

epsilon 105

Revista de Educación Matemática

Director

Alexander Maz

Comité Editor

Francisco España

Inmaculada Serrano

José María Vázquez de la Torre

Salvador Guerrero

Noelia Jimenez

Comité Científico

Evelio Bedoya,

Universidad del Valle, Colombia.

José Carrillo

Universidad de Huelva, España.

José Iván López Flores,

Universidad Autónoma de Zacatecas, México

José Ortiz,

Universidad de Carabobo, Venezuela.

Liliana Mabel Tauber,

Universidad Nacional del Litoral, Argentina.

M^a Mar Moreno,

Universidad de Alicante, España.

Matías Camacho,

Universidad de la Laguna, España.

Roberto Alfredo Vidal Cortés,

Universidad Alberto Hurtado, Chile.

Patricia Pérez Tyteca

Universidad de Alicante

Carlos de Castro

Universidad Autónoma de Madrid

M^a Jose Madrid

Universidad Pontificia de Salamanca

Página de la revista: <http://thales.cica.es/epsilon>

Revista: epsilon@thales.cica.es

Sociedad Andaluza de Educación Matemática “Thales”

Edita

Sociedad Andaluza de
Educación Matemática “Thales”

Centro Documentación “Thales”

Universidad de Cádiz

C.A.S.E.M.

Facultad de Ciencias

Departamento de Matemáticas

Campus del Río San Pedro

Torre Central, 4^a planta

11510 Puerto Real (Cádiz)

Teléfono: 956012833

Email: thales.matematicas@uca.es

Maquetación

referencias.maquetacion@gmail.com

Depósito Legal

SE-421-1984

ISSN

2340-714X

Período

2020

Suscripción

Anual

7

INVESTIGACIÓN

7

Percepción de los estudiantes universitarios sobre la utilidad de las Matemáticas: análisis en función del género y la titulación/ Perception of university students on the utility of Mathematics: analysis based on gender and degree

Cristina Pedrosa-Jesús, Universidad de Córdoba
José Carlos Casas-Rosal, Universidad de Córdoba;
Astrid Cuida, Universidad de Valladolid,

19

Un modelo de la evolución en el tiempo de las proporciones del rostro humano/A model on the evolution with time of the proportions of the human face

María Jiménez, Colegio Internacional de Sevilla San Francisco de Paula
Víctor M. Jiménez, Colegio Internacional de Sevilla San Francisco de Paula
Diego Canales, Colegio Internacional de Sevilla San Francisco de Paula

31

¿Por qué enseñar la noción de fractal en el último año de la escuela secundaria? Opiniones de especialistas en Geometría/ Why teach the notion of fractal in the last year of secondary school? Opinions of specialists in Geometry

Florencia Fusi, Instituto Santa María de San Pedro (Argentina)
Natalia Sgreccia, Universidad Nacional de Rosario (Argentina)

51

EXPERIENCIAS

51

Trabajando con la app de geogebra en el aula/ Working with the Geogebra app in the classroom

Fernando Arribas Ruiz, IES COLONIAL
María del Carmen Galán Mata, IES AVERROES

59

IDEAS PARA EL AULA

- 59 Los conocimientos previos matemáticos en otras ciencias: caso de la irradiancia solar en agrometeorología/Previous mathematical knowledge in other sciences: case of solar irradiance in agrometeorology**
Alejandra Cañibano, UNCPBA, Argentina
Adriana Confalone, UNCPBA, Argentina

- 67 Una aplicación a nivel de licenciatura del cálculo integral a la probabilidad: El problema de la aguja de Buffon/ An application at the bachelor's level of integral calculus to probability: Buffon's needle problem**
Margarita Tetlalmatzi-Montiel, Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo

77

MISCELÁNEA

- 77 Arte y Matemáticas: Áreas y figuras equivalentes en la obra gráfica de Micah Lexier**
Vicente Meavilla, Jubilado Universidad de Zaragoza.
- 85 RINCÓN “SAPERE AUDE”... ¿resolviendo problemas?**
Sixto Romero, Universidad de Huelva

Percepción de los estudiantes universitarios sobre la utilidad de las Matemáticas: análisis en función del género y la titulación

Cristina Pedrosa-Jesús
José Carlos Casas-Rosal
Universidad de Córdoba,
Astrid Cuida
Universidad de Valladolid

Resumen: *El papel relevante de la actitud de los estudiantes hacia las matemáticas ha llamado la atención de investigadores desde hace mucho tiempo, mostrándose la influencia de la actitud en los estudiantes y su rendimiento en matemáticas. Se ha realizado un estudio exploratorio sobre la percepción que los estudiantes universitarios tienen sobre la utilidad de la materia, a través de la escala tipo Likert de Auzmendi (1992). Los resultados muestran que, en general, los estudiantes consideran que las matemáticas son importantes en sus estudios y útiles para su futuro profesional. Se encontraron diferencias significativas entre titulaciones, pero no entre géneros.*

Palabras clave: *utilidad de las matemáticas, actitudes hacia las matemáticas, estudiantes universitarios, género y titulación*

Perception of university students on the utility of Mathematics: analysis based on gender and degree

Abstract: *The relevant role of students' attitude towards mathematics has long drawn the attention of researchers, who show the influence of attitude on students and their performance in mathematics. An exploratory study has been carried out on the perception that university students have about the usefulness of the subject, through the Likert-type scale of Auzmendi (1992). The results show that, in general, students consider that mathematics is important in their studies and useful for their professional future. Significant differences were found between degrees, but not between genders.*

Keywords: *usefulness of mathematics, attitudes towards mathematics, university students, gender and degree*

INTRODUCCIÓN

Saber matemáticas y saber utilizarlas se han convertido en algo fundamental en todos los ámbitos: cotidiano, académico y profesional. Pensar con ideas matemáticas facilita la toma de decisiones complejas, desde el ámbito social o político, al comercial o financiero (Rico, 2007). Asimismo, nos permite afrontar estudios superiores de tipo científico o tecnológico, y resolver problemas, de forma eficaz, en el ámbito laboral (NCTM, 2003). Sin embargo, es una de las asignaturas más rechazada por los estudiantes (Osborne, Simon & Collins, 2003). Este rechazo suele ir ligado al fracaso y las dificultades que los estudiantes encuentran en la asignatura, pero el rendimiento en la asignatura, al igual que el proceso de enseñanza-aprendizaje, no depende solo de los aspectos cognitivos, debemos tener en cuenta la influencia de los factores afectivos, tal y como indica Hannula et al. (2016). Más concretamente, autores como Bakar et al. (2010) muestran la correlación positiva existente entre las actitudes hacia las matemáticas y el rendimiento en la asignatura, lo que hace necesario su estudio.

Es por ello que este estudio, como parte de una investigación más amplia, se centra en explorar las actitudes hacia las matemáticas de los estudiantes universitarios.

Aunque no existe una definición unánime de la actitud, la mayoría de los autores coinciden en describirla como una disposición o predisposición (Aiken, 1970; Allport, 1935; Gil, Blanco, & Guerrero, 2005; Hart, 1989; Pastor Ramos, 1983; Rokeach, 1968) que se adquiere a través de las experiencias y la dotación psíquica que se tiene (Aiken, 1970; Allport, 1935; Pastor Ramos, 1983), que influye en el comportamiento (Aiken, 1970; Allport, 1935; Gil et al., 2005; Hart, 1989; Pastor Ramos, 1983), que son evaluativas, es decir, que pueden ser negativas o positivas (Aiken, 1970; Gil et al., 2005; Hart, 1989), y que pueden darse hacia objetos, situaciones, personas, conceptos o asignaturas (Aiken, 1970; Hart, 1989; Rokeach, 1968).

En este caso, estudiamos las actitudes que se dan hacia una asignatura, las matemáticas. Gómez-Chacón (1997) define la actitud hacia las matemáticas como la valoración de la materia y de su aprendizaje, por lo que se relacionan con el componente afectivo; por otro lado, Petriz, Barona, López, & Quiroz (2010) describen las actitudes hacia las matemáticas como la disposición para aceptar o rechazar la asignatura. En la literatura, encontramos diversos trabajos que estudian las actitudes hacia las matemáticas en estudiantes universitarios, como León-Mantero, C., Pedrosa-Jesús, C., Maz-Machado, A., & Casas-Rosal, J. C. (2019) y Mato-Vazquez, Calvo, & Muñoz-Cantero (2018), o estudios sobre la actitud hacia la estadística en el ámbito universitario (Casas-Rosal, Villarraga, Maz-Machado, Castro & León-Mantero, 2019).

Finalmente, Auzmendi (1992), autora de la escala utilizada en este estudio, define las actitudes hacia las matemáticas como un fenómeno multidimensional que influye en el aprendizaje de la materia, tanto en el presente, como en el futuro del estudiante. Más concretamente, Auzmendi (1992) estudia las actitudes hacia las matemáticas a través de cinco factores: ansiedad, motivación, utilidad, confianza y agrado. En este estudio vamos a centrarnos en uno de ellos: la utilidad. Algunos trabajos sobre la utilidad de las matemáticas en el ámbito universitario son: Muñoz, & Meza (2020) o Nortes, & Nortes (2017).

La Real Academia Española (RAE, 2014) define utilidad como la cualidad de ser útil, es decir, algo de lo que se puede sacar provecho o interés. Por su parte, Auzmendi (1992) describe la utilidad como un factor para medir la actitud hacia las matemáticas, la cual se refiere al valor que el estudiante da a la materia para su presente académico y su futuro profesional.

METODOLOGÍA

El principal objetivo de este estudio es analizar las actitudes hacia las matemáticas que presentan los estudiantes universitarios, a través de su percepción sobre la utilidad que tienen las matemáticas, y realizando comparaciones por género y titulación.

Para ello, hemos realizado un estudio exploratorio de uno de los factores dimensionales de la actitud hacia las matemáticas: la utilidad. Se trata de una metodología cuantitativa, no experimental, transversal y descriptiva.

El instrumento elegido para recoger los datos ha sido la escala tipo Likert de actitudes hacia las matemáticas, diseñada y validada por Auzmendi (1992), ya que se trata del cuestionario más utilizado en el entorno español-hispano para estudiar las actitudes hacia las matemáticas. En los últimos años, encontramos numerosas investigaciones cuyo instrumento es dicha escala: León-Mantero, Maz-Machado, y Jiménez-Fanjul (2015); Madrid, León-Mantero, y Maz-Machado (2015); Maz-Machado, León-Mantero, Casas, and Renaudo (2015); Dörfer, Duque, y Soledad (2016); Bonilla y López (2017); Barros y Veintimilla (2018); Gómezescobar y Fernández (2018); y Chávez, García y Kramer (2019).

Esta escala tipo Likert está compuesta por 25 ítems, los cuales pueden ser respondidos con las siguientes opciones:

- 1 = Totalmente en desacuerdo
- 2 = En desacuerdo
- 3 = Neutral
- 4 = De acuerdo
- 5 = Totalmente de acuerdo

De estos 25 ítems, la autora Auzmendi (1992) selecciona los ítems 1, 6, 15, 16, 19 y 21 para componer el factor Utilidad. Sin embargo, en este estudio hemos utilizado una composición distinta, propuesta por León-Mantero, Pedrosa-Jesús, Maz-Machado, & Casas-Rosal (2018) y Pedrosa-Jesús (2020), y basada en el análisis de la información de cada ítem. Además, se modificó la forma de medir los componentes, realizando una media ponderada, en función de la importancia de cada ítem para su componente, en lugar de una media aritmética, como indicaba Auzmendi (1992). Esta nueva propuesta reagrupa los componentes de la escala utilizada, dejando el factor Utilidad formado por tres únicos ítems:

- 1. Considero las matemáticas como una materia muy necesaria en mis estudios.
- 6. Quiero llegar a tener un conocimiento más profundo de las matemáticas.
- 21. Para mi futuro profesional, las matemáticas es una de las asignaturas más importantes que tengo que estudiar.

Los datos fueron recogidos con este instrumento descrito anteriormente, mediante una técnica de muestreo aleatorio por cuotas de titulación. Los participantes de este estudio son estudiantes de la Universidad de Córdoba, de distintas titulaciones de grado. Esta muestra consta de un total de 878 estudiantes, de los cuales 562 son mujeres y 310, hombres (6 de los estudiantes no indicaron su género). En cuanto a los estudiantes por titulación, hallamos 99 estudiantes del Grado en Turismo, 398 del Grado en Educación Primaria, 51 del Grado de Informática, 191 del Grado de Educación Infantil, 35 del Grado de Ciencia y Tecnología de los alimentos, 80 del Grado en Biología y 24 del Grado en Ingeniería Agrónoma.

A estos datos recogidos, se les realizó un análisis estadístico descriptivo de frecuencias para el estudio independiente de cada ítem, y un análisis con pruebas paramétricas para estudiar las relaciones entre las distintas variables: género y titulación. Del mismo modo, se analizaron los valores obtenidos en el componente utilidad, formado por los ítems indicados, señalando, igual que en el análisis ítem por ítem, los datos recogidos por género y titulación.

RESULTADOS

A continuación, se muestran los resultados obtenidos en cada uno de los tres ítems. Dentro de cada ítem, se analizan, en primer lugar, las respuestas obtenidas (positivas, neutras o negativas) por todos los estudiantes encuestados; en segundo lugar, los estadísticos obtenidos en función del género; y, por último, los estadísticos según la titulación universitaria.

Ítem 1. Considero las matemáticas como una materia muy necesaria en mis estudios

Los resultados obtenidos en este ítem muestran que la gran mayoría de los encuestados (71%) consideran las matemáticas necesarias en sus estudios, frente a un 8% que ha proporcionado respuestas en desacuerdo con dicha afirmación. Encontramos un 21% de la muestra que proporciona respuestas neutras, indicando no estar de acuerdo ni en desacuerdo con el enunciado del ítem. (figura 1).

No se observan diferencias significativas en las respuestas obtenidas por género ($p < 0,05$), aunque los hombres (3,95) consideran más útiles las matemáticas, para sus estudios, que las mujeres (3,84) (tabla 1).

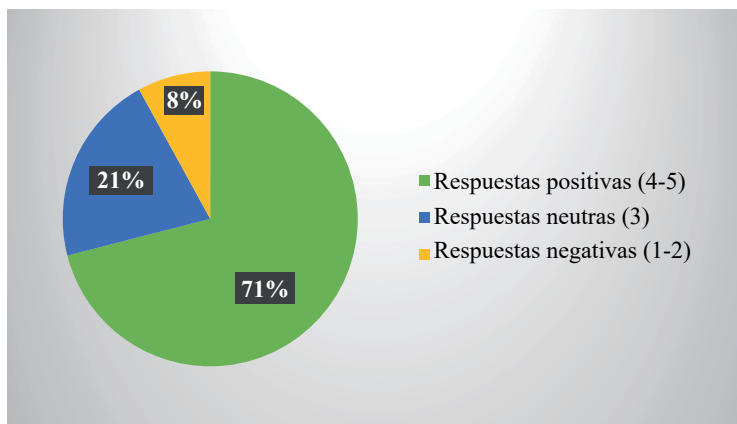


Figura 1. Respuestas obtenidas en el ítem 1

Tabla 1. Estadísticos del ítem 1 por género y titulación

		Media	Desv. Típica	Estadístico	p-valor
		3,87	0,973	—	—
Género	Hombre	3,95	0,055	-1,228	0,220
	Mujer	3,84	0,041		
Titulación	Agroalimentaria	4,67	0,098	153,436	< 0,001
	Biología	3,50	0,127		
	CTA	2,80	0,187		
	Infantil	3,83	0,058		
	Informática	4,18	0,111		
	Primaria	4,11	0,042		
	Turismo	3,30	0,110		

En cuanto a los datos obtenidos por titulación, sí se encuentran diferencias significativas. Destacan positivamente Ingeniería Agroalimentaria (4,67), Ingeniería Informática (4,18) y Educación Primaria (4,11), con valores medios por encima de 4. Por el contrario, los estudiantes de Ciencia y Tecnología de los Alimentos (2,80) presentan los valores más bajos, por debajo del valor neutro.

Ítem 6. Quiero llegar a tener un conocimiento más profundo de las matemáticas

Cerca de la mitad de los estudiantes (48%) indican que les gustaría tener más conocimientos matemáticos, mientras que solo un 19% se muestra en desacuerdo con dicha afirmación. Encontramos que un tercio de los encuestados (33%) proporcionan respuestas neutras.

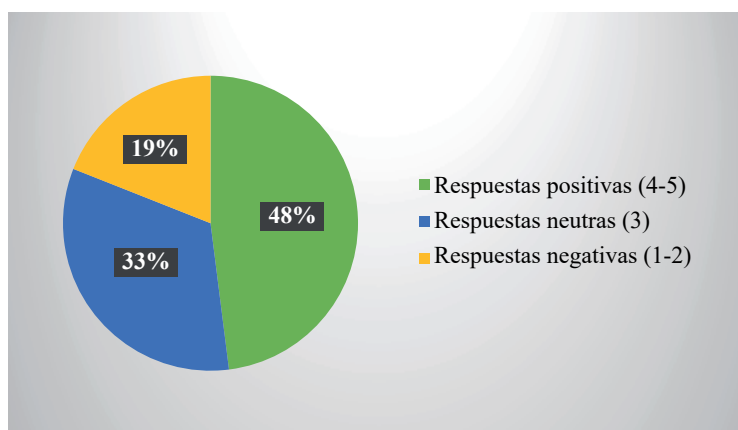


Figura 2. Respuestas obtenidas en el ítem 6

No se encuentran grandes diferencias entre las respuestas obtenidas por los hombres y por las mujeres, sin embargo, son los hombres (3,45) los que muestran un mayor deseo por mejorar sus conocimientos matemáticos, frente a las mujeres (3,29).

Tabla 2. Estadísticos del ítem 6 por género y titulación

		Media	Desv. Típica	Estadístico	p-valor
		3,35	1,056	—	—
Género	Hombre	3,45	0,057	-0,943	0,346
	Mujer	3,29	0,046		
Titulación	Agroalimentaria	3,92	0,158	82,323	<0,001
	Biología	2,94	0,140		
	CTA	2,49	0,190		
	Infantil	3,27	0,068		
	Informática	3,65	0,111		
	Primaria	3,56	0,051		
	Turismo	2,97	0,105		

Aparecen diferencias significativas en los datos recogidos por titulación. En este caso, hallamos tres grados con medias por debajo del valor neutro: Turismo (2,97), Biología (2,94) y Ciencia y Tecnología de los Alimentos (2,49). Por el contrario, el valor más alto lo encontramos en Ingeniería Agroalimentaria (3,92), aunque no es demasiado alto, sin alcanzar el valor 4.

Ítem 21. Para mi futuro profesional, la matemática es una de las asignaturas más importantes que tengo que estudiar

Las respuestas obtenidas en este ítem muestran que no existe gran diferencia entre la cantidad de estudiantes que consideran las matemáticas como una de las asignaturas más importantes para su futuro profesional (35%), la que se muestra en desacuerdo con esta idea (26%) y la que ofrece respuestas neutras (39%).

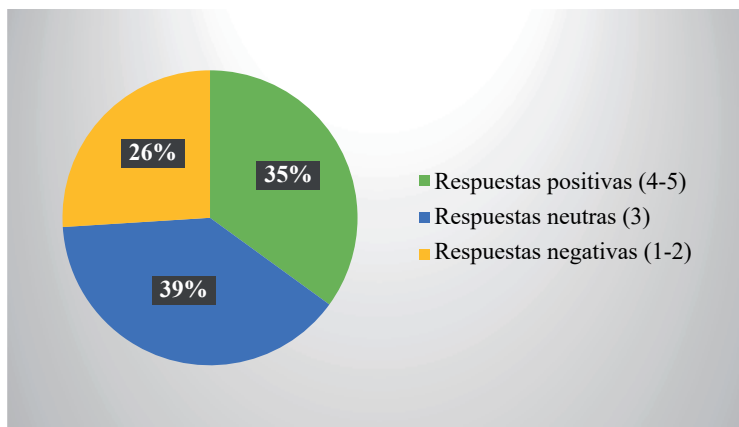


Figura 3. Respuestas obtenidas en el ítem 21

En cuanto a las respuestas obtenidas por género, no aparecen diferencias significativas entre hombres (3,12) y mujeres (3,07), aunque los hombres siguen mostrando una actitud mejor (tabla 3).

Al analizar este ítem en función de la titulación, encontramos diferencias significativas en sus respuestas. Destacan, de forma positiva, los datos obtenidos en Ingeniería Informática (3,67), seguido de los grados en Ingeniería Agroalimentaria (3,46), Educación Primaria (3,27) y Educación infantil (3,08), cuya respuesta media está muy próxima al valor neutro. Por el contrario, encontramos tres titulaciones con respuestas por debajo de dicho valor: Ciencia y Tecnología de los Alimentos (2,31) presenta el valor más negativo, seguido por Biología y Turismo que coinciden en el mismo valor medio (2,60).

Tabla 3. Estadísticos del ítem 21 por género y titulación

		Media	Desv. Típica	Estadístico	p-valor
		3,08	1,055	—	—
Género	Hombre	3,12	0,060	-0,571	0,568
	Mujer	3,07	0,044		
Titulación	Agroalimentaria	3,46	0,199	118,557	<0,001
	Biología	2,60	0,117		
	CTA	2,31	0,168		
	Infantil	3,08	0,068		
	Informática	3,67	0,136		
	Primaria	3,27	0,052		
	Turismo	2,60	0,095		

COMPONENTE UTILIDAD

Tras realizar el análisis de cada ítem de forma independiente, procedemos a estudiar el ítem de forma global. Para ello, vamos a indicar las medias sobre 100.

Así, encontramos que la utilidad presenta un valor de 63,69 (desv. típica 20,27), lo que indica una actitud media-alta. Por encima de este valor, encontramos la respuesta obtenida por los hombres (64,69), mientras que, las mujeres (63,24) presentan un valor por debajo del indicado. Aun así, no se encuentran diferencias significativas entre las respuestas obtenidas para los distintos géneros.

Tabla 4. Estadísticos del factor utilidad por género

		Media ponderada	Desv. Típica	Estadístico	p-valor
Utilidad	Hombre	64,690	0,930	-1,205	0,228
	Mujer	63,239	0,710	—	—

De nuevo, al estudiar las respuestas obtenidas por titulación, aparecen diferencias significativas entre los distintos estudios de Grado. Se descubre que los estudiantes que menos valoran la utilidad de las matemáticas son los del grado en Ciencia y Tecnología de los Alimentos (38,26). Siguiendo a estos, aparecen los estudiantes de Turismo (49,24) y Biología (50,85) con valores muy cercanos al neutro (50). En el otro extremo, los estudiantes de Ingeniería Agroalimentaria (75,92) son, con diferencia, quienes más valoran la utilidad de la materia. Tras esta titulación, encontramos las siguientes, por orden de

actitud más positiva a más negativa: Ingeniería Informática (70,99), Educación Primaria (67,78) y Educación Infantil (60,19).

Tabla 5. Estadísticos del factor utilidad por titulación

		Media ponderada	Desv. Típica	Estadístico	p-valor
Utilidad	Agroalimentaria	75,923	3,068	169,848	<0,001
	Biología	50,851	2,668		
	CTA	38,259	3,849		
	Infantil	60,190	1,254		
	Informática	70,998	2,418		
	Primaria	67,782	0,660		
	Turismo	49,241	2,120		

CONCLUSIONES

Al estudiar las respuestas proporcionadas por los estudiantes encuestados, descubrimos que, en general, consideran la asignatura de matemáticas importante en sus estudios y útil para su futuro profesional, por lo que desearía tener un conocimiento más profundo de la materia.

Los estudiantes consideran que las matemáticas son una materia fundamental en sus estudios, siendo este el ítem mejor valorado por los encuestados (3,87). Con respuestas por encima de la media, pero más negativas que la anterior, encontramos que los a los estudiantes les gustaría tener un conocimiento mayor de la materia (3,35), pero ofrecen respuestas neutras al hablar sobre las matemáticas como una de las asignaturas más importantes para sus futuros profesionales (3,08).

Las conclusiones referentes al género, tanto en los tres ítems como en el factor utilidad, nos muestran que en ningún caso se dan diferencias significativas entre las respuestas ofrecidas por los hombres y las respuestas ofrecidas por las mujeres, sin embargo, en todos los casos son los hombres los que dan respuestas más positivas, es decir, quienes consideran más útiles las matemáticas y tienen una mejor actitud hacia la materia, frente a las mujeres que presentan una actitud más negativa, otorgando menos valor a la utilidad de la asignatura.

En cuanto a la titulación, aparecen diferencias significativas, entre las respuestas de los estudiantes de distinto Grado, en el factor utilidad, así como en los tres ítems que lo componen. Los estudiantes de Ciencia y Tecnología de los alimentos son los únicos que no consideran importantes las matemáticas para en sus estudios ni para sus futuros profesionales, ni tampoco desean tener más conocimiento sobre las mismas. Por otro lado, los estudiantes de Biología y Turismo, aunque creen que las matemáticas son necesarias para sus estudios, no desean tener un conocimiento mayor de la materia y tampoco

consideran que sea una asignatura importante para sus futuros profesionales. El resto de los grados han mostrado respuestas de acuerdo con dichas afirmaciones: consideran las matemáticas necesarias para sus estudios, para sus futuros profesionales y querrían ampliar sus conocimientos sobre la misma. En este sentido, destacan, en todos los ítems y en el componente utilidad, los grados en Ingeniería Agroalimentaria e Ingeniería Informática son los que destacan con una actitud más positiva y otorgando un valor mayor a la utilidad de la materia.

Estas conclusiones fundamentales, nos lleva a plantearnos la siguiente cuestión: Si los estudiantes consideran las matemáticas útiles y necesarias en sus estudios y carreras, además de desear tener más conocimientos sobre las mismas, ¿por qué es una de las asignaturas más rechazadas (Osborne, Simon & Collins, 2003)? Como propuesta de línea futura de investigación, planteamos la necesidad de profundizar en este estudio, por ejemplo, mediante otros instrumentos, como una entrevista semiestructurada, con la que poder ahondar en las razones que provocan esta situación.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Aiken Jr, L. R. (1970). Attitudes toward mathematics. *Review of educational research*, 40(4), 551-596.
- Allport, G. W. (1935). Attitudes. In C. Murchison (Ed.), *A Handbook of Social Psychology* (pp. 798-844). Worcester: Clark University Press.
- Auzmendi, E. (1992). Las actitudes hacia la matemática-estadística en las enseñanzas medias y universitaria: características y medición. Bilbao: Mensajero.
- Bakar, K. A., Tarmizi, R. A., Mahyuddin, R., Elias, H., Luan, W. S., & Ayub, A. F. M. (2010). Relationships between university students' achievement motivation, attitude and academic performance in Malaysia. *Procedia-Social and Behavioral Sciences*, 2(2), 4906-4910.
- Barros, V. M., & Veintimilla, G. R. N. (2018). Actitud de los estudiantes de licenciatura en físico matemático hacia el aprendizaje de las matemáticas. *Revista Experiencias educativas y sociales*, 1(1).
- Bonilla, E. J., & López, W. O. F. (2017). Actitudes hacia las matemáticas: un estudio en una escuela rural de la Costa Caribe Sur de Nicaragua. *Revista Universitaria del Caribe*, 18(1), 7-16.
- Casas-Rosal, J. C., Villarraga, M. E., Maz-Machado, A., Castro, D., & León-Mantero, C. (2019). Profesores en formación de la universidad del Tolima: un análisis de sus actitudes hacia la estadística. *Matemáticas, Educación y Sociedad*, 2(3), 9-19
- Chávez, M. E. E., García, E. M., & Kramer, C. A. R. (2019). Confirmatory Model to Measure Attitude towards Mathematics in Higher Education Students: Study Case in SLP Mexico. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, 14(1), 163-168.
- Dörfer, C., Duque, U., & Soledad, G. (2016). Medición de la actitud hacia las matemáticas en estudiantes de licenciatura en administración: un estudio piloto. *VinculaTègica. EFA*, 2(1), 1329-1348.
- Gil, N., Blanco, L., & Guerrero, E. (2005). El dominio afectivo en el aprendizaje de las matemáticas. Una revisión de sus descriptores básicos. *Unión, Revista iberoamericana de educación matemática*, 2, 15-32.

