104

2020

épsilon

Revista de Educación Matemática

Editada por la S.A.E.M. "THALES"

epsilon 104

Revista de Educación Matemática

Página de la revista: http://thales.cica.es/epsilon
Revista: epsilon@thales.cica.es

Sociedad Andaluza de Educación Matemática "Thales"

Edita
Sociedad Andaluza de
Educación Matemática "Thales"
Centro Documentación "Thales"
Universidad de Cádiz
C.A.S.E.M.
Facultad de Ciencias
Departamento de Matemáticas
Campus del Río San Pedro
Torre Central, 4ª planta
11510 Puerto Real (Cádiz)
Teléfono: 956012833
Email: thales.matematicas@uca.es

Maquetación
mayteando@gmail.com

Depósito Legal
SE-421-1984

ISSN
2340-714X

Período
2020
Suscripción
Anual

SUMARIO / CONTENTS

Épsilon - Revista de Educación Matemática *2020, nº 104, 7-23*

La base de orientación no lineal: estudio de tres grupos clase ante un mismo ciclo de resolución de problemas de patrones

Alba Torregrosa
Universidad Autónoma de Barcelona

Resumen: *El presente estudio toma como objetivo caracterizar y comparar la última fase de una Base de Orientación No Lineal desarrollada por tres grupos de sexto de educación primaria. Mostramos a nivel teórico, el proceso de justificación, creación y evaluación de la base de orientación no lineal, así como las destrezas y procesos metacognitivos que en ella aparecen. Se realiza un análisis cualitativo de las tres bases elaboradas atendiendo a su naturaleza matemática y a su dependencia del contenido matemático. Los resultados muestran que las bases elaboradas por los tres grupos contienen abundantes procesos metacognitivos de carácter genérico.*
Palabras clave: *Base de orientación no lineal, educación primaria, problemas de patrones, evaluación.*

The non-linear orientation base: study of three class groups before the same pattern problem solving cycle

Abstract: *This study aims to characterize and compare the last phase of a Non-Linear Orientation Base developed by three groups of sixth graders. At the theoretical level, we show the process of justification, creation and evaluation of the non-linear orientation base, as well as the skills and metacognitive processes that appear in it. A qualitative analysis is made of the three bases elaborated, according to their mathematical nature and their dependence on the mathematical content. The results show that the bases elaborated by the three groups contain numerous metacognitive processes of generic character.*
Keywords: *Non-linear orientation base, primary education, pattern problems, assessment.*

1. INTRODUCCIÓN

La competencia matemática, dentro del currículo catalán, está dividida en cuatro dimensiones: resolución de problemas, conexiones, razonamiento y prueba, y comunicación y representación (Departament d'Ensenyament, 2016). Seleccionar problemas no rutinarios permite al alumnado conectar dichas dimensiones y trabajarlas de manera transversal. Un problema no rutinario es una actividad contextualizada en la cual el resolutor se enfrenta a una situación para la que no conoce una respuesta inmediata y por lo tanto, no puede aplicar un algoritmo directo a partir de los datos seleccionados. Para resolver el problema, se requiere de un proceso reflexivo de toma de decisiones, con la finalidad de seleccionar y desarrollar eficazmente la estrategia y/o método a seguir (Mayer, 1985). La complejidad de trabajar dichos problemas con el alumnado reside en dos aspectos principales. En primer lugar, cómo el docente escoge y dinamiza los problemas en el aula. En segundo lugar, cómo el alumnado al resolver el problema, desarrolla y evalúa el desempeño en las dimensiones matemáticas y por ende, la competencia matemática en toda su complejidad. Es en este último aspecto donde enfocaremos el presente trabajo.

Entre los seis y los doce años, cuando el alumnado se enfrenta a la resolución de un problema "de lápiz y papel", encontramos poco orden en el proceso de resolución, falta de planificación y estructuración, así como abundante lenguaje matemático que no se explica, justifica, ni argumenta (Villalonga y Deulofeu, 2015). Gran parte del alumnado tiende a leer el enunciado, escoger la primera estrategia o método que le viene en mente, desarrollarlo y escribir la respuesta. Dentro de este proceso, encontramos producciones desordenadas, desestructuradas y con un vago proceso de reflexión, revisión y verbalización del pensamiento y la acción.

En el presente estudio exponemos y justificamos un instrumento llamado base de orientación no lineal (Torregrosa, Albarracín, Deulofeu, en prensa) que se ha mostrado efectivo ante las problemáticas antes expuestas. El estudio se divide en una primera parte teórica donde mostramos el proceso de creación, desarrollo y justificación de la base de orientación no lineal, y en una segunda parte donde mostramos tres bases de orientación desarrolladas por tres grupos de alumnos distintos, al trabajar el mismo ciclo de resolución de problemas.

2. LA BASE DE ORIENTACIÓN NO LINEAL

Justificación del instrumento y características generales

La base de orientación no lineal es un instrumento de autorregulación matemática creado y desarrollado por Torregrosa, Deulofeu, Albarracín (2019) que parte de las directrices de la base de orientación de la acción de Jorba y Sanmartí (1996). La base de orientación no lineal (BONL a partir de este momento) pretende ser una guía de orientación que incluye destrezas matemáticas y procesos metacognitivos que el alumnado puede usar al resolver un problema. Cuando nos referimos a destrezas matemáticas, nos referimos a productos cognitivos, es decir, conceptos y procedimientos matemáticos que el alumnado ha aprendido en su educación obligatoria, como pueden ser los algoritmos de operaciones básicas, los procedimientos de construcción geométrica o las definiciones matemáticas (Puig, 1996). Cuando nos referimos a procesos metacognitivos, hablamos de aquellas acciones de regulación, evaluación y monitoreo que desarrolla un resolutor ante un problema matemático (Clarke, 1989).

Así pues, cuando el alumnado se enfrenta a la resolución de un problema matemático, usa y desarrolla tanto procesos cognitivos como metacognitivos. La línea que separa los términos cognición y metacognición es sumamente fina. La mayoría de procesos mentales que desarrollamos, son de carácter metacognitivo pero necesitamos de los procesos cognitivos para que se produzcan. Para ejemplificar la diferenciación entre un proceso cognitivo y uno metacognitivo, usaremos una situación ficticia; Paula se encuentra resolviendo ejercicios de matemáticas y se le plantea el siguiente enunciado: *He construido con mi hermano 4 torres de cubos y cada torre tiene 3 pisos. Cuando apile las torres, ¿Cuántos pisos tendré en total?* Posiblemente, si Paula ha aprendido las tablas de multiplicar, use el producto 4 x 3 para resolver el ejercicio. Que Paula retenga en su memoria a largo plazo el producto 4 x 3 = 12, es una destreza matemática y por lo tanto, un proceso cognitivo. Que Paula comprenda que tiene cuatro torres y que como cada torre tiene el mismo número de piezas, puede realizar el producto 4 x 3, es un proceso metacognitivo ya que está regulando, monitoreando y evaluando la situación que se le plantea.

La BONL difiere de la base de orientación de la acción de Jorba y Sanmartí (1996) en dos aspectos principales. En primer lugar, la base de orientación de la acción, se crea en un contexto de procedimientos teóricos y prácticos de la ciencia y la matemática tales como la construcción de una mediatriz, la caracterización de un ser vivo o la construcción de un gráfico de barras (figura 1). En cambio, la BONL se crea y aplica en la resolución de problemas matemáticos tal y como los hemos descrito anteriormente (Mayer, 1989). En segundo lugar, la BONL, tal y como su propio nombre indica, tiene un carácter no lineal, es decir, no se presenta en un formato listado paso a paso, sino que tiene un formato de árbol ramificado, dado que el proceso de resolución de un problema no es en ningún caso lineal. Este formato propicia que el alumnado no tome los pasos de la BONL como una receta o un guion que se debe seguir del paso inicial al paso final, sino que puede hacer uso de las destrezas y procesos metacognitivos a su placer usando ítems presentes en una fase de resolución o en otra (Polya, 1945).

Construcción de una base de orientación no lineal

Como hemos comentado anteriormente, la base de orientación no lineal es un instrumento de autorregulación matemática (De Corte y Verschaffel, 2003) que tiene como objetivo orientar al alumnado en el proceso de resolución de un problema. Para que dicho instrumento tenga sentido para el alumnado, es de suma importancia que sea él mismo quien lo construya (Sanmartí, 2010). Estudios anteriores (Jorba y Sanmartí, 1996) han mostrado que las bases de orientación más efectivas son aquellas que el alumnado construye, evalúa, aplica y reconstruye al trabajar en actividades de un mismo contenido. Así pues, la primera premisa que debemos tener en cuenta, es que el instrumento debe ser construido por el alumnado con la supervisión del docente.

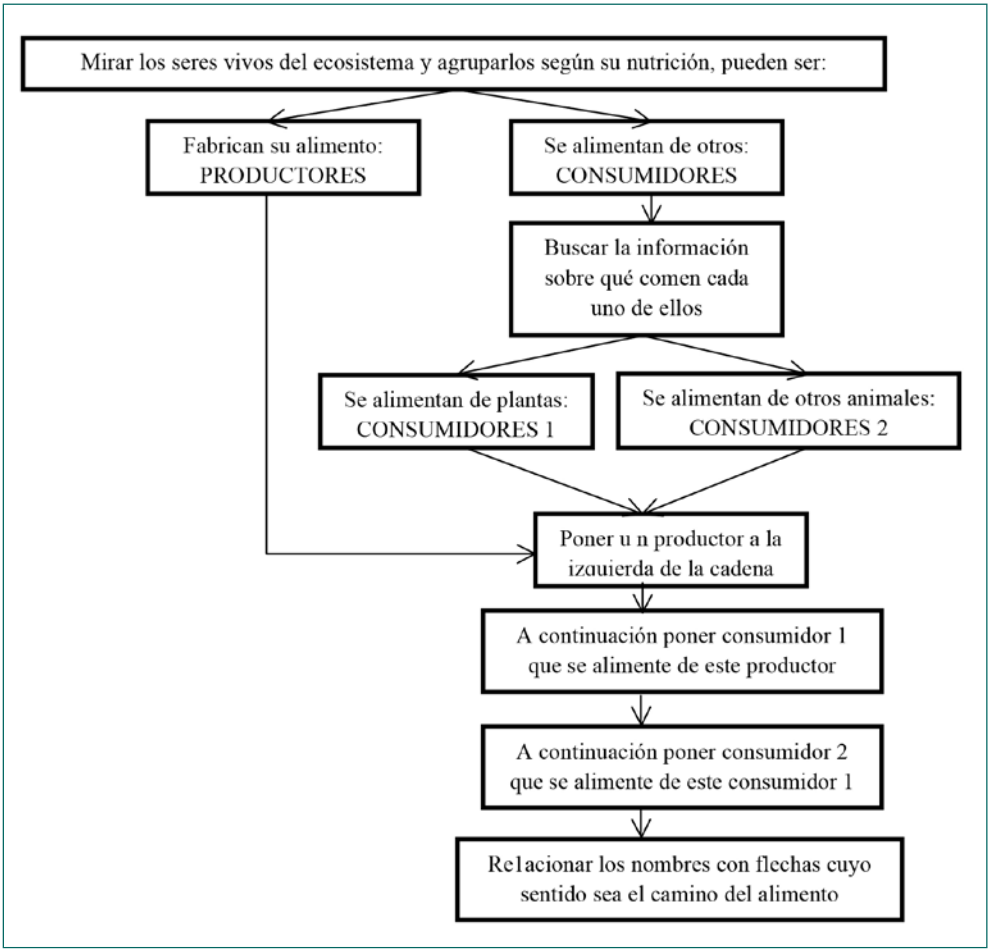


Figura 1. Base de orientación de la acción; construir una cadena trófica (García y Sanmartí, 1998, p. 12)

Para iniciar la construcción de una base de orientación no lineal, se recomienda que el alumnado resuelva un primer problema matemático, que le servirá como referente del contenido que aparecerá en la base (Villalonga y Deulofeu, 2017). A continuación, debemos tener en cuenta cómo validamos la utilidad y rigurosidad matemática de la base que estamos creando. Recordemos que la base de orientación no lineal, no es un instrumento que se crea y permanece inmutable, sino que evoluciona a medida que el conocimiento del alumnado y su uso también evolucionan. En cualquier caso, el modo en el que evaluamos la construcción y desarrollo de la BONL nos servirá tanto para saber qué grado de apropiación del instrumento tiene el alumnado, como para validar su rigor científico. La evaluación formadora (Sanmartí, 2010) es uno de los métodos más efectivos para evaluar el uso de la base de orientación no lineal, ya que es el propio alumno quien realiza dicha evaluación. Dentro de la evaluación formadora, encontramos la autoevaluación y la coevaluación que son herramientas muy efectivas para autorregular la competencia matemática, e incluso lo son más aún si ante un mismo problema, se realizan las dos (Torregrosa, Albarracín, Deulofeu, en prensa).

Al construir cuestionarios de autoevaluación y coevaluación, debemos tener en cuenta la edad del alumnado. En los primeros cursos de educación primaria, recomendamos escalas numéricas de satisfacción, pictogramas, dianas, o bien, selección de ítems en formato rúbrica (Cano, 2015). En los últimos cursos de educación primaria, los formularios escritos sirven al alumnado, y al propio profesorado, como fuente de información, de detección de puntos de mejora y de visibilización de los procesos metacognitivos. Al construir dichos cuestionarios, debemos tener en cuenta que tienen como objetivo observar qué destrezas matemáticas y procesos metacognitivos ha llevado a cabo el alumnado en las distintas fases del problema, que no aparecen en sus producciones escritas y/o en la conversación en gran grupo. Así pues, las preguntas que se formulan deben perseguir dicha finalidad (tabla 1).

Tabla 1. Ejemplificación de las preguntas en el cuestionario de autoevaluación (elaboración propia)

PREGUNTA	JUSTIFICACIÓN
Imagina que tienes que explicar a un compañero de cuarto de primaria el problema que acabas de resolver. Él no ha visto el problema ni sabe de qué trata. Explícale que te pedía el problema y qué pasos has seguido desde el inicio al final para resolverlo	Abstracción de las destrezas y procesos generales ha llevado a cabo el alumnado que no aparecen en las producciones escritas
Cuando has terminado de leer el problema por primera vez, ¿qué es lo primero que has pensado que podrías hacer para resolverlo? Basta que cuentes la primera idea que se te ha ocurrido.	Abstracción de los ítems referentes a la fase de planificación
Mientras resolvías el problema, ¿ha habido algún momento en que has cambiado la manera en la que la estabas resolviendo? ¿En qué momento ha sido y porque has cambiado lo que habías pensado al principio?	Abstracción de los ítems referentes a la fase de planificación entorno la regulación y monitoreo metacognitivo
¿Qué conocimientos de matemáticas crees que has utilizado para resolver el problema?	Abstracción de los ítems referentes a la fase de aplicación del plan
¿Crees que has revisado el problema mientras el estabas haciendo, cuando has terminado o en todo momento? ¿Qué es lo que has revisado? (Las operaciones, los dibujos, el enunciado, lo que has escrito...). Cuéntalo.	Abstracción de los ítems referentes a la fase de revisión

Una vez el alumnado ha resuelto el problema, se ha comentado en gran grupo y han realizado la autoevaluación y coevaluación, se produce una lluvia de ideas en gran grupo entorno a la pregunta "qué destrezas matemáticas y procesos mentales hemos llevado a cabo al resolver el problema". Dichas ideas deben anotarse en gran grupo y estructurase atendiendo a las fases de Polya (1945): entender el problema, elaborar un plan de acción, ejecutar el plan de acción y revisar el proceso. En los primeros cursos de educación primaria, recomendamos que el formato escrito de la BONL esté acompañado de pictogramas y que las ideas que aparezcan sean esencialmente concretas. En cursos superiores, el formato escrito y justificado, se muestra como el más adecuado. Una vez finalizado el proceso de resolución, evaluación y lluvia de ideas, tendremos elaborada la primera fase de la BONL. Esta primera fase, será la que el alumnado usará para resolver el siguiente problema que se le proponga usando la base como guía de orientación y apoyo a la resolución. Una vez el alumnado termine este segundo problema y se evalúe de nuevo, se procederá a ampliar y/o modificar la base de orientación no lineal con nuevas destrezas y procesos metacognitivos que el alumnado haya llevado a cabo. De este modo, llegaremos a la segunda fase de la BONL. Este proceso debe repetirse tantas veces como el docente considere necesario atendiendo al nivel de concreción que se desee obtener en la base. Usamos el término "fase" al nombrar las modificaciones que sufre la base, puesto que dicho instrumento evoluciona a medida que el alumnado desarrolla nuevas destrezas y procesos. Por lo tanto, aparecen formatos de la base que pertenecen a un momento concreto dentro del proceso de enseñanza –aprendizaje– evaluación.

Atendiendo a la etapa educativa en la que nos encontramos, educación primaria, las bases de orientación más efectivas son aquellas de carácter específico, es decir, que contienen destrezas matemáticas y procesos metacognitivos propios de un contenido matemático concreto. A medida que el alumnado consolida la creación, evaluación y uso de la base de orientación no lineal, las bases específicas pueden ir ampliándose hasta volverse más generales, con la finalidad de abarcar problemas referentes a diversos contenidos matemáticos, así como procesos metacognitivos más complejos (figura 2).

Al trabajar en el ámbito de resolución de problemas matemáticos, es evidente que al crear BONL específicas, aparecerán ítems que serán comunes entre las distintas bases, como por ejemplo, seleccionar los datos relevantes, remarcar la pregunta o revisar la explicación escrita del proceso de resolución. En cambio, encontraremos ítems que serán específicos del contenido matemático, como por ejemplo, continuar el patrón de una figura a partir del dibujo – en el caso de trabajar con problemas de patones –. Por lo tanto, el proceso óptimo para trabajar con la base de orientación no lineal, es generar una primera base entorno un contenido concreto y abstraer aquellos ítems que son comunes en el ámbito de resolución de problemas, que usaremos para generar una nueva base entorno un contenido distinto (figura 3). De este modo, el alumnado mantiene ítems comunes a los distintos problemas, los cuales va traspasando de una base a la siguiente, y añade ítems específicos del contenido.

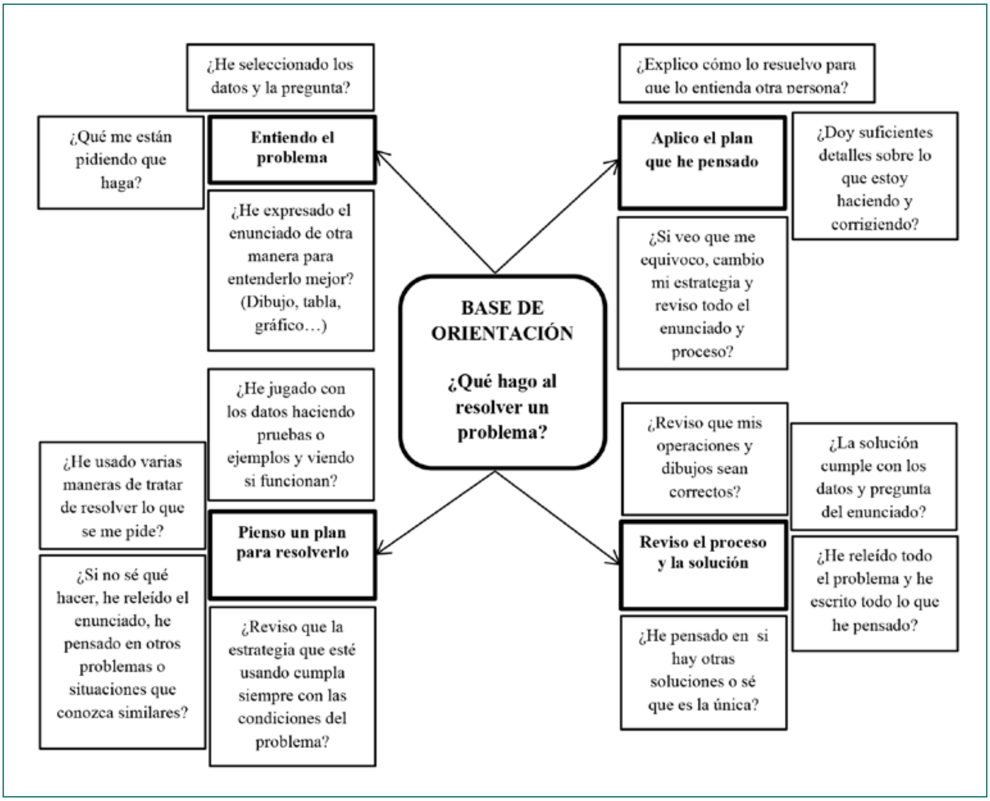


Figura 2. Ejemplificación de una base de orientación no lineal de carácter general (elaboración propia)

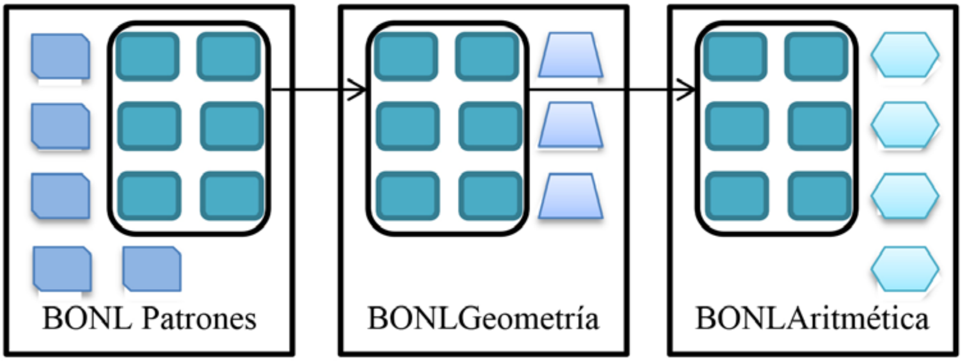


Figura 3. Distinción entre los ítems comunes y específicos de la BONL (elaboración propia).

3. OBJETIVO, DISEÑO Y MÉTODO DEL ESTUDIO

El objetivo del presente estudio es comparar y caracterizar tres bases de orientación no lineales, creadas a partir de un mismo ciclo de resolución de cuatro problemas de patrones matemáticos. Los datos del presente estudio se recogieron en tres centros del área metropolitana de Barcelona, con tres grupos de alumnos de sexto de educación primaria a los que llamaremos grupos A, B y C.

El grupo A pertenece a un centro concertado que trabaja la resolución de problemas una hora a la semana desde el curso 2017-2018. La docente elaboró una base de orientación de la acción (Jorba y Sanmartí, 1996) un curso antes de iniciar la recogida de datos del presente estudio. Dicha base, se entregó al alumnado para que tuviera una guía de los ítems principales que deben aparecer en las resoluciones escritas. Así pues, el alumnado conoce el instrumento base de orientación de la acción, pero nunca ha construido una base de orientación no lineal ni ha autoevaluado ni coevaluado sus producciones.

Los grupos B y C, pertenecen a un centro público que no trabaja la resolución de problemas como dimensión particular dentro del área de matemáticas. El alumnado habitualmente, realiza ejercicios de matemáticas y problemas extraídos de las pruebas de competencias básicas de la Generalitat de Catalunya (Consell superior d'avaluació, 2013a). La resolución de problemas de patrones y lógica matemática, no se encuentra dentro de la tipología de problemas que trabajan. Además, no conocen el instrumento base de orientación de la acción ni por ende, la base de orientación no lineal.

Para proceder al diseño del estudio, en primer lugar, se seleccionaron cuatro problemas de lógica y patrones matemáticos que se presentarían de más sencillo a más complejo según la complejidad de hallar el patrón. Atendiendo a la extensión temporal del ciclo metodológico presentado, que tiene una duración de 8 horas por grupo, consideramos que la selección de cuatro problemas es un uso suficiente de la BONL para poder apreciar sus características básicas, así como su uso y reflexión. Todos los problemas contaban con un dibujo explicativo dentro del enunciado para facilitar la comprensión del mismo (Villalonga y Deulofeu, 2015). Antes de empezar cada sesión, se leía el enunciado en gran grupo y resolvíamos aquellas dudas que no afectaran al proceso de resolución. La finalidad que perseguíamos con este acto era evitar los errores o malentendidos con los conceptos implicados en el enunciado que pudieran dificultar el proceso de resolución (Mayer, 1985).

Como método de feedback de la BONL que el alumnado elaboraría entre un problema y el siguiente, creamos dos cuestionarios, uno de autoevaluación y otro de coevaluación. En la autoevaluación, se pedía al alumnado que expusiera detalladamente cómo había resuelto el problema (método o estrategia) y que indicara si en algún momento había sufrido un atasco durante el problema. Ésta pregunta responde a la necesidad de detectar posibles cambios de estrategia y visualizar, a partir de la construcción de la primera base, si los alumnos acuden a ella para solventar sus posibles dudas o bloqueos (Villalonga y Deulofeu, 2017). En la coevaluación, se pedía al alumno que detallara cómo creía que su compañero había resuelto el problema, si consideraba que su resolución era correcta y si observaba algún posible bloqueo en la producción escrita. Además, se pidió que anotasen puntos fuertes y aspectos a mejorar que pudieran ayudar al compañero en sus próximas resoluciones. A partir de la creación de la primera base

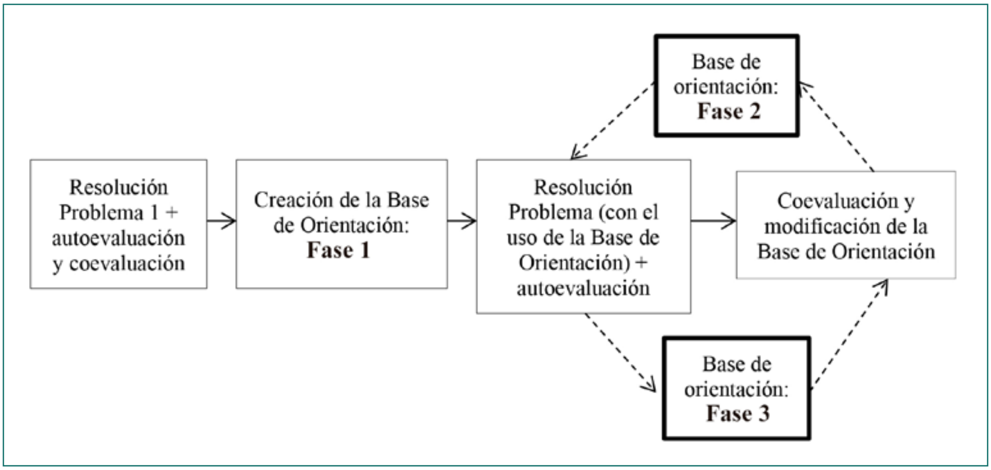


Figura 4. Ciclo metodológico llevado a cabo.

de orientación (que se producía al resolver y evaluar el primer problema), añadíamos una pregunta a los cuestionarios de evaluación donde pedíamos al alumnado que indicara que ítems de la base había usado – tanto él mismo como su compañero – y si consideraba que los había usado una sola vez o más de una vez. Ésta pregunta fue formulada ante la necesidad de observar el uso de ítems referentes a procesos mentales que no se verbalizaban por escrito.

Para llevar a cabo el método expuesto que incluye resolución, evaluación y construcción/modificación de la base, se programaron un total de 4 sesiones de 2 horas de duración cada una y se siguió, con cada uno de los tres grupos clase, el mismo ciclo de resolución que observamos en la figura 4. En la primera sesión, el alumnado resolvía el primer problema propuesto y se autoevaluaba creando así la primera fase de la BONL. Esta fase, se usaba al resolver el segundo problema y posteriormente, el alumnado se autoevaluaba y coevaluaba de nuevo generando la segunda fase de la BONL. Este ciclo se repetía hasta llegar al último problema. Así pues, se obtenían un total de 3 fases de desarrollo.

4. ANÁLISIS DE DATOS

Los datos del presente estudio los conforman las tres bases de orientación no lineales elaboradas por los tres grupos clase participantes. Se ha decidido seleccionar sólo la tercera y última fase, puesto que es la más avanzada y consideramos que muestra de un modo completo las destrezas y procesos metacognitivos llevados a cabo durante todo el ciclo metodológico.

Con la finalidad de comparar y caracterizar las tres bases de orientación, se ha procedido a categorizar los ítems que pueden aparecer en las bases de dos modos distintos. El primer modo hace referencia a la distinción entre destrezas matemáticas y procesos metacognitivos tal y como se han descrito en el marco teórico. El segundo modo, hace referencia a la naturaleza matemática de estas destrezas y procesos. Se han establecido tres categorías:

a) Ítems independientes del contenido: Dichos ítems se encuentran en todas las actividades de resolución de problemas independientemente del contenido
b) Ítems específicos de problemas de patrones: Dichos ítems se encuentran específicamente en la resolución de problemas de patrones
c) Ítems dependientes del contenido: Dichos ítems pueden encontrarse en la resolución de problemas de patrones pero pueden ser usados en otros problemas que traten distintos contenidos matemáticos

Así pues, cada ítem que aparece en la última fase de las tres BONL creadas, será categorizado atendiendo a su naturaleza matemática y a su dependencia del contenido.

5. RESULTADOS

Con la finalidad de mostrar los resultados de forma ordenada, se presentarán tres apartados distintos donde se mostrará la caracterización de la BONL en fase 3 para cada uno de los grupos participantes.

La caracterización de las bases se presentará en formato tabla para su mayor comprensión. Para cada uno de los ítems, se marcará con una cruz si corresponde a una destreza (D) o a un proceso metacognitivo (PM) y por otro lado, también se marcará si es independiente del contenido (IC), dependiente del contenido (DC) o específico de problemas de patrones (EC).

Caracterización de la fase 3 perteneciente al grupo A

Tal y como podemos observar en la tabla 2, 9 de los 13 ítems que componen la base de orientación no lineal del grupo A, hacen referencia a procesos metacognitivos. En contraposición, sólo 4 de los 13 ítems hacen referencia a destrezas matemáticas. Un total de 7 de los 9 ítems referentes a procesos metacognitivos, indican que estos procesos se producen independientemente del contenido del problema. Por lo tanto, son procesos metacognitivos que pueden ser aplicados en otros contextos de resolución de problemas sin perder su funcionalidad.

En cuanto a las destrezas observadas, 3 de éstas 4 son específicas de problemas de patrones. Apreciamos que el alumnado hace referencia al dibujo o la continuación del patrón o serie como destreza básica para resolver un problema de patrones matemáticos. En contraposición, no observamos ningún ítem referente al trabajo de patrones a partir de modos aritméticos, por ejemplo, comparativa del crecimiento de la sucesión, a partir de la organización de los números en formato tabla. Por lo tanto, apreciamos que el alumnado reconoce la ampliación dibujo como el método más efectivo en todas las fases del problema: entender, planificar y resolver, y revisar.

Tabla 2. Caracterización de los ítems pertenecientes a la fase 3 (Grupo A)

Fase	Ítems fase 3	D	PM	IC	DC	EC
Entender	Leer muchas veces para entender el problema		x	x		
	Leer entre líneas lo que me insinúa el problema		x	x		
	"Diseccionar" el problema		x	x		
	Coger los datos y la pregunta		x	x		
	Entender qué significa el dibujo del enunciado y buscar el patrón que sigue	x				x
Razonar y resolver	Pensar en la operación o dibujo que tengo que hacer		x		x	
	Seguir el patrón i dibujarlo	x				x
	Repasar el enunciado y palabras clave		x	x		
Revisar	Dibujar para comprobar que he hecho bien la operación o el patrón	x				x
	Revisar las operaciones		x		x	
	Rehacer las operaciones	x			x	
	Revisar que la solución tenga sentido, esté ordenada y con buena letra		x	x		
	Buscar otras maneras de resolver el problema		x	x		

Podemos concluir que la base en fase 3 construida por el grupo A, es una base de carácter generalmente metacognitivo, con ítems referentes al uso del dibujo como método para hallar el patrón. La BONL generada, se muestra a medio camino entre específica y general atendiendo al tipo de dependencia de algunos ítems respecto al contexto.

Caracterización de la fase 3 perteneciente al grupo B

Tal y como observamos en la tabla 3, 14 de los 20 ítems de la BONL generada por el grupo B, pertenecen a procesos metacognitivos. En contraposición, 6 de los 20 ítems pertenecen a destrezas matemáticas. Como en el caso del grupo A, dichas destrezas se relacionan con hallar el patrón mediante la ampliación del dibujo del problema, aunque observamos que el grupo B añade referencias a hallar el patrón a partir de métodos aritméticos (observar los ítems referentes a hacer pruebas con números, calcular mentalmente y operar con los números extraídos del dibujo). Es por este último motivo, que los ítems referentes al dibujo pasan a ser condicionales (sólo si se necesitan).

Tabla 3. Caracterización de los ítems pertenecientes a la fase 3 (Grupo B)

Fase	Ítems fase 3	D	PM	IC	DC	EC
Entender	Leo las veces que haga falta		x	x		
	Quito del enunciado lo que me distrae		x	x		
	Selecciono los datos importantes		x	x		
	Selecciono la pregunta		x	x		
	Dibujo para entender el patrón (si hace falta) y miro el dibujo de diferentes maneras (horizontal, vertical y entero)	x				x
	Organizo mentalmente la hoja		x	x		
	Hago pruebas	x		x		
Razonar	Razono qué tengo que hacer con las pruebas que he hecho		x	x		
	Busco un camino fácil o rápido para llegar a la solución		x	x		
	Reviso paso a paso antes de pasar al siguiente		x	x		
Resolver	Calculo mentalmente	x			x	
	Hago operaciones y las explico	x			x	
	Amplio el dibujo para resolver el problema (si lo necesito)	x				x
	Explico el camino que he elegido para resolver el problema		x	x		
Revisar	Reviso los datos del enunciado		x	x		
	Reviso las operaciones		x		x	
	Reviso la respuesta y la marco en otro color, con un recuadro o círculo		x	x		
	Vuelvo a leer el enunciado y lo que yo he hecho		x	x		
	Dibujo para revisar y corroborar el proceso y la solución y miro que el dibujo continúe igual que el del enunciado	x				x
	Reviso que haya explicado con detalle lo que hago y pienso		x	x		

Un aspecto relevante de la BONL del grupo B es la división que experimentan las fases razonar y resolver. Inicialmente, estas dos fases se encontraban unidas pero el alumnado, a medida que resuelve los problemas propuestos, decide dividir dichas fases puesto que toma consciencia de que hay destrezas y procesos propios de la planificación que deben disgregarse del desarrollo propio del plan de acción (Torregrosa, Albarracín, Deulofeu, 2019). Esta división nos muestra que el alumnado, a partir del ciclo metodológico elaborado, da especial relevancia a la planificación del problema, tal y como lo hacen los resolutores expertos (Schoenfeld, 1992).

Los procesos metacognitivos que aparecen en la base del grupo B son, de manera generalizada, aplicables a otra tipología de problemas. Por lo tanto consideramos que el alumnado, aunque ha desarrollado una base de carácter general, hace referencias específicas a destrezas propias de los problemas de patrones, tanto a modo aritmético como a través del dibujo.

Caracterización de la fase 3 perteneciente al grupo C

Tal y como observamos en la tabla 4, 11 de los 15 ítems de la base, son referentes a procesos metacognitivos. En contraposición, 4 de los 15 ítems de la base hacen referencia a destrezas relacionadas principalmente con el dibujo. En el caso del grupo C, el alumnado reconoce que debe planificar la estrategia a seguir y ponerla en práctica. En caso de que la estrategia no surja efecto, aparece un ítem referente al cambio de estrategia. Este hecho nos muestra que el alumnado, como en el caso del grupo B, reconoce la importancia de la planificación. En este caso, el grupo C, añade importancia al cambio de estrategia al no llegar a una solución coherente con lo que pide el enunciado. Este proceso muestra una anticipación al bloqueo absoluto durante la resolución y una revisión constante del proceso llevado a cabo (Villalonga y Deulofeu, 2015).

Podemos concluir que la base en fase 3 construida por el grupo C, es una base de carácter generalmente metacognitivo, con ítems referentes al uso del dibujo como método para hallar el patrón. La BONL generada, se muestra a medio camino entre específica y general atendiendo al tipo de dependencia de algunos ítems respecto al contexto.

Tabla 4. Caracterización de los ítems pertenecientes a la fase 3 (Grupo C)

Fase	Ítems fase 3	D	PM	IC	DC	EC
Entender	Leo las veces que haga falta		x	x		
	Quito del enunciado lo que me distrae		x	x		
	Selecciono los datos importantes		x	x		
	Selecciono la pregunta		x	x		
	Pongo los números en el dibujo del enunciado	x				x
Razonar y resolver	Analizo qué estrategia tengo que seguir		x	x		
	Hago lo que me piden con la estrategia que he elegido		x	x		
	Cambio la estrategia si la primera no me sale		x	x		
	Dibujo el patrón de la figura	x				x
	Cuento mentalmente	x			x	
Revisar	Dibujo para revisar que las operaciones “cuadren” con el dibujo del enunciado	x				x
	Reviso las operaciones		x		x	
	Reviso la respuesta		x	x		
	Reviso los datos del enunciado		x	x		
	Vuelvo a leer el enunciado y lo que he escrito		x	x		

6. DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

Una vez mostrada la caracterización de cada una de las bases en fase 3 elaboradas por cada grupo, nos parece interesante comparar, en primer lugar, tanto el formato general de dichas bases como las destrezas y procesos metacognitivos que en ellas aparecen.

