan con la condición pedida. Aquí se discute en entre todos por qué pueden encontrar más de una solución y si hay alguna estrategia para generarlas. La discusión planteada tiene el propósito de que los estudiantes fundamenten con sus palabras lo que descubrieron, y en segundo término que nos den evidencia a nosotros como docentes para sondear si se ha adquirido el conocimiento.

5. ANÁLISIS DE ALGUNOS CONSTRUCTOS IDENTIFICADOS EN LA SECUENCIA

Entendemos importante pensar la actividad con base en los constructos debido a que estos nos permiten una forma de analizar las características matemáticas de la herramienta y la relación que el estudiante tiene con ella. Los constructos, según Zbiek et al. (2007) son "conceptos que tienen poder explicativo sobre la tecnología, y el aprendizaje y enseñanza de la matemática" (p. 1172). Hemos considerado algunos, que permiten explicar la selección de las actividades presentadas anteriormente.

Entendemos fundamental tener en cuenta que las herramientas que utilizamos en clase de matemática condicionan las estructuras matemáticas en los estudiantes. Es por esto que analizar críticamente su funcionamiento, en cuanto a su coherencia matemática, pero también en cuanto a los procesos matemáticos que realizan los estudiantes utilizando la herramienta para entrar en contacto con el conocimiento matemático.

Dado que en la matemática no se trabaja con objetos, sino con representaciones de los objetos, nos planteamos el rol fundamental del constructo de génesis instrumental para analizar el potencial semiótico de la herramienta tecnológica, para el diseño de las tareas y para la interpretación de las acciones de los estudiantes. Esto se debe a que la evolución de los significados está relacionada con la realización de las tareas y por tanto con los esquemas mentales construidos en relación con la herramienta.

Otro constructo relevante a analizar es la fidelidad cognitiva (Zbiek et al., 2007). Esto refiere a la capacidad de la herramienta, a través de las acciones realizadas, para mostrar las acciones cognitivas del estudiante. En el caso de esta actividad, contamos con la herramienta del protocolo de la construcción que brinda GeoGebra permitiendo ver las acciones tomadas por los estudiantes al realizar una tarea. En particular con nuestro trabajo podemos ver que las ecuaciones se comportan como es esperable. Uno puede trasladar los puntos con distintas herramientas y el programa, de forma simultánea, va modificando la ecuación que nos muestra en la ventana algebraica.

El acceso a los conceptos matemáticos se da a través de representaciones. Una de las posibilidades que permite el uso de herramientas tecnológicas, como GeoGebra, es la capacidad de integrar distintas representaciones, conectarlas y facilitar su interacción. Un constructo que hace referencia a esto es el de fluidez representacional (Zbiek et al., 2007). Refiere principalmente a la posibilidad de interacción entre los estudiantes y las representaciones y la capacidad de transitar entre representaciones de forma consistente. Cada representación tiene la capacidad de develar ciertas propiedades de la entidad representada, y "cuando un amplio espectro de representaciones está asociada con fluidez representacional, las oportunidades para crear sentidos ricos (matemáticamente) crece" (Zbiek et al., 2007, p. 1194).

Los estudiantes mostraron que, en GeoGebra, la fluidez representacional se evidencia en que dados dos puntos representados gráficamente podemos pasar de manera fluida de una representación gráfica a una ecuación. A su vez, los estudiantes pueden observar cómo al modificar la posición de dichos puntos cambia también la ecuación de la recta.

Otro constructo que plantea Zbiek et al. (2007) hace referencia a que las actividades dependen en parte de la demanda cognitiva que exige la tarea a realizar.

> Por ejemplo, si la demanda de la tarea es puramente técnica los estudiantes podrían tener como objetivo usar la herramienta para reproducir una técnica para producir un resultado. Mientras que, si la demanda es de tipo conceptual, los estudiantes podrían tener como objetivo generar una representación que les permita interpretar un proceso. En particular, con respecto a esto se plantean dos tipos diferenciados de actividades; actividades exploratorias y actividades expresivas (Tejera, 2021, p.26)

En otras palabras, la actividad puede desafiar al estudiante a construir nuevos conceptos, o simplemente buscar explorar. Esto nos sirve para recordar que tenemos siempre que tener en claro cuáles son los objetivos que nos proponemos a la hora de plantear determinadas actividades, pero más importante aún, sobre las herramientas tecnológicas que queremos utilizar. Dependiendo de la herramienta que utilicemos puede variar una actividad entre exploratoria y expresiva.

Entendemos que la herramienta que se utiliza para trabajar condiciona el proceso que realiza el estudiante a la hora de construir sus propios conceptos matemáticos. Aquí lo que nos plantea Zbiek et al. (2007) es que existe una determinada fidelidad cognitiva que justamente hace referencia a qué se le exige al estudiante desde el punto de vista de las herramientas que utiliza. Las actividades pueden ser actividades exploratorias o actividades expresivas. En nuestras actividades, buscamos que el estudiante explore usando la herramienta como intermediario para determinar la ecuación de la recta.

Otro constructo que se hace presente al trabajar con actividades mediadas por tecnología es el de caja blanca/caja negra (WBBB por sus siglas en inglés). Esto implica que los estudiantes pueden conocer los procedimientos que utilizan (caja blanca), pero el software puede esconder procedimientos y eso no impide que los estudiantes trabajen en la actividad, aunque desconozcan los procedimientos matemáticos que hay de fondo (caja negra).

6. REFERENCIAS

Arribas, F. y Galán, M. C. (2020). Trabajando con la app de Geogebra en el aula. Épsilon, 105, 51-57.

Tejera, M. (2021). Diseño de una secuencia didáctica basada en la modelación para fomentar el desarrollo del pensamiento variacional en estudiantes. [Tesis de maestría no publicada]. Instituto Politécnico Nacional, CICATA.

Teófilo de Sousa,R.,Vieira Alves, F. R. y Araújo Souza, M. J.(2022). La Teoría de los Conceptos Figurativos y GeoGebra: el concepto y la visualización en geometría dinámica. Matemáticas, Educación y Sociedad, 5(1), 1-1

Zbiek, R. M., Heid, K., y Blum, W. (2007). Research on technology in mathematics education. A perspective of constructs. *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning (2),* 1169-1207. Information Age Publishing.

