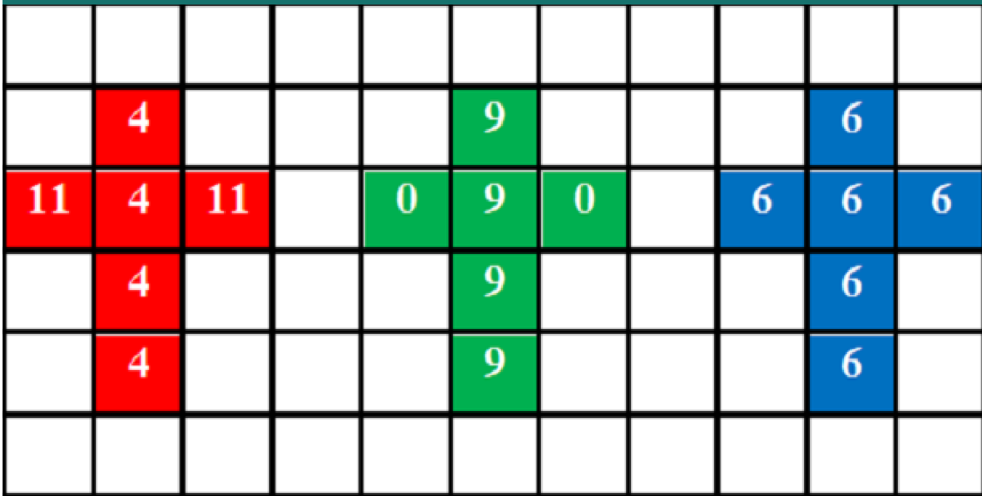
109

2021



epsilon

Revista de Educación Matemática

Editada por la S.A.E.M. "THALES"

epsilon 109

Revista de Educación Matemática

Página de la revista: http://thales.cica.es/epsilon
Revista: epsilon@thales.cica.es

Sociedad Andaluza de Educación Matemática "Thales"

Edita
Sociedad Andaluza de
Educación Matemática "Thales"
Centro Documentación "Thales"
Universidad de Cádiz
C.A.S.E.M.
Facultad de Ciencias
Departamento de Matemáticas
Campus del Río San Pedro
Torre Central, 4ª planta
11510 Puerto Real (Cádiz)
Teléfono: 956012833
Email: thales.matematicas@uca.es

Maquetación
referencias.maquetacion@gmail.com

Depósito Legal
SE-421-1984

ISSN
2340-714X

Período
2021
Suscripción
Anual

SUMARIO / CONTENTS

Épsilon - *Revista de Educación Matemática* *2021, nº 109, 7-29*

Factores asociados al rendimiento académico en un curso de introducción a la Estadística en Costa Rica

Rebeca Sura-Fonseca
Escuela de Sociología
Universidad de Costa Rica
Leiner Víquez-García
Luis Rojas-Torres
Instituto de Investigaciones Psicológicas,
Prueba de Habilidades Cuantitativas y
Escuela de Matemática
Universidad de Costa Rica

Resumen: *El presente estudio analiza la relación de seis variables (que han sido asociadas con el desempeño en cursos de matemática) con el rendimiento en un curso de introducción a la Estadística: razonamiento cuantitativo, inteligencia fluida, autoeficacia matemática, razonamiento viso-espacial, sexo y capital cultural-económico. Se analiza la información de las seis variables mencionadas y la nota obtenida en el curso Estadística Introductoria de 73 estudiantes de la carrera de Estadística de la Universidad de Costa Rica. El análisis de regresión lineal evidencia que las variables con mayor relación positiva con el rendimiento son el razonamiento cuantitativo y la autoeficacia. Por ello, se discute la posibilidad de implementar intervenciones con estudiantes de nuevo ingreso a la carrera de Estadística.*

Palabras clave: *rendimiento académico; Estadística; educación estadística; razonamiento cuantitativo; autoeficacia; inteligencia fluida; capital económico cultural; razonamiento visoespacial; género.*

Factors associated with student performance in an introductory Statistics course in Costa Rica

Abstract: *This study analyzes the relationship between six variables (which have been associated with performance in mathematics courses) and performance in a statistics course. These variables are quantitative reasoning, fluid intelligence, mathematical self-efficacy, visuospatial reasoning, gender, and cultural-economic capital. Data on the six variables and the numerical grade obtained in an Introductory Statistics course of 73 students of the Statistics career of the University of Costa Rica is analyzed. Linear regression analysis shows that the variables with the greatest positive relationship to performance are quantitative reasoning and self-efficacy. The possibility of implementing interventions with new students in the area of statistics is discussed.*
Keywords: *academic performance, Statistics, statistical education, quantitative reasoning, self-efficacy, fluid intelligence, cultural capital, economic capital, visuospatial reasoning, gender.*

1. INTRODUCCIÓN

La Estadística es un área de la matemática que en los últimos años ha tomado un papel relevante en todas áreas del quehacer humano como el desarrollo tecnológico, la salud, la economía y la política. En la actualidad, los tomadores de decisiones utilizan el análisis de las estadísticas como la principal fuente de insumos para realizar su trabajo, dado que la estadística permite acceder a interpretaciones objetivas de grandes cantidades de información (Barreto-Villanueva, 2012; Pullinger, 2013; Vásquez 2020).

Ante la creciente demanda de profesionales en Estadística, las instituciones formadoras de profesionales en estadística se enfrentan al reto de informar a la comunidad interesada en la carrera cuáles son las habilidades deseadas para estudiar la carrera de forma eficiente. Por otro lado, las instituciones universitarias están explorando elementos pedagógicos, directrices y recursos para que los estudiantes de los cursos de Estadística y, en particular, los que se están formando para ser profesionales en esa disciplina, vean reforzadas competencias requeridas para desempeñarse exitosamente en sus cursos y en su desempeño posterior como profesionales (Blanco, 2018; Ramos, 2019; Martínez-Castro y Zapata-Cardona, 2020).

Con base en lo anterior, el presente artículo da cuenta de algunas competencias asociadas con un indicador de éxito en la carrera de Estadística: el rendimiento en un curso introductorio de estadística. Garbanzo (2007) describe el rendimiento académico como una suma de factores que actúan sobre la persona que aprende y lo define como un valor atribuido al logro de la persona estudiante en las tareas académicas y que permite certificar dicho logro mediante las calificaciones obtenidas. Para esta autora, las notas representarán un indicador preciso y accesible para el rendimiento académico, si se asume que, en efecto, reflejan el logro académico en los diferentes componentes del aprendizaje.

Ahora bien, la cantidad de competencias que se pueden considerar en un análisis de rendimiento académico es muy extensa (Garbanzo, 2007; Montero, Villalobos y Valverde, 2007; Miñano y Castejón, 2011; Elvira-Valdez y Pujol, 2014; Vargas y Montero, 2016). En este trabajo, se pretende dar cuenta de analizar la relación entre diversas variables cognitivas y sociales de los estudiantes de la carrera de Estadística con el desempeño en el rendimiento en un curso introductorio de estadística de dicha profesión. Específicamente se van a tomar en cuenta el razonamiento cuantitativo, la inteligencia fluida, la autoeficacia y el razonamiento espacial. Adicionalmente a las variables ya señaladas, se estudiará si dos factores que han sido asociados con diferencias en el rendimiento en matemática, se relacionan con diferencias en el rendimiento en la estadística, a saber, el sexo y el capital cultural y económico. Lo anterior se realiza mediante un análisis cuantitativo descriptivo y exploratorio.

La selección de estas variables se justifica en el hecho de que, como se expondrá a continuación, existen múltiples estudios que reportan altos niveles de correlación entre cada una de dichas variables con el rendimiento académico en matemática, por tanto, parece razonable suponer que esto se replica en el área de la estadística. No obstante, hay que someter esta suposición a investigación, ya que se ha argumentado que las similitudes y las diferencias entre educación matemática y educación estadística, demandan un análisis cuidadoso que tome en cuenta las interacciones entre ambas disciplinas antes de establecer generalizaciones de resultados de una de ellas hacia la otra, particularmente cuando se hacen especulaciones en las cercanías de los límites entre ambas (Del Pino y Estrella, 2012; Groth, 2015).

2. MARCO CONCEPTUAL

2.1 Razonamiento Cuantitativo

Uno de los factores que ha sido asociado al rendimiento académico en matemática y que se busca explorar en el presente estudio es el *razonamiento cuantitativo* (RC). Dwyer, Gallagher, Levin y Morley (2003) definen el RC como la habilidad de analizar información cuantitativa, tomando en cuenta como parte de ese análisis la determinación de cuáles destrezas y procedimientos pueden ser aplicados a un problema particular para llegar a su resolución. Dichos autores también destacan que el RC es fundamentalmente diferente al dominio de contenidos matemáticos, ya que el conocimiento del contenido es necesario (aunque no suficiente) para la resolución de problemas que requieren (o que busquen medir) el RC.

Rojas, Mora y Ordóñez (2018) encuentran evidencias que respaldan la hipótesis de que el razonamiento cuantitativo (medido con una prueba asociada a este constructo) es un predictor relevante del rendimiento en cursos introductorios de matemática en carreras de Ciencia, Tecnología, Ingeniería y Matemática (STEM por sus siglas en inglés); controlando otras variables relevantes para la predicción del mismo, tales como tipo de colegio de procedencia (público o privado), sexo, prueba de admisión a la universidad, promedio de cursos de matemática en secundaria. Los resultados de dicho estudio evidenciaron que en todos los modelos finales, la variable de razonamiento cuantitativo fue la más importante como predictora del rendimiento académico en los cursos introductorios de matemática, siendo que a mayor nivel de razonamiento cuantitativo hay un mejor rendimiento en los cursos.

Diferentes investigaciones han identificado una correlación positiva entre el razonamiento cuantitativo y el rendimiento académico en diferentes cursos universitarios que revisten un perfil cuantitativo o que, al menos, tienen un componente importante de contenido matemático (Johnson y Kuennen, 2006; Veenstra Dey y Herrin, 2009; Guglietta y Delgado, 2010; White y Sivitanides, 2003; Colorado y Corcino, 2014; Islam y Al-Ghassani, 2015). Algunos ejemplos específicos de cursos universitarios en los que se ha puesto en evidencia la relación a la que se ha hecho referencia son: (i) curso introductorio de contabilidad (Yunker, Yunker y Krull, 2003); (ii) curso introductorio de Estadística (Johnson y Kuennen, 2006); (iii) cursos introductorios de Negocios y Economía (White y Sivitanides, 2003) ; y, (iv) cursos introductorios de matemática universitaria en carreras como Física, Meteorología, Matemática, Ciencias y Farmacia de la Universidad de Costa Rica (Rojas, 2014).

2.2. Autoeficacia

La *autoeficacia* en términos generales se refiere a la convicción que una persona tiene de poder llevar a cabo exitosamente las tareas requeridas ya sea para obtener ciertos resultados o para lidiar con situaciones particularmente amenazantes a través del esfuerzo persistente (Bandura, 1977). La autoeficacia conlleva además la creencia en la capacidad propia de un individuo para la movilización de la motivación y los recursos cognitivos así como el encauzamiento y ejecución de las acciones necesarias para tomar el control sobre eventos dados que potencialmente representan una amenaza (Ozer y Bandura, 1988). Es esta creencia la que permite explicar por qué se asocia un nivel alto de autoeficacia con un mejor desempeño ante eventos específicos. Una muestra de eventos en los que la autoeficacia podría influenciar el desempeño, la proveen los contextos educativos: la participación en una clase, la realización de una prueba estandarizada, el rendimiento en un curso, etc.

De hecho, Schunk y DiBenedetto (2016) hacen referencia a la autoeficacia en contextos educativos. Señalan que la misma puede influir positivamente en los estudiantes en lo que se refiere a la selección de actividades, esfuerzo invertido, persistencia, interés y niveles de desempeño. Honicke y Broadbent (2016) indican que en ámbitos académicos se define la *autoeficacia académica* como una referencia a la autoeficacia de quien aprende. Estos autores hacen un recuento de estudios que relacionan positivamente la autoeficacia y el desempeño académico en diferentes ambientes y etapas de aprendizaje (primaria, secundaria, universitaria), así como en diferentes niveles de especificidad (éxito al completar tareas propias de una asignatura, obtención de una calificación específica en una materia o la aprobación de un curso universitario). Estudios meta-analíticos aportan evidencia de una relación moderada positiva entre la autoeficacia académica y el desempeño académico de los estudiantes (Robbins, Lauver, Le, Davis, Langley y Carlstrom, 2004; Richardson, Bond y Abraham, 2012; Honicke y Broadbent, 2016).

Ahora bien, en el caso específico de la educación estadística se han llevado a cabo investigaciones relacionadas con una categoría de la autoeficacia que ha sido denominada *autoeficacia estadística* y que se define como la confianza de las personas en su capacidad para completar tareas específicas relacionadas con la estadística. No obstante, los resultados con respecto a la relación entre autoeficacia estadística y desempeño en esa disciplina han sido sorpresivamente disímiles. Una asociación positiva entre la autoeficacia estadística de los estudiantes en un curso de Estadística y su rendimiento académico en el mismo ha sido reportada en algunos estudios (Finney y Schraw, 2003; Bandalos et al., 2003), mientras que algunas investigaciones obtienen resultados diferentes. Por ejemplo, Walker y Brakke (2017) reportan como parte de sus hallazgos la ausencia de una asociación estadísticamente significativa entre la autoeficacia en estadística de los estudiantes de un curso de Estadística y su desempeño en ese curso.

Scheider (2011) tampoco llega a encontrar una relación significativa entre autoeficacia estadística y desempeño en un curso de estadísticas y, de hecho, uno de los dos instrumentos que utilizó para medir la autoeficacia mostró una correlación negativa con el desempeño, sin llegar a alcanzar significancia. En este último estudio el autor atribuye la ausencia de la esperable correlación positiva significativa entre esas variables al hecho de que la medición de la autoeficacia estadística se hizo al inicio de un semestre, mientras que la medición del desempeño se efectuó mediante los exámenes del curso, uno a mediados y otro a finales de semestre. Esta explicación la sustenta en Bandura (1997) quien sugiere que cuando las mediciones de la autoeficacia y del desempeño tienen mayor proximidad temporal la relación entre ambas será más precisa, lo que desaconseja diferencias prolongadas en la toma de esas medidas en estudios que involucren la autoeficacia. Cabe destacar que, además de la disparidad temporal, Bandura (1997) hace referencia a varias posibles explicaciones para la discordancia entre autoeficacia y desempeño, tales como deficiencias en las mediciones de ambas variables, ambigüedad o desconocimiento con respecto a lo que la tarea de desempeño requerirá, objetivos poco definidos, poca información del desempeño propio durante el desarrollo de la tarea, entre otras.

2.3. Razonamiento visoespacial

En el contexto de una taxonomía de habilidades psicológicas, las habilidades relacionadas con el razonamiento visoespacial han sido clasificadas por McGrew (2009) en una categoría general que denomina *habilidades de procesamiento visual*. Esta categoría hace referencia a la habilidad de generar, almacenar, recuperar y transformar imágenes y sensaciones visuales. Según la descripción dada por este autor, estas habilidades generalmente se miden mediante tareas (en las que aparecen estímulos geométricos o figurales) que requieren la percepción y transformación de imágenes o formas visuales o tareas que requieren mantener la orientación espacial en relación con objetos que pueden cambiar o moverse en el espacio. En esta categorización se detallan como habilidades específicas del procesamiento visual las siguientes: visualización, establecimiento de relaciones espaciales, escaneo espacial, integración perceptual de series, estimación de longitudes, identificación de ilusiones perceptuales, alternancias perceptivas, imágenes.

En el estudio de los factores que pueden incidir en el desempeño en cursos de Matemática o, particularmente de Estadística, el razonamiento visoespacial se ha vuelto relevante, pues como señala Arcavi (2003) la visualización (entendida como capacidad, proceso y producto de la creación, interpretación, uso y reflexión sobre retratos, imágenes, diagramas, en nuestras mentes, en el papel o con herramientas tecnológicas) tiene como propósito la representación y comunicación de información, el pensamiento y desarrollo de ideas previamente desconocidas y comprensión avanzada. En ese sentido este autor afirma de esta habilidad específica que permite *ver lo invisible en los datos*, en alusión a las abstracciones que no son visibles literalmente y, de hecho, Arcavi da como instancia de este tipo de entes *invisibles* el caso de las matemáticas (o disciplinas aliadas, por ejemplo, manejo de datos o estadísticas) puesto que manipulan objetos y entidades muy diferentes de cualquier fenómeno físico y, por tanto, requieren la habilidad de visualización en diferentes formas y niveles.

Godino et al. (2012), también se refieren a la importancia del papel de la visualización en la actividad de la producción y comunicación matemática, en la formación de conceptos, en los procedimientos y en los modos de justificación de las proposiciones matemáticas. Ellos concluyen que en la configuración de objetos y procesos asociados a la matemática, el componente analítico (fundamental en etapas de generalización y justificación de las soluciones), se apoyará en un componente visual. Para estos autores, ambos componentes se apoyan mutuamente en el proceso de solución de tareas matemática. En ese sentido el grado de visualización utilizado durante la ejecución de una tarea será clave en la comprensión inicial de la naturaleza de la misma y en la elaboración de conjeturas.

Algunos estudios han explorado las relaciones entre las habilidades visoespaciales y el desempeño en matemática. Por ejemplo, en un estudio longitudinal Geer, Quinn y Ganley (2019) obtienen resultados que sugieren una relación positiva entre habilidades espaciales y rendimiento en matemática en alumnos en edad escolar. Otra investigación con estudiantes también en etapa escolar (Lowrie, Logan, y Ramful, 2017) expone a un grupo de estudiantes a un entrenamiento en habilidades visoespaciales y lo comparan con un grupo que no ha recibido el entrenamiento (control) y obtienen como resultado un mejor desempeño en el grupo de sujetos que fueron parte de la intervención diseñada. También se ha investigado la relación entre razonamiento visoespacial y desempeño en matemática en etapas de la vida adulta, en aspectos que pueden incidir incluso en la selección y el desempeño en cursos o carreras. Por ejemplo, Wai, Lubinski y Benbow (2009) han llevado a cabo un estudio longitudinal que aporta evidencia del papel de la habilidad visoespacial como un predictor del éxito académico en carreras STEM; Shea, Lubinski y Benbow (2001) también llevan a cabo un estudio longitudinal que revela el papel como predictor de la habilidad espacial con respecto al perfil educativo y vocacional resultante en individuos intelectualmente talentosos, encontrando que jóvenes intelectualmente talentosos que además están dotados con mayores habilidades espaciales, tienen una mayor probabilidad de encontrarse en su edad adulta en campos relacionados con la matemática, tales como las ingenierías o las ciencias de la computación.

2.4. Inteligencia fluida

Para exponer el concepto de la *inteligencia fluida* es necesario delimitar el concepto y compararlo con su contraparte la *inteligencia cristalizada*. La inteligencia fluida (*Gf*) se relaciona con el uso de procesos mentales para resolver problemas novedosos que no pueden ser resueltos por simple memorización o conductas rutinarias; mientras que la inteligencia cristalizada (*Gc*) hace referencia a desempeños cognitivos para los cuales es necesaria la utilización de conocimientos aprendidos o o habilidades adquiridos previamente. De ahí que se considere que *Gc* se fundamenta en la riqueza del conocimiento adquirido, pero es *Gf* la que provee la adquisición de las habilidades y conocimientos necesarios para la *Gc*, extendiéndose por lo tanto la definición de la *Gf* a la habilidad para aprender nueva información y, por tanto, adaptarse a situaciones novedosas (Cattell, 1963; Cattell, 1987; McGrew, 2009; Primi, Ferrão y Almeida, 2010).

La inteligencia fluida ha sido identificada como una variable que se asocia positivamente con el desempeño matemático en diferentes estudios. Por ejemplo, Taub, Floyd, Keith y McGrew (2008) reportan evidencia del efecto directo y estadísticamente significativo de la *Gf* sobre variables de desempeño matemático; Primi et al. (2010) en un estudio longitudinal con adolescentes durante dos años escolares, exploran la asociación entre *Gf* y el desempeño en matemática, no sólo mediante la comparación entre individuos, sino también por el análisis de la mejora del desempeño de cada individuo en su desempeño a lo largo del período, con lo que evidencian que *Gf* es capaz de predecir no sólo el desempeño inicial en tareas matemáticas, sino la mejora en esas tareas; Zhang y Ziegler (2015) reportan el papel de *Gf* como predictor de las notas en Matemática en una muestra de estudiantes de sétimo a onceavo grado en China ; Peng., Wang, Wang, y Lin (2019) a partir de un meta-análisis reportan que la relación positiva entre *Gf* y el desempeño en matemática está influenciada por el tipo de tareas de *Gf*, las habilidades matemática y la edad.

2.5. Capital cultural y económico

Bourdieu (2001) en su teoría del capital hace referencia a tres tipos de capital, a saber, (i) el *capital económico*, transformable directa e inmediatamente en dinero; (ii) el *capital social*, que corresponde a la totalidad de los recursos basados en la pertenencia del individuo a un grupo; y finalmente, (iii) el *capital cultural*, que puede ser categorizado según sea *incorporado* (habilidades, capacidades, destrezas interiorizadas en el seno de la familia o el ámbito escolar), *objetivado* (bienes culturales materialmente transferibles por su soporte físico como por ejemplo escritos, pinturas, instrumentos o monumentos, pero cuya verdadera apropiación es intransferible y se da por medio del capital cultural interiorizado) o *institucionalizado* (objetivación del capital cultural incorporado en la forma de títulos académicos por ejemplo).

Álvarez y Martínez (2016), retomando la teoría del capital de Bourdieu, describen dos formas en que el capital económico y cultural repercute en mayores rendimientos educativos. Una de ellas explica las diferencias en desempeño a partir de las diferencias en la distribución de los recursos económicos de los hogares (capital económico) y de los costos de oportunidad para el estudio, pues familias con mayores limitaciones económicas tendrán menos posibilidad de costear a plenitud la educación de sus hijos, restringiendo sus oportunidades académicas. La otra teoría señala que las diferencias en los resultados educativos se relacionan con el origen sociocultural que los niños heredan de sus familias en aspectos tales como, su forma de pensar, sentir y actuar (capital cultural); es decir, aquellos estilos, gustos, hábitos y disposiciones culturales transmitidos a los niños en el seno de su familia.

Algunos estudios han aportado evidencia de una relación positiva entre elementos (generales y específicos) del capital cultural y económico sobre el rendimiento académico de los individuos. Por ejemplo, Lozano y Trinidad (2019) llevan a cabo un estudio que buscaba analizar el papel del capital cultural como predictor del rendimiento académico en las pruebas del Programa para la Evaluación Internacional de Alumnos (PISA por sus siglas en Inglés) de la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económicos (OCDE), creado en 1997 y que busca medir los resultados en los sistemas educativos de los países asociados en cuanto al rendimiento de los estudiantes dentro de un marco común acordado internacionalmente, en áreas de lectura, ciencias y matemática (OCDE, 2017; OCDE 2018). Volviendo al estudio que Lozano y Trinidad (2019) llevan a cabo a partir de estas pruebas (llamadas comúnmente pruebas PISA), se analizan nueve variables propias del capital cultural y dos adicionales que corresponden a índices generados por la misma prueba (el índice social, económico, cultural y posesiones culturales en el hogar) y, para su población de estudio, llegan a concluir que la variable de *cantidad de libros en el hogar*, es la mejor predictora para rendimiento académico.

Con respecto a aspectos más relacionados con capital económico, Sirin (2005) lleva a cabo un meta-análisis que incluía los reportes de investigaciones que exploraban la relación entre rendimiento académico y el status socio-económico de los estudiantes, logrando evidenciar que la posición de la familia en la estructura socio-económica es uno de correlatos más fuertes en el desempeño académico. En otro estudio también meta-analítico, Peng et al (2019) obtienen resultados que sugieren papel moderador del estatus socio-económico de los estudiantes en la relación entre el desempeño en tareas de matemática y de lectura con la inteligencia fluida *Gf* y sugieren que esa moderación se ve influenciada por la edad, de forma que la relación entre *Gf* y desempeño para los individuos más jóvenes, es más alta en aquellos que tienen un contexto socio económico relativamente más alto.

2.6. Sexo

Las diferencias en el rendimiento en matemáticas asociadas al sexo son objeto de interés desde hace varias décadas. Como señalan Aguiar, Gutiérrez, Lara y Villalpando (2011), todavía a finales del siglo XIX la educación que recibían hombres y mujeres no era la misma, debido principalmente al rol que se asumía que hombres y mujeres debían ocupar en la sociedad y, aunque en la actualidad ya se ha logrado una mayor cercanía a la equidad de género en cuanto al acceso a una misma educación, se mantienen varias prácticas que generan una inequidad educativa en contra de las mujeres, lo cual provoca diferencias por género tanto en los puntajes obtenidos en pruebas con contenido matemático, así como en el acceso a carreras universitarias científico-tecnológicas. Jacobs (2005) señala que, aunque la brecha por género en el acceso a esas carreras ha disminuido, aún sigue existiendo y no se debe a diferencias en cuanto a competencias matemáticas sino a diferencias por género en variables sociopsicológicas tales como, autoconcepto de la propia habilidad matemática, identidad social, valores, interés por ciertos cursos o tópicos en ellos e incluso la influencia parental.

Durante varias décadas estas diferencias han sido objeto de estudio a nivel internacional. Por ejemplo, en Latinoamérica algunas investigaciones han encontrado que en el caso de matemática los hombres presentan un mejor desempeño que las mujeres e incluso se ha encontrado alguna interacción significativa de variables de género y nivel socio-económico sobre el rendimiento en matemática, que evidencia que la brecha entre géneros es mayor en estudiantes con un menor nivel socioeconómico; es decir, las mujeres se ven aún más afectadas si presentan un nivel socioeconómico bajo (Cervini, Dari y Quiroz, 2015; Radovic, 2018). Otra fuente de información muy valiosa con respecto a las diferencias por género en el rendimiento académico son las ya mencionadas pruebas PISA. Por ejemplo, OCDE (2019) encontró que en los 67 países o economías participantes en en PISA 2015, los hombres tuvieron un mejor desempeño que las mujeres en el área de matemática.