- Gómez-Chacón, I. M. (1997). La alfabetización emocional en educación matemática: actitudes, emociones y creencias. *Uno: Revista de didáctica de las matemáticas* (13), 7-22.
- Gómezescobar, A., y Fernández, R. (2018). Los maestros y sus actitudes hacia las matemáticas: un estudio sobre Educación Infantil y Primaria en España. *Unión, Revista iberoamericana de educación matemática* (52), 186-200.
- Hannula, M. S., Di Martino, P., Pantziara, M., Zhang, Q., Morselli, F., Heyd-Metzuyaním, E., . . . Jansen, A. (2016). Attitudes, Beliefs, Motivation, and Identity in Mathematics Education. In M. S. Hannula, P. Di Martino, M. Pantziara, Q. Zhang, F. Morselli, E. Heyd-Metzuyaním, S. Lutovac, R. Kaasila, J. A. Middleton, & A. Jansen (Eds.), *Attitudes, Beliefs, Motivation and Identity in Mathematics Education* (pp. 1-35): Springer International Publishing.
- Hart, L. E. (1989). Describing the affective domain: Saying what we mean. In D. B. McLeod & V. M. Adams (Eds.), *Affect and mathematical problem solving* (pp. 37-45). New York: Springer-Verlag.
- León-Mantero, C., Maz-Machado, A. y Jiménez-Fanjul, N. (2015). Identificando las actitudes hacia las matemáticas en los estudiantes para maestro. Comunicación presentada en 17 JAEM, del 5 al 8 de julio en Cartagena, España.
- León-Mantero, C., Pedrosa-Jesús, C., Maz-Machado, A., & Casas-Rosal, J. C. (2018). Tratamiento matemático de mediciones de actitudes con escalas tipo Likert. XXII Simposio SEIEM. Universidad de Oviedo, Gijón.
- León-Mantero, C., Pedrosa-Jesús, C., Maz-Machado, A., & Casas-Rosal, J. C. (2019). Medición de las actitudes hacia las matemáticas en maestros de Educación infantil en formación. *Revista ESPACIOS*, 40(23).
- Madrid, M. J., León-Mantero, C., & Maz-Machado, A. (2015). Assessment of the Attitudes towards Mathematics of the Students for Teacher of Primary Education. *Open Access Library Journal*, 2(11), 1.
- Maz-Machado, A., León-Mantero, C. M., Casas, J. C. y Renaudo, J. (2015). Attitude towards mathematics of computer engineering students. *British Journal of Education, Society & Behavioural Science*, 8(2), 127-133 (ISSN:2278-0998).
- Muñoz, E. E., & Meza, L. G. (2020). Estudio de la actitud hacia la utilidad de la matemática en estudiantes de carreras de administración de una universidad privada costarricense: Attitude study towards the mathematics utility in business careers of a private Costa Rica university. *Revista Digital: Matemática, Educación e Internet*, 20(1).
- NCTM (2003). *Principios y Estándares para la Educación Matemática* (M. Fernández Reyes, Trad.). Granada: Servicio de Publicaciones de la SAEM Thales. (Traducido de Principles and Standards for School Mathematics, 2000, Reston, VA: NCTM).
- Nortes, R., & Nortes, A. (2017). Agrado y utilidad de las matemáticas en la formación inicial de maestros de educación primaria. *PNA*, 12(1), 27-42.
- Osborne, J. F., Simon, S., & Collins, S. (2003). Attitudes towards Science: A review of the literature and its implications. *International Journal of Science Education*, 25, 1049-1079.
- Pastor Ramos, G. (1983) Conducta interpersonal. Ensayo de Psicología social sistemática. Publicaciones Universidad Pontificia de Salamanca, Salamanca.
- Pedrosa-Jesús, C. (2020). Actitudes hacia las matemáticas en estudiantes universitarios (tesis doctoral). Universidad de Córdoba, Córdoba.

- Petriz, M. A., Barona, C., López, R. M., & Quiroz, J. (2010). Niveles de desempeño y actitudes hacia las matemáticas en estudiantes de la licenciatura en administración en una universidad estatal mexicana. *Revista mexicana de investigación educativa*, 15(47), 1223-1249.
- Real Academia Española. (2014). Diccionario de la lengua española (23.^a ed.). Consultado en <http://www.rae.es/rae.html>
- Rico, L. (2007). La competencia matemática en PISA. *PNA*, 1(2), 47-66.
- Rokeach, M. (1968). *Belief, Attitudes, and Values*. San Francisco: Jorsey-Bass.

Un modelo de la evolución en el tiempo de las proporciones del rostro humano

María Jiménez¹
Victor M. Jiménez
Diego Canales

Colegio Internacional de Sevilla San Francisco de Paula

Resumen: *Se ha estudiado la evolución con la edad de las proporciones del rostro humano, encontrándose una evolución lineal hasta los 18 años, momento en que se alcanza el valor de la proporción áurea, que luego se mantiene constante en el tiempo. El modelo propuesto es el de una función definida a trozos, con una primera parte lineal y una segunda constante. El modelo ha sido contrastado y verificado por hasta tres conjuntos de datos adicionales.*

Palabras clave: *proporción áurea, modelo, análisis de datos*

A model on the evolution with time of the proportions of the human face

Abstract: *The evolution with the age of the proportions of the human face has been studied, finding a linear evolution up to the age of 18, at which point the value of the golden ratio is reached, which then remains constant over time. The proposed model is a function defined in pieces, with a first linear part and a second one constant. The model has been verified using three additional data sets.*

Keywords: *golden ratio, model, data analysis.*

1. mariquillajp2001@gmail.com

INTRODUCCIÓN

La proporción áurea, el número de oro o divino, es un número irracional, que se conoce desde la antigüedad y se representa por la letra griega φ , en honor del escultor Fidias (500 a.C - 432 d.C), quien diseñó el Partenón, en el que existen abundantes ejemplos de dicha proporción (López, 2017). La proporción áurea se define como:

$$\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \approx 1,61803398874989\dots$$

Este número se puede obtener de múltiples formas, pero para el propósito de este trabajo, interesa conocer su definición geométrica: sea un segmento dividido en dos partes a y b , tal que a es el más largo, entonces si la ratio $a:b$ es igual a la ratio de la longitud total del segmento $a+b$ al a , dicha ratio es la proporción áurea φ .

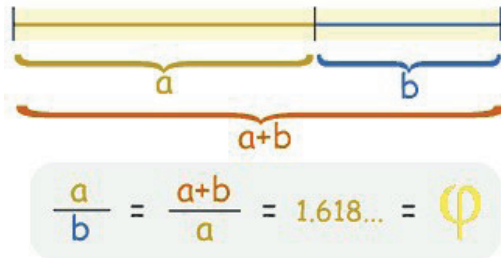


Figura 1. Segmento Áureo (López, 2017)

$$\varphi = a / b = (a + b) / a$$

Esta proporción se encuentra en la naturaleza, y en multitud de objetos hechos por el hombre y, desde la antigüedad, ha estado asociada a la belleza, pese a ser éste un concepto relativo. Ejemplos de la proporción áurea en la naturaleza son el patrón de los flósculos de los pétalos del girasol, el patrón de crecimiento de la concha de un caracol, la forma de algunas galaxias y muchas proporciones del cuerpo humano (Jaff Company, 2019). Y en el arte encontramos la proporción áurea en la Gioconda o el hombre de Vitruvio, de Leonardo da Vinci, la catedral de Notre Dame, Las Meninas de Velázquez, o el Partenón del mencionado Fidias, por ejemplo. Es digno de mención el caso de Dalí, quien en su etapa artística atómica, antes de abordar la obra definitiva, hace una serie de esbozos y de cálculos matemáticos donde aplica el número φ y la serie de Fibonacci para que su obra sea más simétrica y armoniosa a la vista del ser humano. La figura 2 es uno de estos mencionados esbozos.

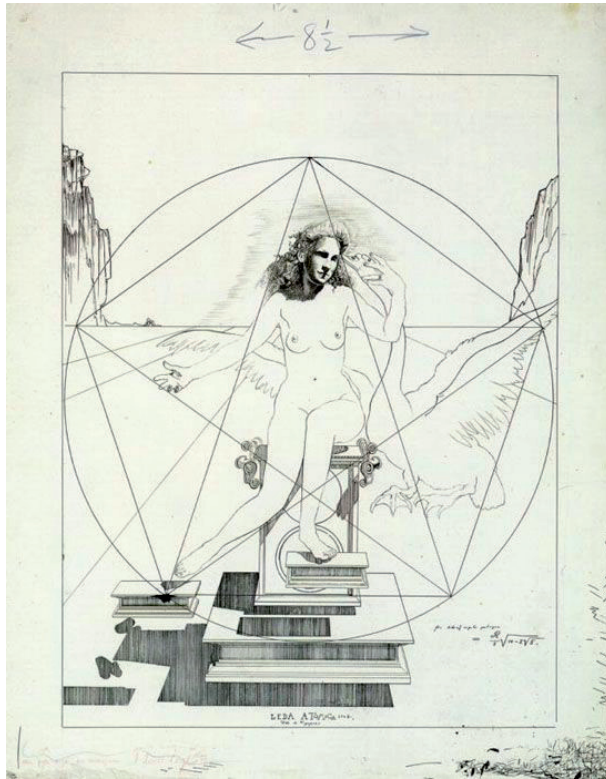


Figura 2. Esbozo Leda Atómica (Dalí, 1947)

Cómo se ha mencionado antes, el número áureo puede encontrarse en el cuerpo humano en multitud de proporciones. Un ejemplo poco conocido es el de la sonrisa, y es que, según estudios odontológicos, nos parecen más atractivas las sonrisas en las que los dientes presentan la proporción áurea (García y otros, 2007).

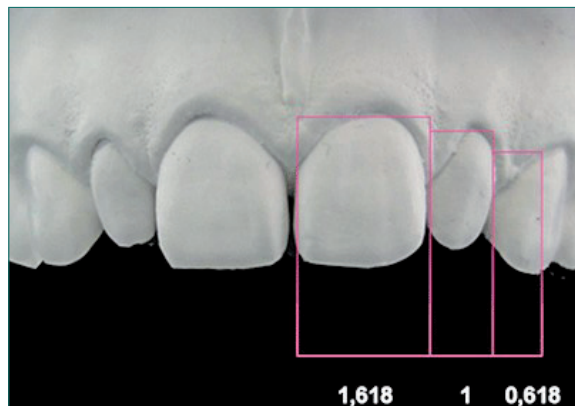


Figura 3. Proporción áurea en la dentadura (García y otros, 2007)

Por el contrario, uno de los más conocidos es la obra de Leonardo Da Vinci llamada El hombre de Vitruvio, en el que la búsqueda de las proporciones perfectas es evidente.

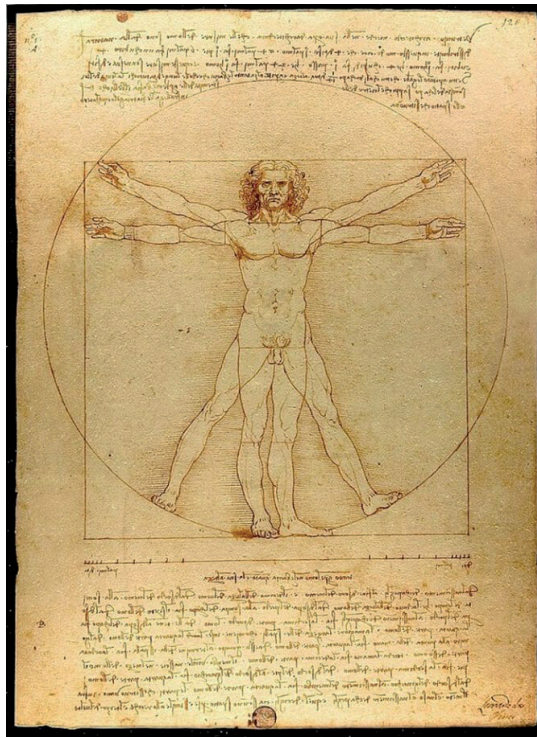


Figura 4. Hombre de Vitruvio (da Vinci, 1490)



Figura 5. Proporciones áureas en la cara (Rodríguez & Valle-Inclán, 2019)

Algunos otros ejemplos de proporciones áureas en el cuerpo humano son la razón de la altura de la persona y la distancia del ombligo a la punta del dedo corazón de la mano; o la razón entre la altura total de la persona y la distancia del ombligo a los pies (Meisner, 2019).

Si nos centramos en el rostro, que es el objeto de esta investigación, hay muchas posibles proporciones que se pueden considerar. La siguiente imagen muestra varias de las proporciones que se pueden medir en la cara y que dan como resultado la razón áurea. En este trabajo, se ha elegido la A, que estudia la relación entre el largo y el ancho de la cara, que es la más sencilla y reproducible, al implicar distancias más grandes, y por tanto menos sensibles al error (figura 5).

METODOLOGÍA

Para desarrollar esta investigación, se han elegido tres imágenes diferentes del autor desde los 10 meses a los 17 años, y se ha medido sobre ellas el ancho y el largo del rostro por medio del programa *Golden Ratio* (Welz, 2015), el cual proporciona de forma automática la proporción entre ambas medidas. A continuación, se calcula el promedio y se grafica frente a la edad para visualizar la evolución de la proporción del rostro con el tiempo.

RESULTADOS

Tabla 1. Ratios determinados por el programa Golden Ratio (Welz, 2015) en tres fotos diferentes de las edades indicadas y promedio calculado

Edad	Ratio Foto 1	Ratio Foto 2	Ratio Foto 3	Promedio
0	1,125	1,178	1,189	1,164
1	1,196	1,198	1,203	1,199
2	1,202	1,208	1,211	1,207
3	1,259	1,261	1,265	1,262
4	1,282	1,281	1,286	1,283
5	1,315	1,318	1,320	1,318
6	1,338	1,344	1,345	1,342
7	1,369	1,373	1,376	1,373
8	1,397	1,401	1,405	1,401
9	1,417	1,420	1,425	1,421
10	1,432	1,435	1,437	1,435
11	1,452	1,454	1,459	1,455
12	1,459	1,469	1,475	1,468
13	1,504	1,506	1,511	1,507
14	1,533	1,536	1,540	1,536
15	1,559	1,566	1,570	1,565
16	1,582	1,586	1,591	1,586
17	1,590	1,591	1,594	1,592

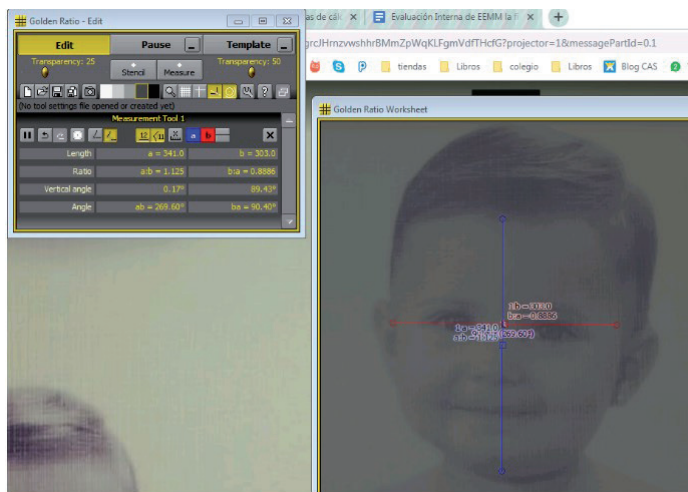


Figura 6. Midiendo la proporción áurea con Golden Ratio

Evolución de la proporción del rostro con la edad

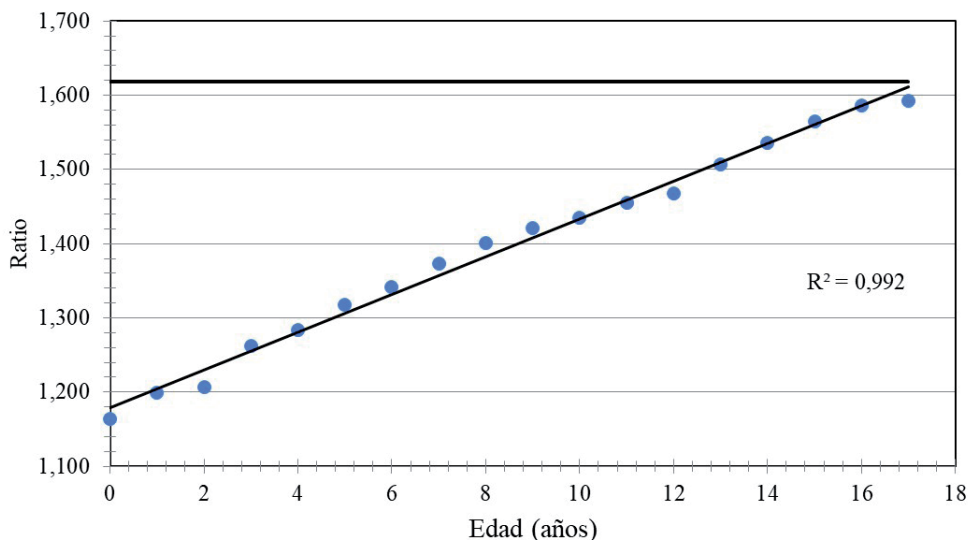


Gráfico 1. Evolución de la proporción del rostro con la edad

El gráfico 1 muestra la evolución con la edad de la proporción antes definida. Se ha incluido también el valor de la proporción áurea (línea negra). Los datos obtenidos se ajustan bien a un modelo lineal con los siguientes parámetros:

$$\text{proporción} = 0,025 \cdot \text{edad} + 1,183$$

El coeficiente de correlación de Pearson calculado para este ajuste lineal es de $r=0,996$

Para comprobar el modelo obtenido, se han tomado otras tres fotos diferentes, no incluidas en el conjunto analizado y se han analizado con la misma metodología para comparar el valor obtenido con la predicción del modelo:

Tabla 2. Comparación entre el ratio medido por el programa y el previsto por el modelo

Edad	Ratio medido por el programa	Ratio calculado por el modelo	Porcentaje de error
5	1,317	1,308	0,7%
10	1,422	1,433	0,8%
15	1,577	1,558	1,2%

Una segunda verificación a la que ha sido sometido el modelo es su aplicabilidad a otras personas. Para ello, se han tomado fotografías de una segunda persona y se han sometido al mismo proceso:

Tabla 3. Ratios medidos por el programa, calculados por el modelo y porcentaje de error en función de la edad para una segunda persona

Edad	Ratio medido por el programa	Ratio calculado por el modelo	Porcentaje de error
0	1,173	1,183	0,9%
2	1,203	1,233	2,5%
3	1,259	1,258	0,1%
4	1,294	1,283	0,9%
5	1,308	1,308	0%
6	1,354	1,333	1,6%
7	1,373	1,358	1,1%
8	1,413	1,383	2,2%
10	1,445	1,433	0,8%
12	1,460	1,483	1,6%
14	1,526	1,533	0,5%
16	1,591	1,583	0,5%
17	1,595	1,608	0,8%

Por último, se ha repetido el proceso, pero usando ahora imágenes de un personaje famoso, mundialmente conocido y tenido por hermoso. Para ello se ha elegido a Audrey Hepburn, ya que es posible encontrar imágenes suyas desde su infancia hasta su fallecimiento (“Audrey Hepburn - 1 to 63 Years Old - Through The Years!”, 2019). La siguiente tabla recoge las medidas realizadas, la predicción del modelo y el porcentaje de error:

Tabla 4. Ratios medidos por el programa, calculados por el modelo y porcentaje de error en función de la edad para el rostro de Audrey Hepburn

Edad	Ratio medido por el programa	Ratio calculado por el modelo	Porcentaje de error
1	1,220	1,208	1,00%
9	1,409	1,408	0,01%
12	1,461	1,483	1,50%
16	1,594	1,583	0,70%
19	1,610	1,658	3,00%
22	1,616	1,733	7,20%
24	1,615	1,783	10,40%
27	1,618	1,858	14,80%
30	1,619	1,933	19,40%
36	1,620	2,083	28,60%
39	1,624	2,158	32,90%
40	1,626	2,183	34,30%
49	1,624	2,408	48,30%
53	1,633	2,508	53,60%
57	1,630	2,608	60,00%
59	1,634	2,658	62,70%
63	1,629	2,758	69,30%

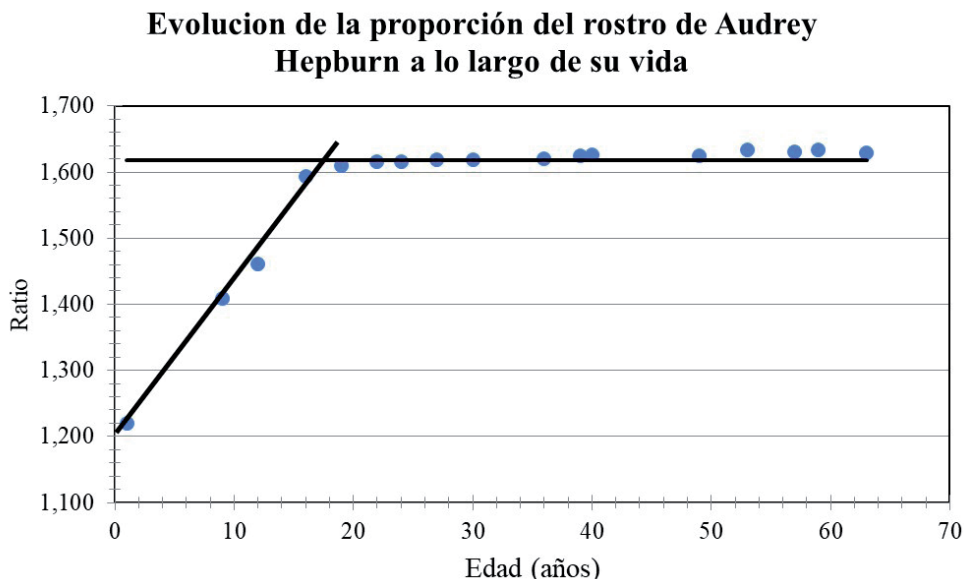


Gráfico 2. Evolución de la proporción del rostro de Audrey Hepburn con la edad

DISCUSIÓN

El coeficiente de correlación de Pearson arroja un valor de 0,996, lo que nos indica que hay una correlación muy fuerte entre la proporción elegida del rostro y la edad en el rango de edad considerado. Tanto en la tabla 1 como en la gráfica 1, vemos la evolución gradual de los datos y el acercamiento al final al número áureo.

La gráfica es lineal, hasta la edad que hemos podido analizar (17 años), momento en que el valor de ϕ casi se ha alcanzado. Probablemente en uno o dos años, observaríamos constancia en el valor, que se mantendría así hasta la vejez en que podría volver a desviarse aunque no sabemos en qué sentido.

Aprovechando los datos y la buena correlación lineal que estos presentan entre las edades estudiadas, se han calculado los parámetros de la recta de regresión de los datos, con lo que se ha creado un modelo de la variación de la proporción del rostro con la edad, cuya validez ha sido luego evaluada de tres formas distintas:

- En primer lugar, se ha usado para predecir la proporción en fotos no incluidas en el modelo inicial, obteniendo desviaciones bastante pequeñas, inferiores al 1,5%, lo que demuestra la validez para el primer sujeto.
- En segundo lugar, el modelo se ha aplicado al rostro de otra persona, además, de distinto sexo. De nuevo las desviaciones son pequeñas, inferiores al 1,5% salvo en un caso, por lo que el modelo es válido y generalizable a otras personas.
- Por último, se ha repetido este análisis con una colección de imágenes de Audrey Hepburn (“Audrey Hepburn - 1 to 63 Years Old - Through The Years!”, 2019), y

los resultados son muy interesantes. Las desviaciones son similares a las anteriores (1,5%) mientras la edad es inferior a 18 años, y a partir de ahí, las desviaciones crecen sin parar. Esto no es sorprendente pues se está extrapolando el modelo a un rango de edades que no se usó para definirlo. Por consiguiente, teniendo en cuenta la magnitud de las desviaciones y las observaciones realizadas se puede concluir que el modelo es válido hasta los 17-18 años, momento en que se alcanza el valor de la proporción áurea, pero no más allá, pues sigue prediciendo un comportamiento lineal, cuando lo que se observa es que la proporción se mantiene constante. En el caso de Audrey Hepburn, además, no cambia hasta el momento de su fallecimiento, lo que parece indicar que la vejez no afecta significativamente a esta proporción, aunque ello habría que confirmarlo ampliando el estudio a edades superiores y más personas, para mejorar el modelo e incorporar un rango más amplio de edades. De todas formas, para el caso de Audrey Hepburn, se puede modificar fácilmente el modelo, definiéndolo por trozos, con la función obtenida hasta los 18 años, y con el valor constante de ϕ a partir de ahí.

CONCLUSIONES

Se ha comprobado que la proporción del rostro cambia desde el nacimiento, tendiendo a alcanzar el valor de la proporción áurea a los 17-18 años, a partir de la cual, se mantendría constante. El análisis de los datos ha permitido establecer un modelo de crecimiento lineal que permite definir una función definida por partes que se expresaría del siguiente modo:

$$\begin{array}{ll} y = 1,183 + 0,025x & x < 18 \\ y = 1,618 & x \geq 18 \end{array}$$

donde x es la proporción e y la edad en años.

Dado que los datos empleados abarcan mediciones desde el nacimiento hasta los 63 años, sería deseable ampliar el conjunto con edades superiores, lo que permitiría comprobar si la evolución de la ratio se mantiene constante una vez alcanzado el valor de la proporción áurea o si al final de la vida, cambia y en ese caso en qué sentido.

REFERENCIAS

- Audrey Hepburn - 1 to 63 Years Old - Through The Years!. (2017). [Video]. Retrieved from <https://www.youtube.com/watch?v=PHPRmdt5ngo>
- García, E., Momose de Andrade, T., Mongruel Gomes, O., & Gomes, J. (2007). *Aplicación clínica de los parámetros estéticos en odontología restauradora*. Retrieved from <https://www.actaodontologica.com/ediciones/2009/1/art-4/>
- Jaff Company. (2019). *La sección áurea en la naturaleza*. Retrieved from <https://jaffcompany.wordpress.com/2017/04/24/la-seccion-aurea-en-la-naturaleza/>

- López, A. (2017). *El número de oro: qué es, dónde está, y para qué sirve*. Retrieved from <https://www.eldefinido.cl/actualidad/plazapublica/7723/El-numero-de-oro-Que-es-donde-esta-y-para-que-sirve/>
- Meisner, G. (2019). The Human Body and the Golden Ratio - The Golden Ratio: Phi, 1.618. Retrieved 16 December 2019, from <https://www.goldennumber.net/human-body/>
- Pérez Porto, J., & Gardey, A. (2013). Definición de proporción áurea — Definicion.de. Retrieved from <https://definicion.de/proporcion-aurea/>
- Rodríguez, M., & Valle-Inclán, L. (2019). Retrieved from https://sgapeio.es/descargas/trabajos/trabajosIV/3_4_ESO/codigo_30.pdf
- Vidal, C. (2019). *La sucesión de Fibonacci y el número áureo*. Retrieved from <https://www.hijos-del-atomo.com/miscelanea/la-sucesion-de-fibonacci-y-el-numero-aureo/>
- Welz, M. (2015). *Golden Ratio* [Windows 10]. Germany.

¿Por qué enseñar la noción de fractal en el último año de la escuela secundaria? Opiniones de especialistas en Geometría

Florencia Fusi

*EEM2, EES1, EES3, EES13, EET1 e
Instituto Santa María de San Pedro (Argentina)
florchiz13@hotmail.com*

Natalia Sgreccia

*Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura
de la Universidad Nacional de Rosario (Argentina)
nataliasgreccia@hotmail.com*

Resumen: *El concepto “Noción de fractal” fue incorporado en la última reforma educativa del Diseño Curricular de Matemática para sexto año de secundaria de la Provincia de Buenos Aires (Argentina). Su inclusión se justifica por el encanto estético que poseen los fractales y su potencial para integrar contenidos matemáticos. Pero, docentes sin formación específica y bibliotecas escolares desprovistas de bibliografía podrían opacar estas intenciones. Ante ello, en la presente investigación cualitativa de alcance exploratorio-descriptivo, se procedió a reconocer la voz de tres especialistas en Geometría acerca de la incorporación del tema en el último año de la escolaridad obligatoria.*

Palabras clave: *fractal, Geometría, secundaria, currículum.*

Why teach the notion of fractal in the last year of secondary school? Opinions of specialists in Geometry

Abstract: *The concept of “Fractal notion” was incorporated into the latest educational reform of the Mathematics Curriculum Design for the sixth year of secondary school in the Province of Buenos Aires (Argentina). Its inclusion is justified by the aesthetic charm*

that fractals possess and their potential to integrate mathematical contents. But, teachers without specific training and school libraries devoid of bibliography could obscure these intentions. Given this, in the present qualitative research of exploratory-descriptive scope, we proceeded to recognize the voice of three specialists in Geometry about the incorporation of the subject in the last year of compulsory schooling.