Épsilon - *Revista de Educación Matemática* *2022, nº 110, 77-101*

Fórmulas que generan números primos

Juan Fernández Sánchez
I.E.S. "Valle del Almanzora" (Cantoria), Almería
juanfernandez@ual.es
Rocío Sánchez Alcalde
Graduada en Matemáticas, Universidad de Almería
rociosancheeez@gmail.com
Manuel Úbeda Flores
Departamento de Matemáticas, Universidad de Almería
mubeda@ual.es

Resumen: *Gracias a Euclides, es conocido desde hace más de dos mil años que existen infinitos números primos. Desde entonces, numerosas demostraciones lo han probado de diferentes maneras. Además, se han desarrollado fórmulas que permiten la generación de los números primos. El objetivo de este trabajo es hacer un compendio de las principales fórmulas generadoras de números primos, que permiten su obtención utilizando diferentes técnicas.*
Palabras clave: *fórmulas generadoras, número primo, Teorema Pequeño de Fermat, Teorema de Wilson.*

Formulas that generate prime numbers

Summary: *Thanks to Euclid, it has been known for more than two thousand years that there are infinite prime numbers. Since then, numerous proofs have proven this fact in different ways. In addition, formulas have been developed that allow the generation of prime numbers. The objective of this work is to make a compendium of the main formulas, which allow obtaining the prime numbers by using different techniques.*
Keywords: *generating formulas, prime number, Fermat's Little Theorem, Wilson's Theorem.*

1. INTRODUCCIÓN

Los números primos juegan un papel importante en la teoría de números (véanse, por ejemplo, Crandall y Pomerance (2005) y Narkiewicz (2000). Es un hecho conocido que existen infinitos números primos (para una revisión de algunas demostraciones, véanse, por ejemplo, de Amo y otros (2013), Hardy y Wright (1979) y Ribenboim, 2004), y que no existe un polinomio que proporcione todos los números primos. También se sabe que no existe un polinomio no constante que solo tome valores primos (véase Ribenboim, 2004).

Ahora bien, ¿existe una "fórmula" restringida a un polinomio medio? ¿Podemos usar signos de suma, factoriales y la función parte entera en nuestra "fórmula"? Si es así, entonces, de hecho, hay fórmulas para los números primos, si bien, algunas son muy poco prácticas. Para una introducción a algunas fórmulas conocidas, puede consultarse, por ejemplo, Guy (2004) y Ribenboim (2004).

Para determinar los números primos, es natural pedir funciones $f(n)$ definidas para todos los números naturales $n \geq 1$, que sean manejables en la práctica y que produzcan algunos o todos los números primos.

En su libro, Hardy y Wright (1979) se preguntan lo siguiente:

1. ¿Existe una fórmula para el n-ésimo número primo?
2. ¿Existe una fórmula para un número primo en términos de los primos anteriores?

Si denotamos por p a un número primo, y p_n al n-ésimo número primo, Ribenboim (2004) sugiere que para tales fórmulas debería verificarse una de las siguientes condiciones:

1. $f(n) = p_n$ para todo $n \geq 1$;
2. $f(n)$es siempre un número primo; y si $n \neq m$, entonces $f(n) \neq f(m)$;
3. el conjunto de los números primos es igual al conjunto de valores positivos adoptados por la función.

Tras unos preliminares sobre notación y resultados conocidos que necesitaremos, nuestro objetivo en este trabajo es la reunión de fórmulas (o funciones) que permiten generar números primos y que las clasificamos dependiendo de su tipología.

2. PRELIMINARES

Comenzamos esta sección aportando algunas definiciones y cierta notación que utilizaremos a lo largo de la siguiente sección.

- Se denota por mcd(m,n) al máximo común divisor de los enteros m y n.
- Para cualquier número real x, se definen las funciones

$$sg(x) = \begin{cases} 0 & si\ x \leq 0, \\ 1 & si\ x > 0 \end{cases} \quad y \quad \overline{sg}(x) = \begin{cases} 0 & si\ x \neq 0 \\ 1 & si\ x = 0. \end{cases}$$

- Para cada número real $x > 0$, denotamos por $\pi(x)$ al número de primos p tal que $p \leq x$.
- Sea $\lfloor x \rfloor = \text{máx}\{k \in Z \mid k \leq x\}$, es decir, el mayor de los enteros menor o igual que x.
- Dados dos números x e y, se define $x \ominus y$ como

$$x \ominus y := \begin{cases} x - y & si\ x \geq y, \\ 0 & si\ x < y. \end{cases}$$

- Dado un número natural $n \geq 3$, se define la función f_n como

$$f_n := \begin{cases} 1 & si\ n\ es\ primo, \\ 0 & si\ n\ es\ compuesto. \end{cases}$$

- Sea μ la función de Möbius, la cual se define de la siguiente manera:

$$\mu(n) := \begin{cases} \mu(1) = 1 \\ si\ n\ es\ el\ producto\ de\ r\ primos\ distintos,\ entonces\ \mu(n) = (-1)^r, \\ si\ el\ cuadrado\ de\ un\ primo\ divide\ a\ n,\ entonces\ \mu(n) = 0. \end{cases}$$

Además, los siguientes resultados son fundamentales para las demostraciones de las fórmulas que presentaremos en la siguiente sección. El primero de los resultados es el conocido como “postulado de Bertrand”.

2.1. Teorema 1 (Bertrand, 1845)

Entre $n \geq 2$ y $2n$ siempre hay un número primo, esto es, $p_{n+1} < 2p_n$.

No reproducimos aquí la demostración de este postulado, ya que requiere de herramientas analíticas que no son el objetivo de este trabajo. La primera demostración de este resultado fue dada por Tschebycheff (1852a, 1852b), aunque también puede consultarse una demostración diferente debida a Erdős (1932).

Sin embargo, dado su interés, para los dos siguientes resultados, el Teorema Pequeño de Fermat y el Teorema de Wilson, presentamos sus correspondientes demostraciones (véase Euler (1741) para el primer resultado, Lagrange (1771) para el segundo y Ribenboim (2004) para un contexto histórico de ambas).

2.2. Teorema 2 (Pequeño de Fermat, 1636)

Si p es un número primo, entonces, para cada número natural n, se tiene $n^p \equiv n \pmod{p}$.

Demostración. Para demostrar este resultado, tomamos primero los $p - 1$ primeros múltiplos de n, es decir, $n, 2n, 3n, \ldots, (p-1)n$. Tengamos en cuenta que si $2n \equiv k \pmod{p}$ y $3n \equiv k' \pmod{p}$, entonces k y k' tienen que ser distintos, ya que si no lo fuesen se tendría que $2 \equiv 3 \pmod{p}$, y eso es contradictorio. De forma general, siendo k_i, con $i \in \{1,2,\ldots, p-1\}$ distintos, podemos decir entonces que se cumple lo siguiente:

$n \equiv k_1 \pmod{p}$
$2n \equiv k_2 \pmod{p}$
$3n \equiv k_3 \pmod{p}$
$\vdots$
$(p-1)n \equiv k_{p-1} \pmod{p}$.

Multiplicando los términos de los dos miembros de las congruencias anteriores queda lo siguiente: $(p-1)! \cdot n^{p-1} \equiv (p-1)! \pmod{p}$. Ninguno de los números del factorial es divisible por p, ya que éste es primo. Por tanto, con la propiedad de cancelación, tenemos: $n^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$, quedando el resultado probado.

2.3. Teorema 3 (Wilson, 1770)

Si p es un número primo, entonces $(p-1)! \equiv -1 \pmod{p}$. *El recíproco también es cierto.*

Demostración. Supongamos que p es un número primo; por tanto, todos los números enteros anteriores a éste, $1, 2, 3, \ldots, p-1$, son coprimos con él. Este conjunto de números forma el grupo Z_p, es decir, un grupo con la operación multiplicación. Esto implica que para todo $a \in Z_p$, existe un único $b \in Z_p$ tal que $a \cdot b \equiv 1 \pmod{p}$. Además, por ser p primo, sabemos que la anterior congruencia se cumpliría para $a = b$ si, y solo si, $a = 1$ o bien $a = p - 1$. Así, podemos agrupar este conjunto en parejas de un número con su inverso de tal manera que $(p-2)! \equiv 1 \pmod{p}$. Por último, multiplicamos por $p-1$ a ambos lados, obteniendo $(p-1)! \equiv (p-1) \pmod{p}$ y, por tanto, $(p-1)! \equiv -1 \pmod{p}$.