Un estudio interesante relacionado con las diferencias por género en el desempeño académico en cursos de estadística lo llevaron a cabo Cendales, Vargas-Trujillo y Barbosa (2013), en el cual a partir de variables auto-perceptivas (autoconcepto, autoeficacia) y actitudinales hacia la estadística, generan dos perfiles (bajo y alto) y determina que las diferencias por sexo en el rendimiento académico en estadística depende del perfil autoperceptivo/actitudinal, ya que en el grupo con perfil bajo los hombres obtienen mejores calificaciones que las mujeres, mientras que el grupo con perfil alto, son las mujeres las que obtienen mejores puntuaciones.

3. ESTRATEGIA METODOLÓGICA

En esta sección se describen los componentes de la estrategia metodológica empleada para cumplir con los objetivos planteados en el presente documento: los participantes del estudio realizado, los instrumentos de medición utilizados para aproximarse a las variables de interés, el método de aplicación de dichas herramientas y finalmente, el análisis de datos propuesto.

3.1. Participantes

En el estudio participaron 73 personas (25 hombres y 48 mujeres). Estas personas eran estudiantes del curso de Estadística Introductoria de la carrera de Estadística de la Universidad de Costa Rica (UCR).

3.2. Variables e instrumentos de medición empleados para construirlas

Estadística introductoria: Esta variable es la nota obtenida en el curso con el mismo nombre. Esta nota está compuesta por tres evaluaciones, donde cada una de ellas equivale a un 33,3% de la calificación final. Los objetivos de este curso son dar una visión global de la Estadística presentando el lugar que ocupa en la investigación científica y sus múltiples aplicaciones; transmitir la importancia de la calidad de los datos para que reflejen correctamente la realidad, presentando los métodos y problemas existentes para la recolección de información, así como enseñar a los estudiantes a presentar las estadísticas descriptivas utilizando técnicas básicas de exploración, descripción y resumen de datos.

Razonamiento Cuantitativo: Esta variable se midió a través de la Prueba de Habilidades Cuantitativas (PHC) aplicada en la UCR. Esta prueba está compuesta de 40 ítems de selección única con 4 opciones de respuesta y las puntuaciones se ubican en el rango de 0 a 40. Las personas que obtienen entre 17 y 23 puntos en la PHC se consideran que tienen un nivel medio de razonamiento cuantitativo (Rojas y Ordóñez, 2019). La versión utilizada disponía de 1 hora y 45 minutos para su resolución y su alfa de Cronbach de la PHC fue de .88.

Visualización espacial: Se utilizó el Test de Visualización Espacial (Prieto, Carro, Orgaz y Pulido, 1993). Un elemento relevante sobre el test de visualización espacial es que su versión original contiene 26 ítems y su tiempo de aplicación es de 40 minutos (Prieto et al., 1993). En este estudio se requirió aplicar el test en 20 minutos, debido a esto se decidió aplicar una versión reducida de la prueba que consta de 14 ítems (los 13 ítems impares más el ítem 26). Esta solución toma en cuenta que los ítems están ordenados por dificultad creciente, y según la ecuación de la profecía de Spearman-Brown, a la selección de preguntas realizada se le pronostica una confiabilidad alta de 0,85[1]. La versión final de la escala presentó un alfa de Cronbach de 0,65 y la varianza explicada por la escala en el primer factor fue de 15,4%.

Inteligencia fluida: Para la medición de este constructo se utilizaron los test uno y tres de la Prueba de Cattell (Cattell y Cattell, 2001). En estos test se presentan reactivos de tipo no verbal en los que se requieren establecer relaciones entre formas y figuras abstractas para su resolución (Cattell, Cattell y Weiss, 2017). Esta versión de la Prueba de Cattell contó con 26 ítems, con seis opciones de respuesta en cada uno de estos. Al finalizar el análisis psicométrico se conservaron 19 ítems, los cuales presentaron un alfa de Cronbach de 0,61, donde en el análisis factorial el primer factor explicó un 8% de la varianza. Esto implica que el puntaje más alto que podía obtener los estudiantes en esta escala era de 19 y el valor mínimo 0.

Capital cultural y económico: Para cuantificar el capital cultural-económico se utilizó la escala de capital económico y capital cultural de las Pruebas de PISA, que en total cuenta con 24 ítems, 16 para capital cultural y 8 para capital económico. Los primeros

1. La fórmula de predicción de Spearman-Brown, también conocida como fórmula o ecuación de profecía Spearman-Brown, es una fórmula que relaciona la fiabilidad psicométrica con el tiempo de duración de la aplicación de la prueba. Es decir, la fiabilidad de una prueba después de cambiar la longitud de la misma (Allen y Yen, 1979).

ítems son dicotómicos (donde se responde sí o no a la tenencia de ciertos bienes), mientras que los segundo presentaban cuatro opciones de respuesta, donde la primera permitía reportar que en el hogar no existía cierto objeto (por ejemplo, un televisor), y la cuarta opción permitía reportar la tenencia de tres o más unidades del objeto en cuestión. El alfa de Cronbach tomó un valor de 0,83, mientras que el análisis factorial el primer factor explicó un 27,4% de la varianza. La puntuación de la escala se realizó por medio de la suma total de los ítems y, por lo tanto, el valor mínimo que puede tomar el puntaje de capital es 0, mientras que el máximo es 40.

Autoeficacia matemática: Esta variable se aproximó mediante una adaptación al español para Costa Rica de la escala de autoeficacia matemática (Moreira, Smith, Montero y Zamora, 2017), la cual forma parte del conjunto de escalas que se encuentran en Modified Fennema-Sherman Attitude Scales de Doepken, Lawsky y Padwa (2003). Los 12 ítems de ese instrumento utilizan el formato de una escala Likert de cinco opciones que van desde "completamente en desacuerdo" a "completamente de acuerdo". Al realizar el análisis psicométrico, se eliminó un ítem, con lo cual el alfa de Cronbach tomó un valor de 0,85, y el primer factor explicó el 35% de la varianza. De esta forma, el puntaje máximo que podían tener los estudiantes en autoeficacia matemática era de 55 y el valor mínimo 5.

Sobre la calidad de estas fuentes de datos, cabe destacar que todos estos instrumentos han sido validados previamente, por lo cual aportan información de alta calidad psicométrica para la medición de los constructos de interés. Además, no se registraron valores perdidos en las respuestas de los ítems.

3.3. Aplicación de los instrumentos

Durante el primer ciclo lectivo del año 2017, se llevó a cabo la aplicación de un cuestionario auto administrado, a las personas que estaban cursando Estadística Introductoria 1 (curso que se ubica en el primer año de la malla curricular del Bachillerato en Estadística). En dicho periodo académico se abrieron cinco grupos del curso de interés y se consiguió obtener la respuesta de 73 de los estudiantes matriculados, los cuales habían realizado la PHC en el 2016 o el 2015. Por tanto, es un sondeo, debido a que no se utilizaron métodos probabilísticos para la selección de la muestra. La recolección de los datos se realizó en sesenta minutos de una de las sesiones de clase del curso mencionado. Cabe destacar que las personas investigadoras no eran docentes de ninguno de los cursos en los que se realizó la recolección de datos.

Las personas que estuvieron de acuerdo en participar de la investigación completaron la prueba de inteligencia fluida y la de razonamiento visoespacial, junto con las escalas de autoeficacia matemática y factores asociados al capital cultural y económico. Posterior a esto, los datos recolectados se concatenaron con los resultados de la PHC descrita previamente, así como la nota final obtenida en el curso mencionado.

3.4. Análisis de datos

En primer lugar, se realizó un análisis psicométrico de las escalas y las pruebas que se emplearon, para seleccionar los reactivos que conformaron las medidas. Para llevar a cabo el análisis de confiabilidad y validez de las escalas, se realizaron dos análisis: por un lado, la estimación de la validez del constructo de cada instrumento se estudió a través de un análisis factorial de componentes principales con rotación PROMAX, y, por otro lado, se estimó la confiabilidad de cada escala utilizando el Alfa de Cronbach.

En el caso del análisis de la validez del constructo se utilizaron dos criterios psicométricos complementarios para establecer el número de factores: (1) un porcentaje de varianza explicada de 10% como mínimo para cada factor, y, (2) confirmación de los factores mediante el comportamiento del gráfico de sedimentación y la aparición del "codo" en el mismo. Por otro lado, en el caso del análisis de confiabilidad, se procuró que el Alfa de Cronbach tomara valores de por lo menos 0,60 y se valora la posibilidad de eliminar ítems si se daba un mejoramiento del Alfa de Cronbach.

Una vez seleccionados los reactivos utilizados en cada medida se realizó un análisis descriptivo de los datos. En esta etapa se estudiaron las medidas de tendencia central de cada una de las seis variables empleadas en el análisis y las correlaciones entre estas variables para estudiar la asociación entre las mismas y particularmente la asociación de las variables con el rendimiento académico en estadística.

En lo que respecta al análisis de asociación de las variables de interés con el rendimiento en Estadística Introductoria, se realizó una prueba de diferencias de medias de la nota de Estadística, según los niveles bajos y altos de cada variable. Las personas con valores bajos en una variable fueron aquellas que tuvieron valores en el primer tercil de esta, mientras que las personas con valores en el tercer tercil se categorizaron como de valores altos.

Además, para determinar las variables más importantes en la predicción del rendimiento académico del curso indicado, se estimó un modelo de regresión lineal con el método de máxima verosimilitud cuya variable respuesta fueron las notas del curso en cuestión y las variables independientes a las variables: razonamiento cuantitativo, inteligencia fluida, razonamiento visoespacial, autoeficacia, capital económico-cultural, grupo y sexo. Como parte del análisis de regresión se realizaron los diagnósticos del modelo; es decir: el gráfico Q-Q para estudiar la normalidad de los residuos, el gráfico de residuos contra valores predichos para analizar la homocedasticidad y los factores de inflación de varianza para evaluar la multicolinealidad entre las variables independientes. A partir de estos análisis, se concluyó que se cumplieron los supuestos del modelo de regresión lineal.

4. RESULTADOS

En la tabla 1 se presentan los estadísticos descriptivos de los datos utilizados en el análisis principal. La variable dependiente de interés presentó un promedio de 5.8, lo cual es un valor inferior al mínimo requerido para pasar el curso (7). Por su parte, la variable de habilidades cuantitativas presentó un promedio de 15, el cual se asocia a una habilidad media-baja (Rojas y Ordóñez, 2019).

Tabla 1. Estadísticos descriptivos de las variables del análisis

Variable	Puntaje que puede tomar la escala	Promedio	Desviación estándar	Mínimo	Mediana	Máximo	Rango
Nota Estadística Introductoria I	De 0 a 10	5,8	1,9	2,0	6,0	9,5	7,5
Inteligencia fluida	De 0 a 19	11,3	2,8	4,0	11,0	18,0	14,0
Visualización Espacial	De 0 a 14	2,7	2,2	0,0	2,0	12,0	12,0
Razonamiento cuantitativo	De 0 a 40	15,0	5,5	7,0	14,0	34,0	27,0
Capital económico y cultural	De 0 a 40	20,7	6,5	5,0	22,0	32,0	27,0
Autoeficacia Matemática	De 5 a 55	36,4	4,4	28,0	36,0	46,0	18,0

Fuente: Elaboración propia.

En la figura 1 de los anexos se muestra la matriz de correlaciones de las variables. En particular, se obtuvo que la correlación más alta en valor absoluto de Estadística Introductoria fue con el razonamiento cuantitativo (.37), luego, con autoeficacia matemática (-.29) e inteligencia fluida (.26); las más bajas fueron con visualización espacial y capital económico y cultural (.19 y .18, respectivamente).

En la tabla 2 se presentan los resultados de las pruebas de medias de Estadística Introductoria, en los grupos definidos por los terciles extremos de cada variable de interés. Las comparaciones en las que no hubo diferencias significativas al 5% fue en las realizadas con los grupos definidos por inteligencia fluida, visualización espacial y capital económico-cultural. En cambio, en los grupos definidos por las variables razonamiento cuantitativo y autoeficacia matemática si se observaron diferencias en la nota de Estadística Introductoria. Se observó que las personas que presentaron niveles altos de razonamiento cuantitativo obtuvieron mayores promedios en Estadística Introductoria que las personas del primer tercil; por otro lado, las personas con niveles altos de autoeficacia presentaron promedios más bajos de Estadística Introductoria que las del primer tercil.

Tabla 2. Pruebas de diferencias de medias del curso Estadística Introductoria I entre el primer y tercer tercil de las variables de interés

Variable	Media primer tercil	Media tercer tercil	Valor t	Valor p
Inteligencia fluida	5,64	6,30	-1,28	0,21
Visualización Espacial	5,86	6,10	-0,44	0,66
Razonamiento cuantitativo	5,24	6,66	173,5	0,01
Capital económico y cultural	5,44	6,36	-1,78	0,08
Autoeficacia Matemática	6,10	4,74	2,84	0,01

1/ La prueba de diferencia de medias utilizada es la t de Student. Por tanto, antes de realizar la prueba se probó que los grupos de datos de cada tercil tuvieran una distribución normal y que las varianzas de los grupos fueran iguales, lo anterior mediante la prueba de normalidad de Shapiro-Wilk y la prueba F de comparación de varianzas. Cabe destacar, que solo los terciles ordenados según el Razonamiento Cuantitativo no se distribuyeron normalmente, entonces se usó el test de rangos de Wilcoxon. Ello implica que en la casilla de valor t lo que se reporta es el estadístico W.

Fuente: Elaboración propia.

Luego, es importante mencionar que la prueba de diferencias de media de las notas de Estadística Introductoria, según los grupos definidos con el capital cultural y económico fue marginalmente significativo ($p=.08$). En esta comparación se obtuvo que las personas con mayores índices de capital cultural y económico presentaron mayores promedios en Estadística Introductoria que sus contrapartes con bajos índices de capital cultural y económico. Además, al realizar la prueba de diferencias de medias en la nota de Estadística según sexo, se obtuvo que no hubo diferencias significativas entre estos grupos ($t(71)= -.906$, $p=.368$).

En la tabla 3 se presentan los resultados de la regresión lineal sobre la nota del curso de Estadística Introductoria. En este análisis se obtuvo que la única variable que mostró una asociación significativa al 5% con la nota del curso de Estadística fue el razonamiento cuantitativo. Dicha asociación fue positiva, esto quiere decir que a mayores niveles de razonamiento cuantitativo se observan mayores promedios en las notas de Estadística Introductoria, manteniendo el resto de variables constantes.

Tabla 3. Coeficientes estandarizados, errores estándar, valores t y valores p del modelo de regresión lineal cuya variable respuesta es el rendimiento en el curso de Estadístico Introductoria I

Variable	Coeficiente	Error Estándar	Valor t	Valor p
Intercepto	0,074	0,136	0,546	0,587
Inteligencia fluida	0,027	0,136	0,200	0,842
Visualización Espacial	0,003	0,124	0,027	0,978
Razonamiento Cuantitativo	0,332	0,135	2,461	0,017*
Capital económico y cultural	0,066	0,118	0,556	0,580
Autoeficacia Matemática	-0,199	0,125	1,835	0,116
Sexo (Hombres)	-0,217	0,239	-0,906	0,368

R cuadrado múltiple = 0,21
Nota: el asterisco a la par de el valor p significa que el mismo es menor al nivel de significancia 0,05.

Fuente: Elaboración propia.

En este análisis, las variables autoeficacia y capital económico y cultural no presentaron significancia estadística relevante como en el estudio de las diferencias de las medias. Esto indica que para las diferencias en capital económico, cultural o autoeficacia en esta muestra no se asocian a cambios en las calificaciones de Estadística Introductoria. Mientras que el razonamiento cuantitativo si se asocia con cambios en las calificaciones en este curso introductorio.

Sin embargo, a la hora de leer estos resultados es importante destacar que se está trabajando con una muestra no probabilística, por tanto los resultados obtenidos hacen referencia específicamente a los sujetos que participaron en la recolección de datos. Ahora, esto no significa que los resultados no muestren cierta tendencia del comportamiento de los estudiantes de la carrera Estadística de la UCR, lo cual permite generar o pensar estrategias en pos de mejorar el desempeño del estudiantado que cursa para obtener el título de profesional en Estadística.

5. DISCUSIÓN

La relevancia de estudio se debe a que posibilita la detección de variables asociadas al rendimiento en cursos de Estadística. La dilucidación de estas variables es la base para el desarrollo de intervenciones para la mejora del rendimiento en los cursos, ya que muchas veces los bajos rendimientos no se deben a dificultades en la comprensión de los contenidos, sino a elementos externos, como las variables estudiadas en este artículo.

El análisis descriptivo de las variables predictoras consideradas indicó que todas las variables presentaban una correlación lineal positiva con el rendimiento en Estadística, con excepción de la autoeficacia matemática. En particular, únicamente la variable razonamiento cuantitativo presentó una correlación mayor a .30, lo cual indica un patrón definido, de que a mayores niveles en esta variable se observan mayores niveles promedio en las notas en Estadística.

Por otro lado, al comparar el rendimiento en Estadística de las personas con mayores valores en una variable con los de aquellas con los menores valores, se observaron diferencias significativas del promedio en Estadística según niveles de razonamiento cuantitativo, lo cual coincidió con la correlación descrita previamente. Además, se observaron diferencias en el promedio de Estadística según nivel de autoeficacia matemática y capital cultural y económico, en el primer caso, a favor de las personas con niveles bajos en la variable y, en el segundo a favor del grupo con notas altas.

Las diferencias anteriores coincidieron con lo esperado teóricamente. En el caso del razonamiento cuantitativo, en los problemas de estadística, por lo general se requiere de este proceso, debido a que estos van más allá de reproducir un algoritmo visto en clase, demandan plantear estrategias basadas en los contenidos que permitan llegar a la solución del problema (Rojas et al., 2018). En particular, muchos de los problemas de Estadística Introductoria se presentan en contextos cotidianos, esto obliga a los estudiantes a realizar otra etapa del razonamiento cuantitativo: identificar las piezas de información claves del ejercicio.

En cuanto al capital económico y cultural, era esperable que personas con mayores niveles en esta variable tuvieran mayores rendimientos debido a los insumos educativos exclusivos que han recibido a lo largo de su vida (Álvarez y Martínez, 2016). Con respecto a la autoeficacia, los resultados fueron inesperados, debido a que en la mayoría de antecedentes y en la teoría se justifica la presencia de una relación positiva y en este primer análisis se obtuvo una relación negativa (Walker y Brakke, 2017; Scheider, 2011).

Las variables inteligencia fluida y razonamiento espacial fueron las que no reflejaron diferencias de promedios de rendimiento en Estadística entre sus terciles. En la primera variable, la razón puede ser que en cursos universitarios de estadística se hacen razonamientos sobre objetos conocidos por los estudiantes o construidos sobre esos objetos, en cambio, en la inteligencia fluida se trata de aislar el conocimiento adquirido (Cattell, Cattell y Weiss, 2017). En la segunda variable, la razón puede ser que en el curso de estadística introductoria solo se estudia análisis bidimensional, en cursos más avanzados esta variable puede ser más relevante, dado que se requiere el análisis tridimensional (por ej. distribuciones bivariadas y análisis factorial). Además, se observó que no hubo diferencias por sexo en las notas de Estadística, lo cual es esperable si se toma en cuenta que en un análisis de datos adicional se observó que las variables motivacional y de capital económico consideradas no presentaron diferencias significativas según sexo y, como se dijo en la introducción, las diferencias observadas en rendimiento según sexo no se deben a factores del sexo en sí, sino de elementos externos como los considerados en estas variables (Jacobs, 2005).

Luego, el análisis de regresión múltiple permitió analizar la asociación de cada una de las variables mencionadas, pero considerando mismos valores el resto de variables.

Se obtuvo que con esas condiciones, únicamente el razonamiento cuantitativo se asoció con el rendimiento en Estadística. Por tanto, en personas con los mismos niveles en todas las variables, se observó un crecimiento del promedio en la nota de Estadística, según el nivel de razonamiento cuantitativo.

En el análisis de regresión hay que resaltar que la variable capital económico y cultural ya no es relevante, como se observó cuando no se controlaba ninguna variable. La importancia de este resultado es que esta es una variable para la cual no se pueden realizar intervenciones directamente, pero dada su pérdida de relevancia, las intervenciones se deben hacer en función de la variable en la que se tiene mayor margen de acción: el razonamiento cuantitativo.

6. CONCLUSIÓN

Mediante el análisis realizado en este artículo, se da cuenta de la relación entre diversas variables cognitivas y sociales de los estudiantes de la carrera de Estadística con el rendimiento en un curso introductorio de estadística de dicha profesión. Si bien es cierto, los resultados obtenidos se circunscriben a la interpretación del comportamiento de los sujetos que componen la muestra con la que se trabaja, este ejercicio analítico permite visibilizar algunas tendencias alrededor del aprendizaje y el rendimiento de los estudiantes de la carrera ya mencionada.

Por un lado, se confirma que las personas con mayores habilidades en razonamiento cuantitativo también tienden a tener mejor rendimiento en el curso introductorio a la estadística en cuestión, lo cual va de la mano con lo que se plantea en la teoría. Asimismo, se repite esta tendencia con respecto al capital económico y cultural, lo cual también era un resultado esperado. Por otra parte, las habilidades en visualización espacial y la inteligencia fluida no se presentaron como factores asociados de manera relevante al rendimiento del curso analizado, lo cual se puede ver relacionado con el hecho de que en el mismo no se estudian y evalúan tópicos que requieran de dichas habilidades. Además, se observa que el sexo no es un factor que esté generando diferencias en el rendimiento de las personas que participaron en el análisis.

El único resultado inesperado que se obtuvo, tiene que ver con la autoeficacia matemática, pues se obtuvo una relación negativa entre dicha variable y el rendimiento en el curso de estadística introductoria. En ese sentido, una hipótesis que se podría explorar es que los estudiantes con alta autoeficacia pueden esforzarse menos por obtener notas altas, debido a su alta confianza en sus capacidades, lo cual los lleva a presentar un rendimiento más bajo que aquellos con autoeficacia baja, los cuales se tienden a esforzar mucho más, debido a que confían poco en sus capacidades. Sin embargo, esta es una idea que debe ser sometida a evaluación y además, es un resultado que deja de ser significativo cuando se consideran otras variables (aunque esta pérdida de significancia se puede deber a la hipótesis mencionada). Asimismo, es relevante recordar que esta es una muestra no probabilística, por tanto se insiste en que los resultado obtenidos se limitan a la explicación del comportamiento de los sujetos de los cuales se obtuvieron los datos.

Tomando en cuenta los hallazgos del análisis planteado, se sugiere que las intervenciones para mejorar el rendimiento en la nota de Estadística se pueden basar en el entrenamiento del razonamiento cuantitativo. Dicho entrenamiento se puede dar en un taller centrado en estrategias de solución de problemas matemáticos, en los que se enseñe los casos de aplicación y uso de las estrategias de solución.

Para finalizar, cabe señalar que en este artículo se presentó una introducción de las asociaciones directas de un grupo de variables de interés con el rendimiento en Estadística, por medio de una regresión lineal, la cual es útil para tomar decisiones sobre las variables más relevantes para el desarrollo de una intervención dirigida al mejoramiento del rendimiento en el curso. En este trabajo se consideraron las variables que fueron evaluadas por los autores de este artículo como potenciales predictores del rendimiento en estadística, no obstante, quedaron por fuera otras variables que podrían ser tomadas en cuenta en otros estudios: ansiedad matemática, hábitos de estudio o interés por la materia. Además, se podrían considerar redes de asociaciones más complejas entre las variables de interés, que la asociación directa de los predictores con la predicha, las cuales podrían ser utilizadas si son justificadas en las teorías que sustentan los futuros estudios.

7. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Aguiar Barrera, M. E., Gutiérrez Pulido, H., Lara Barragán Gómez, A., & Villalpando Becerra, J. F. (2011). El rendimiento académico de las mujeres en matemáticas: Análisis bibliográfico y un estudio de caso en educación superior en México. *Revista Electrónica «Actualidades Investigativas en Educación»*, *11*(2), 1-24.

Álvarez-Sotomayor, A., & Martínez-Cousinou, G. (2016). ¿Capital económico o cultural? El efecto del origen social sobre las desventajas académicas de los hijos de inmigrantes en España*. *Papers 2016*, *101*(4), 527-554. https://doi.org/10.5565/rev/papers.2200

Arcavi, A. (2003). The role of visual representations in the learning of mathematics. Educational Studies in Mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, *52*(3), 215-241. https://doi.org/10.1023/A:1024312321077

Bandalos, D. L., Finney, S. J., & Geske, J. A. (2003). A model of statistics performance based on achievement goal theory. *Journal of Educational Psychology*, *95*(3), 604-616. https://doi.org/10.1037/0022-0663.95.3.604

Bandura, A. (1977). Self-efficacy: Toward a Unifying Theory of Behavioral Change. *Psychological Review*, *84*(2), 191-215. https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0146640278900024

Bandura, A. (1997). *Self-efficacy: The exercise of control*. W.H. Freeman.

Barreto-Villanueva, A. (2012). El progreso de la Estadística y su utilidad en la evaluación del desarrollo. *Papeles de población*, *18*(73), 241-271.