Keywords: *fractal, Geometry, secondary, curriculum.*

PRESENTACIÓN

En un comienzo los fractales eran considerados, simplemente, curiosidades matemáticas. Si bien su existencia se conoce desde fines del siglo XIX, su verdadera identidad no fue plenamente expresada hasta el período entre 1960 y 1970.

Los fractales fueron concebidos aproximadamente en 1890 por el francés Henri Poincaré, el primero en estudiar las ecuaciones de sistemas impredecibles, dándose cuenta que estaban fuertemente influenciadas por las condiciones iniciales, de forma que, aún cuando se cumplían las leyes deterministas newtonianas, era imposible calcular sus soluciones, ya que la información inicial se iba perdiendo y el sistema se iba volviendo impredecible. Sus ideas fueron extendidas más tarde por dos matemáticos también franceses, Gastón Julia y Pierre Fatou, hacia 1918. Ellos se plantearon el problema de determinar qué sucede con un punto z cuando se le aplica iteradamente una transformación, es decir, estudiaron la órbita de z en un sistema dinámico. Además, Julia fue quien explicó cómo se pueden generar los fractales a través de cualquier función compleja y señaló que se trata de un conjunto cuya frontera sería imposible dibujar a pulso por ser de longitud infinita.

Se trabajó mucho en este campo durante varios años, pero el estudio quedó congelado en 1920. Gracias a los importantes estudios en la Universidad de Yale en el año 1974 de Benoît Mandelbrot, un matemático francés de origen polaco (1924-2010) que trabajaba en la empresa multinacional estadounidense de tecnología IBM (*International Business Machines*), este estudio fue renovado. El desarrollo de la computadora digital provocó un fuerte impulso y le permitió a Mandelbrot dibujar las curvas fractales.

La parte más importante de su trabajo comenzó en 1960, cuando encontró la forma de analizar dos importantes fenómenos irregulares. En primer lugar, llegó a una representación matemática de la variación de las crisis en los mercados del algodón, del trigo e incluso en el bursátil. Este modelo matemático permitía demostrar cómo se comportaban los precios y cómo variaban de modo discontinuo, de un día para otro, ya que si los precios caían un día, al día siguiente tendían a recuperarse. Las consecuencias fueron muy interesantes e importantes. En segundo lugar, interesado en la turbulencia y en la variación de su intensidad, elaboró un modelo para describir cómo el clima puede estar bien en determinado momento y cada tanto registrar un fenómeno de vientos y ocasionalmente tornados extremadamente fuertes, algunas veces destructivos (Bransley, 1993).

A Mandelbrot le fascinaba la idea de buscar la simplicidad en el desorden. Halló la naturaleza más ordenada, organizada y atractiva a través de la Geometría Fractal. Le llamó considerablemente la atención el título de un trabajo del año 1967 de Lewis Richardson: *¿Cuánto mide la costa de Gran Bretaña?*, considerada hoy como la pregunta

precursora del origen del concepto “fractal”. Mandelbrot llegó a la conclusión de que no se puede determinar esta longitud puesto que la costa británica es un patrón complejo y no hay manera de medir las hondonadas y penínsulas pequeñas de la costa, simplemente porque una figura con bordes rectos o redondeados tiene una longitud menor que otra equivalente pero llena de rugosidades, independientemente del instrumento de medición que usemos.

Mandelbrot es considerado el padre de este campo de investigación relativamente reciente llamado “Geometría Fractal” y, además, fue él quien acuñó en 1975 -cuando aún no existía un nombre para estas formas conocidas como “monstruos geométricos” que amenazaban con hacer tambalear los pilares- el término “fractal”, proveniente del vocablo latino “fractus” y que significa “fracturado” o “quebrado”.

En su libro *The fractal Geometry of Nature* (Mandelbrot, 1997), objeta el hecho de que la Geometría Euclídea estudia formas ideales, suaves, lejanas a las que realmente se encuentran en la naturaleza. “Las nubes no son esferas, las montañas no son conos, las costas no son círculos, y la corteza de los árboles no es lisa y tampoco los relámpagos viajan en línea recta... La naturaleza no solamente exhibe un grado mayor sino también un nivel diferente de complejidad” (p.15).

Muchas aplicaciones demuestran que la Geometría Fractal forma parte de la Matemática, de las ciencias y de las artes; tal es así que el matemático Michael Barnsley (1988) asegura que la Geometría Fractal cambiará a fondo la visión de las cosas. Sostiene que jamás se volverá a pensar lo mismo de los objetos, arriesgándose a perder definitivamente la imagen inofensiva que se tiene de nubes, bosques, galaxias y de muchas otras cosas. Los fractales revelan más acerca del caos oculto dentro de la regularidad, pues no solo se refieren a aspectos específicos de la naturaleza sino a una irregularidad organizada.

Por otro lado, el Ciclo Superior de la escuela secundaria representa para los jóvenes la oportunidad de profundizar contenidos matemáticos anteriores, evitando las definiciones abstractas, los procedimientos mecánicos, desarrollos unívocos y acabados que contribuyen a colocar la materia en un lugar casi inalcanzable para las personas. Esto se ve reflejado en la propuesta del Diseño Curricular de la Provincia de Buenos Aires (Dirección General de Cultura y Educación, 2011), Argentina, que considera a la disciplina como parte de la cultura, y valora a los alumnos como hacedores de la misma.

El Diseño Curricular de sexto año de secundaria organiza los contenidos de la materia Matemática del Ciclo Superior en cuatro ejes. Uno de ellos es Geometría y Álgebra y uno de los contenidos mínimos a abordar es “Noción de fractal”¹:

La Noción de fractal posee modelos matemáticos donde los alumnos verán contenidos trabajados a lo largo de su escolaridad, pero aplicados con ciertas particularidades -como Geometría, sucesiones, transformaciones, matrices, ecuaciones exponenciales y Noción de límite de sucesiones-. Los fractales también modelizan objetos que exhiben una estructura a varios niveles de escala y se utilizan en la gráfica computarizada, que en ciertos casos describen formas de la naturaleza: Helge Koch mostró una curva con perímetro infinito, que encierra una

1. Esta incorporación es acorde a lo sucedido en el currículum oficial de otros países alrededor del mundo (Karakus, 2013).

región del plano de área finita, representada por una figura con forma de copo de nieve (Dirección General de Cultura y Educación, 2011, p.13).

Entre opiniones de docentes de sexto año en ejercicio encontramos:

Lo que pasa es que lo complicado es el tiempo que te puede llevar esto, si lo querés hacer transversal encontrar coordinación en tiempo y en onda, que te den bolilla.

Hay veces que los chicos te dicen “¿esto para qué me va a servir?”, yo siempre tengo una respuesta. El tema va a ser cuando te digan “¿para qué vamos a utilizar los Fractales?”.

Sería un desafío si debiera enseñarlo. Primero tendría que estudiarlo yo.

El concepto de Geometría Fractal no es algo para lo que estén preparados los alumnos para afrontar en la actualidad.

Los docentes me parece no fuimos capacitados para hacerlo y por eso evitamos darlo.

Frente a este panorama surgió la necesidad de realizar investigación educativa al respecto (Fusi, 2015). El Diseño Curricular anticipa que los alumnos del último año de la escuela secundaria verán allí reflejados los contenidos trabajados a lo largo de su escolaridad, pero también aclara que para ello deberán aplicar ciertas propiedades que hagan del tema algo asequible. La “Noción” aludida procura englobar la Geometría (Euclídea) previamente tratada en la escolaridad. Así como mediante los números complejos se trata de dar un cierre a los conjuntos numéricos, con la Geometría Fractal se estaría dando un marco más amplio de lo conocido hasta el momento.

Desde las disposiciones curriculares se fomenta dejar al alcance del alumno las herramientas de la Geometría Fractal. Esto podría revolucionar la enseñanza de la Geometría en las escuelas. Asimismo la complejidad de tal pretensión podría devenir en una dificultad para los docentes, quienes en muchos casos no han estudiado el tema en su carrera de grado.

Por ello interesa dilucidar los posibles aportes en la formación matemática del estudiante al incorporar el tema en el último año de la escuela secundaria. Y, esto, desde la perspectiva² de especialistas matemáticos dedicados a la Geometría y su enseñanza en nivel superior. En efecto, se irán recorriendo sus pareceres en torno a asuntos de interés para los que fueron especialmente convocados.

Se espera que este material aporte a los profesores en ejercicio en la escuela secundaria así como en la etapa de formación docente, en tanto horizonte en el conocimiento matemático en cuestión (Ball y Bass, 2009) que comprende una conciencia del profesor acerca del contenido fractal a través del curriculum, más allá de cierta clase o contenido en particular. De este modo se presentan de manera sucinta algunos trabajos que dan cuenta de un estado de avance sobre el tema, posteriormente se delimita el concepto de fractal presentándose las principales características y algunos ejemplos. Se recorren las categorías de análisis (asuntos de interés), para cerrar el artículo con las principales conclusiones y propuestas posibles para continuar el trabajo.

2. El trabajo completo (Fusi, 2015) comprende otras dos perspectivas: de las autoras del Diseño Curricular y de los docentes de sexto año en ejercicio de una localidad bonaerense. En esta ocasión se efectuó un recorte.

Algunos trabajos de interés

Fue posible identificar dos tipos de trabajos relativos al tema: aquellos que estudian la teoría fractal y aquellos que presentan propuestas de enseñanza para la escuela secundaria.

Entre los primeros encontramos el aporte de Nápoles y Palomá (2012) quienes clasifican los fractales según su origen en tres categorías: matemáticos, naturales y humanos. Por su parte, Garbin y Mireles (2009) presentan un estudio sobre la noción de dimensión, realizado a partir de tres acercamientos: histórico-epistemológico, del discurso escolar y cognitivo. Así también Spinadel (2003) explica que la dimensión fractal indica el grado según el cual el objeto fractal llena la dimensión euclídea en la que está inmerso, marcando de alguna manera la medida de la irregularidad. Por su parte, Thompson (2000) sugiere estudiar la dimensión fractal como una generalización de la dimensión euclídea, lo que requiere interiorizarse acerca de la relación entre escala y replicación. En términos más generales, Quezada (2005) se refiere a la Geometría Fractal como novedosa por su utilidad en la descripción de diversos objetos y sistemas como también por la estética de sus formas infinitas, y Martín (2003) sugiere pensar que hasta las situaciones más confusas se pueden llegar a entender, teniendo en cuenta que la mayoría de las leyes de la naturaleza son no lineales y potencialmente caóticas.

Entre las propuestas de enseñanza de fractales en el nivel medio se destacan los aportes de Castro, Díaz y Palacios (2011) quienes presentan una secuencia didáctica para la enseñanza de semejanza utilizando fractales. Puntualizando en dimensión fractal, Reyes (2009) la trabaja empleando software matemático del tipo GeoGebra, y Comas y Herrera (2010) comparten una experiencia en la que estimaron la dimensión fractal de los contornos de las localidades a las que pertenecen sus estudiantes y compararon sus rugosidades. De manera más amplia, Sardella, Zapico y Berio (2006) relacionan variados contenidos en su propuesta, tales como funciones, transformaciones geométricas y operatoria con números racionales. También, Oviedo, Kanashiro y Benzaquen (2006) sugieren acercarse a la noción de infinito a partir de la visualización de ciertos fractales, como el copo de nieve (o curva de Koch, Fig. 4). Redondo y Haro (2004) presentan conceptos de Geometría Fractal y de la teoría del caos de manera breve y sencilla, fomentando el aprendizaje por descubrimiento. Por su parte, Moreno (2002) apuesta al carácter manual de las construcciones fractales para despertar el interés de los estudiantes y favorecer su capacidad de formalización y abstracción.

Figueiras, Molero, Salvador y Zuasti (2000) muestran actividades donde se trabaja con fractales y varios conceptos, subrayando que el estudio de fractales resulta motivador en el alumnado debido a la estética de sus diseños. Particularmente Moreno (2017) comparte una experiencia en que los estudiantes construyen colaborativamente una escultura del triángulo de Sierpinski (Fig. 2) con latas pintadas y encastradas para adornar el frente de la escuela. Asimismo Martín, Parra y Fanaro (2019) relevan que habitualmente se sigue un enfoque tradicional en la enseñanza de los fractales, por lo que deciden implementar en el último año de una escuela secundaria rural actividades de estudio e investigación, a partir de la generación de preguntas, subpreguntas y respuestas, con el fin de generar un fractal teórico. También Karakus (2013) examina cómo los estudiantes entienden los fractales dependiendo de su edad. Puntualmente realiza un estudio en tres

cursos consecutivos de secundaria con pruebas de distintos niveles. Las mayores complejidades aparecieron al tener que encontrar reglas de patrones y formularlas.

Concepto de fractal

Cuando hablamos de fractal nos encontramos ante un concepto geométrico para el cual no existe una definición precisa, ni una teoría única ni comúnmente aceptada. Mandelbrot (1997) asegura que los fractales son figuras geométricas irregulares que no pueden ser descritas en términos geométricos tradicionales. Al respecto ha indicado: “Algunos conjuntos fractales son curvas, otros son superficies, todavía otros son nubes de puntos deshilvanados y aún otros son formados de una manera tan rara que para ellos no hay buenos términos en las ciencias o en las artes” (p.15).

Asimismo es caracterizar a los fractales a través de propiedades fundamentales que los identifican (Fig. 1).

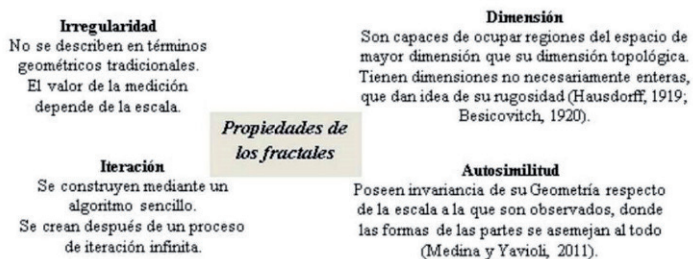


Figura 1. Propiedades de los fractales

La definición de autosimilitud trae aparejadas otras propiedades, tales como la linealidad o no. En particular, los fractales lineales se construyen con un simple cambio en la variación de sus escalas, lo que implica que son exactamente idénticos en todas sus escalas hasta el infinito. El triángulo de Sierpinski (Fig. 2) y la curva de Koch (Fig. 4) son ejemplos de fractales lineales.



Figura 2. Proceso de construcción del triángulo de Sierpinski

El *triángulo de Sierpinski* fue ideado por Waclaw Sierpinski en 1915, partiendo de un triángulo equilátero de lado 1 (figura inicial, semilla) al que se le aplican construcciones

geométricas sencillas. Análogamente, pero partiendo de un cuadrado, se conoce a la *alfombra de Sierpinski* (Fig. 3).

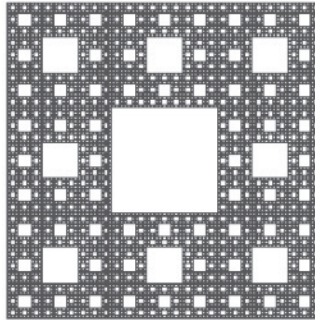


Figura 3. Alfombra de Sierpinski

Resulta interesante comentar también que en el trabajo de Darías y Batista (2015), estudiantes de secundaria realizan video creaciones explicando los conceptos involucrados. En una de ellas surge un nuevo fractal que consiste en una construcción con circunferencias (tres inscriptas en otra recursivamente) que, al aumentar las iteraciones, se asemeja a un triángulo de Sierpinski pero no tiene ni un tramo rectilíneo.

La *curva de Koch* fue ideada por Helge Von Koch en 1904 como ejemplo de curva de longitud infinita contenida en un recinto acotado y sin tangente en cualquier punto. La curva de Koch es la curva a la que se van aproximando las sucesivas poligonales que resultan en cada paso.

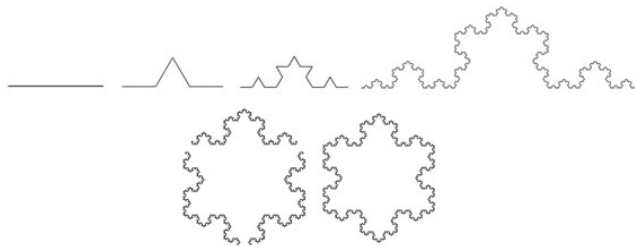


Figura 4. Proceso de construcción de la curva de Koch

Los fractales no lineales, en cambio, son aquellos que se generan a partir de distorsiones complejas, no lineales, como su nombre lo indica. Tienen su origen en los números complejos y en su mayoría son fractales puramente matemáticos o naturales. Ejemplos de ellos son el conjunto de Julia (autosimilar) y el de Mandelbrot (cuasi-autosimilar).

Los *conjuntos de Julia* (Fig. 5) son fruto de los trabajos de Pierre Fatou y Gastón Julia en los años 1920. Julia estudió el método iterativo $z_{n+1}=z_n^2+c$, siendo z_k números complejos y c una cierta constante también compleja. Algunos de estos conjuntos son de una

única pieza (conexos), mientras que otros están separados en varios trozos (disconexos), que podrían ser hasta infinitos.

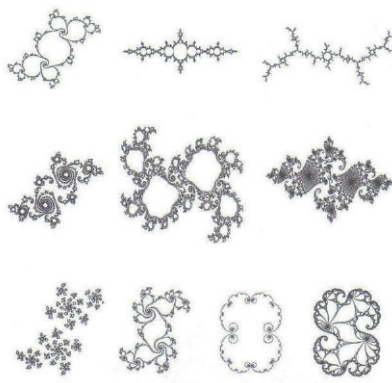


Figura 5. Conjuntos de Fatou y de Julia

Mandelbrot estudió los valores de c para los que el conjunto de Julia era conexo y encontró que la disposición de estos números complejos en el plano tenía una estructura realmente interesante: el conjunto de Mandelbrot (Fig. 6), presentado en la década de 1970 pero visualizado una década más tarde, cuando pudo representarse gráficamente con una computadora.

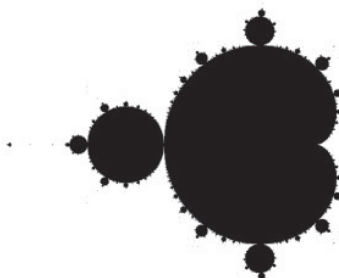


Figura 6. Conjunto de Mandelbrot

Tiene dos propiedades que han despertado gran curiosidad: el conjunto es conexo (demostrado por A.Douady y J.H.Hubbard entre 1984 y 1985); en cada ampliación las estructuras que se repiten son cada vez más filamentosas, lo que permite saber en qué escala se está.

El fractal considerado más simple, y también el primero en ser conocido, es el *conjunto de Cantor* (Fig. 7), introducido en el año 1883 por Georg Cantor cuando intentaba caracterizar lo que es un conjunto continuo, es decir, denso en todas partes. Pensaba que todo conjunto perfecto (conjunto cerrado tal que todos sus puntos son puntos de acumulación, o sea, no tiene puntos aislados) debía ser continuo. Pero encontró el conjunto en

cuestión, que es perfecto pero no denso en ninguna parte. Es considerado por los matemáticos como un conjunto de propiedades paradójicas: tiene infinitos puntos pero longitud nula; es totalmente disconexo, es decir, entre dos puntos siempre hay infinitos puntos que no pertenecen al conjunto (Reyes, 2006).

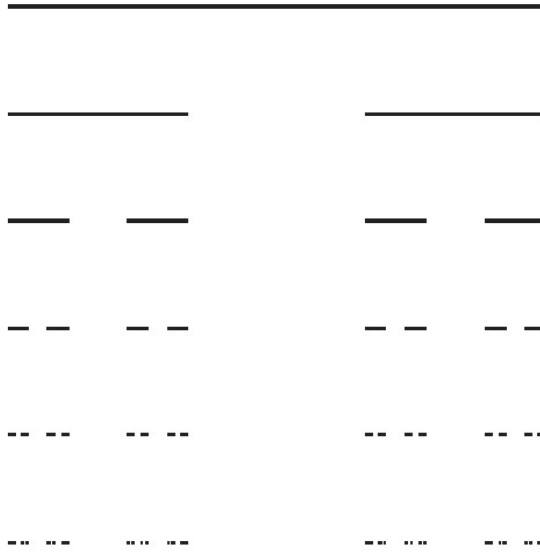


Figura 7. Proceso de construcción del conjunto de Cantor

Aunque las simulaciones matemáticas pueden repetir fragmentos y dimensiones de manera infinita, los fractales pueden ser identificados en cualquier parte del mundo natural (la naturaleza repite fragmentos de forma limitada y con pequeñas deformaciones). No son exactamente autosemejantes, sino tan solo al azar, en forma estadística o estocástica (Spinadel, 2003). Asimismo, sean naturales o geométricos, todos los fractales poseen dimensión no entera. De esta manera los fractales, según su origen, se clasifican como (Nápoles y Palomá, 2012):

- **Matemáticos:** definidos por fórmulas o expresiones matemáticas, que permiten generar su imagen por computadoras.
- **Naturales:** objetos reales que pueden definirse por un modelo matemático fractal (nube, costa, sistema circulatorio).
- **Humanos:** creaciones humanas que no pueden ser estudiadas mediante herramientas “clásicas”. Por ejemplo, secciones de las pinturas del norteamericano Jackson Pollock (Fig. 8).

Científicos australianos (R.P.Taylor, A.P.Micolich y D.Jones) anunciaron en 1999 que los cuadros de Pollock tenían estructuras fractales, generadas tanto por la manera de escurrir la pintura (*dripping*) como por la configuración geométrica que seguían los regueros que derramaba el pintor en sus vuelos alrededor del cuadro. Cabe reportar la



Figura 8. Jackson Pollock, Nº 5, 1948

experiencia compartida por Comas y Pérez-Nieto (2017), denominada “Reinterpretando a Pollock”. Junto a estudiantes de secundaria estiman la dimensión fractal en obras artísticas a partir de las líneas presentes en cuadros contemporáneos seleccionados del Museo Thyssen-Bornemisza (Madrid). Ponderan que este tipo de actividades contribuye a entender y valorar tanto al Arte como a la Matemática.

Finalmente se destaca que formalmente no existen fractales en la naturaleza ni producidos por el hombre, ya que al ser los procesos finitos no se cumple la autosemejanza. Por otro lado, la Geometría Fractal permite abrir la puerta, dando respuesta a numerosas conjeturas sobre la complejidad del mundo, a la teoría del caos. Suele considerarse como la Geometría que describe los sistemas caóticos que se encuentran en la naturaleza. Gracias a la belleza de los fractales que podemos observar la “realidad verdadera de las cosas”, una realidad en la que todo cambia de manera irregular pero que, a pesar de esos cambios, se mantiene la esencia (Díaz, 2009).

Categorías del estudio

Se procuró interpretar la factibilidad de la enseñanza de Geometría Fractal en la escuela secundaria de acuerdo con los significados que tiene para especialistas matemáticos dedicados a la Geometría y su enseñanza en el nivel superior de formación docente. Se entrevistó individualmente vía Skype a tres especialistas en el área de Geometría de Universidades de la región centro de Argentina: Nacional de Rosario (E1), Nacional del Litoral (E2) y Tecnológica Nacional (E3). Se recorrieron 10 asuntos de interés, de los cuales aquí se comparten los siguientes cinco:

- Investigación matemática actual sobre el tema
- Aportes de la Geometría Fractal a la formación de los ciudadanos
- “Noción de fractal” como contenido escolar
- Contenidos matemáticos que sostienen la Noción de fractal
- Recomendaciones para los profesores

En lo que sigue se sintetizan los principales hallazgos, ilustrando con algunos extractos de los testimonios de los especialistas.

Investigación matemática actual sobre el tema (Tabla 1)

Afirman que es un tema actual, novedoso, híper-moderno, desconocido en cierto punto. Plantean que la Geometría Fractal se trabaja en la actualidad, en numerosas ramas de la ciencia, como la Botánica, la Medicina, la Física, la Computación y el Arte. Subrayan la revolución que la Geometría Fractal ha desatado en muchas áreas a partir de la aplicación de la propiedad de auto-semejanza que poseen algunos fractales.

Tabla 1. Investigación matemática actual sobre el tema

E1	E2	E3
Es muy reciente. Me parece que lo estudia la gente que trabaja la Teoría del caos.	Yo trabajo con temas bastante abstractos que involucran fractales. Se trabaja continuamente con fractales, hay mucho por hacer todavía así que es bueno para investigar.	Un fractal es la fórmula matemática de un patrón, que se repite en diferentes escalas de tamaños y tiempos. No podemos encuadrarlo en una sola ciencia. Revolucionó la ciencia actual, ya que, por ejemplo, junto a la estadística ayudan a pronosticar fenómenos.

Aportes de la Geometría Fractal a la formación de los ciudadanos (Tabla 2)

Los fractales realizan un gran aporte al mundo de la ciencia, porque otorgan una nueva forma de concebir y resolver los problemas que se nos plantean al estudiar los aspectos geométricos de las cosas. La Geometría Fractal sirve de complemento, porque permite describir muchas de las complicadas formas de la naturaleza, irregulares y fragmentadas, a través de modelos matemáticos alternativos. Los fractales resultan ser el camino más idóneo para analizar, a través de un modelo, estructuras complejas a partir de la repetición de estructuras más simples.

Se mencionan variadas aplicaciones de los fractales en diversas ciencias; es por eso que se considera oportuno destacar y agregar más aplicaciones de esta Geometría en otros ámbitos, tales como:

- *Cardiología*: variabilidad de la dimensión fractal del árbol coronario izquierdo en pacientes con enfermedad arterial oclusiva severa.
- *Geología*: redes de fracturas de los macizos rocosos y las microestructuras de los minerales.
- *Física*: análisis de resistencias en estructuras complejas, o de propagación de la corrosión, así como del comportamiento de aeronaves frente a turbulencias formadas por fuertes ráfagas variables de viento.

- *Naturaleza*: los perfiles y grietas de un macizo montañoso, un bosque de helechos o el delta de un gran río; también la propagación de un incendio forestal en una plantación ordenada de árboles.
- *Militar*: detección de almacenamientos bajo el agua y trazabilidad del movimiento de submarinos, como en análisis medioambiental para la determinación del origen y ruta seguida por nubes de lluvia ácida.
- *Arte*: figuras tales como mandalas o dibujos budistas introductorios a la meditación. En la pintura abstracta, obras de Dalí, Escher o Pollock. En los sonidos y en la música, desde el ruido de una catarata o el golpeteo de las olas del mar al canto de un pájaro o a una obra de Bach o de los Beatles. En Arquitectura, la Sagrada Familia de Gaudí, los detalles filigranísticos del barroco, las catedrales góticas.
- *Cuerpo humano*: los pulmones, el sistema sanguíneo y el cerebro tienen estructuras fractales (finitas).

Tabla 2. Aportes de la Geometría Fractal a la formación de los ciudadanos

E1	E2	E3
La posibilidad de modelizar de otra manera.	Complementar, saber que las cosas que quedaron fuera de la Geometría Euclídea tienen también una Geometría que las describe. Todas las cosas que uno ve en la naturaleza, que ve que una montaña no es un cono, que tiene un montón de irregularidades, básicamente viene a decir que dentro de esa irregularidad la naturaleza tiene una organización, digamos, que se describe mediante la Geometría Fractal.	Junto con las Estadísticas ayudan a pronosticar fenómenos. En Geografía Mandelbrot comenzó sus estudios queriendo calcular la longitud de la costa de Gran Bretaña, pues con los fractales se puede representar las líneas costeras y determinar su longitud. En Sociología las ecuaciones que representan el comportamiento de las poblaciones pueden tener estructura fractal. En Biología las plantas, como los helechos, las coliflores son ejemplos de estructuras fractales y por supuesto la Matemática les brinda el modelo para estudiarlos, es así que se puede calcular la edad de los pinos justamente por este hecho.