Recíprocamente, supongamos que p no es un número primo, sino compuesto. Esto significa que p se debe poder factorizar por algún número entero mayor que 1 y menor que él mismo, el cual llamaremos d, lo que implica que $\mathrm{mcd}((p-1)!, p) > 1$. Como d es un divisor de p, también lo es de $(p-1)!$ y de $(p-1)! + 1$ (por la congruencia). Por lo tanto, el divisor d divide a 1, lo cual es imposible debido a que se había exigido que d debía ser mayor estricto que 1.

3. FÓRMULAS PARA GENERAR NÚMEROS PRIMOS

En esta sección principal presentamos una recopilación de algunas fórmulas (las que hemos considerado más interesantes, puesto que, como puede consultarse en la literatura, existen cientos de ellas), haciendo una clasificación según su tipología y, dentro de cada tipo, por año de aparición en la literatura.

3.1. Fórmulas elementales

A continuación, mostramos algunas de las fórmulas más conocidas de generación de números primos basadas en expresiones elementales.

3.1.1. Fórmula de Hacks (1893)

Hacks (1983) prueba que $p>2$ es un número primo si, y sólo si, se cumple la siguiente igualdad:

$$\sum_{y=1}^{p-1}\sum_{s=1}^{(p-1)/2}\left\lfloor\frac{ys}{p}\right\rfloor+\sum_{y=1}^{p-1}\sum_{s=1}^{\lfloor y/2\rfloor}\left\lfloor\frac{ps}{y}\right\rfloor=\left(\frac{p-1}{2}\right)^3$$

3.1.2. Fórmula de Wormell (1967)

Wormell (véase Goodstein y Wormell, 1967) demuestra la siguiente fórmula:

$$p_n=2+2^{n-1}-\frac{1}{2}\sum_{m=2}^{2^n}(-1)^{2^{\prod_{r=1}^{n}\left(1-r+(m-1)/2+\frac{1}{2}\sum_{x=1}^{m}(-1)^{2^{\prod_{a=1}^{x}\prod_{b=1}^{x}(x-ab)^2}}\right)}}$$

3.1.3. Fórmula de Jones (1975)

En su fórmula, Jones (1975) demuestra que p_n viene dado por la fórmula

$$p_n=\sum_{i=0}^{n^2}\left(1\ominus\left(\left(\sum_{j=0}^{i}r\left((j\ominus 1)!^2,j\right)\right)\ominus n\right)\right),$$

donde $r(x,y)$ denota el resto de la división de x por y.

3.1.4. Fórmula de Papadimitriou (1975)

La siguiente fórmula recursiva (Papadimitriou, 1975) expresa p_{n-1} en términos de p_n:

$$\begin{aligned}p_{n+1}\quad=\quad&(p+2)f_{p+2}+(p+4)f_{p+4}\left(1-f_{p+2}\right)+(p+6)f_{p+6}\left(1-f_{p+2}\right)\left(1-f_{p+4}\right)+\\&\cdots+(2p-1)f_{2p-1}\left(1-f_{p+2}\right)\left(1-f_{p+4}\right)\cdots\left(1-f_{2p-3}\right).\end{aligned}$$

3.1.5. Fórmula de Regimbal (1975)

En Regimbal (1975) el autor demuestra que

$$p_n = \sum_{m=2}^{2^n} m \left\lfloor \frac{1}{1 + \left| n - \left\lfloor \frac{1}{\sum_{i=1}^{m-1} \left\lfloor \frac{\left\lfloor \frac{m}{i} \right\rfloor}{\frac{m}{i}} \right\rfloor} \right\rfloor \sum_{j=2}^{m} \left\lfloor \frac{1}{\sum_{i=1}^{j-1} \left\lfloor \frac{\left\lfloor \frac{j}{i} \right\rfloor}{\frac{j}{i}} \right\rfloor} \right\rfloor \right|\Bigg|} \right\rfloor.$$

3.1.6. Fórmula de Hardy y Wright (1979)

Si r es un número natural mayor que 1, Hardy y Wright (1979) demuestran que

$$p_n = \left\lfloor r^{n^2} \alpha_r \right\rfloor - r^{2n-1} \left\lfloor r^{(n-1)^2} \alpha_r \right\rfloor,$$

donde

$$\alpha_r = \sum_{m=1}^{\infty} p_m \, r^{-m^2}.$$

3.1.7. Fórmula de Elliott (1983)

La función

$$g(n) = (n-1) \left\lfloor \left\lfloor \frac{n!+1}{n+1} \right\rfloor - \frac{n!-n}{n+1} \right\rfloor + 2$$

siempre genera un primo, genera todos los primos y genera cada uno de los primos impares exactamente una vez y en su orden natural (Elliott, 1983).

3.1.8. Fórmulas de Tsangaris y Jones (1992)

Tsangaris y Jones (1992) prueban que, para $n > 1$,

$$p_n = \sum_{l=0}^{k} \left(1 \ominus \left(\left(\sum_{j=1}^{l} \left(1 \ominus \sum_{0<i<k\leq m} \left(2 \left\lfloor \frac{i \cdot j}{k} \right\rfloor - j + 1 \right) \right) \right) \ominus n \right) \right).$$

3.1.9. Fórmula de Mináč (2004)

Mináč muestra (véase Ribenboim, 2004) que

$$p_n = 1 + \sum_{m=1}^{2^n} \left\lfloor \left\lfloor \frac{n}{1+\pi(m)} \right\rfloor^{1/n} \right\rfloor,$$

donde

$$\pi(m) = \sum_{j=2}^{m} \left\lfloor \frac{(j-1)!+1}{j} - \left\lfloor \frac{(j-1)!}{j} \right\rfloor \right\rfloor.$$

3.1.10. Fórmula de Tsangaris (2007)

Tsangaris (2007) prueba que

$$p_n = \sum_{m=2}^{n^2} m \left\lfloor \frac{1}{1 + \left| n - \left\lfloor \frac{1}{\sum_{d=1}^{\lfloor \sqrt{m} \rfloor} \left\lfloor \frac{\lfloor \frac{m}{d} \rfloor}{\frac{m}{d}} \right\rfloor} \right\rfloor \sum_{k=2}^{m} \left\lfloor \frac{1}{\sum_{d=1}^{\lfloor \sqrt{k} \rfloor} \left\lfloor \frac{\lfloor \frac{k}{d} \rfloor}{\frac{k}{d}} \right\rfloor} \right\rfloor \right|} \right\rfloor.$$