Blanco, A. (2018). Directrices y recursos para la innovación en la enseñanza de la Estadística en la universidad: Una revisión documental. *REDU. Revista de Docencia Universitaria*, *16*(1), 251. https://doi.org/10.4995/redu.2018.9372

Bourdieu, P. (2001). Las formas del capital, Capital económico, capital cultural y capital social. En *Poder. Derecho y clases sociales* (2.ª ed., pp. 131-164). Editorial Desclée de

Brouwer. https://erikafontanez.files.wordpress.com/2015/08/pierre-bourdieu-poder-derecho-y-clases-sociales.pdf

Cattell, R. B. (1963). Theory of fluid and crystallized intelligence: A critical experiment. *Journal of Educational Psychology*, *54*(1), 1-22. https://doi.org/10.1037/h0046743

Cattell, R. B., & Cattell, R. B. (1987). *Intelligence: Its structure, growth, and action*. North-Holland ; Sole distributors for the U.S.A. and Canada, Elsevier Science Pub. Co.

Cattell, R. B., & Cattell, A. K. S. (2001). *Factor «g» 2 y 3. Test de Factor «g», Escalas 2 y 3. Manual.* (Vol. 10). TEA Ediciones, S.A.

Cattell, R. B., Cattell, A. K. S., & Weiss, R. H. (2017). *Factor g-R. Test de inteligencia no verbal revisado. Manual*. TEA Ediciones, S.A. http://www.web.teaediciones.com/Ejemplos/FACTOR-G-R_Extracto-Manual-WEB.PDF

Cendales, B., Vargas-Trujillo, E., & Barbosa, C. (2013). Factores psicológicos asociados al desempeño académico en los cursos universitarios de estadística: Diferencias por sexo y área de titulación. *Avances en Psicología Latinoamericana*, *31*(2), 363-375.

Cervini, R. A., Dari, N., & Quiroz, S. (2015). Género y rendimiento escolar en América Latina. Los datos del serce en matemática y lectura. *Revista Iberoamericana de Educación*, *68*, 99-116.

Colorado, R., & Corcino, L. (2014). Diferencias en el desempeño académico y en los predictores de éxito universitario por escuela de procedencia. *Pedagogía*, *47*(1), 159-191.

Del Pino, G., & Estrella, S. (2012). Educación estadística: Relaciones con la matemática. *Pensamiento Educativo: Revista de Investigación Educacional Latinoamericana*, *49*(1), 53-64. https://doi.org/10.7764/PEL.49.1.2012.5

Doepken, D. Lawsky, E., & Padwa, L. (2003). Modified Fennema-Sherman Attitude Scales. Recuperado de: https://teacherleaders.files.wordpress.com/2013/07/modified-fennema-math-attitude.doc

Dwyer, C. A., Gallagher, A., Levin, J., & Morley, M. E. (2003). What is Quantitative Reasoning? Defining the Construct for Assessment Purposes. *Research Reports. Educational Testing Service.* https://www.ets.org/Media/Research/pdf/RR-03-30-Dwyer.pdf

Elvira-Valdez, M. A., & Pujol, L. (2014). Variables cognitivas e ingreso universitario: Predictores del rendimiento académico. *Universitas Psychologica*, *13*(4). https://doi.org/10.11144/Javeriana.UPSY13-4.vciu

Finney, S. J., & Schraw, G. (2003). Self-efficacy beliefs in college statistics courses. *Contemporary Educational Psychology*, *28*(2), 161-186. https://doi.org/10.1016/S0361-476X(02)00015-2

Garbanzo, G. (2007). Factores asociados al rendimiento académico en estudiantes universitarios, una reflexión desde la calidad de la educación superior pública. *Revista Educación*, *34*(1), 43-63. https://www.redalyc.org/pdf/440/44031103.pdf

Geer, E. A., Quinn, J. M., & Ganley, C. M. (2019). Relations Between Spatial Skills and Math Performance in Elementary School Children: A Longitudinal Investigation. *Developmental Psychology*, *55*(3), 637-652. https://doi.org/10.1037/dev0000649

Godino, J. D., Gonzato, M., Cajaraville, J. A., & Fernández, T. (2012). Una aproximación ontosemiótica a la visualización en educación matemática. *Enseñanza de las Ciencias: Revista de investigación y experiencias didácticas*, *30.2*, 109-130.

Groth. (2015). Working at the Boundaries of Mathematics Education and Statistics Education Communities of Practice. *Journal for Research in Mathematics Education*, *46*(1), 4. https://doi.org/10.5951/jresematheduc.46.1.0004

Guglietta, L., & Delgado, C. (2010). Validez de constructo de un modelo de admisión a posgrado. Un análisis de ruta. *Revista Galego-portuguesa de psicoloxía e educación.*, *18*(1), 227-237.

Honicke, T., & Broadbent, J. (2016). The influence of academic self-efficacy on academic performance: A systematic review. *Educational Research Review*, *17*, 63-84. https://doi.org/10.1016/j.edurev.2015.11.002

Islam, M. M., & Al-Ghassani, A. (2015). Predicting College Math Success: Do High School Performance and Gender Matter? Evidence from Sultan Qaboos University in Oman. *International Journal of Higher Education*, *4*(2), p67. https://doi.org/10.5430/ijhe.v4n2p67

Jacobs, J. E. (2005). Twenty-five years of research on gender and ethnic differences in math and science career choices: What have we learned? *New Directions for Child and Adolescent Development*, *2005*(110), 85-94. https://doi.org/10.1002/cd.151

Johnson, M., & Kuennen, E. (2006). Basic Math Skills and Performance in an Introductory Statistics Course. *Journal of Statistics Education*, *14*(2), 2. https://doi.org/10.1080/10691898.2006.11910581

Lozano Pérez, M. Á., & Trinidad Requena, A. (2019). El Capital Cultural como Predictor del Rendimiento Escolar en España. *International Journal of Sociology of Education*, *8*(1), 45. https://doi.org/10.17583/rise.2019.3862

Lowrie, T., Logan, T., & Ramful, A. (2017). Visuospatial training improves elementary students' mathematics performance. *British Journal of Educational Psychology*, *87*, 170-186. https://doi.org/10.1111/bjep.12142

McGrew, K. S. (2009). CHC theory and the human cognitive abilities project: Standing on the shoulders of the giants of psychometric intelligence research. *Intelligence*, *37*(1), 1-10. https://doi.org/10.1016/j.intell.2008.08.004

Martínez-Castro, C. A. y Zapata-Cardona, L. (2020). Desarrollando sentido de agencia en la formación inicial de profesores de Estadística. *Matemáticas, Educación y Sociedad, 3*(2), 40-55

Miñano, P., & Castejón, J. L. (2011). Variables cognitivas y motivacionales en el rendimiento académico en Lengua y Matemáticas: Un modelo estructural. *Revista de Psicodidáctica*, *16*(2), 203-230.

Montero Rojas, E., Villalobos Palma, J., & Valverde Bermúdez, A. (2007). Factores institucionales, pedagógicos, psicosociales y sociodemográficos asociados al rendimiento académico en la Universidad de Costa Rica: Un análisis multinivel. *RELIEVE. Revista Electrónica de Investigación y Evaluación Educativa*, *13*(2), 215-234.

Moreira-Mora, T.E., Smith-Castro, V., Montero-Rojas, E. y Zamora-Araya, A. (julio, 2017). Propiedades psicométricas de escalas de sexismo y autoeficacia matemática aplicadas a estudiantes universitarios y de secundaria en Costa Rica. Trabajo presentado en III Congreso Nacional de Psicología, Oviedo, España, pp. 473-474. Recuperado de https://repositoriotec.tec.ac.cr/bitstream/handle/2238/10449/DOP_PON_07_%20propiedades%20psicom%C3%A9tricas_IIICongreso%20Nacional%20de%20Psicolog%C3%ADa.pdf?sequence=1&isAllowed=y

OCDE. (2017). *Marco de Evaluación y de Análisis de PISA para el Desarrollo: Lectura, matemáticas y ciencias,* (Versión preliminar). OECD Publishing.

OCDE. (2018). Pisa para el desarrollo. Resultados en foco. *Pisa en foco*, *91*, 1-19. http://www.oecd.org/pisa/pisa-for-development/PISA_D_Resultados_en_Foco.pdf

OCDE. (2019). Why don't more girls choose to pursue a science career? *Pisa in focus*, *93*, 1-5. https://www.oecd-ilibrary.org/docserver/02bd2b68-en.pdf?expires=1579725938&id=id&accname=guest&checksum=5AF48AEE07D6759A3E0A0BE987812749

Ozer, E. M., & Bandura, A. (1990). Mechanisms Governing Empowerment Effects: A Self-Efficacy Analysis. *Journal of Personality and Social Psychology*, *58*(3), 472-486. https://www.uky.edu/~eushe2/Bandura/Bandura1990JPSP.pdf

Peng, P., Wang, T., Wang, C., & Lin, X. (2019). A meta-analysis on the relation between fluid intelligence and reading/mathematics: Effects of tasks, age, and social economics status. *Psychological Bulletin*, *145*(2), 189-236. https://doi.org/10.1037/bul0000182

Prieto, G., Carro, J., Orgaz, B y Pulido, R. (1993). Análisis cognitivo de un test informatizado de visualización espacial. *Revista Psicothema*, *5*(2), 293-301.

Primi, R., Ferrão, M. E., & Almeida, L. S. (2010). Fluid intelligence as a predictor of learning: A longitudinal multilevel approach applied to math. *Learning and Individual Differences*, *20*(5), 446-451. https://doi.org/10.1016/j.lindif.2010.05.001

Pullinger, J. (2013). Statistics making an impact. *Journal of the Royal Statistical Society. Series A (Statistics in Society)*, *176*(4), 818-839.

Radovic Sendra, D. (2018). Diferencias de género en rendimiento matemático en Chile. *Revista Colombiana de Educación*, *74*, 221-242.

Ramos, L. F. (2019). La educación estadística en el nivel universitario: Retos y oportunidades. *Revista Digital de Investigación en Docencia Universitaria*, *13*(2), 67-82. https://doi.org/10.19083/ridu.2019.1081

Richardson, M., Abraham, C., & Bond, R. (2012). Psychological correlates of university students' academic performance: A systematic review and meta-analysis. *Psychological Bulletin*, *138*(2), 353-387. https://doi.org/10.1037/a0026838

Robbins, S. B., Lauver, K., Le, H., Davis, D., Langley, R., & Carlstrom, A. (2004). Do Psychosocial and Study Skill Factors Predict College Outcomes? A Meta-Analysis. *Psychological Bulletin*, *130*(2), 261-288. https://doi.org/10.1037/0033-2909.130.2.261

Rojas-Torres, L. (2014). Predicción de la reprobación de cursos de matemática básicos en las carreras de Física, Meteorología, Matemática, Ciencias Actuariales y Farmacia. *Revista Electrónica Educare*, *18*(3), 3-15. https://doi.org/10.15359/ree.18-3.1

Rojas, L., Mora, M., & Ordoñez, G. (2018). Asociación del Razonamiento Cuantitativo con el Rendimiento Académico en Cursos Introductorios de Matemática de Carreras STEM. *Revista digital Matemática, Educación e Internet*, *19*(1), 1-13. http://tecdigital.tec.ac.cr/revistamatematica/

Rojas, L., & Ordoñez, G. (2019). Proceso de construcción de pruebas educativas: El caso de la Prueba de Habilidades Cuantitativas. *Evaluar*, *19*(2), 15-29.

Shea, D. L., Lubinski, D., & Benbow, C. P. (2001). Importance of assessing spatial ability in intellectually talented young adolescents: A 20-year longitudinal study. *Journal of Educational Psychology*, *93*(3), 604-614. https://doi.org/10.1037/0022-0663.93.3.604

Scheider, W. R. (2011). The relationship between statistics self-efficacy, statistics anxiety, and performance in an introductory graduate statistics course. *Graduate Theses and Dissertations*, 1-123.

Schunk, D. H., & DiBenedetto, M. K. (2016). Self-Efficacy Theory in Education. En *Handbook of Motivation at School Routledge*. https://www.routledgehandbooks.com/doi/10.4324/9781315773384.ch3

Sirin, S. R. (2005). Socioeconomic Status and Academic Achievement: A Meta-Analytic Review of Research. *Review of Educational Research*, *75*(3), 417-453. https://doi.org/10.3102/00346543075003417

Taub, G. E., Keith, T. Z., Floyd, R. G., & Mcgrew, K. S. (2008). Effects of general and broad cognitive abilities on mathematics achievement. *School Psychology Quarterly*, *23*(2), 187-198. https://doi.org/10.1037/1045-3830.23.2.187

Vargas Hernández, M. M., & Montero Rojas, E. (2016). Factores que determinan el rendimiento académico en Matemáticas en la Universidad Nacional de Ingeniería (UNI), Nicaragua: Un modelo de ecuaciones estructurales. *Universitas Psychologica*, *15*(4). https://doi.org/10.11144/Javeriana.upsy15-4.fdra

Vásquez, C. (2020). Educación Estocástica en el aula escolar: una herramienta para formar ciudadanos de sostenibilidad. *Matemáticas, Educación y Sociedad, 3*(2), 1-20

Veenstra, C., Dey, E., & Herrin, G. (2009). A model for freshman engineering retention. *Advances in Engineering Education*, *1*(3), 1-31.

Wai, J., Lubinski, D., & Benbow, C. P. (2009). Spatial ability for STEM domains: Aligning over 50 years of cumulative psychological knowledge solidifies its importance. *Journal of Educational Psychology*, *101*(4), 817-835. https://doi.org/10.1037/a0016127

Walker, E. R., & Brakke, K. E. (2017). Undergraduate psychology students' efficacy and attitudes across introductory and advanced statistics courses. *Scholarship of Teaching and Learning in Psychology*, *3*(2), 132-140. https://doi.org/10.1037/stl0000088

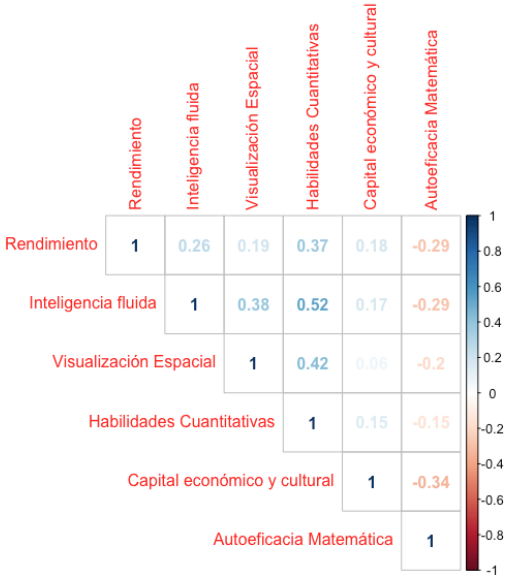
White, G., & Sivitanides, M. (2003). An empirical investigation of the relationship between success in mathematics and visual programming courses. *Journal of information systems education*, *14*(4), 409-416.

Yunker, P., Yunker, J., & Krull, G. (2009). The Influence of Mathematics Ability on Performance in Principles of Accounting. *The accounting educators journal.*, *XIX*, 1-20.

Zhang, J., & Ziegler, M. (2015). Interaction Effects between Openness and Fluid Intelligence Predicting Scholastic Performance. *Journal of Intelligence*, *3*(3), 91-110. https://doi.org/10.3390/jintelligence3030091

ANEXOS

Ilustración 1. Matriz de correlaciones de Pearson entre las variables incorporadas al análisis



Fuente: Elaboración propia.

Épsilon - *Revista de Educación Matemática* *2021, nº 109, 31-39*

La transición de una clase de Integración por partes de la modalidad presencial a en línea y a distancia: una experiencia docente

Yocelyn Espinoza de los Monteros Ortiz
Instituto Tecnológico Superior de Teziutlán.
(Teziutlán, Puebla, México).
yocelyn.eo@teziutlan.tecnm.mx

Resumen: *La contingencia sanitaria por Covid-19 obligó al profesorado en servicio en México a migrar de clases presenciales a clases en línea y a distancia, este artículo muestra una experiencia personal como profesora de Cálculo en el nivel universitario con estudiantes de segundo semestre de ingeniería en sistemas computacionales en donde se muestra cómo las herramientas tecnológicas funcionaron como escenario principal para dar continuidad a las clases a distancia, la adopción de los medios digitales como canales de difusión del conocimientos y los retos presentados ante esta nueva modalidad.*
Palabras clave: *cálculo integral, métodos de integración, transición, modalidad a distancia.*

The transition from an Integration parts class of the classroom to online and remote classes: a teaching experience

Abstract: *The health contingency by Covid-19 forced the teachers in service in Mexico to migrate from classroom to online and remote classes. This article shows a personal experience as a Calculus teacher at the university level with students of second semester in computer engineering, showing how the technology tools worked as the main scenario for continuity to remote classes, the adoption of digital media as knowledge communication channels and the challenges presented by this new modality.*
Keywords: *integral calculus, integration methods, transition, remote mode.*

1. INTRODUCCIÓN

El pasado 20 de marzo de 2020 la Secretaría de Educación Pública de México anuncia un receso obligado ante la crisis sanitaria por Covid -19; de un día para otro se obliga a los decentes del país a transitar de un ambiente de enseñanza presencial a uno a distancia. Esta situación obligó a los decentes a buscar de manera inmediata e improvisada los medios para dar continuidad a las clases y formación profesional académica. Una experiencia de esta transición, que se comparte en este escrito, se enfoca en el tema Integración por partes en la materia de Cálculo Integral para estudiantes de segundo semestre de Ingeniería en Sistemas Computacionales en el Instituto Tecnológico Superior de Teziutlán, en la ciudad de Teziutlán ubicada al noreste del Estado de Puebla, México.

La crisis sanitaria ha orillado a modificar los procesos de enseñanza-aprendizaje de forma repentina; como docente se advierte la oportunidad para abordar los contenidos haciéndolos más visuales con el apoyo de herramientas tecnológicas que permitan la compresión del estudiante. Como lo comenta García (2020) se deben diseñar actividades donde los estudiantes se encuentren activos cognitivamente y donde se les pida que hagan y no sólo que observen o escuchen el tema.

La transición de un ambiente presencial a uno a distancia modificó sin duda muchos quehaceres educacionales, además recordó a los docentes y autoridades educativas el término brecha digital. Sensibilizó también a la comunidad docente respecto a la flexibilidad para comunicar en este nuevo escenario el conocimiento, o para poder recibir las actividades y tareas asociadas a esta obligatoria dinámica didáctica. Los medios electrónicos como plataformas educativas tipo Moodle, plataformas para realizar video conferencias, redes sociales y tutoriales en video se convirtieron en herramientas protagónicas para difundir el conocimiento.

Fue un reto enseñar métodos de integración a distancia, porque se debió buscar la forma y los medios para hacer llegar el tema al alumnado y sobre todo garantizar el logro de la comprensión y aprendizaje del tema. Y si como señalan Montero-Moguel y Vargas-Alejo (2021, p. 8) “Es necesario tener propuestas educativas para todos los niveles educativos que posibiliten la formación de los ciudadanos”, esta experiencia pretende poner a prueba una en una época de especial dificultad.

2. EL CÁLCULO COMO BASE DE LA INGENIERÍA

El Cálculo, de acuerdo a Zill et al. (2011) se puede clasificar en dos áreas: Cálculo Diferencial y Cálculo Integral, el primero hace mención a las propiedades y razones de cambio comparativas de variables a través de ecuaciones, y el segundo, ayuda a recuperar las variables originales conociendo sus razones de cambio.

Ambos cálculos (diferencial e integral) forman parte del cimiento de la formación ingenieril que está conformada por cinco materias: Cálculo Diferencial, Cálculo Integral, Álgebra Lineal, Cálculo Vectorial y Ecuaciones Diferenciales, específicamente para la carrera de Ingeniería en Sistemas Computacionales en su plan de estudios ISIC-2010-224 que oferta el Tecnológico Nacional de México (Ver TecNM, 2016) a través de los diferentes campus de la República Mexicana; dentro de su plan de estudios se da importancia al uso de las tecnologías de la información para el desarrollo de las competencias profesionales.

El modelo educativo del Tecnológico Nacional de México (DGEST, 2012) tiene por objetivo el desarrollo de las competencias profesionales a través del ser, saber ser y saber hacer, que se configuran en tres dimensiones: académica, organizacional y filosófica; en la primera, abarca el plano social, psicopedagógico y curricular. El plano social involucra el contexto mundial, regional y local y la formación y desarrollo de competencias profesionales, donde se entiende por competencia profesional:

> "Asimismo, entendemos que la competencia profesional es una configuración intelectual que integra en su estructura y funcionamiento una forma de pensar, el manejo de conocimientos formales, y un conjunto de recursos procedimentales y actitudinales de carácter útil y práctico, en tanto de que la profesión la definimos como una práctica social caracterizada por una serie de actividades que se desarrollan con base en un conjunto de conocimientos especializados, capacidades intelectuales y actitudinales que requieren un compromiso personal y la responsabilidad, por parte de quien la ejerce, de actuar tomando en cuenta las repercusiones sociales generadas por su actividad, dado que habrá de constituir una forma de vida…" (DGEST, 2012, p. 36-37)

El enfoque que se le da al Cálculo dentro de la formación ingenieril depende en mayor medida de la dedicación del profesorado y de las estrategias de enseñanza que utilice para construir el conocimiento, dicha construcción puede ubicarse en dos dimensiones: técnica y conceptual (Zbiek et al, 2007), la primera se refiere principalmente a las tareas de ejecución mecánica o procedimental y la segunda se ocupa de tareas de indagación, articulación y justificación; el rol de estudiante en función de la tecnología influye en ambas dimensiones que a su vez propician el aprendizaje, en este caso, para Cálculo Integral se usan los medios tecnológicos como herramientas cognitivas para transmitir el conocimiento, es decir, como canal de comunicación directa con el estudiante en donde el acompañamiento o tutoría por parte del docente es estratégico para que se logre dicho aprendizaje.

3. LA TRANSICIÓN REPENTINA DE LA MODALIDAD PRESENCIAL A LA MODALIDAD A DISTANCIA: MI EXPERIENCIA

La contingencia sanitaria por Covid – 19 obligó a todo el profesorado en servicio en México a mover de forma repentina su enseñanza presencial a una forma a distancia, buscando recursos tecnológicos e improvisando formas de enseñanza para dar continuidad al programa de estudios. En ese entonces la autora de este escrito se encontraba impartiendo la materia de Cálculo Integral a estudiantes de segundo semestre de la carrera de Ingeniería en Sistemas Computacionales, en donde se tuvo que ajustar de forma inmediata la manera de trabajo para continuar con las clases a distancia.

En el Instituto desde el inicio de la crisis se contaba con la plataforma educativa Moodle, sin embargo, no todos los estudiantes tenían los accesos a ella desde sus hogares o lugares de procedencia; dadas las circunstancias se decidió utilizar diversos medios y canales digitales de comunicación. En lo personal, desde 2016, abrí un canal de video tutoriales en la plataforma YouTube y esta fue mi mejor opción para comunicarme con los estudiantes y dar continuidad a mi quehacer académico; esta plataforma me permitió subir videos sobre los temas en curso y realizar sesiones en vivo una vez a la semana para resolver dudas de los alumnos. La gran mayoría de los estudiantes contaban al menos con un teléfono inteligente y conexión a internet en donde se podían conectar a la sesión en vivo a través de YouTube y ello me permitió interactuar con ellos en tiempo real (ver Figura 1). Otro canal de comunicación como la mensajería instantánea de WhatsApp se volvió primordial también para resolver dudas de los alumnos, darles a conocer material didáctico y como medio de recepción de tareas y trabajos.

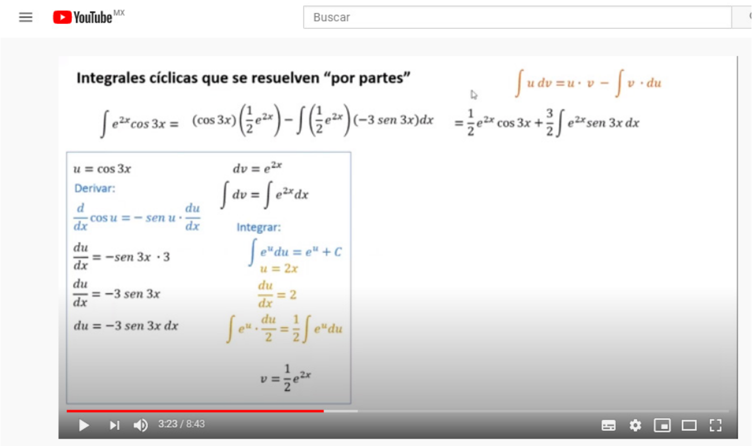


Figura 1. Video tutorial en el canal de YouTube: Yocelyn Espinoza.
Tema: Integrales cíclicas que se resuelven por partes

3.1. Adaptabilidad y retos

Pero ¿qué sucedió con el contenido temático de la materia?, ¿cómo se tuvieron que modificar las estrategias de enseñanza?, ¿el programa de estudios sufrió cambios? Estas interrogantes surgieron a raíz de esta transición, pues la brecha entre una clase presencial y una clase a distancia, sin duda, fue muy grande.

En este caso, adaptar el contenido temático de Cálculo Integral, especialmente en la unidad 2: Métodos de integración, implicó trasladar cada uno de los temas en primer lugar a una presentación de Power Point, con ayuda del editor de ecuaciones, para posteriormente grabar un video donde se explicaba paso a paso la resolución de estas integrales. Otro cambio se hizo en la forma de trabajo en las tareas, los alumnos de estar acostumbrados a realizar las actividades dentro del aula, donde los profesores estaban al pendiente de sus dudas, ahora tuvieron que hacerlas de forma autónoma y las enviaban a través de plataforma Moodle o de WhatsApp en formato de imagen o de PDF (Portable Document Format) para recibir retroalimentación por parte del profesor. Si bien algunos estudiantes comprendían el tema, esta experiencia nos mostró que más del 50% se quedaban con dudas que no externaban y sólo un 20% buscaba ayuda adicional en libros electrónicos, blogs u otro medio de consulta en internet.