En primer lugar observamos, como punto en común, que las bases de orientación no lineales que ha generado el alumnado son de carácter genérico, pese a que el contenido del problema era específico de patrones y lógica. Este hecho nos muestra que iniciar la construcción de una BONL a partir de problemas de lógica y patrones matemáticos, puede ser un buen mecanismo para que el alumnado tome consciencia del proceso de construcción y uso de la base, puesto que este contenido no tiene especificidades y destrezas matemáticas tan definidas como podría ser la aritmética o la geometría (Torregrosa, Albarracín, Deulofeu, en prensa). Así pues, las tres bases caracterizadas se muestran como eminentemente generales y poco específicas atendiendo al contenido.

En segundo lugar, queremos resaltar que el proceso de resolución de un problema cuenta con multitud de procesos metacognitivos referentes al monitoreo, regulación y evaluación de la situación planteada (Clarke, 1989). Aproximadamente el 75% de los ítems que aparecen en las bases, hacen referencia a procesos metacognitivos que además, pueden ser aplicados en multitud de problemas distintos. Así pues, el alumnado da suma importancia a los procesos de autorregulación del proceso (Schoenfeld, 1989) que son claves durante el proceso de resolución.

En tercer lugar, observamos que ante un mismo ciclo de resolución, alumnado de grupos y centros distintos, han elaborado bases de orientación de estructura y formato similar. Este hecho nos muestra que el alumnado tiene integradas las fases de resolución de Polya (1945) durante la educación primaria y que además, esta tipología de problemas les permite añadir ítems referentes a las cuatro dimensiones curriculares: resolución de problemas, conexiones, razonamiento y prueba, y comunicación y representación (Departament d'Ensenyament, 2016).

Como puntos diferenciales, observamos que la base elaborada por el grupo B, es la que presenta más detalle en los procesos metacognitivos que el alumnado ha desarrollado. Además, el uso del condicional en los ítems referentes al dibujo muestra que el alumnado ha percibido la importancia de buscar métodos aritméticos más efectivos a nivel temporal (Deulofeu y Villalonga, 2018). En el grupo C, aparece explícitamente la selección de una estrategia, así como el cambio de estrategia en caso de que la inicial no "funcione", es decir, no cumpla con los requisitos del enunciado o no desemboque en una respuesta coherente con lo que se pide. Este posible cambio de estrategia nos muestra que el alumnado revisa y autorregula su proceso en distintos momentos y no sólo al final del mismo (Sanmartí, 2010). En cuanto al grupo A, que era el único que había trabajado anteriormente con bases de orientación de la acción (García y Sanmartí, 1998), no encontramos diferencias significativamente relevantes en la BONL elaborada con respecto a los dos otros grupos de alumnos. La diferencia más significativa se halla en las producciones escritas del alumnado, ya que las resoluciones del grupo A, son más detalladas desde el primer problema, están mejor estructuradas así como mejor planificadas.

Como conclusión final debemos añadir la importancia que presenta examinar los procesos metacognitivos del alumnado durante la resolución de problemas matemáticos. Las destrezas (Puig, 1996) que el alumnado desarrolla en educación primaria son relevantes, pero sin los procesos metacognitivos (Wilson y Clarke, 2004), dichas destrezas no serían usadas eficazmente. Así pues, comprender cómo el alumnado regula y evalúa el proceso de resolución, en qué momento lo hace y cómo lo hace, potenciará que el docente pueda asesorar y orientar mejor al alumnado durante la resolución de problemas matemáticos. La base de orientación no lineal, así como la evaluación que actúa como método de feedback, ayuda al alumnado a verbalizar por escrito el proceso de regulación y evaluación, y permite, tanto al docente como al alumno, tomar consciencia del desarrollo de la competencia matemática.

Agradecimientos

Agradecemos a los grupos de sexto de primaria del centro les Corts de Barcelona y la escuela Sant Francesc de Sabadell, así como a la dirección de ambos centros y sus respectivos docentes, su colaboración en el presente estudio.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Cano, E. (2015). Las rúbricas como instrumento de evaluación de competencias en Educación Superior: ¿Uso o abuso?. *Profesorado, 19*(2), 265-280.

Consell superior d'avaluació (2013). *L'avaluació de sisè d'educació primària 2013.* Quadern nº 26. Barcelona: Departament d'Ensenyament. Generalitat de Catalunya.

De Corte, E., y Verschaffel, L. (2003). El desarrollo de habilidades de autorregulación en la solución de problemas matemáticos. *Revista pensamiento educativo*, *32*, 286-305.

Departament d'Ensenyament (2016). Desplegament de les competències bàsiques. Currículum educació primària. Decret 142/2007, DOGC núm. 4915.

Deulofeu, J. y Villalonga, J. (2018). Resolución de problemas y regulación del aprendizaje. *Educatio Siglo XXI*, *36*(3), 153-176.

García, M., y Sanmartí, N. (1998). Las bases de orientación: un instrumento para enseñar a pensar teóricamente en biología. *Alambique: Didáctica de las Ciencias Experimentales*, *16*, 8-20.

Jorba, J., y Sanmartí, N. (1996). *Enseñar, aprender y evaluar: un proceso de regulación contínua: Propuestas didácticas para las áreas de Ciencias de la Naturaleza y Matemáticas*. Madrid: Ministerio de Educación.

Mayer, R. (1985). Implications of cognitive psychology for instruction in mathematical problem solving. In Silver, E. A. (Ed.), *Teaching and learning mathematical problem solving: Multiple research perspectives*, 123–138. Lawrence Erlbaum: Hillsdale, NY.

Polya, G.(1945). How to Solve it. Princeton: Princeton University Press.

Puig, L. (1996). Elementos de resolución de problemas. Granada: Comares

Sanmartí, N. (2010). *Avaluar per aprendre. L'avaluació per millorar els aprenentatges de l'alumnat en el marc del currículum per competències.* Generalitat de Catalunya. Departament d'Educació. Direcció General de l'Educació Básica i el Batxillerat.

Schoenfeld, A. H. (1987). What's all the fuss about metacognition. En A. Schoenfeld (Ed.) *Cognitive science and mathematics education*, 189- 215. Lawrence Erlbaum Associates. Hillsdale, NY.

Schoenfeld, A. H. (1989). Teaching mathematical thinking and problem solving. En L.B. Resnick, B.L. Klopfer (Eds.) *Toward the thinking curriculum: Current cognitive research*, 83-103. Association for Supervision and Curriculum Development: Washington D.C.

Schoenfeld, A. H. (1992). Learning to Think Mathematically: Problem Solving, Metacognition, and Sense-making Mathematics. Grouws, D. (Ed.), *Research on Mathematics Teaching and Learning,* 334-370, Macmillan: New York.

Torregrosa, A., Albarracín, L. y Deulofeu, J. (En prensa) Orientación y coevaluación: Dos aspectos clave para la evolución del proceso de resolución de problemas. *BOLEMA: Boletim de Educação Matemática*.

Torregrosa, A., Albarracín, L. y Deulofeu, J. (2019) Estadios evolutivos de una base de orientación no lineal. En *19 Jornadas para el Aprendizaje y la Enseñanza de las Matemáticas. Actas JAEM 2019.* A Coruña: FESPM, AGAPEMA.

Torregrosa, A., Deulofeu, J. y Albarracín, L. (En prensa) Caracterización de procesos metacognitivos en la resolución de problemas de numeración y patrones matemáticos. *Educación matemática*.

Villalonga, J., y Deulofeu, J. (2015). La base de orientación en la resolución de problemas. En FESPM, SEMRM (Eds.), *Actas JAEM 2015. 17 Jornadas para el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas*, 36 - 68. Pedro Ángel Sánchez Martínez, S.L.U: Cartagena, España.

Villalonga, J., y Deulofeu, J. (2017). La base de orientación en la resolución de problemas: “Cuando me bloqueo o me equivoco.” *REDIMAT, 6(3),* 256-282.

Wilson, J., y Clarke, D. (2004). Towards the modelling of mathematical metacognition. *Mathematics Education Research Journal*, *16*(2), 25-48.

Épsilon - *Revista de Educación Matemática* ***2020, nº 104, 25-43***

Conocimiento especializado de un profesor de matemáticas asociado al concepto de proporcionalidad: un estudio de caso a través del modelo MTSK

Camilo Fuentes Leal
Universidad de huelva

Resumen: *Se muestra una experiencia de un estudio de caso de una profesora en un colegio público de Bogotá donde se indagó sobre el conocimiento especializado del profesor con respecto a la enseñanza de la proporcionalidad por medio del modelo MTSK, para esto se hizo uso de técnicas de recolección y sistematización de información como la transcripción de las clases, entrevistas y toma de fotografías, y como medios de análisis de la información la triangulación de instrumentos y la triangulación de especialistas. Con base al análisis cronológico de episodios, asociando unidades de información con las categoría del modelo y estableciendo relaciones entre estos, observando una preeminencia de los. Algunas conclusiones están asociadas con la preeminencia de conocimiento del tema (KoT) y la relación entre subdominio con el KMT y KFLM.*
Palabras clave: *Conocimiento especializado del profesor de Matemáticas (MTSK), Pensamiento proporcional, Estudio de caso.*

Specialized knowledge of a mathematics professor associated with the concept of proportionality: a case study through the mtsk model

Abstract: *An experience from a case study of a teacher in a public school in Bogotá, where the specialized knowledge of the teacher regarding the teaching of proportionality using the MTSK model, for this, information collection and systematization techniques were used, such as the transcription of classes, interviews and photography, and as a means of analyzing the information, triangulation of instruments and triangulation of specialists. Based on the chronological analysis of episodes, associating information units with the categories of the model and establishing relationships between them, observing a preeminence of the. Some conclusions are associated with the pre-eminence*

of the knowledge of topic (KoT) and the relationship between subdomain with the KMT and KFLM.
Keywords: *Specialized knowledge of the Mathematics teacher (MTSK), Proportional thinking, Case study.*

1. INTRODUCCIÓN

El presente documento es resultado de una investigación doctoral en la cual se indagó sobre el conocimiento especializado con respecto a la enseñanza de la proporcionalidad. Dada la importancia de este concepto, es necesario tener en cuenta que la comprensión de la proporcionalidad como un proceso extenso y complejo, el cual es construido a lo largo de todo el proceso educativo; autores como Block (2001, 2006), Rivas, Godino y Castro (2012), Valverde (2013), Rivas (2013), Balderas y Guerra (2014), Torres (2015) han mostrado que aunque se han hecho diferentes aproximaciones para la investigación y la comprensión de la proporcionalidad como concepto articulador en el pensamiento matemático, persisten dificultades en su aprendizaje y enseñanza de la proporcionalidad tanto en lo estudiantes como en profesores en ejercicio, mostrando así una necesidad de hacer investigaciones sobre comprensión de la proporcionalidad desde la perspectiva del profesor, en este caso se hizo una aproximación al conocimiento especializado del profesor en la enseñanza de este concepto.

Se considera que por medio de la presente experiencia se puede ampliar la reflexión, comprensión y transformación de sus prácticas pedagógicas de los profesores asociadas a la enseñanza de la proporcionalidad, además de considerar que esta experiencia investigativa aporta en la construcción de propuestas de enseñanza de la proporcionalidad, la superación de estas dificultades de comprensión de la proporcionalidad y la construcción de nuevas propuestas formación de profesores asociadas a la enseñanza de este concepto.

2. PLANTEAMIENTO DE LA INVESTIGACIÓN

Como se mencinó anteriormente, la construcción de una comprensión amplia de la proporcionalidad ha sido un problema que ha sido investigado desde hace décadas por diferentes autores desde diferentes perspectivas teóricas, sin embargo, se ha encontrado que las dificultades y errores es su comprensión y enseñanza persisten tanto en los estudiantes como en los profesores tanto en la enseñanza de este concepto como en la resolución de situaciones problemas en diferentes contextos.

Se considera que una propuesta que puede aportar en la resolución de la anterior problemática es la elaboración de investigaciones que aborden la comprensión del conocimiento especializado del profesor asociado a la enseñanza de la proporcionalidad, pues por medio de la comprensión del conocimiento del profesor se pueden establecer diferentes dimensiones de este objeto matemático, aportando así a su caracterización, comprensión de sus propiedades, procedimientos, representaciones, establecer cómo este objeto matemático se relaciona con otros, conocer sus errores y obstáculos epistemológicos.

Para esta labor se considera necesario hacer uso de propuestas teóricas como las construidas en la Universidad de Huelva, donde se han realizado valiosos aportes en la construcción de una línea en investigación sobre el conocimiento especializado del profesor de matemáticas en el marco de las actividades del Seminario de Investigación en Didáctica de la Matemática (SIDM), el cual en los últimos años han dirigido diferentes tesis doctorales como Montes (2015), Vasco (2015), Flores (2015), Escudero (2015), Aguilar (2015), Liñan (2017), donde se indaga sobre sobre el conocimiento especializado del profesor, mostrando así sobre conocimiento amplio y una larga trayectoria en la investigación del tema.

En este sentido, la pregunta de investigación fue ¿Qué conocimiento de proporcionalidad moviliza un profesor de enseñanza secundaria cuando enseña proporcionalidad?, para poder responder esta incógnita se usó el modelo MTSK pues este aporta en la compresión del conocimiento especializado del profesor de matemáticas; el objetivo fue identificar por medio de este modelo las características del conocimiento especializado de un profesor de matemáticas cuando enseña el concepto de proporcionalidad en secundaria.

3. REFERENTES TEÓRICOS Y METODOLÓGICOS

Estos elementos serán presentados en dos apartados, en un primer momento se hará una sensibilización teórica sobre el concepto de proporcionalidad y una caracterización del modelo MTSK el cual es desarrollado por la universidad de Huelva, pues estos dos elementos constituyen una parte de vital importancia para comprender el conocimiento que se puede asociar al profesor.

En el segundo apartado correspondiente al los referentes metodológico, se mencionará el tipo de investigación elegida, los criterios de selección de la informante y la fundamentación cómo se obtuvieron los datos a analizar en esta investigación.

Proporcionalidad y el modelo MTSK: Una breve construcción de la proporcionalidad como concepto matemático

Parte de la sensibilización teórica sobre la proporcionalidad radica en caracterizarla como una construcción humana, es decir que ha sido enriquecida a lo largo de la historia. Iniciando por los aportes del antiguo Egipto, donde dada la naturaleza preeminentemente práctica del conocimiento matemático egipcio sólo se pudieron identificar problemas asociados a situaciones reales como los presendos en el papiro del Rhind y analizado por Chace (1979).

La practicidad como característica de la proporcionalidad fue trascendida por la propuesta axiomática deductiva de la Grecia clásica, ejemplo de esto se puede evidenciar en Euclides (1991), donde se recoge sistemáticamente el tratamiento de la proporcionalidad por matemáticos como Pitágoras, Eudoxo o Thales.

Por otro lado, la cultura China mostró una interpretación diferente de conceptos de razón y proporcionalidad, prueba de esto se puede analizar en Los Nueve Capítulos, documento del siglo III donde se plantea el "lu" como herramienta para comprender el razonamiento en la construcción de la regla de tres, de esta forma, el uso del "lu" hace que la interpretación de proporcionalidad China se adapte mucho mejor a las dinámicas comerciales y mercantiles que la propuesta Griega, pues desde el inicio se proponen relaciones entre un conjunto de números, dejando de lado que sean estas sean necesariamente homogéneas, estos elementos son propuestos por autores como Dauben (1998), Chemla (2005) y Kangshen (1999).

Con la caída del imperio romano y la pérdida de los conocimientos del mundo clásico, la cultura árabe fue fundamental para salvaguardar estos conocimientos, ejemplo de esto se puede evidenciar en Los Comentarios de Omar Al- Khayyam a Los Elementos, publicado en el siglo XI en lo actualmente ocupa el territorio Iraquí, Rashed (1999) menciona que en este documento se presenta una definición alternativa de igualdad de razones a la presentada por Euclides, para el autor dos razones son iguales si ambos pares de magnitudes dan lugar a misma sucesión de enteros tras el proceso de antifairesis; a esta definición él la llama como la "razón verdadera", llamando a la definición geométrica de Euclides como la "razón usual".

Posteriormente, en el renacimiento se reactivan propuestas alternativas del tratamiento Griego de la proporcionalidad, ejemplo de esta situación se pudo observar en la publicación en 1255 de la traducción de Los Elementos por Campanus de Novara, en la que se presenta la definición del concepto de "denominación de una razón" con la cual se buscó aritmetizar la idea de razón propuesta en Los Elementos, pues en la propuesta de Euclides la razón se presenta como una relación únicamente entre magnitudes homogéneas (segmentos), en cambio en la propuesta de Campano se buscó asociar un número a cada razón, haciendo que esta propuesta se relacione la asignación actual en la que se asocia una razón a un número racional, característica que autores como Rommevaux (1999) menciona que aportó en la comprensión de la razón como fracción y como número racional.

Caracterización disciplinar del concepto de proporcionalidad

Existen diferetes aproximaciones para definir la proporcionalidad como concepto matemático, por ejemplo, Fiol y Fortuny (1990), hacen uso de las teorías sobre funciones para mencionan que dos magnitudes son proporcionales si se puede establecer un isomorfismo entre sus cantidades tal que:

- **i.** Si $a < b$ implica $f(a) < f(b)$, la relación de orden es monótona.
- **ii.** y $f(a + b) = f(a) + f(b)$, es decir, se conserva el orden y la suma.
- **iii.** Si la magnitud es continua, la proporcionalidad f queda unívocamente determinada dando la cantidad homóloga $f(a)$ de una cantidad cualquiera y en particular las cantidades correspondientes $f(a)$ a una unidad.

Este tipo de definiciones aportan en la superación de la creencia que la proporcionalidad está dada únicamente en magnitudes homogéneas como el caso de dos pares de segmentos.

Una segunda perspectiva, se plantea la proporcionalidad como una relación multiplicativa entre magnitudes, la cual permite determinar el valor cantidad de magnitud en función de otra cantidad de magnitud de la cual se conoce su medida, estableciendo relaciones de proporcionalidad entre cantidades de distintas magnitudes. Finalmente, una tercera perspectiva de definición de proporcionalidad está en Carrillo, Contreras, Climent, Montes, Escudero y Flores (2016) quienes la caracterizan como una relación de equivalencia entre dos cantidades de magnitudes extensivas[1], de tal forma que cuando se hace la comparación de dos cantidades de magnitudes (a partir de la construcción de razones) se obtiene el mismo valor.

En terminos muy generales comprender la proporcionalidad como objeto matemático es necesario contemplarla en dos situaciones, la proporcionalidad directa y la proporcionalidad inversa, las cuales a su vez se pueden evidenciar en un contexto geométrico o uno aritmético, se definirá la proporcionalidad directa como una relación entre magnitudes que permite obtener la medida de cantidad de la otra magnitud multiplicando una constante por la medida de cantidad de esta u otra magnitud. Mientras tanto, la proporcionalidad inversa se define como una relación entre magnitudes que permiten obtener la medida de una cantidad de magnitud multiplicando por una constante por la inversa de la medida de otra cantidad de magnitud.

Con respecto al contexto numérico, se puede mencionar que cuando se busca encontrar una relación de proporcionalidad directa o inversa entre dos variables numéricas se hará uso de primer contexto; en cambio, en la proporcionalidad geométrica se indaga con cuerpos, formas, objetos de los cuales se quieren replicar a diferente tamaño o cuando su medición no es posible físicamente se hará uso de segundo contexto, por ejemplo, en la construcción de maquetas, mapas o medir alturas de edificios de grandes alturas.

Modelo MTSK como marco de referencia para comprender la proporcionalidad

Se han hecho diferentes aproximaciones a la comprensión del conocimiento del profesor sobre proporcionalidad, por ejemplo, en Rivas (2013) por medio del EOS hace un análisis epistémico y cognitivo de tareas de proporcionalidad en la formación de profesores de Educación Primaria en formación en la Universidad de Granada, o Balderas y Guerra (2014) donde indagan sobre conocimiento del profesor de matemáticas con respecto a la proporcionalidad por medio de la comprensión de diferentes interpretaciones de este concepto.

O más recientemente, Torres (2015) quien indaga el conocimiento un profesor de Primaria y uno de Secundaria, por medio del modelo Knowledge Quartet identificando 39 indicadores pertenecientes a las categorías (11 para fundamentos, 11 para transformación, 7 para conexión, 4 para contingencia y 6 para la categoría general), una característica interesante de esta investigación es la identificación de seis indicadores que no se pueden categorizar en el modelo, situación que da pie para la usar modelos alternativos como el MTSK elaborado en la Universidad de Huelva.

El modelo MTSK surge como una propuesta teórica de comprensión del conocimiento del profesor de matemáticas en el marco del grupo SIDM en la Universidad de

1. Donde la unión de la cantidad de magnitud sea sumativa, como por ejemplo la cantidad de superficie.

Huelva, España, donde se ha trabajado y aportado intensamente en la comprensión del conocimiento profesional del profesor, en la propuesta se proponen dos dominios.

El primer dominio es el conocimiento matemático (MK), el cual contiene como subdominios el conocimiento de los temas (KoT), que hace referencia a la fenomenología, propiedades y sus fundamentos, registros de representación, definiciones y procedimientos, el conocimiento de la estructura matemáticas (KSM), que integra las conexiones de complejización, las conexiones de simplificación, las conexiones de contenidos transversales y finalmente las conexiones auxiliares y el conocimiento de la práctica matemática, (KPM) que contienen las prácticas ligadas a la matemática en general y las prácticas ligadas a una temática en matemática.

El segundo dominio es el conocimiento didáctico de contenido (PCK), en el cual contiene los subdominios de conocimiento de la enseñanza de las matemáticas (MKT), que hace referencia a las teorías personales o institucionales de enseñanza, los recursos materiales y virtuales y las actividades, tareas, ejemplos y ayudas, el conocimiento de las características del aprendizaje de las matemáticas (KFLM) que se refiere a las formas de aprendizaje, las fortalezas y dificultades asociadas al aprendizaje, las formas de interacción de los alumnos con el contenido matemático y las concepciones de los estudiantes sobre matemáticas, y el conocimiento de los estándares de aprendizaje de las matemáticas (KMLS), que hace referencia los contenidos matemáticos requeridos a enseñar, el conocimiento del nivel de desarrollo conceptual y procedimental esperado, y la secuenciación de diversos temas.

Una característica particular de la propuesta teórica es la inclusión de las creencias de las matemáticas, de su aprendizaje y enseñanza como motor de las acciones de las categorías es un nuevo elemento que presentan los autores en la propuesta de conceptualización del conocimiento del profesor de matemáticas, en la figura 1 se muestra una representación de la relación entre los diferentes componentes del modelo.

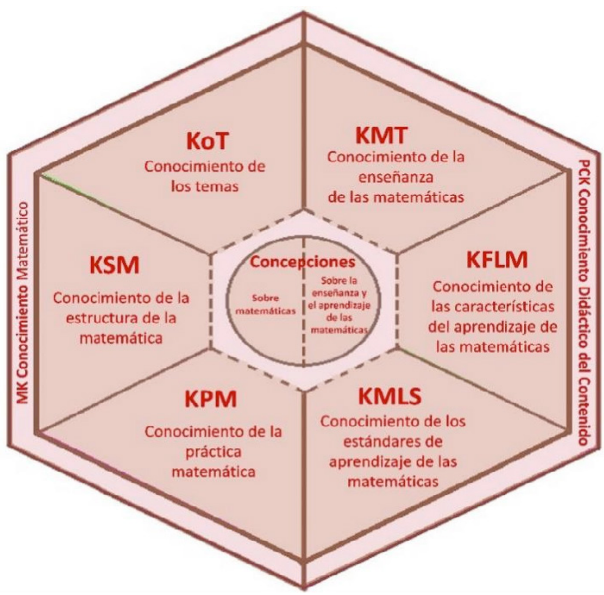


Figura 1. Representación gráfica de modelo MTSK (extraído de Muñoz ete al., 2015).

Se considera que este modelo complejiza y amplía los modelos preexistentes del conocimiento del profesor, por varios motivos. En primer lugar, el conocimiento especializado del profesor de matemáticas se caracteriza como aquel que el profesor necesita y usa para explicar matemáticas, prescindiendo de consideraciones pedagógicas generales no relacionadas a la disciplina. Por otro lado, este es un modelo de conocimiento en el que se considera el conocimiento que sustentan las acciones, de igual forma se considera que en el desarrollo de cierta acción de enseñanza, puede existir conocimiento de diferentes subdominios, es decir que no existe una relación univoca entre una acción y un subdominio, mostrando así la simultanead y complejidad del modelo.

3. CARACTERIZACIÓN DEL ESTUDIO

Dado que el objetivo de la investigación fue la comprensión de un fenómeno social, es necesario hacer uso de un paradigma cualitativo, donde se considere el conocimiento como una construcción social, interpretando la realidad como un constructo múltiple y holístico, renunciando a la idea de objetividad y neutralidad; considerando que las relaciones entre el investigador y el objeto estudiado como elementos inseparables.

De igual forma, como el objetivo de la investigación fue analizar e interpretar una realidad, en este caso el conocimiento movilizado por un profesor en la enseñanza del concepto de proporcionalidad es necesario posicionarse en un paradigma interpretativo en un estudio de caso de tipo instrumental presentado en Stake (2005), teniendo en cuenta instrumentos de recolección de la información como la grabación de las sesiones, la observación no participante y el cuaderno de campo.

Se considera que el estudio de caso como una oportunidad donde una experiencia específica de un profesor puede aportar en la construcción de referentes teóricos relacionados con la comprensión del conocimiento especializado del profesor de matemáticas, elementos propios de una investigación top down bottom up, donde los casos específicos y los cuerpos teóricos (en este caso el MTSK) se relacionan dialógicamente, nutriéndose y enriqueciéndose mutuamente.

Después de caracterizar el paradigma y el estudio de caso como estrategia, es necesario caracterizar la profesora Sonia, quien fue la informante. Ella es una profesora de matemáticas de un colegio público al suroccidente de Bogotá, fue seleccionada como informante por diferentes motivos, entre estos su amplia, diversa y permanente formación académica, pues cuenta con formación pedagógica como normalista en educación (profesora de primaria), formación matemática como ingeniera civil y postgrados en matemática educativa, además tener una amplia experiencia como profesora de aula durante más de 18 años.

Estos elementos hacen que ella sea una muestra representativa de la población de de profesores de Colombia, pues la informante pertence al sistema de educación pública, el cual según el Departammento Administratio Nacional de Estadística DANE[2] representa del 80,4 % del sistema educativo Colombiano, cuenta con diferntes tipos de formación,

2. https://www.dane.gov.co/files/investigaciones/boletines/educacion/bol_EDUC_18.pdf pues en Colombia se puede acceder a la docencia por medio de diferentes educativos (licencicado, tecnólogo en educación o profesional diferente a licenciado) y hace parte del 58% de los profesores de Bogotá que tienen 10 años o más de expericia en docencia, según datos del Instituto para la Investigación Educativa y el Desarrollo Pedagógico[3].

4. RECOLECCIÓN Y ANÁLISIS DE LA INFORMACIÓN

Esta tarea estuvo centrada en la observación de cuatro sesiones de clase por medio de la grabación en vídeo y la toma de notas de campo, paralelo a esto se tomó evidencia fotográfica de los trabajos y soluciones de los estudiantes, elementos que han aportado en el análisis de las grabaciones, clarificándolas y mostrando las relaciones entre los diferentes subdominios del conocimiento especializado del profesor.

De igual forma, es necesario mencionar que investigaciones previas sobre MTSK como Liñán (2017) han expresado que, en cuanto a la observación, no existe información pura, puesto que está organizada por nuestros conocimientos; de esta forma una observación debe entenderse como la construcción de una representación o de un modelo de una situación.

Una vez se recolectó toda la información se procedió a organizar las sesiones por medio de núcleos temáticos y hacer la respectiva transcripción de manera manual de las sesiones, a lo cual Liñán (2017) comenta que en este proceso es necesario hacer énfasis en los elementos que se interesa observar, en este caso se incluirán la contextualización de las situaciones de cada sesión, las intenciones, los gestos y movimientos de los estudiantes y de la profesora en el proceso de enseñanza.

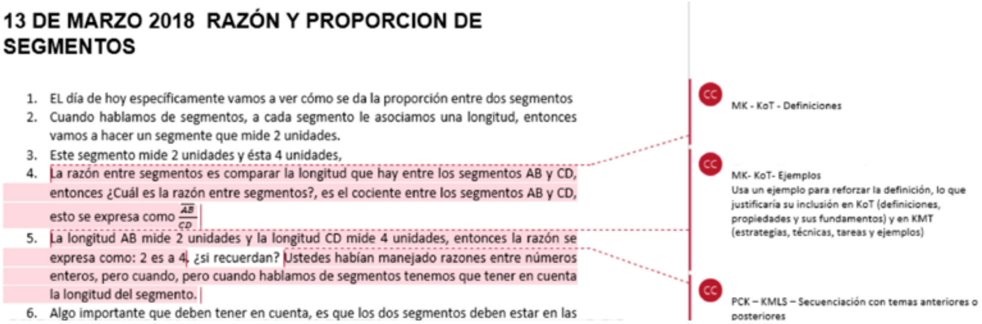
Inicialmente la transcripción se dividió en unidades de información, las cuales que fueron entendidas como frases o argumentos para expresar una idea, al leer cada unidad se asociaba manualmente a un dominio, un subdominio, una categoría del MTSK, las cuales eran organizadas en una tabla cronológica donde se narraban lo sucedido en cada sesión, tal y como se muestra en la figura 2.

Posteriormente, se organizaron las unidades poniendo como criterios los organizadores curriculares propuestos por el Ministerio de Educación de Colombia en MEN (2007), en un primer momento y después las subcategorías, teniendo en cuenta la tabla I donde en n representa el número de la clase en la que está ubicada cada unidad.

Tabla I: Organización de las unidades de información.

	Subdominio	*Categoría*	*Organizador curricular*	*Segmento*	*Comentario/Justificación*
Fecha					

3. http://www.idep.edu.co/sites/default/files/libros/Perfiles%20de%20los%20Docentes.pdf



13 DE MARZO 2018 RAZÓN Y PROPORCION DE SEGMENTOS

1. EL día de hoy específicamente vamos a ver cómo se da la proporción entre dos segmentos
2. Cuando hablamos de segmentos, a cada segmento le asociamos una longitud, entonces vamos a hacer un segmente que mide 2 unidades.
3. Este segmento mide 2 unidades y ésta 4 unidades,
4. La razón entre segmentos es comparar la longitud que hay entre los segmentos AB y CD, entonces ¿Cuál es la razón entre segmentos?, es el cociente entre los segmentos AB y CD, esto se expresa como $\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}}$
5. La longitud AB mide 2 unidades y la longitud CD mide 4 unidades, entonces la razón se expresa como: 2 es a 4. ¿si recuerdan? Ustedes habían manejado razones entre números enteros, pero cuando, pero cuando hablamos de segmentos tenemos que tener en cuenta la longitud del segmento.
6. Algo importante que deben tener en cuenta, es que los dos segmentos deben estar en las

CC MK - KoT - Definiciones

CC MK- KoT- Ejemplos
Usa un ejemplo para reforzar la definición, lo que justificaría su inclusión en KoT (definiciones, propiedades y sus fundamentos) y en KMT (estrategias, técnicas, tareas y ejemplos)

CC PCK – KMLS – Secuenciación con temas anteriores o posteriores

Figura 2. Transcripción inicial de la información.

En una primera aproximación al análisis de la información recolectada se procedió a hacer un conjunto de mapas conceptuales que den cuenta del MTSK observado en las cuatro sesiones observadas, teniendo como referencia cada uno de los subdominios y categorías del MTSK. Debido al tamaño y la complejidad de establecimiento de relaciones entre categorías fue necesario elaborar pequeños mapas conceptuales con respecto a organizadores curriculares específicos presentes en las sesiones de clase, estos organizadores fueron, las razones entre segmentos, las rectas paralelas, los segmentos homólogos y la semejanza.

Una vez se tuvo una idea general de los conocimientos movilizados en las sesiones, fue necesario expresar de una forma más metódica el análisis de episodios específicos para esto se hizo uso del sistema de códigos de la tabla II.

Tabla II: Códigos usados para la sistematización de la información.

Código	Significado
P	Profesora
E	Estudiante
[…]	Fragmento que no se tiene en cuenta por no ser útil en el análisis.
Texto entre paréntesis: ( )	Explicación de algo que está ocurriendo en el aula, pero no se verbaliza
Texto entre comillas: “”	Lectura de partes del libro de texto o de otros libros que se usan en el aula. Puede haberse realizado por la maestra o por los estudiantes
a,b	Inicio y fin de las unidades a analizar

Después de presentar el análisis de esos episodios específicos, se consideró necesaria la construcción de la tabla III, donde se presentará toda la información con respecto a cada uno de los subdominios del MTSK, a continuación, se presenta el ejemplo del subdominio del conocimiento de los temas KoT.

Tabla III: Sistematización de las unidades por subdominios del modelo MTSK.

Subd.	Categoría	Unidad de Información	Evidencia o indicio en el MTSK
KoT	Definiciones, propiedades y fundamentos	(4,4) La razón entre segmentos es comparar la longitud que hay entre los segmentos AB y CD, entonces ¿Cuál es la razón entre segmentos?, es el cociente entre los segmentos AB y CD, esto se expresa como $\frac{\overline{AB}}{A'B'}$	Definición de razón entre dos pares de segmento
	Procedimientos	(49,52) 2 por 9 debe ser igual a 3 por 6, miremos $2x9 = 3x6$ $18= 18$ Esta es una manera de verificar, que los dos pares de segmentos son proporcionales o que guardan la misma razón	Procedimiento para comprobar si las razones de dos pares de segmentos son proporcionales.

Una vez se tuvo esta información fue necesario establecer relaciones entre categorías por medio de mapas y esquemas visuales. Un aspecto importante por resaltar sobre el análisis de la información es la validación del análisis de la información por medio de dos estratregias; la primera la triangulación de expertos propuesta en Flick (2007), la cual consiste la participación de diferentes observadores que validan los datos, estableciendo una nula o mínima la posibilidad de sesgo (causado por el investigador) en este caso, los observadores fueron los participantes el SIDM y el director de la investigación, y por otro lado, la triangulación de instrumentos, la cual radica en comparar la información obtenida, por ejemplo la comparación de las trascripciones, notas del diario de campo, fotografias y entrevistas para obtener un mismo conjunto de datos y así minimizar las posibilidades de sesgos.

5. ANÁLISIS DE LA INFORMACIÓN

En la figura 3 se representarán a modo de resumen las temáticas trabajadas en cada sesión, tarea necesaria para posteriormente hacer un análisis más profundo sobre casa sesión y sus respectivas sesiones.

Al hacer un análisis cronológico se identificaron 20 episodios, donde se encontraron 177 indicadores pertenecientes a los subdominios del modelo MTSK, observando una preminencia de categorías como el uso de las definiciones, propiedades y sus fundamentos, el uso de representaciones y procedimientos todos estos pertenecientes al KoT y también se observó la preeminencia del uso de estrategias, técnicas, tareas ejemplos pertenecientes al subdominio MKT.

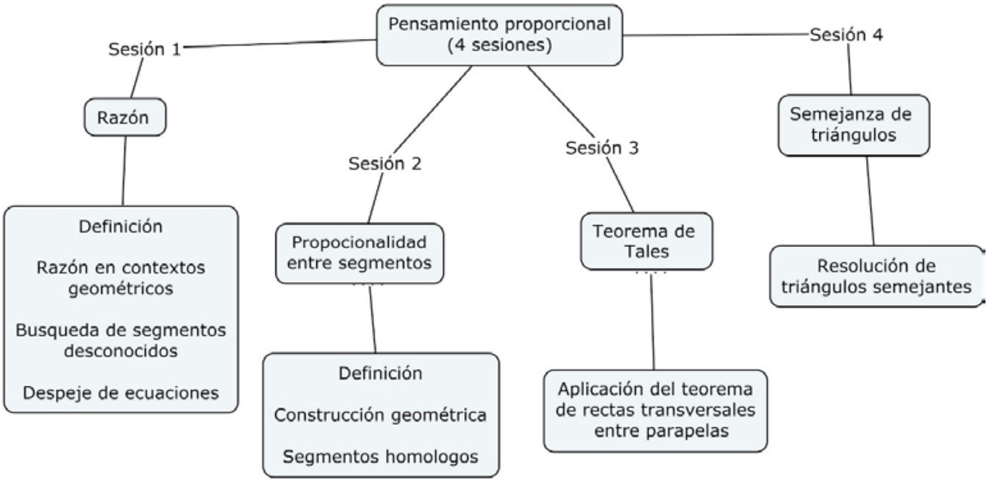


Figura 3. Temáticas trabajadas en las clases observadas.

