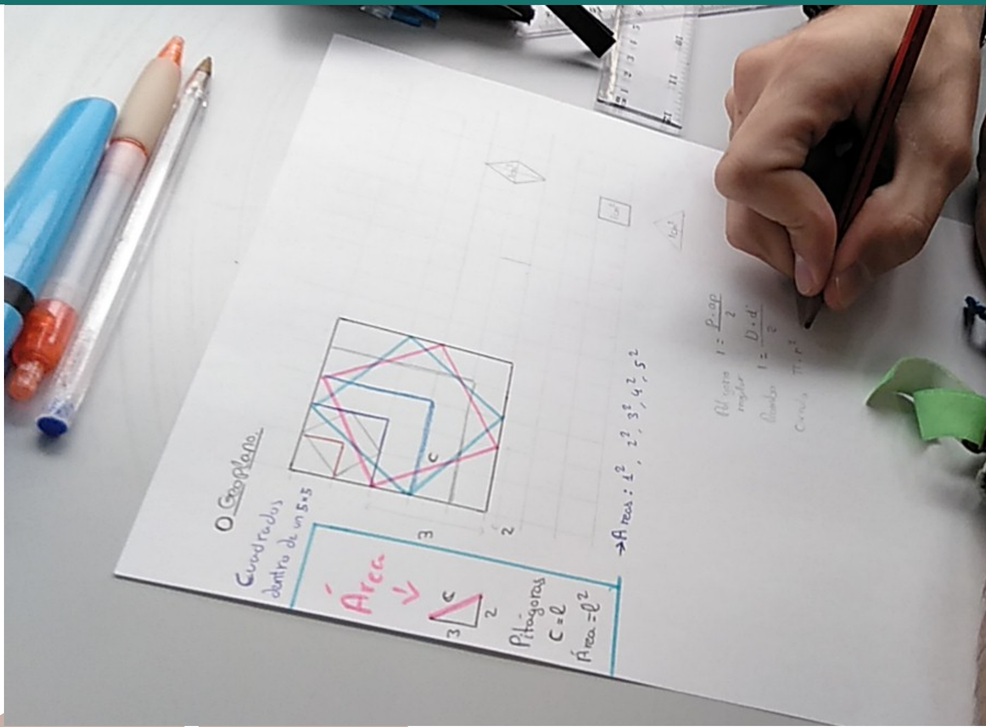
103

2019



epsilon

Revista de Educación Matemática

Editada por la S.A.E.M. "THALES"

epsilon 103

Revista de Educación Matemática

Página de la revista: http://thales.cica.es/epsilon
Revista: epsilon@thales.cica.es

Sociedad Andaluza de Educación Matemática "Thales"

Edita
Sociedad Andaluza de
Educación Matemática "Thales"
Centro Documentación "Thales"
Universidad de Cádiz
C.A.S.E.M.
Facultad de Ciencias
Departamento de Matemáticas
Campus del Río San Pedro
Torre Central, 4ª planta
11510 Puerto Real (Cádiz)
Teléfono: 956012833
Email: thales.matematicas@uca.es

Maquetación
mayteando@gmail.com

Depósito Legal
SE-421-1984

ISSN
2340-714X

Período
2019
Suscripción
Anual

SUMARIO / CONTENTS

Épsilon - *Revista de Educación Matemática* *2019, nº 103, 7-23*

Estrategias didácticas para desarrollar el proceso de enseñanza-aprendizaje de los contenidos de las Derivadas de funciones reales de una variable real y aplicaciones

Yohan Díaz Ferrer
ydferrer@uho.edu.cu
Miguel Cruz Ramírez
Yordanis Velázquez Cardoza
Sila Adelfa Molina Sierra

Universidad de Holguín, Cuba

Resumen: *Se presenta un grupo de estrategias didácticas para guiar el proceso de enseñanza-aprendizaje de los contenidos de las derivadas de funciones reales de una variable real y sus aplicaciones. El proceso se realiza paso a paso aprovechando el desarrollo del contenido y constituye la base fundamental de una clase metodológica instructiva, o sea, dirigida a los docentes, principalmente. Se logran integrar los resultados de varias bibliografías de uso recomendado en la asignatura matemática***.** *Algo novedoso constituyen las estrategias didácticas planteadas para las aplicaciones de las derivadas de funciones reales de una variable real y sus aplicaciones y la resolución de problemas de optimización.*
Palabras clave: *estrategias didácticas, derivadas, funciones reales, proceso de enseñanza-aprendizaje, aplicaciones, problemas de optimización.*

Didactic strategies to develop the teaching-learning process of the contents of the Derivatives of real functions of a real variable and applications

Abstract: *A group of didactic strategies is presented to guide the teaching-learning process of the contents of the derivatives of real functions of a real variable and its applications. The process is carried out step by step taking advantage of the development of the*

content and constitutes the fundamental base of an instructional methodological class, that is, directed to the teachers, mainly. It is possible to integrate the results of several bibliographies of recommended use in the mathematical subject. Something new are the didactic strategies proposed for the applications of derivatives of real functions of a real variable and its applications and the resolution of optimization problems.
Keywords: *didactic strategies, derivatives, real functions, teaching-learning process, applications, optimization problems.*

1. INTRODUCCIÓN

El concepto de estrategias didácticas se involucra con la selección de actividades y practicas pedagógicas en diferentes momentos formativos, métodos y recursos en los procesos de enseñanza-aprendizaje (Velazco y Mosquera, 2010).

Aldana, et al. (2016) realizan una propuesta para disminuir los altos índices de reprobación en matemáticas en las carreras de ingeniería que ha afectado la eficiencia terminal, aseguran que para solucionar se requiere "centrar la labor educativa en el aprendizaje del novato, mediado por el docente, en el marco de un modelo educativo innovador basado en los estilos de aprendizaje, la tutoría, la resolución de problemas, la comprensión del lenguaje, la comunicación y el desarrollo de competencias tanto de alumnos como de docentes" (p.20).

Es sustancial, plantear estrategias didácticas que contemplen los objetivos de enseñanza-aprendizaje a partir de los diversos métodos, los cuáles deben dirigirse a las necesidades particulares de cada asignatura, por lo tanto los docentes deben conocer y emplear una variedad de actividades que le permitan concretar dichos procesos apoyados de los diversos recursos.

La realización de este trabajo es basado en las experiencias de impartición de varios profesores de la asignatura Análisis Matemático I que ahora se nombra Matemática Superior I, la cual se imparte en 90 horas clase para las carreras de Ingenierías en la modalidad presencial. Los temas que ella contiene son: elementos de lógica y teoría de conjuntos, funciones reales de una variable real y aplicaciones, límite y continuidad de funciones reales de una variable real, derivadas de funciones reales de una variable real y aplicaciones, sucesiones y series, cálculo diferencial de funciones reales de una variable real.

El sistema de conocimientos del tema derivadas de funciones reales de una variable real y aplicaciones comprende el concepto de derivada de una función en un punto, derivada lateral, función derivada, condición necesaria de derivabilidad, interpretación de la derivada: pendiente de una curva, reglas de derivación, derivadas de funciones compuestas e inversas, derivadas de orden superior, teoremas sobre las funciones derivables, aplicación de la derivada al cálculo de límites de formas indeterminadas, regla de L'Hôpital, interpretación de la primera y segunda derivada, puntos extremos y puntos de inflexión, condiciones de existencia de esos puntos, aplicación de la derivada al trazado de curvas y aplicación de la derivada a problemas de optimización. El libro de texto que está asignado para esta asignatura es Ballester (2007).

Las derivadas de funciones reales de una variable real y sus aplicaciones deben permitir que el alumno: amplíe su madurez matemática y su capacidad de trabajo con las abstracciones; desarrolle habilidades para la comunicación y comprensión de propiedades y características matemáticas de magnitudes y formas en las variantes formal, gráfica, numérica y verbal; identifique, interprete y analice modelos matemáticos de procesos técnicos, económicos, productivos y científicos vinculados a su carrera, así como resuelva los problemas de índole matemática a los que estos conducen, con la utilización de los contenidos matemáticos que se estudian en el tema y con el uso eficiente de las técnicas modernas de cómputo y de los Asistentes Matemáticos; formen un sistema de conocimientos y habilidades de carácter profesional y científico-técnico, así como la habilidad de aplicar los mismos de manera independiente y creadora a la solución de problemas concretos de su perfil profesional, mediante la utilización de los métodos del Análisis Matemático; logre una sólida base de conocimientos, integrada y sistémica, que deje huella en su proceso de aprendizaje y le permita resolver problemas con los recursos y estrategias estudiadas y aprenda a pensar y actuar de forma creadora.

Este conjunto de clases tiene como objetivo que los estudiantes: apliquen los conceptos y teoremas estudiados en las derivadas de funciones reales de una variable real y sus aplicaciones para analizar las propiedades de las funciones y trazar su gráfica; resuelvan problemas de optimización que se modelen con la utilización de los métodos del Cálculo Diferencial de las funciones de una variable real; profundicen en el uso de las TIC como un recurso para mejorar su aprendizaje, mediante el empleo del Asistente Matemático DERIVE, el tabulador electrónico Microsoft Excel o el Matemathic para el análisis de propiedades de las funciones y su representación grafica, utilizándose la computadora como medio de aprendizaje y herramienta de trabajo; desarrollen la capacidad de razonamiento y las formas de pensamiento lógico, mediante la utilización de elementos de la lógica y las demostraciones matemáticas, para la comprensión y demostración de propiedades y teoremas relativos al tema; asuman una concepción científica del mundo al interpretar los conceptos y teoremas de las derivadas que se estudian en el tema como resultados de las ciencias matemáticas, que son un reflejo de la realidad material existente objetivamente y cómo la historia de las matemáticas ha estado esencialmente vinculada con las necesidades de la vida material de la sociedad; desarrollen la motivación por aprender a partir de la ejecución de diferentes tareas que requieran una constante búsqueda de nuevas fuentes de información y de conocimiento.

Dolores (2000) refiere que los estudiantes después de un curso de cálculo diferencial tienen cierto dominio de los algoritmos, sin embargo refieren problemas significativos en conceptualizaciones y resolución de problemas de aplicación del concepto de derivada.

Los objetivos de la asignatura a partir de la concepción del modelo de enseñanza basada en una estructuración sistémica de los contenidos contribuyeron al planteamiento del siguiente problema conceptual metodológico: ¿Cuáles recomendaciones didácticas emplear para desarrollar los nuevos contenidos relacionados con las derivadas de funciones reales de una variable real y sus aplicaciones? Por consiguiente, demostrar, a través del conjunto de recomendaciones didácticas, cómo desarrollar el proceso de enseñanza-aprendizaje de los nuevos contenidos de las derivadas de funciones reales de una variable real y sus aplicaciones; se define como el objetivo metodológico de esta investigación.

Disímiles autores han tratado esta problemática a partir del diagnóstico de insuficiencias en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la matemática y en especial de la temática derivadas de funciones pero no se han enfocado a las aplicaciones, además las estrategias didácticas no son planteadas de manera que permitan la generalización a otros resultados de la propia matemática.

Moreno (2005) reitera que la enseñanza del cálculo resulta bastante problemática. Aunque seamos capaces de enseñar a los estudiantes a realizar algunas derivadas, tales acciones están muy lejos de una verdadera comprensión de los conceptos y métodos de pensamiento de esta parte de las matemáticas.

En referencia a la enseñanza del cálculo diferencial, Sánchez Matamoros et al., (2008), mencionan múltiples investigaciones sobre la enseñanza-aprendizaje del lenguaje variacional y del cálculo diferencial e integral, señalando que tales investigaciones aunadas a la experiencia como profesores de cálculo, les han permitido comprobar la dificultad de enseñar y aprender tales conceptos.

Para poder abordar las temáticas planteadas se dividió el presente análisis en cuatro apartados: extremos de funciones, análisis de propiedades geométricas de las funciones, construcción del gráfico de funciones y resolución de problemas de optimización.

2. EXTREMOS DE FUNCIONES

El tratamiento de teoremas y demostraciones es una labor didáctica relevante para la consecución de los objetivos de la enseñanza de la matemática, en este caso podemos mencionar profundizar en el tratamiento previo del teorema de Fermat, identificar diferentes formulaciones equivalentes, formación de recíprocos, negaciones y contraposiciones, lograr una mayor interpretación y sistematizar premisas o tesis similares para contribuir al reconocimiento de relaciones entre teoremas se orientan ejercicios basados en la comprensión del enunciado y su reconocimiento en diversas circunstancias.

2.1 Teorema de Fermat

Si la función f tiene un máximo o mínimo local en el punto c y si existe $f'(c)$, entonces $f'(c) = 0$.

Recomendaciones didácticas

1. Tarea: Enunciar y demostrar la siguiente propiedad no tratada en Ballester (2007), como aseguramiento de las condiciones previas para el tratamiento del teorema de Fermat.
   Propiedad:
   Si la función f es derivable en el punto c y $f'(c) > 0$ o $f'(c) = +\infty$, entonces existe un entorno del punto c tal que:
   $$f(x) > c \quad \text{para} \quad x > c \quad \text{y} \ f(x) < c \quad \text{para} \quad x < c.$$
   Que resulta una variante generada a partir del teorema 5.7 de Apóstol (1961, p.91) y del teorema 8.9 de Llin y Pozniak (1991, p.247).

2. Indicar que en su estudio independiente realicen la demostración cuando $f'(c) < 0$ o $f'(c) = -\infty$
3. Transmitir información de interés, relativa a la vida de Pierre Fermat:

   El teorema de Fermat es un teorema del análisis real llamado así en honor a Pierre Fermat Beaumont-de-Lomagne (17 de agosto de 1601 al 12 de enero de 1665), jurista y matemático Francés, de la región de Castre, quien enunció por primera vez este teorema en 1637. Hablante fluido en seis idiomas (francés, latín, occitano, griego clásico, italiano y español). Comunicó la mayor parte de su trabajo en cartas a amigos, a menudo con poca o ninguna prueba de sus teoremas. En algunas de estas cartas a sus amigos, exploró muchas de las ideas fundamentales del cálculo antes que Newton o Leibniz. Fermat era un experto abogado que hacía de las matemáticas más un pasatiempo que una profesión por lo que fue denominado por el historiador de matemáticas escocés, Eric Temple Bell, con el apodo de «príncipe de los aficionados». Sin embargo, hizo importantes contribuciones a la geometría analítica, la probabilidad, la teoría de números y el cálculo (Ríbnikov, 1991).

   La incorporación de elementos de la historia de la matemática a los procesos de enseñanza-aprendizaje, permite visualizar el íntimo e innegable vínculo que existe entre esta disciplina científica y la dinámica socio-cultural humana y promueve un cambio de actitud y de creencias hacia la matemática. Es esencialmente una actividad, por lo tanto, su conocimiento es contextual y no puede desligarse de su condicionamiento social e histórico. Ayuda a explicar y superar obstáculos epistemológicos, frente a algún concepto matemático que es especialmente difícil de comprender para el estudiante porque ayuda a menudo a explicar las incomprensiones que presentan los alumnos en torno a dicho concepto. La historia de la matemática puede representar un valioso recurso en la construcción de necesarias estrategias para formar estudiantes reflexivos y críticos.
4. Por la importancia teórica y práctica de este teorema, se recomienda su demostración en la clase.
5. En la demostración del teorema, propiciar el diálogo con los estudiantes, para su comprensión de que para establecer la veracidad del teorema, basta combinar la propiedad anterior con la definición de máximo (mínimo) local.
6. A través del diálogo establecido, lograr que los alumnos enuncien el recíproco del teorema.
7. Resolver, con la participación de sus alumnos, los ejemplos siguientes.
   – Ejemplo 1: La función $f(x) = x^3$, para cuestionar la validez del teorema de Fermat, hasta que se llegue a la conclusión de que el recíproco del teorema no es válido.
   – Ejemplo 2: La función $f(x) = |x|$, que tiene un mínimo para $x = 0$ (ilustrarlo gráficamente), pero $f'(0)$ no existe. No se cumple una de las premisas del teorema, sin embargo es válida la tesis.
8. Indicar a sus alumnos que enuncien el contrarrecíproco del teorema y que se refieran a su valor de verdad.
9. Señalar a sus estudiantes la importancia práctica del teorema de Fermat (la primera acción de un procedimiento para la determinación de extremos absolutos de una función)

10. Elaborar, apoyándose de un diálogo con los estudiantes, un procedimiento didáctico para la determinación de los extremos absolutos de una función en un intervalo cerrado $[a, b]$.

1. Encuentre los valores de f en los números críticos de f en $]a, b[$.
2. Halle los valores de f en los puntos extremos del intervalo.
3. El mayor de los valores de los pasos 1 y 2 es el valor máximo absoluto, el más pequeño, es el mínimo absoluto.

11. Realizar en la clase de forma conjunta con los alumnos los ejemplos:

a) Ejemplo 9 de Ballester (2007, p.282).

$$f(x) = x - 2.sen\ x \qquad\qquad 0 \le x \le 2\pi$$

b) Ejemplo 10 de Ballester (2007, p.283).

El 24 de abril de 1990, el transbordador espacial Discovery desplegó el telescopio espacial Hubble. Un modelo para la velocidad del transbordador durante esa misión, desde el despegue en $t = 0$ hasta que los cohetes auxiliares de combustible sólido se desprendieran en $t = 26$, se expresa mediante la función $V(t) = 0,001302t^3 - 0,09029t^2 + 23,61t - 3,083\ (m/s)$.

Con este modelo, estime los valores máximo y mínimo absoluto de la aceleración del trasbordador entre el despegue y el desprendimiento de los cohetes auxiliares.

Este ejemplo debe ser aprovechado por el profesor para: contextualizar los contenidos matemáticos, vincular la matemática con la física y aplicar el procedimiento para la determinación de los extremos absolutos de una función continua en un intervalo cerrado, en trabajo conjunto con los estudiantes

$$A(t) = 0;03906t^2 - 0,18058t + 23,61 \qquad \text{definida en el intervalo } [a, b] = [0, 26].$$

Respuesta: La aceleración máxima es 62,87 m/s y se alcanza a los 26 segundos y la aceleración mínima es 21,52 m/s lográndose la misma aproximadamente a los 23,12 segundos.

3. TEOREMAS DEL VALOR MEDIO (TVM)

3.1. Teorema de Rolle

Sea f una función que satisface las tres premisas siguientes:

- (i) f es continua en el intervalo cerrado $[a, b]$.
- (ii) f es derivable en el intervalo abierto $]a, b[$.
- (iii) $f(a) = f(b)$

Entonces existe $c \in\ ]a, b[$ tal que $f'(c) = 0$.

Recomendaciones didácticas

Indicar a los profesores que en la clase:

1. Transmitan información de interés, relativa a la vida del matemático Michael Rolle:

Michael Rolle nació el 21 de abril de 1652 en Ambert, Basse-Auvergne, Francia y falleció el 8 de noviembre de 1719 en Paris. Matemático autodidacta. Publicó por primera vez el teorema de Rolle en 1691 en su libro titulado Méthode pour résoudre les égalitéz. Sin embargo, después se volvió crítico de los métodos de su época y atacó al cálculo infinitesimal tachándolo de ser "un conjunto de falacias ingeniosas". También inventó la notación $\sqrt[n]{x}$ para designar la enésima raíz de x. En Economía, el Teorema de Rolle demuestra la veracidad de la Curva de Laffer: relación existente entre los ingresos fiscales y los tipos impositivos que muestra cómo varía la recaudación fiscal al modificar los tipos impositivos. Esta curva fue difundida por el economista Arthur Laffer, aunque seis siglos antes el economista norteafricano Ibn Jaldún (1332-1406) ya había teorizado sobre la relación entre los tipos impositivos y la recaudación. También John M. Keynes lo había hecho unos pocos años antes que Laffer (Ríbnikov, 1991).

2. Pregunten la estructura del teorema desde el punto de vista de la lógica matemática, precisándose su premisa y su tesis.

3. Planteen la interrogante: ¿Si en la condición (iii) se cumple en particular que $f(a) = f(b) = 0$, puede inferirse de ello alguna conclusión teórica?

4. Muestren el siguiente ejemplo:

Ejemplo: sea $s = f(t)$ la función de posición de un objeto en movimiento. Si el objeto se encuentra en el mismo lugar en dos instantes diferentes $t = a$ y $t = b$, entonces $f(a) = f(b)$. El teorema de Rolle asegura que hay un momento $t = c \in \,]a; b[$ en que $f'(c) = 0$ esto es, cuando la velocidad es cero.

5. Para profundizar los conocimientos de los profesores acerca del teorema de Rolle, se les informará que la premisa (ii) de este teorema puede extenderse al caso en que exista la derivada infinita de signo determinado. Esta condición no puede ser debilitada.

Ejemplo: para $f(x) = \sqrt[3]{x^2} - 1$ para $-1 \leq x \leq 1$

4. TEOREMA DE LAGRANGE (TEOREMA DEL VALOR MEDIO)

Sea f una función que satisface las dos premisas siguientes:

- (i) f es continua en el intervalo cerrado $[a, b]$.
- (ii) f es derivable en el intervalo abierto $]a, b[$.

Entonces existe $c \in \,]a, b[$ tal que $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$

Recomendaciones didácticas

6. Precisar en la clase, algunos datos del matemático Joseph Louis Lagrange.

Joseph Louis Lagrange nació en Turín, Italia, el 25 de enero de 1736 y falleció en París, Francia, el 10 de abril de 1813. Fue un físico, matemático y astrónomo italiano, que después de formarse en su Italia natal pasó la mayor parte de su vida en Prusia y Francia. De padre francés y madre italiana, fue un niño prodigio, profesor en Turín a los 19 años. Realizó grandes aportaciones a la teoría de los números, a la teoría de funciones, a la teoría de ecuaciones, así como a la mecánica analítica y celeste, en particular aplicó el cálculo al análisis de la Estabilidad del sistema solar. Por invitación de Federico el Grande, sustituyó a Euler en la academia de Berlín y cuando murió Federico, aceptó una invitación del rey Luis XVI de ir a Paris, donde se le asignaron departamentos en el Louvre. Fue un hombre bondadoso y tranquilo, que sólo vivió para las ciencias (Ríbnikov, 1991).

7. Llamar la atención a sus estudiantes en cuanto a las premisas del teorema de Rolle y de Lagrange, para que lleguen a la conclusión de que el primero es un caso particular del segundo.

8. Por la importancia de este teorema y dado que en su demostración se pone en evidencia una herramienta matemática efectiva en la resolución de problemas (reducción del problema a uno de solución conocida), se realizará su demostración en trabajo conjunto con sus estudiantes.

¿Es posible construir a partir de la función f una nueva función g que satisfaga las premisas del teorema de Rolle? El docente propondrá la función

$$g(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

e indicará a sus alumnos que verifiquen que ésta satisface las tres premisas del teorema de Rolle. Después de comprobadas dichas premisas, solicitará que enuncien la tesis de dicho teorema:

Por lo tanto, existe $c \in\ ]a; b$ tal que $g'(c) = 0$, y a partir de este resultado continuará

el dialogo iniciado para obtener que $g'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ luego dado que $g'(c)$ se obtiene

$$0 = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \Rightarrow f(b) - f(a) = f'(c)(b - a).$$

9. Los estudiantes manifiestan casi siempre que no se les hubiese ocurrido construir tal función, lo que el profesor debe aprovechar este comentario para formular la siguiente pregunta.¿La forma de construir esta función es única? Mostrará una nueva función: m $(x) = f(x)\ [b, a]$ − x. $[f(x) - f(a)]$ y e indicará a los alumnos que en el estudio independiente, comprueben que esta función satisface las premisas del teorema de Rolle.

10. Realizar en clase el siguiente ejemplo

Ejemplo 1:

Si un objeto se mueve en línea recta y su función de posición es $s = f(t)$ la velocidad

media entre $t=a$ y $t=b$ es $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ y la velocidad en el momento $t=c\in\,]a,b[$ es $f'(c)$ Así el teorema del valor medio nos dice que en algún momento $t=c\in\,]a,b[$ la velocidad instantánea es igual a la velocidad media $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ por ejemplo, si un automóvil recorriera 180 km en 2h, el velocímetro debería indicar al menos una vez, 90 $^{km}\!/_{h}$

11. Insistir en la clase que el teorema del valor medio de Lagrange permite obtener datos en torno a una función, a partir de información sobre su derivada:

Ejemplo 1:

Si $f(0) = -3$ y $f'(x) \leq 5$ para todos los valores de x. ¿Qué tan grande puede ser $f(2)$? Respuesta: $f(2) \leq 7$.

12. Indicar que el teorema del valor medio es una herramienta eficaz para demostrar igualdades y desigualdades:

Ejemplo 1**:** Demostrar que $arc\tan x + arc\cot x = \dfrac{\pi}{2}$.

Ejemplo 2: Demostrar que $|arc\tan x_1 - arc\tan x_2| \leq |x_1 - x_2|$, para todo $x_1; x_2$.

5. Teorema de Cauchy (fórmula generalizada de los incrementos finitos)

Sean f y g dos funciones que satisfacen las dos premisas siguientes:

- (i) Continuas en el intervalo cerrado $[a, b]$
- (ii) Derivables en el intervalo abierto $]a, b[$ y $g'(x) \neq 0$ para toda $x \in\,]a, b[$.

Entonces existe un número tal que $c \in\,]a, b[$ tal que $\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \dfrac{f'(c)}{g'(c)}$.

Recomendaciones didácticas

13. Conducir a los estudiantes para que reconozcan que cuando tanto la premisa como la tesis del el teorema de Cauchy, coinciden con las del teorema de Lagrange, por lo tanto éste ultimo es un caso particular del teorema de Cauchy.

14. Mostrar que el teorema de Cauchy no puede ser demostrado a partir del el teorema de Lagrange.

Aplicándose el teorema de Lagrange a las funciones f y g se tiene que:

Existe tal que $c_1 \in\,]a, b[$ tal que $f'(c_1) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Existe tal que $c_2 \in]a, b[$ tal que $g'(c_2) = \dfrac{g(b) - g(a)}{b - a}$.

Por lo tanto $\dfrac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \dfrac{f'(c_1)}{g'(c_2)}$; pero en general $c_1 \neq c_2$.

15. Como no es posible usar el teorema de Lagrange, entonces debe preguntarse:

¿Con las funciones $f(x)$ y $g(x)$ se puede construir una nueva función $h(x)$ que satisfaga las premisas del teorema de Rolle?:

$$h(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}\left[g(x) - g(a)\right].$$

16. Indicar a los estudiantes que comprueben que esta función satisface las premisas del teorema de Rolle.

17. Preguntar ¿La forma de construir esta función es única? Orientar a los alumnos que comprueben que la función $r(x) = f(x)\left[g(b) - g(a)\right] - g(x)\left[f(x) - f(a)\right]$ satisface las premisas del teorema de Rolle.

18. Destacar la importancia del teorema de Cauchy como fundamento de la regla de L'Hôpital.

19. Recomendar no se siga el orden dado en Ballester (2007): análisis de propiedades geométricas de las funciones, y pasar a tratar el contenido relacionado con las formas indeterminadas y la regla de L'Hôpital.

20. Informar a los alumnos datos históricos relacionados con el creadores del teorema de Cauchy y de la regla de L'Hôpital.

Augustin-Louis Cauchy (1789-1857): Nacido en Francia. Terminó en el año 1807 la Escuela Politécnica en Paris. Hasta el año 1813 trabajó como ingeniero en el Instituto de vía de comunicación. En el año 1816 fue nombrado miembro de la Academia y profesor de la Escuela Politécnica. A finales del siglo XVIII y comienzos del XIX, las obras de un gran número de matemáticos reflejaban ya, con diferente grado de resolución y consecuencias, la necesidad objetiva de construcción de la teoría de límites como base del análisis matemático y una reconstrucción radical de este último. Los mayores méritos en la realización de esto pertenecen a Cauchy. La producción científica de Cauchy fue excepcional, los biógrafos calculan 789 trabajos publicados por él (Ríbnikov, 1991).

Esta regla se publicó por primera vez en 1696 por el matemático francés del siglo XVII Guillaume François Antoine, marqués de L'Hôpital (1661 - 1704), pero fue descubierta en 1694 por el matemático suizo Johann Bernoulli. La explicación es que ambos habían entrado en un curioso arreglo de negocios por medio del cual el marqués de L'Hôpital compró los derechos de los descubrimientos matemáticos de Johann Bernoulli (Ríbnikov, 1991).

21. No hacer la demostración de la regla de L'Hôpital. Orientarla como estudio independiente a los estudiantes (la totalidad de los alumnos analizarán el caso simple que es cuando $f(a) = g(a) = 0$, f' y g' continuas y $g'(a) \neq 0$. Esta demostración aparece en Ballester (2007, 307). Para los alumnos aventajados, además de lo anterior se indica estudiar la demostración para el caso más general, el cual aparece en el apéndice F de Ballester (2007, A48-A49).

6. ANÁLISIS DE LAS PROPIEDADES GEOMÉTRICAS DE LAS FUNCIONES

Recomendaciones didácticas

1. Realizar la motivación del epígrafe.
2. Para su tratamiento dividir el epígrafe en tres secciones 2.1 (información sobre la primera derivada), 2.2 (información sobre la segunda derivada) y 2.3 (información sobre las derivadas de orden superior). Forma novedosa para el tratamiento de las propiedades geométricas de las funciones.

6.1 ¿Qué revela la primera derivada $f'(x)$ respecto a la función $f(x)$?

3. Informar a los profesores que en el epígrafe 4.16 de Spivak (1996, 228) se destaca la más importante relevancia del teorema del valor medio de Lagrange.
   Teorema: (Monotonía de funciones derivables)
   Sea f una función continua en el intervalo cerrado $[a, b]$ y que admite derivada en el intervalo abierto $]a, b[$. Se tiene entonces que:
   a) Si $f'(x) > 0$ para toda $x \in]a, b[$, f es estrictamente creciente en el intervalo cerrado $[a, b]$
   b) Si $f'(x) < 0$ para toda $x \in]a, b[$, f es estrictamente decreciente en el intervalo cerrado $[a, b]$
3. El profesor debe demostrar la parte (a) para lo que debe tener en cuenta:
   a) Precisar a través del diálogo con los alumnos la definición de función monótona creciente en sentido estricto, para llegar a que debe demostrarse que $f(x) < f(y)$ siempre que $a \leq x < y \leq b$.
   b) Indicar a los estudiantes que se aplicará el teorema del valor medio de Lagrange a la función f en el intervalo $[x, y]$ de lo que resulta:

$f(y) - f(x) = f'(c)(y - x)$ para $c \in]x, y[$. Como $f'(c) > 0$ y $(y - x) > 0$ se tiene que $f(y) - f(x) > 0$; por lo que $f(x) < f(y)$

   c) Orientar a los alumnos el estudio independiente de la demostración de la parte (b).
   Teorema: (Primera condición suficiente de existencia de extremos relativos funciones derivables)
5. Enunciar la primera parte del teorema:
   Sea f una función continua en el intervalo cerrado $[a, b]$ y que admite derivada en el intervalo abierto $]a, b[$ excepto quizás en un punto c de dicho intervalo. Se tiene entonces que:

   a) Si $f'(x)$ para toda y para toda $x < c$ y $f'(x) < 0$ para toda $x > c$ entonces f tiene un máximo relativo en el punto c.

6. Demostrar la parte (a), realizándose las siguientes acciones con los alumnos:
   a) Preguntar el concepto de máximo relativo.
   b) Llamar su atención que con la aplicación del teorema precedente es inmediato que es estrictamente creciente en el intervalo cerrado $[a, c]$ y que es estrictamente decreciente en el intervalo cerrado $[c, b]$ luego $f(x) < f(c)$ para toda $x \neq c$ con lo que f tiene un máximo relativo en $x = c$.

7. Para la parte (b) el profesor debe:
   a) Lograr que los estudiantes enuncien esta parte del teorema:
   Si $f'(x) < 0$ para toda $x < c$ y $f'(x) > 0$ para toda $x < c$ entonces f tiene un mínimo relativo en el punto c.
   b) Indicar a los alumnos como trabajo independiente que demuestren la misma.

8. La parte (c) el profesor debe enunciarla y ejemplificarla en el aula: si $f'(x) > 0$ ó $f'(x) < 0$ para toda $x \neq c$ entonces f no tiene extremo relativo en el punto c.
   Ejemplo: $f(x) = x^3$.

9. Mediante el trabajo conjunto entre el profesor y los alumnos elaborar un Procedimiento didáctico para la determinación de los extremos locales de una función, no concebido en Ballester (2007).
   - Hallar la primera derivada $f'(x)$ de la función $f(x)$.
   - Determinar los puntos donde $f'(x)$ y donde $f'(x)$ no existe, pero que la función sea continua en ellos.
   - Ubicar estos puntos en una recta numérica y analizar el signo de la derivada $f'(x)$ a la izquierda y a la derecha de estos puntos, si hay cambio de signo, entonces para ese punto se alcanza un extremo relativo. Si no hay cambio de signo para ese punto no se alcanza extremo.
   - Si a la izquierda del punto, el signo de la derivada es positivo y a su derecha es negativo, entonces en ese punto se alcanza un máximo local. Señalar también cuado se alcanza un mínimo relativo.
   - Para obtener los extremos, evaluar la función para los puntos donde se alcanzan estos.

10. Aprovechar el procedimiento anterior para conjuntamente con los alumnos construir un procedimiento para analizar la monotonía de una función.

6.2 ¿Qué revela la segunda derivada $f''(x)$ respecto a la función $f(x)$?

11. Informar a los estudiantes que se establecerá la analogía entre los resultados obtenidos con la primera derivada (monotonía y extremos), con los que aportará la segunda derivada.

12. Aunque no están en Ballester (2007), darle tratamiento a los dos teoremas siguientes, indispensables para el desarrollo de habilidades que deben alcanzar los estudiantes.
   Teorema: (Concavidad de funciones) (el análogo con el de monotonía).

Sea f una función continua en el intervalo cerrado $[a, b]$ y que admite hasta segunda derivada en el intervalo abierto $]a, b[$. Se tiene entonces que:

a) Si $f''(x) > 0$ para toda $x \in]a, b[$ entonces la gráfica de f es cóncava hacia arriba en el intervalo cerrado $[a, b]$.

b) Si $f'(x) < 0$ para toda $x \in]a, b[$, entonces la gráfica de f es cóncava hacia abajo en el intervalo cerrado $[a, b]$.

Teorema: (Condición necesaria de existencia de punto de inflexión)

Si c es un punto de inflexión de la función f y si $f''(c)$ existe, entonces $f''(c) = 0$.