La materia de Cálculo Integral culminó la segunda semana del mes de junio de 2020, los resultados fueron favorables, las estrategias de enseñanza – aprendizaje que se adoptaron fueron satisfactorias puesto que los estudiantes se adaptaron a los medios tecnológicos que se utilizaron pues se encontraban a su alcance, además, el acompañamiento o tutoría que se les dio también ayudó a lograr el aprendizaje, se alcanzaron los contenidos temáticos del plan de estudios en un 80% por el tipo de modalidad en la que se trabajó dando como resultado de un total de 37 estudiantes el 92% aprobó la asignatura con una evaluación buena (de 75 a 84%).

3.2. Las ayudas tecnológicas y el proceso de integración

¿Es realmente fidedigno el uso de la tecnología en la construcción del conocimiento matemático?, es una pregunta hasta cierto punto ambigua ya que la limitante de comunicarse a través de una pantalla no garantiza la atención de la persona que se encuentra a otro lado de esta. El ser humano (Donald, 1991) tiene la capacidad de la memoria interna que es importante en el proceso cognitivo, con ello puede acceder no sólo a la información que se transmite de persona a persona sino también tiene la capacidad para indagar, consultar y acceder de forma voluntaria a diferentes fuentes de información que dan rumbo a la construcción y enriquecimiento del conocimiento. (Donald, 2001). Con ello se motiva al estudiante a indagar por su propia cuenta en fuentes de información que le permitan enriquecer su conocimiento, utilizando las herramientas tecnológicas como alternativa para acercase de forma rápida a dicho conocimiento.

Las herramientas tecnológicas son de naturaleza cognitiva (Zbiek et al, 2007) porque facilitan el aprendizaje en diferentes áreas ya que no son precisamente herramientas diseñadas para matemáticas, sino que son herramientas que ayudan a transmitir y desarrollar los procesos de enseñanza. En este sentido, echar mano de aplicaciones tecnológicas como software matemático ayuda a comprobar resultados, pero no sustituye la enseñanza de los teoremas, axiomas, procedimientos y algoritmos para desarrollar en este caso los métodos de integración.

Centrándonos en el tema de integración: integración por partes, el estudiante tiene el reto de aprender a identificar de forma autónoma el lugar que toma la variable “u “ y el lugar que toma “dv” dentro de este proceso, el cual se identifica con la siguiente fórmula de integración:

$$\int u\,dv = u \cdot v - \int v\ du$$

Esta fórmula se utiliza para calcular la integral de un producto de funciones, por ejemplo: por mencionar algunos casos. Dentro del proceso de integración es importante saber diferenciar quién tomará el lugar correcto para poder lograr dicho proceso de forma exitosa. Además, se debe echar mano de los procesos de derivación vistos en cálculo diferencial y de los métodos de integración básicos y previos, puesto que “u” se deriva para obtener “du” y “dv” se integra para obtener “v” y poder aplicar esta fórmula de integración. Sin embargo, cuando se trabaja este tema con integrales cíclicas (que no llegan a un resultado por sí solas) también se apoya de los conocimientos del álgebra básica para agrupar términos semejantes y despejar.

Para que el estudiante pudiera alcanzar las competencias específicamente en este tema, aparte de los video tutoriales y las sesiones en vivo que se trabajaron a distancia, se les recomendó hacer uso del siguiente acrónimo: ILATE, que ayuda a identificar de forma más rápida y precisa la función que debe tomarse como “u”. ILATE significa: I = trigonométrica inversa, L = logaritmo, A = algebraica, T = trigonométrica, E = exponencial. La primera de ellas que se encuentre en este orden dentro de la integral, es la que se recomienda tomar como “u”.

3.3. Experiencia en el aula a distancia

Como profesor puedo desglosar mi experiencia en los siguientes puntos:

- Realizar los videos en vivo a través de YouTube no generaban privacidad al momento de interactuar con los estudiantes ya que hay personas de otras escuelas y ciudades suscritas al canal y al generar un video en vivo se llegaban a conectar; ayudó en un primer momento, pero al ver que la contingencia sanitaria se extendió por meses, el Instituto decidió normalizar las clases en línea y para el periodo agosto – diciembre se hizo uso de plataforma Microsoft Teams para trabajar de forma sincrónica con los estudiantes a través de video clases en tiempo real.
- Usar las presentaciones de Power Point y el editor de ecuaciones de Word me resultó cansado en el diseño de diversos temas para la elaboración de videos. Por lo que a finales del mes de junio, y sabiendo que impartiría la materia de ecuaciones diferenciales en el verano, indagué en la web sobre las pizarras digitales (ver figura 2), pero escribir en ellas con ayuda del mouse de la computadora resultó complicado y más porque soy zurda, entonces descubrí la existencia de un mouse tipo pluma (ver figura 3) que se desliza en un tapete y que permite escribir en el pizarrón digital de manera fluida.
- Fue necesario también hacerse de mejores dispositivos tecnológicos, invertir en unos audífonos con micrófono de calidad para grabar los videos como para conectarse a las clases en línea en tiempo real. Además de mejorar la calidad de la cámara web, encontré una aplicación que me permitió conectar mi teléfono celular como cámara web con una mejor calidad en el video.
- La mejor experiencia que adquirí fue la paciencia para atender a un gran número de estudiantes, resolver dudas, desarrollar los temas de forma paulatina para lograr en su mayoría la atención y compresión de los temas.

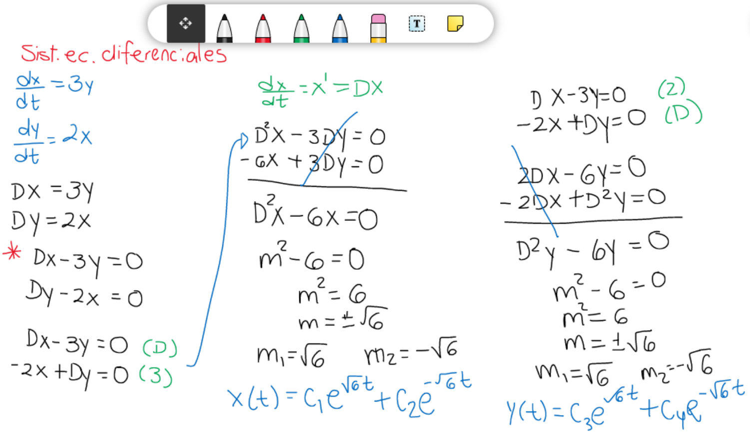


Figura 2. Pizarra digital en línea, desarrollando un tema

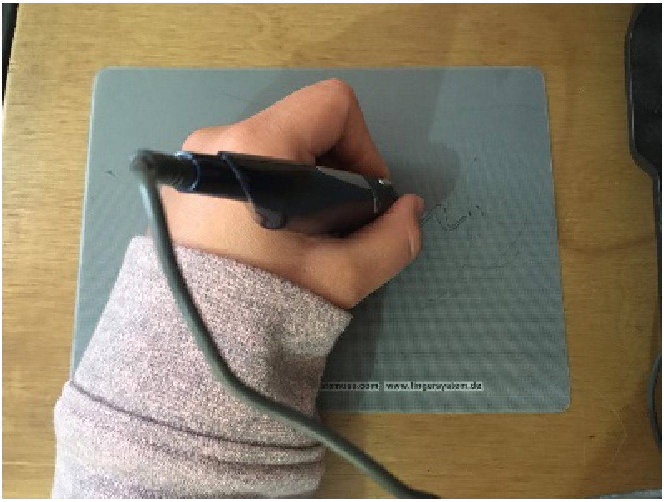


Figura 3. Mouse tipo pluma

A la par de mi experiencia como profesor durante esta nueva modalidad a distancia, también recopilé algunas opiniones de los estudiantes de segundo semestre que cursaron la materia de cálculo integral:

Tabla 1. Opiniones de los alumnos de segundo semestre de la carrera de ingeniería en sistemas computacionales en referencia a la transición a modalidad en línea y a distancia

Nombre del alumno	**Opinión o experiencia**
María José	En mi opinión el cambio fue inesperado, no me sentía preparada y estaba muy insegura sobre todo cuando vimos cálculo integral y los métodos de integración que según yo ya sabía, entonces si fue difícil.
Ana Laura	Personalmente me han costado algunos temas ya que a veces existen más dudas con otros ejercicios. Aunque también me ayudó a acostumbrarme a hacer autodidacta en mi aprendizaje.
Erik	Inicialmente el cambio de modo de estudio se me hizo interesante, lamentablemente surgieron dificultades externas que dificultaron la participación activa.
Yoseline	Fue una experiencia nueva y difícil de adaptarse puestos que, toda mi vida había estudiado por medio de clases presenciales. Sin embargo, me resulta bueno porque siempre hay algo que aprender.

4. CONCLUSIÓN

Como profesora en activo con casi 8 años en el servicio docente a nivel universitario pude comprobar primeramente que como seres humanos tenemos la capacidad de adaptarnos a las circunstancias que se nos presenten y que a la par de difundir el conocimiento matemático nuestra labor como ser humano es necesaria para motivar e incentivar a los estudiantes a que logren también esta adaptabilidad.

Tengo la certeza de que la tecnología como medio cognitivo para la construcción del conocimiento es una herramienta favorable para alcanzar las competencias que todo estudiante debe desarrollar dentro de su formación académica.

Considero que esta contingencia nos ha probado profesionalmente porque el reto de transitar de forma repentina a una modalidad en línea y a distancia y adoptar tecnologías inmediatamente permitió demostrarnos que desde cualquier parte del mundo y ante cualquier adversidad se puede continuar educando y formando futuros profesionistas.

5. AGRADECIMIENTOS

Al M.C. Juan Manuel Molina Zavaleta y al Dr. Alejandro Miguel Rosas Mendoza del CICATA IPN México, por su gran motivación e invaluable apoyo hacia mi persona para escribir esta experiencia didáctica.

6. REFERENCIAS

Donald, M. (1991). *Origins of the Modern Mind*. Harvard University Press.

Donald, M. (2001). Memory Palaces: The Revolutionary Function of Libraries. *Queen's Quarterly*, *108*(4), 559-572.

DGEST, (2012). *Modelo educativo para el siglo XXI; formaci*ón y desarrollo de *competencias profesionales.* Dirección general de educación superior tecnológica.

García, L. (2020). Coronavirus. Educación y uso de tecnologías en días de pandemia. *Ciencia UNAM-DGDC.* http://ciencia.unam.mx/leer/1006/educacion-y-uso-de-tecnologias-en-dias-de-pandemia.

Montero-Moguel, L. E., & Vargas-Alejo, V. (2021). Simulación de una enfermedad infecciosa: prácticas virtuales en tiempos de crisis con apoyo de Tecnología. *Epsilon: Revista de la Sociedad Andaluza de Educación Matemática" Thales"*, (108), 7-26.

TecNM, (2016). *ACF-0902 Cálculo Integral.* Tecnológico Nacional de México.

Zbiek, R. M., Heid, M., Blume, G.W., & Dick, T.P. (2007). Research on technology in mathematics education: A perspective of constructs. In F. Lester (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 1169-1207). Information Age Publishing.

Zill, D.G., Wright, W.S., (2011). *C*álculo: trascendentes tempranas (4a. edición). Mc Graw Hill.

Microlearning Como Estrategia Para una Educación Asincrónica

Enrique Mateus-Nieves
ORCID iD (0000-0002-0500-7450)
Edwin Moreno Moreno
ORCID iD (0000-0003-4372-9283)
Universidad Externado de Colombia
jeman124@gmail.com;
enrique.mateus@uexternado.edu.co
edwinuptc@yahoo.es;
edwin.moreno03@est.uexternado.edu.co

Resumen: *En esta experiencia de aula se buscó innovar los procesos de enseñanza y de aprendizaje de las matemáticas con un grupo de estudiantes de secundaria (grado noveno) que aprenden a identificar procesos de variación, covariación entre magnitudes, independencia y dependencia entre variables e identificar las funciones como una relación entre dos cantidades, elementos clave para el aprendizaje del cálculo infinitesimal. La experiencia es de tipo descriptivo con un muestreo no probabilístico por conveniencia, desarrollado desde un ambiente virtual de aprendizaje; como estrategia pedagógica se usó microlearning. Destacándose el desarrollo de contenidos ofimáticos, competencias para interpretar, conocer y representar funciones a partir de situaciones cotidianas que involucran relación entre magnitudes.*
Palabras clave: *Funciones, Microlearning, Tics.*

Microlearning as a Strategy for an Asynchronous Education

Abstract: *This classroom experience sought to innovate the processes of teaching and learning mathematics with a group of secondary school students (ninth grade) who learn to identify processes of variation, covariation between magnitudes, independence and dependence between variables and identify functions as a relationship between two*

quantities, key elements for learning infinitesimal calculus. The experience is descriptive with a non-probabilistic sampling by convenience, developed from a virtual learning environment; microlearning was used as a pedagogical strategy. The development of office automation content and skills for interpreting, understanding and representing functions based on everyday situations involving relationships between magnitudes were emphasized.
Keywords: *Functions, Microlearning, Tics.*

1. INTRODUCCIÓN

La tecnología es una herramienta que por sí sola no crea, ni almacena, ni difunde conocimiento y por tanto no sirve para hacer ninguna gestión de este, si no se tienen en cuenta factores relativos a las personas y a las interacciones que se dan entre éstas (Alcoba & Sélles, 2014). Dicha tecnología ha implementado como herramienta el aprendizaje electrónico o eLearning, para capacitar y educar a través de Internet. En los últimos años el eLearning ha desarrollado nuevas metodologías como el microlearning «información comprimida en pequeñas cápsulas digitales de aprendizaje», muestran que permite adquirir conocimientos de forma rápida y con resultados efectivos.

Esta propuesta se desarrolla bajo el modelo educativo colombiano donde el abordaje del pensamiento variacional está presente tanto en primaria como en secundaria, no obstante, los resultados de las pruebas internas y externas asociadas al componente del pensamiento variacional muestran que los estudiantes de grado noveno de un establecimiento educativo, de carácter público estatal en la ciudad de Bogotá, donde se realizó esta experiencia, presentan dificultades para: modelar[1] situaciones matemáticas que involucran el uso de variables; identificar la dependencia o independencia entre variables; cuándo cambia una en función de otra; si están directa o inversamente relacionadas; así como, interpretar los diferentes registros de representación (gráfico, tabular, simbólico y lenguaje natural). De ahí el interés de los profesores de matemáticas en preocuparnos en buscar alternativas que den respuesta satisfactoria en miras a superar dichas dificultades, se decidió innovar el proceso de enseñanza desde el diseño e implementación de un ambiente virtual de aprendizaje (AVA) para la enseñanza de funciones.

La metodología implementada en el diseño del AVA fue el uso de microlearning, como herramienta para un aprendizaje continuo que precisa de alto grado de efectividad en sus acciones formativas. Este sistema permitió adecuar el proceso de formación matemática, facilitando medir su efectividad de manera casi instantánea. Se trabajó el microlearning bajo la premisa de "menos es más", buscando aportar mayor calidad de contenidos en el menor tiempo posible. Esto porque observamos a los estudiantes cómo a través de las redes sociales e internet, acceden a nuevos contenidos. Notamos que las

1. En este trabajo modelar constituye una estructura análoga de un mundo real o situación imaginaria, evento o proceso que una persona construye en la mente al razonar. En otras palabras, representar o mostrar ideas y relaciones (en este caso matemáticas mediante objetos, ilustraciones, gráficas, ecuaciones, entre otros). (Moreira & Rodriguez, 2002) nuevas generaciones han venido modificando los métodos de aprendizaje, prefiriendo contenidos cortos y precisos que transmitan una idea clara y concisa, frente a los largos textos o libros a los que estábamos acostumbrados. Lo que a nuestra generación nos tomó días aprender, hoy las nuevas generaciones lo hacen en minutos, por lo que implementar el microlearning como técnica para capacitar y formar en matemáticas, desde el uso de formatos multimedia, fue ideal para generar este tipo de contenido: Tips, vídeos cortos, interactivos, dinámicos, donde les hablamos sobre temas matemáticos específicos: variación, covariación y funciones reales.

El Ministerio de Educación Nacional (MEN) de Colombia, presenta dos retos para la enseñanza de las matemáticas: enseñar para ser matemáticamente competentes[2] e incorporar TICs al currículo en los diferentes niveles de formación. Plantea que "las competencias matemáticas no se alcanzan por generación espontánea, sino que requieren de ambientes de aprendizaje enriquecidos por situaciones problema significativas y comprensivas que posibiliten avanzar a niveles de competencia más y más complejos" (MEN, 2006, p. 49). Reconocemos que los espacios virtuales de aprendizaje favorecen ese propósito gracias a las ventajas que presenta el uso de recursos digitales y las posibilidades flexibles de las plataformas actuales; sin embargo, observamos que se piensa poco en el componente pedagógico toda vez que se centra la atención, casi de forma exclusiva, a los elementos de orden tecnológico.

2. MARCO DE REFERENCIA

Se fundamentó esta experiencia en dos ejes teoricos 1) Niveles de razonamiento covariacional citados en Mateus-Nieves & Moreno (2021), propuestos por Carlson, Jacobs, Coe, Larsen & Hsu (2003). 2) mediados tecnológicamente por un Ambiente Virtual de Aprendizaje Adaptativo.

2.1. Razonamiento covariacional

Mateus-Nieves & Moreno (2021) citan la teoría de la covariación de Kelley de 1967, estableciendo que, cuando existen diferentes acontecimientos que pueden ser la causa desencadenante de un mismo hecho, sólo los que se demuestre que se relacionan de forma consistente con él a lo largo del tiempo, serán considerados como causa del acontecimiento. De ahí que, es posible entender la covariación como la información de múltiples observaciones (relación entre dos o más variables).

2. Esto es para el MEN (2006): "concebir el abordaje de procesos generales (formular y resolver problemas; modelar procesos y fenómenos de la realidad; comunicar; razonar, y formular comparar y ejercitar procedimientos y algoritmos) que redunden en el desarrollo de competencias matemáticas definidas, pues ser matemáticamente competente requiere ser diestro, eficaz y eficiente en el desarrollo de cada uno de esos procesos generales, en los cuales cada estudiante va pasando por distintos niveles de competencia." (p. 56).

Carlson et al., (2003) trabajan sobre la importancia de modelación de relaciones funcionales para la interpretación de modelos de eventos dinámicos y para la comprensión de los conceptos principales del cálculo. Proponen un marco conceptual para el estudio del razonamiento covariacional, incorporando cinco acciones mentales y cinco niveles. Con base en las acciones mentales (mostradas en la tabla 1), clasifican a los estudiantes en niveles de acuerdo con la imagen global que parece sustentar las varias acciones mentales que esa persona exhibe en el contexto de un problema o tarea propuesto.

Tabla 1. Acciones mentales del marco conceptual para la covariación

Acción mental	**Descripción de la acción mental**	**Comportamiento**
AM1	Coordinación del valor de una variable con los cambios en la otra	Designación de los ejes con indicaciones verbales de coordinación de las dos variables (e.g., y cambia con cambios en x).
AM2	Coordinación de la dirección del cambio de una variable con los cambios en la otra variable.	Construcción de una línea recta creciente. Verbalización de la consciencia de la dirección del cambio del valor de salida mientras se consideran los cambios en el valor de entrada.
AM3	Coordinación de la cantidad de cambio de una variable con los cambios de la otra.	Localización de puntos/construcción de rectas secantes. Verbalización de la consciencia de la cantidad de cambio del valor de salida mientras se consideran los cambios en el valor de entrada.
AM4	Coordinación de la razón de cambio promedio de la función con los incrementos uniformes del cambio en la variable de entrada.	Construcción de rectas secantes contiguas para el dominio. Verbalización de la consciencia de la razón de cambio del valor de salida (con respecto al valor de entrada) mientras se consideran los incrementos uniformes del valor de entrada.
AM5	Coordinación de la razón de cambio instantánea de la función, con los cambios continuos en la variable independiente para todo el dominio de la función	Construcción de una curva suave con indicaciones claras de los cambios de concavidad. Verbalización de la consciencia de los cambios instantáneos en la razón de cambio para todo el dominio de la función (los puntos de inflexión y la dirección de las concavidades son correctos

Fuente: Mateus-Nieves & Moreno (2021, p. 123).

Estas acciones mentales están relacionadas con el grado de evolución que muestra el estudiante al desarrollar tareas que implican covariación. Dichas acciones mentales están planteadas en orden ascendente de complejidad, para nuestro caso consideramos: identificación de variables; determinar cuál es independiente y cuál dependiente; determinar el valor de una variable con relación a los cambios de la otra; determinar cambio y cantidad entre variables; definir cuál es la función que relaciona las variables, y plantear el tipo de función que representa.

2.2. Niveles de razonamiento covariacional

Mateus-Nieves & Moreno (2021, p. 116) plantean que "los estudiantes deben ser capaces de analizar patrones de cambio en varios contextos, ligado a cómo los estudiantes interpretan y construyen enunciados". Para determinarlo establecen cinco niveles de desarrollo de las imágenes de covariación, (tabla 2); estos niveles están planteados en términos de acciones mentales sustentadas por cada imagen. Asocian este concepto al conjunto de habilidades de raciocinio y conceptualización que se involucran en la compresión de fenómenos dinámicos. Identifican los procesos cognitivos involucrados en el desarrollo del razonamiento covariacional y establecen un marco para la construcción de imágenes, que incluyen acciones mentales incidentes en la interpretación y representación de las funciones asociadas a dichos eventos. Cuando un estudiante interactúa en una situación particular donde dos variables cambian, una dependiendo de los resultados de la otra, se hace complejo determinar lo que están pensando sobre la situación, de ahí que los comportamientos que observamos en ellos se convierten en elementos para saber a qué acción mental se encuentra asociada dicho comportamiento.

Tabla 2. Marco conceptual para los niveles de la covariación

Niveles	Características
Nivel 1 (N1) Coordinación	Nivel de coordinación, las imágenes de la covariación pueden sustentar la acción mental de coordinar el cambio de una variable con cambios en la otra variable (AM1).
Nivel 2 (N2) Dirección	Nivel de dirección, las imágenes de la covariación pueden sustentar a las acciones mentales de coordinar la dirección del cambio de una de las variables con cambios en la otra. Las acciones mentales identificadas como AM1 y AM2 son sustentas por imágenes de N2.
Nivel 3 (N3) Coordinación cuantitativa	Nivel de coordinación cuantitativa, las imágenes de covariación pueden sustentar a las acciones mentales de coordinar la cantidad de cambio en una variable con cambios en la otra. Las acciones mentales identificadas como AM1, AM2 y AM3 son sustentadas por imágenes de N3.
Nivel 4 (N4) Razón promedio	Nivel de la razón promedio, las imágenes de covariación pueden sustentar a las acciones mentales de coordinar la razón de cambio promedio de una función con cambios uniformes en los valores de entrada de la variable. La razón de cambio promedio se puede descomponer para coordinar la cantidad de cambio de la variable resultante con los cambios en la variable de entrada. Las acciones mentales identificadas como AM1 hasta AM4 son sustentadas por imágenes de N4.

Niveles	Características
Nivel 5 (N5). Razón instantánea	Nivel de la razón instantánea, las imágenes de covariación pueden sustentar a las acciones mentales de coordinar la razón de cambio instantánea de una función con cambios continuos en la variable de entrada. Este nivel incluye una consciencia de que la razón de cambio instantánea resulta de refinamientos más y más pequeños en la razón de cambio promedio. Las acciones mentales identificadas como AM1 hasta la AM5 son sustentadas por imágenes de N5.

Fuente: Mateus-Nieves & Moreno (2021, p. 123)

Desde estos niveles de Razonamiento covariacional es posible evidenciar el grado de pensamiento covariacional desarrollado por el alumno, considerando que cada nivel se va alcanzando de acuerdo con el grado de superación de las acciones mentales mostradas por el estudiante.

2.3. Ambientes Virtuales de Aprendizaje Adaptativo

En Mateus-Nieves & Chala (2021) se plantea que los avances tecnológicos han facilitado el acceso a los datos, la comunicación interpersonal y la difusión de todo tipo de información; pero ha dificultado la forma de dilucidar la información pertinente para la acción que genera el conocimiento. Lo que nos permite inferir que estamos en la era del conocimiento y a la vez de la infoxicación,[3] resaltamos que la tecnología debe ser considerada siempre un medio y no un objetivo final, de ahí que, los aspectos didácticos basados en herramientas tecnológicas se materializan en modelos alternativos de formación, como el eLearning con amplia difusión, ejemplo: los MOOC (Cursos en Línea Abiertos y Masivos, por sus siglas en inglés), que son una modalidad de aprendizaje flexible «los participantes pueden acceder desde cualquier lugar, momento, y avanzar a su propio ritmo». Durante la fase uno de esta experiencia, de exploración, encontramos un crecimiento exponencial de las plataformas que ofrecen MOOC; sin embargo, en algunas se desconoce que los eLearning cuentan con estándares asociados a dos componentes principales: 1) Las plataformas, tecnologías de la información y comunicación y 2) Los contenidos.

Mateus-Nieves, Buitrago & Feria (2021), citando algunos aportes de Biscay en 2005, indican que las plataformas y tecnologías de la información y comunicación deben cumplir con los siguientes criterios vinculados al estándar SCORM[4]: 1) Interoperabilidad, ofrecer la capacidad de exhibir contenidos independientemente de quién y

3. El término infoxicación fue acuñado por Alfons Cornella en 1996. Proviene del inglés Overload y consiste en delimitar la situación de exceso informacional en la que se tiene más información para procesar de la que humanamente es posible tratar, y, como consecuencia, brota la ansiedad.