“Noción de fractal” como contenido escolar (Tabla 3)

En el caso de la Geometría Fractal, que presenta una gran complejidad para comprenderla, una “Noción de fractal” puede resultar lo más pertinente para enseñar en la escuela secundaria, evitando de esta manera toda posible sensación negativa que pueda despertarse en el alumno al ver el concepto tan inalcanzable. Puede considerarse como un punto de partida y no como una meta final, en el sentido de que el docente puede pretender más si el grupo de alumnos así lo permite.

Destacan la importancia de trabajar solo con un tipo de fractales, los autosemejantes, ya que los alumnos pueden acercarse a esta Geometría sin introducirse necesariamente

en conceptos intrincados. Aparte, cabe destacar que este tipo de fractales permite trabajar con manipulativos, tanto concretos (por ejemplo regla, tijera, compás para el trabajo con papel en actividades de plegado) como digitales (por ejemplo calculadora, computadora; existen programas específicos para crear arte y animaciones fractales -como “Ultra fractal” y “Fractint”-).

Tabla 3. “Noción de fractal” como contenido escolar

E1	E2	E3
<p>La idea es una introducción muy <i>naïf</i> a los fractales. Uno le muestra al alumno que la ciencia ha avanzado tanto que existe una rama específica que modeliza hasta el más mínimo detalle de la naturaleza. Eso no es poco interesante, pero es algo que puede llevar una o dos clases.</p> <p>¿Qué actividades le hacés hacer a un alumno sobre fractales?</p> <p>¿Cuál es tu objetivo?</p> <p>¿Cómo evaluás cuánto sabe de fractales?</p> <p>Es captar la atención de un alumno para después no poder darle respuesta de lo que te pregunte, porque la Noción de fractal toca un montón de ramas de la Matemática que ya de por sí son complicadas y muy avanzadas.</p>	<p>Pretenden hablar de un tipo particular de fractales, los más sencillos, los de autosimilitud exacta.</p> <p>Yo considero que si vos querés dar “fractales” es complejo pero si querés dar la “Noción de fractal” es muy simple.</p>	<p>Porque debemos trabajar con un tipo de fractales.</p>

Contenidos matemáticos que sostienen la Noción de fractal (Tabla 4)

Los contenidos que pueden ser tratados a partir de la enseñanza de una simple noción de la Geometría Fractal son variados. A partir de los testimonios y los contenidos detallados por los especialistas se observa que el alcance otorgado por cada uno de ellos a la “Noción de fractal” propuesta por el Diseño Curricular de sexto año no necesariamente es el mismo. Acuerdan en que los alumnos deben manejar las nociones básicas de la Geometría Clásica.

Se observa que algunos de los contenidos propuestos por los especialistas en Geometría (conceptos propios de la Geometría Clásica, sucesiones, transformaciones, matrices, ecuaciones exponenciales, noción de límite de sucesiones) coinciden con los planteados en el Diseño Curricular de sexto año de la Secundaria que actuarían como base para la enseñanza de la “Noción de fractal”, planteada específicamente en el eje “Geometría y Álgebra”.

Tabla 4. Contenidos matemáticos que sostienen la Noción de fractal

E1	E2	E3
<p>Alguien que sabe límite lo va a entender mucho más rápido. Límite y continuidad. Logaritmo y exponenciales. Congruencia y semejanza de triángulos. La Geometría Clásica, obviamente, no tiene sentido hablar de Geometría Fractal si no diste antes Geometría Euclídea.</p>	<p>Límite es poco lo que necesitan, si saben límite mejor y si no se puede dar de todas maneras. El concepto de algoritmo recursivo, que es una instrucción que se repite infinitas veces. Se puede dar mediante transformaciones, si querés tocar el tema. Tienen que haber visto Geometría Euclídea y darse cuenta que justamente no completa todo, que hay cosas que no se pueden describir con esa Geometría. Podrías dar la Noción de fractal simplemente con los conceptos de “algoritmo recursivo” y “límite de una sucesión”.</p>	<p>Nociones de límite y derivadas. Función iterativa. Funciones y ecuaciones exponenciales y logarítmicas. Transformaciones isométricas: simetrías, traslaciones y rotaciones. Homotecias. Semejanzas (por ser la composición de isometrías con homotecias). Inversión. De Geometría la idea de construcciones simples. Nociones de: segmentos, triángulos, clasificación y construcciones. Polígonos. Perímetro. Área. Proporcionalidad, escalas. En 3D: poliedros regulares: tetraedro, cubo. Los fractales presentan distintas estructuras, y para cada tipo habrá conocimientos matemáticos especiales.</p>

Recomendaciones para los profesores (Tabla 5)

Se destaca la importancia de enseñar el concepto de fractal por su gran utilidad para explicar algunos temas de carácter geométrico y otros de carácter natural. Coinciden en su potencial para captar la atención de los alumnos.

Los especialistas manifiestan, por un lado, que es fundamental que el docente se actualice e informe sobre el tema antes de enseñarlo; y, por otro lado, explican la importancia de ofrecer a los alumnos una visión general de la Geometría Fractal y sus aplicaciones. Afirmar que hay que estudiar los fractales, entenderlos y en la medida de lo posible transmitirlos lo más completo posible, sin caer en conceptos muy complejos o formalismos a los que el alumno no pueda llegar. También sugieren el empleo de material concreto y virtual.

Tabla 5. Recomendaciones para los profesores

E1	E2	E3
<p>Realizar actividades de construcción. Hay fractales famosos que se pueden construir de manera muy simple. Lo primero es informarse, básicamente por Internet hoy en día se encuentra absolutamente todo. Se necesita tecnología para que el alumno descubra qué es lo que puede construir con eso. Hay que darlo a nivel divulgativo lamentablemente, no hay forma de darlo de manera formal y cuando uno da algo a nivel divulgativo la actividad científica ya no existe más. Uno tiene que apuntar a ciertos temas y eso no quiere decir que la clase tiene que ser aburrida, a lo mejor fractales es algo para una clase que está desmotivada, los motivás y después podés poner algún otro contenido, como mecharlo con algo y que no sea tan monótona.</p>	<p>Deberían leer o hacer algún mini curso, y después trabajar cómo darlo, pero entender los conceptos no es algo que le puede llevar mucho tiempo. Que no tengan miedo porque es un tema accesible.</p>	<p>Que se actualicen, el tema hoy en día no es difícil ya que las computadoras hacen los cálculos tediosos y hay en Internet muchos programas que muestran las curvas que se pueden obtener variando las variables o parámetros. Se puede trabajar con software de Geometría dinámica y sitios en Internet como complemento. Todo lo que se puede manejar con material concreto o virtual que se asemeja al concreto se aprende mucho más, de eso soy una convencida. Hay que entenderlo, cuando uno entendió transmite.</p>

CONCLUSIONES

Con la incorporación del contenido “Noción de fractal” al Diseño Curricular, se persigue que el alumno experimente que la Matemática es una ciencia en constante evolución, intensamente dinámica y cambiante.

Como el concepto de fractal puede resultar difícil de comprender y requiere su estudio en niveles superiores, el trabajo con fractales en secundaria está enfocado en una Noción del tema, a modo introducción. Se prescinde de definiciones o fórmulas matemáticas abstractas o rigurosas, en pos a basarse principalmente en la gran potencialidad visual y estética de los mismos.

La complejidad del estudio de los fractales y la idea de mantener la enseñanza en una Noción introductoria, sugiere que las actividades que se propongan sean en lo posible de carácter lúdico y con el manejo constante de lo concreto.

En síntesis, se percibe como fructífero que en el Diseño Curricular se mencione “Noción de fractal”. Permite disminuir la complejidad existente y centra el tema en un trabajo sencillo, tal vez solo de construcciones, ya sean manuales o computarizadas, desarrollados posiblemente con la modalidad de taller.

Por ejemplo con el software GeoGebra se puede construir el árbol fractal (Fig. 9), para introducir a los estudiantes en el tema a partir de construcciones fractales.

- a) *Construimos primero un segmento AB , que será el tronco del árbol.*
- b) *Ahora procedemos a construir dos ramas. Para ello:
Trazamos las circunferencias con centro en cada vértice que pasen por el otro vértice.
Marcamos las intersecciones y trazamos las rectas que unen esos puntos de intersección con el vértice B .
Marcamos los puntos de intersección de esas rectas con la circunferencia de centro B ; los denominamos C y D .
Tomamos los puntos medios I y J de BC y BD respectivamente
Trazamos los segmentos BI y BJ .
Ocultamos todos los objetos auxiliares, dejando visibles únicamente los segmentos AB , BI y BJ . Así, AB es el tronco y BI y BJ son las primeras ramas.*
- c) *La idea es hacer lo mismo con BI y BJ . Es decir, pensar que BI y BJ son los troncos y construir las ramas que salen de estos troncos. Para esto, construimos una nueva herramienta:
Seleccionamos la opción *Creación de Herramienta Nueva*.
Seleccionamos como objetos de entrada primero el punto A y luego el punto B .
Seleccionamos como objetos de salida los puntos I y J así como los segmentos BI y BJ .
Concluimos la herramienta.
Seleccionamos el nuevo botón, y aplicamos la herramienta a los puntos B e I . Deben aparecer dos nuevas ramas.
Aplicamos la herramienta a los puntos B y J .*
- d) *Aplicamos la herramienta a las cuatro nuevas ramas.*

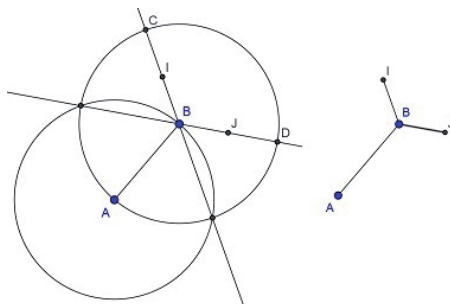


Figura 9. Construcción del árbol fractal

Otro ejemplo, provisto por un docente en ejercicio en sexto año que participó en otra etapa de la investigación, consiste en la construcción manual de fractales, empleando una plantilla modelo y a partir de un algoritmo recursivo (Fig. 10).

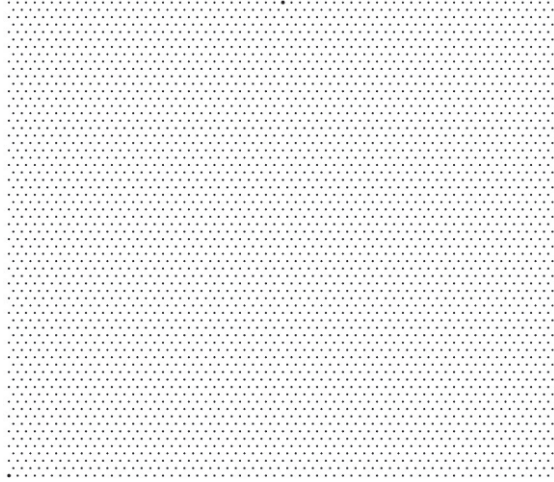


Figura 10. Ejemplo de actividad proporcionada por un docente de sexto año

Construyan un triángulo equilátero, de lado L .
 Marquen el punto medio de cada lado.
 Unan los puntos medios de cada lado, quedando así 4 triángulos equiláteros de lado $L/2$.
 Eliminen el triángulo central.
 Repitan el proceso anterior en cada uno de los triángulos restantes.
 Si consideramos que la construcción del primer triángulo equilátero es la etapa 0:
 ¿Cuál es la etapa 1?, ¿cuántos triángulos se obtienen?
 ¿Qué ocurre si repiten el proceso una y otra vez?, ¿cambia la figura?
 ¿Qué características o rasgos pueden encontrar para considerarlo un fractal?
 ¿Es un fractal “conocido”? Investiguen qué nombre recibe.
 ¿Podrían construir otra figura fractal, utilizando el mismo conjunto de pasos propuestos pero cambiando la figura inicial por otra?
 A partir de sus conclusiones, completen el siguiente cuadro con el número de triángulos que componen cada etapa

<i>Etapa</i>	0	1	2	3	4	...	n
<i>Número</i>	1					...	

Suponiendo que cada lado del triángulo inicial (etapa 0) tiene longitud 1, completen los datos de la siguiente tabla:

	<i>Etapa</i>	0	1	2	3	4	...	n
<i>Cantidad de triángulos</i>								
<i>Longitud de cada lado</i>								

	Etapa	0	1	2	3	4	...	n
Perímetro de cada triángulo								
Perímetro total								
Área de cada triángulo								
Área total sombreada								

Para la última columna deben encontrar las expresiones generales para calcular el número de triángulos, el perímetro y el área.

¿Qué pasará con el perímetro total si el número de pasos aumenta tanto como queramos?

¿Qué pasará con el área total si el número de pasos aumenta tanto como queramos?

La Geometría escolar a nivel secundario no ha incorporado contenidos prácticamente posteriores a Euler, motivo por el cual existe un genuino interés por los fractales. Probablemente los alumnos creen que las formas geométricas referidas a objetos creados por el hombre han sido pensadas, desarrolladas y descritas dentro de la Geometría Euclídea, desconociendo por completo que la Geometría Fractal se adapta perfectamente al mundo que nos rodea.

Asimismo cabe advertir que otro factor que puede actuar de condicionante, además de la necesidad de no abrumar a los alumnos con contenidos inalcanzables, es que este tipo de actividades requieren de un tiempo considerable, factor que escasea en el último año de estudios del nivel secundario. Son muchos los temas que se prescriben y muy poco el tiempo disponible, temas considerados en su mayoría como fundamentales para estudios superiores. Asimismo, como hemos visto, la enseñanza de “Noción de fractal” es factible en no demasiado tiempo (un par de semanas, por ejemplo) y podría propiciar una apertura en el pensamiento matemático de los egresados del secundario.

Entre comentarios a favor de docentes en ejercicio en sexto año hemos encontrado:

Lo trabajaría, inclusive, dentro del aula, fuera del aula, con un proyector... iría buscando la vuelta, las distintas actividades.

¿Por qué pensar que la Geometría fractal aporta a la Geometría Euclidiana? ¿Acaso el Álgebra debe aportar a la Geometría o tiene importancia en sí misma? El contenido de fractales es un contenido que pretende “abrir” la concepción y la formación matemática del alumno.

Considero que la Geometría Fractal viene a aportar una nueva visión de la Geometría que hasta el momento no la tengo en cuenta. Me parece que este tema con el uso de las computadoras podría contribuir a una nueva mirada. Creo que sería necesario poder contar con espacio de profundización y de capacitación docente para poder abordar estos contenidos desde la Secundaria básica con sustento epistemológico.

Esperamos haber contribuido a caracterizar algunos elementos a tener en cuenta en la decisión de trabajar el tema en el aula. Una de las próximas metas es compartir estos

hallazgos con los docentes de sexto año que participaron en el estudio para que puedan contar con material básico (por lo general no presente en las bibliotecas de las escuelas). Además se prevé socializarlo con los especialistas en Geometría así como las autoras del Diseño Curricular que colaboraron y, también, fomentar instancias de formación docente.

BIBLIOGRAFÍA

- Ball, D. y Bass, H. (2009). *Mit einem Auge auf den mathematischen Horizont: Was der Lehrer braucht für die Zukunft seiner Schüler*. Conferencia presentada en la “43 Jahrestagung für Didaktik der Mathematik”. Oldenburg, marzo.
- Branslely, M. (1993). *Fractals Everywhere* (2ª Ed.). Burlington: Morgan Kaufmann.
- Castro, C., Díaz, L. y Palacios, R. (2011). Secuencia didáctica para la enseñanza de la semejanza utilizando fractales. En P. Perry (Ed.), *Memorias del 20º Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones* (pp.181-188). Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional.
- Comas, J. y Herrera, M.J. (2010). Cálculo de la dimensión fractal del contorno de una ciudad como trabajo de investigación en secundaria. *Revista SUMA*, (65), 23-32.
- Comas, J. y Pérez-Nieto, A. (2017). La dimensión fractal en obras del museo Thyssen-Bornemisza. *Revista SUMA*, (92), 51-62.
- Darias, S. y Batista, E. (2015). Vídeo creaciones con GEOGEBRA. Fractal de Esteban. *Números. Revista de Didácticas de las Matemáticas*, 90, 105-115.
- Díaz, S. (2009). Primeras reflexiones de los fractales, la teoría del caos y su aplicación en el aula. *Revista Red Visual*, (9-10), p.s.n.
- Dirección General de Cultura y Educación (2011). *Diseño Curricular para la educación Secundaria. Matemática Ciclo Superior. Sexto año*. Buenos Aires: Autor.
- Figueiras, L., Molero, M., Salvador, A. y Zuasti, N. (2000). Una propuesta metodológica para la enseñanza de la Geometría a través de los fractales. *Revista SUMA*, (35), 45-54.
- Fusi, F. (2015). *Enseñanza de la noción de fractal en sexto año de la escuela secundaria en la Provincia de Buenos Aires*. Tesina de Licenciatura en Enseñanza de la Matemática no publicada. San Nicolás: Universidad Tecnológica Nacional.
- Garbin, S. y Mireles, M. (2009). Un estudio sobre la Noción de dimensión en la enseñanza - aprendizaje de las Matemáticas. *Revista Enseñanza de las Ciencias*, 27(2), 223-240.
- Karakus, F. (2013). A Cross-age study of students' understanding of fractals. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, 27(47), 829-846.
- Mandelbrot, B. (1997). *La Geometría Fractal de la naturaleza*. Barcelona: Tusquets.
- Martín, M. (2003). Caos y fractales. *Revista de Humanidades*, (1), 68-79.
- Martín, N.B., Parra, V. y Fanaro, M.A. (2019). Enseñanza de fractales a partir de preguntas: descripción de una experiencia en un curso de matemática del último año de la escuela secundaria. *Épsilon. Revista de Educación Matemática*, (102), 25-34.
- Medina, M. y Yavioli, A. (2011). La Geometría de la naturaleza. *Revista Q.e.d.*, 4(5), 12-17.
- Moreno, J. (2002). Experiencia didáctica en Matemática: construir y estudiar fractales. *Revista SUMA*, (40), 91-104.
- Moreno, P.C. (2017). Un sierpinski en la fachada. *Épsilon. Revista de Educación Matemática*, (96), 45-60.
- Nápoles, J. y Palomá, L. (2012). Fractales a nuestro alrededor. *Revista VIDYA*, 32(4), 97-112.

- Oviedo, L., Kanashiro, A., Gorrochategui, M. y Benzaquen, M. (2006). Una aproximación a la Noción de infinito a través de la curva de Von Koch. *Aula Universitaria*, 18(8), 55-64.
- Quezada, A. (2005). Fractales, Más allá de 1D, 2D o 3D. *Revista Digital Universitaria*, 6(12), 2-14.
- Redondo, A. y Haro, M. (2004). Actividades de Geometría Fractal en el aula de Secundaria. *Revista SUMA*, (47), 91-104.
- Reyes, M. (2006). *Fractales, Conjuntos fractales, Dimensión fractal*. Madrid: ESTALMAT. Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales.
- Reyes, M. (2009). *Fractales*. Madrid: Facultad de Informática de la Universidad Politécnica de Madrid.
- Sardella, O., Zapico, I. y Berio, A. (2006). Fractales una nueva mirada en la enseñanza de la Geometría. *Números. Revista de Didácticas de las Matemáticas*, 65, 14-20.
- Spinadel, V. (2003). Geometría Fractal y Geometría Euclídea. *Revista Educación y Pedagogía*, XV(35), 85-91.
- Thompson, P. (2000). What is Required to Understand Fractal Dimension? *The Mathematics Educator*, 10(2), 33-35.

Trabajando con la app de Geogebra en el aula

Fernando Arribas Ruiz

IES Colonia

María del Carmen Galán Mata

IES Averroes

Resumen: *Utilizamos la metodología del Aprendizaje Autónomo Autorregulado para enseñar matemáticas con la app de Geogebra. Experiencias docentes desde el curso 2017/2018. Analizamos las ventajas de utilizar el móvil en el aula.*

Palabras clave: *Geogebra, matemáticas, trabajo en aula, experiencias.*

Working with the Geogebra app in the classroom

Abstract: *We use a self-regulating learning methodology to teach mathematics with the Geogebra app. Teaching experiences from the academic year 2017/2018. We discuss the advantages of using mobile phones in the classroom.*

Keywords: *Geogebra, mathematics, classroom work, experiences*

1. INTRODUCCIÓN

Basándonos en el Aprendizaje Autónomo Autorregulado, hemos implementado el uso de la app de Geogebra en el aula, obteniendo unos resultados exitosos, superiores incluso a los esperados.

En el siguiente diagrama (fig. 1) mostramos las fases de este método de enseñanza:

En la primera fase, o Fase de planificación, se establecen los objetivos y las metas del aprendizaje, fomentándose el interés y el valor de la misma, trazando el camino para conseguirla. En la Fase de ejecución, se lleva a cabo la tarea propiamente dicha, controlando tiempo y entorno, registrando resultados y buscando ayuda si es necesario. En la tercera y última fase, la Fase de autorreflexión, cada alumno o alumna realiza una autoevaluación para comprobar lo que ha aprendido y una reflexión global del proceso.

Estas etapas teóricas son complejas para los adolescentes, pero pueden ir aprendiéndolas poco a poco. Podemos ayudarles los docentes, siendo guías y acompañándoles en su aprendizaje, dejando de ser meros transmisores de conocimientos.



Figura 1

2. MARCO LEGAL

La orden del 14 de julio de 2016 por la que se desarrolla el currículo de la ESO en Andalucía establece como dos de las competencias clave *Aprender a aprender* y *Competencia digital*.

Por otro lado, dentro de los objetivos propios de la materia de matemáticas nos encontramos:

6. Utilizar de forma adecuada las distintas herramientas tecnológicas (calculadora, ordenador, dispositivo móvil, pizarra digital interactiva, etc.), tanto para realizar cálculos como para buscar, tratar y representar información de índole diversa y también como ayuda en el aprendizaje.

Además, dentro de los contenidos y criterios de evaluación de matemáticas, aparece la utilización de herramientas tecnológicas y el manejo de software específico de matemáticas para facilitar la adquisición de aprendizajes básicos.

3. NUESTROS INICIOS CON LA APP DE GEOGEBRA

Empezamos utilizando la app como recurso en la asignatura de Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Aplicadas, durante el curso 2017/2018 en el IES Averroes de Córdoba. La característica principal de nuestro alumnado, como muchas veces sucede en este tipo de grupos, era la escasa motivación. La mayoría tenía la asignatura de matemáticas pendiente de uno o varios cursos anteriores, con importantes lagunas que dificultaban el aprendizaje. En cada bloque de contenidos fuimos buscando recursos manipulativos, que llamasen la atención de nuestro alumnado, y al llegar al bloque de Análisis se nos ocurrió experimentar con la app. El resultado en cuanto a motivación fue sorprendente. Nos

encontrábamos inicialmente con un número importante de alumnos y alumnas que prácticamente habían abandonado la asignatura, y que volvieron a engancharse gracias a la app; alumnos que normalmente no hacían los deberes en casa, resultó que hacían más de las que proponíamos, nos llegaban emails a horas intempestivas con dudas o sugerencias, etc. Fue una grata experiencia.

La prueba escrita de las unidades didácticas, no obstante, la hicimos en papel, ya que la app la utilizamos como una herramienta más para facilitar el aprendizaje. En la autoevaluación que nos hicimos al finalizar la unidad concluimos que la prueba escrita, a pesar de que los resultados de la misma fueron significativamente mejores al resto de unidades de esos grupos en matemáticas, fue un error, y debimos hacerla también con la app, ya que era el entorno de trabajo al que los acostumbramos. Como propuesta de mejora para el curso siguiente nos pusimos la meta de impartir este bloque íntegramente con la app y hacer la prueba también a través de la app.

4. BLOQUE DE ANÁLISIS CON LA APP DE GEOGEBRA

El curso siguiente, 2018/2019, decidimos impartir íntegramente el Bloque de Análisis con la app de Geogebra, tanto en tercero como en cuarto de ESO. Utilizar la aplicación de forma habitual nos permitió una serie de ventajas frente a la forma de enseñar tradicional:

- a) *Aprendizaje deductivo.* El alumnado descubría propiedades de las funciones por sí mismo a través de actividades guiadas. Por ejemplo, en la sesión donde estudiamos la pendiente de una recta, el alumnado aprendía, con la app, a calcular la pendiente de la recta que pasa por dos puntos y a través de la expresión analítica de la función. Asimismo, tras varios ejercicios donde debían representar gran número de rectas y comparar varias propiedades, algo que a través de la enseñanza tradicional con lápiz y papel sería imposible, podía intuir cuándo dos rectas eran paralelas. Y en la actividad final de la sesión, que se corresponde con la fase de reflexión, el alumnado debía formular una hipótesis sobre paralelismo y comprobarla con la app. Se ayudaban a través de un deslizador; representaban un recta cualquiera y la otra con un parámetro que indicaba la pendiente. Movían el parámetro hasta colocar la segunda recta paralela a la primera y así comprobaban que tener la misma pendiente es condición necesaria y suficiente. Además de esta actividad tenían otras en el entorno de la Mezquita de Córdoba, donde comprobaban la presencia de rectas paralelas en su entorno y su patrimonio más cercano (fig. 2).
- b) *Fomenta la autonomía del alumnado.* Fomentar la autonomía del alumnado requiere un importante trabajo previo del profesorado antes de la clase. A través de las tres fases del aprendizaje autónomo autorregulado el alumnado, poco a poco, fue capaz de administrarse su tiempo. Para nosotros fue una sorpresa observar como al principio no atendían al tiempo asignado a cada actividad, y en tan solo un par de días se les oía por grupos “venga, que para esta actividad dice que necesitamos cinco minutos y llevamos dos discutiendo cómo hacerla”. Debemos decir, asimismo, que el tiempo que asignamos para cada actividad, a pesar de ser orientativo, se ajustó muy bien a las necesidades de nuestros grupos, y todo el

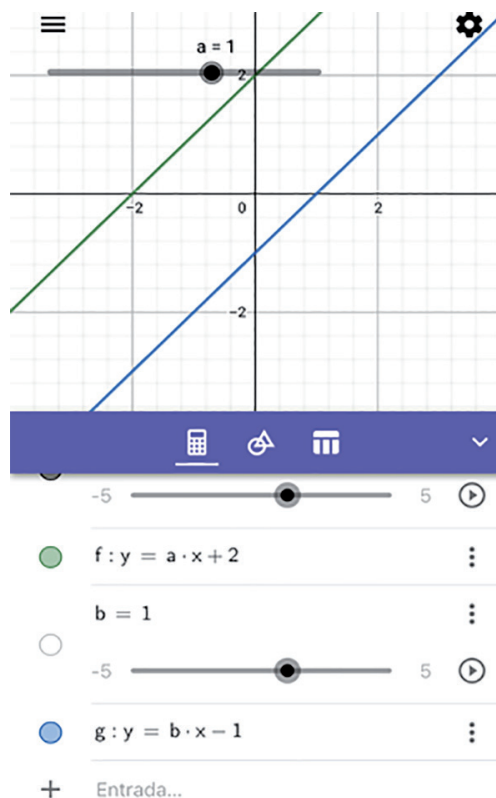


Figura 2

alumnado tuvo tiempo de sobra en cada sesión para hacer todas las actividades que habíamos propuesto

- c) *El alumnado descubre nuevos retos.* El alumnado investiga y busca soluciones a problemas que incluso no se le plantean en las actividades propiamente dichas. A modo de ejemplo podemos citar que la app, en un principio no admitía la posibilidad de insertar etiquetas de texto. Para aquellas actividades en las que debían escribir (por ejemplo cuando tenían que interpretar cuando una función es continua, señalar los puntos de discontinuidad o bien señalar los intervalos de crecimiento o decrecimiento) recurrimos a la herramienta lápiz, que permite escribir a mano alzada. El primer día lo hicieron así. A partir del segundo empezamos a recibir actividades con texto insertado, de diferentes tipos, tamaños y colores de letra. Ellos mismos buscaron otra app que combinada con Geogebra les permitía insertar texto, y nos enseñaron a nosotros como hacerlo (figs. 3 y 4).
- d) *Retroalimentación.* Cada día, el alumnado nos enviaba las tareas asignadas por *Classroom*, y nosotros las corregíamos en nuestros dispositivos móviles y les enviábamos comentarios sobre qué y cómo mejorar. Con el método tradicional el alumnado toma nota si acaso (a veces ni eso) de las correcciones y se les suele olvidar. Aquí ante cada comentario insistían en repetir el ejercicio y volver a

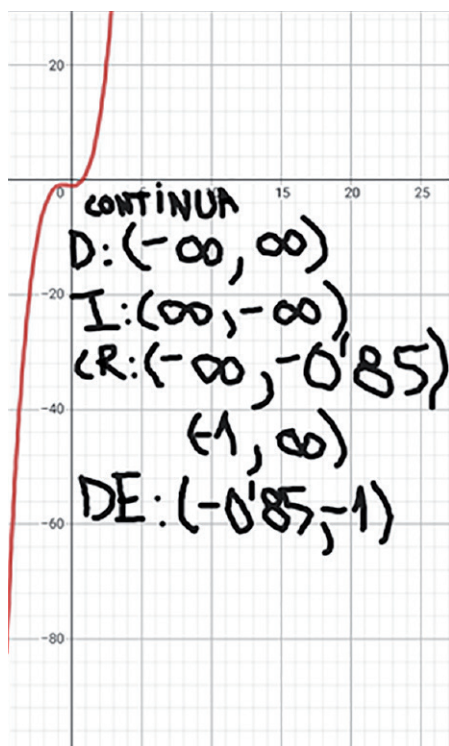


Figura 3

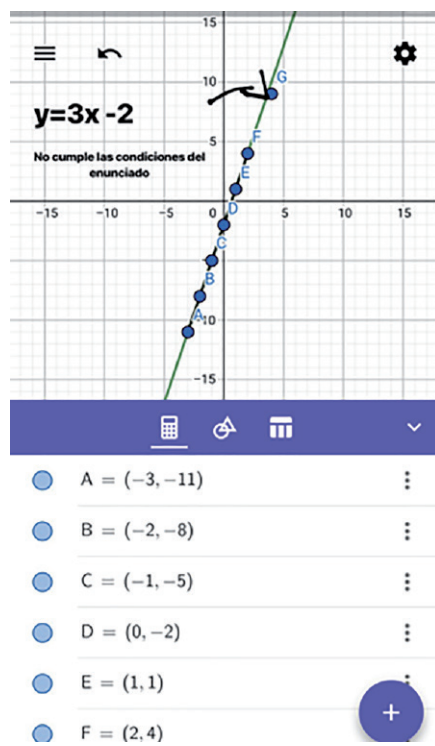


Figura 4

enviarlo, cosa que les permitimos ya que nuestro objetivo es que aprendan y mejoren día a día.