13. Lograr que los alumnos reconozcan que este teorema es similar al teorema de Fermat (condición necesaria de existencia de extremos)

Teorema: (Primera condición suficiente de existencia de puntos de inflexión para funciones dos veces derivables)(análogo con la condición suficiente de existencia de extremos)

Sea f una función continua en el intervalo cerrado $[a, b]$ que admite hasta segunda derivada en el intervalo abierto $]a, b[$ excepto quizás en un punto c de dicho intervalo. Se tiene entonces que:

- Si $f''(x) > 0$ para toda $x < c$ y $f''(x) < 0$ para toda $x > c$ ó $f''(x) < 0$ para toda $x < c$ y $f''(x) > 0$ para toda $x > c$ entonces $(c; f(c))$ es un punto de inflexión de la función $f(x)$.

14. Con la colaboración de sus alumnos elaborar un procedimiento didáctico para la determinación de los puntos de inflexión de la gráfica de una función, no concebido en Ballester (2007, 282).

- Hallar la segunda derivada $f''(x)$ de la función $f(x)$.
- Determinar los puntos donde $f''(x) = 0$ y donde $f''(x)$ no existe, pero que la función sea continua en ellos.
- Ubicar estos puntos en una recta numérica y analizar el signo de la segunda derivada $f''(x)$ a la izquierda y a la derecha de estos puntos, si hay cambio de signo, entonces para ese punto se alcanza un punto de inflexión. Si no hay cambio de signo para ese punto no se alcanza extremo.
- Para obtener los puntos de inflexión, evaluar la función para los puntos donde se alcanzan estos.

15. Aprovechar el procedimiento anterior para conjuntamente con los alumnos construir un procedimiento para analizar la concavidad de una función.

16. Informar a los estudiantes que también la segunda derivada de la función revela una condición suficiente para la determinación de extremos de una función, al menos dos veces derivable.

Teorema: (Segunda condición suficiente de existencia de extremos relativos funciones derivables)

Sea $f''(x)$ es continua en una vecindad del punto c y tal que $f'(c) = 0$.

a) Si $f''(c) > 0$, entonces f alcanza un mínimo local para $x =$ c.

b) Si $f''(c) < 0$, entonces f alcanza un máximo local para $x =$ c.

16. A los estudiantes interesados en profundizar en esta temática, indicarle el estudio de los dos teoremas que pueden encontrarse en (Llin y Pozniak, 1991, 301-304).

6.3 Generalizaciones

Teorema: (Segunda condición suficiente de puntos de inflexión)

Si en el punto c se tiene que $f'''(c) = 0$ y $f^{(IV)}(c)$ existe, entonces para c se alcanza un punto de inflexión.

Teorema: (tercera condición suficiente de existencia de extremos relativos y puntos de inflexión)

Sean $n \geq 1$ y la función $y = f(x)$ que tiene derivada de orden n en un entorno del punto c y además $f^{(2)}(c) = f^{(3)}(c) = \ldots\ldots = f^{(n)}(c) = 0$; $f^{(n+1)}(c) \neq 0$. Entonces:

a) Si n es par, la gráfica de la función $y = f(x)$ tiene inflexión en el punto $M(c; f(c))$

b) Si n es impar, la gráfica de la función $y = f(x)$ tiene un extremo en el punto $M(c; f(c)$ más exacto, mínimo local si $f^{(n+1)}(c) > 0$ y máximo local.

Si $f^{(n+1)}(c) < 0$.

7. CONSTRUCCIÓN DEL GRÁFICO DE FUNCIONES

Recomendaciones didácticas

1. Precisar a sus alumnos que saber graficar funciones es uno de los objetivos esenciales del programa de la asignatura ya que es parte de las habilidades que debe aportar la matemática en la formación de los ingenieros.
2. Con la ayuda de los alumnos elaborar un procedimiento didáctico para la graficación de funciones (perfeccionamiento del indicado en Ballester (2007)).
   - Hallar el dominio de la función.
   - Analizar la simetría de la función (paridad, imparidad, periodicidad), sus interpretaciones geométricas y cómo facilitará cada una de ellas, la construcción de la curva.
   - Determinar la intersección de la gráfica de la función con los ejes coordenados.
   - Encontrar las regiones del plano donde la función es positiva y donde es negativa.
   - Calcular las asíntotas del gráfico de la función (asíntotas verticales, oblicuas y horizontales).
   - Obtener otros puntos del gráfico de la función a partir de escoger determinados valores de su dominio y para ellos hallar su imagen.
   - Trazar un sistema de coordenadas rectangulares y reflejar en él los elementos obtenidos en los pasos anteriores, hasta lograr un esbozo del gráfico de la función.
   - Hallar los intervalos de monotonía de la función.
   - Determinar los extremos relativos de la función.
   - Obtener los intervalos de concavidad de la función.
   - Encontrar los puntos de inflexión de la función.
   - Trazar nuevamente un sistema de coordenadas rectangulares y reflejar en él los elementos de los pasos del 1 al 6, así como los encontrados en los pasos del 8 al 11.

- Usar el asistente matemático DERIVE para trazar el gráfico de la función con auxilio de la computadora y comparar el mismo con el elaborado de forma manual.

3. Para que los alumnos se apropien del procedimiento anterior, realizar un conjunto de ejemplos, de los más simples a los más complejos y además, en cada uno lograr mayor independencia cognoscitiva respecto al anterior. Hacer una selección de ejemplos para lograr esos fines, son adecuados los ejemplos desarrollados en Ballester (2007).
4. Indicar a los estudiantes que con el uso del Asistente Matemático DERIVE, grafiquen las funciones que fueron tratadas en los ejercicios anteriores para comparar los gráficos con los hechos de forma manual.

8. RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE OPTIMIZACIÓN

Recomendaciones didácticas

1. Transmitir a sus alumnos que muchos problemas de Optimización pueden resolverse mediante el uso del Cálculo Diferencial. En realidad desde el punto de vista histórico los rudimentos del cálculo diferencial en principio fueron desarrollados por Fermat, que intentó encontrar métodos generales para determinar máximos y mínimos.

   Dos clásicos problemas de optimización son:

   - Principio del producto máximo con suma constante: Dado un número positivo S**.** Entre todos los pares de números positivos x, y tales que $x + y = S$, el producto x, y es mayor cuando $x = y = \frac{S}{2}$ **.**
   - Principio de la suma mínima con producto constante: Dado un número positivo P**.** Entre todos los pares de números positivos x, y tales que $x \cdot y = P$, el que hace la suma $x + y$ mínima es cuando $x = y = \sqrt{P}$.

2. Informar a los alumnos que los métodos que han aprendido para hallar extremos de funciones, tienen aplicaciones prácticas en muchas esferas de la vida. Sin embargo, el desafío más grande suele ser convertir el problema dado en lenguaje natural, en un problema matemático de optimización, es decir, establecer la función que debe maximizarse o minimizarse.
3. Indicar un procedimiento didáctico para la solución de problemas de optimización (Se perfecciona el indicado en Ballester (2007)).
   1. Comprender el problema**:** Leer cuidadosamente el problema varias veces, hasta que se entienda con claridad. Hacerse las preguntas siguientes: ¿Cuál es la incógnita? ¿Cuáles son las cantidades dadas?. ¿Cuáles son las condiciones dadas? ¿Cuáles son las cantidades buscadas?.
   2. Dibujar un diagrama: en la mayoría de los problemas, resulta útil dibujar un diagrama e identificar en el las cantidades dadas y las buscadas. Las palabras

como qué, encontrar, cuánto, dónde o cuándo suelen estar asociadas a las cantidades desconocidas.

3. Declarar las variables: asignar una variable a la cantidad que se va a maximizar o minimizar (llamémosla Q). Asimismo, seleccionar variables (x, y, z) para las otras cantidades desconocidas y marcar el diagrama con esas variables.
4. Expresar a Q en función de algunas de las variables x, y, z.
5. Si en el paso anterior se ha expresado Q como función de más de una variable, utilizar la información dada para hallar relaciones (en la forma de ecuaciones) entre estas variables. A continuación usar estas ecuaciones para en la expresión Q eliminar todas las variables, excepto una. De esta forma Q se expresará como función de una sola variable, digamos $Q = f(x)$. Escribir el dominio de esta función.
6. Aplicar uno de los procedimientos estudiados para hallar el valor máximo o el valor mínimo de la función f.
7. Comprobar lo resultados.
8. No desanimarse si no puede resolver algún problema. Adquirir habilidad para resolver problemas necesita una gran cantidad de esfuerzo y práctica. ¡Hay que seguir intentándolo!

4. Para que los alumnos se apropien de este procedimiento, el docente debe: Analizar varios ejemplos en las clases a través del trabajo conjunto entre él y los alumnos. En Ballester (2007, 330-334) se desarrollan cinco ejemplos adecuados para ello. Con cada ejemplo, primeramente se indicará como paso inicial su lectura en silencio por parte de los estudiantes. Posteriormente, el docente comprobará a través de preguntas la comprensión del problema y sucesivamente conducirá la ejecución de cada uno de los pasos del procedimiento. Si no se dispone del tiempo necesario para el análisis de todos los ejemplos, se indicará como trabajo independiente su estudio.

CONCLUSIONES

En total se han planteado 56 recomendaciones didácticas, las de mayor significación permiten simplificar aún más la enseñanza-aprendizaje de los problemas de optimización a través de la búsqueda de extremos utilizando los procedimientos descritos.

El logro de una clase dinámica en el uso de las TIC en estos procedimientos novedosos contribuye al logro de los objetivos relacionados con una mejor apreciación en el cálculo de extremos.

La inclusión en el proceso de enseñanza-aprendizaje de las recomendaciones didácticas genera dinámicas de interacción en las que el profesor y el grupo de alumnos trabajan unidos en la construcción del aprendizaje.

De esta manera, **los alumnos adquieren un papel activo, desarrollando un sentido de responsabilidad** frente a su aprendizaje. Además, el desarrollo de la autonomía del alumno favorece la creación de estrategias de aprendizaje propias, las cuales podrá aplicar también a otras áreas similares, generando en él sentimientos de autosuficiencia y utilidad.

Finalmente, si se realiza un correcto desarrollo de las estrategias didácticas, el educador conseguirá optimizar la adquisición de los conocimientos, favoreciendo el aprendizaje en los alumnos de aquellas habilidades o competencias que se hayan preestablecido como importantes.

El trabajo en detalles con la demostración de teoremas contribuyó a la perdida del temor de los estudiantes a este tipo de tarea tan compleja y por las habilidades alcanzadas permite proyectar los objetivos a profundizar en los métodos de demostración en la matemática.

La actitud reflexiva y crítica de los estudiantes se acentúa con el intercambio acerca de la historiografía de matemáticos y sus obras permitiendo lograr un razonamiento más interpretativo en el interés por la matemática, la demostración de teoremas y la obtención de resultados.

La modelación de problemas en ecuaciones matemáticas y el cálculo de los extremos mejoran considerablemente siempre que los estudiantes complementen el procedimiento perfeccionado con la guía especializada del docente.

REFERENCIAS

Aldana, F., Mora-B, C., Ricaño, H, F. Álvarez S. E. López V., Navarro, P. J. Solórzano, H. R., Ramírez R.García A. M. Hernández F. M. Rosas M. E. (2016*). Identificación de las causas de reprobación en la facultad de ingeniería mecánica eléctrica región Xalapa de la Universidad Veracruzana.* Disponible en : http://www.divergencias.com.mx/index.php?option=com_content&view=article&id=223:identificacion-de-las-causas-de-reprobacion-en-la-facultad-de-ingenieria-mecanica-electrica-region-xalapa-de-la-universidad-veracruzana&catid=115:ciencias -sociales&Itemid=363.

Apostol, T. M. (1961). *Calculus I*. New York, Estados Unidos de Norteamérica: Blaisdell.

Ballester, S. (Ed.). (2007). *Matemática superior I.* La Habana, Cuba: Pueblo y Educación.

Dolores C. (2000). *Una propuesta didáctica para la enseñanza de la derivada. El futuro del cálculo infinitesimal*. Grupo Editorial Iberoamérica. México D. F.

Llin, V. y Pozniak, E. (1991). *Fundamentos del análisis matemático 1*. Moscú, URSS: Mir.

Llorens, J. L. (1995). *Introducción al uso del DERIVE: aplicaciones al algebra y al cálculo.* Valencia, España: Universidad Politécnica de Valencia.

Moreno, M. (2005). El papel de la didáctica en la enseñanza del cálculo. Evolución, estado actual y retos futuros. En A. Maz, B. Gómez y M. Torralbo (eds.), *IX Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (pp. 81-96). Córdoba, España: Universidad de Córdoba.

Ríbnikov, K. (1991). *Historia de las matemáticas.* Moscú, URSS: Mir.

Sánchez–Matamoros, G., García M., Llinares S. (2008). La comprensión de la derivada como objeto de investigación en didáctica de la matemática. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa, 11*(2), 267-296.

Spivak, M. D. (1996). *Cálculo infinitesimal*. New York, Estados Unidos de Norteamérica: Reverté.

Velazco, M. y Mosquera. (2010). Estrategias didácticas para el aprendizaje colaborativo. PAIEP. Recuperado de http://acreditacion.udistrital.edu.co/flexibilidad/estrategias_didacticas_apren dizaje_colaborativo.pdf.

Épsilon - *Revista de Educación Matemática* *2019, nº 103, 25-33*

Herramienta de análisis de contenido en libros de texto: ecuaciones de primer grado

Salvador Chulián García
Maria Rosa Durán
Pilar Azcárare Goded
Universidad de Cádiz

Resumen: *En este artículo se realiza un análisis de contenido de diferentes libros de texto de la Educación Secundaria Obligatoria, centrándose en los temas de la resolución de ecuaciones de primer grado. Para ello, se realiza un diseño de investigación basado en los sistemas de categorías, que permitirá estudiar el contenido de dichos libros de texto. Finalmente, se investigan diferentes libros de texto, que son de 2o y 3er curso de secundaria y, a su vez, de tres editoriales diferentes.*
Palabras clave: *análisis de contenido, libros de texto, ecuaciones de primer grado.*

A tool for content analysis in textbooks: first-degree equations

Abstract: *This work is based on content analysis for Secondary Education textbooks, whose focus is first order equations lessons. The content of such textbooks is studied through research design, following the standards of category systems. Finally, different textbooks from 2nd and 3rd school year of Spanish secondary system are taken into account for research, being these textbooks also from three different publishing houses.*
Keywords: *content analysis, textbook, first-degree equations*

1. INTRODUCCIÓN

Hoy en día, muchos alumnos considerarían, para resolver una ecuación de primer grado, el "pasar todas las 'x' al primer miembro y los números al segundo". Por ello, cabe hacerse ciertas preguntas: ¿qué sentido matemático hay detrás de ese "pasar"?, ¿cuál es el papel de esa incógnita ('x')?, ¿proviene ésta de un problema real?

Éstas y otras cuestiones son las que se plantean a la hora de la enseñanza y el aprendizaje de ecuaciones lineales, de modo que consideraremos el libro de texto como objeto a través del cual se realizará un análisis de contenido. Como elemento indispensable en la cultura escolar de hoy en día, los libros de texto constituyen un cuerpo útil para su observación y estudio.

En este artículo se presenta una herramienta que permite realizar un análisis de contenido de diferentes libros de texto de la Educación Secundaria Obligatoria (E.S.O.), centrándose en los temas de la resolución de ecuaciones de primer grado. Para ello, en la Sección 2, se expone el planteamiento de cuestiones en relación al álgebra y al papel de los libros de texto en las aulas de instituto. En la Sección 3 se desarrolla un sistema de categorías propio que permitirá estudiar el contenido de dichos libros de texto. En la Sección 4, finalmente, se analizan los resultados para el estudio de ecuaciones de primer orden en diferentes libros de texto, que son de 2º y 3er curso de secundaria y, a su vez, de tres editoriales diferentes.

2. LA ECUACIONES DE PRIMER ORDEN Y SU ENSEÑANZA EN LOS LIBROS DE TEXTO

El libro de texto, como elemento insoslayable para el docente de hoy en día en el aula (Cordero y Flores, 2007) ha sido analizado en múltiples investigaciones que dejan clara su influencia en el aula (Azcárate y Serradó, 2006). Proponemos un análisis que deberá tener en cuenta aspectos relacionados con el objeto de estudio, que en este caso serán las ecuaciones de primer grado.

A priori, en relación a las ecuaciones lineales, debemos conocer cómo se enseñan: por ejemplo, suele usarse la sintonía de "ser parecido pero con letras" con respecto al cálculo numérico (Douady, 1995, pág. 76). Otro acercamiento a su enseñanza se da en función de los diferentes tipos de representaciones para las transformaciones algebraicas, como por ejemplo, a través del uso de recursos virtuales, como puede ser la balanza virtual (Vlassis, 2002; Bonilla y Rojano, 2013).

También ponemos énfasis sobre el entendimiento de los obstáculos epistemológicos a la hora del aprendizaje de la resolución de ecuaciones, que vienen normalmente dados por estas transformaciones algebraicas. Éstas se representan a través de metáforas objetuales (utilizando propiedades particulares en un objeto matemático, correspondiéndose con el papel relacional del signo igual); o a través de metáforas operacionales (con transposición de términos, llevando un término a otro miembro a través de reglas, relacionándose así con el papel operacional del signo igual) (Abrate, Font Moll y Pochulu, 2008; Knuth, Stephens, McNeil y Alibali, 2006). Aun así, existen otros modos de resolución menos formales como el intuitivo y el de tanteo (Kieran y Yagüe, 1989).

Estas cuestiones deberán verse reflejadas en el análisis que se realizará a los libros de texto: así, en la siguiente sección, se incluirán dentro del sistema de categorías creado para el estudio de ecuaciones lineales.

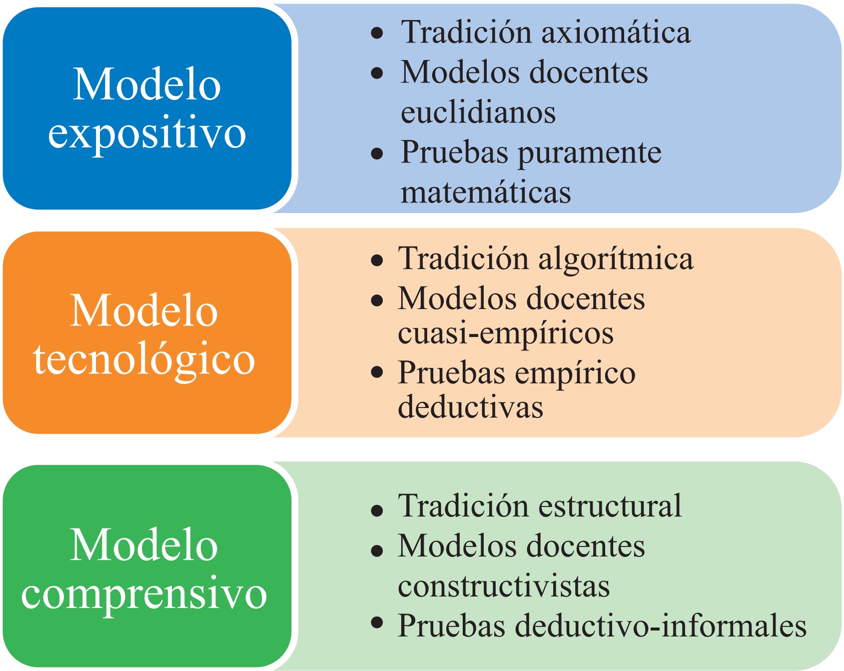


Figura 1. División en función de la tipología de libros de texto.Fuente: Elaboración Propia.

3. METODOLOGÍA: EL ANÁLISIS DE CONTENIDO

Para la recogida de información consideramos necesaria la realización, primeramente, de un sistema de categorías que permita ver en qué modelo de libro de texto nos encontramos. El sistema de categorías será creado por el propio autor, de manera que utilizaremos dos sistemas de categorías ya realizados que, junto a la sección anterior, compondrán el sistema de categorías final que servirá de base de recogida de información.

Consideraremos para nuestro análisis una división de libros de texto en tres tipos, en función del estudio de éstas y otras características, según la división ofrecida por González y Sierra (2004) para libros de texto de matemáticas: expositivo, tecnológico y comprensivo. Aunamos en estos tres modelos otras características de modelos docentes (Gascón, 2001), tradiciones de representación matemática (Klimovsky y Boido, citados por Llanos, Otero y Banks, 2007) y tipologías de argumentación matemática (Llanos, Otero y Banks, 2007), tal y como se observa en la Figura 1.

Elaboramos así un sistema de categorías que combina tanto el modelo Azcárate y Serradó (2006) como el de González y Sierra (2004), incluyendo nuevas dimensiones relacionadas específicamente con el álgebra, y dividiendo así las distintas editoriales en los modelos de anteriormente vistos. La tabla se dividirá en diferentes dimensiones, caracterizándolas en tres niveles (expositiva, tecnológica y comprensiva) y diviéndolas en 6

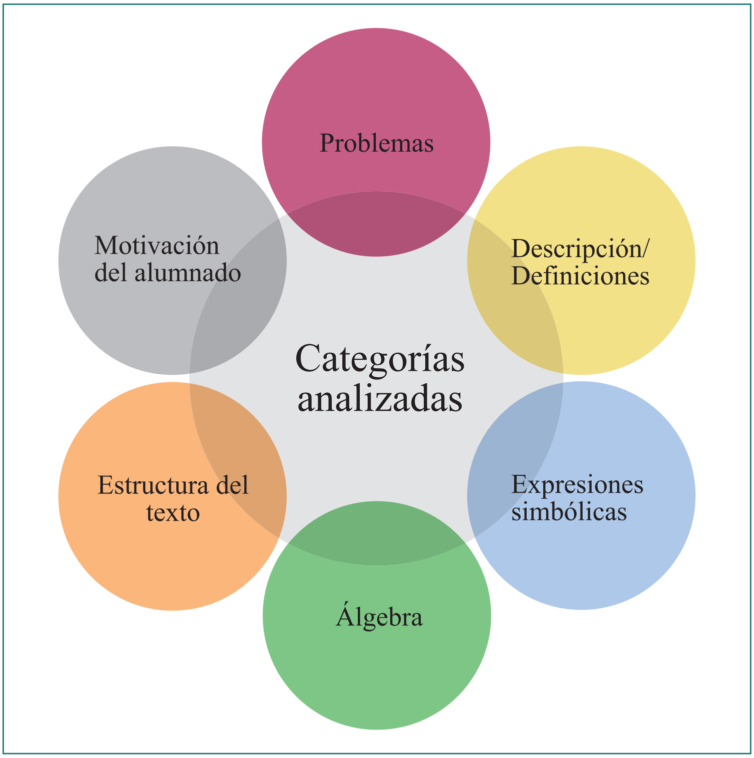


Figura 2. Categorías a analizar. Fuente: Elaboración Propia.

categorías (ver Figura 2): Problemas y Ejercicios, Descripciones y Definiciones, Expresiones simbólicas, Álgebra, Estructura general, y finalmente Motivación al alumnado.

Las tres primeras tienen su base en el modelo de González y Sierra, y las dos últimas en el de Azcárate y Serradó. La categoría "Álgebra" presenta cuestiones más específicas del marco teórico relacionado con ecuaciones lineales.

A continuación, presentamos el sistema final de categorías que utilizamos (tabla 1).

Como instrumento para recoger información del libro de texto y poder aplicarlo a dicho sistema de categorías, es necesario un formulario que provenga de la Tabla 1. Este resumiría dichas categorías y nos ayudaría a analizar los aspectos más representativos y característicos tanto del libro de texto en sí como del método de enseñanza-aprendizaje plasmado en él para la resolución de problemas algebraicos.

4. RESULTADOS DEL ESTUDIO PARA DISTINTAS EDITORIALES

El lenguaje algebraico se introduce en los primeros cursos de la E.S.O. (Ministerio de Educación, Cultura y Deporte, 2015). Consideramos así una selección deliberada del tema, de acuerdo a los siguientes criterios del investigador: ante la no-disponibilidad de libros de texto de 1º de la E.S.O., observaremos el tránsito del conocimiento entre los cursos de 2º y 3º de la E.S.O. De estos libros se realizará un análisis de contenido,

Tabla 1. Propuesta de sistema de categorías del proyecto actual

Categorías		Dimensiones	Expositivo	Tecnológico	Comprensivo
Problemas	1	Estructura del problema	Clásica	Aplicación	Explicación
	2	Fenomenología	Matemáticas	Realistas	Reales
	3	Función de los ejercicios	Rutinarios	Aplicación	Deducción
	4	Influencia social y adaptación al currículo	No hay	Contexto intemporal	Contexto actual
Descripción/ Definiciones	5	Descripciones teóricas	Formales	Formales-intuitivas	Intuitivas
	6	Tipos de descripciones	De conceptos	De reglas	De relaciones
	7	Papel de las definiciones	Estructurales-teóricas	Aplicación a problemas	Interpretación
Expresiones simbólicas	8	Complejidad de sus expresiones simbólicas	Clásicas	Sencillas	Complejas
	9	Tipos de expresiones simbólicas	Familias	Específicas	Variadas
	10	Significado de las expresiones y metáforas simbólicas	Objeto	Regla	Proceso
	11	Papel de las expresiones simbólicas	Ejemplificación	Escolar	Social
Álgebra	12	Método de resolución	Formal, como identidad	Formal como regla	Métodos intuitivos y/o tanteo
	13	Papel del signo igual	Identidad	Como regla	Operacional
	14	Papel de las variables	Número generalizado	Solución de ecuación	Incógnitas de problemas
	15	Representación de ecuaciones	Sin representación	Geométrica	Geométrica y alternativas (virtual)
	16	Génesis del álgebra	Formal	Generalización del cálculo numérico	Con razones históricas
Estructura	17	Influencias didácticas	Clásica	Adaptada al currículo	Novedosa
	18	Contenidos	Predominio conceptual	Predominio Conceptual y procedimental	Predominio procedimental y actitudinal

Categorías		Dimensiones	Expositivo	Tecnológico	Comprensivo
	19	Programación	Contenidos	Objetivos	Elección de alumnos
Motivación	20	Tipología de imágenes	Decorativas o sin imágenes	Repetitivas	Informativas
	21	Trabajo	Individual	Individual y algo grupal	Grupal
	22	Experiencias iniciales	No se considera	Exploración inicial de partida	Eje organizador

Fuente: Elaboración Propia.

teniendo en cuenta los temas asignados a la resolución de ecuaciones lineales, que se repiten a lo largo del currículum.

Entre los libros elegidos, dos son de la Editorial Anaya (Colera y Gaztelu, 2012; Colera, González, Gaztelu y Colera, 2015), dos de la Editorial Edelvives (Lazcano y Sanz, 2000; Frías, Paz, Del Río y Vidal, 1995) y otros dos de la Editorial Proyecto Sur (Berenguer et al, 2003; Berenguer et al, 2002). Hemos de resaltar que la elección de los libros se ha dado sujeta a la disponibilidad de los mismos, de manera que sólo el libro de 3º de la E.S.O. del Grupo Anaya se encuentra adaptado al currículo vigente (Ministerio de Educación, Cultura y Deporte, 2015).

A continuación presentamos los resultados obtenidos que han permitido caracterizar cada una de las dimensiones para tres editoriales distintas y dos cursos (2º y 3º de la E.S.O.) resumidas en la Tabla 2, donde "E" es expositivo, "T" tecnológico, y "C" comprensivo.

Podemos finalmente extraer, a través del análisis realizado, algunas de las características principales de las editoriales, que se han analizado gracias al sistema de categorías creado:

1. Editorial Anaya (Colera y Gaztelu, 2012; Colera, González, Gaztelu y Colera, 2015):
   - Adscrita al modelo tecnológico con rasgos del modelo comprensivo.
   - Problemas con contexto real, aunque muchos más ejercicios algorítmicos.
   - El más reciente tiene una estructura mucho más comprensiva, con génesis histórica, métodos de tanteo y definiciones intuitivas.
2. Editorial Edelvives (Lazcano y Sanz, 2000; Frías, Paz, Del Río y Vidal, 1995):
   - Adscrita al modelo tecnológico.
   - Descripciones muy explicativas y problemas tipo como guía del alumno.
3. Editorial Proyecto Sur (Berenguer *et al*, 2003; Berenguer *et al*, 2002):
   - Adscrita al modelo expositivo con algún rasgo del modelo comprensivo.
   - Gran cantidad de textos explicativos pero con imágenes meramente decorativas.

Tabla 2. Resumen de resultados obtenidos por editorial y curso una vez pasado el formulario de análisis de contenido.

Dim.	Anaya (2º)	Anaya (3º)	Edelvives (2º)	Edelvives (3º)	Proy. Sur (2º)	Proy. Sur (3º)
1	T	C	T	T	C	T
2	E	E	E	E	E	E
3	T	T	T	T	T	E
4	E	E	E	E	E	E
5	T	C	C	T	E	E
6	T	C	T	T	E	E
7	T	C	T	T	E	E
8	T	T	T	C	T	T
9	T	C	T	C	C	T
10	T	T	E	T	E	E
11	T	T	E	E	E	E
12	T	C	T	E	C	C
13	T	E	E	E	E	E
14	T	T	E	T	E	E
15	T	C	E	E	E	E
16	E	C	E	E	E	E
17	T	C	E	T	E	E
18	T	T	T	T	E	T
19	T	E	E	T	E	E
20	T	E	E	E	E	C
21	E	E	E	E	E	E
22	T	T	T	T	E	E

Fuente: Elaboración Propia.

5. CONCLUSIONES

En este trabajo se ha expuesto una herramienta de análisis que es vital para una buena elección del material didáctico. El libro de texto es fundamental para el profesorado actual como guion del currículo legislativo actual. Sin embargo, sin un análisis previo que considere varias facetas además del contenido, puede ocurrir que el libro de texto propicie un modelo de enseñanza-aprendizaje que no beneficie: 1) ni al alumnado, a la hora de encontrarse con obstáculos epistemológicos; 2) ni al profesorado, ya que nos encontraríamos con un contenido que propicie que el proceso de enseñanza se haga poco motivador.

El uso de un sistema de categorías para la categorización de libros de texto puede ser útil a la hora de realizar una aproximación sobre ellos. Además, esto permite utilizar el material docente que mejor se adapte a la metodología del profesor. Así, aunque sean los libros de texto los que deban hacer un contenido asequible y comprensible para los alumnos, la herramienta presentada permite analizarlos eficazmente para su buena utilización.

REFERENCIAS

Abrate, R., Font Moll, V. y Pochulu, M. (2008). Obstáculos y dificultades que ocasionan algunos modelos y métodos de resolución de ecuaciones. *Proyecciones, 6* (2).

Azcárate, P. y Serradó, A. (2006). Tendencias didácticas en los libros de texto de matemáticas para la ESO. *Revista de Educación* (340), 341-378.

Berenguer, L., Berenguer, M., Cobo, B., Daza, M., Fernández, F. P., Payá, A. y otros. (2003). *Matemáticas 2º E.S.O.* Granada: Proyecto Sur Ediciones, S.L.

Berenguer, L., Berenguer, M., Cobo, B., Daza, M., Fernández, F. P., Payá, A. y otros. (2002). *Matemáticas 3º E.S.O.* Granada: Proyecto Sur Ediciones, S.L.

Bonilla, M. y Rojano, T. (2013). Transferencia del aprendizaje situado de la sintaxis algebraica: ecuaciones lineales y balanza virtual. *Memorias del I Congreso de Educación Matemática de América Central y El Caribe* (págs. 1247-1256). Santo Domingo, Santo Domingo, República Dominicana.

Colera, J. y Gaztelu, I. (2012). *2º Educación Secundaria.* Madrid: Grupo Anaya.

Colera, J., González, M., Gaztelu, I. y Colera, R. (2015). *3º Educación Secundaria Obligatoria. Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas.* Madrid: Grupo Anaya.

Cordero, F. y Flores, R. (2007). El uso de las gráficas en el discurso matemático escolar. Un estudio socioepistemológico en el nivel básico a través de los libros de texto. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa , 10* (1), 7-38.

Douady, R. (1995). La ingeniería didáctica y la evolución de su relación con el conocimiento. En M. Artigue, R. Douady, L. Moreno y P. Gómez (Eds), *Ingeniería didáctica en educación matemática* (Págs, 61-97). Bogotá: Grupo Editorial Iberoamérica, S.A. .

Frías, V., Paz, M., Del Río, T. y Vidal, M. (1995). *3º Matemáticas.* Zaragoza: Editorial Luis Vives.

Gascón, J. (2001). Incidencia del modelo epistemológico de las matemáticas sobre las prácticas docentes. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa , 4* (2), 129-159.

González, T. M. y Sierra, M. (2004). Metodología de análisis de libros de texto de matemáticas. *Enseñanza de las Ciencias , 22* (3), 389-408.

Kieran, C. y Yagüe, E. F. (1989). El aprendizaje del álgebra escolar desde una perspectiva psicológica. *Enseñanza de las ciencias: revista de investigación y experiencias didácticas, 7* (3), 229-240.

Knuth, E. J., Stephens, A. C., McNeil, N. M. y Alibali, M. W. (2006). Does understanding the equal sign matter? Evidence from solving equations. *Journal for research in Mathematics Education*, *37*(4),297-312.

Lazcano, I. y Sanz, J. F. (2000). *2º Matemática.* Zaragoza: Editorial Luis Vives.

Llanos, V. C., Otero, M. R. y Banks, L. L. (2007). Argumentación matemática en los libros de texto de la enseñanza media. *Revista electrónica de investigación en educación en ciencia , 2* (2), 39-53.

Ministerio de Educación, Cultura y Deporte. (3 de Enero de 2015). Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y el Bachillerato. *Boletín Oficial del Estado.* Madrid, Madrid, España.

Vlassis, J. (2002). The balance model: Hindrance or support for the solving of linear equations with one unknown. *Educational Studies in Mathematics, 49* (3), 341-359.