4. SCORM (*Sharable Content Object Reference Model*, traducido como: Modelo Referenciado de Objetos de Contenido Compartible). Incluye un conjunto de estándares y especificaciones que permite crear

cómo fueron creados. Producir contenidos independientemente de la plataforma en la cual serán incorporados. 2) Reusabilidad. enfocada en disminuir los tiempos de producción y aumentar la calidad de los contenidos. 3) Trazabilidad. Capacidad de registrar y hacer seguimiento a cada usuario y al contenido al que accede. 4) Accesibilidad, los contenidos necesarios estén al alcance en todo momento y puedan ser accedidos desde cualquier lugar a través los dispositivos disponibles. 5) Resiliencia. Principio destinado a impedir la obsolescencia tecnológica de los contenidos y de los estándares. En otras palabras, de adaptabilidad. 6) Escalabilidad. Posibilidad de crecer sistemáticamente en contenidos, materiales, funcionalidad y usuarios. Con relación a los contenidos, plantea que estos deben tener al menos las siguientes características: 1) Calidad de los objetos de aprendizaje, 2) Pertinencia. La adecuación de los contenidos y la conveniencia de los mismos. 3) Orientación al usuario. Satisfacción de los requisitos, las expectativas y las necesidades de los usuarios. Relacionando usuario con (gestores, personal, profesores) y externo (alumnos, sociedad en general).

Bajo este panorama, se asume la definición de Mason, Weller & Pegler (2003, p. 56), de un objeto virtual de aprendizaje (OVA) como: "una pieza digital de material de aprendizaje que direcciona a un tema claramente identificable y que tiene el potencial de ser reutilizado en diferentes contextos" pensados como elementos que conforman el AVA. Por ello, incluimos a la definición el medio de difusión, es decir que el objeto de aprendizaje pueda ser difundido a través de múltiples medios: ordenadores, tabletas, televisores y/o teléfonos inteligentes. Dado que, con la masificación de las tecnologías móviles, los objetos virtuales se han venido adaptando hacia fragmentos cortos pero concretos que sean capaces de explicar en su integralidad un concepto; Arshavskiy (2019) lo define como microlearning[5].

Encontramos que las tecnologías que admiten MOOC, también admiten microlearning, (módulos cortos, con contenido del curso y actividades de aprendizaje completas encapsuladas en paquetes de cinco a diez minutos), lo que implica entregar contenido y realizar actividades de aprendizaje en pequeños fragmentos, «anuncios por correo electrónico, paneles de cursos y plataformas integradas de redes sociales». En la tabla 3 mostramos algunas ventajas de usar microlearning.

Tabla 3. Ventajas de usar microlearning

Ventaja	Descripción
Facilita la formación	Mediante pequeñas píldoras de información o vídeos reducidos se aumenta en gran medida la atención e interés de los estudiantes, más que con los métodos tradicionales escritos.
Mayor retención de los conocimientos	Gracias a las nuevas técnicas y recursos de formación que se aplican con el microlearning, el alumno permanece más atento e incorpora conocimientos con mayor rapidez.

objetos pedagógicos estructurados, con objetivos fundamentales de facilitar la portabilidad de contenido de aprendizaje, poder compartirlo y reusarlo.

5. El microlearning es una estrategia que basa el aprendizaje a partir de micro contenidos (micro media).

Ventaja	Descripción
Justo a tiempo	Se puede acceder a la formación en cualquier momento. De esta forma se puede conseguir cubrir sus necesidades de aprendizaje de los estudiantes, evitando las limitaciones de tiempo que tienen los cursos de formación presenciales.
Accesible en múltiples dispositivos	Un plus del micro aprendizaje es que puede diseñarse de tal forma que sea posible visualizar en múltiples dispositivos como móviles, tablets, ordenadores… etc.
Ahorro de tiempo en formación	Los estudiantes dedican menos tiempo en el proceso de aprendizaje que a un curso presencial. Los contenidos de un curso microlearning son cortos y concisos, ocupando al estudiante unos pocos minutos al día. Teniendo en cuenta la vida que llevamos, esta fórmula se considera un gran avance para los alumnos que desean tener conocimientos rápidamente y que no les lleve mucho tiempo adquirirlos.
Motivador	Los cursos de microlearning están divididos en diferentes fases o módulos que tienen que ir superando para finalizar el curso. Al superar progresivamente estos módulos, el estudiante se auto motiva para no dejar el curso y finalizarlo. Esto consigue engancharlo de tal forma que disfruta con el proceso y le incentiva para seguir aprendiendo, incluso le anime a realizar nuevos cursos.

Fuente: Mateus-Nieves & Chala (2021, p. 46160).

El objetivo principal de esta tendencia educativa es que los estudiantes adquieran las habilidades necesarias para asimilar la información, reflexionen sobre la misma y logren aplicarla. De ahí que el microlearning es una manera diferente de aprender, fragmenta los contenidos didácticos para alcanzar determinadas competencias. Este aprendizaje se crea en pequeños pasos que al alcanzarse unos con otros, crea un conocimiento complejo y profundo. Caracterizándose porque es posible realizarlo en corto tiempo y en cualquier lugar sin depender de espacios físicos ni de sistemas tradicionales. Para el estudiante actual resulta cómodo y eficiente. Compártimos la posicion de Mora & Bejarano (2016) cuando plantean que no todas las prácticas mediadas por las tecnologías pueden ser consideradas educativas *per se*, ya que una acción educativa requiere planeación, coordinación y evaluación de la actividad en sí misma y de los resultados obtenidos. Un entono virtual se considera de aprendizaje cuando se piensa en un marco pedagógico soportado por un modelo, enfoque o intención formativa.

3. METODOLOGÍA

La experiencia se aborda desde el enfoque cualitativo, usando la investigación-acción como “una forma de indagación realizada por el profesorado para mejorar sus acciones docentes y que posibilita revisar su práctica a la luz de evidencias obtenidas” Latorre (2003, p. 5). Se adelantó la experiencia con una población de 120 estudiantes de secundaria (grado noveno, a cada uno se le asignó un número, del 1 al 120, para luego poder identificarlos y hacer seguimiento), que pertenecen a una institución de carácter público estatal en la ciudad de Bogotá. Se utilizó un muestreo no probabilístico por conveniencia caracterizado por estudiantes seleccionados que están fácilmente disponibles y porque sabemos pertenecen a la población de interés. La experiencia se ejecutó en tres momentos: 1) Exploración y análisis de infraestructura: determinamos las posibilidades y limitaciones que supone la implementación de un entorno digital escolar en la institución. Se caracterizó la muestra en cuanto a competencias digitales y se definieron los recursos humanos y tecnológicos necesarios comparados con la infraestructura que la institución escolar ofrecía. 2) Intervención: se diseñó e implementó un AVA. 3) Se evaluó la experiencia.

La metodología propuesta implicó, además de identificar, caracterizar herramientas y estrategias para la enseñanza de las funciones utilizando las TIC, el planteamiento de un modelo pedagógico de base, que respondiera a las preguntas: ¿qué tópicos relacionados con la funciones vale la pena comprender? ¿qué aspectos de esos tópicos deben ser comprendidos por los estudiantes? ¿cómo se puede promover la compresión de dicho contenido? y ¿cómo se puede averiguar qué comprenden y qué aprenden los estudiantes? Para el caso particular de esta propuesta, se reitera la importancia de no pensar, exclusivamente en los recursos tecnológicos, sino que de manera simultánea, se prestara atención a los aspectos pedagógicos que permitan presentar situaciones particulares que faciliten a los investigadores identifcar las acciones mentales que los estudiantes asumen ante la situación propuesta y de acuerdo a la accion identificada, describir la forma como el estudiante razona covariacionalmente al enfrentarse a situaciones de variación «identificación del nivel de covariación».

4. DESCRIPCION DE LA EXPERIENCIA

Inicialmente exploramos diversas plataformas «Miriada X, Google interactive, Moodle, Future learn», y elegimos a Moodle porque se consideró permite desarrollar un proceso de enseñanza adaptativo, de manejo intuitivo y de fácil acceso para los estudiantes, dada la edad de formación que tienen y el nivel de acceso en horarios extraescolares, desde sus ordenadores o smartphone. Se validó la información con la población en miras de seleccionar la muestra desde un dialogo participante, que permitio establecer un marco ético, que permitiera que la información recogida fuera segura y confiable. Se encontró que mas del ochenta por ciento de la población usa smartphone, pero solo un cincuenta por ciento tiene algun plan de datos para acceso a internet, de ahí que para la selección de la muestra consideramos entre las opciones esa facilidad para acceder a la web en cualquier momento; también que el estudiante tuviera disponibilidad y quisiera participar de la experiencia, ademas que tuviera ciertas caracteristicas que diferenciamos en tres aspectos: 1) que se le dificulte aprender matemáticas, 2) que tenga mediana habilidad para aprender matemáticas, y 3) que le gusten las matemáticas, bien sea porque se destaca en el aprendizaje de las mismas o bien porque considera son una ciencia y a la vez una herramienta para la vida que le motivan su estudio y aprendizaje. De ahí que se eligió una muestra de 50 estudiantes de grado noveno pertenecientes a diferentes grupos (901, 902, … 905).

Se creó un ambiente virtual de aprendizaje (AVA) sobre la plataforma seleccionada, considerando los estándar SCORM «uso de la plataforma y contenidos»; entendido como un sistema de relaciones pedagógicas en el cual se persiguen objetivos de formación y de aprendizaje, en un entorno digital (web), desde una estructura flexible y de autonomía para el estudiante. El eje central para el diseño del AVA fueron los microlearning porque permiten dos factores fundamentales para su creación. 1) Facilita la conectividad de nuestros estudiantes desde los Smartphone. 2) Utilizamos micro Tips y micro vídeos como elemento de comunicación, debido a que las notas de campo recogidas en la primera fase, mostraron que la población está acostumbrada a usar las redes sociales para enterarse entre otras cosas de (noticias, farándula, novedades…) donde no les cuesta mucho mantener la atención sobre un texto y más si este es de varias páginas.

Para lograrlo fue necesario dividir la muestra en dos grupos de 17 estudiantes cada uno y un tercero con 16; capacitar a los tres profesores que nos ayudaron con la experiencia y que enseñan matemáticas en grado noveno en el uso y manejo de la plataforma. Estos docentes encontraron novedosa la implementación de microlearning como una forma diferente de enseñar y de aprender, porque los contenidos se presentaron como actividades «retos» que debían superarse para subir de "nivel" y recibir una etiqueta «cinturón de diferente color»; la Figura 1 muestra parte de esta estructura. Los contenidos fueron fragmentados didácticamente para alcanzar las competencias establecidas por el MEN: Tips con actividades puntuales para permitir al estudiante interpretar y representar diversas situaciones que involucran el uso de variables, identificar cuáles de ellas son independientes y cuales dependientes; Tips y micro videos con actividades puntuales para formular y ejecutar acciones que las involucren. Finalmente, Tips con actividades puntuales que invitan a los estudiantes a argumentar las acciones adelantadas conducentes a la construcción de funciones matemáticas. Todos estos actos requirieron en el equipo de profesores fomentar en el aula la observación y escucha activa, la toma y recopilación de datos a través de diarios de campo.

Figura 1. Diseño estructura del AVA

Pensando en la componente pedagógica del AVA se buscó responder a las preguntas planteadas en la metodología desde una serie de pequeñas actividades «implementación de microlearning», conducentes a que la plataforma fuera adaptativa para los estudiantes, permitiendo observar que los alumnos accedian a contenidos de acuerdo con el avance que mostraba cada uno. Con relación a la calidad de los objetos de aprendizaje, las actividades interactivas se enfocaron en concientizar a los estudiantes sobre los fenómenos de variación, para ello, usamos Tips que les permitieran observar, interpretar, interactuar y análizar diversas situaciones de cambio entre dos magnitudes, para algunos usamos microvideo, en otros usamos applets de Geogebra online «algunos explicativos, otros mostrando las situaciones planteadas». Tips con los contenidos a aprender «identificación de: cantidades cambiantes, variables». Tips con actividades específicas de análisis, interpretación, deducción «dependencia e independencia entre variables». Tips para identificar los medios de interacción «cuantificación de la variación». Recursos «videos que mostraban la situación puntual planteada, tablas de valores que debían diligenciar, gráficos que debían realizar en el plano cartesiano utilizando diferentes colores, uno por cada variable identificada». Por cuestión de espacio, más adelante mostraremos algunas de las situaciones planteadas. Con relación a la pertinencia, nos guiamos por los "servicios de comunicación" «foro interactivo para expresar sus sentimientos, avances, retrocesos, éxitos y fracasos en el desarrollo de las actividades propuestas»; elementos que nos permitieron triangular con lo observado por el equipo de profesores cuando trabajaron en el aula, los distintos registros relacionados con el tipo de accion mental e identificar el nivel que los estudiantes mostraban al enfrentarse a las situaciones que les mostraba el AVA.

Para el diseño de los micro contenidos consideramos los aportes de Posada & Villa-Ochoa (2006), quienes llaman la atención sobre la necesidad que estos converjan en elementos asociados a los sistemas de representación y la modelación matemática, dado que facilitan didácticamente la comprensión del concepto de función, en particular de la lineal, a partir del estudio de la variación. En las primeras actividades aplicadas a la población encontramos nivel N1 de comprensión «Coordinación», los que nos llevó a proponer que el estudio de las funciones comenzara por mostrar al estudiante acciones mentales que les permitiera identificar variables, determinar la independencia o dependencia entre ellas, coordinar el valor de una variable con relación a los cambios en la otra. Lo que nos llevó a plantear algunos Tips, ya no con funciones sino con situaciones que involucren procesos de variación. La intención principal fue buscar que los alumnos de la muestra identificaran las funciones como una relación entre dos cantidades de magnitud, cuya razón de cambio es constante cuando esta es lineal.

Se comenzó a aplicar desde el estudio sistemático de la noción de variación en diferentes escenarios de la vida cotidiana y de la misma matemática, ej.: llenado con agua de un recipiente; cambios de la temperatura en una ciudad determinada en diferentes épocas del año; costo de una llamada telefónica usando las tarifas de algunos planes de telefonía celular que los estudiantes tenían; costo de llamadas telefónicas a nivel regional, nacional e internacional, entre otras. Por cuestión de espacio únicamente mostramos el llenado con agua de un recipiente del laboratorio de química porque nos permite compartir fácilmente el tipo de acción mental que el estudiante muestra, el nivel de covariación y el tipo de competencia que el alumno va alcanzado. El recipiente era una probeta de 500ml graduada, se les pidió calcular el tiempo que tarda en llenarse cuando se contempla la apertura de una llave del acueducto del mismo laboratorio. Con este ejercicio se buscó que los estudiantes identificaran cuáles variables estaban presentes, cuál era independiente y cuál dependiente. Buscamos que los alumnos determinaran que la variación implica la covariación y correlación de magnitudes cuantificadas numéricamente.

En la Figura 2 mostramos algunas apartados de texto icónico-verbal considerado en esta micro situación, donde el estudiante debía leer la información planteada en el enunciado mostrado, mirar el video donde se abría una llave para llenar con agua el recipiente desde dos momentos diferentes. En el primero, la llave estaba abierta en una determinada posición y demoraba mas tiempo en llenarse; en el segundo momento el recipiente se llenaba más rápido.

Nombre del estudiante____
Cuadernillo de preguntas actividad inicial[17]

La figura muestra un recipiente que se está llenando. El líquido sale de una llave abierta según se desee, pero durante el llenado no se modifica la abertura de la llave, esto con el fin de permitir pasar la misma cantidad de líquido cada segundo.

Utilice la información proporcionada para contestar las preguntas que se formulan a continuación.

1. Altura del nivel de agua a medida que se va llenando el recipiente
2. Longitud del chorro de agua (la medida que va desde la boca del grifo o la llave hasta que desaparece porque hace contacto con el líquido que ya está en el recipiente
3. Diámetro del recipiente
4. Cantidad de agua a medida que se va llenando el recipiente
5. Altura del recipiente
6. Tiempo transcurrido mientras va cayendo el líquido en el recipiente

Figura 2. Situación: Identificación de variables. (Fuente: Elaboracion propia)

Se buscó la posibilidad que los alumnos verbalizaran los procesos cognitivos alcanzados mediante entregables escritos, que debian subir al foro, donde se mostraba el proceso ejecutado y logrado; debian expresar los exitos y fracasos en el proceso. Buscamos de esta manera que el estudiante asocie la naturaleza de los objetos matemáticos con su origen funcional y, a partir de esta funcionalidad, constituya los aspectos de representación y significado que configuran el objeto matemático. Se les sugirió hacer diversas representaciones que le permitieran expresar y usar el objeto. Esto porque el significado atiende a la interpretación del objeto. De ahí que, el conjunto de interpretaciones que el estudiante pueda asociar a un objeto por la funcionalidad que representa configurará su significado. Para ello se pidió hacer uso de diversos registros de representación, iconico-verbal, simbolico, tabular, algebraico, geométrico. Llevamos a la muestra a razonar si la situación cambiaba cuando cambiamos la probeta por un vaso de precipitado del mismo volumen; aquí, cambiamos la forma del recipiente pero las variables antes mecionadas se mantuvieron constantes.

La información recopilada en el foro triangulada con las notas de campo de los profesores y las de los investigadores, permitió identificar progreso en las acciones mentales de los estudiantes, pasó de la AM1 a la AM3, se identificó verbalización de la conciencia de cambio en el llenado del recipiente con relación al tiempo empleado; asi como identificar la razón de cambio entre magnitudes. Se logró que los estudiantes construyeran tablas de valores para hacer los registros; reconocieran que el cambio en la forma del recipiente no influye en las variables definidas ni en su dependencia o independencia. Lo que permite inferir que la muestra alcanzó nivel tres de coordinación cuantitativa, dado que fue capaz de sustentar las acciones mentales de coordinar la cantidad de cambio en una variable con relación a los cambios en la otra.

En este apartado la muestra manifestó dificultades para la construcción de gráficos apoyados en el software Geogebra on line, quiza por falta de manejo de los comandos del software a pesar que se les había dado inicialmente una capacitación sobre cómo hacerlo. Retroalimentamos las acciones a seguir para ejecutar los gráficos, ayudados de registros realizados en sus cuadernos, usando papel y lápiz. Se encontró que a través de estas actividades los estudiantes desarrollaron habilidades para interpretar cantidades como *variables*. Sin embargo, persisten algunas dificultades para representarlas en el plano cartesiano cuando usan lápiz y papel, persiste la confusión para ubicar las variables en los ejes del plano, esto porque les cuesta identificar cuál era la variable independiente, cuál la dependiente y el orden para ubicarlas en los ejes cartesianos; notaron la situación cuando comparaban su trabajo con el que se mostraba en el AVA. Lo que permitió ratificar la ubicación en un nivel tres «de coordinación cuantitativa», donde las imágenes de covariación sustentan las acciones mentales de coordinar la cantidad de cambio en una variable con cambios en la otra. La Figura 3 muestra la producción de los estudiantes E3 y E7 sobre esta situación.

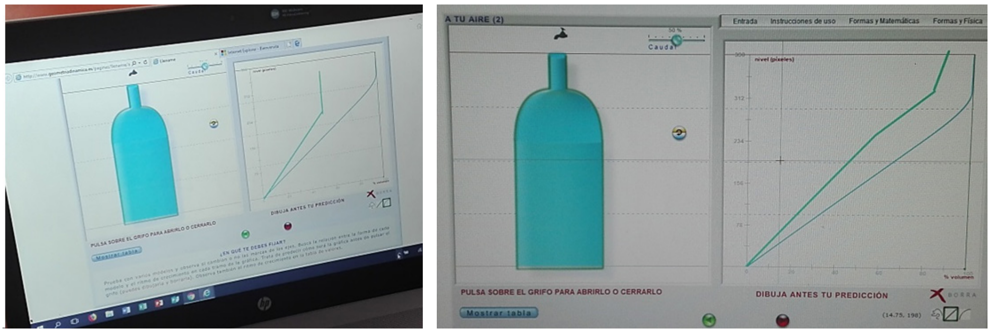


Figura 3. Imágenes de los gráficos cartesianos realizados por E3 y E7 frente a situaciones de llenado de recipientes (Fuente: elaboración propia).

Por otro lado, al formalizar conceptos en clase, se encontró que al asignarle a los estudiantes una fórmula y solicitarles la asignación de valores para posteriormente realizar el gráfico en el plano cartesiano, identificaron fácilmente la variable independiente asignando el eje x, y a la dependiente el eje y del plano. Situación que permitió evidenciar dificultades en los estudiantes para establecer el orden de las coordenadas de los puntos en el plano cartesiano pues, en lugar de utilizar ese plano para trabajar en un espacio orientado de dos dimensiones, limitan su uso solo a la descripción de parejas de números negativos o positivos. Con relación a la graduación de ejes la mitad de la muestra tomó los valores de la tabla obtenida y los ubicó directamente en el plano sin considerar una escala adecuada. En la Figura 4 se muestra la producción de los estudiantes E4 y E5. El primero toma los valores directamente del registro tabular y los ubica en el plano; sin embargo, indica los ejes adecuadamente, por su parte E5 ajusta la escala adecuadamente pero frente a la falta de espacio en el papel hace un salto en los últimos valores, ello incide en un gráfico impreciso. Para estos estudiantes fue necesario reforzar qué son las coordenadas absolutas, referidas a distancias al origen (0,0) del plano cartesiano, correspondiente a la intersección de los ejes x e y, que deben utilizarse cuando conocemos los valores de x e y precisos del punto. Por ejemplo, al introducir en el software (2,3) se determina un punto a 2 unidades en el eje x paralelo 3 unidades al eje y, conformando la pareja (2,3), situación que no contemplaban cuando trabajaron con lápiz y papel. De ahí la diferencia en los gráficos hechos a mano comparados con los que el software les presentaba.

A pesar de estas dificultades podemos ubicar a estos estudiantes ya en un nivel cuatro «razón promedio» dado que las imágenes de covariación sustentan las acciones mentales de coordinar la razón de cambio promedio de una función con cambios uniformes en los valores de entrada de la variable. En estos estudiantes se observó desarrollo de competencias para interpretar situaciones, ejecutar acciones y argumentarlas. Pero la competencia para representar sigue manifestándose débil cuando hacen ajustes inadecuados tanto, en la selección de los ejes del plano, como en escala usada en los mismos. Para estos estudiantes es fundamntal resignificar la matemática no exclusivamente en la aplicación mecánica de conceptos, sino que ésta le sea funcional a través del diseño y modelación de situaciones específicas que requieran solucionar.

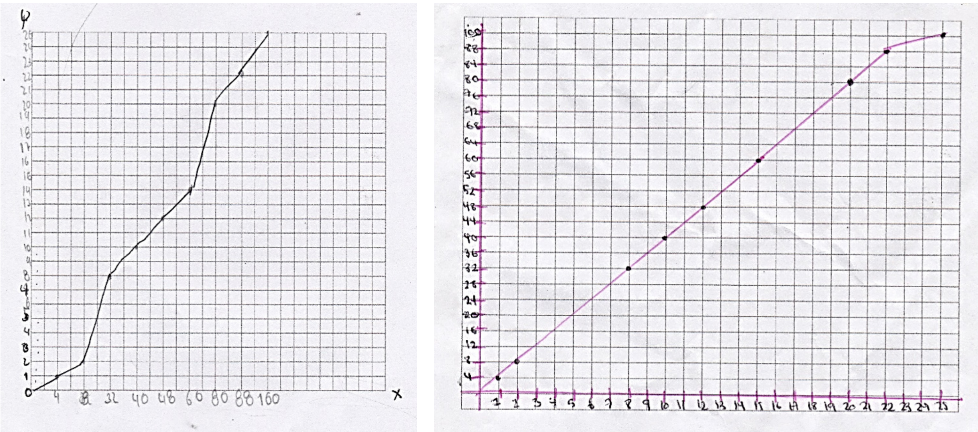


Figura 4. Imagen del gráfico cartesiano de E4 (izq.) y E5 (der.)

Las situaciones dinámicas propuestas permitieron a los estudiantes construir imágenes mentales de dos variables que cambian simultáneamente, considerando que dicho cambio está determinado por el cambio de una variable independiente que ocasiona el cambio de la otra, lo pudimos observar con las producciones del foro, por el tipo de producciones entregadas por los estudiantes decidimos replanteaarlo en dos partes: foro general y foro de aprendizaje. En el primero presentaban comentarios, dudas, experiencias sobre cómo abordaban las situaciones; en el segundo presentaron las experiencias academicas adelantadas. En la figura 5 mostramos el dialogo entre cinco estudiantes (E51, E23, E27, E54, E60), que interactuan en el foro de aprendizaje cuyo raciocinio permite ubicarlos en una AM4 «verbalización de la consciencia de la razón de cambio» donde la coordinación de la razón de cambio de una magnitud con respecto a la otra no está suficientemente claro para todos. A pesar de ello se observó desarrollo de la competencia argumentativa, el tipo de expresiones que manifiestan son coherentes, las imágenes de covariación alcanzadas les permiten sustentar las acciones mentales para coordinar la razón de cambio continuo entre magnitudes. Lo que permite inferir una aproximación al nivel cinco de covariación, dado que se observa en estos estudiantes, consciencia de que la razón de cambio puede ser creciente o decreciente, esto es producto de un razonamiento refinado sobre la razón de cambio entre magnitudes «variables».


FOROS GENERALES

Foro	Descripción	Discusiones	Suscrito	Tipo de resumen de correo
Avisos	Avisos y novedades generales	o	Sí	Por defecto (Sin resumen)
Avisos	Avisos y novedades generales	o	Sí	Por defecto (Sin resumen)
Avisos	Avisos y novedades generales	o	Sí	Por defecto (Sin resumen)

FOROS DE APRENDIZAJE

Sección	Foro	Descripción	Discusiones	Suscrito	Tipo de resumen de correo

E51: si esta cantidad cambia implica que la otra también, pero ¿cómo sabemos si una crece y la otra no?

E23: lo sabes si miras el registro en las tablas de valores, cuando los valores de x crecen los de y también, porque y depende de las cantidades que toma x.

E 27: Pero recuerden muchachos que no todas las veces las dos cantidades crecen al tiempo, puede que una de ellas tome valores mayores y la otra menor al hacer los cálculos, esto se da si las cantidades están relacionadas inversamente.