3.1.11. Fórmula de Kaddoura y Abdul-Nabi (2012)

Kaddoura y Abdul-Nabi (2012) muestran que

$$p_n = 7 + \sum_{x=7}^{2(\lfloor n \log n \rfloor + 1)} \left\lfloor \frac{2n}{\pi(x)+n+1} \right\rfloor,$$

donde

$$\pi(k) = 4 + \sum_{x=7}^{k} \lfloor f_x \rfloor.$$

3.1.12. Fórmula de Ruiz y Sondow (2014)

Ruiz y Sondow (2014) demuestran que

$$p_n = 2 + \sum_{k=2}^{\lfloor 2+2n\log n \rfloor} \left(1 - \left\lfloor \frac{\pi(k)}{n} \right\rfloor\right),$$

siendo

$$\pi(x) = \sum_{j=2}^{\lfloor x \rfloor} \left(1 + \left\lfloor \frac{2 - \sum_{i=1}^{j}\left(\left\lfloor \frac{j}{i} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{j-1}{i} \right\rfloor\right)}{j} \right\rfloor\right).$$

3.1.13. Fórmula de Saouter (2017)

Saouter (2017) prueba que

$$p_n = \sum_{k=2}^{2^{2^n}} k \left\lfloor \frac{1}{1 + (\pi(k) + \pi(k-1) - 2n + 1)^2} \right\rfloor,$$

siendo

$$\pi(x) = \sum_{i=2}^{\lfloor x \rfloor} \left\lfloor \frac{1}{\sum_{j=1}^{i} \left\lfloor \frac{1}{i+1-j\left\lfloor \frac{i}{j} \right\rfloor} \right\rfloor - 1} \right\rfloor.$$

3.2. Fórmulas trigonométricas

El siguiente listado de fórmulas generadoras de números primos incluye funciones trigonométricas.

3.2.1. Fórmula de Willans (1964)

Willans (1964) prueba que

$$p_n = \sum_{m=1}^{N} A_n\left(\pi(m)\right),$$

siendo

$$\begin{aligned} A_n(a) &= \left\lfloor \sqrt[n]{\frac{n}{a+1}} \right\rfloor, \\ \pi(m) &= \sum_{j=2}^{m} F(j), \\ F(j) &= \left\lfloor \cos^2 \pi \frac{(j-1)!+1}{j} \right\rfloor, \end{aligned}$$

y N suficientemente grande, para el cual Willans sugiere el valor $N = 2^n$.

3.2.2. *Fórmula de Harris (1969)*

Mediante un test, y basándose en el Teorema Pequeño de Fermat, Harris (1969) demuestra que $n > 3$ es un número primo si se cumple la siguiente igualdad:

$$\prod_{p \leq \sqrt{n}} \frac{1 - \cos \frac{2n^{p-1}\pi}{p}}{1 - \cos \frac{2\pi}{p}} = 1.$$

3.2.3. *Fórmula de Tee (1972)*

Tee (1972) prueba que

$$\pi(n) = 1 + \sum_{k=1}^{(n-1)/2} w\,(2k+1),$$

donde

$$w(n) = \frac{1 - \cos\left(\pi \frac{(n-1)!}{n}\right)}{1 + \cos\left(\frac{\pi}{n}\right)}$$

y es tal que $w(2n + 1) = 1$ cuando $2n + 1$ es un número primo.

3.2.4. *Fórmula de Tsangaris (2004)*

Tsangaris (2004) prueba que si $p > 1$ es un número natural y $m = \lfloor n \rfloor$, entonces p es un número primo si, y sólo si,

$$\sum_{\substack{1\le j\le m \\ 1\le t,k\le p-1}} \cos\frac{2\pi tjk}{p} = -m(p-1).$$

3.3. Fórmulas que utilizan funciones aritméticas o de teórica de números

Para las siguientes fórmulas basadas en funciones aritméticas necesitamos alguna notación adicional:

- $m \mid n$ significa "el entero m divide al entero n".
- $d(n)$ denota el número de divisores de n.
- $\varphi(n)$ es el número total de enteros menores de n que son primos relativos (coprimos) con n.
- $\omega(n)$ es el número de primos distintos que dividen n.
- $\Omega(n)$ cuenta el número total de factores primos de n.
- $\sigma(n)$ denota la suma de los divisores positivos de n.

$$\psi(n) = n\prod_{p|n}\left(1+\frac{1}{p}\right).$$

- $\theta(n)$ representa a las funciones $\sigma(n)$ y $\psi(n)$.
- Sean $p_1, \ldots, p_k$ diferentes números primos y $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \ge 1$ números naturales para los que

$$n = \prod_{i=1}^{k} p_i^{\alpha_i}.$$

- Definimos las funciones $\eta(n)$ y $\delta(n)$ como

$$\eta(n) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i\, p_i \quad y \quad \delta(n) = n\sum_{i=1}^{k}\frac{\alpha_i}{p_i},$$

respectivamente.

3.3.1. Fórmula de Srinivasan (1961)

Srinivasan (1961) prueba que

$$p_{n+1} = \left\lfloor \frac{\sum_{d|p_1\cdots p_n} \frac{\mu(d)d\cdot 2^d}{(2^d-1)^2} - \frac{1}{2}}{\sum_{d|p_1\cdots p_n} \frac{\mu(d)}{2^d-1} - \frac{1}{2}} \right\rfloor.$$

3.3.2. Fórmula de Gandhi (1971)

Gandhi (1971) demuestra que

$$p_n = \left\lfloor 1 - \frac{1}{\log 2} \log\left(-\frac{1}{2} + \sum_{d|p_1 p_2\cdots p_{n-1}} \frac{\mu(d)}{2^d - 1} \right) \right\rfloor.$$

3.3.3. Fórmula de Ernvall (1975)

Dado un número natural $m \geq 2$, Ernvall (1975) demuestra que el número primo más pequeño p que es mayor que m es

$$p = \frac{d}{mcd(t/d^a, d)},$$

donde

$$\begin{aligned} d &= mcd((m!)^{m!} - 1, (2m)!), \\ t &= \frac{d^d}{mcd(d^d, d!)} \end{aligned}$$

y a es el único número entero tal que d^a divide a t, pero d^{a+1} no divide a t.

3.3.4. Fórmula de Almansa y Prieto (1994)

Almansa y Prieto (1994) aportan en su trabajo diversas fórmulas para el n-ésimo número primo, siendo éstas:

$$p_n = 2 + \sum_{m=2}^{2^n} \left\lfloor 2^{-\left\lfloor \frac{\sum_{k=2}^{m} \left\lfloor \frac{2}{d(k)} \right\rfloor}{n} \right\rfloor} \right\rfloor,$$

$$p_n = 2 + \sum_{m=2}^{2^n} \left\lfloor 2^{-\left\lfloor \frac{\sum_{k=2}^{m} \left\lfloor \frac{k+1}{\sigma(k)} \right\rfloor}{n} \right\rfloor} \right\rfloor,$$

$$p_n = 2 + \sum_{m=2}^{2^n} \left\lfloor 2^{-\left\lfloor \frac{\sum_{k=2}^{m} \left\lfloor \frac{\varphi(k)}{k-1} \right\rfloor}{n} \right\rfloor} \right\rfloor.$$

3.3.5. *Fórmula de Ruiz (2000)*

Ruiz (2000) prueba que

$$p_n = 1 + \sum_{k=1}^{C_n} \left(1 - \left\lfloor \frac{\pi(k)}{n} \right\rfloor\right),$$

siendo

$$\begin{aligned} \pi(k) &= \sum_{i=2}^{k} \big(1 - G(i)\big), \\ G(i) &= \begin{cases} 0 & si\ i\ es\ primo, \\ 1 & si\ i\ es\ compuesto \end{cases} \end{aligned}$$

y C_n es una constante para la que el autor sugiere $C_n = 2(\lfloor n \log n \rfloor + 1)$.