Épsilon - *Revista de Educación Matemática* *2019, nº 103, 35-44*

FotoGebra y competencias digitales: análisis de un caso

Karina Amalia Rizzo,
karinarizzo71@gmail.com
ISFDyT 24, Bernal, Quilmes (Argentina)
INSP Socorro, Quilmes (Argentina)
Instituto Sagrada Familia, Quilmes (Argentina)

Resumen: *En el presente trabajo se relata y muestra la evolución y progresiva adquisición de competencias digitales de un estudiante de escuela secundaria (ES), quien ha sabido, además, trabajar cooperativamente con otros pares en algunas ocasiones. Tales competencias se han puesto en juego a través de un concurso denominado FotoGebra, que combina matemática con fotografía y GeoGebra. Fue iniciado en Argentina y tiene como destinatarios a estudiantes de escuelas secundarias y de profesorados, e invita a crear un problema a partir de una fotografía de su autoría, utilizando para su resolución el software GeoGebra.*
Palabras clave: *Matemática, GeoGebra, Competencias Digitales, Concurso.*

FotoGebra and digital skills: analysis of a case

Abstract: *This paper describes and shows the evolution and progressive acquisition of digital skills by a high school student, who has also known how to work cooperatively with other people in some occasions. Such skills have been developed through a contest called FotoGebra. This educational competition started in Argentina and is aimed at high schools students and teachers, and invites to create a problem from a photograph of their authorship, using GeoGebra software for solving the problem they posed.*
Keywords: *Mathematic, GeoGebra, Digital Skill, Contest.*

1. INTRODUCCIÓN

Casi sin que nos demos cuenta, las tecnologías de la información y comunicación (TIC) llegaron para quedarse y nos invaden en varios aspectos de nuestras vidas. Aunque algunas veces lo rechacemos, las utilizamos en múltiples situaciones y si no lo hacemos, la sociedad nos lo impone y nos vemos en la incertidumbre de sus posibles usos y beneficios.

Vivimos tiempos de cambio, donde nada está dado, todo se transforma y la práctica docente, en consecuencia, no puede estar lejos de ello. Los diversos escenarios donde se encuentra inmersa dan cuenta de una realidad compleja, allí se ponen sobre el ruedo lo múltiple y complejo del sujeto que aprende. El docente debe encontrar el modo de llegar a todos los estudiantes y a "su mundo digitalizado". Entonces, ¿Cómo preparar de manera óptima a los estudiantes para un mundo que cambia a un ritmo vertiginoso? " (Rizzo, 2017)

Desde diferentes ámbitos se busca encontrar respuestas al interrogante.

Indudablemente, la permanente reconfiguración de la cultura digital genera una revolución en la enseñanza y en la sociedad, la cual necesita el compromiso de todos para incluirla y avanzar.

En un mundo digital y en constante cambio, se considera importante que los docentes (y todos los actores involucrados en la educación) desarrollemos competencias digitales para el progreso de las mismas con nuestro alumnado.

Asimismo, por su veloz expansión, las TIC son concebidas como los actores más eficaces del cambio social actual (Domingo y Marqués, 2011).

En este contexto se evidencia que la educación debe considerarse como un proceso a lo largo de toda la vida. Tal es así que en 2006 el Parlamento y el Consejo Europeo, publicaron ocho competencias clave para el aprendizaje permanente como respuesta Europea ante la globalización y las economías basadas en el conocimiento. Muchas de ellas se solapan y entrelazan (determinados aspectos esenciales en un ámbito apoyan la competencia en otro)

Entre estas competencias se encuentran la comunicación en lengua materna, las competencias matemáticas y en ciencia y tecnología, competencias sociales y cívicas, conciencia y expresión y las competencias digitales.

Éstas últimas según Punie (2012) son consideradas al mismo tiempo, transversales, puesto que facilitan la adquisición de otras.

Asimismo, UNESCO (2018) menciona la importancia de las competencias digitales para el empleo y la inclusión social, que facilitan el uso de los dispositivos digitales, las aplicaciones de la comunicación y las redes para acceder a la información y llevar a cabo una mejor gestión de éstas.

En particular en Argentina, el Ministerio de Educación de la Nación (2017) nos indica la necesidad de promover la alfabetización digital centrada en el aprendizaje de competencias y saberes necesarios para una inserción plena en la cultura contemporánea y en la sociedad del futuro.

A su vez, y de una manera enfática, las TIC se priorizan, implementando el plan Aprender Conectados, enmarcado en la agenda 2030 para el desarrollo sostenible aprobada por la Asamblea General de la Organización de las Naciones Unidas (ONU), y en el Plan Estratégico Nacional 2016-2021

> «Argentina Enseña y Aprende», cuya misión principal es integrar la comunidad educativa en la cultura digital. Propone en sus objetivos "fomentar el conocimiento y la apropiación crítica y creativa de las TIC, y demanda identificar las competencias fundamentales para facilitar la inclusión de los alumnos en la cultura digital, aseverando que solo de esta manera podrán convertirse en ciudadanos plenos, capaces de construir una mirada responsable y solidaria, y transitar con confianza por distintos ámbitos sociales, indispensables para su desarrollo integral como personas. (Ministerio de Educación. Argentina, 2017).

Las competencias digitales sugeridas en este marco son seis: creatividad e innovación, comunicación y colaboración, pensamiento crítico, uso autónomo de las TIC, participación responsable y solidaria, información y representación.

El enfoque por competencias en sus inicios solo se vinculaba a las habilidades y destrezas, sin embargo, en la actualidad se fueron integrando otros saberes. Perrenoud (2009) las define como:

> […] las aptitudes para enfrentar eficientemente una familia de situaciones análoga, movilizando a conciencia, y de manera a la vez rápida, pertinente y creativa, múltiples recursos cognitivos: saberes, capacidades, microcompetencias, informaciones, valores, actitudes, esquemas de percepción, de evaluación y de razonamiento.

En este sentido se hace evidente que las competencias capaciten a las personas para: "saber" (competencias vinculadas con el conocimiento), "saber hacer" (competencia vinculada con la aplicación de dicho conocimiento) y "saber ser" (competencia social representada a través de actitudes y conductas). Se espera en las instituciones educativas que sus egresados adquieran no sólo conocimientos, si no también esas competencias (Le Deist y Winterton, 2005).

Y es así, que buscando dar respuestas a un contexto de cambio permanente, en el cual las habilidades relacionadas con las tecnologías digitales se han convertido en unas de las más valoradas para el desarrollo, la integración social y la construcción del conocimiento, se decide implementar un concurso denominado FotoGebra. En él se conjuga la fotografía y el software libre GeoGebra, con el lema: "Atrapar con tu foto un concepto matemático, si puedes…". GeoGebra es un software de geometría dinámica, libre y multiplataforma, que ha sido concebido en especial para favorecer la educación matemática y tal como menciona Carrillo (2012) su utilización en el aula es imprescindible, pues permite realizar construcciones que en lápiz y papel no podrían efectuarse.

El concurso incita cada año, a los participantes (estudiantes de escuelas secundarias e institutos de profesorado) a observar detalladamente su alrededor, invitándolos a descubrir que en todo cuanto los rodea está implícita de una manera esencial la matemática. La propuesta consiste en que los estudiantes tomen una fotografía, la inserten en la Vista Gráfica del software GeoGebra, diseñen una situación problemática que la involucre y utilizando tal soporte tecnológico, puedan dar respuesta al problema.

En la primera edición realizada en el año 2016, se postularon 50 participantes de dos instituciones de gestión privada, de Nivel Secundario de la localidad de Quilmes, provincia de Buenos Aires. Un año más tarde, se duplicó esa cantidad porque se incorporaron otros sectores de la Provincia de Buenos Aires (Quilmes, Berazategui, Florencio Varela, La Plata y sus alrededores).

En la III Edición (2018) participaron además de estudiantes del Ciclo Básico y del Ciclo Superior Orientado de los Servicios Escolares de Nivel Secundario, los Institutos de Formación Docente de la República Argentina. En ésta última edición, también se abre la convocatoria, de la mano de Agustín Carrillo (Embajador a nivel mundial del software GeoGebra) a instituciones de España.

La inscripción al concurso es gratuita y tiene sólo fines educativos.

En función del año que curse, se establecieron las siguientes categorías:

- Categoría 1: Alumnos 1º, 2º y 3º ES.
- Categoría 2: Alumnos 4º, 5º y 6º de ESS.
- Categoría 3: Alumnos de 1º y 2º año de Institutos de Formación Docente.
- Categoría 4: Alumnos de 3º y 4º año de Institutos de Formación Docente

Los trabajos, deben realizarse por grupos de 2 alumnos/as de la misma categoría y éstos podrán presentar como máximo 3 trabajos. Un mismo alumno/a no podrá formar parte de más de un equipo.

Todas las bases son publicadas en las redes sociales y en el sitio web del concurso: www.fotogebra.org .

Durante el período transcurrido, entre la presentación de las bases del concurso y la entrega de las fotografías, se realizan charlas informativas y talleres abocados al uso de GeoGebra, tanto para estudiantes como para los docentes que deseen asistir.

Luego se efectúa una muestra física y otra virtual mediante la publicación de las obras en el Facebook del concurso (<https://www.facebook.com/FotoGebra/>). En ambas muestras el público en general pueda votar, y el más elegido recibe una mención especial.

Seguidamente se convoca a varios especialistas en la temática, quienes evalúan las obras presentadas.

2. ANÁLISIS DE LOS TRABAJOS DE UN ESTUDIANTE DE 17 AÑOS DE EDAD, QUE CURSA 6º AÑO EN EL INSTITUTO NUESTRA SEÑORA DEL PERPETUO SOCORRO, QUILMES, BS. AS. :

Concretamente nos centramos en el análisis de un caso particular, porque estimamos que en él podremos observar no sólo la inclusión de las competencias digitales, sino, además contemplar y advertir el crecimiento intelectual del joven estudiante.

1º trabajo: Miss caparazón 2016.

En esta obra, el estudiante se atreve a observar la peculiar forma del caparazón de su tortuga, y con la colaboración de una compañera se plantean la necesidad de averiguar cuánto miden los ángulos de las figuras que se advierten, para su posible participación en un concurso.

En este primer trabajo, se observa gran creatividad tanto en el planteo como en la resolución de la situación problemática. Y pese a que esta fue su primera experiencia con GeoGebra, pudieron apropiarse del software como medio para construir un espacio de

Figura 1. Miss Caparazón 2016. Autores:Abril Oviedo y Danilo Fuentes. Edición 2016 <https://www.geogebra.org/m/ybn9aybk>.

imaginación y fantasía como así también dar respuesta a los interrogantes planteados inicialmente, utilizando sus conocimientos previos respecto de figuras geométricas, ángulos interiores, exteriores y suplementarios. Identificándose, en este caso particular la apropiación de la **competencia digital de creatividad e innovación, comunicación,** así como la de **uso autónomo de las TIC.**

2º Trabajo: Dulce o miau. 2017

En éste caso, en particular el estudiante buscó apoyo en otro compañero y haciendo uso de las competencias digitales ya adquiridas, se plantean la necesidad de averiguar cuánta tela necesitaban para diseñar un disfraz de Halloween para su gato. Para ello toman una foto del animal y utilizan el comando ajuste polinómico para obtener una función del contorno de su cuerpo. Seguidamente con el comando integral averiguan el área y estiman cuánta tela comprar.

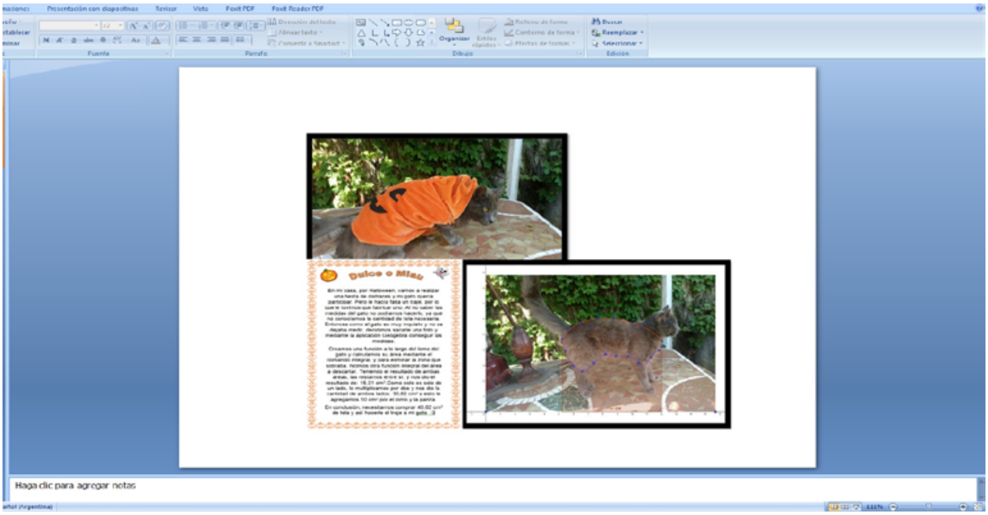


Figura 2. Dulce o miau. Autores: Danilo Fuentes y Federico Dulorans. Edición 2017 <https://www.geogebra.org/m/Am4KsZyd#material/BYegusA6>.

Podemos advertir que en esta oportunidad, pudieron *aprender a aprender*, mediante la investigación del concepto y manipulación del software. Ya que el concepto “integral” se enseña generalmente en la universidad, en Argentina.

3º Trabajo: Cavidad cupil. 2018

En esta oportunidad, el estudiante ha trabajado de manera individual, y particularmente sintió la necesidad de saber cuánto champagne le habían servido en una Copa de Flauta.

Para determinar la cantidad que había tomado modela el contorno de la misma, en la vista gráfica utilizando para ello función exponencial y función a trozos. Luego en la vista gráfica 3D, calcula el valor del volumen del contenido del cilindro.

El dinamismo de GeoGebra le permitió investigar y advertir que realizando la diferencia entre el volumen del cilindro y del solido de revolución, obtendría la respuesta a su pregunta. Y nuevamente aquí, mediante la investigación de un concepto no abordado en las clases de matemática, encontró la respuesta al interrogante inicialmente planteado

Observándose, de esta manera, un manejo diferente de las competencias digitales ya adquiridas y nuevas competencias matemáticas.

El entusiasmo de Danilo, en particular fue tal, que ese año participo con dos obras.

4º Trabajo: Cuy sediento.2018

En los siguientes ejemplos, el estudiante propicia el trabajo en equipo, invitando a su primera compañera. En esta ocasión, observan una foto de los Acueductos de Cantalloc, en

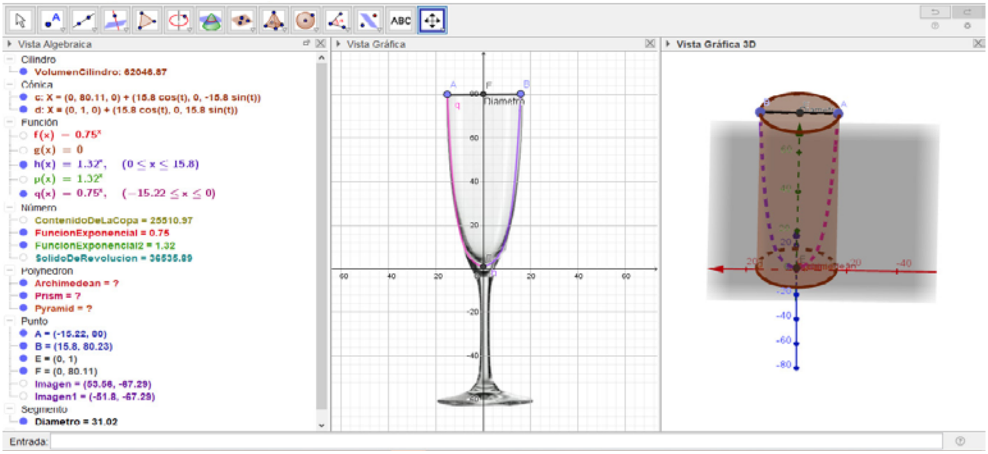


Figura 3. Cavidad cupil. Autor: Danilo Fuentes. Edición 2018
<https://www.geogebra.org/m/fjqbdu63#material/cp9gazj2>.

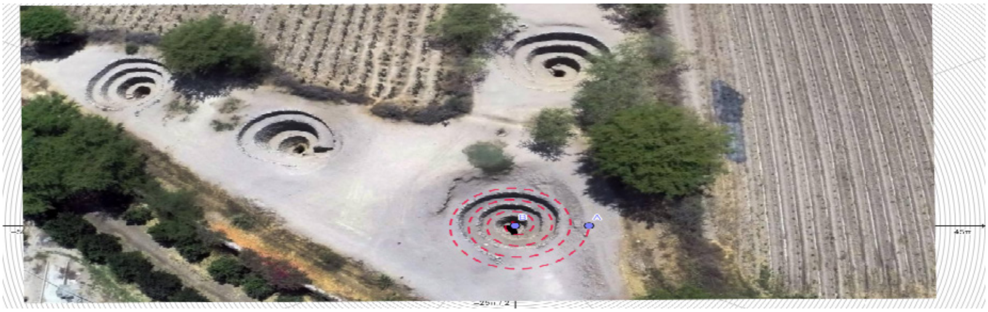


Figure 4. Cuy Sediento. Autores: Abril Oviedo y Danilo Fuentes. Edición 2018
<https://www.geogebra.org/m/vhxnnfez>.

Nazca. Estas fosas en forma de espiral (Puquios) por las cuales se incorpora el agua de lluvia, llamaron la atención de los estudiantes y les hizo preguntarse qué tan largos son los caminos en espiral, para estimar cuánto tiempo tardara un cuy en recorrer la fosa para llegar al acueducto y beber agua.

Para ese fin, utilizaron nuevamente conceptos no abordados con anterioridad tales como: "espiral de Arquímedes" y "longitud" de una espiral. Luego investigaron la velocidad promedio (concepto básico de física) de este animal para estimar el tiempo que tardara en llegar al acueducto.

Los estudiantes en este caso, pudieron desarrollar la **competencia digital de colaboración y comunicación** porque consiguieron crear y comunicar en cooperación a través de múltiples lenguajes de representación, incluyendo imágenes, textos y animaciones para simular el movimiento del cobayo. Asimismo se ve el avance en cuanto al manejo del software (**competencia uso autónomo de las TIC**), pues en esta segunda obra, usaron herramientas que les permitieron explorar de una forma dinámica, mediante el empleo de los deslizadores de GeoGebra para ajustar una espiral.

Es valorable, el compromiso del estudiante en la participación del concurso pues, aun estando de vacaciones, estuvo atento y se detuvo en captar una imagen, a través de una fotografía que le sirvió como soporte para el trabajo.

5º trabajo: Los jardines de Oberón. 2019

Esta obra se aboca al análisis de la fuente central de los jardines de Oberón.

La misma consta de un gran estanque con 17 pequeñas cascadas que vierte sobre un segundo estanque a sus pies. A su vez el estanque central se encuentra abastecido por 6 fuentes ubicadas a ambos lados del mismo. Contemplando la obra, los adolescentes *"no pudieron evitar preguntarse: ¿Cuánta agua se necesitará para que funcione? Es decir, cuantos litros serian necesarios para que el estanque se mantenga lleno, y constantemente se derrame agua en el segundo estanque"*

Luego de calcular el volumen de agua del cuerpo principal, del sector circular y el de cada canaleta, se preguntaron por la distancia que recorre el agua que cae desde ésta última hasta el estanque pequeño. Para dar respuesta a esta inquietud, además de insertar un formulario drive para interactuar con el lector, jugaron con deslizadores para encontrar la expresión de la función cuadrática que modeliza la caída del chorro de agua y así, mediante el comando longitud, obtener dicha medida.

Es de destacar que éstas no han sido sus únicas incertidumbres. Durante la búsqueda de la solución a su problema inicial, los participantes han podido plantear nuevas preguntas **(competencia pensamiento crítico)** y buscaron su solución de forma **creativa e innovadora** incluyendo datos curiosos, como por ejemplo: "el agua de la fuente es igual a 85 duchas promedio de Londres o al consumo de 2569 días y medio (aproximadamente 7 años) de una persona que tome 2 litros por día".

Por lo tanto, a través del relato de los alumnos, se puede advertir la promoción de un compromiso con el medio ambiente, y la adquisición de la **Competencia digital de participación responsable y solidaria** así como también la de **Información y representación.**

CONCLUSIONES

En este trabajo se intentó describir, analizar y valorar la labor personal y los avances de un estudiante de escuela secundaria que participó, individualmente o con pares, en todas las ediciones de un concurso denominado FotoGebra el cual tiene entre sus objetivos motivar a los participantes a "hacer matemática" y potenciar el uso de las TIC.

Después de lo desarrollado con anterioridad podemos concluir, que en el caso particular de este alumno, como en tantos otros participantes, GeoGebra permite diferentes formas de aprender matemática, desafiándolos a descubrir por sí mismos nuevas herramientas y conceptos, desde el primer instante. Y estas competencias que se adquieren mejoran y evolucionan con cada participación.

Asimismo, se evidencia que permite a los estudiantes pensar creativamente e inventar sus propios interrogantes y problemas. Propiciando el aprendizaje mediante la

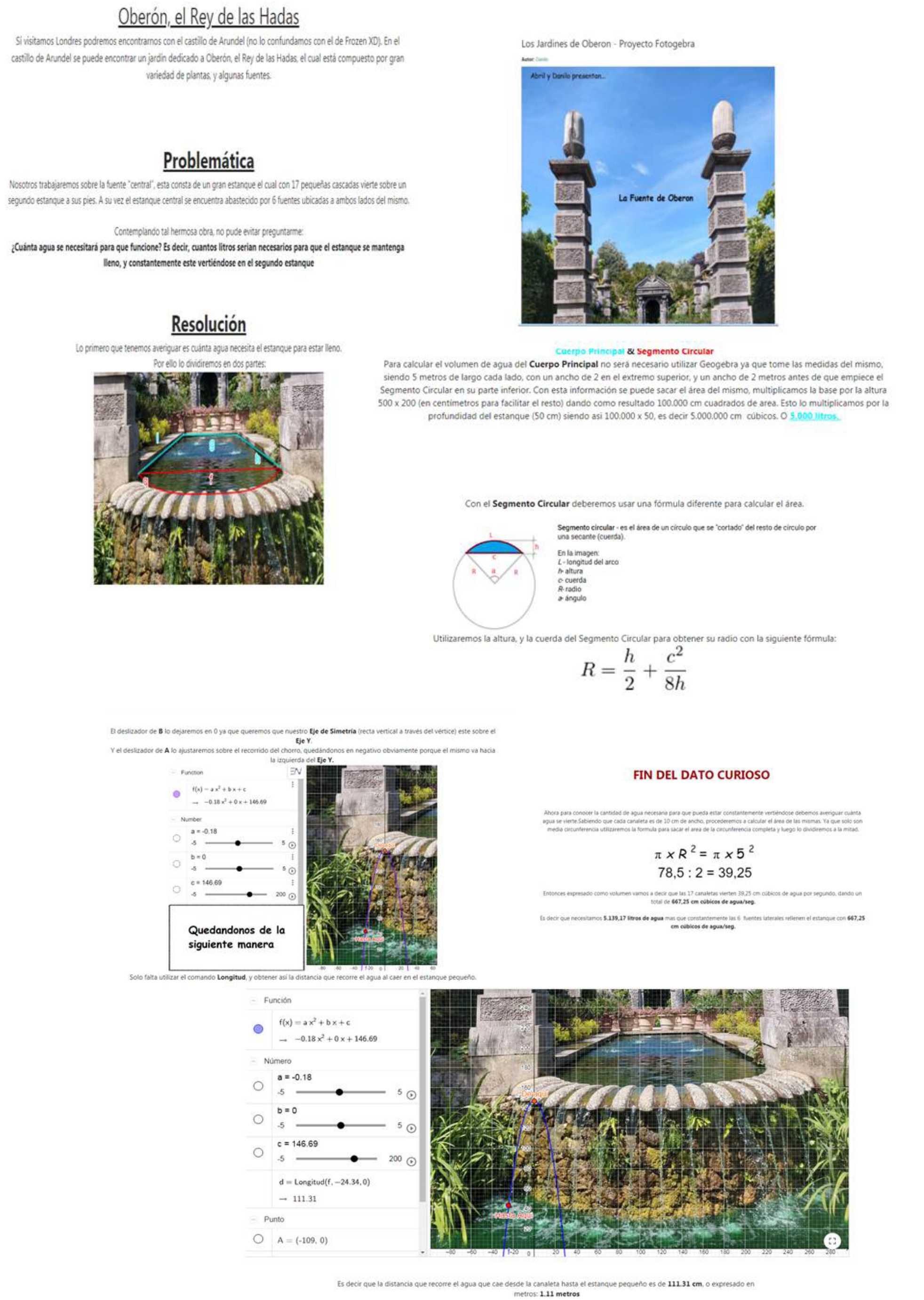


Figure 5. Los jardines de Oberón. Abril Oviedo y Danilo Fuentes. Edición 2019 <https://www.geogebra.org/m/raqwgwmk>.

investigación, el trabajo colaborativo, y el planteo eficaz de respuestas diversas a los problemas que hayan sido planteados.

Finalmente se concluye que este estilo de propuesta permite a los estudiantes desarrollar varias de las competencias digitales necesarias en la era actual, además de propiciar modos no tradicionales de hacer matemática.

REFERENCIAS

Cacheiro González, M L (2011). Recursos educativos TIC de información, colaboración y aprendizaje, *Pixel-Bit. Revista de Medios y Educación*, 39, 69-81. Disponible en: <http://acdc.sav.us.es/pixelbit/images/stories/p39/06.pdf>.

Comisión Europea (2007) Competencia Clave para el Aprendizaje Permanente. Un Marco de Referencia Europeo. Disponible en: <http://www.mecd.gob.es/dctm/ministerio/educacion/mecu/movilidadeuropa/competenciasclave.pdf?documentId=0901e72b80685fb1>.

Domingo, M. y Marqués, P. (2011). Aulas 2.0 y uso de las TIC en la práctica docente. *Comunicar, 37,* 169-175. Disponible en: <https://www.revistacomunicar.com/verpdf.php?numero=37&articulo=37-2011-20>.

Le Deist, F. D., & Winterton, J. (2005). What is competence? *Human resource development international, 8*(1), 27-46.

Ministerio de Educación de la Nación (2017). *Competencias de Educación Digital. Ciudad Autónoma de Buenos Aires.* Argentina. Disponible en: <https://www.argentina.gob.ar/sites/default/files/competencias_de_educacion_digital_1.pdf>.

Perrenoud, P. (2009) Construir competencias desde la escuela. Chile: JC Saenz Editor.

De Pablos, J. (2010). Universidad y sociedad del conocimiento. Las competencias informacionales y digitales. Competencias informacionales y digitales en educación superior» [monográfico en línea]. *Revista de Universidad y Sociedad del Conocimiento (RUSC),7*,(2). Fecha de consulta: 02/05/2019. http://rusc.uoc.edu/ojs/index.php/rusc/article/view/v7n2-de-pablos/v7n2-de-pablos

Punie, Y. (2012). Preface. In A. Ferrari (2012), *Digital Competence in Practice: an Analysis of Frameworks.* (p. 1). Sevilla: JRC IPTS. Disponible en: <http://jiscdesignstudio.pbworks.com/w/file/fetch/55823162/FinalCSReport_PDFPARAWEB.pdf>.

Rizzo, K (2017). Atreverse al cambio que propone la interdisciplinariedad. OEI. disponible en: <https://www.oei.es/historico/divulgacioncientifica/?atreverse-al-cambio-que-propone-la-interdisciplinariedad>.

Sanchez, J. (2002). Integración Curricular de las TIC: Conceptos e Ideas. Actas VI Congreso Iberoamericano de Informática Educativa

UNESCO (2005). *Hacia las Sociedades del Conocimiento.* Francia: Ediciones UNESCO.

UNESCO (2018). *Las competencias digitales son esenciales para el empleo y la inclusión social.* Disponible em: <https://es.unesco.org/news/competencias-digitales-son-esenciales-empleo-y-inclusion-social>.

Aplicando *flipped classroom* para el aprendizaje basado en problemas (ABP) en secundaria

Jorge-Pozo, D.
C.P.C. Escuelas Pías
Jiménez-Gestal, C.
Universidad de La Rioja

Resumen: *La experiencia que exponemos a continuación muestra la aplicación del método de enseñanza flipped classroom combinado con aprendizaje basado en problemas ABP. La experiencia ha sido realizada en aulas de secundaria.*
Palabras clave: *flipped classroom, ABP, matemáticas.*

Resolution of problem-based learning (PBL) applying flipped classroom in secondary

Abstract: *We present below an experience which is a mix between two learning methods, flipped classroom and problem based learning, PBL. The experience has been done in a secondary classroom.*
Keywords: *flipped classroom, PBL, mathematics.*

INTRODUCCIÓN

El interés hacia la asignatura de matemáticas no es una de las características más relevantes en las aulas de secundaria. Nos encontramos en ocasiones con un alumnado desmotivado que no presta atención a las explicaciones del docente y se aburre con la metodología tradicional. Es por ello necesario tratar de romper la rutina de las clases utilizando recursos que cambien de algún modo la percepción de la materia que tienen los estudiantes. De esta necesidad es de la que surge la aplicación del método flipped classroom.

Este método se ha transformado desde que sus precursores Lage, Platt y Teglia (2000) decidieron invertir el modelo tradicional de enseñanza. Con este método tratamos de dar un rol diferente al alumno, que debe colaborar más activamente en el proceso de aprendizaje (Berenguer, 2016). Este modelo pedagógico concreto, ha evolucionado sobre todo gracias a las aportaciones y el desarrollo de J. Bergmann y A. Sams. Para ellos la metodología consiste en realizar en aula lo que tradicionalmente se hacía en casa, para que aquello que era tradicionalmente conocido como deberes y se realizaba en casa, ahora pueda ser completado en el aula (Bergmann & Sams, 2012). Es a partir de 2012 con la incorporación de vídeos a las presentaciones del profesor y al trabajo en casa, cuando comienza a extenderse su uso a las diferentes aulas del mundo. El término anglosajón flip tiene el significado de dar la vuelta, por lo que podríamos concretar que la expresión flipped classroom será para nosotros invertir el aula, más concretamente invertir el método tradicional de enseñanza. En el modelo flipped la clase está centrada en el estudiante y no en el docente. Los alumnos son los responsables de visualizar los vídeos y anotar las dudas. El profesor facilita retroalimentación a sus consultas, además, el alumno sigue siendo responsable de completar y compartir su trabajo. En todo momento dispone de una guía de indicadores para su evaluación, las rúbricas; de esta manera, el alumno puede decidir hasta dónde desea llegar, siendo de nuevo el responsable de su propio aprendizaje (Bergmann & Sams, 2012, p.16).

Existen diferentes maneras y enfoques de realizar esta tarea y, como comentan en su libro Bergmann y Sams (2012), la personalización de la educación debe ser utilizada como una solución, por ello, el modelo flipped classroom ha sido inspiración y parte de esta experiencia. Las ventajas que encontramos con este método tal y como dice Aguilera-Ruiz, Manzano León, Martínez-Moreno, Lozano-Segura, Casiano Yanicelli (2017) son en primer lugar, el ahorro de tiempo lectivo en el aula, que debido a los contenidos curriculares que debemos cumplir en un curso es uno de los beneficios a la hora de usar este método. Además de hacer al alumno protagonista de su aprendizaje, podemos añadir que, gracias a la utilización de vídeos, es él quien tiene la posibilidad de adaptar el aprendizaje a su propio ritmo, ya que cuenta con la posibilidad de visualizar el contenido tantas veces como necesite. Hay diferentes autores que ven una serie de ventajas en el uso de este método de enseñanza como Bergmann, Overmeyer y Willie (2011) que dicen que el método flipped classroom tiene tres ventajas aplicables al aula: mejor desarrollo de los estudiantes en su vida, una mayor participación en el material disponible y finalmente el aumento de las interacciones entre estudiantes y profesorado.

La experiencia que presentamos a continuación muestra la aplicación del método de enseñanza flipped classroom a un problema propuesto por el profesor que podríamos enmarcar en los llamados ABP, aprendizajes basados en problemas. Cada estudiante tendrá que resolver un problema propuesto por el profesor y utilizar las herramientas que éste le proporciona. Para ello utilizaremos principalmente flipped classroom.

EXPERIENCIA

Grupo

La experiencia se llevó a cabo en un aula de cuarto de educación secundaria, en dos cursos diferentes. La clase estaba integrada por 32 estudiantes el primer año y por 11 estudiantes el segundo año, y se ubicaba en el colegio C.P.C. Escuelas Pías de Logroño

Metodología

La metodología utilizada consiste en una combinación de ABP con flipped classroom. Hemos desarrollado un ABP que engloba la unidad didáctica de proporcionalidad. Con esta metodología estaremos trabajando además de la competencia matemática, debido al contenido matemático de la misma, la competencia digital, ya que durante el desarrollo utilizaremos diferente software y los alumnos tendrán que utilizar las tecnologías como medio de aprendizaje y, por supuesto, la competencia de aprender a aprender. Con esta metodología, como ya hemos comentado, es cada estudiante quien se encarga de su propio aprendizaje teniendo al profesor como un guía o apoyo, de esta manera es el propio estudiante quien decide si necesita más o menos intervención del profesor durante la unidad.

Objetivos

Los objetivos propuestos con esta experiencia han sido, en primer lugar, dotar al alumnado de los conocimientos que exige el currículo sobre la unidad didáctica elegida. En segundo lugar, fomentar el uso de las tecnologías. Y, por último, pero no menos importante, aumentar la motivación del alumnado por el estudio de las matemáticas utilizando este método alternativo.

Desarrollo

Este modelo pedagógico ha sido utilizado en la unidad didáctica de Proporcionalidad, la cual hace referencia en el currículo de secundaria de La Rioja a los contenidos del Bloque 2, Números:

- Proporcionalidad directa e inversa: aplicación a la resolución de problemas de la vida cotidiana.
- Los porcentajes en la economía. Aumentos y disminuciones porcentuales. Porcentajes sucesivos. Interés simple y compuesto.

Los estándares de aprendizaje evaluables utilizados han sido:

1.5. Compara, ordena, clasifica y representa los distintos tipos de números reales, intervalos y semirrectas, sobre la recta numérica.

1.6. Aplica porcentajes a la resolución de problemas cotidianos y financieros y valora el empleo de medios tecnológicos cuando la complejidad de los datos lo requiera.

1.7. Resuelve problemas de la vida cotidiana en los que intervienen magnitudes directa e inversamente proporcionales.

Antes de comenzar la experiencia en el aula, debemos encajar en la temporalización de la programación didáctica la unidad que vamos a trabajar. Debemos tener en cuenta que la grabación y edición de vídeos supone una inversión extra de tiempo, que tendremos que contemplar en la planificación del tiempo y los contenidos. Además, tenemos

Figura 1

que tener claros los conceptos que queremos mostrar en el aula para ser precisos y breves en las explicaciones. Tratamos de captar la atención del alumnado por lo que la duración de los vídeos no deberá superar los cuatro minutos.

