106

2020

épsilon

Revista de Educación Matemática

Editada por la S.A.E.M. "THALES"

epsilon 106

Revista de Educación Matemática

Página de la revista: http://thales.cica.es/epsilon
Revista: epsilon@thales.cica.es

Sociedad Andaluza de Educación Matemática "Thales"

Edita
Sociedad Andaluza de
Educación Matemática "Thales"
Centro Documentación "Thales"
Universidad de Cádiz
C.A.S.E.M.
Facultad de Ciencias
Departamento de Matemáticas
Campus del Río San Pedro
Torre Central, 4ª planta
11510 Puerto Real (Cádiz)
Teléfono: 956012833
Email: thales.matematicas@uca.es

Maquetación
referencias.maquetacion@gmail.com

Depósito Legal
SE-421-1984

ISSN
2340-714X

Período
2020
Suscripción
Anual

SUMARIO / CONTENTS

Editorial

Cada día es más visible la buena aceptación de la revista Épsilon en la comunidad académica latinonamericana. Hay un notable incremento en el número de artículos y experiencias de aula que desde esta región se envían a la revista. Este era uno de los própositos marcados por el actual equipo editorial de Épsilon cuando asumimos su gestión.

En este número será el último de la sección Rincón “SAPERE AUDE”… ¿resolviendo problemas? que ha estado a cargo de nuestro compañero y amigo Sixto Romero. Desde el año 2016 Sixto ha compartido con nuestro lectores una sección que tal como el indicaba en esa primera vez “Con esta nueva sección se quiere poner de manifiesto como la vida real, y no tan real, nos ofrece bellos ejemplos de reflexión para que el matemático pueda realizar cualquier trabajo susceptible de ser modelado” (Romero, 2016), ha venido proponiendo problemas, situaciones y píldoras de historia de las matemáticas de gran utilidad para el profesorado de matemáticas.

Han sido por tanto cinco años de ardua y fructífera colaboración desinteresasda, por eso desde este editorial quiero, en nombre de todo el equipo de la revista Épsilon, agradecer la labor de Sixto. Muchas gracias amigo y éxitos en tus nuevos proyectos.

Referencias

Romero, S. (2016). Rincón “Sapere Aude”…¿ resolviendo problemas?. *Revista Épsilon*, (92), 88-98.

Alexander Maz Machado
Director

***Épsilon** - Revista de Educación Matemática* **2020, nº 106, 9-17**

Creatividad, garante de la competencia matemática. Estudio del "razonamiento lineal" en la resolución de problemas

Carlos Manuel Falcón-Rodríguez
María Antonia García Cruz
Ramiro Rueda-Enciso
Instituto Superior de Formación Docente Salomé Ureña, República Dominicana

Resumen. *Presentamos aquí una forma de clasificar los problemas de acuerdo a las relaciones funcionales necesarias en su solución. Hemos escogido, para comenzar, las relaciones funcionales asociadas al razonamiento lineal, ya que ellas son las que parcialmente se sometían a este tipo de clasificación en la práctica de la enseñanza. Presentamos los resultados de un proyecto de investigación acción, en el cual se ha logrado la clasificación de problemas inéditos y con variados contextos y la evaluación del efecto de los mismos en grupos diversos. Una de las conclusiones del trabajo es que el aprendizaje basado en problemas es el más apropiado para el logro de esta competencia en los estudiantes.*
Palabras claves: *creatividad, aprendizaje basado en problemas, clasificación de problemas, relaciones funcionales.*

Creativity, guarantee of the mathematical competence. Study of "linear reasoning" in problem solving

Abstract. *We show here a problem classification attending to the functional relations that are necessary in their solutions. As a beginning we chose the functional relations linked with the linear reasoning, because they have been partially classified in the teaching practice. We exhibit the results of an action research project that made and classified a bank of problems with different contexts. The effect of these problems on diverse groups of students was evaluated. One of the conclusions of this work is that the problem-based learning is the best way to achieve the students' competence in linear reasoning.*
Keywords: *creativity, problem-based learning, problem classification, functional relations.*

INTRODUCCIÓN

En el desarrollo de la competencia matemática el individuo atraviesa varias etapas, correspondientes a la Taxonomía de Bloom, adquiriendo dominio en, conocimiento, comprensión, aplicación, análisis, síntesis y evaluación. A la vez esta competencia se estructura en las dimensiones:

1. Cantidad
2. Espacio y forma
3. Cambio y relaciones
4. Incertidumbre y datos
5. Resolución de problemas

La meta del proceso de enseñanza de la Matemática es que los individuos tengan "la capacidad individual para identificar y comprender el papel que desempeñan las matemáticas en el mundo, emitir juicios bien fundados, utilizar las matemáticas y comprometerse con ellas, y satisfacer las necesidades de la vida personal como ciudadano constructivo, comprometido y reflexivo" (OECD, 2003, p. 24), más aún en estos tiempos que, como señalan Ortiz-Buitrago y Sánchez-Tovar (2020), deben reorientarse los procedimientos de actuación en la formación para todos, ajustándolos a las necesidades que la realidad demanda.

En nuestro trabajo como investigadores y maestros de matemáticas, observamos que los puntos de vista que aparecen arriba no destacan el aspecto fundamental y sólo lo mencionan como un elemento más, un mérito del que se podría prescindir y todavía la competencia no sufriría grandes contratiempos. Nos explicamos con algunos ejemplos:

La siguiente lista podría resultar muda para un individuo,

$$1.5 \quad 270^{o} \quad \frac{3}{2} \quad 150\% \quad \frac{12}{8} \quad 3\pi \quad 0.015\times 10^{2}$$

Para otros con la competencia matemática en la dimensión de cantidad, sugeriría diferentes relaciones funcionales, relacionadas con porcentaje, ángulo de media vuelta o una vuelta completa, divisores de un número, máximo común divisor, simplificación de fracciones, escritura en el sistema decimal etc.

Si nos tomamos la licencia de hablar de grados sexagesimales con números decimales, dándole el sentido obvio a la expresión y olvidando la preferencia que da el sistema a la base 60, la pregunta,

¿Cuántos radianes hay π en grados sexagesimales?

Es un medidor de como las relaciones funcionales asociadas a la multiplicación y división son parte de la competencia matemática del que responde.

En los dos casos presentados lo fundamental no es saber la definición de porcentaje, máximo común divisor, grado sexagesimal o radián. Los campos conceptuales e incluso los esquemas, Vergnaud (1993), ayudan a formar y luego adornan la competencia matemática. Lo fundamental es manejar las relaciones funcionales de multiplicación y división en todo su significado. Ellas pueden ser correctamente aplicadas, después de simples definiciones, si se han interiorizado en significado. Al desnudar cada situación del vestido contextual quedan las relaciones funcionales. Con la intención de traer más claridad en lo que planteamos, citamos a Vergnaud (1993. p. 21): "El homomorfismo entre lo real y la representación no debe ser buscado en primer lugar al nivel de los simbolismos, sino al nivel de los invariantes operatorios contenidos en los esquemas. Es ahí donde se sitúa la base principal de la conceptualización de lo real". Los esquemas en distintos campos conceptuales sin duda son los que forman el concepto abstracto del homomorfismo. Al final deben quedar las relaciones funcionales, con todas sus propiedades, en la misma forma que cuando nos dicen "blanco", no pensamos en nubes o caballos y podemos aplicar este concepto abstracto a cosas desconocidas.

En García-Cruz y Falcón-Rodríguez (2018) explicamos el punto de vista del párrafo anterior, en relación con la clasificación de problemas. También hacemos una ligera incursión en como este punto de vista podría modificar el mismo concepto de competencia matemática y desmitificar el concepto de creatividad en Matemáticas.

Hoy queremos compartir los resultados obtenidos en el proceso de investigación-acción sobre la clasificación de problemas de un área común, no por el contexto, sino por las relaciones funcionales que se utilizan en la solución de problemas. Hemos llamado a la competencia asociada a este paquete de relaciones funcionales "razonamiento lineal". La mayor parte de la enseñanza secundaria y buena parte de la superior se relaciona con esta competencia. Más aún, los individuos que han adquirido esta competencia, difícilmente fracasen en sus estudios de Matemáticas superiores o no sean considerados como personas hábiles en Matemáticas. Hemos dividido esta competencia según el tipo de relaciones funcionales en cinco puntos que forman una unidad orgánica.

Razonamiento lineal

1. Operaciones básicas (suma, multiplicación, resta y división)
2. Proporcionalidad
3. Espacios lineales
4. Superposición
5. Reconocimiento de la no linealidad

Para cada una de los puntos anteriores, daremos dos ejemplos de problemas, que clarifican el sentido de esta división.

Operaciones básicas (suma, multiplicación, resta y división)

1. Los padres acuerdan con el hijo que por cada día que saque el perro a pasear le darán \$100, y por cada día que no lo saque, él les dará a ellos \$100. En un mes

completo el muchacho ganó \$1900. Sabiendo que el año no es bisiesto, ¿Cuántos días tiene ese mes?

2. El espacio recorrido durante el segundo enésimo, por un móvil que se mueve con movimiento uniformemente acelerado, puede aproximarse por,

$$s_n = V_n$$

Donde V_n es la velocidad medida al principio de este segundo. Deducimos de esto que el espacio total recorrido por el móvil hasta el instante n es,

$$S_n = s_1 + s_2 + s_3 + \ldots + s_n$$

Halle la expresión que describe S_n y compruebe que con la aproximación usada se obtiene que el espacio recorrido depende cuadráticamente del tiempo.

Proporcionalidad

1. Una piscina se puede llenar en 5 horas con 3 bombas grandes y 2 pequeñas. Igualmente se llena en 5 horas cuando usamos 2 grandes y 7 pequeñas. ¿Cuánto demorará en llenarse con una grande y 3 pequeñas? ¿Cuáles otras combinaciones de bombas grandes y pequeñas llenan la piscina en 5 horas?

2. Los alumnos de un curso de Matemática se dividen en tres grupos con la misma cantidad de alumnos. Si en una prueba los dos primeros grupos tienen 70% y 80% de aprobados respectivamente, ¿Cuál debería ser el porcentaje de aprobados del tercer grupo para que en total los alumnos de Matemática tuvieran el 82% de aprobados?
El texto nos dice que cada grupo contiene 1/3 del total de estudiantes. ¿Cómo resolver el problema si las fracciones que representan los grupos fueran 1/5, 2/5 y 2/5?

Espacios lineales

1. Sean a, b $\in \mathbb{R}^{\alpha}$ y b $\neq 0 \in \mathbb{R}^{\alpha}$ (El símbolo 0, significa según el valor de α=1,2 ó 3, el mismo 0, el (0, 0) o el (0, 0, 0). Llamamos recta que pasa por, con vector director al subconjunto de $\mathbb{R}^{\alpha}$:

$$r\,(a,b) = \{a+\lambda b / \lambda \in \mathbb{R}\}$$

Dadas dos rectas r_1 y r_2 probar que es cierta la siguiente tricotomía:

a) $r_1 = r_2$
b) $r_1 \cap r_2 = \varnothing$
c) $r_1 \cap r_2$ es un conjunto unitario

Discutir el resultado de acuerdo al valor de α.

2. Compruebe que las homotecias llevan líneas rectas en líneas rectas y que, dados dos puntos del plano, sus imágenes por una homotecia están a una distancia en razón fija con la distancia que hay entre ellos. Pruebe que esto implica que se conservan los ángulos entre dos segmentos concurrentes. Cuando una transformación conserva ángulos se dice que es una transformación conforme.

Superposición

1. Dos disoluciones acuosas de sal común están al 3.5% y 7% respectivamente. ¿Qué tipo de disoluciones podemos obtener mezclando porciones de ellas?
   Obtenga el valor exacto de las porciones para obtener una disolución al 5%.
2. Un certificado de depósito da intereses del 4% anual que se pagan en la forma de 0.33% mensualmente. Los intereses se depositan en la cuenta al principio de cada mes y ese primer mes no acumulan nuevos intereses, empezando a acumular en el segundo mes. Si después de 4 años completos, la cuenta tiene 1,000,000 de pesos. ¿Cuál fue el depósito inicial?

Reconocimiento de la no linealidad

1. ¿Corriendo los primeros 400 m de una carrera de 800 m a una velocidad V, y los otros cuatrocientos a la velocidad $2V$, se hace el mismo tiempo que si corremos todo el tiempo a la velocidad $3V/2$?
2. Dos líneas aéreas reducen sus vuelos. La primera de 90,000 Km. a 80,000 km. diarios. La segunda de 60,000 a 55,000 km. al día. ¿Cuál tendrá que despedir más trabajadores?

Nuestra tesis es:

La creatividad en el "razonamiento lineal" es la posibilidad de aplicar las relaciones funcionales asociadas a todas las unidades descritas arriba, de una manera interrelacionada y en cualquier contexto. Es la existencia de esta creatividad la que garantiza la posesión de la competencia.

La creatividad mencionada en el párrafo anterior, es la que en [3] llamamos creatividad de tipo 1. La creatividad de tipo 2 es aquella en la que el individuo descubre o inventa nuevas (para el sujeto) relaciones funcionales que resuelvan o modifiquen el estado de un problema.

METODOLOGÍA Y RESULTADOS

El equipo de investigación ha realizado talleres experimentales con estudiantes de diversos niveles. Los talleres han sido planeados con las siguientes características:

Objetivos de los talleres

1. Evaluar, al comienzo, competencias específicas adquiridas.
2. Evaluar, al comienzo, la creatividad ante el tipo de problemas planteados.
3. Evaluar cómo se estimula el camino a la creatividad mediante la selección adecuada de la secuencia de problemas.
4. Realizar una evaluación final por parte del especialista en relación a competencias adquiridas y creatividad del grupo.
5. Evaluación de la conveniencia de introducir el "razonamiento lineal "como la competencia abarcadora de las habilidades para resolver problemas de:
   - Sumas y multiplicaciones.
   - Proporcionalidad.
   - Espacios lineales.
   - Superposición.
   - Identificación de la "no linealidad".

Instrucciones dadas en los talleres

La actividad debe desarrollarse de la forma más espontánea posible, para que el instructor- especialista pueda hacer una evaluación objetiva de la situación del grupo. Se invitará al grupo a trabajar en equipos y a que se expliquen unos a otros los puntos de vista. No es necesario llevar las soluciones hasta el final. Para finalizar los estudiantes serán involucrados en la evaluación de la actividad. La escala de evaluación será de 1 a 5, siendo 1 la respuesta más negativa y 5 la más positiva (Tabla 1). Además del instructor, cada estudiante llenará un modelo.

El material que se ha utilizado en la confección de los talleres se ha preparado utilizando la retroalimentación de los mismos talleres, en una aproximación por etapas a la definición de "razonamiento lineal", para evitar en la medida de lo posible el sesgo que podrían introducir los especialistas.

Queremos destacar la amplia acogida por parte de estudiantes y profesores a esta iniciativa de estimulación de la creatividad, utilizando la resolución de problemas organizados y clasificados dentro de lo que hemos llamado competencia de razonamiento lineal.

Los talleres se pueden caracterizar por la diversificación contextual y el orden gradual de las relaciones funcionales utilizadas en los problemas, evitando los recetarios que se utilizan en la mayoría de los escenarios donde se enseñan las matemáticas, incluidas asignaturas de la enseñanza superior.

Los talleres han sido implementados para estudiantes y profesores de los diferentes niveles de enseñanza, con énfasis en quienes estudian para maestros o son profesores en ejercicio.

La evaluación que los estudiantes han dado de las actividades puede verse en la figura 1:

Tabla 1. Plantilla de valoración.

N°	Indicadores	Definición	1 ↔ 5
1	Claridad y precisión	Las preguntas están redactadas en forma clara y precisa, sin ambigüedades.	
2	Coherencia	Las preguntas guardan relación con lo aprendido anteriormente.	
3	Validez	Las preguntas han propiciado la creatividad o al menos se ha pensado en cosas en las que nunca se había pensado antes.	
4	Orden	Las preguntas han sido planteadas yendo de las más simples a las más complejas.	
5	Inocuidad	La frustración no afloró.	
6	Utilidad	Las preguntas les brindaron a los estudiantes una visión distinta de la Matemática.	
7	Novedad	Cree que es correcto definir la competencia de razonamiento lineal como la unión de las habilidades para resolver problemas de: a) Sumas y multiplicaciones. b) Proporcionalidad. c) Espacios lineales. d) Superposición. e) Identificación de la "no linealidad".	
8	Creatividad	Ha sentido ser creativo en Matemática durante este encuentro.	
9	Evaluación	Como evalúa la actividad en conjunto.	

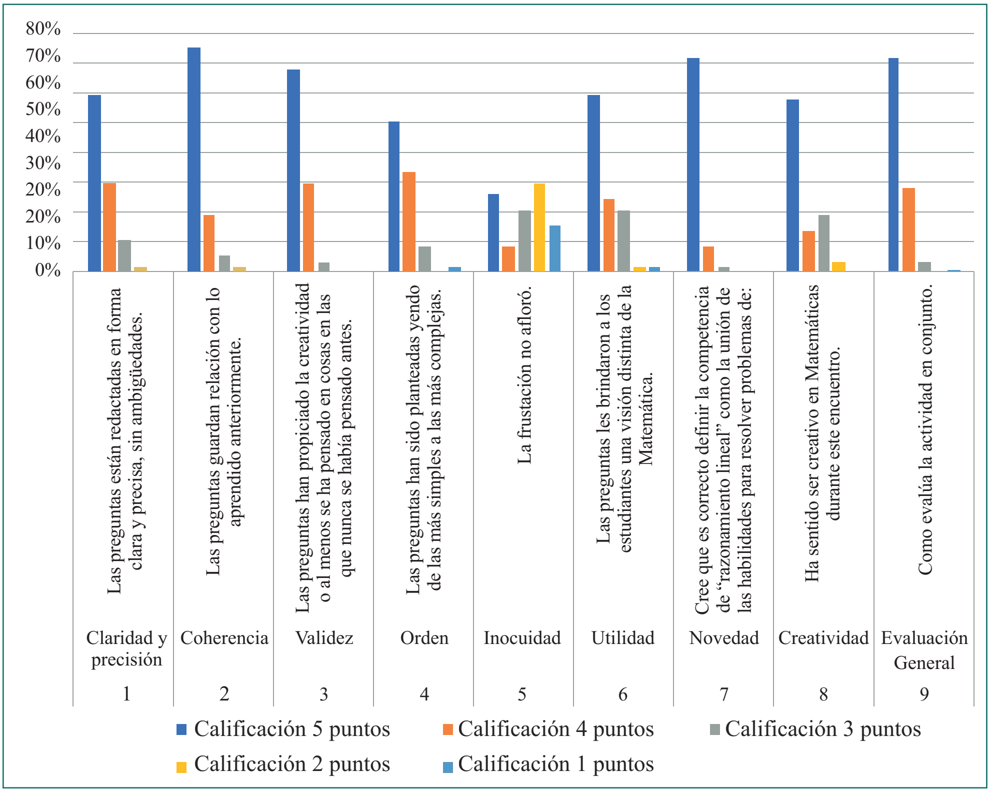


Figura 1. Evaluación de las actividades propuestas.

CONCLUSIONES

Alsina (2008) nos recuerda que "Es en función de buscar su éxito en las matemáticas que de vez en cuando conviene replantearse lo que hacemos, lo que evaluamos y cuáles son los grandes objetivos. Hoy hablamos de competencias, mañana quizás hablaremos de otro enfoque. Cada momento nos trae su problema y es razonable encontrar soluciones. Las innovaciones nos han de ayudar a hacerlo mejor". Con este enfoque hemos trabajado para concluir que:

- La enseñanza basada en problemas es el instrumento ideal para la adquisición de la competencia de razonamiento lineal.
- Los problemas deben estar enmarcados en diversos contextos, preferentemente tantos como problemas, para evitar la tendencia a construir recetas y/o memorizaciones.
- Los problemas deben estar graduados en dificultad, pero sobre todo por el tipo de relaciones funcionales que utilizan. Esto permite el desarrollo y evaluación de la creatividad.

- El hallazgo, por parte del estudiante, de alguna relación funcional necesaria para la modificación del estado del problema, debe ser priorizado a la repetición o sistematización de un determinado proceso.
- La interrelación de todas las relaciones funcionales ha de ser destacada, mostrando como ellas se adaptan a contextos muy disímiles.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Alsina Catalá, C. y Pérez Gómez, R. (2008). Competencia matemática e interpretación de la realidad. Ministerio de Educación, Secretaría General Técnica. España.

Bloom, B. S. (1956). T*axonomy of Educational Objectives. Vol I: The Cognitive Domain*. New York: David McKay Co Inc.

García-Cruz, M., y Falcón-Rodríguez, C. (2018). Clasificación de problemas de matemáticas enfocada al desarrollo de la creatividad. *Revista Caribeña de Investigación Educativa (RECIE), 2*(2), 107-119. https://doi.org/10.32541/recie.2018.v2i2.pp107-119

OECD. (2003). *The PISA 2003 assessment framework mathematics, reading, science and problem-solving knowledge and skills*. Paris: OECD.

Ortiz-Buitrago, J. y Sánchez-Tovar, L. (2020). Educación en tiempos de incertidumbre. Una mirada a la actuación del docente de matemáticas. *Matemáticas, Educación y Sociedad, 3*(3), 29-43

Vergnaud, G. (1993). *La teoría de los campos conceptuales. En: Lecturas en Didáctica de las Matemáticas Escuela Francesa.* Sección de Matemática Educativa del CINVESTAV-IPN: México D. F.

Análisis comparativo de la autenticidad de tareas matemáticas en libros de texto de bachillerato mexicanos y cubanos: el caso del Teorema de Pitágoras

Luis José Crúz Ramírez
lcr810719@gmail.com
Paul Teutli Etcheverry
etcheverrypaul81@gmail.com
José Antonio Juárez López
jajul@fcfm.buap.mx
Facultad de Ciencias Físico Matemáticas,
Benemérita Universidad Autónoma de Puebla,
Puebla, México

Resumen: *Mediante un análisis cualitativo-descriptivo de tres libros de texto mexicanos, así como del libro de texto cubano utilizado en el primer año de bachillerato, se llevó a cabo un análisis comparativo de la autenticidad de cinco tareas matemáticas que se contextualizan en presumibles situaciones reales al utilizar el Teorema de Pitágoras. Tres contextualizaciones de los libros mexicanos y dos de los libros cubanos. La comparación se realizó teniendo en cuenta la cantidad de contextualizaciones del tema indicado en cada libro y la importancia que se le da a las mismas. El análisis de la autenticidad se sustentó en los primeros cuatro aspectos de la Teoría propuesta por Torulf Palm.*
Palabras clave: *Autenticidad, libros de texto, Teorema de Pitágoras.*

Comparative analysis of authenticity of mathematical tasks in Mexican and Cuban high school textbooks: the case of the Pythagorean Theorem

Abstract: *Throuhg a qualitative-descriptive análisis of three Mexican textbooks, as well as the Cuban textbokk used in the first year of high school, a comparative análisis of the*

authenticity of five mathematical tasks that are contectualized in presumably real situations at use the Pythagorean Theorem. Three contexts of the Mexican books and two of the Cuban books. The comparison was made taking into account the number of contexto f the topic indicated in each book and the importance given to them. The analysis of authenticity was based on the first four aspects of the theory proposed by Torulf Palm.
Keywords: *Authenticity, textbooks, Pythagorean Theorem.*

INTRODUCCIÓN

Uno de los pilares básicos sobre los que se sustenta la acción docente, en cualquier nivel educativo, es el libro de texto. Hoy por hoy, resulta incuestionable su poderosa influencia en el trabajo de aula, tanto para los profesores como para los alumnos, constituyéndose en bastantes ocasiones, como el referente exclusivo del saber científico.

El libro de texto no es significativo sólo por el conocimiento de la materia que aporta, sino también por las estrategias que facilitan la planificación y desarrollo de la enseñanza al profesor. En este sentido, Boostrom (2001) confirmó esta idea afirmando que “el papel principal de un libro de texto no es presentar información, pero sí apoyar la instrucción. El libro de texto adquiere el propósito de crear condiciones de aprendizaje” (p. 242).

El análisis del libro de texto es un recurso primordial para la investigación educativa en la medida en que otorga perspectivas institucionalizadas del conocimiento, que a menudo suelen ser distantes de los estudiantes (Cantoral, Montiel y Reyes-Gasperini, 2015; Chulián, Durán y Azcárate, 2019).

Comparar textos escolares entre dos o más países para identificar diferencias y similitudes entre ellos puede proveer de información valiosa. Existe evidencia de estudios comparativos entre países de diferentes partes del mundo. Por ejemplo, Vula, Kastrati y Podvorica (2016), compararon libros de texto de Kosovo y Albania.

Por otra parte, Kh-Elazzabi y Kaçar (2018) realizaron un análisis comparativo en libros de Libia y Turquía acerca de problemas de razón y proporción. Mediante el análisis de contenido abordaron el estudio a través de tres dimensiones: las características contextuales, características matemáticas, así como los requerimientos del desempeño.

Alacaci, Bulut y Erbaş (2012) realizaron un estudio en el que compararon libros de Turquía, Singapur y Estados Unidos. Para llevar a cabo su análisis, estos autores se basaron en algunas características del diseño de libros de texto, tales como el diseño visual, la densidad del texto, la organización interna, los pesos de las líneas curriculares, los tópicos cubiertos, así como la presentación de los contenidos.

Hong y Choi (2018), por su parte, hicieron un estudio comparativo sobre la función lineal en libros coreanos y estadounidenses. Para ello, elaboraron un marco de análisis de dos dimensiones, vertical y horizontal (implica el número de lecciones que abordan la función lineal, la secuencia de los temas por cada lección y los problemas incluidos en la misma). Dicho marco incluyó cuatro niveles de demanda cognitiva: la memorización, los procedimientos sin conexiones y el hacer matemáticas.

Por otro lado, Fan y Zhu (2007), analizaron libros de texto de China, Singapur y Estados Unidos. En su estudio, realizaron la comparación sobre cómo se representan los procedimientos para la resolución de problemas. Dicho análisis se llevó a cabo mediante dos estratos: estrategias generales y estrategias específicas.

En todas estas investigaciones el enfoque estuvo centrado en un tema matemático específico.

Aunque diversos educadores matemáticos destacan la importancia de los estudios comparativos de libros escolares, estos análisis no son comunes entre países de América Latina. Al respecto, Mosquera (2018) señala que:

> Los pocos estudios comparativos de los que se tiene referencia consideran uno o varios libros de algún país iberoamericano con otros de algún país de Europa o de Estados Unidos, por ejemplo: Ponte y Marques (2007) compararon textos escolares de Brasil, España, Estados Unidos y Portugal; Pino y Blanco (2008) estudiaron libros de España y Chile; Castañeda, Rosas y Molina (2010) compararon textos de España, Francia, Inglaterra y México; Picado y Rico (2011) compararon textos de Cuba, Filipina y Puerto Rico; Marmolejo (2014) comparó textos de Colombia y España; y Derouet et al. (2015) compararon libros de texto de Chile, Francia e Italia. (pág. 96)

En su estudio, Mosquera (2018) comparó la manera en que se presentan los sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas en libros de matemáticas oficiales de Ecuador y Venezuela, para alumnos de 13 a 14 años. Según los resultados presentados, los libros estudiados difieren en el punto de partida para la enseñanza, el número de tareas propuestas y los contextos de las mismas. Sin embargo, aunque en dicho estudio se plantea el análisis del contexto, solo se realiza una clasificación general de situaciones comerciales y problemas de edades, sin detallar la autenticidad de las tareas.

Por otra parte, Chulián, Durán y Azcárate, (2019) presentaron una herramienta que permite efectuar un análisis de contenido de libros de texto para la Educación Secundaria. Centrándose en el tema de resolución de ecuaciones de primer grado, propusieron cuatro sesiones en las que, se expone el planteamiento de cuestiones en relación al álgebra y al papel de los libros de texto en el salón de clase. Luego se desarrolló un sistema de categorías propio que permitiera estudiar el contenido de estos libros de texto, y finalmente, se analizaron los resultados para el estudio de ecuaciones de primer grado en diferentes libros de texto.

El objetivo del presente estudio fue comparar la autenticidad de los problemas matemáticos verbales de aplicación del Teorema de Pitágoras en libros de texto de bachillerato tanto de México como de Cuba. Específicamente se pretendió:

- Identificar la forma de contextualizar los problemas de aplicación del Teorema de Pitágoras en libros de texto mexicanos y cubanos.
- Analizar la autenticidad de los problemas seleccionados de los textos de ambos países.

CONTEXTUALIZACIÓN

Resulta factible pensar que los seres humanos puedan aprender matemáticas a partir de los fenómenos que están presentes en sus contextos (Castro y Villarraga, 2001). Al final de la escuela primaria, los estudiantes parecen haber adquirido un conjunto de herramientas mediante las cuales, la resolución de problemas se reduce a la selección y ejecución de operaciones aritméticas sin una consideración seria de la realidad del contexto del problema. En un experimento, Selter (2009) analizó el desempeño de los estudiantes, sus procesos mentales, creencias y actitudes, y encontró que se debe fomentar:

- El uso de problemas reales y menos situaciones ficticias.
- El uso de diversos estilos de enseñanza para activar la reflexión.
- Nuevas normas sociales y socio-matemáticas.

En el contexto del análisis a priori de un problema geométrico para la gestión de la instrucción, Herbst (2012) define la tarea como unidades de significado determinadas en la observación del trabajo matemático que se realiza en el aula, constituyendo un contexto práctico en el que los alumnos razonen sobre las herramientas matemáticas asociadas a un problema. Para este autor, la tarea planteada debe encaminarse a que los estudiantes trabajen generando conocimiento.

Queda claro que, lo anteriormente planteado, se logra con una adecuada cultura de la contextualización. En los últimos años, se ha incrementado la cantidad de estudios teóricos y experimentales en los que se consideran diferentes maneras de diseñar los problemas apoyados en los contextos reales y se analiza cómo estos, promueven el auténtico aprendizaje matemático de los estudiantes (Kaiser, Blomhoej y Sriraman, 2006; Kaiser y Schwarz, 2010).

LA AUTENTICIDAD EN LAS TAREAS MATEMÁTICAS

El hecho de traer la realidad a los libros de texto de tal manera que simulen, lo más fielmente posible, una situación del contexto que los alumnos podrían hallar fuera de la escuela, permite prepararlos para afrontar dichos problemas en su entorno (Depaepa, De Corte y Verschaffel, 2010). En este tenor, proponemos la siguiente interrogante: ¿cuándo un problema matemático verbal simula una situación auténtica?

En este trabajo se entenderá como problemas que simulan situaciones auténticas a aquellos con

> ... descripciones textuales de situaciones que se asumen comprensibles para el lector [estudiante], con lo cual las preguntas matemáticas pueden ser contextualizadas y proveen, en forma conveniente, una posible conexión entre la abstracción de las matemáticas puras y sus aplicaciones a fenómenos del mundo real (Verschaffel, Greer, y De Corte, 2000, pág. IX).

Es de vital importancia recalcar que muchos de los problemas verbales matemáticos que aparecen en los libros de texto no cumplen con la finalidad de simular situaciones de la vida real, sino que están "disfrazados" con una situación artificial. Por lo tanto, el alumno difícilmente percibirá los conocimientos matemáticos aprendidos en la escuela como útiles para aplicarlos en situaciones reales; además, no se sentirá atraído o motivado. Ante esta problemática, la solución que proponen muchos investigadores es identificar en los libros de texto aquellos problemas de matemáticas que no tienen en cuenta la realidad que rodea al alumno y reescribirlos de forma que sean más auténticos. No obstante, dicha labor ha resultado para nada trivial ni inmediata (Medina, 2018; Ceredo, 2019; Torres, 2019).

Es un hecho que las tareas que proponen los libros de texto son muy utilizadas por los maestros para que los alumnos "desarrollen" sus habilidades matemáticas. La investigación ha realizado fuertes críticas basadas en experiencias empíricas sobre qué impactos tiene la falta de autenticidad de las tareas propuestas por libros de texto (Palm, 2006).

En este trabajo se utiliza la Teoría de las situaciones auténticas en las tareas escolares, para analizar la autenticidad de las situaciones presumiblemente reales, descritas en los libros de texto de matemáticas de bachillerato. Dicha teoría es de gran utilidad para analizar problemas verbales que tratan situaciones reales, de manera que los estudiantes se familiaricen con matemáticas útiles en situaciones fuera de la escuela y en la práctica de resolución de problemas que requieran circunstancias que se consideran como situaciones en la vida diaria.

Palm (2006) expresó, que el afán de contextualizar todos los problemas verbales o tareas propuestas en libros de matemáticas, ha generado que muchas de estas "simulaciones de situaciones reales" simplemente sean tareas ordinarias matemáticas, cuyo objetivo es el desarrollo de un algoritmo mecanizado sin sentido; disfrazadas con un contexto figurativo de situaciones fuera del aula, lo cual genera efectos negativos sobre el aprendizaje, actitudes y creencias de los estudiantes

La Teoría de Palm propone ocho aspectos que debe cumplir toda tarea matemática que pretenda tratar la realidad y por lo tanto considerarse auténtica. En esta investigación se utilizarán los primeros cuatro aspectos para el análisis de las tareas seleccionadas (Palm, 2009), esto son:

a) **Evento.** Referente al evento planteado en la tarea. En una simulación de una situación del mundo real, es un requisito previo que el evento descrito en la tarea de la escuela haya tenido lugar o tenga una oportunidad justa de realizarse.
b) **Pregunta.** Se refiere a la concordancia entre la tarea asignada en la escuela y en una situación correspondiente fuera de la escuela. La pregunta en la tarea de la escuela, que podría plantearse en el evento del mundo real descrito, es un requisito previo para que exista una situación del mundo real correspondiente.
c) **Información / datos.** Hace referencia a la información y los datos en la tarea e incluye valores, modelos y condiciones dadas. Se conforma por los siguientes tres sub-aspectos:
    - **c1.** Existencia. Se refiere a la coincidencia existente entre la información disponible en la tarea de la escuela y la información disponible en la situación simulada. Las discrepancias en la información entre la situación de la escuela y la situación simulada a menudo conducen a diferencias entre las actividades matemáticas realizadas en las dos situaciones.
    - **c2.** Realismo. Hace referencia a la información existente. Al simular este aspecto con un razonable grado de fidelidad, números y valores indicados son realistas en el sentido de naturaleza idéntica o muy cerca de los números correspondientes y los valores de la simulación.
    - **c3.** Especificidad. Indica la relación en la especificidad de la información disponible en la situación escolar y la situación simulada. Esta relación es importante para que el alumno pueda resolver la situación dentro y fuera de la

escuela, ya que la falta de especificidad puede producir un contexto ligeramente diferente. La simulación puede ayudar a proporcionar evidencia de situaciones reales en las que las matemáticas de la escuela son útiles.

d) Presentación. Se refiere a la manera en que la tarea se transmite o se comunica a los estudiantes. Este aspecto se divide en dos sub-aspectos:

- **d1.** Modo. Considera si la tarea se comunica a los estudiantes oralmente o en forma escrita y si la información se presenta en palabras, diagramas o tablas.
- **d2.** Uso del Lenguaje. Este aspecto se refiere a la estructura de la oración de terminología y la cantidad de lenguaje utilizado en la presentación de la situación de trabajo. Las tareas escolares requieren diversas capacidades en la interpretación de las tareas extraescolares correspondientes, por lo que es importante que el lenguaje usado en la tarea escolar no sea tan diferente al de la situación de la vida real correspondiente, pues afecta negativamente las posibilidades de los estudiantes para utilizar las mismas matemáticas que se habrían utilizado en la situación simulada.

SISTEMA EDUCATIVO MEXICANO

De acuerdo con lo que estipula la Secretaría de Educación Pública (SEP)[1], el sistema educativo mexicano se compone de cinco niveles, siendo los primeros cuatro, parte de la educación obligatoria. El primero de estos, el preescolar, consta de tres grados y se proporciona a niños de 3 a 5 años de edad. El segundo nivel es la primaria que implica seis grados y normalmente se imparte a niños de 6 a 12 años de edad. Continúa la educación secundaria, impartida en tres años a la población estudiantil de 12 a 16 años de edad. El cuarto nivel, el medio superior, se proporciona a estudiantes de 15 a 18 años de edad, es un requisito para ingresar al quinto nivel de estudios, el superior.

Concretamente, el nivel medio superior o Educación Media Superior (EMS) en México, implica diferentes subsistemas agrupados en tres categorías: bachillerato general, bachillerato tecnológico y formación profesional técnica. A lo largo del siglo pasado, este nivel educativo tuvo una escasa cobertura, la cual comenzó a acelerarse hacia finales de la década de los sesenta y, en especial, a inicios de la década de los noventa.

En 2008, se instituyó la Reforma Integral de la Educación Media Superior (RIEMS). La finalidad fue impulsar el desarrollo de la educación por competencias y la vinculación de los más de treinta subsistemas educativos en la EMS, mediante el establecimiento del Marco Curricular Común (MCC) y el Sistema Nacional de Bachillerato (SNB).