E 23: Recuerdo que el profesor nos explicó que si las cantidades crecen al tiempo se llama directamente relacionadas. O sea que no siempre pueden escribirse como lo está expresando!

E54: estoy de acuerdo con lo que el compañero dice.

E 60: Mejor preguntemos a los profesores cuando estemos socializando en clase.

Figura 5. Razonamiento en el foro de aprendizaje de cinco estudiantes

Algunos estudiantes llegaron a reconocer que, para esbozar una gráfica, no necesariamente se debe tener una expresión algebraica que la soporte predeterminadamente. Esto se evidenció cuando esbozaban la forma de la curva dependiendo del comportamiento de los cambios de una variable respecto a la otra, en términos de la coordinación cualitativa y cuantitativa de las cantidades involucradas.

Se identificó que se hace necesario reforzar con los estudiantes el uso de registros de representación tabular y gráfico; porque les permite interpretar y diferenciar las nociones de magnitud relacionándola con la variable; así como establecer características para identificar cuál es la variable independiente. En dichos razonamientos se hace evidente un acercamiento a diversas nociones asociadas al concepto de función tales como: variables independientes, dependientes, lo que permite facilitar aproximaciones a: dominio, rango, máximos, mínimos y monotonía en el comportamiento creciente o decreciente de una función.

5. REFLEXIONES Y RETOS GENERADOS POR LA PROPUESTA

Notamos que la micro información emitida en Tips o vídeos es un elemento importante para contar lo que queremos, permitió ser efectivos comunicando y también formando, observamos que los estudiantes usaron esta micro información para identificar variables, diferenciar independencia o dependencia, cuándo estan directa o inversamente relacionadas, asi como reconocer los diferentes registros: tabular, algebraico y en plano cartesiano. Destacamos que no fue necesario incluir el refuerzo de contenidos, los estudiantes mismos retomaban los micro videos o los Tips para estudiarlos.

Calidad vs cantidad. Consideramos importante diseñar material de contenido sin olvidar que cuanto más precisa y fácil de entender sea la información, mucho más eficiente es su aprendizaje. La calidad en la produccion del material (tips, videos, infografias, test, micro talleres, applets de Geogebra), permitio identificar que los estudiantes al notar calidad en dicho material prestaban mayor interés en el contenido presentado. Con relacion al uso del tiempo, tratamos de presentar los contenidos considerando la informacion mas relevante al tema invirtiendo el menor tiempo posible, de manera que el estudiante no se sature de informacion, alcance amplio, profundo conocimiento y uso del tema.

En la tabla 4 se muestran algunas ventajas y desventajas encontradas al aplicar este modelo de aprendizaje mediado por las tecnologías de la información y la comunicación.

Tabla 4. Ventajas y desventajas de los modelos de aprendizaje mediados por las tecnologías

Ventajas	Desventajas
Fomenta el trabajo colaborativo por medio de herramientas de interacción	Demasiada responsabilidad puesta sobre el estudiante, situación a la que no están acostumbrados.
Variedad de posibilidades y herramientas	Abundante información
Flexibilidad en los horarios (comunicación asincrónica y diacrónica)	Contenidos en los que se hace difícil lograr calidad pedagógica
No existen barreras geográficas	Algunas personas no poseen la tecnología necesaria
Múltiples herramientas multimedia al alcance.	Desconocimiento de habilidades para el aprendizaje online.
Interacción con la tecnología	Analfabetismo digital
Fomento de la responsabilidad	

Fuente: Elaboración propia.

En esta experiencia de aula, desde nuestra práctica pedagógica, observamos permanentemente acciones que reflejan problemas en los estudiantes sobre la comprensión y uso de los ejes cartesianos. Por ejemplo, la no distinción sobre cuál es el eje de las abscisas y cuál el de las ordenadas, la ubicación de puntos en el plano. Consideramos que estas falencias estan asociadas a saberes previos como: utilizar letras para representar variables, identificar cuál variable es independiente, cuál dependiente, cuándo y bajo qué circunstancias sudece esta relacion de codependencia. Dificultad para expresar los registros de representación algebraico y gráfico para una función; asi como identificación y uso de variables en los ejes del plano cartesiano.

El desarrollo de los contenidos ofimáticos, así como el uso de herramientas de captura de pantalla y adjunto de archivos fue adecuado para la mayoría de la muestra, a pesar de que se les dio una capacitación en uso y manejo de estos recursos, para algunos estudiantes fue difícil él envió de archivos desde la Tablet o su Smartphone dado que los submenús no se desplegaban de forma adecuada inhabilitando las acciones a seguir, no así cuando trabajaban desde el ordenador. Lo que se destaca es la cualificación de los estudiantes en la creación de contenido, lo que nos permite inferir que el micro aprendizaje se puede usar como aplicaciones en las que el profesor determina qué unidades de aprendizaje entregar cuándo, dónde, y en las que el alumno decide cuándo y cómo acceder a los recursos de aprendizaje.

Encontramos en los estudiantes uso de unidades de micro aprendizaje entregadas de diversas formas: presentaciones, resúmenes, uso de cuestionarios cortos, blogs y encuestas; permitiéndoles alcanzar a mejorar capacidad comunicativa. Hubo estudiantes que progresivamente refinaban su pensamiento, lo que les permitió desenvolverse de forma autónoma, en algunos de ellos observamos metacognición, cuando investigaban y comentaban a sus compañeros lo que habían encontrado en libros de texto y que utilizaban para buscar solución a las situaciones planteadas, otros formularon preguntas a sus compañeros relacionadas con las posibles variaciones en las situaciones propuestas. Lo que nos permite inferir que las herramientas tecnológicas utilizadas en la doble visión «uso de recursos digitales sin descuidar la componente pedagógica» se convierten en un vehículo efectivo para facilitar el proceso formativo de los estudiantes.

Sugerimos a los profesores interesados en este tipo de enseñanza la creacion de actividades antes de la clase: resúmenes, videos, unidades de aprendizaje accesibles a través de una base de datos de búsqueda; mensajes de discusión y cuestionarios; capacitación sobre manejo de recursos digitales; actividades interactivas cortas que ocurran fuera del curso formal que ayude a los alumnos a incorporarlas y aplicarlas en sus vidas. Consideramos que crear MOOC de micro aprendizaje desafía las concepciones populares sobre cuándo y dónde se produce el aprendizaje, la forma en que aprendemos y lo que esperamos de la educación, porque es posible acceder a los cursos desde casi cualquier tipo de dispositivo conectado a internet; donde prime la comunicación visual, de acceso fácil. Elementos que mejoran significativamente la experiencia de los estudiantes con el proceso de aprendizaje, haciéndolo sencillo y práctico.

Notamos que el discurso matemático escolar carece de situaciones de enseñanza significativas para el estudiante, más bien fomenta una matemática prescrita, donde no es necesaria su construcción. Consideramos que el diseño de una situación específica que promueva la necesidad de construir y comprender situaciones cotidianas al estudiante facilita los procesos de enseñanza y de aprendizaje, situación que mejora cuando se involucra software especializado, como el que hoy día existe online, porque contribuye a la resignificación de las matemáticas como algo hecho, acabado y para uso exclusivo de pocos.

6. REFERENCIAS

Alcoba, J., & Sellés, N. (2014). *eLearning y gestión del conocimiento*. ProQuest Ebook Central.

Arshavskiy, M. (2019). *Tendencias de eLearning: ¿qué podemos esperar al entrar en el 2019 y más allá?* Cursos FEMXA.ES.

Biscay, C. (2005). Los estándares de eLearning. (U. d. Virtual, Ed) *Ciencia y Tecnología (5).*

Carlson, M., Jacobs, S., Coe, E., Larsen, S., & Hsu, E. (2003). Razonamiento covariacional aplicado a la modelación de eventos dinámicos: un marco conceptual y un estudio. *EMA*, 121-156.

Latorre, A. (2003). *La investigacción-acción, conocer y cambiar la práctica educativa.* Barcelona: Editorial Graó, de IRIF, S.L.

Mateus-Nieves, E., & Chala Castillo, E. (2021). Instrumentalization vs Instrumentation of Microlearning in a Math class. *International Journal of Development Research*, 11(04), 46156-46162, April, 2021. https://doi.org/10.37118/ijdr.21620.04.2021.

Mateus-Nieves, E., Moreno Moreno, E. (2021). Preliminary Notions of Calculus. A Class Experience in Basic Education. *Acta Sci. (Canoas),* 23(2), 113-135, Mar./Apr. 2021. ISSN: 2178-7727. DOI: https://doi.org/10.17648/acta.scientiae.5716

Mateus-Nieves, E., Buitrago, A., & Feria, M. (2021). *Transformación digital y didáctica crítica retos y barreras en la enseñanza del cálculo infinitesimal*. Ed., UEC. Bogotá, Colombia. Cap. 3. ISBN: 978-958-790-583-0.

Mason, R., Weller, M., & Pegler, C. (2003). *Learning in the connected economy*. Londres: Open University.

MEN. (2006). Ministerio de Educación Nacional. *Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas*. Bogotá: Enlace Editores.

MEN. (2004). *Pensamiento Variacional y Tecnologías Computacionales.* Ministerio de Educación Nacional. Bogotá: Enlace Editores Ltda.

Mora, D., & Bejarano, G. (2016). Prácticas educativas en ambientes virtuales de aprendizaje. *Revista Aletheia, 8*(2), 48 – 63.

Moreira, M. & Rodríguez, P. (2002). Modelos mentales y modelos conceptuales en la enseñanza y aprendizaje de las ciencias. *Revista Brasilera de Pesquisa em Educação e Ciências,* 2 (3), 36-56.

Posada, F., & Villa, J. (2006). *Propuesta didáctica de aproximación al concepto de función lineal desde una perspectiva variacional*. Tesis de Maestría no publicada. Medellín: Universidad de Antioquia.

Épsilon - *Revista de Educación Matemática* *2021, nº 109, 59-64*

El tangram como recurso para realizar actividades de geometría elemental

Cristina Pedrosa-Jesús
Universidad de Córdoba
Astrid Cuida
Universidad de Valladolid

Resumen: *Se plantean algunas sugerencias de actividades para trabajar en clase temas de geometría en la educación primaria, tomando como eje de las actividades un recurso manipulativo como es el tangram.*
Palabras Clave: *Tangram, geometría, educación primaria, recursos didácticos.*

The tangram as a resource for elementary geometry activities

Abstract: *Some classroom activities for the geometry subject during elementary education are proposed in this work, taking as the axis of the assignments, a manipulative resource such as the tangram.*
Keywords: *Tangram, geometry, elementary education, manipulatives.*

1. INTRODUCCIÓN

El currículo de matemáticas para primaria de la Comunidad Autónoma de Andalucía señala que el estudiante de Educación Primaria debe ser capaz de generar preguntas, obtener modelos e identificar relaciones al analizar los fenómenos (Junta de Andalucía, 2015). Así mismo, se indica que, en el Bloque de Geometría, deberán darse enseñanzas sobre formas, estructuras geométricas y conceptos básicos tales como perímetro, área, etc.

Por otra parte, en las orientaciones curriculares, se recomienda implementar juegos matemáticos y materiales manipulativos en la enseñanza de las matemáticas, fomentándose los talleres o laboratorios de matemáticas. Esto está en sintonía con lo que Dienes (1997) afirmaba, en el sentido de que los niños son constructivistas por naturaleza y construyen sus imágenes de la realidad a partir de sus experiencias con distintos elementos del mundo real. Señalaba que, para obtener una adecuada abstracción de los conceptos matemáticos en los procesos de aprendizaje a niveles elementales, deben presentarse materializaciones múltiples (Arnendáriz y otros, 1993).

En esta misma idea psicológica de la educación, Bruner (1966) plantea que las representaciones mentales de los niños sobre las experiencias con su entorno se realizan en tres formas distintas:

a) Enactiva: representación de eventos pasados mediante una respuesta motriz.
b) Icónica: es una representación mental figurativa que evoca el suceso.
c) Simbólica: es una forma de capturar la representación de un suceso con base en la competencia lingüística.

En los *Principios y estándares* del *National Council of Teachers of Mathematics* de EE.UU, se propone fortalecer tanto la resolución de problemas como la capacidad para formular conjeturas de tipo matemático y la geometría brinda muchas situaciones que pueden ser planteadas en el aula para fomentar estos aspectos (NCTM, 2003).

Un recurso manipulativo que permite plantear situaciones de trabajo en geometría en las que se pueden poner en juego diversos aspectos e interrelacionar conceptos es el Tangram y, por tanto, se convierte en un material didáctico útil en el entorno educativo (Aznarte y Ramírez, 2018; Maz-Machado y otros, 2018). En diversos artículos, como Inojosa (2009), se proponen actividades con el Tangram y su construcción mediante el doblado de papel. El estudio de Jaramillo (2013) muestra la eficacia de una metodología participativa usando el tangram, entre otras cosas porque brinda a ayuda al docente al profesorado a tener una comunicación eficaz con los alumnos.

2. LA PROPUESTA

Se pide a los alumnos que construyan el tangram con una hoja de cartulina, cartón gris o cartón piedra indicando el color de cada pieza. Esta actividad lleva implícitos procesos de medición y trazado de líneas rectas.

Una vez construido, deben identificar cada una de las piezas, describiendo y anotando las características y propiedades de ellas. Esto permitirá recordar y afianzar conceptos sobre los polígonos que se forman. Por ejemplo, identificarán que los triángulos pueden ser isósceles y rectángulos a la vez, algo de lo que generalmente no son conscientes, pensando que estas propiedades son excluyentes entre sí.

Tabla 1. Características de las figuras del Tangram

N.º	Figura	Descripción/características
1		
2		
3		

N.º	Figura	Descripción/características
4		
5		
6		

Se pueden plantear una serie de actividades tales como:

- Los alumnos deberán determinar el perímetro y el área de cada figura. Dependiendo del curso, se puede trabajar la idea de semejanza entre triángulos; o algunas propiedades del concepto de proporcionalidad geométrica, a partir de las longitudes de los lados o del valor de sus perímetros.

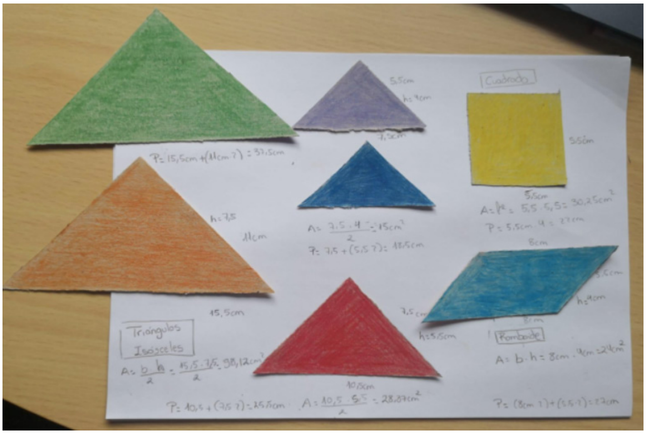


Figura 1. Ejemplo de la actividad planteada y realizadas por los alumnos.

- Construcción de cuadrados con 1, 2, 3, 4 y 6 piezas

Figura 2. Ejemplo de cuadrados construidos con 4 piezas.

- Con todas las piezas, construir 2 figuras iguales.
- Con todas las piezas, construir todos los cuadriláteros posibles (son 5).
- Mediante la manipulación de las figuras, deberán construir otras y verificar que el valor de las áreas es invariante mientras que los perímetros sin cambian.

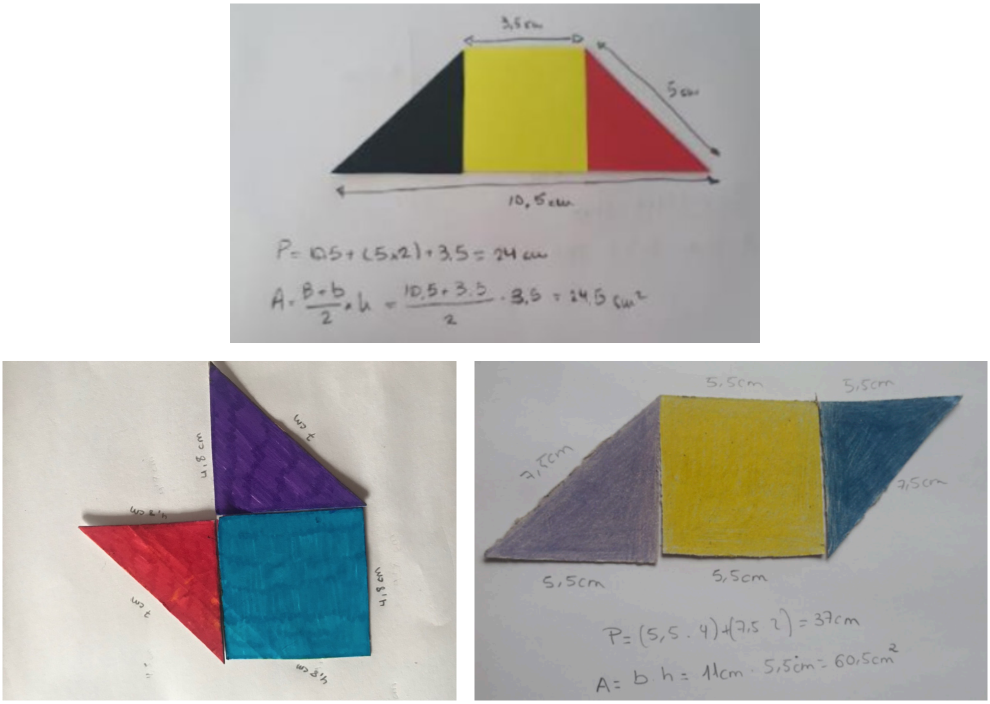


Figura 3. Actividad de invarianza del área de las figuras.

Si se juntan dos alumnos para trabajar en parejas, se les puede pedir:

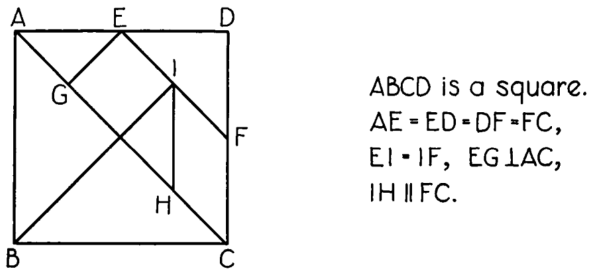
- A partir de dos puzles, cread un objeto Tangram con simetría axial. Indicad el nombre del objeto construido.
- Utilizando las piezas del Tangram, realizad una demostración del teorema de Pitágoras.

Todas las actividades propuestas se ajustan a las fases del ciclo de la investigación acción que propone Tripp (2005):

Planeación → Implementación → Observación → Reflexión

Figura 4. Fases del proceso de investigación acción.

Pese a lo que pueda pensarse acerca de que con el Tangram sólo es posible trabajar conceptos geométricos elementales, con el Tangram también se pueden realizar algunas demostraciones de mayor complejidad y para cursos superiores. Por ejemplo, Wang y Hsiung (1942) proponían una actividad aparentemente sencilla, preguntaban ¿cuántos polígonos convexos se pueden formar con el Tangram? Aprovechaban esta actividad para plantear el siguiente teorema que permite dar la solución formal:



By means of the tangram exactly thirteen convex polygons can be formed. (Wang y Hsiung, 1942; p.589)

Figura 5. Teorema propuesto por Wang y Hsiung (1942) para trabajar los polígonos convexos.

Estos autores recurren a 4 lemas para lograr una demostración del teorema propuesto.

Si bien en estos tiempos de proliferación de recursos digitales se plantean muchas actividades con el Tangram digital (Lin y otros, 2011), consideramos que el uso del Tangram físico tradicional permite la manipulación y el planteamiento de estrategias de ensayo y error para desarrollar las actividades, así como para poner a prueba conjeturas visuales que, inicialmente, plantean los alumnos para solucionar algunas de las preguntas de las situaciones planteadas.

3. CONCLUSIONES

El tangram es una herramienta útil, dinámica y de gran provecho, en el aula, para el desarrollo de competencias y habilidades de carácter geométrico, tal como ya han señalado muchos estudios y evidencia la literatura científica. Además, es un recurso económico y que se presta para la realización de diversas actividades manipulativas, un tipo de actividad de gran importancia en la Educación Primaria.

El uso planificado y sistemático del Tangram como apoyo y recurso en la clase de matemáticas, no solo promueve y facilita el aprendizaje de los alumnos, sino que provee al docente de información de primera mano para conocer el aprendizaje de sus alumnos. Además, si lo desea, el docente puede iniciar pequeñas investigaciones en educación matemática a partir del análisis del trabajo realizado por los estudiantes, para profundizar en el conocimiento de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.

4. REFERENCIAS

Armendáriz, M. V., Azcárate, C. y Deulofeu, J. (1993). Didáctica de las matemáticas y Psicología. *Infancia y Aprendizaje,* 62-63, 77-79.

Aznarte, M., & Ramírez, R. (2018). Tareas con tangram para favorecer el sentido espacial. *Revista Épsilon*, *98*, 57-66.

Bruner, J. S. (1966). *Toward a theory of instruction* (Vol. 59). Harvard University Press.

Dienes, Z. P. (1997). *Propuestas para una renovación de la enseñanza de las matemáticas a nivel elemental* (Vol. 3). Madrid: Fund. Infancia y Aprendizaje.

Jaramillo, M. I. (2013). *La didáctica dinámica de la matemática incide en el aprendizaje cognitivo de los estudiantes de octavo grado de educación básica de la unidad educativa "Ingapirca" de la parroquia Santa Rosa de Cuzubamba del Cantón Cayambe, provincia de Pichincha*. Tesis de Licenciatura. Universidad Técnica de Ambato.

Junta de Andalucía (2015). *Enseñanzas propias de la comunidad Autónoma de Andalucía para la educación primaria.* Consejería de Educación, Cultura y Deporte. Sevilla: Junta de Andalucía.

Inojosa, M. (2009). *El Tangram en la enseñanza y el aprendizaje de la geometría.* UNIÓN. Revista Iberoamericana de Educación Matemática, 17, pp. 117-126 .

Lin, C. P., Shao, Y. J., Wong, L. H., Li, Y. J., & Niramitranon, J. (2011). The Impact of Using Synchronous Collaborative Virtual Tangram in Children's Geometric. *Turkish Online Journal of Educational Technology-TOJET*, *10*(2), 250-258.

Maz-Machado, A., Argudo, C., & Rodríguez, M. (2018). Explicando la diferencia entre perímetro y área con el tangram. *Revista Épsilon*, *99*, 55-64.

NCTM. (2003). *Principios y estandares para la educación matemática.* Sevilla: NCTM-THALES.

Tripp, D. (2005). Action research: A methodological introduction. Educação e Pesquisa, 31, 444–467.

Wang, Fu Traing, & Hsiung, Chuan-Chih. (1942). A Theorem on the Tangram. *The American Mathematical Monthly, 49*(9), 596-599. doi: 10.1080/00029890.1942.11991289

Dados no transitivos
Juegos y regularidades numéricas

Alicia Mirta Giarrizzo
Institutos Superiores de Formación Docente N°11 y N°102.
Buenos Aires, Argentina

Resumen: *Este trabajo se inicia con una secuencia didáctica sobre juegos de azar con dados no transitivos que fue propuesta a los alumnos de cuarto año de una escuela secundaria para que calcularan las probabilidades de ganar de cada jugador. Pero lo interesante de esta experiencia fue que los alumnos encontraron regularidades numéricas entre los números que figuran en las caras de estos dados que los motivaron para continuar con la búsqueda. Las estrategias de intervención de la profesora resultaron claves para orientarlos en las representaciones, enunciados y generalizaciones logrando que construyeran nuevos conocimientos a partir de sus intereses.*
Palabras clave: *Dados no transitivos. Juegos. Regularidades numéricas.*

Non-transitive dice
Games and numerical regularities

Summary: *This work begins with a didactic sequence about games of chance with non-transitive dice that were proposed to students of a secondary school, to calculate the probabilities of winning for each player.*
But the interesting thing about this experience was that the students found numerical regularities between the numbers that appear on the faces of these dice that motivated them to continue with the search. The teacher´s intervention strategies were the keys to guide them in the representations, statements and generalizations, promoting learning advancement from their interests.
Keywords: *Non-transitive dice. Games. Numerical regularities.*

1. INTRODUCCIÓN

Existe una mirada social y también de varios educadores que relacionan los juegos con el entretenimiento de los niños pequeños. Sin embargo, en la educación secundaria solo algunos docentes los reconocen como situaciones motivadoras que pueden proponerles a sus alumnos a la hora de organizar la enseñanza.

Cuando los juegos plantean problemas matemáticos se convierten en recursos didácticos que facilitan la resolución de diferentes actividades a partir de las cuales los alumnos pueden avanzar en sus aprendizajes interactuando con sus compañeros y con el docente quien deberá intervenir para "problematizar el juego" estableciendo nuevas condiciones que promuevan formas distintas de producir conocimientos.

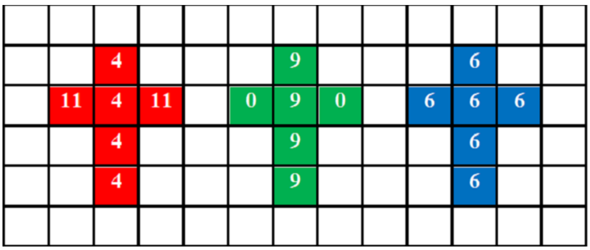
Los dados también son recursos didácticos valiosos cuando se los utiliza en actividades que no son planificadas para "jugar por jugar" sino para que posibilite la compresión de los conceptos, procedimientos, propiedades y relaciones entre los diversos objetos del campo numérico.