3.3.6. *Fórmula de Vassilev-Missana (2001)*

Vassilev-Missana (2001) demuestra que

$$\pi(n) = \sum_{k=2}^{n} \left\lfloor \frac{k+1}{\theta(k)} \right\rfloor.$$

3.3.7. Fórmula de Atanassov (2001)

Atanassov (2001) prueba que

$$p_n = \sum_{i=0}^{\left\lfloor \frac{n^2+3n+4}{4} \right\rfloor} sg(n - \pi(i)),$$

donde

$$\begin{aligned}
\pi(i) &= \sum_{k=2}^{i} \overline{sg}\left(k - 1 - \varphi(k)\right), \\
\pi(i) &= \sum_{k=2}^{i} \overline{sg}\left(\sigma(k) - k - 1\right), \\
\pi(i) &= \sum_{k=2}^{i} f\,r\left(\frac{k}{(k-1)!}\right),
\end{aligned}$$

siendo

$$fr\left(\frac{n}{m}\right) = \begin{cases} 0 & si\ n = 1, \\ 1 & si\ n \neq 1 \end{cases}$$

para *n* y *m* números naturales tales que mcd(*n*,*m*) = 1.

3.3.8. Fórmula de Atanassov (2004)

Atanassov (2004) prueba que

$$p_n = \sum_{i=0}^{2^n} sg\left(n - \sum_{k=2}^{i} \overline{sg}\left(k - \eta(k)\right)\right).$$

3.3.9. Fórmula de Atanassov (2013)

Atanassov (2013) demuestra que

$$p_n = \sum_{i=0}^{\left\lfloor \frac{n^2+3n+4}{4} \right\rfloor} sg\left(n - \sum_{k=2}^{i} \left\lfloor \frac{1}{\delta(k)} \right\rfloor\right).$$

3.3.10. Fórmula de Vassilev-Missana (2013)

Vassilev-Missana (2013) prueba que

$$\pi(n) = \left\lfloor \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{k+1}{\theta(k)} \right)^{k+\sqrt{k}} \right\rfloor.$$

3.4. Fórmulas combinatorias

En las siguientes fórmulas se utilizan funciones generadoras y otros elementos combinatorios.

3.4.1. Serie de Lambert (1771)

La serie de Lambert (1771)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1-x^n},$$

cuando se expande en un entorno de 0 en la variable x, da un coeficiente de 2 precisamente en los números primos (véase también Gawlik, 1995).

3.4.2. Serie de Gawlik (1995)

Basado en la serie de Lambert y en la teoría de funciones elípticas, Gawlik (1995) proporciona la serie

$$\frac{1}{4} \log \prod_{i=1}^{\infty} \left(\frac{1-q^{2n-1}}{1+q^{2n-1}} \right)^4$$

para la cual el coeficiente de q^{2n-1} es $2+2/(2n-1)$ si, y sólo si, $2n-1$ es un número primo.

3.5. Fórmulas analíticas

Las siguientes fórmulas utilizan integrales, productos y sumas infinitas o funciones analíticas especiales, como la función zeta de Riemann ζ definida por

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}.$$

3.5.1. Fórmula explícita de Riemann (1859)

Riemann (1859) prueba que la función

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\log x/\log 2} \frac{\mu(n)}{n} f\left(x^{1/n}\right),$$

siendo

$$f(x) = \int_0^x \frac{dt}{\log t} - \sum_{\rho} x^{\rho} + 2\log 2 \int_x^{\infty} \frac{dt}{t(t^2-1)\log t},$$

donde la suma se realiza sobre las partes imaginarias de los ceros no triviales de la función zeta de Riemann ordenados por magnitud, es $\pi(x)$, excepto cuando x es un número primo, en cuyo caso es $\pi(x) - 1/2$.

3.5.2. Fórmula de Isenkrahe (1900)

Isenkrahe (1900) prueba que

$$p_{n+1} = \lim_{x \to p_n+1} F(n, x),$$

donde

$$\begin{aligned} F(m, x_0) &= \prod_{i=1}^{n} p(m+i, x_0) + \frac{x_0}{\prod_{i=1}^{n} p(m+i, x_0)} - \left\lfloor \frac{\prod_{i=1}^{n} p(m+i, x_0)}{x_0} \right\rfloor, \\ p(r, x) &= p_r^{S(r,x)}, \\ S(r, x) &= \sum_{k=1}^{\infty} \left\lfloor \frac{x}{p^k} \right\rfloor, \end{aligned}$$

para cualquier número primo p_r.

3.5.3. Fórmula de Ortega Costa (1950)

Ortega Costa (1950) prueba que

$$\pi(n) = n - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sum_{m=1}^{n} \cos\left(x \prod j = 1^{n-1} \prod_{k=1}^{n-1} (jk - n) \right) dx.$$

3.5.4. Fórmula de Teuffel (1954)

Teuffel (1954) demuestra que

$$p_n = \lfloor 1 + (1 - (1 - \zeta(k)\Pi_n)^{-1})^{1/k} \rfloor,$$

donde k puede tomar el valor $2p_{n-1}$ o cualquier otro valor entero mayor y

$$\Pi_n = \prod_{m=1}^{n-1} (1 - p_m^{-k}).$$

3.5.5. Fórmula de Golomb (1976)

Golomb (1976) obtiene las siguientes fórmulas:

$$\begin{aligned}
p_{n+1} &= \lim_{s\to\infty} (P_n(s)\zeta(s) - 1)^{-1/s}, \\
p_{n+1} &= \lim_{s\to\infty} \left(P_n(s) - \zeta^{-1}(s)\right)^{-1/s}, \\
p_{n+1} &= \lim_{s\to\infty} \left(\zeta(s) - Q_n(s)\right)^{-1/s}, \\
p_{n+1} &= \lim_{s\to\infty} \left(1 - \zeta^{-1}(s) Q_n(s)\right)^{-1/s},
\end{aligned}$$

siendo

$$\zeta^{-1}(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s},$$

$$P_n(s) = \prod_{p_i | P_n} (1 - p_i^s),$$

$$Q_n(s) = (P_n(s))^{-1} = \sum_{n=1}^{*\infty} \frac{1}{n^s},$$

donde * indica que la suma se extiende sobre aquellos valores de n que no tienen factores primos que excedan p_n.