- e) *Estudio de contenidos superiores a los de su nivel.* El ahorro de tiempo que supone utilizar la app en el aula, nos permitió tratar contenidos de cursos superiores (funciones definidas a trozos en 3 de ESO, por ejemplo) con resultados igualmente positivos. Los conceptos que son difíciles de entender y de ver con lápiz y papel, con la app se hacen más amables y más fáciles para ellos.
- f) *Examen con la app.* La app Geogebra tiene un modo examen, que hace que el teléfono pase a una especie de *modo avión*, para evitar que hablen entre ellos, utilicen alguna otra aplicación o busquen información en internet. Aunque el primer examen que hicimos con la app “nos dio un poco de miedo”, por el mal uso que podría darse, fue bien, al igual que toda la unidad. Cada alumno y alumna estuvo en su sitio, trabajando con su dispositivo, avisaba al acabar y mandaba las actividades sin ningún problema.
- g) *Aumenta la motivación de los estudiantes.* El uso de la app en el aula aumentó la motivación del alumnado y conseguimos “recuperar” algunos alumnos y alumnas que daban por perdida la asignatura. La evaluación de la unidad por parte del alumnado, a través de cuestionarios donde valoraban el proceso de enseñanza-aprendizaje, fue mucho mejor que en otras unidades, y nos pedían por favor que

hiciésemos más unidades a través de la app. Los resultados académicos, consecuencia también de lo anterior, fueron superiores a cualquier otra unidad didáctica del grupo en la asignatura de matemáticas.

Como único inconveniente de esta forma de enseñar destacaríamos la pérdida de destreza a la hora de resolver ejercicios de la forma tradicional, con lápiz y papel. No obstante, creemos que ésta pérdida no es significativa, que se recupera en cuanto se vuelve al método tradicional y de hecho se mejora, ya que tienen otra herramienta para comprobar y para realizar ejercicios e interpretar gráficas.

5. CONCLUSIONES

Ante los buenos resultados obtenidos nos animamos para seguir en esta línea de trabajo durante este curso escolar. Decidimos implementar Geogebra con métodos clásicos para no descuidar ningún aspecto, y los exámenes suelen tener dos partes: una a lápiz y papel y una segunda parte solo con el teléfono móvil y la app de Geogebra.

Actualmente en cada unidad didáctica tenemos una o varias sesiones con la app, y el resto de forma más tradicional, y utilizando además otros recursos. Hemos desarrollado prácticas para los bloques de Geometría y de Álgebra principalmente.

El proyecto ha sido seleccionado por la Junta de Andalucía como proyecto de Innovación, y disponemos de un presupuesto sencillo que nos permitirá adquirir varios dispositivos móviles para el alumnado que no dispone de un terminal.

Seguimos trabajando durante éste curso, para mejorar cada día.



Figura 5

6. REFERENCIAS

Savater, F. (1997). *El valor de educar*. Barcelona. Ariel.

Núñez, J.C., Solano P, González-Pienda Julio A. y Rosário P. (2006). *El aprendizaje autorregulado como medio y meta de la educación*. Papeles del Psicólogo. Vol. 27(3), pp. 139-146.

Galán, M.C., Arribas, F. (2019). *Funciones en la ESO con la app de Geogebra*. Amazon.
Orden del 14 de julio de 2016 por la que se desarrolla el currículo de la ESO en Andalucía.

Los conocimientos previos matemáticos en otras ciencias: caso de la irradiancia solar en agrometeorología

Alejandra Cañibano

Adriana Confalone

Facultad de Agronomía. UNCPBA. Argentina

Resumen: *Este trabajo posee un carácter propositivo, en él se muestra una aplicación directa de la matemática a un concepto clave de las ciencias agropecuarias y muchas otras como es la radiación solar. Mediante el mismo se entrelazan dos componentes del aprendizaje significativo: los conocimientos previos y la nueva información. El trabajo muestra ejemplos concretos, la revisión de conceptos geométricos y trigonométricos aplicados a la irradiancia solar, entendiendo por tal la magnitud que mide la energía por unidad de área de radiación solar incidente en una superficie colocada en un lugar y rango de tiempo bien especificados.*

Palabras Claves: *Aprendizaje Significativo- Geometría- Trigonometría- Radiación solar*

Previous mathematical knowledge in other sciences: case of solar irradiance in agrometeorology

Abstract: *This work has a proactive character, it shows a direct application of mathematics to a key concept of agricultural sciences and many others such as solar radiation. Through it, two components of meaningful learning are intertwined: prior knowledge and new information. The work shows concrete examples, the review of geometric and trigonometric concepts applied to solar irradiance, understanding as such the magnitude that measures the energy per unit area of solar radiation incident on a surface placed in a well specified place and time range.*

Keywords: *Significant learning- Geometry- Trigonometry- Solar radiation*

INTRODUCCIÓN

Agrometeorología es una asignatura presente en la casi totalidad de los planes de estudios de carreras de Ingeniería Agronómica, Forestales y Afines, en este caso de Argentina. Se suele ubicar entre el segundo y tercer año de estudios y tiene en líneas generales una duración cuatrimestral. En dicha asignatura, se hace necesario estimar procesos matemáticos y físicos para interpretar la interacción de los procesos atmosféricos y biológicos, los cuales se pueden automatizar haciendo énfasis en el análisis de los mismos (Bombelli *et al.*, 2009). Para estudiar las relaciones entre el tiempo atmosférico, el clima y el rendimiento en sistemas espacio-temporales se hace uso de modelos matemáticos que intentan reproducir la realidad para comprender, analizar y predecir que sucede cuando las variables cambian la respuesta del sistema. Las ciencias básicas como la matemática brindan las herramientas para resolver estas problemáticas; para arribar a conclusiones certeras los alumnos y también los profesionales, deben conocer matemática, no tanto en su sentido abstracto sino en las alternativas que sirven de instrumento para resolver distintos casos.

Para lograr que la herramienta matemática tenga un carácter propositivo se debe buscar la manera que más se adapte a una realidad determinada, pensando y analizando las variables y los potenciales resultados. La matemática debe generar soluciones a los problemas y dar alternativas para que el alumno pueda actuar libremente.

Y además, se manifiesta el concepto de *Aprendizaje Significativo* que surge de la interacción de dos elementos: los conocimientos previos y la nueva información. Las ideas previas complementan los nuevos contenidos logrando un aprendizaje que tenga significado para el que aprende. Además el alumno necesita tener un conocimiento previo al cual se le adhiera nueva información, esta información se retroalimenta de la conocida para enriquecer una visión global de cierto tema o concepto. (Fig 1)

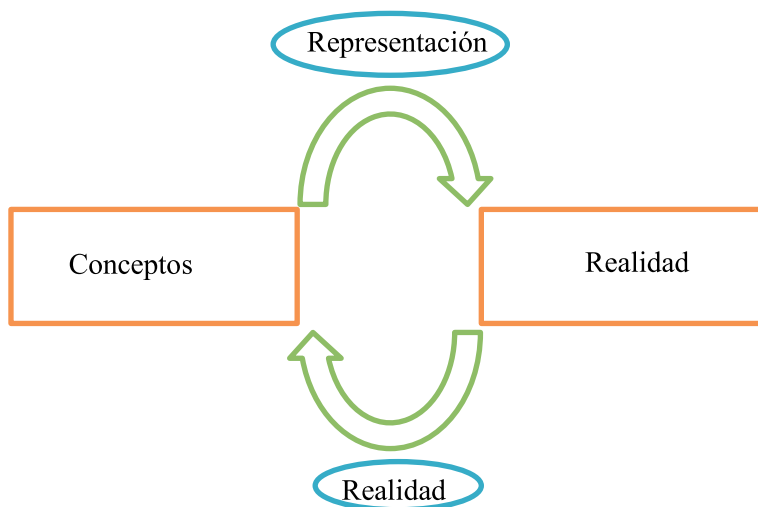


Figura 1. Aprendizaje Significativo

Es así que los conocimientos previos han de estar relacionados con aquellos que se quieren adquirir, de manera que funcionen como base o punto de apoyo para la adquisición de nuevos conocimientos y la nueva información se incorpore a la estructura mental y pase a formar parte de la memoria comprensiva.

Para de Guzmán (2007), el acercamiento inicial se puede hacer a través del intento directo de una modelización de la realidad en la que el profesor sabe que han de aparecer las estructuras matemáticas en cuestión. Se pueden acudir para ello a las otras ciencias que hacen uso de las matemáticas, o a hechos de la realidad cotidiana, etc.

Algunas de las ideas básicas de la Teoría del Aprendizaje Significativo (Ausubel, 1963) indica que este aprendizaje y el aprendizaje mecánico no son tipos opuestos de aprendizaje, porque se complementan mientras ocurre el proceso de enseñanza, incluso pueden ocurrir simultáneamente en la misma tarea de aprendizaje.

IMPORTANCIA DE LA RADIACIÓN SOLAR PARA LA AGRONOMÍA

La radiación solar es la principal fuente de energía que recibe la tierra y es además, el principal elemento meteorológico porque de ella derivan los restantes elementos (temperatura, humedad y presión atmosférica, vientos, lluvia, etc.). Las plantas utilizan la luz solar para producir carbohidratos a partir dióxido de carbono y agua y son capaces de convertir compuestos inorgánicos que suelen condicionar el proceso, disminuyendo el rendimiento de los cultivos. El primer factor es la cantidad de sombra ya que la baja disponibilidad de luz solar tiende a ser un agente que produce estrés en las plantas a su vez que altera su crecimiento y desarrollo. El sol es la principal fuente de esta radiación correspondiéndole un 99.97% de la energía que tiene que ver con los procesos meteorológicos y la totalidad de las actividades biológicas. El balance de radiación que se realiza en las superficies del suelo agrícola y en las superficies de las plantas cultivadas, determinará la energía disponible para la realización de los procesos fundamentales de calentar el suelo, calentar el aire, evapotranspirar el agua y una pequeña porción de esta radiación se utilizará en la fotosíntesis (Pereira *et al*, 2002)

El exceso de calor también produce, sin protección adecuada transpiración y foto-inhibición y por estar sin la protección adecuada, impide que haya una reducción de la fotosíntesis por exceso de calor. Ambos aspectos son igualmente importantes para la agricultura.

En general el crecimiento y desarrollo de los cultivos está determinado por factores externos que afectan su desarrollo. Uno de los más importantes es la radiación solar. El sol es una fuente primaria de energía radiante, que se propaga a través del espacio mediante ondas y los cultivos son los captadores de esta radiación transformando la energía radiante en energía química por medio del proceso de fotosíntesis (Fernández Long y Murphy, 2011)

El estudio de la radiación solar y su influencia en las plantas cultivadas tienen varias aplicaciones prácticas, por ejemplo: seleccionar las especies adecuadas para un lugar determinado, fechas de siembra en función a la duración del día; se puede utilizar la iluminación artificial para el cultivo de hortalizas y floricultura y controlar fechas de floración y rendimiento de las mismas. Es de fundamental importancia en Agronomía determinar

con exactitud la cantidad de energía que llega a una determinada región (nivel mesoclimático), teniendo en cuenta la latitud y época del año y partiendo del cálculo de la constante solar, así como también determinar en un lote agrícola con pendiente la cantidad de radiación solar que el mismo recibe y que estará disponible para todos los procesos anteriormente mencionados (Rosenberg *et al*, 1983).

A modo de definición, la radiación solar es un proceso físico en el cual se transmite energía en ondas electromagnéticas, se realiza en línea recta y a la velocidad de 300.000 km/s.

CONCEPTO DE IRRADIANCIA

En forma simple la irradiancia es la intensidad de luz de Sol que llega a la superficie terrestre. La intensidad disminuye a medida que los rayos del sol se alejan del cenit, entendiendo por cenit el punto más alto en el cielo en relación con el observador y que se encuentra justo sobre la cabeza de este, a 90° . Si el sol se aleja del cenit los rayos solares se proyectan sobre el plano terrestre dando un aumento de área irradiada. Además, ocurre otro fenómeno natural: la longitud que recorre el Sol es mayor y al alejarse de la Tierra comienza a disminuir la energía debida a la absorción y a la reflexión (Fig 2).

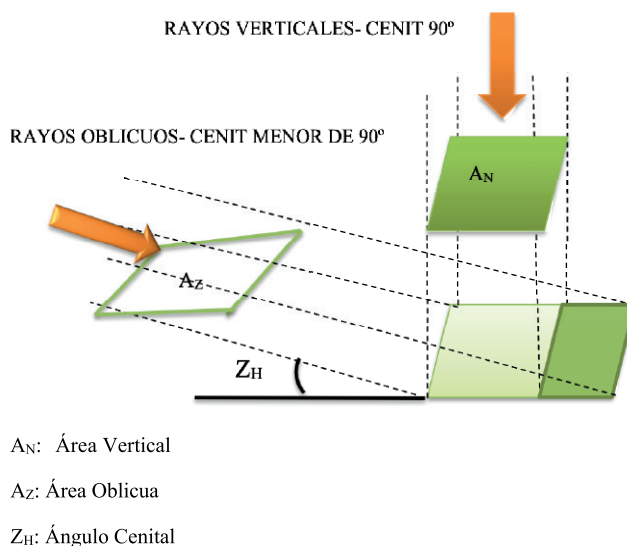


Figura 2. Comportamiento del Sol cuando se aleja del cenit

Para referirse a este tema en Agrometeorología se hace referencia a la *Ley del Coseno de Lambert*. Por definición la ley establece que la intensidad máxima de la irradiación, sobre una superficie, se obtiene cuando el haz incide perpendicularmente sobre ella. Si la incidencia no es perpendicular, por el fenómeno de reflexión, disminuye parte de la radiación y por lo tanto, también lo hace la intensidad. Dos aplicaciones fundamentales:

a) determinar la cantidad de radiación astronómica (que es la que llega al tope de la atmósfera sobre una superficie horizontal) partiendo de la constante solar, b) cuantificar la cantidad de radiación solar global que se dispone en terrenos agrícolas que tienen pendiente, cálculo necesario para realizar el balance de radiación en superficies agrícolas (suelo desnudo o superficies vegetales)

Denominando I : irradiancia, S : energía, A : área irradiada (normal o formando un ángulo distinto de 90°) y t el tiempo que es importante resaltar que es unitario, la misma se calcula como:

$$I = \frac{S}{A \cdot t}$$

Y las unidades resultantes son variables según el sistema (SI o cgs) y según se consideren valores diarios o instantáneos. Las unidades pueden observarse en la Tabla 1.

Tabla 1: Unidades de Irradiancia

	SI	cgs
Valores instantáneos	$\frac{W}{m^2} = \frac{J}{m^2 \cdot s}$	$\frac{cal}{cm^2 \cdot min}$
Valores diarios	$\frac{MJ}{m^2 \cdot dia}$	$\frac{cal}{cm^2 \cdot dia}$

Respecto a las equivalencias $1 \text{ cal} = 4,18 \text{ J}$ y $\frac{MJ}{m^2 \cdot dia} = 23.923 \frac{cal}{cm^2 \cdot dia}$.

LOS CONOCIMIENTOS PREVIOS EN LA PROBLEMÁTICA

Volviendo a la *Ley del Coseno de Lambert*, esta ley es aplicable a superficies receptora como el suelo; también aplicable a otras superficies pero en este trabajo nos interesa el suelo (Fig. 3).

En la definición de Irradiancia tendremos, recordando que el tiempo es unitario que:

$$I_N = \frac{S}{A_N} \qquad I_Z = \frac{S}{A_Z}$$

Despejando S e igualando algebraicamente ambas expresiones: $I_N A_N = I_Z A_Z$ de donde:

$$I_z = (I_N A_N) / A_z \quad (1)$$

Donde: I_Z es la intensidad según el ángulo de observación
 I_N es la intensidad para el ángulo normal a la superficie

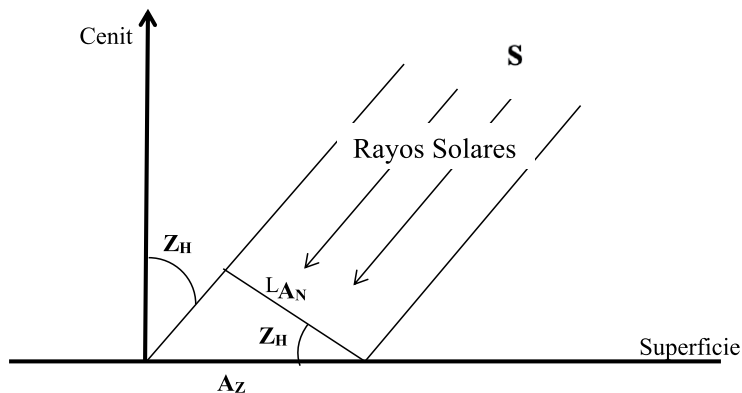


Figura 3. Ley del Coseno de Lambert

Del triángulo rectángulo formado, haciendo uso de la definición trigonométrica del coseno de un ángulo:

$$\cos Z_H = A_N / A_Z$$

O también

$$\cos Z_H = A_Z / A_N$$

Acá se vuelve interesante mostrar que los ángulos en la figura son equivalentes. Puede demostrarse que son iguales:

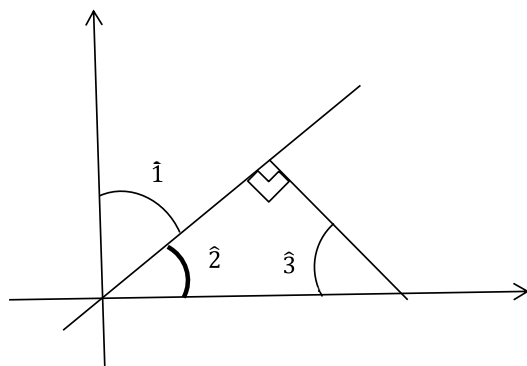


Figura 4.

En la Fig. 4

$$\begin{aligned} \hat{2} &= 90^\circ - \hat{1} \\ \hat{3} &= 180^\circ - 90^\circ - \hat{2} = \\ &= 180^\circ - 90^\circ - (90^\circ - \hat{1}) = \hat{1} \\ \therefore \hat{1} &= \hat{3} \end{aligned}$$

Retomando, de (1) resulta que

$$I_Z = I_N \cdot \frac{A_N}{A_Z}, \text{ por lo tanto:}$$

$$I_Z = I_N \cdot \cos Z_H$$

Que es otra forma de calcular la Irradiancia recibida por la superficie reflectante (el suelo).

CONCLUSIONES

La enseñanza de la matemática como ciencia básica en la carrera de Ingeniería Agronómica y carreras afines, persigue variados objetivos. Entre los más importantes que el alumno pueda manipular los objetos matemáticos con el fin de relacionarlos en forma consciente, entender cuando utilizarlos y como, entre lo más interesante que logre realizar la transferencia a situaciones particulares que ocupan su campo de saber.

La matemática es sobre todo saber hacer, es una ciencia en la que el método claramente predomina sobre el contenido (de Guzman, 2007). Haciendo pie en el nivel educativo al que referimos en el trabajo, dentro de un universo científico e intelectual tan cambiante, es interesante y muy importante hacer propios procesos de pensamiento útiles, restando un poco de importancia y sin dejar de lado los contenidos que no pueden ser relacionados o aplicados. A decir de Whitehead (1956), con buena disciplina es posible inculcar en las mentes de los alumnos de una clase cierta cantidad de conocimientos inertes. De ahí que el docente debe buscar la impronta para que la matemática se encuentre al servicio de quien lo requiera.

El concepto de *Irradiancia*, más allá de su importancia en la asignatura y para la toma de decisiones de futuros profesionales lleva en sí una variada cantidad de objetos matemáticos que ayudan a la deducción y comprensión de su ley. De ahí el interés para un desarrollo más ligero de los contenidos propios de cada asignatura, el saber hacer matemáticas, el saber operar, contraer cierta autonomía operacional que asegure el éxito para el aprendizaje de los estudiantes.

REFERENCIAS

- Ausubel, D. (1963). *The Psychology of Meaningful Verbal Learning*, Ed. Grune and Stratton, New York, USA
- Bombelli, E., Barberis, G., Fernández Long, M. E., y Hurtado, R. H. (2009). *Programas de aplicación de agrometeorología para docencia e investigación*. Revista Iberoamericana de Tecnología en Educación y Educación en Tecnología, (3), p. 14-17.
- De Guzmán, M. (2007). Enseñanza de las Ciencias y la Matemática. <https://doi.org/https://doi.org/10.35362/rie430750>
- Fernandez Long M., Murphy G. (2011), Energía Atmosférica. Agrometeorología. Murphy G y Hurtado R. (eds). Facultad de Agronomía. UBA Cap V, 23-29
- Pereira A, Angelocci L, Sentelhas P. (2002) Agrometeorología. Ed Agropecuaria. 478 p. Argentina
- Rosenberg N., Blad B., Verma S., (1983). Microclimate, the biological Environment. 2 ed. New York : John Wiley & Sons. 495p.
- Whitehead A. (1956). *Fines de la educación. Necesidades de su reforma*. Revista de Educación. Vol XIV, (40), 92-99. Ministerio de Educación y Formación Profesional. España

Una aplicación a nivel de licenciatura del cálculo integral a la probabilidad: El problema de la aguja de Buffon

Margarita Tetlalmatzi-Montiel¹

Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo

Resumen: *El problema de la aguja de Buffon para agujas cortas y largas puede resolverse calculando áreas bajo ciertas curvas. Pero también las probabilidades de que una aguja larga termine sobre exactamente una, dos o tres líneas se determinan calculando áreas entre ciertas curvas. En estas notas se muestran las regiones cuyas áreas resuelven el problema en dos casos particulares para agujas largas. Las ideas pueden adaptarse fácilmente al caso general. Los requisitos para entender este trabajo son cálculo integral y conceptos elementales de probabilidad, por lo que resulta ser una aplicación accesible para estudiantes de licenciatura.*

Palabras clave: *Agujas de Buffón, aplicación de cálculo, probabilidad, educación matemática.*

An application at the bachelor's level of integral calculus to probability: Buffon's needle problem

Abstract: *The Buffon needle problem for short and long needles can be solved by calculating areas under certain curves. But also the probabilities that a long needle ends on exactly one, two or three lines are determined by calculating areas between certain curves. These notes show the regions whose areas solve the problem in two particular cases for long needles. Ideas can be easily adapted to the general case. The requirements to understand this work are integral calculus and elementary concepts of probability, so it turns out to be an accessible application for undergraduate students.*

Keyword: *Buffon's needle, calculus applications, probability, mathematics education*

1. tmontiel@uaeh.edu.mx

INTRODUCCIÓN

Es importante en la formación matemática de los estudiantes universitarios el adquirir competencias de pensamiento crítico y creativo y no enfocarlos únicamente a la memorización de métodos y algoritmos. En la materia de cálculo integral, al calcular áreas de regiones por medio de integrales definidas, aparte de aprender las técnicas necesarias puede ser muy enriquecedor mostrar su utilidad en otras áreas. Ya que el cálculo de las probabilidades de que ocurran los eventos deseados en el problema de la guja de Buffon se reduce al cálculo de áreas de ciertas regiones, este problema es adecuado para poder apreciar una aplicación del cálculo de áreas. Es el análisis del problema lo que llevará al estudiante a encontrar las funciones y las regiones apropiadas de integración, es decir, encontrar el modelo matemático necesario para poder llegar a la solución. El problema de la aguja de Buffon puede ayudar a lograr los objetivos anteriores, además de que su planteamiento es muy ilustrativo y fácil de realizar en un salón de clase.

El problema clásico de la aguja de Buffon requiere calcular la probabilidad de que una aguja de longitud l , al caer en un piso con líneas paralelas separadas entre sí una distancia d , cruce al menos una línea. Cuando $l < d$ se le suele llamar el problema de la aguja corta, de otra forma es conocido como el problema de la aguja larga (figuras 2 y 3).

Para abordar este problema en clase, se puede proporcionar al grupo cinta y palillos de longitud l (figura 1). Se marcan en el piso líneas paralelas separadas una distancia d . Después de lanzar los palillos sobre las líneas, proceder a contar cuántos quedaron sobre alguna de las paralelas y así ilustrar el planteamiento del problema. Si se desea, reservar los resultados para compararlos después con los obtenidos al calcular las probabilidades. Es pertinente observar que en estas notas no se realiza el análisis estadístico del experimento descrito.

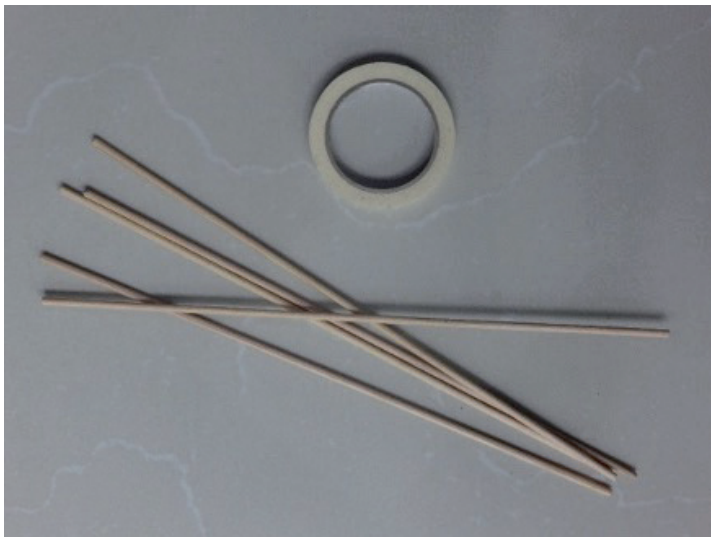
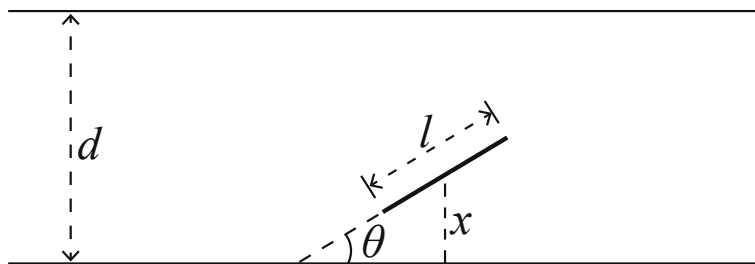


Figura 1. Cinta y palillos.