En diciembre de 2012 se propone otra reforma educativa, con el propósito de instituir el Nuevo Modelo Educativo (NME) para la educación obligatoria (SEP, 2017). Presentado en marzo de 2017 el NME establece, de manera específica, que todo egresado de la educación obligatoria debe ser una persona que:

> ... emplee el pensamiento hipotético, lógico y matemático para formular y resolver problemas cotidianos y complejos; tenga la capacidad de análisis y síntesis; sepa argumentar de manera

1 https://www.mexterior.sep.gob.mx/sisedMEX.html

crítica, reflexiva, curiosa, creativa y exigente; se informe de los procesos naturales y sociales, de la ciencia y la tecnología, para comprender su entorno; sea competente y responsable en el uso de las Tecnologías de la Información y la Comunicación; y tenga la capacidad y el deseo de seguir aprendiendo de forma autónoma o en grupo durante el transcurso de su vida. (pág.46)

EL SISTEMA EDUCATIVO CUBANO Y LA ORGANIZACIÓN DE LA ENSEÑANZA[2]

En la República Socialista de Cuba, el sistema educativo es función del estado, este orienta, impulsa y promueve la educación, así como la cultura y las ciencias en todas sus manifestaciones. Los objetivos y principios fundamentales fueron respaldados por la constitución de la República del 24 de febrero de 1976. Actualmente se lleva a cabo el tercer perfeccionamiento del sistema nacional de educación cubano por la necesidad de actualizar libros, planes, programas y orientaciones metodológicas a partir del propio desarrollo de la ciencia, las exigencias sociales, los cambios operados en la sociedad, la necesidad de poner a la escuela a la altura de estos tiempos.

El sistema de educación cubano se entiende como un conjunto de subsistemas estructurados de manera orgánica distribuido a partir de los siguientes niveles de enseñanza: Círculos Infantiles y Educación Pre-escolar, Primaria, Secundaria básica, Preuniversitaria, Educación Técnica Profesional, Universidad, Educación de adultos y la Educación especial. Tanto la educación primaria como la secundaria son obligatorias.

EL SISTEMA EDUCATIVO CUBANO Y SUS PARTICULARIDADES

De acuerdo con el MINED (Ministerio de Educación), el sistema educativo cubano comienza en los Círculos Infantiles, los cuales reciben a los niños entre el primero y los 5 años de vida. Posteriormente pasan a la Educación Pre-escolar. Una vez en la primaria, se estudia desde primer grado hasta el sexto, y la secundaria básica consta de séptimo a noveno grado. La enseñanza preuniversitaria, también denominada bachillerato, se cursa para obtener carreras profesionales en ciencias o letras y se constituye además en la antesala de la Universidad.

La educación técnica profesional es uno de los siguientes pasos luego de la secundaria básica, la cual prepara a obreros calificados – con nivel medio básico profesional, que equivale a un noveno grado – y a técnicos medios con un nivel medio superior profesional equivalente a duodécimo grado. La última fase dentro del sistema educativo cubano es la Universidad. Al concluirla, los futuros profesionales se incorporan al mercado laboral según las necesidades del país. Las universidades cubanas reciben profesionales cubanos y extranjeros que llegan para perfeccionar sus conocimientos y para obtener títulos de posgrado (EcuRed, 2011).

2 Página web CubaTresor

MÉTODO

La metodología utilizada fue de tipo cualitativa con carácter descriptivo. Al respecto, Hernández, Fernández y Baptista (2010) consideran que: "la investigación cualitativa proporciona profundidad a los datos, dispersión, riqueza interpretativa, contextualización del ambiente o entorno, detalles y experiencias únicas. También aporta un punto de vista "fresco, natural y holístico" de los fenómenos, así como flexibilidad" (p. 17). Por otra parte, al tener en cuenta que no hay manipulación de las variables, podemos decir que el presente es un estudio *ex post facto*.

Debido a que uno de los propósitos de esta investigación fue analizar la contextualización de problemas matemáticos donde se aplica el Teorema de Pitágoras, en la enseñanza media superior, tanto en Cuba como en México, fueron seleccionados aquellos libros que presentan contextos aparentemente auténticos. Asimismo, se realizó una comparación considerando en qué ámbito se sustentan dichas contextualizaciones y si los países en cuestión han adquirido una adecuada cultura de la contextualización. Para la selección y análisis de los problemas contextualizados, presumiblemente auténticos, nos apoyamos en los cuatro primeros aspectos de los ocho que plantea Palm (2009) en su teoría local de las tareas con situaciones auténticas.

ANÁLISIS DE LAS TAREAS MATEMÁTICAS SELECCIONADAS

Se realizó una revisión de diversos libros de los tres grados de bachillerato en México, seleccionando algunos de los cuales, están acorde con el trabajo por competencias que establece el MCC de la RIEMS. De igual manera, se revisaron los tres libros que se utilizan en Cuba desde hace décadas. Como resultado de dicha revisión, se seleccionaron tres tareas que simulan una situación de la vida real de los libros de textos mexicanos, y dos de los libros de textos cubanos. Se efectuó tal selección, debido a la cantidad de libros de texto de Matemáticas existentes en México, no así en Cuba, donde cada nivel o grado utiliza un mismo libro de texto y un cuaderno de ejercicios.

De los libros mexicanos revisados, se seleccionaron tres de la editorial Book Mart: Geometría y Trigonometría 1ª Edición 2018, Escuelas Preparatorias Oficiales del Estado de México (EPOEM) Bachillerato tecnológico (BT); Trigonometría 1ª Edición 2017 (EPOEM) y Pensamiento Matemático II: Geometría y Trigonometría 1ª Edición 2019 de Bachilleratos Generales Oficiales (BGO).

ANÁLISIS DE LAS TAREAS SELECCIONADAS EN LIBROS MEXICANOS

a) Geometría y Trigonometría 1ª Edición 2018 (EPOEM) Bachillerato tecnológico

Juan tiene una escalera de 6.5 metros de alto y quiere subir a la ventana del segundo piso de su casa que se encuentra a 6 metros de altura. ¿A qué distancia de la pared va a quedar la base de la escalera?

Figura 1. Ilustración para el problema de la escalera.

Evento. Es una situación que en condiciones normales podría ocurrir fuera de la escuela, enfrentándose tanto alumnos, padres o algún familiar cercano, pues la mayoría de ellos han experimentado el evento descrito, ya sea involucrados directamente o como simples espectadores. Por lo tanto, el evento tiene una alta probabilidad de presentarse en la vida real. No obstante, es poco probable que se utilice el Teorema de Pitágoras para dar solución a la situación presentada (Figura 1).

Pregunta. En la pregunta que presenta el problema, no se considera que sean cuestionamientos que los involucrados en esta situación se harían. En este tipo de situaciones es más preocupante saber si con tal escalera es suficiente para llegar a la altura de la ventana.

Información y datos. Con respecto a la existencia, hay una discrepancia entre los datos proporcionados en el evento descrito y los datos en la vida real. Al analizar la situación con base en la figura mostrada, podemos constatar que no se tiene claridad sobre qué va a realizar en realidad la persona, si desea entrar por la ventana o simplemente abrirla, en el primer caso necesitaría estar a la altura indicada, pero en el segundo caso no.

Presentación. La tarea se da a conocer de forma escrita, además se proporciona una imagen de la situación. Al examinar la imagen se puede observar que, al parecer, la ventana está ubicada a una altura mayor que la proporcionada, ya que no aparece ninguna ventana. por lo tanto, el estudiante podría concluir que la altura de la escalera no es suficiente para llegar hasta la ventana.

b) Trigonometría 1ª Edición 2017 (EPOEM)

Un electricista coloca su escalera para reparar un foco ubicado a 7m de altura, ¿de qué tamaño es su escalera si la recarga a 3m de distancia?

Evento. Es una situación que en condiciones normales puede llegar a ocurrir fuera de la escuela. No todos los alumnos podrían enfrentarla, pero sí pudieran estar involucrados o ser espectadores. Por lo tanto, el evento descrito tiene una alta probabilidad de presentarse en la vida real. Sin embargo, lo que no es posible que suceda es que, al colocar la escalera, la persona se proponga aplicar el Teorema de Pitágoras para calcular su tamaño.

Pregunta. Consideramos que la pregunta presentada no es algo que se cuestione en la vida real, pues es poco probable que alguien, en este caso específico, quiera saber el tamaño de la escalera. En este tipo de situaciones es más importante saber si con la altura de la escalera es suficiente para llegar al foco y tener la comodidad necesaria para manipularlo.

Información y datos. Con respecto a la existencia, hay una diferencia entre los datos proporcionados en el evento descrito y los datos en la vida real. Tomando en cuenta la representación gráfica proporcionada, podemos verificar que no hay claridad sobre la altura a la que sería colocada la escalera, lo cual depende de la estatura del electricista. Además de considerar que, al manipular el foco, el electricista no estaría obligado a colocar la escalera hasta la altura del mismo.

Otro aspecto por considerar es que, en muchos casos, las escaleras de los electricistas son plegables, lo cual indica que, al tratar de alcanzar el foco, la persona solo desplegaría dicha escalera hasta la altura necesaria para realizar la manipulación.

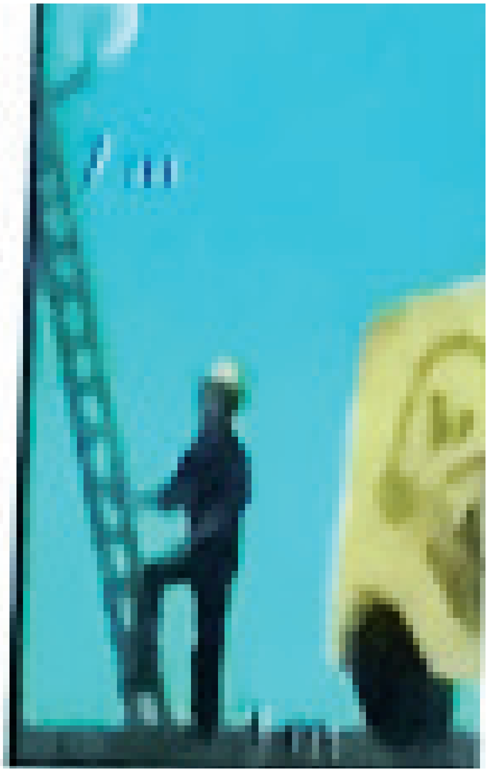


Figura 2. Ilustración para el problema del electricista.

Presentación. La tarea se da a conocer a los alumnos de forma escrita, además de proporcionar una imagen en la cual se puede observar que, al parecer, el electricista debe utilizar hasta el último peldaño.

c) Pensamiento Matemático II: Geometría y Trigonometría 1ª Edición 2019 (BGO)

Eduardo viaja en auto 8 km al norte, luego gira al oeste 3 km, posteriormente avanza a 7 km otra vez al norte para finalizar con 11 km al este. ¿A qué distancia de su punto de partida está ahora?

Un esquema del trayecto nos ayudará a vislumbrar el triángulo rectángulo propuesto en la situación anterior.

En esta representación [figura 3] *observamos el triángulo rectángulo formado y representamos a los catetos e hipotenusa. Claramente se nos pide hallar el valor de la hipotenusa en este triángulo. Los valores que se obtienen son* $a = 15$, $b = 8$, *así que al sustituirlos en la expresión del Teorema de Pitágoras tendremos:* $c^2 = (15)^2 + (8)^2 = 289$, *por lo que* $c = 17$. *Por lo tanto, Eduardo está a 17 km de su punto de origen después de su viaje.* [descripción que forma parte del problema]

Evento. Observando que el recorrido se realiza en un auto, podría ser una situación que en condiciones normales podría ocurrir fuera de la escuela, y en la cual los alumnos podrían estar involucrados, pues es probable que algunos de ellos sean llevados a la escuela en auto, o bien pueden salir de paseo en uno. Considerando lo anterior, el evento descrito tiene una alta probabilidad de presentarse en la vida real. Sin embargo, lo que no es posible que suceda es que la persona pretenda conocer la distancia que lo separa de su punto de partida, aplicando el Teorema de Pitágoras.

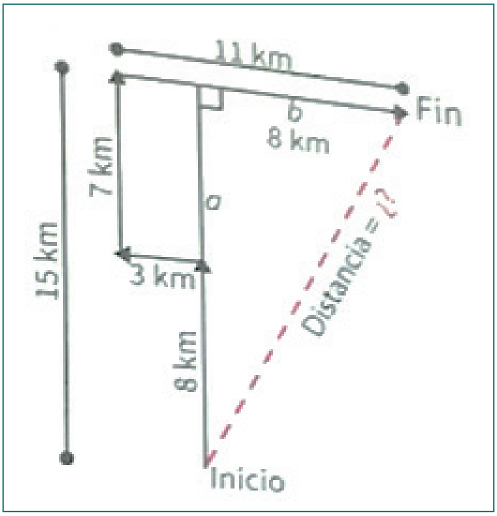


Figura 3. Ilustración para el problema de Eduardo.

Pregunta. En la pregunta presentada, no se considera que sean cuestionamientos que los involucrados en esta situación se harían. En este tipo de circunstancias es más significativo saber si con la gasolina que contiene el auto es suficiente para hacer el mismo recorrido, o si existe otra carretera que puedan utilizar para el regreso. Por otra parte, es poco común que una persona realice un recorrido de tal manera, siempre girando en intersecciones perpendiculares y no curvas.

Información y datos. En referencia a la existencia, hay una divergencia entre los datos proporcionados en el evento descrito y en la vida real. De acuerdo con la figura presentada, podemos constatar que no siempre el auto debe girar en intersecciones de carreteras de forma perpendicular, si gira en una curva ya no siempre se formaría un triángulo rectángulo, y en ese caso deja de tener sentido la tarea.

Presentación. La tarea se da a conocer a los alumnos de forma escrita, acompañada de una figura, en esta se observa un esquema donde no aparecen carreteras y mucho menos un auto, es decir, se realizó un esbozo de un dibujo de manera que respondiera a la construcción de un triángulo rectángulo forzado, para aplicar el Teorema de Pitágoras.

ANÁLISIS DE LAS TAREAS SELECCIONADAS EN LIBROS CUBANOS

a) Libro de Matemática 10o grado. Editorial: Pueblo y Educación.

Un muchacho empinando un papalote ha soltado 135 metros de hilo. El papalote se halla situado verticalmente sobre un punto que está a 75 metros de distancia del muchacho. Admitiendo que el hilo no forma onda y sin tener en cuenta la altura del muchacho. ¿A qué altura se encuentra el papalote y cuál es el ángulo de elevación?

Evento. Es una situación que en condiciones normales puede ocurrir fuera de la escuela y podrían enfrentar los alumnos, pues la mayoría de ellos, debido a sus edades, ha experimentado el evento descrito. Al igual que algunos familiares cercanos o amigos, también pudieran estar involucrados o ser espectadores. Por lo tanto, el evento descrito tiene una alta probabilidad de presentarse en la vida real. Sin embargo, lo que no es posible que suceda es que la persona mida exactamente la cantidad de hilo que ha soltado y mucho menos que el hilo, por su peso y el viento, no forme ondas.

Pregunta. En la pregunta presentada, no se considera que sean cuestionamientos que los involucrados en esta situación se harían, pues es poco probable que se pregunten, a qué altura se encuentra el papalote, o si utilizarían el Teorema de Pitágoras para dar solución al problema presentado. En este tipo de situaciones es más recurrente saber la cantidad de hilo que se necesita para que el papalote pueda alcanzar una altura determinada.

Información y datos. La información y los datos proporcionados no se podrían obtener con facilidad en la vida real.

Existencia. En este sub-aspecto la información no se podría obtener con facilidad, por lo que se complicaría realizar las mediciones que el problema contiene. Existe una diferencia entre la información proporcionada y lo que podría suceder en un evento fuera de la escuela.

Realismo. Este sub-aspecto se refiere a lo que en verdad se podría tener en la vida real en cuanto a la información proporcionada. Sin embargo, como se mencionó anteriormente, sería muy difícil que, al presentarse la situación, se obtengan las medidas tanto de distancia entre el muchacho y el punto mencionado en la tarea, como la medida del ángulo que se forma. Por otra parte, consideramos que la longitud del hilo proporcionada, no es muy adecuada.

Presentación. La tarea se da a conocer a los alumnos de forma escrita, por lo que el estudiante tendrá que modelar la situación con un dibujo, donde podría presentar dificultades al realizar el análisis, considerando que debe despreciar la altura del muchacho e identificar que se forma un triángulo rectángulo.

b) Libro de Matemática 10º grado. Editorial: Pueblo y Educación

Una escalera de 6,5 metros de largo está recostada a una pared. Si el pie de la escalera está separado 1,9 metros de la pared. Halla la altura a la que está recostada la escalera y el ángulo que forma con la pared.

Evento. Es una situación que en condiciones normales puede llegar a ocurrir fuera de la escuela, en la cual los alumnos, pudieran estar involucrados o ser espectadores, por lo tanto, el evento descrito tiene una alta probabilidad de presentarse en la vida real. Sin embargo, no es posible que, al colocar la escalera, la persona se proponga aplicar el Teorema de Pitágoras para calcular la altura a la que está reclinada ésta en la pared, como tampoco encontraría la utilidad de calcular el ángulo formado por la escalera y la pared.

Pregunta. La pregunta presentada no es algo que una persona cuestione en la vida real**.** Es por ello que no se considera como un tema discutible. En este tipo de situaciones es más relevante saber si con la altura de la escalera es suficiente para realizar el trabajo que se quiere hacer, lo cual no se menciona en el problema. No se sabe la razón por la cual se colocó la escalera en el lugar indicado.

Información y datos. Es importante destacar, que no se da ningún tipo de gráfico o figura de análisis, por lo que el alumno tendrá que hacer ese trabajo. Con respecto a la existencia, hay una diferencia entre los datos proporcionados en el evento descrito y los datos en la vida real. Al analizar la situación, no se tiene claridad sobre cuál es su objetivo de colocar la escalera.

Presentación. La tarea se da a conocer a los alumnos solo de manera escrita, por lo que el estudiante debe identificar que se forma un triángulo rectángulo. En otro sentido el alumno nunca sabrá la utilidad que se le dará a la escalera, de esta manera los estudiantes no podrán ver la utilidad de lo que se les pide, prácticamente utilizarán el Teorema de Pitágoras de manera mecánica.

Finalmente, la Tabla 1, muestra el comparativo de los libros de texto mexicanos y los libros de texto cubanos, considerando la contextualización y el análisis de la autenticidad de los problemas presentados.

Tabla 1. Comparativo de los textos mexicanos y cubanos.

Libros de texto	Forma de contextualizar	Análisis de la autenticidad
Problemas de textos mexicanos	En los textos mexicanos se contextualizan los problemas de aplicación del Teorema de Pitágoras mediante situaciones prácticas del ámbito económico y social. Se evidencia el esfuerzo realizado para que los alumnos tengan acceso a problemas que presenten situaciones menos alejadas a sus experiencias y contextos, pero todavía dista mucho de lo que en realidad demanda una tarea auténtica.	**Evento:** Son situaciones que podrían enfrentar los alumnos, pero no es muy probable que la persona se proponga aplicar el Teorema de Pitágoras para dar solución a la situación. **Pregunta.** En las preguntas presentadas, no se considera que sean cuestionamientos que los involucrados en esta situación se harían. **Información y datos**. En referencia a la existencia, hay una divergencia entre los datos proporcionados en el evento descrito y en la vida real. **Presentación**. Las tareas se dan a conocer a los alumnos de forma escrita, acompañada de una figura, en la que solo se resalta prácticamente la indicación de utilizar el Teorema de Pitágoras.
Problemas de textos cubanos	En los textos cubanos nos percatamos, que existe un insuficiente número de contextualizaciones referentes a la aplicación del Teorema de Pitágoras, no presentan imágenes o figuras de la situación descrita, y estas están basadas en simulaciones de la vida práctica de los estudiantes.	**Evento:** Son situaciones que en condiciones normales podrían enfrentar los alumnos, pero es poco probable que la persona se propongan aplicar el Teorema de Pitágoras para dar solución a la situación. **Pregunta.** Consideramos que las preguntas presentadas no son algo que se cuestione en la vida real. **Información y datos**. Con respecto a la existencia, hay una diferencia entre los datos proporcionados en los eventos descritos y los datos en la vida real. **Presentación**. Las tareas se dan a conocer a los alumnos solo de manera escrita, por lo que el estudiante debe identificar que se forma un triángulo rectángulo.

CONCLUSIONES Y SUGERENCIAS

Considerando que la finalidad del estudio fue comparar problemas matemáticos verbales de aplicación del Teorema de Pitágoras en libros de texto de bachillerato de México y Cuba, teniendo en cuenta su autenticidad. Se logró comparar y analizar críticamente la forma de contextualizar dichos problemas. En el análisis realizado con los libros de texto seleccionados, pudimos verificar que existe similitud en lo que respecta a las contextualizaciones. En ambos países se hace un esfuerzo por que los alumnos tengan acceso a problemas que presenten situaciones más cercanas a sus experiencias y contextos, pero todavía dista mucho de lo que en realidad demanda una tarea auténtica.

Por otra parte, detectamos diferencias en la manera de contextualizar problemas de aplicación del Teorema de Pitágoras en libros de texto mexicanos y cubanos. Cabe destacar que en los libros de matemáticas cubanos no existe la cantidad suficiente de contextualizaciones. Pudimos percatarnos que el Teorema de Pitágoras en los libros cubanos se trabaja inicialmente como grupo de Teoremas de Pitágoras (Teorema de los Catetos, Teorema de la Altura, y el propio Teorema de Pitágoras), y se aplica en su totalidad como herramienta para el cálculo de áreas y perímetros de figuras planas. Asimismo, observamos que existen más contextualizaciones sobre resolución de triángulos rectángulos, aplicando razones trigonométricas, pero en este trabajo solo nos centramos en el Teorema de Pitágoras. En contraste, no sucedió así en los libros de texto mexicanos seleccionados, en los cuales se presenta una gama de contextualizaciones más amplía.

Finalmente, podemos afirmar que ninguno de los problemas seleccionados logró cumplir con los cuatro primeros aspectos de la Teoría de Palm. En el aspecto del evento descrito en las tareas de ambos países, se dan situaciones que en condiciones normales podrían ocurrir fuera de la escuela, pero en ninguno de los casos las personas involucradas utilizarían el Teorema de Pitágoras para dar solución a la problemática. En lo referente al segundo aspecto, detectamos que las preguntas presentadas no son cuestionamientos que los involucrados en estas situaciones se harían. En relación con el tercer aspecto, identificamos discrepancia entre los datos proporcionados en las situaciones descritas y los datos en la vida real. Por último, respecto de la presentación de las tareas, en los libros de texto de ambos países, las tareas seleccionadas se dan a conocer de manera escrita; sin embargo, en los textos mexicanos se presentan figuras o imágenes para el análisis, pero no así en los textos cubanos.

Algunas recomendaciones que se deprenden de este estudio son las siguientes:

- Los resultados del análisis de los problemas seleccionados podrían ser de utilidad para los docentes de matemáticas que pretendan diseñar y plantear a sus estudiantes nuevas tareas en las que la autenticidad sea parte fundamental de las mismas.
- El marco teórico utilizado para esta investigación, así como nuestros hallazgos, podrían servir también para los investigadores en Educación Matemática que estén interesados en la búsqueda e identificación de problemas, tareas o situaciones matemáticas que se presenten como auténticas en los libros de texto.
- Finalmente, creemos que el modo en el que se han analizado los problemas expuestos en este estudio, así como los resultados derivados del análisis, podrían ser de mucha ayuda para los diseñadores de libros de texto de matemáticas en cualquier nivel educativo.

REFERENCIAS

Boostrom, R. (2001). Whither textbooks? *Journal of Curriculum Studies,* 33(2), 229-245.

Cantoral, R., Montiel, G. y Reyes-Gasperini, D. (2015). Análisis del discurso Matemático Escolar en los libros de texto, una mirada desde la Teoría Socioepistemológica. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, 8, 9-28.

Castro, E., y Villarraga, M. (2001). Resolución de problemas matemáticos y detección de la diversidad en una unidad conceptual. En J. Cardeñoso, A. Moreno, J. Navas y F. Ruiz (Eds,). *Investigación en el aula de matemáticas. Atención a la diversidad (pp. 125-128)*. Granada: Universidad de Granada SAEM THALES.

Cerecedo, A. L. (2019). *Diseño de tareas matemáticas auténticas: El porcentaje en contextos financieros*. Tesis de Maestría no publicada. Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, Puebla, México.

Chulián, S., Durán, M. R. y Azcárate, P. (2019). Herramienta de análisis de contenido en libros de texto: ecuaciones de primer grado. Épsilon - *Revista de Educación Matemática,* 103, 25-33.

Depaepe, F., De Corte, E. y Verschaffel, L. (2010). Teachers' approaches towards word problem solving: Elaborating or restricting the problem context. *Teaching and Teacher Education.* 26(2), 152-160.

EcuRed (2011). Extraído de:
http://www.ecured.cu/index.php/Educaci%C3%B3n_Especial_en

Erbaş, A. K., Alacaci, C. y Bulut, M. (2012). A Comparison of Mathematics Textbooks from Turkey, Singapore, and the United States of America. *Educational Sciences: Theory & Practice*, 12(3), 2324–2329.

Fan, L., y Zhu, Y. (2007). Representation of problem-solving procedures: A comparative look at China, Singapore, and US mathematics textbooks, *Educational Studies in Mathematics*, 66(1), 61–75.

Herbst, P. (2012). Las tareas matemáticas como instrumentos en la investigación de los fenómenos de gestion de la instrucción: un ejemplo en geometría. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, 1, 5-22.

Hernández, R., Fernández, C. y Baptista, P. (2003). *Metodología de la Investigación*. México, D. F.: Mac Graw Hill.

Hong, D. S., y Choi, K. M. (2018). A comparative analysis of linear functions in Korean and American standards-based secondary textbooks, *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 49(7), 1025-1051.

Kaiser, G., Blomhoej, M. y Sriraman, B. (2006). Towards a didactical theory for mathematical modeling. *ZDM-The International Journal on Mathematics Education*. 38 (2), 82-85.

Kaiser, G. y Schwarz, B. (2010). Authentic Modelling Problems in Mathematics Education - Examples and Experiences, *Journal für Mathematik-Didaktik*, 31(1), 51 – 76.

Kh-Elazzabi, A, A. y Kaçar, A. (2018). A Comparative Analysis of Ratio and Proportion Problems in Libyan and Turkish Mathematics Textbooks, *International Journal of Educational Studies in Mathematics*, 5(4), 132–139.

Medina, I. (2011). *Diseño de tareas matemáticas auténticas en secundaria a partir de la teoría de Palm y la investigación documental y de campo.* Tesis de maestría. México: BUAP.

Mosquera, J. (2018). Estudio comparativo de textos escolares oficiales de matemáticas de Ecuador y Venezuela: los sistemas de ecuaciones lineales. *UNIÓN. Revista Iberoamericana de Educación Matemática,* 52, 91–117.

Palm, T. (2006). Word problems simulations of real-world situations: A proposed framework. *For the Learning of Mathematics*, 26(1), 42-47.

Palm, T. (2009). Theory of Authentic Task Situations. En L. Verschaffel, B. Greer, W. Van Dooren, & S. Mukhopadhyay (Eds.), *Words and Worlds: Modelling Verbal Descriptions of Situations,* 3-19 Rotterdam: Sense Publishers.

Selter, C. (2009). Stimulating reflection on word problems by means of students' own productions. En L. Verschaffel, B. Greer, W. Van Dooren, & S. Mukhopadhyay (Eds.), *Words and Worlds: Modelling Verbal Descriptions of Situations,* 315-333. Rotterdam: Sense Publishers.

SEP (2017). Plan de estudios 2017. Educación obligatoria. México: Secretaría de Educación Pública. Recuperado de:
https://www.gob.mx/cms/uploads/attachment/file/207252/Modelo_Educativo_OK.pdf

Torres, E. Z. (2019). *Diseño de tareas matemáticas para secundaria bajo la Teoría de las Situaciones con Tareas Auténticas*. Tesis de Licenciatura no publicada. Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, Puebla, México.

Verschaffel, L., Greer, B. y De Corte, E. (2000). *Making Sense of Word Problems: Context of Learning*. The Netherlands: Lisse.

Vula, E., Kingji-Kastrati, J. y Podvorica, F. (2016). A comparative analysis of mathematics textbooks from Kosovo and Albania based on the topic of fractions. En *Proceedings of the Ninth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*, Prague. Czech Republic.

Épsilon - *Revista de Educación Matemática* **2020, nº 106, 35-56**

Una ruta matemática por la Universitat Jaume I con la Universitat para mayores

Gil Lorenzo-Valentín
0000-0002-2812-5740
Dirección completa: Departament d'Educació i Didáctiques Específiques. Universitat Jaume I. Castelló. España.
Gil.Lorenzo@uji.es
María Santágueda-Villanueva
0000-0002-5472-7972
Dirección completa: Departament d'Educació i Didáctiques Específiques. Universitat Jaume I. Castelló. España.
santague@uji.es

Resumen: *En el presente trabajo mostramos una experiencia para trabajar las matemáticas con el alumnado de la universidad para mayores de la Universitat Jaume I, de Castellón. Utilizando una ruta matemática diseñada por los autores se trabajaron distintos conceptos matemáticos. En el trabajo, además de presentar la experiencia, analizamos de las actividades realizadas por el alumnado.*
Palabras clave: *Ruta matemática, universidad para mayores, matemáticas.*

The Mathematical Route in Universitat Jaume I of the Elderly University

Abstract: *In this paper we show an experience to work mathematics with the students of the Elderly University of the Universitat Jaume I, in Castellón. Using a mathematical route designed by the authors, different mathematical concepts were worked on. At this job, in addition to presenting the experience, we analysed the activities carried out by the students.*
Keywords: *Mathematical route, elderly university, mathematica.*

INTRODUCCIÓN

Como afirma Martín (2009) se está produciendo un aumento de la esperanza de vida, por tanto, es necesario buscar intervenciones educativas para mejorar la calidad de nuestros mayores (Martín y Requejo, 2005). Una de estas intervenciones la encontramos en la mayoría de las universidades españolas con la Universidad Para Mayores (CREU, 2017).

Entre los diversos módulos que se ofrece en nuestra universidad encontramos uno cuyo objetivo principal es trabajar la alfabetización matemática en la era digital como indica Bazzini & Whybrow Inchley (2002).

Gal (2000) define la alfabetización matemática como la resolución de situaciones globales, donde las matemáticas ayudan a buscar soluciones creativas dentro de la misma cotidianidad (Alsina, 2002; Van Reeuwikj, 1997). Para incentivarla se pueden trabajar las matemáticas de forma dialógica donde los participantes construyen el contenido que se quiere trabajar y siempre contextualizando en situaciones reales (Buendía,1999).

Siguiendo estas premisas creamos una ruta matemática por el campus de la Universitat Jaume I para el alumnado de su Universidad de Mayores que cursaban la asignatura de postgrado “El universo de las matemáticas y la física moderna”, donde se trabajan las ciencias en general, con protagonismo de las matemáticas. A continuación, explicaremos nuestra experiencia y los resultados obtenidos.

LA EDUCACIÓN EN PERSONAS ADULTAS

El siglo XX ha sido testigo de un aumento histórico de la esperanza de vida, se espera que en el año 2050 las personas mayores que superen los 60 años alcancen el 30%, (Martín, 2009). Este hecho provocará cambios en paradigmas de educación, de la integración de mayores, de la gestión de la sanidad y en definitiva en cómo se desarrolla la vida en esos años.

Martín y Requejo (2005) explican que la intervención educativa con mayores tiene tres objetivos: tratar de prevenir declives prematuros como consecuencia del envejecimiento, facilitar roles significativos a las personas mayores en su contexto social y desarrollar o potenciar el crecimiento y el desarrollo personal en las esferas afectivas, físicas y mentales. El objetivo al aumentar la esperanza de vida no solo es vivir más, es aumentar la calidad de esta vida disfrutándola al máximo y aumentando la autoeficacia, es decir, mejora en el autoconcepto en sí mismos y por tanto afrontar con más racionalidad situaciones de la vida cotidiana. Obvio que no es el único camino para llegar a este objetivo, pero esta educación mejorará la capacidad de resolver problemas que se pueden encontrar en su día a día.

Kelly (1989,1993) citado por Martín y Requejo (2005) destaca que si la actividad educativa se realiza colectivamente es más beneficiosa, mejorando aspectos de salud y bienestar personal. También el ocio compartido, dando opción a aportar y recibir, a expresar ideas y opiniones, disfrutar con las relaciones sociales, entablar amistades y compartir experiencias con familiares y amigos mejora la salud y el bienestar personal en este colectivo.

LA UNIVERSIDAD PARA MAYORES EN LA UNIVERSITAT JAUME I DE CASTELLÓN

La Universitat Jaume I inició el programa educativo Universitat per a Majors (universidad para mayores) en 1998. Actualmente el programa de formación permanente para personas mayores de 55 años está muy consolidado manteniendo mejoras y adaptaciones continuas. A destacar:

- Formación académica de calidad, flexible, participativa y colaborativa.
- Docencia de capacitación al estudiantado en TICs, lenguas, habilidades personales y físicas.
- Creación de redes de conocimiento: WikiSénior, Revista Renaixement y Biblioteca Virtual Sénior.
- Investigación en ámbitos de envejecimiento activo, pedagogía aplicada a adultos y, uso de las TICs en personas mayores.

El principio de aprendizaje a lo largo de toda la vida se tiene que entender desde el compromiso institucional, de la universidad en este caso, para ofrecer oportunidades de formación, divulgación científica y crecimiento, adecuadas a todas las edades. La Universitat Jaume I, oferta, mediante la universidad para mayores, un grado de carácter común para todo el estudiantado y un postgrado con diferentes itinerarios que posibilitan elegir en función de gustos o intereses académicos. Además, para no discriminar ni por territorio ni por edad se ofrece un curso de Ciencias Humanas y Sociales en seis municipios diseminados en la provincia de Castellón. Esta oferta se complementa con cursos de aptitudes tecnológicas y lingüísticas, actividades de dinamización y talleres.

Queda claro que con estos estudios no se busca la inserción laboral, en la línea del punto anterior, se pretende generar ambientes de reflexión, diálogo, crecimiento y formación personal, social y cultural. Favoreciendo así un envejecimiento activo y colaborando en la construcción de una sociedad del conocimiento.

LA ALFABETIZACIÓN MATEMÁTICA

En la Conferencia Internacional de Mejora para el Aprendizaje de las Matemáticas (CIEAEM) del año 2001 el foco fue la alfabetización matemática en la era digital (Bazzini & Whybrow Inchley, 2002). ¿Pero qué quiere decir el concepto "alfabetización matemática"? Podemos utilizar la definición de Rico (2004, 90): "Dicha alfabetización se refiere a la capacidad de los estudiantes para analizar, razonar y comunicar eficazmente cuando identifican, formulan y resuelven problemas matemáticos en una variedad de dominios y situaciones." Mientras que dicho autor dice que en el estudio OCDE/PISA la Alfabetización Matemática es "la capacidad individual para identificar y entender el papel que las matemáticas tienen en el mundo, hacer juicios bien fundados y usar e implicarse con las matemáticas en aquellos momentos de la vida en que se le presenten necesidades y tenga que actuar como ciudadano constructivo, comprometido y reflexivo." (Rico, 2004,91).

En este contexto surgen las matemáticas como parte de la educación a la que toda persona debe aspirar. Gal (2000) distingue entre alfabetización numérica y alfabetización matemática. La primera se encargaría de resolver las situaciones numéricas. La segunda se encargaría de resolver situaciones globales, donde las matemáticas ayudan a buscar soluciones creativas dentro de la misma cotidianidad (Alsina, 2002; Van Reeuwikj, 1997).

Para buscar estas situaciones globales, Buendía (1999) se propone una manera de trabajar las matemáticas de forma dialógica, donde las intervenciones de los participantes van construyendo el contenido que se quiere trabajar, y siempre contextualizando en situaciones reales.

Las rutas matemáticas son una herramienta que nos permite trabajar de forma dialógica esta alfabetización matemática dándole una perspectiva sociocultural.

LAS RUTAS MATEMÁTICAS Y LAS NUEVAS TECNOLOGÍAS

Podríamos definir una ruta matemática como un paseo por un espacio real, donde la mirada de quien pasea se ve filtrada por las matemáticas. La pretensión es encontrar qué de matemáticas hay en el contexto en el que nos situamos, creando aprendizajes significativos, Ausubel (1970) y trabajando los contenidos que sean adecuados para el desarrollo cognitivo de quien la realiza. También se busca una globalización en la educación atendiendo a patrimonio cultural y natural que nos podemos encontrar en este paseo. Tal como indica Corbalán (2007, p. 105): "Una ruta matemática real es un recorrido por nuestra localidad, una manera de mostrar la presencia de las matemáticas en algunos aspectos de la vida diaria de los alumnos".

Más concretamente, una ruta matemática pone en contacto conocimientos ya adquiridos con los nuevos que se encuentran en el paseo, y el individuo tendrá que adaptarse en el contexto concreto y en un momento de su vida, Sánchez (2003). Necesariamente esto creará aprendizajes significativos y afianzará procedimientos lógicos para la resolución de esos problemas concretos. También utilizará la interdisciplinariedad, porque se pondrán en común diferentes áreas Ciencias Sociales (arquitectura y arte), Ciencias de la Naturaleza (interpretación del medio), Tecnología (construcciones y utilización de aplicaciones de teléfonos inteligentes), Educación Física (senderismo y orientación), Educación Plástica y visual (realización de planos y maquetas). También la transversalidad como educación para el consumidor y educación ambiental, Marcos y Carpintero (2001). La metodología puede ser muy diferente, desde trabajos en gran grupo o en grupos más pequeños, también individualmente. Todo ello contribuirá a tener una experiencia diferente que difícilmente se puede tener en un aula convencional.