Estas primeras características aportaron por un lado en la compresión de qué elementos priorizaba la profesora en la enseñanza de la proporcionalidad y por otra parte en la construcción de relaciones entre las diferentes subcategorías, elementos que se presentan en la tabla IV, donde se cuantifican los indicadores encontrados con base en la triangulación de la información.

Tabla IV: Cuantificación de indicadores encontrados.

Subd.	**Categoría**	**Cant de Indicadores**
KoT	Definiciones propiedades y sus fundamentos	41
	Procedimientos	35
	Fenomenología y sus aplicaciones	9
	Registros de representación	17
KSM	Conexión transversal	7
	Con. Aux	7
KPM	Formas de validación y demostración	6
	Papel de los símbolos y el lenguaje formal	4
	Jerarquía y plan. Para la res. De problemas	4
	Práctica Matemática.	0

Subd.	Categoría	Cant de Indicadores
MKT	Estrategias, técnicas, tareas y ejemplos	33
	Recursos, materiales virtuales	7
KFLM	Fortalezas y dificultades	2
	Formas de interacción con el cont. Matemático	2
KMLS	Secuenciación con temas	3

Una vez se identificaron los indicadores, se hizo necesario construir un análisis relaciones entre estos en cada uno de subdominios propuestos por el modelo MTSK, encontrando 25 relaciones. Posteriormente se establecieron relaciones entre los indicadores a partir de oportunidades o indicios, los cuales se entienden como una unidad de información que no es del todo clara, de las cuales se encontraron 30 de relaciones entre indicios y oportunidades

6. DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

Con respecto al dominio de matemático (MK):

Este dominio está compuesto por tres subdominios, el conocimiento de los temas (KoT), contenido de la estructura de las matemáticas (KSM) y conocimiento de la práctica matemática (KMP), con respecto al KoT, desde la primera sesión, se pudo observar que para la profesora era necesario que los estudiantes comprendan la definición de razón como una comparación entre dos cantidades de magnitud, en este caso desde una perspectiva geometría a través del uso de segmentos.

Sin embargo, donde más se observó énfasis fue en el conocimiento de las propiedades y la importancia de estas en el transcurso de la enseñanza de procedimientos, representaciones o formas de resolver un problema asociado a la proporcionalidad desde una perspectiva geométrica.

De igual forma, se evidenció el uso de las propiedades geométricas de rectas paralelas, triángulos y cuadriláteros que se pueden asociar a la proporcionalidad, la relación entre lados homólogos para establecer la proporcionalidad, el establecimiento de las longitudes entre transversales y paralelas estableciendo razones de diferentes formas, siempre y cuando los segmentos sean correspondientes y homólogos.

Asimismo, se observaron propiedades asociadas a la proporcionalidad y la semejanza, como por ejemplo la proporcionalidad entre los lados de dos triángulos como un criterio de la semejanza; además se determinaron fundamentos como los argumentos necesarios para establecer que en algunos casos es necesario dividir en ambos lados de la igualdad para despejar una incógnita.

Con respecto a las definiciones, propiedades y fundamentos mencionadas anteriormente están relacionadas con un abordaje de la proporcionalidad desde una perspectiva geométrica, lo cual no quiere decir que la profesora posea únicamente este tipo de conocimiento, pues acuerdo a lo comentado por la profesora, la perspectiva geométrica al ser de una naturaleza gráfica y al ser más susceptible a trabajar con material concreto como escuadras y lápiz, es más fácil comprensión por parte de los estudiantes, este elemento también una relación entre KMT y KFLM.

Con respecto al conocimiento de la fenomenología asociado a la proporcionalidad, en la primera clase se pudieron identificar conocimientos relacionados con el uso de situaciones del contexto real para establecer la proporcionalidad entre dos pares de segmentos por medio del método de medios y extremos directamente para establecer una longitud desconocida.

En relación con el conocimiento de los registros de representación se pudo evidenciar gran variedad, estas fueron modificadas y enriquecidas con el trascurso de las sesiones y de la preguntas y dificultades observadas por los estudiantes, característica que llevó una reflexión sobre la relación de esta categoría con el KMT y el KFLM.

Para dar cuenta del conocimiento de los registros de representación se clasificaron de acuerdo con sus características. En el primer grupo están las representaciones verbales de la razón entre dos segmentos, y la proporcionalidad entre dos pares de segmentos, en el segundo grupo están las representaciones gráficas, caracterizándolas como aquellas herramientas que aportan en la comprensión y resolución de un problema asociado a la proporcionalidad y en el tercer grupo están las representaciones escritas, las cuales pueden ser de naturaleza notacional, como la representación escrita de segmentos por medio de expresiones como $\frac{\overline{AB}}{A'B'}$ y $\frac{\overline{BC}}{B'C'}$, la representación escrita de una razón como una división de segmentos y la representación escrita de rectas como $\vec{r}$, $\vec{s}$.

Con respecto al conocimientos de procedimientos se identificaron tres grandes grupos, en el primer grupo están los procedimientos de construcción como el establecimiento de una razón, usando simplificación de fracciones, la construcción de razones proporcionales dados cuatro segmentos, trazar una recta paralela a una recta dada, la búsqueda de un par de segmentos de tal forma que sean proporcionales con un par de segmentos dados.

En el segundo grupo están los procedimientos algebraicos, como por ejemplo el método de medios y extremos, y despeje de ecuaciones para verificar dos triángulos son semejantes con dos incógnitas y en el último grupo de procedimientos están los de verificación, entre los cuales está la confirma la relación de proporcionales entre segmentos homólogos o la comprobación de la proporcionalidad entre lados de cuadriláteros.

Con respecto al conocimiento de la práctica matemática (KMP) se pudo identificar que, desde la primera clase se hace uso de pruebas informales en geometría a través de la representación gráfica, la comprobación empírica del teorema de Thales y el uso del ejemplo para mostrar casos en los que no se cumple lo propuesto (contraejemplo), por otro lado, también se pudo identificar que la profesora hace uso implícito de las fases de resolución de problemas de Polya (entender el problema, configurar un plan, ejecutar el plan y mirar hacia atrás).

Finalmente, con respecto al conocimiento de la estructura da las matemáticas (KMS), en especial el conocimiento de conexiones transversales entre contenidos se pudo identificar que desde la primera clase el uso del concepto de ecuación como una igualdad, pues este es un concepto que fue necesario para la caracterización y comprensión de la proporcionalidad.

Por otro lado, se pudo identificar el despeje de ecuaciones para encontrar la longitud de un segmento, dados segmentos entre rectas paralelas, como una conexión auxiliar, pues, aunque hace parte de un conocimiento diferente a la proporcionalidad, el conocimiento sobre el despeje de ecuaciones es necesario para comprender y verificar representaciones, procedimiento y propiedades de la proporcionalidad entre dos pares de segmentos.

Con respecto al dominio didáctico de contenido (PCK)

Este dominio está compuesto por tres subdominios conocimiento de la enseñanza de las matemáticas (KMT), conocimiento de las características del aprendizaje de las matemáticas (KFLM) y el conocimiento de los estándares de aprendizaje de las matemáticas (KMLS).

Con respecto al MKT, se puede comentar se identificaron conocimientos relacionados con la resolución de problemas, en especial con el conocimiento de las fases de Polya, pues se considera que el uso de estas facilitó a la comprensión y la resolución de problemas asociados a la proporcionalidad desde una perspectiva geométrica.

Entre estas se destacan la comprensión de problemas en los que se pregunta por el valor de un segmento desconocido, ya sea de una recta cortada entre paralelas o un lado de una pareja de triángulos semejantes; la construcción de un plan, el cual en la mayoría de las ocasiones estaba relacionado con la elaboración de representaciones gráficas y establecimiento de segmentos homólogos, y posteriormente de ejecutar el plan por medio de las propiedades de la proporcionalidad, se hacía una validación o verificación del plan, el cual constaba en la verificación de la igualdad entre las dos razones generadas por dos pares de segmentos.

Con respecto al conocimiento movilizado sobre las fortalezas y debilidades asociadas a la proporcionalidad, se pudo observar el conocimiento sobre la capacidad de identificar la dificultad de nombrar una razón, de tal forma que supere la idea de fracción.

De igual forma, en el segundo episodio se observó el conocimiento de las dificultades (KFLM) al involucrar situaciones de medición usando milímetros, pues, la profesora una vez identificó que los estudiantes construían razones con segmentos usando diferentes unidades de medidas (milímetros y centímetros), rápidamente aclaró que, para la construcción de razones, es necesario que estas tengan la misma unidad de medida. Para superar esta dificultad evidenciada en los estudiantes muestra diferentes ejemplos usando las mismas unidades de medida para longitud (milímetros, centímetros y metros); se considera que la superación de esta dificultad muestra una fuerte relación con el KMT (ejemplos) y el KoT (propiedades y registros de representación).

Para finalizar el análisis de este subdominio, se pudo encontrar que con respecto al conocimiento de los intereses y las expectativas de los estudiantes al abordar la proporcionalidad sólo se pudo identificar algunas oportunidades, se considera que esto, se debe a la metodología propuesta por la profesora, pues, en experiencias de aula como enseñanza por medio de proyectos o modelación de situaciones reales, se trabaja a partir de los intereses, expectativas y necesidades de los estudiantes.

Con respecto al segundo subdominio, KFLM, se evidenció el uso diferentes elementos de propuestas de enseñanza de la proporcionalidad, como, el énfasis en la manipulación de material concreto haciendo sistematización y diferentes tipos de representación asociados a la proporcionalidad, la aproximación a los conceptos de razón y proporción de números enteros, para seguir con la interpretación, el cálculo y la comparación de porcentajes y la orientación y representación del espacio.

Sin embargo, no se tienen las evidencias suficientes para poder decir que la profesora conoce una teoría especifica de enseñanza asociada a la proporcionalidad, pues la propuesta de enseñanza se caracteriza por tener elementos de diferentes teorías, desde la tradicional haciendo uso de ejercicios hasta las propuestas de geometría activa, haciendo uso de material tangible e instrumentos de medida para longitudes.

Caso diferente de la información encontrada con respecto al conocimiento de recursos materiales o virtuales asociados a la proporcionalidad, pues se pudieron identificar cuatro grupos de conocimientos, el primero está relacionado con el conocimiento del uso de instrumentos, como el uso de escuadras para representar gráficamente problemas además de verificar propiedades asociadas a la proporcionalidad geométrica.

En el segundo grupo está el conocimiento sobre el uso de vídeos para ejemplificar problemas relacionados con la búsqueda de segmentos desconocidos usando la proporcionalidad, este tipo de herramientas está asociada al uso de la tecnología en función de la enseñanza de las matemáticas, se considera que este tipo de conocimiento está relacionado con el uso el teorema de Thales (KoT, propiedades) y la modelación de situaciones reales (KoT, fenomenología y aplicaciones).

En el tercer grupo se encuentran el uso de lenguaje corporal como material que pueden facilitar en aprendizaje y la comprensión de los estudiantes de las propiedades, representaciones y procedimientos, por ejemplo, cuando la profesora señala con sus brazos, el tamaño de los segmentos homólogos o cuando usando sus brazos indica cuales son los segmentos homólogos, para establecer las razones y comprobar la proporcionalidad entre estos.

Finalmente, en el último grupo identificado está relacionado con los indicios, como el conocimiento sobre las potencialidades y limitaciones de hoja en blanco para haces construcciones geométricas, pues la profesora hace uso de esta como una herramienta que potencializa el razonamiento para la construcción geométrica del teorema de Thales.

Con respecto al conocimiento de las estrategias, técnicas, tareas y ejemplos para la enseñanza de un contenido matemático, se puede mencionar que la mayoría de los indicadores están relacionados con el uso del ejemplo como estrategia para la enseñanza de propiedades, procedimientos y representaciones asociadas a la proporcionalidad geométrica.

Al clasificar los indicadores identificados se pudieron establecer tres grupos de indicadores, el primero está el uso del ejemplo, los cuales incluyen el uso de ejemplo para mostrar definiciones o propiedades, en el segundo grupo se encuentra el uso de los ejemplos para mostrar procedimientos y en el tercer grupo, se encuentra el uso del ejemplo como herramienta para clarificar dudas o superar dificultades (KFLM), entre ellos están indicadores como el uso de ejemplo más transparente en el cual la razón entre segmentos no sea el doble y el uso un ejemplo de proporcionalidad que puede ser solucionado de diferentes formas.

En el último grupo de esta categoría se pudieron identificar estrategias como preguntar por la relación entre dos razones para establecer la proporcionalidad entre estas, el uso de preguntas orientadoras para definir la proporcionalidad como una relación entre dos pares de segmentos, la evocación de conceptos construidos previamente (razón y proporción) como herramienta para resolver un problema, el uso de tablas de tres columnas para establecer la razón entre dos segmentos y el cambio de posición, tamaño y valores diferentes ejemplos de triángulos semejantes.

Se considera que el conocimiento de un amplio conjunto de ejemplos está relacionado con el conocimiento matemático, especialmente con el KoT, además de las formas de validación y demostración (KPM), pues los ejemplos usados por la profesora por un lado fueron ideados especialmente para denotar determinadas propiedades como la igualdad de razones entre dos pares de segmentos, como también para clarificar procedimientos específicos como la construcción de razones usando longitudes de diferentes tamaños y el despeje de ecuaciones.

7. REFLEXIONES FINALES

Dado que la pregunta de investigación giró en torno a la comprensión del conocimiento especializado movilizado en la enseñanza de la proporcionalidad, en primera medida es importante comentar la importancia que tuvo el conocimiento del tema (KoT) como base para la enseñanza desde una perspectiva matemática (MK) y didáctica (PCK). En este caso especialmente se hace referencia al conocimiento de la definición de conceptos claves para entender la proporcionalidad como magnitud, cantidad de magnitud, razón, segmentos homólogos e igualdad entre razones, de igual forma, propiedades relacionadas con las razones, rectas paralelas, triángulos y cuadriláteros, además de procedimientos como la simplificación de fracciones, el establecimiento de razones entre dos segmentos, el método de medios y extremos para verificar la proporcionalidad, el despeje de ecuaciones lineales, la construcción de una recta paralela a una recta dada y la comprobación de la semejanza de un par de triángulos.

Además de esto, destaca un conjunto rico de registros de representaciones, como representaciones escritas de conceptos como razón, proporción, recta, segmento; representaciones verbales para nombrar razones y proporciones, representaciones gráficas de segmentos proporcionales, de problemas geométricos relacionados con el teorema de Thales, de problemas geométricos asociados a solución de cuadriláteros con lados semejantes, de problemas de semejanza de triángulos con una o dos incógnitas y la categoría de fenomenología en una menor medida.

La siguiente categoría que resaltó reiteradamente fue KMT, algunos conocimientos que sobresalen de esta categoría son el uso del ejemplo como herramienta para mostrar propiedades, procedimientos o definiciones, además de usar los ejemplos como herramienta para clarificar dudas o superar dificultades, el hacer un uso adecuado de los ejemplos fue necesario hacer uso por ejemplo de los registros de representación y propiedades adecuadas a las fortalezas y dificultades observadas en los estudiantes (KFLM).

De igual forma, otro elemento del KMT que emergió en diversas ocasiones fue el uso de estrategias como preguntar por la relación entre dos razones para establecer la proporcionalidad entre estas, el uso de preguntas orientadoras para definir la proporcionalidad como una relación entre dos pares de segmentos, la evocación de conceptos construidos previamente (razón y proporción) como herramienta para resolver un problema de proporcionalidad, el uso de tablas de tres columnas para establecer la razón entre dos segmentos y el cambio de posición, tamaño y valores diferentes ejemplos de triángulos semejantes. También en este caso, para hacer un uso adecuado de estas estrategias, la profesora hizo uso adecuado de los registros de representación y propiedades en forno a las fortalezas y dificultades observadas en los estudiantes (KFLM).

Esta información lleva a proponer una predominante relación entre el KoT, KMT y KFLM, elemento que también coincide con investigaciones previas sobre MTSK como Escudero (2015), quien menciona que el conocimiento y manejo de estos distintos registros permitió reconocer aspectos específicos de la matemática que sirven al profesor como base para plantearse un uso didáctico de los registros de representación, así como para el diseño de tareas y la evaluación de procedimientos de solución de estas tareas, llevados a cabo por estudiantes, proponiendo que este tipo de conocimiento puede estar ligado directamente al dominio de conocimiento didáctico.

REFERENCIAS

Aguilar, A. (2015). *El conocimiento especializado de una maestra sobre la clasificación de las figuras planas. Un estudio de caso* (Tesis doctoral). Recuperado de: http://rabida.uhu.es/dspace/handle/10272/12006.

Ausubel, D. (1978). *Psicología educativa. Un punto de vista cognoscitivo*. México: Trillas.

Azcárate, P. y Serradó, A. (2006). Tendencias didácticas en los libros de texto de matemáticas para la ESO. *Revista de Educación,* 340, 341-378.

Balderas, R., y Guerra, M. (2014). Fortalezas y debilidades de los saberes sobre la proporcionalidad de maestro de secundaria. *Revista Educación Matemática, 26* (2), 7-32.

Block, D. (2001). *La noción de razón en las matemáticas de la escuela primaria. Un estudio didáctico.* (Tesis doctoral). México: CINVESTAV-IPN. Disponible en http://repositori.uji.es/xmlui/bitstream/handle/10234/93552/2001_Block_Tesis.pdf?sequence=1yisAllowed=y

Block, D. (2006). Conocimientos de maestros de primaria sobre la proporcionalidad. En *19a. Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa,* (pp. 675-680). Montevideo: RELME.

Bosch, M. (1994). *La dimensión ostensiva en la actividad matemática: El caso de la proporcionalidad* (Tesis Doctoral no publicada). Universidad Autónoma de Barcelona, Barcelona: España.

Carrillo, J., Contreras, L., Climent, N., Montes, N., Escudero, D. y Flores E. (2016). *Didáctica de las matemáticas para maestros de educación primaria.* Madrid: Paraninfo.

Chace, A. (1979). *The Rhind Mathematical Papyrus.* Reston, USA: NCTM.

Chemla K. (2005) The Interplay Between Proof and Algorithm in 3rd Century China: The Operation as Prescription of Computation and the Operation as Argumento. En: Mancosu P., Jørgensen K.F., Pedersen S.A. (eds) *Visualization, Explanation and Reasoning Styles* *in Mathematics. Synthese Library (*Studies in Epistemology, Logic, Methodology, and Philosophy of Science), vol 327. Springer, Dordrecht

Dauben, J. (1998). Ancient Chinese mathematics: the Liu Hui al Jiu Zhang Suang Suan Shu vs Euclids Elements. *International Journal of Engineering Science, 36*(12-14) 1339-1359.

Escudero-Ávila, D. I. (2015). *Una caracterización del conocimiento didáctico del contenido como parte del conocimiento especializado del profesor de matemáticas de secundaria* (Tesis doctoral). Recuperado de http://rabida.uhu.es/dspace/handle/10272/11456.

Euclides (1991). *Elementos*, Libros V-IX, Editorial Gredos, Madrid, 1991.

Fiol, L. y Fortuny, M. (1990). *Proporcionalidad directa. La forma y el número.* Madrid.: Síntesis.

Flick, U. (2007). *Introducción a la Investigación Cualitativa.* Madrid: Morata.

Flores-Medrano, E. (2015). *Una profundización en la conceptualización de elementos del modelo de Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas (MTSK)* (Tesis doctoral). Recuperado de http://rabida.uhu.es/dspace/handle/10272/11503

Kangshen, S. (1999). *The nine chapters on the mathematical art*. Beijing, China: Oxford University Press.

Linán, M. (2017). *Conocimiento Especializado en Geometría en un aula de 5º de Primaria.* Tesis Doctoral Universidad de Huelva.

Ministerio de Educación Nacional- MEN (2017). *Derechos básicos de aprendizaje área de matemáticas versión 2. Ministerio de Educación Nacional*. Bogotá: Colombia.

Montes, M. (2015). *Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas acerca del infinito. Un estudio de caso* (Tesis doctoral). Recuperado de http://rabida.uhu.es/dspace/bitstream/handle/10272/10944/Conocimiento_especializa do.pdf?sequence=4

Muñoz, M. Contreras, L. Carrillo J. Rojas, N. Montes, M. y Climent, N. (2015). *Conocimiento especializado del profesor de matemáticas (MTSK) un modelo analítico para el estudio del conocimiento del profesor de matemáticas.* Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española. 18, (3), 589-605.

Nehm, R. y Ridgway, J. (2011). What do experts and novices "see" in evolutionary problems? *Evolution: Education and Outreach, 4*(4), 666-679. doi:10.1007/s12052-011-0369-7.

Rashed, R. (1999). *Al- Khayyam mathematicien.* Paris, Francia: Librairie Scientifique et Technique Albert Blanchard.

Rivas, A., Godino, J. y. Castro, W. (2012). Desarrollo del Conocimiento para la Enseñanza de la Proporcionalidad en Futuros Profesores de Primaria*. Boletim de Educação Matemática,* 26.

Rivas, M. (2013). *Análisis epistémico y cognitivo de tareas de proporcionalidad en la formación de profesores de educación primaria.* (Tesis doctoral). Universidad de Granada. Disponible en https://www.ugr.es/~jgodino/Tesis_doctorales/Mauro_Rivas_tesis.pdf

Rommevaux, S. (1999). La proportionalté numérique dans le libre VII del Éléments de Campanus. *Revue d'Histoire des Mathématiques, 5* (1), 83-126.

Stake, R. E. (2005). *Investigación con estudio de casos.* Madrid, Morata.

Torres, E. (2015). *Conocimiento del profesor en la práctica: la enseñanza de la proporcionalidad.* (Tesis doctoral). Universidad Autónoma de Barcelona. Disponible en https://ddd.uab.cat/pub/tesis/2015/hdl_10803_290741/etm1de1.pdf

Vasco, D. L. (2015). *Conocimiento especializado del profesor de álgebra lineal: un estudio de casos en el nivel universitario* (Tesis doctoral). Recuperado de http://rabida.uhu.es/dspace/handle/10272/11901

Valverde, A. y Castro, E. (2009). Actuaciones de maestros en formación en la resolución de problemas de proporcionalidad directa. En M.J. González, M.T. González y J. Murillo (Eds.), I*nvestigación en Educación Matemática XIII* (pp. 523-531). Santander, España: SEIEM.

Valverde, G. (2013). *Competencias matemáticas promovidas desde la razón y la proporcionalidad en la formación inicial de maestros de Educación Primaria.* Granada: Universidad de Granada, 2013. [http://hdl.handle.net/10481/23890]

Épsilon - Revista de Educación Matemática *2020, nº 104, 45-57*

Argumentación matemática a través de actividades STEAM en educación infantil

M. Salgado
Universidad de Santiago de Compostela
Á. Alsina
Universidad de Girona
S. Filgueira
Universidad de Santiago de Compostela

Resumen: *Se analizan las habilidades de argumentación en un aula de 5 años de Educación Infantil a partir de una actividad STEAM en la que se trabajan de forma conjunta las matemáticas y las ciencias a partir del estudio de las propiedades físicas del agua. En concreto, se analizan los argumentos de los alumnos sobre la forma del agua a partir de un experimento con cinco recipientes con distintas propiedades geométricas. Los resultados indican que los niños usan principalmente argumentaciones basadas en el lenguaje matemático, o bien palabras o grafías, aunque con bastantes errores en el tipo de lenguaje utilizado. Se concluye que las actividades científico-matemáticas son un escenario idóneo para fomentar el desarrollo del pensamiento matemático crítico en Educación Infantil.*

Palabras clave: *Argumentación, prácticas matemáticas, STEAM, pensamiento matemático crítico, Educación Infantil.*

Mathematical argumentation through STEAM activities in children's education

Abstract: *The argumentation skills are analyzed in a classroom of 5 years of Early Childhood Education from a STEAM activity in which mathematics and sciences are jointly studied from the study of the physical properties of water. In particular, students' arguments about the water form are analyzed from an experiment with five containers with different geometrical properties. The results indicate that children use mainly argumentations based on mathematical language, or words or spellings, although with enough errors in the type of language used. It is concluded that the scientific-mathematical*

activities are an ideal scenario to promote the development of critical mathematical thinking in Early Childhood Education.
Keywords: *Argumentation, mathematical practices, STEAM, critical mathematical thinking, Early Childhood Education.*

1. INTRODUCCIÓN

La argumentación es una habilidad empleada en diversos ámbitos de conocimiento, como la ciencia o la matemática, pero poco trabajada en las aulas. El escaso trabajo argumentativo en las aulas se traduce en adultos con dificultades para defender sus pensamientos y puntos de vista ante una determinada temática.

Las habilidades argumentativas no son innatas, sino que necesitan de un contexto educativo que potencie su desarrollo. Por ello, resulta de gran relevancia transformar la educación pasando de una enseñanza conceptual del conocimiento a un aprendizaje argumentativo que se realice de forma práctica (Bricker, 2009, Posada, 2015).

A pesar de lo que se viene pensando desde tiempos pasados, las prácticas argumentativas no se encuentran relegadas a las últimas etapas escolares, sino que su presencia es importante y necesaria en todos los niveles educativos. El alumnado de Educación Infantil tiene la capacidad necesaria para llevar a cabo este tipo de aprendizaje, adaptando los conocimientos a su nivel madurativo. Desde este prisma, diversos organismos y autores han impulsado en las últimas décadas que la argumentación se trabaje explícitamente en las aulas ya desde los 3 años. Así, por ejemplo, desde los planteamientos del *National Council of Teachers of Mathematics* (NCTM) de Estados Unidos, que abogan por trabajar los contenidos matemáticos a través de los procesos de resolución de problemas, razonamiento y prueba, comunicación, conexiones y representación, señalan que el trabajo sistemático del razonamiento y la prueba desde las primeras edades es fundamental para que los niños aprendan desde pequeños a argumentar, explicar o justificar sus ideas matemáticas, puesto que es el camino necesario para comprender el verdadero significado de las matemáticas (NCTM, 2003). Sin embargo, hay que tener presente que no todas las prácticas de aula contribuyen de la misma manera a fomentar la argumentación. En este sentido, Alsina (2010) planteó la frecuencia de uso de diversos contextos de enseñanza en el aula de matemáticas a través de un diagrama piramidal en el que se situaban en la base contextos que debían ser usados de forma habitual para enseñar y aprender matemáticas en las primeras edades, como las situaciones de vida cotidiana, los materiales manipulativos o bien los juegos; los recursos literarios y tecnológicos se situaban en un nivel intermedio; y, finalmente, en la cima de dicho diagrama se incluían los recursos gráficos (fichas, libros de texto; etc.), respetando así la manera natural de los niños de aprender matemáticas desde lo concreto hacia lo abstracto. Más adelante, este mismo autor planteó la necesidad de considerar los procesos matemáticos, entre ellos el razonamiento y la prueba, como elementos clave para la planificación y gestión de actividades en el aula (Alsina, 2016). Respecto al razonamiento, indicó que:

> En las primeras edades el razonamiento es sobre todo informal y se refiere a la capacidad de explicar, argumentar o justificar las acciones realizadas y las proposiciones, mientras

que la prueba implica comprobar el resultado de dichas acciones y proposiciones. Desde este prisma, razonar y comprobar implica argumentar las afirmaciones que se hacen ("¿por qué piensas que es verdad?"); descubrir ("¿qué piensas que pasará ahora?"); justificar proposiciones ("¿por qué funciona esto?"); y hacer razonamientos inductivos, basados en la propia experiencia (Alsina, 2016, p. 18).

Parece, pues, bastante claro que para alcanzar una mayor comprensión de los conocimientos matemáticos y fomentar el desarrollo del pensamiento matemático crítico desde las primeras edades, durante la etapa de Educación Infantil se deberían poner en práctica actividades realizadas desde contextos ubicados en los primeros niveles del diagrama piramidal. Además, deberían ir acompañadas de una gestión donde la indagación y la experimentación por parte del alumnado, junto con la argumentación, constituyan el eje central de las actividades o experimentos (Couso et al., 2009).

2. LA ARGUMENTACIÓN MATEMÁTICA EN EDUCACIÓN INFANTIL

Una de las finalidades de la educación matemática, que se ha recogido en la mayoría de los currículos de matemáticas contemporáneos, es formar ciudadanos críticos y reflexivos, comprometidos y capaces de razonar (Niss, 2002; OCDE, 2004). Para ello, es esencial el trabajo de prácticas argumentativas, donde se aprenda a reconocer argumentos válidos y a desarrollar razonamientos analíticos que permitan la adquisición progresiva de habilidades vinculadas al pensamiento matemático crítico. Pero, ¿qué es la argumentación?, y ¿cómo debería trabajarse desde las primeras edades?

Desde una perspectiva genérica, Sardà (2003, p. 123) se refiere a la argumentación como una:

> Actividad social, intelectual y verbal que sirve para justificar o refutar una opinión, y que consiste en hacer declaraciones teniendo en cuenta al receptor y la finalidad con la cual se emiten. Para argumentar hace falta elegir entre diferentes opciones o explicaciones y razonar los criterios que permiten evaluar como más adecuada la opción elegida.

De Gamboa, Planas y Edo (2010, p. 36) añaden que "la argumentación es un discurso dirigido a un receptor con el fin de justificar una opinión partiendo de hechos o datos y razonando los criterios sobre los que se decide la adecuación de la opción elegida". Para estos autores, pues, la argumentación aparece ligada a los conceptos de justificación y explicación, tal como ya señalan Perelman y Olbrech-Tyteca (1994).

En relación al desarrollo de la argumentación desde las primeras edades, el NCTM (2003) impulsa el trabajo de prácticas argumentativas en el aula desde los 3 años, como ya se ha indicado. Para este organismo, hay cuatro aspectos referentes al razonamiento y la prueba que se deberían trabajar: a) reconocer el razonamiento y la prueba como aspectos fundamentales de las matemáticas; b) formular e investigar conjeturas matemáticas; c) desarrollar y evaluar argumentos y pruebas matemáticas; y d) escoger y usar varios tipos de razonamiento y métodos de prueba. Alsina (2016, p. 19) indica que "una gestión de las prácticas matemáticas que favorezca el razonamiento y la prueba implica plantear buenas preguntas, más que dar explicaciones; favorecer la interacción y el contraste; e incentivar la indagación y el aprendizaje autónomo con la guía del adulto". Las buenas preguntas, de acuerdo con Mercer (2001), hacen avanzar desde unos primeros niveles de concienciación sobre lo que uno ya sabe o es capaz de hacer hacia niveles superiores. En este sentido, EduGAINS (2011), una excelente iniciativa para mejorar los procesos de enseñanza-aprendizaje en las escuelas de Ontario (Canadá), propone ocho consejos para plantear preguntas efectivas a los alumnos en la clase de matemáticas: 1. Anticipar el pensamiento de los alumnos; 2. Vincular con los objetivos de aprendizaje; 3. Plantear preguntas abiertas; 4. Plantear preguntas que realmente necesitan ser contestadas; 5. Incorporar verbos que provocan altos niveles de la taxonomía de Bloom (verbos que estimulan el pensamiento y la comprensión, como conectar, elaborar, evaluar y justificar); 6. Plantear preguntas que abren una conversación para incluir a todos (en el marco de una comunidad de aprendizaje); 7. Mantener las preguntas neutrales (evitar calificativos como "fácil" o "difícil" ya que pueden condicionar las respuestas de los alumnos); 8. Proporcionar tiempo de espera (entre las preguntas y las respuestas de los alumnos).

Alsina (2016) añade, además, que en las primeras edades el trabajo por proyectos puede favorecer el razonamiento y la prueba, junto a otras prácticas como las situaciones de experimentación y juego, en contraposición a otras prácticas docentes más descontextualizadas, poco significativas y a menudo orientadas a la adquisición de técnicas y símbolos a través de la repetición y la práctica.

Considerando estos antecedentes, a continuación se describe una experiencia científico-matemática en la que han participado 19 alumnos/as y 2 profesoras de Educación Infantil de un centro público de la provincia de A Coruña (Galicia). La metodología empleada para la evaluación de las actividades, así como del proyecto en su totalidad, ha sido la observación. Al mismo tiempo que se realizaban las actividades se hacían fotografías, vídeos y grabaciones de voz al alumnado que después han sido transcritas y analizadas.

3. DESCRIPCIÓN DE LA EXPERIENCIA

3.1. Contextualización

La argumentación es un saber recogido en el Decreto 330/2009, del 4 de junio, por el cual se establece el currículo de Educación Infantil para la Comunidad Autónoma de Galicia. De la misma forma que el resto de saberes, aparece de forma globalizada, puesto que el currículo estructura los contenidos de la etapa en tres áreas:

- **i.** *Conocimiento de sí mismo y autonomía personal*
- **ii.** *Conocimiento del entorno*
- **iii.** *Lenguajes: comunicación y representación*

La experiencia abarca contenidos explícitos de dos de las tres áreas. Trabaja la argumentación, principalmente presente en la tercera área, ligada a las ciencias y a la matemática, estrechamente ligadas con la segunda área. Aún así las habilidades que se corresponden más directamente con la primera área también son desarrolladas de manera implícita. Desde este prisma, pues, se parte de una metodología STEAM *"Science,* *Technology, Engineering, Art, Mathematics",* que incluye dos o más disciplinas conjuntamente para fomentar las competencias (en nuestro caso, matemáticas y ciencias), mejorando la actitud del alumnado hacia los contenidos y resultando más motivadoras y receptivas puesto que les resultan contenidos atractivos e interesantes. En la coordinación, las materias se organizan simultáneamente para que durante el aprendizaje surjan conexiones espontáneas entre los contenidos. Y en la colaboración existen momentos en los cuales las disciplinas se entrelazan evidenciando su conexión y la transición de una materia a la otra. En consecuencia, pues, se lleva a cabo un aprendizaje interdisciplinar, definido por Yakman (2008) como un aprendizaje estructurado en varias disciplinas de forma que cada una conserva su propia relevancia pero se promueve la transferencia de conocimientos entre materias llegando a ser, de manera puntual, una sola.

Como modelo de trabajo se ha elegido el aprendizaje por proyectos, de forma que se llevan a cabo actividades de indagación, investigación y experimentación que asignan al alumnado un papel protagonista. El aprendizaje por proyectos trae consigo una serie de ventajas, como favorecer la conexión entre distintos aspectos y/o temáticas o contenidos, fomentar el empleo de una variedad de materiales que estimulen el pensamiento o favorecer la realización de un análisis crítico por parte del alumnado.

Por último, en este proyecto se le da gran importancia al aprendizaje por descubrimiento. Mediante la experimentación, el alumnado crea su propio conocimiento. Debido a que en la etapa de Educación Infantil la estimulación de los sentidos es fundamental para el aprendizaje, se introducen actividades que permiten la interacción y manipulación del alumnado.

3.2. Descripción de la experiencia

El proyecto surgió del propio alumnado quién, durante una asamblea, mostró su inquietud e interés por el agua. Así, pues, durante un periodo de tres meses se estudiaron las propiedades físicas del agua identificando cinco atributos: temperatura, sabor, peso, forma y color. Los alumnos sugirieron cinco experimentos (uno para cada atributo), a partir de los que se elaboraron hipótesis, se recogieron e interpretaron datos, se explicaron sucesos, se hicieron comprobaciones…con la finalidad de adquirir conocimientos y destrezas aplicables a otros contextos y fenómenos.

A continuación se describen los resultados del experimento sobre la forma del agua, con el fin de ejemplificar el tipo de actividad y la argumentación matemática utilizada por el alumnado. Con este experimento se pretendió que los alumnos desarrollaran estrategias de resolución de problemas a partir de los dos objetivos siguientes: 1) Introducir la noción matemática de volumen; y 2) Discriminar formas planas y cuerpos geométricos. Para lograr estas finalidades, se llevó a cabo un trabajo en tres fases.

3.2.1. Conocimientos previos de los alumnos sobre el agua

En la primera fase del experimento, la profesora presenta el atributo en gran grupo y pregunta al grupo de alumnos ¿qué forma tiene el agua? El alumnado manifiesta que el agua es plana, redonda. A continuación se extrae un fragmento de la misma:

- Maestra: ¿Cuál es la forma del agua?
- Niño S: Muchas.
- Niño Ru: Redonda.
- Niño X: Plana.
- Niña Y: Redonda.
- Niño Iv: La forma que ella quiera.
- Niño F: Redonda.
- Niño Ik: Redonda.
- Niña Al: Yo creo que muchas.
- Niño Ig: Redonda.
- Niño A: Redonda.
- Niña Af: Cuadrada.
- Niña L: Cuadrada.
- Niña G: Redonda.
- Niño Ra: Muchas.
- Niño F: Muchísimas formas.
- Maestra: Muchas, ¿cuántas son?
- Niño F: Todas.
- Niño I.V: Solamente tiene forma en las botellas y en los vasos, y sino la que ella quiera.
- Niño S: O en cubo.