Para poder llevar a cabo la experiencia hemos utilizado diferente software, la mayor parte gratuito. En el caso de los vídeos hemos utilizado Windows Movie Maker, Wondershare Filmora, Free Make Videoconverter, por su gratuidad y su fácil manejo.

Los vídeos se alojaron en Google Drive de manera que cada estudiante proporcionó al profesor su correo electrónico para poder consultar la carpeta compartida con el material en el momento en el que cada uno lo precisase.

Cada estudiante sólo tenía permisos de lectura sobre los archivos de esta manera no podían modificar nada en la carpeta del aula. Suponer que todos los alumnos tienen los conocimientos para acceder a este tipo de archivos es un error. Es por ello por lo que la primera sesión está preparada para mostrar al alumnado cómo acceder a los vídeos desde su ordenador.

Además del material audiovisual cada estudiante disponía de un archivo en PDF dónde se encontraba el problema que aborda los contenidos de la unidad propuesta para trabajar. En este caso el ABP se ha desarrollado en un contexto de una familia que hereda de un familiar que muere, diferentes bienes con los que tendrán que hacer una serie

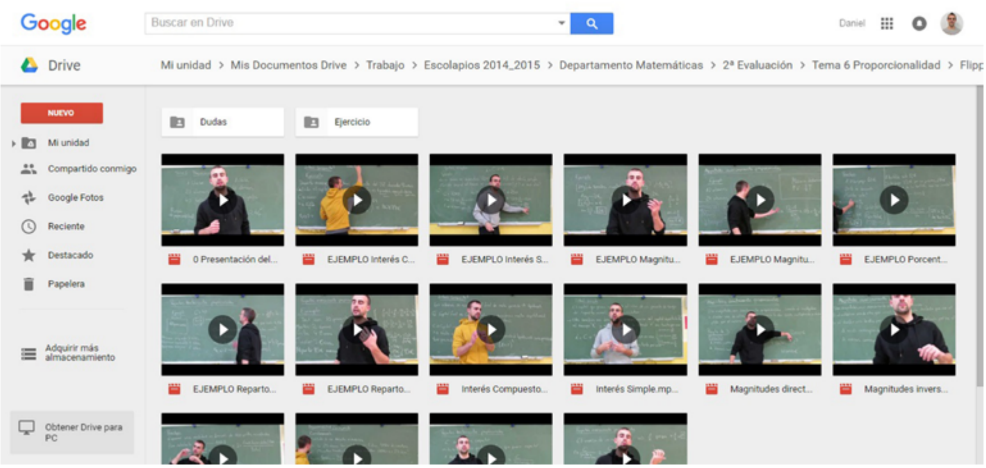


Figura 2

de repartos equitativos, además de unas inversiones para poder llegar a tener esa herencia. Otra de las posibilidades que se le brindó al estudiante es crear un archivo de texto en el que comunicar las diferentes dificultades que ha encontrado a la hora de resolver algún apartado. De esta manera el resto de estudiantes tenían la posibilidad de consultarlo para ayudarle o realizar su propio trabajo. Como queríamos promover el uso de las tecnologías, los alumnos tenían la posibilidad de comunicarse entre ellos mediante un foro creado en la plataforma Click Edu (plataforma que utiliza el colegio para comunicarse con las familias y el alumnado y en la que poseen cuenta todos los alumnos del centro) donde podían debatir diferentes aspectos del ABP propuesto. Además, cada estudiante podía revisar una rúbrica que estaba compartida en la carpeta con los correspondientes ítems evaluativos y su nivel de logro.

El siguiente paso por dar fue explicar en el aula el problema de manera general. Se hizo una lectura en voz alta de cada una de sus partes, de esta manera, se evitaron malentendidos con los enunciados y además se provocó que al menos los alumnos hayan leído una vez el ejercicio de manera completa.

Las siguientes sesiones tienen una estructura similar. Primero, antes de acabar la sesión anterior, será el profesor quien indiqué qué vídeos debe visualizar al alumno en su casa, para, de esta manera, poder trabajar una serie de ejercicios y problemas en el aula. Los ejercicios estarán relacionados con la temática de los vídeos y el contenido correspondiente a esa parte de la unidad didáctica, pero no entraremos en la resolución del problema principal, nuestro ABP. Para resolver el ABP vamos a dejar un tiempo razonable durante las sesiones, pero sobre todo tiene que ser trabajo personal. Durante cada sesión de la unidad dejaremos diferentes tiempos, en las sesiones iniciales unos veinte minutos por sesión de trabajo individual y en las sesiones finales daremos unos quince minutos de trabajo en grupo o por parejas para resolver el ABP. De esta manera incentivamos la colaboración entre el alumnado y el trabajo colaborativo (figuras 4 y 5).

	1	2	3	4
Realización	El alumno/a no desarrolla el trabajo. / El alumno/a ha copiado el trabajo o parte de él a algún compañero/a.	El alumno/a desarrolla el trabajo de manera incompleta, al menos un 60% del mismo. / El alumno/a ha copiado algún apartado a algún compañero/a.	El alumno/a desarrolla la mayor parte del trabajo, sin copiar nada a ningún compañero/a.	El alumno/a desarrolla el trabajo al 100% sin copiar. Y además, incluye elementos que no están solicitados por el problema.
Comprensión	El alumno/a no ha entendido el interés simple y compuesto, la proporcionalidad directa e inversa: en la resolución de problemas además de los porcentajes en la economía.	El alumno/a entiende con dificultad el interés simple y compuesto, la proporcionalidad directa e inversa: en la resolución de problemas además de los porcentajes en la economía.	El alumno/a comprende sin problemas el interés simple y compuesto, la proporcionalidad directa e inversa: en la resolución de problemas además de los porcentajes en la economía. Además, se interesa por las hipotecas y préstamos bancarios. Todo aquello que tiene que ver con la matemática económica.	El alumno/a entiende perfectamente el interés simple y compuesto, la proporcionalidad directa e inversa: en la resolución de problemas además de los porcentajes en la economía. Además, se interesa por las hipotecas y préstamos bancarios. Todo aquello que tiene que ver con la matemática económica. Usa la hoja de cálculo para la organización de cálculos asociados a la resolución de problemas cotidianos y financieros
Originalidad	El alumno/a no presenta nada.	El alumno/a presenta un material que ya se ha presentado con anterioridad.	El alumno/a presenta una solución propia y de una manera concreta.	El alumno/a presenta la solución del problema de al menos dos maneras diferentes en más de dos apartados del problema.
Uso útil materiales	El alumno/a no ha utilizado los materiales proporcionados, visualización de vídeos, descargas de pdf, uso del drive para cuestiones, consultas en la web.	El alumno/a ha consultado parte del material, pero no lo ha utilizado correctamente para el desarrollo del ejercicio.	El alumno/a ha utilizado de manera correcta y apropiada los materiales proporcionados.	El alumno/a ha utilizado de manera correcta y apropiada los materiales proporcionados y además ha consultado otra serie de materiales haciendo referencia de ellos en la solución propuesta por el alumno/a.
Presentación	No hay presentación.	La presentación del alumno/a esta hecha de manera desordenada y <<sucia>>.	La presentación del alumno/a esta ordenada y <<limpia>>.	La presentación del alumno/a está ordenada, limpia y presentada de manera formal y normalizada.

Figura 3

Para la evaluación de la unidad cada estudiante ha tenido a su disposición una rúbrica en la que comprobar la puntuación para cada apartado. La evaluación por parte del profesor será la corrección del ABP y además la observación sistemática realizada a diario en el aula.

RESULTADOS

Los resultados de evaluación de la unidad didáctica fueron favorables en comparación con la evaluación de años anteriores en la misma unidad didáctica. No podemos sacar una conclusión definitiva sobre los resultados obtenidos puesto que se han realizado con alumnos diferentes. Sí que podemos, de manera subjetiva, decir que los alumnos que han trabajado con el modelo flipped classroom lo han hecho de manera más relajada y con una ansiedad menor. En cuanto al ambiente del aula, ha mejorado notablemente durante el desarrollo de la actividad, el hecho de utilizar herramientas tecnológicas y una metodología diferente a la utilizada día a día ha hecho que los alumnos presten más atención y especial interés por resolver el problema propuesto.

En cuanto a la educación de los alumnos, podemos decir que el modelo flipped sigue las fases de la taxonomía de Bloom, (Santiago, Díez y Nalda, 2014) recordar, comprender, aplicar, analizar, evaluar, crear, dando importancia a las fases que el alumno debe desarrollar por su propio conocimiento, ya que nos encontramos ante un modelo de trabajo constructivo donde el profesor es un mero guía del conocimiento y es cada estudiante quien construye el suyo propio. Cada estudiante tiene la posibilidad de visualizar

Capítulo 2

La historia de un testamento

Triste día

Un frío día de invierno, todo transcurría con normalidad cuando derrepente sonó el teléfono. El gesto de la cara de Luis cambio por completo, parecía mentira, pero el abuelo Julio Alberto acababa de fallecer.
Fué una noticia que todos recibieron con mucha tristeza, pero en especial sus hijos, los cuales ahora son padres y madres de 4 familias diferentes.
Los cuatro hermanos eran Luis, Juan, Martina y Daniela. Cada uno, tiene una historia que conoceremos a continuación y que nos guiará en el tema de la proporcionalidad.

3

4 CAPÍTULO 2. LA HISTORIA DE UN TESTAMENTO

Conociendo a la familia

Daniela

Tenemos a la mayor de las hermanas, ella se ha sentido siempre como la madre de los 4 hermanos, siempre ha estado cuidando de ellos y con motivo de ello, no pudo acabar sus estudios, lo cuál no fué ningún impedimento para que acabará haciendo lo que más le gusta, que es programar software. Trabaja para una empresa de aplicaciones informáticas. Daniela es madre de dos chicos que les encanta jugar a lacrosse.
Ella ha sido siempre muy autodidacta, su sueldo no es gran cosa, ya que forma parte la llamada sociedad mileurista, aunque con el suplemento de buen trabajador llega a cobrar al final de mes unos 1.500 €.

Luis

Era el mayor de los 4 hermanos, tenía una familia compuesta por 2 revoltosos hijos y 1 hija preciosa. Trabajaba en una mina como ingeniero y la verdad que le va bastante bien, su sueldo mensual rondaba los $\frac{2}{3}$ del sueldo del dueño de la mina, cuyo salario anual formado por 14 pagas era de 39.900 €.
Como hemos comentado antes Luis era el mayor de cuatro hermanos no sabemos exactamente su edad pero hemos podido averiguar que la suma de la edad de Luis y la de Daniela suman 104 años.

Juan

Él es el menor de los 4 hermanos, está acabando la universidad, debido a unos problemillas personales el estudio universitario se le alargo más de la cuenta y aún le quedan un par de asignaturas pendientes.
A pesar de todo, está trabajando en algo que le encanta, el *trading*, una forma de ganar dinero invirtiendo en bolsa. El sueldo mensual que se está llevando es de unos 1.700 €. La edad de Juan es exactamente la mitad que la de su hermano mayor Luis.
Por el momento Juan tiene una hija y es un hombre feliz.

Martina

Es la pequeña de las hermanas pero es mayor que Juan, digamos que es la tercera en discordia. Martina trabaja como abogada en un bufete y su sueldo mensual ronda las $\frac{6}{5}$ del salario mensual de Juan.
Esta supermamá además de tener la suerte de trabajar para la justicia española, es madre de un hijo y una hija. La edad de Martina es, dos veces el noveno número primo (sin contar el 1). Además la suma de las edades de Juan y Martina es igual a 73 años.

5

El reparto

El abuelo Julio Alberto, dejó claro en su testamento como quería repartir su herencia. Lo primero que hizo fué vender casi todas sus tierras y posesiones consiguiendo un bote de 144.000€, dinero que metió en una cuenta bancaria.

A parte de ese dinero metido en un banco, Julio Alberto tenía unos ahorrillos guardados por casa, no era tanto dinero como lo anterior pero no estaba mal, ya que era dinero que se encontraba en metálico. Encontraron un sobre que contenía 76.110 €. Este dinero había sido conseguido con el sudor de su frente trabajando muy duro con el ganado en su pueblo natal Ribrafecha.

El abuelo Julio Alberto fué claro con la orden del reparto,

- El dinero que encontraron en el sobre sería directamente porporcional a las edades de cada uno de los hermanos.

- En cambio el dinero que se encontraba en la cuenta corriente sería repartido inversamente proporcional al número de hijos/as que tiene cada uno.

6 CAPÍTULO 2. LA HISTORIA DE UN TESTAMENTO

El gasto

Según el testamento del abuelo Julio Alberto, los hijos deberían reinvertir ese dinero en ellos mismos, bien en sus casas, coches, hipotecas, empresas etc. Así que cada uno decidió hacerlo de una forma.

Luis

El dinero que recibió Luis, lo fué a invertir en un coche nuevo, se fijó en este anuncio.

Tras leer bien la letra pequeña, decidió quedarse con él. Y el dinero restante lo metería a las cuentas bancarias de sus hijos, repartido equitativamente, con un plazo fijo y tipo de interés simple del 3% durante 5 años.

Daniela

El objetivo de Daniela es cambiarse de casa en un futuro no muy lejano, por lo que ingresará todo su dinero en una cuenta bancaria a interés compuesto del 1,8 % durante 12 años.

Figura 4

7

Martina

Martina por el contrario, quería prepararse un viaje durante 30 días (29 noches). Estuvo mirando distintas ofertas y calculando cuanto se podría gastar más o menos.
Las ofertas eran las siguientes, tomando el vuelo desde la ciudad de Madrid.

Destino	Tel Aviv	Yakarta	Sydney
Vuelo/Persona	800 €	920 €	1370 €
Precio Hotel/Noche	75 €	60 €	58 €
Gasto en cominda/día	30€	25 €	40 €
Gastos varios totales	640 €	580 €	750 €



Juan

Por último esta Juan. Quién a pesar de tener una hija, vive de alquiler. Está pensando en comprarse una casa que tendrá que pagarla con una hipoteca.
El precio de la casa que ha visto es de 110.00 €, y la hipotéca que le ofrece su banco es:

- Préstamo de 110.000 €
- A pagar en 25 años
- Con un interés compuesto anual del 4 %

Seguramente con el dinero que reciba pueda pagar gran parte de la casa nueva. Pero el resto si tendrá que pagarlo con hipoteca pidiendo un préstamo. Esta claro que las condiciones cambian, por tanto pagando todo lo que tiene ahorrado, solo le quedaría de pagar una parte, la cuál se corresponde con los siguientes datos hipotecarios.

- Préstamo de 37.000 €
- A pagar en 10 años
- Con un interés compuesto anual del 6 %


Capítulo 3

Pautas

- Lee con atención.
- Vete paso por paso.
- Extrae los datos y vete haciendo un plan de tarabajo.
- Fija bien las edades de cada uno. Puedes usar ecuaciones, aunque quizás no te hagan falta.
- Indica el número de hijos e hijas de cada uno.
- Ten cuidado con el reparto, lee bien si es directa o inversamente proporcional.
- En el apartado del reparto, redondea por exceso a la décima.
- En el apartado de gasto, usa sólo dos posiciones decimales en el caso que tengas que usar decimales.
- Comprueba si es interés simple o compuesto.
- En el apar tado de los viajes, te recomiendo que uses la web www.distancia.co para comprobar que distancia hay de Madrid a las principales capitales mundiales.
- Usa las TICs para enterarte bien de cómo funciona una hipoteca.
- Proporcionalidad compuesta, cuidado si es directa o inversamente proporcional.
- Tienes en la dirección de google drive que está en tu correo toda la información nece-saria, en formato vídeo, para que puedas comprender la parte teórica. ¡¡Consúltala!! Si tienes dudas, agrega un archivo de texto con tus dudas y te las responderé.

9

8 CAPÍTULO 2. LA HISTORIA DE UN TESTAMENTO

El deseo final

Para terminar el abuelo Julio Alberto, tenía una huerta con unos 3000 m². Donde quería construir una bodega para reuniones familiares. Quería construirla con sus propias manos. Al morir, no llegó a empezar, por lo que dejó esta tarea pendiente y de obligado cumplimiento para el cobro del testamento. Por lo que la familia se tendría que poner a trabajar. ¡¡Manos a la obra!!

En total son 4 hermanos, más las 4 parejas de cada uno son 8 personas, además los 2 hijos de Luis y un hijo de Daniela que son ya mayores como para colaborar, por lo que en total son 11 personas para trabajar, vamos a decir que son 11 "obreros".

Tenemos una opción, si los 11 obreros trabajan durante 120 días una jornada de 3 horas cada día, la obra quedarán acabada. El problema, es que no tienen todo ese tiempo, por que cada uno tiene su vida, entonces van a necesitar llamar a gente de confianza para que les puedan ayudar, puesto que solo disponen de 30 fines de semana (Viernes, Sábado y Domingo) un par de horas cada día.

Capítulo 4

Análisis del testamento

1. ¿Cúantos años tiene cada hijo/a? ¿Qué sueldo tiene cada uno?Si tienen hijos o hijas indícalo diferenciando el género.
2. ¿Cúanto dinero recibe cada uno de los hijos de la herencia? Distingue de la parte en efectivo y la parte que está en la cuenta bancaria.
3. Respecto del gasto:
   a) Expón como se gastrá Luis el dinero, calculando lo que se gastará en el coche y lo que invierte en cada uno de sus hijos. ¿Cúal será el capital final al cabo de los 5 años de cada uno de sus hijos?
   b) Respecto a Daniela, ¿Qué capital final tendrá al cabo de los 12 años si la capi-talización es mensual?¿ Y si fuese trimestral?¿Cómo es más beneficiosa para el cliente de un banco la capitalización de sus ahorros?
   c) El viaje de Martina debe ser el más rentable en función de la distancia/precio saliendo desde Madrid, siendo el precio por persona. Razona tu respuesta con argumentos.
   d) En el caso de Juan. Explícame con tus palabras que es una hipoteca, no copies y pegues una definición, pues eso estará mal, quiero lo que tú entiendas por hipoteca. Calcula en ambos casos el dinero que se gasta en total por comprar la casa, bien hipotecando todo desde el principio o bien pagando de entrada todo lo que recibe y pidiendo un préstamo de 37.000€, para pagar el resto. ¿Qué es más rentable para Juan?
4. Calcula cuantos obreros serán necesarios para construir la casa en los días y horas de los que disponen, para poder llamar a gente de confianza que les pueda ayudar.
5. Realiza los ejercicios:
   - Ej. 44,45,51,52 Pag. 100 del libro.
   - Ej. 57,58,65,68 Pag. 101 del libro.
   - Ej. 77,78 Pag. 102 del libro.

Con todo el cariño y amor de tu profesor: Daniel.

10

Figura 5

los vídeos cuantas veces quiera, de esta manera rebajamos la ansiedad que pueda tener a la hora de preguntar en el aula, generando así la confianza necesaria para enfrentarse al problema.

La relación entre iguales mediante un foro de cuestiones hace que la participación del alumnado en la unidad aumente y puedan debatir acerca de las dudas que surgen, haciendo que el docente no tenga que intervenir en ciertos aspectos básicos y favoreciendo de esta manera el trabajo colaborativo. Además, las tecnologías que rodean al alumnado son utilizadas y así este puede darse cuenta de que las matemáticas se pueden trabajar de modos diferentes y con instrumentos que utilizan a diario.

CONCLUSIÓN

En referencia a los objetivos propuestos al inicio de este artículo, podemos concluir que la participación del alumnado ha aumentado, estudiantes con menor rendimiento académico han participado en la actividad por la única razón de utilizar tecnología en la misma. En cuanto al aumento de las interacciones entre estudiantes y profesores, como ya hemos comentado, gracias a los foros de participación y los recursos multimedia utilizados los estudiantes interactúan de una forma más activa. Respecto al mejor desarrollo de los estudiantes en su vida, gracias a este modelo, estamos favoreciendo que el alumno utilice los recursos que le rodean y con ellos cree su propio conocimiento.

La experiencia ha resultado positiva, los alumnos agradecen un cambio de modelo pedagógico. Cabe mencionar también que no al 100 % de los alumnos les motiva este modelo, pero hemos logrado despertar un interés por lo distinto, es decir, salir de la monotonía de las clases tradicionales e intentar un modelo diferente. Pese a la preparación que lleva todo este proceso, hemos de mencionar que la participación del alumnado es completa.

Se aprecia una mejora en la motivación del alumnado por la asignatura ya que las interacciones entre sí y con el profesor han aumentado durante el proceso. Los estudiantes han demandado el mismo modelo en las siguientes evaluaciones, aunque bajo nuestro punto de vista, no es aconsejable realizarlo más de una vez por evaluación, ya que en caso de convertirse en algo rutinario dejaríamos de contar con el factor sorpresa.

REFERENCIAS

Aguilera-Ruiz, C., Manzano, A., Martínez-Moreno, I., Lozano-Segura, Mª C. y Casiano C. (2017). El modelo Flipped Classroom. International Journal of Developmental and Educational Psychology. *Revista INFAD de Psicología*, 4, 261. <http://dx.doi.org/10.17060/ijodaep.2017.n1.v4.1055>.

Berenguer, C. (2016). Acerca de la utilidad del aula invertida o flipped classroom. En M. Tortosa, S.Grau y J. Álvarez (Ed.), XIV *Jornadas de redes de investigación en docencia universitaria. Investigación, innovación y enseñanza universitaria: enfoques pluridisciplinares* (págs. 1466-1480). Alicante, España: Universitat d'Alacant.

Bergmann, J., Overmeyer, J. y Willie, B. (2011). The flipped class: What it is not. *The Daily Riff*. Retrieved from <http://www.thedailyriff.com/articles/the-flipped-class-conversation-689.php>.

Bergmann, J. y Sams, A. (2012). *Flip your classroom: Reach every student in every class every day*. Eugene, Or: International Society for Technology in Education.

Lage, M. J., Platt, G. J. y Treglia, M. (2000). Inverting the classroom: A gateway to creating an inclusive learning environment. *The Journal of Economic Education, 31*(1), 30-43. doi:10.2307/1183338

Santiago, R., Díez Ochoa, A. y Navaridas Nalda, F. (2014) La taxonomía del aprendizaje a debate: Del Modelo de Bloom de los años 50 a la era del aprendizaje móvil. *Revista DIM: Didáctica y Multimedia,* 29, 14

Tourón, J., Santiago, R. y Díez, A. (2014). *The Flipped Classroom. Cómo convertir la escuela en un espacio de aprendizaje (innovación educativa)*. Digital Text ASIN: B00OKKSHKG.

El conteo, de la prehistoria a la escuela istmeña actual

Nahina Dehesa De Gyves
Tecnológico Nacional de México
Campus Instituto Tecnológico del Istmo

Resumen: *En este artículo se presenta una visión acerca de cómo se puede desarrollar una propuesta de educación matemática a partir de edades tempranas. El punto de partida es una obra (Xhigāba Bīnniza) que trata de reproducir la forma en que enumeraban los zapotecos anteriormente al tiempo de la conquista y así proponer una forma pedagógica aplicable a la escuela de nuestros días. Es importante destacar que, aun siendo la lengua zapoteca tan viva en la región sureste de la república mexicana, prácticamente no existe una tradición matemática que promueva su empleo en su lengua natal. Esperamos contribuir a dicho propósito.*
Palabras clave: *conteo índigena, números naturales, sistema vigesimal, lengua zapoteca, Oaxaca, etnomatemática.*

The count, from prehistory to the current istmeña school

Abstract: *In this article we present a vision about how a mathematical education proposal can be developed from an early age. The point of departure is a work (Xhigāba Bīnniza) that tries to reproduce the way in which the Zapotec enumerated before the time of the conquest and thus propose a pedagogical form applicable to the school of our days. It is important to highlight that, although the Zapotec language is so alive in the southeast region of the Mexican Republic, there is practically no mathematical tradition that promotes its use in their native language. We hope to contribute even very modestly to the achievement of that purpose.*
Keywords: *indigenous counting, natural numbers, vigesimal system, Zapotec language, Oaxaca, ethnomathematics.*

1. INTRODUCCIÓN

Oaxaca y en específico la región istmeña mexicana es rica en colores, telares, sabores y texturas y todo ello se puede aprovechar en beneficio de la trayectoria educativa de la comunidad. No es casualidad que los antiguos zapotecos diseñaran un sistema de numeración vigesimal con base principal en el empleo de sus manos, manos que también se especializaron en obras en alfarería y orfebrería y que han traspasado siglos de historia y que son reconocidas desde ese entonces por su belleza a nivel mundial.

Los avances impactantes logrados por sus sucesores mayas en Astronomía son fruto de una cultura que apreció tales principios en aras de desarrollar dichas ideas matemáticas. No es tema del presente trabajo ahondar acerca de las causas por las que posteriormente no fueron difundidos, no hayan sido conocidos o menos aún, hayan contribuido a reafirmar la autoestima de los pueblos originarios.

Lo que sí se abordará en la primera parte del documento es un primer acercamiento al sistema de numeración, su terminología, su representación matemática, y otro aspecto también importante, se destacan algunos elementos del contexto en las que se justifica el empleo de prácticas discursivas para su empleo.

Sabemos que el nivel de educación básica se rige por estándares avalados por la Secretaría de Educación Pública y que el sistema decimal es la base de nuestra numeración actual. Ante lo anterior podría sonar descontextualizado proponerse convencer acerca de las bondades de un sistema vigesimal como es el de las antiguas culturas mesoamericanas. En su lugar el objetivo va más allá, en el sentido que tal sistema de numeración ejemplifica la forma en que se puede retomar al entorno social y cotidiano como un motivador para hacer matemáticas.

Adicionalmente el recrear el empleo de un sistema de numeración vigesimal puede permitir desarrollar operaciones matemáticas como la suma, resta, multiplicación y división de números enteros y que sigue siendo tan necesario en nuestro tiempo actual. También la tecnología acorde a nuestro tiempo tiene mucho que aportar, así que consideremos la implicación de estímulos visuales, táctiles y principalmente manuales, todas ellas como un recurso didáctico al interior del aula. Así, en el desarrollo del presente trabajo se hace referencia a dichos recursos. Tal como se mostrará, el diseño y elaboración de una página web que los contenga son importantes al igual que los componentes teóricos que los justifican.

En la última parte del artículo, su implementación en el contexto escolar no pudo dejar de considerarse. Los responsables de ello no fueron educadores en el sentido estricto de la palabra, sino más bien alumnos del nivel superior motivados en participar y que por un espacio de tiempo recrearon un tipo de aprendizaje también novedoso para ellos mismos. Consideramos que dinámicas como las que se mostrarán pueden estar expuestas a un público más general y en beneficio no sólo de educandos o de un solo nivel educativo debido a que cualquier ciudadano no sólo puede motivarse sino enriquecerse con su empleo.

2. NUMERACIÓN ZAPOTECA

Las matemáticas que emplearon los mesoamericanos, menciona Maricela Ayala Falcón en su obra *la escritura, el calendario y la numeración,* consiste en puntos con valor

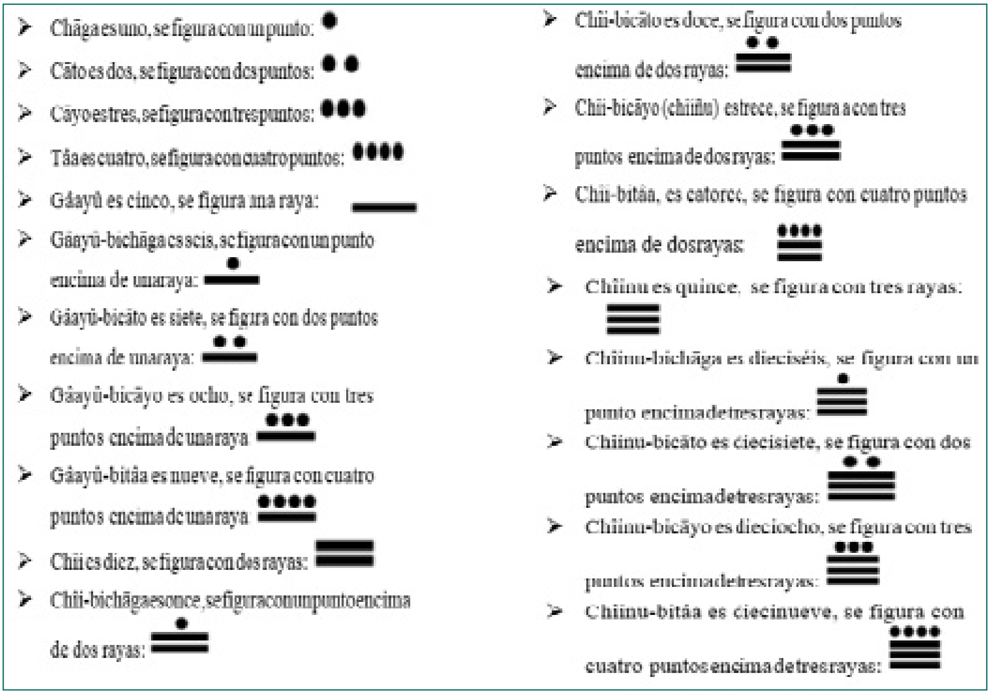


Figura 1. Extraído de Xhigāba Bīnniza cuya referencia es "Vocabulario en lengua zapoteca" de Fray Juan de Cordova. 1578.

de uno y barras con valor de cinco [Ayala, 2014]. Extraemos de Xhigāba Bīnniza[1] [De Gyves, 2016] la figura 1 en la que se muestra la escritura en la lengua originaria en la que se empleaban los números en el sureste de la República Mexicana. Podemos ver en la figura 1 que los números del 6 al 9 son una extensión del número cinco ya que sólo se adiciona tanto en la práctica discursiva como en lo simbólico del numeral, las unidades del uno al cuatro. Por ejemplo juntando las palabras "cinco más uno" o "cinco más dos".

Se menciona en Dehesa (2019) que no son pocos los hablantes del zapoteco en el Istmo de Tehuantepec actual, por ejemplo en Juchitán Oaxaca se emplea principalmente en su mercado, en sus festividades, en secciones específicas de la población cuya labor es cercana al mar, etc. Sin duda la lengua zapoteca ha sufrido variantes a lo largo de la historia y de hecho existen en la actualidad entre los mismos ciudadanos de poblaciones cercanas entre sí. Por ahora toquemos las particularidades en cuanto al tema de los números.

En la figura 2 se muestra la forma en que se pronuncian los números en la actualidad (los números del 1 al 10). La figura 2 también muestra cómo podrían ser vistos los números de la figura 1. (En zapoteco y español actual). En ella vemos que se ha perdido en los nombres la posibilidad de juntar los números del 6 al 9 como extensión del 5. También

1. En Septiembre del 2016 se publicó y presentó el libro de Xhigāba Bīnniza en Juchitán, Oaxaca. Su contenido incluye entre otros, las operaciones de suma, resta, multiplicación y división de los números naturales.

•	••	•••	••••	—
Tōbi	Chūpâ	Chōnnâ	Tāpa	Gâayû
uno	dos	Tres	Cuatro	Cinco

• —	•• —	••• —	•••• —	= —
Xôopâ	Gādxê	Xhōnô	ga'	chîi
Seis	Siete	Ocho	Nueve	Diez

Figura 2. En vocabulario actual

iremos viendo en las próximas secciones que ello tiene implicaciones no sólo en la pronunciación sino en las acciones manuales, por ejemplo, al juntar.

Por lo pronto, una mención. Aunque la elaboración de Xhigāba Bīnniza se motivó a partir de la lectura de una referencia histórica, el interés del autor no sólo fue reproducirlo, también elaboró una propuesta pedagógica. Y una continuación a la pregunta que ha permeado a lo largo de los últimos años a partir de la publicación del libro ha sido ¿Cómo aplicar la propuesta al entorno escolar actual? Sin duda, pregunta que De Gyves (2016) ya se había cuestionado desde muchos años antes.

3. LA LENGUA TRADICIONAL

En De Gyves (2016) se introducen las operaciones numéricas a partir de la recreación de un diálogo entre dos campesinos Abel y Andrés, uno dispuesto a alfabetizar al otro aún con las peculiaridades de la lengua zapoteca que emplea un vocabulario para referirse a un par de toros (ndāga) que es diferente a dos borregos sueltos (chūpâ). De la misma forma si nos referimos al número uno puede emplearse en dos situaciones diferentes. Por ejemplo, si se tratase de referirse a uno de dos miembros del cuerpo como un ojo o una mano (tī), que es diferente a referirse a una persona o un animal como respuesta a las pregunta de ¿cuántos hay? (tobi).

No podemos desligar la palabra del uso que se da en el contexto social. Por ejemplo para sumar se requiere de juntar partes, así cuando dos personas se unieron en matrimonio se dice bichâaga-naâ y si se van a unir chichâaga-naâ. Sin embargo, una cosa es denotar cuantas unidades existen en un determinado lugar (animales o cosas por ejemplo) y otra muy diferente es denotar la posibilidad de denotar “cualquier” número, es decir la posibilidad de realizar la actividad de “numerar”. En zapoteco De Gyves (2016) lo retoma como si se tratase de un poder “guēnda” (como un don que proviene de un poder superior). Así a las posibilidad potencial de realizar una acción la antecede con la palabra

"Guēnda": a la capacidad de sumar la denomina guēnda ruchâagâ, restar es guēnda ribeê, multiplicar es guēnda rutālê, dividir guēnda riguîizî.

En la recreación realizada en el libro Xhigāba Bīnniza cuando se hablan los campesinos emplean la edad de uno de ellos como un valor desconocido para el otro. Y así como para los zapotecos tuvo sentido hablar de un poder superior, también ha existido la posibilidad de nombrar la sombra, lo enterrado (ga'chi). Por lo tanto en De Gyves (2016) se retoma el contexto y emplea la denominación de "ga'chi sāca" para denotar un valor numérico desconocido (es decir una ecuación).

Lo mismo sucede con las palabras ndaâ guidûbi, guēnda ridālê-lisâa xigābâ, xigāba dechîi, xigāba huala'dxi' como se muestra en la siguiente tabla:

Tabla 1. Significado en el entorno tradicional y actual

Fracciones comunes	ndaâ guidûbi	un pedazo (ndaâ) de un todo (guidûbi)
Potencias	guēnda ridālê-lisâa xigābâ	acumula (ridālê) encima (lisâa)
Numeración decimal	xigāba dechîi	de diez (dechîi)
Numeración tradicional	xigāba huala'dxi'	maíz tierno (huala'dxi')

4. LA RELACIÓN ENTRE PALABRA Y ACCIÓN

En Dehesa (2006) se estudia el papel de prácticas discursivas entorno a una comunicación matemática que requiere de una operatividad manual como señalar con el dedo índice a representaciones escritas. En el caso de la numeración de la que hablamos y tal como se muestra en la Figura 3, podemos emplear las manos para alinear cinco bolitas y formar una línea (primera agrupación). También en la Figura 3 podemos ver como podemos apilar líneas, hasta 4 para un primer nivel que es el de las unidades. Podemos emplear la estrategia de De Gyves (2016) de ocupar una bolita roja en la parte superior (segundo nivel el de las veintenas) para denotar que se ha contado una veintena. También podemos apreciar en la imagen de la Figura 3 cómo las cuatro líneas al juntarse forman un cero denotando que no existen unidades en el nivel más bajo pero sí una veintena en el nivel superior.