3.5.6. Fórmula de Knopfmacher (1979)

Knopfmacher (1979) prueba que existe una constante A =0,92189… tal que

$$p_{n+1} = \left\lfloor 1 - \log\left(1 - \frac{A}{\prod_{i=2}^{p_n}(1-4^{-i})}\right)/\log 4 \right\rfloor.$$

En este mismo trabajo, el autor también demuestra que

$$p_{n+1} = \left\lfloor 2^{1/s}\left(1 - \frac{1}{\zeta(s)\prod_{i=2}^{p_n}(1-i^{-s})}\right)\right\rfloor,$$

donde s es cualquier número real tal que

$$s \geq \tfrac{3}{4}\left(p_{n+1} + \tfrac{1}{2}\right).$$

3.5.7. Fórmula de Raitzin (1979)

Raitzin (1979) demuestra que

$$\pi(m) = \sum_{m=1}^{\infty} a_n\, \lambda(m, n+3),$$

siendo

$$\lambda(n, r+3) = \sum_{m=1}^{n} m^{r+2},$$

$$a_n = -\sum_{k=0}^{n-1} \frac{P(k+3)(2\pi i)^{n-k}}{(n-k)!},$$

$$P(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n} \log\zeta(ns).$$

3.5.8. Fórmula de Keller (2007)

Keller (2007) muestra que los n primeros números primos $p_1,\ldots,p_n$ determinan el siguiente número primo si se utiliza la fórmula

$$p_{n+1} = \lim_{s \to +\infty} \left(\prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{1}{p_k^s}\right) \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^s} - 1 \right)^{-1/s}.$$

Si se reemplaza el límite superior del sumatorio por $2p_n - 1$, el resultado se sigue cumpliendo.

3.5.9. Fórmula de Assis (2015)

Assis (2015) demuestra que

$$p_{q+k} = \sum_{m=p_q+1}^{\infty} \left(m \prod_{j=2}^{k\prime(m)} \prod_{l=2}^{k\prime(m)} (1 - \langle m, jl \rangle) \right) \left\langle m, m \left\langle k, \sum_{r=p_q+1}^{m} \prod_{j=2}^{k\prime(r)} \prod_{l=2}^{k\prime(r)} (1 - \langle r, jl \rangle) \right\rangle \right\rangle$$

siendo

$$k'(t) = \frac{t - 1 + \langle 0, t \, mod \, 2 \rangle}{2} = \begin{cases} (t-1)/2 & si \ t \ es \ impar \\ (t+1)/2 & si \ t \ es \ par \end{cases}$$

y

$$\langle x, y \rangle = \begin{cases} 1 & si \ x = y \\ 0 & si \ x \neq y. \end{cases}$$

3.6. Fórmulas que utilizan constantes o información externa

Las siguientes fórmulas involucran constantes especiales u otro tipo de información que esencialmente codifica los números primos.

3.6.1. Fórmula de Scherk (1833)

Scherk (1833) afirma, y lo demuestra Sierpiński (1952b), que

$$p_{2n} = 1 \pm p_1 \pm \cdots \pm p_{2n-1}$$

$$p_{2n+1} = 1 \pm p_1 \pm \cdots \pm p_{2n}$$

para algunas elecciones de signos.

Épsilon, 2022, nº 110, 77-101, ISSN: 2340-714X

3.6.2. Fórmula de Mills (1947)

Mills (1947) prueba que existe un número real λ tal que, para todo n =1,2,…, el número $\lfloor \lambda^b \rfloor$, siendo $b = 3^n$, es primo. Kuipers (1950) generaliza el resultado de Mills reemplazando la constante 3 por cualquier número entero mayor o igual a 3; Ansari (1951) elimina la restricción a números enteros, permitiendo cualquier número real mayor que 8/3, y Matomäki (2010) mejora el 8/3 a 2.

3.6.3. Fórmula de Moser (1950)

Moser (1950) muestra que

$$p_n = A\left(10^{n(n+1)/2} - 10^n A \cdot 10^{n(n-1)/2}\right),$$

donde A= 0,203005000700011...

3.6.4. Fórmula de Niven (1951)

Niven (1951) demuestra que, dado cualquier número real c > 8/3, existe un número real A, que depende de c, tal que

$$\left\lfloor A^{c^n} \right\rfloor$$

es siempre un número primo para cualquier número entero n. Además, dado cualquier número real A > 1, existe un c tal que el valor anterior es un número primo.

3.6.5. Fórmula de Wright (1951)

Wright (1951) demuestra que existe un número real β tal que el valor

$$\left\lfloor 2^{2^{\cdot^{\cdot^{2^{\beta}}}}} \right\rfloor$$

es un número primo.

3.6.6. Fórmula de Bang (1952)

Bang (1952) muestra que

$$p_n = \left\lfloor 10^{2n-1}\left(a \cdot 10^{(n-1)^2} - \left\lfloor a \cdot 10^{(n-1)^2} \right\rfloor\right) \right\rfloor,$$

siendo

$$a = \sum_{k=1}^{n} \frac{p_k}{10^{k^2}}.$$

3.6.7. Fórmula de Sierpiński (1952a)

A partir de las formulaciones dadas por Kuipers (1950), Mills (1947) y Niven (1951), Sierpiński (1952a) prueba que

$$p_n = \lfloor a \cdot 10^{2^n} \rfloor - 10^{2^{n-1}} \lfloor a \cdot 10^{2^{n-1}} \rfloor,$$

donde a es la constante dada en la fórmula de Bang (1952).

3.6.8. Fórmula de Alkauskas y Dubickas (2004)

Basado en el hecho de que la sucesión $\lfloor \xi^{\,p} \rfloor$, donde p recorre los números primos, contiene infinitos números primos para casi todo $\xi > 1$ (véase Baker y Harman, 1996), Alkauskas y Dubickas (2004) demuestran que existe un número trascendental $\omega > 1$ tal que $\lfloor \omega^{n!} \rfloor$ es un número primo.

3.6.9. Fórmula de Elsholtz (2020)

Basándose en el resultado de Mills (1947), Elsholtz (2020) proporciona una primera variante incondicional:

$$\lfloor A^{10^{10n}} \rfloor$$

es un número primo, donde $A = 1{,}00536773279814724017\ldots$ se puede calcular con millones de dígitos. De manera similar,

$$\lfloor A^{3^{13n}} \rfloor$$

es un número primo, con $A = 3{,}8249998073439146171615551375\ldots$

3.7. Fórmulas basadas en soluciones de ecuaciones diofánticas

Una combinación de diversos resultados nos dice que existe un polinomio, con coeficientes enteros, de modo que el conjunto de números primos coincide con el conjunto de valores positivos de este polinomio, ya que las variables varían en el conjunto de enteros no negativos. Este polinomio también adquiere valores negativos, y un número primo puede aparecer repetidamente como un valor del polinomio.

3.7.1. Polinomios de Matijasevič (1970)

Matijasevič (1970) resuelve el décimo problema de Hilbert demostrando que cada conjunto computablemente numerable es diofántico. En particular, esto significa que el conjunto de los números primos se puede representar como las soluciones positivas de alguna ecuación diofántica. Proporciona una construcción para un polinomio de 24 variables y de grado 37 (véase Matijasevič, 1971). Adicionalmente, mejoró este resultado a 21 variables y grado 21. Más tarde, redujo el número de variables a 10 (véase Matijasevič, 1977). Esto puede reducirse aún más a 8 variables con el recíproco del Teorema de Wolstenholme (véase Vallata y Omodeo, 2015).

3.7.2. Polinomio de Jones, Sato, Wada y Wiens (1976)

Jones, Sato, Wada y Wiens (1976) proporcionan en su trabajo el primer polinomio explícito de grado 25 con 26 variables.