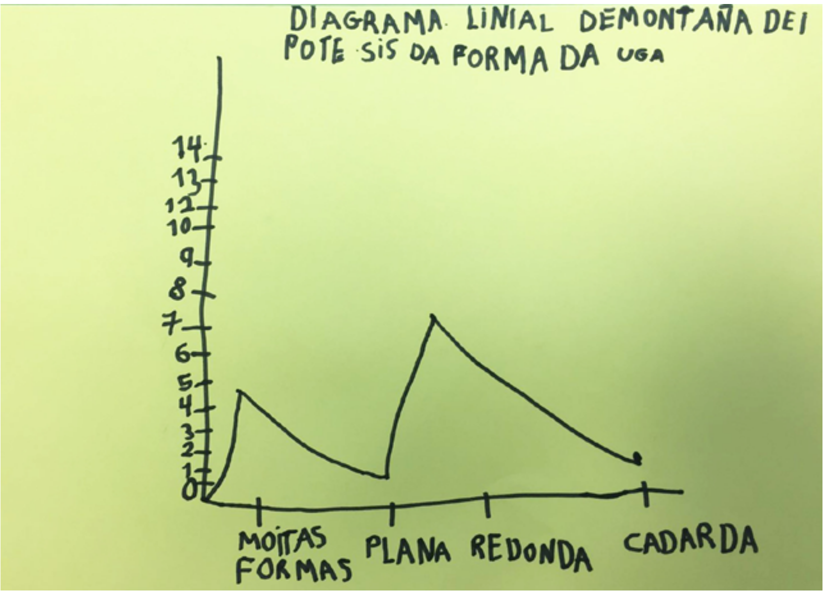


Figura 1. Diagrama lineal.

- Niño Ru: También tiene forma si la metemos en una pota o en una jarra.
- Niña G: O en una olla.
- Niño I.V: O en una cuchara, bueno mejor cucharón.

Se recogen sus creencias en un diagrama lineal, con la finalidad de observar datos globales sobre sus creencias y poder extraer conclusiones el docente para la selección de los recipientes de cara a la segunda fase.

3.2.2. Experimentación con el agua

Se seleccionan 5 recipientes con diferentes formas geométricas: una caja con forma de cubo, un bote con forma de cilindro, un globo que simula una esfera, una bolsa rectangular y un globo con forma de corazón.

Figura 2. Recipientes.

El alumnado observa y manipula los recipientes individualmente. Seguidamente registran sus creencias y argumentaciones sobre la forma del agua en dichos recipientes en un cuadro de doble entrada.

Figuras 3 y 4. Manipulando.

Figura 5. Registrando.

Partiendo de la base que los registros y las representaciones matemáticas de los niños de las primeras edades se ven limitados a dibujos, a un lenguaje matemático reducido, grafías o palabras o a los primeros simbolismos (Alsina, 2016), las producciones de los alumnos se han organizado en 5 grupos: argumentación pictórica; lenguaje matemático; con palabras o grafías; argumentación simbólica; argumentación mixta (tabla 1).

Tabla 1. Tipos de argumentaciones de los alumnos sobre la forma del agua en los recipientes

	PICTÓRICA	LENGUAJE MATEMÁTICO	CON PALABRAS O GRAFÍAS	SIMBÓLICA	MIXTA
1		Redondo Cuadrada	Forma de gato Muchas formas		Palabra + dibujo Redonda + dibujo de Redondo
2		Cuadrada Triangular	Tiene forma		
3		Cuadrada Cilindro Redonda Un círculo	El agua tiene muchas formas Diente		
4		Redonda Cuadrada Plana Cilindro Triangular	El auga tiene muchas formas		
5		Redonda Cuadrada Plana	El agua no tiene forma pero si la echas en los reci-pients si tiene		
6		Cadrada Rectangular Cilindro Redonda	Muchas formas Diente Solo tiene forma cuando está en cosas La que quieras		
7		Cuadrada Cilindro	Muchas formas		
8		Cuadrada Circular Redonda en el vaso	Muchas formas		
9		Redonda Cuadrada Rectangular	El agua tiene muchas formas		
10		Cubo Cuadrada Cilindro Círculo	Muchas Diente		

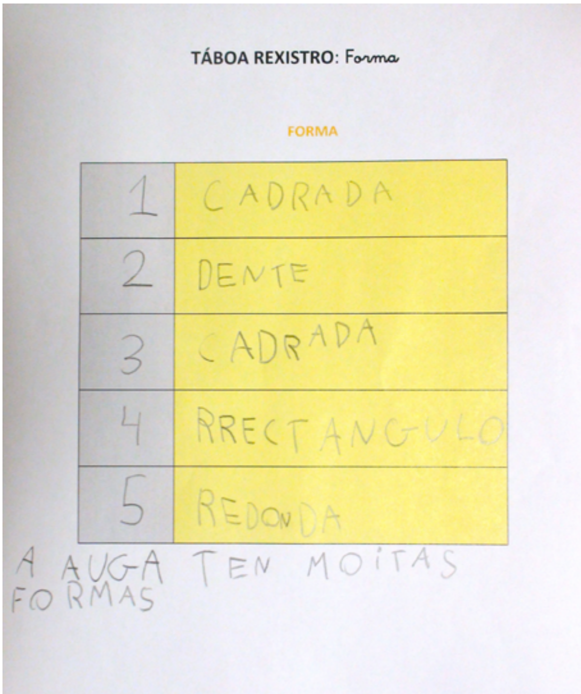
	PICTÓRICA	LENGUAJE MATEMÁTICO	CON PALABRAS O GRAFÍAS	SIMBÓLICA	MIXTA
11		Cuadrada Rectángulo Redonda	Redondo Diente El agua tiene muchas formas El agua no tiene re-ciepiente cuando no tiene forma		
12		Redonda Cuadrada Rectangular Cilindro	Forma de diente Forma de pera El agua tiene muchas formas		
13		Cuadrada Redonda Plana	Muchas formas		
14		Plana Cuadrada Redonda Cilindro	Muchas formas		
15		El agua tiene forma circular Cuadrada Plana Cilindro	Tiene forma de diente Globo El agua tiene la forma del recipient.		
16		Redonda Triangular	Pollo Me parece una pera Tiene cinco formas		
17		Circular Cuadrada Redonda	Forma de diente Forma de bolsa Forma de globo El agua tiene muchas formas		
18		Cuadrada Círculo Círculo estirado	Muchas formas		
19		Cubo Cuadrado Cilindro Esfera Redonda	La forma que ella quiera Pollo Solo tiene forma cuando está en las botellas		

Como se observa en la tabla anterior, los niños argumentan el atributo de "la forma" utilizando lenguaje matemático, palabras o grafías; solo un caso utilizó una argumentación mixta, combinando palabras con dibujos. El lenguaje geométrico que utilizan para describir el volumen no es el correcto en la gran mayoría del alumnado, ya que utiliza términos de formas planas, apareciendo en varios casos el término "cilindro", en algunos el de "cubo" y en uno el de "esfera".

3.2.3. Puesta en común

A posteriori se ponen en común las respuestas registradas, extrayendo conclusiones.

En la puesta en común, después de la experimentación, los niños han manifestado sus conocimientos en gran grupo, intercambiando y justificando el motivo por el que designaban la forma de un modo u otro, apareciendo conflictos entre unos y otros y términos nuevos, como por ejemplo "los cuerpos geométricos". De este modo, se ha fomentado la co-construcción de nuevos conocimientos y la reconstrucción de conocimientos erróneos por parte de algunos alumnos, avanzando de este modo hacia la formalización del aprendizaje: en asamblea, los niños han concluido que el agua en los recipientes adquiere volumen, y la forma que tenga el mismo. El agua por tanto puede tener muchas formas.


TÁBOA REXISTRO: Forma

FORMA

1	CADRADA
2	DENTE
3	CADRADA
4	RRECTANGULO
5	REDONDA

A AUGA TEN MOITAS FORMAS

Figura 6. Registro con conclusión.

4. CONSIDERACIONES FINALES

En este artículo se ha mostrado cómo los niños de 5 años elaboran argumentos en el contexto de actividades STEAM que parten de las conexiones entre las matemáticas y las ciencias. A partir de los resultados obtenidos se ha puesto de manifiesto que los niños usan principalmente argumentaciones basadas en el lenguaje matemático, o bien palabras o grafías, mientras que los otros tipos de argumentaciones están ausentes (pictóricas y simbólicas), o bien aparecen de forma muy escasa, prácticamente anecdótica: un solo alumno ha utilizado una argumentación mixta, combinando palabras con dibujos.

En relación al tipo de lenguaje usado para producir las argumentaciones, se ha puesto de manifiesto que los participantes en la experiencia utilizan mayoritariamente términos de propiedades geométricas correspondientes a formas planas para referirse al volumen, aunque en algunos casos ya empieza a usarse el término “cilindro”, “cubo” y “esfera”.

En relación a la metodología, se ha puesto de manifiesto que el aprendizaje por proyectos es un método que acerca los contenidos al alumnado, tomando como base su entorno más inmediato. Y esto, sumado a la metodología STEAM “Science, Technology, Engineering, Art, Mathematics”, favorece la adquisición de un aprendizaje más significativo. En este tipo de aprendizaje, el alumnado se compromete con el trabajo al construir su propio conocimiento a través de una serie de actividades en las cuales la experimentación es crucial.

En síntesis, pues, el desarrollo de actividades científico-matemáticas en edad infantil es posible y se convierten en un escenario idóneo para fomentar la adquisición progresiva de habilidades matemáticas y de estrategias que favorecen la resolución de problemas en otros contextos no matemáticos: recogiendo datos, observando, valorando, discriminando, comparando, interpretando,… y finalmente, argumentando, comprobando y compartiendo, los niños van desarrollando su pensamiento matemático crítico.

Agradecimientos

Se agradece a FEDER/Ministerio de Ciencia, Innovación y Universidades – Agencia Estatal de Investigación/ Proyecto EDU2017-84979-R.

REFERENCIAS

Alsina, Á. (2010). La “pirámide de la educación matemática”, una herramienta para ayudar a desarrollar la competencia matemática. *Aula de Innovación Educativa, 189,* 12-16.

Alsina, Á. (2016). Diseño, gestión y evaluación de actividades matemáticas competenciales en el aula. *Épsilon, Revista de Educación Matemática, 33*(1), 7-29.

Bricker, L. A. (2009). A sociocultural historical examination of youth argumentation across the settings of their lives: Implications for science education. (Tesis doctoral). University of Washington, Seattle, United States of America.

Couso D., Jiménez M. P., López-Ruiz J., Mans C., Rodríguez C., Rodríguez J.M., Sanmartí, N. (2011). *Informe ENCIENDE: Enseñanza de las Ciencias en la Didáctica escolar para edades tempranas en España.* Madrid: Rubes Editorial.

De Gamboa, G., Planas, N. y Edo, M. (2010). Argumentación matemática: prácticas escritas e interpretaciones. *Suma, 64,* 35-44.

Decreto 330/2009, del 4 de junio, por el que se establece el currículo de educación infantil en la Comunidad Autónoma de Galicia. BOE 121, del 23 de junio del 2009.

EduGAINS (2011). Asking effective questions. Recuperado de http://www.edu.gov.on.ca/eng/literacynumeracy/inspire/research/cbs_askingeffectivequestions.pdf.

Mercer, N. (2001). *Palabras y mentes.* Barcelona: Paidós.

NCTM. (2003). *Principios y estándares para la educación matemática.* Granada: Servicio de Publicaciones de la SAEM Thales.

Niss, M. (2002). *Mathematical competencies and the learning of mathematics: the Danish Kom Project.* Roskilde: Roskilde University.

OECD (2004). *Learning for tomorrow's world: First results from PISA 2003.* Paris: OECD.

Perelman, C. y Olbrech-Tyteca, L. (1994). *Tratado de la argumentación.* Madrid: Gredos.

Posada, J.L. (2015). La argumentación y su rol en el aprendizaje de la ciencia. Revista Tesis Psicológica ,*10*(1), 146-160.

Santaella, L. (2011). La evolución de los tres tipos de argumento: abducción, inducción y deducción. Universidad de Sao Paulo. Brasil. Recuperado de http://www.unav.es/gep/AN/Santaella.html.

Sardá, A. (2003). Argumentar: proposar i validar models. En N. Sanmartí (Ed.), *Aprendre Ciències tot aprenent a escriure ciència* (121-148). Barcelona: Edicions 62.

Yakman, G. (2008). STEAM Education: an overview of creating a model of integrative education. En M.J. de Vries (Ed.), *PATT-17 and PATT-19 Proceedings* (pp. 335-358). Reston, V.A.: ITEEA.

Escapando de las matemáticas

Lucía Rey-Lorenzo
Mª Elena Vázquez-Abal
Universidade de Santiago de Compostela

Resumen: *El alumnado de Educación Secundaria está expuesto a múltiples estímulos tanto internos como externos, la mayoría de procedencia tecnológica, que dificultan su motivación por las matemáticas. En este artículo se ofrece una experiencia educativa realizada en un grupo de 4 º ESO empleando el recurso de la gamificación y consistente en dos sesiones de Escape Room. La primera dedicada a trabajar con lógica matemática y álgebra, y la segunda enfocada al estudio de los contenidos de geometría y análisis matemático. La experiencia tuvo como objetivo principal lograr un cambio actitudinal positivo del alumnado hacia las matemáticas.*
Palabras clave*: propuesta didáctica, gamificación educativa, resolución de problemas, enseñanza-aprendizaje y Educación Secundaria.*

Escaping mathematics

Abstract: *Secondary Education students are exposed to multiple internal and external stimuli, most of them of technological origin, which make their motivation for mathematics difficult. This article offers an educational experience carried out in a group of 4th Secondary Education course using the resource of gamification and consisting of two sessions of Escape Room. The first dedicated to work with mathematical logic and algebra, and the second focused on the study of the contents of geometry and mathematical analysis. The main objective of the experience was to achieve a positive attitudinal change for students towards mathematics.*
Keywords*: educational proposal, educational gamification, problem solving, teaching-learning and Secondary Education.*

INTRODUCCIÓN

Actualmente, la metodología y el tratamiento de muchos de los contenidos del sistema educativo vigente han quedado en gran parte obsoletos para el alumnado del siglo XXI, ya que la presencia de las nuevas Tecnologías de la Información y la Comunicación (TIC) en la sociedad está llevando a cabo importantes cambios en la forma de vivir, de relacionarse y de aprender. Una de las consecuencias de estos cambios es el incremento de la falta de interés que muestra el alumnado hacia materias como la de matemáticas, suponiendo esta motivación un reto cada vez mayor para el profesorado.

Según Luiz Alves de Mattos (1963, p. 159) **motivar** "es despertar el interés y la atención de los alumnos por los valores contenidos en la materia, excitando en ellos el interés de aprenderla, el gusto de estudiarla y la satisfacción de cumplir las tareas que exige". Además hay que tener en cuenta las metas y objetivos del alumnado ya que originan diversos tipos de motivación (Tapia, 2003).

Las matemáticas son una disciplina que requiere para su asimilación cierto esfuerzo y el uso de estrategias cognitivas de orden superior, así denominadas según la Taxonomía de Bloom, como la abstracción o el pensamiento lógico-deductivo, y el proceso de concreción y generalización a través del cual se pasa de las teorías a la aplicabilidad (Hidalgo, Maroto y Palacios, 2005). Para trabajar este tipo de procesos, en esta propuesta se intentó promover el **aprendizaje profundo** (Moll, 2018) y el **aprendizaje emocional** (Gómez Chacón, 2000).

Autores como Miguel de Guzmán (2006) señalan que uno de los factores más influyentes en la aparición de emociones negativas relacionadas con las matemáticas es el método docente. Además, según Gómez Chacón (2000), las concepciones epistemológicas del propio profesorado influirán en su práctica de enseñanza y, consecuentemente, en el aprendizaje del alumnado.

La matemática ha sido y es arte y juego.- Miguel de Guzmán (1989)

El juego matemático bien escogido puede conducir a los y las estudiantes, independientemente del nivel, a la mejor posición de observación y aproximación inicial a cualquiera de los temas de estudio con los que se han de enfrentar, mejorando sus habilidades de aprendizaje gracias a la apertura, el desbloqueo, la motivación, el interés, la diversión o el entusiasmo generados.

Para ello, esta propuesta emplea el recurso de la *gamificación* que hace referencia al uso de elementos propios del juego en situaciones no lúdicas, como por ejemplo en el aula, y que se define como un proceso relacionado con el pensamiento de la persona que juega, con el fin de atraerla, incitarla a la acción, promover el aprendizaje y resolver problemas con dinámicas, estéticas y mecanismos propios del juego tradicional. Todas estas técnicas empleadas en el ámbito educativo constituyen lo que hoy en día se conoce como **gamificación educativa**, la cual ofrece la posibilidad de que el estudiantado se desarrolle a nivel cognitivo, emocional y social (Lee y Hammer, 2011).

Una forma de gamificar un aula es mediante una dinámica de aventura real, denominada Escape Room, ambientada normalmente en una habitación en la que las personas participantes han sido encerradas previamente y en la que deben resolver enigmas, juegos o rompecabezas a modo de pruebas para conseguir el objetivo final: escapar de la habitación (Nebot y Ventura-Campos, 2017). De este modo, las Escape Rooms educativas permiten transformar al alumnado en el protagonista de una historia real de escapismo en la que tiene que mostrar sus habilidades al manejar conceptos propios de la etapa educativa en la que se encuentre.

Para que el alumnado alcance un estado mental de equilibro (conocido como estado de *flow*) dichos enigmas no deben resultar ni demasiado fáciles ni excesivamente difíciles; de esta manera la experiencia logra que el estudiantado se encuentre absorto en la actividad de aprendizaje y de resolución de problemas. Así, la lógica, el ingenio y el trabajo en equipo permiten desenvolver no solo la competencia matemática sino que también otras competencias clave.

Por lo tanto, la propuesta que se describirá a continuación tuvo como objetivos:

1. **Conseguir** que el alumnado alcance una **motivación** intrínseca, de competencia y de control de logro sana.
2. **Trabajar en equipo** reforzando las componentes de interacción promocional cara a cara, valoración personal y el auto-análisis de grupo.
3. **Mejorar** las **habilidades socio-emocionales** del alumnado.
4. **Aumentar** el **rendimiento académico** y el grado de **significatividad del aprendizaje**.
5. **Emplear** una actitud docente que promueva la **visión dinámica** de las matemáticas proponiendo actividades que refuercen las cinco fases de resolución de problemas.

METODOLOGÍA

La metodología de esta propuesta emplea en su desarrollo el **trabajo en equipo** y la **resolución de problemas**, pues se considera que favorecen notablemente al aprendizaje de esta ciencia.

El **trabajo en equipo** fue entendido como la suma del *aprendizaje colaborativo*, con el que el éxito de la tarea se alcanza gracias al trabajo de cada uno de los individuos, y del *aprendizaje cooperativo*, el cual hace que la necesidad de interacción con el resto de los miembros del grupo sea la clave para poder alcanzar el objetivo de la actividad (Paintz, 1999).

La metodología de trabajo constó de las siguientes componentes: la interdependencia positiva, la interacción promocional cara a cara, la responsabilidad o valoración personal, las habilidades cooperativas y el auto-análisis de grupo (Domingo, 2008; Paintz, 1999; López Haro, 2013).

Por otro lado, resolver un problema puede ser un proceso realmente complejo puesto que en el intervienen variables como las estrategias que el alumnado es capaz de emplear, la influencia de los factores individuales y afectivos, las características del propio problema y los métodos de enseñanza llevados a cabo por el profesorado, entre otras.

Mediante la puesta en práctica de las cinco fases que distingue Miguel de Guzmán (2006) en la **resolución de problemas**, se intentó transformar los problemas en situaciones más sencillas. Por lo tanto, al plantear tareas en las que fue necesario abordar cada una de estas fases se ayudó al estudiantado a enfrentarse a los problemas con una actitud menos negativa.

LLEVANDO LA PROPUESTA AL AULA

Escapando de las matemáticas es una propuesta que consistió en que un grupo de estudiantes de 4º ESO intente superar una seria de etapas constituidas por rompecabezas, acertijos y problemas matemáticos (seleccionados, en este caso, de los ejercicios y exámenes realizados por el grupo hasta la fecha) empleando sus conocimientos académicos y sus habilidades tanto cognitivas como socio-emocionales.

La actividad estuvo dividida en dos salas (Escape Rooms) en las que se trabajaron diferentes áreas de las matemáticas y en las que la organización de los elementos internos propios de cada una fue similar, puesto que ambas contaron con una historia que fue el principal elemento motivador y el eje que vertebró junto con las normas, una puesta en escena con música ambiental y elementos audiovisuales que contribuyeron a la credibilidad de la trama. Las distintas etapas, cuyo número dependería de la sala, con sus correspondientes pruebas y pistas (comodín o no), y una reflexión final, completaban la estructura de cada habitación.

El procedimiento que se ha seguido para presentar y realizar cada Escape Room ha sido lineal, es decir, mantuvo un orden lógico de presentación, ejecución y reflexión sobre el juego. Inicialmente, se dividió al grupo clase en equipos (grupos reducidos de 3 o 4 personas) y, con el objetivo de que el estudiantado adquiriese cierta cultura matemática, se asignó a cada miembro un personaje a través de un cartel que indicaba, en este caso, el nombre de un matemático o matemática, su fecha de nacimiento y defunción, su nacionalidad y los campos de estudio. A continuación, el *game master*, que en este ámbito es la docente, describió la historia y fijó las normas del juego. De seguido se accionó la cuenta atrás, comenzando así el periodo de superación de las etapas por parte del alumnado donde la responsabilidad recayó mayoritariamente sobre el mismo. Finalmente, conseguida o no la salida de la sala por parte de los y las estudiantes, se realizó una reflexión final para comentar las etapas más complicadas, la relación de las pruebas con las matemáticas y la motivación que les generó la sala.

Puesta en escena (historia y normas)

- Pantalla guía. Cuenta atrás de 40 minutos, el semáforo en rojo que no se abrirá hasta la etapa final (comienza cuando todos los equipos superan la penúltima etapa en las dos sesiones) y la ventana de texto para proporcionar las pistas.
- Música ambiental de suspense acorde con la temática de cada sala que sonó durante las Escape Rooms, incluso en la narración de las historias.
- Otros elementos como mantas oscuras, figuras antiguas de decoración y una linterna de luz ultravioleta (para encontrar pistas escritas con tinta de limón) en la primera sesión y figuras geométricas en la segunda. Para ambas sesiones una campana (para alertar de los mensajes que el *game master* escribía en la pantalla) y ordenadores.

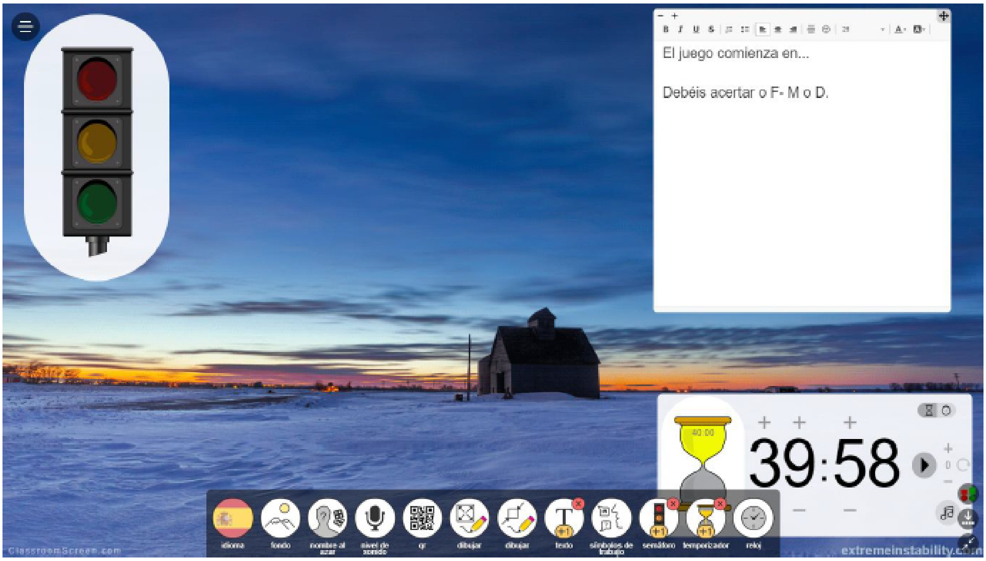
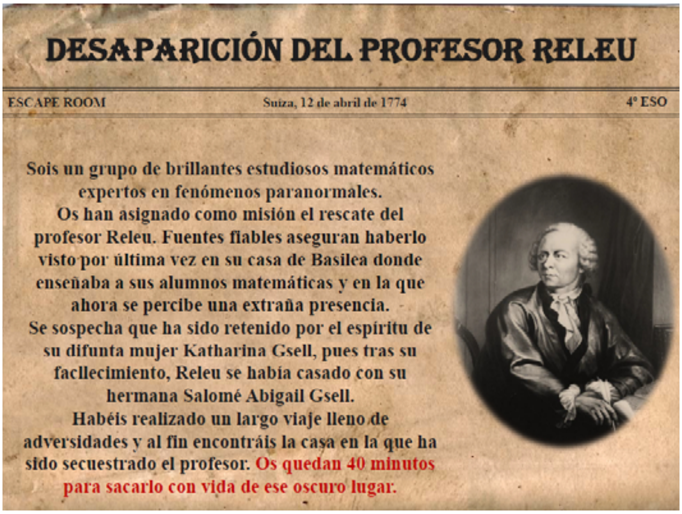


Figura 1. Pantalla principal (sala 1).



DESAPARICIÓN DEL PROFESOR RELEU

ESCAPE ROOM — Suiza, 12 de abril de 1774 — 4º ESO

Sois un grupo de brillantes estudiosos matemáticos expertos en fenómenos paranormales.
Os han asignado como misión el rescate del profesor Releu. Fuentes fiables aseguran haberlo visto por última vez en su casa de Basilea donde enseñaba a sus alumnos matemáticas y en la que ahora se percibe una extraña presencia.
Se sospecha que ha sido retenido por el espíritu de su difunta mujer Katharina Gsell, pues tras su fallecimiento, Releu se había casado con su hermana Salomé Abigail Gsell.
Habéis realizado un largo viaje lleno de adversidades y al fin encontráis la casa en la que ha sido secuestrado el profesor. Os quedan 40 minutos para sacarlo con vida de ese oscuro lugar.

Figura 2. Historia (sala 1).

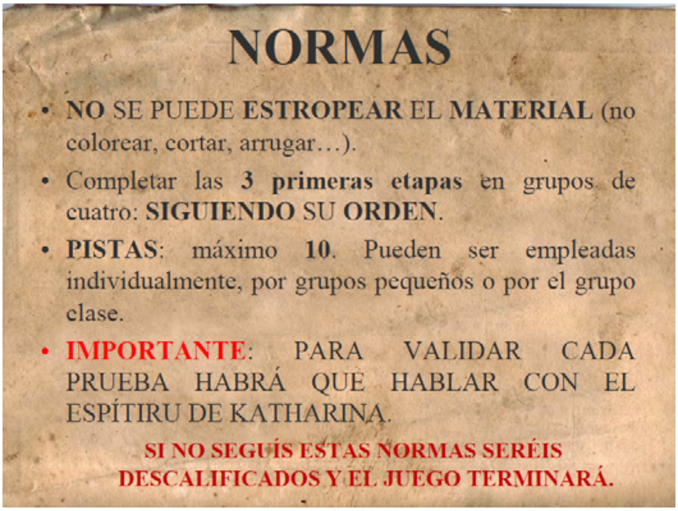


Figura 3. Normas (sala 1).

Figura 4. Pantalla principal (sala 2).

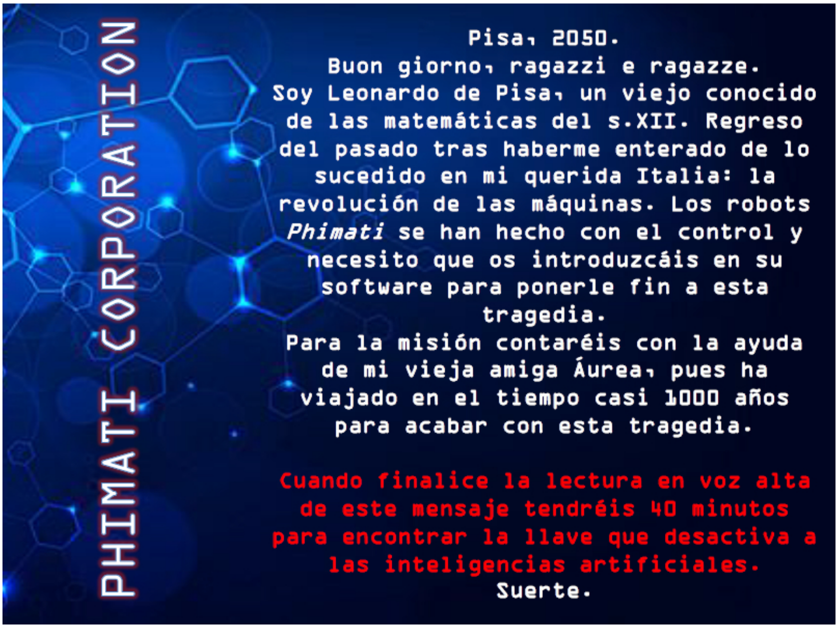


Figura 5. Historia (sala 2).

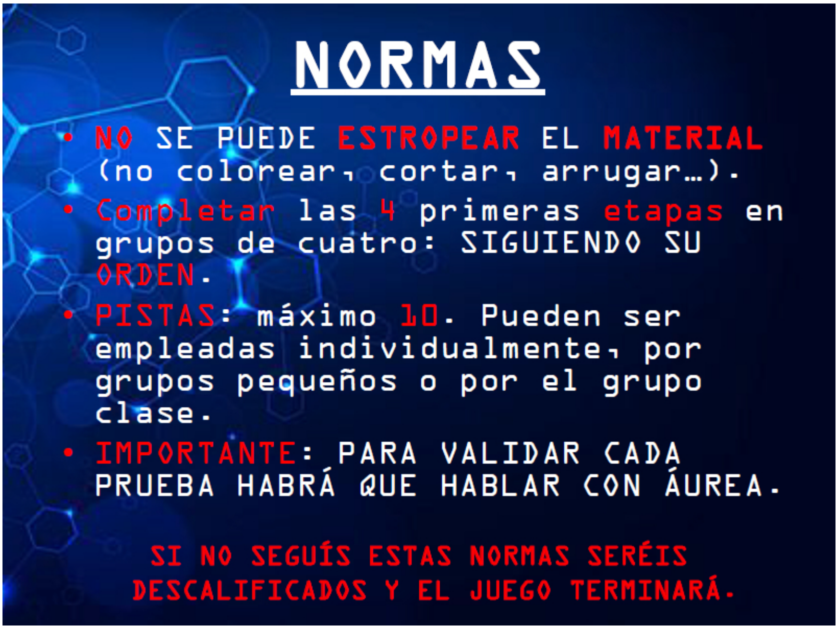


Figura 6. Normas (sala 2).

Escape Room I

Esta primera Escape Room, creada para trabajar el pensamiento lógico-deductivo y el álgebra, estuvo basada en la vida del matemático Euler, aquí denominado "profesor Releu", y en ella el alumnado se convirtió en un equipo de matemáticos y matemáticas expertos en fenómenos paranormales que tenía como misión el rescate del famoso "profesor Releu". Constó de cuatro etapas, las tres primeras se realizaron en 6 grupos reducidos y la etapa final en el grupo clase. A medida que cada grupo pequeño superaba la tercera etapa se dividía y ayudaba a los demás equipos.

Etapa 1

Debajo del mobiliario se escondieron los acertijos lógicos con indicaciones sobre su dificultad mediante las letras F, fácil, M, media y D, difícil, y numerados con fragmentos escogidos del *número e*. Previamente, se había pegado en la pared del aula una expresión del número con 25 dígitos y en cada uno de esos fragmentos escogidos se colgaron los sobres que contenían los acertijos de la segunda fase.

Para superar esta etapa, cada grupo tenía que resolver adecuadamente los rompecabezas. Para comprobar la validez de su respuesta debían preguntarle a la difunta *Katharina* representada por la *game master*; en caso de dificultad podían solicitar los acertijos comodín. Si el grupo acertaba, pasaba a la segunda etapa.

Etapa 2

En el sobre situado en cada fragmento del *número e* se encontraban con un sistema algebraico, una inecuación y una expresión a simplificar que tenían que resolver. Esta vez las soluciones estaban escondidas en el aula, correspondiéndole tres a cada grupo reducido. Cada conjunto de soluciones tenía asignado un color que indicaba cuál de los siete tangram colocados (como marca páginas) en los tomos de una enciclopedia tenían que resolver en la siguiente fase.

Etapa 3

Esta etapa consistió en la resolución de un tangram por grupo. Cada uno contenía un fragmento del mensaje final que permitía iniciar la última etapa.

El mensaje a conseguir y que les permitió acceder a la etapa final fue:

Releu:(I) día 18(II) de septiembre (III) del _+_+_+_=19(IV). Llave de la casa:(V)
¿Qué año? (VI) ¿Qué matemático? (VII)

Si se encontraban con dificultades, en el aula había unas indicaciones pintadas con tinta de limón que podrían visualizar con una linterna de luz ultravioleta, esto consumiría una pista.

Etapa 4

En uno de los ordenadores de la sala estaba abierto un calendario (http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/Day_files/Year.html) en el que tenían que encontrar la respuesta a las dos preguntas que dicho mensaje planteaba, introduciendo en él el día y el mes descubiertos (*18 de septiembre*). En la página web se encontrarían con una lista de los matemáticos que nacieron y otra con los que fallecieron dicho día y mes pero en años diferentes, también indicados. Así pues, tuvieron que encontrar aquel cuyo año sumase *19* y cuyo nombre estuviese relacionado con la historia: *Euler, 1783*.

Finalmente, una vez que *Katharina* comprobó que la respuesta era la correcta, les entregó el sobre final con el nombre del lugar en donde se encontraba la llave para salir de la habitación y liberar al profesor. Dicho nombre estaba cifrado con la Cifra de César (desplazamiento 19), por ejemplo, *Thkksvhk* (Borrador), y para su resolución tuvieron a su disposición un disco móvil de desplazamiento.

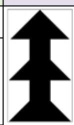
GRUPOS	ETAPAS		
	E1	E2	E3
G1 (2.71)	**(F) Silencio:** Más bajo.	$\begin{cases} x^2 + 3xy + y^2 = 61 \\ xy = 12 \end{cases}$	 **(I) Releu:**
		$x = 4; y = 3$ $x = -4; y = -3$ $x = 3; y = 4$ $x = -3; y = -4$	
	(M) La hilera de casas: Los Brown.	$4\sqrt{5} + \frac{2}{3}\sqrt{20} - \frac{2}{5}\sqrt{125}$	
		$\frac{10}{3}\sqrt{5}$	
	(D) Los 3 presos y las boinas: El primer preso (el que no ve ninguna boina) averigua el color de su boina: Como el tercer preso, que ve las dos boinas, no dice nada, no puede ver dos boinas negras. Si el segundo viera una boina negra en el primero, sabría que él tiene una blanca ya que no oye al tercero decir que tiene una blanca. Entonces el primer preso tiene una boina blanca.	$\mathbf{3 - (2x - 1) < x}$	
		$S = (\frac{4}{3}, +\infty)$	
G2 (281)	**(F) Colocando números (III):** 6,5,4; 1,9,3; 7,8,2.	$\begin{cases} x + 5y = 12 \\ x^3 = 8 \end{cases}$	 **(II) Día 18**
		$x = 2$ $y = 2$	
	(M) Tres parejas en la discoteca: La chica de rojo está con el chico de verde.	$\frac{x(x+1)(4x-7)}{(x-2)(x-3)} \cdot \frac{x^2 - 4x + 4}{(16x^2 - 49) \cdot (x^2 + x)}$	
		$\frac{x-2}{4x^2 - 5x - 21}$	
	(D) El encuentro: Ángel bebe agua, Boris bebe cagé, César bebe anís y Diego bebe vino.	$x^2 - 2x - 4 \leq -6$	
		Sin solución.	

Figura 7. Etapas 1,2,3 de Grupos 1,2.