Figura 2.
Aguja corta.



Las soluciones del problema de la aguja de Buffon corresponden al área entre las gráficas de ciertas funciones. Por ejemplo, la región cuya área da la solución del problema clásico de Buffon para una aguja corta es la mostrada en la figura 4, esta puede verse en Arnow (1994), Mathai (1999), Schroeder (1974) y en Uspensky (1937) y en la página de Internet de Rezhdo (2011). En el caso de tener una aguja larga la región que da la solución es la mostrada en la figura 5, la cual puede verse en Schroeder (1974) y en la página de Internet previamente mencionada. La solución para el caso general en que $nd < l < (n+1)d$, donde n es un número entero positivo, puede verse en Mathai y Solomon (1978), sin embargo, no se muestran las regiones cuyas áreas dan las soluciones en casos particulares de n y mucho menos en el caso general.

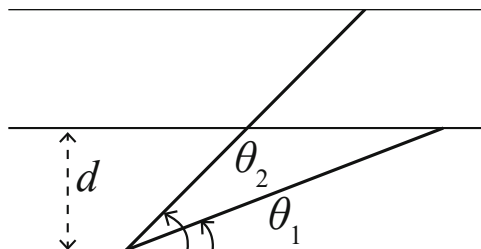


Figura 3. Aguja larga

Al dar relaciones más explícitas para l y d , se pueden calcular probabilidades más específicas. Por ejemplo, si $2d < l < 3d$ es posible determinar las probabilidades de que la aguja termine cruzando exactamente una, dos o tres líneas (figura 7).

En este trabajo son mostradas las regiones cuyas áreas dan todas las probabilidades cuando $d < l < 2d$ y cuando $2d < l < 3d$, las ideas detrás de las soluciones son fácilmente generalizadas para otros casos. Como se verá, los cálculos necesarios se reducen al cálculo de áreas entre gráficas de funciones. Esto es, para estudiar este problema solo se requieren conocimientos básicos de probabilidad y de cálculo integral, por lo que puede presentarse como una aplicación accesible en un curso de cálculo integral.

Las dos variables que determinan completamente la posición de la aguja en un piso con líneas paralelas se muestran en la figura 2. Una de ellas es la distancia x del punto medio de la aguja a la línea más cercana, con $0 \leq x \leq \frac{d}{2}$. La otra es el ángulo θ formado por la aguja y la horizontal (las paralelas), con $0 \leq \theta \leq \pi$. Por lo que, todas las posibles posiciones de la aguja corresponden a los puntos del rectángulo $I = [0, \pi] \times [0, \frac{d}{2}]$. En lo sucesivo, se consideran a x y a θ como las realizaciones de las variables aleatorias X y Θ , independientes y uniformemente distribuidas en los intervalos mencionados. Esto quiere decir, dado que el área del rectángulo I es $\pi d/2$, si S es una región en el rectángulo I con área $|S|$, la probabilidad de que S ocurra es $|S|/(\pi d/2)$.

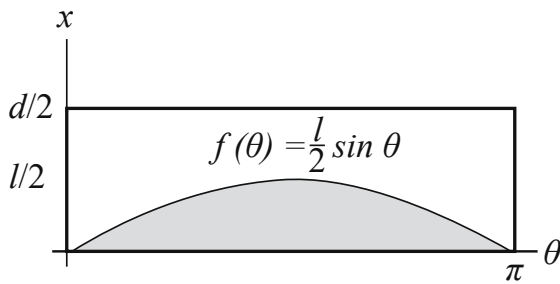


Figura 4.
Región para aguja corta

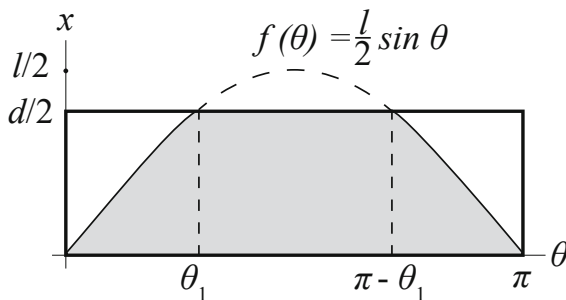


Figura 5.
Región para aguja larga

A continuación, en la primera sección se mencionan las probabilidades de que la aguja corte al menos una línea en los casos de tener una aguja corta y una aguja larga. En la segunda sección se dan condiciones más específicas para l y d que permitan calcular las probabilidades de que la aguja termine sobre una, dos o tres líneas paralelas, según sea el caso. Se concluye mostrando la generalización más conocida del problema, el de la aguja de Laplace-Buffon.

Probabilidad de cruzar al menos una línea

Los siguientes cálculos se encuentran ampliamente en la literatura, sin embargo, aquí se muestran para tener una idea completa del problema de la aguja de Buffon.

El problema clásico de Buffon pide calcular la probabilidad de que la aguja de longitud l caiga sobre al menos una de las líneas paralelas del piso separadas entre sí una distancia d .

Primero, en el caso de tener una aguja corta $l < d$, al fijar un valor de θ la aguja corta al menos una línea cuando x cumple $0 \leq x \leq \frac{1}{2} l \text{ sen } \theta$ (figura 2). Luego, al variar el ángulo de inclinación θ de la aguja, sus posibles valores están en el intervalo $0 \leq \theta \leq \pi$, así se obtienen todas las parejas ordenadas (θ, x) en las cuales la aguja corta al menos una línea, esta región es precisamente el área bajo la gráfica de la función $f(\theta) = \frac{1}{2} l \text{ sen } \theta$ en el intervalo $[0, \pi]$, precisamente la región sombreada en la figura 4. Entonces, la probabilidad de que una aguja corta termine cruzando al menos una línea es

$$P_c = \frac{2}{\pi d} \int_0^\pi \frac{l}{2} \text{sen } \theta \, d\theta = \frac{2l}{\pi d}.$$

Y la probabilidad de no cortar ninguna línea es $1 - P_c$.

Cuando $l = d$ se tiene la solución

$$P_c = \frac{2}{\pi},$$

que ha cautivado a muchas personas por generaciones debido a su relación simple con el número π , dando lugar a simulaciones para aproximar éste número, por ejemplo se sugiere ver las simulaciones mostradas en la página de MSET (2015).

Ahora el caso de tener una aguja larga $d < l$: si el extremo inferior de la aguja toca una de las paralelas y si θ_1 es el ángulo en el cual $\frac{l}{2} \text{sen } \theta_1 = \frac{d}{2}$ (figura 3), esta corta al menos una línea si su ángulo de inclinación θ está entre θ_1 y $\pi - \theta_1$. Al mover esta aguja hacia arriba, ésta seguirá cortando al menos una línea si x cumple $0 \leq x \leq \frac{l}{2} \text{sen } \theta$, pero teniendo cuidado de que x se mantenga en el rectángulo $I = [0, \pi] \times [0, d/2]$. Con lo cual, la probabilidad de que la aguja corte al menos una línea es la región bajo la gráfica de la función $f(\theta) = \frac{l}{2} \text{sen } \theta$ y dentro del rectángulo I (figura 5), por simetría, esta es

$$\begin{aligned} P_L &= \frac{2}{\pi d} \left[\frac{d}{2} (\pi - 2\theta_1) + 2 \int_0^{\theta_1} \frac{l}{2} \text{sen } \theta \, d\theta \right] = 1 - \frac{2\theta_1}{\pi} + \frac{2l}{\pi d} (1 - \cos \theta_1) \\ &= 1 - \frac{2}{\pi} \arcsen \left(\frac{d}{l} \right) + \frac{2l}{\pi d} - \frac{2}{\pi d} \sqrt{l^2 - d^2}. \end{aligned}$$

Para la última igualdad, la identidad $\text{sen } \theta_1 = d/l$ corresponde a un triángulo rectángulo con hipotenusa l , cateto opuesto d y cateto adyacente $\sqrt{l^2 - d^2}$, respecto a θ_1 , dando así que $\theta_1 = \arcsen(d/l)$ y que $\cos \theta_1 = \sqrt{l^2 - d^2}/l$.

Probabilidad de cruzar exactamente m líneas

Cuando se deja caer una aguja larga en un piso con líneas paralelas esta puede terminar cruzando más de una línea. Si se desea calcular la probabilidad de cruzar un número exacto de líneas simplemente se necesita especificar la relación entre la aguja y la distancia entre las líneas paralelas, por ejemplo, si $d < l < 2d$ o si $2d < l < 3d$. Estos casos corresponden a agujas largas, por lo que las regiones se encuentran en la región sombreada de la figura 5. A continuación se analizan estos dos casos particulares.

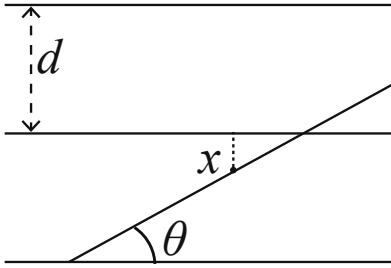


Figura 6. $d < l < 2d$

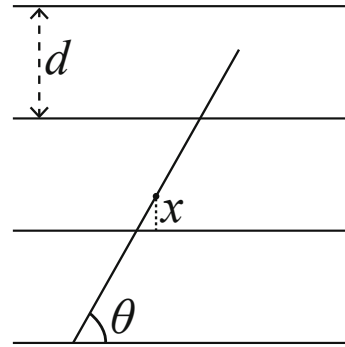


Figura 7. $2d < l < 3d$

- a) $d < l < 2d$: cuando esto ocurre la aguja puede cruzar exactamente una, dos o ninguna línea (figura 6). Para la probabilidad de cruzar exactamente dos líneas primero coloque uno de los extremos de la aguja sobre una de las líneas. Se puede observar que la aguja cruzará dos líneas si su ángulo de inclinación θ cumple $\theta_1 < \theta < \pi - \theta_1$, donde $l \text{ sen } \theta_1 = d$ (figura 3). Al fijar un ángulo θ de este intervalo resulta que $d = x + \frac{l}{2} \text{ sen } \theta$. Si la aguja se mueve hacia abajo los valores de x en los que la aguja sigue intersectando dos líneas son los que cumplen $d - \frac{l}{2} \text{ sen } \theta < x < d/2$. Estas dos condiciones corresponden a la región con sombra punteada de la figura 8. Por simetría, la probabilidad de que la aguja, al caer en el piso, termine cruzando exactamente dos líneas es

$$P_2 = \frac{2}{\pi d} \int_{\theta_1}^{\pi/2} \left[\frac{d}{2} - \left(d - \frac{l}{2} \text{ sen } \theta \right) \right] d\theta = \frac{2\theta_1}{\pi} - 1 + \frac{2l}{\pi d} \cos \theta_1$$

$$= \frac{2}{\pi} \arcsen \left(\frac{d}{l} \right) - 1 + \frac{2}{\pi d} \sqrt{l^2 - d^2}.$$

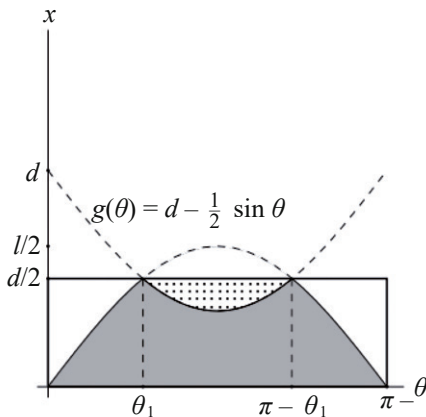


Figura 8. Región cuando $d < l < 2d$

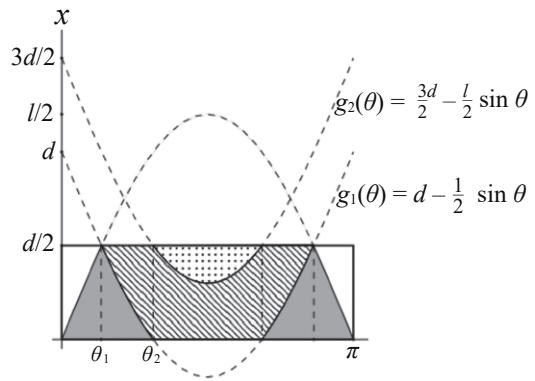


Figura 9. Región cuando $2d < l < 3d$

Con esto, la aguja termina cortando una sola línea con probabilidad $P_1 = P_L - P_2$, precisamente la región sombreada de la figura 8, quedando

$$\begin{aligned} P_1 &= \frac{2l}{\pi d} - 2 \left(\frac{2}{\pi} \arcsen \left(\frac{d}{l} \right) - 1 + \frac{2}{\pi d} \sqrt{l^2 - d^2} \right) \\ &= \frac{2l}{\pi d} - 2P_2. \end{aligned}$$

Y la probabilidad de no cortar ninguna línea es

$$\begin{aligned} P_0 &= 1 - P_L = \frac{2}{\pi} \arcsen \left(\frac{d}{l} \right) - \frac{2l}{\pi d} + \frac{2}{\pi d} \sqrt{l^2 - d^2} \\ &= 1 - \frac{2l}{\pi d} + P_2. \end{aligned}$$

b) $2d < l < 3d$: en este caso la aguja puede cortar una, dos, tres o ninguna línea (figura 7). Considere para este caso $\theta_1 = \arcsen(d/l)$ y $\theta_2 = \arcsen(2d/l)$ (figura 3). Siguiendo argumentos similares al caso anterior, la aguja termina sobre exactamente tres líneas cuando $\theta_2 \leq \theta \leq \pi - \theta_2$ y $0 \leq x \leq \frac{l}{2} \sen \theta - d$, como $\frac{l}{2} \sen \theta - d = \frac{d}{2} - \left(\frac{3d}{2} - \frac{l}{2} \sen \theta \right)$, resulta ser la región sombreada con puntos de la figura 9. Lo que da la probabilidad

$$\begin{aligned} p_3 &= \frac{4}{\pi d} \int_{\theta_2}^{\pi/2} \left(\frac{l}{2} \sen \theta - d \right) d\theta = \frac{2l}{\pi d} \cos \theta_2 - 2 + \frac{4\theta_2}{\pi} \\ &= \frac{2}{\pi d} \sqrt{l^2 - 4d^2} - 2 + \frac{4}{\pi} \arcsen \left(\frac{2d}{l} \right). \end{aligned}$$

En el caso en que la aguja termine sobre exactamente dos líneas la probabilidad p_2 es precisamente el área de la región sombreada con líneas de la figura 9, dando

$$\begin{aligned} p_2 &= \frac{4}{\pi d} \left[\int_{\theta_1}^{\theta_2} \left[\frac{d}{2} - \left(d - \frac{l}{2} \sen \theta \right) \right] d\theta + \int_{\theta_2}^{\pi/2} \left(\frac{3d}{2} - \frac{l}{2} \sen \theta \right) d\theta \right] \\ &= \frac{2l}{\pi d} (\cos \theta_1 - 2 \cos \theta_2) + 3 + \frac{2}{\pi} (\theta_1 - 4\theta_2) \\ &= \frac{2}{\pi d} (\sqrt{l^2 - d^2} - 2\sqrt{l^2 - 4d^2}) + 3 + \frac{2}{\pi} \left[\arcsen \left(\frac{d}{l} \right) - 4 \arcsen \left(\frac{2d}{l} \right) \right]. \end{aligned}$$

Finalmente, por la región sombreada de la figura 9, puede verse que la probabilidad de que la aguja termine cruzando exactamente una línea es

$$p_1 = P_L - p_3 - p_2 = \frac{2l}{\pi d} - 2p_2 - 3p_3,$$

y la probabilidad de no cruzar ninguna línea es, en este caso,

$$p_0 = 1 - P_L = 1 - \frac{2l}{\pi d} + p_2 + 2p_3.$$

Se invita a la lectora o al lector a encontrar las probabilidades de que al lanzar una aguja con $3d < l < 4d$ esta termine cruzando una, dos, tres o cuatro líneas, las regiones se pueden encontrar a partir de la figura 10.

La solución del caso general, cuando $nd < l < (n-1)d$, resulta ahora más natural. Esta puede verse en Mathai (1999).

El problema de Laplace-Buffon

Una de las generalizaciones más conocidas del problema clásico de la aguja de Buffon es el problema de la aguja de Laplace-Buffon, donde la aguja se deja caer en un piso con líneas paralelas y perpendiculares, es decir, con rectángulos de altura a y base b , $b < a$ (figura 11). Este problema se encuentra en Arnow (1994), Mathai (1999), Solomon (1978) y en Uspensky (1973) para agujas cortas, es decir que $l < b < a$. En los cálculos de las soluciones de este caso hay que encontrar volúmenes de regiones entre ciertas funciones bidimensionales dentro de un paralelepípedo. Las regiones cuyos volúmenes dan la probabilidad de que una aguja corta termine sobre al menos una línea se encuentran en el artículo de Arnow (1994), aunque las secciones que se emplean para el cálculo del volumen son rectángulos, y no círculos como afirma Arnow (figura 12).

Muy brevemente, si $l < b < a$, las variables involucradas se encuentran en los rectángulos $0 < x < a/2$, $0 < y < b/2$, y $0 < \theta < \pi/2$. El volumen del paralelepípedo es $\frac{ab\theta}{8}$. Fijando θ , la aguja corta la línea inferior si $0 < x < \frac{l}{2} \cos \theta$ y la aguja corta la línea a la derecha si $0 < y < \frac{l}{2} \sin \theta$ (figura 11).

La probabilidad de que la aguja corte una línea horizontal es

$$R_1 = \frac{8}{ab\pi} \int_0^{b/2} \int_0^{\pi/2} \frac{l}{2} \cos \theta \, d\theta \, dy$$

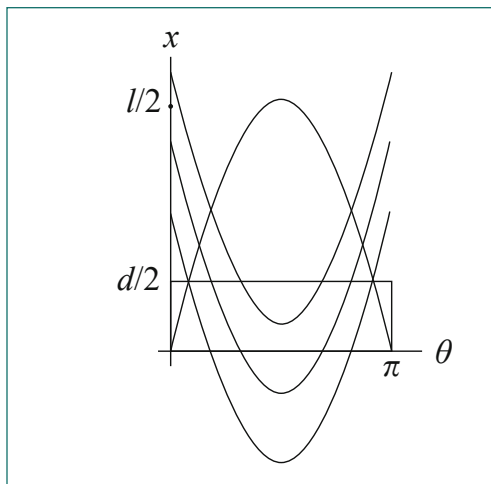


Figura 10. Sugerencia para el caso $3d < l < 4d$.

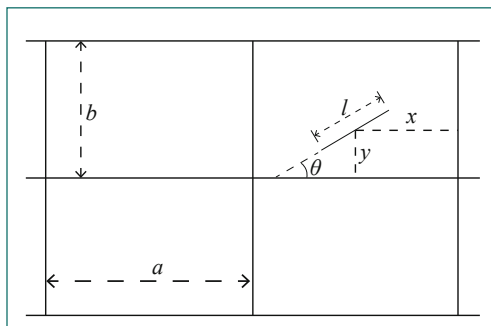


Figura 11. Laplace-Buffon con aguja corta.

Que corte una línea vertical

$$R_2 = \frac{8}{ab\pi} \int_0^{a/2} \int_0^{\pi/2} \frac{l}{2} \operatorname{sen} \theta \, d\theta \, dx$$

Y la parte en que se intersecan las regiones es

$$R_3 = \frac{8}{ab\pi} \int_0^{\pi/2} \int_0^{\frac{1}{2}l \cos \theta} \int_0^{\frac{1}{2}l \operatorname{sen} \theta} dy \, dx \, d\theta$$

La probabilidad de que la aguja corte al menos una línea es

$$P_1 = R_1 + R_2 - R_3 = \frac{2l(a+b) - l^2}{ab\pi}$$

Y la probabilidad de no cortar línea alguna es $1 - P_1$.

En el artículo de Duma (1999) pueden encontrarse soluciones para agujas largas cuando el piso está teselado con paralelogramos, triángulos y hexágonos, por supuesto, este artículo es avanzado para estudiantes de los primeros semestres de licenciatura. Algunos de estos casos particulares se mostrarán en un artículo posterior.

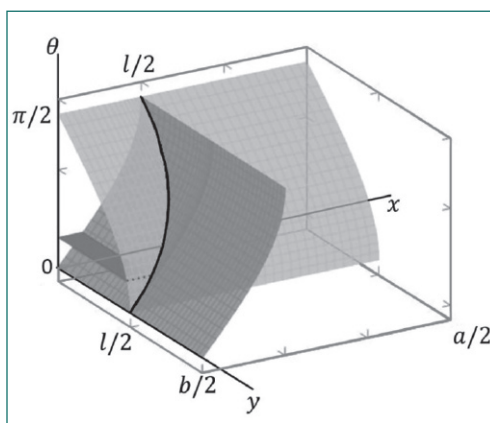


Figura 12. Regiones para Laplace-Buffon con aguja corta.

CONCLUSIONES

En este artículo se plantea una aplicación accesible del cálculo integral a la probabilidad con el problema de la aguja de Buffon. Cuando se aborda el tema del cálculo de áreas de regiones en la materia de cálculo integral en la universidad, aparte de aprender las técnicas necesarias es importante que el estudiante pueda ver una aplicación de lo visto. En sí, las probabilidades necesarias en el problema de la aguja de Buffon para agujas cortas y largas puede resolverse calculando áreas bajo ciertas curvas. Pero, en este artículo resulta ser aún más enriquecedora la aplicación, ya que además del caso clásico, se aborda el problema de calcular las probabilidades de que una aguja larga termine sobre exactamente una, dos o tres líneas, y estas probabilidades se determinan calculando áreas entre ciertas curvas.

Este problema tiene un planteamiento muy ilustrativo y fácil de realizar en un salón de clases. Bajo la guía del profesor, el estudiante puede encontrar las regiones necesarias cuyas áreas dan las probabilidades que resuelven los diversos casos del problema de la aguja de Buffon, es decir, los modelos matemáticos necesarios para resolver el problema. Las ideas pueden adaptarse fácilmente al caso general permitiendo al profesor llegar tan lejos como desee. Los conceptos de probabilidad son elementales, por lo que este problema puede ser planteado en un curso de cálculo integral, aún si los estudiantes no han tomado un curso universitario de probabilidad. Por todo lo anterior, este es un problema que puede contribuir en las competencias de pensamiento crítico y creativo del estudiante.

AGRADECIMIENTOS

La autora agradece al Dr. Aarón V. Reyes Rodríguez sus acertados comentarios que ayudaron a mejorar este trabajo. Así también, agradece las valiosas sugerencias del evaluador que contribuyeron a esclarecer algunos puntos del artículo.

REFERENCIAS

- Arnou, B. A. (Enero 1994). On Laplace's Extension of the Buffon Needle Problem. *The College Mathematical Journal*, Vol. 25, No. 1, 40– 43. DOI: 10.2307/2687085. <http://www.jstor.org/stable/2687085>
- Duma, A. (1999). Problems of Buffon type for 'non-small' needle. *Rendiconti del Circolo Mathematico di Palermo*, Serie II, Tomo XLVIII, pp 23 – 40.
- Mathai, A. M. (1999). *An Introduction to Geometrical Probability: Distributional Aspects with Applications*. Gordon and Breach Science Publishers, Singapore.
- MSET (2015). Buffon's Needle. An Analysis and Simulation. The Mathematics, Science, and Technology Education (MSTE), division of the College of Education at the University of Illinois. Recuperado 28 de enero de 2020, de <https://mste.illinois.edu/activity/buffon/#schroeder>
- Rezhdo, A. (Noviembre 2011) Buffon's needle problem. Recuperado el 28 de enero de 2020, de https://math.dartmouth.edu/archive/m20f11/public_html/Projects.html
- Solomon, H. (1978). *Geometric Probability*. SIAM.
- Schroeder, L. (1974). Buffon's needle problem: An exciting application of many mathematical concepts. *Mathematics Teacher*, 67 (2), 183– 186.
- Uspensky, J. V. (1937). *Introduction to Mathematical Probability*. New York: McGraw-Hill.

Arte y Matemáticas: Áreas y figuras equivalentes en la obra gráfica de Micah Lexier

Vicente MEAVILLA SEGUÍ

Catedrático de Matemáticas jubilado

Doctor en Filosofía (Pedagogía)

vmeavill@hotmail.com

1. INTRODUCCIÓN

La presencia de las Matemáticas en algunas obras de arte es un hecho incontrovertible avalado por múltiples ejemplos a lo largo de los siglos.

En este artículo, el primero de una serie que tenemos *in mente*, presentamos la obra de un artista contemporáneo que utiliza programas informáticos, los símbolos aritméticos básicos y algunos conceptos matemáticos elementales para construir interesantes obras de carácter conceptual.

Creemos que el conocimiento de materiales artísticos de este tipo ofrece, tanto a profesores como alumnos, una oportunidad para acercarse a las Matemáticas por un camino que, de ordinario, no se suele transitar.

2. LOS DÍGITOS EQUIVALENTES DE MICAH LEIXER

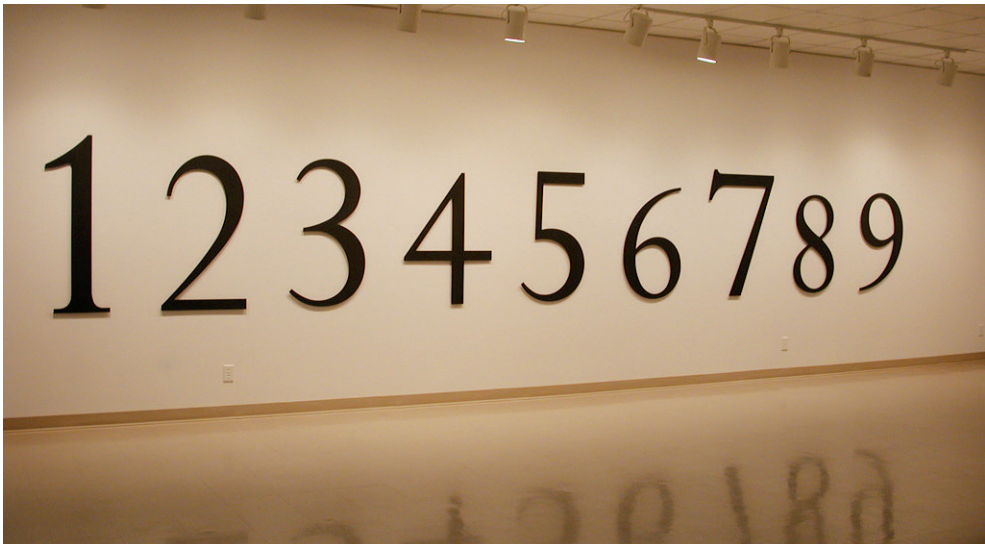
El canadiense Micah Leixer (1960), representante del arte conceptual, tiene diversas obras en las que los números dígitos juegan un papel capital.

Así, en la composición *All numbers are equal (Perpetua)*¹, con la ayuda de un programa informático, calcula el área de cada uno de los números dígitos (menos el cero). Después, los transforma (manteniendo su forma original) hasta que todos los símbolos son equivalentes [= tienen la misma área] al 1.

1. La serie *All numbers are equal* se inició en el año 2000. Todas las fotografías de este artículo han sido cedidas por el autor.