Como ya hemos venido mencionando, el empleo de verbos en uso, en la cotidianidad, permite que sean accesibles a ser operadas. Juntar y quitar son verbos que ya existen en el vocabulario zapoteco y a partir de las cuales se pueden dar los procesos de conteo en un primer momento y sólo posteriormente, las operaciones de sumar y restar.

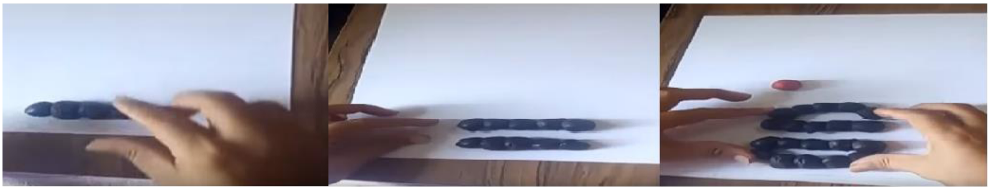


Figura 3. Formación de los signos matemáticos

Figura 4. Enumerar empleando la página web

Alsina (2014) recomienda para desarrollar y comunicar el pensamiento matemático el empleo del lenguaje oral y escrito como previos al lenguaje simbólico. Para el autor las ideas matemáticas se desarrollan mediante procesos y la comunicación en voz alta es una herramienta imprescindible ya que ella permite organizarlas.

La idea de "proceso matemático" al que hace referencia Alsina (2014) es fundamental para el presente trabajo y lo retomaremos en las siguientes secciones.

5. LA PÁGINA WEB

En la dirección de encontrar respuestas al cómo aplicar la propuesta de la numeración zapoteca en el entorno escolar actual, en 2017 alumnos de Ingeniería en Sistemas del Tecnológico Nacional de México campus del Instituto Tecnológico del Istmo, retoman el proyecto Xhigāba Bīnniza como una aplicación disponible en página web

<http://numeracionzapoteca.itistmo.mx/>.

El objetivo al programar la aplicación fue que se viera el proceso de realizar las acciones de juntar bolitas, agruparlas en conjunto de cinco, agrupar las líneas para formar niveles apilados, emplear colores adicionalmente por mencionar algunas acciones determinantes.

En la figura 4 se presenta algunos ejemplos de cómo se numera con la aplicación Xhigāba Bīnniza (en página web <http://numeracionzapoteca.itistmo.mx/>). Vemos que podemos enumerar de uno en uno o simplemente si damos algún número por ejemplo el 5 nos muestra la numeración vigesimal. Es necesario enfatizar que con la aplicación propuesta con la página web es posible repasar la fonética de la pronunciación del número.

Podemos destacar que la aplicación de la página web se ajusta a la propuesta del libro en el sentido de utilizar colores para mostrar el tipo de nivel alcanzado por la numeración por ejemplo para denotar el número veinte se emplea el color rojo para representar que ha subido al nivel de las veintenas (es decir se han agrupado cuatro rayas negras, recordando una raya negra representa el cinco). En la figura 4 podemos ver que el último término de la sucesión representa cuatro veintenas (cuatro puntos rojos) y seis puntos negros representando entonces al número 86.

En De Gyves (2016) también se emplean los colores amarillo y azul para denotar los múltiplos de cuatrocientos y ocho mil respectivamente. Podemos ver en la figura 5 cómo la aplicación de la plataforma web representa el número 605202[2].

Posiblemente mediante esta forma de comunicación podamos imaginar el alcance de este sistema y concluir que emplear manualmente unas cuentitas coloreadas no necesariamente se trata de una acción inocente que sólo queda en el nivel preescolar y primario. Enumerar los primeros números naturales es un preámbulo para adquirir la noción de un sistema de numeración tal como lo emplearon nuestros antecesores mayas y como se emplea actualmente con la palabra "guēnda" (poder)[3], es decir, capaz de utilizarse en cálculos realmente grandes.[4]

Figura 5. Representación vigesimal del número 60520

6. NO SÓLO SE TRATA DE JUNTAR Y AGRUPAR

Juntar y agrupar nos permite acceder a la posibilidad de sumar pero si realizamos las operaciones inversas de desagrupar para quitar, también podemos acceder a la operación de restar. La figura 5 muestra un ejemplo de una suma y la figura 6 un ejemplo de resta.

Herbert et al (2019) propone actividades basadas en programas informáticos con el objetivo de hacer uso de los conocimientos matemáticos informales del niño y vincularlo con la enseñanza matemática formal relevante. Si indagamos un poco más acerca de las

2. Al ser multiplataforma y contar con un sitio web se utilizan las tecnologías web como son HTML5, CSS3, PHP, JS y MySQL. Se encontrarán estrategias (página web, app, videos para trabajar material concreto como ábacos, audios y calculadora).

3. Dixhazá es una App con vocabulario zapoteco español aunque sin pronunciación desarrollada por el I.T. del Istmo a diferencia de Xhigāba bīnniza que es una calculadora que emplea el sistema vigesimal para sumar, restar, multiplicar y dividir.

4. Menciona Eli De Gortari (2016) en su libro Ciencia de la Historia de México que el número mayor empleado por los mayas en su calendario y del cual hay registro es el 12 489 781.

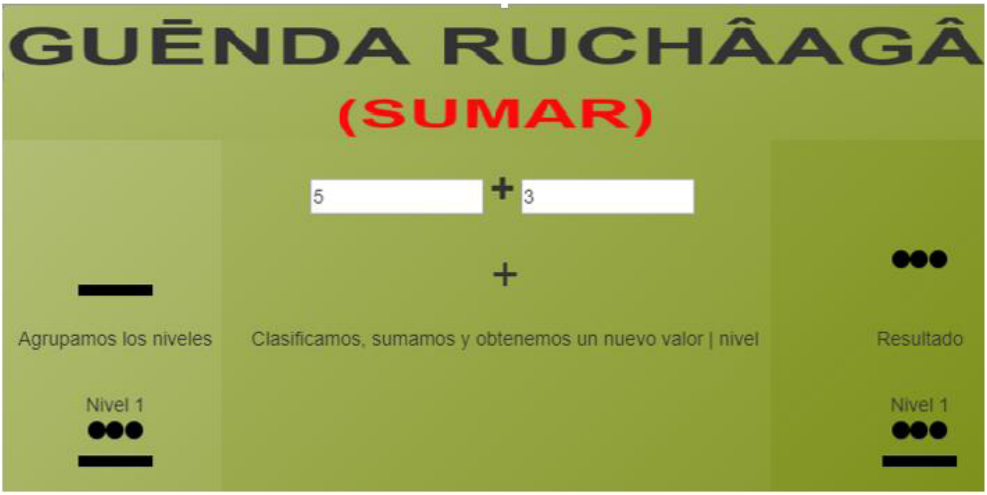


Figura 6. Sumar empleando la página web

razones por la que los autores emplean este tipo de estrategias para niños desde edades tempranas encontramos similitudes con las nuestras, de hecho rescatamos dos. La primera premisa que sostiene este tipo de propuestas es que el aprendizaje de las matemáticas a partir de la cotidianidad suele ocurrir en un contexto en que la interacción humana incorpora narrativas de algún tipo sobre justicia, egoísmo, alimentación, juegos y muchas más. La segunda premisa es que no basta simplemente con querer ampliar los conocimientos cotidianos de los pequeños como tampoco basta con una enseñanza formal de las matemáticas de manera aislada. Coincidimos con Herbert et al (2019) que ninguna de las dos acciones por si sola es tan poderoso y significativa como la sincronía de las dos.

En la figura 6 se muestra el proceso en la que se posibilita la acción de juntar. En caso de tener quince más ocho, se requiere de agrupar con una bolita roja y tres bolitas negras. Caso contrario sucede con la resta. En la figura 7 se ejemplifica cómo es necesario desagrupar el número cinco para poder quitar una bolita[5].

El trabajo realizado por alumnos de ingeniería en sistemas tuvo como propósito mostrar el proceso matemático requerido para realizar la operación y no sólo mostrar el resultado de la operación. En la siguiente sección se insistirá un poco más acerca de los motivos por la cual consideramos necesario dicho abordaje.

7. LOS PROCESOS MATEMÁTICOS

Coincidimos con diversos autores acerca de la necesidad de no restringirnos exclusivamente a los contenidos matemáticos que propone la escuela. Alsina (2012) identifica que

5. La multiplicación y la división aunque se abordan en la página web, su estudio y programación merecen un espacio propio y se abordarán de manera separada y en otra oportunidad.

Figura 7. Restar empleando la página web

para lograr una alfabetización matemática se requiere de un nuevo planteamiento curricular a partir de un enfoque mucho más globalizado y que no se limite a los contenidos de una única área. Trabajar de forma integrada no es equivalente a escuchar sólo al maestro ni repetir sólo lo que hace. Alsina (2014) reafirma el empleo de procesos matemáticos cuando menciona que se aprende a resolver problemas haciendo, manipulando, simulando, discutiendo, compartiendo, imaginando, observando, visualizando, etc. permitiendo que cada niño utilice la estrategia que se ajuste mejor a sus posibilidades: un dibujo, un esquema, el cálculo mental, la manipulación de un determinado material, etc. Todo lo anterior en un contexto educativo en donde el razonamiento y la prueba han sido tradicionalmente pocos frecuentes en los currículos de matemáticas de educación infantil, y hasta hace relativamente poco tiempo se había priorizado otros aspectos mucho más mecánicos, como la copia sin sentido de notaciones convencionales. Coincidimos con Alsina (2014) en que aunque las técnicas y símbolos son importantes, es más importante su uso significativo.

En particular en las primeras edades de la educación escolar Alsina (2012) argumenta que para aprender a usar las matemáticas es necesario partir de un currículo de matemáticas que contemple dos tipos de conocimientos: los contenidos matemáticos (razonamiento lógico- matemático, numeración y cálculo; geometría; medida; y estadística y probabilidad) y los procesos matemáticos.

Así, para Alsina (2012) no basta con tener un buen rendimiento escolar si se quiere aplicar los contenidos matemáticos no sólo de forma inmediata sino como lo podría ser el aplicarlos a la vida cotidiana. La información que abordan los contenidos matemáticos requiere también de un saber hacer que sí se pueden abordar en la escuela, a ellos los denomina "procesos matemáticos" e incluyen: resolver problemas, razonar y demostrar, comunicar, representar y conectar. En los siguientes párrafos veamos el empleo que proporciona Alsina (2012) a cada uno de estos términos..

Con la visión de la enseñanza de las matemáticas propuesta por Alsina (2012) se puede permitir invitar a los niños desde edades muy tempranas a matematizar el contexto con preguntas del tipo ¿Cómo son los objetos que vemos en el patio de la escuela? Con su propuesta, prácticas discursivas dirigidas pueden llevar al empleo de verbos para desarrollar procesos matemáticos no sólo al interior del aula, buscando alcances de durabilidad mayor, desde y para situaciones de la vida cotidiana.

Por ejemplo, para el proceso de "Resolución de problemas" se se pueden realizar varias preguntas para provocar pequeños retos a resolver: ¿Cuántos objetos hay en el patio?, ¿Hay más alumnos o columnas? Son preguntas que pueden orientar la atención a partir de observar lo cotidiano, lo concreto. Por otra parte, si pedimos ordenar algunos objetos del patio para comparar y comprobar tamaños empleamos el proceso de "Razonamiento y demostración" debido a que se invita a comprobar en la práctica si la suposición inicial lograda con las preguntas no sólo quede a un nivel mental.

Llama la atención el papel igualmente importante que en Alsina (2012) se le da al proceso de "Comunicación y representación" al pedirles que expresen oralmente o en dibujos sus inquietudes en torno a los cuestionamientos del tipo al que nos hemos referido anteriormente. Es con este proceso cuando se puede fomentar la adquisición de vocabulario específico no sólo del ámbito matemático sino de otras áreas de conocimiento. Por cierto que precisamente el establecer vínculos en áreas extra matemáticas es un objetivo específico de otro de los procesos que distingue Alsina (2012) de semejante importancia, el de "Conexiones".

8. UNA EXPERIENCIA ESCOLAR: PREPARACIÓN, ELABORACIÓN E IMPLEMENTACIÓN DE LOS PROCESOS MATEMÁTICOS

Las operaciones de suma y resta de números enteros son tan básicas para el ámbito matemático como relevantes. A continuación enumeraremos algunos de los motivos que los hacen relevantes:

- Pueden ser un punto de partida para cualquier nivel escolar
- Pueden ser un punto de partida para el diseño de un juego
- A partir de ellas se pueden escalar operaciones de complejidad mayor
- Alientan a hacerlas divertidas debido a que al ser más conocidas gozan de mayor popularidad

Las anteriores razones pudieran explicar los motivos por los que en términos muy frecuentes [Dehesa (2018)] los alumnos de nivel superior muestran interés cuando se les plantea si quieren participar aplicando juegos a alumnos de niveles anteriores al de ellos. Si solo considerásemos el plan curricular podríamos pensar que el nivel superior requiere de una matemática mucho más desarrollada que la de la educación básica pero independientemente que los alumnos les cueste dominar operaciones del nivel básico, existen otros argumentos que nos alertan de detenernos un poco más en este punto.

Figura 8. Alumnos de nivel superior interactuando con los números de forma escrita

Ya se ha descrito en la sección anterior cómo en la elaboración de la página web los alumnos del nivel superior tuvieron oportunidad de experimentar al sistema de enumeración zapoteca cubriendo algunos o todos los puntos mencionados. Ahora se hará referencia de una experiencia del sistema de enumeración pero con una interacción entre personas.

9. TRABAJO PREVIO A SU IMPLEMENTACIÓN

En Noviembre del 2018 se llevó acabo un juego matemático en el que alumnos de nivel superior conocen la representación vigesimal, sus operaciones y su representación. En vías a su vez de que ellos reproduzcan dicha dinámica a un nivel básico. En la Figura 8 se muestra una interacción que los jóvenes tienen con los números mediante un rompecabezas.

En la Figura 8 se muestra que el rompecabezas no sólo permite formar un número sino el significado de él en notación decimal. No basta con formar el rompecabezas, se requiere de agrupar el numeral del rompecabezas pero ahora en un ábaco como se

Figura 9. Alumnos de nivel superior construyendo los números mediante un ábaco

muestra en la figura 9. A su vez, no basta con formar el número con el ábaco, requiere que coincida con la parte que da cuenta de su pronunciación.

Alsina (2014) distingue como proceso matemático a la comunicación. A su vez, la comunicación la distingue de la información en cuanto que la segunda se transmite en un sentido unidireccional mientras que la comunicación implica interactuar en un sentido bidireccional. Para este autor las buenas preguntas permiten dicho dialogo.

Tanto la elaboración del rompecabezas como el armado del ábaco requiere de interacción dialógica que permita poner en práctica la regla de conversión entre estos sistemas de numeración, decimal y vigesimal.

En la figura 9 se muestra el empleo de un ábaco para representar el número ya empleado en su notación escrita. Cabe mencionar que el diseño del material empleado fue realizado por alumnos del nivel superior.

10. IMPLEMENTACIÓN A NIVEL BÁSICO

Coincidimos con De Gyves (2016) que la implicación pedagógica no pasa inadvertidamente para los alumnos del nivel básico. De hecho, retomamos a Boule (1995) en cuanto a las siguientes citas:

> “El niño construye su conocimiento al mismo tiempo que su inteligencia y su personalidad partiendo de su acción sobre el entorno”. (Boule. 1995, p.18)

Y continúa:

> “Conviene, por lo tanto, favorecer esta capacidad natural proponer al niño un entorno rico, permitirle ejercer esta exploración activa y auto-organizadora. Se sabe, igualmente, que un entorno rico en lenguaje y comunicación favorece la eclosión de la palabra. El niño acumula de esta manera un capital de experiencias prácticas a partir del cual germinarán posteriormente, unas relaciones más elaboradas” (Boule. 1995, p.18).

Figura 10. Niños de primero y segundo grado enumerando

En Febrero del 2019 los jóvenes de nivel superior trasladan la dinámica de juego al Colegio Paulo Freire. Tenemos que recordar que lo que buscamos es provocar la interacción dialógica de nuestros estudiantes del nivel superior ahora con niños de menor edad.

Es importante mencionar que el espacio en la cual se da la interacción dialógica tanto entre pares como con niños de menor edad es en ferias de ciencias y matemáticas en la que no existe demasiado tiempo para entrar en detalles. Se requiere de partir del bagaje cultural que ya existe para que a partir de allí puedan escalar una dinámica motivadora y de aprendizaje.

Podemos ver en la figura 10, figura 11 y figura 12 algunos ejemplos de cómo enumeraron tanto con el apoyo discursivo de los estudiantes del nivel superior como con la lectura del material escrito aunado al empleo de ábaco para mover las unidades. Participaron alumnos desde nivel preescolar hasta alumnos de quinto y sexto de primaria.

Con los niños de preescolar se concentraron de realizar conteos del uno al cinco permitiendo la manipulación con el material previamente elaborado (ver figura 10).

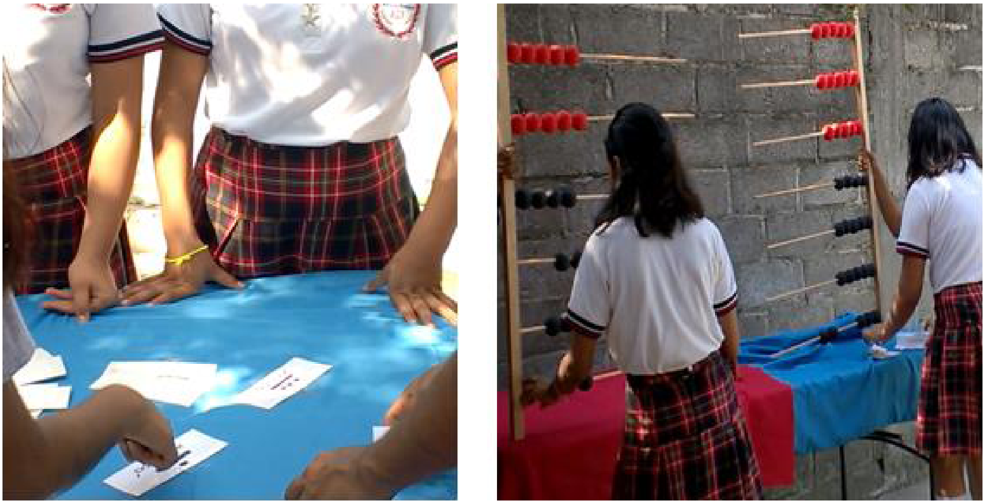


Figura 11. Alumnos de quinto y sexto de primaria

Figura 12. Niños de primero y segundo de primaria enumerando en zapoteco

CONCLUSIONES

La elaboración de una página web, de juegos, de un ábaco son algunas de las actividades que pueden provocar un reto para los estudiantes de nivel superior. La importancia de contribuir a la realización de ellas radica en los procesos matemáticos que se ponen en marcha. Por ejemplo planteando preguntas como ¿cómo sumar o restar? a partir de números de otra base, el que puedan pronunciar algunos de ellos, el que puedan armarlos asistidos por una interacción dialógica, es poner en acción procesos como el de resolución de problemas, el de razonamiento y demostración, el de comunicación y representación. Podemos cambiar la visión y limitación de restringirnos a contenidos matemáticos correspondientes sólo a ciertos niveles educativos. Un contenido escolar del nivel básico como el de “Construcción de Números” no es privativo para las edades tempranas, es posible desarrollarlo a cualquier edad si pretendemos superar el nivel de alfabetización y de competencia matemática para cualquier ciudadano. Coincidimos en que la matemática es una ciencia en la que el método predomina claramente sobre el contenido y si podemos establecer conexiones entre la escuela y nuestro entorno también favorecemos el aprendizaje de las matemáticas.

El diálogo no se restringe al interior de la escuela, propuestas muy localizadas como las que se describieron pueden ser más visibles a las diversas instancias si queremos una comunicación dialógica entre las autoridades del sistema educativo nacional, centros educativos, centros de divulgación, centros de investigación. La intención del presente trabajo es entonces establecer intentos de comunicación entre dichas instancias.

Agradecimientos

A los alumnos del Campus Instituto Tecnológico del Istmo que gustosamente han participado en las Ferias de Ciencias Básicas de cada semestre. También un agradecimiento muy especial a los programadores Martin C. Sánchez Aquino, Sostenes Reyes J., Arturo Velázquez Estrada y Daniel García Orozco.

REFERENCIAS

Alsina, A (2012). Más allá de los contenidos, *los procesos matemáticos en educación infantil*. Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia, 1, (1), pp. 1-14.

Alsina, A (2014). Procesos matemáticos en educación infantil: 50 ideas clave. NÚMEROS *Revista didáctica de las Matemáticas*, Vol. 86, pp. 5-28.

Ayala, M. (2014). La escritura, el calendario y la numeración. Historia Antigua de México Aspectos fundamentales de la tradición cultural mesoamericana. Ed. Instituto de Investigaciones Antropológicas (UNAM).

Bishop A. (1999). Enculturación matemática: La educación matemática desde una perspectiva cultural, Editorial Paidós, Temas de Educación.

Boule, F. (1995) Manipular, organizar, representar: iniciación a las matemáticas. Narcea, S.A. de Ediciones Madrid.

De Córdova, J. (1987) *Arte del Idioma Zapoteco.* Imprenta Madero, S.A, de C.V.

Dehesa, N. (2006). Discursos en los registros algebraico y geométrico de las ecuaciones diferenciales ordinarias. *Educación Matemática*, 18 (2), 123-148.

Dehesa, N (2018). Las Matemáticas puestas en juego. *Revista EPSILON de la SAEM THALES*. Número 99, 43-54 ISSN: 2340-714X.

Dehesa, N (2019). Educación Matemática en la cultura Oaxaqueña. Editorial Académica Española.

De Gyves, D. (2016). Xhigaba Binniza, Numeración Zapoteca. Taller de artes gráficas El Zanate.

Gortari De, E. (2016). La Ciencia en la Historia de México. Ed. Fondo de Cultura Económica.

Herbert, P., Renqiuwen, E. y Julie, S. (2019). MathemAntics: a model for computer-based mathematics education for Young children. Journal for the Study of Education and Development, 1-56.

Épsilon - *Revista de Educación Matemática* 2019, nº 103, 71-87

Resolución de problemas con la calculadora gráfica CG50

Lluís Bonet Juan
IES Mare Nostrum, Alacant
Ricard Peiró i Estruch
IES Abastos, València
Mª Teresa Navarro Moncho
Cefire Científic, Tecnològic i Matemàtic, València

Resumen: *En el currículo de Educación Secundaria y Bachillerato se cita expresamente el uso de la calculadora gráfica en el área de matemáticas. Sin embargo, gran parte del profesorado no solo no la utiliza como recurso, sino que además la prohíbe. Pero su uso como recurso didáctico posibilita un cambio en la metodología del aula favoreciendo en el alumnado la actividad investigadora y creadora a través de trabajos dirigidos y enunciados detallados. Además, facilita la observación y la toma de decisiones manejando estrategias diversas para obtener los resultados, analizarlos y ser críticos con ellos.*
Palabras clave: *competencia matemática, calculadora gráfica CG50, resolución de problemas.*

Troubleshooting with the CG50 graphing calculator

Abstract: *The curriculum of Secondary Education and Bachillerato mentions expressly the use of the graphic calculator in the area of mathematics. However, a great part of the faculty does not only ignore them as a resource, but they prohibit their use in the classroom; not taking into account that their use as a didactic resource makes it possible to change the methodology of the classroom; favouring the research and creative activity through directed and detailed formulations. Besides, it facilitates the observation and decision making by handling a variety of strategies to obtain the results, and eventually analyse and be critical to them.*
Keywords: *mathematic competence, graphic calculator CG50, problem solving*

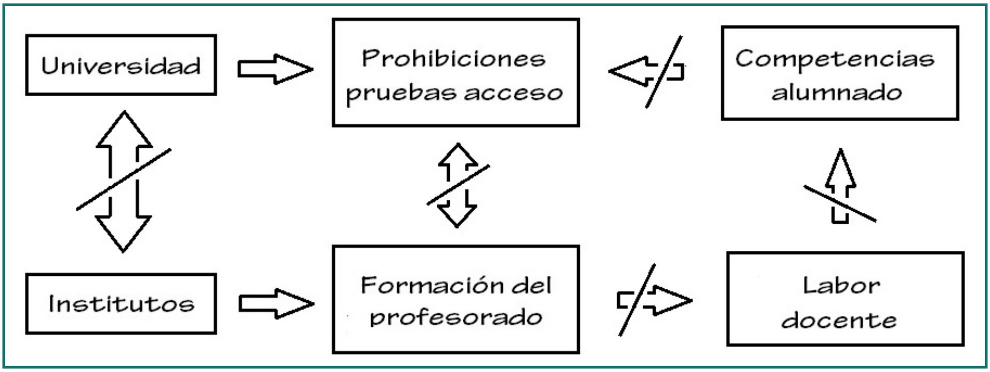


Figura 1.

INTRODUCCIÓN

Actualmente son los países que incorporan y potencian las metodologías activas y el uso de las nuevas tecnologías en sus aulas, los que están consiguiendo unas mejores valoraciones de sus sistemas educativos.

Nada nuevo si se tiene en cuenta que han pasado ya casi diez años desde aquella Epsilon 76 del año 2010 donde nuestro compañero Maurici Contreras daba cuenta de la mejora de la competencia matemática a través de la resolución de problemas haciendo uso de herramientas como la calculadora gráfica, además de otras experiencias de aula en este mismo número.

El Currículum de Bachillerato, en vigor desde hace algún año más, pone de manifiesto que "La resolución de problemas como contenido y método es un objetivo prioritario [...] El alumnado ha de aprender matemáticas utilizándolas en una gran variedad de contextos [...] que ayuden a entender el mundo cambiante que nos rodea y a tomar decisiones tanto en la vida diaria como en la futura vida profesional […] El uso de recursos didácticos y materiales variados como calculadoras científicas y gráficas, programas de geometría dinámica y otros, materiales digitales didácticos y recursos en la red, ofrecen la oportunidad de diseñar escenarios de aprendizaje enriquecidos para que los estudiantes perciban las matemáticas como una ciencia experimental y un proceso exploratorio significativo dentro de su formación"

Las preguntas que nos planteamos son ¿en qué situación nos encontramos actualmente en España?, y sobre todo ¿hacia dónde nos dirigimos?

La casi total desconexión que existe entre Universidad e institutos y la prohibición del uso de calculadoras gráficas en la mayoría de las comunidades autónomas en las pruebas de acceso a la universidad no contribuye a la formación del profesorado en la utilización de este ni de otros recursos tecnológicos que pueden contribuir en la ansiada mejora de nuestra labor docente y de la competencia matemática de nuestro alumnado (figura 1).

Pero existen otros factores como el número de horas de docencia directa de Matemáticas y nuestro propio modelo de enseñanza que nos hacen pensar y reflexionar sobre qué es lo que está ocurriendo y cómo se están haciendo las cosas en los países vecinos como Francia, Alemania, Portugal…, o aquí mismo en España en el Bachillerato Internacional.

A finales del año 2018 la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas hizo público un informe sobre el uso de calculadoras en las pruebas de acceso a la Universidad[1]. El informe recoge las desigualdades de las calculadoras permitidas entre las diferentes comunidades autónomas y entre los diferentes tipos de bachillerato, a pesar de que el distrito es único. Pone de manifiesto que los países con mejor nota en el informe PISA permiten usar calculadoras en el aula y en los exámenes, tal como defienden instituciones como el National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) o la Comisión Internacional de Instrucción Matemática (ICMI) que aunque no se posiciona sobre el uso de las calculadoras desde su web son numerosas las publicaciones y contribuciones presentadas en el Congreso Internacional de Educación Matemática (ICME), avalado y organizado por esta comisión, que defienden el uso de este recurso en cualquier etapa educativa de forma similar a como lo hace el NCTM.

También nos recuerda que "Las matemáticas no consisten en hacer muchas operaciones, sino en saber qué operaciones hay que hacer, en qué orden, con qué objetivo y la calculadora contribuye a crear este pensamiento matemático. La calculadora, de hecho, es una herramienta didáctica que sirve para simplificar los cálculos, pero **no tiene la capacidad de pensar**. Actualmente en los problemas planteados en las pruebas de acceso a la universidad la calculadora es un recurso indispensable que descarga al alumno de operaciones rutinarias, con el fin de que dedique más tiempo a analizar, interpretar y razonar sus respuestas."

Ante este marco tan desolador, solamente nos queda luchar por una educación de calidad, sin agravios, ni dentro ni fuera de nuestro país, para todo nuestro alumnado. Con el objetivo de contribuir en la mejora de la enseñanza de las matemáticas presentamos algunos ejemplos de problemas resueltos con la ayuda de una calculadora gráfica, pues sabemos y así lo avalan muchas investigaciones, que la utilización de la calculadora gráfica como recurso didáctico posibilita un cambio en la metodología de aula favoreciendo en el alumnado la actividad investigadora y creadora a través de trabajos dirigidos y enunciados detallados. Además su uso facilita la observación y la toma de decisiones manejando estrategias diversas con las cuales alcanzar los resultados para finalmente analizarlos y ser críticos con ellos.

Las diferencias con Francia en cuanto al número de horas dedicadas a la enseñanza de las matemáticas desde 4º de ESO hasta 2º de Bachillerato y el tipo de calculadora que se permite el las pruebas de acceso a la Universidad se recogen en la tabla 1.

El siguiente problema es una adaptación de un problema extraído del Mathématiques Terminale de Dudarte y Verlant (2010, p.308). En la resolución que publicamos se muestra cómo el uso de la calculadora pone el énfasis en el razonamiento y el pensamiento crítico y no en los cálculos.

1. Descargable en <https://fespm.es/index.php/2018/12/06/el-uso-de-calculadoras-en-las-pruebas-de-acceso>.

Tabla 1. Tabla comparativa del número de horas de matemáticas en los cursos superiores de la ESO y bachillerato.

España	**4º ESO** 4 horas/semana	**1º BACH CIENCIAS** 4 horas/semana	**2º BACH CIENCIAS** 4 horas/semana
Francia	**SECONDE** 4 heures/semaine	**PREMIÈRE SCIENTIFIQUE** 4 heures/semaine Calculatrice graphique obligatoire avec mode examen	**TERMINALE SCIENTIFIQUE** 6 heures/semaine (+ 2 h/sem si spécialité) Calculatrice graphique obligatoire avec mode examen

La tabla siguiente presenta el número de muertos en accidente de tráfico en las carreteras de Francia entre los años 2011 y 2017 y se observa cómo el número de muertos ha ido disminuyendo considerablemente.

Año	**2011**	**2012**	**2013**	**2014**	**2015**	**2016**	**2017**
Xi **Rango año**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
Yi **Nº muertos**	**8160**	**7655**	**6058**	**5530**	**5318**	**4942**	**4838**

a) Representa gráficamente la nube de puntos y realiza un ajuste lineal. A partir de este modelo ¿cuál es el número de muertos en accidentes de carretera que se prevén para 2020?

b) Considera el modelo logarítmico $f(x)=a+b \cdot \ln x$ en el intervalo [1, 15]. Justifica que la función es decreciente en este intervalo e indica cuál es el número de muertos que este nuevo modelo prevé para 2020.

c) A la vista de los dos modelos, ¿cuál no permite obtener una previsión realista para 2025?

a) El Menú 2: Estadística permite introducir las dos variables y representar gráficamente la nube de puntos con la que realizar el ajuste:

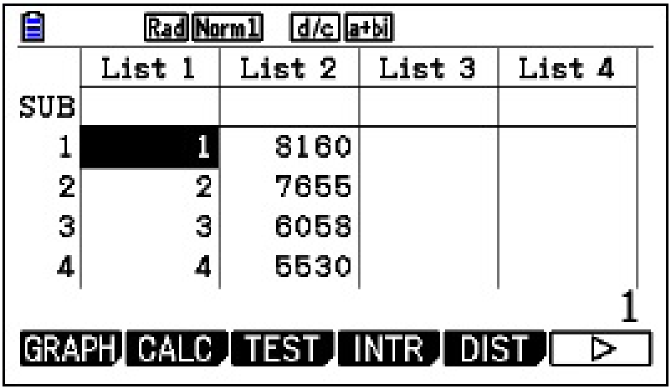


Figura 2

Desde GRAPH se selecciona GRAPH1:

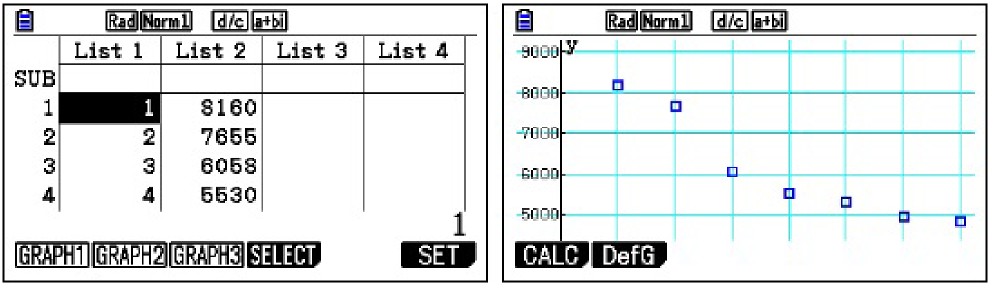


Figura 3

Se selecciona CALC para escoger la regresión lineal pulsando en *X* y el modelo $y = a \cdot x + b$:

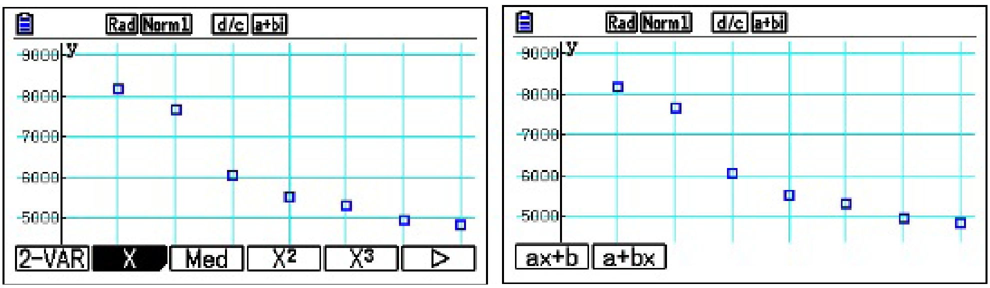


Figura 4

En los resultados de la regresión lineal se obtiene un modelo de recta decreciente que ajusta los datos con un coeficiente de correlación cercano a −1: $r = -0{,}9396$ y cuyo coeficiente de determinación es: $r^2 = 0{,}8828$.