G3 (845)	**(F) Colocando números (4):** 5,2,6; 1,9,3; 8,4,7.	$\begin{cases} 5x^2+y^2=25 \\ 3x^2-y^2=-25 \end{cases}$	$x=0\,;y=5$ $x=0\,;y=-5$		**(III) de septiembre**
	(M) Examen de historia: b) y d).	$\frac{2x-3}{x^2-9}-\frac{x+2}{x+3}-\frac{x+1}{x-3}$	$\frac{-2x^2-x}{x^2-9}$		
	(D) Caballos: El más viejo Mac, el más lento Jack y el más claro Smith.	$(x+1)^2-2(x+3)(x-2)+6x+2\geq 4x$	$S=[-3{,}5]$		
G4 (523)	**(F) Colocando números (I):** 8,3,6; 4,1,2; 5,9,7.	$\begin{cases} \frac{x+2}{5}-\frac{3y-1}{10}=-\frac{3}{10} \\ \frac{2x+3}{8}-\frac{y+7}{4}=\frac{19}{8} \end{cases}$	$x=-1$ $y=2$		**(IV) de _+_+_+_=** 19.
	(M) La boda: Si quiere.	$\frac{\sqrt[3]{4}\cdot\sqrt[5]{16}}{\sqrt[6]{8}}$	$\sqrt[30]{2^{29}}$		
	(D) El explorador condenado: Moriré en la hoguera.	$\frac{x-1}{4}-\frac{x+2}{3}\geq\frac{3x-1}{6}-x$	$S=[\frac{9}{5},+\infty)$		
G5 (47)	**(F) El test:** Julia.	$\begin{cases} 2x+y=3 \\ xy-y^2=0 \end{cases}$	$x=\frac{3}{2}\,;y=0$ $x=1\,;y=1$		**(V) Llave de la casa:**
	(M) El número: 204862.	$(2x^2+1)(x-2)+3(2x^2-3)^2-4(2x^2-3)(2x^2+3)$	$-4x^4+2x^3-40x^2+x+61$		
	(D) El prisionero y los dos guardianes: Si le dijera a tu compañero que me señale la puerta de la libertad, ¿qué me diría?	$4x-1>8x-5$	$S=(-\infty,1)$		

Figura 8. Etapas 1,2,3 de Grupos 3,4,5.

G6 (6028)	**(F) Los cuatro perros:** El galgo.	$\begin{cases} \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{20} \\ x+2y=3 \end{cases}$	$x=-12\,;y=\frac{15}{2}$ $x=-5\,;y=4$		**(VI) ¿Qué año?**
	(M) Neumáticos: d) y e).	$3\cdot\sqrt[3]{3}\cdot\sqrt[4]{27\cdot 3^2}$	$3^2\cdot\sqrt[12]{3^7}$		
	(D) Sellos de colores: C lo tiene verde.	$\frac{x}{3}-\frac{x+1}{2}\geq\frac{5}{6}-x$	$S=[\frac{8}{5},+\infty)$		
G7 (352)	**(F) Colocando números (2):** 9,5,3; 8,1,4; 7,2,6.	$2(3y-2)+4(2+x)=-6$ $\frac{x+1}{3}-\frac{x-2y}{2}=y+7$	$x=-40$ $y=25$		**(VII)¿Qué matemático?**
	(M) El pastor: El pastor pasa primero la cabra, regresa a la orilla a por el lobo, al cruzar deja al lobo y vuelve con la cabra, deja la cabra y cruza con la lechuga, deja la lechuga con el lobo y regresa con la cabra.	$\frac{3x}{2x-1}:\frac{15x^2}{4x^2-1}$	$\frac{2x+1}{5x}$		
	(D) Los cien políticos: 1 honesto y 49 deshonestos.	$7x-2(1-3x)\leq 2x+3$	$S=(-\infty,\frac{5}{11}]$		

ETAPA 4	Euler, 1783. // Desplazamiento 19: Borrador.

Figura 9. Etapas 1,2,3 de Grupos 6,7 y Etapa grupal 4.

ACERTIJOS COMODIN

1) LAS HIJAS. El Padre de Ana tiene 4 hijas. Una se llama Ena, otra Ina y otra Ona. ¿Cómo se llama la otra hija?. Respuesta: Ana.

2) LOS MESES. Hay meses que tiene 30 dias y otros 31 dias. ¿Cuantos meses tienen 28 dias? Respuesta: todos.

3) GASOLINA. Si al llegar a la esquina Jim dobla a la derecha o a la izquierda puede quedarse sin gasolina antes de encontrar una estación de servicio.
Ha dejado una atrás, pero sabe que, si vuelve, se le acabará la gasolina antes de llegar. En la dirección que lleva no ve ningún surtidor. Por tanto:

a) Puede que se quede sin gasolina.
b) Se quedará sin gasolina.
c) No debió seguir.
d) Se ha perdido.
e) Debería girar a la derecha.
f) Debería girar a la izquierda.

Respuesta: a).

4) OSTRAS. Todas las ostras son conchas y todas las conchas son azules; además algunas conchas son la morada de animalitos pequeños.
Según los datos suministrados, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es cierta?

a) Todas las ostras son azules.
b) Todas las moradas de animalitos pequeños son ostras.
c) a) y b) no son ciertas.
d) a) y b) son ciertas las dos

Respuesta: a).

5) PUEBLOS. A lo largo de una carretera hay cuatro pueblos seguidos: los Rojos viven al lado de los Verdes pero no de los Grises; los Azules no viven al lado de los Grises.
¿Quiénes son pues los vecinos de los Grises?

Respuesta: Los verdes.

6) EL INTERRUPTOR. Un hombre esta al principio de un largo pasillo que tiene tres interruptores, al final hay una habitación con la puerta cerrada.
Uno de estos tres interruptores enciende la luz de esa habitación, que esta inicialmente apagada.
¿Cómo lo hizo para conocer que interruptor enciende la luz recorriendo una sola vez el trayecto del pasillo?

Respuesta: Enciende el A 10 min y lo apaga; enciende el B y va a la habitación. Si está encendida es el B, si está caliente y apagada el A, y si esta fia y apagada el C.

7) COMIENDO EN EL RESTAURANTE. Armando, Basilio, Carlos y Dionisio fueron, con sus mujeres, a comer. En el restaurante, se sentaron en una mesa redonda, de forma que:

- Ninguna mujer se sentaba al lado de su marido.
- Enfrente de Basilio se sentaba Dionisio.
- A la derecha de la mujer de Basilio se sentaba Carlos.
- No había dos mujeres juntas.

¿Quién se sentaba entre Basilio y Armando?

Respuesta: La mujer de Dionisio.

8) LAS DEPORTISTAS. Ana, Beatriz y Carmen. Una es tenista, otra gimnasta y otra nadadora. La gimnasta, la más baja de las tres, es soltera. Ana, que es suegra de Beatriz, es más alta que la tenista. ¿Qué deporte practica cada una? Respuesta: Ana nadadora, Bea tenista y Carmen gimnasta.

Figura 10. Acertijos comodín.

Escape Room II

La segunda Escape Room, en la que se trabajó la geometría y el análisis matemático, se desarrolló en un mundo futuro dominado por las máquinas. En ella el alumnado se convirtió de nuevo en un equipo de matemáticos y matemáticas con gran experiencia en fenómenos paranormales que, siguiendo las órdenes de *Fibonacci*, tendría que desactivar una inteligencia artificial. Esta vez las cuatro primeras etapas se llevaron a cabo en 6 grupos reducidos y la etapa final en el grupo clase, siguiendo la misma dinámica de *finalización-ayuda* de la primera habitación.

Etapa 1

Debajo de cada grupo de mesas distribuidas como si fuesen los asientos de una nave espacial los grupos se encontraron con una expresión a simplificar, una ecuación y un problema trigonométrico, que tuvieron que resolver para encontrar la solución. Las tres soluciones correspondientes a cada grupo les proporcionaban un código de tres colores que les asignaba cuál de las siete funciones tendrían que caracterizar en la segunda fase.

Etapa 2

Una vez identificada la función, los grupos tuvieron que caracterizarla buscando los datos correctos en unas cajas distribuidas por el aula que contenían: dominio y recorrido, crecimiento y decrecimiento, máximos y mínimos, simetrías, asíntotas y periodicidad, y Tasa de Variación Media (TVM).

Una vez descrita cada función de forma ordenada (tal y como se indicó en la pista), esta formaría un fragmento del *número de oro* que estaría situado previamente en el aula, comenzando así la tercera etapa.

Etapa 3

De cada fragmento del número áureo colgaba un sobre que les indicaba el tipo de función al que deberían asignar un gráfico de los anteriores.

Etapa 4

Una vez identificado el gráfico cada grupo abre el sobre que contiene la representación. Dicho sobre les indicaba el área o volumen de una figura plana o tridimensional distribuida por la sala que contenía la última pista: un fragmento del mensaje final cifrado con la cifra de César y su desplazamiento para descifrarlo.

El mensaje a conseguir que les permitía acceder a la etapa final fue:

> *La sucesión (I) del matemático Fibonacci (II) que es 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13... (III) tiene relación con (IV) el número de oro. (V) ¿Cuál es el siguiente término? (VI) ¿Cuál es la relación? (VII)*

Etapa 5

Esta etapa comenzó con el mensaje de la fase anterior descifrado y ordenado. Para obtener el sobre final tuvieron que responder a ambas preguntas (VI y VII), cuyas respuestas fueron: *21, las divisiones tienden al número de oro.*

Para terminar, *Áurea* (la *game master*) validó las respuestas y les dio el sobre final que contenía el área de la figura en la que estaba escondida la llave para salir de la sala y ``desactivar'' la inteligencia artificial: $A=b\cdot a$.

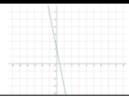
GRUPOS	ETAPAS			
	E1	**E2**	**E3**	**E4**
G1 (1,61803)	$(sen\,x+\cos x)^2$ $1+2\cdot sen\,x\cdot\cos x$		**Función trigonométrica**	Mb tvdftjpñ (I) 1 *La sucesión(I)*
	$6sen^2x+\cos x=4$			
	$x=120º,\ x=240º$ **Un globo está sujeto al suelo mediante un cordel de 50 m de largo, que forma con el suelo un ángulo de 48° por efecto del viento. Suponiendo que nuestro cordel está completamente recto, calcular la altura del globo.** $\text{sen } 48^0=\frac{h}{L}\Leftrightarrow h=L\cdot\text{sen } 48^o$ $h=L\cdot\text{sen } 48^o=50\cdot\text{sen } 48^o\approx 37.157\text{ m}$	$D=\mathbb{R}$ $R=[-1,1]$ *Decrece en* $[0,\pi]$ *y crece en* $[-\pi,0]$ *Máx. en* (0.1) *y min. en* $(-\pi,-1)$. *Simétrica en OX.* *Sin asíntotas.* *Es periódica de periodo* 2π. *TVM en* $[0,\pi]$ *negativa y en* $[-\pi,0]$ *positiva.*	$V=\frac{\pi\cdot r^2\cdot h}{3}$ (cono)	
G2 (39887)	$sen^4x-\cos^4x$ $2sen^2x-1$		**Función lineal**	efm nbufnbujdp Gjcpñbddj (II) 1 *del matemático Fibonacci(II)*
	$2\cos^2x+\cos x-1=0$			
	$x=60º,\ x=180º,\ x=300º$ **Se recorren 150 m en una carretera salvando un desnivel de 10 m. ¿Cuál es el ángulo de inclinación de la carretera?** $\text{sen }\alpha=\frac{\text{desnivel}}{\text{distancia}}=\frac{10}{150}=\frac{1}{15}$ $\alpha=\text{arcsen}\left(\frac{1}{15}\right)=3.822^o=3^o49'21''$	$D=\mathbb{R}$ $R=\mathbb{R}$ *Decrece en* $\mathbb{R}$ *Sin extremos en* $\mathbb{R}$. *Sin simetrías.* *Sin asíntotas.* *No es periódica.* *TVM en* $[-3,3]$ *negativa.*	$V=\pi\cdot r^2\cdot h$ (cilindro)	

Figura 11. Etapas 1,2,3,4 de Grupos 1,2.

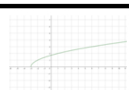
G3 (49894)	$sen\,x\cdot\cos x\cdot(\frac{1}{tg\,x}+tg\,x)$ 1		**Función radical**	swg gu 0,1,1,2,3,5,8,13… (III) 2 *que es 0,1,1,2,3,5,8,13… (III)*
	$3tg^2x-\sqrt{3}tg\,x=0$			
	$x=180º,\ x=0º,\ x=30º,\ x=210º$ **Juan y Pedro ven un árbol en la otra orilla del río que está frente a ellos. Al caminar Juan por la orilla una distancia de 150 metros mide el ángulo de elevación de esta orilla a la parte más alta del árbol y se obtiene un ángulo de 62°. ¿Cuál es el ancho del río?** $\text{tg }\alpha=\frac{x}{d}$ ancho del rio : $x=d\cdot\text{tg }\alpha=150\cdot\text{tg } 62^o=282.1\text{ m}$	$D=[-3,\infty)$. $R=[0,\infty)$. *Crece de* $[-3,\infty)$. *Mín. en* $(-3,0)$. *Sin simetrías.* *Sin asíntotas.* *No es periódica.* *TVM en* $[-3,0]$ *positiva y en* $[-5,-4]$ *no tiene.*	$A=\frac{b\cdot h}{2}$ (triángulo)	
G4 (84820)	$\frac{\cos x}{tg\,x\cdot(1-sen\,x)}$ $\frac{1+sen\,x}{sen\,x}$		**Función cuadrática**	wlhph uhñdflrp frp (IV) 3 *tiene relación con (IV)*
	$\text{sen}^2x-\cos^2x=1$			
	$x=90º,\ x=270º$ **¿Cuál es la inclinación de los rayos del sol si un mástil de una bandera de 3m de altura proyecta una sombra sobre el suelo de 1.2 m?** $\text{tg }\alpha=\frac{h}{\text{proyección}}=\frac{3}{1.2}=2.5$ $\alpha=\text{arctg }(2.5)=68.198^o=68^o11'52''$	$D=(-\infty,\infty)$. $R=[0,\infty)$. *Crece de* $\left(-\infty,\frac{1}{2}\right]$ *y decrece de* $[\frac{1}{2},\infty)$. *Max. en* $\left(\frac{1}{2},\frac{9}{2}\right)$. *Sin simetrías.* *Sin asíntotas.* *No es periódica.* *TVM en* $[-3,-1]$ *positiva y de* $[1,1000]$ *negativa.*	$V=\frac{4}{3}\cdot\pi\cdot r^3$ (esfera)	

Figura 12. Etapas 1,2,3,4 de Grupos 3,4.

G5 (45868)	$\frac{\sqrt{1-\cos x}\cdot\sqrt{1+\cos x}}{sen\,x}$		**Función logarítmica**	jp rzqjwt ij twt. (V)
	1			5
	$2sen^2x-1=0$		$A=\pi\cdot r^2$ (esfera)	*el número de oro.(V)*
	$x=45º, x=315º$	$D=(-\frac{9}{7},\infty)$. $R=(-\infty,+\infty)$. *Crece en* $(-\frac{9}{7},\infty)$. *Sin extremos en* $(-\frac{9}{7},\infty)$. *Sin simetrías. Asíntota vertical en* $x=-\frac{9}{7}$. *No es periódica. TVM en* $[-2,3]$ *positiva y en* $[-5,-4]$ *no hay.*		
	Un avión despega desde Barajas y lleva recorrido una distancia de 3 Km. Si el ángulo de elevación es de 15°. Calcular la altura del avión.			
	$\text{sen}\ \alpha=\frac{h}{d}$ $h=d\cdot\text{sen}\ \alpha=3\cdot\text{sen}15^o=$ $=0.77645\ Km=776.45\ m$			

Figura 13. Etapas 1,2,3,4 de Grupo 5.

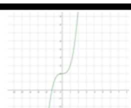
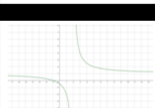
G6 (34365)	$\frac{\sec x-\cos x}{cosec\,x-sen\,x}$		**Función cúbica**	Kcis ma ms apñcpmubm bmztpuw? (VI)
	tg^3x			8
	$2sen^2x+3\cos x=0$			*Cuál es el siguiente término? (VI)*
	$x=240º, x=120º$	$D=\mathbb{R}$ $R=\mathbb{R}$. *Crece en* $\mathbb{R}\backslash\{2\}$. *Su curvatura cambia en* $(0,2)$. *Simetría impar respecto* $(0,2)$. *Sin asíntotas. No es periódica. TVM en* $[-7,-5]$ *y en*$[8,9]$ *es positiva.*	$V=l^3$ (cubo)	
	Un piloto que vuela a una altitud de 300 m señala que su ángulo de depresión a la torre de control es de 18 °. Si el avión sigue volando a esta altitud hacia la torre de control, ¿Cuántos metros tiene que recorrer para llegar a la torre?			
	$\text{tg}\ \alpha=\frac{h}{d}$ $d=\frac{h}{\text{tg}\ \alpha}=\frac{300}{\text{tg}18^o}=923.305\ \text{m}$			
G7 (63811)	$\frac{cosec\,x}{1+cotg^2x}$		**Función racional**	Ohnx qf xn eqxnoubz? (VII)
	$sen\,x$			13
	$tg^2x-tg\,x=0$			*Cuál es la relación? (VII)*
	$x=45º, x=225º, x=0º, x=180º$	$D=\mathbb{R}\backslash\{2\}$. $R=\mathbb{R}\backslash\{1\}$. *Decrece en* $\mathbb{R}\backslash\{2\}$. *Sin extremos* $\mathbb{R}\backslash\{2\}$. *Sin simetrías. Asíntota horizontal en* $y=1$ *y asíntota vertical en* $x=2$. *No es periódica. Sin TVM en* $[1,3]$.	$A=\frac{D\cdot d}{2}$ (rombo)	
	Desde un punto en el suelo situado a 50 m del pie de una antena, se traza la visual a la cúspide de la antena con un ángulo de 48°. ¿Cuál es la altura de la antena?			
	$\text{tg}\ \alpha=\frac{h}{d}$ $h=d\cdot\text{tg}\ \alpha=50\cdot\ \text{tg}\ 48^o=55.53\ \text{m}$			
ETAPA 5	21, las divisiones tienden al número de oro. // A=b·a.			

Figura 14. Etapas 1,2,3,4 de Grupos 6,7 y Etapa grupal 5.

EVALUACIÓN

En primer lugar, se llevó a cabo una evaluación inicial que constó de dos partes: una se ocupó de recopilar las calificaciones del alumnado hasta la fecha para obtener datos sobre sus conocimientos académico-matemáticos, y la otra de conocer los intereses y la percepción que este grupo tiene sobre dicha ciencia mediante un cuestionario.

Para evaluar los avances adquiridos durante el desarrollo de la propuesta y el grado de obtención de los objetivos propuestos, se ha empleado una rúbrica inclusiva mediante la que se ha valorado el comportamiento de cada estudiante, el trabajo autónomo y en grupo, los contenidos puestos en práctica durante el juego y sus periodos de reflexión, y un cuestionario en el que el alumnado resolvió unos ejercicios sobre los contenidos abordados en cada una de ellas.

Por último se llevó a cabo la evaluación de la propuesta a través de un cuestionario en el que el alumnado valoró los diferentes aspectos de cada sala.

CONCLUSIONES

Inicialmente, con la puesta en práctica de las actividades se ha logrado cumplir en mayor o en menor medida los cinco objetivos establecidos. Por un lado, se pudo observar la emoción del alumnado y sus ganas de resolver los acertijos durante el transcurso de las dos salas, pues las matemáticas parecían haberse vuelto divertidas para quien inicialmente había mostrado indiferencia o rechazo hacia las mismas, hecho que se vio confirmado a través del último cuestionario. Por otro lado, el alumnado hizo notar su gusto por el trabajo en grupo no solo verbalmente si no que también a la hora de llevar a cabo las actividades, pues las muestras de ayuda hacia los demás estuvieron presentes durante todo el desarrollo de la propuesta.

La mejora de las habilidades socio-emocionales del estudiantado no es algo que se pueda medir de forma cuantitativa, pero gracias la observación en sala se ha podido percibir un cambio en sus actitudes. Es cierto que en el momento en que fueron comunicados los equipos parte del alumnado mostró cierto rechazo o insatisfacción por su composición, sin embargo, tras haber trabajado conjuntamente en la primera Escape Room, en la segunda habitación el espíritu de grupo y la metodología de trabajo se mostraron bastante reforzados.

Por lo tanto, el cumplimiento exitoso de estos tres primeros objetivos tuvo como consecuencia el alcance de unas mejores calificaciones por parte de todos los equipos, pues a través del juego y de la necesidad de comunicación que este suponía, adquirieron un aprendizaje no solo de contenidos y estrategias de resolución de problemas sino que también de cultura matemática, algo que actualmente suele quedar al margen de lo impartido y enseñado.

REFERENCIAS

Alves de Mattos, L. (1963). *Compendio de Didáctica General.* Buenos Aires: Editorial Kapelusz.

De Guzmán, M. (1989). Juegos y matemática*. Revista Suma,* nº4, 61-64.

De Guzmán, M. (2006). *Aventuras matemáticas: una ventana hacia el caos y otros episodios.* Madrid: Pirámide.

Domingo, J. (2008). El aprendizaje cooperativo. *Cuadernos de trabajo social*, nº21, 231-246.

Gómez Chacón, I.M. (2000). *Matemática emocional: los efectos en el aprendizaje matemático.* Madrid: Narsea Ediciones.

Hidalgo, S., Maroto, A. y Palacios, A. (2005). El perfil emocional matemático como predictor de rechazo escolar: relación con las destrezas y los conocimientos desde una perspectiva evolutiva. *Educación Matemática*, 17(2), 89-116.

Lee, J. J. y Hammer, J. (2011). Gamification in Education: What, How, Why Bothe? *Academic Exchange Quarterly*, 15(2), 1-5.

López Haro, I. M. (2013). *Aprendizaje cooperativo con actividades motivadoras en Matemáticas.* Máster en Profesorado de Educación Secundaria. Univ. de Almería. Recuperado el 20 de Julio de 2019, de http://repositorio.ual.es/handle/10835/1971

Moll, S. (2018). *Aprendizaje profundo. ¿Qué es? ¿Qué características tiene?* Recuperado el 20 de Julio de 2019, de http://justificaturespuesta.com/aprendizaje-profundo/

Nebot Diago, P. D. y Ventura-Campos, N. (2017). Escape Room: gamificación educativa para el aprendizaje de las matemáticas. *Revista Suma*, nº85, 33-40.

Paintz, T. (1999). Collaborative versus Cooperative Learning. A comparison of the two concepts which help us understand the underlying nature of interactive learning. Recuperado el 20 de Julio de 2019, de https://files.eric.ed.gov/fulltext/ED448443.pdf

Tapia, J.A. (2003). *Motivar para Aprender*. Herramientas para la Reflexión Pedagógica. Bogotá: Santillana.

Épsilon - *Revista de Educación Matemática* *2020, nº 104, 75-81*

Una analogía entre la Estadística y la Física: la media aritmética y un sistema de palanca

Mauricio Fuentes A.
Universidad de Chile

Resumen: *Mediante una analogía con un sistema físico de palanca simple, se entrega una mirada a la media aritmética como el punto de equilibrio o centro de masa, ilustrando su sensibilidad a valores extremos y el cálculo de la media aritmética ponderada.*
Palabras clave: *Media aritmética, Media ponderada, Punto de equilibrio, Centro de masa.*

An Analogy between Statistics and Physics: the Arithmetic Mean and a Lever System

Abstract: *By means of an analogy with a simple lever physical system, a look at the arithmetic mean as the point of equilibrium or center of mass is given, illustrating its sensitivity to extreme values and the calculation of the weighted arithmetic mean.*
Keywords: *Arithmetic mean, Weighted mean, Point of equilibrium, Center of mass.*

INTRODUCCIÓN

Se dice comúnmente que la media aritmética es el punto de equilibrio o centro de masa de una distribución de datos, pero esta interpretación no siempre es completamente clara. Tomando como base algunas ideas y explicaciones didácticas de otros autores (Devore, 2016; Sarkar & Rashid, 2016), se muestra una analogía entre la media aritmética y la física de los cuerpos en reposo, ilustrando su sensibilidad a valores extremos desde una mirada de un sistema físico como la palanca. También se usa el concepto de centro de masa para explicar el cálculo de la media aritmética ponderada.

La palanca y el punto de equilibrio

De la Física, recordemos uno de los más importantes y antiguos postulados sobre los cuerpos en reposo: la relación de la palanca descrita por Arquímedes en su tratado *Sobre el equilibrio de las figuras planas* del siglo III a.C. (Dijksterhuis, 1987; Fernández Aguilar, 2012; Vittorio, 2016). En la Figura 1 se muestra un sistema básico de palanca constituido por una barra (sin masa) de longitud $L = L_1 + L_2$, en cuyos extremos actúan las fuerzas F_1 y F_2 ($F_1 > F_2$), y un fulcro ubicado en un punto de la barra tal que ésta se mantiene en equilibrio (posición horizontal). La relación de equilibrio de este sistema es

$$F_1 L_1 = F_2 L_2 \tag{1}$$

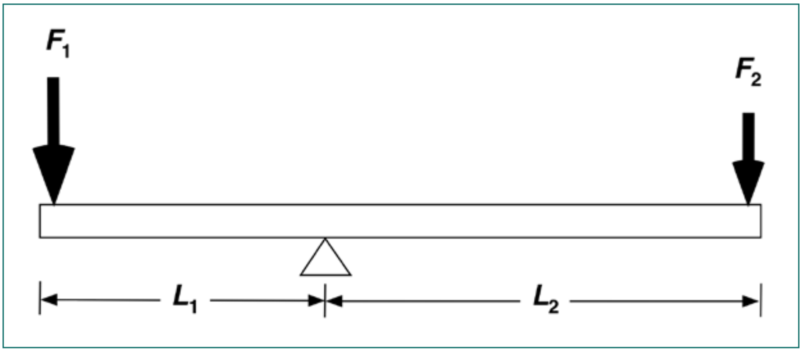


Figura 1: Sistema de palanca simple.

La ecuación (1) en Física también se conoce como la *segunda condición de equilibrio*, que se cumple cuando la suma de los momentos (o torques) de las fuerzas que actúan sobre la barra es cero (Sears & Zemansky, 1958; Young & Freedman, 2016). De acuerdo a esta relación y lo observado en la Figura 1, el punto de equilibrio (fulcro) se ubica hacia el lado de la mayor fuerza (F_1), con lo cual $L_1 < L_2$.

Haciendo la analogía con la Estadística, supongamos un caso muy simple donde tenemos dos datos: 2 y 5. Para visualizar estos dos datos, imaginemos que la barra (sin masa) está representada por la recta numérica, y sobre ésta se colocan dos masas, de 1 kg cada una, en las posiciones $x = 2$ y $x = 5$. La media aritmética $\overline{x} = 3{,}5$ está ubicada en el punto medio entre ambos números y, por lo tanto, es bastante sencillo ver que en ese punto se equilibra el sistema de masas y barra. Podemos representar las masas mediante puntos sobre la recta numérica y la posición de la media mediante un "fulcro", como en la Figura 2.

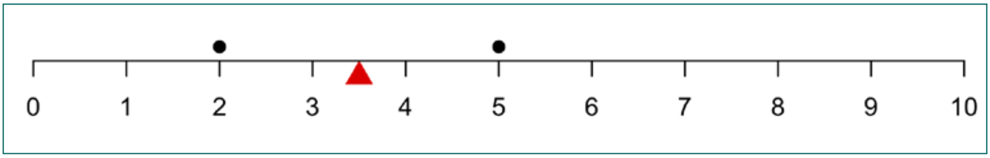


Figura 2: Dos puntos (masas) y un fulcro en el punto de equilibrio ($\bar{x} = 3{,}5$).

En nuestro sistema de la Figura 2, donde $F_1 = F_2 = 1$ kg, $L_1 = \bar{x} - 2$ y $L_2 = 5 - \bar{x}$, la posición de $\bar{x}$ debe ser tal que (1) queda como

$$1 \times (\bar{x} - 2) = 1 \times (5 - \bar{x}) \tag{2}$$

Resolviendo obtenemos $\bar{x} = 3{,}5$.

Si agregamos una tercera masa de 1 kg en la posición $x = 2$, como en la Figura 3, la ecuación de equilibrio sería

$$2 \times (\bar{x} - 2) = 1 \times (5 - \bar{x}) \tag{3}$$

Despejando obtenemos $\bar{x} = 3$, un punto ubicado más a la izquierda que el anterior, para poder mantener en equilibrio el sistema, ahora más pesado justamente en el lado izquierdo.

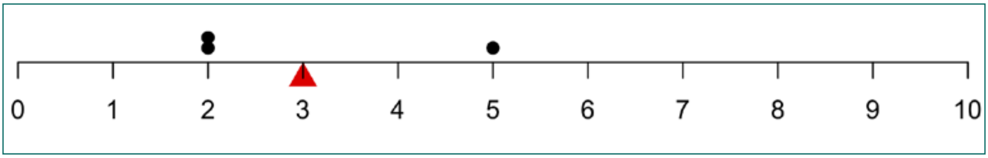


Figura 3: Sistema de la Figura 2 con una tercera masa en la posición x = 2.

Si colocáramos una cuarta masa en la posición $x = 7$ (ver Figura 4), y aplicando el principio de equilibrio y las distancias de las masas a la posición de la media, tenemos

$$2 \times (\bar{x} - 2) = 1 \times (5 - \bar{x}) + 1 \times (7 - \bar{x}) \tag{4}$$

Despejando obtenemos $\bar{x} = 4$. La media se desplazó ahora hacia la derecha, para equilibrar el sistema que cargamos hacia ese lado al colocar la cuarta masa en la posición $x = 7$.

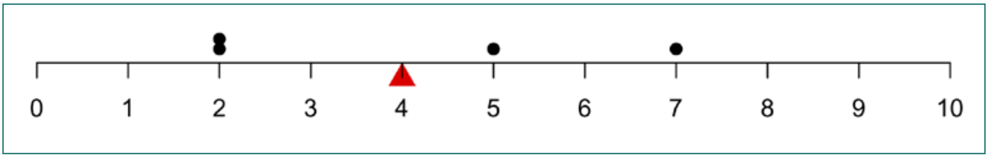


Figura 4. Sistema de la Figura 3 con una cuarta masa en la posición $x = 7$.

Finalmente, con esta analogía es posible comprender mejor que la media es sensible a valores extremos. Supongamos que ahora a nuestro sistema agregamos una masa ubicada lejos de las demás, por ejemplo en la posición $x = 34$. Naturalmente, como se observa en la Figura 5, el fulcro debe moverse hacia la derecha para compensar el desequilibrio introducido por esta nueva masa y mantener el sistema en posición horizontal. Aquí podemos usar también la relación de equilibrio

$$2 \times (\bar{x} - 2) + 1 \times (\bar{x} - 5) + 1 \times (\bar{x} - 7) = 1 \times (34 - \bar{x}) \tag{5}$$

Nuevamente, despejando obtenemos la media $\bar{x} = 10$.

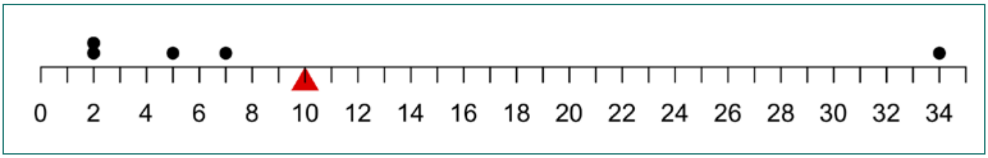


Figura 5. Sistema de la Figura 4 con una quinta masa en la posición $x = 34$.

Centro de masa y media ponderada

Es posible tomar cualquier subconjunto de datos (o masas) y utilizar su media (o centro de masa) para calcular la media total. Por ejemplo, en la Figura 4 las masas ubicadas en $x = 5$ y $x = 7$ tienen su punto de equilibrio en la posición $x = 6$. Entonces, reubicando dichas masas en $x = 6$, como se muestra en la Figura 6, podemos usar esa media en combinación con los otros dos datos para calcular la media total. Nótese que las dos masas ubicadas originalmente en $x = 5$ y $x = 7$ ahora están en $x = 6$, lo que equivale a ponderar con una “doble masa” el valor 6 al momento de calcular la media total.

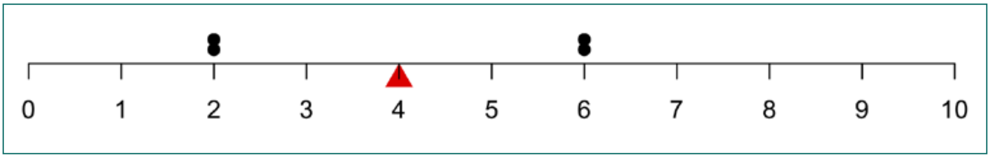


Figura 6: Sistema de la Figura 4 con las masas en $x = 5$ y $x = 7$ reubicados en la posición de su media.

Pensemos ahora en un conjunto algo más grande, agregando unos cuantos datos más a la Figura 6 y obteniendo el de la Figura 7[1]. Podríamos aplicar la ecuación (1) para calcular el punto de equilibrio, pero claramente sería más tedioso que en los casos anteriores. Lo importante es que ya sabemos que la media está ubicada en el centro de masa del sistema, permitiendo que éste se mantenga en equilibrio.

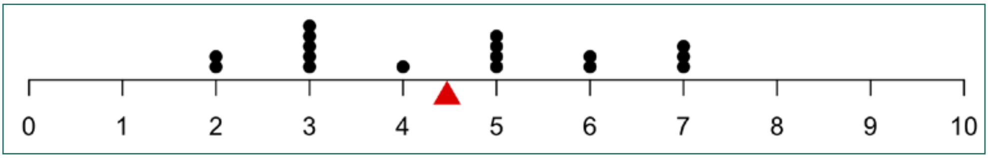


Figura 7: Sistema con más masas, o un conjunto de datos más grande.

Podemos recurrir entonces al mencionado concepto físico de centro de masa, cuya ubicación en la recta de nuestro ejemplo está dada por (Young & Freedman, 2016).

$$x_{cm} = \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + \ldots + m_nx_n}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_ix_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i} \tag{6}$$

Si consideramos todas las masas como masas unitarias, es decir, de 1 kg ($m_i = 1$ para todo i), $x_1 = 2$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$ ..., $x_{16} = 7$, $x_{17} = 7$, y reemplazamos en (6), obtendremos que

$$x_{cm} = \frac{1\times 2 + 1\times 2 + 1\times 3 + \cdots + 1\times 7 + 1\times 7}{1+1+1+\cdots+1+1} = \frac{76}{17} = 4{,}47 = \overline{x} \tag{7}$$

Sin embargo, esta forma también resulta tediosa y no nos entrega nada nuevo respecto a lo ya discutido sobre la interpretación física de la media. Resulta más interesante considerar que ahora tenemos masas distintas en cada posición, cada una dada por la

1. Este gráfico es conocido en Estadística como ***dot plot***, y cuando tiene esta forma es equivalente a un histograma.

suma de las masas unitarias en cada columna de la Figura 7. Podríamos incluso graficar en cada posición masas con pesos equivalentes, como se muestra en la Figura 8.

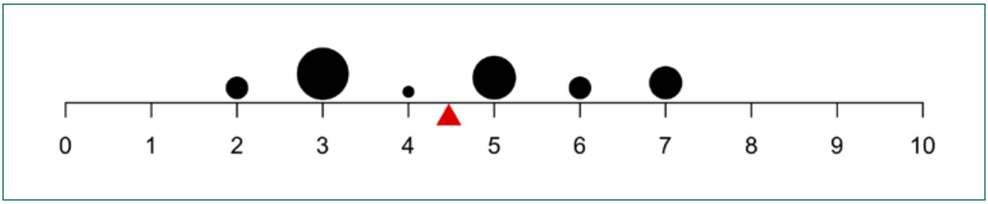


Figura 8: Sistema de la Figura 7 donde las masas tienen pesos equivalentes.

En este nuevo sistema, equivalente al anterior, tenemos 6 masas distintas (m_1 = 2 kg, m_2 = 5 kg, m_3 = 1 kg, m_4 = 4 kg, m_5 = 2 kg, m_6 = 3 kg). Entonces, aplicando la ecuación (6) tenemos que el centro de masa es

$$x_{cm} \quad \frac{2\times 2 + 5\times 3 + 1\times 4 + 4\times 5 + 2\times 6 + 3\times 7}{2+5+1+4+2+3} = \frac{76}{17} = 4{,}47$$

El centro de masa, considerado también como la *posición promedio de la masa del sistema* o la *posición promedio ponderada por la masa* (Serway & Jewett, 2008; Young & Freedman, 2016), nos entrega como resultado la conocida media aritmética ponderada, donde cada valor se pondera por su frecuencia de ocurrencia, equivalente a la suma de las masas unitarias en el sistema físico. Esto quiere decir que cuando calculamos la media ponderada le estamos adjudicando a cada valor medido de la variable una importancia o "peso" según su presencia relativa en el conjunto de datos, tal como en el sistema físico cada partícula contribuye según su masa relativa a la masa total del sistema.