2. JUEGOS CON DADOS NO TRANSITIVOS

Una de las variables didácticas a tener en cuenta por los docentes es el tipo de dados que intervienen en los juegos. En esta oportunidad se trabajó con algunos conjuntos de dados no transitivos entre los cuales no se cumple la propiedad transitiva para la relación *"es más probable sacar un número mayor que"* al compararlos luego de sus lanzamientos.

La siguiente secuencia didáctica fue propuesta por una profesora a sus alumnos[1] para que analizaran las chances de ganar en juegos de azar con dados no transitivos. Las variables didácticas para aumentar el grado de complejidad de las actividades se basaron en las características y la cantidad de los dados[2].

Actividad 1. *Se juega en parejas con tres dados hexaédricos que en sus caras tienen los números que se muestran a continuación.*



Uno de los jugadores elige primero un dado y el otro jugador después elige otro entre los dos restantes. Gana el que obtiene el valor mayor. ¿Cuáles son las probabilidades de ganar que tiene cada uno? ¿Cuál es el dado más conveniente para cada jugador?

1. Edad promedio 16 años.
2. Debido a la extensión de este artículo se han seleccionado algunas producciones, comentarios y sugerencias a modo de orientación.

Épsilon, 2021, nº 109, 65-74, ISSN: 2340-714X

Los alumnos representaron la situación en tablas de doble entrada y organizaron las probabilidades de ganar según cada elección (Tabla 1).

Se dieron cuenta que no se cumple la propiedad transitiva y que no importa el dado que se elija, sino el orden en que se elija para poder ganar.

Elección del Jugador 1	Probabilidades de ganar			Elección del Jugador 2
R	R g V	V g A	A g R	A
	20/26	24/36	24/36	
V	V g A	A g R	R g V	R
	24/36	24/36	20/26	
A	A g R	R g V	V g A	V
	24/36	20/26	24/36	

Tabla 1. Probabilidades de ganar para ambos jugadores[3]

Actividad 2. *¿Cuáles son las probabilidades de ganar que tiene cada jugador con los siguientes dados? Dado blanco: (1, 4, 4, 4, 4, 4) Dado gris: (3, 3, 3, 3, 3, 6)*

Dado negro: (2, 2, 2, 5, 5, 5)

Propongan alguna variación entre los números de los dados para que se cumpla la propiedad transitiva.

El dado blanco le gana al dado gris (25/36), el dado gris le gana al dado negro (21/36) y el dado negro le gana al dado blanco (21/36). Propusieron variar solamente el dado negro y obtuvieron dos conjuntos de dados no transitivos (a y b) y tres conjuntos de dados transitivos (c, d y f):

a) Para (1, 1, 1, 4, 4, 4): B g G (25/36), G g N (21/36) y N g B (21/36).
b) Para (3, 3, 3, 6, 6, 6): B g G (25/ 36), N g G (33/36) y N g B (21/36).
c) Para (2, 2, 2, 3, 3, 3): B g G /25/36), G g N (21/36) y B g N (30/36).
d) Para (3, 3, 3, 3, 3, 3): B g G (25/36), G g N (30/36) y B g N (30/36).
e) Para (1, 1, 1, 3, 3, 3): B g G (25/36), G g N (21/36) y B g N (30/36).

Actividad 3. *¿Cuáles son las probabilidades de ganar cuando los dos jugadores deben elegir entre los dados de este conjunto de Efron?*

(0, 0, 4, 4, 4, 4) (3, 3, 3, 3, 3, 3) (2, 2, 2, 2, 6, 6) (1,1, 1, 5, 5, 5)

3. Los alumnos indicaron con g la relación *"X tiene mayores probabilidades de ganarle a Y"*.

En la Figura 1 y en la Tabla 2 representaron las probabilidades de ganar al relacionar dos de los dados de Efron.

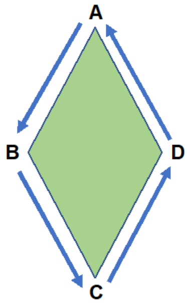


Figura 1. Casos favorables entre los dados de Efron

	A: (0, 0, 4, 4, 4, 4)	B: (3, 3, 3, 3, 3, 3)	C: (2, 2, 2, 2, 6, 6)	D: (1,1, 1, 5, 5, 5)
A: (0, 0, 4, 4, 4, 4)		**24/36**	16/36	12/36
B: (3, 3, 3, 3, 3, 3)	12/36		**24/36**	18/36
C: (2, 2, 2, 2, 6, 6)	20/36	12/36		**24/36**
D: (1, 1, 1, 5, 5, 5)	**24/36**	18/36	12/36	

Tabla 2. Casos favorables entre los dados de Efron

No importa qué dado elija el primer jugador porque el segundo jugador siempre puede elegir otro que le gana con probabilidad 2/3. Si elige el dado B, con todas sus caras iguales a 3, el dado A gana con probabilidad 2/3 si sale 4. En cambio, si elige primero el dado A, el dado D le gana con probabilidad 2/3 “(6/36 cuando sale el 1 y 18/36 cuando sale el 5).

2.1. Prolongaciones posibles

- *¿Es verdad que, si cada jugador tira dos veces un dado de los que se muestran en la Actividad 1 y suma los números obtenidos, siempre gana el que eligió primero?*
  El segundo jugador siempre tendrá mayores probabilidades de ganar.

  Por ejemplo: V g R, A g V y R g A.

  Pueden incluirse otras operaciones aritméticas o solicitarles a los alumnos que propongan variantes para luego socializarlas en una puesta en común.

- *Si ahora se juega con los dados de la Actividad 2 pero son tres los jugadores, ¿Cuál es la mejor elección para ganar?*
  Las probabilidades de ganar para cada dado son: dado blanco 75/216, dado gris 51/216 y dado negro 90/216. Entonces el dado negro es la mejor opción como ocurre cuando son dos los jugadores.

- *Realizar las mismas u otras variantes con un conjunto de dados diferentes para que comparen las conclusiones anteriores:*

  (2, 2, 4, 4, 9, 9), (1, 1, 6, 6, 8, 8), (3, 3, 5, 5, 7, 7)

> No necesariamente debe complejizarse la situación fundamental manteniendo su enunciado y a partir de él generar otras actividades, sino que también pueden generarse actividades diferentes, aunque no se vinculen con el enunciado de la primera, siempre que no se cambien los contenidos seleccionados y que esas variantes sean variables didácticas. (Giarrizzo, 2021, p.40)

3. REGULARIDADES NUMÉRICAS ENTRE LOS NÚMEROS DE LAS CARAS DE LOS DADOS NO TRANSITIVOS

Ante las regularidades encontradas por los alumnos entre los números de las caras de los dados no transitivos durante el desarrollo de los juegos anteriores la profesora intervino con nuevas consignas con el propósito de que las representaran, analizaran, enunciaran y generalizaran, de ser posible.

3.1. Dados tetraédricos no transitivos

¿Existirá alguna ley de formación entre las sumas de los números de las caras de estos grupos de dados tetraédricos no transitivos?

G1: (1, 4, 4, 4) (2, 2, 5, 5) (3, 3, 3, 6)
G2: (1, 4, 7, 7) (2, 6, 6, 6) (3, 5, 5, 8)

Ordenaron los números de las caras de los diferentes dados del Grupo 1 de menor a mayor (Tabla 3) y calcularon las sumas correspondientes a los que pertenecen al mismo orden (n). Las simbolizaron: Sn = 6 + 3 (n – 1). Para el Grupo 2 obtuvieron la fórmula: Sn = 12 + 3 (n – 1) a partir de n = 2.

	n	D1	D2	D3	Sn
GRUPO 1	1	**1**	**2**	**3**	S1 = **6**
	2	**4**	**2**	**3**	S2 = **9**
	3	**4**	**5**	**3**	S3 = **12**
	4	**4**	**5**	**6**	S4 = **15**
SDm		SD1 = **13**	SD2 = **14**	SD3 = **15**	S1 + S2 + S3 + S4 = **42** SD1 + SD2 + SD3 = **42**

Tabla 3. Sumas de los números de las caras de los dados

Las sumas SDm de los números de las caras de cada dado de ambos grupos son números sucesivos y difieren en 6 unidades.

La suma de las sumas de los números de las caras de los diferentes dados coincide con la suma de los números de las caras de cada dado. Para el Grupo 1 es 42 y para el Grupo 2 es 60 (18 + 42 = 60), siendo 18 el producto entre 6 (diferencia entre las sumas de las caras de los dados del grupo anterior) y 3 (cantidad de dados).

Destacaron con diferentes colores las casillas con los números del 1 al 6 para mostrar la ley de formación de sus repeticiones.

3.2. Dados de Quimby

Analicen si se cumplen las mismas regularidades entre los números de las caras de los cinco dados hexaédricos de Quimby. Establezcan, de ser posible, nuevas relaciones entre ellos.

En la Tabla 4 se ordenaron de menor a mayor los números de las caras de los dados y se observan en la primera fila los números triangulares. Las casillas sombreadas tienen los números sucesivos del 1 al 14 y las casillas restantes se completan con los números sucesivos del 15 al 24.

Las sumas en forma diagonal de los números de los cuadrados de 2x2 de la Tabla 4 son iguales, excepto para los cinco cuadrados de la Tabla 5.

1	3	6	10
2	4	7	11
16	5	8	12
17	20	9	13
18	21	23	14
19	22	24	15

Tabla 4. Números de las caras de los dados

2	4	16	5	5	8	20	9	9	13
16	5	17	20	20	9	21	23	23	14

Tabla 5. Cuadrados con diferentes sumas en forma diagonal

En la columna **O1** de la Tabla 6 los números de las caras de los dados están ordenados de menor a mayor y en la columna **O2** en pares de números equidistantes. Las sumas entre los pares de números equidistantes (**Se)** son iguales a 25 para **D2** y **D4** y suman 50 entre ellas. Para **D1** y **D3** son diferentes, pero también suman 50.

D1			D2			D3			D4		
O1	**O2**	**Se**	**O1**	**O2**	**Se**	**O1**	**O2**	**Se**	**O1**	**O2**	**Se**
1	1	**20**	3	3	**25**	6	6	**30**	10	10	**25**
2	19		4	22		7	24		11	15	
16	2	**20**	5	4	**25**	8	7	**30**	12	11	**25**
17	18		20	21		9	23		13	14	
18	16	**23**	21	5	**25**	23	8	**17**	14	12	**25**
19	17		22	20		24	9		15	13	

Tabla 6. Relaciones entre las sumas de los números de las caras de los dados

3.3. Dados octaédricos de Mitwin

¿Cuáles son las regularidades numéricas que se cumplen entre los números de las caras de los tres dados octaédricos de Mitwin? Enunciarlas y expresarlas, de ser posible, simbólicamente.

En la Tabla 7 se destacaron las repeticiones de los números de las caras de los dados dodecaédricos cada dos de ellos.

D1 y D2	**13**	17	**29**	31	37	**43**	**47**	53	**67**	71	73	**83**
	13	19	23	**29**	41	**43**	**47**	59	61	**67**	79	**83**
D2 y D3	13	**19**	**23**	29	**41**	43	47	**59**	**61**	67	**79**	83
	17	19	23	**31**	**37**	41	**53**	59	61	**71**	**73**	79
D3 y D1	17	**19**	**23**	31	37	**41**	53	**59**	**61**	71	73	**79**
	13	**17**	29	**31**	**37**	43	47	**53**	67	**71**	**73**	83

Tabla 7. Repeticiones de los números de las caras de los dados

Las sumas de los números de las caras de cada dado son iguales a 564.

Construyeron uno de los dados para identificar las caras opuestas (Imagen 1 y Figura 2) donde se ubican los números equidistantes en la sucesión (Tabla 8)

Imagen 1. Dado construido por los alumnos

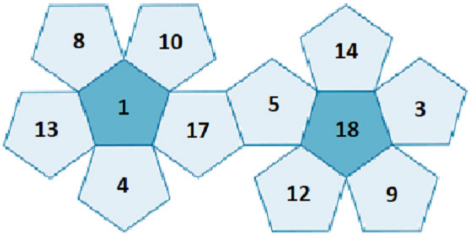


Figura 2. Desarrollo plano de uno de los dados

Caras opuestas del D1	13	17	29	31	37	43
	83	73	71	67	53	47

Tabla 8. Caras opuestas del dado D1

Motivar a los estudiantes implica intervenir para que los que aún tienen dificultades, mejoren sus capacidades relacionadas con el pensamiento intuitivo y reflexivo y para que los que ya pueden implementar estrategias superadoras, se animen a proponer nuevas reglas o a imaginar nuevos juegos (Giarrizzo, 2019, p. 48).

3.4. Prolongaciones posibles

- *Buscar información sobre los dados no transitivos e investigar la existencia o no de regularidades numéricas entre los números de sus caras.*

  Existen otros conjuntos de dados de Efron

  A: (2, 3, 3, 9, 10, 11) (0, 1, 7, 8, 8, 8) (5, 5, 6, 6, 6, 6) (4, 4, 4, 4,12,12)
  B: (1, 2, 3, 9, 10, 11) (0, 1, 7, 8, 9, 9) (5, 5, 6, 6, 7, 7) (3, 4, 4, 5, 11, 12)

  Y también los dados de Mugre (James Grime)

  Las sumas de los números de las caras de estos dados dispuestas en las diagonales son: 4, 7, 9, 10, 10, 35, 26, 18, 11, 5 y 0, 6, 8, 16, 20, 25, 20, 19, 12, 9. En la Tabla 9 se pueden observar dos ejemplos: 1 + 2 + 3 + 4 = 10 y 4 + 3 + 2 + 6 + 5 = 20.

0	**1**	2	3	**4**
5	1	**2**	**3**	4
5	6	**2**	**3**	4
5	**6**	7	3	**4**
5	6	7	8	4
5	6	7	8	9

Tabla 9. Números de las caras de los dados

Si se suman las sumas equidistantes en cada caso se obtienen los mismos múltiplos sucesivos de 9:

4 + 5 = **9**; 7 + 11 = **18**; 9 + 18 = **27**; 10 + 26 = **36**; 10 + 35 = **45**
0 + 9 = **9**; 6 + 12 = **18**; 8 + 19 = **27**; 16 + 20 = **36**; 20 + 25 = **45**

- *Incluir el dado D4: (1, 3, 4, 5, 8, 9, 10, 12, 14, 14, 17, 18) al conjunto de dados de Miwin*[4]
  Las sumas de los números equidistantes de las caras de D4 ordenados de menor a mayor se repiten en forma simétrica:

1 + 18 = **19**; 3 + 17 = **20;** 4 + 14 = **18;** 5 + 13 = **18;** 8 + 12 = **20;** 9 + 10 = **19.**

4. REFLEXIÓN FINAL

Los diseños curriculares incluyen contenidos relacionados con sucesiones cuya complejidad aumenta en función de los conocimientos disponibles de los alumnos. Es tarea de los docentes planificar propuestas de enseñanza para que ellos observen, descubran, analicen y generalicen regularidades, patrones y leyes de formación en distintos contextos.

Y cuando sucedan esos maravillosos encuentros donde los alumnos pregunten para avanzar más allá de lo esperado y los docentes los acompañen en sus descubrimientos, la enseñanza y la evaluación serán compartidas porque "habrán aprendido matemática haciendo matemática".

4. Otro conjunto de dados de Miwin: (1, 2, 5, 6, 7, 9) (1, 3, 4, 5, 8, 9) (2, 3, 4, 6, 7, 8).

> La imaginación en clase de matemáticas necesita ser cultivada. El sentido común también. Imaginación y sentido común no son facultades innatas y además interesa su estimulación, en nuestro caso, en la dirección adecuada: la de la creatividad matemática. Y como la imaginación también puede tener una dimensión grupal y ser compartida, su cultivo va más allá del progreso individual y puede ser un objetivo de clase. (Alsina, 2007, p. 12)

5. REFERENCIAS

Alsina, C. (2007). Educación matemática e imaginación. *UNIÓN. Revista Iberoamericana de Educación Matemática, 11*, 9-17. Recuperado el 15 de octubre de 2021, de https://bit.ly/3E13pGf

Dirección General de Cultura y Educación de la Provincia de Buenos Aires. (2010). Diseño curricular para la Educación Secundaria. Ciclo Superior. ES4: Matemática. Disponible en https://bit.ly/3G80fSU

Giarrizzo, A. (2019). Juego y matemática en la escuela primaria. Un recurso para producir conocimientos geométricos. *Revista Novedades Educativas, 31*(344), 48-54.

Giarrizzo, A. (2021). La enseñanza de la geometría en la escuela secundaria. Materiales didácticos para favorecer el estudio de figuras o cuerpos geométricos. *Revista de Educación Matemática*, Volumen 36, N°2, 51-70. Unión Matemática Argentina - FAMAF (UNC). DOI: https://doi.org/10.33044/revem.34268

Hans Martín, J. A., Muñoz Santonja, J., Fernández-Aliseda Redondo, A. (sf.). *Juegos de azar no transitivos*. Grupo Alquerque de Sevilla. Recuperado el 12 de octubre de 2021, de https://bit.ly/30Q9I15

Épsilon - *Revista de Educación Matemática* **2021, nº 109, 75-91**

Construcción de infinitos cuadrados mágicos multiplicativos

Luis Barrios Calmaestra
I.E.S. José de Mora. Baza. Granada.

Resumen: *Si p y q son dos números primos, cualquier número de la forma* $N=p^n \cdot q^n$*, tiene* $(n+1)^2$ *divisores. En este artículo se expone un procedimiento para construir infinitos cuadrados mágicos multiplicativos de orden 3, 4 y 5, utilizando todos los divisores de N.*
Palabras clave: *cuadrado mágico multiplicativo, divisores de* $p^n \cdot q^n$*, potencias de p·q con p y q números primos.*

Construction of infinite multiplicative magic squares

Abstract: *Let p and q be two prime numbers. Any number define as* $N=p^n \cdot q^n$ *has* $(n+1)^2$ *divisors. This article describes the procedure to construct infinite multiplicative magic squares of order 3, 4 and 5, using all divisors of N.*
Keywords: *multiplicative magic square, divisors of* $p^n \cdot q^n$*, power of p·q where p and q are prime numbers.*

1. INTRODUCCIÓN

Un cuadrado mágico aditivo está formado por un conjunto de números dispuestos en n filas y n columnas, de forma que la suma de los números situados en cada una de las filas, en cada una de las columnas y en las dos diagonales es siempre la misma. A esta suma se le llama constante mágica.

Un cuadrado mágico multiplicativo está formado por un conjunto de números dispuestos en n filas y n columnas, de forma que el producto de los números situados en cada una de las filas, en cada una de las columnas y en las dos diagonales es siempre el mismo. A este producto se le llama constante mágica.

Sobre el origen y el interés de los cuadrados mágicos aditivos a lo largo de la historia hay muchas publicaciones y se pueden encontrar multitud de cuadrados mágicos de cualquier orden, conteniendo a su vez cuadrados mágicos de orden inferior y con muy diversas propiedades que aumentan su complejidad y su admiración por ellos, constituyendo auténticas obras de ingeniería aritmética.

El más conocido, sin duda, es el cuadrado mágico de orden tres con los nueve primeros números naturales, de constante mágica 15, de origen chino y del año 2800 a. C.

6	1	8
7	5	3
2	9	4

De orden cuatro, el más conocido es el cuadrado mágico del artista renacentista alemán Alberto Durero. En uno de sus grabados, Melancolía I, realizado en el año 1514, se pueden observar algunos elementos matemáticos y, en la parte superior derecha, el siguiente cuadrado mágico aditivo, construido con los dieciséis primeros números naturales y de constante mágica 34.

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

Además de las propiedades que debe tener un cuadrado para considerarse mágico, también suman 34, distintos grupos de cuatro números, entre ellos:

- Los números situados en los cuatro cuadrados centrales.
- Los números situados en las cuatro esquinas.
- Los números centrales de las primera y última filas.
- Los números centrales de las primera y última columnas.
- Los números de los cuatro cuadrados que resultan al dividir por la mitad horizontal y verticalmente.
- Las esquinas de los cuadrados de 3x3 que se pueden formar.

Otro cuadrado mágico de orden cuatro, menos conocido que el anterior, pero no menos interesante, es un cuadrado mágico que se conoce como Chautisa Yantra y que se encuentra en la ciudad india de Khajuraho, en la fachada del templo Parsvanatha. En su puerta hay una inscripción del año 954 d.C. con el siguiente cuadrado mágico aditivo, de constante mágica 34.

7	12	1	14
2	13	8	11
16	3	10	5
9	6	15	4

El cuadrado tiene todas las propiedades del cuadrado de Durero y, además:

- los números situados en todos los cuadrados de 2x2 de filas y columnas consecutivas también suman 34.
- los tres números situados en las diagonales secundarias junto con el número situado en la esquina opuesta también suman 34.

Los cuadrados mágicos multiplicativos han sido menos estudiados que los aditivos, aunque, utilizando el producto de potencias con la misma base, a partir de cualquier cuadrado mágico aditivo, se puede construir un cuadrado mágico multiplicativo con potencias de base cualquier número natural distinto de 1 y de exponente cada uno de los números del cuadrado mágico aditivo. Por ejemplo, si n es un número natural mayor que 1, se puede construir infinitos cuadrados mágicos multiplicativos, de orden 3 y de constante mágica n^{15}, de la forma.

n^6	n^1	n^8
n^7	n^5	n^3
n^2	n^9	n^4

Otro cuadrado mágico multiplicativo de orden 3 es el siguiente:

12	1	18
9	6	4
2	36	3

Analizando este cuadrado se puede observar:

- Está formado por todos los divisores de 36. El número 36 se factoriza como $2^2 \cdot 3^2$ y tiene $(2+1)\cdot(2+1)=9$ divisores.

$$\text{div}(36) = \{1, 2, 3, 2^2, 2\cdot 3, 3^2, 2^2\cdot 3, 2\cdot 3^2, 2^2\cdot 3^2\}$$

- El producto de todos los divisores es $2^9\cdot 3^9=6^9=10077696$. La constante mágica se obtiene como la raíz cúbica del producto de todos los divisores, $2^3\cdot 3^3=6^3=216$.
- La casilla central se obtiene como la raíz cúbica de la constante mágica, $2\cdot 3=6$.

2. CUADRADOS MÁGICOS MULTIPLICATIVOS DE ORDEN 3

Si p y q son dos números primos, el número $(pq)^2=p^2q^2$ tiene $(2+1)\cdot(2+1)=9$ divisores:

$$div(p^2q^2) = \{1, p, q, pq, p^2, q^2, pq^2, p^2q, p^2q^2\}$$

Con los nueve divisores anteriores se puede formar un cuadrado mágico multiplicativo de orden 3, de la siguiente forma:

- La constante mágica se obtiene multiplicando todos los números del cuadrado mágico, es decir, multiplicando todos los divisores y calculando la raíz cúbica del resultado obtenido. El producto de todos los divisores es p^9q^9. Su raíz cúbica es p^3q^3.
- Se empieza colocando en la casilla central el número $p\cdot q$, que se obtiene como la raíz cúbica de la constante mágica.
- Se coloca a continuación el número p^2q^2. Solo hay dos grupos de tres números que, junto con p^2q^2, tengan como producto p^3q^3. Son 1, pq, p^2q^2 y p, q, p^2q^2. Si el número que queremos colocar se sitúa en una esquina, debería haber tres grupos de tres números con producto la constante mágica. Como solo pertenece a dos grupos, se debe colocar en la casilla central de uno de los lados. Lo colocamos en la casilla inferior central.
- Ya se puede completar la columna central y la fila inferior. En la fila inferior da igual el orden de los elementos p y q, se obtendrían dos cuadrados simétricos.
- El resto del cuadrado se puede completar añadiendo los elementos que faltan para completar, en primer lugar, las diagonales y, posteriormente, las columnas.

	pq	

→

	1	
	pq	
p	p^2q^2	q

→

$p^2\cdot q$	1	$p\cdot q^2$
q^2	$p\cdot q$	p^2
p	$p^2\cdot q^2$	q

Se pueden construir infinitos cuadrados mágicos mediante este procedimiento, siendo p y q dos números primos cualesquiera.

2.1. Ejemplos

Si p=2 y q=3 → $p^2q^2=2^2\cdot 3^2=36=6^2$
$Div(6^2) = \{1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36\}$
Constante mágica: $p^3q^3=216=6^3$

12	1	18
9	6	4
2	36	3

Si p=2 y q=5 → $p^2q^2=2^2\cdot 5^2=100=10^2$
Div(10^2) = {1, 2, 4, 5, 10, 20, 25, 50, 100}
Constante mágica: $p^3q^3=1000=10^3$

20	1	50
25	10	4
2	100	5

Si p=3 y q=5 → $p^2q^2=3^2\cdot 5^2=225=15^2$
Div(6^2) = {1, 3, 5, 9, 15, 25, 45, 75, 225}
Constante mágica: $p^3q^3=3375=15^3$

45	1	75
25	15	9
3	225	5

Si p y q no son primos, o alguno de los dos no es primo, el procedimiento también es válido, aunque en este caso el cuadrado mágico no contiene todos los divisores de p^2q^2.

2.2. Ejemplo

Si p=3 y q=4 → $p^2q^2=2^4\cdot 3^2=144=12^2$
El número 144 tiene (4+1)·(2+1)=15 divisores.
El cuadrado mágico contiene 9 divisores.
Constante mágica: $p^3q^3=1728=12^3$

36	1	48
16	12	9
3	144	4

3. PROPIEDADES DEL CUADRADO MÁGICO MULTIPLICATIVO DE ORDEN 3

Se van a observar las propiedades en el cuadrado obtenido para p=2 y q=3, pero son ciertas para cualquier cuadrado mágico multiplicativo construido por el procedimiento anterior.

- El producto de los números situados en cada fila es igual a $p^3q^3=216=6^3$.

12	1	18
9	6	4
2	36	3

12	1	18
9	6	4
2	36	3

12	1	18
9	6	4
2	36	3

- El producto de los números situados en cada columna es igual a $p^3q^3=216=6^3$.