Se selecciona COPY que permite guardar la recta en Y1 pulsando ENTER y posteriormente DRAW:

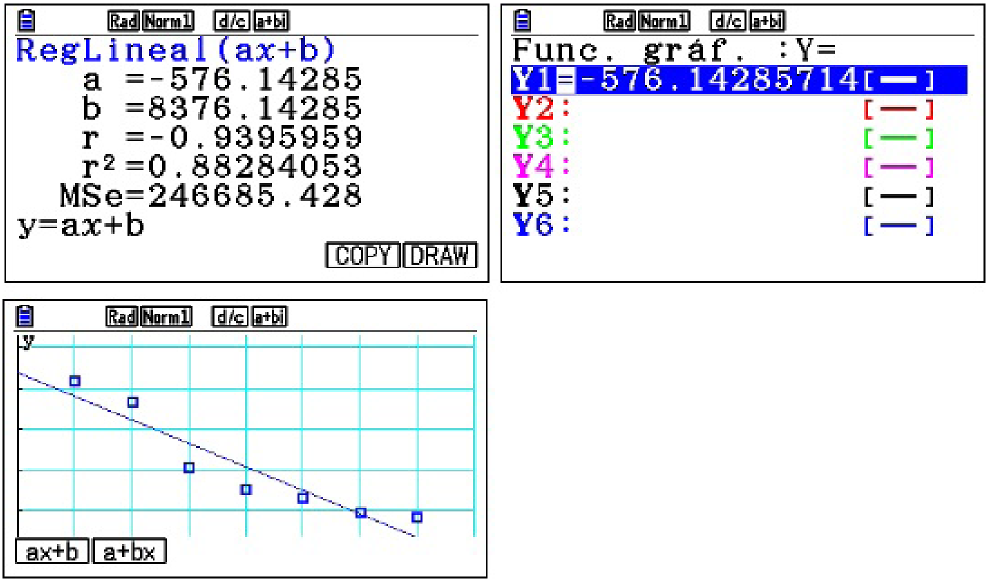


Figura 5

Para calcular la estimación de muertos en accidente de tráfico con este modelo se selecciona el Menú 1 y al sustituir en la función se obtiene una estimación de 2614 muertos para el año 2020:

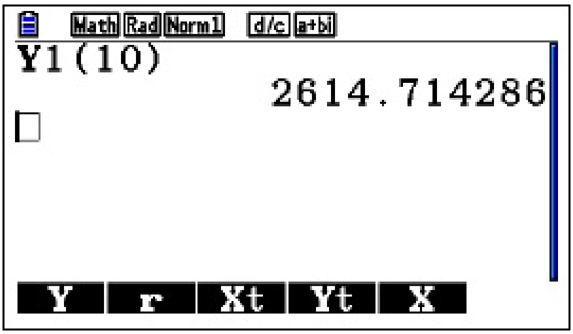


Figura 6

b) Se realiza ahora el ajuste con el modelo logarítmico propuesto:

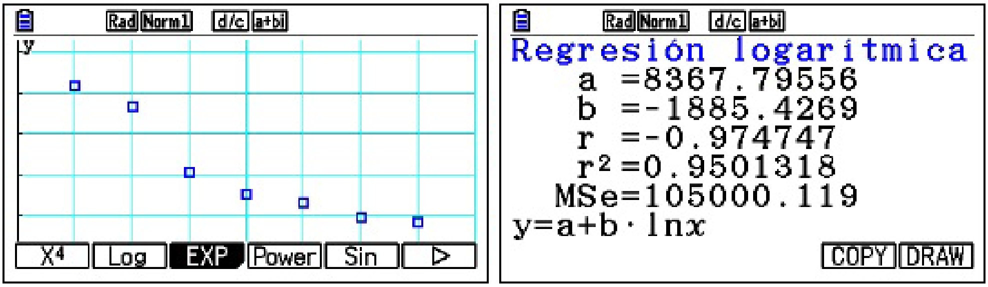


Figura 7

Este nuevo modelo presenta unos coeficientes de correlación y de determinación mejores que el modelo lineal. Se guarda esta nueva función en Y2 y se representa gráficamente para observar el ajuste:

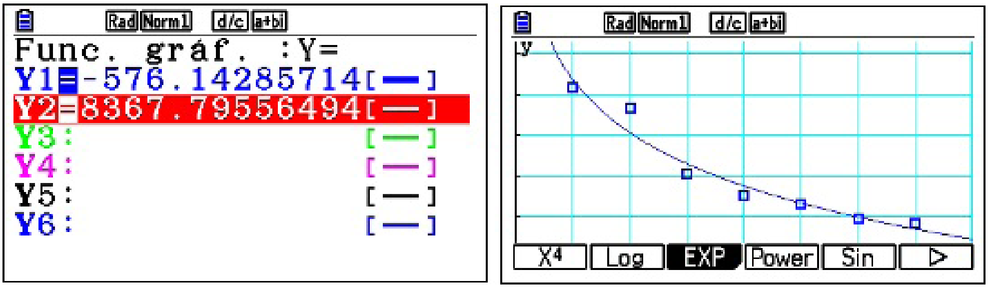


Figura 8

Se calcula ahora el número de muertos previsto para 2020 con este nuevo modelo que resulta ser de 4026, bastante diferente al dato obtenido con el modelo lineal:

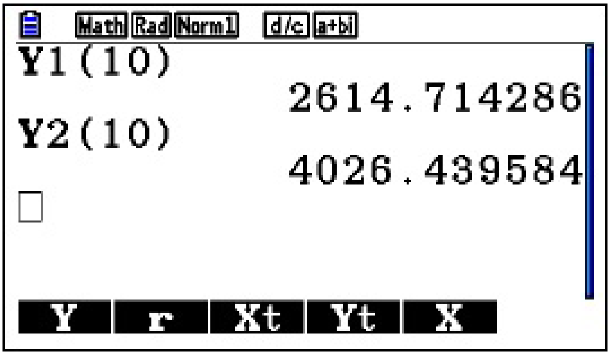


Figura 9

Desde el **Menú 7: Tabla** se pueden analizar los valores de la primera derivada de Y2 en el intervalo [1,15] y constatar que siempre son negativos (función decreciente):

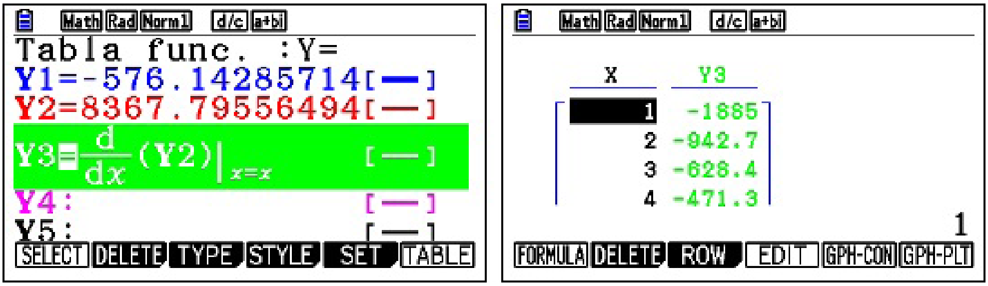


Figura 10

A la vista de los dos modelos se pregunta por una previsión realista para el año 2025. Para ello, de nuevo en el Menú 1 se hacen las estimaciones con cada modelo:

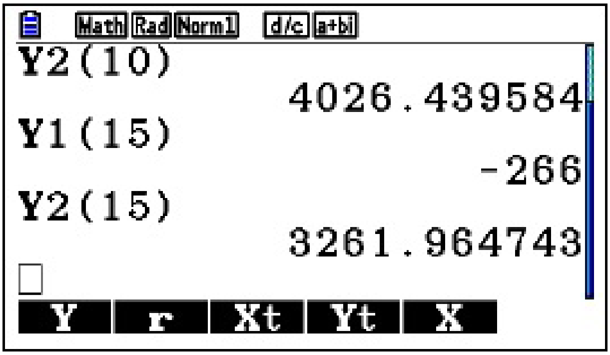


Figura 11

Se observa que las limitaciones del modelo, en el caso de la regresión lineal, proporcionan un resultado sin sentido en el contexto.

El sistema educativo portugués ha experimentado una considerable mejora con una apuesta por la innovación, la reorganización de los currículos y el reconocimiento social del trabajo docente. Si los países que están haciendo una mayor apuesta por la educación, en general incorporan las TIC como recursos para la mejora del aprendizaje de las matemáticas, fomentan la creatividad de sus estudiantes que forman parte activa en los procesos de su aprendizaje, potencian el trabajo colaborativo y el sentido crítico, entonces la calculadora gráfica es un elemento que encaja a la perfección dentro de este esquema en lo que a nuestra materia se refiere, apostando a la vez, claro está, en la formación del profesorado para que pueda dar cumplida respuesta a las necesidades en el aprendizaje del alumnado.

El siguiente problema es una adaptación de un problema extraído de Mathematics for the international student 10E (MYP5 Extended) (2014, p.480). La resolución con la calculadora evita tener que realizar los cálculos manualmente y disponer de este tiempo para razonar, tomar decisiones e interpretar los resultados.

La fracción de la Luna que está iluminada por la noche viene dada por la función:

$$M(t)=\frac{1}{2}cos\left(\frac{\pi t}{15}\right)+\frac{1}{2}$$

Figura 12

donde *t* es el tiempo en días desde el 1 de enero.

a) Dibuja la gráfica de la función cuando .

b) Calcula la fracción iluminada de la Luna los días:

- i) 1 de enero
- ii) 6 de enero
- iii) 31 de enero
- iv) 21 de febrero

c) ¿Cuántas veces hay luna llena? ¿Qué días pasa?

d) ¿En qué fechas de enero y febrero la Luna no está iluminada en absoluto?

e) ¿En qué días la luna está en cuarto creciente?

f) ¿En qué días la luna está en cuarto menguante?

La modelización de la iluminación de la luna es una función circular y si no se representa la función no se pueden resolver la mayoría de las cuestiones del problema. Sin embargo, con la ayuda de la calculadora se pueden resolver gráficamente todas las cuestiones que se plantean.

Se observa en primer lugar, que las medidas angulares se expresan en radianes (números reales).

Se establece para *t*=0 el 1 de enero.

Con el Menú 5: Gráfico se representa la función $M(t)=\frac{1}{2}cos\left(\frac{\pi t}{15}\right)+\frac{1}{2}$:

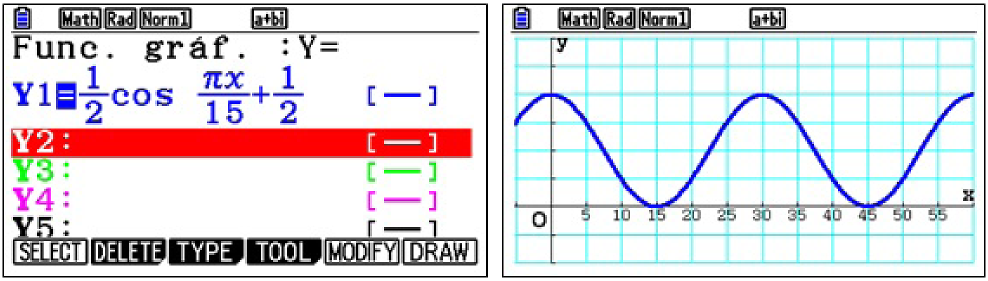


Figura 13

b) El 6 de enero se corresponde con t=5, el 31 de enero con t=30, el 21 de febrero con t=51:

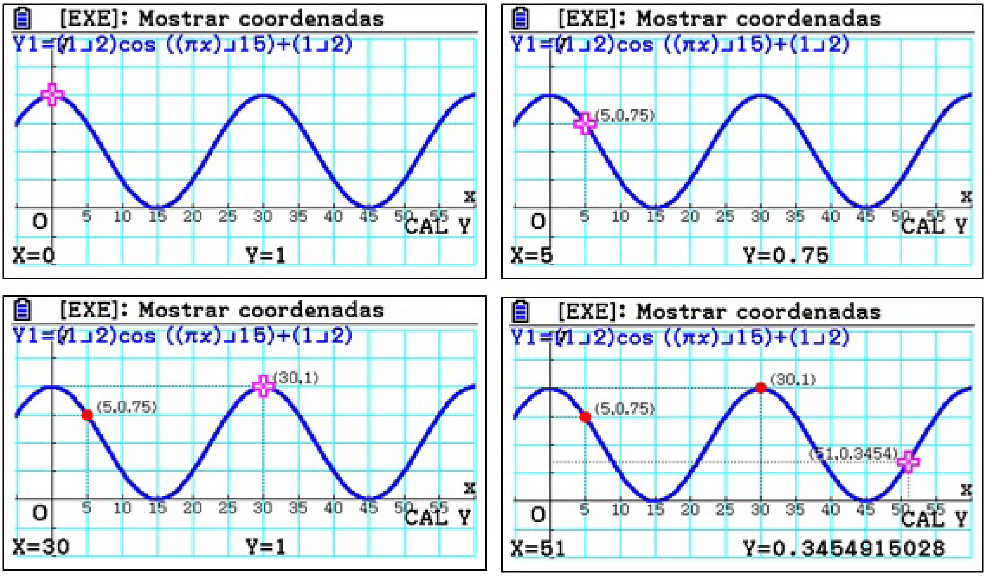


Figura 14

A partir de los resultados obtenidos gráficamente se concluye que el 1 de enero hay luna llena. El 6 de enero la iluminación de la luna es 0,75 y hay luna decreciente. El 31 de enero hay luna llena. Y el 21 de febrero solamente hay 0,35 de luna iluminada y luna creciente.

Con el Menú 7: Tabla, también se pueden calcular todos los valores día a día:

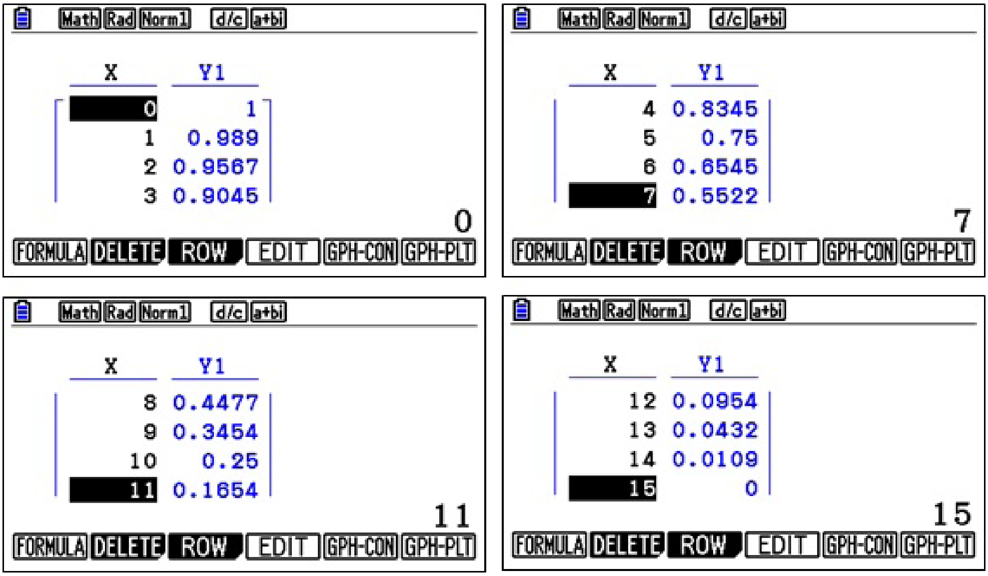


Figura 15

Desde el Menú 5: Gráfico se puede dar respuesta a todas las preguntas sobre las fases de la luna. La luna llena es el máximo y la luna nueva el mínimo. El cuarto creciente se obtiene cuando $M(t)=\frac{1}{4}$ y la gráfica es creciente y el cuarto menguante cuando $M(t)=\frac{1}{4}$ y la gráfica es decreciente:

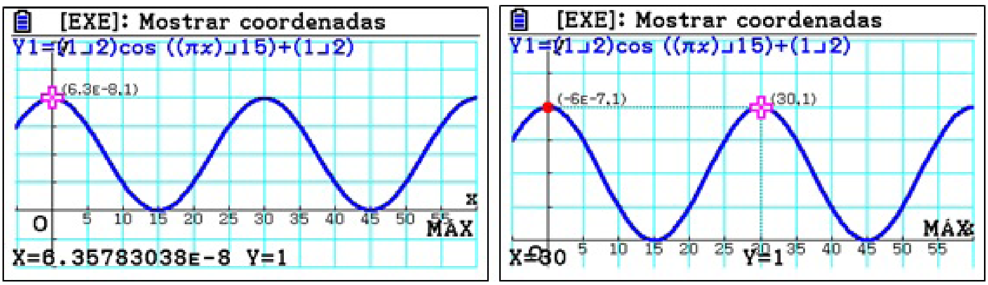


Figura 16

c) Hay dos veces luna llena, los días 1 y 31 de enero.

d)

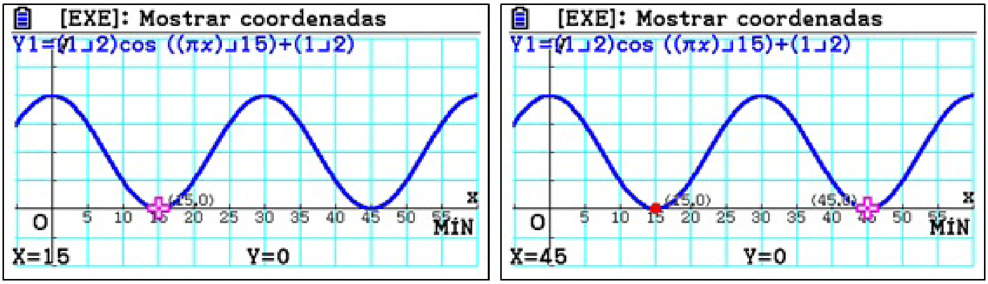


Figura 17

La luna no está iluminada los días 16 de enero y 15 de febrero.

e) f)

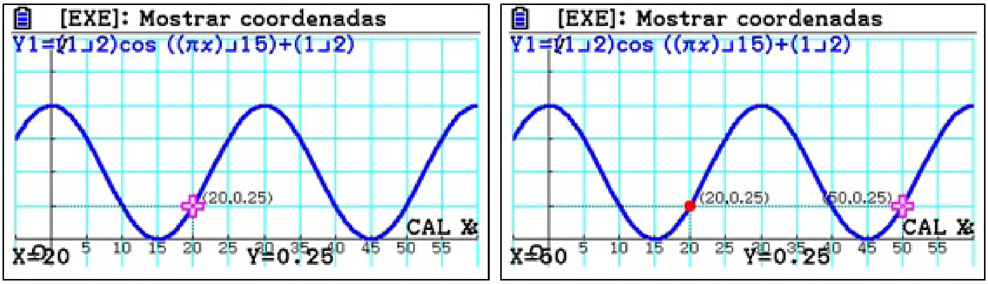


Figura 18

El cuarto creciente se produce el 21 de enero y el 20 de febrero.

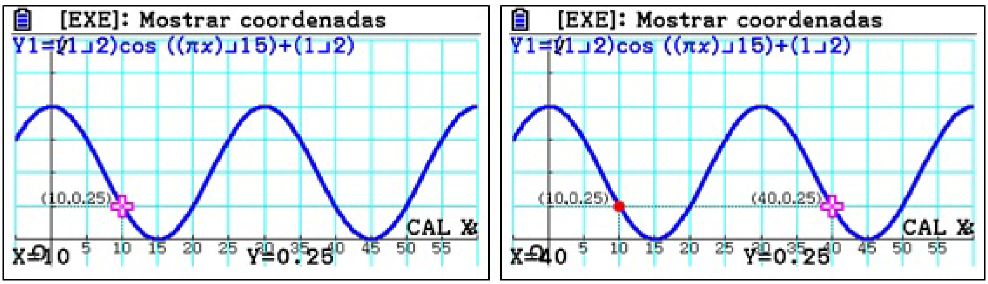


Figura 19

El cuarto menguante se produce el 11 de enero y el 10 de febrero.

La matematización del contexto de enseñanza-aprendizaje se impulsó a partir de la década del setenta del siglo pasado con la Educación Matemática Realista (EMR) basada en la idea de Freudenthal (1973, 1991) de las matemáticas como actividad humana. El punto de partida de la matematización del contexto es la selección de un contexto real o realista, cuyo objetivo es partir de las situaciones abordar diversos conocimientos matemáticos. Es evidente que los contextos reales o realistas deben estar presentes en las aulas de todas las etapas educativas. Sin embargo, hay que tener en cuenta que enseñar competencialmente las matemáticas no significa quedarse en lo concreto, sino que a través de la actividad matemática el alumnado debe conseguir formalizar de manera progresiva su conocimiento matemático. La formalización o abstracción de muchos conceptos matemáticos requiere que esta se haga de forma descontextualizada o que el contexto sea matemático. Por ello es también importante plantear situaciones o problemas, que en un contexto matemático, permitan al alumnado explorar, razonar y conectar las ideas matemáticas dentro de las matemáticas. La siguiente actividad pretende mostrar cómo la interpretación geométrica de un sistema de ecuaciones lineales contribuye a dotar de significado su resolución y a conectar el algebra con la geometría.

Resolver el sistema de ecuaciones lineales $\begin{cases} x+y-z=3 \\ 2x-y-z=4 \\ 4x+y-3z=2 \end{cases}$

Interpretar geométricamente el resultado.

Con la calculadora gráfica se pude resolver el sistema de dos maneras:

1. Por el método de Gauss.

Se define la matriz ampliada del sistema:

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1|3 \\ 2 & -1 & -1|4 \\ 4 & 1 & -3|2 \end{pmatrix}$$

y se triangulariza usando la calculadora:

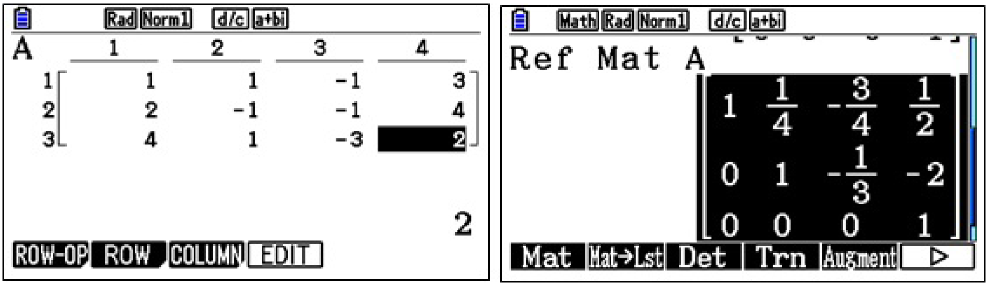


Figura 20

De la última fila se deduce que el sistema es incompatible.

2. Directamente con el Menú A: Ecuación:

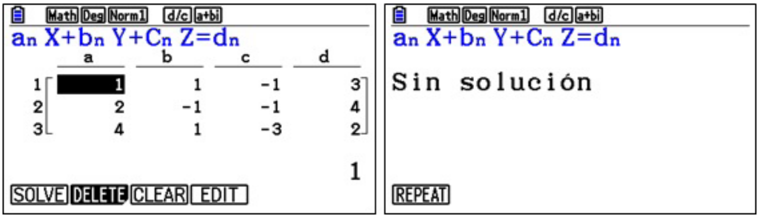


Figura 21

Para interpretar el sistema geométricamente, se debe saber que una ecuación lineal con tres incógnitas es un plano en el espacio.

Con el Menú K: Gráfico 3D, se define la ecuación de cada uno de los tres planos y se representan gráficamente:

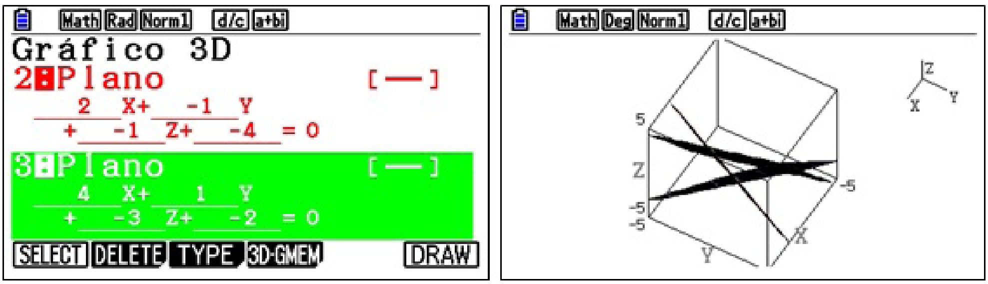


Figura 22

En la pantalla gráfica se observa cómo los tres planos intersectan dos a dos en una recta y por tanto el sistema no tiene solución. El problema puede finalizar con esta observación, ahora bien, cuando se trabaja en un entorno de resolución del problemas lo más importante no es llegar a dar una respuesta, sino aprender todo lo que se pueda de la situación. Es posible que el alumnado no sepa cómo seguir aprendiendo en esta situación concreta, pero como docentes tenemos la responsabilidad de que aprenda a hacerse preguntas y en el caso de que esto no suceda, no tenemos más remedio que lanzarlas nosotros. Por ejemplo, ¿cómo serán las rectas que se obtienen de las intersecciones de los planos dos a dos?

Con la ayuda de la calculadora la obtención de las ecuaciones de las rectas es una tarea rápida y sencilla por lo que nos deja un tiempo inestimable para la reflexión.

Se determina la recta intersección de los planos dos a dos:

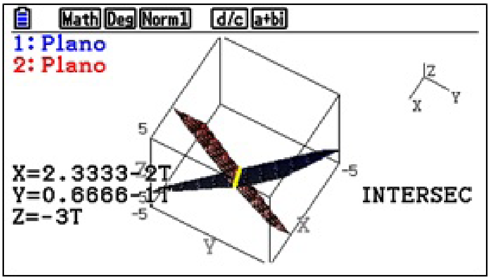


Figura 23

$$r_{12} \equiv \begin{cases} x = \dfrac{7}{3} - 2\alpha \\ y = \dfrac{2}{3} - \alpha \\ z = -3\alpha \end{cases}$$

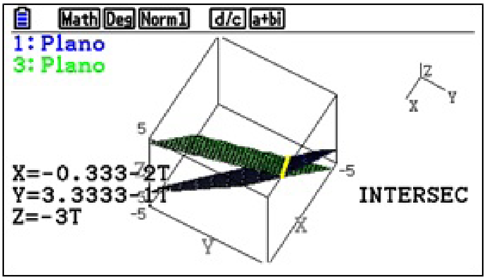


Figura 24

$$r_{13} \equiv \begin{cases} x = -\dfrac{1}{3} - 2\alpha \\ y = \dfrac{10}{3} - \alpha \\ z = -3\alpha \end{cases}$$

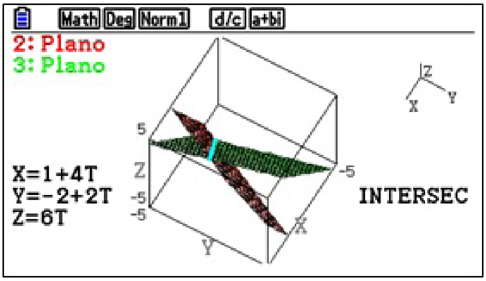


Figura 25

$$r_{23} \equiv \begin{cases} x = 1 + 4\alpha \\ y = -2 + 2\alpha \\ z = 6\alpha \end{cases}$$

De las ecuaciones paramétricas se deduce que las tres rectas son paralelas (observar los vectores directores de las tres).

Se puede comprobar gráficamente que las tres rectes son paralelas:

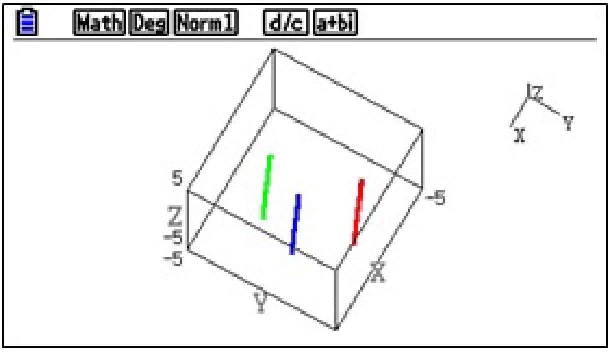


Figura 26

Se puede estudiar ahora la posición relativa de las tres rectes y comprobar que las rectas son paralelas dos a dos:

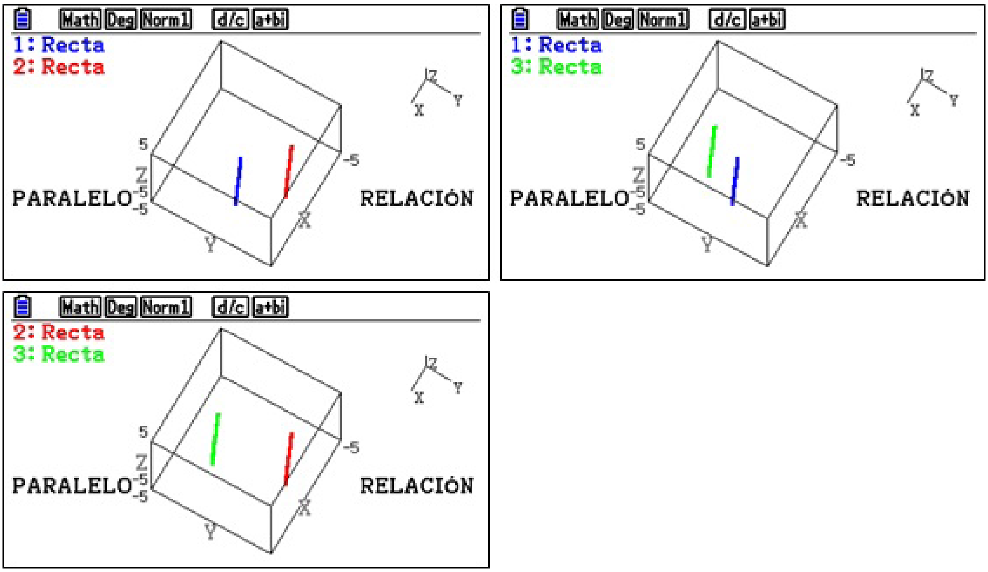


Figura 27

CONCLUSIONES

Analizar los diferentes modelos funcionales; manipular el lenguaje algebraico para resolver situaciones de ámbito científico con el apoyo de medios tecnológicos que ayuden a interpretarlas y dotar de significado las ideas matemáticas; utilizar los elementos de la geometría, sus propiedades y operaciones para resolver situaciones geométricas en contextos reales o realistas y también en contextos académicos; analizar distribuciones estadísticas bidimensionales utilizando los parámetros estadísticos más usuales con la tecnología más adecuadas para tomar decisiones en contextos científicos son, entre otros, contenidos para la evaluación de la competencia matemática, de la competencia digital y de la competencia básica en ciencia y tecnología, dentro del currículo de bachillerato y donde se cita expresamente el uso de la calculadora gráfica.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Contreras, M. (2010). La competencia matemática con la calculadora gráfica Classpad 330. *Epsilón Revista de Educación Matemática, 76*, 9-31.

Dutarte, P, y Verlant, B. (2010). *Mathématiques Terminale.* Vannes: Éditions Foucher.

Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an educational task.* Dordrecht: Reidel Publishing Co.

Freudenthal, H. (1991). *Revisiting mathematics education*. Dordrectht: Kluwer Academic Publishers.

Haese, M., Haese, S., Humphries, M., Kemp, E. y Vollmar, P. (2014). *Mathematics for the international student 10E (MYP5 Extended).* Marleston: Ed Haese Mathematics.

Épsilon - *Revista de Educación Matemática* *2019, nº 103, 89-97*

Los mil y un aportes de GeoGebra al estudio de la Geometría Tridimensional

Laura Sombra del Río,
UIDET IMApEC, Facultad de Ingeniería,
Universidad Nacional de La Plata.

Resumen: *GeoGebra ha alcanzado un gran nivel de popularidad en las aulas de matemática en gran parte del mundo. Uno de los factores clave para su permanencia en la escena educativa es que constantemente se está reinventando e incorporando nuevas posibilidades. En los últimos años, ha tenido un alto grado de desarrollo la vertiente tridimensional del programa, incorporando la Realidad Aumentada y la opción de exportar construcciones para imprimir en 3D. En el presente artículo se ofrece un análisis de estas características, de su potencial didáctico, de cómo pueden complementarse mutuamente y se brindan ejemplos de su utilización en la práctica.*
Palabras clave: *Geometría tridimensional, Visualización, GeoGebra, Realidad Aumentada, Impresión 3D*

The thousand and one contributions of GeoGebra to the study of Three-dimensional Geometry

Abstract: *GeoGebra has reached a high level of popularity in math classrooms all over the world. One of the key factors for its permanence in the educational scene is that it is constantly reinventing itself and incorporating new possibilities. In recent years, the three-dimensional aspect of the program has had a high degree of development, incorporating Augmented Reality and the possibility of exporting constructions to print in 3D. This article offers an analysis of these characteristics, their didactic potential, how they can complement each other and gives examples of their use in practice.*
Keywords: *Tridimensional Geometry, Visualization, GeoGebra, Augmented Reality, 3D printing*

1. INTRODUCCIÓN

El software libre GeoGebra (<www.geogebra.org>) ha alcanzado un gran nivel de popularidad en las aulas de matemática en gran parte del mundo. Esto se debe a numerosos factores: lo sencillo de su utilización, lo atractivo de su interfaz gráfica, la posibilidad de vincular dinámicamente distintas representaciones de los objetos matemáticos, su disponibilidad en distintos idiomas y para diversos dispositivos, la existencia de una comunidad global en torno al programa, entre otros. Pero uno de los principales, es que constantemente se está reinventando e incorporando nuevas características y herramientas. En los últimos años, ha tenido un gran desarrollo la vertiente tridimensional del programa, incorporando la Realidad Aumentada (RA) y la posibilidad de exportar construcciones para imprimir en 3D.