3.8. Funciones que son siempre primos

En esta sección se presentan funciones sencillas cuyo conjunto de valores es exactamente el conjunto de los números primos.

3.8.1. Fórmulas de Sun (2013)

Para $n = 1, 2, 3, \ldots$, Sun (2013) define la función $S(n)$ como el entero más pequeño $m > 1$ tal que los valores $2k(k-1) \pmod{m}$ para $k = 1, \ldots, n$ son distintos dos a dos; además, el autor muestra que $S(n)$ es el mínimo primo mayor que $2n - 2$ y, por lo tanto, el conjunto de valores de la función $S(n)$ es exactamente el conjunto de todos los números primos. Adicionalmente, por cada $n = 4, 5, \ldots$, demuestra que el mínimo primo $p > 3n$, con $p \equiv 1 \pmod{3}$, es justo el menor entero m tal que $18k(3k - 1)$, para $k = 1, \ldots, n$, son distintos dos a dos módulo m. Finalmente, para d Î $\{4, 6, 12\}$, y $n = 3, 4, \ldots,$ Sun muestra que el mínimo primo $p \geq 2n - 1$, con $p \equiv -1 \pmod{d}$, es el entero más pequeño m tal que los valores $(2k - 1)^d$, para $k = 1, \ldots, n,$ son distintos dos a dos módulo m.

3.9. Algoritmos que generan números primos

A primera vista, todas las fórmulas para los números primos son esencialmente algoritmos. Aparte de las fórmulas que presentamos aquí, existen otros muchos tipos diferentes de fórmulas (o algoritmos) para generar números primos, como por ejemplo, encontrando todos los primos en un intervalo, comprobando si un número es primo con alta probabilidad, empleando cribas para encontrar un rango de números primos, etc. Además, utilizando "máquinas", también es posible generar números primos basados en esos algoritmos.

3.9.1. Conway (1983)

Conway (véanse Guy, 1983, y Conway, 1983) desarrolla el algoritmo PRIMEGAME que genera números primos utilizando una sucesión de 14 números racionales:

$$\frac{17}{91}, \frac{78}{85}, \frac{19}{51}, \frac{23}{38}, \frac{29}{33}, \frac{77}{29}, \frac{95}{23}, \frac{77}{19}, \frac{1}{17}, \frac{11}{13}, \frac{13}{11}, \frac{15}{2}, \frac{1}{7}, 55.$$

Comenzando con 2, se encuentra el primer número en la máquina que, multiplicado por 2, da un número entero; entonces, para ese número entero encontramos el primer número en la máquina que genera otro número entero. Excepto por el 2 inicial, cada número que tiene un número entero para un logaritmo binario es un número primo, es decir, que las potencias de 2 con exponentes compuestos no aparecen.

3.10. Relaciones de recurrencia

Concluimos el último tipo de fórmula con aquélla que utiliza relaciones de recurrencia.

3.10.1. Sucesión de Rowland (2008)

Rowland (2008) –véase también Chamizo, Raboso y Ruiz-Cabello (2011)– demuestra que la sucesión definida por $a_k = a_{k-1} + \mathrm{mcd}(k, a_{k-1})$, con $a_1 = 7$ implica que $a_k - a_{k-1}$ es siempre 1 o un número primo. Para algunas generalizaciones de la sucesión de Rowland, consúltense Shevelev (2009a) y Shevelev (2009b).

4. REFERENCIAS

Alkauskas, G. y Dubickas, A. (2004). Prime and composite numbers as integer parts of powers. *Acta Mathematica Hungarica,* 105(3), 249–256.

Almansa, J. y Prieto, L. (1994). Nuevas fórmulas para el *n*-ésimo primo. *Lecturas Matemáticas,* 2(15), 227–231.

Ansari, A. R. (1951). On prime representing function. *Ganita,* 2, 81–82.

Assis, A. V. D. B. (2015). Formula to generate the sequence of prime numbers - explained. hal-01180298.

Atanassov, K. T. (2001). A new formula for the *n*th prime number. *Comptes Rendus de l'Academie Bulgare des Sciences,* 54(7), 5–6.

Atanassov, K. T. (2004). On a new formula for the *n*th prime number. *Notes on Number Theory and Discrete Mathematics,* 10(1), 24.

Atanassov, K.T. (2013). A formula for the *n*th prime number. *Comptes Rendus de l'Academie Bulgare des Sciences,* 66(4), 503–506.

Baker, R. C. y Harman, G. (1996). Primes of the form $\lfloor c^p \rfloor$. *Mathematische Zeitschrift,* 221, 73–81.

Bang, T. (1952). A function representing all prime numbers. *Nordisk Matematisk Tidsskrift,* 34, 117–118.

Chamizo, F., Raboso, D. y Ruiz-Cabello, S. (2011). On Rowland's sequence. *The Electronic Journal of Combinatorics,* 18(2), paper 10, 10 pp.

Conway, J. H. (1983). FRACTRAN: a simple universal programming language for arithmetic. En T. M. Cover y B. Gopinath (Eds.). *Open Problems in Communication and Computation*. Springer, New York, pp. 4–26.

Crandall, R. y Pomerance, C. (2005). *Prime Numbers: A Computational Perspective, Second Edition*. Springer, New York.

de Amo, E., Díaz Carrillo, M. y Fernández Sánchez, J. (2013). Demostraciones de la infinidad de los números primos. *Épsilon - Revista de Educación Matemática,* 30(2), nº84, 69–88.

Elliott, D. D. (1983). A prime-generating function. *The Two-Year College Mathematics Journal,* 14(1), 57.

Elsholtz, C. (2020). Unconditional prime-representing functions, following Mills. *American Mathematical Monthly,* 127(7), 639–642.

Erdős, P. (1932). Beweiseines Satzes von Tschebyschef. *Acta Scientiarium Mathematicarum* (*Szeged*)*,* 5, 194–198.

Euler, L. (1741). Theorematum quorundam ad numerous primos spectantium demonstratio. *Commentarii Academiae Scientiarum Petropolitanae,* 8, 141–146.

Ernvall, R. (1975). A formula for the least prime greater than a given integer. *Elemente der Mathematik,* 30, 13–14.

Gandhi, J. M. (1971). Formulae for the *n*th prime. *Proceedings of the Washington State University Conference on Number Theory*, Washington State University, Pullman, WA, pp. 96–107.

Gawlik, J. (1995). A function which distinguishes the prime numbers. *Mathematics Today (Southend-on-sea)* 33, 21.

Golomb, S.W. (1976). Formulas for the next prime. *Pacific Journal of Mathematics,* 63(2), 401–404.

Goodstein, R. L. y Wormell, C.P. (1967). Formulae for primes. *Mathematical Gazette,* 51(375), 35–38.

Guy, R. K. (1983). Conway's prime producing machine. *Mathematics Magazine,* 56(1), 26–33.

Guy, R. K. (2004). *Unsolved Problems in Number Theory. Third Edition*. Springer, New York.

Hacks, J. (1893). Über einige für Primzahlen charakteristische Beziehungen. *Acta Mathematica,* 17(1), 205.

Hardy, G. H. y Wright, E. M. (1979). *An Introduction to the Theory of Numbers. Fifth Edition*. Oxford University Press, London.