CONCLUSIÓN

Un conjunto de datos puede ser pensado y representado como un sistema físico, donde la media aritmética equivale al punto de equilibrio o centro de masa. Usando una analogía con un sistema de palanca y con una pequeña cantidad de datos, se espera haber ilustrado la sensibilidad de la media aritmética a los datos extremos, así como haber explicado el cálculo de la media ponderada, donde el peso dado a cada valor es la frecuencia de ocurrencia. Aunque no fue mostrado aquí, la extensión a datos de dos o tres variables es directa con sistemas físicos de dos o tres dimensiones, respectivamente.

REFERENCIAS

Devore, J. (2016). *Probability and Statistics for Engineering and the Sciences* (9th ed.). Boston: CENGAGE Learning.

Dijksterhuis, E. J. (1987). *Archimedes*. New Jersey: Princeton University Press.

Fernández Aguilar, E. M. (2012). *ARQUÍMEDES, El principio de Arquímides: ¡Eureka! El placer de la invención*. Barcelona: RBA Coleccionables, S.A.

Sarkar, J., & Rashid, M. (2016). A geometric view of the mean of a set of numbers. *Teaching Statistics*, *38*(3), 77–82. https://doi.org/10.1111/test.12101

Sears, F. W., & Zemansky, M. W. (1958). *Física General* (4th ed.). Madrid: Aguilar, S.A.

Serway, R. A., & Jewett, J. W. (2008). *Physics for Scientists and Engineers with Modern Physics* (7th ed.). Belmont: Thomson Learning, Inc.

Vittorio, A. (2016). *ARCHIMEDE SIRACUSANO: Invenzioni e contributi tecnologici* (2nd ed.). Siracusa: Associazione Culturale Arenario.

Young, H. D., & Freedman, R. A. (2016). *Sears and Zemansky's University Physics with Modern Physics*. *University Physics with Modern Physics* (14th ed.). Pearson Education, Inc.

Épsilon - *Revista de Educación Matemática* *2020, nº 104, 83-98*

RINCÓN "SAPERE AUDE"…. ¿resolviendo problemas?

Sixto Romero
Escuela Técnica Superior de Ingeniería
Universidad de Huelva
sixto@uhu.es

1. MATEMÁTICAS EN LOS SIGLOS XVI

1.1. Siglo XVI: ¿Nuevo lenguaje matemático?

Después de la captura de Constantinopla (Constantinopolis, anteriormente Bizancio, llamada por los turcos Stamboul-distorsión de Constantinopolis-Estambul-, nombre actual de la ciudad, y también por un mal juego de palabras, Islamboul, se encuentra ubicada en el estrecho del Bósforo) por los turcos en 1453, viene el renacimiento de las matemáticas. Sin embargo, la aportación más importante a principios del siglo XVI es la creación del álgebra en su forma actual. Esta rama de las matemáticas existía en la tradición occidental al menos desde Diofanto.

Diofanto, Diophantus, matemático griego de Alejandría, que vivió probablemente en el siglo III de la era cristiana, al menos antes de Theon de Alejandría que lo cita. Según un epigrama aritmético de la antología griega, se habría casado a los treinta y tres años, habría tenido, cinco años después, un hijo que murió a los cuarenta y dos años, y al que habría sobrevivido cuatro años. Por lo tanto, habría muerto a edad de ochenta y cuatro años. Dejó un libro llamado *Arithmetika*, que incluía trece libros de los cuales se perdieron los últimos siete, y un libro especial, *números poligonales*. En cuanto a sus *Porismas* (*también se puede escribir como porismo, del griego "πόρισμα" -porismá- con el significado de expediente, conclusión o corolario. En particular, el término "porisma" se ha utilizado para referirse a un resultado directo de una prueba, análogamente a como se hace con un corolario en referencia a un resultado directo de un teorema. En el uso moderno, un porisma es una relación que se mantiene para un rango infinito de valores, pero solo si se asume una determinada condición, como por ejemplo en el caso de la Cadena de Steiner (Jakob Steiner-18 de marzo de 1796 - 1 de abril de 1863 matemático suizo, uno de los más destacados geómetras del siglo XIX). El término proviene de tres libros de Euclides conteniendo porismas, que se han perdido. Debe tenerse en cuenta que una proposición puede*

Figura 1. Niccolò Fontana (Tartaglia). https://www.biografiasyvidas.com/biografia/t/tartaglia.htm

no haber sido probada, por lo que un porisma puede no ser un teorema, o llegado el caso, incluso puede no ser cierto...), que cita en tres lugares en su Aritmética, deben haber sido, según la opinión que parece más probable, corolarios añadidos a los problemas resueltos en su gran trabajo, corolarios que no han sido bien tratados o descuidados por los traductores.

De hecho, el trabajo de Diofanto, solo nos ha llegado cercenado, reelaborado e interpolado. Conocido por los árabes desde el siglo IX, dio a luz a *Älgebra,* pero ninguna escritura árabe ha arrojado alguna luz sobre la parte que se pierde. Todos los manuscritos griegos conocidos hoy, veinte en número, proceden de un solo prototipo y se dividen en dos clases. El manuscrito más antiguo de la primera clase no es anterior al siglo XIV; y el segundo de una copia en la que Maxime Planude, en el siglo mencionado, compuso un comentario sobre los dos primeros libros. Antes de Maxime Planude, Georges Pachymère (en su *Tétrabiblon*) es el único bizantino que se ha ocupado de Diophante. y sabemos que ya podríamos encontrar las bases entre los babilonios, en Egipto, en la India, etc. Pero, demasiado apegado a los números y a casos especiales, carecía de las herramientas que le darían todo su valor y "poder".

Luca Pacioli comienza dando métodos para reducir todas las ecuaciones cuadráticas a tres casos. Luego viene Niccolò Fontana ((1500-1557), también conocido como Tartaglia, por su tartamudez, Cardan y Ferrari, que están comenzando a abordar el problema general de resolver ecuaciones de tercer y cuarto grado. Después de ellos, Viète es el primero en aplicar álgebra a la geometría y, por lo tanto, sienta las bases para el análisis moderno: *El Álgebra, un lenguaje en busca de su vocabulario*.

Desde principios del siglo XVI, el álgebra fue cultivado por una gran cantidad de matemáticos. Scipio Ferreo, profesor de matemáticas en Bolonia, alrededor de 1505, rompió por primera vez las barreras logrando resolver un problema de tercer grado, pero no hizo público su descubrimiento.

Algún tiempo después, el citado Tartaglia, que enseña matemáticas en Venecia, acepta un desafío, según la moda de la época, del matemático Fiori (o Fior) que afirma tener un método para resolver la ecuación del tercer grado (quizás proviene de Ferreo), promete una suma de dinero a quien resuelva treinta preguntas formando casos especiales de esta ecuación. Tartaglia ofrece un método más simple y sale fácilmente victorioso al resolver las preguntas propuestas en menos de dos horas.

Girolamo Cardano, conocido por el nombre francés de Jérôme Cardan, es un científico italiano, nacido en Pavía el 24 de septiembre de 1501, fallece en Roma el 21 de septiembre de 1576. Estudió en Pavía y Padua, fue doctor en medicina ejerciendo en

Figura 2. Girolamo Cardano. http://www.cosmovisions.com/Cardan.htm

Sacco cerca de Pavía. La situación económica de Cardano no era buena, muy escasa, se mantuvo solvente al ser un jugador y ajedrecista consumado . Su libro sobre juegos de azar, *Liber de ludo aleae ("Libro sobre juegos de azar"),* escrito alrededor de 1564, pero no publicado hasta 1663, contiene el primer tratamiento sistemático de probabilidad, así como una sección sobre métodos efectivos de engaño. Utilizó el juego de lanzar dados para comprender los conceptos básicos de probabilidad. En 1534 fue nombrado profesor de matemáticas en Milán y adquirió una gran reputación allí como profesor y médico; en 1547 dio conferencias sobre medicina en Pavía; en 1552 fue a Escocia para tratar al arzobispo Hamilton con asma; fue nombrado profesor de medicina en Pavía en 1559, luego en Bolonia en 1562.

En 1570, una acusación injustificada lo hizo encarcelar; liberado en septiembre de 1574, fue a Roma donde el Papa le pagó una pensión hasta su muerte. Estando en proceso de componer su *Ars marna, sive de regulis algebraicis liber unus* (Nuremberg, 1545), descubre el resultado de esta competencia científica. Le arrebata su secreto a Tartaglia y jura por los Evangelios que nunca lo revelará, pero esta promesa solemne no le impide publicarlo en su *Ars magna…*, mientras hace justicia, es cierto, a los inventores precedentes.

Le arrebata su secreto a Tartaglia y jura por los Evangelios que nunca lo revelará, pero esta promesa solemne no le impide publicarlo en su *Ars magna…*, mientras hace justicia, es cierto, a los inventores precedentes. Además, mientras Tartaglia sabía cómo resolver la ecuación de tercer grado, solo en el caso de una única raíz real, Cardan, mente sutil y matemático brillante, observa que, cuando la fórmula de resolución contiene imaginarios, la ecuación admite tres raíces reales: *este es el primer ejemplo del vínculo entre cantidades reales y cantidades imaginarias que encontrará su pleno desarrollo en el siglo XIX.*

A los veintitrés años, Ferrari, alumno de Cardan, resuelve la ecuación de cuarto grado. Louis Ferrari, matemático, nacido en Bolonia el 2 de febrero de 1522, murió en Bolonia en 1565, envenenado, ¿según se dice?, por su hermana. A la edad de quince años, se convirtió en alumno de Cardan y, tres años después, ya estaba dando clases de matemáticas en Milán. De gran carácter, acababa de perder en una pelea los dedos de la mano derecha. De 1549 a 1556, fue responsable de dirigir las operaciones de catastro en

Figura 3. Recorde. http://www.cosmovisions.com/mathematiquesChrono.htm

el Milanese. Una fístula le obligó a dejar este trabajo y se retiró a Bolonia, donde enseñó matemáticas.

Su vida fue escrita por su maestro cuyas licencias imitó y a cuya ciencia igualó. Le debemos: la primera solución de la ecuación de cuarto grado, que encontró a los veintitrés años en un problema propuesto por Zuane Tonini da Coi (*profesor italiano de Brescia interesado en la resolución de problemas matemáticos, quien propuso a Tartaglia en 1530 dos problemas con ecuaciones de tercer grado que este último todavía no sabía resolver*), y que fue publicada en *Ars magna* de Cardan (1545).

En 1547, comenzó con Tartaglia una famosa disputa que terminó con el juego matemático del 10 de agosto de 1548, en Milán, y que el bresciano contó a su manera. Las seis propuestas de Ferrari y las respuestas de Tartaglia, impresas desde el momento de la disputa, fueron publicadas nuevamente en 1846 por Gherardi y en 1878 (Milán) por Giordani. Los dos adversarios se prodigaban, pero Tartaglia, lo que sea que dijo, no se salió con la suya.

Entre los hombres que, al mismo tiempo, contribuyeron a la mejora del álgebra mediante la introducción de una notación concisa y sistemática, debemos mencionar a Stifel (o Stifelius) y Robert Recorde. El trabajo del primero, titulado *Arithmetica integra,* se publicó en 1544. Stifel adoptó definitivamente los signos + y - (más y menos) ya introducidos por Jean Widmann de Eger, para representar la suma y la resta, así como el *símbolo radical o raíz*. Es nuevamente él quien introduce los exponentes numéricos de las potencias - 3. - 2, - 1, 0, + 1, + 2, +3, etc.

Le debemos a Recorde (1552) la invención del signo de igualdad (=): elige este símbolo porque, dice, no puede haber dos cosas más iguales entre ellas que dos líneas paralelas.

Después de ellos, Raphaël Bombelli (1579) y Richard Steven (1585) merecen, también, ser mencionados. Así se adquiere la resolución algebraica de las ecuaciones de los primeros cuatro grados, las únicas que, en el caso general, se pueden resolver mediante extracciones de raíz, como demostraría, en el siglo XIX, el matemático Abel.

Sin embargo, el Álgebra sigue siendo solo una colección de recetas aisladas, cada una de las cuales tiene como objetivo resolver un problema en particular. De hecho, Tartaglia y Cardan no dan fórmulas para la resolución en el sentido que le damos hoy a esta palabra. Las reglas de Tartaglia se ponen en tres estrofas de nueve líneas, cada una dedicada a describir la secuencia, operaciones destinadas a resolver cada una de las formas de ecuación que escribiríamos hoy.

1.2. Notas sobre álgebra según Viète.


Fig.4. François Viète. http://www.cosmovisions.com/mathematiquesChrono.htm

Hay que significar que el verdadero fundador del álgebra, tal como lo entendemos hoy, fue François Viète. Nacido en Fontenay en Poitou en 1540, fallecido en París en 1603.

Viète, asesor del Parlamento de Bretaña, maestro en París y asesor privado, tenía impresos folletos que a partir de 1571 envió a matemáticos de todos los países. Expone los primeros principios de su método en su *Introducción al arte analítico (Isagoge in artem analyticam).* Su trabajo esencial es la creación del mecanismo algebraico; completando así el método analítico de Platón, *proporciona a las matemáticas su lenguaje, tanto analítico como sintético.*

Antes de él, los matemáticos calculaban solo con números, y lo desconocido solo, con sus poderes, estaba representado por signos, de no ser por las operaciones que incluían letras, y el producto de dos cantidades estuvo representado por un nuevo símbolo, en una palabra, el cálculo algebraico no existía.

> *"Entendemos, dice Michel Chasles en su* Historia de los métodos geométricos*, que este estado restringido e imperfecto no constituía la ciencia algebraica actual, cuyo poder reside en estas combinaciones de signos que complementan el razonamiento de intuición, y llevar por camino misterioso a los resultados deseados. "*

Al representar con letras todas las cantidades conocidas y desconocidas y al someterlas a todas las operaciones que se realizan con los números, Viète constituye en su forma moderna esta *ciencia de símbolos que es el Álgebra*, al mismo tiempo que lenguaje como mecanismo, y lo convierte en un nuevo medio de expresión y un nuevo instrumento de descubrimiento.

Por lo tanto, al transformar un razonamiento particular en una fórmula general, en una ley, contribuye a desarrollar el poder de los métodos matemáticos. Él mismo estudia ecuaciones algebraicas de cualquier grado e imagina la mayoría de las simplificaciones sufridas, que se resolverán antes, la igualdad algebraica. Probablemente conoce la fórmula que desarrolla $(a + b)^n$ y encuentra las fórmulas que expresan *sen (px)*, *cos (p)x* en función de *sen x, cos x* y las aplica al estudio de ciertas ecuaciones algebraicas. Da una expresión en forma de un producto infinito que, sin tener ningún valor para el cálculo práctico, es el primer ejemplo preciso de este uso de desarrollos que, en el siglo siguiente, marcará un progreso tan grande en el análisis matemático. En geometría, resuelve con singular elegancia el problema de conducir un círculo tangente a tres círculos dados.

1.3. Un breve bosquejo sobre la matemática en Simón Stevin

Figura 5. Simón Stevin. https://www.biografias.es/famosos/simon-stevin.html

Simón Stevin, a veces también llamado Simón de Brujas, o incluso Stephanu, es un matemático y mecánico flamenco, nacido en Brujas en 1548, ¿muerto en La Haya? o ¿en Leiden? en 1620.

Primero contable con un comerciante rico, luego fue empleado por la administración financiera en Brujas, luego emprendió un largo viaje por Europa y, después de una corta estancia en Middelburg, se estableció en Leiden (1583) donde enseñaba matemáticas.

En el estudio del equilibrio de sólidos, no había habido progreso desde Arquímedes: Stévin encuentra, para el plano inclinado, la relación entre la fuerza motriz y el peso del cuerpo. Sabe cómo representar fuerzas por segmentos de línea (vectores) y dar, antes de Varignon, la regla de composición de fuerza que es la base de la mecánica. Continuando en hidrostática, demuestra que un líquido puede ejercer en el fondo de un jarrón una presión mayor que su propio peso. Esta es la paradoja hidrostática cuyo descubrimiento a menudo se atribuye a Pascal. Así, en el fructífero camino de la aplicación de las matemáticas a la mecánica, Stévin precede a Galileo.

También le debemos a Stévin el uso del cálculo de fracciones decimales, que es como el complemento natural de nuestro sistema numérico. (¡Otros atribuyen este sistema a Regiomontanus!).

SAPERE AUDE, GEOMETRÍA

La geometría clásica se consolidó gracias, fundamentalmente, al trabajo de Euclides quien en su obra titulada "Los Elementos" reunió todo el conocimiento matemático de su época, lo organizó y, lo más importante de todo, lo formalizó. La Geometría se modeló, si se me permite la expresión, como un sistema de enunciados que se demuestran a partir de cinco postulados considerados como verdades evidentes y que se llaman axiomas. Con el paso del tiempo, "Los Elementos" de Euclides se convirtieron en un modelo a seguir en el desarrollo de las matemáticas y la geometría se consideró el cimiento o la base sobre la cual debería sustentarse su desarrollo.

Es interesante la lectura del artículo, *La enseñanza de la Geometría)* de Silvia García y Olga Leticia López. México.2008.

Coincido en su planteamiento general, en referencia a la enseñanza de la geometría, comentado en muchas ocasiones con colegas de diferentes niveles de enseñanza, que deberíamos en la elaboración de los planes de estudio dar respuesta, de manera clara y contundente, a las siguientes cuestiones, entre otras:

- ¿Qué formación tenemos los profesores en Geometría?
- ¿Relación entre geometría y la realidad circundante?
- ¿Es necesario aprender geometría?
- ¿Cuál es el grado de conocimientos de las herramientas geométricas que disponen los alumnos ara su aplicación a la resolución de problemas?
- ¿Es adecuado el diseño de actividades de geometría en el aula?
- ¿Compatibilidad en el uso de las herramientas que nos proporciona la ingente cantidad de software desarrollados para la enseñanza de la geometría?
- ¿Por qué el olvido de la enseñanza de la geometría clásica?
- ……
- Una vez más, en esta ocasión, dos ejercicios con las figuras básicas como eje central de la propuesta: *el triángulo y el cuadrado*.

1. Ejercicios de aquí y allá (solución a la Propuesta del número anterior 103)

*Ejercicios propuestos en la Olimpiada Matemática Nacional Española
http://www.olimpiadamatematica.es/platea.pntic.mec.es/_csanchez/olimmain.html

Propuesta 1: dos joyitas geométricas

JOYITA*: a) *En el interior de un cuadrado se construye el triángulo equilátero . Sea el punto intersección de las rectas y . Sea el punto simétrico del respecto de la recta . Se pide demostrar que:*

1. El triángulo es equilátero.
2. El triángulo es rectángulo e isósceles.
3. El triángulo es isósceles.
4. El triángulo es equilátero

SOLUCIÓN

FE DE ERRATA: En el anterior número 103 hay que corregir la propuesta hecha por la que aparece en las líneas ut-supra.

Consideremos la imagen adjunta en la que se representa las figuras que se presentan

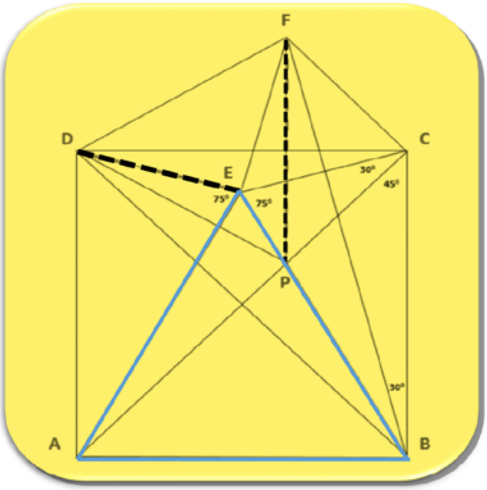


Figura 6.Cuadrado ABCD. Triángulo ABE.

Paso 1

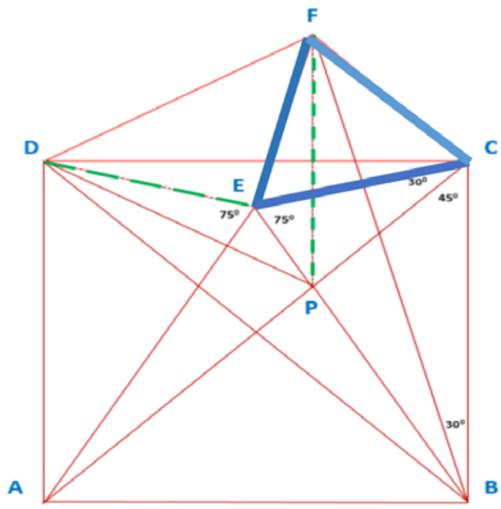


Figura 7. Triángulo CEF.

1) Fijemos inicialmente la atención en el triángulo isósceles $\overset{\triangle}{BEC}$, como se ha construido, BE=BC, por lo tanto, los ángulos en la base son iguales a 75º.

El ángulo en B, $\widehat{EBC}$ =90º-60º=30º

Por lo tanto, resulta que

$$\widehat{EBC} = \widehat{ECB} - \widehat{PCB} = 75º\text{-}45º=30º$$

De aquí sigue que los triángulos $\overset{\triangle}{CEP}$ y $\overset{\triangle}{BEC}$ son semejantes, y siendo isósceles este último, se infiere que también lo es el triángulo $\overset{\triangle}{CEP}$ en el que los lados CE y CP son iguales.

Dado que *CD* es mediatriz del segmento *PF*, es *CP=CF*, se tiene que *CE=CF*.

Ahora,

$$\widehat{ECB} = \widehat{ECD} + \widehat{DCF} = (90\text{ o} - \widehat{BCE}) + \widehat{PCD} = (90º\text{ -}75º) + 45º = 60º$$

Deducimos que el triángulo $\widehat{CEF}$ es equilátero.

Paso 2

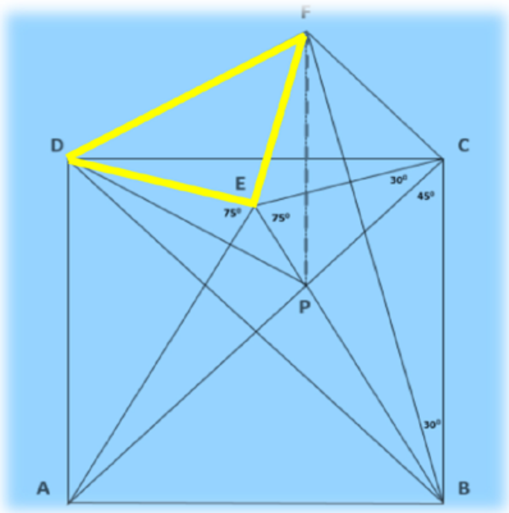


Figura 8. Triángulo DEF

2) Observemos que los lados: *DE* = *EC* = *EF* y

$$\widehat{DEA} + \widehat{AEB} + \widehat{BEC} + \widehat{CEF} = 75º + 60º + 75º + 60º = 270º$$

De aquí que *DE= EF y el ángulo* $\widehat{DEF} = 360^{o} - 270^{o} = 90$ y por lo tanto el triángulo

$\widehat{DEF}$ es isósceles y rectángulo.

Paso 3

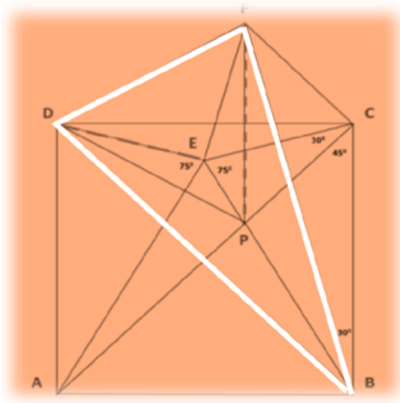


Figura 9. Triángulo BDF

3) En el caso que nos proponen se tiene que porque los triángulos $\widehat{BED}$ y $\widehat{AEC}$ son idénticos. Se sigue que los triángulos $\widehat{BCF}$ y $\widehat{BED}$ son iguales porque tienen iguales dos lados y el ángulo mide 135º. Se tiene que $BF = BD$ y por lo tanto, el triángulo $\widehat{BDF}$ es isósceles.

Paso 4

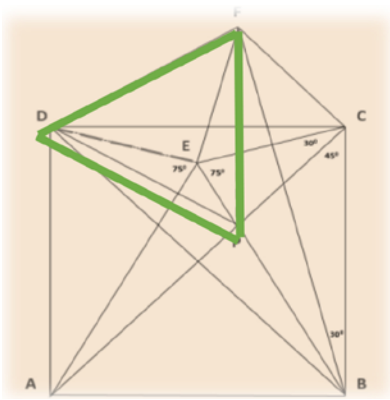


Figura 10. Triángulo PDF

4) Los lados $PF = FD$ por ser iguales los triángulos rectángulos $\widehat{DEF}$ y $\widehat{PCF}$. Por otro lado, se tiene que

$$\widehat{DFP} = \widehat{DFE} + \widehat{EFP} = \widehat{DFE} + (\widehat{EFC} - \widehat{PFC}) = 45^\circ + (60^\circ - 45^\circ) = 60^\circ$$

Y de aquí, podemos afirmar que el triángulo $\widehat{PDF}$ es equilátero.

JOYITA: b) *En el triángulo MNP, el área S y el ángulo en P son conocidos. Hallar el valor de los lados m y n para que el lado p sea lo más pequeño posible.*

SOLUCIÓN

Paso 1

Vamos a abordar la solución utilizando el teorema del coseno que como sabemos es una generalización del teorema de Pitágoras.

Consideremos el triángulo dado $\widehat{BED}$ cualquiera,

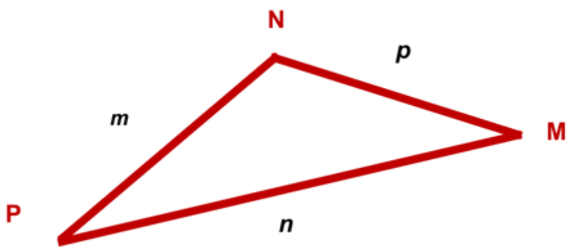


Figura 11. Triángulo MNP

En nuestro caso se tiene, aplicado al lado p

$$p^2 = m^2 + n^2 - 2mn.\cos(P)$$

$$p^2 = m^2 + n^2 - 2mn.\cos(P) = (m - n)^2 + 2\text{mn}[1 - \cos(P)]$$

Paso 2

Por otro lado, se tiene que el área del triángulo en función del seno de un ángulo podemos expresarlo así

$$S = \frac{1}{2} m.n.sen(P) \Rightarrow m.n = \frac{2S}{sen(P)}$$

De aquí se deduce, sustituyendo el valor del producto *mn* que

$$p^2 = (m-n)^2 + 2.\frac{2S}{sen(P)}.\left[1-\cos(P)\right] = (m-n)^2 + \frac{4S}{sen(P)}.\left[1-\cos(P)\right]$$

$$p^2 = (m-n)^2 + \frac{4S}{sen(P)}.\left[1-\cos(P)\right]$$

Paso 3

El valor mínimo se obtendrá cuándo $m=n$, entonces de la expresión

$$m.n = \frac{2S}{sen(P)} \Rightarrow m.n = m^2 = \frac{2S}{sen(P)} \Rightarrow m = n\sqrt{\frac{2S}{sen(P)}}$$

En definitiva, se concluye que los valores para *m* y *n* que hacen que el lado *p* sea lo más pequeño posible es

$$m = n = \sqrt{\frac{2S}{sen(P)}}$$

SAPERE AUDE, TEORÍA DE NÚMEROS

1. Ejercicios de aquí y allá (solución a la propuesta de los ejercicios del número anterior 103)

*Ejercicios propuestos en la Olimpiada Matemática Nacional Española
http://www.olimpiadamatematica.es/platea.pntic.mec.es/_csanchez/olimmain.html

Ya hemos comentado en varias ocasiones que la Teoría de Números, denominada *La Reina de las Matemáticas*, es la rama de las Matemáticas más antigua y que modernamente usa conceptos y herramientas de las más diversas ramas de las Matemáticas, como el Álgebra, la Geometría, el Análisis, la Variable Compleja, etc. Es la rama de las matemáticas que estudia los números naturales y una parte del álgebra en la que se estudian las operaciones en el conjunto de los números enteros (Z), que no arrojan resultados fuera de dicho conjunto.

Según esta amplia definición, la teoría de números incluye gran parte de las matemáticas, en particular del análisis matemático. Sin embargo, normalmente se limita al estudio de los números enteros y, en ocasiones, a otros conjuntos de números con propiedades similares al conjunto de los enteros.

A lo largo de los números anteriores en esta sección he presentado algunos problemas que son fácilmente entendibles por todos, incluidos, también, los no matemáticos.

En esta ocasión presento la solución de dos Joyitas Numéricas: una que aborda el concepto de congruencias de números naturales; y la segunda utiliza los conceptos de desigualdad y potencias de números naturales.

Propuesta 2: dos joyitas numéricas

JOYITA: a) *Demuestra que el número* $2222^{5555} + 5555^{2222}$ *es múltiplo de* **7.**

SOLUCIÓN

Paso 1

Vamos a utilizar el concepto de congruencia, utilizado en la teoría de números, en general para decir que dos números enteros p y q son congruentes si tienen el mismo resto al dividirlos por un número natural $m \neq 0$, lo expresaremos así

$$p \equiv q \ (mod\ m\ ).$$

Paso 2

En nuestro caso, tenemos las siguientes congruencias módulo 7:

a) Para el número 2222

$$\begin{aligned} 2222^0 &\equiv 1(\text{mod}7) \\ 2222^1 &\equiv 3(\text{mod}7) \\ 2222^2 &\equiv 2(\text{mod}7) \\ 2222^3 &\equiv 6(\text{mod}7) \\ 2222^4 &\equiv 4(\text{mod}7) \\ 2222^5 &\equiv 5(\text{mod}7) \\ 2222^6 &\equiv 1(\text{mod}7) \end{aligned}$$

con un ciclo de longitud 6.

b) Para el número 5555

$$\begin{aligned} 5555^0 &\equiv 1(\text{mod}7) \\ 5555^1 &\equiv 4(\text{mod}7) \\ 5555^2 &\equiv 2(\text{mod}7) \\ 5555^3 &\equiv 1(\text{mod}7) \end{aligned}$$

con un ciclo del 1ongitud 3.

De aquí se deduce que tomando las referencias de los ciclos 6 y 3, respectivamente, en 2222 y 5555:

$$2222=3.740+2$$
$$5555=6.925+5$$

De aquí sigue que:

$$2222^{5555} \equiv 2222^{5} \,(\mathrm{mod}7) \Rightarrow 2222^{5} \equiv 5 \,(\mathrm{mod}7).$$
$$5555^{2222} \equiv 5555^{2} \,(\mathrm{mod}7) \Rightarrow 5555^{2} \equiv 2 \,(\mathrm{mod}7).$$

Paso 3

Deducimos de las expresiones anteriores que

$$2222^{5} + 5555^{2} \equiv 7 \,(\mathrm{mod}7).$$

Por lo tanto, el número $2222^{5} + 5555^{2}$ es múltiplo de 7.

JOYITA: b) *Se pide encontrar todos los números enteros positivos n tales que $3^n + 5^n$ es múltiplo de $3^{n-1} + 5^{n-1}$.*

SOLUCIÓN

Paso 1

Elijamos un número cualquiera n:
Se verifica que la expresión: $3^n + 5^n$ es mayor que el número $3.3^{n-1} + 3.5^{n-1}$

$$3^n + 5^n = 3.3^{n-1} + 5^n = 3.3^{n-1} + 5.5^{n-1} > 3.3^{n-1} + 3.5^{n-1} = 3(3^{n-1} + 5^{n-1})$$

Paso 2

Por otro lado: $3^n + 5^n$ es menor que $5.3^{n-1} + 5.5^{n-1}$

$$3.3^{n-1} + 5.5^{n-1} < 5.3^{n-1} + 5.5^{n-1} = 5(3^{n-1} + 5^{n-1})$$

Es decir

$$3.3^{n-1} + 3.5^{n-1} < 3^n + 5^n < 5.3^{n-1} + 5.\ 5^{n-1}$$
$$3(3^{n-1} + 5^{n-1}) < 3^n + 5^n < 5(3^{n-1} + 5^{n-1})$$

Por lo tanto, al tratarse de un número entero positivo se tiene que

$$3^n + 5^n = 4(3^{n-1} + 5^{n-1})\ 3.3^{n-1} + 5.5^{n-1} = 4(3^{n-1} + 5^{n-1}) = 4.3^{n-1} + 4.\ 5^{n-1}$$
$$3.3^{n-1} + 5.5^{n-1} = 4.3^{n-1} + 4.\ 5^{n-1} \Leftrightarrow 5^{n-1} = 3^{n-1}$$

Paso 3

De la expresión $5^{n-1} = 3^{n-1}$ podemos inferir que el único valor que lo cumples es $n=1$.
Para $n=1$ se tiene que $3^1 + 5^1 = 8$ es múltiplo de $3^0 + 5^0 = 1 + 1 = 2$ y se convierte en la única solución.

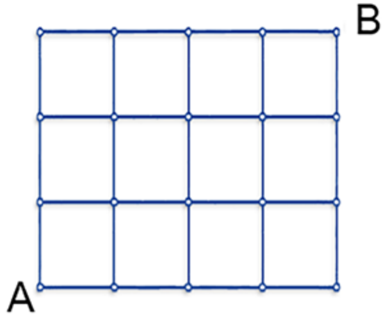
SAPERE AUDE, EJERCICIOS DE AQUÍ Y ALLÁ, PROPUESTAS.

Para hacer realidad lo que expresaba en el número anterior: "… *Desarrollar las habilidades matemáticas que poseen los alumnos y simultáneamente cubrir los objetivos más allá del curso. (Dichos objetivos rara vez mencionan a las habilidades, reduciéndose a la adquisición de conocimientos y manipulación de fórmulas para aplicaciones en problemas sencillos) ..., e …Impulsar a los estudiantes que tienen habilidades matemáticas e interés por aprender más profundamente esta ciencia...(sic)"*, propongo las cuatro joyitas que aparecen a continuación.

Propuesta 1: dos joyitas geométricas

a) *El ángulo A del triángulo isósceles ABC mide 2/5 de recto, siendo iguales sus ángulos B y C. La bisectriz de su ángulo C corta al lado opuesto en el punto D. Calcular las medidas de los ángulos del triángulo BCD. Expresar la medida* ***a*** *del lado BC en función de la medida* ***b*** *del lado AC, sin que en la expresión aparezcan razones trigonométricas***.**

b) *La figura adjunta muestra un plano con calles que delimitan 12 manzanas cuadradas.*



Una persona P va desde A hasta B y otra Q desde B hasta A. Ambas parten a la vez siguiendo caminos de longitud mínima con la misma velocidad constante. En cada punto con dos posibles direcciones a tomar, ambas tienen la misma probabilidad. Hallar la probabilidad de que se crucen.

Propuesta 2: dos joyitas numéricas

a) *Calcular la suma de los cuadrados de los cien primeros términos de una progresión aritmética, sabiendo que la suma de ellos vale -1, y que la suma de los términos de lugar par vale +1.*

b) *Hallar todos los números enteros positivos m y n para los que*

$$(m+1)^m = 2m^n + 3m + 1$$

NOTA: Las respuestas pueden enviarla a la dirección electrónica:
sapereaudethales@gmail.com

¿Cómo promover la alfabetización estadística y probabilística en contexto? Estrategias y recursos a partir de la COVID-19 para Educación Primaria

Ángel Alsina
Universidad de Girona
Claudia Vásquez
Pontificia Universidad Católica de Chile
Laura Muñiz-Rodríguez
Luis J. Rodríguez-Muñiz
Universidad de Oviedo

Resumen: *La alfabetización estadística y probabilística pueden ayudar a los ciudadanos a comprender y afrontar crisis mundiales como la ocasionada por la COVID-19. Desde este enfoque, en la primera parte se describen los conocimientos matemáticos importantes que debe movilizar el profesorado de Educación Primaria para desarrollar la alfabetización de los alumnos y, en la segunda parte, se presentan diversas experiencias contextualizadas con datos de la COVID-19. Se concluye que, mediante estas experiencias, los alumnos aprenden a reflexionar sobre sus propias acciones, considerando sus impactos sociales, culturales, económicos y ambientales actuales y futuros, contribuyendo a formar ciudadanos comprometidos con la sostenibilidad.*
Palabras clave: *alfabetización estadística y probabilística, conocimiento matemático para la enseñanza, enseñanza de las matemáticas en contexto, COVID-19, educación para la sostenibilidad, Educación Primaria.*

How to promote statistical and probabilistic literacy in context? Strategies and resources from COVID-19 for Primary Education

Abstract: *Statistical and probabilistic literacy can help citizens understand and face global crises like the one caused by COVID-19. From this perspective, the first part*

describes the important mathematical knowledge that primary school teachers must mobilize to develop student literacy and, in the second part, some contextualized experiences with data from COVID-19 are presented. It is concluded that, through these experiences, students can reflect on their own actions, considering their current and future social, cultural, economic and environmental impacts, thus contributing to training citizens committed to sustainability.
Key *words: statistical and probabilistic literacy, mathematical knowledge for teaching, mathematics education in context, COVID-19, education for sustainability, Primary Education.*

1. INTRODUCCIÓN

La sociedad contemporánea está altamente tecnificada y, como consecuencia, los ciudadanos recibimos diariamente una gran avalancha de datos a través de diferentes medios: audiovisuales, radiofónicos, impresos y, por supuesto, digitales. La principal finalidad de estos datos es informar a la ciudadanía, con el propósito de sacar conclusiones y tomar decisiones a partir de su correcta interpretación. Sin embargo, los datos también pueden ser proporcionados con otras finalidades e intereses como falsear la realidad, manipular a la población, esconder información, etc., ya que no existen garantías de que los datos sean siempre los más relevantes y tampoco es seguro que se comuniquen adecuadamente. Un claro ejemplo de ello es cómo se ha hecho llegar a la ciudadanía la gran cantidad de datos sociodemográficos, económicos, sanitarios y de movilidad derivados de la crisis mundial provocada por la COVID-19. Por ejemplo, para informar sobre el número de contagios, diversos países han contabilizado exclusivamente los casos testados con PCR (*Polymerase Chain Reaction*) u otras pruebas diagnósticas, sin considerar los casos asintomáticos o con sintomatología leve que no han necesitado hospitalización; asimismo, para informar del número de defunciones diarias, se ha tendido a contabilizar únicamente las defunciones en centros hospitalarios, si bien es cierto que, dependiendo del país, se ha ido modificando la forma de reportar el número de fallecimientos. Es evidente que los datos reales relativos tanto a la prevalencia de la pandemia como al número de defunciones totales harían aumentar mucho las cifras, y puede que a algunos gobiernos no les interese proporcionar esta información más ajustada a la realidad.