En este artículo se reseñan, en primer lugar, algunos aportes teóricos respecto de la enseñanza de la geometría tridimensional que permitirán fundamentar el uso de estas nuevas herramientas para potenciar el aprendizaje. En segundo lugar, se indicarán las características de la vista gráfica 3D, el modo RA y la exportación para impresora 3D y se brindarán algunos ejemplos de su utilización, situados en un contexto educativo particular: los cursos de matemática de primer año de la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional de La Plata (FI UNLP), República Argentina, en los que se estudian contenidos de Cálculo y de Geometría Analítica.

2. APORTES TEÓRICOS

Las representaciones de los objetos matemáticos constituyen un aspecto central en lo que respecta al aprendizaje de la matemática. De acuerdo con Duval (2006) no es posible acceder a los objetos matemáticos si no es por medio de sus representaciones: “La única forma de acceder y trabajar con ellos es a través de signos y representaciones semióticas” (p. 157). Aprender matemáticas implica reconocer un mismo objeto matemático en sus distintas representaciones, y no confundirlo con ninguna de estas. De allí surge la necesidad de trabajar para cada objeto con distintos registros de representación y aprender a reconocer en el contexto de cada actividad el más adecuado.

Desde otras perspectivas teóricas, se habla del proceso de visualización, en el cual, de acuerdo con Hohenwarter (2014), GeoGebra juega un rol importante, proporcionando visualizaciones dinámicas, ofreciendo representaciones icónicas de los objetos que pueden modificarse fácilmente moviendo elementos con el ratón o el dedo (en el caso de interfaces táctiles). Estas representaciones son fundamentalmente diferentes de las imágenes estáticas, que solamente pueden representar una situación fija, ya que facilitan la exploración y el descubrimiento de propiedades invariantes.

A la hora de estudiar conceptos de la geometría del espacio tridimensional, así como también en el cálculo multivariable, las representación gráfica de los objetos se complejiza, dejándose en numerosas oportunidades a un lado, volcándose a trabajar casi exclusivamente en forma analítica, reconocer sólidos simples y calcular áreas y volúmenes (Andrade Molina & Montecino Muñoz, 2011; Fernández Blanco, Diego-Mantecón, & González Sequeiros, 2019; Galo Sánchez, 2018).

Andrade y Montecino (2011) sostienen que uno de los obstáculos que interfieren con la representación y visualización de los objetos matemáticos tridimensionales, es que suelen presentarse representaciones planas (en perspectiva) y, en muchas ocasiones, prototípicas (siempre desde el mismo punto de vista y en la misma posición). En un sentido similar Fernández Blanco et al (2019) señalan que "en las representaciones planas de los cuerpos tridimensionales existe una pérdida de información que dificulta el análisis de las propiedades de estos objetos" (p. 796).

En este contexto, además de otros, toman relevancia los materiales conocidos como manipulables, tanto físicos como virtuales. De acuerdo con Bujak et al (2013) ambos tienen una incidencia positiva en el proceso de aprendizaje de la matemática, y permiten hacer foco en distintos aspectos, en forma complementaria.

Existen también estudios vinculados a propuestas didácticas que combinan la realización de modelos virtuales y físicos y revelan que "los estudiantes prestan atención a distintas partes del modelo en el entorno físico y digital que se complementan mutuamente" (Lavicza et al., 2018, p. 114). Durante el modelado digital, los estudiantes se concentran en los principios de rotación, traslación y durante el físico, en el funcionamiento de las articulaciones. Los autores sostienen que tanto los modelos físicos como los digitales ayudaron a la visualización la comprensión espacial y facilitaron las mediciones (Lieban & Lavicza, 2017).

En las próximas secciones, se detallan las distintas características del software libre GeoGebra que posibilitan el trabajo en las direcciones propuestas por los autores mencionados en este apartado teórico y se ilustrarán con ejemplos de trabajos en el aula.

3. LA VISTA GRÁFICA 3D DE GEOGEBRA

Esta vista se incorpora a partir de la versión 5 del programa. Permite la representación gráfica de distintos objetos en el espacio tridimensional: puntos, rectas, segmentos, polígonos, curvas, poliedros, superficies, gráficas de funciones de dos variables, etc. Asimismo permite la representación algebraica de muchos de estos objetos: curvas y superficies en forma paramétrica; esferas, planos y cuádricas en forma implícita; todo esto, dinámicamente conectado como ya es costumbre en GeoGebra. Esto posibilita el trabajo con múltiples representaciones en simultáneo.

Una de las posibilidades bonitas de la vista 3D es la de visualizar los objetos con gafas anáglifo. Esto otorga una sensación de realismo que resulta importante para la comprensión de los estudiantes (ver figura 1).

En mis cursos de Cálculo, utilizo esta vista prácticamente desde su lanzamiento. Varias de las aplicaciones que le he dado pueden encontrarse en otros artículos (Del Río, 2016, 2017, 2018), pero aquí me gustaría contar puntualmente una experiencia en la que se ha combinado la utilización de un conjunto de *applets* con el modelado físico de un objeto.

El tema abordado fue el de superficies cuádricas. Desde hacía algún tiempo, venía proponiendo a los estudiantes trabajar con este libro GeoGebra: <https://www.geogebra.org/m/cAZyDQBu>. Aquí los estudiantes pueden visualizar dinámicamente la construcción de las cuádricas a partir de sus trazas, o intersecciones con planos paralelos a los planos coordenados.

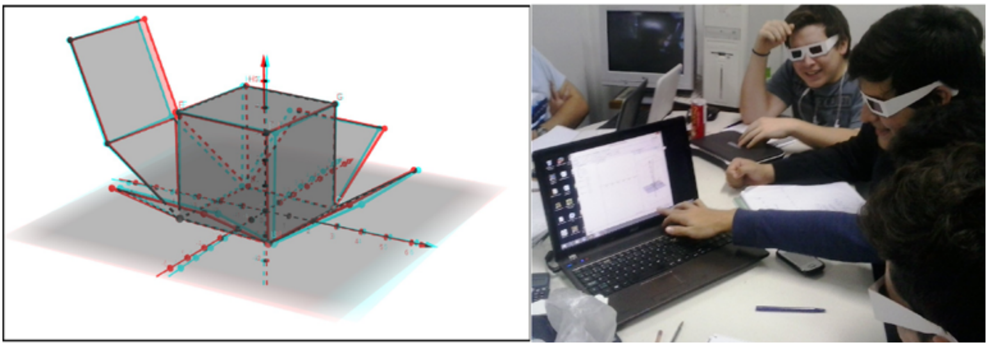


Figura 1. A la izquierda, cómo se ve un objeto en la Vista Gráfica 3D de GeoGebra cuando se encuentra configurada para gafas anáglifo. A la derecha, imagen de estudiantes utilizando las gafas visualizar objetos en 3D

Simultáneamente, otro profesor de nuestra cátedra, Félix Aloé, llevaba a cabo una experiencia que consistía en proponer a los estudiantes la construcción de las trazas de las cuádricas con alambres para luego ensamblar el esqueleto de las mismas. Los estudiantes debían trazar en papel del modo más preciso posible las curvas que obtenían al calcular la intersección entre la superficie y distintos planos. Luego, debían replicar dicha curva con un alambre y finalmente ensamblar el esqueleto de la cuádrica.

Ambas modalidades de trabajo (la de los alambres y el uso del libro GeoGebra) provocaban buena predisposición por parte de los estudiantes y permitían hacer hincapié en distintos aspectos. Inspirada en esta experiencia y en el trabajo de Diego Lieban citado en la introducción, les propuse a los estudiantes una forma de trabajo que combinara ambas aproximaciones.

A cada grupo le tocó una superficie cuádrica. Primero, debían explorarla utilizando el *applet* de GeoGebra correspondiente del libro antes mencionado. Luego, utilizando un juego de construcción que consiste en un conjunto de pajitas y conectores (ver figura 2), debían intentar realizar un modelo físico de la cuádrica que les había tocado. Por último, cada grupo debía pasar al frente con su construcción y explicarla al resto de los compañeros (indicar las curvas obtenidas en cada plano y cómo las fueron ensamblando). En este caso, se trabajó de un modo más cualitativo que en el caso de la construcción con alambres. La información de las curvas que debían construir provino, en este caso, del *applet* de GeoGebra. Se mantuvo de la experiencia con alambre la necesidad de trabajar en forma grupal y colaborativa y

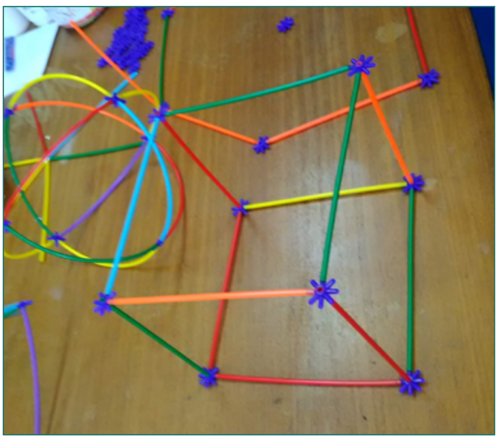


Figura 2. Imágenes del juego que se utilizó para la experiencia

Figura 3. Fotos de los estudiantes realizando la experiencia

la idea del modelado físico. Los estudiantes luego conservaron el libro GeoGebra para poder explorar las otras cuádricas que no les había tocado construir. Tuvieron que poner en juego habilidades comunicativas para exponer frente al resto de la clase lo que habían construido. En la figura 3, se presentan imágenes de la experiencia realizada.

4. REALIDAD AUMENTADA

Una de las herramientas de visualización 3D más recientemente incorporadas por el programa, es la Realidad Aumentada (RA). Si bien esta tecnología es de aparición reciente, presenta un importante desarrollo. Su aplicación en el ámbito educativo, en particular en la enseñanza de la matemática, es objeto de múltiples investigaciones en la actualidad.

De acuerdo con Bujak et al. (2013), el potencial de la RA radica en que permite combinar los objetos físicos con información virtual, potenciando las virtudes del carácter concreto de los manipulativos físicos con la flexibilidad de los virtuales. Estos autores destacan que la RA permite a los estudiantes interactuar con los contenidos educativos en una forma similar a la que utilizan para interactuar con el mundo físico: pueden moverse para cambiar la perspectiva, acercarse y alejarse de los objetos, seleccionarlos, moverlos. Estas interacciones naturales reducen las habilidades requeridas para que los estudiantes puedan comenzar a explorar, en comparación con la preparación previa que a menudo se requiere para interactuar con programas informáticos. Por otro lado, destacan

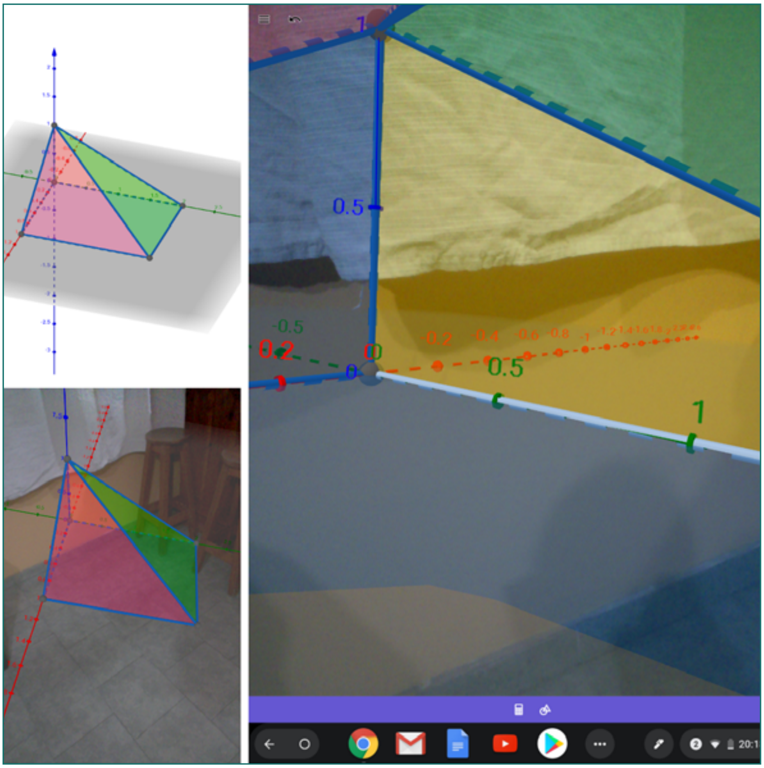


Figura 4. Ejemplo de cómo se observan los objetos matemáticos en el entorno físico gracias al modo RA de GeoGebra. En el último panel, se muestra la vista desde el interior.

que el estudiante puede confundirse, debido a la apariencia concreta de los objetos virtuales: es preciso insistir en que esos objetos virtuales son meras representaciones, como señala Duval.

En el caso de GeoGebra, lo que posibilita la RA es colocar las representaciones gráficas de los objetos matemáticos creados, en el entorno real, a través de la cámara del dispositivo (ver Figura 4). De este modo, los alumnos pueden caminar alrededor para explorar y familiarizarse con los objetos. Además, pueden "meterse dentro" de los mismos (por ejemplo, cuando se trata de sólidos y visualizarlos desde su interior, una perspectiva difícil de conseguir con otras herramientas.

Una de las posibilidades interesantes de esta herramienta es que los estudiantes pueden modelar matemáticamente objetos de la realidad y superponer la representación gráfica de dicho modelo con el objeto real a través de la cámara del dispositivo móvil para comprobar empíricamente la adecuación del modelo y, eventualmente, realizar ajustes. Timoty Brzezinski tiene numerosos ejemplos de esta aplicación, que pueden encontrarse en este libro GeoGebra: <https://www.geogebra.org/m/myquzswq>.

En las asignaturas de Cálculo de la FI UNLP, la incorporación de la RA ha sido muy reciente. Sin embargo, es posible comentar algunas situaciones en las que su utilización ha proporcionado beneficios. Por ejemplo, a la hora de abordar el cálculo de volúmenes de sólidos de revolución, los estudiantes manifiestan múltiples dificultades para comprender aquellos que presentan cavidades. Uno de los primeros que se les propone

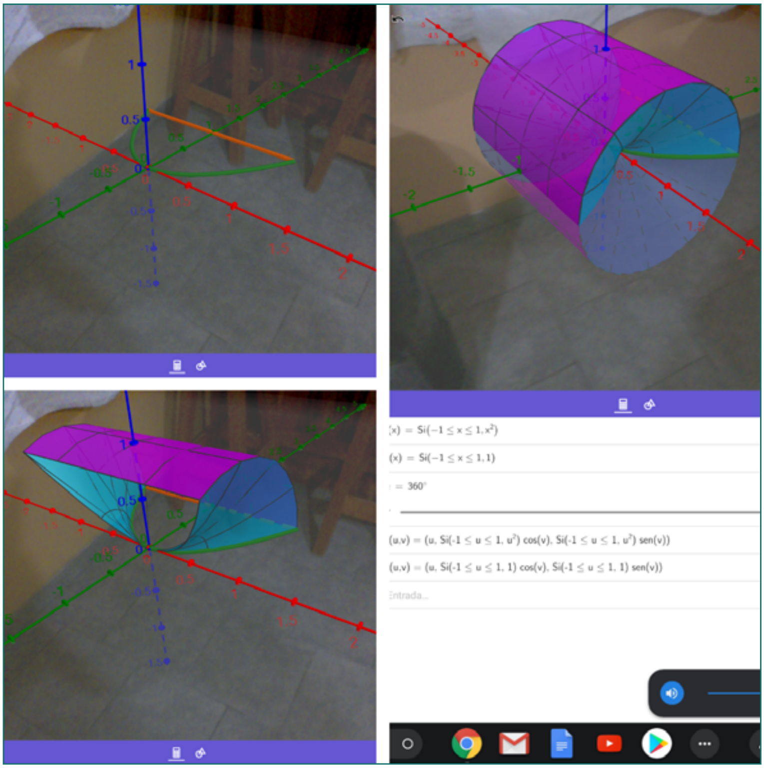


Figura5. Construcción de un sólido de revolución en RA.

resolver es el volumen del sólido que se obtiene al rotar la región limitada por y . La RA les ha permitido visualizar y comprender este sólido al poder meterse dentro de la cavidad y entre medio de las dos superficies de revolución generadas (ver figura 5).

I5. MPRESIÓN 3D

Otra de las últimas novedades en relación a la vista gráfica 3D es la posibilidad de exportar las construcciones al formato STL para luego poder imprimirlas utilizando una impresora 3D. Esta nueva tecnología ya está motivando la creación de nuevas propuestas didácticas e investigaciones en torno al impacto de su integración en el aula.

Reichenberger, Lieban, Russo y Lichtenegger (2019) sostienen que gracias a esta tecnología, tanto docentes como estudiantes pueden experimentar cómo diseñar objetos matemáticos y traerlos a la realidad. Destacan también la importancia de la complementariedad entre la impresión 3D y el uso del software de un modo dinámico: Mientras la primera habilita la exploración táctil y la comparación física con objetos de la vida real, el segundo permite la observación de una variedad de casos con un simple movimiento arrastre.

La posibilidad de crear representaciones de objetos matemáticos táctiles abre también toda una nueva área de investigación relacionada con la accesibilidad de dichos objetos por parte de personas no videntes o disminuidas visuales.

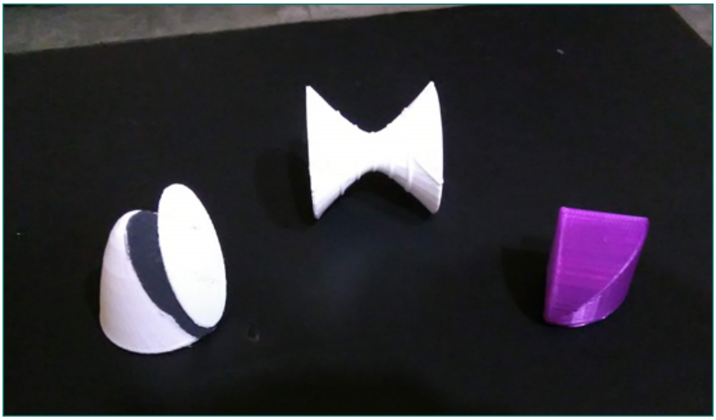


Figura 6. Algunos de los sólidos diseñados para apoyar el aprendizaje de los alumnos de la FI UNLP.

Si bien existen librerías de acceso abierto de donde es posible descargar modelos matemáticos para imprimirlos en 3D, el hecho de poder crear materiales manipulativos a medida, tanto para los docentes como para los estudiantes, ofrece la posibilidad de desarrollar la creatividad y plantea nuevos desafíos matemáticos.

En el caso de los cursos de la FI UNLP, aún no se han realizado experiencias en las cuales sean los estudiantes quienes diseñen las piezas para luego imprimirlas, pero sí se ha comenzado a experimentar con el uso de piezas creadas *ad hoc*, con la ayuda invaluable de Diego Lieban y el grupo de GeoGebra 3D printing. Se han generado para los estudiantes de dicha facultad algunas piezas que representan superficies cuádricas en las que se han destacado las trazas (ver figura 6), así como también algunos sólidos que los estudiantes deben describir en el proceso de aprendizaje de las integrales dobles y triples y frente a los cuales ellos manifiestan enormes dificultades, tanto para su representación, como para su visualización. A modo de ejemplo, se muestran dos: el sólido limitado por dos cilindros circulares de radio 1, uno cuyo eje es el eje x y el otro, de eje, en el primer octante, y el segundo, es el sólido limitado entre un paraboloide y un plano inclinado que pasa por su vértice (ver figura 6). En este segundo caso, se utilizó un imán autoadhesivo y pintura metálica para poder visualizar ese sólido como parte de uno más grande.

CONCLUSIONES

En este artículo se presentaron algunos aportes teóricos que dan cuenta de las dificultades habituales de los estudiantes a la hora de comprender los objetos matemáticos tridimensionales y el rol que juegan los manipulables virtuales y físicos a la hora de afrontar las mismas.

Luego, se presentaron y discutieron las características del software libre GeoGebra que permiten el abordaje de la geometría tridimensional, brindando ejemplos de su utilización en cursos de matemática de primer año en una Facultad de Ingeniería de la República Argentina. En varios casos se destacó la importancia de combinar lo concreto con lo virtual: mientras que lo concreto habilita la exploración táctil y la manipulación física, que no requiere el aprendizaje de lenguajes de software, lo virtual permite la exploración con facilidad de múltiples casos, la mirada al interior de los objetos, la modificación de los mismos.

Se espera haber brindado al lector un panorama amplio sobre la problemática y las diversas posibilidades que abre GeoGebra para su abordaje, y que los ejemplos, tanto propios como los de terceros que fueron mencionados, sirvan como inspiración para la creación de nuevas estrategias didácticas.

REFERENCIAS

Andrade Molina, M., & Montecino Muñoz, A. (2011). La problemática de la tridimensionalidad y su representación en el plano. *XIII Conferenica Interamericana de Educación Matemática*. Recife, Brasil: Comité Interamericano de Educación Matemática.

Bujak, K. R., Radu, I., Catrambone, R., MacIntyre, B., Zheng, R., & Golubski, G. (2013). A psychological perspective on augmented reality in the mathematics classroom. *Computers and Education*, *68*, 536-544. <https://doi.org/10.1016/j.compedu.2013.02.017>.

Del Río, L. (2016). Enseñar y aprender Cálculo con ayuda de la vista gráfica 3D de GeoGebra. *Revista digital Matemática, Educación e Internet*, *17*(1). Recuperado de <https://tec-digital.tec.ac.cr/revistamatematica/paginasgenerales/numanteriores.htm>.

Del Río, L. (2017). Visualization of limits of functions of two variables. En *GeoGebra Global Gathering*. Linz, Austria. Recuperado de https://www.geogebra.org/m/Mvpvu5v6

Del Río, L. (2018). Learning Vector Calculus: How Can GeoGebra Help Us? En *GeoGebra ICM Satellite Conference*. Recuperado de <http://www.im-uff.mat.br/geogebra/icm/geogebra-icm-abstracts.pdf>.

Duval, R. (2006). Un tema crucial en la educación matemática: La habilidad para cambiar el registro de representación semiótica. *La gaceta de la RSME*, *9*(1), 143-168.

Fernández Blanco, T., Diego-Mantecón, J. M., & González Sequeiros, P. (2019). Procesos de Visualización en una Tarea de Generación y Representación de Cuerpos de Revolución. *Bolema*, *33*(64), 768-789. <https://doi.org/10.1590/1980-4415v33n64a16>.

Galo Sánchez, J. R. (2018). Partición prismática de un cubo en seis pirámides triangulares equivalentes. Matemáticas, educación y Sociedad, 1(2), 1-20. Recuperado a partir de <http://mesjournal.es/ojs/index.php/mes/article/view/12>.

Hohenwarter, M. (2014). Multiple representations and GeoGebra-based learning environments. *Union. Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, *39*, 11-18.

Lavicza, Z., Fenyvesi, K., Lieban, D., Park, H., Hohenwarter, M., Mantecon, J. D., & Prodromou, T. (2018). Mathematics learning through Arts, Technology and Robotics: multi- and transdiscpilinary STEAM approaches. En *8th ICMI-East Asia Regional Conference on Mathematics Education* (pp. 110-121). Taiwan.

Lieban, D., & Lavicza, Z. (2017). Geometric modelling inspired by Da Vinci: shaping and adding movement using technology and physical resources. En *CERME 10* (pp. 948-955). Dublin, Irlanda.

Reichenberger, S., Lieban, D., Russo, C., & Lichtenegger, B. (2019). 3D Printing to Address Solids of Revolution at School. En *Bridges Conference* (pp. 493-496).

Épsilon - *Revista de Educación Matemática* **2019, nº 103, 99-117**

RINCÓN "SAPERE AUDE"… ¿resolviendo problemas?

Sixto Romero
Escuela Técnica Superior de Ingeniería
Universidad de Huelva
sixto@uhu.es

1. MATEMÁTICAS EN LA EDAD MEDIA

El papel que juega la historia de las matemáticas en la Edad Media ya sea árabe o latina, es principalmente el de la transferencia. Recopilaron y transmitieron los conocimientos adquiridos en India, Grecia o Bizancio (donde los libros antiguos ya no se estudian como curiosidades sin una gran aplicación fuera de la astrología u "ocultismo"). Esto permitirá que las matemáticas, desde el Renacimiento, encuentren su camino. Se han realizado progresos durante este largo período, pero hay que admitir que no han sido significativos: más importantes son la reelaboración de los viejos conceptos que los avances obtenidos con los nuevos resultados.

1.1. Algún comentario sobre la tradición de la matemática oriental

a) Sobre China

Yijing (Yi-king o Y-king), una antigua obra de filosofía china, contiene nociones matemáticas bastante esquemáticas: se manipula, con los trigramas, la noción de permutación, pero sin teorizarla explícitamente. También hay una forma de numeración binaria (basada en el yin y en el yang), pero también es igualmente muy implícita.

El Zhoubi Suanjing (Rey Chou Pei Suan), de gran antigüedad (ya que el anterior es difícil de fechar, pero probablemente fue compuesto en el transcurso del primer milenio antes de Cristo), está especialmente dedicado a la cálculos aritméticos y astronómicos. Se describen las propiedades de los triángulos rectángulos (con una demostración ilustrada por una gráfica del teorema de Pitágoras), y se usan las fracciones.

Suan Shu Shu (Escritos sobre Computación) y Jiuzhang Suanshu (Las Nueve Secciones - o Nueve Capítulos - sobre Procedimientos Matemáticos) que incluyen trabajos más recientes (el último se completó hacia el comienzo de nuestra era). En el primero, encontramos un método para calcular raíces cuadradas. En cuanto al segundo, aborda de manera más sistemática (y pedagógica) todas las áreas donde intervienen las matemáticas. Se trata, en particular, de la resolución de sistemas de ecuaciones lineales, o la resolución de ecuaciones de segundo grado.

Desde el siglo III, conocemos varios nombres de matemáticos. Podemos mencionar: Liu Hui (Liou Houi), comentarista de las Nueve Secciones, y quien, alrededor de 263, deduce del estudio de un polígono de 172 lados, y da una aproximación del núero π aproximadamente a 3.14159; Zu Chongzhi (Tsu Ch'ung-Chih, 430-501), quien aproxima a π en el intervalo [3.141592, 3.1415927] y especialmente Zhu Shijie (Chou Chi-kie, 1280-1303), con su segundo libro conservado titulado *El precioso espejo de los cuatro elementos* del año 1303, es su trabajo más importante. Con este libro Zhu Shijie llevó el álgebra china al más alto nivel. Incluye una introducción de su método de los cuatro elementos, que se usa para hablar de cuatro cantidades indeterminadas en una ecuación algebraica. Zhu aclaró también como encontrar raíces cuadradas y desarrolló el conocimiento de las series y las progresiones. El prefacio del libro explica como Zhu viajó por China enseñando matemáticas durante 20 años.

Los contactos muy antiguos de los chinos con los griegos, y aquellos más cercanos y más continuos con los indios, hacen posible pensar que la influencia de las matemáticas chinas en los griegos podría haber existido, y que podría haber jugado un papel notable en la evolución de las matemáticas indias. De todos modos, desde el siglo XV, las influencias externas, comenzando con la de Occidente, jugaron masivamente en la dirección opuesta, y las matemáticas chinas terminaron perdiendo su propio carácter.

b) Sobre los Árabes

Tomaron prestados el álgebra y las cifras de la India. Y es probable que en Oriente hayan tomado prestados los gérmenes del conocimiento mostrado por sus matemáticos. De hecho, las matemáticas de China e India ya tienen una larga historia. Los árabes, y los pueblos unidos una vez o de forma duradera a su imperio, conocieron el Siddhânta (que llaman Sindhind) a finales del siglo VIII por las traducciones hechas por Ibn Tariq y Al-Fazari. Llaman a la geometría handasa (o kendes-séh, según las transcripciones), es decir, arte indio. Toman prestada de los indios su numeración escrita, que ya no se debe perfeccionar, y en trigonometría el uso del seno (en lugar de la cuerda) y quizás la tangente.

Desde el reinado de Al-Mammoun (813-834), gracias al trabajo de su bibliotecario, Abu-'Abdallah el-Khârizmî, la herencia matemática de los griegos comienza a ser verdaderamente conocida y enriquecida por el conocimiento adquirido por el Matemáticos indios. Estudia sánscrito Siddhanta, revisa las tablas de Ptolomeo y escribe sobre el álgebra de los tratados que la Edad Media iba a traducir al latín.

Es para el-Khârizmî (cuyo nombre deriva la palabra algoritmo), que el término "álgebra", cuya fortuna era singular, se remonta al principio y que, además, tenía un significado limitado al principio. ; El nombre completo del que deriva esta palabra (al-djebr wa'l moukabala, restitución y oposición) designa originalmente en al-Khwarizmi dos operaciones claramente descritas en Diophantus como las primeras en ser sometidas a las ecuaciones. Una (restitución) consiste en pasar las cantidades negativas de un miembro a otro, de modo que solo queden términos positivos; el otro (oposición), para reducir términos similares en ambos lados.

La composición matemática de Ptolomeo (Almagest) es traducida por El-Ferghani (Alfraganus), en el primer tercio del siglo IX; también construyó un nuevo nilómetro en Egipto y compuso un libro de texto de astronomía; asimismo Abu-Ma'char (Albumaser), de Balkh, las antiguas Bactres.

Al-Hajjaj traduce casi al mismo tiempo que los Elementos de Euclides, y pronto, Thâbit ben Qorra (836-901), cambiador de divisas en Harrân el viejo Carrhae, famoso por la derrota de Craso) llegó a la corte de los califas. , traduce el libro de las secciones cónicas de Apolonio de Pergé y escribe libros de texto para la enseñanza; su hijo y su nieto seguirán sus pasos.

Las traducciones continuaron en el siglo X, pero las primeras obras originales comenzaron a aparecer: El-Battani (Albategnius) erigió mesas astronómicas en Raqqa en el Éufrates, que Lalande todavía apreciaba mucho; impone además, en trigonometría, el uso de senos (inaugurado como hemos visto en India) en lugar de cuerdas, y también produce algunos resultados notables en trigonometría esférica.

Ibn al-Haitham (Alhazen), quien murió en 1038 en El Cairo, por trisección del ángulo y por investigación sobre los dos promedios proporcionales para la duplicación del cubo, resuelve problemas insolubles ante él.

Toûsî, nacido en 1201 en Toûs (Mèchehed, Persa Khorasan), astrólogo de Houlagou, guarda una gran cantidad de manuscritos durante la captura de Bagdad. Él hace que la trigonometría sea una ciencia separada y traduce Euclides.

El poeta persa Omar Khayyam contribuye a la reforma del calendario ordenado por el sultán selyúcida Malak-Châh, apodado Djelâl-ed-dîn, de ahí el nombre de la era de Djelalean; Compuso un tratado sobre álgebra.

Avicenne nos ha dejado un libro sobre cálculo, en el que analiza las operaciones matemáticas y cómo probarlas, especialmente la llamada prueba de nueve.

c) Los latinos

En el Occidente latino, a comienzos de la Antigüedad y la Edad Media hay que mencionar a Ancio Manlio Torcuato Severino (*Boecio*) (480-524), político, filósofo y poeta, autor de *De la consolación de la filosofía*, *De consolatione philosophiae*, obra en la que ahonda sobre el ser humano, la tristeza, la fortuna y la importancia de Dios en la vida del hombre, asimismo, trata temas como la existencia de la maldad.

Representa al neoplatonismo, se inclinó por el estoicismo y las ciencias exactas, y se erigió en uno de los fundadores de la filosofía cristiana de Occidente. También hay bajo su nombre (pero la atribución está en disputa) un *Ars Geometriae*, que contiene en particular una traducción literal de los primeros cuatro libros de Euclides, pero se omitieron las demostraciones. Aproximadamente un siglo después, Isidoro, obispo visigodo de Sevilla, en sus Etimologías, explica que "la geometría tiene el carácter de multiplicación", lo que la distingue de la aritmética "cuyo fundamento es la suma".

Figura 1. Boecio <http://www.cosmovisions.com/mathematiquesChrono.htm>.

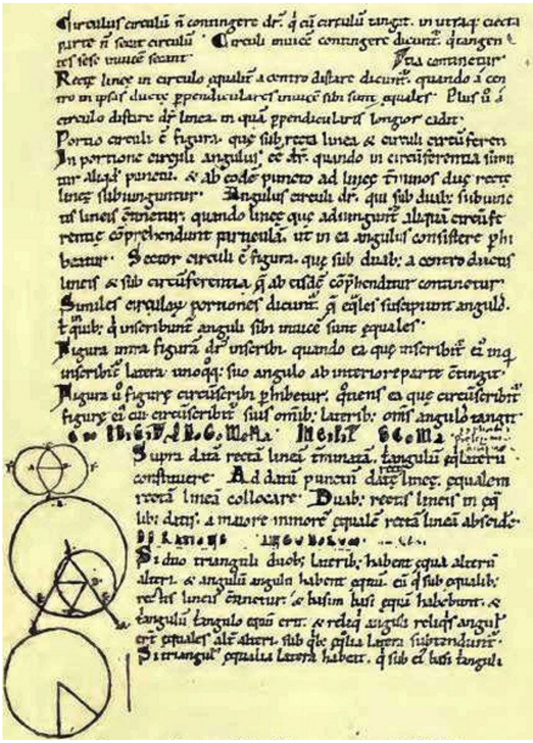


Figura 2. Página de Ars geometriae, atribuida a Boecio <http://www.cosmovisions.com/mathematiquesChrono.htm>.

Boecio está en el origen de la larga y trascendental peripecia que fue la recuperación por Occidente del pensamiento aristotélico, pero las traducciones y los comentarios boecianos durmieron en el sueño de los justos en las bibliotecas altomedievales durante más de trescientos años, hasta la época de Gerberto de Aurillac, quién sería el principal agente de su revitalización. Gerberto de Aurillac (futuro Silvestre II) nació en Auvernia, sur de Francia,en el año 940. Estudió el ***Trivium*** (*Gramática, Lógica y Retórica*) en el monasterio benedictino de su ciudad y allí se sintió llamado a abrazar el estilo de vida que propusiera San Benito cinco siglos antes. Ya siendo monje pudo viajar a la Ciudad Condal para completar su formación. Estudió el ***Quadrivium*** (*Aritmética, Geometría, Astronomía y Música)* bajo la tutela del conde Borrell II, que a su vez nombró a Atón, el Obispo de Vic, su preceptor.