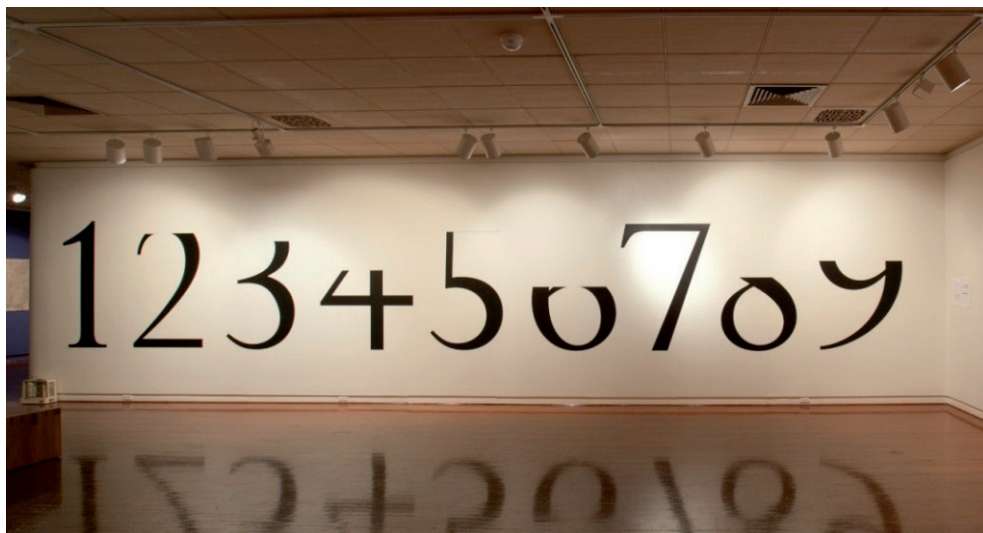
Micah Lexier



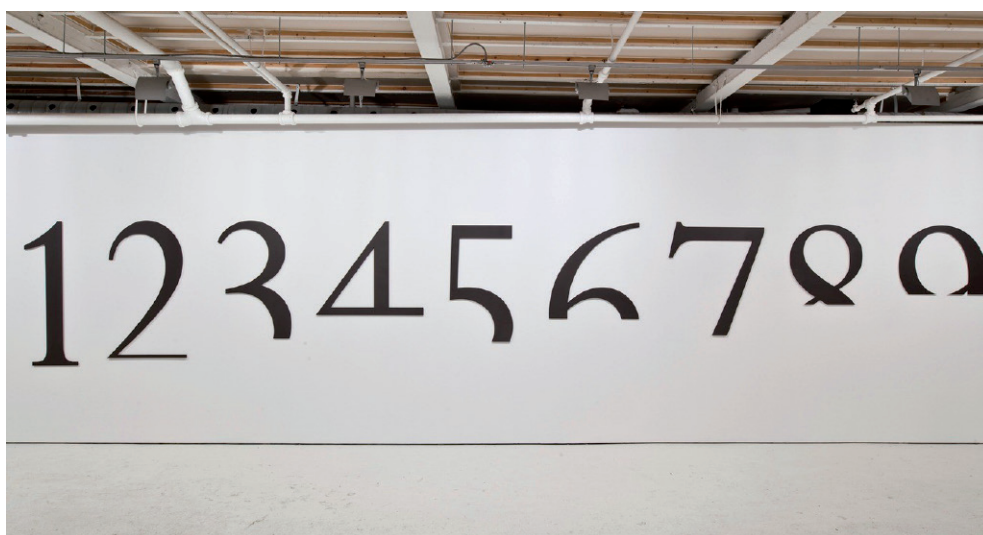
All Numbers are equal (Perpetua)

Por otro lado, en su *All numbers are equals (Cut from top)*, el artista canadiense mantiene la forma primigenia del 1 y mediante cortes horizontales (de arriba hacia abajo) transforma los ocho numerales restantes hasta que cada uno tiene la misma área que el 1.

De forma similar, en su *All numbers are equal (Cut from bottom)*, Micah mantiene la forma del 1 y mediante cortes horizontales (de abajo hacia arriba) transforma los ocho numerales restantes hasta que cada uno es equivalente al 1.



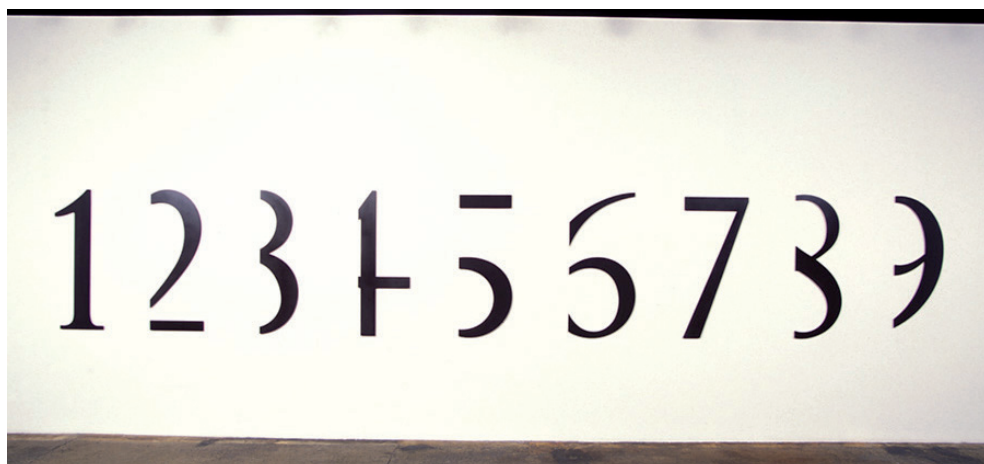
All numbers are equal (Cut from top)



All numbers are equal (Cut from bottom)

Por último, en la obra *All numbers are equal (Four ways)*, Micah Leixier presenta cuatro filas con los dígitos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 8 y 9, ordenados según el orden natural.

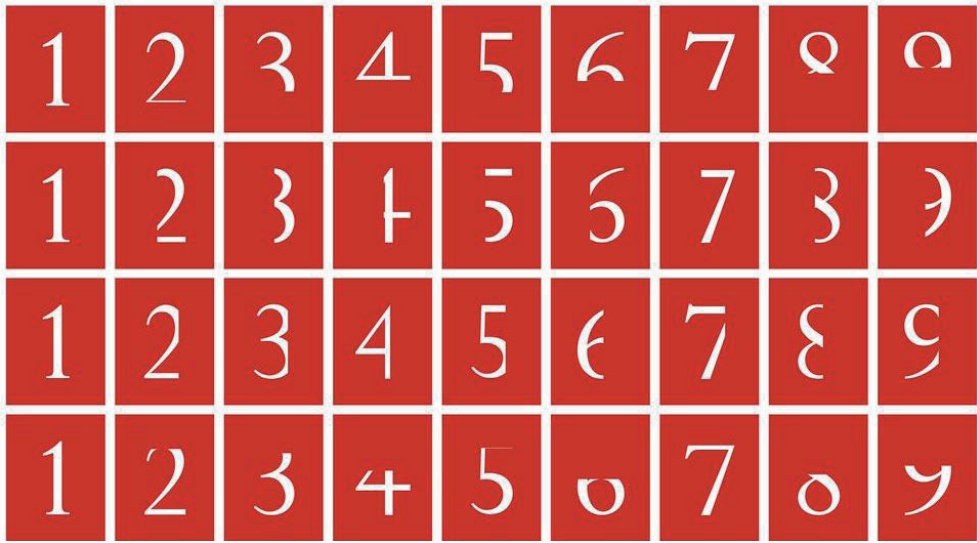
En cada una de ellas el 1 mantiene su forma. Los restantes dígitos se cortan convenientemente mediante cortes horizontales (primera y cuarta filas) y verticales (segunda y tercera filas) de modo que cada uno de ellos sea equivalente al 1.



All numbers are equal (Cut from left)



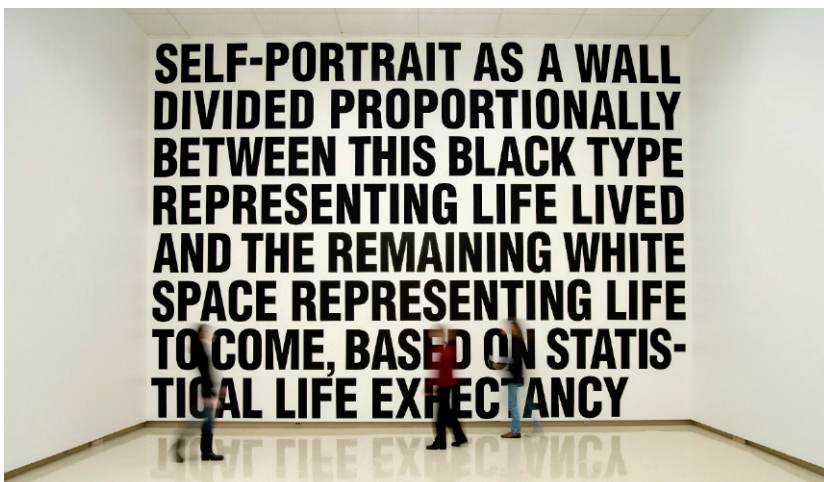
All numbers are equal (Cut from left)



All numbers are equal (Four ways)

2. AUTORRETRATO VITAL

Utilizando un procedimiento de cálculo informático similar al del apartado anterior, Micah diseña un «autorretrato vital» con apariencia de un muro dividido proporcionalmente entre el negro de las letras, que representa la vida ya vivida, y el blanco de la superficie restante, que representa el porvenir. Este reparto proporcional se apoya en estudios estadísticos sobre la esperanza de vida.



Autorretrato vital en inglés



Autorretrato vital en francés



Autorretrato vital en alemán

REFERENCIAS

- Meavilla Seguí, V. (2007). *Las matemáticas del arte. Inspiración ma(r)temática*. Córdoba: Editorial Almuzara, S. L.
- Meavilla Seguí, V. (2016). *El arte de las matemáticas*. Córdoba: Guadalmazán.

REFERENCIAS ONLINE

Micah Lexier

<www.micahlexier.com/>

<<https://www.umanitoba.ca/schools/art/content/galleryoneoneone/lexier2.html>>

<<https://archive.bridgesmathart.org/2014/bridges2014-65.pdf>>

RINCÓN “SAPERE AUDE”.... ¿resolviendo problemas?

Sixto Romero

Escuela Técnica Superior de Ingeniería

Universidad de Huelva

sixto@uhu.es

1. MATEMÁTICAS EN EL SIGLO XVII

1.1. La creación de nuevas herramientas de gran recorrido en el siglo XVII

No puede quedar en el olvido, antes de analizar los nuevos progresos en el siglo XVII, y para finalizar con las matemáticas del Renacimiento, el extraordinario progreso de los métodos de cálculo algebraico obtenido por Adriann Van Roomen, más conocido con el nombre de Adrianus Romanus, nacido en Lovaina en 1562, murió en Mainz en 1615.

Médico y matemático holandés, enseñó medicina y matemáticas en Lovaina, luego fue profesor y doctor en matemáticas en Würzburg, y obispo de esta ciudad, finalmente hizo una estancia prolongada en Polonia como matemático del rey. Sus trabajos versaron principalmente sobre geometría y trigonometría plana y esférica. Propuso y dio solución a una ecuación algebraica de grado 45. Calculó el número Pi con quince decimales, 3.141592653589793. Entre sus obras destacan *Ideae mathematicae* (1593) y *Canon triangulorum sphericorum* (1609).

La aritmética, álgebra, geometría e incluso la antigua herencia de los griegos, volverán a hacer nuevos progresos, pero “el remate” o ábaco de las creaciones de las matemáticas del siglo XVII son: la geometría analítica, debido a Descartes y que trata las propiedades geométricas ‘una figura que utiliza los procesos ordinarios del álgebra, y



Figura 1. Adriann Van Roomen.
<http://www.cosmovisions.com/mathematiquesChrono.htm>



Figura 2. Placa conmemorativa a Adriaan Von Roomen en la Colegiata de Neumünster de Wurzburg (Alemania). [https://commons.wikimedia.org/wiki/Category:Adriaan_van_Roomen_\(mathematician\)](https://commons.wikimedia.org/wiki/Category:Adriaan_van_Roomen_(mathematician)).

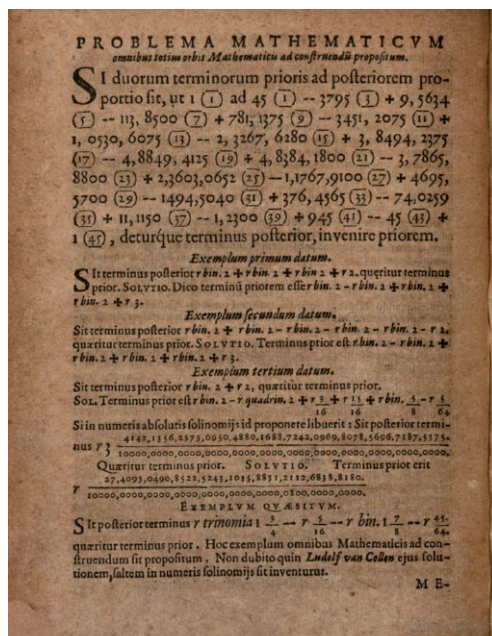
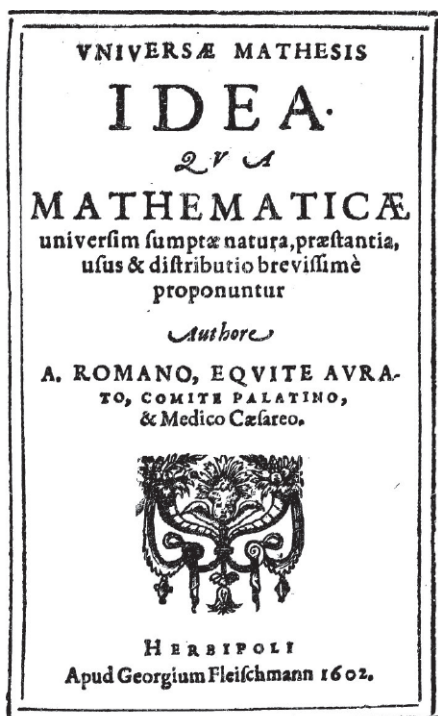


Figura 3. Portada y Página del prefacio de la obra de Van Roomen *Ideae mathematicae*. [https://commons.wikimedia.org/wiki/Category:Adriaan_van_Roomen_\(mathematician\)](https://commons.wikimedia.org/wiki/Category:Adriaan_van_Roomen_(mathematician))

especialmente el cálculo infinitesimal, elaborado por Cavalleri (al transformar el método de agotamiento de Arquímedes, conduce a su geometría de indivisibles), Fermat y Barrow (método de tangentes) y fundado por Newton y Leibniz aumentará prodigiosamente el poder de las matemáticas. No se abrió nuevos campos solo en matemáticas puras, sino también en mecánica y física. De esta manera se encontró la solución definitiva a algunos problemas que venían reelaborándose desde antiguo: *centros de gravedad, cuadraturas y cubaturas de figuras planas y espaciales*, principalmente. Estos viejos problemas encerraban *el tratamiento de lo infinito y lo continuo*, considerándose herederos de una tradición que se remontaba como se ha indicado, ut supra, a la Grecia Antigua.

1.1.1. Logaritmos

Aunque la aritmética india y la notación de fracciones decimales reducen los cálculos numéricos al mayor grado de simplicidad, estos cálculos aún serían a menudo muy difíciles e incluso impracticables por su longitud, si Neper no hubiera “imaginado” los logaritmos, mediante los cuales todas las operaciones se reducen, por así decirlo, en un grado.

John Napier, llamado Neper, es un matemático nacido en el castillo de Merchiston, cerca de Edimburgo (Escocia), en 1550, murió en Merchiston el 4 de abril de 1617. Hijo de Archibald Napier, director de la Casa de la Moneda de Escocia, se crio en la Universidad de Saint Andrew y completó sus estudios en Francia e Italia.



Figura 4. John Napier. <https://www.biografiasyvidas.com/biografia/n/napier.htm>

A los veintidós años se casó con Elisabeth Stirling de Keir y se instaló con ella en Gartnes, en un castillo situado en uno de los rincones más pintorescos de Escocia. Allí llevó la vida pacífica del terrateniente, que apenas se vio perturbada excepto por discusiones sobre la herencia, tras la muerte de su padre, por experimentos agrícolas, que no siempre tuvieron éxito, y por una controversia religiosa bastante amarga. Como todo buen británico, se sintió obligado a contar a los *papistas* sus hechos y denunciarlos en público. Y no contento con dirigir panfletos contra ellos, inventó para defender a Inglaterra de las *empresas enemigas* de Dios y de la verdadera religión ¡dos espejos relucientes, un cañón y una especie de ametralladora!

Napier tuvo de Elisabeth Stirling un hijo, Archibald (1576-1645), que fue Tesorero de Escocia y una hija, de su segunda esposa, Agnes Chisholm, tuvo cinco hijos.

La base de los llamados logaritmos naturales del nombre del autor es el número $e = 2.7182818$. describe su descubrimiento en su *Logarithmorum canonis descriptio* (Edimburgo, 1614), pero sin explicar los medios empleados para lograrlo. Simplemente apela

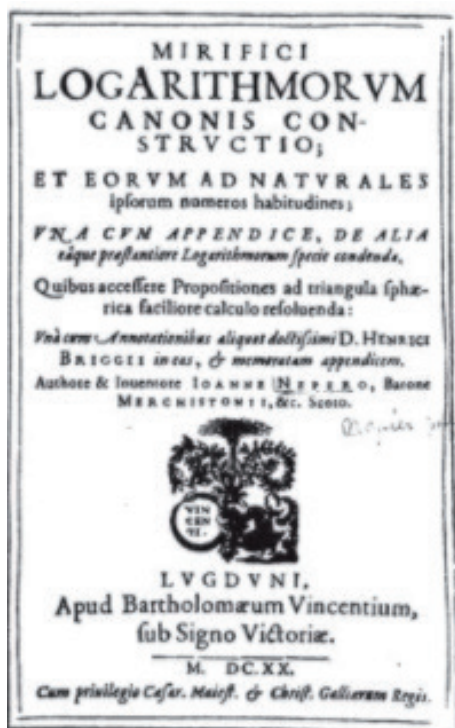


Figura 5. *Mirifici logarithmorum*.

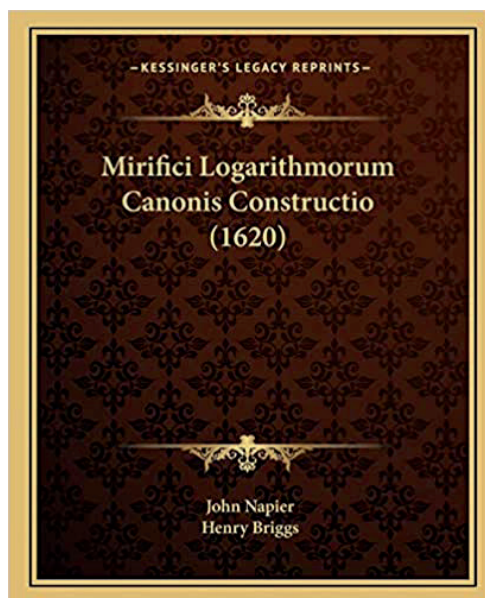


Figura 6. *Mirifici logarithmorum canonis constructio* (1620) *canonis constructio* (1620).
Kessinger Pub (2010).

a consideraciones mecánicas, e incluso los logaritmos conocidos hoy como neperianos parecen haber sido imaginados por Speidel. Tras su fallecimiento, su hijo publicó la obra, *Mirifici logarithmorum canonis constructio* (Lyon, 1620), que revelaba los procesos implementados por su padre.

Henry Briggs, profesor del Gresham's College, Oxford, tiene la idea de tomar 10 como base del sistema de logaritmos, y calcula la primera tabla de logaritmos de los números del 1 al 1000 con 14 decimales (1618). En su *Arithmetica logarithmica* (1624), completó este ensayo dando los logaritmos de 1 a 20.000 y de 90.000 a 100.000. En 1628, Vlacq llena el hueco de 20.000 a 90.000 estableciendo tablas con 10 decimales que contienen, además de los logaritmos de los números de 1 a 100.000, los logaritmos de los senos, tangentes y secantes, calculados minuto a minuto para todos los grados de un cuarto de círculo (1633). Este libro fue la fuente para sus sucesores, durante los siglos siguientes: Callet (1783), Lalande (1802), Prony y Schroen, por nombrar sólo los más famosos.

Hasta la llegada de los ordenadores electrónicos en la segunda mitad del siglo XX, los logaritmos mantuvieron la mejor manera de hacer frente a los complicados cálculos numéricos.

A Napier siempre le habían gustado las abstracciones matemáticas. Dedicaba todo su tiempo libre a estos estudios, y sólo lo distraía el ardor de su pasión religiosa. En 1594 inventó los logaritmos, descubiertos casi al mismo tiempo por Juste Byrge, y utilizó los últimos veinte años de su existencia para desarrollar su teoría, perfeccionar el método y calcular tablas. Es superfluo insistir aquí en los méritos de estas obras que, gracias a la activa propaganda de Kepler, lograron los



Figura 7. *Mirifici logarithmorum canonis descriptio*. Ed. 2010. Early History of logic Science and Math.



Figura 8. *Mirifici logarithmorum canonis descriptio*. Ed. A., G. Cadorino. Edinburghe; Padua, 1667.

mayores avances en astronomía y ciencias exactas y marcaron una fecha en la historia de las ciencias.

Los escritos de Napier son: *Un simple descubrimiento de toda la Revelación de St-John* (Edimburgo, 1594), traducido al holandés, al francés (La Rochelle, 1602) y al alemán; *De Arte logistica* (1839); *Mirifici logarithmorum canonis descriptio* (1614, y Lyon, 1620) traducido al inglés en 1616; *Mirifici logarithmorum canonis constructio* (1620), traducido al inglés en 1889; *Rabdologiae seu numerationis per virgulas libri duo* (1617), que contiene los principios sobre los que se fundaron las máquinas de calcular.

Se recuerda también a Napier en la historia de la trigonometría por haber encontrado importantes relaciones entre los elementos de los triángulos planos (teorema de Napier) y entre los de los triángulos esféricos (analogías de Napier).

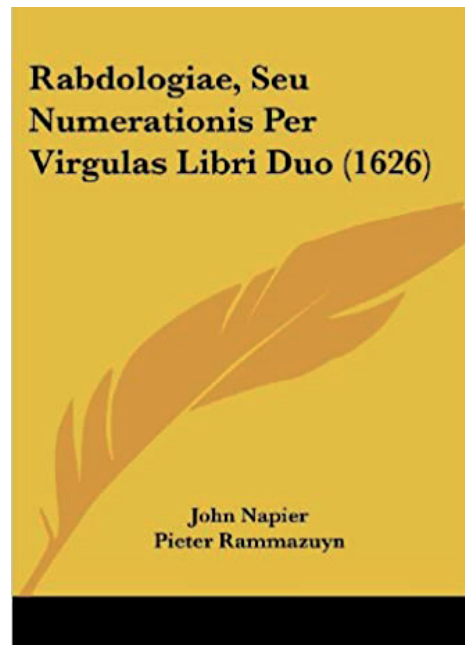


Figura 9. *Rabdologiae seu numerationis per virgulas libri duo*. Ed. Kessinger Publishing (2009).



Fig. 10. Jost Bürgi. https://es.wikipedia.org/wiki/Joost_B%C3%BCrgi#/media/Archivo:Jost_B%C3%BCrgi_Portr%C3%A4t.jpg

Joost Bürgi o Jobst Bürgi (también conocido por su forma latinizada Byrgius) (28 de febrero de 1552, Lichtentegg, Suiza - 31 de enero de 1632, Kassel, Hesse-Kassel) fue un relojero y matemático suizo. En ocasiones es acreditado como el inventor de los logaritmos (que publicó en 1620), aunque habitualmente el crédito de este descubrimiento se atribuye al británico John Napier, quien fue el primero en publicar su trabajo.

También fue un gran contribuidor a la *prostaféresis*, que es una técnica rápida para calcular productos usando identidades trigonométricas, procedimiento ideado antes que los logaritmos. Es decir, es un algoritmo utilizado a finales del siglo XVI y principios del XVII para aproximar la multiplicación y división de números mediante identidades trigonométricas. Durante los 25 años que precedieron la introducción del logaritmo en 1614, la prostaféresis era el único método conocido y aplicable a gran escala para aproximar rápidamente un producto. El término proviene de las palabras griegas

prosthesis (πρόσθεσις) y *aphairesis* (ἀφαίρεσις), que significan adición y sustracción, dos de los pasos del proceso.

En la Europa del siglo XVI, los navíos que surcaban los mares utilizaban para orientarse la navegación astronómica, que hacía un fuerte uso de las efemérides para determinar su posición y dirección. Estas tablas voluminosas confeccionadas por astrónomos reflejaban la posición de los astros a lo largo del tiempo. Para calcular dichas posiciones, se utilizaba la trigonometría esférica.

A pesar de que era un autodidacta, ya en vida fue considerado como uno de los más excelentes ingenieros mecánicos de su generación. Su patrón, Guillermo IV de Hesse-Kassel, en una carta a Tycho Brahe alabó a Bürgi como un *segundo Arquímedes*.

No se sabe mucho sobre su vida o su educación antes de su empleo como astrónomo y relojero en la corte de Guillermo IV en Kassel en 1579; se ha especulado que adquirió sus conocimientos matemáticos en Estrasburgo, entre otros del matemático suizo Conrad Dasypodius (que ejerció la docencia en matemáticas en Estrasburgo. Nació en Frauenfeld, Thurgau, Suiza. Su primer nombre también se tradujo como Konrad o Conradus o Cunradus, y su apellido se ha indicado alternativamente como Rauchfuss, Rauchfuß y Hasenfratz. Era hijo de Petrus Dasypodius (Peter Hasenfuss) (1490-155), un humanista y lexicógrafo. En 1564, Dasypodius editó varias partes de los Elementos de

Euclides. En el prefacio, dice que durante 26 años había sido la regla en su escuela que todos los que fueran promovidos de las clases a conferencias públicas debían aprender el Libro I de los Elementos. En 1568, Dasypodius publicó un trabajo sobre la teoría heliocéntrica de Nicolaus Copernicus, *Hypotyposes orbium coelestium congruentes cum tabulis Alfonsinis et Copernici seu etiam tabulis Prutenicis*. No está claro si Dasypodius era un heliocentrista o más bien siguió la interpretación de Wittenberg. Dasypodius diseñó un reloj astronómico para la catedral de Estrasburgo: ese reloj fue construido en 1572-1574 por Isaac Habrecht y Josia Habrecht. Este reloj monumental representó la síntesis del conocimiento científico más avanzado de la época, en los dominios de la astronomía, las matemáticas y la física. Ese mecanismo permaneció en la Catedral hasta 1842, cuando fue reemplazado por un reloj construido por Jean Baptiste Schwilgué. Dasypodius tradujo los escritos de Herón de Alexandria del griego al latín. Dasypodius murió en Estrasburgo, pero no se dispone de datos que lo confirme.

1.1.2. Teoría de números

La teoría de números renace en el siglo XVII con Bachet de Méziriac (1587-1638), que en 1621 hace una muy buena primera traducción de Diofanto, y en 1624 una colección de problemas agradables y deliciosos con números. Claude-Gaspard Bachet, señor de Méziriac (o de Mézériat), nace el 9 de octubre de 1581 en Bourg-en-Bresse y fallece en París el 28 de febrero de 1638. Matemático y filólogo, se dice que en su juventud ingresó en la orden de los jesuitas, enseñando retórica a los veinte años en un colegio de Milán, pero pronto volvió a la vida civil y se instaló en París. donde formó parte de la Académie Française desde su fundación en 1634. Sus títulos literarios fueron: *Chansons dévotes et saintes sur toutes les principales fêtes de l'année* (incluidas algunas piezas de su hermano Guillaume) (Dijon, 1615 y Lyon, 1618); *Les Epîtres d'Ovide en vers français avec des commentaires fort curieux*, Bourg-en-Bresse, 1626, reimpresso en La Haye, 1746, con algunos otros panfletos de Bachet, inéditos o sólo publicados en folletos.

Como matemático, publicó, en 1612, en Lyon (2a ed., 1624), *Problemas agradables y deliciosos que se hacen con números*, de los que Labosne proporcionó en 1874 (París, Gauthier-Villars), una nueva edición, revisada y acertada donde encontramos la solución completa de los problemas de análisis indeterminado de primer grado, primero en



Figura 11. Claude-Gaspard Bachet, seigneur de Méziriac. <https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Bachet/>



Figura 12. Pierre Fermat. <http://www.cosmovisions.com/Fermat.htm>.

Europa en abordar este problema metódicamente. Escribió libros sobre acertijos matemáticos que formaron la base de casi todos los libros posteriores sobre recreaciones matemáticas.

Se publica su excelente edición grecolatina: *Diophanti Alexandrini arithmeticonum libri sex et de numeris rectangulis liber unus* en París, 1621, enriquecido con comentarios que sólo pueden ser criticados por su prolijidad y que fueron, en todo caso, el punto de partida del trabajo de Fermat en la teoría de números.