El uso de las nuevas tecnologías también tiene cabida en una ruta matemática y de su uso se espera que se solucionen partes de los problemas que la ruta proponga.

Existen muchas rutas matemáticas ya publicadas en la literatura y por tanto no es una novedad el presentar una, aunque esté programada en un contexto nuevo como puede ser la Universitat Jaume I. Pero sí lo es el hecho de que en la bibliografía consultada no existe ninguna propuesta para adultos y que, en su desarrollo, además de aprender conceptos matemáticos, se introducen las nuevas tecnologías, siguiendo las premisas de Martín y Requejo (2005).

NUESTRA EXPERIENCIA

El 15 de mayo de 2018, realizamos una ruta matemática por la Universitat Jaume I con 60 participantes de la universidad para mayores, todos ellos con estudios medios o superiores y jubilados. Se formaron 15 grupos de 4 integrantes.

La ruta que se desarrollaba en la universidad tenía 7 paradas (ver anexo 1) y en ellas cada grupo tenía que resolver unas actividades ayudándose de materiales manipulativos o de herramientas electrónicas que se les proporcionaba.

La investigación realizada fue cualitativa, exploratoria, descriptiva y muestral (Fox, 1981). Se realizó un estudio de caso del modo de resolución de las actividades y de los errores cometidos (si se tuvieron). A continuación, mostramos las paradas que se hicieron de la ruta con la explicación de los datos recogidos a los grupos.

1. Parada 1. Monolito

La primera parada consiste en medir el monolito del ágora utilizando el teorema de Tales. Como se observa en la tabla 1 hubo 3 formas de realizar la actividad

Tabla 1. Frecuencia relativa de modos de resolución de la actividad de la parada 1.

Fracciones equivalentes	regla de 3	otros
10/15	4/15	1/15

En este caso, excepto un grupo, todos decidieron usar métodos proporcionales, bien reglas de tres o fracciones equivalentes. El único grupo que nos sorprendió fue el grupo 1 dado que utilizó un método gráfico en el que no sabemos cómo obtuvo los resultados.

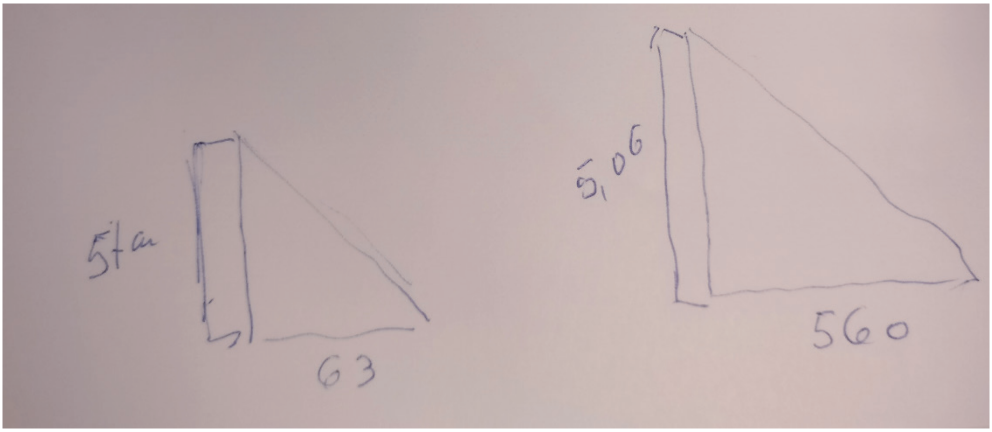


Figura 1. Resolución uno de los grupos, usando forma gráfica.

Para trabajar la competencia digital se intentó que el alumnado utilizará la aplicación móvil Telémetro: Smart Measure. Pero tuvimos el problema que hubo muchas incidencias de funcionamiento, por lo que en las siguientes actividades tampoco se pudo utilizar.

2. Parada 2

La segunda parada consistió en calcular la superficie del círculo que forma el ágora de nuestra universidad (plaza circular y principal de nuestro campus). Como ayuda podrán usar unos pivotes informativos (Figura 2) que hay alrededor de la plaza y usar escalas, los datos podían tomarse manualmente o con la aplicación. La actividad sorprendió dado que solo 5 grupos decidieron utilizar escalas y la información que proporcionaban los pivotes. Un grupo decidió usar ruedas métricas y a partir de calcular el radio o diámetro la plaza, contestar a las preguntas. Mientras que 9 grupos dejaron la actividad en blanco ya que posteriormente comentaron que no les había dado tiempo.

Figura 2. Pivotes informativos del ágora. Tienen la misma forma que la plaza.

3. Parada 3: el café de los sentidos

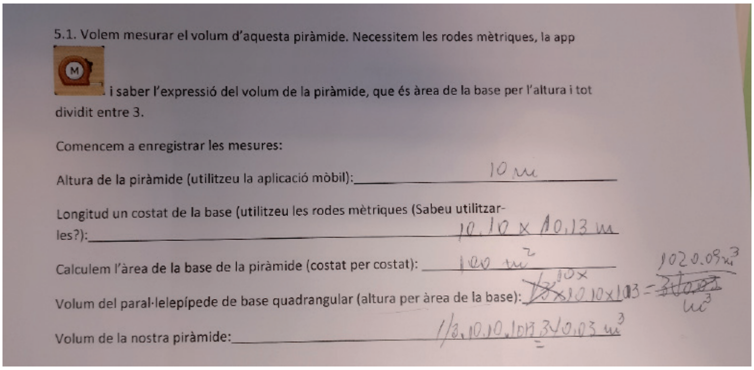
En esta parada el alumnado tuvo que calcular el agua que había en el estanque. Se trata de un estanque cuadrado de 100 metros de lado, donde hay un surtidor en medio. En este caso, 12 de los grupos lo realizaron correctamente, un grupo eliminó el espacio que ocupaba el caballo y ninguno consideró el grifo. En esta actividad ningún grupo tuvo problemas en el uso de las cintas métricas ni en el uso de las expresiones.

4. Parada 4: Pirámide

En el patio central del edificio departamental de la Escuela Superior de Ciencia y Tecnología hay una pirámide de base cuadrangular de unos 10 metros de lado y 10 metros de altura, y se les proponía calcular el volumen. Midieron la longitud lateral de la base con las ruedas métricas y estimaron la altura con la aplicación móvil, ya que ambos datos los desconocían.

Dado que la aplicación no funcionaba, la altura de la pirámide se estimó tomando como referencia la altura de los edificios.

Al igual que la parada anterior esta actividad no causó problema a ningún grupo. En la figura 3 vemos la resolución de uno de los grupos que realizó la actividad de forma correcta.



5.1. Volem mesurar el volum d'aquesta piràmide. Necessitem les rodes mètriques, la app i saber l'expressió del volum de la piràmide, que és àrea de la base per l'altura i tot dividit entre 3.

Comencem a enregistrar les mesures:

Altura de la piràmide (utilitzeu la aplicació mòbil): 10 m

Longitud un costat de la base (utilitzeu les rodes mètriques (Sabeu utilitzar-les?): 10,10 x 10,13 m

Calculem l'àrea de la base de la piràmide (costat per costat): 100 m²

Volum del paral·lelepípede de base quadrangular (altura per àrea de la base): ~~1/3~~ x 10 x 10,10 x 10,13 = ~~340,03~~ 1020,09 m³

Volum de la nostra piràmide: 1/3 . 10 . 10,10 . 10,13 = 340,03 m³

Figura 3. Resolución de uno de los grupos.

5. Parada 5: poliedros regulares

En esta parada existe una gran fuente de forma semicircular donde aparecen del agua los 5 poliedros regulares de un tamaño considerable (cabrían en un cubo de 50 cm de lado). Tenían dos tareas, la primera era identificar los poliedros regulares de la fuente de entre todas las piezas que les proporcionábamos. Después de haber observado las formas y habiéndolas retirado, contestaron a esta pregunta:

Has manipulado muchos cuerpos geométricos. Nosotros te mostramos algunos cuerpos vistos desde arriba, de todos los que hemos manipulado... ¿Cuál crees que es? ¿Por qué? Haz un dibujo entero del cuerpo. (Gonzato, 2014, 454) A continuación mostramos una serie de tablas (de la Tabla 2 hasta la Tabla 7) donde indicamos, en la primera columna la figura proporcionada, y en el resto de columnas las posibles contestaciones que hicieron. Bajo de cada una de ellas una cantidad que indica el número de grupos que realizaron esta contestación.

Tabla 2. Frecuencia de contestaciones correctas o incorrectas a la primera imagen.

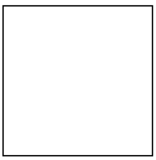
	cubo	**Prisma**	**Paralelepípedo**	**Otros**
	15	11	13	cuadrado (2)

Tabla 3. Frecuencia de contestaciones correctas o incorrectas a la segunda imagen.

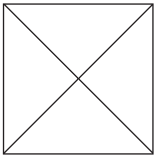
	pirámide base cuadrangular	**Otros**
	15	octaedro (1)

Tabla 4. Frecuencia de contestaciones correctas o incorrectas a la tercera imagen.

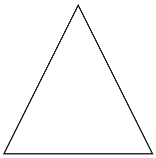
	Prisma	**Otros**
	13	triángulo, pirámide de base triangular paralelepípedo irregular (2) paralelepípedo base triangular paralelepípedo regular pirámide regular de base triangular(2)

Tabla 5. Frecuencia de contestaciones correctas o incorrectas a la cuarta imagen.

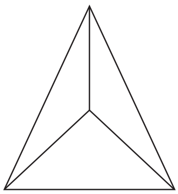
	Tetraedro	**Pirámide**
	13	10

Tabla 6. Frecuencia de contestaciones correctas o incorrectas a la quinta imagen.

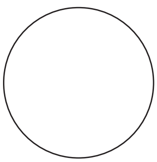
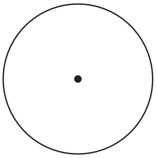
	Esfera	**Semiesfera**	**Cilindro**	**Ovoide**
	13	0	9	0

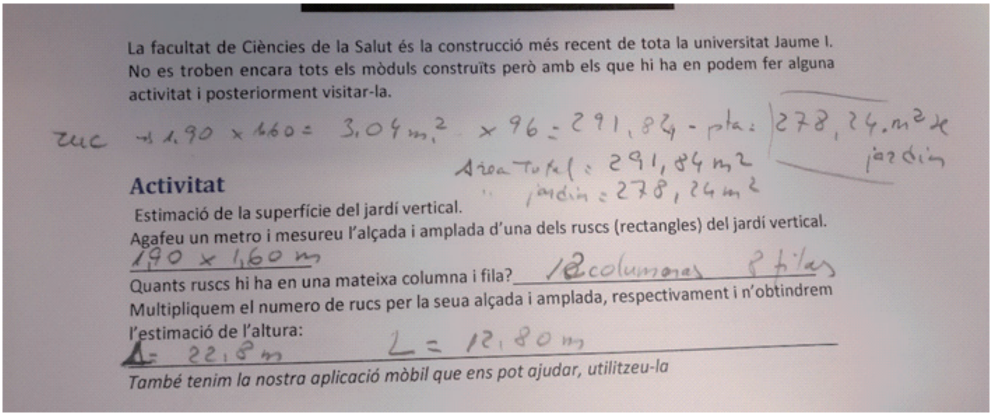
Tabla 7. Frecuencia de contestaciones correctas o incorrectas a la sexta imagen.

	Cono	Otros
	12	Tronco de cono regular, cono irregular, cilindro (2)

En esta actividad, la figura que presentó más dificultad fue la triangular, que les llevó a contestar muchas preguntas erróneas, posiblemente por un error de concepto como comenta Gonzato (2014).

6. Parada 6: Jardín vertical de la Facultad de Ciencias de la Salud

Para finalizar la ruta se proponía estimar la superficie de uno de los jardines verticales que se encuentra en la Facultad de Ciencias de la Salud. Está ubicado entre los edificios que quedan unidos por un puente superior y puede tener una superfície de 13 metros de ancho por 23 de altura. Como está dividido en paneles (jardineras), la idea es que calcularan uno y multiplicaran por los paneles que había. Solo 7 grupos realizaron la actividad, ya que el alumnado estaba cansado. Todos los que respondieron no eliminaron la superficie de la puerta y calcularon bien la superficie de cada jardinera, las multiplicaron por el total de jardineras y obtuvieron el resultado, un ejemplo de la resolución se observa en la figura 4.


La facultat de Ciències de la Salut és la construcció més recent de tota la universitat Jaume I. No es troben encara tots els mòduls construïts però amb els que hi ha en podem fer alguna activitat i posteriorment visitar-la.

ruc → 1,90 × 1,60 = 3,04 m² × 96 = 291,84 - pta: 278,24 m² jardin

Área Total: 291,84 m²
jardin: 278,24 m²

Activitat

Estimació de la superfície del jardí vertical.

Agafeu un metro i mesureu l'alçada i amplada d'una dels ruscs (rectangles) del jardí vertical.

1,90 × 1,60 m

Quants ruscs hi ha en una mateixa columna i fila? 12 columnas 8 filas

Multipliquem el numero de rucs per la seua alçada i amplada, respectivament i n'obtindrem l'estimació de l'altura:

A = 22,8 m L = 12,80 m

També tenim la nostra aplicació mòbil que ens pot ajudar, utilitzeu-la

Figura 4. Resolución de uno de los grupos

ENCUESTA DE SATISFACCIÓN

Una vez acabada la ruta se les realizó una encuesta de satisfacción con contestaciones en escala likert del 1 al 5 donde 1 era muy desacuerdo y 5 muy de acuerdo. La media cada uno de los ítems se puede consultar en la Tabla 8. Destacamos que el alumnado les gustó la experiencia, que no vieron dificultad en las actividades y nos animaron para prepararles actividades similares en el futuro.

Tabla 8. Medias de los ítems de la encuesta de satisfacción.

ITEM	MEDIA
El material proporcionado para realizar la actividad era adecuado	4,3125
El profesorado ha realizado una buena explicación de la ruta	4,6250
El profesor ha explicado bien las actividades	4,6250
El tiempo dedicado a la ruta ha sido el adecuado	4,1250
He aprendido cosas nuevas	4,0000
He podido aplicar mis conocimientos en la ruta	4,5625
Esta metodología me ayuda a entender mejor las matemáticas	4,5625
Ahora veo la aplicación de las matemáticas a la vida real	4,5000
Después de realizar la actividad seré capaz de observar las matemáticas en mi día a día	4,3750
La ruta ha sido divertida y lo he pasado bien	4,5625
Para mi es importante salid del aula para aprender matemáticas	4,4375
Las actividades tienen más o menos la misma complejidad que las actividades realizadas en clase	4,2500
Las actividades son más complicadas que las actividades realizadas en clase	2,8125
Pienso que la ruta matemática ha estado interesante	4,6875
Me gustaría hacer este tipo de actividad más veces	4,6875

CONCLUSIONES

La propuesta que presentamos cumple los objetivos propuestos por Martín y Requejo (2005) sobretodo el de potenciar su crecimiento personal en esferas afectivas, físicas y mentales, ya que trabajaron en grupos, realizamos una pequeña excursión por el campus donde se dió la socialización y tuvieron que poner en práctica sus conocimientos matemáticos para resolver las distintas actividades propuestas.

Con la ruta matemática propuesta conseguimos trabajar la alfabetización matemática en el sentido de Alsina (2002) y Van Reeuwikj (1997), trabajándola de forma dialógica como dice Buendía (1999). Además introdujimos las nuevas tecnologías para trabajar los conceptos matemáticos siguiendo la propuesta de Martín y Requejo (2005). Señalamos también que el campus de la Universitat Jaume I es el lugar habitual donde realizan las clases de la universidad para mayores, pero las zonas donde se desarrolla la ruta fueron totalmente novedosas para ellos y ellas. Redescubrieron el entorno con una mirada matemática que les ayudó a entender mejor ese contexto.

Con la encuesta de satisfacción que les realizamos podemos concluir que la actividad fue lúdica y que sirvió para trabajar los conceptos matemáticos que se habían revisado en clase, pero de forma verdaderamente significativa en el sentido de Ausubel (1970). Podemos concluir, que el alumnado aprendió a ver las matemáticas que hay en su alrededor, al menos en este contexto concreto, objetivo de la ruta matemática como afirma Corbalán (2007).

Agradecimientos

Agradecemos a la promoción 2017-2018 del curso de postgrado "El universo de las matemáticas y la física moderna " por realizar esta actividad de Ruta Matemática.

REFERENCIAS

Alsina, C. (2002). *Menys temes, més idees; menys rutines, més creativitat. Educació, matemàtiques i segle XXI.* Barcelona: Universitat de Barcelona.

Ausubel, D. (1983) *Teoría del aprendizaje significativo.* Fascículos de CEIF 1-10.

Bazzini, L; Whybrow Incheley, C. *Littéracie mathématique à l'ère digitale.* Milano: Ghisetti e Corvi Editori

Buendía, P. (1999). *Educación de personas adultas. Matemáticas.* Murcia: Consejería de Educación y Cultura.

Corbalán, F. (2007). Rutas matemáticas por nuestra localidad. *Sigma*, 30, 105-116.

Gonzato, M. (2014) *Evaluación de conocimientos de futuros profesores de Educación Primaria para la enseñanza de la visualización espacial.* Granada: Universidad de Granada. http://hdl.handle.net/10481/30878

Gal, I. (2000). *Adult numeracy development. Theory, research, practice.* New Jersey: Hampton Press, Inc. CressKill.

Kelly, R. J. y Wistcott, G. (1989). Ordinary retirement: commonalities and continuity. *International Journal of Aging and Human Development,* 32 (2), 81-89.

Kelly, R. J. (1993) *Activity and aging. Staying involved in later life.* Newbury Park*:* Sage Publications Inc

Marcos, A y Carpintero, E. (2001). Actividades matemáticas fuera del aula: cuaderno de campo. *SUMA*, 38, 73-83.

Martín, A.V. y Requejo, A. (2005). Fundamentos y propuestas de la educación no formal con personas mayores. *Revista de Educación,* 338,45-66.

Martín, M.I. (2009). La educación de adultos. I*nnovación y experiencias educativas.* 24. https://archivos.csif.es/archivos/andalucia/ensenanza/revistas/csicsif/revista/pdf/Numero_24/M_INMACULADA_MARTIN_1.pdf

Sánchez, M. (2003) Aprendizaje significativo. *Psicopedagogía.* http://www.psicopedagogia.com/definicion/aprendizaje

Rico, L. (2004) Evaluación de Competencias Matemáticas. Proyecto PISA/OCDE 2003. En E. Castro, E. de la Torre (Ed.): *Actas VIII Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática.* La Coruña: Universidad de A Coruña.

Van Reewnijk, M. (1997). Las matemáticas en la vida cotidiana y la vida cotidiana en las matemáticas. *UNO. Revista de didáctica de las matemáticas,* 12, 9-16.

ANEXO

Primera ruta matemática por la UJI.

La ruta matemática que vas a empezar se realiza por una parte del recinto del campus Riu Sec de la Universitat Jaume I de Castelló. Se ha seleccionado un recorrido para trabajar aspectos de las matemáticas que es posible que no te hayas dado cuenta que existen cuando han paseado por los mismos lugares.

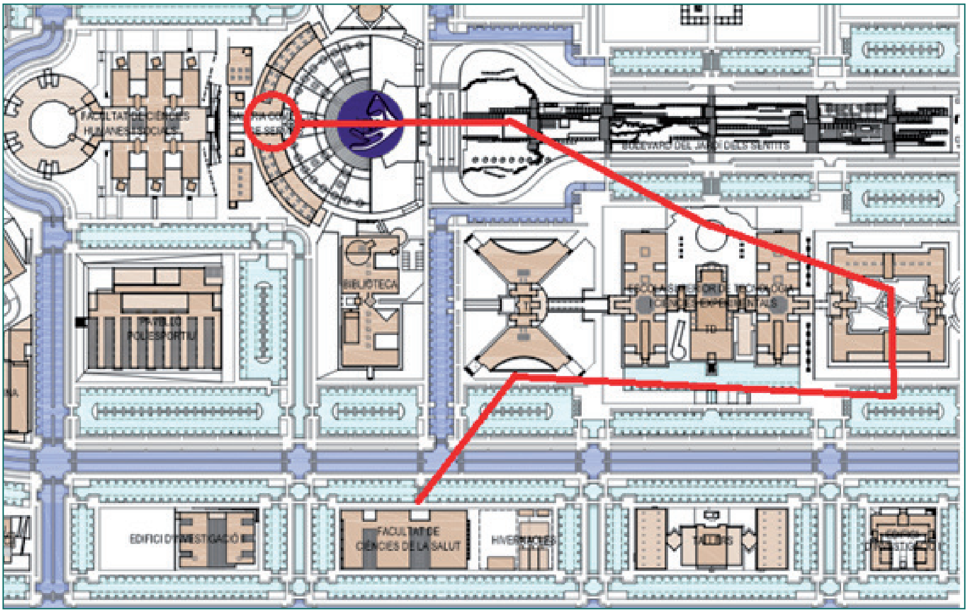
Prepárate para recorrerla con ojos matemáticos y con la disponibilidad de poder sorprenderte. Algunos elementos son ornamentales, otros forman parte de la arquitectura de los edificios o del contexto.

Lo que necesitas para resolver las cuestiones que te planteas lo encontrarás en este dossier, o bien nos lo preguntas a nosotros. Las actividades hay que realizaras en el mismo momento, aquí, durante la ruta. Es cierto que si alguna no te da tiempo de hacerla aquí la puedes terminar en casa.

Esperamos que la sesión te guste y que te pueda aprovechar.

¿Cuál es el recorrido?

El recorrido que haremos empieza en el monolito del ágora del campus. También habrá alguna cuestión sobre el ágora mismo y posteriormente nos desplazaremos hacia el este, al Café de los Sentidos concretamente a la primera fuente que se encuentra después de la parada del tram. Posteriormente se hará el descanso en el café de los sentidos y nos desplazaremos hacia el sur a la puerta principal de la Escuela Superior de Ciencia y Tecnología. Posteriormente nos desplazaremos hacia la izquierda, en el edificio de despachos, donde entraremos al patio interior. Después saldremos hacia el sur para encontrarnos la fuente del edificio de despachos opuesto al que habíamos entrado y finalmente desplazarnos a la Facultad de Ciencias de la Salud. Te proporcionamos un plano para que te orientes.



Parada 1
EL MONOLITO

El ágora es un gran espacio para peatones junto a la parada de tram y del jardín de los sentidos. Es un anfiteatro para actividades colectivas, coronado por la biblioteca, la facultad de ciencias humanas y sociales y el rectorado. En el centro de la parte superior se encuentra un monolito que es donde se centrará la primera actividad. La pavimentación del espacio circular central es un mosaico del artista Manuel Sáez.

NOTA: Todas las informaciones sobre el campus lo hemos extraído del libro ARQUITECTURA UJI, UN CAMPUS DE FUTURO, publicado por los servicios de publicaciones de la UJI.

Actividades

1.1 Nos fijamos en el monolito. ¿Cuánto medirá? Para calcular su altura utilizaremos el Teorema de Thales y las cintas métricas.

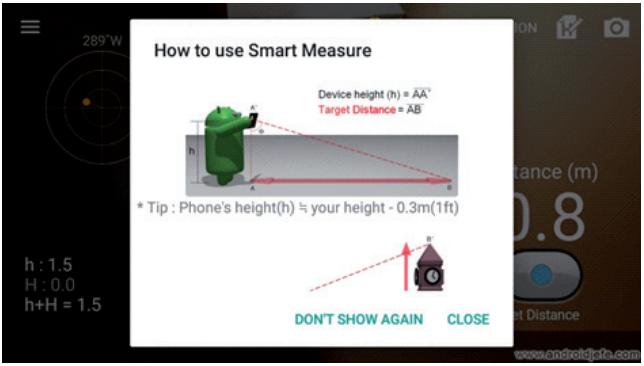
Os ayudamos con estas indicaciones

$$\frac{\textit{la sombra del poste blanco}}{\textit{la altura del poste blanco}} = \frac{\textit{la sombra del monolito}}{\textit{la altura del monolito}} = \frac{\textit{la sombra de la palmera}}{\textit{la altura de la palmera}}$$

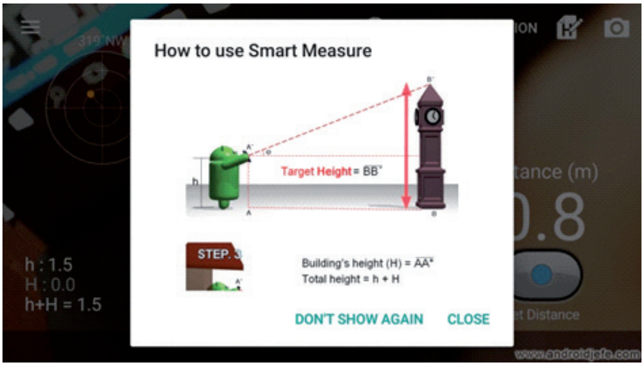
La medida de vuestro cálculo: ______________________________________

1.2. Seguidamente haremos una prueba. Os tenéis que bajar una app en vuestro dispositivo **móvil que se llama Telémetro: Smart Measure**

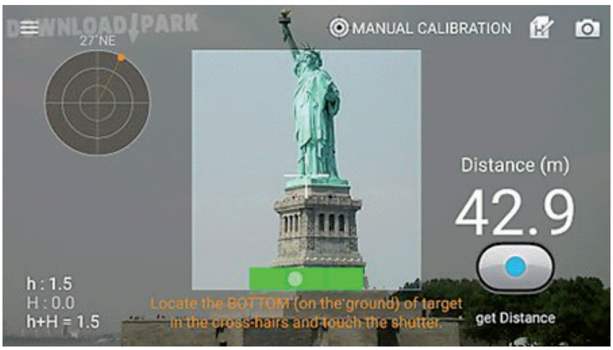
Antes de usarla hay que calibrar vuestro móvil



A partir de este momento, cuando se quiera usar la app hemos de enfocar nuestro dispositivo móvil al lugar donde queremos medir la altura:



La medida es el número grande que aparece.



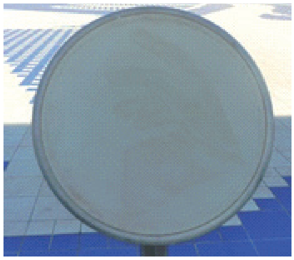
La medida obtenida con vuestra aplicación es: ______________________________
____

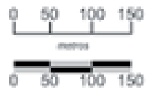
Parada 2
Círculo central del Ágora pavimentada

Actividades

2.1. Fijémonos en círculo central del Ágora pavimentada. Nos gustaría saber su superficie. Como ya sabéis el área de un círculo es 2πr. Una manera de calcularla sería calcular el diámetro (2r) y solo se debería multiplicar por π. Pero conseguir el diámetro de la plaza puede ser muy complicado, aunque con una rueda métrica lo podéis hacer. Os damos un par de ideas para simplifica la tarea:

1. Podemos usar escalas y medir el diámetro de los pivotes informativos que encontraremos alrededor de la plaza, después podemos calcular la escala de forma manual. Para calcular la escala hemos de medir lo que mide un azulejo de la realidad y uno de los pivotes. La escala será la fracción entre la medida del azulejo del pivote y el de la realidad. Entonces se podrá calcular la dimensión del diámetro del Ágora.
2. O podemos hacer uso de esta herramienta del móvil Escalas Cartográficas.





Simplemente hemos de medir el diámetro del pivote, decirle la escala y la aplicación nos dará el diámetro real.

Primero tenemos que seleccionar en qué situación estamos (distancia en la realidad) después en la pantalla hemos de complementar los datos: el ejemplo que daremos, en el plano mide 2 cm y la escala es 1/25.000 en este momento se pulsa a RESOLVER y nos dará la distancia en la realidad.

Parada 3
Café de los sentidos

El jardín de los sentidos ocupa el centro del campus de la Universitat Jaume I. Es una construcción que juega con el volumen (diferentes alturas direcciones, recorridos) con la posibilidad de ofrecer un lugar de distensión y tranquilidad. Se llama de los cinco sentidos porque el gusto, el oído, el olfato, el tacto y la vista se encuentran presentes en este jardín e interconectados botánicamente, siempre con una presencia de agua como elemento vehicular. Las especies de plantas de la provincia de Castelló se encuentran representadas en este espacio verde.

Actividades

3.1. ¿Serías capaz de calcular el agua que cabe en el estanque? Necesitamos:
- La altura del estanque:
- El lado del cuadrado que forma la base:
- Área de la base (lado por lado):
- Volumen (área por altura):

Almorzamos durante 30 minutos

Parada 4
Puerta principal de la Escuela Superior de Ciencia y Tecnología

La Escuela Superior de Tecnología y Ciencias Experimentales es el centro que acoge todas las titulaciones relacionadas con el ámbito tecnológico y de las ciencias experimentales. Consta de tres grandes volúmenes, el central es el docente y de gestión de la Escuela y los dos de los extremos que son los despachos. En este espacio hay diferentes reconocimientos a mujeres científicas que no se han reconocido su valor histórica como merecen.

Actividades

4.1. Aquí encontraremos muchas formas geométricas. Enumera los elementos geométricos presentes a todo el edificio. ¿Su fachada es simétrica?
4.2. ¿Sabrías decir a qué figura geométrica te recuerda la puerta?

Prestamos atención a la fuente, encontramos estos nombres:

Nos quedamos con las mujeres que aportaron algunos conocimientos a las matemáticas. La actividad se centra en leer la historia de estas mujeres y empatizar con ellas:

HIPÀTIA D'ALEXANDRIA
GRABRIELLA-EMILE LE TONNELIER DU BRETEUIL
MARIA GAETANA AGNESI
SOPHIE GERMAIN
AUGUSTA ADA BYRON

Parada 5
Edificio de despachos de l'ESCT

El gran patio central del edificio departamental destinado a dependencias de los departamentos de Tecnología y Ciencias Experimentales alberga una importante pirámide de base cuadrangular, que es donde centraremos nuestra actividad próxima.

ACTIVIDADES

5.1. Queremos medir el volumen de esta pirámide. Necesitamos las ruedas métricas la, la app y saber la expresión del volumen de la pirámide, que es área de la base por la altura y todo dividido entre 3.

Comenzamos a registrar medidas:

- Altura de la pirámide (utilizad la aplicación móvil):
- Longitud del lado de la base (utilizad las ruedas métricas):
- Calculemos el área de la base de la pirámide (lado por lado):
- Volumen del paralelepípedo de base cuadrangular (altura por área de la base):
- Volumen de la pirámide:

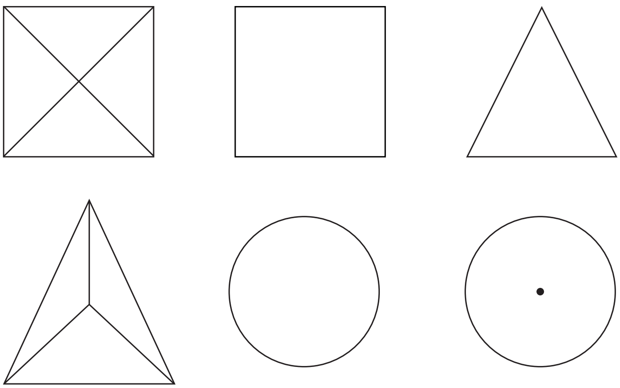
Parada 6
Poliedros regulares

En la parte diametralmente opuesta a la que nos encontrábamos, localizamos una fuente con poliedros regulares (en la foto no hay agua, pero en condiciones normales está todo cubierto de agua y los poliedros dan la impresión de flotar). Como que no se podrá bajar a observar los poliedros regulares, os dejaremos que manipuléis el material denominado "cuerpos geométricos de madera", para descubrir cuál es cada cual de la fuente.

Actividad

En esta parada tenemos dos tareas, la primera es identificar los poliedros regulares entre todas las piezas. ¿Ya las tenéis? Ahora, después de haber observado las formas y habiéndolas devuelto a la caja, contestad:

Habéis manipulado muchos cuerpos geométricos. Nosotros os mostraremos estos cuerpos **vistos desde arriba**, de todos los que hemos visto, ¿cuál creéis que es? Haz un dibujo entero del cuerpo. *(Actividad obtenida de la tesis doctoral de Margherita Gonzato)*.



Parada 7
Jardín Vertical de la Facultad de Ciencias de la Salud

La facultad de Ciencias de la Salud es la construcción más reciente de toda la Universitat Jaume I. No se encuentran aún todos los módulos construidos, pero con los que hay podemos hacer alguna actividad y posteriormente visitarla.

Actividad

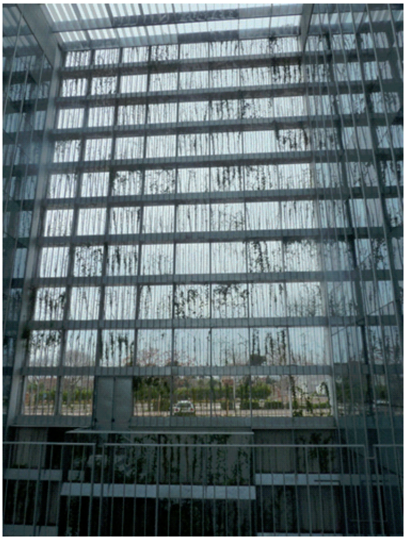
Estimación de la superficie del jardín vertical.

Tomad un metro y medid la altura y anchura de uno de los rectángulos (jardineras) del jardín vertical:

¿Cuantos rectángulos hay en una misma columna y fila?

Multiplicad el número de rectángulos por su altura y anchura, respectivamente y obtendremos la estimación de la altura:

También tenemos la app del móvil que nos puede ayudar, utilizadla:



Espacio suplementario

Por si necesitáis para los cálculos o explicaciones complementarias.

Fin de la ruta

Esperamos que hayas disfrutado de la ruta y hayas aprendido mucho. Ahora ya sabes que estás más rodeado de matemáticas.
¡Nos vemos!

Encuesta de satisfacción de la ruta, a rellenar por los y las participantes

	1	2	3	4	5
1. El material proporcionado para hacer la actividad es el adecuado.					
2. El profesorado ha hecho una buena explicación de la ruta.					
3. El profesorado ha explicado bien les actividades.					
4. El tiempo dedicado a la ruta ha estado el adecuado.					
5. He aprendido cosas nuevas.					
6. He podido aplicar mis conocimientos en la ruta.					
7. Esta metodología me ayuda a comprender mejor las matemática.					
8. Ahora le veo la aplicación de las matemáticas en la vida real.					
9. Después de hacer la actividad sería capaz de observar las matemáticas en mi día a día.					
10. La ruta ha estado divertida y lo he pasado bien.					
11. Para mí es importante salir del aula para aprender matemática.					
12. Las actividades tienen más o menos la misma complejidad que las actividades realizadas en clase.					
13. Las actividades son más complicadas que las actividades realizadas en clase.					
14. Pienso que la ruta matemática ha sido interesante.					
15. Me gustaría hacer este tipo de actividades más a menudo.					

1. Totalmente desacuerdo.
2. En desacuerdo.
3. No lo sé.
4. De acuerdo.
5. Totalmente de acuerdo.

Enseñando proporcionalidad directa e inversa a un estudiante ciego

Miguel Hernández Portillo
IES Margarita Salas (Torre de Benagalbón, Málaga)

Resumen: *Este artículo describe cómo explicar las funciones de proporcionalidad directa e inversa a un estudiante ciego usando un modelo simple hecho con una tabla de madera, tornillos y gomas elásticas. Esta actividad práctica está dirigida a estudiantes ciegos para ayudarlos a aprender conceptos matemáticos básicos. Esta experiencia de clase, que se ha adaptado a la discapacidad de nuestro alumno, le ha permitido a nuestro estudiante comprender conceptos matemáticos, aumentar su motivación y fortalecer su aprendizaje.*
Palabras clave: *Educación matemática, educación inclusiva, discapacidad visual.*

Teaching direct and inverse proportionality to a blind student

Abstract: *This paper describes how to explain the direct and inverse proportionality functions to a blind student using a simple model made with a wooden board, screws and rubber bands. This practical activity is aimed at blind students to assist them in learning basic mathematical concepts. This classroom experience, which has been adapted to our student´s disability, has allowed our student to understand mathematical concepts, to increase their motivation and to strengthen their learning.*
Keywords: *Mathematics education, inclusive education, visual disability.*

MARCO TEÓRICO

El estudio de las magnitudes directa e inversamente proporcionales, y de las funciones en el currículum de 2º ESO está recogido en los bloques 2 y 4 de la Orden de 14 de julio de 2016, por la que se desarrolla el currículo correspondiente a la Educación Secundaria Obligatoria en la Comunidad Autónoma de Andalucía. Pero, ¿qué debemos tener en cuenta para enseñar estos temas a un estudiante ciego?