En este sentido, Alsina y Vásquez (2016) indican que es necesario que todos los ciudadanos dispongamos de recursos y estrategias a nuestro alcance para conocer la realidad, representarla e interpretarla críticamente. Esta es, precisamente, una de las principales funciones de la estadística y la probabilidad: promover que las personas tengan herramientas que les permitan tomar decisiones en situaciones en las que el análisis de datos y la incertidumbre son relevantes, para que, progresivamente, sean ciudadanos bien informados y consumidores inteligentes. Desde este prisma, Alsina (2017) señala tres argumentos para la incorporación de la estadística y la probabilidad en el currículo de matemáticas desde las primeras edades: 1) la importancia de garantizar una educación de alta calidad que se ajuste a los cambios sociales; 2) la importancia de las matemáticas en general, y de la estadística y la probabilidad en particular, en el desarrollo integral; y 3) la importancia de la alfabetización estadística y probabilística. De acuerdo con Alsina

(2016), esto implica que el profesorado disponga de un amplio abanico de conocimientos, tanto disciplinares como didácticos, que permitan alfabetizar estadística y probabilísticamente a los alumnos, en el sentido de que progresivamente puedan ser ciudadanos capaces de usar de forma comprensiva y eficaz los conocimientos aprendidos en la escuela en todas las situaciones de su vida cotidiana en las que dichos conocimientos son necesarios.

Desde este enfoque, este artículo se organiza en dos secciones: 1) en la primera parte se describen los conocimientos importantes de estadística y probabilidad que debería movilizar el profesorado de Educación Primaria para que los alumnos de esta etapa puedan tener acceso al conjunto de conocimientos que les permitan ser ciudadanos críticos en el análisis de datos y, a la vez, capaces de tomar decisiones en situaciones de incertidumbre, convirtiéndose así en personas alfabetizadas tanto estadística como probabilísticamente; 2) en la segunda parte se presentan diversas estrategias y recursos para trabajar estos conocimientos en contexto, a partir de datos de distinta naturaleza obtenidos de la COVID-19.

2. LA ESTADÍSTICA Y LA PROBABILIDAD EN EDUCACIÓN PRIMARIA: CONOCIMIENTOS IMPORTANTES PARA LA ALFABETIZACIÓN

La incorporación de la estadística y la probabilidad en el currículo es relativamente reciente. El *National Council of Teachers of Mathematics* incluyó “Datos y Azar” como área temática en *Curriculum and Evaluation Standard for School Mathematics* (NCTM, 1989), reforzando esta iniciativa en *Principles and Standards for School Mathematics* (NCTM, 2000), que contemplan que los programas de enseñanza deberían capacitar a los alumnos para aprender conocimientos relacionados con el análisis de datos y la probabilidad a partir de la etapa *Pre-K-Grade 2* en la terminología americana (3-8 años) y debe tener una continuidad a lo largo de toda la escolaridad. Esta tendencia se ha reflejado progresivamente en las orientaciones curriculares de muchos países, que han incorporado la estadística y la probabilidad en los currículos de matemáticas para promover un enfoque experimental que proporcione una experiencia estocástica desde las primeras edades. En España, por ejemplo, es a partir del año 1990 del siglo XX cuando se introduce la estadística en el currículo de Matemáticas de Educación Primaria, mientras que los conocimientos sobre probabilidad no aparecen explícitamente hasta el año 2006 (Alsina, 2016).

Una enseñanza eficaz que promueva la alfabetización estadística y probabilística en Educación Primaria requiere, como se ha indicado, profesorado bien preparado, es decir, profesorado que junto con conocer qué contenidos enseñar y cómo enseñarlos, conozca también la naturaleza matemática de estos contenidos. Por esta razón, en esta sección se van a exponer de forma sintética los principales conocimientos a partir de una síntesis de documentos preliminares en los que se describen de forma exhaustiva los fundamentos matemáticos de la estadística y la probabilidad referentes a los fenómenos, significados, representación y formalización de las propiedades, así como una propuesta de secuenciación de contenidos por niveles (Alsina, 2018, 2019).

2.1. Conocimientos importantes de estadística

La estadística es una ciencia, método, técnicas y operaciones de análisis matemático que permiten estudiar numéricamente, con la máxima precisión, los fenómenos colectivos incompletamente conocidos. Desde este enfoque, los conocimientos estadísticos correspondientes a la etapa de Educación Primaria pueden organizarse en cuatro bloques secuenciales: 1) la recogida de datos; 2) la organización de datos; 3) la representación de datos; y 4) la interpretación de datos. Estos bloques se vinculan con el ciclo de investigación estadística (Wild y Pfannkuch, 1999) (Figura 1).

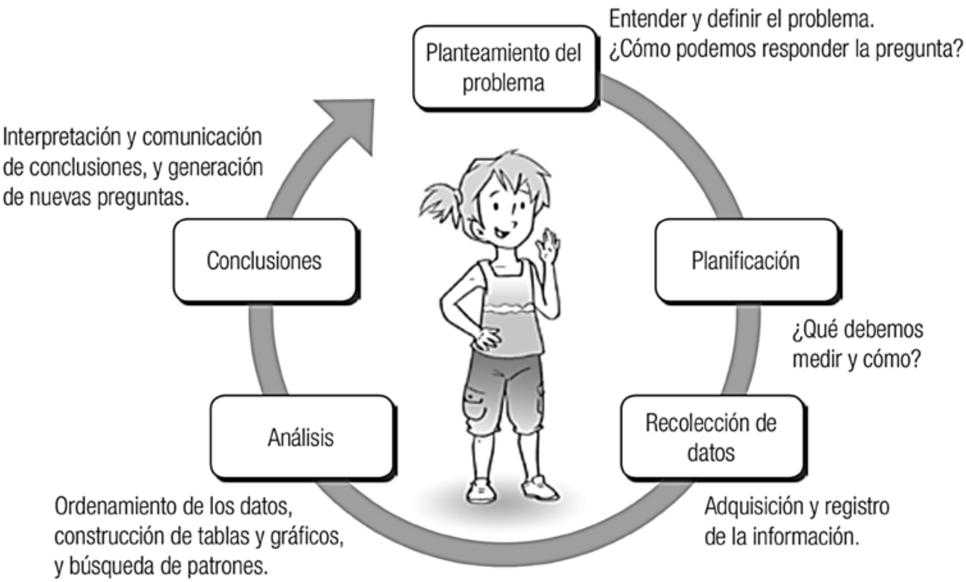


Figura 1. Ciclo de investigación estadística. Fuente: Recursos para la formación inicial de profesores de Educación Básica (Araneda, Chandía y Sorto, 2013, p. 17).

La recogida de datos

Los estudios estadísticos consisten en recoger datos de una población, que es el conjunto total de elementos (o individuos) que son de interés para realizar el análisis. Hay dos grandes tipos de estudios: censo, cuando se realiza un estudio sobre la totalidad de una población; muestra, cuando se realiza un estudio con una parte de la población. En este caso, los resultados pueden generalizarse a la población a través de inferencias estadísticas.

Los elementos a partir de los cuales se hacen estudios estadísticos pueden ser personas, animales, objetos de diferentes tipos (vehículos, alimentos, etc.), o incluso características físicas de los objetos (color, peso, etc.). Cada una de las características o atributos de estos elementos se denomina variable estadística y son de diferente índole

(Figura 2): a) cualitativas, que se refieren a elementos no numéricos, es decir, cualidades o atributos que no pueden medirse con números; a su vez, pueden ser nominales (orden irrelevante) u ordinales (categorías ordenables); y b) cuantitativas, que se refieren a características que pueden tomar valores numéricos; a su vez, pueden ser discretas (cantidades numéricas aisladas) o continuas (cuando toman todos los valores de un cierto intervalo).

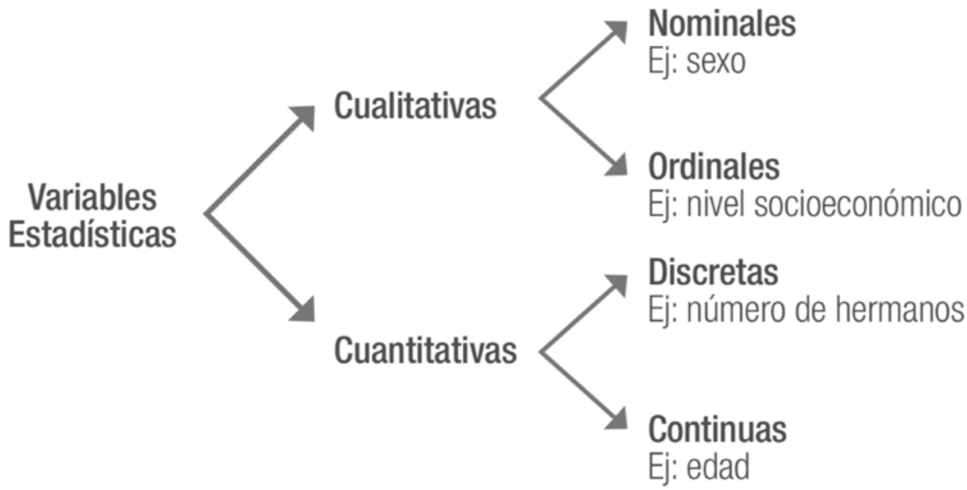


Figura 2. Clasificación de las variables estadísticas. Fuente: Recursos para la formación inicial de profesores de Educación Básica (Araneda, Chandía y Sorto, 2013, p. 49).

La organización de datos

Con el propósito de resumir, organizar y comunicar la información obtenida a partir de los datos que se obtienen de una determinada variable, utilizamos tablas para ayudar a responder la pregunta de investigación. Las tablas se componen de filas y columnas de celdas, integrando dos estructuras: 1) registro: es cada una de las filas en que se divide la tabla; 2) campo: es cada una de las columnas que forman la tabla.

En Educación Primaria se pueden utilizar, inicialmente, tablas de recuento en las que se utilizan marcas de conteo como palos, cruces, etc., o incluso dibujos (Figura 3).

Una vez procesada la información recogida, estas tablas se convierten en tablas de frecuencia, pasando de las marcas de recuento al número de conteo, que permite profundizar en el significado de la frecuencia. Hay dos tipos de frecuencias: a) absoluta, que se refiere al número de datos de cada valor de la variable; b) relativa (para cada valor de la variable), que indica la proporción del valor de cada variable con respecto al total de datos, y se obtiene dividiendo la frecuencia absoluta entre el número total de datos de cada valor (multiplicando este dato por 100 se obtiene el porcentaje).

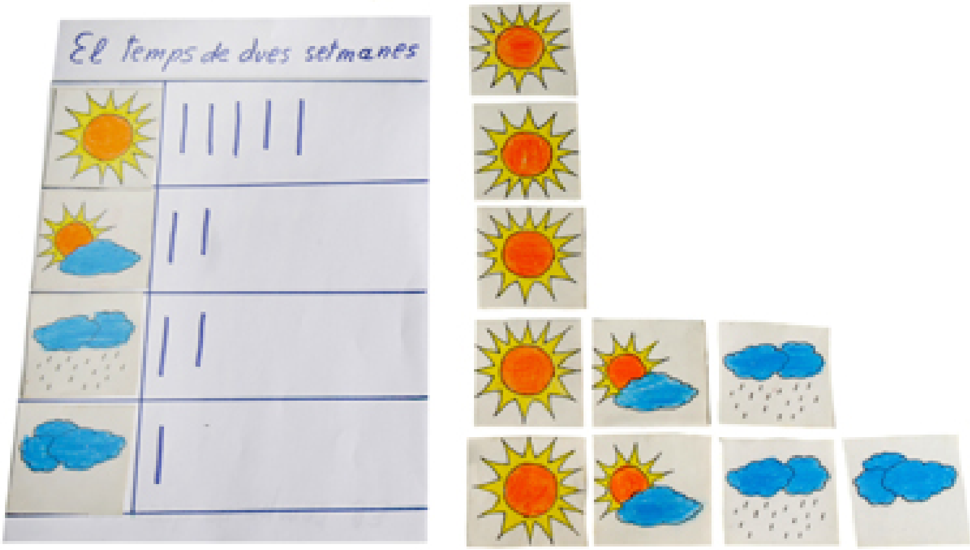


Figura 3. Tabla de recuento con palos y dibujos respectivamente. Fuente: Gabinet de Materials i de Recerca per la Matemàtica a l'Escola (GAMAR).

La distribución es otro conocimiento estadístico importante vinculado a las nociones de frecuencia absoluta y relativa. Se refiere al conjunto de datos o de valores cuyas frecuencias se indican de forma absoluta o de forma relativa (a través de porcentajes), según una escala determinada.

En síntesis, pues, y en lo que se refiere a la organización de datos, se deberían ofrecer ayudas a los alumnos para que puedan ordenar los datos en tablas que faciliten el recuento de cada uno de los valores de la variable y, de este modo, llegar a expresar la distribución de los datos de forma absoluta, es decir, a partir de las frecuencias absolutas de cada valor.

La representación de datos

Además de organizar los datos en tablas de frecuencias, también es posible organizarlos y presentarlos visualmente, por medio de representaciones gráficas. Existen diferentes tipos de gráficos que dependen del tipo de variable que representan, y del grado de dificultad en función del conocimiento numérico implicado:

Gráficos concretos o reales: se representan los datos por medio de objetos concretos conocidos por los alumnos. Estos objetos se utilizan para representar la frecuencia de cada categoría de una variable. Este tipo de gráficos permite que los alumnos manipulen los objetos y visualicen la frecuencia para cada categoría (Figura 4).

Pictograma: corresponde a una representación gráfica más abstracta de un gráfico concreto o real, donde las frecuencias son representadas gráficamente a través de figuras (Figura 5). Un pictograma corresponde a un paso intermedio desde las representaciones

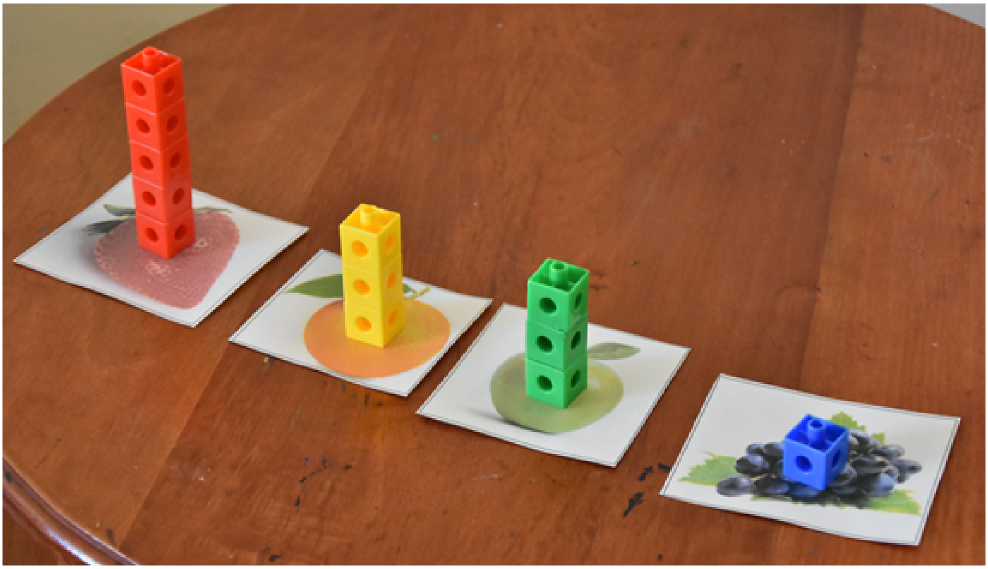


Figura 4. Representación por medio de gráficos concretos o reales de la preferencia por cada fruta. Fuente: Elaboración propia.

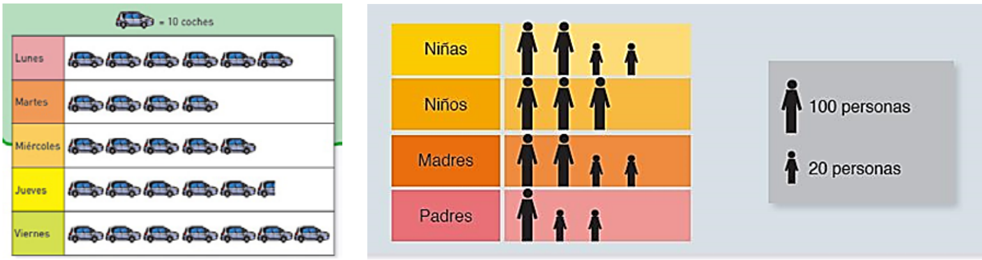


Figura 5. Pictogramas con una única imagen (igual valor) y con imágenes distintas (distinto valor según forma y/o tamaño). Fuente: Matepractic8/6 (Alsina, 2015, p. 12/p.22).

concretas a representaciones abstractas, como los gráficos de barras. Un pictograma usa imágenes o símbolos para representar conjuntos de datos. Las imágenes o símbolos toman valores distintos según su tamaño.

Gráfico de barras: corresponde a una representación más abstracta que un pictograma, donde se representan los datos de cada valor de una variable en el eje horizontal, asociados a su frecuencia absoluta en el eje vertical (Figura 6). Hay gráficos de barras simples (para una variable) o gráficos de barras agrupadas (para dos variables, mostrando la asociación que puede existir entre ellas). Se utilizan para representar datos de variables cualitativas y variables cuantitativas discretas.

Gráfico circular o de sectores: se utilizan para representar las frecuencias relativas porcentuales de cada categoría de la variable de interés. Los datos se representan mediante sectores de un círculo, cuyos ángulos o áreas son proporcionales a las frecuencias

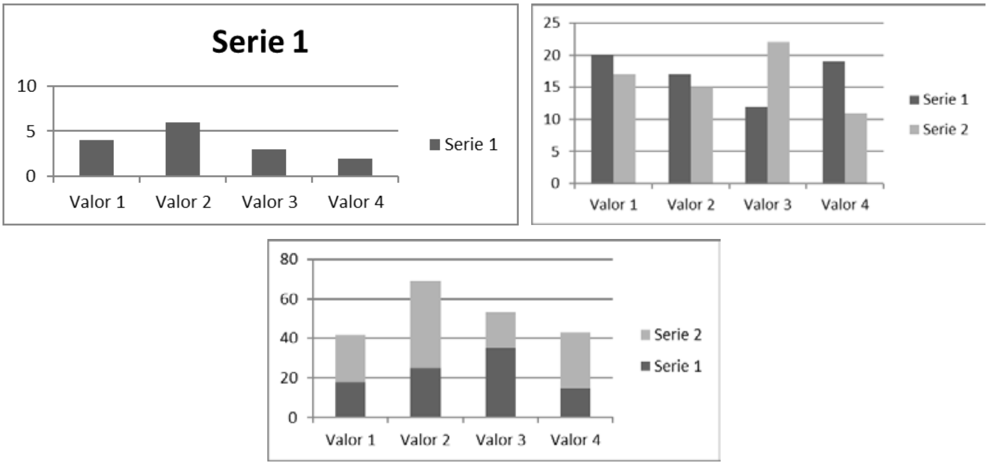


Figura 6. Simple, con un intervalo frecuencial de 5; agrupadas/doble, con un intervalo frecuencial de 5; y agrupadas/apilado, con un intervalo frecuencial de 20. Fuente: Elaboración propia.

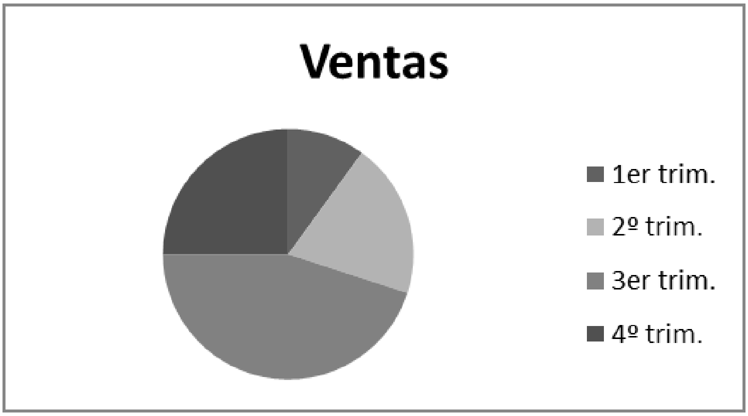


Figura 7. Gráfico de sectores. Fuente: Elaboración propia.

de las categorías que representan (Figura 7). Por esta razón, los datos representados – que pueden ser de variables tanto cualitativas como cuantitativas – se expresan a través de porcentajes.

Histograma: es similar al gráfico de barras para variables cualitativas, pero se utiliza para representar datos correspondientes a variables cuantitativas de tipo continuo, es decir, datos que pueden tomar valores no enteros (Figura 8). Es por esta razón que cuando tratamos con variables cuantitativas, juntamos las barras llenando con ellas toda la escala horizontal, pues se considera a esta escala como una representación de la recta real.

Gráfico de líneas (o de tendencias): corresponde a una representación gráfica de variables cuantitativas, es muy parecido a los anteriores, pero el valor (o valores) de cada variable se representa con puntos (que se unen a través de líneas poligonales) en lugar de

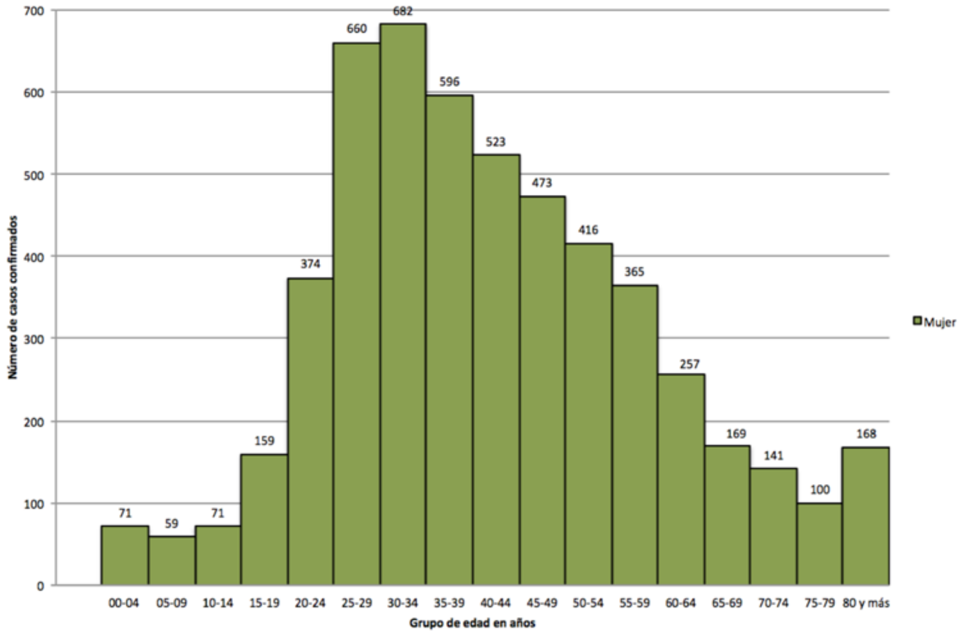


Figura 8. Histograma. Fuente: elaboración propia.

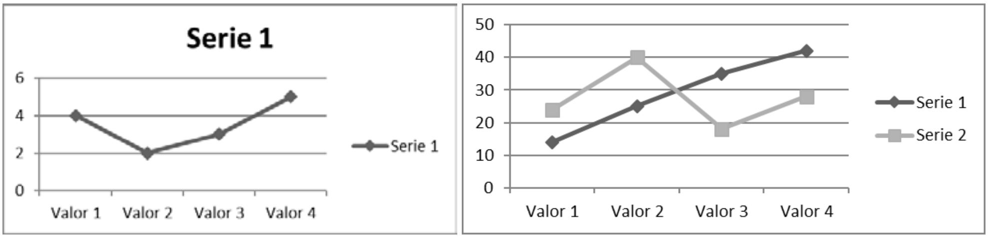


Figura 9. Gráfico de línea y línea doble, con un intervalo frecuencial de 2 y de 10 respectivamente. Fuente: Elaboración propia.

barras (Figura 9). Se utiliza para estudiar la evolución de las observaciones, usualmente, a través del tiempo.

Otras representaciones de datos: existen otros gráficos que no suelen aparecer en los currículos de Educación Primaria, pero que están muy presentes en la sociedad actual y a los cuales están muy expuestos los alumnos tanto en medios de comunicación como en redes sociales o, incluso, en videojuegos. Algunos de ellos combinan información estadística con otro tipo de infografía, basada en cartografía, planos de situación o jerarquías. Podemos mencionar la coropleta o mapa coroplético (Figura 10) que asigna a cada región de un mapa político una escala de tonos de un color (o de dos colores, si se representan dos variables simultáneamente) de modo que el tono de la región es más oscuro cuantas más observaciones se localicen en esa región. La información vinculada a mapas también se representa en ocasiones a través del llamado mapa de burbujas

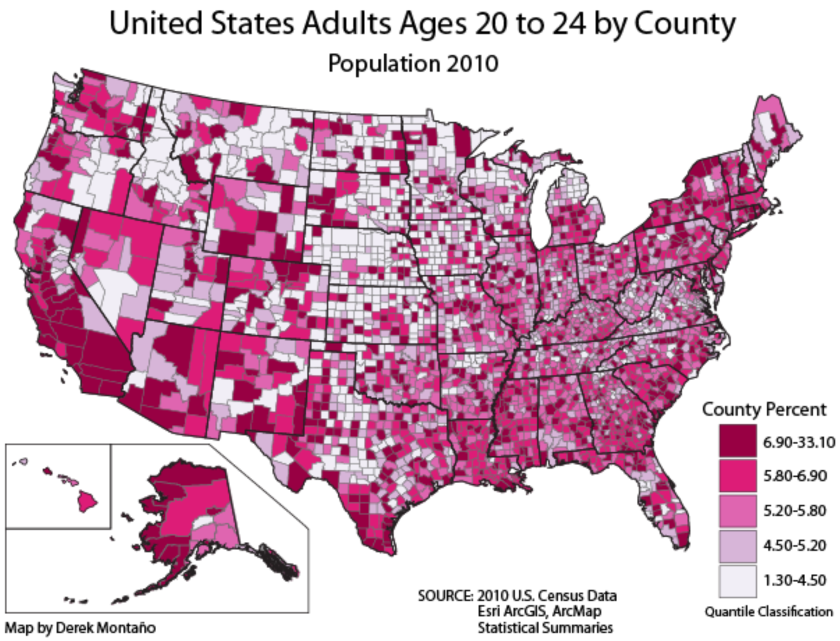


Figura 10. Coropleta que representa el porcentaje de personas de 20-24 años en los distintos condados de EEUU. Fuente: Wikimedia Commons.

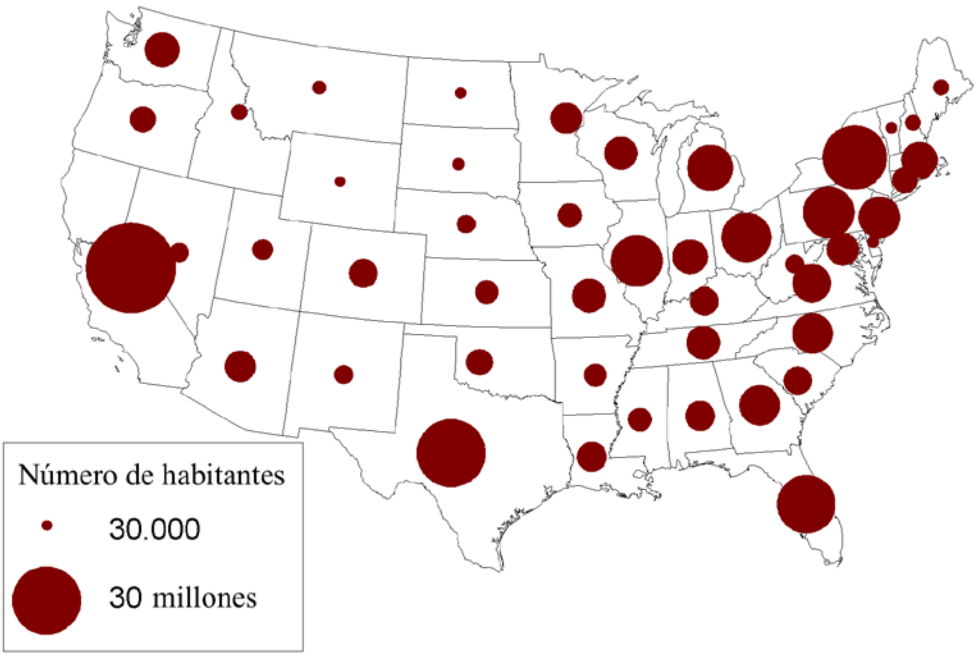


Figura 11. Mapa de burbujas que representa el número habitantes por estado en EEUU. Fuente: Elaboración propia a partir de Wikimedia Commons.

(Figura 11), donde se asocia a cada región una burbuja o círculo de tamaño proporcional a su frecuencia. Estos dos tipos de gráficos se pueden combinar de distintas maneras dando lugar a coropletas con burbujas, mallas de burbujas, etc. (Figura 12).

Por último, mencionamos un gráfico que aparece con frecuencia en los medios de comunicación para visualizar el contenido de discursos o estudios, y que se denomina nube de términos. En él, cada palabra aparece representada con un tamaño proporcional a la frecuencia con la que aparece en el contexto analizado. Por ejemplo, en la Figura 13 se muestran los términos que más aparecen en el primer capítulo de "Don Quijote de La Mancha".

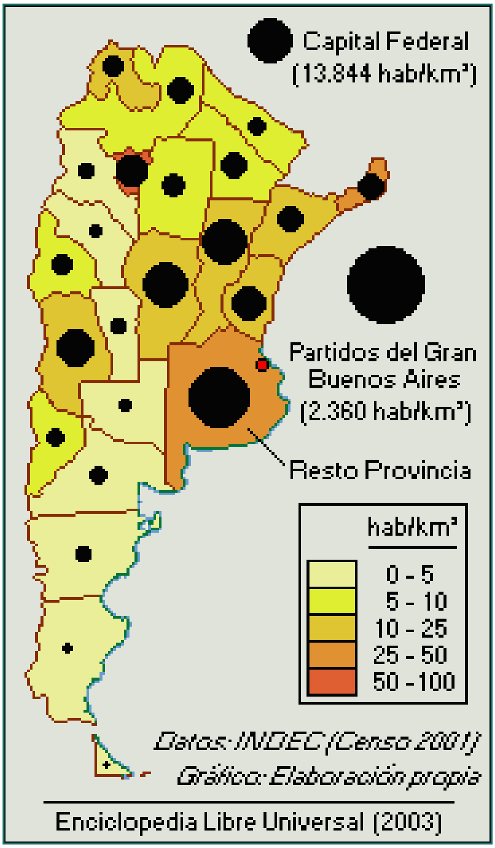


Figura 12. Mapa de burbujas de la población de Argentina por provincias, combinado con una coropleta de densidad de población. Fuente: Wikimedia Commons.

La interpretación de datos

Si bien es cierto que la organización de datos en tablas y la representación a través de gráficos permite ya una cierta interpretación al poder compararse las frecuencias, la estadística ofrece técnicas específicas – llamadas medidas de tendencia central y características de dispersión – para poder estudiar e interpretar numéricamente, con la máxima precisión, los fenómenos colectivos incompletamente conocidos.

Las principales medidas de tendencia central (denominadas también características de posición central) son la media aritmética, la moda y la mediana: la media aritmética se obtiene dividiendo la suma de todos los casos por el número total de casos; la moda es el valor que tiene la frecuencia absoluta más elevada (es la única medida de tendencia central que se puede usar para variables cualitativas, además de las cuantitativas); y, finalmente, la mediana es el valor central de una muestra ordenada de datos. Hay dos casos posibles: a) cuando se trata de un conjunto impar de datos numéricos ordenados, la mediana es el valor que ocupa el lugar central; b) cuando se trata de un conjunto par de datos numéricos ordenados, la mediana es la media aritmética de los dos valores que ocupan el lugar central.

Las características de dispersión proporcionan datos comparativos respecto a los valores de tendencia central. Las principales características de dispersión son el rango, que se refiere a la diferencia entre el valor máximo y el mínimo de un conjunto de datos, por

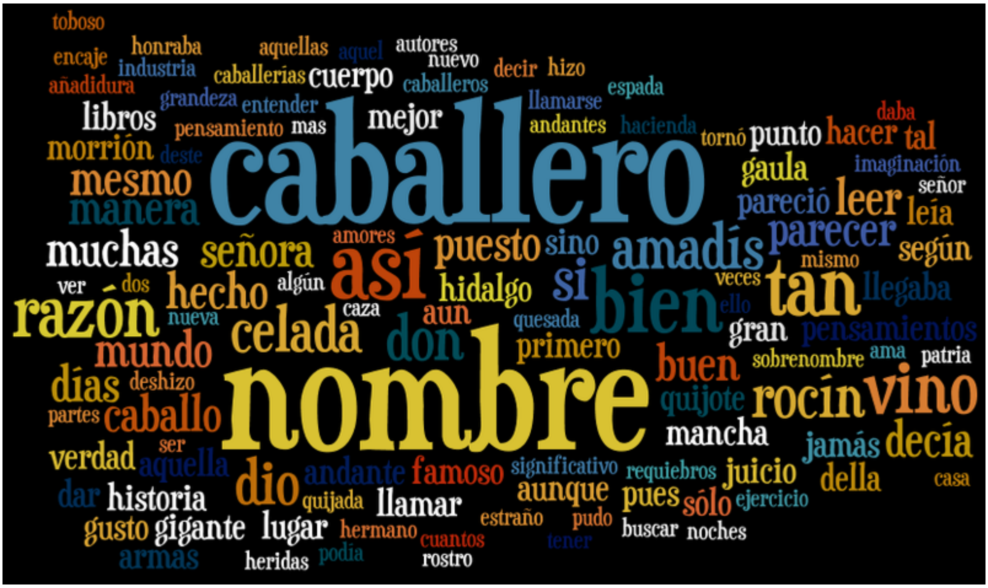


Figura 13. Nube de términos con las palabras del primer capítulo de “Don Quijote de La Mancha”. Fuente: Wikimedia Commons.

lo que es poco representativo de la dispersión; y la desviación típica, denominada también desviación estándar, que es la medida de dispersión más usada pero que no se presenta todavía en Educación Primaria.

Debe tenerse presente que no en todos los estudios estadísticos es relevante conocer todas estas medidas de tendencia central o de dispersión, y para ello es necesario aplicar el razonamiento estadístico. En este sentido, Batanero (2001) señala que el análisis estadístico de datos no es un proceso estrictamente mecánico, sino una forma de pensar que puede ayudar a resolver problemas en las ciencias y en la vida cotidiana. Así, por ejemplo, es pertinente calcular el consumo medio de electricidad de un hogar durante un año, pero no es relevante calcular la media aritmética de los números de teléfono de los miembros de una familia puesto que no aporta ningún dato relevante.

2.2. Conocimientos importantes de probabilidad

La probabilidad puede definirse, de forma sencilla, como la medida de la posibilidad de ocurrencia de los sucesos. El desarrollo histórico-epistemológico de la probabilidad ha dado lugar a la coexistencia de distintos significados (Figura 14) que cobran gran relevancia en el contexto de la matemática escolar (Batanero, 2005).