Figura 3. Gerberto de Aurillac (Silvestre II) <https://www.madrimasd.org/blogs/matematicas/tag/gerberto-de-aurillac>.

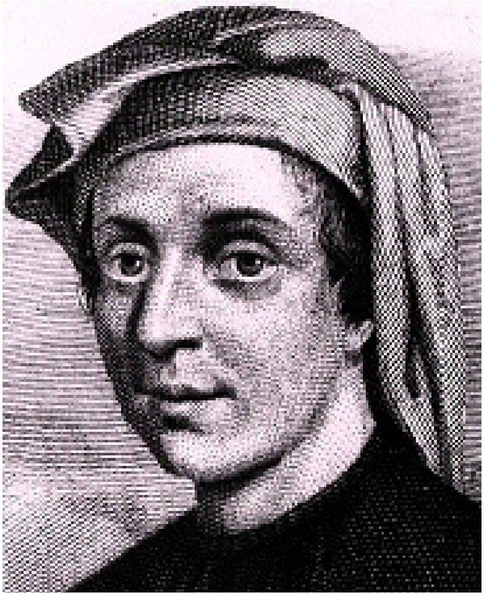


Figura 4. Fibonacci <http://www.cosmovisions.com/mathematiquesChrono.htm>.

Después de un largo período de oscuridad la enseñanza de las matemáticas reaparece en el cuadrivio de las artes liberales de las universidades, siguiendo el modelo pitagórico. Roger Bacon declaró que las matemáticas son el instrumento más poderoso para penetrar en las ciencias, que precede a todas las demás y nos dispone a comprenderlas. Pero muy pocos siguen siendo los que piensan como él. Hildebert du Mans, un poeta de gran renombre en este momento, está más cerca del estado de ánimo del momento, componiendo un poema en quince canciones, llamado el matemático, para ridiculizar la astronomía y los astrónomos. Fue obispo de Le Mans entre 1097 y 1125 y arzobispo de Tours desde 1125 hasta su muerte, el 18 de diciembre 1133. Brillante erudito que comenzó su carrera eclesiástica como ecónomo y canónigo de su catedral.

En el siglo XII, los árabes, fundadores de las universidades de Granada y Córdoba, dieron a conocer en Occidente los Elementos de Euclides. Han recibido de Siria los tesoros de la ciencia griega e india: los transmiten a Europa latina; gracias a las traducciones realizadas especialmente en España. Hermann el Dálmata da a conocer el planisferio de Ptolomeo (1183), Gerard de Cremona traduce el Almagesto (1173). Por su parte, Campano, que vive después del año 1200, comenta Euclides y estudia la teoría de los planetas y la cuadratura del círculo.

Pero es sobre todo las necesidades prácticas del comercio que se están desarrollando, especialmente en Italia, lo que está llegando a un nuevo impulso. Se dice que Leonardo da Pisa, conocido como Fibonacci, en un tratado sobre aritmética (*Liber abaci*) publicado en 1202, incluido el álgebra como se le conocía, propagó el uso de números arábigos e indica el valor relativo o la posición. (Gerbert, alrededor del año 1000, y un poco

Figura. 5. Luca Paciuolo(1445-1514) <http://www.cosmovisions.com/Paciuolo.htm

más tarde Adélard de Bath, ya conocía los números y la aritmética basados en el sistema árabe, pero su introducción en Occidente tuvo un impacto muy limitado). Empleado en la aduana de Bejaia (actual Argelia). Fibonacci recopiló todo lo que se sabía sobre aritmética en Egipto, Grecia, Siria, Sicilia, y redactó un tratado. A partir de ese momento, la ciencia parece haber sido estudiada con cierta asiduidad en Italia, donde podemos mencionar notablemente a Paul dall'Abaco, un matemático inteligente, que representa, con la "ayuda de máquinas", todos los movimientos de las estrellas. De apodo Paul Dagomari, nacido en Florencia a principios del siglo XIV, fallecido en 1375. Es especialmente famoso por la invención de la brújula en Europa, descubrimiento que favoreció los audaces intentos de los navegantes de siglos siguientes. Dall´Ábaco debe ser contado entre los científicos de la época, cuyo trabajo fue muy útil ya que preparó el progreso que no tardó mucho en llevarse a cabo en el vasto dominio del conocimiento matemático.

Contemporáneo de Dante y Petrarca, algunos biógrafos, sin colocarlo en el mismo rango que esos grandes poetas, ensalzaron algunas de sus producciones literarias que, a pesar de su incorrección, reveló un talento notable. Pero Paul debía su fama sobre todo a su conocimiento, prodigioso para su tiempo, en aritmética y geometría: Merecía el apodo de Abaco porque Paolo dall 'Abaco significa literalmente Paul de aritmética. Los viejos biógrafos no dudaron en considerarlo como uno de los primeros matemáticos que practicaron el álgebra.

Uno de los libros más antiguos impreso fue compuesto por Luca Paciuolo o Lucas de Borgo (1445-1526) que apareció en 1470. Contiene un tratado bastante completo para su tiempo en álgebra (Luca Paciuolo fue inicialmente tutor en Venecia, Roma y Florencia, ingresó en la orden franciscana y, bajo el nombre Fray Luca Sancti Sepulchri, enseñó sucesivamente matemáticas en las distintas universidades de Italia.

Sus primeras obras se pierden, pero tenemos su Somma de Arithmetica, Geometria, Proportioni y Proportionalita (Venecia, 1494), una edición de Euclides (1509) y la Divina Proportione (1509). El primero de los trabajos tuvo una influencia considerable en la enseñanza matemática en el siglo XVI, prueba de que satisfacía las necesidades de la época, y es indispensable estudiarlo, si se quiere formar una idea exacta del estado de la ciencia en este momento. Paciuolo no es, de ninguna manera, un creador, pero la aportación que hizo a los escritos inéditos de Leonardo da Pisa (Fibonacci) fueron, en muchos aspectos, una revelación) pero se puede considerar que *la ciencia seguía casi en el mismo estado en que Diophantus la había dejado* (lo cual, además, no parece ser conocido por el autor, que solo se ha inspirado en los árabes). Su aplicación se limitaba a preguntas bastante poco importantes sobre números, y solo podía resolver las ecuaciones de primer y segundo grado.

Figura 6. Nicolas Oresme (1320-1382) http://www.cosmovisions.com/Oresme.htm>.

El resto de Europa pronto volverá a las matemáticas. Pero hay, en el período final de la Edad Media, mentes más curiosas que sabios. Nicolas Oresme dibuja la notación de los expositores. Es un físico y escritor nacido en Normandía, ¿quizás cerca de Caen?, alrededor de 1320 y murió en 1382. Estudió en el Colegio de Navarra y, después de haber recibido un doctorado en teología, obtuvo el título de Gran Maestro en esta casa real en 1355 o 1356. Fue entonces archidiácono de Bayeux, tesorero de la Sainte-Chapelle y decano del capítulo de Rouen. Desde el año 1360, el rey Juan lo había dado como tutor de su hijo (futuro Carlos V). Su alumno lo nombró obispo de Lisieux en 1377 y lo admitió en sus consejos. Murió obispo de Bayeux el 11 de julio de 1382.

John Halifax, más conocido por el nombre de Sacrobosco, da, además de su algoritmo, un tratado de la esfera.

John o Johannes de Holywood [o Holybush = Halifax] (= "Madera sagrada"), conocido Sacrosbosco, Sacrobusto o Sacrobuschus, monje, matemático y astrónomo inglés del siglo XIII. Probablemente nació en Halifax (Yorkshire), completó sus estudios en Oxford, llegó a París alrededor de 1230, profesó matemáticas y astronomía en la Universidad y murió allí en 1256 (¿o en 1244?), según algunos, que lo traducen en este sentido a través de un verso de su epitafio).

Sacrobosco es más conocido por su *Tractatus de sphaera mundi*, una especie de resumen de cuatro capítulos del Almagesto de Ptolomeo y sus comentarios árabes, que tuvo desde el siglo XV hasta el XVII más de 70 ediciones latinas (la primera, Ferrara, 1472, en 4, es muy rara, el último parece ser el de Leiden, 1647) y que, traducido y comentado en todos los idiomas, que se pudo disponer, a modo de moda, en todas las escuelas de la Edad Media.

Las obras de Sacrobosco, *De anni ratione seu de computo ecclesiastico* (Wittemb., 1588) y *De arte numerandi* (Paris, 1498)?) contribuyeron la propagación de la doctrina algorítmica y pequeños tratados sobre el cómputo eclesiástico, sobre el astrolabio, etc.

Los ingleses le atribuyeron erróneamente la introducción de números arábigos. La trigonometría moderna fue fundada en el siglo XV por Regiomontano.

Johannes Müller, conocido como Regiomontanus es un astrónomo, nacido el 6 de junio de 1436 en el pueblo de Unfind, cerca de Koenigsberg en Franconia (que no debe confundirse con la ciudad de Kaliningrado en Rusia, que también llevó este nombre al Período prusiano), de ahí su nombre en latín (que significa Konigsberg como regius mons, Mount Royal), murió el 6 de julio de 1476.

Fascinado por la astronomía a la edad de 14 años y después de recibir su primera instrucción en el hogar paterno, fue a estudiar a la Universidad de Leipzig y tomó un gran

Figura 7. Grabado de 1584, presunto retrato de Johannes de Sacrobosco <https://es.wikipedia.org/wiki/Johannes_de_Sacrobosco>.

Figura. 8. Regiomontano <http://www.cosmovisions.com/mathematiquesChrono.htm>.

entusiasmo por la ciencia astronómica, comenzó a asimilarse. aritmética y geometría, luego fue a Viena, donde esperaba encontrar más instalaciones para dominar su ciencia favorita; siendo todavía un joven adolescente, lo vemos siguiendo las lecciones de Purbach. El maestro, que estaba trabajando en Ptolomeo, le dio a su discípulo varios problemas geométricos para resolver, y le dio muchas oportunidades para practicar el cálculo. Mientras tanto, Regiomontanus leyó a los matemáticos de la antigüedad cuyas obras habían sido traducidas al latín, incluido Arquímedes. Trabajaron juntos en una investigación teórica sobre los puntos principales de la eclíptica, la posición de las estrellas fijas con las que se pueden relacionar los planetas, y descubrieron que las posiciones de Marte podían desviarse dos grados de las que Las tablas asignadas a este planeta.

SAPERE AUDE, GEOMETRÍA

1. Ejercicios de aquí y allá (solución a la Propuesta del número anterior 102)

Desde la óptica de la practicidad, la Geometría Clásica, heredada de los agrimensores egipcios que la aprendieron a su vez de los antiguos sumerios, emplea únicamente la egipcios que la aprendieron a su vez de los antiguos sumerios, emplea únicamente la regla y el compás. Una regla lisa, sin marcas de medida, con un sólo canto y un compás que traza arcos de circunferencia entre puntos previamente hallados, pero no transporta medidas.

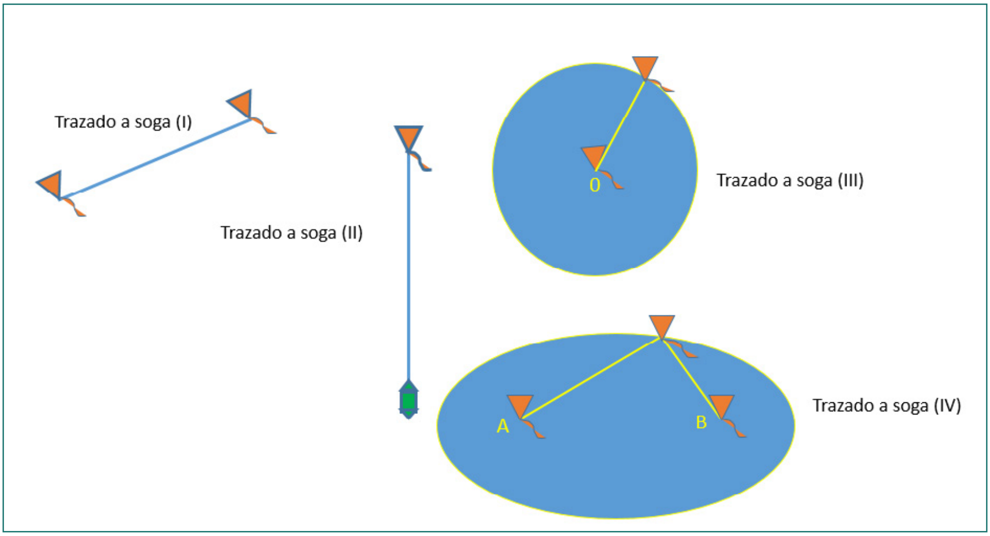


Figura 9. <http://www.signoslapidarios.org/inicio/articulos/historia-de-la-arquitectura/134-geometria-medieval>.

Interesante artículo de Rendón, A. (2013) sobre la Geometría Medieval en el que nos aclara que los problemas constructivos que el geómetra debía solucionar con esta Geometría eran muy variados. Hace una reflexión interesante sobre cómo se entendían y aplicaban en la Edad Media conceptos tan básicos como dimensión, proporción y simetría; igualdad, equivalencia o semejanza.

> "…La geometría medieval utilizaba procedimientos propios de un agrimensor. No necesitaba abstraer la forma de los objetos, ni averiguar los procedimientos para reproducir su forma de modo objetivo.
>
> Quién accedía al grado de magister debía demostrar conocimientos geométricos de cierta abstracción. No se planteaba la naturaleza del espacio, ni si la dimensión de la forma era, o no, la medida del espacio. Para él, el espacio era "todo aquello" exterior a él, y la dimensión, las veces que cabía su vara de medir (el canon que aplicaba a todo lo relativo a la obra) en el objeto. La simetría era una correspondencia en igualdad entre las partes respecto de un punto, una recta o un plano. De este modo, si tomaba como límite comparativo un muro diáfano que cortase en dos partes iguales al edificio, se vería cómo los elementos de una mitad se correspondían en posición, tamaño y disposición, con los elementos de la otra…"

Propuesta 1: dos joyitas geométricas

JOYITA: a) ¿Existe algún triángulo tal que las medidas de sus lados son tres números consecutivos y el ángulo mayor es el doble que el menor? En caso afirmativo, calcular las medidas.

SOLUCIÓN

NOTA: *Interesante ejercicio de geometría, resuelto desde el punto de vista algebraico.*

Paso 1

Sin pérdida de generalidad consideremos que el triángulo es acutángulo.

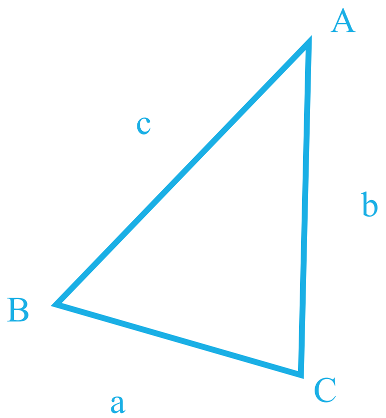


Figura 10. Triángulo acutángulo

Si ***a, b, c*** son sus lados, hay que probar, gracias al teorema del coseno, que $a^2+b^2>c^2, a^2+c^2>b^2, b^2+c^2>a^2$. Por simetrías en los cálculos si suponemos que a ≤ b ≤ c, basta probar $a^2+b^2>c^2$.

Paso 2

Atendiendo a las condiciones iniciales del ejercicio que los lados son consecutivos, sean los lados $a=p-1, b=p, c=p+1$. La desigualdad $a^2+b^2>c^2$ equivale, después de realizar las operaciones oportunas

$$a^2+b^2>c^2 \Leftrightarrow (p-1)^2+p^2>(p+1)^2 \Leftrightarrow (p-1)^2+p^2-(p+1)^2>0 \Leftrightarrow$$

$$p^2-2p+1+p^2-p^2-2p-1>0 \Leftrightarrow p^2-4p>0$$

Paso 3

Si aplicamos el teorema del seno, el ángulo será menor cuánto más pequeño sea el lado opuesto. Así, el ángulo opuesto a *a, suponiendo que es el menor,* si lo denominamos α, el opuesto a *c* será el doble 2α. El opuesto a *b* ser, por lo tanto, π- (2α- α) = π − 3α, y ha de ser

$$\alpha \le \pi - 3\alpha \le 2\alpha \Rightarrow \frac{\pi}{5} \le \alpha \le \frac{\pi}{4}$$

De nuevo, aplicando el teorema del seno, se tendrá

$$\frac{p+1}{p-1} = 2\cos\alpha$$

$$\frac{p}{p-1} = \frac{sen3\alpha}{sen\alpha} = \frac{sen(2\alpha+\alpha)}{sen\alpha} = \frac{sen2\alpha.\cos\alpha + \cos 2\alpha.sen\alpha}{sen\alpha} = \frac{2sen\alpha\cos^2\alpha + (\cos^2\alpha - sen^2\alpha).sen\alpha}{sen\alpha}$$

$$\frac{p}{p-1} = 4\cos^2\alpha - 1$$

Eliminando α en las expresiones, realizando las operaciones siguientes

$$\frac{p+1}{p-1} = 2\cos\alpha\,;\ \frac{p}{p-1} = 4\cos^2\alpha - 1$$

$$\cos\alpha = \frac{1}{2}.\frac{p+1}{p-1} \quad \Rightarrow \frac{p}{p-1} = 4\cos^2\alpha - 1 = 4.\frac{1}{4}\left(\frac{p+1}{p-1}\right) - 1 = \left(\frac{p+1}{p-1}\right)^2 - 1$$

$$\frac{p}{p-1} = \frac{(p+1)^2 - (p-1)^2}{(p-1)^2} = \frac{p^2+2p+1-p^2+2p-1}{(p-1)^2} = \frac{4p}{(p-1)^2}$$

$$\frac{1}{p-1} = \frac{4}{(p-1)^2} \Rightarrow 1 = \frac{4}{p-1} \Rightarrow p-1 = 4 \Rightarrow p = 5$$

Por lo tanto $\cos\alpha = \frac{1}{2}.\left(\frac{5+1}{5-1}\right) = \frac{6}{8} = \frac{3}{4} \Rightarrow \cos\alpha = \frac{3}{4}$

Paso 4

Para tal resultado, en una primera aproximación podemos afirmar que las medidas de los lados del triángulo acutángulo inicial deben ser *a*=4, *b*=5, *c*=6.

En efecto. Comprobemos que es así.

Si existe, el ángulo α debe cumplir las condiciones del Paso 3, es decir que

$$\frac{\pi}{5} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{4}, \text{y por ello} \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \leq \cos\alpha \leq \cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$$

por lo tanto

$$\frac{3}{4} \leq \cos\left(\frac{\pi}{5}\right) \Rightarrow \frac{3}{4} \leq \frac{1+\sqrt{5}}{4} \Rightarrow 3 \leq 1+\sqrt{5} \Rightarrow 2 \leq \sqrt{5}.$$

a) En la primera desigualdad, elevando al cuadrado

$$\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \leq \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} \leq \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{2}{4} \leq \frac{9}{16} \Rightarrow 32 < 36$$

b) La segunda desigualdad nos conduce a

$$\frac{3}{4} \leq \cos\left(\frac{\pi}{5}\right) \Rightarrow \frac{3}{4} \leq 0.80901699437 \Rightarrow 3 \leq 3.23606797748$$

O bien

$\frac{3}{4} \leq \cos\left(\frac{\pi}{5}\right) \Rightarrow \frac{3}{4} \leq \frac{1+\sqrt{5}}{4} \Rightarrow 3 \leq 1+\sqrt{5} \Rightarrow 2 \leq \sqrt{5}$. De aquí elevando al cuadrado 4<5.

De esta manera se demuestra la existencia del triángulo cutos lados miden 4, 5 y 6 unidades de longitud.

JOYITA: b) *Sea M un punto interior del segmento AB. Se construyen cuadrados AMCD y BEHM en el mismo lado de AB. Si N es el segundo punto de intersección de las circunferencias circunscritas a dichos cuadrados probar que:*

a) *Los puntos B, N y C están alineados.*

b) *El punto H es el ortocentro del triángulo ABC.*

SOLUCIÓN

Paso 1

a) En ambas figuras se tiene que el ángulo en N, $\widehat{MNB}$ es de 45º.

a.1) Si tomamos la Fig. 11, se tiene en el triángulo $\overset{\triangle}{CNM}$ que el ángulo $\widehat{N}$ = 135º y en el triángulo $\overset{\triangle}{MNB}$ el ángulo $\widehat{N}$= 45º. Por lo tanto, $\widehat{CNB}$ + $\widehat{MNB}$ = 135º + 45º =180º.

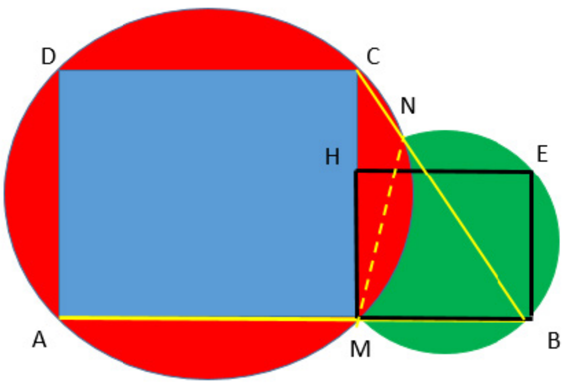


Figura 11. Cuadrados-Circunferencias circunscritas (I)

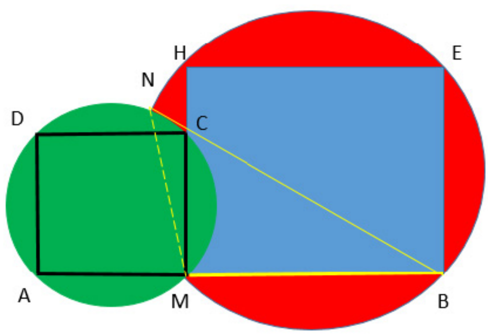


Figura12. Cuadrados-Circunferencias circunscritas (II)

a.2) Análogamente, veamos que sucede en la Fig. 12.

En los triángulos $\overset{\triangle}{MNC}$ y $\overset{\triangle}{MNB}$, el ángulo $\hat{N} = 45^{o}$

Es decir, el ángulo en N es el mismo para los triángulo $\overset{\triangle}{MNC}$ y $\overset{\triangle}{MNB}$, por lo tanto los puntos B, N y C están alineados.

Paso 2

Sabemos que el ortocentro, de un triángulo es el punto donde se cortan las tres rectas que contienen a las tres alturas de un triángulo. Se encuentra en el interior del triángulo si este es acutángulo; coincide con el vértice del ángulo recto si es rectángulo, y se halla en el exterior del triángulo si es obtusángulo.

2.1. En el caso de la Fig. 11, se tiene que $CH \perp AB$. Por otra, $BH \perp ME$ y $ME \parallel AC$, en consecuencia se tiene que $BH \perp AC$. Por tanto, H es el ortocentro del triángulo $\overset{\triangle}{ABC}$.

2.2. A análogo razonamiento llegaríamos en la Fig.12, en la que el ortocentro H está fuera del triángulo $\overset{\triangle}{ABC}$ al ser un triángulo obtusángulo.

SAPERE AUDE, TEORÍA DE NÚMEROS

1. Ejercicios de aquí y allá (solución a la propuesta de los ejercicios del número anterior 102)

Algún comentario sobre la teoría de números, siguiendo fiel a la dinámica establecida en las anteriores entregas de la sección SAPERE AUDE.

Mientras las matemáticas se filtraban del mundo islámico a la Europa del Renacimiento, la teoría de números recibió poca atención seria. El período comprendido entre 1400 y 1650 vio avances importantes en geometría, álgebra y probabilidad, sin mencionar el descubrimiento de los logaritmos y la geometría analítica. Pero la teoría de números se consideraba un tema menor, en gran parte de interés recreativo.

Nos debe llevar a la consideración de destacar que todo lo relacionado con la teoría de números debería utilizarse como un trampolín desde la aritmética hacia la generalización y el formalismo algebraico, y como un medio para proporcionar significados intuitivos de números, variables, funciones y pruebas.

Así, de la teoría de números clásica a la analítica, inspirados por Gauss, otros matemáticos del siglo XIX aceptaron el desafío. Sophie Germain (1776-1831), quien dijo una vez: "…*Nunca he dejado de pensar en la teoría de los números..*", hizo importantes contribuciones al último teorema de Fermat, y Adrien-Marie Legendre (1752-1833) y Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805 –59) confirmó el teorema para n igual a 5, es decir, mostraron que la suma de dos quintas potencias no puede ser una quinta potencia. En 1847, Ernst Kummer (1810-1893) fue más allá, demostrando que el último teorema de Fermat era cierto para una gran clase de exponentes; desafortunadamente, no podía descartar la posibilidad de que fuera falso para una gran clase de exponentes, por lo que el problema seguía sin resolverse.

El mismo Dirichlet (quien supuestamente mantuvo una copia de las *Disquisitiones Arithmeticae d*e Gauss junto a su cama para la lectura nocturna) hizo una profunda contribución al demostrar que, si a y b no tienen un factor común, entonces la progresión aritmética a, a + b, a + 2b , a + 3b, ... debe contener infinitos primos. Entre otras cosas, esto estableció que hay infinitos números primos 4k + 1 e infinitos números primos 4k - 1 también. Pero lo que hizo que este teorema fuera tan excepcional fue el método de prueba de Dirichlet: "…*empleó las técnicas de cálculo para establecer un resultado en la teor*ía de números…".

Esta sorprendente pero ingeniosa estrategia marcó el comienzo de una nueva rama del tema: la teoría analítica de números.

Quiero recordar la última frase de la sección anterior de SAPERE AUDE: "…*Soy consciente de la marcada diferencia entre la matemática escolar y la olímpica. Esta última apunta al ingenio, la creatividad, la invención, el desarrollo de la intuición para responder de manera efectiva a las aspiraciones de la joven generación.* ¡Es, bajo esta idea precisamente, lo que me induce a presentar en esta sección dos joyitas numéricas, a mi juicio muy interesantes, que estoy seguro gustará al lector!...".

Las dos joyitas que presento a continuación es la propuesta en la edición del número 103 que el lector tiene en su mano.

PROPUESTA 2: DOS JOYITAS NUMÉRICAS

JOYITA: a) *Hallar las cuatro* últimas cifras del número 3^{2019}

SOLUCIÓN

Paso 1

¡Lo importante es elegir una estrategia lo más simple posible para la resolución! Utilizaremos el binomio de Newton y las congruencias mod 10^4, al pedirnos las últimas cuatro cifras del número 3^{2019} .

Como $3^2 = 9 = 10 – 1$, podemos escribir 3^{2019} así

$$3^{2019} = 3.3^{2018} = 3.3^{2.1009} = 3.(10-1)^{1009}$$

Paso 2

Apliquemos la fórmula del binomio de Newton que evidentemente nos simplificará muchos los cálculos para calcular una cantidad grande, como es 3^{2019}:

$$3^{2019}=3.3^{2018}=3.(10-1)^{1009}\equiv 3.\left[\binom{1009}{1009}.10^{1009}-\binom{1009}{1008}.10^{1008}+\ldots\ldots\ldots\ldots+\binom{1009}{3}.10^{3}-\binom{1009}{2}10^{2}+\binom{1009}{1}.10-\binom{1009}{0}.1\right]$$

$$3^{2019}\equiv 3.\left[\ldots\ldots\ldots\ldots+\frac{1009.1008.1007}{3.2}.10^{3}-\frac{1009.1008}{2.1}.10^{2}+1009\cdot 10-1\right]=3^{2019}\equiv 3.\left[\left[\ldots.(1009).(168).1007-(500+4)(1000+9)\right]\cdot 100+(1000+9)\cdot 10-1\right]=$$

$$3.\left[\ldots.(100+9).(168).(1000+7)-(500+4)(1000+9)\cdot 100+(1000+9)\cdot 10-1\right]\equiv 3.\left[4000-3600+90-1\right]\text{mod}(10000)\equiv 1467$$

Paso 3

Por lo tanto,

las cuatro últimas cifras se obtienen de la operación elemental

$$3 \text{ x } 489 = 1467$$

Las últimas cuatro cifras son

1467

JOYITA: b) *¿Cuál de los dos* números *es mayor: 888!* ó *300^{599}?*

NOTA: Con una simple demostración se puede ver que el número *888!*, es bastante mayor que 300^{599}. A mi juicio, no tiene mucho interés esta propuesta.

Me permito redirigir el ejercicio proponiendo la resolución de otro que ya no es tan evidente.

De los números 888! y 445^{888},¿cuál es el mayor*?*

SOLUCIÓN

Paso 1

Definamos los números dados por ***P=889*** *y* ***$Q=445^{889}$***

Calculemos el cociente de los dos números para obtener la comparación

$$\frac{P}{Q}=\frac{889!}{445^{889}}$$

De aquí desarrollando el numerador y denominador respectivamente tendremos,

$$\frac{P}{Q}=\frac{1.2.3.4........889}{\underbrace{445.445...............445}_{889}}=\frac{1}{445}.\frac{2}{445}.\frac{3}{445}....\frac{889}{445}$$

Paso 2

Escribamos de otra forma la expresión anterior

$$\frac{P}{Q}=\frac{445-444}{445}.\frac{445-443}{445}....\frac{445-1}{445}.\frac{445}{445}....\frac{445+1}{445}.\frac{444+2}{445}.....\frac{445+444}{445}$$

$$\frac{P}{Q}=\left(1-\frac{444}{445}\right).\left(1-\frac{443}{445}\right)....\left(1-\frac{1}{445}\right).1.\left(1+\frac{1}{445}\right).\left(1+\frac{2}{445}\right).\left(1+\frac{3}{445}\right)....\left(1+\frac{442}{445}\right)\left(1+\frac{443}{445}\right).\left(1+\frac{444}{445}\right)=$$

$$\frac{P}{Q}=\left(1-\left(\frac{444}{445}\right)^2\right)\left(1-\left(\frac{443}{445}\right)^2\right).....\left(1-\left(\frac{1}{445}\right)^2\right)$$

Paso 3

Cada una de las expresiones

$$\left(1-\left(\frac{i}{445}\right)^2\right);\forall i=1,2,......445 \text{ es menor que } 1$$

Por lo tanto,

$$\frac{P}{Q}=\sum_{i=1}^{444}\left(1-\left(\frac{i}{445}\right)^2\right)<1\Rightarrow P<Q$$

Es decir ***889!< 445***^{889}

NOTA: ¡Es un ejercicio al que se le puede sacar mucho jugo. Por ejemplo, plantear esta situación para cualquier par de números

$$P=x!\ ;\ Q=y^z$$

buscando la relación que pueda existir entre ***x, y, z!***

SAPERE AUDE, EJERCICIOS DE AQUÍ Y ALLÁ, PROPUESTAS

Varios ejercicios relativos a la teoría de números y la geometría del triángulo, presentaré en esta ocasión que están recogidos de los propuestos en la Olimpiada Matemática Nacional en España en sus diferentes fases.

¿Por qué creo que es importante dedicar una parte de esta sección a plantear ejercicios de Olimpiada a nivel de Bachillerato?

Es una hermosa tarea ya que podemos:

a) Lograr que a los alumnos les gusten y se inclinen por una matemática atractiva fuera de la enseñanza reglada.

b) Prepararse para la participación en unas Olimpiadas Matemáticas le permite al alumno, generalmente apto para esta disciplina, subsanar las deficiencias que traen para poder abordar satisfactoriamente la materia.

c) Desarrollar las habilidades matemáticas que poseen los alumnos y simultáneamente cubrir los objetivos más allá del curso. (Dichos objetivos rara vez mencionan a las habilidades, reduciéndose a la adquisición de conocimientos y manipulación de fórmulas para aplicaciones en problemas sencillos).

d) Generar una atmósfera propicia para el estudio de las matemáticas. Obviamente esto trasciende al aula, e incluso debería abarcar al medio donde se desenvuelven los estudiantes.

e) Impulsar a los estudiantes que tienen habilidades matemáticas e interés por aprender más profundamente esta ciencia.

Cuando intentamos dar solución a situaciones problemáticas nos damos cuenta de que la tarea no es de un sólo individuo, ni siquiera las soluciones están restringidas al ámbito escolar. Así, con el ánimo de crear una atmósfera propicia para el estudio de las matemáticas e impulsar a los estudiantes más dotados, se puede optar por la realización de diferentes concursos. Éstos requieren invertir mucho tiempo para su organización y la obtención de medios materiales para llevarse a cabo. Por otra parte, estos eventos pueden circunscribirse a los contenidos de las asignaturas, con lo que su utilidad se revierte inmediatamente en el aula; planteándoles al alumnado que la matemática es una ciencia viva.

Propuesta 1: dos joyitas geométricas

a) *En el interior de un cuadrado se construye el triángulo equilátero . Sea el punto intersección de las rectas y . Sea el punto simétrico del respecto de la recta . Se pide demostrar que:*

   1. *El triángulo es equilátero.*
   2. *El triángulo es rectángulo e isósceles.*
   3. *El triángulo es isósceles.*
   4. *el triángulo es equilátero*

b) *En el triángulo MNP, el área S y el ángulo en P son conocidos. Hallar el valor de los lados **m** y **n** para que el lado **p** sea lo más pequeño posible.*

Propuesta 2: dos joyitas numéricas

a) *Demuestra que el número* $\mathbf{2222^{5555} + 5555^{2222}}$ *es múltiplo de 7.*

b) *Se pide encontrar todos los números enteros positivos **n** tales que* $3^n + 5^n$ *es múltiplo de* $3^{n-1} + 5^{n-1}$.

NOTA: Las respuestas pueden enviarla a la dirección electrónica:
sapereaudethales@gmail.com

La revista Epsilon expresa su agradememiento a todas las personas que han colaborado durante el año 2019 en las tareas de evaluación de los artículos. Durante el año 2019 han sido evaluadores:

Agustin Carrillo Albornoz
Alexander Maz Machado
Carmen Léon Mantero
Clara Argudo Osado
Cristina Pedrosa Jesús
Cristina Rodríguez Faneca
David Gutiérrez Rubio
Francisco España
Inmaculada Serrano Gómez
José Carlos Casas del Rosal
José Ivan López
José Ortiz Buitrago
Liliana Tauber
María de los Ángeles Hidalgo Méndez
Maria Jose Madrid Martín
Miguel Villarraga Rico
Noelia Jiménez Fanjul
Oneida Muñoz Ñungo
Pablo Flores
Roberto Vidal
Salvador Guerrero