La Orden de 25 de julio de 2008, por la que se regula la atención a la diversidad del alumnado que cursa la educación básica en los centros docentes públicos de Andalucía (BOJA nº 167, de 22 de agosto de 2008), establece en su articulado que "e*l profesorado tendrá en consideración en las programaciones de los contenidos (...) las características específicas del alumnado al que atiende"* (Artículo 4.3) y también que "*las adaptaciones curriculares no significativas irán dirigidas al alumnado que presente (...) dificultades graves (...) de acceso al currículo asociadas a una discapacidad"* (Artículo 14.1).

En este sentido, el "Manual de atención al alumnado con necesidades específicas de apoyo educativo derivadas de discapacidad visual y sordoceguera" recomienda *"facilitar el acceso al curriculum"* debiéndose *"asegurar el acceso a la información que se maneja en el aula"* mediante la *"utilización de materiales didácticos específicos"* para el alumnado con ceguera total (pp. 20- 22).

Nuestro estudiante ciego ha alcanzado la comprensión de las magnitudes directa e inversamente proporcionales, y de las gráficas que las representan (la línea recta y la hipérbola equilátera, respectivamente) mediante la utilización de un material de apoyo creado expresamente para acceder a esa información.

LA EXPERIENCIA EN EL AULA

Se ha construido en una tabla de madera unos ejes de coordenadas y la gráfica con tornillos, gomillas, cartulinas y papel de impresora. De esta forma nuestro alumno ciego puede leer la gráfica con las yemas de los dedos. En una tabla de madera de 46,7 x 36 x 1,2 centímetros se han taladrado 21 agujeros horizontales y 21 verticales formando una matriz de 441 agujeros. Los ejes de coordenadas y la gráfica se dibujan introduciendo tornillos en los agujeros y uniéndolos con gomillas. Junto a los ejes de coordenadas pegamos en la madera una tarjeta en braille (papel de impresora escrito en braille pegado en un rectángulo de cartulina) con el nombre de la variable que representamos en cada eje.

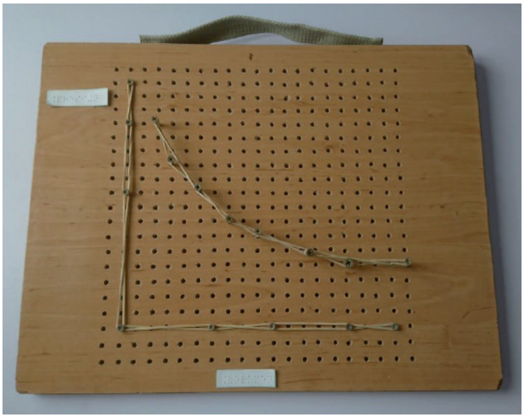


Figura 1.

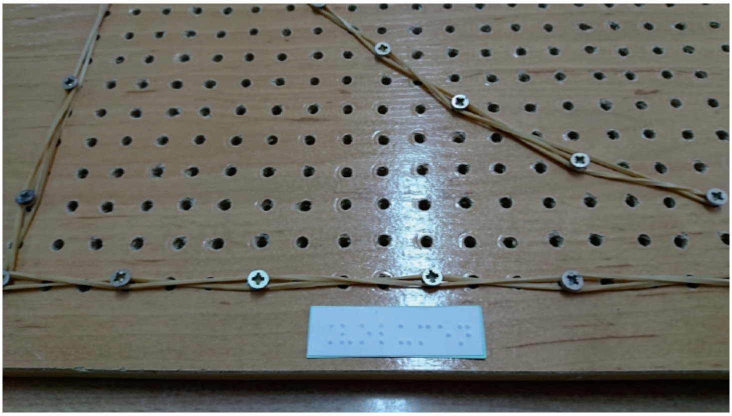


Figura 2.

El estudiante localiza mediante el tacto la situación de los ejes de coordenadas, y a continuación localiza el lugar donde se sitúa la gráfica. Coloca un dedo de la mano derecha sobre un punto del eje de abscisas y lo mueve hacia arriba siguiendo la trayectoria de los agujeros en la tabla encontrándose con la gráfica, y aquí sitúa un dedo de su mano izquierda y lo mueve paralelamente al eje de abscisas hasta encontrar el eje vertical. La distancia entre ese punto y el origen de coordenadas le permite comparar las coordenadas (x,y) del punto de la gráfica. De esta forma descubre que a cada valor de x le corresponde un solo valor de y.

Si la gráfica es una línea recta que pasa por el origen de coordenadas, el estudiante sitúa un dedo de cada mano sobre un tornillo de la gráfica, y desplaza simultáneamente los dedos sobre los agujeros de la tabla hacia los ejes de ordenadas y de abscisas. A continuación, los desplaza al unísono hacia el origen de coordenadas con lo que puede comparar de esta forma el valor de la abscisa y de la ordenada del punto. Repitiendo el proceso comprueba que cuando aumenta el valor de la abscisa también aumenta el valor de la ordenada. Cuando una variable aumenta, también lo hace la otra; si una variable disminuye, la otra también. Las dos variables son directamente proporcionales. Es fácil comprender que el número de ruedas de varios coches es directamente proporcional al número de coches.

Si la gráfica es una hipérbola equilátera descubre que cuando aumenta la variable independiente entonces la variable dependiente disminuye, y que si la variable dependiente es la que aumenta entonces la variable independiente disminuye. En este caso, las dos variables son inversamente proporcionales. De esta forma puede explicar con el lenguaje propio de las matemáticas por qué se tarda menos tiempo en pintar las paredes de una casa cuando aumenta el número de pintores, o por qué el volumen de un globo disminuye cuando aumentamos la presión cuando la temperatura del ambiente permanece constante.

Figura 3.

La comprensión de la relación de proporcionalidad, ya sea directa o inversa, es lenta para un estudiante ciego puesto que es necesario repetir la experiencia varias veces a lo largo de un trimestre o del curso con el objetivo de que sea capaz de explicar no solo oralmente la relación matemática entre las variables, sino que también sea capaz de interpretar la gráfica correctamente.

CONCLUSIONES

Esta actividad ha permitido a nuestro alumno comprender conceptos propios de las matemáticas para explicar situaciones de su entorno, aumentar su motivación y hacer descubrimientos, fortalecer su aprendizaje con un ritmo de aprendizaje más lento y repetitivo, y mejorar su autoestima.

Agradecimientos

A D. Marcelo Rosado Carrasco y a D. Antonio David Aguilera Gámiz, de la Organización Nacional de Ciegos de España (ONCE) en Málaga, por su ayuda en la impresión de texto en braille.

REFERENCIAS

Aguirre Barco, P., Gil Angulo, J. M., González Fernández, J. L., Osuna Gómez, V., Polo Serrano, D. C., Vallejo de Castro, D., Angulo Domínguez, M. C., Prieto Díaz, I., Hernández Hurtado, R., & Peters Domonkos, S. F., (2008). Manual de atención al alumnado con necesidades específicas de apoyo educativo derivadas de discapacidad visual y sordoceguera. Sevilla: Junta de Andalucía, Consejería de Educación.

Hernández, M. (2019). Physics and Chemistry´s hands-on activities for a blind student. En Guidebook of Science on Stage Festival 2019 Cascais, Portugal-Skills for the future, 89. NUCLIO-Núcleo Interactivo de Astronomía: Portugal.

Épsilon - *Revista de Educación Matemática* *2020, nº 106, 61-68*

Utilización del Kahoot para la introducción de la lógica proposicional en la E.S.O

Manuel Vázquez Mourazos
Universidad de Santiago de Compostela

Resumen: *La lógica matemática es un tema poco tratado en las aulas de la educación secundaria. Normalmente no se le presta atención y se deja a un lado. Este hecho se puede apreciar en el poco nivel de los alumnos de nuevo ingreso en la universidad.*
Para subsanar este problema, en el presente artículo se aporta una idea de cómo tratar de forma sencilla y didáctica este tema. De esta forma, se verán beneficiadas la competencia matemática de los alumnos (al mejorar su nivel de razonamiento), pero, al mismo tiempo, también lo harán otras ramas del conocimiento como son la expresión escrita o la comprensión de los alumnos.

Palabras clave: *Lógica matemática, Kahoot, pensamiento abstracto, razonamiento lógico, demostración, creencia, conocimiento*

Title Use of Kahoot for the introduction of propositional logic on the secondary school

Abstract: *Mathematical logic is a topic little treated on the secondary school. Normally, he is not paid attention and is set aside. This fact can be seen in the low level of new students entering the university.*
To solve this problem, this article provides an idea of how to deal with this topic in a simple and didactic way. In this way, the mathematical competence of the students will benefit (at best their level of reasoning), but, at the same time, other branches of knowledge will also do so, such as written expression or students' understanding.

Keywords: *Mathematical logic, Kahoot, abstract thinking, logical reasoning, proof, conviction, knowledge*

INTRODUCCIÓN

Actualmente son muy conocidas las noticias en los medios de comunicación que ponen en auge la importancia de carreras científicas como son las matemáticas o las ingenierías. Con las buenas perspectivas de trabajo en estos campos, son muchos los alumnos que optan por cursar los grados universitarios en dichas disciplinas. Sin embargo, el fracaso universitario en estos grados, de la rama científica-tecnológica, es muy elevado. Este hecho se debe a que la forma en la que se concibe la ciencia, desde el punto de vista de los institutos, es completamente contraria a la realidad que los alumnos vivirán en sus estudios superiores. A menudo se prioriza en los institutos el cálculo de operaciones y la resolución de ejercicios mecánicos frente a razonar el porqué de las fórmulas o de las soluciones obtenidas.

Según el Real Decreto 1105/2014, del 26 de diciembre, uno de los objetivos primordiales de esta etapa es "*Comprender los elementos y procedimientos fundamentales de la investigación y de los métodos científicos*". Sin embargo, la apreciación que se tiene en general no es ésta y los alumnos llegan con unas grandes carencias cuando deciden cursar estudios superiores. A este respecto, las universidades no están al margen de este déficit de formación. Por ello, cada vez más universidades se suman al proyecto del "Curso 0". Se trata de un curso de iniciación a los alumnos de nuevo ingreso en los meses previos al inicio del curso universitario o durante los primeros meses del mismo. Entonces, ¿cuáles son estas carencias? ¿cuáles son los puntos más débiles con los que llegan los nuevos estudiantes de los grados científico-tecnológico?

Viendo el programa que sustentan alguno de estos cursos, éstos suponen incrementar el grado de abstracción, conocer el lenguaje matemático, aumentar los conocimientos sobre procedimientos de razonamiento lógico y acostumbrar a una mayor discusión previa de los problemas. En definitiva, se busca introducir al alumnado en el mundo de la lógica y pensamiento abstracto, tal y como se puede apreciar en el artículo (Polo & Serna, 2014) enfocado en la formación de los nuevos ingenieros. Pero, al mismo tiempo, otros autores como (Bishop, 1999, pág. 36) señala "*la matemática es en esencia una* ***tecnología simbólica****"*, haciendo referencia a la importancia de un lenguaje lógico y abstracto en la disciplina matemática.

Por ello, es esencial tratar estos aspectos desde los cursos de la E.S.O. Obviamente, no todos los alumnos van a cursar estudios superiores, pero, aun así, es de vital importancia que todos ellos sean capaces de razonar de forma coherente y válida. Además, en el mundo actual, donde reinan las nuevas tecnologías y las conocidas como "fake news", es importante cultivar en los alumnos el escepticismo científico que ayudará a desarrollar un espíritu crítico.

Así, es imprescindible señalar a los estudiantes los conocimientos y herramientas fundamentales para pensar y razonar. Desde niños todos conciben y toman como propias ciertas experiencias. El problema es que dicho conocimiento no es tal, sino que son creencias tomadas de la experiencia más reciente. Como se señala en (Ponte, 1994), las creencias tienen un status inferior al del conocimiento que, además, incluso no requiere consistencia interna. Así, cuando una conjetura (una hipótesis, una creencia, etc…) se demuestra mediante procesos lógicos, ésta pasa a convertirse a lo que matemáticamente se conoce como teorema, es decir, una proposición verdadera.

Por ello, en el presente artículo se propondrá una actividad para reforzar el pensamiento lógico desde la E.S.O. Se trata de una actividad que se puede llevar a cabo en cualquier curso de la educación secundaria. Lo que se busca conseguir con ello, es obtener estudiantes que prioricen analizar y estudiar una información. Como ya decía (Russell, 1948, pág. 160) "*La verdad es una propiedad de las creencias…. La verdad consiste en una cierta relación entre una creencia y uno o más hechos distintos de la creencia*". Otro autor más actual, como (Miranda, 1995, pág. 20), dice: "*…Un argumento se dice que es válido cuando la conclusión es una consecuencia de las premisas y esta relación se da en virtud de la forma lógica del argumento*". Por tanto, es fundamental identificar los procesos lógicos que llevan a una conclusión final en un proceso de razonamiento.

Lógica proposicional

Una vez justificada la necesidad de la introducción de la lógica proposicional, una pregunta pertinente sería: ¿qué conceptos les enseñamos? No hay que perder la noción de que se trata de alumnos con edades tempranas. Como es obvio, no se les exigirá un nivel desarrollado y maduro de la lógica. Lo que se pretenderá será transmitir pequeñas pinceladas sobre esta temática.

El primer concepto que se debe de enseñar es el de la proposición. ¿Qué es una proposición? Su definición es muy sencilla, se puede definir como un enunciado que es verdadero o bien es falso. Así se tendría que:

Tabla 1.: Ejemplo de proposiciones.

Proposición	Valor de la proposición
"3 + 5 = 8"	Es una proposición verdadera
El rojo es un color bonito	No es una proposición
La luna no es un astro	Es una proposición falsa

Se puede tratar de manipular este concepto según se quiera, es decir, a partir de unas proposiciones cualesquiera, combinarlas para crear nuevas proposiciones que podrán ser ciertas o falsas. Para ello se deben introducir signos lógicos que permitirán enlazar unas proposiciones con otras.

Tabla 2. Operadores lógicos.

Operador	Signo lógico	Significado
Negador	$\neg$	Convierte en falsa una proposición
Conjuntor	$\wedge$	Crea una proposición a partir de dos, de tal manera que ésta nueva será cierta sólo cuando las dos proposiciones que la forman sean ciertas
Disyuntor	$\vee$	Crea una proposición a partir de dos dadas, de tal manera que ésta nueva será cierta cuando lo sea, al menos, una de las dos proposiciones que la forman

Con los operadores de la Tabla 2 los alumnos serán capaces de crear nuevas proposiciones a partir de otras. Además, es necesario poder establecer relaciones entre las proposiciones que se tienen. Para ello se pueden introducir nuevos signos lógicos que establezcan dichas relaciones, como los que se muestran en la Tabla 3, que permitirán deducir conclusiones a partir de las situaciones establecidas por las proposiciones.

Tabla 3. Relaciones lógicas.

Operador	Signo lógico	Significado
Implicador	$\Rightarrow$	Relaciona dos proposiciones, de tal manera que si la primera es cierta, la segunda también lo será
Coimplicador	$\Leftrightarrow$	Relaciona dos proposiciones, de tal manera que si una es cierta, la otra también lo será y viceversa (y de igual modo si son falsas)

EL KAHOOT COMO HERRAMIENTA PARA ESTUDIAR LÓGICA PROPOSICIONAL

Todos los conceptos introducidos en la sección anterior resultan muy interesantes para los matemáticos, pero para los estudiantes de secundaria puede que no lo sean tanto. Así, es importante utilizar alguna herramienta adicional que permita motivar al alumnado. Por ello se presentará el Kahoot como la herramienta a utilizar.

Esta herramienta está disponible en https://kahoot.com/, que permite realizar concursos instantáneos y ver los resultados en tiempo real. A cada jugador se le será asignada una puntuación en función de si la respuesta es correcta y del tiempo que haya tardado en contestar. De este modo, en cada cuestión se irá sumando la puntuación obtenida y actualizando las mismas.

Utilizar Kahoot es tan sencillo como crear una cuenta en la página oficial que se citó anteriormente con cualquier cuenta de correo electrónico. El modo de utilizarlo es muy intuitivo y permite elegir entre los siguientes tipos de preguntas:

- **Open-ended:** Se pregunta a los jugadores por la respuesta correcta.
- **Puzzle:** Se dan cuatro opciones y se pregunta a los jugadores el orden correcto en el que deben ponerlas.
- **Poll:** Reúne opiniones de los jugadores.
- **Slide:** Permite aportar a los jugadores información adicional sobre la pregunta.

Con estas premisas se puede aportar una serie de preguntas, a modo de idea, para presentar las posibles cuestiones que se podrían hacer. Obviamente, cualquier docente podría crear preguntas en la misma línea y adecuarlas al nivel educativo de sus alumnos.

Tabla 4. Ejemplo de preguntas sobre proposiciones.

Preguntas	Respuestas
Estados Unidos es una república y no tienen rey	Proposición verdadera
	No es una proposición
	Proposición verdadera y falsa
	Proposición falsa
¿Cómo estáis?	Proposición verdadera
	Proposición verdadera y falsa
	Proposición falsa
	No es una proposición
Júpiter es el planeta con más masa del sistema solar	Proposición verdadera y falsa
	No es una proposición
	Proposición falsa
	Proposición verdadera
Camilo José Cela es un gran autor	Proposición verdadera y falsa
	No es una proposición
	Proposición verdadera
	Proposición falsa
El símbolo químico del oro es "Au"	Proposición verdadera
	Proposición verdadera y falsa
	Proposición falsa
	No es una proposición
Sicilia es la capital de Italia	Proposición verdadera y falsa
	Proposición falsa
	No es una proposición
	Proposición verdadera
"Valkiria" es una obra musical de Mozart	No es una proposición
	Proposición falsa
	Proposición verdadera y falsa
	Proposición verdadera
"En un lugar de la Mancha…"	Proposición verdadera y falsa
	Proposición falsa
	No es una proposición
	Proposición verdadera

Mediante estas preguntas no sólo se está a trabajar el concepto de proposición, sino que, al mismo tiempo, también se están trabajando conceptos relacionados con la cultura general que deberían tener los alumnos al terminar la E.S.O. De este modo, este proyecto se convierte en multidisciplinar al trabajar conjuntamente conocimientos de muy diversas áreas.

Otra observación a realizar son las opciones de respuesta que se aportan. La opción "*Proposición verdadera y falsa*" realmente no es una opción, pues una proposición o es verdadera o falsa. Se incluye como a modo de "*despiste*" por si algún alumno puede pensarlo.

Por otro lado, para trabajar la parte de los operadores lógicos, se pueden utilizar otro tipo de preguntas. Se desea enseñar al alumnado la diferencia existente entre usar la conjunción "y" y la conjunción "o". Así, el propio docente podría crear una proposición compuesta de dos (unidas por una de las conjunciones anteriores) y seguir el mismo modelo de pregunta que se propuso en la Tabla 4. Sin embargo, si se está en posesión de una licencia de Kahoot, se podría emplear un puzzle. Para ello, vamos a proponer un ejemplo.

Tabla 5. Ejemplo de puzzle con proposiciones.

Proposiciones	**Valor de la proposición**
El río Nilo pasa por Egipto	Verdadera
Las crecidas del río Nilo se usaron para determinar el calendario	Verdadera
El Nilo es el río más caudaloso del mundo	Falsa

En la Tabla 5 aparecen tres proposiciones relacionadas con el río Nilo. Con las opciones de respuesta planteadas se pueden construir varios puzzle a la vez. Un primero sería pedir a los alumnos que construyesen una proposición verdadera con la conjunción "y" y, acto seguido, presentarles otro puzzle en el que deben construir una proposición falsa con la misma conjunción.

En el primer caso la respuesta es única, pues sólo se pueden unir las dos primeras opciones. Sin embargo, para el caso de la construcción de la proposición falsa, los alumnos podrían construir dos al juntar la última opción con la primera o la segunda indistintamente. Así mismo, una pregunta pertinente a los alumnos al terminar el puzzle de la proposición falsa sería: ¿Cuántas proposiciones falsas distintas podríais crear con la conjunción "y" y estas tres proposiciones? De este modo, los alumnos asimilarán más profundamente el valor real del significado de la conjunción "y", lo que implica un beneficio en otras ramas distintas a la matemática.

Para la otra conjunción, la "o", se puede hacer un procedimiento análogo. Partiendo de un tema, basta con crear el docente proposiciones de distinto valor, verdaderas y falsas, para pedirles a los alumnos que las unan con conjunciones creando nuevas proposiciones con el valor que les indique el docente.

Luego se aumentará la dificultad al tener en cuenta las relaciones lógicas vistas en la Tabla 3. En este caso, se puede cambiar el tipo de pregunta de Kahoot para hacerlo más dinámico. Por ejemplo, se pueden usar preguntas de verdadero o falso.

Tabla 6. Ejemplo de cuestiones sobre relaciones lógicas.

Enunciado	Respuesta (Verdadero o falso)
Los padres de Luís le han prometido regalarle un móvil si aprueba todas las asignaturas al terminar el curso. En verano Luís lleva su móvil nuevo para enseñárselo a sus amigos. Entonces, se puede afirmar que Luís ha aprobado todas las asignaturas del curso.	Falso
Juan, le dice a su mejor amigo que le regalará un anillo a su novia si, y sólo si, se decide a pedirle matrimonio. Al cabo de dos meses de esa conversación, ambos siguen siendo novios y ella lleva puesto un anillo de compromiso. Entonces, se puede afirmar que Juan se ha decidido a pedirle matrimonio.	Verdadero
Carla está pensando en hacer un viaje para visitar a su amigo Alejandro en Italia. Si finalmente se decide por ir, ella le llamará para avisarle de su visita. Entonces, como Alejandro no ha recibido ninguna llamada, se puede afirmar que Carla no irá a visitarle.	Verdadero

En la primera de las preguntas se aprecia un ejemplo de la confusión entre que una condición sea necesaria o sea suficiente. En realidad, Luís ha podido tener el móvil nuevo por cualquier circunstancia que no sea el hecho de haber aprobado las asignaturas del curso. Es cierto que ha podido darse el caso que la causa sea esa, pero no tiene porqué ser así. Por tanto, la condición de que Luís haya aprobado todas las materias es suficiente, pero no necesaria.

En el segundo caso se está a utilizar la relación necesaria y suficiente ("coimplicador"), es decir, si se da un hecho también se dará el otro. Sin embargo, en el último de los enunciados la cuestión es distinta. En él se vuelve a utilizar la implicación, es decir, se da una condición suficiente pero no necesaria, pero, lo que se hace es negar la consecuencia.

Éste es un ejemplo de una propuesta que se podría llevar a cabo. Dependiendo del curso, se podrían adaptar los contenidos de los enunciados e, incluso, se deberían de adaptar dichos contenidos al contexto del centro y del aula, lo que implicaría un mayor interés por parte del alumnado.

CONCLUSIONES

Con lo visto se pueden trabajar las nociones básicas relativas a la lógica proposicional. Estas nociones servirán de base para poder aplicar cualquier razonamiento lógico y que los alumnos sepan diferenciar entre lo que es una proposición (que puede ser verdadera o falsa) y lo que es una creencia o una intuición. Así, cuando tengan que aplicar un razonamiento, estarán ojo avizor para no cometer pasos en falso dando por hecho que una creencia es un conocimiento.

Al mismo tiempo, también se estarán a trabajar competencias y conocimientos de otras ramas como la mejor comprensión lectora o una mayor expresión y concreción escrita de los estudiantes. Aspectos tan sencillos como saber diferenciar el valor real de las conjunciones “y” y “o” o de los adjetivos “suficiente” y “necesario” hacen que, en cursos posteriores, cuando se empiecen a hacer demostraciones rigurosas, los alumnos estén acostumbrados al lenguaje matemático que se utiliza en ellas. Al mismo tiempo, en el día a día, para leer un contrato bancario, una noticia en un periódico o cualquier información que se nos aporte, es necesario tener un espíritu crítico y escéptico que analice cada una de sus palabras. Solamente de este modo, cada persona será capaz de extraer sus propias conclusiones y no dejarse llevar por la corriente.

Por todo ello, se ha propuesto esta sencilla actividad que puede resultar de especial ayuda para mejorar el razonamiento de los estudiantes de la E.S.O. A menudo se pretende ahorrar tiempo al darles a los alumnos fórmulas ya hechas, resultados ya demostrados o problemas planteados y modelizados, pero ¿no sería más interesante que fuesen los alumnos los que dedujesen las fórmulas, los resultados y los planteamientos de los problemas? Pues bien, para todo ello es necesario tratar los conocimientos aquí tratados y servirán para que los alumnos perciban un mejor conocimiento mucho más constructivo y enriquecedor basado en un aprendizaje constructivo.

REFERENCIAS

Bishop, A. (1999). *Enculturación matemática. La educación matemática desde una perspectiva cultural.* Barcelona: Paidós.

Miranda, T. (1995). *El juego de la argumentación.* Ediciones de la Torre.

Polo, J., & Serna, M. (2014). Lógica y abstracción en la formación de ingenieros: una relación necesaria. *ScienceDirect*, 299-310.

Ponte, J. (1994). Mathematics teachers professional knowledge. *Proceedings of the XVIII International Conference for PME* (págs. 195-210). Lisboa: J. Ponte, J.P Matos (Eds).

Russell, B. (1948). *El conocimiento humano.* Barcelona: Ediciones Orbis [1983].

Épsilon - *Revista de Educación Matemática* **2020, nº 106, 69-76**

La «justicia» en el reparto: las misivas matemáticas mantenidas entre Fermat y Pascal

Julio Camacho-Cañamón
Carmen León-Mantero
Universidad de Córdoba

Resumen: *La probabilidad puede llegar a ser un concepto complejo de introducir dado su carácter abstracto. Fueron las preguntas que se hacían los jugadores de azar en el siglo XVII las que motivaron el estudio de la probabilidad que conocemos en la actualidad. En este trabajo se presenta una idea de aula en la que se emplea una metodología activa de Aprendizaje Basado en Juegos caracterizada por su estilo manipulativo, significativo y constructivista que, enfocado desde un punto de vista solidario, puede llegar a ser muy enriquecedor para los alumnos de educación secundaria, así como eficaz para la comprensión de los conceptos relacionados con la probabilidad.*
Palabras clave: *Probabilidad, Azar, Fermat, Pascal, Aprendizaje Basado en Juegos.*

"Justice" in the distribution: the correspondence between Fermat and Pascal

Abstract: *Probability can become a complex concept to introduce given its abstract character. It was the questions asked by gamblers in the seventeenth century that motivated the study of probability as we know it today. In this Classroom Idea an active methodology of Game-Based Learning will be used since it is characterized by its manipulative, significant and constructivist style that, focused from a solidary point of view, can become very enriching for the secondary education students, as well as effective for the comprehension of the concepts related to probability.*
Keywords: *Probability, Chance, Fermat, Pascal, Game-Based Learning.*

INTRODUCCIÓN

El nacimiento de la teoría de la probabilidad tuvo una relación muy estrecha con el estudio de los problemas surgidos a partir de los juegos de azar. De hecho, el primer libro de texto del que se tiene conocimiento y en el que se habla sobre cálculo de probabilidades es el *Liber de Ludo Aleae* (Libro de los juegos de azar) de Cardano. Podemos afirmar, entonces, que la probabilidad, tal y como la conocemos hoy en día, nació de la curiosidad matemática que suscitó entre los jugadores el arte de ganar o aumentar sus posibilidades de éxito en los juegos de azar. No es una creencia poco fundamentada la que afirma que jugando se aprende (Charlier, Ott, Remmele, y Whitton, 2012; Guillén, 2015; Hogle, 1996), y por ello, son de utilidad e interés el diseño de tareas estructuradas en torno a la metodología del Aprendizaje Basado en Juegos (ABJ). Por otro lado, son muchos los autores que reconocen los beneficios de usar la Historia de las matemáticas como recurso didáctico en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas tanto para los profesores como para los alumnos (Fauvel y van Maanen, 2000; Gómez Alfonso, 2018; Jankvist, 2009; Pamos Vargas y Maz-Machado, 2014).

Por todo lo anterior, este trabajo presenta una idea de aula destinada a alumnos de enseñanza secundaria en la que se trabajarán conceptos relacionados con la probabilidad mediante una metodología basada en el Aprendizaje Basado en Juegos (ABJ), a través de uno de los problemas históricos cuya resolución constituyó la base del desarrollo de esta rama de las Matemáticas.

Esta tarea ha sido diseñada atendiendo a los contenidos y estándares de aprendizaje del bloque de Estadística y Probabilidad establecidos para la asignatura de Matemáticas de 3.º de ESO, tanto para la opción Matemáticas orientadas a enseñanzas académicas como aplicadas (Tabla 1).

Tabla 1. Contenido y estándar de aprendizaje («Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato», 2015, p. 394).

Utilización de la probabilidad para tomar decisiones fundamentadas en diferentes contextos	4.4 Toma la decisión correcta teniendo en cuenta las probabilidades de las distintas opciones en situaciones de incertidumbre.

A pesar de que esta tarea puede tener buena acogida desde 3.º de ESO a 1.º de Bachillerato, tal y como está planteada, se ajusta mejor a los contenidos de 3.º de ESO dado su carácter introductorio de la probabilidad.

Los objetivos de esta tarea son: trabajar la introducción de los conceptos básicos de probabilidad; dar a conocer los orígenes históricos de la probabilidad; aplicarlos a la resolución de problemas reales, concienciar sobre la justicia matemática en problemas de reparto, e introducir los aportes que dos grandes matemáticos del siglo XVIII realizaron en esta rama de las Matemáticas, como son Pierre de Fermat y Blaise Pascal.

Entre las directrices establecidas en la «Orden de 14 de julio de 2016, por la que se desarrolla el currículo correspondiente a la Educación Secundaria Obligatoria en la Comunidad Autónoma de Andalucía, se regulan determinados aspectos de la atención a la diversidad y se establece la ordenación de la evaluación del proceso de aprendizaje del alumnado» (2016), se recomienda trabajar la resolución de problemas de forma transversal en todos los bloques de contenidos y siendo un eje fundamental de la asignatura.

Por otro lado, la presente tarea ha sido contextualizada dentro de un programa de solidaridad basado en campañas de recogida de alimentos para distintas ONG y comedores sociales propios de la ciudad. De esa forma, además de la Competencia Matemática y competencias básicas en Ciencia y Tecnología, se atiende a la Competencia Social y Cívica, todas ellas claves, con base en la «Ley Orgánica 8/2013, de 9 de diciembre, para la mejora de la calidad educativa» (2013) y en la «Recomendación del Parlamento Europeo y del Consejo, de 18 de diciembre de 2006, sobre las competencias clave para el aprendizaje permanente» (2006).

DISEÑO DE LA TAREA

Gerolamo Cardano (1501-1576), matemático, filósofo, médico y astrólogo escribió en 1564 el *Liber de Ludo Aleae* (Libro de los juegos de azar) en el que se aborda el estudio de las posibilidades del lanzamiento de varios dados y el llamado «problema de la división». Pero este estudio no fue publicado hasta 1663 (Fernández, 2007). Su obra no tuvo especial relevancia puesto que se dio a conocer al tiempo que las cartas que se intercambiaron Fermat y Pascal en 1654 (recogidas y explicadas por Devlin (2010)) donde exponían y resolvían diversos problemas relacionados con los juegos de azar.

Estos problemas fueron propuestos a Blaise Pascal (1623-1662) por Antoine de Gombaud (1607-1684) a mediados del siglo XVIII. Este caballero de Méré se había convertido en una personalidad importante en la corte francesa de Luis XIV. Fue filósofo y escritor, pero sobre todo su trabajo consistía en sociabilizar. El entretenimiento de moda de la época era, sin duda, el juego de azar y, seguro, que ambos amigos pasaron buenos momentos jugando (Ore, 1960). Según Coumet (1970), el propio de Méré ya había tratado de resolver infructuosamente estos problemas populares, que habían sido estudiados por Luca Pacioli (1447-1517), Niccolò Fontana (1499-1557), más conocido por su apodo, Tartaglia, y hasta el célebre Galileo Galilei (1564-1642).

Pascal, en busca del contraste de soluciones, acudió a Pierre de Fermat (1607-1665) y le planteó un caso particular del famoso problema de la división, que traducido al español y simplificado podría quedar como sigue: si un jugador logra obtener un seis en ocho lanzamientos de un dado, se lleva el total de la apuesta contra la banca, en caso contrario pierde todo; supongamos que habiendo lanzado ya tres veces el dado sin éxito de obtener el seis, el juego se ve interrumpido por un motivo desconocido, ¿cuál sería el reparto más justo de la apuesta entre el jugador y la banca? (de Mora Charles, 1989).

Actividades

Como comentábamos anteriormente, en primer lugar, para enmarcar la actividad en un escenario solidario y social, propondremos a los alumnos realizar una recogida de alimentos para diferentes ONG y para los comedores sociales de la ciudad, de tal manera que *a posteriori* podamos plantearles que resuelvan matemáticamente el problema del reparto de los alimentos que han conseguido recaudar entre todas las clases y destinarlos a los diferentes organismos.

En concreto, el problema que se les plantea consiste en:

Suponiendo que se cuenta con dos entidades a las que donar los alimentos, a saber, Aldeas Infantiles e Ingenieros sin fronteras, ¿cómo debería ser el reparto entre ellas?

Para ello, en primer lugar, se dividirá a la clase en dos grupos iguales, el primer grupo simulará ser el grupo representante de Aldeas Infantiles (A) y el segundo grupo de Ingenieros Sin Fronteras (B).

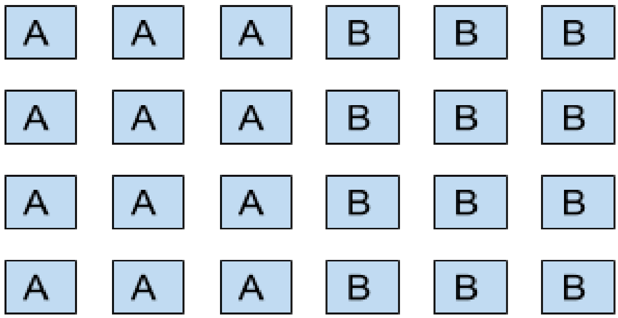


Figura 1. División de la clase en dos grupos iguales.

A continuación, se pedirá al alumnado que formen parejas de forma tal que en cada pareja haya un representante del grupo A y otro del B. Se repartirá de forma equitativa toda la comida recolectada entre las parejas formadas.

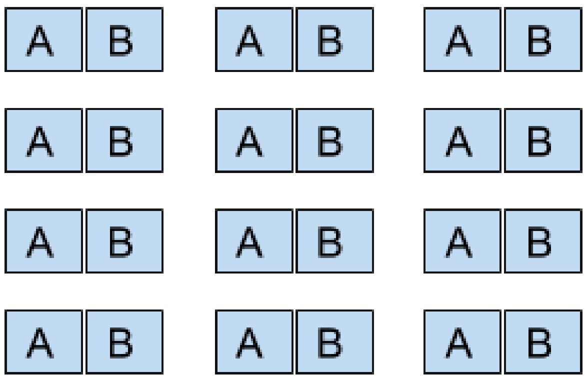


Figura 2. Agrupación por organizaciones.

A cada pareja se le entregará una ficha plana y redonda con una cara blanca y otra negra. Se indicará a los alumnos que la comida asignada a cada pareja será destinada a la asociación que represente la persona que gane al siguiente juego:

Lanza la ficha al aire dejando que caiga sobre la mesa por una de sus caras hasta que alguno de los dos jugadores gane. Se considera ganador al jugador del equipo A si se obtienen 4 caras blancas, ganará el jugador del equipo B si se obtienen 4 caras negras.

Tras cada tirada de la ficha, los jugadores deben apuntar qué resultado ha salido y para qué equipo correspondería ese «punto».

El docente interrumpirá el juego premeditadamente cuando los alumnos hayan realizado 3 lanzamientos y recogerá todas las fichas, sin permitir que ninguna pareja haya obtenido aún su ganador. Para conseguirlo el docente podría dirigir de manera simultánea cada una de las tiradas y detener el juego aludiendo, por ejemplo, al hecho de que había demasiado ruido en la clase, una situación que podría darse previsiblemente. En el siguiente paso de la tarea, el docente preguntará a los alumnos si alguna pareja ha conseguido los 4 puntos necesarios para llevarse toda la comida para la organización que representa. Como es de esperar, ningún miembro de ninguna pareja ha obtenido los cuatro puntos que necesita para ganar. A continuación, se pedirá a los alumnos que se reorganicen en función de los puntos que llevan frente a su rival, es decir, que se organicen en cuatro grupos según hayan obtenido las puntuaciones: 0-3, 1-2, 2-1 o 3-0, en el equipo A y B, respectivamente.

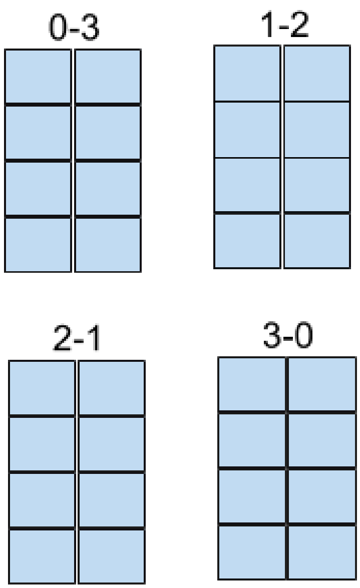


Figura 3. Distribución según puntuaciones.