De acuerdo con Vásquez y Alsina (2019a, 2019b), en Educación Primaria pueden abordarse todos los significados descritos en la Figura 14, salvo el axiomático, que por su naturaleza corresponde ya a etapas superiores.

Figura 14. Significados de la probabilidad en el contexto de la matemática escolar. Fuente: Vásquez y Alsina (2015, p. 443).

Significado Intuitivo

Se trabaja principalmente en los primeros niveles de Educación Primaria a partir de situaciones cotidianas vinculadas con el uso de términos estocásticos y con la expresión de grados de creencia para la ocurrencia de sucesos, a partir de una escala cualitativa que va desde lo seguro a lo imposible. En el marco de este significado, debe hacerse hincapié también en la imprevisibilidad y variabilidad de sucesos y sus resultados posibles, junto con la exploración de fenómenos aleatorios diferenciándolos de los deterministas: el lanzamiento de un dado, por ejemplo, es un fenómeno aleatorio ya que no se puede predecir el resultado (si se puede predecir, el experimento es determinista).

Significado Laplaciano (o Clásico)

Se empieza a abordar en los últimos niveles de Educación Primaria (10-12 años) a partir de situaciones centradas en el cálculo de probabilidades para determinar la probabilidad de ocurrencia teórica a partir de los datos observados en un experimento aleatorio. Incluye también la representación de probabilidades de ocurrencia por medio de una escala cuantitativa cuyos valores fluctúan entre 0 y 1 (Figura 15), junto con la comprensión de conceptos y propiedades tales como espacio muestral, que es el conjunto de los resultados posibles de un experimento aleatorio, que se expresa con E o Ω. En el caso del lanzamiento de un dado, por ejemplo, el espacio muestral es E

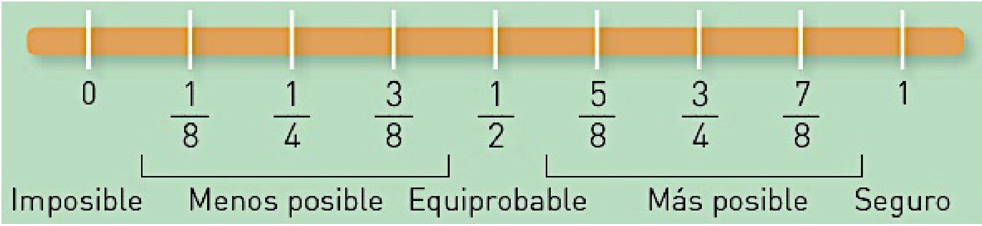


Figura 15. Cuantificación de la posibilidad de ocurrencia en una escala de 0 a 1. Fuente: Matepractic12 (Alsina, 2015, p. 12).

= {1, 2, 3, 4, 5, 6}. Otros conceptos que deben ser trabajados dentro de este significado de la probabilidad son los casos favorables y no favorables, la noción de juego justo, la probabilidad de ocurrencia como medida de la incerteza, los sucesos simples equiprobables, es decir, con la misma posibilidad de ocurrencia y, finalmente, la Regla de Laplace.

Significado Frecuencial

Puede trabajarse a lo largo de toda la etapa de Educación Primaria a partir de predicciones de los datos observados en un experimento aleatorio, ya sea de forma manual y/o utilizando *software*, además del uso de representaciones gráficas y tabulares. Desde este prisma, debe hacerse hincapié en la independencia de sucesos, la estabilización de frecuencias y el rango de la frecuencia relativa de un suceso (entre 0 y 1), junto con el uso de términos y expresiones verbales específicas de las probabilidades como población, valor estimado, simulación, probabilidad teórica y experimental, tendencias, frecuencias, proporción, etc.

Significado Subjetivo

Este significado puede empezar a abordarse a partir de los niveles medios de Educación Primaria (9-12 años) a partir de sucesos inciertos en los que la probabilidad de ocurrencia puede verse afectada (cambiar) a partir de la información de la que se disponga (se ajustan las asignaciones previas incorporando la nueva información disponible), valorando dicha probabilidad a partir de experiencias personales. Desde este prisma, al igual que en el significado intuitivo, se requiere el uso de términos y expresiones verbales comunes vinculadas al lenguaje probabilístico.

3. ESTRATEGIAS Y RECURSOS CONTEXTUALIZADOS EN LA COVID-19 PARA PROMOVER LA ALFABETIZACIÓN ESTADÍSTICA Y PROBABILÍSTICA EN EDUCACIÓN PRIMARIA

El conjunto de conocimientos de estadística, probabilidad y combinatoria descritos en la primera sección tienen como finalidad, como se ha indicado, que los alumnos de Educación Primaria adquieran conocimientos imprescindibles para ser ciudadanos críticos en el análisis de datos y, a la vez, capaces de tomar decisiones en situaciones de incertidumbre, convirtiéndose así en personas alfabetizadas estadística y probabilísticamente.

Para interiorizar estos conocimientos, el profesorado no debería usar datos precocinados (tomados, por ejemplo, del libro de texto) y plantear problemas sobre algo que no es problemático para los alumnos, omitiendo todas las dificultades derivadas de los procesos de recolección o muestreo (Muñiz-Rodríguez, Rodríguez-Muñiz y Alsina, 2020). Por el contrario, estos autores preconizan que deberían usarse datos reales, significativos y motivadores para los alumnos, en la línea de Hahn (2015). A su vez, este planteamiento se vincula directamente con los enfoques de aprendizaje basados en proyectos (Batanero y Díaz, 2011), que permiten tomar decisiones sobre cuándo, dónde y cómo muestrear y sobre cómo recopilar y organizar los datos.

Desde este prisma, y considerando que la COVID-19 ha generado un enorme interés a los alumnos, se presenta una selección de experiencias para que los alumnos de 6 a 12 años utilicen conocimientos de estadística y probabilidad que les ayuden a interpretar datos reales vinculados a la comprensión de la crisis sanitaria, económica y social provocada por esta pandemia, y al mismo tiempo reflexionen críticamente sobre ellos, así como sobre el rol que cada uno tiene en la comunidad local y en la sociedad (Vásquez y Rojas, en prensa).

3.1. Experiencias de estadística en el contexto de la COVID-19

Experiencia 1: ¿Qué actividades hemos hecho durante el confinamiento?

Nivel: 6-8 años.

Contenidos implícitos: Descripción verbal, obtención de información cualitativa y cuantitativa.

Utilización de técnicas elementales para la recogida y ordenación de datos en contextos familiares y cercanos.

Interpretación de elementos significativos de gráficos sencillos relativos a fenómenos cercanos. Iniciación a su representación.

Descripción de la actividad:
Se comienza preguntando a los alumnos qué actividades han llevado a cabo durante el tiempo de confinamiento. Es una conversación que saldrá de manera espontánea, y posiblemente recurrente, durante los primeros días de reencuentro. Se debe orientar la conversación para que vayan surgiendo, o planteándose directamente por el profesor,

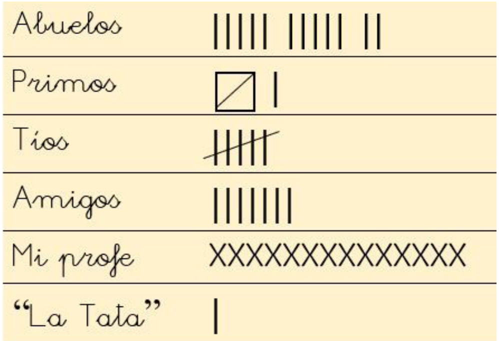


Figura 16. Tabla de recuento en el estudio de la pregunta "¿con quién has hablado por videoconferencia durante el confinamiento?". Fuente: Elaboración propia.

distintas actividades susceptibles de favorecer un recuento. Por ejemplo: ¿cuántas veces hacías ejercicio al día? ¿Con qué personas has hablado por videoconferencia? ¿Cuántas veces salías de casa? ¿A qué hora hacías el paseo, cuando se pudo comenzar a pasear? De este modo, se puede hacer notar la diferente naturaleza (cualitativa o cuantitativa) de unas respuestas frente a otras. Así, si preguntamos por las personas con quienes han tenido videoconferencias, saldrán respuestas como: abuelos, otros familiares, amigos, etc. Ir tomando nota de estos datos nos va a generar una tabla de recuento, que podemos utilizar para reflexionar acerca de cómo organizar la información.

Es muy importante a estas edades llevar a cabo una correcta secuencia de recogida y organización de los datos, de tal modo que se favorezca el recuento. A este respecto, son muy importantes las marcas de conteo que se utilicen (cruces, palitos, puntos; agrupadas o no; si son agrupadas con qué unidad base: 5, 10, etc.) y cómo se dispongan físicamente esas marcas (manteniendo orden mediante una tabla vertical u horizontal). También es muy importante determinar cuántas posibles respuestas vamos a admitir a cada niño, ya que esto definirá un estudio u otro. Así, podemos elegir, por ejemplo, entre considerar solamente la persona con la que ha hablado más veces durante todo el encierro, o considerar todas las personas diferentes con las que han hablado. Cuando se trabaje con variables cualitativas, es conveniente decidir mediante una discusión guiada con el alumnado cómo categorizar distintas respuestas: pueden salir nombres de personas cuya relación con el alumno no esté clara o no sea fácil de encuadrar en las categorías que hayan ido apareciendo con anterioridad.

Esta discusión nos permite ir tomando decisiones y buscando consensos a la hora de recoger y organizar la información, y resulta idónea puesto que los alumnos se enfrentan a las primeras dudas que surgen en cualquier proceso estadístico. En la Figura 16 vemos un ejemplo de posibilidades que se pueden dar al trabajar en equipo: distintas formas de hacer el recuento (en unidades de 5 agrupadas de distinta manera, en unidades sin agrupar), cómo ordenar los datos en una tabla de recuento (podría ser por orden de aparición, por orden alfabético, reordenar de mayor a menor frecuencia una vez finalizado el recuento, etc.) e incluso una persona que no sabemos dónde encaja ("la Tata").

Una discusión similar respecto a una variable cuantitativa como, por ejemplo, ¿cuántas veces salías de casa al día?, nos permitirá comparar la naturaleza numérica de las respuestas frente a la cualitativa de la pregunta anterior. Manejar observaciones cuantitativas nos permite, además, organizar los resultados del recuento mediante el orden numérico, algo que en la variable cualitativa no podíamos hacer.

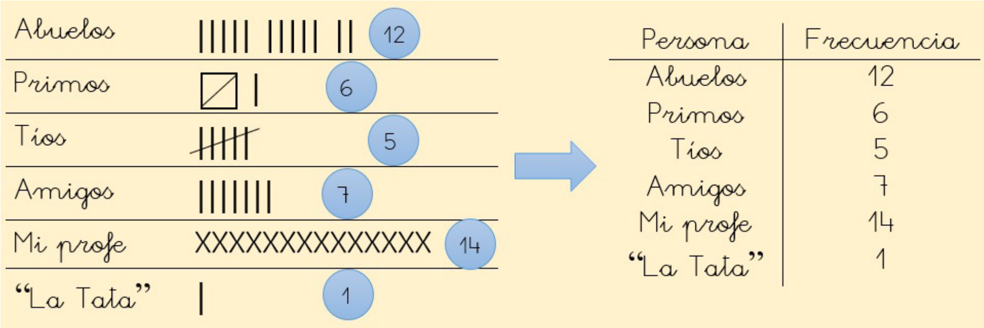


Figura 17. Transformación de la tabla de recuento en una tabla de frecuencia. Fuente: Elaboración propia.

A partir de la información recogida en las tablas de recuento, podemos procesar la información y convertir estas en tablas de frecuencia, pasando de las marcas de recuento al número de conteo, de este modo, reflexionamos sobre el significado de la frecuencia (absoluta, en este caso) como el número de veces que una observación se ha repetido. En la Figura 17 se observa la transformación de la tabla de recuento de la Figura 16 a la tabla de frecuencia y se puede apreciar cómo las marcas de recuento agrupadas favorecen la suma total frente a las marcas desagrupadas.

Experiencia 2: ¿Cómo se entienden mejor los datos?

Nivel: 8-10 años.

Contenidos implícitos:

Interpretación y descripción verbal de elementos significativos de diferentes tipos de gráficos sencillos relativos a fenómenos familiares.

Gráficos de barras, gráficos de líneas y pictogramas. Utilización de los mismos para la representación de datos.

Descripción de la actividad:

En esta actividad vamos a valorar la idoneidad de diferentes tipos de gráficos para representar diferentes tipos de datos. Comenzamos mostrando a los alumnos la Figura 18. En ella, los datos se presentan a través de un gráfico de líneas poligonal. Tras realizar algunas preguntas iniciales de comprobación respecto a qué variable se está representando (en este caso, dos series de datos: hospitalizados y hospitalizados en UCI), podemos plantear: ¿hay alguna otra forma de representar estos datos? El gráfico de barras es una respuesta inmediata. Ambas representaciones son válidas para una variable como esta, lo que ocurre es que, al tratarse de unos datos que representan la evolución temporal de dos variables, la línea poligonal permite captar con más naturalidad la evolución en el tiempo que se produce en el eje de abscisas.

Figura 18. Hospitalizados y hospitalizados en UCI en Castilla y León (5-V-2020). Fuente: https://analisis.datosabiertos.jcyl.es/pages/home/.

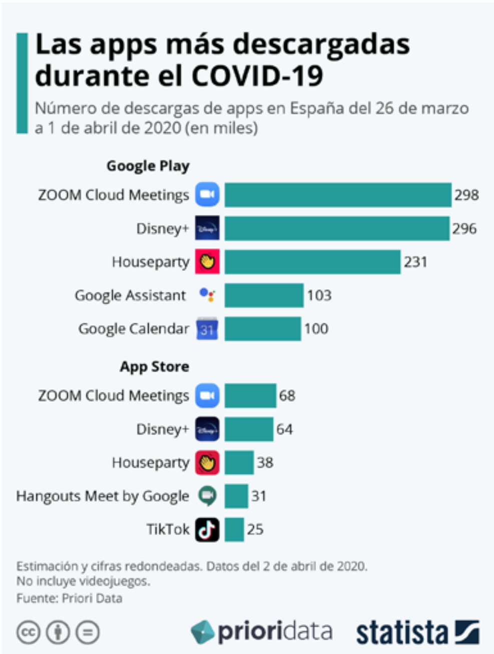


Figura 19. Apps más descargadas durante la COVID-19. Fuente: https://es.statista.com/.

A continuación, complementamos la actividad anterior comparando con otras gráficas de barras (Figura 19) donde la poligonal o bien no tendría sentido o no añadiría información relevante a las barras. Es decir, que un gráfico pueda ser usado para un tipo de datos, no significa que sea el más idóneo. Además, aquí aparece una enorme carga subjetiva, que puede ser interesante discutir con los alumnos: no tiene por qué haber una respuesta única a la pregunta de cuál es la "mejor" gráfica.

Por último, se plantean cuestiones relativas a distintos niveles de lectura en los gráficos. Así, comenzamos con preguntas que lleven a la identificación de un dato, por ejemplo: ¿cuántos hospitalizados hubo el día 20 de abril?, ¿cuántos miles de descargas tuvo Disney+ en Google Play? Después, pasamos a preguntas que requieran de comparación entre distintos datos, no sólo de una lectura puntual, como pueden ser: ¿en qué día hubo más hospitalizados?, ¿cuántas descargas tuvo la app menos descargada en App Store?, ¿tuvo Disney+ más descargas en Google Play o en App Store?

Dado que los alumnos han estado muy expuestos a esta información durante la pandemia, podríamos incluso plantear cuestiones que quizá excedan los niveles de lectura adecuados para esta edad, pero que se podrían responder a partir de la información acumulada durante la crisis. Por ejemplo: ¿por qué desde comienzos de abril desciende el número de hospitalizados? La respuesta, obviamente, está relacionada con la propia experiencia del confinamiento.

Conviene señalar la importancia de conocer el contexto de los alumnos del grupo con el que se realiza la actividad para evitar preguntas que puedan resultar traumáticas por la vivencia personal.

Experiencia 3: ¿Cuánta información nos da una gráfica?

Nivel: 10-12 años.

Contenidos implícitos:

Interpretación y descripción verbal de elementos significativos de diferentes tipos de gráficos sencillos relativos a fenómenos familiares.

Histogramas, pirámides de población.

Descripción de la actividad:

Se presenta una pirámide de población con los casos de COVID-19 confirmados en España, ordenados por sexo y grupos de edad (Figura 20). La pirámide de población es una gráfica creada a partir de dos histogramas adyacentes que representan la distribución de la misma característica en hombres y mujeres de una misma población.

La actividad consiste en plantear preguntas de distinto nivel de profundidad sobre la información que contiene la gráfica. Comenzamos con la identificación de la información principal del gráfico: ¿qué variables se están representando?, ¿cómo son sus valores?

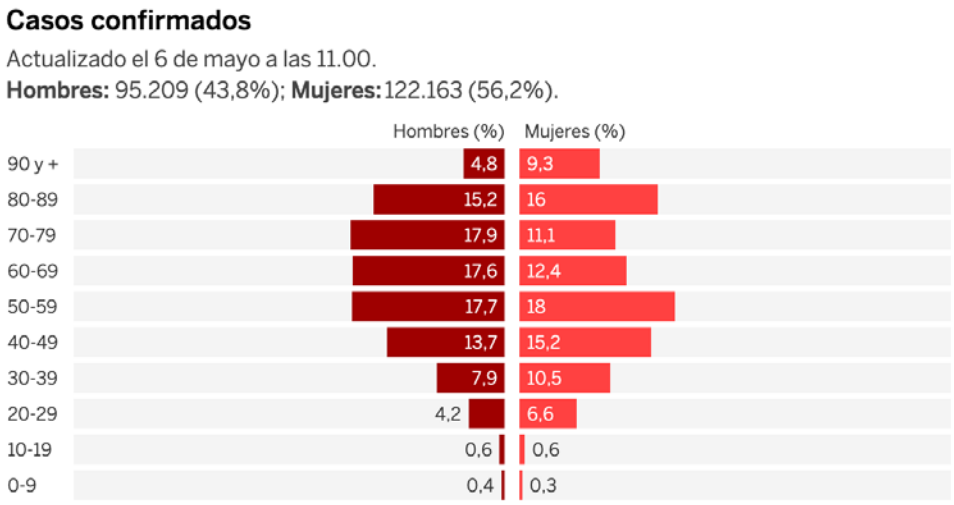


Figura 20. Casos confirmados de COVID-19 en España. Fuente: www.elpais.es.

A continuación, se plantea la identificación de elementos aislados, por ejemplo: ¿qué porcentaje de los afectados suponen los hombres entre 40-49 años? En algunos casos, esta identificación puede requerir un cálculo adicional, como ocurre si preguntamos: ¿cuántas mujeres afectadas hay entre 50-59 años?, para cuya respuesta es necesario relacionar el porcentaje que ofrece la gráfica con el total de mujeres que se proporciona en el encabezado.

Un siguiente nivel de complejidad se alcanza con preguntas que requieran la realización de comparaciones entre los datos para obtener la respuesta. Por ejemplo: ¿qué rango de edad concentra más mujeres afectadas?, o que requieran integrar la información de las dos partes de la pirámide de población, como, por ejemplo: si consideramos conjuntamente hombres y mujeres ¿qué rango de edad concentra más afectados?

Adicionalmente se pueden plantear cálculos relativos a parámetros estadísticos como la media, aunque es conveniente tener en cuenta que el cálculo de la media en datos agrupados en intervalos (cuando no se dispone de los datos originales) pasa por sustituir cada intervalo por su valor medio. Por ello, podemos plantear cuestiones preliminares como: para calcular la edad media de los hombres afectados, ¿qué tendrías que tener en cuenta? ¿Sabrías calcular la edad media del conjunto de afectados, sean hombres o mujeres? Una cuestión que puede surgir, ya que el alumnado aún no ha adquirido el concepto matemático de intervalo, es cómo calcular ese valor medio de cada intervalo. Además, en este caso concreto, debemos tener en cuenta que las edades, aunque están agrupadas, dan saltos de valor entero: se pasa de 40-49 a 50-59. Por ello, el intervalo 40-49 tiene como valor medio 45 y no 44.5, que sería el valor que se obtendría al calcular (40+49)/2. Es importante matizar y precisar estas cuestiones para no generar falsas concepciones acerca del valor medio de un intervalo.

En una siguiente etapa deberíamos plantear cuestiones que requieran ir más allá de reconocer o calcular valores sobre el gráfico, por ejemplo: a la vista de estos datos ¿crees que habría grandes diferencias si los rangos de edad se agrupasen de 5 en 5 años?, ¿qué otras representaciones gráficas admiten estos datos?, ¿consideras que serían más idóneas o menos? ¿por qué?

Por último, y en función del desarrollo de la sesión, de nuevo se nos plantea la posibilidad de realizar preguntas que requieran una valoración o un juicio razonado a partir de la información proporcionada. En este caso, a partir de la gráfica podríamos lanzar la pregunta: ¿los datos de la gráfica representan a todas las personas infectadas por COVID-19 en España? Los alumnos han estado expuestos a información sobre la diferencia entre estar contagiado por el virus y tener un diagnóstico de ese contagio. Se ha hablado con frecuencia de las personas asintomáticas, se ha discutido sobre la pertinencia o no de hacer pruebas masivas, etc., por lo tanto, consideramos que una pregunta de valoración como la que planteamos podría ser llevada a cabo en esta etapa sin grandes dificultades.

3.2. Experiencias de probabilidad en el contexto de la COVID-19

Experiencia 4: ¿Usar o no mascarilla?

Nivel: 6-8 años.

Contenidos implícitos:

Grados de posibilidad de ocurrencia, vinculados al uso de mascarillas y la posibilidad de contagiarse con COVID-19, a partir de la consolidación de una escala cualitativa desde “imposible” hasta “seguro”.

Uso de lenguaje probabilístico: imposible, casi imposible, poco posible, posible, bastante posible, casi seguro y seguro.

Comparación del grado de posibilidad de ocurrencia de hechos relacionados con el uso de mascarillas y la posibilidad de contagiarse con COVID-19, usando los comparativos “más…que”, “menos…que”, “igual que”, “tanto...como”.

Descripción de la actividad:

Se da inicio a la actividad preguntando a los alumnos qué saben respecto a la COVID-19 y su propagación, qué medidas se han tomado en general para prevenir el avance del número de contagios, y cómo podemos evitar contagiarnos. Se dedica un tiempo a discutir en torno a estas preguntas. Luego se presenta el conjunto de láminas de la Figura 21 donde se muestran distintas imágenes que buscan establecer una cierta relación entre una persona portadora de la COVID-19, una persona sana y el uso de mascarillas.

Se discute en torno a las distintas imágenes para guiar las respuestas y argumentaciones hacia la posibilidad de ocurrencia, en este caso hacia la posibilidad de contagiarse con COVID-19. A partir de esta discusión se comparan, pero sin calcular, las distintas posibilidades de ocurrencia, para luego establecer una escala cualitativa de posibilidades que va desde lo imposible a lo seguro. Finalmente, se presenta el tablero de posibilidades y se ordenan las láminas de acuerdo con los diversos grados de posibilidad de

Figura 21. Posibilidad de contagio de coronavirus vs uso de mascarillas. Fuente: Elaboración propia.

Figura 22. Ordenando y clasificando posibilidades de contagio en una escala cualitativa. Fuente: Elaboración propia.

ocurrencia de sucesos que pueden ir desde lo imposible hasta lo seguro, como se muestra en la Figura 22.

Se trata, pues, de que los alumnos identifiquen el riesgo de contagio como una situación de incertidumbre, en la cual el lenguaje probabilístico se encuentra presente. En este sentido, la Figura 22 representa una escala cualitativa asociada a la probabilidad de contagio en función del uso de mascarillas. Es importante que los alumnos discutan y reflexionen al respecto, en el sentido que, aun existiendo algunos patrones de comportamiento, resulta imposible predecir una situación futura con seguridad.

Experiencia 5: ¿Cuál es la probabilidad de seleccionar al azar a una persona con COVID-19 conectada a un ventilador mecánico?

Nivel: 8-10 años.

Contenidos implícitos:
Cuantificación de la posibilidad de que un suceso ocurra, a partir de una escala cuantitativa entre 0 (imposible) y 1 (seguro).

Cálculo de probabilidades.

Figura 23. Casos COVID-19 en Chile a 4 de mayo de 2020. Fuente: http://www.fau.uchile.cl/geografia/covid-19-monitoreo-de-casos-en-chile-por-comunas.

Análisis de situaciones problemáticas donde la probabilidad de ocurrencia se puede ver afectada (cambiar) a partir de la información de la que se disponga (se ajustan las asignaciones previas incorporando la nueva información disponible).

Descripción de la actividad:

Se introduce el tema de cómo la pandemia está afectando a un determinado país (por ejemplo, Chile), luego se muestra la Figura 23 que informa sobre el número de casos COVID-19 positivos acumulados (20.643), casos activos (9.958), número de fallecidos (270), y número de casos conectados a un ventilador mecánico (354) a una determinada fecha (4 de mayo de 2020). Luego se plantea la pregunta ¿cuál es la probabilidad de seleccionar al azar a una persona con COVID-19 conectada a un ventilador mecánico?

Para dar respuesta a este interrogante, en primer lugar, se debe hacer la distinción entre los casos positivos acumulados y los casos activos, centrando el foco de la discusión en estos últimos, es decir, en el número de personas que se encuentran actualmente infectadas y diagnosticadas (9.958), este número resulta de restar al total de contagios diagnosticados aquellas personas que se han recuperado o que han fallecido. Por tanto, para calcular la probabilidad de seleccionar al azar a una persona con COVID-19 conectada a un ventilador mecánico, es necesario considerar los casos activos. Además, se propone centrar la reflexión respecto de cómo el uso de ventiladores mecánicos en personas de mayor edad se asocia con una tasa mayor de mortalidad; y por ende a la capacidad del sistema de salud para poder atender a los pacientes graves, llegando finalmente a provocar una toma de conciencia sobre la necesidad de fomentar una cultura de respeto a las normas sanitarias y al aislamiento social.

Experiencia 6: COVID-19 ¿una cuestión de género?

Nivel: 10-12 años.

Contenidos implícitos:
Comparación de probabilidades.

Análisis de situaciones problemáticas donde la probabilidad de ocurrencia se puede ver afectada (cambiar) a partir de la información de la que se disponga (se ajustan las asignaciones previas incorporando la nueva información disponible).

Descripción de la actividad:
Mucho se ha dicho sobre que la COVID-19 afecta más a los hombres que a las mujeres, se muestran imágenes como las de la Figura 24 que aluden a esta tendencia.

Luego, se discute acerca de: ¿por qué se da esta tendencia?, ¿cuáles son las razones que hay detrás?, y se plantea la pregunta: ¿existe en Chile diferencia de género en la probabilidad de seleccionar al azar a una persona con COVID-19? Más concretamente, ¿cuál es la probabilidad de seleccionar al azar a un hombre entre los contagiados por COVID-19? Con esta pregunta en mente, los alumnos deberán analizar las gráficas de la Figura 25 y luego calcular las respectivas probabilidades.

Figura 24. ¿Qué nos dice la prensa sobre el COVID-19? Fuente: Elaboración propia a partir de titulares de prensa de periódicos de distintos países.

De esta manera, el análisis de los datos de la gráfica nos dará una visión sobre cómo afecta el coronavirus en Chile. Si el género influye o no, también se podría determinar mediante la siguiente pregunta: ¿cuál es la franja de edad en la que se presenta una mayor probabilidad de seleccionar al azar una persona infectada con el virus?

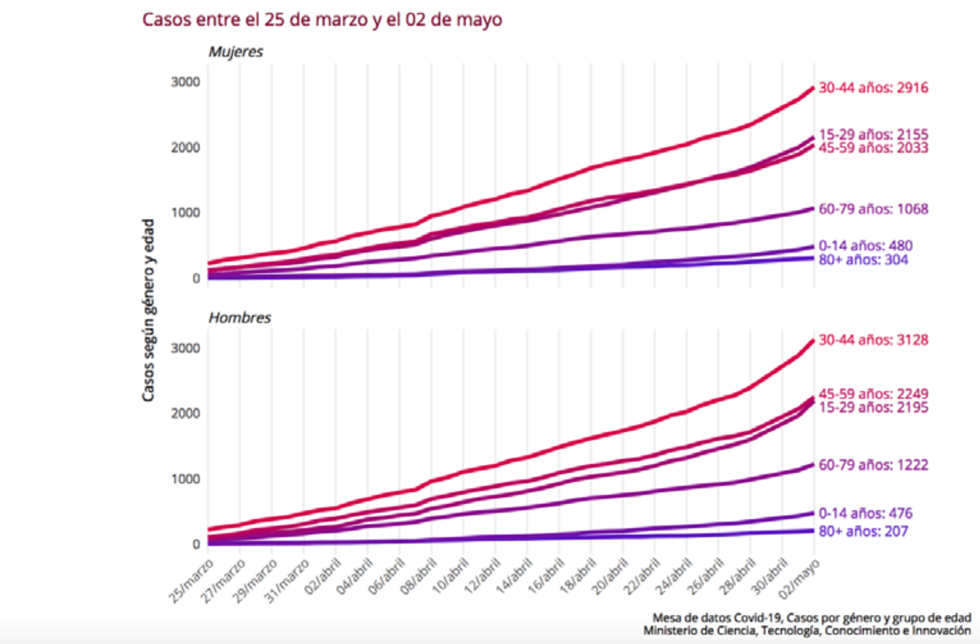


Figura 25. Casos por género y grupo de edad en Chile a 2 de mayo de 2020. Fuente: https://coronavirus.mat.uc.cl/?fbclid=IwAR2JUd_VJrpUuTidhcY-CS0QhoCNczAso6q6DaSm-FXHP_AsXuJv8LYRYLo.

CONSIDERACIONES FINALES

En este artículo se han descrito los conocimientos más relevantes que se deberían abordar en Educación Primaria para promover la alfabetización estadística y probabilística y se han ejemplificado con diversas actividades enmarcadas en la situación de pandemia global COVID-19. Consideramos que, si bien el currículo escolar promueve el estudio de la estadística y de la probabilidad, a menudo los profesores se sienten inseguros a la hora de enseñar estas ramas y, en ocasiones, cuando lo hacen se centran en conocimientos técnicos, en la resolución de ejercicios descontextualizados y en muchas ocasiones la clase se transforma en una clase de aritmética en la que solo se aplican fórmulas, perdiendo de vista el sentido estadístico (Batanero, Díaz, Contreras y Roa, 2013). Desde esta perspectiva, es de interés prestar atención a cómo incorporar contextos significativos en el proceso de enseñanza de la estadística y la probabilidad, pues no debemos olvidar que “los datos no son sólo números, son números en un contexto. En matemáticas el contexto oscurece la estructura. En el análisis de datos, el contexto proporciona significado” (Moore y Cobb, 1997, p. 801). En este sentido, no solo es importante aprender técnicas estadísticas o calcular probabilidades, sino que también debemos fomentar su comprensión en contextos reales que sean relevantes para los alumnos. En este artículo hemos utilizado como contexto la pandemia COVID-19 ya que pretendemos, a través de las actividades descritas, que los conocimientos de estadística y probabilidad sean una herramienta para que los alumnos reflexionen respecto al autocuidado, la propagación del virus, las fuentes de información, etc., y al mismo tiempo puedan comparar la situación en las regiones donde viven y obtener conclusiones relevantes. Sin duda, implementar este tipo de propuestas, contribuirá con el tiempo a formar ciudadanos con un pensamiento crítico, conscientes del rol que cada uno desempeña en la sociedad y en el bienestar global, lo que a su vez contribuye a promover la educación para la sostenibilidad. En definitiva, se trata de contribuir a "desarrollar competencias que permitan a las personas reflexionar sobre sus propias acciones, teniendo en cuenta sus impactos sociales, culturales, económicos y ambientales actuales y futuros, desde una perspectiva local y global" (UNESCO, 2017, p. 7). Así, en un mundo que se encuentra en medio de una verdadera emergencia, es primordial desarrollar competencias en los ciudadanos para "empoderar y equipar a las generaciones presentes y futuras para satisfacer sus necesidades mediante un enfoque equilibrado e integrado de las dimensiones económica, social y ambiental del desarrollo sostenible" (Leicht, Heiss y Byun, 2018, p.7), para lo cual la alfabetización estadística y probabilística se constituye como una herramienta que contribuye directamente al desarrollo de tales competencias y, por ende, moviliza el compromiso ciudadano por la sostenibilidad.

Agradecimientos

FEDER/Ministerio de Ciencia, Innovación y Universidades – Agencia Estatal de Investigación/ Proyecto EDU2017-84979-R.

FONDECYT Nº 1200356 financiado por la Agencia Nacional de Investigación y Desarrollo del Gobierno de Chile.

Ministerio de Ciencia, Innovación y Universidades – Agencia Estatal de Investigación/ Proyecto TIN2017-87600-P.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Alsina, Á. (2015). *Matepractic. Desarrolla y evalúa tu competencia matemática (6, 8 y 15).* Barcelona: Editorial Casals.

Alsina, Á. (2016). La estadística y la probabilidad en educación primaria. ¿Dónde estamos y hacia dónde debemos ir? *Aula de Innovación Educativa, 251*, 12-17.

Alsina, Á. (2017). Contextos y propuestas para la enseñanza de la estadística y la probabilidad en Educación Infantil: un itinerario didáctico. *Épsilon - Revista de Educación Matemática, 95,* 25-48.

Alsina, Á. (2018). El número natural para organizar, representar e interpretar la información (estadística, azar y probabilidad. En M.C. Múñoz-Catalán y J. Carillo (Eds.), *Didáctica de las Matemáticas para maestros de Educación Infantil* (pp. 173-211). Madrid: Editorial Paraninfo.

Alsina, Á. (2019). *Itinerarios didácticos para la enseñanza de las matemáticas (6-12 años).* Barcelona: Editorial Graó.

Alsina, Á. y Vásquez, C. (2016). De la competencia matemática a la alfabetización probabilística en el aula: elementos para su caracterización y desarrollo. *UNIÓN, Revista Iberoamericana de Educación Matemática, 48,* 41-58.

Araneda, A. M., Chandía, E., y Sorto, M. A. (2013). *Recursos para la formación inicial de profesores de Educación Básica.* Santiago de Chile: Ediciones SM.

Batanero, C. (2001). *Didáctica de la estadística.* Granada: Universidad de Granada.

Batanero, C. (2005). Significados de la probabilidad en la educación secundaria. *RELIME, 8*(3), 247-264.

Batanero, C., y Díaz, C. (2011). *Estadística con proyectos.* Granada: Departamento de Didáctica de la Matemática.

Batanero, C., Díaz, C., Contreras, J. M., y Roa, R. (2013). El sentido estadístico y su desarrollo. *Números. Revista de didáctica de las Matemáticas*, *83*, 7-18.

Hahn, C. (2015). La recherche internationale en éducation statistique: état des lieux et questions vives. *Statistique et Enseignement, 6*(2), 25-39.

Leicht, A., Heiss, J., y Byun, W.J. (2018). *Issues and Trends in Education for Sustainable Development (Volume 5)*. París: UNESCO. Moore, D. y Cobb, G. (1997). Mathematics, Statistics, and Teaching. *American Mathematical Monthly, 104*, 801-823.

Muñiz-Rodríguez, L., Rodríguez-Muñiz, L.J. y Alsina, Á. (2020). The absence of statistical and probabilistic literacy in citizens: effects in a world in crisis. Artículo entregado para la publicación.

National Council of Teachers of Mathematics [NCTM] (1989). *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics.* Reston, VA: NCTM.

National Council of Teachers of Mathematics [NCTM] (2000). *Principles and standards for school mathematics.* Reston, Va.: NCTM.

UNESCO. (2017). *Educación para los objetivos de desarrollo sostenible: objetivos de aprendizaje.* Francia: Organización de las Naciones Unidas para la Educación, la Ciencia y la Cultura.

Vásquez, C. y Alsina, Á. (2015). Un modelo para el análisis de objetos matemáticos en libros de texto chilenos: situaciones problemáticas, lenguaje y conceptos sobre probabilidad. *Profesorado, Revista de Currículum y Formación del Profesorado*, v. 19, n. 2, p. 441-462.

Vásquez, C. y Alsina, Á. (2019a). Diseño, construcción y validación de una pauta de observación de los significados de la probabilidad en el aula de Educación Primaria. *REVEMAT: Revista Eletrônica de Educação Matemática, 14,* 1-20.

Vásquez, C. y Alsina, Á. (2019b). Observing Mathematics Teaching Practices to Promote Professional Development: An Analysis of Approaches to Probability. *International Electronic Journal of Mathematics Education, 14*(3), 719-733.

Vásquez, C. y Rojas, F. (en prensa). Enseñar probabilidad para formar ciudadanos de sostenibilidad: ¿Qué sabemos del COVID19 y su propagación? *UNO, Revista de Didáctica de las Matemáticas.*

Wild, C. J., y Pfannkuch, M. (1999). Statistical thinking in empirical enquiry. *International Statistical Review, 67*(3), 223–248.