Bachet dejó un manuscrito: *Elementorum arithmeticonum libri XIII*, del cual se ha publicado importantes extractos en *Bullettino Boncompagni* en 1879. La Biblioteca Nacional tiene otra parte de sus trabajos, en particular un *Comentario sobre Apolodoro*.

Los versos en francés de Bachet, que se hicieron famosos durante su vida, no son atractivos y suelen ser “muy pesados” y carecen de gracia, pero se le consideraba un gran humanista y erudito, y su valor no era inferior como matemático.

El gran creador en la teoría de Números es Pierre Fermat (1601-1665). Es un matemático, nacido en Beaumont-de-Lomagne en agosto de 1601, muerto en Castres el 12 de enero de 1665. Hijo de Dominique Fermat, burgués y segundo cónsul de Beaumont, y de Claire de Long, que pertenecía a la familia parlamentaria, Pierre, después de haber recibido su primera educación con los Cordeliers de Beaumont, terminó sus estudios en Toulouse tomando destino en la magistratura.

Su nombramiento como consejero de la Cámara de Investigaciones estaba fechado el 30 de diciembre de 1634; logró, con bastante dificultad, pasar por la sala del edicto en agosto de 1648, falleció dos días después de haber denunciado allí un pleito. Dejó cinco hijos: Clément-Samuel (1632-1690), abogado y asesor del Parlamento; Juan, archidiácono de Fimarens; Claire, cuyo nieto, Jean Gailhard, sucedió a Jean-François, hijo de Clément-Samuel, como consejero; finalmente Catherine y Louise, que eran ambas monjas. Fue sólo como asesor de la corte que Fermat tomó, según la costumbre, la parte nobiliaria, que a menudo se agrega a su nombre.

Si bien su carrera como magistrado transcurrió oscuramente, a través de su correspondencia con algunos estudiosos de su época (Roberval, Torricelli, Huygens, etc.) y por la comunicación en manuscrito de tratados compuestos en latín, adquirió, en 1637, la reputación de un matemático destacado. Sus principales relaciones fueron primero con Despagnet (el hijo), consejero del parlamento de Burdeos, Carcavi, quien, primero su colega en Toulouse, lo puso en contacto, una vez en París, con Beaugrand y Mersenne, que hizo depositario de sus escritos. Todos ellos fueron responsables de la propagación de las

obras de Fermat. Con Descartes, sobre la explicación de la refracción, tuvo una disputa que pronto se extendió al método de maximis et minimis del que Fermat fue el inventor, y que terminó en una aparente reconciliación.

También fue a través de Mersenne que Fermat conoció a Roberval y Frénicle. Posteriormente, Carcavi lo puso en contacto con Blaise Pascal y probablemente también con Digby, lo que le dio la oportunidad del desafío y del proceso matemático, cuyas piezas están recogidas en el *Commercium epistolicum* de Wallis. Fermat, después de haberle contado a Carcavi varias veces sobre el proyecto de publicar sus obras, sin poner su nombre allí, murió, habiendo tenido impresa una sola tesis bajo las iniciales MPEAS, en 1660 (siguiendo el tratado de Lalouvière sobre cicloide), donde demostró, como Arquímedes, la rectificación de curvas geométricas. Por una de estas curvas, había sido precedido, sin que él lo supiera, por Neil y Van Heuraet; la rectificación de otro (desarrollado a partir de la hipérbola equilátera) le pertenece sin lugar a dudas. Su hijo Samuel se ocupó de publicar los escritos de su padre, pero experimentó las mayores dificultades, pues, por un lado, no era en absoluto un matemático; por otro lado, Fermat no tenía la costumbre de guardar papeles, ni siquiera copias de sus obras, y Carcavi mostraba una mala voluntad difícil de explicar. El nombre del matemático de Toulouse es inseparable de la teoría de los números, cuyas bases puso mientras estudiaba a Diofanto. Dado que, en su tiempo, se prestó mucha más atención a las soluciones de los problemas que a los teoremas, y dado que después de él la invención del cálculo infinitesimal absorbió las mentes, sus proposiciones generalmente enunciadas sin prueba en su correspondencia o en las observaciones sobre Diofanto permanecieron infructuosas hasta Euler, y todavía no podemos estar seguros de saber tanto sobre este tema como él.

Si una de estas proposiciones (que $2^{2^n} + 1$ es un número primo) ha sido reconocida como falsa, es especialmente esta otra (que $x^n + y^n = z^n$ es imposible en números enteros, si $n > 2$) que se asumió que era cierto sin haberse podido demostrar, hasta 1994 gracias al trabajo a largo plazo de Andrew Wiles, demostrarlo en toda su generalidad. Aunque declara formalmente tener la demostración de esta última proposición (que nunca hizo para la primera), teniendo en cuenta el método de trabajo de su cabeza, un error de su parte no es imposible (sus escritos, incluso los más elaborados, podrían dar evidencia). En cualquier caso, no disminuiría la gloria de un hombre que fue el primero en abordar cuestiones de este tipo y encontrar métodos para resolverlas.

A Fermat también se le atribuye la invención del cálculo diferencial con respecto a su método de máximos y mínimos y tangentes, que, de los métodos anteriores, es en realidad el más cercano al algoritmo de Leibniz; se podría, con tanta justicia, atribuirle la invención del cálculo integral; su tratado *De Oequationum localium transmutatione*, da de hecho el método de integración por partes, al mismo tiempo que reglas para integrar, además de cualquier potencia de las variables, sus senos y las potencias de estas. Cabe señalar, sin embargo, que no encontramos en sus escritos una sola palabra sobre el punto mayúsculo, la relación entre las dos ramas del cálculo infinitesimal.

Pero lo importante es que Fermat comparte con Descartes la invención de la geometría analítica; lo concibió al mismo tiempo, de manera completamente independiente y en una forma más cercana a la clásica que la de Descartes (*Isagoge ad locos planos et solidos*). Corrigió a su rival en un punto esencial, la clasificación por grados. También fue el primero en intentar extenderse a tres dimensiones, en un ensayo por lo demás

desafortunado (*Isagoge ad locos ad superficiem*), en el que, tratando de clasificar las superficies de segundo grado, reconoce como regladas solo los conos. y los cilindros.

En álgebra pura, le debemos en particular el primer método general de eliminación. Se le puede considerar con Pascal como el inventor del cálculo de probabilidades. Finalmente, dejó, en la geometría antigua, obras notables, en particular una restitución de los *Lieux plan* de Apolonio .

Aparte de sus aptitudes matemáticas, Fermat poseía una singular erudición. La filología griega y latina le debían varias correcciones importantes y le gustaba componer versos latinos. Su carácter, según su correspondencia, es afable, inverosímil, sin orgullo, pero con ese punto de vanidad que Descartes, su opuesto en todos los aspectos, caracterizaba por decir: "*El señor de Fermat es gascón, yo no soy.*" (P. Curtiembre).

Conocemos su obra aritmética por la publicación que hizo, en 1670, su hijo Samuel Fermat, de una edición de Diofanto. acompañado de las notas que Pierre Fermat había escrito al margen de su copia; allí se encuentran las soluciones de estos problemas sobre los números, con los que Fermat desesperaba a sus corresponsales, y también de los teoremas: la demostración completa tuvo que esperar hasta 1994. Fermat poseía quizás, para el estudio de los números, un método sencillo que desconocemos: En aritmética se ha quedado sin igual.

SAPERE AUDE, GEOMETRÍA

¡El triángulo, siempre el triángulo! El hombre desde su creación ha utilizado herramientas inspiradas en formas geométricas simples, y no tan simples para poder sobrevivir. La construcción de caminos, viviendas, herramientas para cazar...

Por su simpleza e interés, se utiliza el triángulo en el quehacer diario de las personas, solo la observación de nuestro entorno nos permite identificar infinidad de formas triangulares. observar a nuestro alrededor para identificar las formas triangulares: casa, ornamentos, joyería, objetos de nuestros escritorios, mesas, señales que ordenan y organizan el tráfico en las ciudades y carreteras,...

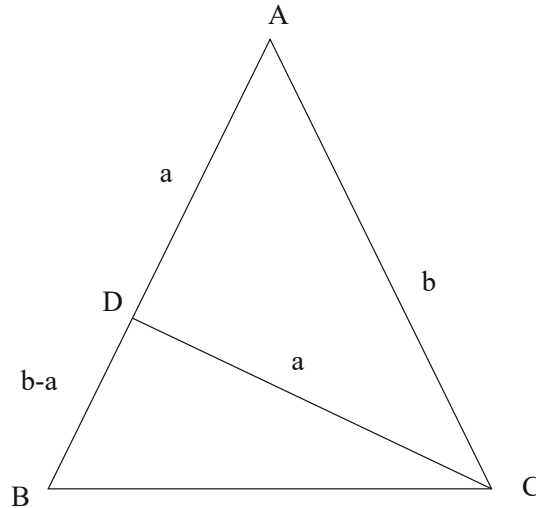
Los triángulos tienen una gran importancia en la geometría, pues todo polígono puede ser descompuesto o formado por triángulos. Es por esta razón que la geometría es de suma importancia en el campo científico y de sus aplicaciones.

En esta entrega, presentamos una vez más, como primera joyita geometría al triángulo como figura importante en la geometría. Sus elementos los traigo, en esta ocasión, una vez más, para calcular la medida de un lado sin recurrir a las funciones trigonométricas (¡La trigonometría, rama de la matemática, cuya etimología significa "medición del triángulo"!). Y como segunda joyita, presento un ejercicio sencillo que relaciona geometría analítica con la teoría de probabilidad.

1. Ejercicios de aquí y allá (solución a la Propuesta del número anterior 104)

*Ejercicios propuestos en la Olimpiada Matemática Nacional Española
http://www.olimpiadamatematica.es/platea.pntic.mec.es/_csanchez/olimmain.html

JOYITA*: a) El ángulo A del triángulo isósceles ABC mide $2/5$ de recto, siendo iguales sus ángulos B y C . La bisectriz de su ángulo C corta al lado opuesto en el punto D . Calcular las medidas de los ángulos del triángulo BCD . Expresar la medida a del lado BC en función de la medida b del lado AC , sin que en la expresión aparezcan razones trigonométricas.



SOLUCIÓN

Consideremos la imagen de arriba dónde se pueden observar los tres triángulos: $\triangle ABC$, $\triangle BDC$ y $\triangle ADC$.

Paso 1

Con la hipótesis inicial que nos proporciona el ejercicio, podemos decir que:

- En el triángulo $\triangle ABC$ se cumple

$$\widehat{BAC} = 36^\circ; \widehat{ABC} = \widehat{ACB} = 72^\circ$$

- En el triángulo $\triangle CBD$ se tiene

$$\widehat{BCD} = 36^\circ; \widehat{CBD} = \widehat{BDC} = 72^\circ$$

- En el triángulo $\triangle ABC$ se tiene

$$\widehat{DAC} = \widehat{ACD} = 36^\circ; \widehat{ADC} = 108^\circ$$

Paso 2

De aquí se deduce que los triángulos $\triangle BCD$ y $\triangle ADC$ son isósceles y además el triángulo $\triangle BCD$ es semejante al triángulo $\triangle ABC$.

Paso 3

Se infiere para los lados que $DC=AD=a$; y $BD=b-a$

En función de la semejanza anterior se cumple la proporcionalidad

$$\frac{b-a}{a} = \frac{a}{b} \Leftrightarrow a^2 = b^2 - ab \Leftrightarrow a^2 + ab - b^2 = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{a}{b}\right)^2 + \frac{a}{b} - 1 = 0$$

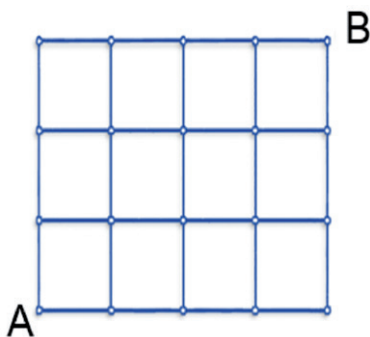
Paso 4

De aquí se puede calcular el valor de a en función de b , como se solicita en el ejercicio:

$$a = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 + 4b^2}}{2} = \frac{-b \pm \sqrt{5b^2}}{2} = \frac{-b \pm b\sqrt{5}}{2} = b \cdot \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$$

Conclusión el lado a es la sección áurea del lado b .

JOYITA*: b) La figura adjunta muestra un plano con calles que delimitan 12 manzanas cuadradas



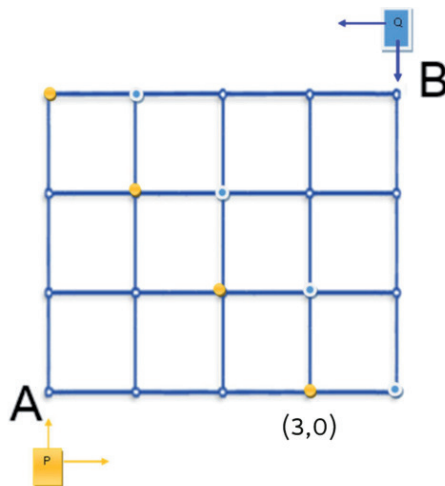
Una persona P va desde A hasta B y otra Q desde B hasta A . Ambas parten a la vez siguiendo caminos de longitud mínima con la misma velocidad constante. En cada punto con dos posibles direcciones a tomar, ambas tienen la misma probabilidad. Hallar la probabilidad de que se crucen.

SOLUCIÓN

Paso 1

Comencemos por **definir un sistema de coordenadas** en la figura que muestra el plano con las calles que delimitan las 12 manzanas cuadradas.

- Origen: $(0,0)$ es el Punto A .
- Extremo: $(4,3)$ es el Punto B .
- Movimientos de P y Q recorren, según las hipótesis dadas, caminos de longitud mínima, por lo tanto, la persona P sólo puede ir hacia la derecha o hacia arriba, mientras que la persona Q puede ir a la izquierda y abajo.



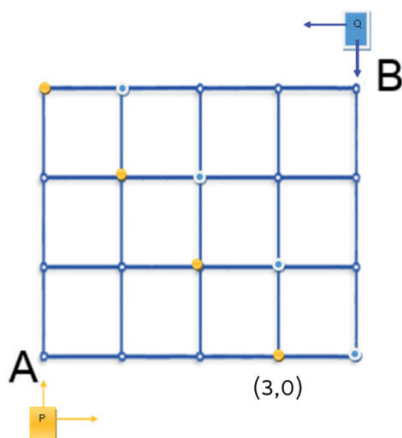
Paso 2

Todos los caminos tendrán siete unidades de longitud. Por lo tanto, las personas P y Q se podrán solamente entre el tercer y cuarto movimiento. Se señalan con diferentes colores las diferentes posiciones de P y de Q .

Paso 3

Estudiamos los diferentes casos:

I. La persona P llega al punto ● (3,0)



Su probabilidad será $(1/2).(1/2).(1/2)=1/8$. Sólo se podrá cruzar con la persona Q si ésta se encuentra en el punto (1,3): esto sucede también con probabilidad

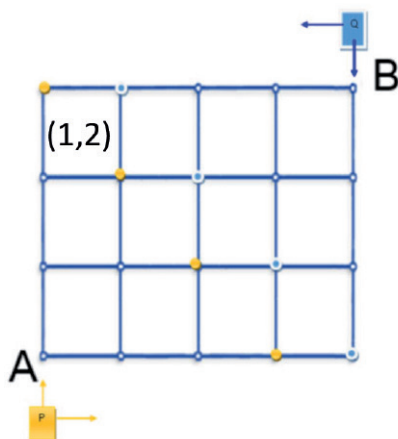
$$(1/2). (1/2). (1/2)=1/8.$$

Por lo tanto, la persona P está obligada a pasar por el punto (1,3), mientras que la persona Q pasa a (0,3) con probabilidad $1/2$.

En consecuencia, la probabilidad de que se cruce entre (3,0) y (1,3) es el producto:

$$(1/8). (1/8).(1/2)= 1/2^7$$

II. La persona P llega al punto ● (1,2)

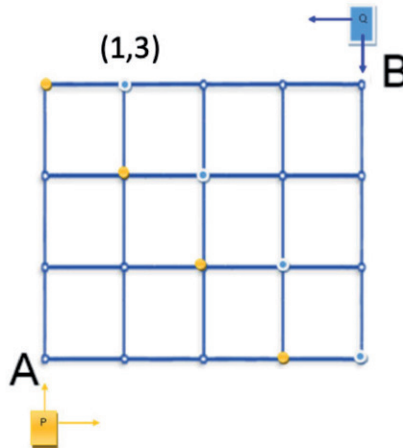


La probabilidad de que P llegue a (1, 2) es $3\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{3}{8}$.

Nota: Fácilmente se puede describir que hay tres modos de llegar (1, 2).
Sólo se puede cruzar con Q si éste está en (1, 3) o en (2, 2).

Distingamos ambos casos:

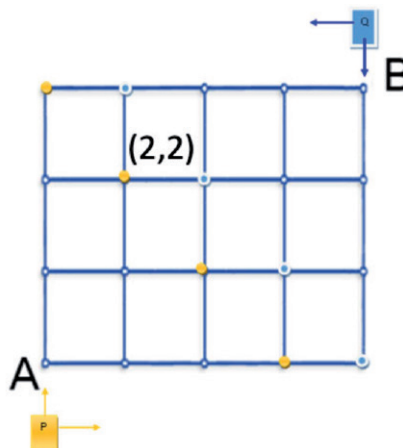
- a) Q llega a (1, 3) con probabilidad $\frac{1}{8}$, entonces se cruzarán entre (1, 2) y (1, 3) si P se



mueve hacia (1, 3) y Q hacia (1, 2) ambos movimientos con probabilidad $\frac{1}{2}$.

Por lo tanto, la probabilidad de cruzarse es $\frac{3}{8} \frac{1}{8} \frac{1}{2} \frac{1}{2} = \frac{3}{2^8}$.

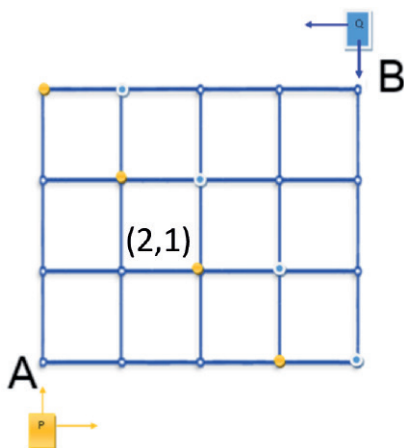
- b) Q llega a (2, 2) con probabilidad $\frac{3}{8}$, entonces se cruzarán entre (1, 2) y (2, 2) si P se



mueve hacia (2, 2) y Q hacia (1, 2) ambos movimientos con probabilidad $\frac{1}{2}$.

La probabilidad de cruzarse es $\frac{3}{8} \frac{3}{8} \frac{1}{2} \frac{1}{2} = \frac{9}{2^8}$.

III. La persona P llega al punto ● (2, 1).



Si razonamos de forma análoga, se tiene que la probabilidad de cruzarse entre los puntos (2, 1) y (2, 2) es, $\frac{9}{2^8}$ y la de cruzarse entre (2, 1) y (3, 1) es $\frac{9}{2^8}$.

IV. La persona P llega al punto ● (3,0).

La probabilidad de cruzarse entre (3, 0) y (3, 1), es $\frac{3}{2^8}$ y la de cruzarse entre (3, 0) y (4, 0) es $\frac{1}{2^7}$.

Paso 4: Conclusión

La probabilidad pedida es la suma de todos los casos, resulta:

$$\frac{1}{2^7} + \frac{3}{2^8} + \frac{9}{2^8} + \frac{9}{2^8} + \frac{9}{2^8} + \frac{3}{2^8} + \frac{1}{2^7} = \frac{37}{256}$$

SAPERE AUDE, TEORÍA DE NÚMEROS

1. Ejercicios de aquí y allá (solución a la propuesta de los ejercicios del número anterior 104)

*Ejercicios propuestos en la Olimpiada Matemática Nacional Española
http://www.olimpiadamatematica.es/platea.pntic.mec.es/_csanchez/olimmain.html

En esta ocasión presento la solución de dos Joyitas Numéricas: una que aborda las progresiones aritméticas con la presencia de algunas propiedades de los números piramidales; y la segunda utiliza el binomio de Newton y el principio de inducción. los conceptos de desigualdad y potencias de números naturales.

Propuesta 2: dos joyitas numéricas

JOYITA: a) Calcular la suma de los cuadrados de los cien primeros términos de una progresión aritmética, sabiendo que la suma de ellos vale -1 , y que la suma de los términos de lugar par vale $+1$.

SOLUCIÓN

Paso 1

Consideremos la progresión aritmética $\frac{\bullet}{\bullet}$:

$$p, p+d, p+2d, p+3d, \dots, p+99d.$$

Nos piden calcular la suma de los cuadrados:

$$p^2, (p+d)^2, (p+2d)^2, (p+3d)^2, \dots, (p+99d)^2$$

Paso 2

Para calcular p y d resolveremos el sistema siguiente:

$$\sum_{h=0}^{99} (p+hd) = -1 \Rightarrow \frac{[p+(p+99d)]100}{2} = -1 \Rightarrow [p+(p+99d)]50 = -1$$

$$\sum_{h=0}^{50} [p+(2h+1)d] = 1 \Rightarrow \frac{[p+d+p+99d]50}{2} = 1 \Rightarrow [p+d+p+99d]25 = 1$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow [p+(p+99d)]50 &= -1 & \Rightarrow 50p+50p+99.50d &= -1 \\ [p+d+p+99d]25 &= 1 & \Rightarrow 25p+25d+25p+99.25d &= 1 \\ \Rightarrow 100p+4950d &= -1 & \Rightarrow d = \frac{3}{50}; p = \frac{-745}{250} \\ \Rightarrow 50p+2500d &= 1 \end{aligned}$$

PASO 3

De la expresión

$$S = \sum_{h=0}^{h=99} (p+hd)^2 = 100p^2 + 2pd(1+2+3+\dots+99) + d^2(1^2+2^2+\dots+99^2)$$

Se deduce que el resultado final se obtiene de la expresión:

$$\begin{aligned} S &= 100 \cdot \left(\frac{-745}{250}\right)^2 + 2 \cdot \left(\frac{-745}{250}\right) \cdot \left(\frac{3}{50}\right) \cdot \left(\frac{(1+99)100}{2}\right) + \left(\frac{3}{50}\right)^2 \left(\frac{99(2.99+1)(99+1)}{6}\right) \\ S &= 100 \cdot \left(\frac{-745}{250}\right)^2 + 2 \cdot \left(\frac{-745}{250}\right) \cdot \left(\frac{3}{50}\right) \cdot \left(\frac{(1+99)99}{2}\right) + \left(\frac{3}{50}\right)^2 \left(\frac{99(2.99+1)(99+1)}{6}\right) \Rightarrow S = 299,98 \end{aligned}$$

Que es la solución final para la suma solicitada:

$$S = 299,98$$

JOYITA: b) Hallar todos los números enteros positivos m y n para los que

$$(m+1)^m = 2m^n + 3m+1$$

SOLUCIÓN

Paso 1

- Veamos que sucede para cuando $m=1$

$$(1+1)^1 = 2 \cdot 1^n + 3 \cdot 1 + 1 \Rightarrow 2 \neq 6, \forall n \in \mathbb{N}$$

- ¿Qué sucede para $n \geq 2$?
Aplicado el binomio de Newton

$$(m+1)^m - 1 = \sum_{i=0}^{i=m} \binom{m}{i} m^{m-i} - 1 \Rightarrow (m+1)^m - 1 = m^2 + \binom{m}{2} m^2 + \binom{m}{3} m^3 + \dots$$

que nos lleva a afirmar que es múltiplo de m^2 .

Paso 2

Analicemos varios casos:

- $n=1$. Entonces, m^2 divide a $2m^1+3m=5m$. Por lo tanto, m dividiría a 5, con lo que $m=5$, y la expresión inicial nos lleva a que $6^5=26$, lo cual es trivial y efectivamente falso.
- $n \geq 2$. Entonces, m^2 dividiría a $2m^n + 3m$, pero como divide a $2m^n$, también ha de dividir a $3m$, es decir que m divide a 3, con lo que $m=3$.

Paso 3

Se puede demostrar fácilmente que para $m=3$, la ecuación se convierte en $4^3 = 2 \cdot 3^n + 10$. Por lo tanto, de la expresión:

$$4^3 = 2 \cdot 3^n + 10.$$

Se deduce que $2 \cdot 3^n = 4^3 - 10 = 54$.

De dónde concluimos que $3^n = 27$, y por lo tanto esto se cumplirá si y solo si $n=3$.

SAPERE AUDE, EJERCICIOS DE AQUÍ Y ALLÁ, PROPUESTAS.

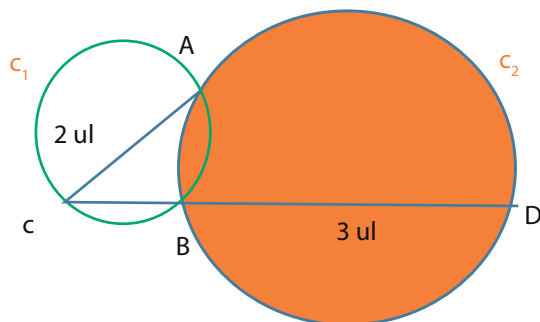
En números anteriores planteaba diversas cuestiones entorno a: "... *Desarrollar las habilidades matemáticas que poseen los alumnos y simultáneamente cubrir los objetivos más allá del curso. (Dichos objetivos rara vez mencionan a las habilidades, reduciéndose a la adquisición de conocimientos y manipulación de fórmulas para aplicaciones en problemas sencillos).....Impulsar a los estudiantes que tienen habilidades matemáticas e interés por aprender más profundamente esta ciencia...(sic)*". En este número, quiero añadir unas líneas sobre la idea: "...*el rendimiento académico en matemáticas constituye uno de los desafíos permanentes en la mayoría de los sistemas educativos no sólo porque las matemáticas son consideradas como una de las asignaturas fundamentales en el currículum escolar, sino también por la contribución al desarrollo del conocimiento cognitivo del niño, y por la funcionalidad que poseen la mayoría de los aprendizajes matemáticos en la vida adulta. Dada esta importancia, en las sociedades modernas occidentales existe una creciente preocupación por el hecho de que una parte importante de los alumnos, y también la población en general, tiene relevantes*

dificultades para comprender y utilizar los conocimientos matemáticos...) (sic) (Las actitudes hacia las matemáticas: perspectiva evolutiva. Núñez, J.C. et al).

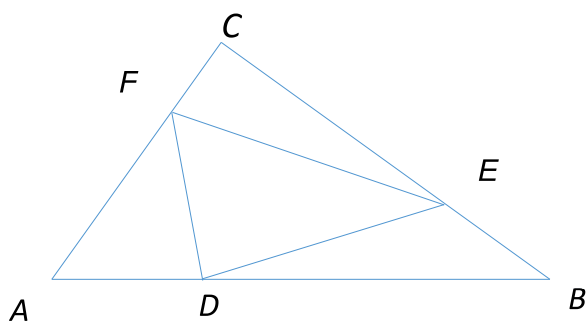
Para implicar al estudiante en su interés por la resolución de problemas en matemáticas lo que repercutiría directamente en su formación propongo las cuatro joyitas que aparecen a continuación.

Propuesta 1: dos joyitas geométricas

a) Los círculos C_1 y C_2 de la figura se intersectan en A y B . El diámetro CA de C_1 es tangente a C_2 en A , y D es el punto en C_2 tal que C , B y D están alineados. Si $BD = 3$ y $AC = 2$, ¿Cuál es el área de C_2 ?



b) El área del triángulo ABC es igual a 40 cm^2 .



Los puntos D , E y F cumplen que $DB = 3AD$, $CE = 3EB$ y $AF = 3FC$. ¿Cuál es el área del triángulo DEF ?

Propuesta 2: dos joyitas numéricas

a) Enrique tiene que usar una tarjeta bancaria porque necesita dinero para salir de viaje. El código de cuatro dígitos se le ha olvidado y quiere recuperarlo. ¿Podrías ayudarlo a encontrarlo, si cada uno de los números siguientes **6427**, **4271**, **6412**, **2671**, tiene una cifra incorrecta y otra fuera de su lugar?

b) Hallar los pares de valores **(p, q)** para los que

$$1+2^p+2^{2p+1}=q^2$$

NOTA: Las respuestas pueden enviarla a la dirección electrónica:
sapereaudethales@gmail.com