Por último, en estos nuevos grupos, los alumnos deberán debatir cuáles deberían ser las directrices para decidir cómo debe ser el reparto de los alimentos en cada pareja, aprovechando que el juego no puede continuar.

Entre los casos que podemos encontrar, tenemos:

- Los alumnos que no hayan obtenido ningún punto y cuyo rival haya obtenido tres puntos, podrían argumentar que su rival no tiene por qué llevarse toda la comida ya que no ha obtenido los cuatro puntos mínimos de las reglas del juego. El hecho de que vaya ganando no significa que haya ganado.
- Los alumnos que se encuentren en desventaja con un punto, o bien, en ventaja con dos puntos, podrían decir que la comida se reparta de forma proporcional a las victorias que han obtenido, es decir 1/3 o 2/3 de la comida respectivamente.
- Los alumnos que hayan obtenido los tres puntos y su contrincante ningún punto podrían argumentar que ellos «van ganando» y que tienen derecho a llevarse toda la comida para su organización.

Es en este momento en el que el docente puede comentar a los alumnos que proponen el reparto proporcional que su solución es la misma que la que planteó Pacioli, y en la que, de forma incorrecta, solamente tenía en cuenta los hechos conocidos hasta ese momento. Para los alumnos, conocer las dificultades que surgieron en el pasado cuando se resolvían problemas matemáticos, relativiza los errores cometidos por ellos, puede motivarles a superar sus propias dificultades de aprendizaje y mejorar su actitud hacia la materia.

Para aclarar a los alumnos la respuesta correcta, introduciremos las misivas mantenidas entre Pascal y Fermat. Para ello, se razonará sobre la base de lo ocurrido si el juego hubiese continuado, se introducirá el concepto de incertidumbre, que les haga ver que los alumnos que no han obtenido ningún punto o van en desventaja, tendrían aún probabilidades de ganar y se plasmará mediante un diagrama de árbol la situación en la que cada alumno se encuentra y las diversas situaciones a las que podrían llegar para demostrar, como hizo Fermat, que se puede hacer un reparto más justo en función de las probabilidades que tiene cada alumno de ganar.

CONCLUSIONES

Gracias a este trabajo podemos introducir en el aula el concepto de probabilidad, la utilidad de los diagramas de árbol y la justicia en el reparto, a través de la metodología del ABJ, la resolución de problemas y mediante el uso de la Historia de las Matemáticas como recurso.

Como limitación, que merecería la pena mejorar, podríamos señalar la competitividad que se genera entre los alumnos con este tipo de juegos. Sería este un buen momento para tratar con el alumnado las cuestiones de la ludopatía y la adicción a juegos de azar y apuestas, hablándoles de otros tipos de juegos sociales. No obstante, se ha intentado suavizar introduciendo la recompensa social que implica ganar el juego. Al no ser un beneficio propio para el alumno, sino un beneficio destinado a una organización que realiza una importante labor social, se minimizará la tendencia competitiva y se trabajará el trasfondo solidario en el que está inmerso el problema.

REFERENCIAS

Charlier, N., Ott, M., Remmele, B. y Whitton, N. (2012). Not just for children: game-based learning for older adults. En P. Felicia (Ed.), *6th European Conference on Games Based Learning* (pp. 102–108). Cork: Irlanda.

Coumet, E. (1970). La théorie du hasard est-elle née par hasard ? *Annales, 25*(3), 574-598. doi: 10.3406/ahess.1970.422242

de Mora Charles, M. (1989). *Los Inicios de la Teoría de la Probabilidad: siglos XVI y XVII*. País Vasco: Servicio Editorial Universidad del País Vasco.

Devlin, K. (2010). *The unfinished game: Pascal, Fermat, and the seventeenth-century letter that made the world modern*. Nueva York: Basic Books.

Fauvel, J. y van Maanen, J. A. (2000). *History in mathematics education: The ICMI study*. Dordrecht: Kluwer.

Fernández, S. (2007). Los inicios de la teoría de la probabilidad. Suma: Revista sobre Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas, 55, 7-20.

Gómez Alfonso, B. (2018). Uso de la historia en la educación matemática: El caso de los gemelos póstumos. Matemáticas, educación y Sociedad, 1(1), 11-21. Recuperado a partir de http://mesjournal.es/ojs/index.php/mes/article/view/5

Guillén, J. C. (2015, enero 14). El juego, un mecanismo natural imprescindible para el aprendizaje [Blog]. Recuperado 16 de febrero de 2019, de https://escuelaconcerebro.wordpress.com/2015/01/14/el-juego-un-mecanismo-natural-imprescindible-para-el-aprendizaje/

Hogle, J. G. (1996). Considering Games as Cognitive Tools: In Search of Effective "Edutainment". Georgia: Department of Instructional Technology: University of Georgia. Recuperado de https://eric.ed.gov/?q=Considering+Games+as+Cognitive+Tools%3a+In+Search+of+Effective&id=ED425737

Jankvist, U. T. (2009). A categorization of the "whys" and "hows" of using history in mathematics education. *Educational studies in Mathematics, 71*(3), 235-261.

Ley Orgánica 8/2013, de 9 de diciembre, para la mejora de la calidad educativa. (2013, 10 de diciembre). Boletín Oficial del Estado, 2013(295), 97858–97921. Recuperado de https://www.boe.es/diario_boe/

Orden de 14 de julio de 2016, por la que se desarrolla el currículo correspondiente a la Educación Secundaria Obligatoria en la Comunidad Autónoma de Andalucía, se regulan determinados aspectos de la atención a la diversidad y se establece la ordenación de la evaluación del proceso de aprendizaje del alumnado. (2016, 28 de julio). Boletín Oficial de la Junta de Andalucía, 2016(144), 108–396. Recuperado de http://www.juntadeandalucia.es/boja

Ore, O. (1960). Pascal and the invention of probability theory. The American Mathematical Monthly, 67(5), 409-419.

Pamo Vargas, J.M. y Maz-Machado, A. (2014). LAS MATEMÁTICAS "NO EUROPEAS": Historia de las Matemáticas en la E.S.O. Epsilon, Revista de Educación Matemática, 31(1), 93-107.

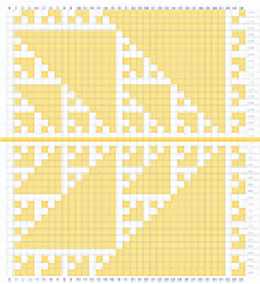
Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato. (2015, 3 de enero). Boletín Oficial del Estado, 2015(3), 169-546. Recuperado de https://www.boe.es/diario_boe/

Recomendación del Parlamento Europeo y del Consejo, de 18 de diciembre de 2006, sobre las competencias clave para el aprendizaje permanente. (2006, 30 de diciembre). Diario Oficial de la Unión Europea, 2006(394), 10-18. Recuperado de https://www.boe.es/diario_boe

Épsilon - *Revista de Educación Matemática* **2020, nº 106, 77-100**

Congruencias en el triángulo de Pascal y el rectángulo de Newton

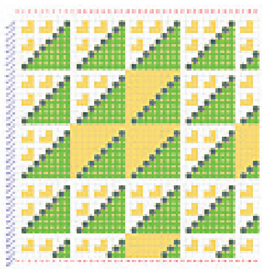
José R. Galo Sánchez
Red Educativa Digital Descartes
reddescartes.org
proyectodescartes.org



Resumen: *El rectángulo de Newton surge como extensión del actualmente denominado triángulo de Pascal partiendo de la versión escalonada de Stifel. Sin embargo, si se parte del esquema organizativo aportado por Pascal entonces el rectángulo de Newton se obtiene mediante una simple simetría signada. Así pues, basta estudiar las congruencias con cero de los números combinatorios y en su análisis aportamos que éstas se ubican en una sucesión de triángulos básicos que se distribuyen de manera periódica. En base a esa periodicidad se incluye un criterio que permite determinar directamente la congruencia de un número combinatorio.*

Palabras clave: *Rectángulo de Newton, triángulo de Pascal, congruencias numéricas.*

Congruences in Pascal's triangle and Newton's rectangle



Abstract: *Newton's rectangle emerges as an extension of the currently called Pascal's triangle starting from the stepped version of Stifel. However, if one starts from the organizational scheme provided by Pascal, then Newton's rectangle is obtained by means of a simple signed symmetry. Thus, it is enough to study the congruences with zero of the combinatorial numbers and in its analysis we add on that these are located in a succession of basic triangles that are distributed periodically. Based on this periodicity, a criterion is included that allows determining directly the congruence of a combinatorial number.*

Keywords*:* *Newton's rectangle, Pascal's triangle, numerical congruences.*

INTRODUCCIÓN

Newton en el bienio 1665-1666 estuvo recluido con motivo de la gran peste de Londres y, durante ese tiempo, formó sus ideas sobre el universo y puso los fundamentos de lo que sería un cambio en el curso de la ciencia (Maor 2006). Este autor detalla que, en esa época, también procedió a la extensión del triángulo aritmético —actualmente denominado como triángulo de Pascal— a un rectángulo con igual lógica aritmética constructiva y con él abordó la expansión de la potencia de un binomio a potencias de exponente entero y racional. Newton realizó dicha extensión apoyándose en la versión escalonada del triángulo que aportó Stilfel (1544), si bien podemos construirlo de igual manera utilizando la versión de Yang Hui (Weisstein, 2003) que se corresponde con la presentación como triángulo isósceles, la habitual hoy en día, y en este caso la extensión de Newton adopta la forma de un paralelogramo. Pascal escribe en 1654 su libro "Traité du triangle arithmétique" (Pascal, 1665) y en él incluye una organización diferente de este triángulo, lo presenta como un triángulo rectángulo, y élla es la que consideramos en este artículo como la más adecuada.

Inicialmente, abordamos la construcción del paralelogramo de Newton o, en particular el rectángulo, y se pone de manifiesto la dificultad que entraña su cálculo y su escritura cuando el número de columnas y/o filas a considerar es relativamente elevado. La representación se simplifica un poco y se logra gran belleza geométrica si se colorean todos los números que son congruentes entre sí, pues se obtienen curiosos y bonitos patrones geométricos de aspecto fractal. En este documento se incluyen referencias a recursos interactivos desarrollados por el autor que permiten reproducir todo lo indicado y/o consultar muestrarios de dichos patrones.

Posteriormente se muestra cómo, considerando la versión aportada por Pascal de su triángulo, el rectángulo de Newton se obtiene mediante una simple simetría signada (las columnas impares cambian de signo y las pares lo mantienen) y en la representación de las congruencias con cero se tiene una simetría geométrica. Así pues, es suficiente considerar únicamente el triángulo de Pascal tanto para abordar el desarrollo de la potencia de un binomio en el caso de números enteros positivos y también negativos, como en el estudio de las congruencias con cero.

Finalmente se aborda el análisis de las congruencias con cero módulo un número primo de los números combinatorios (y por simetría de los coeficientes binomiales) realizándose interpretaciones geométricas de conocidos resultados algebraicos e incluyendo dos resultados propios: uno relativo a la periodicidad de dichas congruencias y otro que permite determinar directamente si un número es o no congruente con cero.

EL PARALELOGRAMO DE NEWTON

El "triángulo de Pascal" (ver figura 1) es ampliamente conocido por entidad propia, por las curiosas propiedades que acontecen en él (Pascal, 1665) y suele aprenderse ligado a lo que usualmente se enseña con el nombre de "binomio de Newton", es decir, la potencia de un binomio cuyo exponente es un número natural. Pero quien enunció o al menos divulgó este desarrollo particular, relacionándolo con ese triángulo, fue Pascal y de ahí

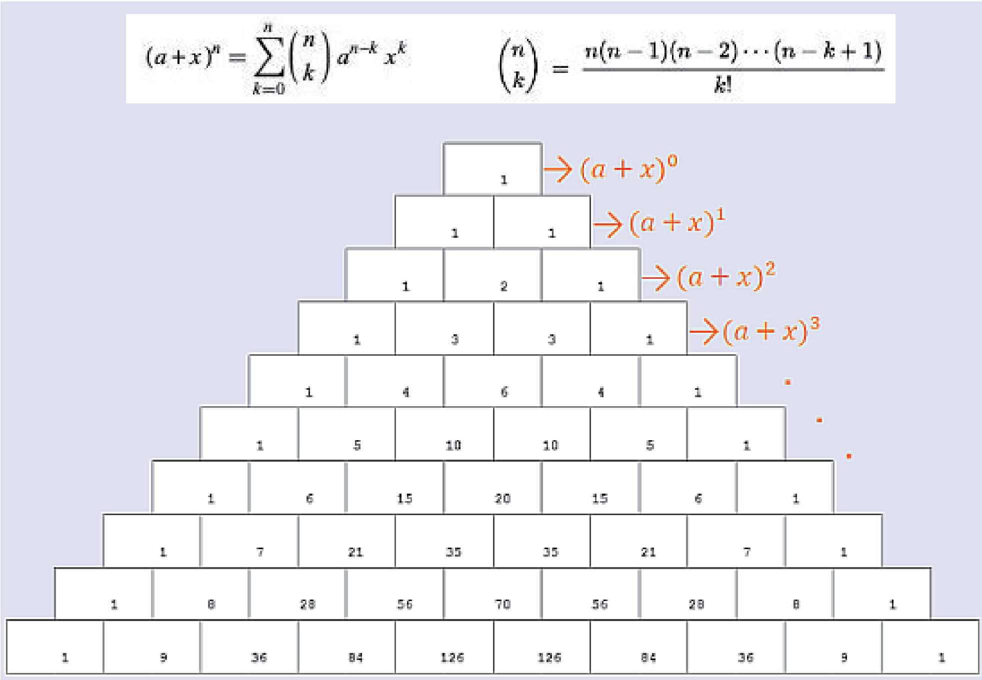


Figura 1. Triángulo de Pascal representado como un triángulo isósceles y relación con los coeficientes del desarrollo de la potencia de un binomio de exponente natural.

que se denomine a dicho triángulo con su nombre. No obstante, el "triángulo de Pascal" ya era conocido según O'Connor y Robertson (1999 y 2003), siglos antes, por el matemático persa Al-Karaji (953-1029) y el chino Yang Hui (1238-1298). Y según Maor (1994) la aportación concreta de Newton en el contexto del desarrollo binomial se sitúa en el caso del desarrollo con exponentes racionales y con exponentes enteros y únicamente llegó a conjeturarla sin llegar a abordar o al menos divulgar su demostración. Actualmente este resultado es un caso particular del denominado "Teorema binomial" (Weisstein, 2020).

Newton abordó la extensión del triángulo de Pascal efectuando un cálculo hacia atrás, de manera que se mantuviera la misma propiedad recursiva que acontece en éste y que consiste en que un elemento de una fila es el resultado de la suma de dos de la fila anterior, propiedad que puede expresarse usando los números combinatorios, con los que se identifican todos y cada uno de los números del triángulo de Pascal, como:

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$$

Con esta extensión recursiva en sentido inverso, Newton construye nuevas filas, cada una de las cuales ahora tienen infinitos números y cuya escritura conduce a la forma de un "paralelogramo" (ver fig. 2), si se parte de la representación reflejada en la figura 1 o puede mostrarse, en particular, como un rectángulo (ver fig. 3).

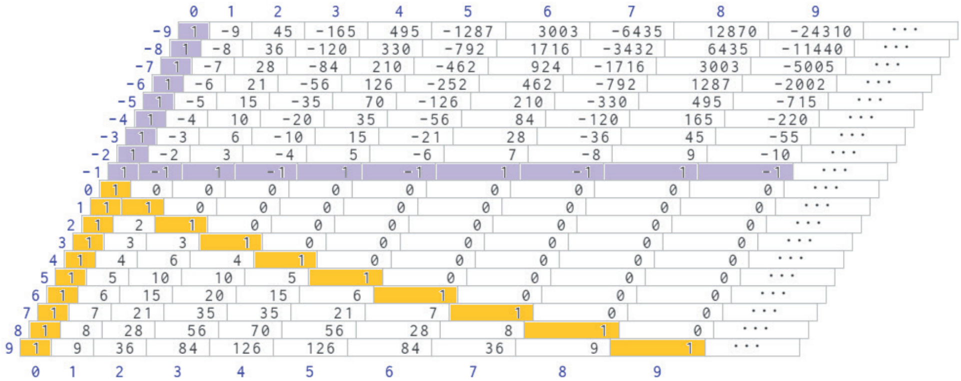


Figura 2. Construcción del paralelogramo de Newton completando el triángulo de Pascal.

A su vez, Newton observa y hace corresponder los números ubicados en cada fila con los coeficientes del desarrollo de la potencia de un binomio cuyo exponente ya no sólo sería un número natural, sino que en general puede ser un número entero. Y, consecuentemente, a todos los números del paralelogramo de Newton los denominaremos coeficientes binomiales (pierde sentido asociarlo con el número de combinaciones). El desarrollo del binomio conduce a un número finito de sumandos cuando el exponente es natural e infinitos (una serie) cuando es un entero negativo[1], según se refleja en la fig. 3.

La representación de dicho paralelogramo o rectángulo numérico entraña algunas dificultades si se desea reflejar un número relativamente elevado de filas y columnas del mismo (ver fig. 4), problema que puede salvarse parcialmente utilizando herramientas informáticas como el recurso "Extensión del triángulo de Pascal: El paralelogramo de Newton" (Galo, 2020a).

1 En los recursos interactivos de RED Descartes (2020): "Ejercicios de desarrollo algebraico usando el «Binomio de Newton»" y "Ejercicios del «binomio de Newton» con exponente entero", pueden practicarse estos desarrollos.

https://proyectodescartes.org/miscelanea/materiales_didacticos/ejerciciosBinomio/index.html

https://proyectodescartes.org/miscelanea/materiales_didacticos/ejerciciosBinomioExponenteEntero/index.html

$$(a+x)^{-n} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-n}{k} a^{-n-k} x^k \quad |x| < a$$

$$\binom{-n}{k} = \frac{-n\,(-n-1)(-n-2)\cdots(-n-k+1)}{k!}$$
$$= (-1)^k \frac{n(n+1)(n+2)\cdots(n+k-1)}{k!} = (-1)^k \binom{n+k-1}{k}$$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
-10	1	-10	55	-220	715	-2002	5005	-11440	24310	-48620	···
-9	1	-9	45	-165	495	-1287	3003	-6435	12870	-24310	···
-8	1	-8	36	-120	330	-792	1716	-3432	6435	-11440	···
-7	1	-7	28	-84	210	-462	924	-1716	3003	-5005	···
-6	1	-6	21	-56	126	-252	462	-792	1287	-2002	···
-5	1	-5	15	-35	70	-126	210	-330	495	-715	···
-4	1	-4	10	-20	35	-56	84	-120	165	-220	···
-3	1	-3	6	-10	15	-21	28	-36	45	-55	···
-2	1	-2	3	-4	5	-6	7	-8	9	-10	···
-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	···
0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	···
1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	···
2	1	2	1	0	0	0	0	0	0	0	···
3	1	3	3	1	0	0	0	0	0	0	···
4	1	4	6	4	1	0	0	0	0	0	···
5	1	5	10	10	5	1	0	0	0	0	···
6	1	6	15	20	15	6	1	0	0	0	···
7	1	7	21	35	35	21	7	1	0	0	···
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1	0	···
9	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1	···
10	1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	···
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	

$$(a+x)^{n} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{k} a^{n-k} x^k \qquad \binom{n}{k} = \frac{n\,(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k!}$$

Figura 3. Potencia de un binomio con exponente natural y exponente entero. Números combinatorios, coeficientes binomiales y relación entre ellos.

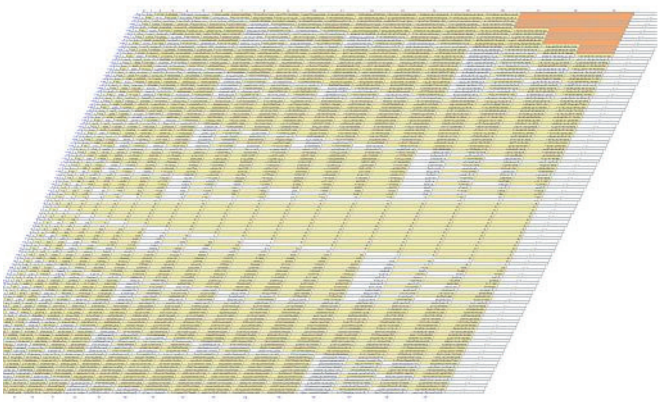


Figura 4. Representación de los coeficientes binomiales del paralelogramo de Newton.

Pero incluso con esta ayuda no es algo simple, pues el espacio que necesita ocupar la escritura de cada coeficiente binomial crece rápidamente al ser mayor el número de cifras que lo constituyen. Y, también, el tiempo de cálculo necesario para ubicar, desplazar y representar en la tabla dichos coeficientes y para poder escalarla para verla localmente o de la manera más global posible. En el recurso enlazado, adicionalmente, el cálculo de los coeficientes conduce a números enteros que superan el número designado como MAX_SAFE_INTEGER y que en javascript es 2^{53}-1 (algo superior a 9 mil billones) y por lo tanto ya ese número no es exacto; así pues, en esos casos no se refleja el coeficiente y se colorea la casilla donde iría ubicada con un fondo rojizo (observar la esquina superior derecha en la imagen de la fig. 4).

En dicha imagen y recurso asociado se pueden visualizar, mediante colores, pautas geométricas de cómo se distribuyen los coeficientes cuando se plantean congruencias numéricas respecto a un divisor y resto seleccionado. No obstante, estas distribuciones pueden observarse mejor si no se muestran los valores de los coeficientes y ello es lo que se observa en la fig. 5 obtenida mediante la miscelánea interactiva: "Congruencias en el paralelogramo de Newton" (Galo, 2020b).

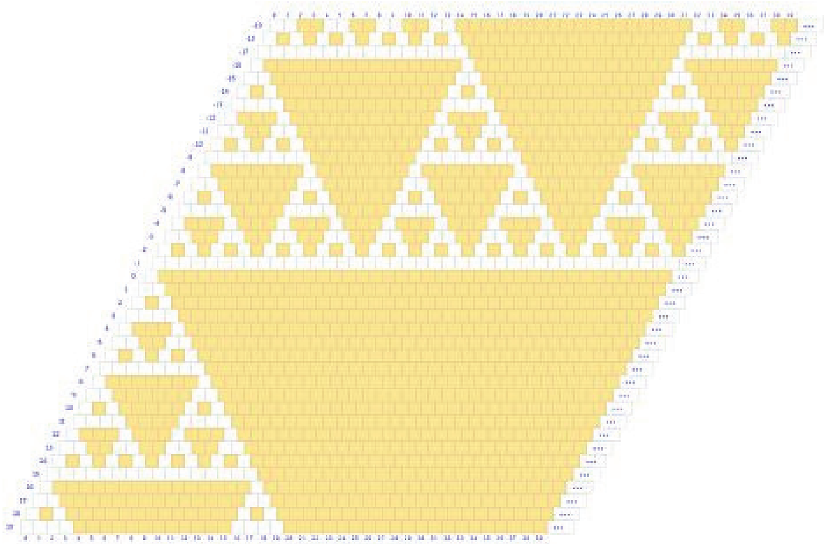


Figura 5. Congruencias con cero módulo dos de los coeficientes binomiales del paralelogramo de Newton

CONGRUENCIAS EN EL PARALELOGRAMO DE NEWTON

La primera representación gráfica de las congruencias citadas, en este caso restringida al triángulo de Pascal, puede situarse en un brevísimo artículo de Kung (1976). Su gráfica se muestra en la imagen de la figura 6 y en la figura 7 tenemos la misma gráfica, pero utilizando un código de color que logra una mejor visualización y transmisión de lo representado. En ambas se refleja la paridad o congruencia con cero módulo 2 y, a la vez, por complementariedad la congruencia con uno módulo 2 (números pares representados con '+' o en color naranja, e impares con '*' o en blanco).

Extendiendo esas gráficas a congruencias con otro módulo y resto se obtienen atractivas figuras que invitan al estudio y análisis de su regularidad.

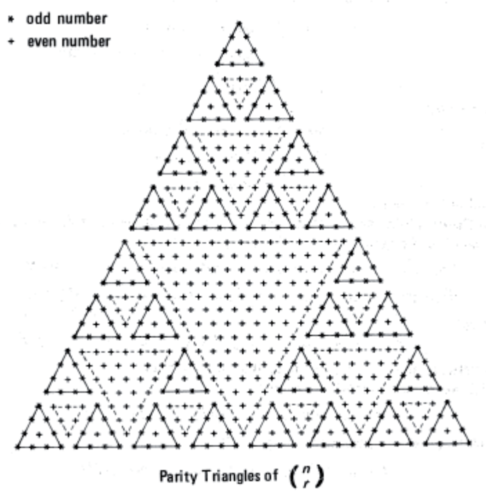


Figura 6. Triángulos de paridad en el triángulo de Pascal (código alfanumérico).

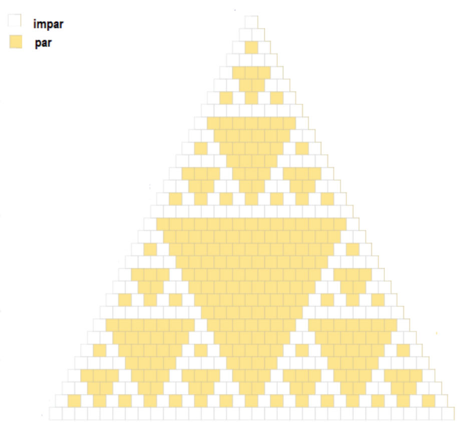


Figura 7. Triángulos de paridad en el triángulo de Pascal (código de color).

En la escena interactiva "Muestrario de congruencias en el paralelogramo de Newton" (Galo, 2020c) se puede observar la representación gráfica correspondiente a las congruencias con cero módulo los números primos hasta el treinta y uno, representando los coeficientes binomiales de índice superior en el rango desde -999 a 999 y de índice inferior de 0 a 999. En la fig. 8 vemos como ejemplo la muestra correspondiente a la congruencia con cero módulo cinco.

Los ejemplos anteriores reflejan bellas pautas geométricas en la que *a priori* se observa un comportamiento fractal. Veremos a continuación que el análisis de los patrones de estas congruencias en el paralelogramo o rectángulo de Newton puede reducirse al análisis de las mismas en el Triángulo de Pascal.

Figura 8. Congruencias con cero módulo cinco de los coeficientes binomiales del paralelogramo de Newton.

EL PARALELOGRAMO DE NEWTON COMO SIMÉTRICO DEL TRIÁNGULO DE PASCAL

Newton, para realizar su extensión del triángulo de Pascal, utilizó la representación escalonada que algo más de cien años antes Michael Stifel había incluido en el reverso de la página 44 de su libro *Arithmetica Integra* (1544) —ver figuras 9 y 10—. La representación que actualmente suele ser utilizada es la de Yang Hui (Weisstein, 2003) organizada como un triángulo isósceles (figura 1). Y Pascal en su libro "*Traité du triangle arithmétique*" (Pascal, 1665), libro escrito en 1654, lo organizó y presentó como un triángulo rectángulo, según se refleja en la figura 11.

1							
2							
3	3						
4	6						
5	10	10					
6	15	20					
7	21	35	35				
8	28	56	70				
9	36	84	126	126			
10	45	120	210	252			
11	55	165	330	462	462		
12	66	220	495	792	924		
13	78	286	715	1287	1716	1716	
14	91	364	1001	2002	3003	3432	
15	105	455	1365	3003	5005	6435	6435
16	120	560	1820	4368	8008	11440	12870
17	136	680	2380	6188	12376	19448	24310

Figura 9. Representación escalonada de Stifel.

1	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	0	0	0	0	0	0	0
1	2	1	0	0	0	0	0	0
1	3	3	1	0	0	0	0	0
1	4	6	4	1	0	0	0	0
1	5	10	10	5	1	0	0	0
1	6	15	20	15	6	1	0	0
1	7	21	35	35	21	7	1	0
1	8	28	56	70	56	28	8	1
1	9	36	84	126	126	84	36	9
1	10	45	120	210	252	210	120	45
1	11	55	165	330	462	462	330	165
1	12	66	220	495	792	924	792	495
1	13	78	286	715	1287	1716	1716	1287
1	14	91	364	1001	2002	3003	3432	3003
1	15	105	455	1365	3003	5005	6435	6435
1	16	120	560	1820	4368	8008	11440	12870
1	17	136	680	2380	6188	12376	19448	24310

Figura 10. Newton completa y representa como triángulo que extiende con ceros a un rectángulo.

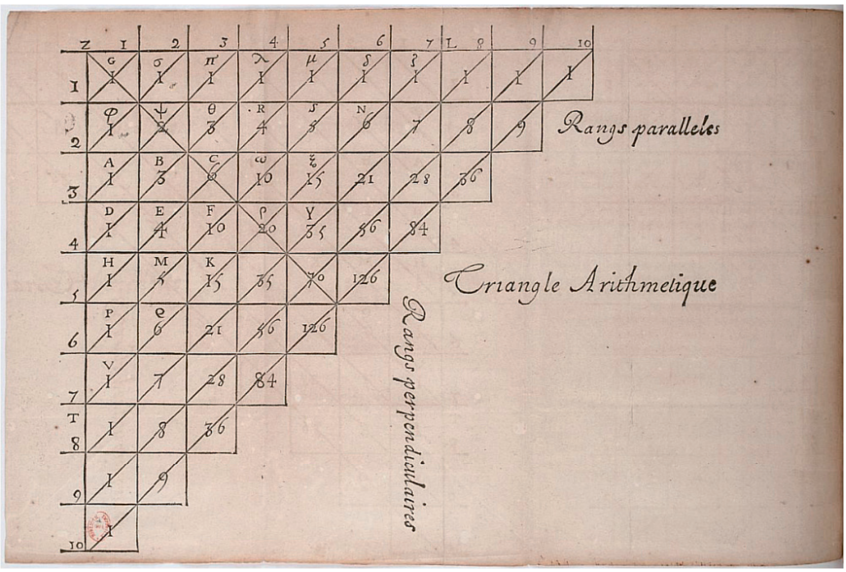


Figura 11. Representación usada por Pascal del triángulo que lleva su nombre.

Dada la relación existente entre los coeficientes binomiales de índice superior negativo y los números combinatorios (índice superior positivo):

$$\binom{-n}{k} = (-1)^k \binom{n+k-1}{k}$$

podemos observar la correspondencia que hay entre los coeficientes del rectángulo de Newton ubicados en la extensión realizada por él y los situados en la zona de partida de Pascal. En la figura 12.A, seleccionada una columna, salvo un posible cambio de signo, los coeficientes de la extensión de Newton (filas etiquetadas con números negativos) se corresponden con los del triángulo de Pascal, pero con una traslación en la numeración de las filas. Por ejemplo, para la columna 3 los coeficientes de la zona correspondiente a la extensión de Newton son {-1, -4, -10, -20, -35, -56, -84,...} que se corresponden con las filas numeradas respectivamente como {-1, -2, -3, -4, -5, -6, -7,...}, y los coeficientes en la zona del triángulo de Pascal son {1, 4, 10, 20, 35, 56, 84,...} pero trasladadas en este caso tres posiciones, pues aquí sendas filas se corresponden con {3, 4, 5, 6, 7, 8, 9,...}.

Dada la simetría que acontece en el triángulo de Pascal y la que ocurre en la extensión de Newton (en valor absoluto) también tendremos que los coeficientes de la fila -1 se corresponden, de nuevo en valor absoluto, con los de la diagonal 0 en la zona del triángulo de Pascal, los de la fila -2 con los de la diagonal 1 y, en general, la fila -n con la diagonal n-1. Es lo reflejado en la figura 12.B.

Omitiendo los ceros y trasladando las columnas hacia arriba para ocupar los huecos, obtenemos una tabla simétrica signada (para columnas impares el signo cambia, es negativo, y para las pares se mantiene positivo) que se refleja en la figura 12.C. En esa imagen hemos omitido la numeración de las filas en la parte inferior ya que esos coeficientes ya no se corresponden con los números combinatorios del triángulo de Pascal por filas, sino que esos coeficientes están ordenados según la estructura original adoptada por Pascal. De esta manera, conocidos los coeficientes del triángulo de Pascal tenemos también los correspondientes al rectángulo de Newton y consecuentemente bastaría sólo calcular el primero.

La relación observada en las imágenes de la figura 12 se justifica sin más que detallar la relación existente entre los coeficientes binomiales que ahí están involucrados, y eso es lo que se refleja en la figura 13. En el recuadro izquierdo tenemos los coeficientes del rectángulo de Newton, destacando en color naranja la ampliación de los números combinatorios con índice superior positivo o nulo y con índice inferior de mayor valor que el superior, cuyo valor es cero. En el cuadro intermedio se han omitido esos números nulos y se han compactado las columnas para ocupar los huecos. Y en el marco derecho se han expresado los coeficientes binomiales de índice negativo según su equivalencia con los números combinatorios y ahí puede comprobarse la simetría de los coeficientes que ya hemos indicado.

A

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
-10	1	-10	55	-220	715	-2002	5005	-11440	24310	-48620	...
-9	1	-9	45	-165	495	-1287	3003	-6435	12870	-24310	...
-8	1	-8	36	-120	330	-792	1716	-3432	6435	-11440	...
-7	1	-7	28	-84	210	-462	924	-1716	3003	-5005	...
-6	1	-6	21	-56	126	-252	462	-792	1287	-2002	...
-5	1	-5	15	-35	70	-126	210	-330	495	-715	...
-4	1	-4	10	-20	35	-56	84	-120	165	-220	...
-3	1	-3	6	-10	15	-21	28	-36	45	-55	...
-2	1	-2	3	-4	5	-6	7	-8	9	-10	...
-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	...
0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	...
1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	...
2	1	2	1	0	0	0	0	0	0	0	...
3	1	3	3	1	0	0	0	0	0	0	...
4	1	4	6	4	1	0	0	0	0	0	...
5	1	5	10	10	5	1	0	0	0	0	...
6	1	6	15	20	15	6	1	0	0	0	...
7	1	7	21	35	35	21	7	1	0	0	...
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1	0	...
9	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1	...
10	1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	...
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	

B

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
-10	1	-10	55	-220	715	-2002	5005	-11440	24310	-48620	...
-9	1	-9	45	-165	495	-1287	3003	-6435	12870	-24310	...
-8	1	-8	36	-120	330	-792	1716	-3432	6435	-11440	...
-7	1	-7	28	-84	210	-462	924	-1716	3003	-5005	...
-6	1	-6	21	-56	126	-252	462	-792	1287	-2002	...
-5	1	-5	15	-35	70	-126	210	-330	495	-715	...
-4	1	-4	10	-20	35	-56	84	-120	165	-220	...
-3	1	-3	6	-10	15	-21	28	-36	45	-55	...
-2	1	-2	3	-4	5	-6	7	-8	9	-10	...
-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	...
0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	...
1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	...
2	1	2	1	0	0	0	0	0	0	0	...
3	1	3	3	1	0	0	0	0	0	0	...
4	1	4	6	4	1	0	0	0	0	0	...
5	1	5	10	10	5	1	0	0	0	0	...
6	1	6	15	20	15	6	1	0	0	0	...
7	1	7	21	35	35	21	7	1	0	0	...
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1	0	...
9	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1	...
10	1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	...
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	

C

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
-10	1	-10	55	-220	715	-2002	5005	-11440	24310	-48620	...
-9	1	-9	45	-165	495	-1287	3003	-6435	12870	-24310	...
-8	1	-8	36	-120	330	-792	1716	-3432	6435	-11440	...
-7	1	-7	28	-84	210	-462	924	-1716	3003	-5005	...
-6	1	-6	21	-56	126	-252	462	-792	1287	-2002	...
-5	1	-5	15	-35	70	-126	210	-330	495	-715	...
-4	1	-4	10	-20	35	-56	84	-120	165	-220	...
-3	1	-3	6	-10	15	-21	28	-36	45	-55	...
-2	1	-2	3	-4	5	-6	7	-8	9	-10	...
-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	...
	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	...
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	...
	1	3	6	10	15	21	28	36	45	55	...
	1	4	10	20	35	56	84	120	165	220	...
	1	5	15	35	70	126	210	330	495	715	...
	1	6	21	56	126	252	462	792	1287	2002	...
	1	7	28	84	210	462	924	1716	3003	5005	...
	1	8	36	120	330	792	1716	3432	6435	11440	...
	1	9	45	165	495	1287	3003	6435	12870	24310	...
	1	10	55	220	715	2002	5005	11440	24310	48620	...
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	

Figura 12. Reposicionamiento del rectángulo de Newton para verificar la simetría (salvo signo) de los valores con el triángulo de Pascal en la representación usada por Pascal.