Harris, V. C. (1969). A test for primality. *Nordisk Matematisk Tidsskrift,* 17(3), 82.

Isenkrahe, C. (1900). Ueber eine Lösung der Aufgabe, jede Primzahlals Function der vorhergehenden Primzahlen durch einen geschlossenen Ausdruck darzustellen, *Matematische Annalen*, 53(1–2), 42–44.

Jones, J. P. (1975). Formula for the *n*th prime number. *Canadian Mathematical Bulletin,* 18(3), 433–434.

Jones, J. P., Sato, D., Wada, H. y Wiens, D. (1976). Diophantine representation of the set of prime numbers. *American Mathematical Monthly,* 83(6), 449–464.

Kaddoura, I. y Abdul-Nabi, S. (2012). On formula to compute primes and the *n*th prime. *Applied Mathematics Science,* 6(76), 3751–3757.

Keller, J. B. (2007). A recursion equation for prime numbers. arXiv:0711.3940 [math.NT].

Knopfmacher, J. (1979). Recursive formulae for prime numbers. *Archiv der Mathematik* (*Basel*)*,* 33(1), 144–149.

Kuipers, L. (1950). Prime-representing functions. *Indagationes Mathematicae,* 12, 57–58.

Lagrange, J. L. (1771). Demonstration d'un théorème nouveau concernant les nombres premiers. *Nouveaux Mémoires de l'Académie Royale des Sciences et Belles-Lettres* (*Berlin*) vol. 2, 125–137.

Lambert, J. H. (1771). *Anlage zur Architectonic, oder Theorie des Einfachen und Ersten in der philosophischen und mathematischen Erkenntniss* 2, p. 507, Riga.

Matijasevič, Y. (1970). Enumerable sets are Diophantine (en ruso). *Doklady Akademii Nauk SSSR,* 191, 279–282. Traducido al inglés en *Journal of Soviet Mathematics,* 11(2), 354–358, (1970).

Matijasevič, Y. (1971). Diophantine representation for the set of prime numbers (en ruso). *Doklady Akademii Nauk SSSR,* 196, 770–773. Traducido al inglés en *Journal of Soviet Mathematics,* 12(4), 249–254, (1971).

Matijasevič, Y. (1977). Primes are non-negative values of a polynomial in 10 variables (en ruso). *Zapiski Nauchnykh Seminarov LOMI,* 68, 62–82.

Matomäki, K. (2010). Prime representing functions. *Acta Mathematica Hungarica*, 128(4), 307–314.

Mills, W. H. (1947). A prime-representing function. *Bulletin of the American Mathematical Society,* 53(6), 604.

Moser, L. (1950). A prime representing function. *Mathematics Magazine,* 23(3), 163–164.

Narkiewicz, W. (2000). *The Development of Prime Number Theory: From Euclid to Hardy and Littlewood*. Springer, New York.

Niven, I. (1951). Functions which represent prime numbers. *Proceedings of the American Mathematical Society,* 2, 753–755.

Ortega Costa, J. (1950). La formulación explícita de la función pi(x) de los números primos. *Revista Matemática Hispanoamericana,* 10(2), 72–76.

Papadimitriou, M. (1975). A recursion formula for the sequence of odd primes. *The American Mathematical Monthly,* 82(3), 289.

Raitzin, C. (1979). The exact count of the prime numbers that do not exceed a given upper bound. *Rev. Ingr.,* 1, 37–43.

Regimbal, S. (1975). An explicit formula for the *k*th prime number. *Mathematics Magazine,* 48(4), 230–232.

Ribenboim, P. (2004). *The Little Book of Bigger Primes. Second Edition*. Springer, New York.

Riemann, B. (1859). Über die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse. *Monatsberichte der Berliner Akademie*, 1859.

Rowland, E. S. (2008). A natural prime-generating recurrence. *Journal of Integer Sequences,* 11(2), article 08.2.8, 13 pp.

Ruiz, S. M. (2000). The general term of the prime number sequence and the Smarandache prime function. *Smarandache Notions Journal,* 11, 59–61.

Ruiz, S. M. y Sondow, J. (2014). Formulas for $\pi(x)$ and the nth prime. *International Journal of Mathematics and Computer Science,* 9(2), 95–98.

Saouter, Y. (2017). A (doubly) elementary formula for prime numbers. *Mathematical Gazette,* 101(550), 93–95.

Scherk, H. F. (1833). Bemerkungen über die Bildung der Primzahlen aus einander. *Journal für die Reine und Angewandte Mathematik,* 10, 201–208.

Shevelev, V. (2009a). Generalizations of the Rowland theorem. arXiv:0911.3491v5 [math. NT].

Shevelev, V. (2009b). Infinite sets of generators of primes based on the Rowland idea and conjectures concerning twin primes. arXiv:0910.4676 [math.NT].

Sierpiński, W. (1952a). Sur une formule donnant tous les nombres premiers. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences Paris,* 235, 1078–1079.

Sierpiński, W. (1952b). Sur une propriété des nombres premiers. *Bulletin de la Société Royale des Sciences de Liège,* 21, 537–539.

Srinivasan, B. R. (1961). Formulae for the nth prime. *Journal of the Indian Mathematical Society,* 25, 33–39.

Sun, Z.-W. (2013). On functions taking only prime values. *Journal of Number Theory,* 133(8), 2794–2812.

Tee, G. J. (1972). Simple analytic expressions for primes and for prime pairs. *The New Zealand Mathematics Magazine,* 9, 32–44.

Teuffel, E. (1954). Eine Rekursions für Primzahlen. *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung,* 57(1), 34–36.

Tsangaris, P. G. (2004).Prime numbers and cyclotomy. *Acta Academiae Paedagogicae Agriensis, Sectio Mathematicae,* 31, 3–10.

Tsangaris, P. G. (2007). Formulae for the kth prime number. *Bulletin of the Greek Mathematical Society,* 53, 147–149.

Tsangaris, P. G. y Jones, J. P. (1992). An old theorem on the cgd and its application to primes. *Fibonacci Quarterly,* 30(3), 194–198.

Tschebycheff, P. L. (1852a). Sur la fonction qui détermine la totalité des nombres premiers inférieurs à une limite donnée. *Journal de Mathématiques,* 17, 341–365,

Tschebycheff, P. L. (1852b). Mémoire sur les nombres premiers. *Journal de Mathématiques,* 17, 366–390.

Vallata, L. y Omodeo, E. G. (2015). A Diophantine representation of Wolstenholme's pseudoprimality. En D. Ancona, M. Maratea y V. Mascardi (Eds.). *Proceedings of the 30th Italian Conference on Computational Logic* (*CILC 2015*). Génova, Italia, pp. 2–12.

Vassilev-Missana, M. (2001). Three formulae for n-th prime and six for n-th term for twin primes. *Notes on Number Theory and Discrete Mathematics,* 7(1), 15–20.

Vassilev-Missana, M. (2013). New explicit representations for the prime. *Notes on Number Theory and Discrte Mathematics,* 19(3), 24–27.

Willans, C. P. (1964). On formulae for the nth prime number. *Mathematical Gazette,* 84, 413–415.

Wright, E. M. (1951). A prime-representing function. *The American Mathematical Monthly,* 58, 616–618.