12	1	18
9	6	4
2	36	3

12	1	18
9	6	4
2	36	3

12	1	18
9	6	4
2	36	3

- El producto de los números situados en cada diagonal es igual a $p^3q^3=216=6^3$.

12	1	18
9	6	4
2	36	3

12	1	18
9	6	4
2	36	3

- El producto de los siguientes grupos de cuatro números es $p^4q^4=1296=6^4$.

12	1	18
9	6	4
2	36	3

12	1	18
9	6	4
2	36	3

Al realizar giros o simetrías en el cuadrado se obtiene otro cuadrado mágico con las mismas características.

4. CUADRADOS MÁGICOS MULTIPLICATIVOS DE ORDEN 4

Si p y q son dos números primos, el número $(pq)^3=p^3q^3$ tiene $(3+1)\cdot(3+1)=16$ divisores:

$$\mathrm{div}(p^3q^3) = \{1, p, q, pq, p^2, q^2, pq^2, p^2q, p^2q^2, p^3, q^3, pq^3, p^3q, p^2q^3, p^3q^2, p^3q^3\}$$

Con los dieciséis divisores anteriores se puede formar un cuadrado mágico multiplicativo de orden 4, utilizando el procedimiento siguiente.

Hay un pasatiempo formado por 16 tarjetas, coloreadas con cuatro colores distintos, por ejemplo, amarillo, azul, rojo y verde y, enumeradas de con cuatro números diferentes, por ejemplo 1, 2, 3 y 4, de forma que todas las tarjetas son distintas porque se diferencian en el número, en el color o en ambos.

1	2	3	4	1	2	3	4
1	2	3	4	1	2	3	4

El juego consiste en colocar las tarjetas formando un cuadrado de cuatro filas y cuatro columnas, de forma que, en cada fila, en cada columna y en las dos diagonales no se pueden repetir números ni colores.

Para construir el cuadrado mágico se necesita hacer una modificación de este juego utilizando solamente números. Se dispone de 16 tarjetas, cada una tiene una pareja de coordenadas (m,n), siendo m y n números enteros comprendidos entre 0 y 3, ambos incluidos. Vamos a construir un cuadrado de cuatro filas y cuatro columnas, de forma que, en cada fila, en cada columna y en las dos diagonales no se repitan ni la primera ni la segunda coordenada.

Para encontrar una solución:

- En primer lugar, se colocan las cuatro equinas.
- Después se colocan los cuatro cuadrados centrales respetando las condiciones.
- Por último, se completan las casillas vacías.

(0,0)			(2,2)
(1,1)			(3,3)

→

(0,0)			(2,2)
	(1,2)	(3,0)	
	(0,3)	(2,1)	
(1,1)			(3,3)

→

(0,0)	(3,1)	(1,3)	(2,2)
(2,3)	(1,2)	(3,0)	(0,1)
(3,2)	(0,3)	(2,1)	(1,0)
(1,1)	(2,0)	(0,2)	(3,3)

El cuadrado mágico se construye colocando en cada casilla el valor de p elevado a la primera coordenada por el valor de q elevado a la segunda coordenada.

$p^0 \cdot q^0$	$p^3 \cdot q^1$	$p^1 \cdot q^3$	$p^2 \cdot q^2$
$p^2 \cdot q^3$	$p^1 \cdot q^2$	$p^3 \cdot q^0$	$p^0 \cdot q^1$
$p^3 \cdot q^2$	$p^0 \cdot q^3$	$p^2 \cdot q^1$	$p^1 \cdot q^0$
$p^1 \cdot q^1$	$p^2 \cdot q^0$	$p^0 \cdot q^2$	$p^3 \cdot q^3$

→

1	$p^3 \cdot q$	$p \cdot q^3$	$p^2 \cdot q^2$
$p^2 \cdot q^3$	$p \cdot q^2$	p^3	q
$p^3 \cdot q^2$	q^3	$p^2 \cdot q$	p
$p \cdot q$	p^2	q^2	$p^3 \cdot q^3$

En el cuadrado con las coordenadas, la suma de la primera o segunda coordenada en cada fila, en cada columna y en las dos diagonales es igual a 6. Por tanto, la constante mágica de este cuadrado mágico multiplicativo es p^6q^6.

Para cada solución del cuadrado de las coordenadas, se pueden encontrar infinitos cuadrados mágicos multiplicativos mediante este procedimiento siendo p y q dos números primos cualesquiera.

Además, para cada valor de p y q se pueden permutar los exponentes, obteniendo $4! \cdot 4! = 24 \cdot 24 = 576$ cuadrados distintos.

4.1. Ejemplos

Si p=2 y q=3 → $p^3q^3=2^3\cdot 3^3=216=6^3$
Div(6^3) = {1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 18, 24, 27, 36, 54, 72, 108, 216}
Constante mágica: $p^6q^6=2^6\cdot 3^6=46656=6^6$

1	24	54	36
108	18	8	3
72	27	12	2
6	4	9	216

Si p=2 y q=5 → $p^3q^3=2^3\cdot 5^3=1000=10^3$
Div(10^3) = {1, 2, 4, 5, 8, 10, 20, 25, 40, 50, 100, 125, 200, 250, 500, 1000}
Constante mágica: $p^6q^6=2^6\cdot 5^6=1000000=10^6$

1	40	250	100
500	50	8	5
200	125	20	2
10	4	25	1000

Si p=3 y q=5 → $p^3q^3=3^3\cdot 5^3=3375=15^3$
Div(15^3) = {1, 3, 5, 9, 15, 25, 27, 45, 75, 125, 135, 225, 375, 675, 1125, 3375}
Constante mágica: $p^6q^6=2^6\cdot 3^6=11390625=15^6$

1	135	375	225
1125	75	27	5
675	125	45	3
15	9	25	3375

Si p y q no son primos, o alguno de los dos no es primo, el procedimiento también es válido, aunque en este caso el cuadrado mágico no contiene todos los divisores de p^3q^3.

4.2. Ejemplo

Si p=3 y q=4 → $p^3q^3=2^6\cdot 3^3=1728=12^3$
El número 1728 tiene (6+1)·(3+1)=28 divisores.
El cuadrado mágico contiene 16 divisores.
Constante mágica: $p^6q^6=2985984=12^6$

1	108	192	144
576	48	27	4
432	64	36	3
12	9	16	1728

5. PROPIEDADES DEL CUADRADO MÁGICO MULTIPLICATIVO DE ORDEN 4

Las propiedades de este cuadrado mágico son muy similares a las propiedades del cuadrado mágico aditivo de orden 4 de Alberto Durero.

Se van a observar las propiedades en el cuadrado obtenido para p=2 y q=3, pero son ciertas para cualquier cuadrado mágico multiplicativo construido por el procedimiento anterior.

- El producto de los números situados en cada fila es igual a $p^6q^6=6^6$.

1	**24**	**54**	**36**
108	18	8	3
72	27	12	2
6	4	9	216

1	24	54	36
108	**18**	**8**	**3**
72	27	12	2
6	4	9	216

1	24	54	36
108	18	8	3
72	**27**	**12**	**2**
6	4	9	216

1	24	54	36
108	18	8	3
72	27	12	2
6	**4**	**9**	**216**

- El producto de los números situados en cada columna es igual a $p^6q^6=6^6$.

1	24	54	36
108	18	8	3
72	27	12	2
6	4	9	216

1	**24**	54	36
108	**18**	8	3
72	**27**	12	2
6	**4**	9	216

1	24	**54**	36
108	18	**8**	3
72	27	**12**	2
6	4	**9**	216

1	24	54	**36**
108	18	8	**3**
72	27	12	**2**
6	4	9	**216**

- El producto de los números situados en cada diagonal es igual a $p^6q^6=6^6$.

1	24	54	36
108	**18**	8	3
72	27	**12**	2
6	4	9	**216**

1	24	54	**36**
108	18	**8**	3
72	**27**	12	2
6	4	9	216

- El producto de los cuatro números situados en las esquinas es igual a $p^6q^6=6^6$. También el producto de los números situados en los cuatro cuadrados centrales.

1	24	54	**36**
108	18	8	3
72	27	12	2
6	4	9	**216**

1	24	54	36
108	**18**	**8**	3
72	**27**	**12**	2
6	4	9	216

- Si dividimos el cuadrado por la mitad de forma horizontal y verticalmente, se obtienen cuatro cuadrados con cuatro números cada uno. El producto de los números situados en cada uno de los cuadrados es igual a $p^6q^6=6^6$.

1	**24**	54	36
108	**18**	8	3
72	27	12	2
6	4	9	216

1	24	**54**	**36**
108	18	**8**	**3**
72	27	12	2
6	4	9	216

1	24	54	36
108	18	8	3
72	**27**	12	2
6	**4**	9	216

1	24	54	36
108	18	8	3
72	27	**12**	**2**
6	4	**9**	**216**

- El producto de los dos números centrales de las filas inferior y superior y el producto de los números centrales de las columnas izquierda y derecha es igual a $p^6q^6=6^6$.

1	**24**	**54**	36
108	18	8	3
72	27	12	2
6	**4**	**9**	216

1	24	54	36
108	18	8	**3**
72	27	12	**2**
6	4	9	216

- El producto de los números situados en las esquinas de los cuadrados de 3×3 es igual a $p^6q^6=6^6$.

1	24	**54**	36
108	18	8	3
72	27	**12**	2
6	4	9	216

1	**24**	54	**36**
108	18	8	3
72	**27**	12	**2**
6	4	9	216

1	24	54	36
108	18	**8**	3
72	27	12	2
6	4	**9**	216

1	24	54	36
108	**18**	8	**3**
72	27	12	2
6	**4**	9	**216**

- Otras configuraciones de cuatro números cuyo producto es $p^6q^6=6^6$.

1	**24**	54	36
108	18	8	3
72	27	12	**2**
6	4	**9**	216

1	24	**54**	36
108	18	8	**3**
72	27	12	2
6	**4**	9	216

1	24	54	36
108	18	**8**	3
72	**27**	12	2
6	4	9	**216**

1	24	54	**36**
108	**18**	8	3
72	27	**12**	2
6	4	9	216

1	24	54	36
108	18	8	3
72	27	12	2
6	4	9	216

1	24	54	36
108	18	8	3
72	27	12	2
6	4	9	216

Al realizar giros o simetrías en el cuadrado se obtiene otro cuadrado mágico con las mismas características.

6. CUADRADOS MÁGICOS MULTIPLICATIVOS DE ORDEN 5

Si p y q son dos números primos, el número $(pq)^4=p^4q^4$ tiene $(4+1)\cdot(4+1)=25$ divisores:

$$div(p^4q^4) = \{1, p, q, pq, p^2, q^2, pq^2, p^2q, p^2q^2, p^3, q^3, pq^3, p^3q, p^3q^3, p^2q^3, p^3q^2, p^4, q^4, pq^4, p^4q, p^2q^4, p^4q^2, p^3q^4, p^4q^3, p^4q^4\}$$

Con los veinticinco divisores anteriores se puede formar un cuadrado mágico multiplicativo de orden 5, con un cuadrado mágico multiplicativo de orden 3 en su interior.

La constante mágica se obtiene multiplicando todos los números del cuadrado mágico y calculando la raíz quinta del resultado obtenido. El producto de todos los números es $p^{50}q^{50}$, se puede calcular sumando por separado los exponentes de p y q de todos los divisores. Su raíz quinta será $p^{10}q^{10}$.

El número de la casilla central debe ser p^2q^2, que se obtiene calculando la raíz quinta de la constante mágica.

Para construir el cuadrado mágico de orden 3, cuya casilla central sea p^2q^2, se puede multiplicar por "p·q" los números del cuadrado mágico multiplicativo de orden 3 anterior.

$p^2\cdot q$	1	$p\cdot q^2$
q^2	$p\cdot q$	p^2
p	$p^2\cdot q^2$	q

→

$p^3\cdot q^2$	$p\cdot q$	$p^2\cdot q^3$
$p\cdot q^3$	$p^2\cdot q^2$	$p^3\cdot q$
$p^2\cdot q$	$p^3\cdot q^3$	$p\cdot q^2$

Se obtiene un cuadrado mágico multiplicativo de constante mágica p^6q^6.

Se han utilizado los divisores indicados en negrita:

$$div(p^4q^4) = \{1, p, q, \mathbf{pq}, p^2, q^2, \mathbf{pq^2}, \mathbf{p^2q}, \mathbf{p^2q^2}, p^3, q^3, \mathbf{pq^3}, \mathbf{p^3q}, \mathbf{p^3q^3}, \mathbf{p^2q^3}, \mathbf{p^3q^2}, p^4, q^4, pq^4, p^4q, p^2q^4, p^4q^2, p^3q^4, p^4q^3, p^4q^4\}$$

Para completar una de las posibles soluciones del cuadrado de orden 5, se colocan los divisores no utilizados, empezando por las esquinas, después las casillas centrales y, por último, las casillas restantes, procurando que el producto de los números de cada fila, columna y diagonal coincida con la constante mágica.

Se obtiene el cuadrado:

$p^0 \cdot q^0$	$p^0 \cdot q^3$	$p^2 \cdot q^4$	$p^4 \cdot q^3$	$p^4 \cdot q^0$
$p^3 \cdot q^4$	$p^2 \cdot q^3$	$p^1 \cdot q^1$	$p^3 \cdot q^2$	$p^1 \cdot q^0$
$p^4 \cdot q^2$	$p^3 \cdot q^1$	$p^2 \cdot q^2$	$p^1 \cdot q^3$	$p^0 \cdot q^2$
$p^3 \cdot q^0$	$p^1 \cdot q^2$	$p^3 \cdot q^3$	$p^2 \cdot q^1$	$p^1 \cdot q^4$
$p^0 \cdot q^4$	$p^4 \cdot q^1$	$p^2 \cdot q^0$	$p^0 \cdot q^1$	$p^4 \cdot q^4$

Se pueden construir infinitos cuadrados mágicos mediante este procedimiento siendo p y q dos números primos cualesquiera.

6.1. Ejemplos

Si p=2 y q=3 → $p^4q^4=2^4 \cdot 3^4=1296=6^4$
Div(6^4) = {1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 16, 18, 24, 27, 36, 48, 54, 72, 81, 108, 144, 162, 216, 324, 432, 648, 1296}
Constante mágica: $p^{10}q^{10}=2^{10} \cdot 3^{10}=6^{10}$

1	27	324	432	16
648	108	6	72	2
144	24	36	54	9
8	18	216	12	162
81	48	4	3	1296

Si p=2 y q=5 → $p^4q^4=2^4 \cdot 5^4=10000=10^4$
Div(10^4) = {1, 2, 4, 5, 8, 10, 16, 20, 25, 40, 50, 80, 100, 125, 200, 250, 400, 500, 625, 1000, 1250, 2000, 2500, 5000, 10000}
Constante mágica: $p^{10}q^{10}=2^{10} \cdot 5^{10}=10^{10}$

1	125	2500	2000	16
5000	500	10	200	2
400	40	100	250	25
8	50	1000	20	1250
625	80	4	5	10000

Si p=3 y q=5 → $p^4q^4=3^4\cdot5^4=50625=15^4$
Div(15^4) = {1, 3, 5, 9, 15, 25, 27, 45, 75, 81, 125, 135, 225, 375, 405, 625, 675, 1125, 1875, 2025, 3375, 5625, 10125, 16875, 50625}
Constante mágica: $p^{10}q^{10}=3^{10}\cdot5^{10}=15^{10}$

1	125	5625	10125	81
16875	1125	15	675	3
2025	135	225	375	25
27	75	3375	45	1875
625	405	9	5	50625

Si p y q no son primos, o alguno de los dos no es primo, el procedimiento también es válido, aunque en este caso el cuadrado mágico no contiene todos los divisores de p^4q^4.

6.2. Ejemplo

Si p=3 y q=4 → $p^4q^4=2^83^4=20736=12^4$
El número 20736 tiene (8+1)·(4+1)=45 divisores.
El cuadrado mágico contiene 25 divisores.
Constante mágica: $p^{10}q^{10}=12^{10}$

1	64	2304	5184	81
6912	432	12	576	3
1296	192	144	108	16
27	36	1728	48	768
256	324	9	4	20736

7. PROPIEDADES DEL CUADRADO MÁGICO MULTIPLICATIVO DE ORDEN 5

Se van a observar las propiedades en el cuadrado obtenido para p=2 y q=3, pero son ciertas para cualquier cuadrado mágico multiplicativo construido por el procedimiento anterior.

Por ser un cuadrado mágico multiplicativo, el producto de los números situados en las filas, columnas y las dos diagonales es igual, tanto en el cuadrado de orden 3 como en el de orden 5, a la constante mágica de cada uno de ellos.

Con los veinticinco divisores de 1296 (p^4q^4) se pueden formar doce parejas de números cuyo producto es 1296. Estas parejas están situadas en el cuadrado de forma simétrica respecto de los ejes de simetría horizontal o vertical, o respecto de la casilla central. Esto supone que se puedan combinar en grupos de números cuyo producto sea una potencia de pq=6 y que formen en el cuadrado configuraciones simétricas.

- Algunos grupos de cuatro números cuyo producto es $p^8q^8=6^8$, con la casilla central, $p^{10}q^{10}=6^{10}$.

1	27	324	432	**16**
648	108	6	72	2
144	24	36	54	9
8	18	216	12	162
81	48	4	3	**1296**

1	27	324	432	16
648	**108**	6	**72**	2
144	24	36	54	9
8	**18**	216	**12**	162
81	48	4	3	1296

1	27	**324**	432	16
648	108	6	72	2
144	24	36	54	**9**
8	18	216	12	162
81	48	**4**	3	1296

1	27	324	432	16
648	108	**6**	72	2
144	**24**	36	**54**	9
8	18	**216**	12	162
81	48	4	3	1296

- Algunos grupos de ocho números cuyo producto es $p^{16}q^{16}=6^{16}$, con la casilla central, $p^{18}q^{18}=6^{18}$.

1	27	324	432	**16**
648	**108**	6	**72**	2
144	24	36	54	9
8	**18**	216	**12**	162
81	48	4	3	**1296**

1	27	**324**	432	16
648	**108**	6	**72**	2
144	24	36	54	**9**
8	**18**	216	**12**	162
81	48	**4**	3	1296

1	27	**324**	432	16
648	108	**6**	72	2
144	**24**	36	**54**	**9**
8	18	**216**	12	162
81	48	**4**	3	1296

1	27	**324**	432	**16**
648	108	6	72	2
144	24	36	54	**9**
8	18	216	12	162
81	48	**4**	3	**1296**

1	**27**	324	**432**	16
648	108	6	72	**2**
144	24	36	54	9
8	18	216	12	**162**
81	**48**	4	**3**	1296

1	27	324	432	16
648	**108**	**6**	**72**	2
144	**24**	36	**54**	9
8	**18**	**216**	**12**	162
81	48	4	3	1296

- Algunos grupos de doce números cuyo producto es $p^{24}q^{24}=6^{24}$, con la casilla central, $p^{26}q^{26}=6^{26}$.

1	27	324	432	16
648	108	6	72	2
144	24	36	54	9
8	18	216	12	162
81	48	4	3	1296

1	27	324	432	16
648	108	6	72	2
144	24	36	54	9
8	18	216	12	162
81	48	4	3	1296

1	27	324	432	16
648	108	6	72	2
144	24	36	54	9
8	18	216	12	162
81	48	4	3	1296

1	27	324	432	16
648	108	6	72	2
144	24	36	54	9
8	18	216	12	162
81	48	4	3	1296

- Algunos grupos de dieciséis números cuyo producto es $p^{32}q^{32}=6^{32}$, con la casilla central, $p^{34}q^{34}=6^{34}$.

1	27	324	432	16
648	108	6	72	2
144	24	36	54	9
8	18	216	12	162
81	48	4	3	1296

1	27	324	432	16
648	108	6	72	2
144	24	36	54	9
8	18	216	12	162
81	48	4	3	1296

1	27	324	432	16
648	108	6	72	2
144	24	36	54	9
8	18	216	12	162
81	48	4	3	1296

1	27	324	432	16
648	108	6	72	2
144	24	36	54	9
8	18	216	12	162
81	48	4	3	1296

Al realizar giros o simetrías en el cuadrado se obtiene otro cuadrado mágico con las mismas características.

8. PROPUESTA DE UTILIZACIÓN EN EL AULA

La utilización de actividades de Matemáticas Recreativas en nuestras clases nos permite captar la atención de nuestro alumnado, utilizar estrategias de resolución de problemas y hacer pensar y reflexionar sobre los procedimientos de resolución utilizados y los resultados obtenidos.

Si además estas actividades tienen relación con los contenidos académicos que estemos trabajando en ese momento, nos ayudarán a reforzarlos y a que el alumnado vea utilidad y se sienta más interesado por lo que está estudiando.

Los cuadrados mágicos, tanto aditivos como multiplicativos, despiertan esta curiosidad en el alumnado. Las coincidencias en las sumas o en los productos de filas, columnas y diagonales que tiene un pequeño conjunto de números dispuestos en filas y columnas le dan esa imagen de mágicos que indica su nombre.

Los cursos apropiados para realizar esta actividad pueden ser segundo y tercero de E.S.O. Los contenidos del currículo relacionados son divisibilidad, potencias, raíces, giros, simetrías y valor numérico de una expresión algebraica.

La actividad se puede plantear intentado que, dirigidos por el profesor, sean los alumnos quienes vayan realizando los pasos necesarios para la construcción de los cuadrados mágicos.

Los cuadrados mágicos multiplicativos de este artículo están construidos utilizando los divisores de algunos números naturales.

1. Podemos empezar preguntando ¿cuántos números se necesitan para formar un cuadrado mágico? Para el de orden 3 se necesitan 9, para el de orden 4 se necesitan 16, …. Y ahora preguntar ¿qué propiedad común tienen estos números?
2. Para construir un cuadrado mágico con todos los divisores se necesita que el número de divisores sea un cuadrado perfecto. ¿Qué tipo de números tienen esta cantidad de divisores? ¿Cómo se puede calcular el número de divisores de cualquier número? ¿Cómo tiene que ser su descomposición en factores primos?
3. Ahora tenemos que calcular todos los divisores. Se puede empezar calculando la factorización de algunos de los números que vamos a necesitar 36, 216 o 1296, para después proponer, de forma general, el cálculo de los divisores de números cuya factorización sea de la forma $N_1=p^2\cdot q^2$, $N_2=p^3\cdot q^3$, $N_3=p^4\cdot q^4$.
4. Después de calcular todos los divisores, para construir el cuadrado se necesita calcular la constante mágica. Se pueden pedir a los alumnos ideas para su cálculo. Una vez descubierta la forma de calcularla, vamos a hacerlo de forma generalizada. Se multiplican todos los divisores aplicando el producto de potencias con la misma base. Ahora hay que calcular la raíz cúbica, cuarta o quinta, según el orden del cuadrado mágico, para conocer el producto de los elementos de cada línea, que también se puede deducir aplicando propiedades de las potencias.
5. Ya se conoce la constante mágica, ¿cuál puede ser la casilla central en el cuadrado mágico de orden 3? Nuevo turno de propuestas para decidir la mejor opción.
6. Ya estamos en condiciones de colocar el resto de números para construir el cuadrado, el de orden 3 lo pueden decidir los alumnos, los de orden 4 y 5 será el profesor o profesora quién tenga que darles la solución. Aunque si se dispone de

tiempo para realizar la actividad, también puede ser protagonista el alumnado con el procedimiento descrito en este artículo.

7. Vamos a realizar la comprobación de que los cuadrados numéricos construidos verifican las propiedades de un cuadrado mágico multiplicativo y estudiar también el resto de propiedades que encierra el cuadrado obtenido.

8. En cada uno de los cuadrados construidos en este artículo se indica que al realizar giros o simetrías en el cuadrado se obtiene otro cuadrado mágico con las mismas características. Se puede proponer también al alumnado que realice giros de 90º, 180º y 270º o simetrías respecto de los ejes de simetría de un cuadrado y que obtenga los cuadrados resultantes. Sin hacer cálculos, deducir si el nuevo cuadrado también es un cuadrado mágico multiplicativo.

9. Para finalizar, como se pueden construir infinitos cuadrados mágicos multiplicativos, vamos a repartir entre nuestro alumnado cuadrados mágicos. Les proponemos que elijan dos números primos y que construyan con ellos un cuadrado de orden 3, otro de orden 4 y otro de orden 5, sustituyendo en la expresión general de los cuadrados de cada orden los valores de p y q por los primos elegidos. Pueden hacer algunas comprobaciones para asegurarse de que han obtenido cuadrados mágicos multiplicativos.

9. CONCLUSIÓN

Los cuadrados mágicos han sido objeto de estudio de todas las civilizaciones y de los matemáticos más importantes de toda la historia. Existen multitud de cuadrados mágicos con propiedades adicionales a las que le dan la denominación de mágico.

Cuando nuestros alumnos y alumnas conocen los cuadrados mágicos y les explicamos las propiedades que poseen, también muestran su curiosidad y admiración por estos objetos matemáticos. Si además les hacemos partícipes en su construcción, como se indica en la propuesta de utilización en el aula, haciéndoles pensar y reflexionar en cada uno de los pasos necesarios para obtenerlos, llegarán a una mejor comprensión y a un mayor interés por ellos.

En este artículo se ha podido comprobar que se pueden construir infinitos cuadrados mágicos multiplicativos con las propiedades básicas de un cuadrado mágico y otras muchas propiedades similares a las de los cuadrados mágicos aditivos más conocidos.

10. REFERENCIAS

Alegría, P. (2009). La magia de los cuadrados mágicos. *Sigma, 34*, 107-128.

Andrews, W. S. (1960). *Magic squares and cubes*. Dover: Dordrech

Web. *The smallest possible multiplicative magic squares* (S. D.). Recuperado el 17 de noviembre de 2021. http://www.multimagie.com/English/Multiplicative.htm