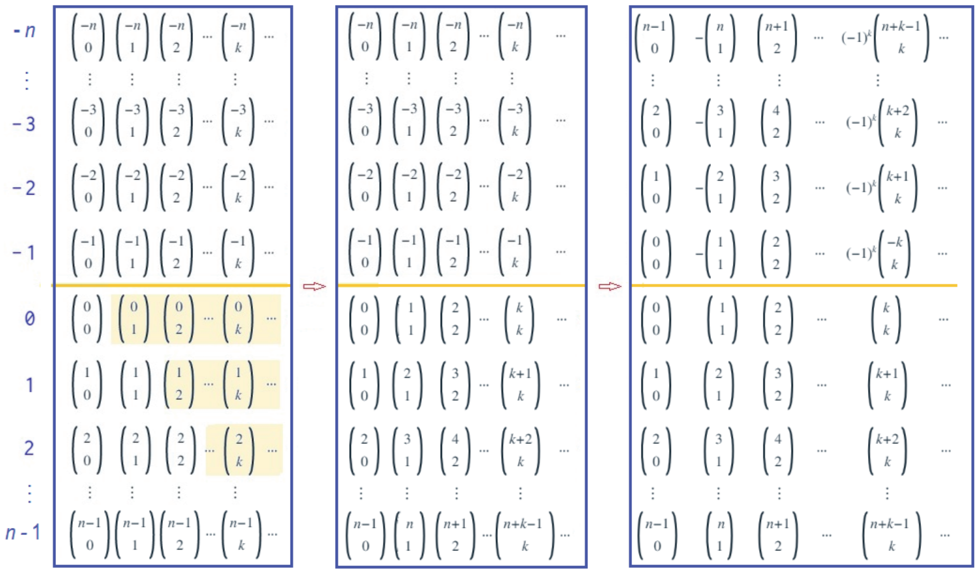


Figura 13. Verificación de la simetría entre el rectángulo de Newrton y el triángulo de Pascal en base a la relación entre coeficientes binomiales y números combinatorios.

Adicionalmente, en esta posición, se observa cómo basta tener el triángulo de Pascal en su posición original para obtener todos los desarrollos binomiales con exponente natural y entero. Las filas son los coeficientes del desarrollo de $(a\text{-}x)^{-n}$ y a partir de éste el de $(a+x)^{-n}$ basta obtenerlo como $(a\text{-}(\text{-}x))^{-n}$, y las diagonales son los coeficientes del desarrollo de $(a+x)^n$ y el de $(a\text{-}x)^n$ se obtiene como $(a+(\text{-}x))^n$. Ver la figura 14.

Llegados a este punto, identificados el significado y posición de estos coeficientes binomiales, aquellos que no se acostumbren a esta posición pueden hacer un giro de vértice el del ángulo recto en el triángulo anterior y ángulo -45º y ubicarlo en la posición usual actual. En la figura 15 lo tiene reflejado y ya hemos justificado que es autosuficiente, pero no sólo enseñe cuáles son los coeficientes de las potencias de exponente natural ¡hágalo también con los de exponente entero negativo!

Obviamente la presentación y orientación a elegir es a gusto del lector, pero en la posición dada por Pascal acontece el hecho de que si conocemos las congruencias con cero de los coeficientes en el Triángulo de Pascal, entonces por simetría tenemos las correspondientes al rectángulo de Newton, tal y como podemos observarlo en la figura 16 y en la escena interactiva "El rectángulo de Newton como «simétrico» del triángulo de Pascal" (Galo, 2020d). Esa simetría no acontece para congruencias con resto no nulo y módulo superior a dos, dado que en las columnas impares hay un cambio de signo en los valores de los coeficientes, pero en este trabajo nos centraremos en dichas congruencias con cero.

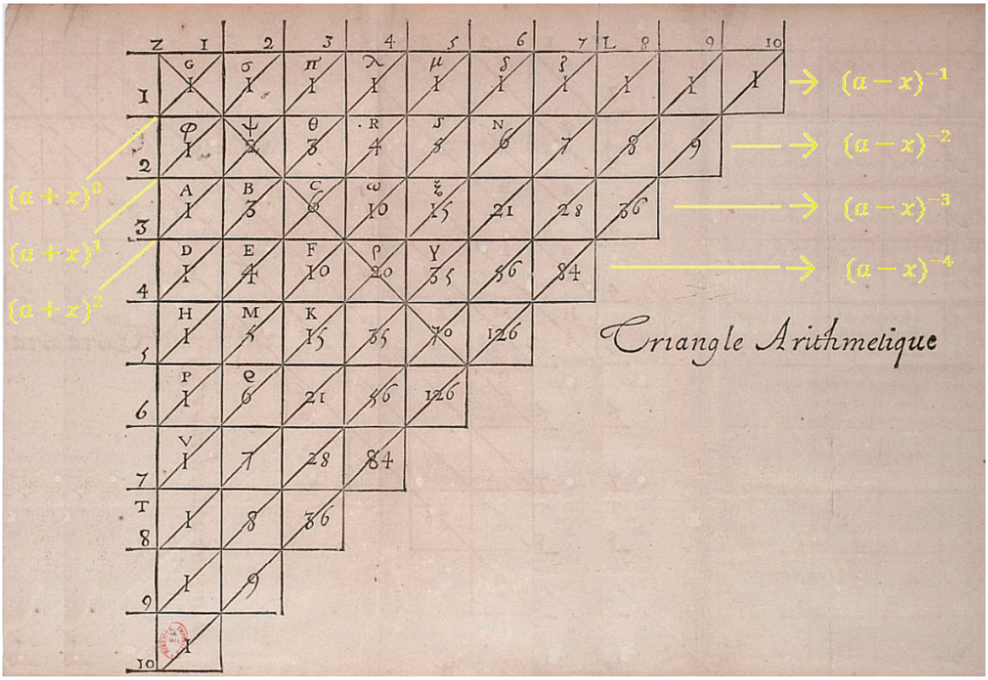


Figura 14. Identificación de los coeficientes binomiales que intervienen en el desarrollo del binomio de Newton con exponente natural y entero en el Triángulo de Pascal.

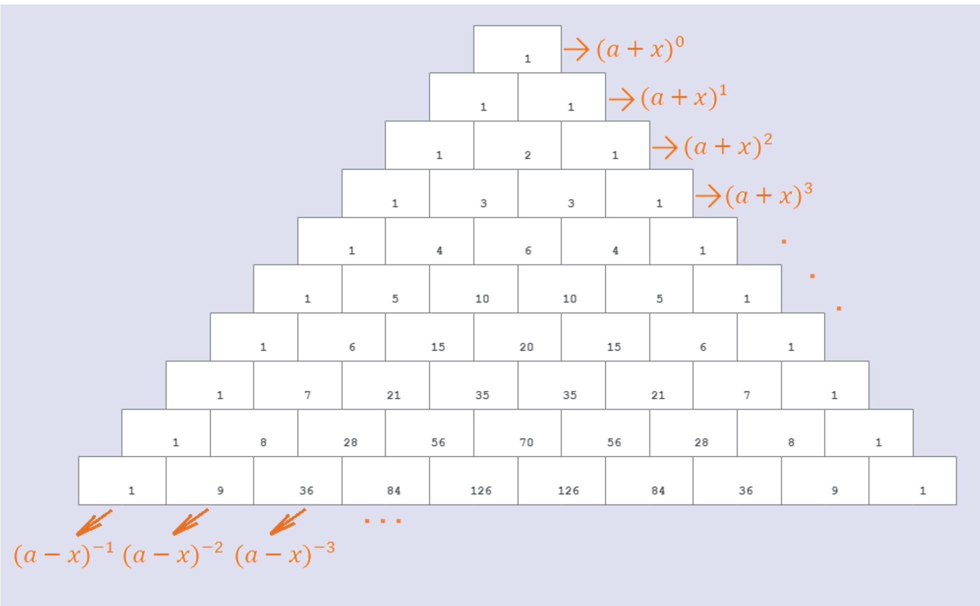


Figura 15. Ubicación de los coeficientes binomiales del desarrollo del binomio de Newton con exponente natural y entero en el Triángulo de Pascal posicionado como un triángulo isósceles.

CONGRUENCIAS EN EL TRIÁNGULO DE PASCAL, PERIODICIDAD

Reducido el estudio de las congruencias con cero en el rectángulo de Newton a las existentes en el triángulo de Pascal pasamos a considerar sólo éstas. El análisis de cuándo un coeficiente binomial, un número combinatorio, es divisible por un determinado número primo es un problema sobre el que podemos encontrar bastantes resultados con fundamento aritmético y algebraico. Aquí, nos centraremos en aquellos resultados que nos permitan determinar y visualizar gráficamente dichas congruencias, es decir, poder obtener el gráfico de la figura 16 y otros análogos para otros módulos primos sin necesidad de calcular el coeficiente binomial y determinar su congruencia, u obtener ésta mediante una recurrencia.

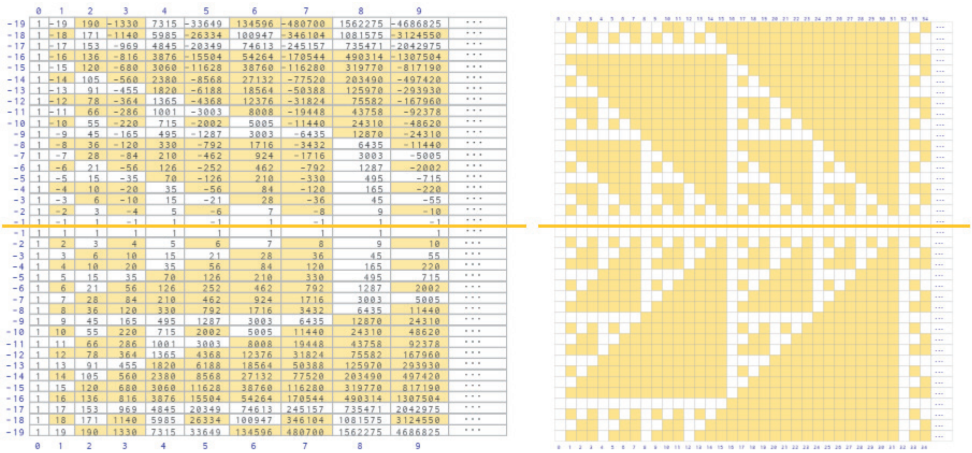


Figura 16. Imagen de las congruencias con cero módulo dos de los coeficientes binomiales en el rectángulo de Newton. Simetría respecto a esas congruencias en el Triángulo de Pascal.

Kung (1976) analiza las congruencias módulo *2* y afirma que para *i* entero no negativo:

- Si $n = 2^i$ y $1 \leq k \leq n\text{-}1$, entonces $\binom{n}{k}$ es par.
- Si $n = 2^i\text{-}1$ y $0 \leq k \leq n$, entonces $\binom{n}{k}$ es impar.

Y ello se observa en las imágenes de las figuras 6 y 7 ya que en ellas cuando $n = 0, 3, 7, 15, 31$, todos los símbolos en esas filas o diagonales, respectivamente, son asteriscos (números impares). Y para $n = 2, 4, 8, 16, 32$, son todos cruces (números pares), salvo el primero y el último.

El artículo de Kung es breve, centrado en congruencias módulo 2, pero marca unas pautas que son extrapolables a la obtención de patrones en las congruencias con cero módulo otros números primos. De hecho, ese resultado es un caso particular de los dos enunciados por Fine (1947), si bien el primero de ellos (según Joris *et al*., 1985) fue formulado por Ram en 1909:

- La condición necesaria y suficiente para que todos los coeficientes binomiales $\binom{n}{k}$ con $0 < k < n$, sea divisible por un primo p es que n sea una potencia de p.
- La condición necesaria y suficiente para que ningún coeficiente binomial de índice superior n, con $n = n_0 + n_1\, p + n_2\, p^2 + \cdots + n_m\, p^m$, siendo $0 \leq n_r < p$ y $n_r > 0$, sea divisible por p es que $n_r = p - 1$ para $r < m$.

Veamos cómo se reflejan estos resultados de una manera gráfica:

- En la imagen de la figura 17 se refleja gráficamente el primer resultado cuando $p = 3$, mostrándose todas las líneas en las que todos los números combinatorios son divisibles por 3, salvo el primero y el último. Esas líneas se corresponden con $\binom{n}{k}$ con $0 < k < n$ y $n = 3^0, 3^1, 3^2, 3^3,$... Gráficamente vienen a ser las “hipotenusas” de los triángulos rectángulos que particionan al triángulo de Pascal y que lo muestran a diferentes escala. Posteriormente utilizaremos esta analogía y terminología coloquial para ubicar y describir otros resultados.
- En la figura 18 se reflejan aquellas líneas en las que ningún número combinatorio es divisible por 3. En la parte superior de esa imagen se reflejan las separaciones entre esas filas (por falta de espacio tipográfico no se refleja el caso 3^0) y a la derecha se muestra la descomposición p-ádica del índice n correspondiente a los números combinatorios de cada una de esas líneas. Por ejemplo, para $53 = 2\ 3^0 + 2\ 3^1 + 2\ 3^2 + 1\ 3^3$ y eso nos muestra el camino de “saltos” de amplitud potencias de tres que se han de dar para, partiendo de 0, llegar a 53 (dos de amplitud 3^0, dos de 3^1, dos de 3^2 y uno de 3^3). Es decir, logramos mostrar visualmente, geométricamente, lo que queda escondido en un abstracto resultado algebraico, el cual puede ser chocante a cualquiera que accede a él por primera vez. A la pregunta, típica de nuestro alumnado: ¿a quién se le ocurre que la descomposición p-ádica da respuesta a este problema? le mostramos que el resultado algebraico,

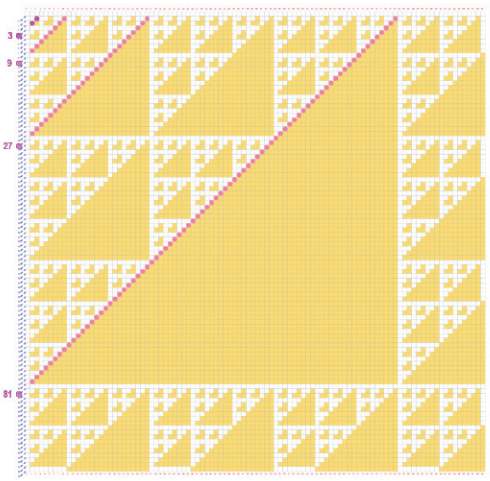


Figura 17. Números combinatorios $\binom{n}{k}$ divisibles por 3 para todo k, $0 < k < n$. Líneas con todos los números combinatorios divisibles por 3 salvo los extremos.

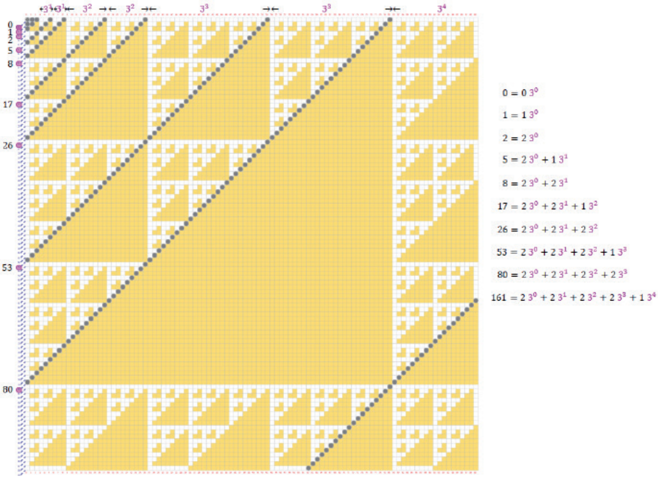


Figura 18. Números combinatorios $\binom{n}{k}$ no divisibles por 3 para ningún k, $0 \leq k \leq n$. Líneas con ningún número divisible por 3.

posiblemente, fue consecuencia de su visualización y la "pureza" matemática procedió a esconderlo.

En las misceláneas interactivas "Congruencias en el «triángulo de Pascal»" (Galo, 2020e) y "Muestrario de congruencias en el «triángulo de Pascal»" (Galo, 2020f) se puede reproducir las situaciones descritas para cualquier primo hasta el 31.

Y justamente, en base a la observación de esos patrones geométricos, podemos visualizar y deducir la propiedad que nos permite detectar todas las hipotenusas de todos los triángulos rectángulos isósceles que muestran esas congruencias. Podemos ver cómo hay triángulos de diferente tamaño, siendo p^a-1 el tamaño de las hipotenusas respectivas, y cada uno de ellos tienen una distribución periódica en horizontal y vertical con un periodo p^a. Por ejemplo, en la figura 19 se reflejan en color naranja los números

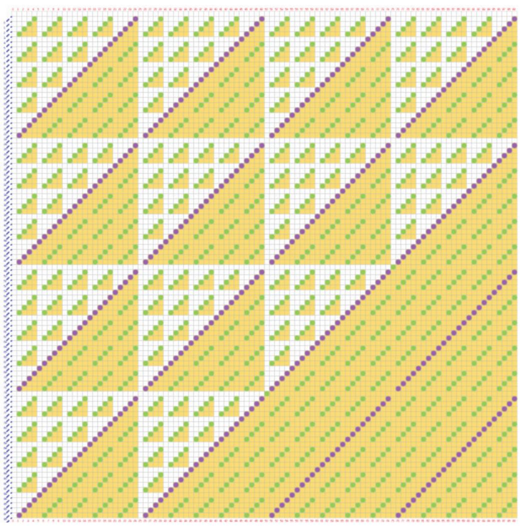


Figura 19. Periodicidad en las hipotenusas de los triángulos congruentes con cero módulo 5.

combinatorios congruentes con cero módulo 5 y se observan tres tipos de triángulos según su tamaño: los de hipotenusa $4 = 5^1$-1, los de $24 = 5^2$-1 y parcialmente (en la esquina inferior derecha) el de $124 = 5^3$-1. La hipotenusa del primero se ha reflejado en color verde y el triángulo se repite periódicamente en horizontal y vertical con un periodo 5, según se ve en dicha imagen. La del segundo está reflejada en color violeta y se repite también periódicamente con periodo 5^2, y así sería de manera análoga y sucesivamente (fig. 19).

Lo anterior, ahora le invito a que mire con ojos algebraicos, queda englobado en el resultado que enuncio a continuación:

Proposición 1

p es divisor de todos los números combinatorios $\binom{m\,p^a}{k}$ con $m, a, k \in \mathrm{N}$,
$0 < k < mp^a$ y k no divisible por p^a.

La demostración es obvia sin más que aplicar la definición de número combinatorio y observar que bajo las condiciones indicadas p es un factor de ese número.

Este resultado personal, puede relacionarse o considerarse como una reinterpretación —que se centra, enfoca y destaca el aspecto de periodicidad— del demostrado por Albree (1972) y que afirma:

Proposición 2

Para cualquier entero positivo n, $p^r = \operatorname{mcd}\left\{\binom{n}{k} \text{ con } 0 < k < n, \text{ y } \operatorname{mcd}(k, p)=1\right\}$
donde p es primo, r es un entero positivo y p^r divide a n.

Y ¿por qué les remarco que es de gran interés determinar esas hipotenusas? La respuesta también puede visualizarse en la imagen de la figura 19 y lo detallamos a continuación ya que conocida una hipotenusa de números congruentes con 0 módulo p, digamos $\binom{n}{k}$ con $r < k < s$, por la propiedad de los números combinatorios que relaciona los de índice superior n+1 con los de índice n,

$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$$

se deduce que:

Proposición 3

Si los números combinatorios $\binom{n}{r}, \binom{n}{r+1}, \cdots \binom{n}{s}$ $r < s$, son congruentes con cero módulo p, entonces los números combinatorios que componen el triángulo rectángulo $T(n;r,s)$, donde:

$$T(n;r,s) = \{\binom{n+q}{r+v}, 0 \leq q \leq s-r, q \leq v \leq s-r\}$$

son también congruentes con 0 módulo p.

La justificación (ver la figura 20) es simple, pues partimos de que se verifica la congruencia en todos los elementos que componen la hipotenusa de ese triángulo (en color magenta en la figura 20) y cada elemento de ese triángulo (en color naranja) se obtiene como suma del elemento que está a su izquierda y del que está encima, luego aplicando que la suma de dos números divisibles por p es un número divisible por p queda demostrado.

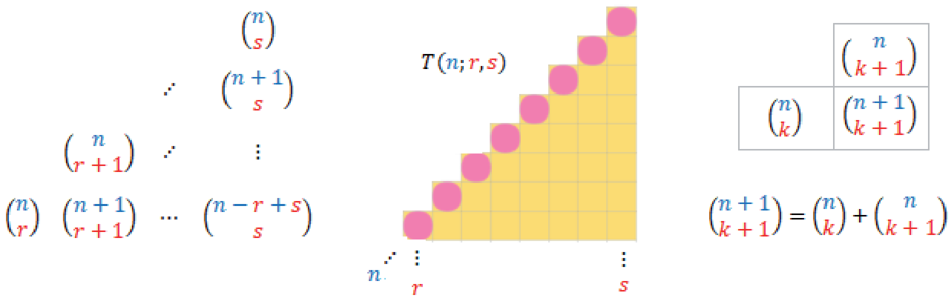


Figura 20. Transmisión de la congruencia en las hipotenusas a los triángulos rectángulo.

Joris *et al*. (1985) abordan un estudio más profundo al que necesitamos aquí de las propiedades de estos triángulos y a él dirigimos a quienes estén interesados en incrementar su conocimiento en este tema.

Combinando la proposición 1 y 3, concluyo que:

Proposición 4

Todos los números combinatorios congruentes con 0 módulo p siguen el patrón de los triángulos rectángulos

$$T(p^a;\ 1,\ p^a - 1)$$

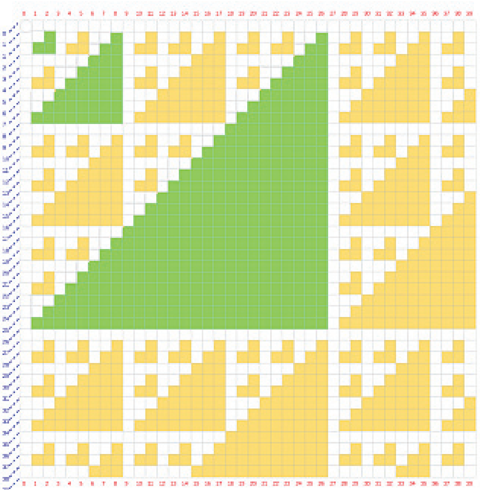


Figura 21. Patrón de triángulos $T(p^a; 1, p^a - 1)$ con $p = 3$ y $a = 1, 2$ y 3.

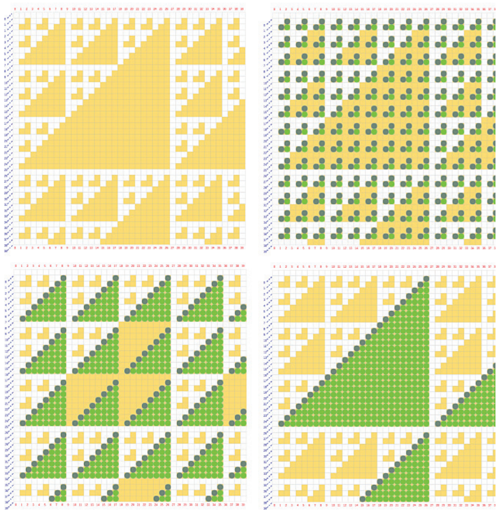


Fig. 22. Esquema de periodicidad de los triángulos $T(p^a;1, p^a - 1)$con $p = 3$ y $a = 1, 2$ y 3.

gulos básicos citados (fig. 22).

cuyas hipotenusas están constituidas por números combinatorios que son congruentes con $\binom{p^a}{k}$ donde $a, k \in \mathbb{N}$, $0 < k < p^a$ (ver figura 21), distribuyéndose de forma periódica según el esquema:

$$T(mp^a;\ 1 + kp^a,\ (1 + k)p^a - 1)$$

con $0 \leq k <$ m y a, m $\in \mathbb{N}$.

Eso es lo que se observa en mosaico de imágenes de la figura 22, donde se refleja:

- imagen superior izquierda: números combinatorios congruente con 0 módulo 3 en color naranja.
- imagen superior derecha: triángulos congruentes con T(3^1; 1, 3^1-1) en color verde claro y las hipotenusas en verde oscuro, y desplazamiento periódico en horizontal y vertical con periodo 3.
- imagen inferior izquierda: triángulos congruentes con T(3^2; 1, 3^2-1) en color verde claro y las hipotenusas en verde oscuro, y desplazamiento periódico en horizontal y vertical con periodo 3^2.
- imagen inferior derecha: triángulos congruentes con T(3^3; 1, 3^3-1) en color verde claro y las hipotenusas en verde oscuro, y desplazamiento periódico en horizontal y vertical con periodo 3^3.

Así pues la reproducción de todas las congruencias con 0 es una mera reiteración gráfica, periodicidad, de esos trián-

DETERMINACIÓN DIRECTA DE CONGRUENCIAS EN EL TRIÁNGULO DE PASCAL

Dado un número combinatorio $\binom{n}{k}$ nos preguntamos si podemos determinar si es o no congruente con 0 módulo p sin necesidad de calcularlo, de una manera directa, sencilla, rápida y sin aplicar recursividad, o lo que es equivalente, sin basarse en números combinatorios con índice superior menor que n. La respuesta es afirmativa y para ello nos vamos a basar en la posición relativa (fila y columna) que ocupa cada número combinatorio en el triángulo de Pascal en la posición original con la que aquí estamos trabajando. Observemos que el número $\binom{n}{k}$ ocupa la fila n-k y la columna k, que todos los números combinatorios de índice n cumplen que la suma de la fila y la columna que ocupan es n, y que los números combinatorios del triángulo rectángulo T (n; r, s) cumplen que la suma de la fila y la columna de todos ellos es mayor o igual que n. Con este dato y en base a la periodicidad podemos afirmar lo siguiente:

Proposición 5

Dado el número combinatorio $\binom{n}{k}$, consideremos la descomposición p-ádica de los números n-k y de k:

$$n\text{-}k = a_0 + a_1\, p + a_2\, p^2 + \cdots + a_m\, p^m$$

$$n = b_0 + b_1\, p + b_2\, p^2 + \cdots + b_m\, p^m$$

con $m = \max(\mathrm{ent}(\log_p(n\text{-}k)), \mathrm{ent}(\log_p(k)))$, $0 \le a_j, b_j < p$, se verifica que:

$\binom{n}{k}$ es divisible por p si y solo si $a_\upsilon + b_\upsilon \ge p$ al menos para algún υ, $0 \le \upsilon \le m$.

Además, para los valores de υ en los que $a_\upsilon + b_\upsilon \ge p$, entonces $\binom{n}{k}$ está en un triángulo de números congruentes con 0 módulo p del tipo $T(p^{\nu+1};1, p^{\nu+1}-1)$.

Por la periodicidad reseñada en la proposición 4 (figuras 21 y 22), si hallamos la congruencia de n-k y k con las diferentes potencias de p^ν, lo que hallamos es la fila y columna que ocupa el número combinatorio de igual congruencia en relación al cuadrado o matriz $C_\upsilon = (c_{i,j})$ con $0 \le i, j \le p^{\nu+1}-1$ y $0 \le \upsilon \le m$ (ver figura 23). Por ejemplo, si consideramos $p = 3$ y el número combinatorio $\binom{34}{20}$, éste ocupa la posición correspondiente a la fila 14, resultado de 34-20, y la columna 20 (ver en la figura 24 el punto verde claro). Las congruencias respectivas con 3^υ, $\upsilon \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ son:

$\binom{34}{20}$	mod 3^1	mod 3^2	mod 3^3
fila 34-20 = 14	2	5	14
columna 20	2	2	20
fila + columna	$2+2 = 4 \geq 3^1$	$5+2 = 7 < 3^2$	$14+20 = 34 \geq 3^3$

Por tanto $\binom{34}{20}$ tiene la misma congruencia que $\binom{2}{2}$, y puesto que en este caso fila+columna mod 3^1 es mayor o igual que 3^1, entonces $\binom{34}{20}$ está respectivamente en un triángulo congruente con $T(3^1;\ 1,\ 3^1 -1)$ (color verde oscuro en la figura 24). Similarmente no lo está en ninguno congruente con $T(3^2;\ 1,\ 3^2 -1)$ (azul claro en dicha figura 24) y sí lo está también en uno congruente con $T(3^3;\ 1,\ 3^3 -1)$ (color magenta en la misma figura). De esta forma se detectan todos los triángulos básicos en los que estaría ese número combinatorio.

Pero si lo único que se desea saber es si es o no congruente es suficiente hallar, como se indica en el enunciado de la proposición 5, la descomposición p-ádica, ya que si los coeficientes respectivos de esas descomposiciones para alguna de las potencias, por ejemplo para υ, verifican que $a_\upsilon + b_\upsilon \geq p$, entonces:

$$\text{fila} + \text{columna} \geq (a_\upsilon + b_\upsilon)\, p^\upsilon \geq p \cdot p^\upsilon = p^{\upsilon+1},$$

es decir, está en un triángulo congruente con el triángulo básico $T(p^{\nu+1};1,p^{\nu+1} -1)$ y, por tanto, es un número combinatorio congruente con 0 módulo p. En este caso dado que es una cota inferior para fila+columna, lo que tenemos es una condición suficiente pero no necesaria, pudiéndose darse casos en los que aunque sea $a_\upsilon + b_\upsilon < p$ ese número combinatorio pudiera pertenecer a un triángulo congruente con el triángulo básico $T(p^{\nu+1};1,p^{\nu+1} -1)$. En el ejemplo antes considerado del número combinatorio $\binom{34}{20}$ si realizamos la descomposición *3*-ádica:

fila 34-20 = 14	$2\cdot 3^0$	+	$1\cdot 3^1$	+	$1\cdot 3^2$
columna 20	$2\cdot 3^0$	+	$0\cdot 3^1$	+	$2\cdot 3^2$
$a_\upsilon + b_\upsilon$	$2+2 = 4 \geq 3$		$1+0 = 1 < 3$		$1+2 = 3 \geq 3$

La condición suficiente detecta que $a_0 + b_0 \geq 3$, luego está en un triángulo congruente al $T(3^1;\ 1,\ 3^1 -1)$; también $a_2 + b_2 \geq 3$, luego está en un triángulo congruente al $T(3^3;\ 1,\ 3^3 -1)$; y dado que $a_1 + b_1 < 3$ no podemos afirmar nada acerca de pertenencia a un triángulo $T(3^2;\ 1,\ 3^2 -1)$. En este caso se da la situación de que no pertenece a ese tipo, pero en otros casos sí podría serlo, veámoslo en otro ejemplo.

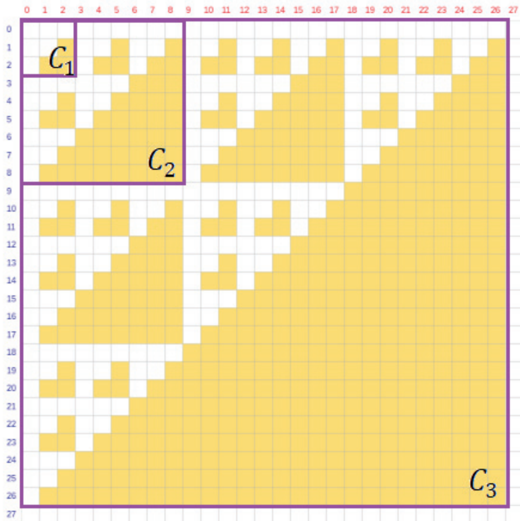


Figura 23. Cuadrados básicos C_υ de referencia asociados a los triángulos congruentes básicos $T(p^\upsilon;1,p^\upsilon\text{-}1)$ con $p = 3$ y $\upsilon = 1$, 2 y 3.

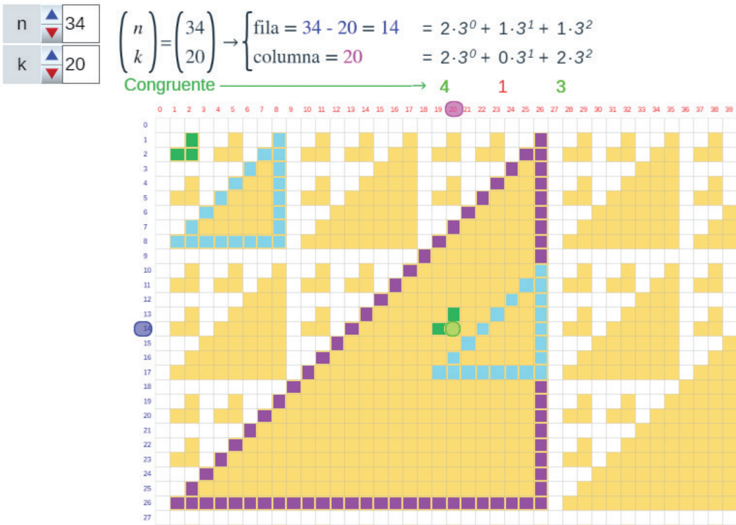


Figura 24. Ubicación del número combinatorio $\binom{34}{20}$ en triángulos congruentes con los básicos $T(p^\upsilon;1,p^\upsilon\text{-}1)$ con $p = 3$ y $\upsilon = 1$, 2 y 3

Consideramos ahora el número combinatorio $\binom{36}{20}$. Vemos que la descomposición 3-ádica:

$$36\text{-}20 = 16 = 1\cdot3^0 + 2\cdot3^1 + 1\cdot3^2$$
$$20 = 2\cdot3^0 + 0\cdot3^1 + 2\cdot3^2$$

permite detectar que $\binom{36}{20}$ es congruente con 0 módulo 3, pues existe al menos una suma $a_\upsilon + b_\upsilon \geq 3$ (condición necesaria y suficiente). Y dado que para $\upsilon = 1$, $a_1 + b_1 \geq 3$ la condición suficiente detecta que ese número está incluido en un triángulo congruente con el triángulo $T(3^1;\ 1{,}3^1-1)$ y puesto que para $\upsilon = 3$, $a_3 + b_3 \geq 3$ lo está también en un triángulo congruente con $T(3^3;\ 1,\ 3^3-1)$, pero como para $\upsilon = 2$, $a_2 + b_2 < 3$, no detecta que en este caso también lo está en el triángulo $T(3^2;\ 1,\ 3^2-1)$. Ver en la figura 25 el punto verde claro que está en un triángulo verde oscuro, en uno azul y en uno magenta.

En el recurso interactivo "Congruencias en el triángulo de Pascal" (Galo, 2020e) puede experimentarse con la detección directa de la congruencia.

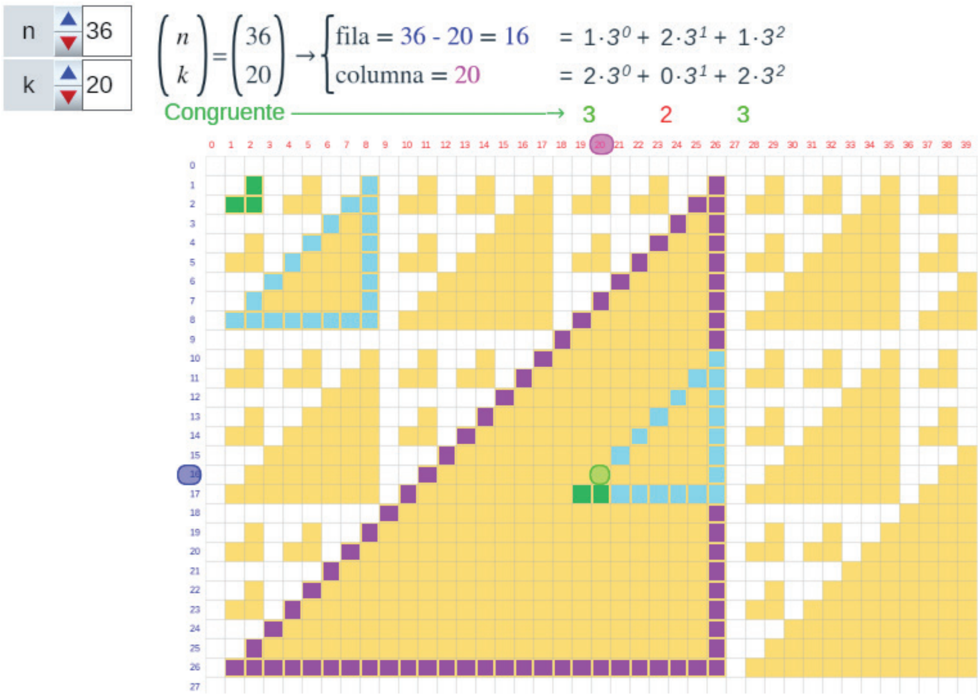


Figura 25. Ubicación del número combinatorio $\binom{36}{20}$ en triángulos congruentes con los básicos $T(p^\upsilon;1,p^\upsilon-1)$ con $p = 3$. La condición suficiente detecta para $\upsilon = 1$ y 3, pero no para $\upsilon = 2$.

CONCLUSIONES

Al trabajar con la versión que propone Pascal para el triángulo que lleva su nombre, como un triángulo rectángulo, se comprueba que ésta es suficiente para abordar el desarrollo de la potencia de un binomio con exponente entero, tanto positivo como negativo, sin necesidad de construir el rectángulo de Newton. También las congruencias con cero de los coeficientes binomiales se reducen al estudio de las congruencias con cero de los números combinatorios. Y en este caso el análisis algebraico clásico de éstas, que cotidianamente queda crudamente opacado por las dificultades implícitas de esta herramienta, queda representado geométricamente de una manera visual sencilla, clara y casi autoexplicativa. Aquí, en particular, nos ha permitido mostrar la periodicidad de dichas congruencias y hallar un criterio directo para determinarlas aplicando el paso inverso, es decir, pasando de la visión geométrica a la algebraica.

Con los recursos interactivos enlazados en este artículo, así como en Galo *et al*. (2016) y Galo (2018 y 2019), se pone de manifiesto la ayuda esencial que las herramientas interactivas como "Descartes" (RED Descartes, 1998) aportan a la mejora de la enseñanza y a la investigación de las Matemáticas.

BIBLIOGRAFÍA

Albree, J. (1972). The gcd of Certain Binomial Coefficients. *Mathematics Magazine, 45:5*, 259-261. Recuperado el 05/07/2020, de https://www.tandfonline.com/doi/abs/10.1080/0025570X.1972.11976253.

Fine, N.J. (1947). Binomial coefficients modulo a prime. *Amer. Math. Monthly 54,* 589-592. MR 9, 331. Recuperado el 05/07/2020, https://www.jstor.org/stable/2304500.

Galo Sánchez, J., Cabezudo Bueno, A y Fernández Trujillo, I. (2016). Sobre la forma y el crecimiento cordobés del *Nautilus pompilius*. *Epsilon, 33(3), nº 94*, 81-110. Recuperado el 05/05/2020, https://thales.cica.es/epsilon/sites/thales.cica.es.epsilon/files/epsilon94_7_0.pdf

Galo Sánchez, J. R. (2018). Partición prismática de un cubo en seis pirámides triangulares equivalentes. *Matemáticas, educación y Sociedad, 1(2),* 1-20. Recuperado el 05/05/2020, http://www.uco.es/ucopress/ojs/index.php/mes/article/view/12832

Galo Sánchez, J. (2019). Partición prismática de paralelepípedos en seis pirámides triangulares equivalentes. *Epsilon, 33(3), nº 102*, 61-88. Recuperado el 05/05/2020, https://thales.cica.es/epsilon/sites/thales.cica.es.epsilon/files/epsilon102_5.pdf

Galo Sánchez, J. (2020a). Extensión del triángulo de Pascal: El paralelogramo de Newton. *Recursos Educativos interactivos de la "Red Educativa Digital Descartes.* Recuperado el 05/05/2020, de https://proyectodescartes.org/miscelanea/materiales_didacticos/ParalelogramoNewton/index.html

Galo Sánchez, J. (2020b). Congruencias en el paralelogramo de Newton. *Recursos Educativos interactivos de la "Red Educativa Digital Descartes.* Recuperado el 05/05/2020, de https://proyectodescartes.org/miscelanea/materiales_didacticos/ParalelogramoNewtonColor/index.html

Galo Sánchez, J. (2020c). Muestrario de congruencias en el paralelogramo de Newton. *Recursos Educativos interactivos de la "Red Educativa Digital Descartes.* Recuperado el 05/05/2020, de https://proyectodescartes.org/miscelanea/materiales_didacticos/ParalelogramoNewtonMuestrario/index.html

Galo Sánchez, J. (2020d). El rectángulo de Newton como «simétrico» del triángulo de Pascal. *Recursos Educativos interactivos de la "Red Educativa Digital Descartes.* Recuperado el 05/05/2020, de https://proyectodescartes.org/miscelanea/materiales_didacticos/PascalversusNewton/index.html

Galo Sánchez, J. (2020e). Congruencias en el triángulo de Pascal. *Recursos Educativos interactivos de la "Red Educativa Digital Descartes.* Recuperado el 05/05/2020, de https://proyectodescartes.org/miscelanea/materiales_didacticos/CongruenciasPascal/index.html

Galo Sánchez, J. (2020f). Muestrario de congruencias en el triángulo de Pascal. *Recursos Educativos interactivos de la "Red Educativa Digital Descartes.* Recuperado el 05/05/2020, https://proyectodescartes.org/miscelanea/materiales_didacticos/CongruenciasPascal-Muestrario/index.html

Joris, H., Oestreicher, C. & Steinig, J. (1985). The greatest common divisor of certain sets of binomial coefficients. *Journal of Number Theory.* Volume 21, Issue 1, pp. 101-119. Recuperado el 05/05/2020, https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0022314X85900137

Kung, S.H.L. (1976). Parity triangles of Pascal's triangle. *Fibonacci Quart. 14: 54*. Recuperado el 05/05/2020, https://www.fq.math.ca/Scanned/14-1/kung.pdf

Maor, E. (2006). 8. El nacimiento de una nueva ciencia. e: Historia de un número. *México: Consejo Nacional para la cultura y las artes*, p. 78. https://books.google.es/books/about/e_historia_de_un_n%C3%BAmero.html?id=dSfaaVccJ_UC

O'Connor, J.J. y Robertson, E.J. (1999). *Al-Karaji* [página web]. Mac Tutor History of Mathematics archive. Scotland: School of Mathematics and Statics. University of St Andrews. Recuperado el 05/05/2020, http://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Al-Karaji.html

O'Connor, J.J. y Robertson, E.J. (2003). *Yang Hui* [página web]. Mac Tutor History of Mathematics archive. Scotland: School of Mathematics and Statics. University of St Andrews. Recuperado el 05/05/2020, http://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Yang_Hui.html

Pascal (1665). Traité du triangle arithmétique. *Paris: Chez Guillaume Desprez*. Recuperado el 05/05/2020, de https://gallica.bnf.fr/ark:/12148/btv1b86262012/

Ram, B. (1909). Common factors of n!/m!(n-m)!, (m= 1, 2,..., n- l). *Recursos J. Indian Marh. Club (Madras) 1),* pp 39-43.

RED Decartes (1998). Descartes y DescartesJS, Matemáticas interactivas. Web de la *"Red Educativa Digital Descartes" (RED Descartes)*. Recuperado el 05/05/2020, https://proyectodescartes.org/descartescms/descartesjs

RED Descartes (2020). Recursos interactivos. *Recursos Educativos interactivos de la "Red Educativa Digital Descartes", Vol. V, Núm. 1.* Recuperado el 05/05/2020, de http://proyectodescartes.org/descartescms/descargas.

Stifel, M. (1544). Arithmetica integra. *Petreius*, p. 44 reverso. Recuperado el 05/05/2020, de https://archive.org/details/bub_gb_fndPsRv08R0C/page/n6/mode/2up.

Weisstein, Eric. W. (2003). CRC concise encyclopedia of mathematics. *CRC Pres* p.2169.

Weisstein, Eric W. (2020). "Binomial Theorem." From *MathWorld*--A Wolfram Web Resource. Recuperado el 05/05/2020, de https://mathworld.wolfram.com/BinomialTheorem.html

Arte y Matemáticas: los números dígitos del artista burgalés Álvaro Melgosa

Vicente Meavilla Seguí
Catedrático de Matemáticas jubilado
vmeavill@hotmail.com

Resumen: *En este artículo, después de una breve introducción histórica relativa a los numerales de los números dígitos, se ofrecen tres «colecciones» de dichos números diseñadas por el artista gráfico Álvaro Melgosa (Burgos, 1986). Con ello, además de mostrar parte de la obra de un joven diseñador español, pretendemos poner de manifiesto la presencia de las Matemáticas en el Arte.*
Palabras clave: *Álvaro Melgosa, números dígitos, matemáticas, Diseño Gráfico, divulgación matemática.*

Art and Mathematics: The digit numbers of the Burgos artist Álvaro Melgosa

Abstract: *In this article, after a brief historical introduction regarding the numerals of the digit numbers, three «collections» of said numbers are offered designed by the graphic artist Álvaro Melgosa (Burgos, 1986). With this, in addition to showing part of the work of a young Spanish designer, we intend to highlight the presence of Mathematics in Art.*
Keywords: *Álvaro Melgosa, digit numbers, mathematics, graphic design, mathematical dissemination*

INTRODUCCIÓN

Los dígitos indo-arábigos fueron introducidos en Europa por el matemático medieval Leonardo de Pisa («Fibonacci») en su obra *Liber Abaci*, publicada en 1202.

Al principio del primer capítulo, el científico italiano se expresa en los siguientes términos:

> Novem figure indorum he sunt:
>
> 9 8 7 6 5 4 3 2 1.
>
> Cum his itaque novem figuris, et cum hoc signo 0, quod arabice zephirum appellatur, scribitur quilibet numerus, ut inferius demonstratur[1].

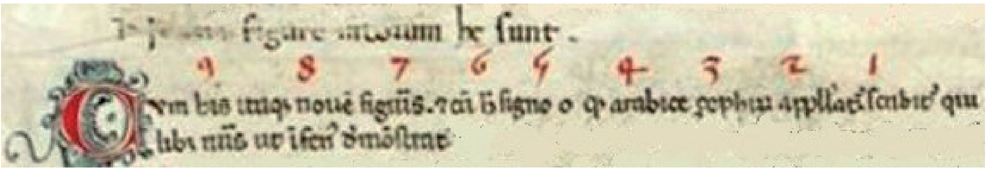


Figura 1. El texto del *Liber Abaci*

Sobre el origen y evolución de las «cifras árabes» hay estupendos y sesudos tratados de los que no nos vamos a ocupar en este artículo[2]. Sin embargo, dado su interés para tipógrafos y diseñadores gráficos, dedicaremos unas líneas a algunas teorías fantásticas sobre el origen de los símbolos de los dígitos indo-arábigos.

1. TEORÍAS FANTÁSTICAS SOBRE LA GRAFÍA DE NUESTROS DÍGITOS

Siguiendo a Cajori (1993), la teoría más antigua relativa al origen de las formas de nuestros dígitos se debe al astrólogo árabe Ali Aben Ragel (s. XI). Al parecer, el científico medieval utilizó como «base» de sus dígitos una circunferencia dividida en cuatro partes por dos diámetros perpendiculares. A partir de ella los símbolos numéricos se obtenían tal como se detalla en la figura adjunta.

1 Las nueve figuras (cifras) de los indios son: 9 8 7 6 5 4 3 2 1.
Con estas nueve figuras y con el signo 0, al que los árabes llaman *zephir* se puede escribir cualquier número, como se demostrará más adelante.

2 El lector interesado puede consultar, por ejemplo, *A history of mathematical notations* (1993) de Florian Cajori.

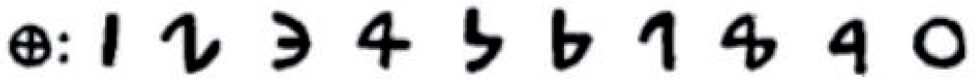


Figura 2. *A history of mathematical notations* (Tomo I, p. 65)

Por otro lado, Carlos Le-Maur (*Coronel de Infantería, Ingeniero en Gefe de los Reales Exércitos, Socio de la Sociedad de los Amigos del Pais de esta Corte, y de la Academia de Agricultura de Galicia*), en el primer tomo de sus *Elementos de Matemática pura* (1778), propuso una teoría en la que los nueve primeros números naturales se dibujaban uniendo de modo conveniente los centros de pequeños círculos (véase la ilustración adjunta).

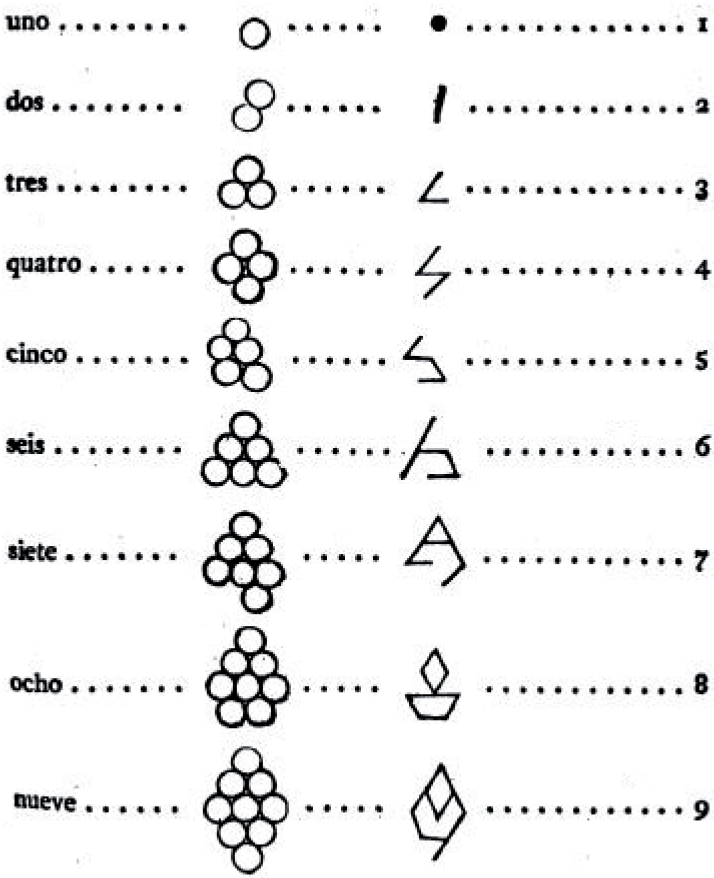
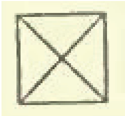


Figura 3. *Elementos de Matemática pura* (Tomo primero), p. 15

Por su parte, Édouard Lucas (1895), refiriéndose al origen de las cifras, escribía:

(…) una vieja leyenda atribuye su forma a las diez figuras que se pueden sacar de un signo grabado en la sortija del rey Salomón. Damos este origen a título de curiosidad.



Si se considera la figura precedente, formada por los cuatro lados y las dos diagonales de un cuadrado, suprimiendo ciertas líneas se obtienen las diez figuras siguientes que se pueden materializar con un paquete de palillos pequeños.

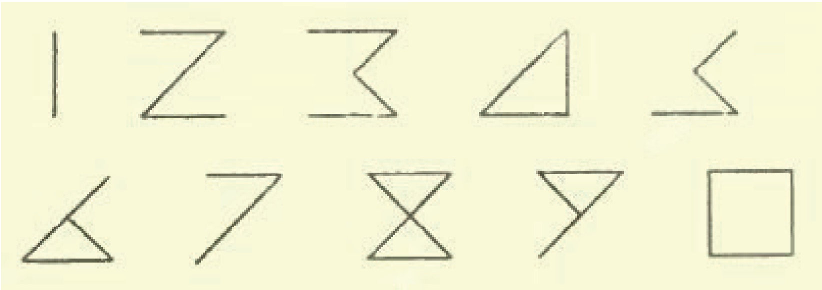


Figura 4. *L'Arithmétique amusante* (p. 4)

Volviendo a Cajori (1993), parece ser que el francés P. Voizot defendió la teoría de que la forma de cada dígito contiene tantos ángulos como unidades representa. Así las cosas, los diez numerales indo-arábigos adoptarían la apariencia que se detalla en la figura siguiente:

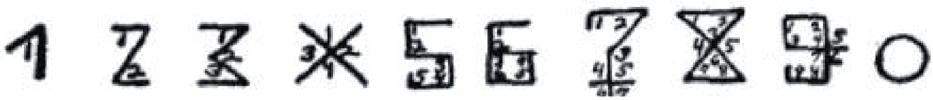


Figura 5. *A history of mathematical notations* (Tomo I, p. 65).

Además, el mismo autor creó una grafía original en la que cada cifra contenía tantos trazos (horizontales, verticales u oblicuos) como unidades.

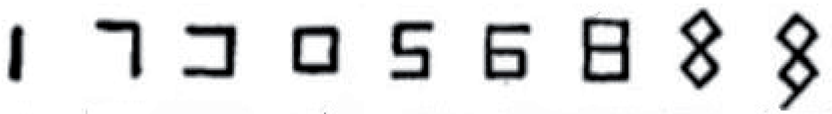


Figura 6. *A history of mathematical notations* (Tomo I, p. 65)

Después de ofrecer esta selección de teorías geométrico-fantásticas sobre el origen de los numerales indo-arábigos, presentamos dos «familias artísticas de dígitos» creadas por un joven diseñador español. Con ello queremos poner de manifiesto la presencia de los números en algunas obras de arte.

2. ÁLVARO MELGOSA, ARTISTA NUMÉRICO

Álvaro Melgosa nació en Burgos (1986) y reside en Montreal (Canadá) donde ejerce su profesión de diseñador gráfico.

Se inspira en el optical art, visual art, kinetic typography y, en ocasiones, en el grafiti. Se mueve dentro del espacio minimalista y experimental con el objetivo de obtener distintos resultados en cada uno de sus proyectos.

Figura 7. Álvaro Melgosa

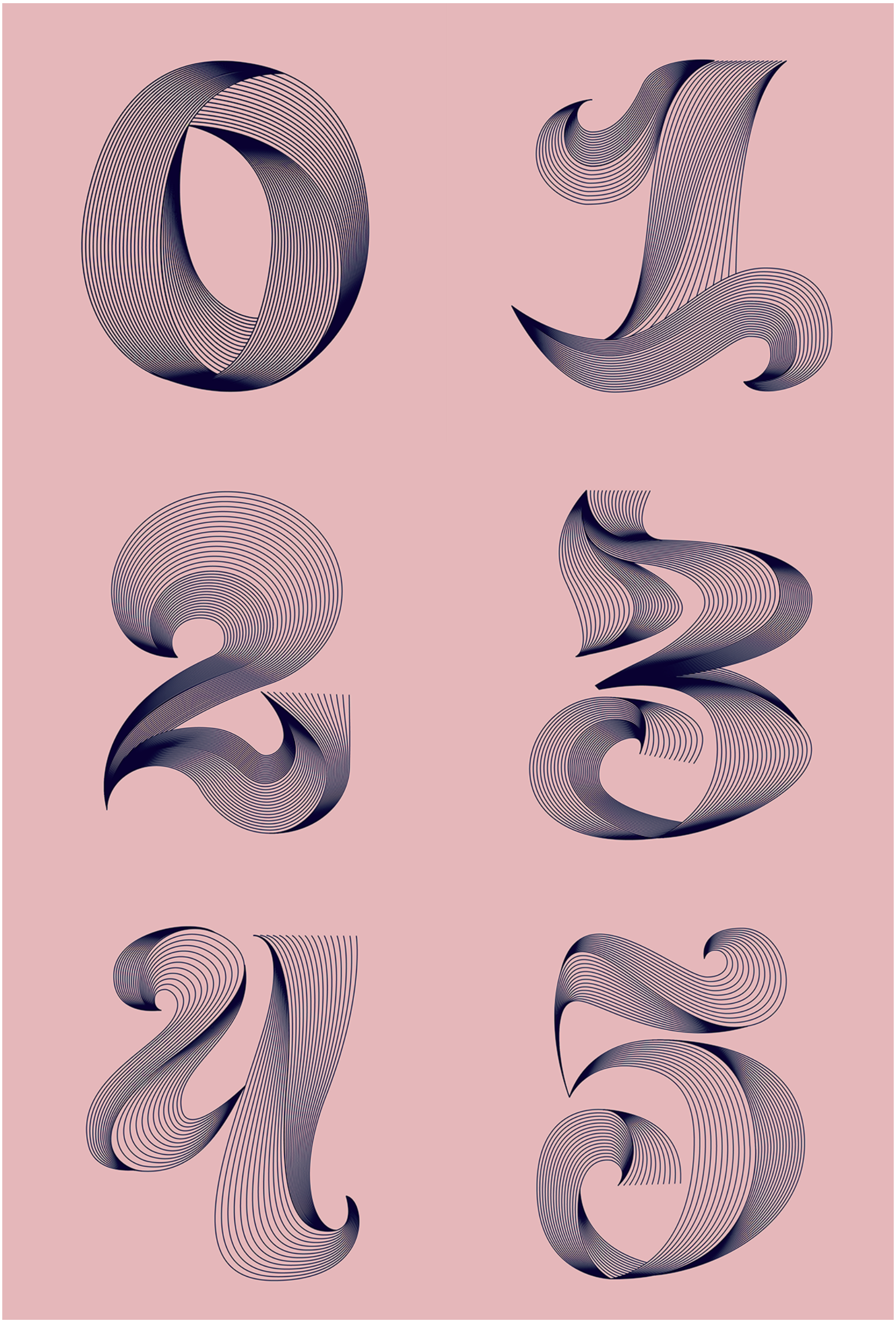


Figura 8. *Quarantype numbers.*

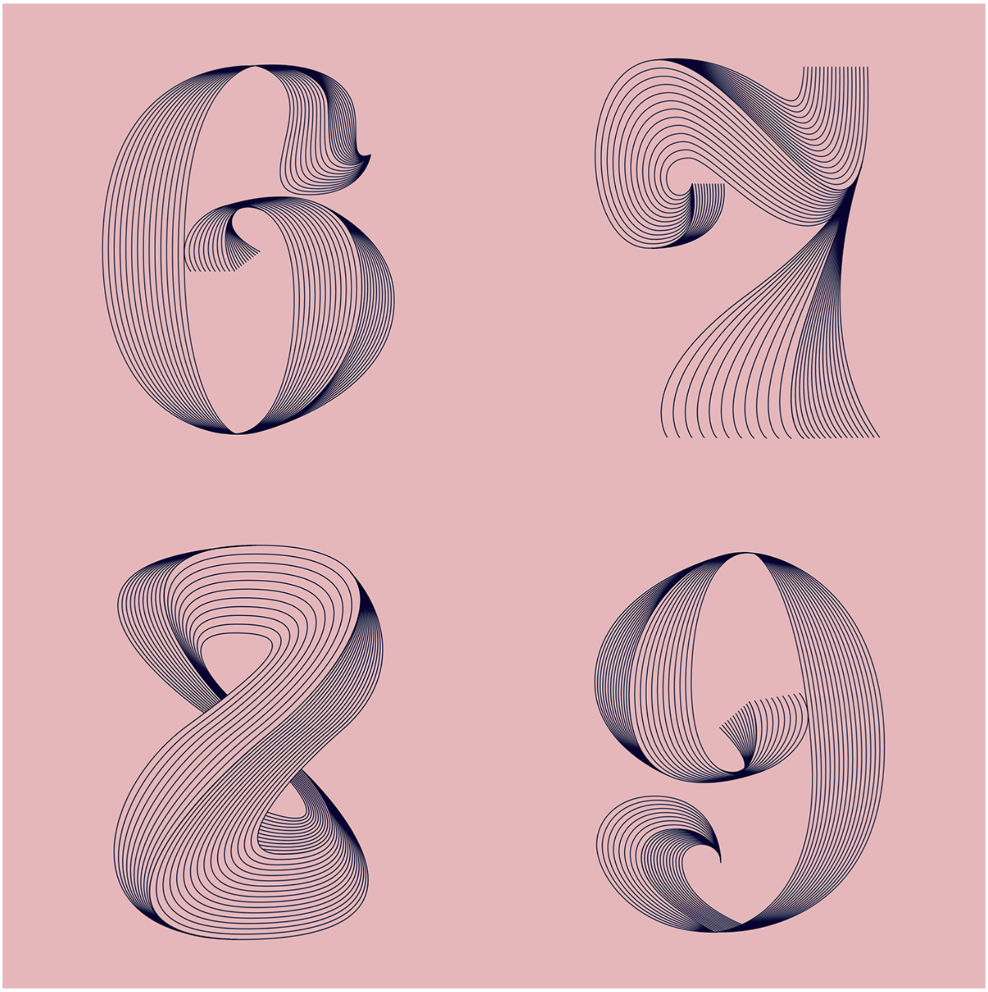


Figura 8. *Quarantype numbers.*

En la serie numérica precedente, Álvaro no se deja atrapar por el corsé geométrico de los «números fantásticos» de la sección precedente. Por el contrario, el diseñador burgalés, manteniendo la uniformidad de estilo, retuerce la grafía numérica ordinaria para que el producto resultante, los *números de la cuarentena*, representen la extorsión causada por la pandemia del coronavirus.

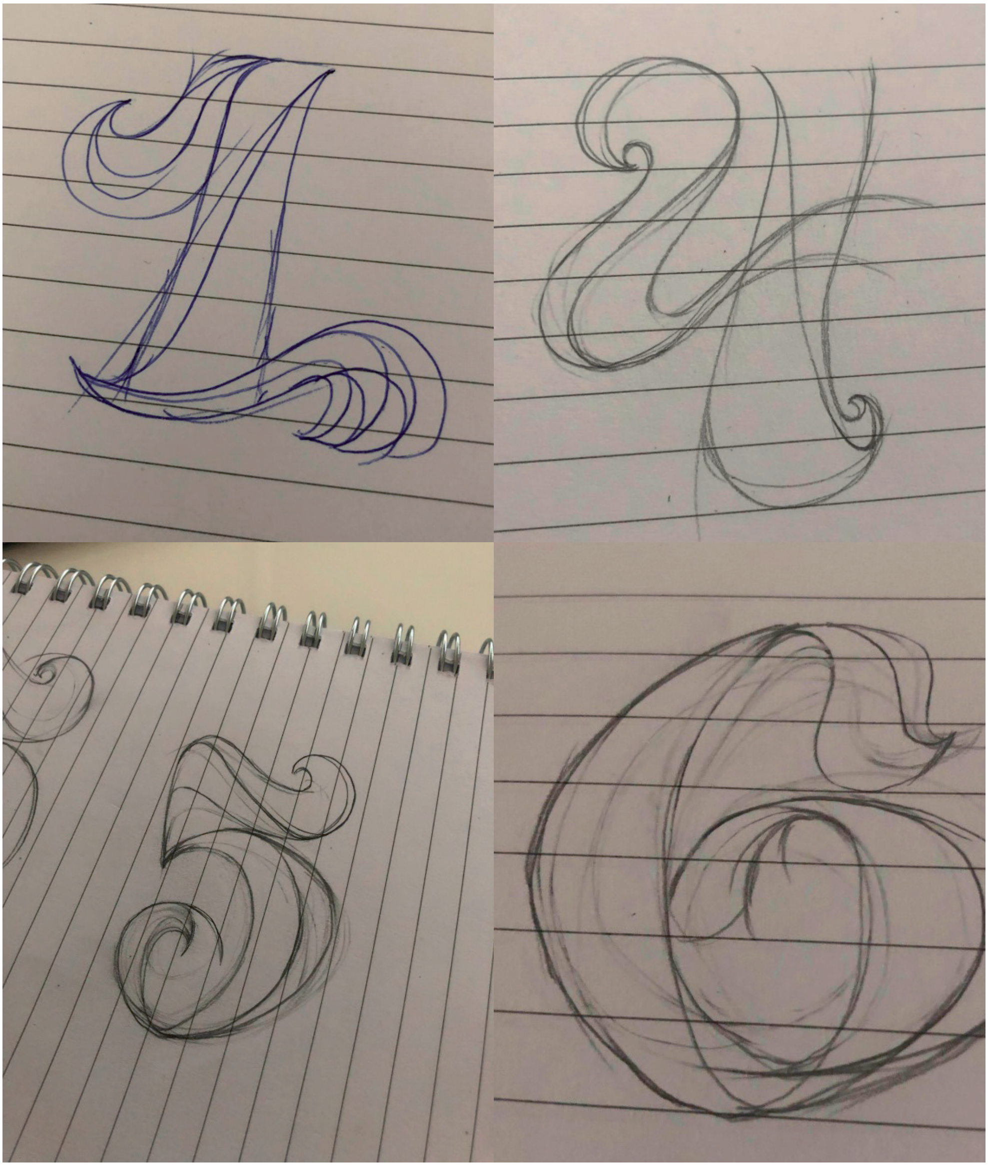


Figura 9. Algunos bocetos de Álvaro para la serie *Quarantype numbers*

Por otro lado en la familia siguiente, diseñada para los *36 Days of Type#2*[3], A. M. no sigue, que sepamos, ningún patrón preestablecido y da rienda suelta a su inspiración. En palabras del artista:

3 *36 Days of Type* es un proyecto de tipografía colectiva, nacido en abril de 2014, a raíz de una idea de los diseñadores Nina Sans y Rafa Goicoechea. En él, se propone a diseñadores, ilustradores y artistas gráficos de todo el mundo que expresen su interpretación particular de las letras del alfabeto

> Me puse cada día delante del ordenador con el «canvas»[4] en blanco y, dependiendo del día, generaba una pieza completamente distinta a la del día anterior. La idea fue conseguir algo diferente cada día y experimentar distintos flujos de trabajo.

Algunos de los dígitos se pueden identificar con objetos cotidianos o conceptos. Así, el cero es un laberinto y el uno un grafiti. El 2, el 7 y el 8 son figuras imposibles. El nueve es una taza de café (chocolate).

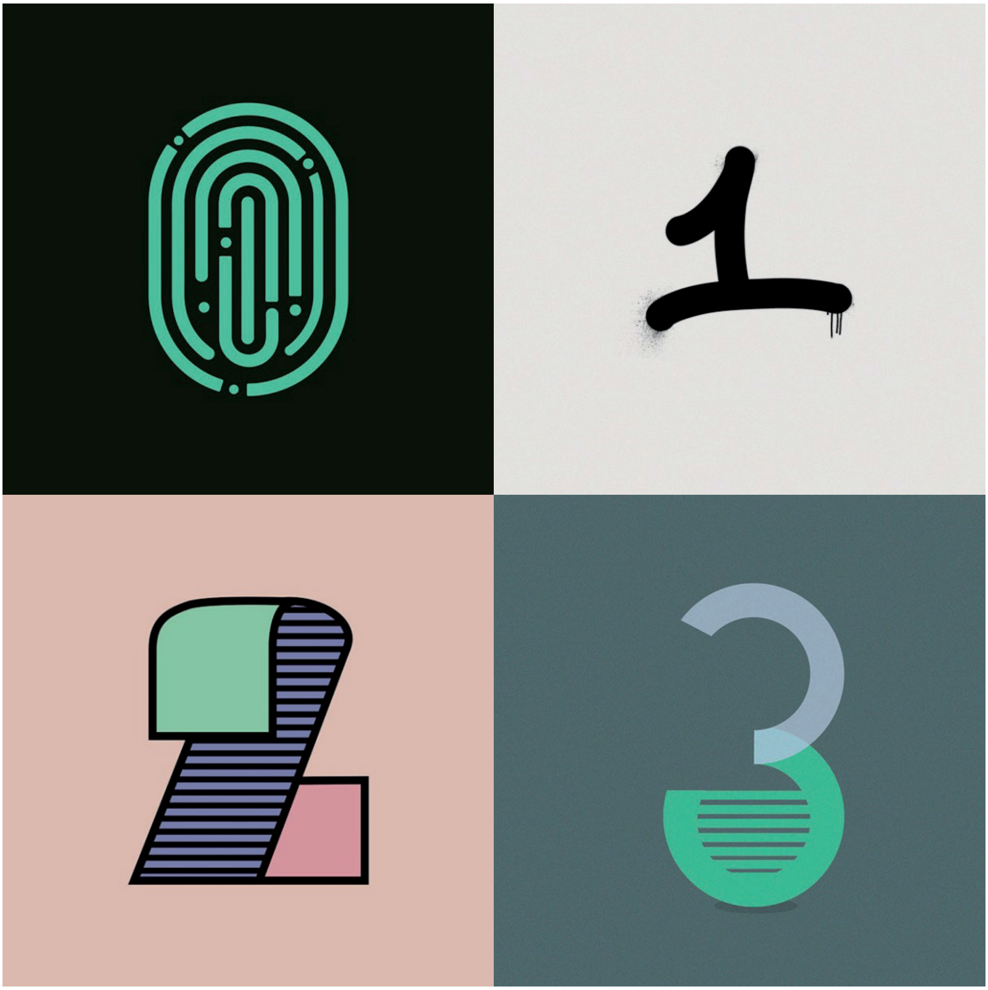


Figura 10. *36 Days of Type#2.*

Latino y los dígitos indo-arábigos.

4 Lienzo.

Figura 10. *36 Days of Type#2.*

En resumen, la obra gráfica de Álvaro Melgosa, que hemos presentado en este artículo, propone distintas formas de contemplar e interpretar un mismo «objeto»: (*i*) la puramente artística, (*ii*) la exclusivamente matemática, (*iii*) la artístico-matemática, (*iv*) la matemático-artística, (*v*) la…

Esta «multivisión» a la hora de enfrentarse a un mismo diseño gráfico se puede utilizar en las aulas de los distintos niveles educativos para que los alumnos sean capaces de percibir la presencia de las Matemáticas en el Arte y descubran el potencial artístico de determinados objetos matemáticos.

REFERENCIAS

Cajori, F. (1993). *A history of mathematical notations.* New York: Dover.

Le-Maur, C. (1778). *Elementos de Matemática pura* (Tomo primero. Aritmética Universal). Madrid: Joachin Ibarra.

Lucas, E. (1895). *L'Arithmétique amusante*. Paris: Gauthier-Villars et fils.

Sigler, L. E. (2003). *Fibonacci's liber Abaci. A Translation into Modern English of Leonardo Pisano's Book of Calculation.* New York: Springer.

Referencias online

Álvaro Melgosa
<www.alvaromelgosa.com/>
<https://www.behance.net/alvaromelgosa>

RINCÓN "SAPERE AUDE"…. ¿resolviendo problemas?*

Sixto Romero
Escuela Técnica Superior de Ingeniería
Universidad de Huelva
sixto@uhu.es

1. MATEMÁTICAS EN EL SIGLO XVII. (II)

Cerramos el siglo XVII abordando con un breve bosquejo la aparición de nuevos símbolos algebraicos, a continuación, Descartes y la geometría analítica, para culminar con la geometría y arquitectura de Desargues.

1.1. La aparición de nuevos símbolos algebraicos.

Después de Viète, del que dimos buena cuenta en el número anterior, viene Albert Girard (Saint-Mihiel,1595-Leiden, 1632), quien fue el primero en mostrar el uso del signo negativo en la solución de ecuaciones. Emigró a Holanda como refugiado religioso, pues era protestante.

Figura 1. Alber Gérard. https://www.ecured.cu/Albert_Girard

A los veintidós años ingresó a la Universidad de Leiden, donde estudió Matemáticas a pesar de que sus mayores intereses eran la música y el laúd. Basó sus estudios en álgebra, trigonometría y aritmética y a los treinta y un años publicó un tratado en trigonometría en donde por primera vez se utilizan las abreviaciones ***sin, cos, tan***. Como la mayoría de los matemáticos de su época, Girard estaba interesado en las aplicaciones militares de la matemática. Aparentemente, fue por un

* Agradezco al director de la revista EPSILON, la posibilidad de publicar durante los últimos cuatro años, en este RINCÓN la oferta que le hice de presentar la Resolución de Problemas (RdP´s) abordando la teoría de números, la geometría euclidiana y la historia de las Matemáticas en diferentes periodos.

Figura 2. Pierre Gassendi https://es.wikipedia.org/wiki/Pierre_Gassendi

Invention nouvelle
EN
L'ALGEBRE,
PAR
ALBERT GIRARD
MATHEMATICIEN.
Tant pour la solution des equations, que pour recognoistre le nombre des solutions qu'elles reçoivent, avec plusieurs choses qui sont necessaires à la perfection de ceste divine science.
INDEFESSVS AGENDO
A AMSTERDAM.
Chez Guillaume Ianffon Blaeuw.
M. DC. XXIX.

Figura 3. *La invención nouvelle en l'algèbre.* Albert Girad. https://es.wikipedia.org/wiki/Albert_Girard

tiempo ingeniero del ejército holandés, después de haber publicado su estudio trigonométrico.

Sobre su vida, citar a Pierre Gassendi (Champtercier, Provenza; 22 de enero de 1592-París, 24 de octubre de 1655) que fue un sacerdote católico, filósofo, astrónomo y matemático francés. Gassendi propugnó el lema ***sapere aude***, (que entre otras cosas da título a la colección que se edita en esta sección de la revista EPSILON) luego divulgado por el filósofo prusiano Immanuel Kant, conocedor de la obra de Gassendi. A lo largo de su vida, atacó con dureza a la astrología, la cábala, la alquimia y a los rosacruces, entre otros.

Prefirió y defendió la observación y la deducción matemática en Astronomía y en Física a partir de la razón bien dirigida. En Filosofía destacó como el gran restaurador del atomismo y también del epicureísmo

Gassendi, al referirse a Girard, cuando éste murió, dijo que él prefirió morir describiéndose más como un ingeniero que como un matemático. Girard trabajó en álgebra, trigonometría y cálculo. En 1626 publicó un tratado de trigonometría que contiene las abreviaturas citadas. También dio las fórmulas para calcular el área del triángulo. En álgebra, describe desarrollado el teorema fundamental del álgebra y tradujo las obras de Simon Stevin (1548-1620).

También es famoso por ser el primero en formular $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$, que es la definición de la obtención de los términos de la sucesión de Fibonacci.

En 1629, escribió *La invención nouvelle en l'algèbre* donde demuestra que las ecuaciones podrían tener raíces negativas e imaginarias (fig. 3).

Como profesor, enseñó matemáticas, ingeniería, óptica y de la música. Patrocinado por el tribunal, también investigó la ley de la refracción, y dedicó gran parte de su tiempo a la ingeniería del ejército holandés, especialmente en proyectos de cartografía y fortificaciones.

En opinión del matemático inglés Charles Hutton (1737-1823), Girard fue: *"...la primera persona que comprendió la doctrina general de la formación de los coeficientes de las potencias de la suma de las raíces y sus productos. Él fue el primero en descubrir las reglas para la suma de las potencias de las raíces de cualquier ecuación…"*

Figura 4. Charles Hutton (1737-1823) https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Hutton/

Figura 5. Thomas Harriot (1560-1621) http://www.cosmovisions.com/Harriot.htm

También el matemático Thomas Harriot (1560-1621), a quien debemos un descubrimiento de la mayor importancia, a saber, que todas *las ecuaciones algebraicas pueden considerarse como el producto de tantas ecuaciones simples como unidades haya en el número que expresa su grado*. Podemos, por ejemplo, ver una ecuación de 5º grado como el producto de cinco ecuaciones simples. Los signos < y > ("menor que" y "mayor que") son de su invención.

Así mismo, hay que reseñar a William Oughtred (1574-1660) matemático y teólogo nacido en Eaton (Buckinghamshire). Dirigió el estudio de la ciencia en su juventud, teología y la de las ciencias exactas, fue nombrado ministro de Albury en 1610 y, gracias a este lucrativo beneficio, pudo satisfacer con toda libertad su pasión por las matemáticas. Oughtred, al mismo tiempo, introdujo el signo **x** para denotar la multiplicación.

Figura 6. Wiliam Oughtred (1574-1660) http://www.cosmovisions.com/Oughtred.htm

1.2. Descartes y la geometría analítica.

Figura. 7. René Descartes (1596-1650)
https://www.astromia.com/biografias/descartes.htm

Después de la caída del Imperio Romano, la geometría había tenido el destino de las otras ciencias y había caído en el olvido. En la época del Renacimiento, los científicos, durante todo un siglo, se habían dedicado tan exclusivamente a traducir y comentar las obras de los antiguos geómetras, que es casi imposible citar un progreso real en geometría. Para eso, tuvimos que esperar a René Descartes (1596-1650), el espíritu universal que dejó su huella en toda la filosofía y toda la ciencia de su tiempo.

René Descartes (René), su nombre sería Renatus Cartesius en su forma latinizada. De su apellido *Cartesius* se deriva el adjetivo cartesiano que se aplica en matemáticas en referencia, por ejemplo, a los planos, ejes o coordenadas. Es un filósofo nacido el 31 de marzo de 1596 en La Haye (ahora La Haye-Descartes) en Touraine, y fallecido en Estocolmo el 11 de febrero de 1650. Su vida es sobre todo la de un espíritu, su verdadera biografía es la historia de sus pensamientos, los acontecimientos externos de su existencia son de interés sólo a través de la luz que pueden arrojar sobre su obra. Desde su más tierna infancia fue meditativo y reflexivo, tanto que su padre, *un señor de la túnica, hijo de un señor de la espada*, lo llamó su pequeño filósofo. En el colegio de La Flèche, donde se le ingresó, el pequeño filósofo asombró a sus maestros, los jesuitas, por la profundidad e independencia de su espíritu y su renuencia a contentarse con las opiniones recibidas. A los diecisiete, es decir a la edad en que uno es todavía un escolar, había hecho el recorrido por todo lo que se enseñaba de su tiempo, y había reconocido su insuficiencia o su vanidad:

> *"….Apreciaba mucho la elocuencia y me encantaba la poesía; pero pensé que ambos eran dones del espíritu más que frutos del estudio. Aquellos que tienen el razonamiento más fuerte y que digieren mejor sus pensamientos para hacerlos claros e inteligibles, siempre pueden persuadir mejor a lo que proponen, aunque solo hablen bretón y no lo hagan. nunca hubiera aprendido retórica [...]. Me gustaron especialmente las matemáticas, por la certeza y la evidencia. sus razones; pero aún no me di cuenta de su uso real y, pensando que solo se usaban para las artes mecánicas, me asombró que, siendo sus cimientos tan firmes y tan sólidos, no se hubiera construido nada más sobre ellos. [...]…"* Reverenciaba nuestra teología y pretendía alcanzar el cielo tanto como cualquier otro; pero habiendo aprendido, como una cosa muy cierta, que el camino no está menos abierto a los más ignorantes que a los más doctos, y que las verdades reveladas que conducen a él están más allá de nuestro entendimiento*:… "No me hubiera atrevido a someterlos a la debilidad de mi razonamiento [...] No diré nada de filosofía excepto que, viendo que ha sido cultivado por las mentes más excelentes que han vivido durante varios siglos, y que, sin embargo, todavía no hay nada allí que no se discuta, y*

por lo tanto que no sea dudoso, No tenía la presunción suficiente para esperar encontrarme allí mejor que los demás; y que, considerando cuántas opiniones diferentes puede haber sobre un mismo tema, que son apoyadas por personas instruidas, sin que nunca haya más de una que sea verdadera, consideré todo falso. que era solo probable. Luego, para las otras ciencias, especialmente cuando toman prestados sus principios de filosofía, juzgué que no se podría haber construido nada sólido sobre cimientos tan sueltos; y ni el honor ni la ganancia que prometen fueron suficientes para invitarme a aprenderlos…"

Descartes, por tanto, salió de la universidad desilusionado con los libros y la ciencia que enseñaban. Podemos decir que en este momento se inclina a no buscar más la verdad sino en sí mismo, en su razón. Sin embargo, quiso, por prudencia, intentar una última prueba. Después de haber cerrado los libros, quiere abrir "el libro mayor del mundo", hojearlo y ver si la verdad está ahí. Entonces, durante diecisiete años, su vida fue como una novela. A veces se mezcla con la sociedad humana, y a veces desaparece abruptamente para esconderse en algún retiro; a veces está en Francia, a veces en el extranjero. Viaja por Alemania, Italia, Holanda; para viajar, se hizo soldado; vive con los soldados de Maurice de Nassau en los Países Bajos, luego con los del duque de Baviera en Alemania; en sus idas y venidas, se podría decir en sus aventuras, dondequiera que lo atraiga un espectáculo raro e interesante; frecuenta a los eruditos del país donde se encuentra, estudia a los seres humanos y a los pueblos, y una vez plenamente convencido de que *el gran libro del mundo* ya no puede revelarle la verdad, se retira al fondo de Holanda, a Franeker, y allí, siete años seguidos (1629 a 1636), solo consigo mismo, apenas correspondiendo con algunos amigos, el padre Mersenne entre otros, construyó desde cero un vasto sistema, donde todo está, naturaleza y humanos, ciencia y la filosofía, el mundo y Dios.

La conmoción que provocó en el pequeño mundo de los científicos y pensadores la aparición de la primera obra de Descartes fue inmensa. Fue una revolución. Esta obra, publicada en Leyden en 1637, se tituló ***Discurso sobre el método*** para conducir correctamente la razón y buscar la verdad en las ciencias. Por una innovación que en sí misma ya era una revolución, se escribió en francés y no en latín (El Abbé Etienne de Courcelles dio en 1644 [Amsterdam] una traducción latina revisada por Descartes, bajo este título *Specimina philosophica*). Le siguieron, entre otras: las *Meditationes de prima philosophia in quibus Dei existia et animae a corpore distinntio demostrantur*; *Su adjunctaa sunt variae objectiones doctorum virorum, cum responsionibus auctari*s, es decir, *Meditaciones sobre la primera filosofía*, escritas en latín. Los *Principia philosophicae* (Amsterdam, 1644); el *Tratado sobre las pasiones del alma* (Amsterdam, 1649). Por no hablar de las obras de su juventud, anteriores al *Discurso del Método*, el *Compendium musicae*, o *Teoría matemática de la música*, la *Olympica y las Regulae ad directionem ingenii*, un precioso borrador del Método, después de su muerte, sus amigos publicaron: *Tratado del hombre*, con las Observaciones de Louis de La Forge y un *Tratado sobre la formación del feto* (París, 1664); *El mundo o tratado de la luz de Descartes*, revisada y corregida por Clerselier (París, 1664), que había sido el primer fruto de su obra (y en la que Descartes admitía, como Galileo, el movimiento de la Tierra pero había borrado cuidadosamente esta obra en cuanto conoció la condena del filósofo italiano (1633)); *las Cartas* (París, 1657-1667), y finalmente la *Opuscula posthuma, physica et Mathematica* (Amsterdam, 1701).

Su trabajo científico es principalmente matemático. *El Discurso del método* para conducir bien su razón y buscar la verdad en las ciencias, publicado en 1637, le siguen tres suplementos: *las Dioptría, los Meteoros y la Geometría,* donde Descartes expone algunas aplicaciones particulares de su doctrina general.

La idea fundamental de la geometría cartesiana o geometría analítica - la determinación de un punto en el plano por sus distancias a los dos lados de un ángulo recto - ciertamente no es nueva, ya que la posición de un punto de la esfera terrestre viene dada por sus dos coordenadas geográficas, longitud y latitud. Pero Descartes, al establecer una correspondencia entre las ecuaciones del álgebra (cuyo simbolismo renueva) y las figuras de la geometría, muestra la asombrosa fecundidad del proceso. De esto surge un método general para tratar con álgebra todas las cuestiones de geometría y, al mismo tiempo, curvas; además, la noción de coordenadas, que realiza esta correspondencia, va más allá del dominio de la geometría para extenderse a la mecánica y las ciencias físicas: cualquier teoría física es una representación, una explicación algebraica de los fenómenos. Así, Descartes, al transportar las matemáticas a regiones completamente nuevas, es el primero en considerar todos los fenómenos como simples consecuencias de las leyes de la mecánica. Fuera de las matemáticas, Descartes crea, con su pensamiento, el mundo exterior, y su física es una especie de geometría donde la experiencia no tiene lugar.

Descartes también indica la manera de construir o representar geométricamente las ecuaciones de los grados superiores. Da una regla para resolver una ecuación de cuarto grado por medio de una ecuación cúbica y dos ecuaciones cuadráticas. Finalmente perfeccionó los métodos utilizados por Cardan, Gérard, Harriot y otros matemáticos para reducir y procesar las ecuaciones. En particular, introduce la notación de exponentes y los principios de su cálculo.

Entre otros aspectos del trabajo de Descartes hay que destacar que es considerado en Francia como el ***renovador de la ciencia***. En el trabajo que emprendió para operar esta gran restauración, hay que distinguir al metafísico, al matemático, al físico y al astrónomo.

En metafísica tomó como punto de partida el famoso entimema, ***pienso, luego existo***, y utilizó esta primera verdad para establecer y la existencia del alma, a la que le da para alimentar el pensamiento y la existencia. de Dios, que se basa en la idea misma que nosotros tenemos de ella, y la de los cuerpos, que se basa en la veracidad de Dios. Descartes distinguió claramente el espíritu de la materia (a la que dio la extensión como esencia), pero sin explicar la acción recíproca de las dos sustancias; preocupado por y la fisiología, colocó el asiento del alma en la glándula pineal y le dio espíritus animales como agentes y redujo a los animales a puras máquinas. Finalmente admitió ideas innatas.

En matemáticas, Descartes dio un inmenso paso adelante con la invención de un nuevo modo de notación en álgebra, el de los exponentes, y con la aplicación de esta ciencia a la geometría de curvas; lo que le permitió resolver, como jugando, los problemas que hasta entonces se consideraban insolubles.

En su *Tratado de meteoritos* (1637), fue el primero en presentar una teoría del arco iris, y en su *Dioptrics* (1637), las leyes de la refracción. En astronomía y en cosmología imaginó este famoso sistema de vórtices, según el cual el Sol y las estrellas fijas son el centro de tantos vórtices de materia sutil que hacen que los planetas circulen alrededor de ellos; pero, menos audaz o menos franco que Copérnico, añadió que todos estos vórtices circulaban por la Tierra.

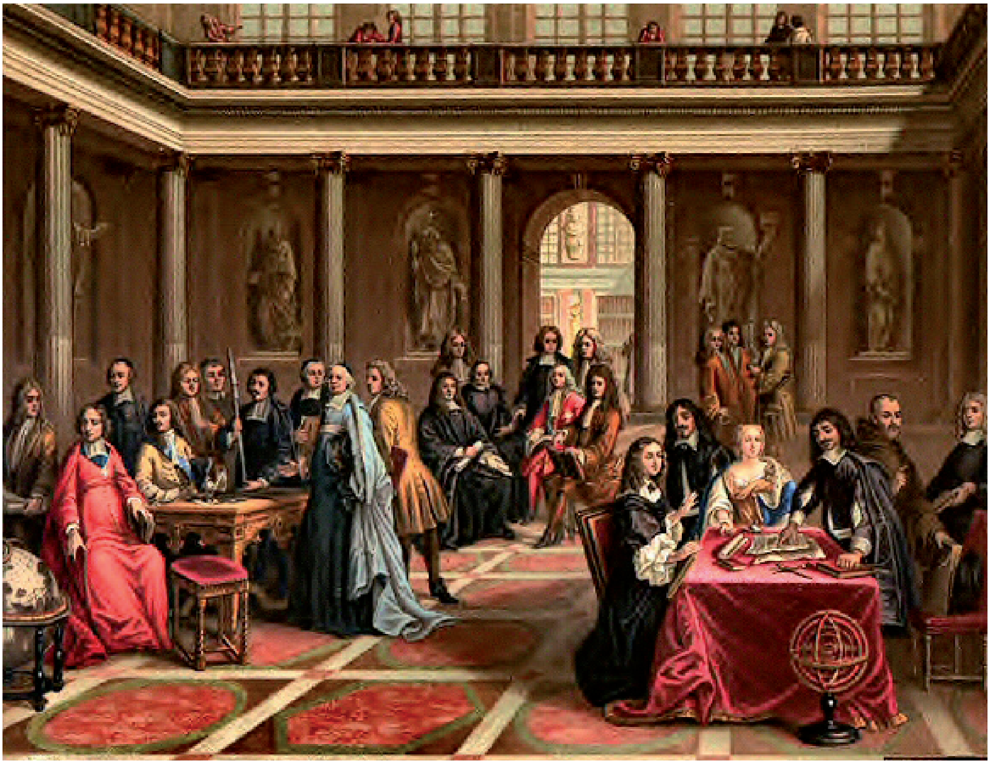


Fig. 8. Christine, Reina de Suecia, escuchando una demostración de Descartes. http://www.cosmovisions.com/Descartes.htm

A pesar de la oposición que la filosofía de Descartes había encontrado en sus inicios, no dejó de extenderse por toda Europa y obtener allí, bajo el nombre de cartesianismo, un gran número de partidarios, que fueron llamados cartesianos. Entre estos, algunos, como Delaforge, Clersellier, Clauberg, P.-Sylvain Régis, Jacques Rohault,… se contentaron con reproducir la doctrina del maestro y comentarla tímidamente; los demás, como Malebranche, Spinoza, Fardella, cada uno trajo consecuencias a su manera, y construyó sistemas que se desviaron mucho de ellos; otros finalmente sólo tomaron prestados de Descartes su espíritu y su método, que utilizaron, a veces para defender, las verdades religiosas y morales como Arnauld, Bossuet, Fénelon, Nicole y la mayoría de los jansenistas de Port-Royal; a veces, como Bayle, para destruir todas las creencias. Después de una boga de más de medio siglo, el cartesianismo se eclipsó rápidamente ante el favor que se adjuntó a los nuevos sistemas de Locke, Newton, Leibniz. Sin embargo, siguió siendo la filosofía dominante en Francia hasta Condillac. Voltaire le asestó los últimos golpes: tales son las líneas principales de la obra de Descartes.

Lo que se ha mostrado, se ha hecho para resaltar su carácter esencial: es un sistema intelectualista. El método deriva de las matemáticas, y del método surgen a su vez las matemáticas, la física, la psicología y la metafísica universales. El mundo entero, tanto las almas como el del cuerpo, es un mundo de ideas claras y distintas, donde todo está ordenado y vinculante según informes universales y necesarios. La libertad está en el corazón del sistema; pero se enlaza en acción. La ciencia se basa en fe de la evidencia intelectual; pero es también sobre la base de la evidencia que se hace la metafísica, cuyo objeto principal, si no el único, es establecer la verdad científica en la realidad. Ésta es la razón por la que se proclama el único árbitro del conocimiento. Por tanto, *Descartes*, cualesquiera que hayan sido los destinos de las diversas partes de su sistema, *es de hecho el padre del pensamiento moderno.*

Los últimos años de su vida fueron todos de propaganda y refutación: el ardor de su proselitismo científico. La reina Cristina de Suecia quería "***verlo y hablar con él de filosofía***". Halagado por esta invitación, Descartes se fue a Estocolmo a fines de 1649, pero al cabo de unos meses sufrió una inflamación que le provocó la muerte el 11 de febrero de 1650. Tenía casi 54 años. Sus restos fueron reportados en Francia en 1667 y archivados con honor en la iglesia St. Genevieve (París), pero no se le permitió pronunciar su panegírico.

1.2. Desargues y la geometría descriptiva

Mientras Descartes descubría la geometría analítica, los métodos de la geometría tradicional sostenida por los griegos también fueron completamente renovados, por Descartes nuevamente y por Pascal, con sus consideraciones sobre las propiedades de las proyecciones y transversales y especialmente por Girard Desargues que sentó las bases de la geometría descriptiva, que debió su pleno desarrollo a Gaspar Monge (1746-1818) a finales del siglo siguiente.

Girard Desargues es un matemático y arquitecto nacido en Lyon en 1593, fallecido en Lyon en 1661. De familia honorable, vino a instalarse, probablemente como arquitecto, en París, donde, desde 1626, se había distinguido por sus conocimientos teóricos y por sus esfuerzos por perfeccionar los procesos prácticos de los artesanos. A partir de ese momento se hizo amigo de Descartes, y su amistad nunca vaciló.

En 1628 participó, como ingeniero, en la construcción del dique de La Rochelle. Perteneció, por otro lado, desde el principio, al círculo de académicos cuyas reuniones semanales (principalmente en Le Pailleur) iban a dar lugar a la Académie des Sciences mucho después. Regresó a Lyon hacia 1650 y pasó los últimos años de su vida retirado. Sus obras, sobre las que Poncelet y Chasles habían llamado la atención, fueron recopiladas y publicadas por Poudra (París, 1864, 2 vols. In-8). Desargues había impreso sucesivamente, con un privilegio que databa de 1630:

- Un panfleto sobre la perspectiva reproducido por el artista francés Abraham Bosse (1604-1676) en su Tratado de 1648, titulado, *Ejemplo de una de las formas universales de la SGDL de tocar las prácticas de perspectiva sin emplear ningún tercer punto, de distancia o de otra índole, que está fuera del alcance del trabajo-*
- Un tratado sobre las cónicas, conservado solo por una copia de La Hire y titulado: *Proyecto BrouilIon de un ataque a los acontecimientos de los encuentros de un cono con un plan (París, 1639)* parece haberse unido bajo el título general de Lecciones de las tinieblas, con un *Ataque a los acontecimientos de las contrariedades entre las acciones de los poderes o fuerzas*.

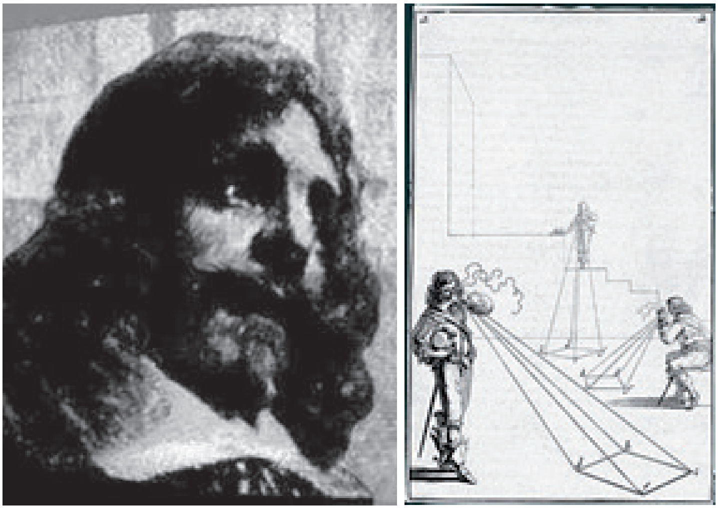


Figura 9. (a) Girard Desargues-(b) lustración de A.Bosse del Tratado de Desargues. https://en.wikiquote.org/wiki/Girard_Desargues-https://es.wikipedia.org/wiki/Geometr%C3%ADa_proyectiva

- Finalmente, en agosto de 1640, un tratado sobre talla de piedra, perspectiva y gnomónica, del que sólo se conoce un ejemplar en la biblioteca del Instituto y en el que falta la plancha de figuras; su título es: *Anteproyecto de ejemplo de un modo universal del SGDL, tocando la práctica de la línea con pruebas para el corte de piedras en arquitectura, y la aclaración de un modo de reducir al pie pequeño en perspectiva como en geométrico, y trazar todos los cuadrantes planos de horas iguales al sol.*

Desargues, como Gaspar Monge con quien se le puede comparar, ya aplica sus descubrimientos a la práctica y en particular a la perspectiva y al tallado de piedra, se le considera el primer inventor de los métodos que renovarán la geometría pura en el siglo XIX. Era plenamente consciente de su originalidad y quería romper por completo con todo lo que se había hecho antes que él en la teoría de las cónicas. Su trabajo solo podía ser valorado en su valor por mentes superiores, como Descartes y Fermat, pero caminaron por caminos diferentes, dedicándose a crear geometría analítica, que pronto atraería sobre ella todas las expectativas de los matemáticos. Sin embargo, el trabajo de Desargues habría sido inmediatamente fructífero si Blaise Pascal (1623-1662) cuyo famoso *Essay pour les coniques* que escribió a la edad de diecisiete años (1640) es una aplicación declarada de las ideas del agrimensor de Lyon, habría perseverado en la empresa que se había comprometido a realizar. Si, en geometría pura, hubiera apoyado a Desargues como lo hizo Bosse para aplicaciones prácticas, la ciencia podría haber avanzado un siglo y medio en muchos puntos (fig. 10).

Desargues parece haber tenido un talento notable para la exposición oral; a pesar de la oposición que encontró, sus métodos para las artes se difundieron gradualmente hasta que Monge retomó sus ideas para sistematizarlas. También parece haber tenido un verdadero talento como arquitecto, según las indicaciones que da Bosse sobre su obra.

Figura 10. Girard Desargues y el cardenal Richelieu https://www.biografiasyvidas.com/biografia/d/desargues.htm

SAPERE AUDE, GEOMETRÍA

Desde la aparición de esta sección he incorporado ejercicios en los que se pondera la geometría clásica como una rama de la geometría basada en los Elementos de Euclides y definida como la ciencia de las figuras en el espacio. Presupone varias nociones como la alineación y la comparación de ángulos o longitudes, a las que atribuye ciertas propiedades que definen la geometría euclidiana. No es menos cierto que la geometría clásica es desplazada gradualmente por la geometría analítica que reduce el estudio de las figuras a expresiones algebraicas gracias a varios sistemas de coordenadas (¡indicar al mismo tiempo que un enfoque axiomático más sólido, basado en la teoría de conjuntos, da lugar a la geometría sintética!). La geometría euclidiana comienza con los elementos de Euclides que es tanto un cuerpo de conocimiento de la geometría de la época como un intento de formalizar las matemáticas de este conocimiento. Allí se exponen los conceptos de recta, plano, longitud, área y forman el soporte de los cursos de geometría elemental. La concepción de la geometría está íntimamente ligada a la visión del espacio físico ambiental en el sentido clásico del término.

Debemos ser consciente, ese es y ha sido mi objetivo durante los cuatro años de colaboración en esta sección mostrar y poner en valor que más de 2000 años después de su nacimiento, el espacio geométrico euclidiano sigue siendo una herramienta eficaz con amplios campos de aplicación.

1. Ejercicios de aquí y allá (solución a la Propuesta del número anterior 105)

JOYITA*: a) *Los círculos C_1 y C_2 de la figura se intersectan en A y B. El diámetro CA de C_1es tangente a C_2 en A, y D es el punto en C_2 tal que C, B y D están alineados. Si BD = 3 y AC = 2, ¿Cuál es el área de C_2?*

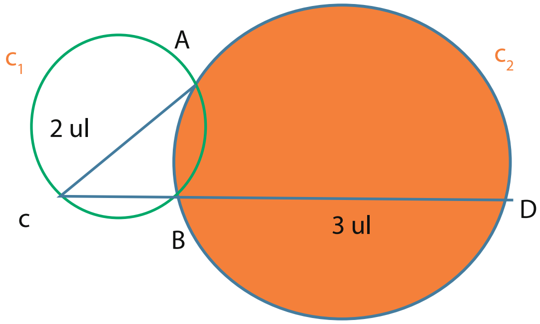


Figura 11. Círculos C_1 y C_2.

SOLUCIÓN

Paso 1

Al ser CA diámetro del círculo C_1 y B un punto, también en C_1, entonces el ángulo $\widehat{ABC} = 90^o$. Por lo tanto, $\widehat{ABD} = 90^o$ y AD es diámetro de C_2. Por otro lado, al ser CA tangente a C_2 en A y AD diámetro, también tenemos que CAD = 90º.

Entonces $\widehat{CAB} + \widehat{BAD} = 90^o = \widehat{CAB} + \widehat{ABD}$, de donde $\widehat{BAD} = \widehat{ACB}$.

Paso 2

Con ello conseguimos que los triángulos $\overset{\triangle}{BAD}$ y $\overset{\triangle}{BCA}$ son semejantes, y por tanto sus lados son proporcionales.

En la fig. 12 tenemos que

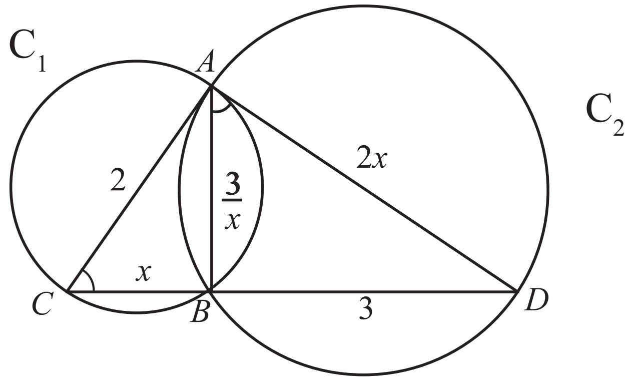


Figura 12. Círculos C1 y C2.

$$\frac{BD}{BA} = \frac{AD}{CA}$$

Por lo tanto, $\frac{3}{BA} = \frac{AD}{2}$.

Si $AD=2x \Rightarrow \frac{3}{BA} = \frac{AD}{2} \Rightarrow \frac{3}{BA} = \frac{2x}{2} \Rightarrow \frac{3}{BA} = x \Rightarrow BA = \frac{3}{x}$

Paso 3

Aplicando el teorema de Pitágoras en el triángulo rectángulo $\overset{\triangle}{BAD}$ y realizando las oportunas operaciones, se tiene que

$$\left(\frac{3}{x}\right)^2 + 3^2 = (2x)^2 \Rightarrow \frac{9}{x^2} + 9 = 4x^2 \Rightarrow 4x^4 - 9x^2 - 9 = 0$$

Se trata de una ecuación bicuadrada. Haciendo $x^2 = t \Rightarrow 4t^2 - 9t - 9 = 0$, y resolviendo se obtiene

$$t = \frac{9 \pm \sqrt{9^2 + 4.4.9}}{8} = \frac{9 \pm \sqrt{81 + 144}}{8} = \frac{9 \pm \sqrt{225}}{8} = \frac{9 \pm 15}{8} \Rightarrow x^2 = \frac{9 \pm 15}{8}$$

Como x^2 no puede ser negativo, se tiene que $x^2 = \frac{24}{8} = 3 \Rightarrow x = \sqrt{3}$.

Por lo tanto, el área del círculo C_2 es

$$A(C_2) = \pi.(\sqrt{3})^2 \Rightarrow A(C_2) = 3\pi$$

JOYITA*: b) *El área del triángulo ABC es igual a 40 cm²*.

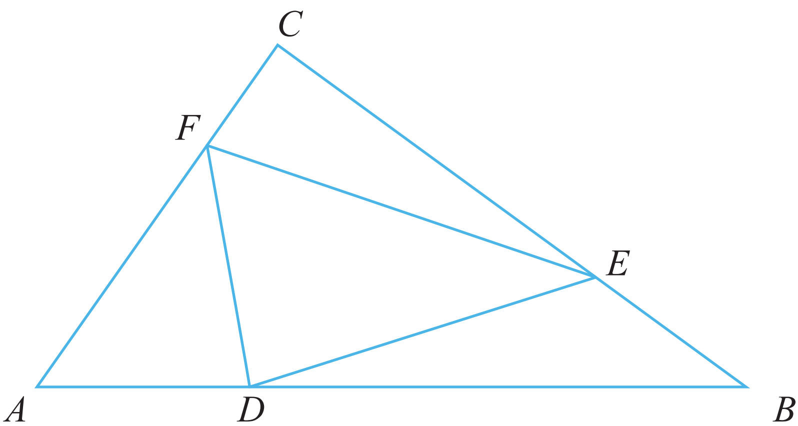


Figura 13. Triángulo $\overset{\triangle}{ACB}$.

Los puntos D, E y F cumplen que DB = 3AD, CE = 3EB y AF = 3FC. ¿Cuál es el área *del triángulo* $\overset{\triangle}{DFE}$ *?*

SOLUCIÓN

Paso 1

Tracemos las alturas CH del triángulo ACB desde C y EI desde el triángulo BED desde el punto E.

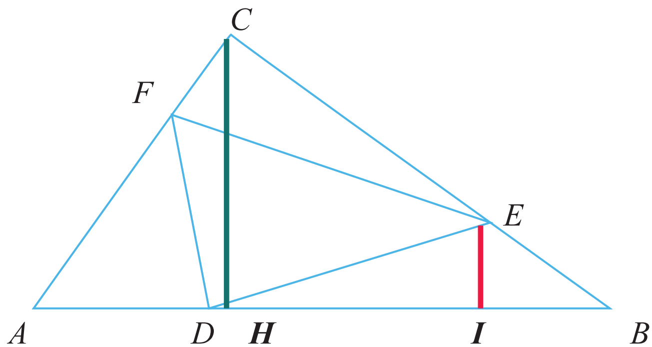


Figura 14. Triángulos $\overset{\triangle}{ACB}$ y $\overset{\triangle}{DFE}$.

La información que nos proporciona el enunciado sobre los puntos D, E y F que cumplen *DB = 3AD, CE = 3EB y AF = 3FC*, nos lleva a afirmar que los triángulos $\overset{\triangle}{\mathrm{CHB}}$ y $\overset{\triangle}{\mathrm{EIB}}$ son semejantes con razón de semejanza de 4:1. Por lo tanto *IE= (1/4) CH.*

Calculemos las áreas de los triángulos $\overset{\triangle}{\mathrm{DEB}}$, $\overset{\triangle}{\mathrm{AFD}}$ y $\overset{\triangle}{\mathrm{FCE}}$.

Paso 2

Hallemos el área del triángulo $\overset{\triangle}{\mathrm{DEB}}$.

Como *DB= (3/4). AB* sigue que el área del triángulo $\overset{\triangle}{\mathrm{DEB}}$ se puede calcular así

$$\frac{1}{2}IE.DB = \frac{1}{2}(\frac{1}{4}CH).(\frac{3}{4}AB) = \frac{3}{32}(CH.AB)$$

Como el área del triángulo *ABC* es 40 cm^2 se tiene:

$$A = 40 = \frac{1}{2}AB.CH \Rightarrow AB.CH = 2.40 \Rightarrow AB.CH = 80$$

Por lo tanto, el área del triángulo DEB es

$$A_1 = \frac{3}{32}AB.CH = \frac{3}{32}80 = \frac{240}{32} = \frac{15}{2}$$

Paso 3

Razonando de forma análoga en los triángulos $\overset{\triangle}{\mathrm{AFD}}$ y $\overset{\triangle}{\mathrm{FCE}}$ podemos comprobar (¡se deja al lector realizar las operaciones!) se tiene

Área del triángulo $\overset{\triangle}{\mathrm{AFD}}$:

$$A_2 = \frac{15}{2}$$

Área del triángulo $\overset{\triangle}{\mathrm{FCE}}$

$$A_3 = \frac{15}{2}$$

Paso 4

De aquí se deduce que el área del triángulo que nos solicitan $\overset{\triangle}{DFE}$ es

$$A=40-3.\,(15/2)=35/2$$

SAPERE AUDE, TEORÍA DE NÚMEROS

1. **Ejercicios de aquí y allá (solución a la propuesta de los ejercicios del número anterior 105)**

   a) ***Ejercicio propuesto en Olimpiada Mexicana de Matemáticas**
   b) ***Ejercicio propuesto en la Olimpiada Internacional de Matemáticas en Slovenia-2006**

JOYITA*: a) *Enrique tiene que usar una tarjeta bancaria porque necesita dinero para salir de viaje. El código de cuatro dígitos se le ha olvidado y quiere recuperarlo. ¿Podrías ayudarle a encontrarlo, si cada uno de los números siguientes* ***6427, 4271, 6412, 2671****, tiene una cifra incorrecta y otra fuera de su lugar?*

SOLUCIÓN

Paso 1

Notemos que el ***2*** aparece en todos los números, mientras que el ***1****,* ***4****,* ***6*** y ***7*** aparece cada uno en exactamente tres de los cuatro números. Por lo tanto, si el número que no pertenece fuera uno de los siguientes: ***1, 4, 6*** ó ***7***, uno de los cuatro números tendría todos sus dígitos correctos. En otras palabras, como el ***2*** es el único dígito que aparece en todos, entonces ***2*** no pertenece al número correcto y así las cifras del número buscado son ***1, 4, 6*** y ***7.***

Paso 2

De aquí se deduce que el número ***2*** aparece en el lugar de alguno de éstos y, al sustituirlo en cada una de las opciones, el número que queda tiene intercambiadas el número sustituido por ***2*** con otra de las cifras.

Paso 3

Estudiemos cada uno de los casos:

a) Fijemos nuestra atención en el número ***2.*** Si lo sustituimos por ***1*** en el número ***6427***, obtenemos el ***6417***. De aquí el intercambio del número ***1*** con el número **6** nos da ***1467.*** De la sustitución del 1 con el ***4*** nos da ***6147***, y del 1 con el ***7*** produce ***6471***.

b) A continuación, fijemos nuestra atención, de nuevo, en el número ***2***. Si lo sustituimos por ***6*** en el número ***4271***, obtenemos el ***4671***. De aquí el intercambio del número ***6*** con el número ***4*** nos da ***6471***. De la sustitución del ***6*** con el ***7*** os da 47***6***1, y del ***6*** con el ***1*** produce ***4176.***

Paso 4

A la conclusión que llegamos es que hemos llegado a la solución porque la única coincidencia en los casos tratados se da con el número ***6471***.

JOYITA*: b) *Hallar los pares de valores* ***(p, q)*** *para los que*

$$1+2^{p}+2^{2p+1}=q^{2}$$

SOLUCIÓN

Paso 1

NOTA: Si el par (*p, q*) es una solución para $p \geq 0 \Rightarrow (p,-q)$ es una solución también.

Para $p=0 \Rightarrow (0,2),(0,-2)$ son soluciones de la expresión $1+2^{p}+2^{2p+1}=q^{2}$.

Paso 2

Consideremos el par (*p, q*) con $p > 0$, sin pérdida de generalidad pongamos nuestra atención para $q > 0$.

Reescribamos la ecuación inicial:

$$1+2^{p}+2^{2p+1}=q^{2} \; \mathbf{:(1)}$$

así $2^{p}+2^{2p+1}=q^{2}-1 \Rightarrow 2^{p}(1+2^{p+1})=(q-1)(q+1)$ **:(2)**

De esta expresión se infiere que *(q-1)* y *(q+1)* son enteros pares, y uno de ellos es divisible por 4. Por lo tanto, para $p \geq 3$ uno de los factores es divisible por 2^{p-1} pero no por 2^{p}. Entonces $q = 2^{p-1}$ con $m+r$ impar y $r=^{\pm}1$.

Paso 3

Sustituyendo en (2):

$$2^p(1+2^{p+1}) = (2^{p-1}m + r - 1)(2^{p-1}m + r + 1) = (2^{p-1}m + r)^2 - 1$$

$$= 2^{2p-2}m^2 + 2^p mr \Leftrightarrow 1 + 2^{p+1} = 2^{p-2}m^2 + mr \Rightarrow 1 - mr = 2^{p-2}m^2 - 2^{p+1} \Rightarrow$$

$$1 - mr = 2^{p-2}(m^2 - 2^3) \Rightarrow 1 - mr = 2^{p-2}(m^2 - 8)\, \mathbf{:(3)}$$

a) Al ser m par y $r=1$ se tiene que $m^2 - 8 \le 0$, que no satisface la condición (3)
b) Consideremos ahora $r=-1$entonces la expresión (3) toma la forma:

$$1 + m = 2^{p-2}(m^2 - 8) \Rightarrow 1 + m \ge 2(m^2 - 8) \Rightarrow 1 + m \ge 2m^2 - 16 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 17 + m \ge 2m^2 \Rightarrow 2m^2 - m - 17 \le 0$$

Paso 4

De aquí se infiere que $m \le 3$. También m no puede ser igual a 1 por la expresión (3).

Al ser m, impar se obtiene $m=3$, lo que conduce a que $p=4$.

De aquí, y de la expresión que aparece en el PASO 1 se obtiene $q=23$. También es solución $q=-23$.

Por lo tanto, la lista completa de soluciones es:

S={ (0,2), (0,-2), (4,23), (4,-23) }

NOTA: Muchas gracias por haber leído, esta sección, RINCÓN "SAPERE AUDE"…. ¿resolviendo problemas? Espero que hayáis disfrutado con lo que nos une: "Amor por las Matemáticas".